



**HAL**  
open science

# Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux

Vincent Popie

► **To cite this version:**

Vincent Popie. Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux. Modélisation et simulation. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), 2016. Français. NNT: . tel-01309272

**HAL Id: tel-01309272**

**<https://hal.science/tel-01309272>**

Submitted on 29 Apr 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

---

---

Présentée et soutenue le 14/01/2016 par :

**Vincent POPIE**

**Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées  
dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux.**

---

---

## JURY

M. ERIC BONNETIER  
M. HOUSSEM HADDAR  
M. PIERRE-YVES LAGRÉE  
M. PASCAL BRUEL  
M. JEAN-PAUL VILA  
M. SÉBASTIEN TORDEUX  
MME. ESTELLE PIOT

Professeur des universités  
Directeur de recherche INRIA  
Directeur de recherche CNRS  
Chargé de recherche CNRS  
Professeur des universités  
Maître de conférences  
Ingénieur de recherche ONERA

Président du jury  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Directeur de thèse  
Co-directrice de thèse

---

**École doctorale et spécialité :**

*ED-AA : Dynamique des fluides et Mathématiques appliquées*

**Unité de Recherche :**

*Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF*

**Directeur(s) de Thèse :**

*M. Sébastien TORDEUX et Mme. Estelle PIOT*

**Rapporteurs :**

*M. Houssem HADDAR et M. Pierre-Yves LAGRÉE*



---

# Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux

## Résumé

Cette étude s'inscrit dans les efforts faits par l'industrie aéronautique pour la protection environnementale. Pour cela, un des objectifs principaux est de réduire les émissions de polluants et les émissions sonores des avions. Les émissions polluantes sont liées à la qualité de la combustion qui dépend elle-même de la conception des chambres de combustion. Les émissions sonores sont réduites grâce à des traitements passifs comme les structures absorbantes placées en paroi des moteurs pour diminuer le bruit de soufflante. Pour ces deux applications différentes, on utilise des matériaux perforés. En effet, les matériaux absorbants sont constitués d'une structure en nid d'abeilles surmontée d'une plaque perforée. Dans les chambres de combustion, les perforations permettent l'injection d'un air froid protégeant les parois des hautes températures, mais leur présence peut modifier la caractérisation acoustique de la chambre. L'objectif de cette thèse est de modéliser la réponse acoustique d'un matériau perforé. La taille des perforations étant petite devant les longueurs d'ondes sonores, des techniques de modélisation asymptotique adaptées à la résolution de problèmes multi-échelle peuvent être mises en oeuvre. En effet, ces méthodes permettent de faire le lien entre les effets présents à l'intérieur d'une perforation et la réponse acoustique homogénéisée de la plaque perforée. Dans ces travaux, ce sont les effets visqueux présents dans les perforations qui ont été essentiellement étudiés. Ensuite, des simulations numériques directes ont été réalisées pour vérifier la validité des hypothèses émises lors de la modélisation asymptotique. Ces travaux de thèse ont permis d'améliorer la compréhension de la modélisation de la réponse acoustique des matériaux perforés. De plus, la méthode analytique présentée peut être mise en oeuvre pour des perforations de géométrie complexe.

**Mots-clés :** impédance acoustique, modélisation asymptotique, plaques perforées, simulation numérique directe, homogénéisation.

---

## Asymptotic modeling of the acoustic response of perforated plates in a linear case with a study of viscous effects

### Abstract

This study is part of the effort made by the aeronautic industry to protect the environment. Thus, one of the main objectives is to reduce aircraft polluting emissions and sound emissions. The polluting emissions are linked to the combustion quality which depends on the combustion chamber's design. Noise pollution is reduced thanks to passive treatments such as absorbing structures placed on engine walls. For both applications, perforated plates are used. Indeed, absorbing materials are composed of honeycomb structures topped by a perforated plate. In combustion chambers, cold air is injected through perforations to protect the walls from high temperatures, but the perforations can modify the chamber's acoustic behavior. The objective of this thesis is to model the acoustic response of a perforated material. The perforation size is smaller than the sound wave length, therefore asymptotic modeling techniques adapted to resolving multiscale problems can be implemented. Indeed, these methods allow to link the effects inside the perforation with the homogenized acoustic response of the perforated plate. In this study, the viscous effects inside the perforation have been analysed. Moreover, direct numerical simulations have been performed to verify the asymptotic modeling hypotheses. The findings of this thesis allow to understand the acoustic modeling of perforated materials. Furthermore, the developed analytical method can be implemented for perforations with complex shape.

**Keywords:** acoustic impedance, asymptotic modeling, perforated plates, direct numerical simulation, homogenization.

---



# Remerciements

Je souhaite exprimer ici mes sincères remerciements à l'ensemble des personnes qui ont contribué à la réussite de mes travaux.

Avant tout, je voudrais exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse, Sébastien Tordeux et Estelle Piot, pour l'excellent encadrement dont j'ai bénéficié ainsi que pour leur disponibilité. Je suis très heureux d'avoir pu profiter de leur expertise scientifique et de leurs qualités humaines au cours de ces trois années.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble des membres de mon jury de thèse pour leurs remarques enrichissantes suite à la présentation de mes travaux. Je remercie Housseem Haddar et Pierre-Yves Lagrée pour leur appréciation et leurs commentaires pertinents après la relecture de mon manuscrit. Je remercie également Eric Bonnetier d'avoir présidé le jury ainsi que les autres membres du jury : Pascal Bruel et Jean-Paul Vila.

Merci à l'ensemble du personnel du département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique (DMAE) de l'ONERA et en particulier son directeur Pierre Millan pour m'y avoir accueilli. Je remercie particulièrement les membres de l'unité Instabilité, Transition et Acoustique (ITAC), en y incluant évidemment Daniel Arnal, pour les nombreux échanges enrichissants que nous avons pu avoir tout au long de ces trois ans.

Je remercie également Hélène Barucq et les membres de l'équipe MAGIQUE 3D pour leur accueil lors de mes différentes visites à Pau. Merci à Julien Diaz pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je souhaite remercier Abderrahmane Bendali et M'Barek Fares pour leur aide pendant la thèse, mais aussi pour m'avoir formé aux mathématiques appliquées et pour m'avoir initié au milieu de la recherche.

Un très grand merci à l'ensemble des doctorants qui ont fait de l'ONERA un cadre de travail agréable. Je remercie les « anciens » pour leurs conseils : Bertrand, Cécile, David, Farid, Hélène, Javier, Jean-Michel, Julien, Lucas, Olivier et Sheddia. Je remercie également ceux qui étaient en thèse en même temps que moi : Jonathan, Maxime et Rémi ainsi que ceux à qui il reste encore un peu (ou beaucoup) de chemin à parcourir : Alexandre, Florian, François (x2), Guillaume, Gustavo, Jérémie, Loïc, Maxime, Natacha, Pierre, Rémi et Stéphanie. Je pense aussi aux nombreux stagiaires qui ont passé quelques mois à l'ONERA, avec une mention spéciale pour Julien. Merci également à Hugues, Ludivine, Maxime et Olivier.

Je remercie aussi mes amis pour les bons moments que nous passons tous ensemble. Je pense aux anciens de l'INSA : Anthony, Cédric, Damien, Elodie, Juliette, Romain, Thomas et Vincent

ainsi qu'à la bande de toulousains : Adélaïde, Antoine, Cédric, Emmanuel, Janeth, Jean-Michel et Philippe. J'ai également une pensée pour l'équipe de handball d'Agen.

Mes derniers remerciements vont à ma famille pour leur soutien sans faille. Enfin, j'ai une tendre pensée pour Katja, qui m'a énormément aidé et soutenu, et je l'en remercie profondément.





# Table des matières

Liste des figures	xiii
Liste des symboles	xvii
Introduction	1
<b>1 Etude bibliographique</b>	<b>5</b>
1.1 Le contexte aéronautique et l'utilisation de plaques multi-perforées . . . . .	6
1.2 Hypothèses effectuées pour la modélisation acoustique d'une plaque perforée . . . .	8
1.2.1 La modélisation dans le domaine fréquentiel . . . . .	8
1.2.2 L'interaction entre les perforations . . . . .	9
1.2.3 La modélisation à faible nombre de Helmholtz . . . . .	9
1.3 La réponse acoustique d'une plaque perforée : un problème multi-échelle . . . . .	10
1.3.1 La zone de champ lointain . . . . .	11
1.3.2 La zone de champ proche . . . . .	11
1.3.3 Les raccords entre la zone de champ proche et la zone de champ lointain . .	12
1.3.4 Les conventions de signe . . . . .	13
1.4 L'impédance acoustique et la conductivité de Rayleigh des plaques perforées . . . .	13
1.4.1 L'impédance acoustique d'un matériau . . . . .	13
1.4.2 Somme d'impédances . . . . .	14
1.4.3 Impédance et puissance acoustique . . . . .	15
1.4.4 La conductivité de Rayleigh . . . . .	15
1.4.5 Relation entre l'impédance et la conductivité de Rayleigh . . . . .	16
1.5 Modélisation de la conductivité de Rayleigh et de l'impédance associée . . . . .	16
1.5.1 Les modèles acoustiques . . . . .	17
1.5.2 Les modèles tenant compte des effets visqueux . . . . .	19

1.5.3	Les modèles avec niveau sonore élevé . . . . .	21
1.5.4	Les modèles avec écoulement traversant . . . . .	21
1.6	Les simulations numériques . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Modélisation multi-échelle tenant compte des effets visqueux</b>	<b>27</b>
2.1	Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes . . . . .	28
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	28
2.1.2	Modélisation des fluctuations acoustiques par les équations de Navier-Stokes	29
2.1.3	Adimensionnement des équations . . . . .	30
2.1.4	Equation en zone de champ lointain . . . . .	31
2.1.5	Equation en zone de champ intermédiaire . . . . .	32
2.1.6	Equation en zone de champ proche . . . . .	32
2.2	Développement de la méthode multi-échelle . . . . .	33
2.2.1	Approximation champ lointain . . . . .	34
2.2.2	Approximation en champ intermédiaire . . . . .	34
2.2.3	Approximation en champ proche . . . . .	36
2.2.4	Le raccord des variables de champ lointain et de champ proche . . . . .	37
2.3	Modélisation de la puissance acoustique dissipée par la plaque perforée . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Modélisation théorique des corrections de col</b>	<b>43</b>
3.1	Solution de l'équation de Stokes par une méthode multi-échelle . . . . .	44
3.1.1	Les équations de Stokes en présence d'une paroi . . . . .	44
3.1.2	Le champ extérieur . . . . .	46
3.1.3	Le champ intérieur . . . . .	46
3.1.4	Le raccord des champs extérieur et intérieur . . . . .	48
3.1.5	Ecriture de la solution du problème initial . . . . .	49
3.2	Calcul du travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique . . . . .	50
3.3	Evaluation de l'énergie dissipée par une plaque perforée . . . . .	51
3.3.1	Le calcul à l'intérieur d'une perforation . . . . .	51
3.3.2	Dissipation de l'énergie sur les parois de la plaque perforée . . . . .	53
3.3.3	Discussion des valeurs calculées . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Calcul des corrections de col par la méthode des équations intégrales</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction à la méthode des équations intégrales . . . . .	58
4.2	Application de la méthode des équations intégrales au calcul du champ de pression dans une perforation . . . . .	59
4.2.1	Enoncé du problème initial . . . . .	59

---

4.2.2	Equations intégrales sur les frontières de la perforation . . . . .	61
4.3	Analyse du champ de vitesse et calcul des corrections de col . . . . .	65
4.3.1	Calcul de l'expression des correction de col pour la résistance . . . . .	65
4.3.2	Calcul des vitesses et des corrections de col à l'extérieur de la perforation .	66
4.3.3	Calcul des vitesses et des corrections de col à l'intérieur de la perforation .	69
4.3.4	Corrections de col totales . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Simulations numériques directes avec CEDRE</b>	<b>73</b>
5.1	Choix du domaine de calcul . . . . .	74
5.2	Choix des paramètres numériques de la simulation . . . . .	75
5.2.1	La méthode des volumes finis dans CEDRE . . . . .	75
5.2.2	Définition du maillage . . . . .	77
5.2.3	Choix du pas de temps . . . . .	78
5.2.4	Choix des conditions aux limites et de la source acoustique . . . . .	79
5.3	Visualisation des données temporelles et calcul des spectres . . . . .	79
5.4	Décomposition des ondes stationnaires . . . . .	82
5.5	Calcul de l'impédance de la plaque perforée . . . . .	83
5.6	Discussion des résultats et perspectives . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Problème inverse pour identifier l'impédance d'une plaque</b>	<b>89</b>
6.1	Définition du problème inverse . . . . .	90
6.1.1	Les mesures expérimentales . . . . .	90
6.1.2	Le solveur Elvin . . . . .	91
6.1.3	De Elvin vers Houdini . . . . .	91
6.2	La méthode d'identification . . . . .	92
6.2.1	Etablissement du problème direct . . . . .	92
6.2.2	Enoncé du problème de minimisation . . . . .	93
6.3	Calcul du gradient de la fonction coût . . . . .	94
6.3.1	Calcul du gradient par méthode directe . . . . .	94
6.3.2	Calcul du gradient par méthode adjointe . . . . .	95
6.3.3	Eléments pour le calcul de l'état adjoint . . . . .	96
6.4	Mise en oeuvre de l'algorithme . . . . .	98
6.4.1	Validation de l'algorithme de résolution de la méthode inverse sur un syn- thétique . . . . .	98
6.4.2	Prise en compte de l'onde incidente . . . . .	99
6.4.3	Mise en oeuvre de l'algorithme sur les valeurs expérimentales . . . . .	100

---

<b>Conclusion</b>	<b>101</b>
<b>A Les modèles acoustiques d'impédance pour les géométries complexes</b>	<b>107</b>
A.1 Perforation conique . . . . .	107
A.2 Perforation inclinée . . . . .	108
A.2.1 Ouvertures circulaires . . . . .	108
A.2.2 Ouverture elliptique . . . . .	108
<b>B Le calcul de la dissipation d'énergie par une plaque perforée</b>	<b>111</b>
B.1 Calcul du travail des efforts visqueux dans une couche limite acoustique . . . . .	111
B.2 Calcul des deux champs de vitesse théoriques . . . . .	114
B.2.1 La formule de Copson . . . . .	114
B.2.2 Calcul du champ de vitesse par l'approximation de Kelvin . . . . .	114
B.2.3 Calcul du champ de vitesse par l'approximation de Dirichlet . . . . .	117
<b>C Propagation unidimensionnelle avec une condition d'impédance</b>	<b>119</b>
C.1 Modélisation de la propagation unidimensionnelle dans un guide d'onde . . . . .	119
C.2 Sortie non réfléchissante . . . . .	120
C.3 Dans le cas d'une réflexion totale en sortie . . . . .	121
<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Liste des figures

1.1	Traitement acoustique de paroi (« liner ») utilisé dans les turboréacteurs. (image extraite de la thèse de Roche [50]). . . . .	7
1.2	Chambre de combustion TURBOMECA (image extraite de la thèse de Most [35]). . . . .	8
1.3	La géométrie d'une plaque perforée . . . . .	10
1.4	Schéma de la zone de champ lointain. . . . .	11
1.5	Schéma de la zone de champ proche. La zone grise représente la plaque perforée. . . . .	12
1.6	Schéma d'un liner . . . . .	14
1.7	Schéma montrant la décomposition des conductivités de Rayleigh. . . . .	18
1.8	Visualisation de lâchers tourbillonnaires par Tam et collab. [57] . . . . .	24
1.9	Visualisation de la convection des tourbillons par Tam et collab. [59] . . . . .	25
1.10	Effet de l'augmentation du niveau sonore de l'onde incidente (thèse de J-M Roche [50]) . . . . .	26
2.1	Schéma de la zone de champ proche . . . . .	38
3.1	Schéma de la couche limite acoustique au voisinage d'une plaque plane . . . . .	44
3.2	Profil de vitesse au voisinage d'une plaque plane . . . . .	45
3.3	Profil du champ de vitesse (pointillé bleu) à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite acoustique (représentée en vert) au voisinage d'une perforation. . . . .	52
3.4	Schéma des différents domaines définis au voisinage de la perforation . . . . .	53
4.1	Schéma du domaine au voisinage de la perforation . . . . .	60
4.2	Schéma des différents domaines définis au voisinage de la perforation . . . . .	62
4.3	Dérivée tangentielle de $u$ à l'extérieur de la perforation (sur $\Sigma^+$ ). La position $r = 0$ correspond à l'axe de la perforation, et $r = 1$ à son bord . . . . .	68
4.4	Comportement asymptotique de la dérivée tangentielle de $u$ . . . . .	68
4.5	Corrections de col à l'extérieur de la perforation . . . . .	69

4.6	Dérivée tangentielle de $u$ à l'intérieur de la perforation . . . . .	70
4.7	Correction de col calculée à l'intérieur de la perforation . . . . .	70
5.1	Coupe longitudinale du domaine de calcul. . . . .	74
5.2	Schéma représentant le raffinement du maillage au voisinage de la perforation . . . . .	78
5.3	Evolution temporelle de la pression et de la vitesse axiale enregistrée par le capteur numérique 5. . . . .	80
	(a) pression . . . . .	80
	(b) vitesse . . . . .	80
5.4	Spectre de la pression et de la vitesse axiale enregistrée par le capteur numérique 5. . . . .	81
	(a) Spectre de la pression . . . . .	81
	(b) Spectre de la vitesse . . . . .	81
5.5	Evolution temporelle et spatiale du débit volumique à l'intérieur de la perforation . . . . .	81
	(a) Evolution temporelle du débit volumique dans trois sections . . . . .	81
	(b) Phaseur du débit volumique dans la perforation . . . . .	81
5.6	Phaseurs de pression . . . . .	82
5.7	Pression champ lointain calculée par la méthode des moindres carrés . . . . .	84
5.8	Comparaison des vitesses champ lointain reconstruites avec le débit volumique dans la perforation . . . . .	84
5.9	Champs de pression calculés à partir des différentes valeurs d'impédance . . . . .	87
6.1	Schéma du banc B2A. . . . .	90
	(a) Vue globale du banc B2A . . . . .	90
	(b) Zoom sur la cellule d'essai . . . . .	90
6.2	Schéma de la configuration expérimentale où la zone de mesures expérimentales est notée $\Omega_{\text{obs}}$ . La plaque perforée est représentée en rouge, et la zone perforée est montrée avec des rayures blanches. . . . .	91
6.3	Schéma du domaine de calcul . . . . .	92
6.4	Calcul de la valeur $h_j$ . . . . .	98
	(a) Partie réelle . . . . .	98
	(b) Partie imaginaire . . . . .	98
6.5	. . . . .	99
	(a) Itération 1 . . . . .	99
	(b) Itération finale . . . . .	99
6.6	Impédance identifiée par les deux algorithmes . . . . .	100
	(a) Partie réelle de l'impédance . . . . .	100
	(b) Partie imaginaire de l'impédance . . . . .	100

---

A.1	Perforation conique et perforation inclinée avec des ouvertures circulaires. . . . .	107
A.2	Perforation inclinée avec ouverture elliptique. Image extraite de l'article [25] de Laurens et collab. . . . .	109
A.3	Ouverture et section transverse de la perforation. Image extraite de l'article [25] de Laurens et collab. . . . .	109
C.1	Propagation dans un guide d'onde . . . . .	119
C.2	Propagation dans un guide d'onde avec une sortie non-réfléchissante . . . . .	120
C.3	Propagation dans un guide d'onde avec paroi réfléchissante . . . . .	121



# Liste des symboles

$\mathbf{x}$	position
$t$	temps
$p$	pression acoustique
$\mathbf{v}$	vitesse acoustique
$Q$	débit volumique
$\lambda$	longueur d'onde
$\omega$	pulsation acoustique
$k$	nombre d'onde
$c_0$	vitesse du son dans l'air
$Z_w$	impédance acoustique de transmission
$R_{Z_w}$	résistance
$\chi_{Z_w}$	réactance
$Z_o$	impédance acoustique d'une perforation
$K_R$	conductivité de Rayleigh
$\mathcal{P}$	puissance acoustique active
$\mathcal{R}$	coefficient de réflexion
$\gamma$	admittance adimensionnée
$\rho$	masse volumique
$T$	température
$e$	énergie interne
$s$	entropie
$\mu$	viscosité dynamique
$\Sigma$	tenseur des contraintes
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses

---

<b>d</b>	tenseur taux de déformation
<b>q</b>	flux de chaleur
<i>W</i>	travail des efforts visqueux
<i>h</i>	épaisseur de la plaque perforée
<i>d</i>	diamètre d'une perforation
<i>r</i> <sub>0</sub>	rayon d'une perforation
<i>l</i>	distance entre deux perforations
$\sigma$	porosité de la plaque perforée
$\Delta h$	correction de col
<i>L</i> <sub>c</sub>	longueur caractéristique
He	nombre de Helmholtz
Sto	nombre de Stokes
St	nombre de Strouhal
<b>n</b>	vecteur normal
<i>j</i>	nombre imaginaire
$\Re(c)$	partie réelle d'un nombre complexe <i>c</i>
$\Im(c)$	partie imaginaire d'un nombre complexe <i>c</i>
<i>c</i> <sup>*</sup>	conjugué d'un nombre complexe <i>c</i>
$\hat{p}$	phaseur : $p(\mathbf{x}, t) = \Re(\hat{p}(\mathbf{x})e^{j\omega t})$
$\tilde{p}$	variable champ lointain
$\check{p}$	variable champ intermédiaire
$\overset{\star}{p}$	variable champ proche
$\hat{\hat{p}}$	variable à l'intérieur de la couche limite acoustique

# Introduction

La protection environnementale est un enjeu permanent pour l'industrie aéronautique. Le conseil européen ACARE a publié en 2001 des recommandations visant à réduire le bruit perçu de 50 %, les émissions de CO<sub>2</sub> de 50% et d'oxydes d'azote de 80 % entre les années 2000 et 2020. Récemment, de nouveaux objectifs pour 2050 visant à poursuivre les efforts faits jusqu'à présent ont été publiés.

Pour réduire les émissions de bruit d'un aéronaf, une des techniques possibles est l'utilisation de traitements passifs pouvant être disposés à différents endroits de l'appareil. Par exemple, des structures absorbantes sont placées en paroi des moteurs afin de réduire le bruit de soufflante. Ces structures sont constituées d'un élément central surmonté d'un matériau métallique perforé.

Les structures perforées sont également utilisées dans les chambres de combustion pour une toute autre application. En effet, il y a plusieurs milliers de perforation sur les parois des chambres de combustions afin de permettre l'injection d'un air froid protégeant le matériau des hautes températures générées par la combustion. Afin de réduire les émissions de polluants, la combustion s'opère près de la limite pauvre d'extinction de la flamme. Dans ces conditions, la flamme est sensible aux perturbations acoustiques et il existe un risque de génération d'instabilités thermo-acoustiques. C'est pourquoi il est primordial de caractériser la réponse acoustique de la chambre de combustion et les perforations présentes sur les parois doivent être prises en compte.

Que ce soit pour les matériaux absorbants ou pour les chambres de combustion, il donc est nécessaire de modéliser la réponse acoustique d'une paroi perforée. Elle est caractérisée par une grandeur homogénéisée qu'on appelle l'impédance acoustique. Cette modélisation est complexe à cause du faible diamètre des perforations (inférieur au millimètre), de leur géométrie ainsi que de leur très grand nombre. De plus, suivant les conditions d'utilisation de ces plaques, différents phénomènes physiques doivent être considérés, par exemple la viscosité, les niveaux sonores élevés ou la présence d'un écoulement traversant.

De nombreuses études ont été réalisées pour modéliser l'impédance acoustique. Rayleigh [47] a étudié l'effet d'une petite ouverture dans une paroi rigide lors de son étude des résonateurs de Helmholtz. Il a cependant négligé les effets visqueux présents à l'intérieur de la perforation. Pour en tenir compte, Crandall [9] a résolu les équations de Stokes instationnaires à l'intérieur d'un cylindre. Toutefois, son modèle est incomplet car il ne tient pas compte de l'effet des extrémités des perforations. Après une étude expérimentale, Ingard [19] a proposé un modèle empirique pour prendre en compte ces effets. Ces résultats sont récapitulés par Melling [32] qui a également développé un modèle d'impédance tenant compte des niveaux sonores élevés. On peut qualifier l'ensemble de ces modèles de semi-empiriques. En effet, les effets à l'intérieur de la perforation

sont modélisés analytiquement mais les effets à leurs extrémités ont été déduits de résultats expérimentaux pour des configurations précises. De plus, les hypothèses d'homogénéisation ne sont pas clairement établies dans ces différentes études. Bendali et collab. [3] ont récemment utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés pour développer un modèle homogénéisé d'impédance acoustique. Ainsi, ils ont pu développer des modèles analytiques pour des configurations géométriques complexes [25, 26] telles que des perforations inclinées ou coniques. Cependant, les effets visqueux ne sont pas pris en compte dans ces modèles. Sanchez-Palencia [53] avait utilisé les méthodes d'analyse asymptotique en tenant compte des effets visqueux. Cela a permis de justifier l'homogénéisation de la réponse acoustique d'une plaque perforée dans ce cas compliqué. Toutefois, il n'a pas développé de modèles analytiques d'impédance.

En résumé, il existe d'une part des modèles semi-empiriques tenant compte de différents effets physiques complexes et d'autre part des modèles analytiques n'en tenant pas compte. Les modèles semi-empiriques ont été en partie élaborés à partir de résultats expérimentaux et ne sont valides que pour une configuration géométrique précise. De plus, les hypothèses sous-jacentes à la modélisation n'y sont pas clairement expliquées. Ce n'est pas le cas des modèles analytiques qui ont été développés pour des géométries complexes, et où le raisonnement est clairement établi.

C'est ce qui justifie cette étude. Elle consiste à utiliser les méthodes d'analyse asymptotique pour expliciter les hypothèses d'homogénéisation de la réponse acoustique d'une plaque perforée soumise à différents effets physiques. En particulier, cette étude tiendra compte des effets visqueux au voisinage des perforations.

Après une étude bibliographique (chapitre 1), la démarche a consisté à faire une analyse dimensionnelle des équations mises en jeu dans la modélisation de la réponse acoustique d'une plaque perforée en tenant compte des effets visqueux. Cette étude est nécessaire avant l'utilisation des méthodes d'analyse asymptotique. Celles-ci sont adaptées à la modélisation multi-échelle des phénomènes. En effet, les équations sont établies pour plusieurs échelles géométriques dans lesquelles les effets physiques prédominants sont différents. L'utilisation de ces méthodes a eu pour but de raccorder les différentes échelles afin d'établir le lien entre la réponse homogénéisée de la plaque perforée et les effets présents à l'intérieur des perforations et en particulier, la relation entre la puissance acoustique active dissipée à travers la plaque perforée et l'énergie dissipée par viscosité au voisinage d'une perforation (chapitre 2).

L'étape suivante a consisté à modéliser analytiquement la dissipation d'énergie par viscosité au voisinage d'une perforation. Pour cela, nous avons considéré les effets visqueux présents uniquement dans une région de faible épaisseur (appelée couche limite acoustique) localisée à proximité des parois. Cette hypothèse permet alors d'exprimer le travail des efforts visqueux à l'intérieur de la couche limite en fonction du champ extérieur à celle-ci. Le calcul du champ extérieur a été développé analytiquement sur les parois des perforations et de la plaque perforée afin d'établir l'expression de la dissipation de l'énergie par viscosité au voisinage des perforations (chapitre 3). Des simulations numériques ont également été mises en oeuvre pour calculer numériquement le champs extérieur à la couche limite acoustique. Pour cela, nous avons utilisé le code CESC du CERFACS qui est basé sur la méthode des équations intégrales. Les résultats analytiques et numériques ont alors pu être comparés (chapitre 4).

Dans le but de vérifier les hypothèses de modélisation, et notamment les raccords entre les différentes échelles, nous avons calculé la réponse acoustique d'une plaque perforée en tenant compte des effets visqueux par simulations numériques directes. Pour cela, nous avons utilisé le code CEDRE

de l'ONERA, qui résout les équations de Navier-Stokes compressibles. Nous avons également explicité une méthodologie pour calculer l'impédance à partir des résultats numériques et nous l'avons comparée aux modèles théoriques (chapitre 5).

Une méthode inverse a également été mise en place afin de calculer l'impédance d'une plaque perforée à partir de mesures expérimentales. Pour cela, des simulations numériques ayant pour but de reproduire les conditions expérimentales ont été réalisées. L'effet de la plaque perforée y est modélisé par une condition d'impédance, dont la valeur est l'inconnue du problème inverse. Nous avons explicité deux méthodes afin de résoudre ce dernier. Après l'utilisation de l'algorithme, une comparaison des valeurs identifiées avec un modèle théorique a été faite (chapitre 6).



# Etude bibliographique

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Le contexte aéronautique et l'utilisation de plaques multi-perforées . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Hypothèses effectuées pour la modélisation acoustique d'une plaque perforée . . . . .</b>	<b>8</b>
1.2.1	La modélisation dans le domaine fréquentiel . . . . .	8
1.2.2	L'interaction entre les perforations . . . . .	9
1.2.3	La modélisation à faible nombre de Helmholtz . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>La réponse acoustique d'une plaque perforée : un problème multi-échelle</b>	<b>10</b>
1.3.1	La zone de champ lointain . . . . .	11
1.3.2	La zone de champ proche . . . . .	11
1.3.3	Les raccords entre la zone de champ proche et la zone de champ lointain . . . . .	12
1.3.4	Les conventions de signe . . . . .	13
<b>1.4</b>	<b>L'impédance acoustique et la conductivité de Rayleigh des plaques perforées</b>	<b>13</b>
1.4.1	L'impédance acoustique d'un matériau . . . . .	13
1.4.2	Somme d'impédances . . . . .	14
1.4.3	Impédance et puissance acoustique . . . . .	15
1.4.4	La conductivité de Rayleigh . . . . .	15
1.4.5	Relation entre l'impédance et la conductivité de Rayleigh . . . . .	16
<b>1.5</b>	<b>Modélisation de la conductivité de Rayleigh et de l'impédance associée .</b>	<b>16</b>
1.5.1	Les modèles acoustiques . . . . .	17
1.5.2	Les modèles tenant compte des effets visqueux . . . . .	19
1.5.3	Les modèles avec niveau sonore élevé . . . . .	21
1.5.4	Les modèles avec écoulement traversant . . . . .	21
<b>1.6</b>	<b>Les simulations numériques . . . . .</b>	<b>24</b>

---

## 1.1 Le contexte aéronautique et l'utilisation de plaques multi-perforées

La part des émissions de CO<sub>2</sub> et d'oxydes d'azote (NO<sub>x</sub>) produites par l'homme dans le secteur des transports aériens est inférieure à 3 %. Cependant, le trafic aérien augmente de 5 % par an. Pour éviter que les émissions augmentent avec la même rapidité et permettre à l'industrie aéronautique européenne d'être plus compétitive sur le long terme, le conseil européen ACARE (Advisory Council for Aeronautics Research in Europe) a publié en 2001 de nombreuses recommandations. Dans ce rapport, intitulé « European aeronautics : a vision for 2020 <sup>1</sup> », les objectifs pour la protection environnementale sont les suivants : réduction du bruit perçu de 50 % et réduction des émissions de CO<sub>2</sub> de 50% et d'oxydes d'azote de 80 % entre les années 2000 et 2020. Pour soutenir ces objectifs, l'Europe a lancé deux programmes de recherche européens, Clean Sky en 2008 et Clean Sky 2 en 2014. Récemment, le conseil ACARE a publié des objectifs pour 2050 dans un nouveau rapport : « Flightpath 2050. Europe Vision for Aviation <sup>2</sup> ». La réduction du bruit perçu devra être de 65 % et la réduction des émissions de CO<sub>2</sub> et de NO<sub>x</sub> devra être respectivement de 75 et 90 %.

Le bruit d'un avion est essentiellement dû aux moteurs et à l'interaction entre le fluide et la structure (bruit de cellule, bruit de train). Dans les turboréacteurs, on peut mentionner spécifiquement les sources de bruit suivantes : le bruit de soufflante, le bruit de combustion, le bruit des turbines et le bruit de jet. Lors du décollage et de l'approche avant l'atterrissage, les sources de bruit dominantes sont différentes. Au décollage, les principales sources de bruit sont le bruit de soufflante et le bruit de jet. A l'approche, ce sont la soufflante, les dispositifs hypersustentateurs et le train d'atterrissage qui sont les facteurs de bruit dominant. Pour réduire le bruit émis par les turboréacteurs d'un avion, deux types de traitements acoustiques peuvent être utilisés, les traitements actifs et les traitements passifs. Les traitements actifs sont basés sur l'utilisation de sources auxiliaires dans le but de créer des interférences destructrices. Les traitements passifs consistent à modifier la forme ou le matériau choisi lors de la conception des turboréacteurs. On peut citer les tuyères à chevrons pour réduire le bruit de jet ou les structures absorbantes placées en paroi du moteur pour diminuer le bruit de soufflante. Ces structures absorbantes sont des structures sandwichs composées de peaux collées de part et d'autre d'un élément central [50]. L'élément central peut être en mousse plastique, bois de balsa ou en nid d'abeilles. Les peaux peuvent être métalliques ou en matériau composite. Lorsque la peau supérieure est perforée, la structure devient absorbante acoustiquement. La figure 1.1 présente une structure absorbante en nid d'abeilles.

Pour limiter les émissions de CO<sub>2</sub>, la combustion doit être optimale ce qui implique des pressions et des températures élevées dans la chambre de combustion (2000 K). Les matériaux constituant sa paroi doivent donc être protégés par des techniques de refroidissement. La méthode utilisée actuellement est appelée « film cooling ». Il s'agit d'injecter de l'air froid pour créer une barrière thermique entre la paroi et le foyer de la chambre de combustion. Ainsi, de nombreuses perforations de faible diamètre (environ 500 microns) sont présentes sur la surface de la paroi de la chambre de combustion pour permettre l'injection de l'air froid (voir figure 1.2).

Pour garantir une combustion optimale, il faut également que le mélange d'air et de kérosène gazeux soit homogène et dans des proportions stochiométriques. Cependant, ces conditions favorisent la production des oxydes d'azote. La solution envisagée est d'opérer la combustion près de la limite pauvre d'extinction de la flamme. Dans ces conditions, la flamme est sensible aux perturbations acoustiques et il existe un risque de génération d'instabilités thermoacoustiques. Une caractérisation

1. [http://ec.europa.eu/research/transport/publications/items/european\\_aeronautics\\_\\_a\\_vision\\_for\\_2020\\_en.htm](http://ec.europa.eu/research/transport/publications/items/european_aeronautics__a_vision_for_2020_en.htm)

2. <http://ec.europa.eu/transport/modes/air/doc/flightpath2050.pdf>



FIGURE 1.1 – Traitement acoustique de paroi (« liner ») utilisé dans les turboréacteurs. (image extraite de la thèse de Roche [50]).

acoustique de la chambre de combustion doit être menée et les perforations sur la paroi de la chambre doivent être prises en compte lors de cette caractérisation.

Que ce soit pour la conception des liners acoustiques ou des chambres de combustion, il est donc nécessaire de modéliser la réponse acoustique d'une plaque perforée. Celle-ci dépend des caractéristiques géométriques de la plaque :

- son épaisseur  $h$  ;
- la géométrie des perforations (cylindrique, elliptiques, coniques) ;
- le diamètre des perforations  $d$  ;
- l'inclinaison des perforations ;
- le taux de perforation  $\sigma$  (également appelé porosité) ;
- la forme du réseau de perforation.

A l'ONERA, de nombreuses études ont été menées pour caractériser expérimentalement et numériquement la réponse acoustique des liners acoustiques [34, 40, 44–46, 50–52]. Le projet Acoustique et Paroi-Multiperforée (APaM) financé par l'Agence nationale de la recherche entre 2008 et 2011 a permis de réaliser à la fois une étude théorique, numérique et expérimentale sur des plaques avec des caractéristiques géométriques similaires aux parois des chambres de combustion [3, 25, 26, 39, 41]. Ce projet a regroupé de nombreux partenaires : le CERFACS ; l'Institut de Mathématiques de Toulouse ; l'ONERA et SNECMA.

On peut comparer la géométrie des matériaux absorbants utilisés classiquement dans les liners (et étudiés par exemple lors de la thèse de Julien Primus [44]) avec celle des parois de chambre de



FIGURE 1.2 – Chambre de combustion TURBOMECA (image extraite de la thèse de Most [35]).

combustion étudiées lors du projet APaM [39, 41]. Le tableau 1.1 récapitule ces résultats et nous y avons ajouté la gamme de fréquence de la source acoustique pour ces deux configurations.

On remarque que le taux de perforations est faible, et que l'épaisseur de la plaque et le diamètre des perforations sont très inférieurs aux longueurs d'ondes (supérieures à la dizaine de centimètres pour les fréquences étudiées). La modélisation acoustique des plaques perforées s'appuie sur ces deux constatations. Nous allons détailler et justifier les hypothèses de modélisation utilisées dans ces travaux de thèse dans la section suivante.

## 1.2 Hypothèses effectuées pour la modélisation acoustique d'une plaque perforée

### 1.2.1 La modélisation dans le domaine fréquentiel

L'étude temporelle de la réponse acoustique d'une plaque perforée est très complexe. En pratique les modèles sont d'abord développés dans le domaine fréquentiel avant d'être adaptés dans le domaine temporel [48]. Dans la suite de ce document, nous traiterons uniquement de la modélisation dans le domaine fréquentiel.

Une onde acoustique se caractérise par des variations de la vitesse et de la pression du fluide à travers lequel se propage l'onde. La pression acoustique dépend des trois variables d'espace et du temps. Nous pouvons la noter  $p(\mathbf{x}, t)$ . Dans la suite de ces travaux, nous supposerons que la

	Liner	Paroi d'une chambre de combustion
Épaisseur de la plaque	0.8 mm	4 mm
Géométrie des perforations	cylindrique <sup>1</sup>	cylindrique <sup>1</sup>
Diamètre des perforations	0.3 mm	0.45 mm
Taux de perforation	5 %	1.96 %
Fréquences étudiées	900 Hz - 3200 Hz	260 Hz - 2000 Hz

<sup>1</sup> L'usinage des plaques est réalisé par perçage laser, ainsi la géométrie réelle des perforations est en forme de tronc de cône.

TABLE 1.1 – Comparaison des fréquences d'étude et de la géométrie des plaques perforées rencontrées dans une application « liner de nacelle de turboréacteur [44] » et « paroi de chambre de combustion [39, 41] ».

dépendance temporelle des fluctuations acoustiques est harmonique à la pulsation  $\omega$ , ainsi

$$p(\mathbf{x}, t) = \Re \left( \widehat{p}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right). \quad (1.1)$$

où  $\Re(c)$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe  $c$ . Les mêmes conventions seront adoptées pour la vitesse acoustique

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \Re \left( \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right). \quad (1.2)$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons  $p$  le phaseur  $\widehat{p}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{v}$  le phaseur  $\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ .

### 1.2.2 L'interaction entre les perforations

De très nombreuses perforations sont présentes sur les plaques multi-perforées, il est donc possible qu'elles interagissent entre elles. Fok, un mathématicien russe, a fait des développements analytiques dans le cas d'une plaque infiniment mince pour tenir compte de ces interactions [14]. D'après Melling [32], la correction introduite par Fok est négligeable pour les faibles porosités (inférieures à 7,5 %). Dans la suite de ce document, nous étudierons des plaques de porosité plus faible donc nous négligerons ces effets d'interaction.

### 1.2.3 La modélisation à faible nombre de Helmholtz

Le **nombre de Helmholtz** est un nombre sans dimension égal au produit du nombre d'onde  $k = \omega/c_0$  (où  $c_0$  est la vitesse du son dans le milieu étudié) avec la taille caractéristique  $L_c$  d'un objet considéré

$$\text{He} = kL_c. \quad (1.3)$$

Quand ce nombre est petit (typiquement de l'ordre de grandeur de 0.1), la longueur d'onde est très grande devant la taille caractéristique de l'objet considéré, c'est-à-dire que les phénomènes propagatifs sont négligeables à l'échelle de l'objet. On dit également que l'écoulement est localement incompressible autour de l'objet. Pour les plaques perforées, la longueur caractéristique considérée est le diamètre des perforations ou l'épaisseur de la plaque. Dans les expériences présentées dans la section 1.1, les nombres de Helmholtz sont inférieurs à 0.15 donc on peut considérer l'hypothèse d'incompressibilité valide. Les modèles existants dans la littérature s'appuient sur cette hypothèse.

L'épaisseur de la plaque et le diamètre des perforations étant faibles devant la longueur d'onde, nous pouvons utiliser des méthodes dites de perturbations singulières pour caractériser l'effet de la plaque perforée sur la propagation des ondes sonores. Ces méthodes, popularisées par Van Dyke [62], sont couramment utilisées en mécanique des fluides pour étudier le comportement d'un écoulement dans la région proche d'une paroi (cette région est appelée « couche limite »).

Dans la section suivante, nous allons présenter une introduction à l'étude de la réponse acoustique d'une plaque perforée dans le formalisme multi-échelle.

### 1.3 La réponse acoustique d'une plaque perforée : un problème multi-échelle

Nous considérons ici un réseau de perforations droit avec une distance (notée  $l$ ) entre les perforations identique dans les deux directions. Ce choix a été fait pour simplifier l'écriture mais on peut faire le même raisonnement pour un réseau quelconque [3]. Les coordonnées du centre des perforations sont  $\mathbf{x}_{m,n} = (0, ml, nl)$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers. Les perforations sont circulaires et leur rayon est noté  $r_0$  (voir figure 1.3).

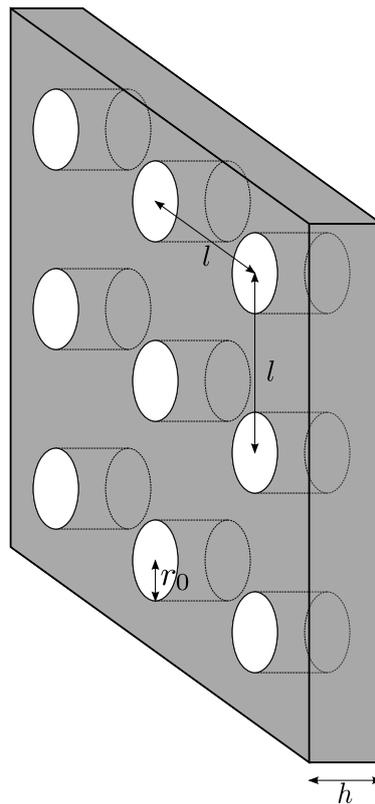


FIGURE 1.3 – La géométrie d'une plaque perforée

Le principe des méthodes d'analyse asymptotique est d'identifier les échelles physiques caractéristiques du problème considéré, pour ensuite exprimer un problème simplifié à chaque échelle. Ici, nous allons considérer deux échelles caractéristiques, la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  et le rayon d'une perforation  $r_0$ . Elles nous permettront de définir deux grandeurs physiques, l'impédance de

la plaque, qui est une grandeur homogénéisée, et la conductivité de Rayleigh qui est une grandeur liée à une perforation. A l'échelle de la longueur d'onde (la plus grande de toutes les échelles en jeu) nous parlerons de **zone de champ lointain** tandis qu'à l'échelle du rayon d'une perforation nous parlerons de **zone de champ proche**.

### 1.3.1 La zone de champ lointain

La zone de champ lointain permet d'exprimer le comportement de l'onde acoustique loin de la plaque perforée, les équations valides à cette échelle sont celles de l'acoustique linéaire<sup>3</sup>. Les champs de pression et de vitesse sont exprimés dans les coordonnées  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . L'épaisseur de la plaque est négligeable devant la longueur d'onde, donc la plaque est supposée infiniment fine. Elle définit une surface  $\tilde{\Gamma}$  (à la position  $x_1 = x_\Gamma$ ) séparant deux domaines discontinus  $\tilde{\Omega}_I$  et  $\tilde{\Omega}_{II}$ . La notation  $\tilde{\phantom{x}}$  est utilisée pour exprimer les grandeurs en champ lointain.

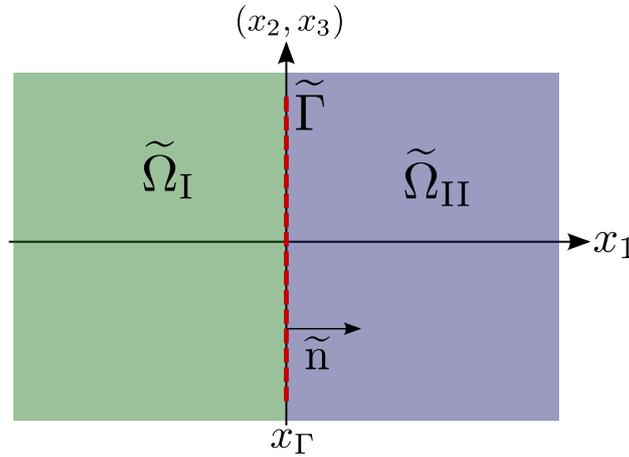


FIGURE 1.4 – Schéma de la zone de champ lointain.

On note  $\tilde{p}_g$  et  $\tilde{p}_d$ , les traces du champ de pression  $\tilde{p}(x_1, x_2, x_3)$  sur la frontière  $\tilde{\Gamma}$

$$\tilde{p}_g(x_2, x_3) = \tilde{p}_I(x_\Gamma, x_2, x_3), \quad (1.4)$$

$$\tilde{p}_d(x_2, x_3) = \tilde{p}_{II}(x_\Gamma, x_2, x_3). \quad (1.5)$$

La relation entre  $\tilde{p}_g$  et  $\tilde{p}_d$  s'écrit

$$\tilde{p}_g(x_2, x_3) - \tilde{p}_d(x_2, x_3) = Z_w \tilde{v}_\Gamma(x_2, x_3) \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}, \quad (1.6)$$

où  $Z_w$  est l'impédance de transmission de la plaque perforée et  $\tilde{v}_\Gamma$  la vitesse normale à la plaque. Elle est continue :  $\tilde{v}_\Gamma(x_2, x_3) = \tilde{\mathbf{v}}_I(x_\Gamma, x_2, x_3) \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{v}}_{II}(x_\Gamma, x_2, x_3) \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  (avec  $\tilde{\mathbf{n}}$  la normale à la paroi, orientée de  $\tilde{\Omega}_I$  vers  $\tilde{\Omega}_{II}$ ). Cette hypothèse est valide quand l'épaisseur de la plaque est faible devant la longueur d'onde.

### 1.3.2 La zone de champ proche

Pour décrire la physique près de la plaque perforée, on pose le changement d'échelle  $X_1 = (x_1 - x_\Gamma)/\epsilon$ ,  $X_2 = x_2/\epsilon$  et  $X_3 = x_3/\epsilon$  (avec  $\epsilon$  un petit paramètre de l'ordre de  $r_0$ ). Les champs de

3. On exclut ici tous les phénomènes de propagation acoustique non-linéaires, significatifs quand le SPL est supérieur à 150 dB environ.

pression et de vitesse sont continus sur le domaine  $\Omega_{\text{perfo}} = \{\Omega^- \cup \Omega^{\text{int}} \cup \Omega^+\}$  (voir la figure 1.5). A cette échelle, la plaque est supposée épaisse et les équations sont résolues dans le domaine  $\Omega_{\text{perfo}}$ . Les équations considérées dépendent des phénomènes physiques prépondérants dans la perforation. Dans la zone de champ proche, l'écoulement est supposé incompressible.

On définit les champs de pression  $P$  et de vitesse  $\mathbf{V}$  en champ proche

$$P(\mathbf{X}) = \tilde{p}(\epsilon\mathbf{X}), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{v}}(\epsilon\mathbf{X}). \quad (1.8)$$

Dans cette zone, les pressions à l'infini  $P_g$  et  $P_d$  sont supposées uniformes et sont définies par

$$P_g = \lim_{|\mathbf{X}| \rightarrow +\infty} P(\mathbf{X}) \quad \text{pour } X_1 < 0, \quad (1.9)$$

$$P_d = \lim_{|\mathbf{X}| \rightarrow +\infty} P(\mathbf{X}) \quad \text{pour } X_1 > 0. \quad (1.10)$$

Rayleigh [47] a introduit la relation suivante entre les deux pressions  $P_g$  et  $P_d$  et le débit volumique  $Q$  à l'intérieur d'une perforation (défini par  $Q = \int_{S_{\text{perfo}}} V_1 dS$  avec  $S_{\text{perfo}}$  la section de la perforation et  $V_1$  la composante du vecteur vitesse dans la direction  $X_1$ )

$$j\omega\rho_0 Q = K_R (P_g - P_d). \quad (1.11)$$

Cette relation fait ainsi intervenir la grandeur  $K_R$  appelée conductivité de Rayleigh, dont on détaillera la signification physique en section 1.4.4.

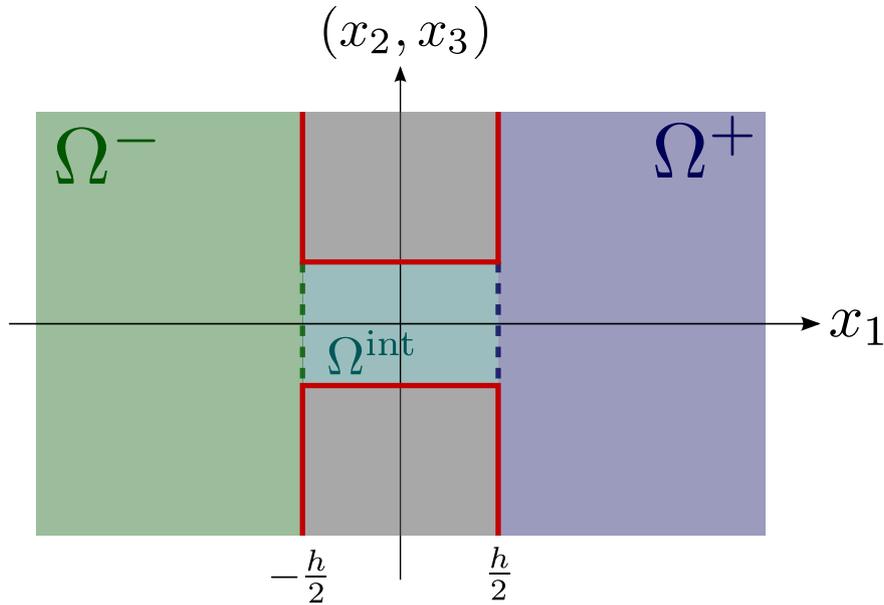


FIGURE 1.5 – Schéma de la zone de champ proche. La zone grise représente la plaque perforée.

### 1.3.3 Les raccords entre la zone de champ proche et la zone de champ lointain

Une relation liant l'impédance et la conductivité de Rayleigh est donnée par Mendez et Eldredge [33]

$$Z_w = \frac{j\omega\rho_0 l^2}{K_R}. \quad (1.12)$$

Cette relation est primordiale car elle montre qu'on peut modéliser l'impédance d'une plaque perforée à partir du calcul de la conductivité de Rayleigh d'une perforation. En fait, tous les auteurs font cette hypothèse sans l'explicitier clairement. Cependant, comme nous l'avons décrit dans les sections précédentes, l'impédance est définie en zone de champ lointain, tandis que la conductivité de Rayleigh est définie en zone de champ proche. Pour écrire l'équation (1.12), il faut exprimer des conditions de raccord entre ces deux zones. Les techniques d'analyse asymptotique [3, 53] permettent d'explicitier les relations suivantes

$$\tilde{p}_g = P_g, \quad (1.13)$$

$$\tilde{p}_d = P_d, \quad (1.14)$$

$$l^2 \tilde{v}_\Gamma = Q. \quad (1.15)$$

Ainsi, en manipulant les équations (1.6) et (1.11) on peut établir la relation entre l'impédance et la conductivité de Rayleigh (1.12). Les détails de l'obtention des conditions de raccord seront donnés dans le chapitre 2.

### 1.3.4 Les conventions de signe

Dans les équations (1.6) et (1.11), les conventions de signe sont importantes. Il y a deux paramètres qui déterminent le signe dans ces équations : la direction de la normale unitaire et la convention harmonique. Ici, la normale à la paroi est choisie de l'entrée vers la sortie, et la convention harmonique est  $e^{j\omega t}$ . Dans la littérature, nous pouvons retrouver des conventions différentes suivant les auteurs, ce qui entraîne notamment des changements de signes sur les parties réelles ou imaginaires des grandeurs en jeu, vis-à-vis desquels il faut être particulièrement vigilant.

## 1.4 L'impédance acoustique et la conductivité de Rayleigh des plaques perforées

### 1.4.1 L'impédance acoustique d'un matériau

Nous allons définir ici l'impédance acoustique des matériaux à réaction localisée. Nous pourrions retrouver ces définitions et plus d'informations dans le livre de Rienstra et Hirschberg [49]. L'impédance acoustique (notée  $Z$ ) caractérise la réponse acoustique d'un matériau soumis à une excitation sonore. Elle est définie dans le domaine fréquentiel par

$$Z(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{v_n(\mathbf{x})}, \quad (1.16)$$

où  $p$  est la pression acoustique à la surface de la paroi et où  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  est la vitesse normale à la paroi. Ici le vecteur  $\mathbf{n}$  est dirigé vers l'intérieur du matériau, contrairement aux conventions usuelles des autres disciplines. Cette définition est donnée à une position  $\mathbf{x}$  sur la surface du matériau, l'impédance est donc une propriété locale. Usuellement, c'est l'impédance homogénéisée sur toute la surface du matériau qui est considérée. Dans l'équation (1.16) la pression et la vitesse acoustique sont définies dans le domaine fréquentiel, l'impédance acoustique est donc un nombre complexe. Sa partie réelle s'appelle la résistance  $R_Z$  et sa partie imaginaire s'appelle la réactance  $\chi_Z$ , donc on peut écrire

$$Z = R_Z + j\chi_Z. \quad (1.17)$$

Rappelons la définition que nous avons donnée de l'impédance de transmission dans la section 1.3.1

$$\tilde{p}_g(x_2, x_3) - \tilde{p}_d(x_2, x_3) = Z_w \tilde{v}_\Gamma(x_2, x_3). \quad (1.18)$$

Elle n'est pas identique à l'expression usuellement utilisée de l'impédance (équation (1.16)). Si on utilise l'équation (1.16) pour une plaque perforée, on caractérise non seulement l'effet de la plaque mais également de ce qu'il y a « derrière » (une cavité par exemple) tandis que l'équation (1.18) ne modélise que l'effet de la plaque perforée.

### 1.4.2 Somme d'impédances

Un liner acoustique est constitué de cavités recouvertes par une plaque perforée (voir figure 1.6). L'impédance du liner est définie par

$$Z_{\text{liner}} = \frac{p_g}{v}. \quad (1.19)$$

La vitesse  $v$  n'est pas la vitesse physique à l'intérieur de la perforation, c'est la vitesse homogénéisée sur une cellule du réseau de perforations. On peut calculer l'impédance du liner en connaissant l'impédance de la plaque perforée  $Z_{\text{plaque}}$  et celle de la cavité  $Z_{\text{cavité}}$ . En effet, elles sont définies par

$$Z_{\text{plaque}} = \frac{p_g - p_d}{v}, \quad (1.20)$$

$$Z_{\text{cavité}} = \frac{p_d}{v}, \quad (1.21)$$

donc on aboutit à

$$Z_{\text{liner}} = \frac{p_g - p_d}{v} + \frac{p_d}{v}, \quad (1.22)$$

$$= Z_{\text{plaque}} + Z_{\text{cavité}}. \quad (1.23)$$

On remarque que cette propriété est similaire au calcul de l'impédance équivalente d'un circuit série en électricité.

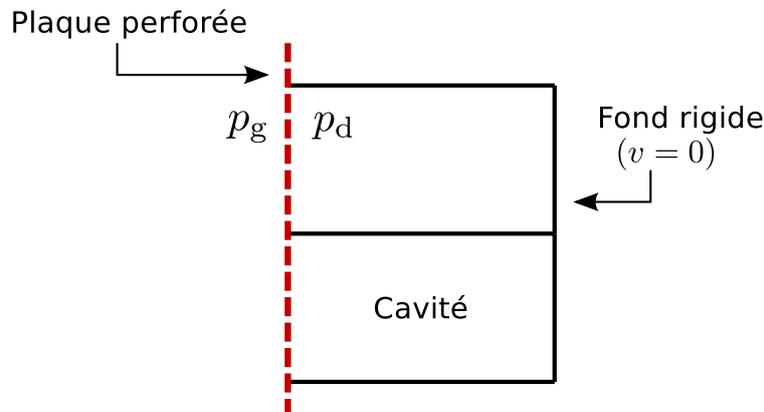


FIGURE 1.6 – Schéma d'un liner

### 1.4.3 Impédance et puissance acoustique

La puissance acoustique instantanée à travers une surface  $S$  est définie par

$$\mathcal{P}(t) = \iint_S p(t) v_n(t) dS, \quad (1.24)$$

où  $p(t)$  et  $v_n(t)$  sont définis dans le domaine temporel. Pour des fluctuations harmoniques on peut écrire

$$\mathcal{P}(t) = \iint_S \Re(\widehat{p}e^{j\omega t}) \Re(\widehat{v}_n e^{j\omega t}) dS, \quad (1.25)$$

en utilisant les relations définies dans la section 1.2.1. On peut calculer la moyenne sur une période de la puissance acoustique à travers la surface  $S$  (dénommée « puissance acoustique active »)

$$\mathcal{P} = \iint_S \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Re(\widehat{p}e^{j\omega t}) \Re(\widehat{v}_n e^{j\omega t}) dt dS, \quad (1.26)$$

$$= \frac{1}{2} \iint_S \Re(\widehat{p}\widehat{v}_n^*) dS, \quad (1.27)$$

où  $c^*$  désigne le conjugué d'un nombre complexe  $c$ . En utilisant la définition de l'impédance (voir équation (1.16)), il existe une relation entre la partie réelle de l'impédance et la puissance acoustique active

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \iint_S \Re(Z) |\widehat{v}_n|^2 dS. \quad (1.28)$$

Si  $\Re(Z)$  est positif, la surface est passive et absorbe de l'énergie. Si  $\Re(Z)$  est négatif, la surface est active et produit de l'énergie.

Pour définir la puissance acoustique active à travers une plaque perforée, c'est le saut de pression qui est pris en compte

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \iint_{\tilde{\Gamma}} \Re([\widehat{p}_g - \widehat{p}_d] \widehat{v}_\Gamma^*) d\tilde{\Gamma}, \quad (1.29)$$

ainsi on peut écrire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \iint_{\tilde{\Gamma}} R_{Zw} |\widehat{v}_\Gamma|^2 d\tilde{\Gamma}. \quad (1.30)$$

Les plaques perforées sont des matériaux passifs, leur résistance est donc toujours positive.

### 1.4.4 La conductivité de Rayleigh

La notion de conductivité acoustique a été introduite par Rayleigh lors de son étude des résonateurs [47]. Un résonateur est composé d'une cavité et d'un petit tube qui la relie à l'extérieur. Rayleigh a défini la conductivité pour caractériser l'effet du tube. Il a supposé que l'écoulement était incompressible et potentiel autour et à l'intérieur du tube. Le potentiel de vitesse  $\varphi$  est défini par

$$\mathbf{V} = \nabla\varphi. \quad (1.31)$$

On peut introduire deux potentiels uniformes  $\varphi_g$  et  $\varphi_d$  définis de la même manière que  $P_g$  et  $P_d$  dans la section 1.3.2

$$\varphi_g = \lim_{|\mathbf{X}| \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{X}) \quad \text{pour } X_1 < 0, \quad (1.32)$$

$$\varphi_d = \lim_{|\mathbf{X}| \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{X}) \quad \text{pour } X_1 > 0. \quad (1.33)$$

La première définition de la conductivité donnée par Rayleigh [47] était

$$Q = K_R (\varphi_d - \varphi_g). \quad (1.34)$$

Il a défini cette grandeur par analogie à la conductivité électrique. Il a considéré le fluide à l'intérieur du tube comme un matériau conducteur et la paroi du tube comme isolante. Si une différence de potentiel électrique est maintenue aux extrémités du tube alors un courant stationnaire d'amplitude proportionnelle est générée à travers le tube. La conductivité électrique du tube est définie par le ratio entre le courant total traversant le tube et les forces électromotrices aux extrémités de celui-ci. Dans l'équation (1.34), le saut de potentiel  $\varphi_d - \varphi_g$  correspond à la différence de potentiel électrique, tandis que le flux du champ de vitesse  $Q$  correspond au courant traversant le tube.

Dans le paragraphe précédent, il a été supposé que l'écoulement était potentiel, et qu'il n'y avait pas d'écoulement moyen. Dans ce cas, il existe une relation entre le potentiel de vitesse et la pression

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.35)$$

et l'équation (1.34) est équivalente à la définition utilisée classiquement [17] et déjà donnée dans l'équation (1.11)

$$j\omega\rho_0 Q = K_R (P_g - P_d). \quad (1.36)$$

Cette définition est la plus utilisée car elle permet l'extension au cas où un écoulement traversant est présent au travers de la perforation.

#### 1.4.5 Relation entre l'impédance et la conductivité de Rayleigh

Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.3, l'impédance de transmission est caractérisée en champ lointain tandis que la conductivité de Rayleigh est définie en champ proche. Nous rappelons la relation entre les deux grandeurs (voir équation (1.12))

$$Z_w = \frac{j\omega\rho_0}{K_R} l^2. \quad (1.37)$$

### 1.5 Modélisation de la conductivité de Rayleigh et de l'impédance associée

Pour modéliser analytiquement la réponse acoustique d'une plaque perforée, on caractérise d'abord l'effet d'une seule perforation. Pour cela, on modélise l'écoulement dans la perforation, ce qui nous permet de développer une expression de la conductivité de Rayleigh. Grâce à l'équation (1.37), nous pouvons ensuite calculer l'impédance de transmission de la plaque perforée. Dans la littérature, le concept d'« impédance » est utilisé principalement par la communauté étudiant

les propriétés acoustiques des liners, tandis que le concept de « conductivité de Rayleigh » est utilisé par la communauté étudiant les parois des chambres de combustion. Pour faire référence aux modèles existants, nous allons exprimer les modèles de conductivité de Rayleigh sous la forme d'une impédance, que nous appellerons impédance d'une perforation  $Z_o$  définie par

$$Z_o = Z_w \sigma. \quad (1.38)$$

Cette relation vient de l'hypothèse de conservation du débit à travers la plaque

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.39)$$

avec  $\mathbf{v}_0$  la vitesse à travers la perforation. Dans le cas d'une perforation cylindrique la porosité est définie par  $\sigma = \frac{\pi r_0^2}{l^2}$ , ainsi

$$Z_o = \frac{j\omega\rho_0}{K_R} \pi r_0^2. \quad (1.40)$$

La modélisation de la conductivité de Rayleigh et de l'impédance de transmission dépend des phénomènes physiques que l'on souhaite caractériser. On peut lister quatre catégories de modèles différents :

- Les modèles acoustiques ;
- Les modèles tenant compte des effets visqueux ;
- Les modèles avec niveau sonore élevé ;
- Les modèles avec écoulement traversant.

Dans la plupart des modèles, la conductivité de Rayleigh est décomposée en trois parties, une partie à l'intérieur de la perforation, et une partie à chaque extrémité de la perforation (voir figure 1.7). On note  $K_R^{\text{int}}$  la première, et  $K_R^+$  et  $K_R^-$  les deux dernières. La décomposition de la conductivité de Rayleigh est similaire à la décomposition des conductivités électriques (voir section 1.4.2), elle s'écrit

$$\frac{1}{K_R} = \frac{1}{K_R^+} + \frac{1}{K_R^{\text{int}}} + \frac{1}{K_R^-}, \quad (1.41)$$

que l'on peut réécrire pour  $Z_o$

$$Z_o = Z_o^+ + Z_o^{\text{int}} + Z_o^-. \quad (1.42)$$

Cette décomposition est schématique car les effets dûs aux extrémités des perforations peuvent également être présents à l'intérieur de la perforation.

### 1.5.1 Les modèles acoustiques

Cette première catégorie désigne les modèles qui ne tiennent compte ni des effets visqueux, ni d'aucun autre effet physique complexe (niveau sonore élevé ou présence d'un écoulement).

Le premier modèle à avoir été développé est celui de Rayleigh [47]. Il a d'abord calculé la conductivité de Rayleigh d'une perforation dans une plaque infiniment mince avant d'étendre ces résultats aux plaques épaisses. Leppington et Levine [27, 28] ont été les premiers à proposer une méthode pour calculer une grandeur homogénéisée sur un réseau de perforation. Plus récemment, Bendali et collab. [3] ont approfondi les démonstrations de Leppington et Levine en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés. Ces résultats ont été étendus aux cas des

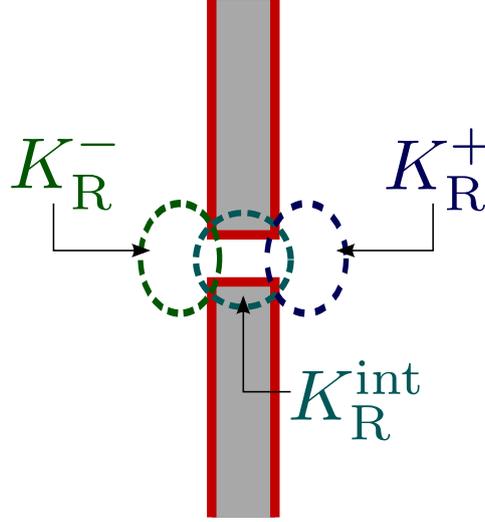


FIGURE 1.7 – Schéma montrant la décomposition des conductivités de Rayleigh.

perforations penchées, elliptiques ou coniques [25, 26]. Ces modèles ne dégagent pas une valeur unique de la conductivité de Rayleigh mais une borne supérieure et une borne inférieure de résultats admissibles.

Pour des perforations cylindriques droites dans le cas d'une plaque épaisse, les résultats sont

$$\pi r_0^2 \frac{3\pi}{8r_0} < K_R^+ < \pi r_0^2 \frac{4}{\pi r} \quad \text{ou} \quad j\omega\rho_0 \frac{\pi r_0}{4} < Z_o^+ < j\omega\rho_0 \frac{8r_0}{3\pi}, \quad (1.43)$$

$$K_R^{\text{int}} = \frac{\pi r_0^2}{h} \quad \text{ou} \quad Z_o^{\text{int}} = j\omega\rho_0 h, \quad (1.44)$$

$$\pi r_0^2 \frac{3\pi}{8r_0} < K_R^- < \pi r_0^2 \frac{4}{\pi r} \quad \text{ou} \quad j\omega\rho_0 \frac{\pi r_0}{4} < Z_o^- < j\omega\rho_0 \frac{8r_0}{3\pi}, \quad (1.45)$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{\pi r_0^2}{h + \frac{16r_0}{3\pi}} < K_R < \frac{\pi r_0^2}{h + \frac{1}{2}\pi r_0}, \quad (1.46)$$

$$\text{ou} \quad j\omega\rho_0 \left( h + \frac{\pi r_0}{2} \right) < Z_o < j\omega\rho_0 \left( h + \frac{16r_0}{3\pi} \right). \quad (1.47)$$

On remarque que la prise en compte des valeurs de  $K_R^+$  et  $K_R^-$  dans l'équation (1.46) peut-être considérée comme une correction de la longueur  $h$  de la perforation dans l'expression de  $K_R^{\text{int}}$  (avec l'ajout de  $\pi r_0/2$  ou de  $16r_0/3\pi$ ). Dans la littérature acoustique, on appelle ces corrections « corrections de col ». Les expressions dans le cas des perforations penchées, elliptiques ou coniques sont plus complexes et ont été développées dans les travaux de Laurens et collab. [25, 26]. Nous détaillons ces expressions dans l'annexe A.

La partie imaginaire de ces modèles de conductivité de Rayleigh (donc la partie réelle de l'impédance associée) est nulle, c'est-à-dire que la dissipation d'énergie par la plaque perforée n'est pas modélisée.

### 1.5.2 Les modèles tenant compte des effets visqueux

Dans cette catégorie de modèle, l'absorption de l'énergie par la plaque perforée est modélisée par la prise en compte des effets visqueux sur les parois de la perforation et de la plaque perforée. Classiquement, les effets thermiques sont négligés. Ils pourraient cependant être pris en compte (voir le livre de Bruneau [6]).

#### 1.5.2.1 La modélisation des effets à l'intérieur du cylindre

Crandall [9] a été le premier à calculer la conductivité de Rayleigh d'un cylindre de hauteur  $h$ , en tenant compte des effets visqueux. Son calcul se base sur la résolution des équations de Stokes linéarisées incompressibles harmoniques en coordonnées cylindriques. On note  $\Delta p$  la différence de pression entre les deux extrémités du cylindre. Le flux volumique dans une section du cylindre est donné par

$$Q = -\pi r_0^2 \frac{\Delta p}{\mu_0 k_s^2 h} \left[ 1 - \frac{2}{k_s r_0} \frac{J_1(k_s r_0)}{J_0(k_s r_0)} \right], \quad (1.48)$$

avec  $\mu_0$  la viscosité dynamique du fluide et  $k_s^2 = \frac{-j\omega\rho_0}{\mu_0}$ . Les fonctions  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel de première espèce. D'après l'équation (1.36), la conductivité de Rayleigh associée au cylindre est égale à

$$K_R^{\text{int}} = \frac{\pi r_0^2}{h} \left[ 1 - \frac{2}{k_s r_0} \frac{J_1(k_s r_0)}{J_0(k_s r_0)} \right], \quad (1.49)$$

ou

$$Z_o^{\text{int}} = \frac{j\omega\rho_0 h}{1 - \frac{2}{k_s r_0} \frac{J_1(k_s r_0)}{J_0(k_s r_0)}}. \quad (1.50)$$

Crandall a déterminé des approximations des fonctions de Bessel pour deux cas,  $|k_s r_0|$  petit et  $|k_s r_0|$  grand. Quand  $|k_s r_0|$  est petit, les effets visqueux sont présents dans tout le cylindre, tandis que quand  $|k_s r_0|$  est grand, ils ne sont présents que dans une région près des parois du cylindre, on appelle cette zone la couche limite acoustique. Le nombre  $|k_s r_0|$  est appelé **nombre de Stokes**. Une manière générale de le définir est

$$\text{Sto} = |k_s L_c| = \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\mu_0}} L_c, \quad (1.51)$$

où  $L_c$  est la longueur caractéristique considérée. Quand  $\text{Sto}$  est inférieur à l'unité, la couche limite acoustique est plus grande que la distance considérée tandis que pour  $\text{Sto}$  est supérieur à dix, la couche limite acoustique est petite devant la longueur caractéristique. Pour  $|k_s r_0| < 1$ , un développement en série des fonctions de Bessel permet d'aboutir à l'expression suivante

$$K_R^{\text{int}} = \frac{\pi r_0^2}{h} \frac{6j\omega\rho_0 r_0^2}{48\mu_0 + 8j\omega\rho_0 r_0^2}, \quad (1.52)$$

ou

$$Z_o^{\text{int}} = \frac{8\mu_0 h}{r_0^2} + j\frac{4}{3}\rho_0\omega h. \quad (1.53)$$

Pour  $|k_s r_0| > 10$ , l'approximation choisie pour le ratio des fonctions de Bessel est

$$J_1(x\sqrt{-j})/J_0(x\sqrt{-j}) = -j. \quad (1.54)$$

Ainsi la conductivité de Rayleigh est égale à

$$K_R^{\text{int}} = \frac{\pi r_0^2}{h} \left( 1 + \frac{2j}{k_s r_0^2} \right), \quad (1.55)$$

ou

$$Z_o^{\text{int}} = j\omega\rho_0 h \frac{1}{1 + \frac{2j}{k_s r_0}}. \quad (1.56)$$

Pour écrire l'impédance précédente sous la forme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, on peut utiliser un développement limité en 0 à l'ordre 1 du terme  $1/(1 + 2j/k_s r_0)$  (car  $k_s r_0$  est supposé grand), ainsi

$$Z_o^{\text{int}} = j\omega\rho_0 h \left( 1 - \frac{2j}{k_s r_0} \right) = \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h}{r_0} + j\omega\rho_0 \left( h + \sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}} \frac{h}{r_0} \right). \quad (1.57)$$

Cette expression est celle déterminée par Crandall. Nous avons écrit le développement limité à l'ordre 2 du terme  $1/(1 + 2j/k_s r_0)$  pour garantir qu'un terme de la résistance soit indépendant de la fréquence.

$$Z_o^{\text{int}} = j\omega\rho_0 h \left( 1 - \frac{2j}{k_s r_0} - \frac{4}{k_s^2 r_0^2} \right), \quad (1.58)$$

$$= \frac{4\mu_0}{r_0^2} + \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h}{r_0} + j\omega\rho_0 \left( h + \sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}} \frac{h}{r_0} \right). \quad (1.59)$$

Maa [30] a développé une expression pour le cas où  $|k_s r_0|$  est compris entre 1 et 10 en combinant les équations (1.53) et (1.57)

$$Z_o^{\text{int}} = \frac{8\mu_0 h}{r_0^2} \left( 1 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0 32} \right)^{\frac{1}{2}} + j\omega\rho_0 h \left( 1 + \left( 3^2 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0 2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (1.60)$$

Dans tous les modèles cités précédemment, ce ne sont que les effets à l'intérieur du cylindre qui ont été modélisés. Par contre, l'effet des extrémités du cylindre n'a pas encore été pris en compte. Dans la littérature, l'expression de la modélisation de ces effets passe par une correction de la longueur du cylindre  $h$ , appelée correction de col. Classiquement, la modélisation des corrections de col pour la résistance et la réactance est dissociée.

### 1.5.2.2 La modélisation des corrections de col

Melling [32] a proposé des modèles d'impédance basés sur les travaux de Crandall mais en incluant des corrections de col pour la résistance et pour la réactance. Pour la réactance, il a choisi la borne supérieure déterminée par Rayleigh (égale à  $16r_0/3\pi$ ). Pour la résistance, il utilise le résultat d'Ingard [19], qui a trouvé une correction de col égale à  $2r_0$ . Cette correction a été calculée pour modéliser la dissipation par viscosité sur les parois de la plaque perforée à l'extérieur de la perforation. Plus de détails sur son calcul seront donnés dans la section 3.3.

Le modèle de Melling pour les petits nombres de Stokes ( $|k_s r_0| < 1$ ) est égal à

$$Z_o = \frac{8\mu_0}{r_0^2} (h + 2r_0) + j\omega\rho_0 \left( \frac{4}{3}h + \frac{16r_0}{3\pi} \right), \quad (1.61)$$

tandis que pour les grands nombres de Stokes ( $|k_s r_0| > 10$ ) il est égal à

$$Z_o = \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \left( 2 + \frac{h}{r_0} \right) + j\omega\rho_0 \left( h + \sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}} \frac{h}{r_0} + \frac{16r_0}{3\pi} \right). \quad (1.62)$$

Maa a également ajouté des corrections de col dans son modèle. Pour la réactance, il a également choisi  $16r_0/3\pi$  tandis que pour la résistance il a ajouté le terme  $\sqrt{\rho_0\omega\mu_0/2}$ .

$$Z_o = \frac{8\mu_0 h}{r_0^2} \left( 1 + \frac{\rho_0\omega}{\mu_0} \frac{r_0^2}{32} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\rho_0\omega\mu_0}{2}} + j\omega\rho_0 \left[ h \left( 1 + \left( 3^2 + \frac{\rho_0\omega}{\mu_0} \frac{r_0^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{16r_0}{3\pi} \right]. \quad (1.63)$$

Un bilan des modèles acoustiques et tenant compte des effets visqueux est présenté dans le tableau 1.2.

### 1.5.3 Les modèles avec niveau sonore élevé

Cette catégorie désigne les modèles d'impédance où l'amplitude de l'onde acoustique incidente est élevée. Quand le niveau sonore est élevé, la vitesse acoustique augmente et des tourbillons sont générés aux ouvertures de la perforation. Ces tourbillons sont responsables d'une dissipation d'énergie plus importante que la seule dissipation visqueuse dans la perforation. Ainsi un terme est rajouté sur la partie réelle de l'impédance. Il est appelé résistance non linéaire (noté  $R_n$ ) et s'écrit sous la forme

$$R_n = \frac{K}{C_D^2 c_0} v_n, \quad (1.64)$$

où  $K$  est une constante et  $C_D$  le coefficient de décharge. De nombreux auteurs se sont attelés à la modélisation du coefficient de décharge, on peut citer les travaux de référence de Cummings [10] ou une revue récente faite par Boden [4]. Jing et collab. [11] ont détaillé un modèle pour les configurations où il y a à la fois un écoulement rasant et des niveaux sonores élevés. Nous ne présenterons pas ici tous les résultats associés à ces travaux car la problématique de niveau sonore élevé n'a pas été étudiée dans ces travaux de thèse.

### 1.5.4 Les modèles avec écoulement traversant

Cette catégorie désigne les modèles d'impédance dans le cas où il y a un écoulement à travers les perforations. Ces modèles sont notamment utilisés pour la caractérisation acoustique des chambres de combustion. En effet, un écoulement d'air froid est injecté à travers les perforations pour protéger le matériau de la chaleur de la combustion. Un jet se forme en aval de la perforation, et l'énergie se dissipe dans le jet. Howe [16] a développé un modèle pour caractériser ce phénomène.

Il a d'abord considéré le cas d'une plaque infiniment fine. Son modèle dépend du **nombre de Strouhal**

$$St = \frac{\omega r_0}{U}, \quad (1.65)$$

	$Z_o^+$	$Z_o^{\text{int}}$	$Z_o^-$
Acoustique (1.47)	$j\omega\rho_0 \frac{\pi r_0^3}{4}$ ou $j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$	$j\omega\rho_0 h$	$j\omega\rho_0 \frac{\pi r_0^3}{4}$ ou $j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$
Crandall (1.50)		$\frac{j\omega\rho_0 h}{1 - \frac{2}{k_s r_0} \frac{J_1(k_s r_0)}{J_0(k_s r_0)}}$	
Melling petit Sto (1.61)	$\frac{8\mu_0}{r_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$	$\frac{8\mu_0}{r_0^2} h + \frac{4}{3} j\omega\rho_0 h$	$\frac{8\mu_0}{r_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$
Melling grand Sto (1.62)	$\sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$	$\sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h}{r_0} + j\omega\rho_0 h \left( 1 + \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}} \right)$	$\sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$
Maa (1.63)	$\frac{1}{4} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$	$\frac{8\mu_0 h}{r_0^2} \sqrt{1 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0} + j\omega\rho_0 h} \left( 1 + \left( 3^2 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$	$\frac{1}{4} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} + j\omega\rho_0 \frac{8r_0^3}{3\pi}$

TABLE 1.2 – Principaux modèles pour l'impédance acoustique d'une seule perforation dans une plaque.

où  $U$  est la vitesse de l'écoulement dans l'ouverture au centre du jet. Cette définition de  $U$  diffère selon les articles. Certains auteurs [18, 29, 55] considèrent la vitesse au centre du jet, tandis que Howe [16] divise cette valeur par deux. En fait, la valeur correcte de  $U$  dépend de la géométrie de l'orifice et de l'écoulement dans cette région. En pratique, les auteurs choisissent la valeur de  $U$  pour que l'accord entre le modèle et leurs résultats expérimentaux soit le meilleur, sachant que la vitesse au centre du jet n'est pas mesurable la plupart du temps.

Pour la convention  $e^{j\omega t}$  son modèle s'écrit

$$K_R = 2r_0(\gamma_H + j\delta_H), \quad (1.66)$$

avec

$$\gamma_H = \frac{(\mathbf{I}_1(\text{St}))^2 \left(1 + \frac{1}{\text{St}}\right) + \frac{4}{\pi^2} e^{2\text{St}} \cosh(\text{St}) (\mathbf{K}_1(\text{St}))^2 \left(\cosh(\text{St}) - \frac{\sinh(\text{St})}{\text{St}}\right)}{(\mathbf{I}_1(\text{St}))^2 + \frac{4}{\pi^2} e^{2\text{St}} \cosh^2(\text{St}) (\mathbf{K}_1(\text{St}))^2}, \quad (1.67)$$

et

$$\delta_H = \frac{\frac{2}{\pi \text{St}} \mathbf{I}_1(\text{St}) \mathbf{K}_1(\text{St}) e^{2\text{St}}}{(\mathbf{I}_1(\text{St}))^2 + \frac{4}{\pi^2} e^{2\text{St}} \cosh^2(\text{St}) (\mathbf{K}_1(\text{St}))^2}, \quad (1.68)$$

où  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{K}_1$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce. Les fonctions  $\gamma_H$  et  $\delta_H$  sont réelles. On peut écrire plus synthétiquement

$$\gamma_H + j\delta_H = 1 + \frac{\frac{\pi}{2} \mathbf{I}_1(\text{St}) e^{-\text{St}} + j \mathbf{K}_1(\text{St}) \sinh(\text{St})}{\text{St} \left[ \frac{\pi}{2} \mathbf{I}_1(\text{St}) e^{-\text{St}} - j \mathbf{K}_1(\text{St}) \cosh(\text{St}) \right]}. \quad (1.69)$$

Pour toutes ces expressions, les conventions sont importantes. Si la convention choisie est  $e^{-j\omega t}$ , il faut prendre le conjugué complexe des équations (1.66) et (1.69).

Howe a également donné deux expressions pour les cas limites où le nombre de Strouhal tend vers zéro ou l'infini

$$\begin{cases} K_R \approx 2r_0 \left(1 + \frac{j}{\text{St}}\right) & \text{St} \rightarrow \infty \\ K_R \approx 2r_0 \left(\frac{1}{3} \text{St}^2 + \frac{1}{4} j \pi \text{St}\right) & \text{St} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Le modèle de Howe a été amélioré au début des années 2000 pour considérer le cas d'une plaque épaisse [21]

$$K_R = 2r_0 \left( \frac{1}{\gamma_H + j\delta_H} + \frac{2}{\pi} \frac{h}{r_0} \right)^{-1}. \quad (1.71)$$

La loi d'addition des conductivités (équation (1.41)) montre que cela revient à ajouter à la conductivité de Howe l'expression (1.44) de la conductivité de Rayleigh liée au modèle acoustique d'une plaque de perforation cylindrique d'épaisseur  $h$ . Les travaux de Laurens et collab. [25, 26] ont montré que ce modèle pourrait donc être amélioré dans le cas où les perforations ne sont pas cylindriques ou perpendiculaires à la plaque en utilisant à la place les expressions dédiées à la vraie géométrie de la perforation (en tenant compte de la forme de sa section ou de son inclinaison).

Une alternative à l'utilisation des modèles qui viennent d'être détaillés consiste à simuler numériquement tous les phénomènes physiques que l'on souhaite étudier. Nous allons présenter des résultats de simulations numériques dans la section suivante.

## 1.6 Les simulations numériques

Depuis le début des années 2000, il y a eu de nombreuses études numériques sur la réponse acoustique des plaques perforées. Contrairement aux campagnes expérimentales qui sont contraintes par les moyens de mesures, un avantage des simulations numériques est qu'il est possible d'extraire des données dans tout le domaine de calcul. Ainsi, la petite taille des perforations n'est plus une limitation et des données peuvent être extraites à l'intérieur des perforations.

Tam, Kurbatskii et collab. [57, 60] ont d'abord étudié les mécanismes de dissipation de l'énergie dans un résonateur en faisant des simulations numériques directes (DNS) en deux dimensions. Ils ont constaté que la dissipation de l'énergie est causée par les frottements visqueux sur les parois lorsque l'amplitude de l'onde sonore incidente est faible. Pour des niveaux sonores élevés, ils ont observé des lâchers tourbillonnaires (voir figure 1.8). Lorsqu'ils sont présents, c'est le mécanisme principal de dissipation de l'énergie cinétique. Tam et collab. ont validé leurs résultats numériques avec des campagnes expérimentales sur les mêmes configurations. Plus récemment [58], ils ont montré des résultats similaires avec des simulations tridimensionnelles.

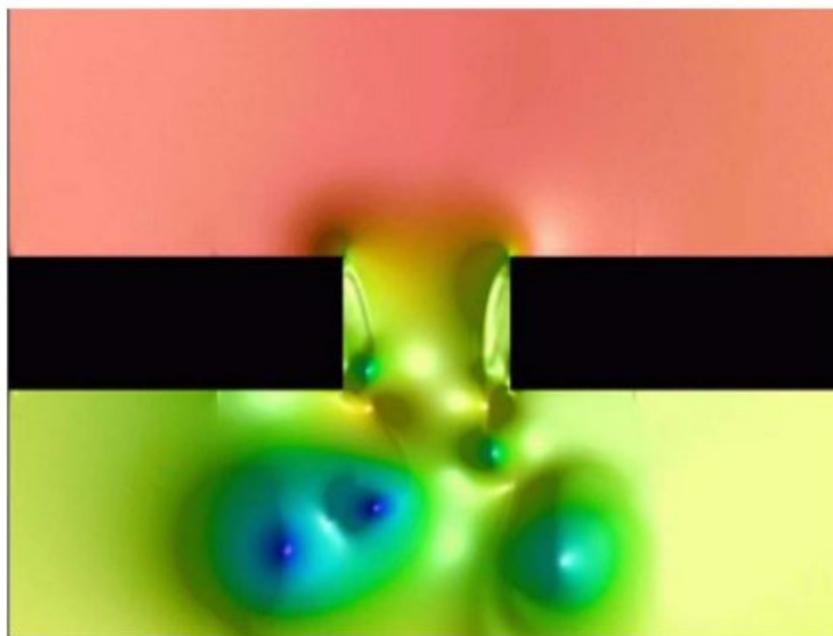


FIGURE 1.8 – Visualisation de lâchers tourbillonnaires par Tam et collab. [57]

Le développement des moyens de calcul a permis l'étude des effets physiques plus complexes. Dans le cas des écoulements rasants on peut citer les travaux de Tam et collab. [59], ainsi que ceux de Zhang et Bodony [63, 64]. Les simulations numériques directes en deux dimensions de Tam et collab. ont montré qu'à faible intensité sonore, la présence d'un écoulement rasant induit un écoulement tourbillonnaire dans l'ouverture de la perforation. Par contre à forte intensité sonore, ils ont observé l'apparition de lâchers tourbillonnaires (voir figure 1.9). Zhang et Bodony ont fait les mêmes observations pour une configuration géométrique différente, il s'agissait d'un liner en nid d'abeilles. Ils ont également étudié l'influence du nombre de Mach de l'écoulement rasant. Ils ont montré que pour des écoulements rasants à des nombres de Mach élevés, les tourbillons pénètrent moins dans la couche limite que pour des nombres de Mach plus faibles. Ces tourbillons peuvent

donc avoir un impact sur les perforations voisines à la perforation étudiée.



FIGURE 1.9 – Visualisation de la convection des tourbillons par Tam et collab. [59]

Des simulations numériques ont également été faites dans le cas de l'écoulement traversant. Eldredge, Bodony et collab. [13] et Mendez et Eldredge [33] ont étudié ce phénomène avec des simulations aux grandes échelles (LES) incompressibles. Les résultats montrent que le modèle de Howe donne une bonne approximation de l'impédance acoustique pour des perforations droites. Par contre, ils suggèrent que le modèle devrait être modifié pour tenir compte de l'inclinaison des perforations quand celles-ci sont penchées. Plus récemment Zhao et collab. [20, 65] ont utilisé la méthode lattice Boltzmann (LBM) pour des simulations tridimensionnelles sur des configurations avec écoulement traversant. Leurs résultats sont en accord avec les modèles théoriques et des mesures expérimentales. Cette méthode de calcul a l'avantage d'être plus rapide que les solveurs conventionnels et moins dissipative que les schémas numériques usuels.

Jourdain et Eriksson [22] ont récemment proposé une modélisation numérique temporelle de l'impédance des plaques perforées. Ils ont comparé des résultats de LES 3D pour lesquels l'écoulement dans les perforations était résolu numériquement avec des simulations 2D URANS où ils ont utilisé leur modèle pour tenir compte de la présence de la plaque perforée. Les calculs avec le modèle montrent un bon accord avec les résultats des LES.

Doctorant à l'ONERA, Jean-Michel Roche [50–52] a fait des simulations numériques directes tridimensionnelles avec le code CEDRE dans différentes configurations. Ces conclusions sont similaires à celles de Tam et collab. A faible niveau sonore, la dissipation de l'énergie cinétique est principalement due aux effets visqueux sur les parois de la perforation et de la plaque perforée tandis que pour des niveaux sonores plus élevés, ce sont les lâchers tourbillonnaires qui jouent un rôle prédominant dans la dissipation de l'énergie (voir figure 1.10). Il a également étudié l'influence de la présence d'un écoulement rasant et a obtenu des résultats similaires à ceux de Zhang, Bodony et Tam et collab.

Le coût de toutes ces simulations empêche pour l'instant de faire des études prédictives sur une vaste gamme de configurations ou sur des configurations réalistes. L'utilisation de modèles, recalés

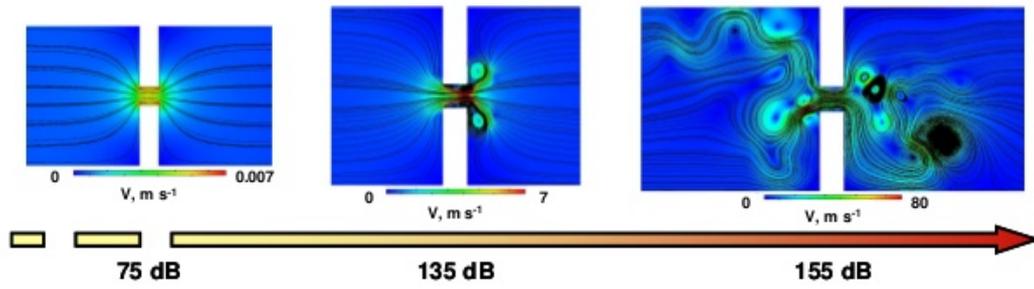


FIGURE 1.10 – Effet de l'augmentation du niveau sonore de l'onde incidente (thèse de J-M Roche [50])

ou non sur des expériences spécifiques, reste donc incontournable dans toutes les études pratiques de réponse acoustique des plaques perforées.

# Modélisation multi-échelle tenant compte des effets visqueux

Les méthodes asymptotiques sont adaptées au développement des modèles analytiques d'impédance. La majorité des modèles développés par cette technique ne tiennent pas compte des effets physiques complexes. Seule une publication de Sanchez-Palencia et collab [53] présente la mise en oeuvre de ces techniques pour tenir compte des effets visqueux. Contrairement à la présentation de la méthode multi-échelle que nous avons faite dans le chapitre précédent, ils ont considéré une troisième échelle de longueur caractérisée par la distance  $l$  entre deux perforations. Ils n'ont pas développé de modèles d'impédance mais les raccords entre les différentes échelles présentés dans la section 1.3.3 y sont justifiés. Avant de détailler leurs résultats, nous allons faire l'analyse dimensionnelle des équations mises en jeu. Cette étape est nécessaire avant d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Enfin, en utilisant les raccords entre les différentes échelles, nous montrerons le lien entre la puissance acoustique active dissipée à travers la plaque perforée et l'énergie dissipée par viscosité dans une perforation. Ce résultat est primordial pour la modélisation analytique des corrections de col.

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes</b>	<b>28</b>
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes	28
2.1.2	Modélisation des fluctuations acoustiques par les équations de Navier-Stokes	29
2.1.3	Adimensionnement des équations	30
2.1.4	Equation en zone de champ lointain	31
2.1.5	Equation en zone de champ intermédiaire	32
2.1.6	Equation en zone de champ proche	32
<b>2.2</b>	<b>Développement de la méthode multi-échelle</b>	<b>33</b>
2.2.1	Approximation champ lointain	34
2.2.2	Approximation en champ intermédiaire	34
2.2.3	Approximation en champ proche	36
2.2.4	Le raccord des variables de champ lointain et de champ proche	37
<b>2.3</b>	<b>Modélisation de la puissance acoustique dissipée par la plaque perforée</b>	<b>38</b>

## 2.1 Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

### 2.1.1 Les équations de Navier-Stokes

La propagation d'une onde sonore dans un fluide se caractérise par une fluctuation du fluide. Les équations de propagation dérivent donc des équations de Navier-Stokes qui sont classiquement utilisées pour décrire le mouvement d'un fluide. Ces équations sont complexes donc plusieurs hypothèses simplificatrices sont appliquées pour ne tenir compte que des effets prépondérants dans le cas de la propagation du son. Classiquement, les effets visqueux sont négligeables car ils ne modifient l'écoulement que dans une région très fine localisée près des parois (on appelle cette région la couche limite acoustique). Cependant, dans le cas de la réflexion d'une onde plane par une plaque perforée, le diamètre des perforations est également très petit, donc la couche limite acoustique n'est pas négligeable à l'intérieur des perforations. Nous allons expliquer la démarche permettant d'obtenir les équations de l'acoustique linéaire en conservant les termes visqueux à partir des équations de Navier-Stokes.

Rappelons les équations de Navier-Stokes, en l'absence de forces volumiques extérieures et de sources de chaleur

$$\rho^\dagger \left[ \frac{\partial \mathbf{v}^\dagger}{\partial t} + (\mathbf{v}^\dagger \cdot \nabla) \mathbf{v}^\dagger \right] = \operatorname{div} \Sigma^\dagger, \quad (\text{Loi fondamentale de la dynamique}) \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \rho^\dagger}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger) = 0, \quad (\text{Equation de continuité}) \quad (2.1b)$$

$$\rho^\dagger \left[ \frac{\partial e^\dagger}{\partial t} + \mathbf{v}^\dagger \cdot \nabla e^\dagger \right] = -p \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger + \boldsymbol{\tau}^\dagger \odot \mathbf{d}^\dagger - \operatorname{div} \mathbf{q}^\dagger. \quad (\text{Equation d'énergie interne}) \quad (2.1c)$$

Pour fermer ce système, il faut le compléter avec deux équations d'état thermodynamique

$$p^\dagger = p^\dagger(\rho^\dagger, T^\dagger), \quad (\text{Equation d'état thermique}) \quad (2.2)$$

$$e^\dagger = e^\dagger(\rho^\dagger, T^\dagger). \quad (\text{Equation d'état calorifique}) \quad (2.3)$$

Dans ces équations,  $e^\dagger$  désigne l'énergie interne,  $T^\dagger$  la température et le symbole  $\odot$  le produit contracté de deux matrices. Pour la plupart des fluides isotropes, le flux de chaleur  $\mathbf{q}^\dagger$  vérifie la loi de Fourier

$$\mathbf{q}^\dagger = -K^T \nabla T^\dagger, \quad (2.4)$$

où  $K^T$  désigne le coefficient de conductibilité thermique. Le tenseur taux de déformation  $\mathbf{d}^\dagger$  est quant à lui défini par

$$\mathbf{d}^\dagger = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{v}^\dagger + [\nabla \mathbf{v}^\dagger]^T \right). \quad (2.5)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}^\dagger$  dépend du tenseur taux de déformation et des coefficients de viscosité de Lamé  $\mu$  et  $\sigma_L$  (usuellement noté  $\lambda$ )

$$\boldsymbol{\tau}^\dagger = \sigma_L (\operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d}^\dagger, \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. On appelle également  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide. Enfin, on peut donner l'expression du tenseur des contraintes  $\Sigma^\dagger$

$$\Sigma^\dagger = -p^\dagger \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^\dagger = -p^\dagger \mathbf{I} + \sigma_L \left( \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger \right) \mathbf{I} + \mu \left( \nabla \mathbf{v}^\dagger + \left[ \nabla \mathbf{v}^\dagger \right]^\top \right). \quad (2.7)$$

A partir des coefficients de Lamé, on peut définir le coefficient de viscosité volumique  $\xi$

$$3\xi = 3\sigma_L + 2\mu. \quad (2.8)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit alors

$$\boldsymbol{\tau}^\dagger = \left( \xi - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d}^\dagger. \quad (2.9)$$

D'après l'hypothèse de Stokes, la viscosité volumique  $\xi$  est nulle pour des gaz monoatomiques. Dans notre cas, le terme dépendant de la viscosité volumique sera négligeable. Nous faisons donc le choix de supposer l'hypothèse de Stokes valide pour alléger l'écriture des équations bien que l'air ne soit pas un gaz monoatomique. En supposant la viscosité dynamique et la conductibilité thermique constante (égale respectivement à  $\mu_0$  et à  $K_0^\top$ ), nous pouvons réécrire l'équation (2.1)

$$\rho^\dagger \left[ \frac{\partial \mathbf{v}^\dagger}{\partial t} + \left( \mathbf{v}^\dagger \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^\dagger \right] = -\nabla p^\dagger + \mu_0 \Delta \mathbf{v}^\dagger + \frac{1}{3} \mu_0 \nabla \left( \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger \right), \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \rho^\dagger}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger \right) = 0, \quad (2.10b)$$

$$\rho^\dagger \left[ \frac{\partial e^\dagger}{\partial t} + \mathbf{v}^\dagger \cdot \nabla e^\dagger \right] = -p^\dagger \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger - \frac{2}{3} \mu_0 \left( \operatorname{div} \mathbf{v}^\dagger \right)^2 + 2\mu_0 \mathbf{d}^\dagger \odot \mathbf{d}^\dagger - \operatorname{div} \mathbf{q}^\dagger. \quad (2.10c)$$

Dans ce système, on peut remplacer l'équation de l'énergie interne par l'équation de l'entropie spécifique

$$\rho^\dagger \frac{ds^\dagger}{dt} = \frac{\boldsymbol{\tau}^\dagger \odot \mathbf{d}^\dagger}{T^\dagger} - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}^\dagger}{T^\dagger}, \quad (2.11)$$

où la différentielle de l'entropie est définie par

$$ds^\dagger = \frac{1}{T^\dagger} \left( de^\dagger - \frac{p^\dagger}{\rho^{\dagger 2}} d\rho^\dagger \right). \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Modélisation des fluctuations acoustiques par les équations de Navier-Stokes

Dans cette section, nous allons linéariser les équations de continuité (2.10a) et de quantité de mouvement (2.10b) afin d'obtenir les équations de l'acoustique linéaire. Le traitement de l'équation d'énergie est délicat, et nous n'en tiendrons compte que dans le cadre des hypothèses classiques de l'acoustique. Le livre de Bruneau [6] propose une étude complète de la propagation du son dans un milieu dissipatif.

Une perturbation acoustique est une petite fluctuation des champs moyens de pression  $p_0$ , de vitesse  $\mathbf{v}_0$  et de masse volumique  $\rho_0$ . Les champs instantanés  $p^\dagger$ ,  $\mathbf{v}^\dagger$  et  $\rho^\dagger$  peuvent s'écrire comme la superposition des champs moyens et des perturbations acoustiques

$$p^\dagger = p_0 + p, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{v}^\dagger = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \quad (2.14)$$

$$\rho^\dagger = \rho_0 + \rho. \quad (2.15)$$

Usuellement, cette décomposition est notée  $p = p_0 + p'$ . Nous n'avons pas fait ce choix pour alléger les notations car le plus souvent, nous ne considérerons que les perturbations acoustiques.

Dans la suite, nous supposons qu'il n'y a pas d'écoulement moyen ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ) et nous considérerons les champs moyens  $p_0$  et  $\rho_0$  stationnaires et uniformes. Nous supposons également que la masse volumique  $\rho_0$  et la viscosité dynamique  $\mu_0$  du fluide sont indépendantes de la température. Nous pouvons injecter les équations (2.13) et (2.15) dans les équations (2.10a) et (2.10b) et en éliminant les termes supérieurs au premier ordre (on néglige les termes comprenant un produit de deux perturbations), on obtient alors les équations de l'acoustique linéaire avec les effets visqueux

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p - \mu_0 \left( \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) = 0, \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.16b)$$

Ce système contient quatre équations et cinq inconnues. Dans la suite de l'étude, nous allons écrire ces équations à chaque échelle du développement asymptotique. Dans les zones de **champ intermédiaire** et de **champ proche**, le terme  $\partial \rho / \partial t$  est négligeable devant le terme  $\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}$ . Dans ce cas là, on dit que **l'écoulement est incompressible**. L'équation d'état thermique n'est plus valide, et l'équation (2.16) est bien posée, puisque  $\rho$  n'est plus une inconnue. En **champ lointain**, nous ferons les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire : nous considérerons que **l'écoulement est isentropique** (on néglige les effets visqueux et les transferts de chaleur), ainsi des relations existent entre les ratios  $p/p_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $T/T_0$  (où  $T_0$  désigne le champ de température moyen et  $T$  les fluctuations de température)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \quad \text{et} \quad \frac{T}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p}{p_0}, \quad (2.17)$$

où  $\gamma$  est le coefficient adiabatique du gaz considéré. Dans ce cas, on peut également exprimer  $p$  en fonction de  $\rho$

$$p = c_0^2 \rho. \quad (2.18)$$

### 2.1.3 Adimensionnement des équations

Nous allons exprimer l'équation (2.16) en fonction de nombres adimensionnés, pour différencier les phénomènes physiques prépondérants des phénomènes physiques négligeables suivant l'ordre de grandeur de ces nombres. Pour chaque grandeur physique, il faut identifier une valeur de référence. Nous choisissons comme référence la célérité du son  $c_0$  pour définir les vitesses adimensionnées  $\mathbf{w}$ , la pression moyenne  $p_0$  pour définir les pressions adimensionnées  $q$  et la masse volumique moyenne  $\rho_0$  pour définir les perturbations de masse volumique adimensionnées  $\zeta$

$$\mathbf{v} = c_0 \mathbf{w}, \quad (2.19)$$

$$p = p_0 q, \quad (2.20)$$

$$\rho = \rho_0 \zeta. \quad (2.21)$$

Nous devons également identifier un temps et une longueur caractéristique. Nous supposons que la dépendance temporelle des variables est harmonique, ainsi le temps caractéristique choisi est une période temporelle  $\tau$ . Elle est définie en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , de la célérité du son  $c_0$  ou du nombre d'onde  $k$

$$\tau = \frac{\lambda}{c_0} = \frac{2\pi}{kc_0}. \quad (2.22)$$

La longueur caractéristique dépendra de l'échelle de longueur que nous considérerons lors de l'analyse asymptotique. Pour le moment, nous choisissons la notation générique  $L_c$ . Nous définissons un temps adimensionné  $t_{\text{ad}}$  et une longueur adimensionnée  $x_{\text{ad}}$

$$x = L_c x_{\text{ad}}, \quad (2.23)$$

$$t = \frac{\lambda}{c_0} t_{\text{ad}} = \frac{2\pi}{kc_0} t_{\text{ad}}. \quad (2.24)$$

Les dérivées spatiales et temporelles s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L_c} \frac{\partial}{\partial x_{\text{ad}}}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{c_0}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ad}}} = \frac{kc_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ad}}}. \quad (2.26)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (2.16) en variables adimensionnées

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t_{\text{ad}}} + \frac{p_0}{\omega \rho_0 c_0 L_c} \nabla_{\text{ad}} q - \frac{\mu_0}{\omega \rho_0 L_c^2} \left( \Delta_{\text{ad}} \mathbf{w} + \frac{1}{3} \nabla_{\text{ad}} \left( \text{div}_{\text{ad}} \mathbf{w} \right) \right) = 0, \quad (2.27a)$$

$$\frac{kL_c}{2\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial t_{\text{ad}}} + \text{div}_{\text{ad}} \mathbf{w} = 0. \quad (2.27b)$$

Dans l'équation (2.27), nous pouvons identifier deux nombres adimensionnés. Dans l'équation (2.27b), on reconnaît le nombre de Helmholtz ( $\text{He} = kL_c$ ) tandis que dans l'équation (2.27a), on peut identifier le carré du nombre de Stokes ( $\text{Sto}^2 = \omega \rho_0 L_c^2 / \mu_0$ ). Ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t_{\text{ad}}} + \frac{p_0}{\omega \rho_0 c_0 L_c} \nabla_{\text{ad}} q - \frac{1}{\text{Sto}^2} \left( \Delta_{\text{ad}} \mathbf{w} + \frac{1}{3} \nabla_{\text{ad}} \left( \text{div}_{\text{ad}} \mathbf{w} \right) \right) = 0, \quad (2.28a)$$

$$\frac{\text{He}}{2\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial t_{\text{ad}}} + \text{div}_{\text{ad}} \mathbf{w} = 0. \quad (2.28b)$$

Ces nombres adimensionnés dépendent de la longueur caractéristique  $L_c$  qui va changer à chaque échelle du développement asymptotique. Selon les valeurs prises par les nombres caractéristiques, les termes qu'ils précèdent dans les équations seront négligeables ou non. Ainsi, les effets physiques prépondérants à chaque échelle de la modélisation asymptotique pourront être identifiés.

Dans la suite de cette section, nous pourrions distinguer les équations adimensionnées des équations dimensionnées par l'utilisation des notations  $q$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\zeta$ . Nous ne ferons plus apparaître l'indice  $_{\text{ad}}$  pour alléger les notations.

#### 2.1.4 Equation en zone de champ lointain

En champ lointain, l'échelle caractéristique est la longueur d'onde  $\lambda$ . Pour  $L_c = \lambda$ , le nombre de Helmholtz est égal à  $2\pi$  donc les deux termes de l'équation (2.28b) doivent être conservés. Par

contre, le nombre de Stokes est très grand (supérieur à 1000 pour les configurations citées dans le tableau 1.1), donc les effets visqueux sont négligeables. On peut écrire les équations en variables dimensionnées à cette échelle

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \tilde{p} = 0, \quad (2.29a)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (2.29b)$$

On retrouve les équations classiques de l'acoustique linéaire. En considérant les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire (équations (2.17) et (2.18)), on peut écrire

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \tilde{p} = 0, \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (2.30b)$$

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \quad (2.30c)$$

Les deux premières lignes peuvent être combinées pour trouver l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{p} = 0. \quad (2.31)$$

A l'échelle des longueurs d'onde, les équations valides sont les équations classiquement étudiées en acoustique linéaire où les effets visqueux ne sont pas pris en compte. L'équation (2.31) peut être résolue pour calculer le champ de pression et en déduire les champs de vitesse et de masse volumique.

### 2.1.5 Equation en zone de champ intermédiaire

En zone de champ intermédiaire, la longueur caractéristique est la distance entre les perforations  $l$ . Cette distance est petite devant la longueur d'onde ainsi le nombre de Helmholtz est petit. Le terme  $\partial \zeta / \partial t$  est donc négligeable à cette échelle, et l'équation (2.28b) s'écrit  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ . Cette équation est caractéristique des écoulements incompressibles. A cette échelle, les nombres de Stokes sont grands (supérieur à 50 pour les configurations citées dans le tableau 1.1), donc comme en champ lointain, les effets visqueux ne sont pas pris en compte. Les équations valides à cette échelle sont donc les équations d'Euler linéarisées incompressibles sans écoulement moyen

$$\rho_0 \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \check{p} = 0, \quad (2.32a)$$

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{v}} = 0. \quad (2.32b)$$

La notation  $\check{\phantom{x}}$  désigne les variables en zone de champ intermédiaire. Tuck [61] a étudié ce type de problème dans des configurations impliquant des écoulements dans des perforations de petite taille. Nous verrons dans la section suivante que Sanchez-Palencia et collab. ont exploité ses résultats.

### 2.1.6 Equation en zone de champ proche

En zone de champ proche, la longueur caractéristique est le rayon des perforations  $r_0$ . Le rayon des perforations étant plus faible que la distance entre les perforations, le nombre de Helmholtz

est plus petit à cette échelle qu'en zone de champ intermédiaire donc l'écoulement est également incompressible. Par contre, les nombres de Stokes sont compris entre 0.5 et 15, donc le terme portant les effets visqueux doit être pris en compte. Cependant ce terme se simplifie car l'écoulement est incompressible

$$\Delta_{\text{ad}} \mathbf{w} + \frac{1}{3} \nabla_{\text{ad}} \left( \text{div}_{\text{ad}} \mathbf{w} \right) = \Delta_{\text{ad}} \mathbf{w}. \quad (2.33)$$

Les équations valides en zone de champ proche sont les équations de Stokes linéarisées incompressibles instationnaires

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla P - \mu_0 \Delta \mathbf{V} = 0, \quad (2.34a)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2.34b)$$

Ce sont les équations considérées par Crandall [9] pour développer son modèle d'impédance acoustique.

## 2.2 Développement de la méthode multi-échelle

Nous allons présenter la méthode utilisée par Sanchez-Palencia et collab. pour l'analyse multi-échelle de la réflexion d'une onde acoustique par une plaque perforée. Nous allons vérifier que les équations explicitées à chaque échelle sont les mêmes que celles que nous avons énoncées dans la section précédente par des raisonnements d'analyse dimensionnelle. Nous allons également donner l'expression des champs de pression et de vitesse à chaque échelle et ainsi exprimer les raccords entre les variables en champ lointain et en champ proche. Ici, nous ne donnerons que les principales étapes du raisonnement de Sanchez-Palencia et collab., mais on peut trouver plus de détails dans leur publication [53].

Soit le domaine  $\Omega^\epsilon$  formé de deux domaines séparés par une plaque perforée. Soit deux paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  qui sont fonctions l'un de l'autre avec

$$\epsilon, \eta \rightarrow 0; \quad \epsilon/\eta \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

La plaque perforée (située à la position  $x_1 = x_\Gamma = 0$ ) est définie comme un réseau de perforations droit avec une distance  $l$  entre les perforations identiques dans les deux directions. Les perforations sont circulaires et leur rayon est noté  $r_0$ . Posons deux longueurs  $L$  et  $R_0$ , définies par

$$l = \eta L, \quad (2.36)$$

$$r_0 = \epsilon R_0, \quad (2.37)$$

telles que  $L$  et  $R_0$  soient de l'ordre de l'unité.

On cherche les fonctions  $\mathbf{v}^\epsilon$  et  $p^\epsilon$  solutions du problème

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}^\epsilon}{\partial t} = -\nabla p^\epsilon + \epsilon^2 \Upsilon_0 \left( \Delta \mathbf{v}^\epsilon + \frac{1}{3} \nabla (\text{div} \mathbf{v}^\epsilon) \right), \quad (2.38a)$$

$$\frac{\partial p^\epsilon}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \text{div} \mathbf{v}^\epsilon = 0, \quad (2.38b)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega^\epsilon, \quad (2.38c)$$

avec  $\epsilon^2 \Upsilon_0 = \mu_0$ . Ce dimensionnement garantit un nombre de Stokes normalisé (d'ordre  $1 = \epsilon^0$ ) en champ proche

$$\text{Sto}^2 = \frac{\omega \rho_0 r_0^2}{\mu_0}, \quad (2.39)$$

car  $r_0 = \epsilon R_0$ .

Comme nous l'avons dit dans la section 2.1.2, l'équation (2.38b) devrait normalement s'écrire

$$\frac{\partial \rho^\epsilon}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon = 0, \quad (2.40)$$

mais nous avons vu précédemment que le terme  $\partial \rho / \partial t$  disparaît dans les zones de champ intermédiaire et de champ proche. Comme en champ lointain la relation  $p = c_0^2 \rho$  est valide, les équations (2.38b) et (2.40) sont équivalentes.

### 2.2.1 Approximation champ lointain

On cherche  $p^\epsilon$  et  $\mathbf{v}^\epsilon$  sous la forme

$$p^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}^0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \tilde{p}^1(\mathbf{x}, t) + O(\epsilon), \quad (2.41)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \tilde{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}, t) + O(\epsilon). \quad (2.42)$$

A l'ordre  $\epsilon^0$ , les équations (2.38a) et (2.38b) s'écrivent

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^0}{\partial t} + \nabla \tilde{p}^0 = 0, \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^0 = 0. \quad (2.43b)$$

On retrouve les équations de la section 2.1.4. A cette échelle, la plaque perforée délimite deux domaines  $\tilde{\Omega}_I$  et  $\tilde{\Omega}_{II}$ . Sur la plaque perforée, les traces des champs de pression et de vitesse sont définies par

$$\tilde{p}_g(x_2, x_3, t) = \tilde{p}_I^0(x_\Gamma, x_2, x_3, t) \quad (2.44)$$

$$\tilde{p}_d(x_2, x_3, t) = \tilde{p}_{II}^0(x_\Gamma, x_2, x_3, t) \quad (2.45)$$

$$\tilde{v}_g(x_2, x_3, t) = \tilde{\mathbf{v}}_I^0(x_\Gamma, x_2, x_3, t) \quad (2.46)$$

$$\tilde{v}_d(x_2, x_3, t) = \tilde{\mathbf{v}}_{II}^0(x_\Gamma, x_2, x_3, t) \quad (2.47)$$

Notre objectif est de relier ces quatre quantités par une condition de transmission qui proviendra des propriétés des champs intermédiaires.

### 2.2.2 Approximation en champ intermédiaire

Au voisinage de la paroi située en  $x_1 = x_\Gamma = 0$ , on considère une nouvelle variable

$$\check{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\eta}. \quad (2.48)$$

On considère un développement de  $p^\epsilon$  et  $v^\epsilon$  dépendant de  $\mathbf{x} = (x_2, x_3)$  et  $\check{\mathbf{x}} = (\check{x}_1, \check{x}_2, \check{x}_3)$

$$p^\epsilon(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) = \check{p}^0(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) + \eta \check{p}^1(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) + O(\eta), \quad (2.49)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) = \check{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) + \eta \check{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) + O(\eta). \quad (2.50)$$

Les équations (2.38a) et (2.38b) s'écrivent alors

$$\check{\nabla} \check{p}^0 = 0, \quad (2.51a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \check{\mathbf{v}}^0}{\partial t} = -\nabla \check{p}^0 - \check{\nabla} \check{p}^1, \quad (2.51b)$$

$$\text{div} \check{\mathbf{v}}^0 = 0, \quad (2.51c)$$

où  $\check{\nabla}$  (resp.  $\check{\text{div}}$ ) désigne le gradient (resp. la divergence) par rapport à la variable  $\check{\mathbf{x}}$ . L'équation (2.51) est similaire à celles trouvées dans la section 2.1.5.

On déduit immédiatement de l'équation (2.51a) que  $\check{p}^0$  ne dépend pas de  $\check{\mathbf{x}}$

$$\check{p}^0 = \check{p}^0(x_2, x_3, t). \quad (2.52)$$

Le champ de vitesse étant à divergence nulle (équation (2.51c)),  $\check{p}^1$  vérifie l'équation de Laplace.

$$\check{\Delta} \check{p}^1 = 0. \quad (2.53)$$

A cette échelle, la plaque perforée sépare deux domaines discontinus. Dans le domaine à gauche de la plaque (pour  $x_1 < 0$ ), les perforations sont modélisées comme des puits apparents tandis que dans le domaine à droite de la plaque (pour  $x_1 > 0$ ), elles sont modélisées comme des sources apparentes. Pour des sources apparentes et des puits apparents de même amplitude, Tuck [61] a étudié cette configuration. Pour un flux unitaire à travers le réseau de perforation, sa solution  $\varphi_T$  s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_T = & -\frac{1}{4\pi L} \Phi_T \left( \frac{\check{x}_2}{L}, \frac{(\check{x}_1^2 + \check{x}_3^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi L} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_T \left( \frac{\check{x}_2}{L}, \frac{(\check{x}_1^2 + (\check{x}_3 - iL)^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \right) + \Phi_T \left( \frac{\check{x}_2}{L}, \frac{(\check{x}_1^2 + (\check{x}_3 + iL)^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \right) - 2\Phi_T(0, i) \right], \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec

$$\Phi_T(Y, R) = \frac{1}{(Y^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{((k - Y)^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{((k + Y)^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{k} \right]. \quad (2.55)$$

Dans notre cas, nous supposons pour le moment que les sources apparentes et les puits apparents peuvent être d'amplitude différente (nous montrerons en champ proche que leur amplitude est identique) ainsi on écrit

$$\check{p}_g^1 = \alpha_g(x_2, x_3, t) \varphi_T + \beta_g(x_2, x_3, t), \quad (2.56)$$

$$\check{p}_d^1 = \alpha_d(x_2, x_3, t) \varphi_T + \beta_d(x_2, x_3, t), \quad (2.57)$$

où  $\check{p}_g^1 = \check{p}^1$  pour  $x_1 < 0$  et  $\check{p}_d^1 = \check{p}^1$  pour  $x_1 > 0$ . Les variables  $\alpha_g(x_2, x_3, t)$  et  $\alpha_d(x_2, x_3, t)$  sont les amplitudes des puits et des sources.

Tuck a étudié le comportement à l'infini de la fonction  $\varphi_T$

$$\lim_{\check{x}_1 \rightarrow -\infty} \varphi_T = \frac{-\check{x}_1 + C}{2L^2}, \quad (2.58)$$

$$\lim_{\check{x}_1 \rightarrow +\infty} \varphi_T = \frac{\check{x}_1 + C}{2L^2}, \quad (2.59)$$

où  $C$  est une constante. Ainsi pour  $x_1 < 0$

$$\lim_{\check{x}_1 \rightarrow -\infty} \rho_0 \frac{\partial \check{v}_1^0}{\partial t} = \frac{\alpha_g(x_2, x_3, t)}{2L^2}. \quad (2.60)$$

Les raccords avec le champ lointain s'écrivent alors

$$\lim_{\check{x}_1 \rightarrow -\infty} \check{v}_1^0 = \tilde{v}_g(x_2, x_3, t), \quad (2.61)$$

$$\check{p}^0(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}_g(x_2, x_3, t), \quad (2.62)$$

$$\check{p}^1(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) = 2L^2 \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}_g}{\partial t}(x_2, x_3, t) \varphi_T(\check{\mathbf{x}}) + \beta_g(\mathbf{x}, t), \quad (2.63)$$

Si on injecte les équations (2.62) et (2.63) dans l'expression (2.49) de  $p^\epsilon$  on obtient

$$p^\epsilon = \tilde{p}_g(x_2, x_3, t) + \eta 2L^2 \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}_g}{\partial t}(x_2, x_3, t) \varphi_T + O(\eta) \quad \text{pour } x_1 < 0, \quad (2.64)$$

Pour  $x_1 > 0$ , les raccords avec la zone de champ lointain s'écrivent

$$\lim_{\check{x}_1 \rightarrow +\infty} \check{v}_1^0 = \tilde{v}_d(x_2, x_3, t), \quad (2.65)$$

$$\check{p}^0(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}_d(x_2, x_3, t), \quad (2.66)$$

$$\check{p}^1(\mathbf{x}, \check{\mathbf{x}}, t) = -2L^2 \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}_d}{\partial t}(x_2, x_3, t) \varphi_T(\check{\mathbf{x}}) + \beta_d(\mathbf{x}, t), \quad (2.67)$$

où  $f_d$  est une fonction indépendante de  $\check{\mathbf{x}}$ . Le champ de pression s'écrit dans ce cas

$$p^\epsilon = \tilde{p}_d(x_2, x_3, t) - \eta 2L^2 \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}_d}{\partial t}(x_2, x_3, t) \varphi_T + O(\eta) \quad \text{pour } x_1 > 0, \quad (2.68)$$

Les expressions (2.64) et (2.68) de  $p^\epsilon$  nous permettrons de raccorder les pressions définies dans la zone de champ proche avec celle définies en champ lointain.

### 2.2.3 Approximation en champ proche

On prend comme origine du repère le centre d'une perforation, et on introduit la variable locale

$$\check{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}. \quad (2.69)$$

On pose

$$p^\epsilon = \check{p}^*(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) + \dots, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{v}^\bullet(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) + \dots, \quad (2.71)$$

A l'ordre  $\epsilon^{-1}$ , l'équation (2.38b) s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^\bullet = 0, \quad (2.72)$$

qui montre que l'écoulement dans une perforation est incompressible. Par conséquent, les flux de vitesses en amont et en aval de la perforation sont égaux. Cela assure la continuité de la vitesse normale à la paroi définie en champ lointain  $\tilde{v}_g = \tilde{v}_d$ . Dorénavant, nous noterons cette vitesse  $\tilde{v}_\Gamma$ . De plus, le flux de vitesse  $\mathbf{v}^\epsilon$  à travers chaque perforation est égal au flux de vitesse sur une cellule du réseau de perforations, ainsi

$$\tilde{Q} = \eta^2 L^2 \tilde{v}_\Gamma = \epsilon^2 \int_{\Gamma_S^*} v_1^\bullet d\Gamma_S, \quad (2.73)$$

avec  $\Gamma_S^*$  la section d'une perforation décrite dans les variables locales. Par conséquent  $\mathbf{v}^\bullet$  est de l'ordre de  $(\eta/\epsilon)^2$ . En développant le raisonnement, on montrerait que si  $\epsilon/\eta^2$  tendait vers zéro, les raccords pour  $p^\epsilon$  donneraient  $\tilde{v}_\Gamma = 0$ , et la plaque perforée serait considérée comme une paroi rigide impliquant une réflexion totale. Si  $\epsilon/\eta^2$  tendait vers l'infini, on obtiendrait  $(\tilde{p}_g - \tilde{p}_d) = 0$  et la plaque perforée serait considérée comme inexistante. Ainsi, pour éviter ces deux cas, on pose  $\epsilon = \eta^2$ . On peut alors réécrire les expressions de  $p^\epsilon$  et  $\mathbf{v}^\epsilon$

$$p^\epsilon = \tilde{p}^0(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) + \dots, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \check{\mathbf{v}}^0(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) + \dots, \quad (2.75)$$

et les équations (2.38a) et (2.38b) s'écrivent

$$\rho_0 \frac{\partial \check{\mathbf{v}}^0}{\partial t} = -\check{\nabla} \tilde{p}^0 + \Upsilon_0 \check{\Delta} \check{\mathbf{v}}^0, \quad (2.76)$$

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{v}}^0 = 0. \quad (2.77)$$

On reconnaît ici les équations de Stokes linéarisées incompressibles instationnaires écrites dans la section 2.1.6. Le comportement de la fonction  $\varphi_T$  de Tuck quand  $\check{\mathbf{x}}$  tend vers 0 est  $\varphi_T \underset{\check{\mathbf{x}} \rightarrow 0}{\sim} (4\pi |\check{\mathbf{x}}|)^{-1}$ .

En écrivant le développement (2.64) selon la variable  $\check{\mathbf{x}}$ , on obtient

$$p^\epsilon = \tilde{p}_g(x_2, x_3, t) + \frac{\rho_0 L^2}{2\pi} \frac{\partial \tilde{v}_g}{\partial t} \frac{1}{|\check{\mathbf{x}}|} + \dots \quad \text{pour } \check{x}_1 < 0, \quad (2.78)$$

$$p^\epsilon = \tilde{p}_d(x_2, x_3, t) - \frac{\rho_0 L^2}{2\pi} \frac{\partial \tilde{v}_d}{\partial t} \frac{1}{|\check{\mathbf{x}}|} + \dots \quad \text{pour } \check{x}_1 > 0. \quad (2.79)$$

Dans les sections suivantes, nous allons exprimer les raccords entre les variables en champ lointain et les variables en champ proche.

### 2.2.4 Le raccord des variables de champ lointain et de champ proche

La limite des expressions (2.78) et (2.79) de  $p^\epsilon$  quand  $|\check{\mathbf{x}}|$  tend vers l'infini donne

$$\tilde{p}_g(x_2, x_3, t) = \lim_{|\check{\mathbf{x}}| \rightarrow +\infty} \tilde{p}^0(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) \quad \text{pour } \check{x}_1 < 0, \quad (2.80)$$

$$\tilde{p}_d(x_2, x_3, t) = \lim_{|\check{\mathbf{x}}| \rightarrow +\infty} \tilde{p}^0(x_2, x_3, \check{\mathbf{x}}, t) \quad \text{pour } \check{x}_1 > 0. \quad (2.81)$$

Grâce à l'incompressibilité de l'écoulement dans la perforation, on peut écrire le raccord des flux de vitesse

$$\int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{v}_\Gamma d\tilde{\Gamma}_1 = \epsilon \int_{\Gamma_S^*} v_1^0 d\tilde{\Gamma}_S^*, \quad (2.82)$$

avec  $\tilde{\Gamma}_1$  une cellule du réseau de perforations exprimée dans les variables de champ lointain. En notant  $\tilde{Q}$  et  $\dot{Q}$  les flux de vitesse en champ lointain et en champ proche, l'équation (2.82) s'écrit

$$\tilde{Q} = \epsilon \dot{Q}. \quad (2.83)$$

Les équations (2.80) à (2.82) permettent donc de lier les variables de champ lointain avec celles de champ proche. On voit ici que la justification mathématique des relations données dans la section 1.3.3 est loin d'être triviale. On remarquera qu'elles ont été simplifiées car elle ne tiennent pas compte du facteur d'échelle  $\epsilon$ .

### 2.3 Modélisation de la puissance acoustique dissipée par la plaque perforée

La partie réelle de l'impédance d'une plaque perforée peut se calculer à partir de la puissance acoustique active dissipée à travers la plaque (voir section 1.4.3). Nous allons montrer qu'il existe un lien entre cette puissance acoustique et le travail des efforts visqueux dans la perforation. Ce travail sera calculé en zone de champ proche, tandis que l'impédance est une grandeur champ lointain. En utilisant, les raccords montrés dans la partie précédente, nous allons lier ces deux grandeurs.

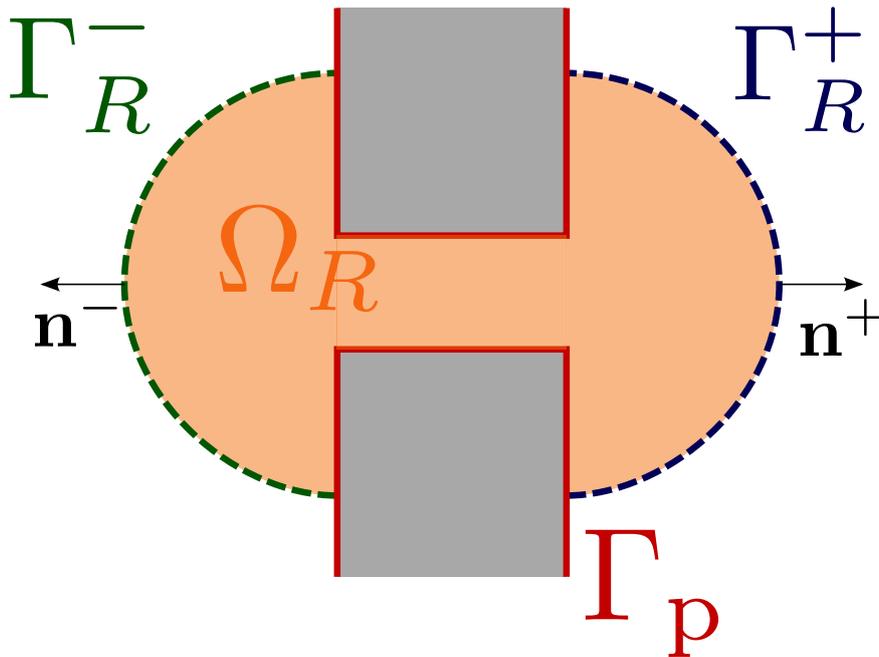


FIGURE 2.1 – Schéma de la zone de champ proche

On considère un domaine  $\dot{\Omega}_R$  défini en champ proche autour d'une perforation (voir figure 2.1). L'épaisseur de la plaque est notée  $H$  en grandeur « champ proche ». La frontière  $\dot{\Gamma}_R$  du domaine  $\dot{\Omega}_R$  est composée du bord de la perforation  $\dot{\Gamma}_p$  et de deux frontières  $\dot{\Gamma}_R^+$  et  $\dot{\Gamma}_R^-$  définies par

$$\dot{\Gamma}_R^- = \left\{ \dot{\mathbf{x}} \in \dot{\Omega}_R, |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_c^-| = R, \dot{X}_1 < -\frac{H}{2} \right\}, \quad (2.84)$$

$$\dot{\Gamma}_R^+ = \left\{ \dot{\mathbf{x}} \in \dot{\Omega}_R, |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_c^+| = R, \dot{X}_1 > -\frac{H}{2} \right\}. \quad (2.85)$$

où  $\dot{\mathbf{x}}_c^- = (-H/2, 0, 0)$  et  $\dot{\mathbf{x}}_c^+ = (H/2, 0, 0)$ . En champ proche, l'équation de l'énergie cinétique peut être obtenue à partir de l'équation de Stokes [24]

$$\frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial |\dot{\mathbf{v}}|^2}{\partial t} = -\dot{\nabla} \dot{p} \cdot \dot{\mathbf{v}} + 2\Upsilon_0 \left[ \text{div} \dot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right], \quad (2.86)$$

avec  $|\dot{\mathbf{v}}|^2 = \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}$  et  $\dot{\mathbf{d}}$  le tenseur taux de déformation exprimé en variable de champ proche

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left( \dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}} + [\dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}}]^\top \right). \quad (2.87)$$

Après intégration de l'équation (2.86) sur le domaine  $\dot{\Omega}_R$  et une intégration par parties de chaque terme, on aboutit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\dot{\Omega}_R} \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}^2}{\partial t} d\dot{\Omega}_R &= \int_{\dot{\Omega}_R} (\text{div} \dot{\mathbf{v}}) \dot{p} d\dot{\Omega}_R - 2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot (\dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}})^\top d\dot{\Omega}_R \\ &\quad - \int_{\dot{\Gamma}_R} \dot{p} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}} d\dot{\Gamma}_R + 2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Gamma}_R} \dot{\mathbf{n}}^\top \dot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R. \end{aligned} \quad (2.88)$$

En champ proche, nous supposons que l'écoulement est incompressible (voir équation (2.34b)), ainsi le terme  $(\text{div} \dot{\mathbf{v}}) \dot{p}$  est nul sur le domaine  $\dot{\Omega}_R$ . Sur la frontière  $\dot{\Gamma}_p$  de la perforation, la condition d'adhérence à la paroi impose  $\dot{\mathbf{v}} = 0$ , ainsi

$$\begin{aligned} - \int_{\dot{\Gamma}_R} \dot{p} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}} d\dot{\Gamma}_R + 2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Gamma}_R} \dot{\mathbf{n}}^\top \dot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R \\ = - \int_{\dot{\Gamma}_R^-} [\dot{p} \dot{\mathbf{n}}_-^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_-^\top \dot{\mathbf{d}}] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^- - \int_{\dot{\Gamma}_R^+} [\dot{p} \dot{\mathbf{n}}_+^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_+^\top \dot{\mathbf{d}}] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^+. \end{aligned} \quad (2.89)$$

L'équation (2.88) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \int_{\dot{\Omega}_R} \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}^2}{\partial t} d\dot{\Omega}_R &= - \int_{\dot{\Gamma}_R^+} [\dot{p} \dot{\mathbf{n}}_+^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_+^\top \dot{\mathbf{d}}] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^+ \\ &\quad - \int_{\dot{\Gamma}_R^-} [\dot{p} \dot{\mathbf{n}}_-^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_-^\top \dot{\mathbf{d}}] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^- - 2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot (\dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}})^\top d\dot{\Omega}_R. \end{aligned} \quad (2.90)$$

On peut remarquer que

$$2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot (\dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}})^\top d\dot{\Omega}_R = \Upsilon_0 \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot \left( \dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}} + [\dot{\nabla} \dot{\mathbf{v}}]^\top \right) d\dot{\Omega}_R, \quad (2.91)$$

$$= 2\Upsilon_0 \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot \dot{\mathbf{d}} d\dot{\Omega}_R. \quad (2.92)$$

On pose  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \dot{\Omega}_R = \dot{\Omega}$  où  $\dot{\Omega}$  désigne la zone de champ proche. Ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Omega}_R} \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}^2}{\partial t} d\dot{\Omega}_R = \int_{\dot{\Omega}} \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}^2}{\partial t} d\dot{\Omega}, \quad (2.93)$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Omega}_R} \dot{\mathbf{d}} \odot \dot{\mathbf{d}} d\dot{\Omega}_R = \int_{\dot{\Omega}} \dot{\mathbf{d}} \odot \dot{\mathbf{d}} d\dot{\Omega}. \quad (2.94)$$

Traisons maintenant les intégrales surfaciques. A l'infini la vitesse est uniforme, ainsi le tenseur taux de déformation est négligeable devant la pression

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \left[ \dot{p} \dot{\mathbf{n}}_-^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_-^\top \dot{\mathbf{d}} \right] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^- = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \dot{p} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_- d\dot{\Gamma}_R^-. \quad (2.95)$$

Le champ de pression est uniforme  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \dot{p}(\dot{\mathbf{x}}) = \tilde{p}_g$ , ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \dot{p} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_- d\dot{\Gamma}_R^- = \tilde{p}_g \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_- d\dot{\Gamma}_R^-. \quad (2.96)$$

De même on peut écrire

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^+} \left[ \dot{p} \dot{\mathbf{n}}_+^\top + 2\Upsilon_0 \dot{\mathbf{n}}_+^\top \dot{\mathbf{d}} \right] \dot{\mathbf{v}} d\dot{\Gamma}_R^+ = \tilde{p}_d \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\dot{\Gamma}_R^+} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_+ d\dot{\Gamma}_R^+. \quad (2.97)$$

L'écoulement est incompressible ainsi les flux de vitesse à travers les surfaces  $\dot{\Gamma}_R^+$  et  $\dot{\Gamma}_R^-$  sont égaux

$$\dot{Q} = - \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_- d\dot{\Gamma}_R^- = \int_{\dot{\Gamma}_R^+} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_+ d\dot{\Gamma}_R^+. \quad (2.98)$$

Finalement, en utilisant le raccord (2.82), on peut écrire

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{p}_g \int_{\dot{\Gamma}_R^-} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_- d\dot{\Gamma}_R^- + \tilde{p}_d \int_{\dot{\Gamma}_R^+} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}_+ d\dot{\Gamma}_R^+ = \frac{1}{\epsilon} (\tilde{p}_g - \tilde{p}_d) \dot{Q}. \quad (2.99)$$

En regroupant ces différents résultats, la limite quand  $R$  tend vers l'infini de l'équation (2.90) s'écrit

$$\int_{\dot{\Omega}_R} \rho_0 \frac{\partial |\dot{\mathbf{v}}|^2}{\partial t} d\dot{\Omega}_R = \frac{1}{\epsilon} (\tilde{p}_g - \tilde{p}_d) \dot{Q} - \dot{W}. \quad (2.100)$$

où  $\dot{W} = \int_{\dot{\Omega}} \dot{\mathbf{d}} \odot \dot{\mathbf{d}} d\dot{\Omega}$ . C'est l'expression du travail normalisé des efforts visqueux au voisinage d'un trou.

Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.2.1, nous considérons que les champs de pression et de vitesse ont une dépendance temporelle harmonique. Nous pouvons calculer une moyenne temporelle de l'équation (2.100) en l'intégrant sur une période  $\tau$ . Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_{\dot{\Omega}} \rho_0 \frac{\partial |\dot{\mathbf{v}}|^2}{\partial t} d\dot{\Omega} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \int_{\dot{\Omega}} \int_0^\tau \rho_0 \frac{\partial |\dot{\mathbf{v}}|^2}{\partial t} dt d\dot{\Omega}, \quad (2.101)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \int_{\dot{\Omega}} \rho_0 \left( |\dot{\mathbf{v}}|^2(\tau) - |\dot{\mathbf{v}}|^2(0) \right) d\dot{\Omega} = 0, \quad (2.102)$$

car  $\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \dot{\mathbf{v}}(0)$ . En notant  $\langle \dot{W} \rangle$  la moyenne temporelle du travail normalisé des efforts visqueux au voisinage d'une perforation, on peut écrire

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\tilde{p}_g - \tilde{p}_d) \tilde{Q} dt. \quad (2.103)$$

Le second membre de cette équation représente la puissance acoustique dissipée par la plaque perforée, qu'on peut exprimer en fonction de la partie réelle de l'impédance (voir section 1.4.3)

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\tilde{p}_g - \tilde{p}_d) \tilde{Q} dt = \frac{l^2}{\tau} \int_0^\tau (\tilde{p}_g(\mathbf{x}, t) - \tilde{p}_d(\mathbf{x}, t)) \tilde{v}_\Gamma(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.104)$$

$$= \frac{l^2}{\tau} \int_0^\tau \Re \left( [\widehat{p}_g(\mathbf{x}) - \widehat{p}_d(\mathbf{x})] e^{j\omega t} \right) \Re \left( \widehat{v}_\Gamma(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right) dt \quad (2.105)$$

$$= \frac{l^2}{2} \Re \left( [\widehat{p}_g(\mathbf{x}) - \widehat{p}_d(\mathbf{x})] \widehat{v}_\Gamma^*(\mathbf{x}) \right) \quad (2.106)$$

$$= \frac{1}{2} R_{Z_w} l^2 |\widehat{v}_\Gamma|^2. \quad (2.107)$$

Finalement, on peut exprimer la résistance de la plaque perforée en fonction de la moyenne temporelle du travail normalisé des efforts visqueux au voisinage d'une perforation

$$R_{Z_w} = \frac{2\epsilon \langle \dot{W} \rangle}{l^2 |\widehat{v}_\Gamma|^2}. \quad (2.108)$$

### Remarque

Ici, le travail  $\dot{W}$  des efforts visqueux au voisinage d'une perforation que nous avons exprimé ne dépend pas de  $\epsilon$ , c'est pourquoi on l'a qualifié de « normalisé ». On peut définir le travail « réel »  $W$  par

$$W = 2\mu_0 \int_{\Omega_R} \mathbf{d} \odot \mathbf{d} d\Omega = \epsilon \dot{W}. \quad (2.109)$$

Ainsi

$$R_{Z_w} = \frac{2 \langle W \rangle}{l^2 |\widehat{v}_\Gamma|^2}. \quad (2.110)$$

Pour déterminer la résistance d'une plaque perforée, on peut calculer le travail des efforts visqueux dans une perforation. On remarque que son expression ne requiert que la connaissance des gradients de vitesse dans la perforation et son voisinage.

Dans ce chapitre, la modélisation par analyse asymptotique de la réponse acoustique d'une plaque perforée en tenant compte des effets visqueux a été développée. L'analyse dimensionnelle des équations nous a permis d'identifier les effets physiques prépondérants et négligeables à chaque échelle. Les expressions des raccords entre les échelles que nous avons énoncées dans le chapitre précédent ont été justifiées. Enfin, nous avons également utilisé ces résultats pour montrer le lien entre la résistance de la plaque perforée et l'énergie dissipée par viscosité dans une perforation. Ce résultat est important, car il est à l'origine des modèles de corrections de col pour la résistance. Leur développement sera l'objet du prochain chapitre.



## Modélisation théorique des corrections de col

Dans les différents modèles d'impédance acoustique, les effets à l'intérieur des perforations sont dissociés des effets dus à leurs extrémités. Ces derniers sont pris en compte dans les modèles par une correction de la longueur des perforations, qu'on appelle **correction de col**. Pour la réactance, les corrections de col dérivent des résultats analytiques de Rayleigh. Pour la résistance, la correction de col usuellement retenue a été formulée par Ingard. Son résultat est issu de la corrélation d'un calcul analytique de Nielsen avec des mesures expérimentales. Dans ce chapitre, nous allons développer une méthode pour calculer analytiquement les corrections de col associées à la résistance. Pour cela, nous allons utiliser le dernier résultat du chapitre précédent, qui lie la résistance avec la dissipation de l'énergie dans une perforation. Pour calculer l'expression de cette dissipation, nous devons d'abord exprimer le champ de vitesse dans une couche limite acoustique. Nous en déduisons l'expression du travail des efforts visqueux dans cette couche limite. A partir de ce résultat, nous pourrions calculer analytiquement les corrections de col.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Solution de l'équation de Stokes par une méthode multi-échelle . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1.1	Les équations de Stokes en présence d'une paroi . . . . .	44
3.1.2	Le champ extérieur . . . . .	46
3.1.3	Le champ intérieur . . . . .	46
3.1.4	Le raccord des champs extérieur et intérieur . . . . .	48
3.1.5	Ecriture de la solution du problème initial . . . . .	49
<b>3.2</b>	<b>Calcul du travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique . .</b>	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Evaluation de l'énergie dissipée par une plaque perforée . . . . .</b>	<b>51</b>
3.3.1	Le calcul à l'intérieur d'une perforation . . . . .	51
3.3.2	Dissipation de l'énergie sur les parois de la plaque perforée . . . . .	53
3.3.3	Discussion des valeurs calculées . . . . .	56

---

### 3.1 Solution de l'équation de Stokes par une méthode multi-échelle

Dans cette section, nous allons expliciter le calcul d'un écoulement visqueux incompressible harmonique en présence d'une paroi. Cet écoulement est régi par les équations de Stokes linéarisées incompressibles harmoniques. Nous supposons que loin de la paroi, le champ de vitesse  $\check{\mathbf{v}}^\infty$  est parallèle à celle-ci et uniforme. Pour étudier le comportement du champ de vitesse à proximité de la paroi, nous appliquerons une méthode multi-échelle qui nous permettra de décomposer le problème initial en deux problèmes simplifiés. Après la résolution des deux problèmes simplifiés, nous pourrons écrire une solution du problème initial. Cette méthode est couramment utilisée en mécanique des fluides, de nombreuses applications sont décrites dans l'ouvrage de référence de Van Dyke [62].

#### 3.1.1 Les équations de Stokes en présence d'une paroi

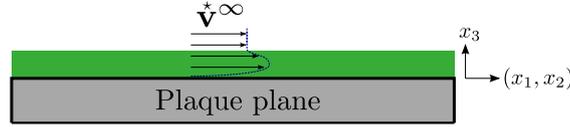


FIGURE 3.1 – Schéma de la couche limite acoustique au voisinage d'une plaque plane

Nous allons étudier l'écoulement d'un fluide régi par les équations de Stokes incompressibles harmoniques

$$j\omega\rho_0\check{\mathbf{v}} + \nabla\check{p} - \Upsilon_0\Delta\check{\mathbf{v}} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\operatorname{div}\check{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.1b)$$

On suppose qu'une paroi rigide se situe à la position  $\check{x}_3 = 0$  (voir figure 3.1). La condition d'adhérence à la paroi s'écrit

$$\check{\mathbf{v}}(\check{x}_1, \check{x}_2, \check{x}_3 = 0) = 0. \quad (3.2)$$

Nous supposons que loin de la plaque, l'écoulement est uniforme et parallèle à celle-ci

$$\lim_{\check{x}_3 \rightarrow +\infty} \check{\mathbf{v}}(\check{\mathbf{x}}) = \check{\mathbf{v}}^\infty. \quad (3.3)$$

Dans la région proche de la paroi, le champ de vitesse doit évoluer de  $\check{\mathbf{v}}(\check{x}_3 = 0) = 0$  à  $\check{\mathbf{v}} = \check{\mathbf{v}}^\infty$ . Cette région s'appelle la couche limite. Dans le cas des équations de Stokes linéarisées incompressibles harmoniques, on parle de **couche limite acoustique** ou de **couche de Stokes**.

La solution de l'équation (3.1) avec la condition aux limites (3.2) et la condition (3.3) s'écrit

$$\check{p} = \check{p}_0 - j\omega\rho_0 (\check{v}_1^\infty \check{x}_1 + \check{v}_2^\infty \check{x}_2), \quad (3.4a)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \check{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \check{x}_3} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \check{x}_3} \right), \quad (3.4b)$$

où  $\check{v}_1^\infty$  et  $\check{v}_2^\infty$  désignent respectivement les composantes du vecteur  $\check{\mathbf{v}}^\infty$  dans les directions  $\check{\mathbf{x}}_1$  et  $\check{\mathbf{x}}_2$ . Le champ de pression moyen  $\check{p}_0$  est uniforme. La couche limite est caractérisée par le terme

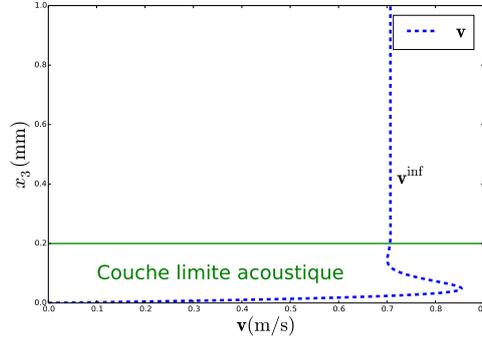


FIGURE 3.2 – Profil de vitesse au voisinage d'une plaque plane

$e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}}\hat{\mathbf{x}}_3} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}}\hat{\mathbf{x}}_3}$  du champ de vitesse. En effet, quand  $\hat{\mathbf{x}}_3$  croît, ce terme tend vers zéro. Sur la figure 3.2, on peut distinguer la couche limite et le champ extérieur.

Nous allons détailler la mise en oeuvre d'une méthode multi-échelle pour calculer cette solution. Cette démonstration bien connue avait pour but d'introduire des calculs plus techniques afin d'exprimer une solution aux équations de Stokes incompressibles harmoniques autour d'un coin. Cette démarche n'ayant pas été menée à son terme, elle ne sera pas présentée dans ce manuscrit. Pour autant, la résolution du système (3.1) au voisinage d'une plaque plane étant un cas intéressant pour l'application des méthodes multi-échelles, j'ai fait le choix de maintenir ce calcul dans le manuscrit.

Pour cela, on réécrit l'équation (3.1) comme

$$\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{j\omega\rho_0} \nabla \hat{p} - \frac{\Upsilon_0}{j\omega\rho_0} \Delta \hat{\mathbf{v}} = 0, \quad (3.5a)$$

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.5b)$$

Nous définissons  $\hat{\Upsilon}_0$  tel que  $\Upsilon_0 = \delta^2 \hat{\Upsilon}_0$  avec  $\delta$  un petit paramètre. Ainsi l'équation (3.5) s'écrit

$$\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{j\omega\rho_0} \nabla \hat{p} + j\delta^2 \frac{\hat{\Upsilon}_0}{\omega\rho_0} \Delta \hat{\mathbf{v}} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.6b)$$

Pour alléger les notations, on définit  $\gamma$  et  $\lambda_s$  tel que

$$\gamma = \frac{1}{j\omega\rho_0} \quad \text{et} \quad \lambda_s = \sqrt{\frac{\hat{\Upsilon}_0}{\omega\rho_0}}. \quad (3.7)$$

Comme dans le chapitre précédent, nous allons écrire les équations et calculer leurs solutions dans deux zones différentes : à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite. Ensuite, nous allons combiner ces expressions pour exprimer la solution du problème général.

### 3.1.2 Le champ extérieur

Dans la zone extérieure à la couche limite, on suppose que les champs de pression  $\overset{\star}{p}_e$  et de vitesse  $\overset{\star}{\mathbf{v}}_e$  s'écrivent

$$\overset{\star}{p}_e = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \overset{\star}{p}_e^i, \quad (3.8)$$

$$\overset{\star}{\mathbf{v}}_e = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \overset{\star}{\mathbf{v}}_e^i. \quad (3.9)$$

En injectant les développements (3.8) et (3.9) dans l'équation (3.6) on obtient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left[ \delta^i \left( \overset{\star}{\mathbf{v}}^i + \gamma \nabla \overset{\star}{p}^i \right) + j \delta^{i+2} \lambda_s^2 \Delta \overset{\star}{\mathbf{v}}^i \right] = 0, \quad (3.10a)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \operatorname{div} \overset{\star}{\mathbf{v}}^i = 0. \quad (3.10b)$$

En champ lointain, on ne considère plus la condition aux limites en  $\overset{\star}{x}_3 = 0$ . A l'ordre  $\delta^0$ , le système s'écrit

$$\overset{\star}{\mathbf{v}}_e^0 = -\gamma \nabla \overset{\star}{p}_e^0, \quad (3.11a)$$

$$\operatorname{div} \overset{\star}{\mathbf{v}}_e^0 = 0. \quad (3.11b)$$

La solution  $\overset{\star}{\mathbf{v}}_e = \overset{\star}{\mathbf{v}}^\infty + O(\delta)$  vérifie ces équations. Ainsi  $\overset{\star}{p}_e = \overset{\star}{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\overset{\star}{v}_1^\infty \overset{\star}{x}_1 + \overset{\star}{v}_2^\infty \overset{\star}{x}_2) + O(\delta)$ .

### 3.1.3 Le champ intérieur

Pour décrire les champs de pressions et de vitesses à l'intérieur de la couche limite, on définit une nouvelle variable  $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3)$  telle que  $\overset{\circ}{x}_3 = \overset{\star}{x}_3/\delta$  et  $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = (\overset{\star}{x}_1, \overset{\star}{x}_2)$ . On définit les variables  $\overset{\circ}{p}$  et  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$

$$\overset{\circ}{p}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3) = \overset{\star}{p}(\overset{\star}{x}_1, \overset{\star}{x}_2, \overset{\star}{x}_3), \quad (3.12)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3) = \overset{\star}{\mathbf{v}}(\overset{\star}{x}_1, \overset{\star}{x}_2, \overset{\star}{x}_3). \quad (3.13)$$

On peut écrire un développement de  $\overset{\circ}{p}$  et de  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$  en puissance de  $\delta$

$$\overset{\circ}{p}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \overset{\circ}{p}^i, \quad (3.14)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \overset{\circ}{\mathbf{v}}^i. \quad (3.15)$$

Exprimons la dérivée de  $\overset{\star}{p}$  par rapport à la variable  $\overset{\star}{x}_3$  en fonction de celle de  $\overset{\circ}{p}$  par rapport à la variable  $\overset{\circ}{x}_3$

$$\frac{\partial \overset{\star}{p}}{\partial \overset{\star}{x}_3} = \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \overset{\star}{x}_3} = \delta^{-1} \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial \overset{\circ}{x}_3}. \quad (3.16)$$

En injectant les développements (3.14) et (3.15) dans l'équation (3.6) on obtient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left[ \delta^i \left( \hat{v}_1^i + \gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^i + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_1^i \right) + j \delta^{i+2} \lambda_s^2 \left( \partial_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \hat{v}_1^i + \partial_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \hat{v}_1^i \right) \right] = 0, \quad (3.17a)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left[ \delta^i \left( \hat{v}_2^i + \gamma \partial_{\hat{x}_2} \hat{p}^i + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_2^i \right) + j \delta^{i+2} \lambda_s^2 \left( \partial_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \hat{v}_2^i + \partial_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \hat{v}_2^i \right) \right] = 0, \quad (3.17b)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left[ \delta^{i-1} \gamma \partial_{\hat{x}_3} \hat{p}^i + \delta^i \left( \hat{v}_3^i + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_3^i \right) + j \delta^{i+2} \lambda_s^2 \left( \partial_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \hat{v}_3^i + \partial_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \hat{v}_3^i \right) \right] = 0, \quad (3.17c)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left[ \delta^{i-1} \partial_{\hat{x}_3} \hat{v}_3^i + \delta^i \left( \partial_{\hat{x}_2} \hat{v}_2^i + \partial_{\hat{x}_3} \hat{v}_3^i \right) \right] = 0, \quad (3.17d)$$

avec la condition aux limites

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \hat{v}^i = 0 \quad \text{pour } \hat{x}_3 = 0. \quad (3.18)$$

On peut écrire l'équation (3.17) pour chaque puissance de  $\delta$ . A la puissance  $\delta^{-1}$ , on obtient

$$\partial_{\hat{x}_3} \hat{p}^0 = 0, \quad (3.19a)$$

$$\partial_{\hat{x}_3} \hat{v}_3^0 = 0, \quad (3.19b)$$

tandis qu'à l'ordre  $O(1)$ , on a

$$\hat{v}_1^0 + \gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^0 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_1^0 = 0, \quad (3.20a)$$

$$\hat{v}_2^0 + \gamma \partial_{\hat{x}_2} \hat{p}^0 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_2^0 = 0, \quad (3.20b)$$

$$\hat{v}_3^0 + \gamma \partial_{\hat{x}_3} \hat{p}^1 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_3^0 = 0, \quad (3.20c)$$

$$\partial_{\hat{x}_1} \hat{v}_1^0 + \partial_{\hat{x}_2} \hat{v}_2^0 + \partial_{\hat{x}_3} \hat{v}_3^1 = 0. \quad (3.20d)$$

Pour calculer les expressions de  $\hat{v}_1^0, \hat{v}_2^0, \hat{v}_3^0$  et  $\hat{p}^0$ , nous n'avons besoin que des équations (3.19a), (3.19b), (3.20a) et (3.20b). En effet, les équations (3.20c) et (3.20d) sont relatives à  $\hat{p}^1$  et  $\hat{v}_3^1$ , les termes d'ordre zéro pouvant être considérés comme des termes sources. Réécrivons le système dont nous voulons exprimer la solution

$$\partial_{\hat{x}_3} \hat{p}^0 = 0, \quad (3.21a)$$

$$\partial_{\hat{x}_3} \hat{v}_3^0 = 0, \quad (3.21b)$$

$$\hat{v}_1^0 + \gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^0 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_1^0 = 0, \quad (3.21c)$$

$$\hat{v}_2^0 + \gamma \partial_{\hat{x}_2} \hat{p}^0 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_2^0 = 0. \quad (3.21d)$$

Les deux premières équations nous donnent des résultats similaires :  $\hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  et  $\hat{v}_3^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{v}_3^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . La condition d'adhérence à la paroi impose  $\hat{v}_3^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0) = 0$ , ainsi  $\hat{v}_3^0 = 0$ . Nous souhaitons maintenant calculer une expression de  $\hat{v}_1$  et  $\hat{v}_2$ . Nous allons détailler les calculs pour  $\hat{v}_1$  sachant que ce sont exactement les mêmes pour  $\hat{v}_2$ . On veut résoudre l'équation différentielle

$$\hat{v}_1^0 + j \lambda_s^2 \partial_{\hat{x}_3 \hat{x}_3} \hat{v}_1^0 = -\gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2). \quad (3.22)$$

La solution homogène de cette équation s'écrit

$$\hat{v}_1^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \left( A(\hat{x}_1, \hat{x}_2) e^{\frac{(1+j)\hat{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}} + B(\hat{x}_1, \hat{x}_2) e^{-\frac{(1+j)\hat{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}} \right), \quad (3.23)$$

où  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de la variable  $\hat{x}_3$ . Deux arguments nous poussent à fixer  $A = 0$ , soit par des considérations physiques d'énergie finie, soit en remarquant que le terme en exponentielle croissante ne sera jamais raccordé avec aucun terme provenant du champ extérieur. Si on ajoute la solution particulière  $\hat{v}_1^0 = -\gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  et qu'on tient compte de la condition d'adhérence à la paroi  $\hat{v}_1^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = 0) = 0$  alors

$$\hat{v}_1^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = -\gamma \partial_{\hat{x}_1} \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \left(1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}}\right). \quad (3.24)$$

Ainsi, la solution en champ proche s'écrit

$$\hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \quad (3.25a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = -\gamma \hat{\nabla} \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \left(1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}}\right), \quad (3.25b)$$

où  $\hat{\nabla}$  désigne le gradient dans la variable rapide  $\hat{\mathbf{x}}$ .

### 3.1.4 Le raccord des champs extérieur et intérieur

Pour raccorder les expressions des solutions à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite, nous allons utiliser le principe de Van Dyke [62]. Pour cela, il faut exprimer le champ extérieur en fonction de la variable rapide  $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{p}_e(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \delta \hat{x}_3) = \hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\hat{v}_1^\infty \hat{x}_1 + \hat{v}_2^\infty \hat{x}_2) + O(\delta), \quad (3.26a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_e(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \delta \hat{x}_3) = \hat{\mathbf{v}}^\infty + O(\delta). \quad (3.26b)$$

On définit alors  $\hat{p}_e^0(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\hat{\mathbf{v}}_e^0(\hat{\mathbf{x}})$ , les termes à l'ordre  $O(1)$  de  $\hat{p}_e(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \delta \hat{x}_3)$  et  $\hat{\mathbf{v}}_e(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \delta \hat{x}_3)$

$$\hat{p}_e^0 = \hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\hat{v}_1^\infty \hat{x}_1 + \hat{v}_2^\infty \hat{x}_2), \quad (3.27a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_e^0 = \hat{\mathbf{v}}^\infty. \quad (3.27b)$$

Ici,  $\hat{p}_e$  et  $\hat{\mathbf{v}}_e$  ne dépendent pas de  $\hat{x}_3$  donc on observe que  $\hat{p}_e^0 = \hat{p}_e^0$  et  $\hat{\mathbf{v}}_e^0 = \hat{\mathbf{v}}_e^0$ .

La condition de raccord entre  $\hat{p}_e^0(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\hat{p}^0(\hat{\mathbf{x}})$  s'écrit

$$\hat{p}^0(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{p}_e^0(\hat{\mathbf{x}}) = o\left(\left(\frac{1}{\hat{x}_3}\right)^\infty\right). \quad (3.28)$$

Ici

$$\hat{p}^0(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{p}_e^0(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{p}^0 - \left(\hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (V_1^\infty X_1 + V_2^\infty X_2)\right), \quad (3.29)$$

donc la condition de raccord (3.28) impose

$$\hat{p}^0 = \left(\hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\hat{v}_1^\infty \hat{x}_1 + \hat{v}_2^\infty \hat{x}_2)\right). \quad (3.30)$$

Appliquons la même démarche pour  $\hat{\mathbf{v}}_e^0(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\hat{\mathbf{v}}^0(\hat{\mathbf{x}})$

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{v}}_e^0(\hat{\mathbf{x}}) = -\gamma \hat{\nabla} \hat{p}^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \left(1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}}\right) - \hat{\mathbf{v}}^\infty. \quad (3.31)$$

En utilisant le résultat précédent (équation (3.30)), on trouve

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{v}}_e^0(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{\circ}}{\sqrt{2}\lambda_s} \hat{x}_3} \right) - \hat{\mathbf{v}}^\infty, \quad (3.32a)$$

$$= -\hat{\mathbf{v}}^\infty e^{-\frac{(1+j)\hat{\circ}}{\sqrt{2}\lambda_s} \hat{x}_3}, \quad (3.32b)$$

et

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{v}}_e^0(\hat{\mathbf{x}}) = -\hat{\mathbf{v}}^\infty e^{-\frac{(1+j)\hat{\circ}}{\sqrt{2}\lambda_s} \hat{x}_3} = o\left(\left(\frac{1}{\hat{x}_3}\right)^\infty\right). \quad (3.33)$$

ainsi le raccord des champ de vitesse est également vérifié. Réécrivons les champs de pression et de vitesse dans la couche limite

$$\hat{p} = \hat{p}^0 + O(\delta) = \hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\hat{v}_1^\infty \hat{x}_1 + \hat{v}_2^\infty \hat{x}_2) + O(\delta), \quad (3.34a)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}^0 + O(\delta) = \hat{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{\circ}}{\sqrt{2}\lambda_s} \hat{x}_3} \right) + O(\delta). \quad (3.34b)$$

### 3.1.5 Ecriture de la solution du problème initial

Le principe de Van Dyke, nous permet d'écrire la solution du problème initial (équations (3.1) et (3.2)) à partir des solutions du problème extérieur et intérieur

$$\hat{p} = \hat{p}_e + \hat{p} - \hat{p}_e, \quad (3.35a)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}_e + \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}_e. \quad (3.35b)$$

Ainsi l'expression du champ de pression s'écrit

$$\hat{p} = \hat{p}_e^0 + \hat{p}^0 - \hat{p}_e^0 + O(\delta), \quad (3.36a)$$

$$= \hat{p}_0 - \frac{1}{\gamma} (\hat{v}_1^\infty \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{v}_2^\infty \hat{\mathbf{x}}_2) + O(\delta), \quad (3.36b)$$

tandis que celle du champ de vitesse s'écrit

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}_e^0 + \hat{\mathbf{v}}^0 - \hat{\mathbf{v}}_e^0 + O(\delta) = \hat{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\frac{(1+j)\hat{\circ}}{\sqrt{2}\lambda_s} \hat{x}_3} \right) + O(\delta), \quad (3.37a)$$

$$= \hat{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \hat{x}_3} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \hat{x}_3} \right) + O(\delta). \quad (3.37b)$$

On retrouve ici l'expression de la solution connue (équation (3.4)). La méthode mutli-échelle nous a permis de calculer une solution du problème initial en écrivant deux problèmes simplifiés à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite. Ce résultat classique peut-être montré dans le cas d'une vitesse extérieure non-uniforme [56].

Maintenant que nous connaissons l'expression du champ de vitesse régi par les équations de Stokes incompressibles harmoniques à proximité d'une paroi, nous souhaitons calculer le travail des efforts visqueux dans la région proche de cette paroi.

### 3.2 Calcul du travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique

Nous allons montrer que le travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique ne dépend que de la vitesse extérieure à celle ci. Nous ne développerons ici que les étapes essentielles du raisonnement. Les calculs sont détaillés dans l'annexe B.1.

Nous avons vu dans la section 2.3 que la moyenne temporelle du travail normalisé des efforts visqueux s'écrit

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = 2\Upsilon_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_{\dot{\Omega}}^* \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Re(\hat{\mathbf{d}} e^{j\omega t}) \odot \Re(\hat{\mathbf{d}} e^{j\omega t}) dt d\Omega, \quad (3.38)$$

avec  $\hat{\mathbf{d}} = \left( \dot{\nabla}^* \hat{\mathbf{v}} + [\dot{\nabla}^* \hat{\mathbf{v}}]^T \right)$  le tenseur taux de déformation et  $\dot{\Omega}^*$  le domaine dans lequel nous calculons le travail. Contrairement au reste du chapitre, nous noterons  $\hat{\mathbf{v}}$  le phaseur de la vitesse, car la variable temporelle apparaît dans cette section.

Dans le cas d'une plaque plane, si la vitesse à l'extérieur de la couche limite  $\hat{\mathbf{v}}^\infty$  est uniforme et parallèle à la plaque, l'expression du gradient de vitesse est simplifié. En effet, le vecteur vitesse est nul dans la direction  $\dot{\mathbf{x}}_3$  et son gradient ne dépend que de la variable  $\dot{x}_3$ . Ainsi, la moyenne temporelle du travail des efforts visqueux s'écrit

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_{\dot{\Omega}}^* \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2 \left[ \Re(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_1^\infty e^{j\omega t}) \right]^2 + 2 \left[ \Re(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_2^\infty e^{j\omega t}) \right]^2 dt d\dot{\Omega}. \quad (3.39)$$

Dans la suite, nous supposons que si la vitesse à l'extérieur de la couche limite n'est pas uniforme, la prise en compte de son gradient dans le calcul du travail des efforts visqueux est négligeable.

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \iint_{\dot{S}}^* \int_{\dot{x}_3=0}^{+\infty} 2 \left[ \Re(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_1^\infty e^{j\omega t}) \right]^2 + 2 \left[ \Re(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_2^\infty e^{j\omega t}) \right]^2 d\dot{x}_3 d\dot{S} dt, \quad (3.40)$$

où  $\dot{S}^*$  est la surface de la plaque plane.

Après plusieurs calculs, détaillés en annexe B.1, la moyenne temporelle du travail des efforts visqueux s'écrit

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \frac{\sqrt{2\omega\rho_0\Upsilon_0}}{4} \iint_{\dot{S}}^* |\hat{v}_t^\infty|^2 d\dot{S}, \quad (3.41)$$

où  $|\hat{v}_t^\infty|$  est la norme de la vitesse tangentielle à l'extérieur de la couche limite. Nous appellerons **résistance surfacique** le terme noté  $\dot{R}_S$  défini par

$$\dot{R}_S = \frac{\sqrt{2\omega\rho_0\Upsilon_0}}{4}. \quad (3.42)$$

La formule (3.41) a été donnée par Nielsen [37], mais il l'a déduite à partir du modèle d'impédance de Crandall pour les grands nombres de Stokes, alors que c'est précisément la démarche inverse que nous avons entreprise ici. Landau [24] avait également donné cette expression dans le cas où c'était la plaque plane qui oscillait dans un fluide visqueux, ce qui ne correspond pas à notre configuration.

Maintenant que nous avons calculé une expression du travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique, nous allons développer une méthode pour modéliser les corrections de col pour la résistance.

### 3.3 Evaluation de l'énergie dissipée par une plaque perforée

La correction de col d'Ingard [19] est classiquement utilisée dans les modèles d'impédance tenant compte des effets visqueux. Cette correction, égale à  $2r_0$ , est issue des travaux théoriques de Nielsen [37] et de résultats expérimentaux. Nielsen a calculé analytiquement la dissipation d'énergie sur les parois de la plaque perforée, et a trouvé que la correction de col associée à cette dissipation d'énergie était comprise entre  $r_0$  et  $+\infty$ . Après une campagne expérimentale, Ingard a conclu que la valeur de la correction de col représentant le mieux ses données était  $2r_0$ . Dans ses calculs, Nielsen a fait plusieurs approximations, sans lesquelles il n'aurait pas pu obtenir la valeur  $r_0$  comme borne inférieure pour les corrections de col. Dans cette section, nous allons présenter une méthode différente de la sienne pour calculer analytiquement les corrections de col.

Rappelons que la résistance d'une plaque perforée est liée à la moyenne temporelle du travail des efforts visqueux d'après la relation suivante

$$R_{Z_w} = \frac{2\epsilon}{l^2|\tilde{v}_\Gamma|^2} \langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle. \quad (3.43)$$

Il faut calculer ce travail dans la perforation mais également à l'extérieur de celle-ci. En effet, comme nous l'avons dit dans la section 1.5, on peut décomposer la résistance en trois parties

$$R_{Z_w} = R_{Z_w}^+ + R_{Z_w}^{\text{int}} + R_{Z_w}^-. \quad (3.44)$$

Le travail des efforts visqueux à l'intérieur de la perforation  $\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^{\text{int}}) \rangle$  sera lié à  $R_{Z_w}^{\text{int}}$

$$R_{Z_w}^{\text{int}} = \frac{2\epsilon}{l^2|\tilde{v}_\Gamma|^2} \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^{\text{int}}) \rangle, \quad (3.45)$$

tandis que les résistances  $R_{Z_w}^+$  et  $R_{Z_w}^-$  s'exprimeront en fonction du travail à l'extérieur de la perforation

$$R_{Z_w}^+ = \frac{2\epsilon}{l^2|\tilde{v}_\Gamma|^2} \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle, \quad (3.46)$$

$$R_{Z_w}^- = \frac{2\epsilon}{l^2|\tilde{v}_\Gamma|^2} \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^-) \rangle. \quad (3.47)$$

C'est le calcul de  $\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle$  et  $\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^-) \rangle$  qui nous permettra de déterminer les corrections de col.

Pour calculer le travail des efforts visqueux, nous allons utiliser le résultat (3.41). Cependant, nous devons respecter l'hypothèse sous-jacente, c'est-à-dire que les effets visqueux doivent être compris dans une couche limite acoustique (voir figure 3.3). Cette hypothèse est identique à celle du modèle de Melling pour les grands nombres de Stokes ( $|k_s r_0| > 10$ ). Avant de calculer les corrections de col, nous allons vérifier que la résistance  $R_{Z_w}^{\text{int}}$  que nous calculons par cette méthode est la même que celle du modèle de Melling (développée à partir de la solution des équations de Stokes dans un cylindre).

#### 3.3.1 Le calcul à l'intérieur d'une perforation

À l'intérieur de la perforation, la moyenne temporelle du travail des efforts visqueux est égale à

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^{\text{int}}) \rangle = \dot{R}_S \int_{\Sigma^{\text{int}}} |v_t|^2 d\Sigma^{\text{int}}, \quad (3.48)$$

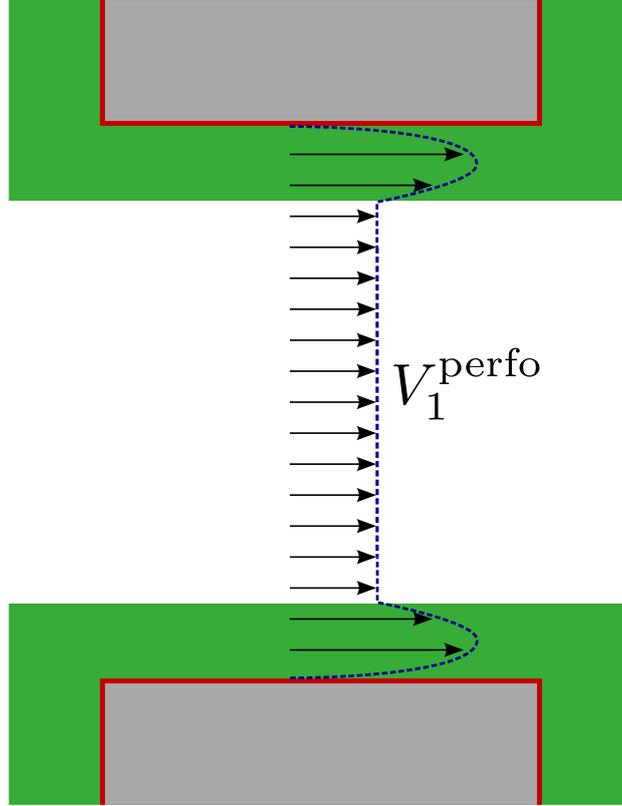


FIGURE 3.3 – Profil du champ de vitesse (pointillé bleu) à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite acoustique (représentée en vert) au voisinage d'une perforation.

où  $\Sigma^{\text{int}}$  est la surface latérale de la perforation. Dans la perforation, on peut supposer que la vitesse est uniforme à l'extérieur de la couche limite acoustique (voir figure 3.3). En notant  $\dot{V}_1^{\text{perfo}}$  cette vitesse, l'équation (3.48) s'écrit alors

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^{\text{int}}) \rangle = \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 \dot{S}^{\text{int}}, \quad (3.49)$$

où  $\dot{S}^{\text{int}}$  est l'aire de la surface latérale de la perforation. La partie intérieure de résistance de la plaque perforée s'écrit alors

$$R_{Z_w}^{\text{int}} = \frac{2\epsilon}{l^2 |\tilde{v}_\Gamma|^2} \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^{\text{int}}) \rangle, \quad (3.50a)$$

$$= \frac{2\epsilon}{l^2 |\tilde{v}_\Gamma|^2} \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 2\pi R_0 H. \quad (3.50b)$$

Pour développer cette expression, il faut calculer la relation entre les vitesses  $\tilde{v}_\Gamma$  et  $\dot{V}_1^{\text{perfo}}$ . Rappelons le raccord entre les flux de vitesse champ lointain et champ proche (équation (2.82))

$$\int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{v}_\Gamma d\tilde{\Gamma}_1 = \epsilon \int_{\Gamma_S^*} \dot{V}_1^{\text{perfo}} d\Gamma_S^*. \quad (3.51)$$

En supposant les vitesses  $\tilde{v}_\Gamma$  et  $\dot{V}_1^{\text{perfo}}$  uniformes et la section de la perforation circulaire, on peut écrire

$$\tilde{v}_\Gamma l^2 = \epsilon \pi R_0^2 \dot{V}_1^{\text{perfo}}, \quad (3.52)$$

et

$$|\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{l^2}{\pi R_0^2} \right)^2 |\tilde{v}_\Gamma|^2. \quad (3.53)$$

Ainsi la résistance  $R_Z^{\text{int}}$  est égale à

$$R_{Z_w}^{\text{int}} = \frac{4}{\epsilon} \frac{l^2}{\pi R_0^2} \dot{R}_S \frac{H}{R_0}, \quad (3.54a)$$

$$= \epsilon \frac{l^2}{\pi r_0^2} \sqrt{2\omega\rho_0} \Upsilon_0 \frac{h}{r_0}, \quad (3.54b)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h}{r_0}. \quad (3.54c)$$

avec la porosité  $\sigma$  définie par  $\sigma = \pi r_0^2 / l^2$ . On trouve l'expression de la partie réelle du modèle de Crandall pour les grands nombres de Stokes (équation (1.57)).

### 3.3.2 Dissipation de l'énergie sur les parois de la plaque perforée

Nous allons appliquer la même méthode pour calculer les résistances  $R_{Z_w}^+$  et  $R_{Z_w}^-$  et ainsi calculer les corrections de col associées. Par symétrie, les résistances  $R_{Z_w}^+$  et  $R_{Z_w}^-$  sont égales, donc nous ne développerons le raisonnement que pour le calcul de  $R_{Z_w}^+$ . Pour cela, nous allons exprimer le travail des efforts visqueux dans le domaine  $\dot{\Omega}^+$ . Nous allons appliquer l'équation (3.41), mais nous devons connaître une expression de la vitesse tangentielle à la paroi.

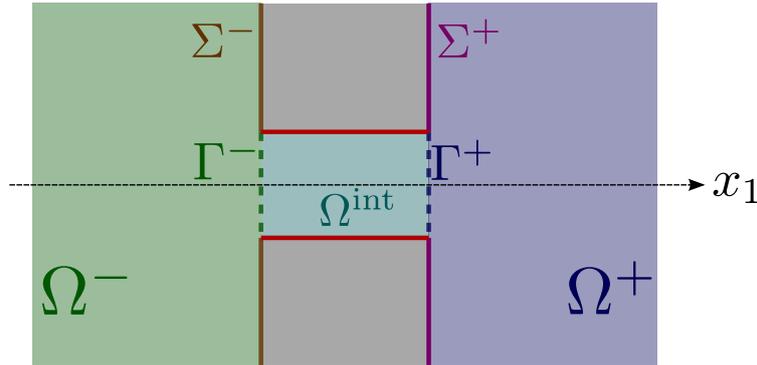


FIGURE 3.4 – Schéma des différents domaines définis au voisinage de la perforation

Nous rappelons que pour utiliser le résultat (3.41), nous supposons les effets visqueux uniquement présents dans une couche limite (figure 3.3). Le champ extérieur à la couche limite vérifie alors les équations d'Euler linéarisées incompressibles harmoniques sans écoulement moyen, qu'on peut également écrire

$$j\omega\rho_0\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\dot{p}, \quad (3.55a)$$

$$\text{div}\dot{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.55b)$$

Le champ de pression vérifie alors l'équation du Laplace  $\Delta \hat{p} = 0$ . C'est l'équation résolue (notamment par Rayleigh [47]) pour calculer les modèles d'impédance sans effet visqueux (voir section 1.5.1). Ce problème a récemment été étudié par Laurens et collab. [26], qui ont donné une expression du champ de vitesse dans le domaine  $\hat{\Omega}^+$

$$\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \nabla \int_{\hat{\Gamma}^+} \frac{1}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} f(\hat{\mathbf{y}}) d\hat{\Gamma}^+ \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}^+, \quad (3.56)$$

où  $f(\hat{\mathbf{y}})$  est la vitesse normale sur  $\hat{\Gamma}^+$  (voir figure 3.4). Cette expression n'est évidemment valide qu'à l'extérieur de la couche limite.

Le travail des efforts visqueux s'écrit

$$\langle \hat{W}(\hat{\Omega}^+) \rangle = \hat{R}_S \int_{\hat{\Sigma}^+} |\hat{v}_t(\hat{\mathbf{x}})|^2 d\hat{\Sigma}^+. \quad (3.57)$$

Introduisons la notation  $B_{\hat{r}}$ , définie par

$$\hat{\mathbf{y}} \in B_{\hat{r}} = \left\{ \hat{y}_3 = \frac{H}{2}, \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2} < \hat{r} \right\}. \quad (3.58)$$

Si la perforation est cylindrique de rayon  $R_0$ , alors  $\hat{\Gamma}^+ = B_{R_0}$  et on peut écrire

$$\langle \hat{W}(\hat{\Omega}^+) \rangle = 2\pi \hat{R}_S \int_{\hat{r}=R_0}^{+\infty} \left| \nabla \int_{B_{R_0}} \frac{1}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} f(\hat{\mathbf{y}}) ds_{\hat{\mathbf{y}}} \right|^2 \hat{r} d\hat{r}, \quad (3.59a)$$

$$= 2\pi R_0^2 \hat{R}_S \int_{\hat{r}=1}^{+\infty} \left| \nabla \int_{B_1} \frac{1}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} f(\hat{\mathbf{y}}) ds_{\hat{\mathbf{y}}} \right|^2 \hat{r} d\hat{r}, \quad (3.59b)$$

où  $ds_{\hat{\mathbf{y}}}$  est l'élément de surface.

Les principes de minimisation d'énergie de Kelvin et de Dirichlet permettent d'écrire chacun une approximation du champ de vitesse. Ces approximations sont très précises pour le calcul de la conductivité de Rayleigh acoustique [26]. Pour les principes de Kelvin et de Dirichlet, les expressions de  $f(\hat{\mathbf{y}})$  s'écrivent respectivement

$$f_1(\hat{\mathbf{y}}) = \hat{V}_1^{\text{perfo}}, \quad (3.60)$$

$$f_2(\hat{\mathbf{y}}) = \frac{\hat{V}_1^{\text{perfo}}}{2\pi\sqrt{1 - |\hat{\mathbf{y}}|^2}}. \quad (3.61)$$

Nous allons mener le calcul du travail des efforts visqueux pour ces deux valeurs.

### 3.3.2.1 Approximation de Kelvin

Pour  $f(\hat{\mathbf{y}}) = \hat{V}_1^{\text{perfo}}$ , le champ de vitesse  $\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  s'écrit

$$\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \nabla \int_{B_1} \frac{1}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} \hat{V}_1^{\text{perfo}} ds_{\hat{\mathbf{y}}}. \quad (3.62)$$

Après plusieurs étapes de calculs détaillées dans l'annexe B.2, on trouve

$$\hat{v}_t(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{2}{\pi} \hat{V}_1^{\text{perfo}} \left[ \text{E} \left( \frac{1}{\hat{r}} \right) - \text{K} \left( \frac{1}{\hat{r}} \right) \right]. \quad (3.63)$$

où  $K$  et  $E$  sont les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce. La moyenne temporelle du travail des efforts visqueux dans le domaine  $\dot{\Omega}^+$  s'écrit alors

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = 2\pi R_0^2 \dot{R}_S \int_{\dot{r}=1}^{+\infty} |\dot{v}_t|^2 \dot{r} \, d\dot{r}, \quad (3.64a)$$

$$= \frac{8}{\pi} R_0^2 \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 \int_{\dot{r}=1}^{+\infty} \dot{r} \left[ E\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) - K\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) \right]^2 d\dot{r}, \quad (3.64b)$$

or

$$\int_{\dot{r}=1}^{+\infty} \dot{r} \left[ E\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) - K\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) \right]^2 d\dot{r} = \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.65)$$

d'après une propriété qu'on retrouve dans le livre de Byrd et collab. [7], ainsi

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = \frac{8}{\pi} R_0^2 \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.66)$$

Nous pouvons calculer  $R_{Z_w}^+$  de la manière dont nous avons calculé  $R_{Z_w}^{\text{int}}$

$$R_{Z_w}^+ = \frac{1}{\sigma} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right). \quad (3.67)$$

Pour calculer la correction de col, on remarque que

$$R_Z = R_Z^+ + R_Z^{\text{int}} + R_Z^-, \quad (3.68)$$

$$= R_Z^{\text{int}} \left( 1 + \frac{R_Z^+}{R_Z^{\text{int}}} + \frac{R_Z^-}{R_Z^{\text{int}}} \right), \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h}{r_0} \left( 1 + \frac{R_Z^+}{R_Z^{\text{int}}} + \frac{R_Z^-}{R_Z^{\text{int}}} \right), \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \frac{h + \Delta h}{r_0}, \quad (3.71)$$

où  $\Delta h$  désigne les corrections de col. Ainsi

$$\Delta h = \frac{2R_{Z_w}^+ \sigma r_0}{\sqrt{2\omega\rho_0\mu_0}} = \left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) r_0. \quad (3.72)$$

On rappelle qu'on considère que  $R_{Z_w}^+ = R_{Z_w}^-$ .

On remarque qu'on peut calculer les corrections de col directement à partir de l'expression du travail des efforts visqueux

$$\Delta h = \frac{2R_{Z_w}^+ \sigma r_0}{\sqrt{2\omega\rho_0\mu_0}} = \frac{2R_{Z_w}^+ h}{R_Z^{\text{int}}} = \frac{2 \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle h}{\langle \dot{W}(\dot{\Omega}_{\text{int}}^+) \rangle}. \quad (3.73)$$

### 3.3.2.2 Approximation de Dirichlet

Pour  $f(\dot{\mathbf{y}}) = \frac{|V_1^{\text{perfo}}|}{2\pi\sqrt{1-|\dot{\mathbf{y}}|^2}}$ , le champ de vitesse s'écrit

$$\dot{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{x}}) = \nabla \int_{B_1} \frac{\dot{v}_1}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|\sqrt{1-|\dot{\mathbf{y}}|^2}} ds_{\dot{\mathbf{y}}}. \quad (3.74)$$

Après plusieurs étapes de calculs détaillées dans l'annexe B.2, on trouve

$$\dot{v}_t(\mathbf{X}) = -V_1^{\text{perfo}} \frac{1}{\dot{r}^*} \frac{1}{\sqrt{(\dot{r}^* - 1)(\dot{r}^* + 1)}} \quad \text{pour } \dot{r}^* > 1. \quad (3.75)$$

Avec cette expression pour la vitesse tangentielle à la paroi, l'expression du travail des efforts visqueux n'est pas intégrable en  $\dot{r}^* = 1$ , ainsi  $\langle \dot{W}(\Omega^+) \rangle \rightarrow +\infty$  et  $R_Z^+ \rightarrow +\infty$ .

Les calculs développés par Nielsen avait mené au même résultat. Pour exprimer une valeur finie du travail des efforts visqueux, il a proposé d'intégrer le carré du module de la vitesse tangentielle entre  $1 + \epsilon$  et  $+\infty$  avec  $\epsilon$  égal à l'épaisseur de la couche limite acoustique. Ce choix ne nous semble pas justifié car l'épaisseur de la couche limite est une distance caractéristique dans la direction normale à la paroi, et non la direction tangentielle à cette dernière.

### 3.3.3 Discussion des valeurs calculées

Analytiquement, nous avons obtenu deux valeurs pour les corrections de col. La première (équation (3.72)) est inférieure à la valeur calculée par Nielsen (égale à  $r_0$ ). Bien qu'elle sous-estime les corrections de col mesurées expérimentalement, cette valeur n'est pas aberrante. La seconde valeur, égale à l'infini, n'apporte aucune précision sur la valeur des corrections col contrairement aux modèles acoustiques<sup>1</sup> où les bornes calculées analytiquement étaient proches [25, 26] (voir l'annexe A). Les approximations de Kelvin et de Dirichlet ne sont donc pas suffisamment précises pour calculer le travail des efforts visqueux à l'extérieur de la perforation. C'est pourquoi nous allons calculer numériquement le champ extérieur à la couche limite. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

La partie réelle de l'impédance acoustique d'une plaque perforée représente l'énergie dissipée par la plaque perforée. Une grande partie de cette énergie est dissipée à l'intérieur des perforations, mais une quantité non négligeable est dissipée sur les parois de la plaque perforée, c'est pourquoi il est important de pouvoir la modéliser. Nous avons utilisé une méthode multi-échelle pour calculer l'expression du champ de vitesse dans la couche limite acoustique au voisinage d'une plaque plane. Cela nous a permis d'exprimer le travail des efforts visqueux dans la couche limite en fonction du champ extérieur à celle-ci. Nous avons pu le calculer analytiquement sur les parois de la plaque perforée grâce aux approximations de Kelvin et de Dirichlet. Nous avons déduit de l'approximation de Kelvin une borne inférieure pour les corrections de col. Cependant, l'approximation de Dirichlet conduit à une valeur non physique, qui est égale à l'infini. Contrairement au cas des modèles acoustiques, ces approximations ne sont pas satisfaisante pour le calcul des corrections de col visqueuses. C'est pourquoi nous souhaitons calculer numériquement le champ extérieur à la couche limite acoustique. Ces simulations numériques seront détaillées dans le prochain chapitre.

1. Modèles ne tenant pas compte des effets visqueux

# Chapitre 4

## Calcul des corrections de col par la méthode des équations intégrales

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé analytiquement le champ extérieur à la couche limite acoustique sur les parois de la plaque perforée grâce aux approximations de Kelvin et Dirichlet. Nous souhaitons maintenant calculer numériquement ce champ extérieur. L'équation de Laplace sera résolue par la méthode des éléments de frontière implémentée dans le code CESC du CERFACS. Cette méthode est basée sur la formulation intégrale du problème sur les frontières de la perforation. Avant d'explicitier cette formulation, nous présenterons la méthode des équations intégrales dans un cadre général. Les résultats numériques seront analysés et comparés aux résultats analytiques dérivés au cours du chapitre précédent.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction à la méthode des équations intégrales</b>	<b>58</b>
<b>4.2</b>	<b>Application de la méthode des équations intégrales au calcul du champ de pression dans une perforation</b>	<b>59</b>
4.2.1	Enoncé du problème initial	59
4.2.2	Equations intégrales sur les frontières de la perforation	61
<b>4.3</b>	<b>Analyse du champ de vitesse et calcul des corrections de col</b>	<b>65</b>
4.3.1	Calcul de l'expression des correction de col pour la résistance	65
4.3.2	Calcul des vitesses et des corrections de col à l'extérieur de la perforation	66
4.3.3	Calcul des vitesses et des corrections de col à l'intérieur de la perforation	69
4.3.4	Corrections de col totales	70

---

Exceptionnellement dans ce chapitre, nous choisissons la convention harmonique  $e^{-j\omega t}$ . En effet, c'est la convention couramment utilisée pour la formulation des équations intégrales.

## 4.1 Introduction à la méthode des équations intégrales

Dans cette section, nous présentons succinctement les équations intégrales dans un cadre général. Une présentation complète de cette méthode est notamment donnée dans les ouvrages de Nédélec [36] ou de Sauter et Schwab [54].

Soit  $\Omega_{\text{int}}$  un domaine fermé de  $\mathbb{R}^3$  avec une frontière notée  $\partial\Omega$ . Notons  $\Omega_{\text{ext}}$  le complémentaire de la fermeture de  $\Omega_{\text{int}}$ .  $\Omega_{\text{ext}}$  est donc un domaine ouvert. La fonction  $u$  vérifiant (avec la possibilité que  $k = 0$ )

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \quad (4.1)$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \quad (4.2)$$

et satisfaisant la condition de radiation (pour  $k$  différent de 0)

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left( \partial_{|\mathbf{x}|} u(\mathbf{x}) - jku(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (4.3)$$

peut s'écrire pour  $\mathbf{y} \notin \partial\Omega$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \lambda(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}), \quad (4.4)$$

où  $\sigma$  et  $\lambda$  sont deux densités inconnues sur  $\partial\Omega$ . La fonction  $G$  est le noyau de Green de l'équation (4.1) satisfaisant la condition de radiation (4.3). Dans la configuration étudiée, est définie par

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (4.5)$$

L'équation (4.4) est appelée **formule de représentation**. Elle s'écrit à l'aide des deux opérateurs intégraux  $V$  et  $N$  définis par

$$V\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

$$N\lambda(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \lambda(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}). \quad (4.7)$$

Le potentiel  $V\sigma$  s'appelle le **potentiel de simple couche** tandis que le potentiel  $N\lambda$  s'appelle le **potentiel de double couche**. En utilisant la formule de représentation (4.4), on peut calculer  $u$  sur les domaines  $\Omega_{\text{ext}}$  et  $\Omega_{\text{int}}$  à partir des potentiels de simple couche et de double couche. Dans la méthode des équations intégrales, l'inconnue n'est donc plus  $u$  qui est définie sur un domaine non borné, mais les densités  $\sigma$  et  $\lambda$  définies sur la frontière  $\partial\Omega$ . Pour exprimer les équations vérifiées par  $\sigma$  et  $\lambda$ , il faut connaître l'expression de la trace sur  $\partial\Omega$  des potentiels simple couche et double couche

$$(V\sigma(\mathbf{x}))|_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = V\sigma \quad (4.8)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} V\sigma(\mathbf{x}))|_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sigma(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\sigma - N^T\sigma \quad (4.9)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} V \sigma(\mathbf{x}))|_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \sigma(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sigma(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sigma - N^T \sigma \quad (4.10)$$

$$(N\lambda(\mathbf{x}))|_{\text{int}} = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \lambda(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \lambda + N\lambda \quad (4.11)$$

$$(N\lambda(\mathbf{x}))|_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \lambda(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \lambda(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \lambda + N\lambda \quad (4.12)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} N\lambda(\mathbf{y}))|_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \lambda(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) = D\lambda \quad (4.13)$$

L'opérateur  $D$  est hypersingulier donc son écriture sous une forme intégrale est purement formelle. La notation  $N^T$  désigne le transposé de l'opérateur  $N$ .

En utilisant la formule de représentation (4.4) et les formules de trace, on peut calculer l'expression de la trace de  $u$  et de  $\partial_{\mathbf{n}} u$  sur  $\partial\Omega$

$$u_{\text{int}} = (V\sigma)|_{\text{int}} + (N\lambda)|_{\text{int}} = V\sigma + \frac{1}{2} \lambda + N\lambda, \quad (4.14)$$

$$u_{\text{ext}} = (V\sigma)|_{\text{ext}} + (N\lambda)|_{\text{ext}} = V\sigma - \frac{1}{2} \lambda + N\lambda, \quad (4.15)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\text{int}} = (\partial_{\mathbf{n}} V\sigma)|_{\text{int}} + (\partial_{\mathbf{n}} N\lambda)|_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sigma - N^T \sigma + D\lambda, \quad (4.16)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\text{ext}} = (\partial_{\mathbf{n}} V\sigma)|_{\text{ext}} + (\partial_{\mathbf{n}} N\lambda)|_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \sigma - N^T \sigma + D\lambda, \quad (4.17)$$

ainsi on remarque que les densités  $\sigma$  et  $\lambda$  s'expriment en fonction des traces de  $u$  et  $\partial_{\mathbf{n}} u$

$$u_{\text{int}} - u_{\text{ext}} = \lambda, \quad (4.18)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\text{int}} - (\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\text{ext}} = \sigma. \quad (4.19)$$

Les équations vérifiées par les densités dépendront des conditions aux limites vérifiées par  $u$ . Nous n'allons pas énumérer les différents cas possibles, mais nous allons présenter dans la section suivante l'application de cette méthode au calcul du champ de pression dans une perforation.

## 4.2 Application de la méthode des équations intégrales au calcul du champ de pression dans une perforation

Ces travaux sont réalisés dans la continuité de ceux de Laurens et collab. [26] où des simulations avaient été réalisées afin de calculer numériquement la conductivité de Rayleigh d'une perforation dans le cas non visqueux. Nous rappelons qu'ici, nous souhaitons calculer le champ de vitesse tangentiel aux parois de la plaque perforée afin d'en déduire une valeur du travail des efforts visqueux à l'extérieur de la perforation. Dans cette section, nous allons établir les équations intégrales qui seront résolues numériquement.

### 4.2.1 Enoncé du problème initial

Soit une perforation  $\hat{\Omega}_{\text{perfo}}$  définie par

$$\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}_{\text{perfo}} = \left\{ \left( \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 \right) < R_0, -H/2 < x_1 < H/2 \right\} \quad (4.20)$$

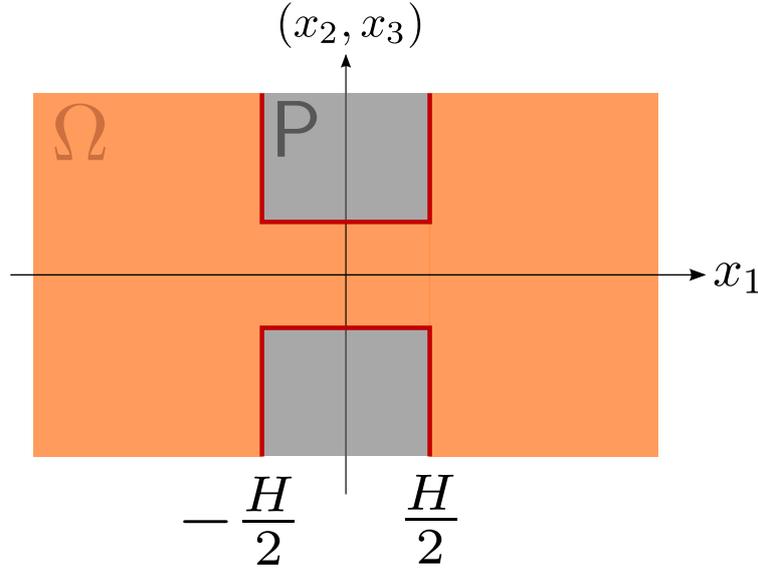


FIGURE 4.1 – Schéma du domaine au voisinage de la perforation

où  $R_0$  est le rayon de la perforation et  $H$  sa hauteur (dans les variables de champ proche). Dans le chapitre précédent, nous avons noté ce domaine  $\hat{\Omega}^{\text{int}}$ . Nous avons changé cette notation pour éviter les confusions avec la notation des traces intérieures, par exemple  $u_{\text{int}}$ . On définit également les deux demi-espaces  $\hat{\Omega}^-$  et  $\hat{\Omega}^+$

$$\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}^- = \{\hat{x}_1 < -H/2\} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}^+ = \{\hat{x}_1 > H/2\} \quad (4.21)$$

Le domaine  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{\text{perfo}} \cup \hat{\Omega}^- \cup \hat{\Omega}^+$  est occupé par le fluide (l'air) tandis que le domaine  $P = \mathbb{R}^3 / \hat{\Omega}$  représente la partie rigide de la plaque perforée (voir figure 4.1).

Nous rappelons que nous considérons les effets visqueux compris uniquement dans une couche limite acoustique, ainsi ce sont les équations d'Euler linéarisées sans écoulement porteur qui sont vérifiées dans le domaine  $\hat{\Omega}$

$$-j\omega\rho_0\hat{\mathbf{v}} + \hat{\nabla}\hat{p} = 0 \text{ dans } \hat{\Omega} \quad (4.22a)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ dans } \hat{\Omega} \quad (4.22b)$$

$$\hat{v}_n = 0 \text{ sur } \partial\hat{\Omega} \quad (4.22c)$$

$$\lim_{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} \hat{p} = P_g \text{ pour } x_1 < -H/2 \quad (4.22d)$$

$$\lim_{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} \hat{p} = P_d \text{ pour } x_1 > H/2 \quad (4.22e)$$

où  $\hat{v}_n = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , avec  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale à la paroi. La variable  $\hat{\mathbf{v}}$  s'exprime en fonction de  $p$ , ainsi on réécrit le système (4.22) comme

$$\hat{\Delta}\hat{p} = 0 \text{ dans } \hat{\Omega} \quad (4.23a)$$

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}}\hat{p} = 0 \text{ sur } \partial\hat{\Omega} \quad (4.23b)$$

$$\lim_{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} \hat{p} = P_g \text{ pour } x_1 < -H/2 \quad (4.23c)$$

$$\lim_{|\vec{x}^*| \rightarrow \infty} \vec{p}^* = P_d \text{ pour } x_1 > H/2 \quad (4.23d)$$

avec  $\vec{v}^* = (1/j\omega\rho_0)\vec{\nabla}\vec{p}^*$ . On définit la variable adimensionnée  $u$  en fonction de  $\vec{p}^*$  tel que le saut de part et d'autre de la perforation soit unitaire

$$u = \frac{\vec{p}^* - (P_d + P_g)/2}{(P_d - P_g)}. \quad (4.24)$$

Elle vérifie les équations

$$\Delta^* u = 0 \text{ dans } \Omega^* \quad (4.25a)$$

$$\partial_{\vec{n}}^* u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \quad (4.25b)$$

$$\lim_{|\vec{x}^*| \rightarrow \infty} u = \pm \frac{1}{2} \text{ dans } \Omega^{\pm} \quad (4.25c)$$

Pour calculer la solution de (4.25), on peut utiliser la méthode des équations intégrales présentée dans la section précédente. On définit alors deux densités  $\alpha$  et  $\beta$  sur la frontière  $\partial\Omega^*$ . Ici, l'équation de Laplace n'est vérifiée que dans le domaine  $\Omega^*$  (et pas dans le domaine  $\mathbb{P}$ ), c'est pourquoi les densités  $\alpha$  et  $\beta$  sont définies uniquement en fonction des traces intérieures de  $u$  et de  $\partial_{\vec{n}}^* u$

$$\alpha = u_{\text{int}} \text{ et } \beta = (\partial_{\vec{n}}^* u)_{\text{int}}. \quad (4.26)$$

Grâce à la méthode des équations intégrales, on pourrait écrire la trace de  $\partial_{\vec{n}}^* u$  sur  $\partial\Omega^*$  (voir équation (4.16))

$$(\partial_{\vec{n}} u)_{\text{int}} = \frac{1}{2}\beta - N^T\beta + D\alpha. \quad (4.27)$$

Or la condition aux limites (4.25b) sur  $\partial\Omega^*$  impose  $\beta = (\partial_{\vec{n}}^* u)_{\text{int}} = 0$  ainsi l'équation précédente s'écrit

$$D\alpha = 0. \quad (4.28)$$

La résolution numérique de cette équation permettrait de connaître la densité  $\alpha$  sur  $\partial\Omega^*$  et on pourrait alors calculer  $u$  sur le domaine  $\Omega^*$  avec la formule de représentation (4.4), en remplaçant  $\lambda$  par  $\alpha$  et  $\sigma$  par  $\beta$  (on rappelle que dans ce cas,  $\beta = 0$ ). Cependant, la frontière  $\partial\Omega^*$  n'est pas bornée et nous ne pouvons pas résoudre numériquement l'équation intégrale (4.28). Ainsi, nous allons développer une nouvelle formulation pour écrire des équations intégrales sur un domaine borné.

### 4.2.2 Equations intégrales sur les frontières de la perforation

Nous n'allons pas écrire les équations sur le domaine  $\Omega^*$  entier, mais sur les trois sous-domaines  $\Omega_{\text{perfo}}^*$ ,  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  (voir figure 4.2). On note  $u^+$  la restriction de  $u$  sur le domaine  $\Omega^+$  qui vérifie les équations

$$\Delta^* u^+ = 0 \text{ dans } \Omega^+, \quad (4.29a)$$

$$\partial_{\vec{n}_+}^* u^+ = 0 \text{ sur } \Sigma^+, \quad (4.29b)$$

1. Notons que cette expression est incomplète car elle ne tient pas compte de la limite de  $u$  à l'infini

$$\lim_{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} u = +\frac{1}{2}. \quad (4.29c)$$

Si on écrit la formule de représentation de  $u^+$  (4.4), les opérateurs  $V$  et  $N$  seront définis sur la frontière  $\partial\hat{\Omega}^+$  qui est non bornée. Pour contourner ce problème, nous allons définir la variable  $\tilde{u}$ , telle que les densités  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\lambda}$  associées soient non nulles uniquement sur la frontière  $\hat{\Gamma}^+$ . La formule de représentation de  $\tilde{u}$  sera alors définie sur  $\hat{\Gamma}^+$ , et il en sera de même pour  $u^+$ .

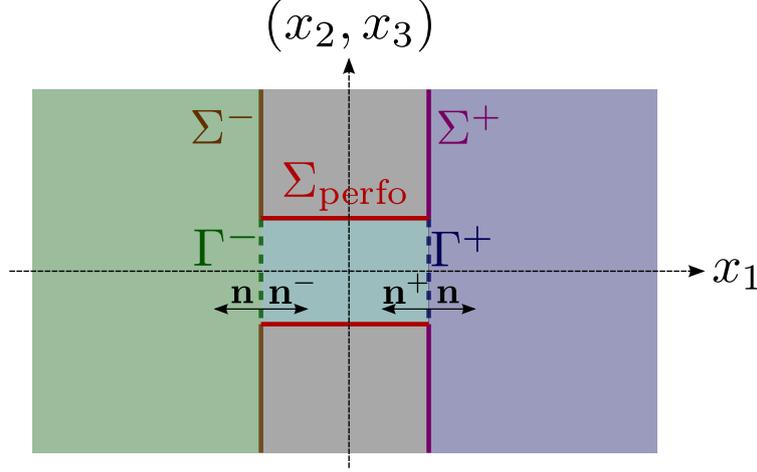


FIGURE 4.2 – Schéma des différents domaines définis au voisinage de la perforation

On définit  $\tilde{u}$  sur  $\hat{\Omega}^+$  et sur le complémentaire de sa fermeture, noté  $\hat{\Omega}_{\text{comp}}^+ = \mathbb{R}^3 / \overline{\hat{\Omega}^+}$ , par

$$\tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{cases} u^+(\hat{\mathbf{x}}) - 1/2 & \text{pour } \hat{x}_1 > H/2 \\ u^+(\hat{\mathbf{x}}_+^*) - 1/2 & \text{pour } \hat{x}_1 < H/2 \end{cases} \quad (4.30)$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_+^*$  le symétrique de  $\hat{\mathbf{x}}$  par rapport au plan  $\{\hat{x}_1 = H/2\}$ . On note  $\tilde{u}(\hat{\mathbf{x}})|_{\text{int}}$  la trace de  $\tilde{u}|_{\hat{\Omega}_+^*}$  sur  $\partial\hat{\Omega}^+$  et  $\tilde{u}(\hat{\mathbf{x}})|_{\text{ext}}$  la trace de  $\tilde{u}|_{\hat{\Omega}_{\text{comp}}^+}$  sur  $\partial\hat{\Omega}^+$ . Le saut des traces de  $\tilde{u}$  est nul car  $\hat{\mathbf{x}}_+^* = \hat{\mathbf{x}}$  sur  $\partial\hat{\Omega}^+$

$$[\tilde{u}] = \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}})|_{\text{int}} - \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}})|_{\text{ext}} = u^+(\hat{\mathbf{x}})|_{\text{int}} - 1/2 - u^+(\hat{\mathbf{x}}_+^*)|_{\text{int}} + 1/2 = 0. \quad (4.31)$$

Le saut des traces des dérivées normales de  $\tilde{u}$  s'écrit

$$[\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} \tilde{u}] = (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}))|_{\text{int}} - (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}))|_{\text{ext}} \quad (4.32a)$$

$$= (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} u^+(\hat{\mathbf{x}}))|_{\text{int}} + (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} u^+(\hat{\mathbf{x}}))|_{\text{int}} \quad (4.32b)$$

$$= 2 (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} u^+(\hat{\mathbf{x}}))|_{\text{int}} \quad (4.32c)$$

On définit les densités  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\sigma}$  sur  $\partial\hat{\Omega}^+$  telles que

$$\tilde{\lambda} = [\tilde{u}] \text{ et } \tilde{\sigma} = [\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} \tilde{u}]. \quad (4.33)$$

D'après l'équation (4.31),  $[\tilde{u}] = 0$  ainsi  $\tilde{\lambda} = 0$  sur  $\partial\hat{\Omega}^+$ .

De plus, d'après l'équation (4.32),  $\tilde{\sigma} = 2 (\partial_{\hat{\mathbf{n}}^+} u^+(\mathbf{x}))|_{\text{int}}$  qui est nul sur  $\hat{\Sigma}^+$  (équation (4.29b)). En tenant compte de ces résultats, on peut écrire la formule de représentation de  $\tilde{u}$  sur  $\hat{\Omega}^+ \cup \hat{\Omega}_{\text{comp}}^+$

$$\tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \tilde{V}\tilde{\sigma}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.34)$$

avec

$$\tilde{V}\tilde{\sigma}(\dot{\mathbf{x}}) = \int_{\dot{\Gamma}^+} \frac{1}{4\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|} \tilde{\sigma}(\dot{\mathbf{y}}) d\gamma(\dot{\mathbf{y}}). \quad (4.35)$$

Ecrivons maintenant la formule de représentation de  $u^+$  en fonction celle de  $\tilde{u}$  (et donc du potentiel  $\tilde{V}\tilde{\sigma}$  défini sur le domaine borné  $\dot{\Gamma}^+$ )

$$u^+(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} + \tilde{u}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} + \tilde{V}\tilde{\sigma}(\dot{\mathbf{x}}). \quad (4.36)$$

On définit la densité  $\sigma^+$  tel que

$$\sigma^+ = \left( \partial_{\mathbf{n}^+} u^+(\dot{\mathbf{x}}) \right) |_{\text{int}}. \quad (4.37)$$

On a alors  $\tilde{\sigma} = 2\sigma^+$  et on peut réécrire l'équation (4.36)

$$u^+(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} + \tilde{u}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} + 2\tilde{V}\sigma^+(\dot{\mathbf{x}}). \quad (4.38)$$

Dans la suite, le potentiel  $\tilde{V}\sigma^+$  sera notée  $V_+\sigma^+$  avec

$$V_+\sigma^+(\dot{\mathbf{x}}) = \int_{\dot{\Gamma}^+} \frac{1}{4\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|} \sigma^+(\dot{\mathbf{y}}) d\gamma(\dot{\mathbf{y}}). \quad (4.39)$$

Ainsi la formule de représentation de  $u^+$  s'écrit en fonction du potentiel  $V_+\sigma^+$  défini sur la frontière  $\dot{\Gamma}^+$  qui est borné.

De même, la formule de représentation de  $u^-$  dans  $\dot{\Omega}^-$  s'écrit

$$u^-(\dot{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2} + 2V_-\sigma^-(\dot{\mathbf{x}}), \quad (4.40)$$

avec

$$V_-\sigma^-(\dot{\mathbf{x}}) = \int_{\dot{\Gamma}^-} \frac{1}{4\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|} \sigma^-(\dot{\mathbf{y}}) d\gamma(\dot{\mathbf{y}}). \quad (4.41)$$

où  $\dot{\mathbf{x}}_-^*$  est le symétrique de  $\dot{\mathbf{x}}$  par rapport au plan  $\{x_1 = -H/2\}$ .

Le domaine  $\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$  est borné, donc on peut écrire la formule de représentation classique

$$u_{\text{perfo}} = V\sigma + N\lambda, \quad (4.42)$$

avec  $\lambda$  et  $\sigma$  les traces de  $u_{\text{perfo}}$  et  $\partial_{\mathbf{n}}^* u_{\text{perfo}}$  sur  $\partial\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$ . La condition aux limites sur  $\dot{\Sigma}_{\text{perfo}}^*$  impose

$$\sigma = 0 \text{ sur } \dot{\Sigma}_{\text{perfo}}^*. \quad (4.43)$$

Sur les surfaces  $\dot{\Gamma}^+$  et  $\dot{\Gamma}^-$ , les champs  $u$  et  $\partial_{\mathbf{n}}^* u$  sont continus. Cependant, les normales  $\dot{\mathbf{n}}^+$  et  $\dot{\mathbf{n}}$  (et les normales  $\dot{\mathbf{n}}^-$  et  $\dot{\mathbf{n}}$ ) sont de sens opposé (voir figure 4.2). Ainsi

$$\sigma^+(\dot{\mathbf{y}}) = \partial_{\dot{\mathbf{n}}^+} u^+(\dot{\mathbf{y}}) = -\partial_{\dot{\mathbf{n}}} u_{\text{perfo}}(\dot{\mathbf{y}}) = -\sigma(\dot{\mathbf{y}}) \text{ sur } \dot{\Gamma}^+ \quad (4.44)$$

$$\sigma^-(\dot{\mathbf{y}}) = \partial_{\dot{\mathbf{n}}^-} u^-(\dot{\mathbf{y}}) = -\partial_{\dot{\mathbf{n}}} u_{\text{perfo}}(\dot{\mathbf{y}}) = -\sigma(\dot{\mathbf{y}}) \text{ sur } \dot{\Gamma}^- \quad (4.45)$$

Finalement, on peut écrire les trois formules de représentations de  $u$  en fonction de  $\sigma$  et  $\lambda$

$$u(\dot{\mathbf{x}}) = V\sigma(\dot{\mathbf{x}}) + N\lambda(\dot{\mathbf{x}}) \quad \dot{\mathbf{x}} \in \dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*, \quad (4.46a)$$

$$u(\dot{\mathbf{x}}) = 1/2 - 2V_+\sigma(\dot{\mathbf{x}}) \quad \dot{\mathbf{x}} \in \dot{\Omega}^+, \quad (4.46b)$$

$$u(\dot{\mathbf{x}}) = -1/2 - 2V_-\sigma(\dot{\mathbf{x}}) \quad \dot{\mathbf{x}} \in \dot{\Omega}^-. \quad (4.46c)$$

Il faut maintenant établir les équations vérifiées par  $\sigma$  et  $\lambda$ . Pour cela, nous allons écrire les traces de l'équation (4.46) sur  $\partial\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$ . D'après les formules (4.14) et (4.16), on peut écrire les traces de  $u$  et de  $\partial_{\mathbf{n}}^*u$  sur  $\partial\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$

$$u_{\text{int}} = V\sigma + \frac{1}{2}\lambda + N\lambda, \quad (4.47)$$

$$(\partial_{\mathbf{n}}^*u)|_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sigma - N^T\sigma + D\lambda, \quad (4.48)$$

or  $u_{\text{int}} = \lambda(\dot{\mathbf{x}})$  et  $(\partial_{\mathbf{n}}^*u)|_{\text{int}} = \sigma(\dot{\mathbf{x}})$  sur  $\partial\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$ , ainsi

$$\lambda = V\sigma + \frac{1}{2}\lambda + N\lambda, \quad (4.49)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma - N^T\sigma + D\lambda. \quad (4.50)$$

On peut également écrire la trace de  $u$  sur  $\dot{\Gamma}^+$  et  $\dot{\Gamma}^-$  à partir des formules de représentations (4.46b) et (4.46c) et de l'expression (4.8) de la trace du potentiel  $V\sigma$

$$u_{\text{int}}(\dot{\mathbf{x}}) = \pm 1/2 - 2V_{\pm}\sigma(\dot{\mathbf{x}}). \quad (4.51)$$

Comme  $\lambda = u_{\text{int}}$  sur  $\dot{\Gamma}^{\pm}$ , l'équation précédente s'écrit

$$\lambda + 2V_{\pm}\sigma = \pm 1/2, \quad (4.52)$$

qu'on peut réécrire

$$1/2\lambda + V_{\pm}\sigma = f, \quad (4.53)$$

où  $f$  est une fonction égale à  $1/4$  sur  $\dot{\Gamma}^+$  et  $-1/4$  sur  $\dot{\Gamma}^-$ .

On introduit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre l'espace des traces  $H^{1/2}(\partial\dot{\Omega}^*)$  et son dual  $H^{-1/2}(\partial\dot{\Omega}^*)$ . Les contraintes (4.53) sur les surfaces  $\dot{\Gamma}^+$  et  $\dot{\Gamma}^-$  seront prises en compte à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. La formulation variationnelle des équations (4.49) et (4.50) peut s'écrire (en tenant compte des contraintes (4.53))

$$\langle V\sigma, \sigma' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} + \langle N\lambda, \sigma' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} = \langle \frac{1}{2}\lambda, \sigma' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} = - \langle V_+\sigma, \sigma' \rangle_{\dot{\Gamma}^+} - \langle V_-\sigma, \sigma' \rangle_{\dot{\Gamma}^-} + \langle f, \sigma' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*}, \quad (4.54)$$

$$\langle \lambda', N^T\sigma \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} - \langle \lambda', D\lambda \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} = - \langle \frac{1}{2}\lambda', \sigma \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*}, \quad (4.55)$$

quel que soit  $\sigma' \in H^{-1/2}(\partial\dot{\Omega}^*)$  avec  $\sigma'(\dot{\mathbf{x}}) = 0$  sur  $\dot{\Sigma}_{\text{perfo}}^*$  et  $\lambda' \in H^{1/2}(\partial\dot{\Omega}^*)$ . La notation  $\partial\dot{\Omega}_p^*$  est utilisée à la place de  $\partial\dot{\Omega}_{\text{perfo}}^*$  pour alléger l'écriture. On peut également écrire la formulation variationnelle de l'équation (4.53)

$$\langle 1/2\lambda, l' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} + \langle V_+\sigma, l' \rangle_{\dot{\Gamma}^+} + \langle V_-\sigma, l' \rangle_{\dot{\Gamma}^-} = \langle f, l' \rangle_{\partial\dot{\Omega}_p^*} \quad (4.56)$$

quel que soit  $l' \in H^{-1/2}(\partial\Omega^*)$  avec  $l'(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\Sigma_{\text{perfo}}^*$ . En remarquant que

$$\langle V_+\sigma, \sigma' \rangle_{\Gamma^+}^* + \langle V_-\sigma, \sigma' \rangle_{\Gamma^-}^* = \langle V\sigma, \sigma' \rangle_{\partial\Omega_p}^* \quad (4.57)$$

et en substituant  $l$  à  $\sigma$  dans le second membre des équations (4.54) et (4.55), on peut écrire la formulation variationnelle suivante

$$\langle V\sigma, \sigma' \rangle_{\partial\Omega_p}^* + \langle N\lambda, \sigma' \rangle_{\partial\Omega_p}^* + \langle \lambda', N^T\sigma \rangle_{\partial\Omega_p}^* - \langle \lambda', D\lambda \rangle_{\partial\Omega_p}^* \quad (4.58a)$$

$$+ \langle Vl, \sigma' \rangle_{\partial\Omega_p}^* + \langle \frac{1}{2}\lambda', l \rangle_{\partial\Omega_p}^* = \langle f, \sigma' \rangle_{\partial\Omega_p}^* \quad (4.58b)$$

$$\langle V\sigma, l' \rangle_{\partial\Omega_p}^* + \langle 1/2\lambda, l' \rangle_{\partial\Omega_p}^* = \langle f, l' \rangle_{\partial\Omega_p}^* \quad (4.58c)$$

L'équation (4.58) est discrétisée sur un maillage triangulaire sur la frontière  $\partial\Omega_{\text{perfo}}^*$  et approchée par une méthode d'éléments de frontière. Les solutions discrètes  $\lambda$ ,  $\sigma$  et  $l$  ont été calculées avec le code CESC développé au CERFACS [2]. Ce code permet notamment de résoudre les problèmes d'acoustique et d'électromagnétisme par la méthode des éléments de frontière. Vingt-et-une simulations numériques ont été faites, avec des longueurs de perforation variant entre  $5R_0$  et  $10R_0$ . Dans chaque simulation, le rayon  $R_0$  est unitaire. Dans la suite, nous remarquerons que la solution est singulière aux extrémités du cylindre. Le maillage est donc plus raffiné dans ces zones. En terme de ressources informatiques, ces simulations ne sont pas très coûteuses, la durée des calculs étant de quelques minutes sur un ordinateur de bureau.

## 4.3 Analyse du champ de vitesse et calcul des corrections de col

### 4.3.1 Calcul de l'expression des correction de col pour la résistance

Avant d'analyser les résultats numériques, nous allons expliquer comment calculer les corrections de col pour la résistance en fonction de  $u$  et de son gradient.

Tout d'abord, précisons que le problème 4.58 avait été résolu par Laurens et collab. pour calculer numériquement la conductivité de Rayleigh d'une perforation dans le cas non visqueux [26]. En effet

$$K_R^* = -\frac{j\omega\rho_0\dot{Q}}{P_g - P_d}, \quad (4.59)$$

$$= -\frac{j\omega\rho_0}{P_g - P_d} \int_{\Gamma^+}^* \dot{v}_1 d\Gamma^+, \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{P_d - P_g} \int_{\Gamma^+}^* \partial_{x_1} p d\Gamma^+, \quad (4.61)$$

$$= \int_{\Gamma^+}^* \partial_{x_1} u d\Gamma^+. \quad (4.62)$$

Contrairement aux chapitres précédents, la convention harmonique choisie dans ce chapitre est  $e^{-j\omega t}$ . C'est pourquoi nous avons donné le conjugué de la définition (1.11) de  $K_R^*$ .

On définit la vitesse moyenne  $\bar{v}_1$  à l'intérieur de la perforation telle que  $\bar{v}_1 = \dot{Q}/(\pi R_0^2)$ . On peut alors écrire

$$\bar{v}_1 = \frac{K_R^* (P_d - P_g)}{\pi R_0^2 j\omega\rho_0}. \quad (4.63)$$

Rappelons l'expression du travail des efforts visqueux à l'intérieur de la perforation donnée en équation (3.49)

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}_{\text{perfo}}) \rangle = \dot{R}_S \left| \dot{V}_1^{\text{perfo}} \right|^2 \dot{S}_{\text{perfo}}, \quad (4.64)$$

où  $\dot{S}_{\text{perfo}}$  est l'aire de la surface latérale de la perforation,  $\dot{R}_S$  est la résistance surfacique (définie par l'équation (3.42)) et  $\dot{V}_1^{\text{perfo}}$  est la vitesse tangentielle extérieure à la couche limite acoustique dans la perforation. Nous supposons que cette vitesse est égale à la vitesse moyenne à l'intérieur de la perforation  $\dot{v}_1$ , ainsi on peut réécrire l'équation (4.64)

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}_{\text{perfo}}) \rangle = \dot{R}_S \left| \frac{\dot{K}_R (P_d - P_g)}{\pi R_0^2 j\omega \rho_0} \right|^2 \dot{S}_{\text{perfo}}. \quad (4.65)$$

Le travail des efforts visqueux dans le domaine  $\dot{\Omega}^+$  s'écrit

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = \dot{R}_S \int_{\dot{\Sigma}^+} |\dot{v}_t(\dot{\mathbf{x}})|^2 d\dot{\Sigma}^+, \quad (4.66)$$

avec

$$\dot{v}_t = \frac{1}{j\omega \rho_0} \partial_t \dot{p} = \frac{P_d - P_g}{j\omega \rho_0} \partial_t u. \quad (4.67)$$

Ainsi

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = \dot{R}_S \int_{\dot{\Sigma}^+} |\dot{v}_t|^2 d\dot{\Sigma}^+ \quad (4.68a)$$

$$= \dot{R}_S \left| \frac{P_d - P_g}{j\omega \rho_0} \right|^2 \int_{\dot{\Sigma}^+} |\partial_t u|^2 d\dot{\Sigma}^+. \quad (4.68b)$$

Rappelons l'expression des corrections de col (voir équation (3.73))

$$\Delta h = \frac{2 \langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle h}{\langle \dot{W}(\dot{\Omega}_{\text{perfo}}) \rangle}. \quad (4.69)$$

En utilisant les équations (4.65) et (4.68), on peut écrire une expression des corrections de col qui ne dépend plus que de la variable  $u$ , sa dérivée normale sur  $\dot{\Gamma}^+$  (pour calculer  $\dot{K}_R$ ) et sa dérivée tangentielle sur  $\dot{\Sigma}^+$

$$\Delta h = \left| \frac{\pi R_0^2}{\dot{K}_R} \right|^2 \frac{2h}{2\pi R_0 H} \int_{\dot{\Sigma}^+} |\partial_t u|^2 d\dot{\Sigma}^+. \quad (4.70)$$

### 4.3.2 Calcul des vitesses et des corrections de col à l'extérieur de la perforation

Nous allons maintenant expliquer comment les valeurs numériques de  $\dot{K}_R$  et de  $\partial_t u$  ont été calculées. Tout d'abord rappelons l'expression de  $\dot{K}_R$

$$\dot{K}_R = \int_{\dot{\Gamma}^+} \partial_{x_1}^* u d\dot{\Gamma}^+. \quad (4.71)$$

Or sur  $\dot{\Gamma}^+$ , la dérivée normale de  $u$  est connue, elle est égale à la densité  $\sigma$  qui a été calculée numériquement. On l'a intégrée numériquement sur la surface  $\dot{\Gamma}^+$  par une routine de CESC. Ainsi, nous avons calculé une valeur numérique de  $\dot{K}_R$ .

Expliquons maintenant le calcul de la dérivée tangentielle de  $u$  sur  $\Sigma^+$ . Elle est égale aux dérivées de la variable  $u$  dans les directions  $\hat{\mathbf{x}}_2$  et  $\hat{\mathbf{x}}_3$ . D'après la formule de représentation (4.46b), le gradient de  $u$  s'écrit

$$\hat{\nabla} u(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\nabla} (1/2 - 2V_+ \sigma(\hat{\mathbf{x}})) \quad (4.72a)$$

$$= \hat{\nabla} \int_{\Gamma^+} \frac{1}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} \sigma(\hat{\mathbf{y}}) d\gamma(\mathbf{y}) \quad (4.72b)$$

On remarque que cette formule est la même que celle de l'expression (3.56) du champ de vitesse donnée dans le chapitre précédent.

Calculons le gradient de  $1/(2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|)$

$$\hat{\nabla} \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} = \begin{bmatrix} -\frac{(\hat{x}_1 - \hat{y}_1)}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \\ -\frac{(\hat{x}_2 - \hat{y}_2)}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \\ -\frac{(\hat{x}_3 - \hat{y}_3)}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

car

$$\partial_{\hat{x}_1} |\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}| = \frac{(\hat{x}_1 - \hat{y}_1)}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|}, \quad (4.74)$$

et

$$\partial_{\hat{x}_1} \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} = \frac{-(\hat{x}_1 - \hat{y}_1)}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3}. \quad (4.75)$$

Ainsi

$$\hat{\nabla} u(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} -\int_{\Gamma^+} \frac{(\hat{x}_1 - \hat{y}_1)}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \sigma(\hat{\mathbf{y}}) d\gamma(\mathbf{y}) \\ -\int_{\Gamma^+} \frac{(\hat{x}_2 - \hat{y}_2)}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \sigma(\hat{\mathbf{y}}) d\gamma(\mathbf{y}) \\ -\int_{\Gamma^+} \frac{(\hat{x}_3 - \hat{y}_3)}{2\pi|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^3} \sigma(\hat{\mathbf{y}}) d\gamma(\mathbf{y}) \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Comme pour la conductivité de Rayleigh, le gradient de  $u$  a été calculé numériquement par une routine de CESC. Le module de la dérivée tangentielle de  $u$  sur la surface  $\Sigma^+$  s'écrit

$$|\partial_t u| = \sqrt{(\partial_{\hat{x}_2} u)^2 + (\partial_{\hat{x}_3} u)^2}. \quad (4.77)$$

Nous avons profité de ces simulations pour vérifier l'approximation analytique de Kelvin qui a été développée dans la section 3.3.2.1. Pour cela, nous avons défini la densité  $\sigma^K = K_R^*/(\pi R_0^2)$ , ce qui nous a permis de calculer numériquement le champ  $u^K(\hat{\mathbf{x}}) = (1/2 - 2V_+ \sigma^K(\hat{\mathbf{x}}))$ . Sachant que le champ calculé par l'approximation analytique de Dirichlet n'est pas intégrable au bord de la perforation, nous avons décidé de ne pas le calculer numériquement.

Pour une perforation de rayon unitaire et de hauteur  $H = 10R_0$ , nous avons tracé sur la figure 4.3 la dérivée tangentielle de  $u$  et de  $u^K$  sur la surface  $\hat{\Sigma}^+$  dans la direction  $\hat{\mathbf{x}}_2$  (voir la figure 4.2 pour la notation des axes). On remarque une singularité près du bord de la perforation. La théorie des singularités indique que la solution  $u$  de l'équation de Laplace est singulière près d'un coin. Le comportement asymptotique de  $u$  s'écrit

$$u(\rho) = \mathcal{O}\left(\rho^{\frac{\pi}{\theta}}\right), \quad (4.78)$$

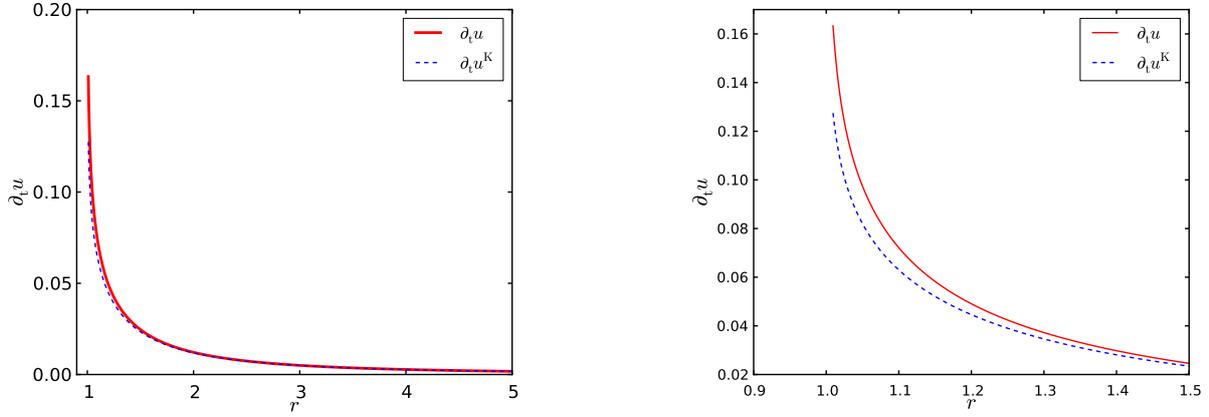


FIGURE 4.3 – Dérivée tangentielle de  $u$  à l’extérieur de la perforation (sur  $\Sigma^+$ ). La position  $r = 0$  correspond à l’axe de la perforation, et  $r = 1$  à son bord

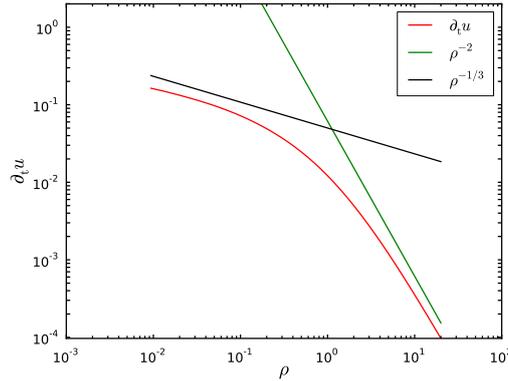


FIGURE 4.4 – Comportement asymptotique de la dérivée tangentielle de  $u$

où  $\rho$  est la distance au coin  $\hat{r}^* - R_0$  et  $\theta$  est l’angle défini par le coin. La dérivée tangentielle de  $u$  a donc un comportement asymptotique égal à

$$\partial_\rho u(\rho) = \mathcal{O}\left(\rho^{\frac{\pi}{\theta}-1}\right). \quad (4.79)$$

Nous avons considéré une perforation droite, ainsi l’angle du coin est égal à  $\theta = 3\pi/2$ . Près du coin, la fonction  $u$  a un comportement asymptotique en  $\rho^{2/3}$  et sa dérivée en  $\rho^{-1/3}$ . Cela signifie que  $|\partial_\rho u|^2$  est intégrable en  $R_0$ . Sur la figure 4.3, on remarque également que  $u$  décroît rapidement vers 0 quand  $r$  grandit. D’après l’expression de la fonction de Green, le comportement asymptotique de  $u$  à l’infini est de l’ordre de  $r^{-1}$  donc sa dérivée est de l’ordre de  $r^{-2}$  ce qui signifie que  $|\partial_\rho u|^2$  est intégrable. Sur la figure 4.4, nous avons tracé la dérivée tangentielle de  $u$  avec des échelles logarithmiques et nous l’avons comparée aux asymptotes  $\rho^{-1/3}$  et  $\rho^{-2}$ . On remarque que l’évolution prédite par la théorie des singularités est vérifiée. Comme dans le chapitre précédent, nous supposons que la vitesse est axisymétrique, ainsi l’expression de l’intégrale sur  $\hat{\Sigma}^+$  du carré

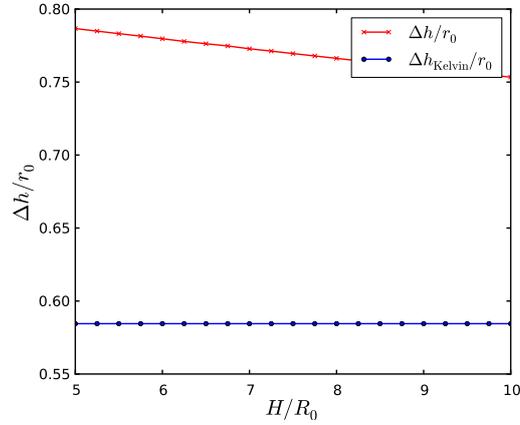


FIGURE 4.5 – Corrections de col à l'extérieur de la perforation

du module de la dérivée tangentielle de  $u$  se simplifie

$$\int_{\Sigma^+} |\partial_t u|^2 d\Sigma^+ = 2\pi \int_{r^*=R_0}^{+\infty} |\partial_t u|^2 r^* dr^*. \quad (4.80)$$

Pour calculer cette intégrale numériquement, nous avons utilisé une méthode des points milieux. On peut déduire de ce calcul une valeur des corrections de col par l'expression (4.70). Ces calculs ont été effectués pour 21 longueurs de cylindre différentes comprises entre  $5R_0$  et  $10R_0$ . La même démarche a été suivie pour l'approximation de Kelvin  $u^K$ . Les corrections de col sont représentées sur la figure 4.5. La correction de col calculée à partir du champ  $u$  est supérieure à celle calculée avec l'approximation de Kelvin. De plus, on remarque que le  $\Delta h_{\text{Kelvin}}$  numérique est bien égal à la correction calculée analytiquement (égale à  $(1 - 4/\pi^2)r_0 \approx 0.5947r_0$ ). La correction calculée à partir du champ  $u$  dépend de la longueur de la perforation. Cela peut s'expliquer par une interaction entre les effets des deux extrémités de la perforation. La correction calculée à partir de  $u$  est comprise entre  $0.75r_0$  et  $0.79r_0$ , ce qui reste très inférieur à la valeur  $2r_0$  énoncée par Ingard à partir de résultats expérimentaux.

### 4.3.3 Calcul des vitesses et des corrections de col à l'intérieur de la perforation

Le champ  $u$  à l'extérieur de la perforation présentant une singularité près des bords de la perforation, nous souhaitons vérifier si c'est également le cas à l'intérieur de la perforation. Sur la surface  $\Sigma_{\text{perfo}}^*$ , le champ  $u(\vec{x}^*)$  est égal à la densité  $\lambda(\vec{x}^*)$ . Nous avons calculé la dérivée tangentielle de  $u$  sur la droite  $\{\vec{x}_1, 0, -R_0\}$  pour  $\vec{x}_1$  compris entre  $-H/2$  et  $H/2$ . Pour cela, nous avons utilisé l'approximation classique

$$\partial_t u(\vec{x}_{i+\frac{1}{2}}^*) = \frac{\lambda(\vec{x}_{i+1}^*) - \lambda(\vec{x}_i^*)}{\vec{x}_{i+1}^* - \vec{x}_i^*}. \quad (4.81)$$

Pour une perforation de longueur  $H = 10R_0$ , nous avons représenté la dérivée tangentielle de  $u$  sur la figure 4.6. Nous pouvons la comparer à la valeur moyenne  $K_R^*/(\pi R_0^2)$ . Loin des extrémités de la perforation, les deux valeurs sont égales, tandis que proche des extrémités, la dérivée tangentielle de  $u$  présente une singularité. Le travail des efforts visqueux à l'intérieur de la perforation est donc sous-estimé par la valeur calculée analytiquement d'après la formule (4.65). Pour tenir compte des

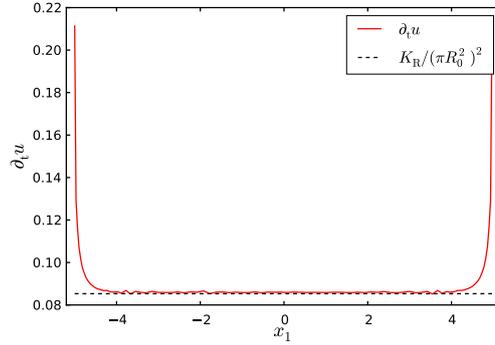


FIGURE 4.6 – Dérivée tangentielle de  $u$  à l’intérieur de la perforation

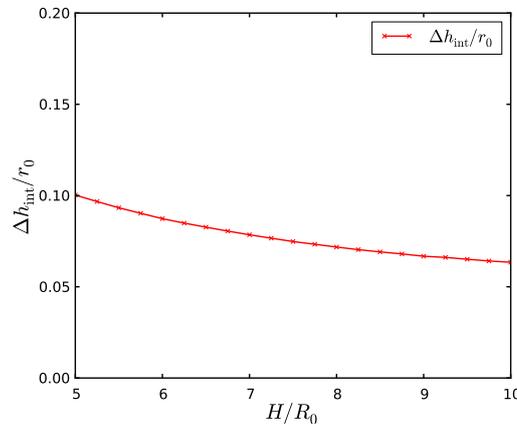


FIGURE 4.7 – Correction de col calculée à l’intérieur de la perforation

singularités à l’intérieur de la perforation, nous introduisons une correction de col intérieure définie par

$$\Delta h_{\text{int}} = \frac{1}{|K_R^* / \pi R_0^2|^2} \int_{x_1^* = -H/2}^{H/2} |\partial_t u|^2 dx_1^* - 1. \quad (4.82)$$

Comme précédemment, nous avons calculé les corrections intérieures pour 21 longueurs de cylindre différentes comprises entre  $5R_0$  et  $10R_0$ . Les résultats sont tracés sur la figure 4.7. Nous remarquons que les corrections de col intérieures dépendent de la longueur de la perforation, ce qui était prévisible. En effet, plus une perforation est longue, moins l’effet des extrémités influe sur la dissipation totale à l’intérieur de la perforation. Les corrections de col intérieures sont comprises entre  $0.06r_0$  et  $0.1r_0$ .

#### 4.3.4 Corrections de col totales

En sommant les corrections intérieures et extérieures, la correction de col totale trouvée est comprise entre  $0.81r_0$  et  $0.89r_0$ , ce qui reste inférieur à  $2r_0$ , la correction calculée expérimentalement par Ingard. On peut supposer que l’expression du travail des efforts visqueux dans le cas d’une plaque plane n’est pas valide près des extrémités de la perforation. Pour la calculer plus précisément,

il faudrait mener une étude tenant compte d'un champ de coin aux extrémités de la perforation. Des calculs théoriques ont été initiés dans ce but mais n'ont pas pu aboutir dans le temps imparti à la thèse.

La résistance d'une plaque perforée s'exprime en fonction du travail des efforts visqueux au voisinage de la perforation. Nous avons supposé que les effets visqueux sont compris dans une couche limite acoustique près des parois. Ainsi, à l'extérieur de la couche limite, le domaine fluide est régi par les équations d'Euler linéarisées sans écoulement porteur. Dans ce cas, le champ de vitesse s'exprime en fonction du champ de pression qui est lui même solution de l'équation de Laplace. Dans ce chapitre, nous avons résolu cette équation numériquement par la méthode des éléments de frontière à l'aide du code CESC développé au CERFACS. Ainsi, nous avons calculé le champ de vitesse sur les parois de la perforation et de la plaque perforée. Les corrections de col pour la résistance s'exprimant en fonction du champ de vitesse, nous avons pu les calculer grâce aux résultats numériques des simulations. A l'extérieur de la perforation, les corrections de col calculées numériquement sont supérieures à la correction calculée analytiquement dans le chapitre précédent. De plus, nous avons calculé une correction supplémentaire à l'intérieur de la perforation. Cependant, la correction totale calculée numériquement reste inférieure à la correction expérimentale donnée par Ingard. Des investigations supplémentaires pour tenir compte des effets de contournement des bords auraient été nécessaires, mais n'ont pu être menées à leur terme au cours de cette thèse. Dans le prochain chapitre, nous allons calculer la réponse acoustique d'une plaque perforée par simulation numérique directe, afin de vérifier les différentes hypothèses de la modélisation multi-échelle.



## Simulations numériques directes avec CEDRE

Dans ce chapitre, nous allons calculer numériquement la réponse acoustique d'une plaque perforée. Le but principal des simulations directes est de vérifier les différentes hypothèses de la modélisation multi-échelle. Ce type de simulation a déjà été réalisé à l'ONERA par Jean-Michel Roche durant sa thèse. Il avait calculé le coefficient de réflexion d'une plaque perforée pour en déduire son impédance acoustique. Ici, nous détaillerons ce calcul afin d'en expliquer les hypothèses sous-jacentes. De plus, nous développerons une nouvelle méthode pour calculer l'impédance indépendamment du coefficient de réflexion. Avant d'analyser les résultats numériques, nous préciserons la géométrie du domaine de calcul ainsi que les différents paramètres numériques choisis.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Choix du domaine de calcul</b>	<b>74</b>
<b>5.2</b>	<b>Choix des paramètres numériques de la simulation</b>	<b>75</b>
5.2.1	La méthode des volumes finis dans CEDRE	75
5.2.2	Définition du maillage	77
5.2.3	Choix du pas de temps	78
5.2.4	Choix des conditions aux limites et de la source acoustique	79
<b>5.3</b>	<b>Visualisation des données temporelles et calcul des spectres</b>	<b>79</b>
<b>5.4</b>	<b>Décomposition des ondes stationnaires</b>	<b>82</b>
<b>5.5</b>	<b>Calcul de l'impédance de la plaque perforée</b>	<b>83</b>
<b>5.6</b>	<b>Discussion des résultats et perspectives</b>	<b>86</b>

---

## 5.1 Choix du domaine de calcul

Dans ce chapitre, nous allons calculer numériquement l'effet d'une perforation cylindrique sur la propagation d'une onde plane en incidence normale. Ce sont les équations de Navier-Stokes compressibles qui sont résolues numériquement afin de tenir compte des différents effets physiques. Le coût de la résolution numérique de ces équations est élevé, c'est pourquoi la géométrie étudiée ne comprend qu'une seule perforation. A l'ONERA, des simulations numériques sur des configurations similaires ont été réalisées avec le code CEDRE par Jean-Michel Roche durant sa thèse [50–52]. Il a étudié la réponse acoustique d'un résonateur de Helmholtz excité par une onde plane en incidence normale ou en incidence rasante. Il a tenu compte des effets visqueux (compris dans les équations résolues par le code), des niveaux sonores élevés ou de la présence d'un écoulement rasant. En incidence normale, il a placé un guide d'onde cylindrique en amont de la perforation, et une cavité en aval de celle-ci. Conformément à la modélisation développée dans les chapitres précédents, nous considérerons ici une configuration plus simple : une onde acoustique en incidence normale sur la perforation avec un niveau sonore faible et sans écoulement moyen. Pour modéliser seulement l'effet de la perforation et non celui de la cavité, il n'y aura pas de paroi rigide en sortie du domaine. Les calculs seront tridimensionnels. La figure 5.1 représente une coupe longitudinale du domaine de calcul<sup>1</sup>

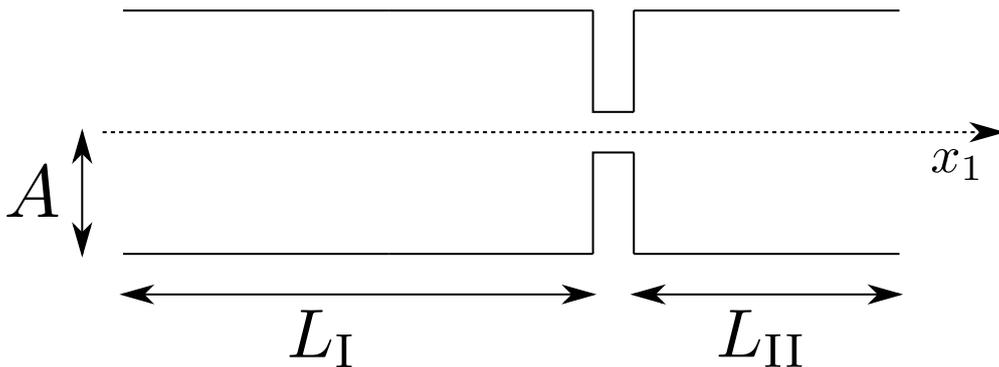


FIGURE 5.1 – Coupe longitudinale du domaine de calcul.

Les équations sont résolues dans le domaine temporel, alors que dans ces travaux nous modélisons l'impédance acoustique dans le domaine fréquentiel. Dans ces simulations, nous imposerons une source acoustique harmonique (à une fréquence donnée) pour étudier la réponse de la perforation à une fréquence donnée. Cette source sera placée en entrée du guide d'onde en amont de la perforation. En amont de la perforation, Roche a préconisé une longueur de guide égale à deux longueurs d'onde pour l'établissement de l'onde plane. Le choix de la fréquence de l'onde acoustique incidente et des dimensions de la perforation a été fait en tenant compte de plusieurs contraintes. Dans les chapitres précédents, nous avons modélisé les effets visqueux dans le cas où ils étaient compris dans une région de faible épaisseur. Pour représenter ce cas numériquement, nous devons choisir une fréquence suffisamment élevée pour que l'épaisseur de la couche limite soit petite devant le rayon d'une perforation. Cependant, l'une des hypothèses principales de modélisation est que la longueur d'onde soit grande devant les dimensions de la perforation. Si la longueur d'onde est trop élevée, cette hypothèse risque de ne pas être vérifiée. Pour respecter ces deux contraintes, nous avons choisi une fréquence de 5000 Hz (c'est-à-dire une longueur d'onde de 68 mm). Le diamètre  $d_0$  et l'épaisseur  $h$  de la perforation sont fixés à 1 mm. L'extrémité gauche

1. Le ratio entre la longueur du guide d'onde et celle de la perforation n'a pas été respecté dans le schéma.

de la perforation est située à la position  $x_g = 0$  mm, et l'extrémité droite à la position  $x_d = 1$  mm. Dans cette configuration, le nombre de Helmholtz est d'environ 0.1 et le nombre de Stokes vaut 20. Nous rappelons que le nombre de Helmholtz est défini par  $He = kh$  (avec  $k = \omega/c_0$ ) et que pour  $He \ll 1$ , l'écoulement acoustique est supposé localement incompressible à l'intérieur de la perforation. Le nombre de Stokes est défini par  $Sto = |k_s r_0|$  (avec  $k_s = \sqrt{-j\omega\rho_0/\mu_0}$ ), et pour  $Sto > 10$ , l'épaisseur de la couche limite acoustique est plus petite que le rayon de la perforation. La longueur  $L_I$  du guide d'onde en amont de la perforation est fixée à 136 mm (deux longueurs d'onde). En aval, la longueur  $L_{II}$  est fixée à 50 mm. Le rayon  $A$  de la section du guide d'onde est égal à 3 mm, donc la porosité est de 0.178 %.

## 5.2 Choix des paramètres numériques de la simulation

Le code de calcul CEDRE (Calcul des Ecoulements Diphasiques Réactifs pour l'Energétique) de l'ONERA est dédié à la simulation numérique des phénomènes multi-physiques dans le domaine de l'énergétique et de la propulsion<sup>2</sup>. Pour ce type de simulation, de nombreux phénomènes physiques doivent être pris en compte (l'aérodynamique, la combustion, etc.). Pour cela, le code CEDRE est organisé par solveurs pouvant être en interaction, chaque solveur modélisant des phénomènes physiques différents. Par exemple, le solveur ACACIA modélise les transferts thermiques par conduction dans les parties solides tandis que le solveur CHARME modélise les écoulements multi-espèces, chaque espèce étant un fluide compressible. Il tient compte de réactions chimiques éventuelles entre les espèces et peut modéliser les écoulement turbulent par des approches RANS ou LES. Le solveur CHARME résout les équations de Navier-Stokes par une méthode volumes finis non-structurée. Dans nos simulations, nous utiliserons uniquement le solveur CHARME, dans pour une configuration restrictive, puisque nous étudierons l'écoulement d'une espèce unique (l'air) sans modélisation de la turbulence. En soi, ce solveur est bien plus puissant que l'application visée, mais il a été choisi pour se placer dans la continuité des travaux de Jean-Michel Roche. Si la thèse était à refaire, une alternative prometteuse serait d'utiliser plutôt un solveur Lattice-Boltzmann, mais au début de la thèse, aucun n'était disponible à l'ONERA. Les détails techniques présentés dans la suite de ce chapitre, sont extraits de la documentation de CEDRE ainsi que de la thèse de Germain Boyer [5].

### 5.2.1 La méthode des volumes finis dans CEDRE

Nous allons maintenant énoncer les équations résolues par le solveur CHARME et détailler les schémas numériques que nous avons utilisés. Contrairement à la formulation énoncée dans la documentation CEDRE, nous n'écrirons pas les scalaires passifs ni le vecteur contenant les fractions massiques dans le vecteur contenant les variables conservatives. En effet, il n'y a pas de turbulence dans nos simulations, donc les scalaires passifs ne sont pas utilisés. De plus, nous modélisons l'écoulement d'une seule espèce (l'air) donc sa fraction massique est égale à 1. Le code CEDRE résout les équations dans le domaine temporel, ainsi, même si nous ne l'explicitons pas dans les équations, les variables dépendent du temps. Ce sont les variables totales et non les fluctuations acoustiques qui sont considérées dans CEDRE, c'est pour cela que la notation <sup>†</sup> est utilisée (voir section 2.1.2).

2. <http://cedre.onera.fr/perimetre-application>

On définit les vecteurs  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{U}$  des variables conservatives et primitives

$$\mathbf{Q} = (\rho^\dagger, \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger, \rho^\dagger E^\dagger)^\top \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = (p^\dagger, T^\dagger, \mathbf{v}^\dagger)^\top, \quad (5.1)$$

où  $\rho^\dagger$  est la masse volumique,  $\mathbf{v}^\dagger$  le vecteur vitesse,  $E^\dagger$  l'énergie totale,  $p^\dagger$  la pression, et  $T^\dagger$  la température. Les équations d'états du fluide permettent d'écrire la relation entre les variables conservatives et les variables primitives. La forme conservative des équations de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial \rho^\dagger}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger) = 0, \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger [\mathbf{v}^\dagger]^\top) = \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}^\dagger, \quad (5.2b)$$

$$\frac{\partial \rho^\dagger E^\dagger}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger E^\dagger) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}^\dagger \mathbf{v}^\dagger) - \operatorname{div} \mathbf{q}^\dagger, \quad (5.2c)$$

avec  $\mathbf{q}^\dagger$  est le flux de chaleur et  $\boldsymbol{\Sigma}^\dagger$  le tenseur des contraintes. On peut décomposer  $\boldsymbol{\Sigma}^\dagger$

$$\boldsymbol{\Sigma}^\dagger = -p^\dagger \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^\dagger, \quad (5.3)$$

où  $\boldsymbol{\tau}^\dagger$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. On peut écrire l'équation (5.2) de Navier-Stokes sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0, \quad (5.4)$$

avec  $\mathbf{F}$  la matrice contenant les flux de masses, de quantités de mouvements et d'énergie. On peut décomposer ces flux en deux parties, les flux « Euler »  $\mathbf{f}$  et les flux « Navier-Stokes »  $\varphi$  où les flux Euler sont égaux à

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger \\ \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger [\mathbf{v}^\dagger]^\top + p^\dagger \mathbf{I} \\ \rho^\dagger \mathbf{v}^\dagger E^\dagger + p^\dagger \mathbf{v}^\dagger \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

En intégrant l'équation (5.4) sur une cellule  $c_i$  du maillage, on obtient

$$\int_{c_i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} d\Omega + \sum_{f_j \in c_i} \int_{f_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{i,j} = 0, \quad (5.6)$$

où  $f_j$  désigne les faces de la cellule  $c_i$  et  $\mathbf{n}_{i,j}$  la normale sortante de la face  $f_j$ . En notant  $\mathbf{Q}_i$  la moyenne du vecteur  $\mathbf{Q}$  sur la cellule  $c_i$ ,  $\mathcal{V}_i$  le volume de la cellule  $c_i$  et  $\mathbf{F}_{i,j}$  le vecteur contenant les valeurs du flux sortant de la cellule  $c_i$  par la face  $f_j$ , l'équation (5.6) s'écrit alors

$$\mathcal{V}_i \partial_t \mathbf{Q}_i + \sum_{f_j \in c_i} \mathbf{F}_{i,j} = 0. \quad (5.7)$$

Le choix d'une fonction flux numérique  $\psi_{i,j}$  qui approxime le flux  $\mathbf{F}_{i,j}$  permet d'écrire un schéma de volumes finis. Le flux numérique peut s'écrire en fonction de l'ensemble des états des autres cellules. Usuellement, on écrit le flux numérique à travers l'interface entre les cellules  $c_i$  et  $c_{i+1}$  en fonction des états  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G$  et  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D$  sur les faces « gauche » et « droite » de l'interface entre les deux cellules. On le note  $\Phi(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D)$ . Avant d'énoncer le flux numérique que nous avons choisi, il faut déterminer la valeur des états  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G$  et  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D$ .

Pour une approximation au premier ordre, les états gauche et droit sont définis égaux à la valeur dans leur cellule respective, ainsi  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G = \mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D = \mathbf{U}_{i+1}$ . Pour une approximation à l'ordre 2, Van Leer a développé la méthode MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) qui consiste à calculer l'état  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G$  à partir d'une interpolation linéaire des états  $\mathbf{U}_{i-1}$  et  $\mathbf{U}_i$  (et l'état  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D$  par interpolation linéaire des états  $\mathbf{U}_{i+1}$  et  $\mathbf{U}_{i+2}$ ). Un limiteur de pente doit être associé à cette méthode pour limiter les oscillations numériques. Nous avons choisi une approximation à l'ordre deux des états gauche et droit, associée au limiteur de Van Leer.

Les flux Euler sont calculés par un schéma de type « Flux Difference Splitting ». Ils s'écrivent sous la forme

$$\Phi_{\text{Euler}}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D)}{2} - \mathcal{D}, \quad (5.8)$$

avec  $\mathcal{D}$  un opérateur de décentrement. Il s'exprime en fonction de la jacobienne du flux  $\mathbf{F}$  calculée à un état intermédiaire  $\mathbf{U}_{\text{int}}$  et des états  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^G$  et  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D$ . Comme dans les simulations de Roche, nous avons choisi le schéma de Roe (qui est de type FDS) pour le flux numérique.

### 5.2.2 Définition du maillage

Comme nous l'avons dit à plusieurs reprises, plusieurs échelles de longueur différentes caractérisent la réponse acoustique d'une perforation. Pour calculer précisément les effets physiques (comme les effets visqueux) à l'intérieur de la perforation, la taille des cellules du maillage doit être adapté à l'épaisseur de la couche limite acoustique. Cependant, il serait inutile d'avoir une telle précision dans la totalité du domaine, en particulier dans le guide d'onde où l'écoulement est régit par les effets propagatifs, et cela engendrerait un coût de calcul très élevé. C'est pourquoi la taille des cellules sera plus grande dans le guide d'onde qu'à l'intérieur de la perforation. Le raffinement de la taille des cellules est facilité par l'utilisation de maillages non-structurés, c'est le cas du code CEDRE. Avant de détailler le choix des différentes tailles de maille dans le domaine de calcul, nous allons expliquer comment est défini un maillage dans CEDRE.

Dans CEDRE, le maillage d'un domaine est caractérisé par la position de ses sommets et par différentes tables de connectivité. En effet, les arêtes sont définies par un couple de points, un ensemble d'arêtes forme une face et une cellule du maillage est caractérisée par un ensemble de faces. Pour prendre en compte les limites du domaine, CEDRE ajoute à sa discrétisation des cellules supplémentaires, appelées cellules limites. Ces cellules sont dites dégénérées car leur volume est nul.

Pour tenir compte des effets visqueux à l'intérieur des perforations, la couche limite acoustique doit contenir plusieurs cellules dans son épaisseur. On rappelle l'expression du champ de vitesse dans la couche limite acoustique près d'une plaque plane (voir section 3.1)

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \Re \left\{ \hat{\mathbf{v}}^\infty(\mathbf{x}) \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\mu_0}}x_3} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\mu_0}}x_3} \right) e^{j\omega t} \right\}, \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{x}_3$  est la direction normale à la paroi. Le terme  $e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\mu_0}}x_3}$  décroît quand  $x_3$  grandit. Pour  $x_3 \approx 5\sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}}$ , il est inférieur à 0.01. Ainsi l'épaisseur de la couche limite acoustique est environ égale à  $5\sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}}$ . La masse volumique de l'air à température ambiante est égale à  $1.2 \text{ kg/m}^3$  et

sa viscosité dynamique est égale à  $1.8 \times 10^{-5}$  kg/m/s. Pour une onde sonore émise à 5000 Hz, l'épaisseur de la couche limite acoustique est environ égale à 0.15 mm. Le pas de discrétisation dans la couche limite acoustique est fixé à 0.01 mm afin qu'il y ait 15 cellules dans la couche limite acoustique. Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous ne pouvons pas mailler la totalité du domaine avec une discrétisation aussi fine. Les effets visqueux étant prédominants près des parois des perforations et de la plaque perforée, c'est dans ces régions que le maillage doit être le plus raffiné. Ainsi, plus une cellule est loin de ces régions, plus sa taille est grande. La taille maximale des mailles dans le guide dépend de la longueur d'onde que nous avons choisie de simuler. Roche préconise un nombre de points par longueur d'onde d'au moins 85 pour garantir la propagation des ondes sonores<sup>3</sup>. Avec ce critère, le pas de discrétisation doit être inférieur à 0.8 mm dans le guide d'onde (pour une fréquence égale à 5000 Hz). La figure 5.2 représente le raffinement du maillage au voisinage de la perforation. Le maillage en amont de la perforation est raffiné de la même manière.

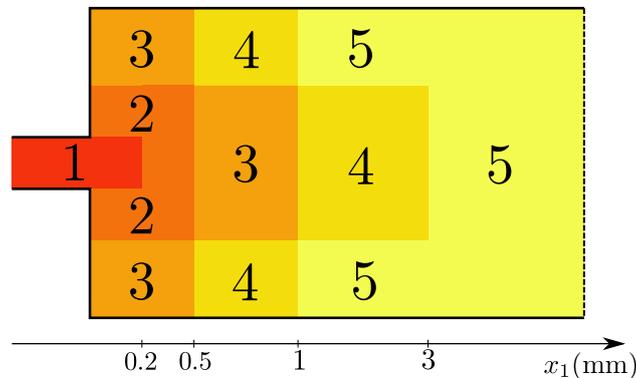


FIGURE 5.2 – Schéma représentant le raffinement du maillage au voisinage de la perforation

Dans la région 1, la taille des cellules égale à  $\Delta x_1 = 0.01$  mm. Des éléments hexaédriques ont été placés dans la couche limite acoustique pour garantir une meilleure approximation des gradients de vitesse. Les quatre régions suivantes contiennent des cellules de plus en plus grosses :  $\Delta x_2 = 0.02$  mm,  $\Delta x_3 = 0.05$  mm,  $\Delta x_4 = 0.1$  mm et  $\Delta x_5 = 0.2$  mm.

### 5.2.3 Choix du pas de temps

Nous avons choisi la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 explicite pour l'intégration temporelle. La condition de Courant-Friedrichs-Lewy pour ce schéma s'écrit

$$c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x_{\min}} \leq 0.5. \quad (5.10)$$

Pour un pas de discrétisation spatiale de 0.01 mm, le pas de temps doit être inférieur à  $1.5 \times 10^{-8}$  s. Nous avons choisi  $\Delta t = 5 \times 10^{-9}$  s car en pratique le nombre CFL peut être inférieur à la valeur théorique de 0.5. De plus, il est possible que le maillage contienne des cellules plus faibles que la longueur minimale que nous avons fixée.

Afin d'étudier la réponse acoustique de la perforation dans le régime harmonique, il faut que la simulation soit suffisamment longue pour que des ondes stationnaires apparaissent dans le guide d'onde. C'est pourquoi nous avons choisi un temps final égal à dix périodes temporelles. Pour une

3. Ce nombre est lié au schéma volumes finis d'ordre 2 et au schéma temporel Runge-Kutta 2

fréquence de 5000 Hz, la période temporelle est égale à 0.2 ms, donc le temps final est égal à 2 ms. Pour ce calcul, le nombre d'itérations est égal à 400 000. Les calculs ont été lancés en parallèle sur 480 coeurs du supercalculateur de l'ONERA<sup>4</sup>, pour une durée de 60 heures de calcul par coeur.

### 5.2.4 Choix des conditions aux limites et de la source acoustique

Quand le régime d'ondes stationnaires sera établi, nous pourrons écrire les champs de pression acoustique et de vitesse acoustique comme la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie (en amont de la perforation) ou comme une onde transmise (en aval de la perforation). Pour cela, l'entrée et la sortie du guide d'onde doivent être totalement non-réfléchissantes. C'est pourquoi, nous avons choisi les conditions de non-réflexion de CEDRE comme condition aux limites pour ces frontières. Cependant, ces conditions aux limites manquent de robustesse. En effet, on peut observer dans certains cas une dérive progressive de la pression dans le domaine. Nous verrons dans la suite que ce manque de robustesse a été bloquant pour les investigations numériques que nous avons l'intention de faire. Les autres frontières du domaine sont définies fixes, imperméables, adhérente et adiabatiques.

La source acoustique est modélisée par une variation sinusoïdale des flux de masse, et d'énergie sur la première rangée de cellules à l'entrée du guide d'onde. Le niveau de pression sonore de la source est fixé à 95 dB. Ce niveau sonore est insuffisant pour générer des tourbillons, donc l'énergie se dissipera par viscosité, ce qui correspond au cadre de cette étude. La relation entre le niveau de pression sonore (SPL) et l'amplitude de la fluctuation de pression  $P$  est donnée par

$$\text{SPL} = 20 \log \left( \frac{P}{2\sqrt{2}10^{-5}} \right) \quad \text{ou} \quad P = 10^{\frac{\text{SPL}}{20}} \times 2\sqrt{2}10^{-5}. \quad (5.11)$$

Les champs numériques sont initialisés dans le domaine de calcul avec les valeurs suivantes

$$p_0 = 101198 \text{ Pa}, \quad \mathbf{v}_0 = 0 \text{ m/s}, \quad T_0 = 288 \text{ K}, \quad (5.12)$$

$$\rho_0 = 1.226 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_0 = 1.783 \text{ kg/m/s}. \quad (5.13)$$

Ces conditions initiales sont identiques à celles fixées par Roche.

## 5.3 Visualisation des données temporelles et calcul des spectres

Les travaux présentés dans la suite du chapitre ont été présentés à la conférence Turbo-Expo 2015 [43].

Le pas de temps a été fixé par la condition CFL et dépend de la discrétisation spatiale du domaine de calcul. Dans ces simulations, il y a 40 000 itérations par période temporelle, il n'est donc pas utile de stocker les champs volumiques à chaque itération. De plus, il faudrait des moyens considérables pour les sauvegarder et les post-traiter. Les champs volumiques sont enregistrés toutes les 2000 itérations (toutes les  $10^{-5}$  s), c'est-à-dire qu'il y a 20 enregistrements par période temporelle. Dans CEDRE, il existe également un outil pour enregistrer la valeur des champs à une position précise du domaine de calcul. On appelle cet outil « capteur numérique ». Le post-traitement des capteurs numériques est rapide, c'est pourquoi nous avons fixé une fréquence d'enregistrement plus

4. <http://www.onera.fr/fr/les-moyens-de-calcul-intensifs>

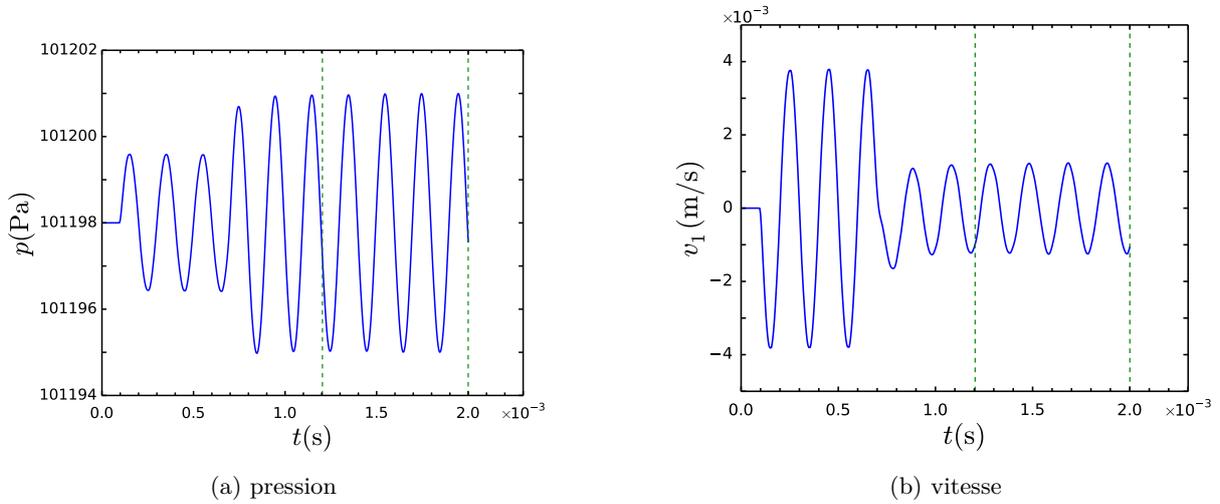


FIGURE 5.3 – Evolution temporelle de la pression et de la vitesse axiale enregistrée par le capteur numérique 5.

élevée que celle des champs volumiques. Les capteurs numériques stockent les champs instantanés toutes les 800 itérations (50 fois par période temporelle). Nous avons placés 95 capteurs sur l'axe du domaine de calcul. Il y en a 23 dans le guide d'onde en amont de la perforation, 51 au voisinage de la perforation et 21 dans le guide d'onde en aval de la perforation. Nous représentons sur la figure 5.3 l'évolution des champs de pression et de vitesse enregistrés par le capteur 5 situé dans le guide en amont de la perforation (à la position  $x_1 = -102$  mm).

On remarque que, durant la première partie du calcul (jusqu'à  $0.096 \times 10^{-3}$  s), le signal est nul car l'onde acoustique émise par la source n'a pas encore atteint la position du capteur. Ensuite, durant 3 périodes temporelles (jusqu'à environ  $0.7 \times 10^{-3}$  s), on peut observer les fluctuations dues à l'onde incidente. Après, l'amplitude du signal de pression augmente (et celle de la vitesse diminue), c'est dû à l'interaction de l'onde incidente avec l'onde réfléchi par la perforation. On remarque enfin que l'amplitude des oscillations est constante dans la dernière partie du calcul (après  $1.2 \times 10^{-3}$  s). Pour analyser les données dans le domaine fréquentiel, nous calculons la transformée de Fourier rapide des fluctuations de pression et de vitesse grâce à la routine `fft` de la librairie `Scipy`<sup>5</sup>. Elle n'a été calculée qu'à partir des données de la dernière partie du calcul (identifiée par des lignes pointillées vertes verticales sur la figure 5.3). De plus, pour calculer la transformée de Fourier des fluctuations de pression, nous avons soustrait la valeur moyenne de la pression au champ de pression instantané. Le spectre des signaux de pression et de vitesse est représenté sur la figure 5.4. Seule la fréquence de l'onde incidente (égale à 5000 Hz) est non-nulle, on peut en conclure que l'interaction de l'onde sonore avec la perforation n'engendre pas une réponse multi-fréquentielle.

Les champs de pression et de vitesse instantanés ainsi que leur spectre ont été présentés pour le capteur numérique 5, mais nous avons répété la même procédure pour l'ensemble des capteurs numériques présents dans le domaine de calcul.

Nous avons également calculé le débit volumique à travers onze sections à l'intérieur de la perforation. Pour cela, le champ de vitesse a été interpolé puis intégré numériquement sur chaque

5. Une librairie Python dédiée au calcul scientifique

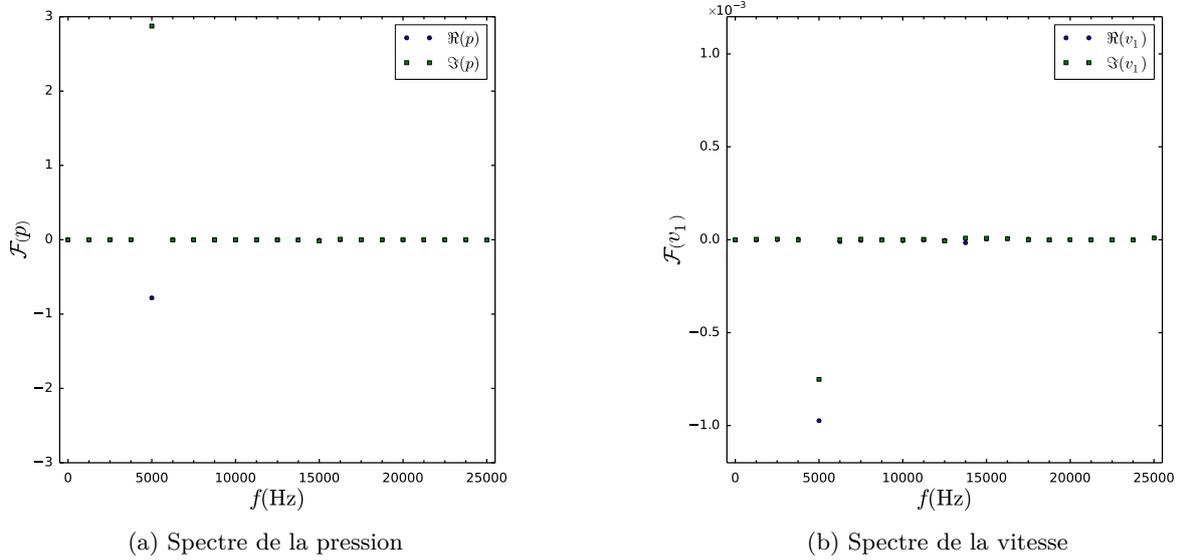
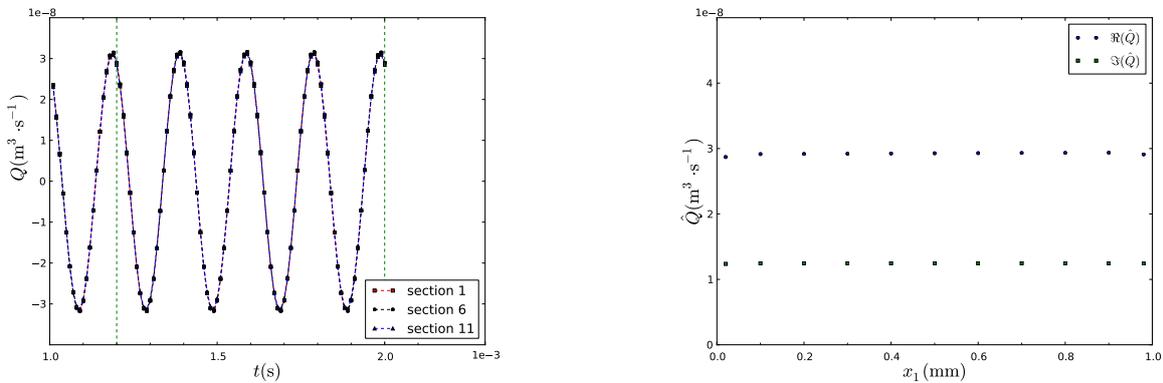


FIGURE 5.4 – Spectre de la pression et de la vitesse axiale enregistrée par le capteur numérique 5.

section. On remarque sur la figure 5.5a que les courbes représentant l'évolution temporelle du débit dans trois sections sont confondues. C'est également le cas pour les huit autre sections que nous n'avons pas représentées sur le graphe. Le débit est donc uniforme dans la perforation : **l'hypothèse d'incompressibilité à l'intérieur de la perforation est vérifiée**. Après calcul de la transformée de Fourier rapide du débit volumique et extraction de la valeur à 5000 Hz pour chaque section, nous pouvons tracer le phaseur  $\hat{Q}$  du débit volumique de chaque section en fonction de leur position (voir figure 5.5b). On rappelle que le phaseur  $\hat{Q}$  est défini à partir du débit volumique temporel  $Q$  par  $Q(\mathbf{x}, t) = \Re(\hat{Q}(\mathbf{x})e^{j\omega t})$  où  $\omega$  est la pulsation associée à la pulsation de la source sonore.



(a) Evolution temporelle du débit volumique dans trois sections

(b) Phaseur du débit volumique dans la perforation

FIGURE 5.5 – Evolution temporelle et spatiale du débit volumique à l'intérieur de la perforation

## 5.4 Décomposition des ondes stationnaires

Comme nous l'avons fait pour le débit volumique, nous avons calculé les phaseurs de pression et de vitesse en extrayant la valeur à 5000 Hz de leur spectre. Sur la figure 5.6, nous avons représenté l'évolution spatiale du phaseur de pression. La position de la perforation est représentée par deux lignes verticales de tirets noirs (qu'on ne distingue pas sur la figure car elles sont très proches). En amont et en aval de la perforation, nous remarquons que l'évolution spatiale du champ de pression est périodique ce qui est caractéristique des phénomènes propagatifs. Ces phénomènes sont prédominants dans la zone de champ lointain. Elle est située de part et d'autre la zone rouge délimitée par deux lignes verticales vertes. Cette zone rouge représente la zone de champ intermédiaire et de champ proche.

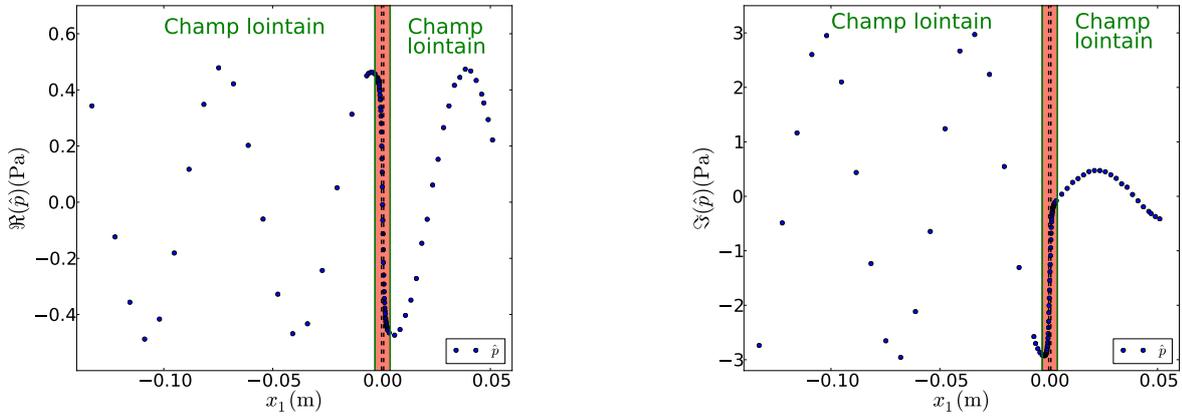


FIGURE 5.6 – Phaseurs de pression

Dans le guide d'onde, en amont de la perforation, nous pouvons écrire l'onde stationnaire comme la somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchi. En aval de la perforation, nous supposons qu'il n'y a qu'une onde transmise puisque nous avons imposé une condition de non-réflexion à la sortie du guide d'onde. Nous notons  $\Omega_I$  le domaine en amont de la perforation et  $\Omega_{II}$  le domaine en aval de la perforation. Nous supposons que les champs de pression et de vitesse s'écrivent

$$\widehat{p}_I(x_1) = p_I^+ e^{-jkx_1} + p_I^- e^{jkx_1}, \quad (5.14)$$

$$\widehat{v}_I(x_1) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_1} - p_I^- e^{jkx_1} \right), \quad (5.15)$$

$$\widehat{p}_{II}(x_1) = p_{II}^+ e^{-jkx_1} + p_{II}^- e^{jkx_1}, \quad (5.16)$$

$$\widehat{v}_{II}(x_1) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( p_{II}^+ e^{-jkx_1} - p_{II}^- e^{jkx_1} \right), \quad (5.17)$$

avec  $p_I^+, p_I^-, p_{II}^+$  et  $p_{II}^-$  des nombres complexes. Pour déterminer ces nombres, nous allons mettre en oeuvre la méthode des moindres carrés. Nous allons expliciter les équations pour le calcul des coefficients  $p_I^+$  et  $p_I^-$  à partir du champ de pression. La même méthode peut s'appliquer en utilisant le champ de vitesse ou les champs de pression et vitesse ensemble. Notons  $x_{c_i}$  la position du capteur  $i$ . Pour les capteurs en amont de la perforation, nous souhaitons déterminer  $p_I^+$  et  $p_I^-$

minimisant la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  définie par

$$\mathcal{J} = \sum_i |\widehat{p}_I(x_{c_i}) - \widehat{p}(x_{c_i})|^2 = \sum_i |(p_I^+ e^{-jkx_{c_i}} + p_I^- e^{jkx_{c_i}}) - \widehat{p}(x_{c_i})|^2. \quad (5.18)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est linéaire en fonction de  $p_I^+$  et  $p_I^-$ , nous pouvons donc l'écrire avec des notations matricielles

$$\mathcal{J} = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2, \quad (5.19)$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne. La matrice  $\mathbf{A}$  est égale à

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^{-jkx_{c_1}} & e^{jkx_{c_1}} \\ e^{-jkx_{c_2}} & e^{jkx_{c_2}} \\ e^{-jkx_{c_3}} & e^{jkx_{c_3}} \\ \dots & \dots \\ e^{-jkx_{c_n}} & e^{jkx_{c_n}} \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

et le vecteur  $\mathbf{B}$  contient les valeurs « mesurées numériquement »

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \widehat{p}(x_{c_1}) \\ \widehat{p}(x_{c_2}) \\ \widehat{p}(x_{c_3}) \\ \dots \\ \widehat{p}(x_{c_n}) \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

tandis que le vecteur  $\mathbf{x}$  contient les deux inconnues

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_I^+ \\ p_I^- \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Pour calculer le vecteur  $\mathbf{x}$  minimisant  $\mathcal{J}$ , on peut résoudre les équations normales

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (5.23)$$

En pratique, nous avons calculé le vecteur  $\mathbf{x}$  minimisant  $\mathcal{J}$  avec la routine `lstsq` de SciPy. Comme nous l'attendions, le coefficient  $p_{II}^+$  est quasiment nul, ce qui valide la qualité de la condition de non-réflexion. Une fois les différents coefficients  $p_I^+$ ,  $p_I^-$  et  $p_{II}^+$  déterminés par la méthode des moindres carrés, nous pouvons calculer les pressions ( $\widehat{p}_I$  et  $\widehat{p}_{II}$ ) et vitesses ( $\widehat{v}_I$  et  $\widehat{v}_{II}$ ) champ lointain dans la totalité du domaine. Les champs de pression ont été représentés sur la figure 5.7. Les lignes verticales vertes et rouges délimitent les capteurs sur lesquels nous avons appliqué la méthode des moindres carrés.

## 5.5 Calcul de l'impédance de la plaque perforée

Avant de calculer l'impédance de la perforation, nous souhaitons vérifier la continuité des vitesses  $\widehat{v}_I$  et  $\widehat{v}_{II}$  à travers la perforation et le raccord des flux de vitesse entre la zone champ lointain et la zone champ proche. Pour cela, nous avons défini la vitesse  $\widehat{v}_1$  à partir du débit volumique  $\widehat{Q}$  (voir figure 5.5b) par

$$\widehat{v}_1 = \frac{\widehat{Q}}{\pi A^2}. \quad (5.24)$$

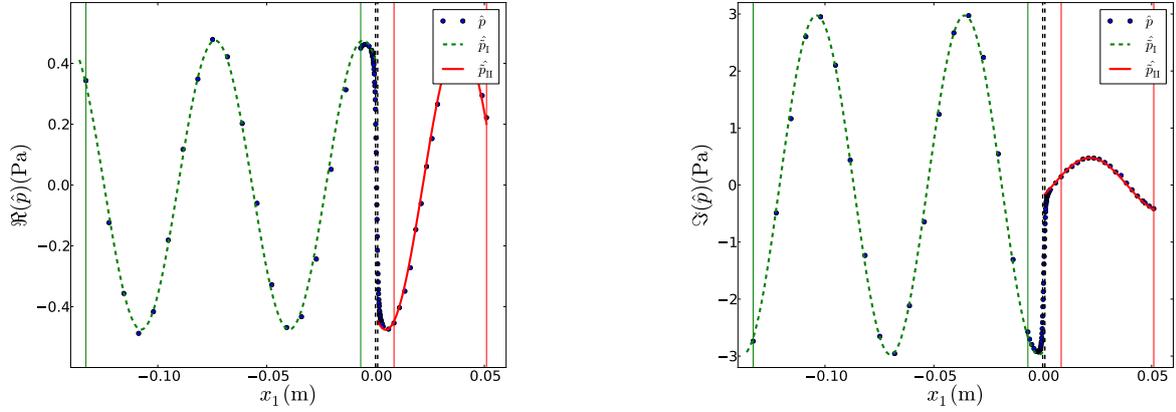


FIGURE 5.7 – Pression champ lointain calculée par la méthode des moindres carrés

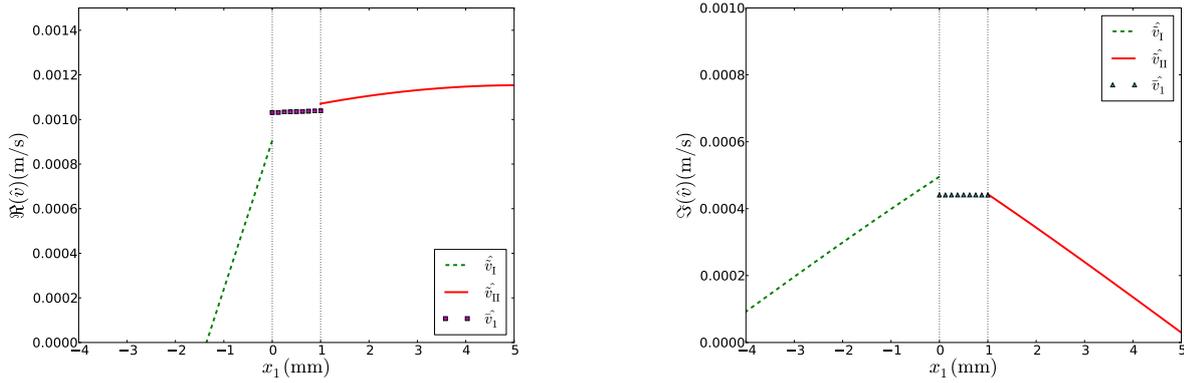


FIGURE 5.8 – Comparaison des vitesses champ lointain reconstruites avec le débit volumique dans la perforation

Nous remarquons sur la figure 5.8 que l'égalité entre les vitesses  $\widehat{v}_I$  et  $\widehat{v}_{II}$  n'est pas tout à fait vérifiée. Sans être parfait, le raccord entre les vitesses champ lointain et la vitesse  $\widehat{v}_I$  est correct.

Nous allons maintenant présenter deux méthodes pour déterminer l'impédance acoustique de la plaque perforée. La première est couramment utilisée expérimentalement et fait appel au coefficient de réflexion. Nous avons développé la seconde directement à partir de la définition de l'impédance acoustique.

Le coefficient de réflexion de la plaque perforée est défini à partir des coefficients  $p_I^-$  et  $p_I^+$

$$\mathcal{R}_I = \frac{p_I^-}{p_I^+}. \quad (5.25)$$

Nous allons maintenant établir la relation entre le coefficient de réflexion et l'impédance de transmission de la plaque perforée (les calculs sont détaillés dans l'annexe C). Pour cela, rappelons d'abord la définition de l'impédance (voir équation (1.6))

$$\tilde{p}_g - \tilde{p}_d = Z_w \tilde{v}_\Gamma, \quad (5.26)$$

où  $\tilde{p}_g = \widehat{p}_I(x_\Gamma)$ ,  $\tilde{p}_d = \widehat{p}_{II}(x_\Gamma)$  et  $\tilde{v}_\Gamma = \widehat{v}_I(x_\Gamma) = \widehat{v}_{II}(x_\Gamma)$ . Cette définition de l'impédance est valide en champ lointain où la plaque est supposée infiniment fine et localisée à une position  $x_1 = x_\Gamma$ . On peut réécrire l'équation (5.26)

$$p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} + p_I^- e^{jkx_\Gamma} - p_{II}^+ e^{-jkx_\Gamma} = \frac{Z_w}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} \right). \quad (5.27)$$

La continuité du champ de vitesse impose  $p_I^+ e^{-jjx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} = p_{II}^+ e^{-jkx_\Gamma}$  et l'équation (5.27) s'écrit alors

$$2p_I^- e^{jjx_\Gamma} = \frac{Z_w}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} \right). \quad (5.28)$$

Ainsi, on peut exprimer l'impédance en fonction du coefficient de réflexion

$$Z_w = \rho_0 c_0 \frac{2\mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma}}{1 - \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma}}. \quad (5.29)$$

En réalité, la plaque n'est pas infiniment fine et la position  $x_\Gamma$  doit être fixée. Nous avons calculé l'impédance pour deux valeurs différentes de  $x_\Gamma$ . Pour  $x_\Gamma = x_g = 0$ , on pose

$$Z_w^1 = \rho_0 c_0 \frac{2\mathcal{R}_I}{1 - \mathcal{R}_I}. \quad (5.30)$$

Pour  $x_\Gamma$  choisi au milieu de la perforation ( $x_\Gamma = x_m = h/2$ ), on écrit

$$Z_w^2 = \rho_0 c_0 \frac{2\mathcal{R}_I e^{jkh}}{1 - \mathcal{R}_I e^{jkh}}. \quad (5.31)$$

La connaissance des champs de pression et de vitesse en aval de la perforation n'est pas nécessaire en utilisant cette méthode, puisque  $\tilde{p}_d$  est calculé grâce à  $p_I^+$  et  $p_I^-$  par la relation entre  $p_I^+$ ,  $p_I^-$  et  $p_{II}^+$ .

Nous proposons une seconde méthode pour calculer l'impédance, directement issue de la définition (5.26). Comme nous l'avons mentionné précédemment les vitesses  $\widehat{v}_I$  et  $\widehat{v}_{II}$  ne sont pas tout à fait égales aux extrémités de la perforation (voir figure 5.8). C'est pourquoi, nous avons choisi  $\tilde{v}_\Gamma = \widehat{v}_I$  (voir équation (5.24)). Comme pour la première méthode, nous avons calculé deux valeurs pour l'impédance. Pour la première, nous avons choisi  $\tilde{p}_g = \widehat{p}_I(x_g)$  et  $\tilde{p}_d = \widehat{p}_{II}(x_d)$ , et ainsi

$$Z_w^3 = \frac{\widehat{p}_I(x_g) - \widehat{p}_{II}(x_d)}{\widehat{v}_I} = \frac{\widehat{p}_I(0) - \widehat{p}_{II}(h)}{\widehat{v}_I}. \quad (5.32)$$

Pour la seconde expression de l'impédance, nous avons choisi  $\tilde{p}_g = \widehat{p}_I(x_m)$  et  $\tilde{p}_d = \widehat{p}_{II}(x_m)$

$$Z_w^4 = \frac{\widehat{p}_I(x_m) - \widehat{p}_{II}(x_m)}{\widehat{v}_I} = \frac{\widehat{p}_I(\frac{h}{2}) - \widehat{p}_{II}(\frac{h}{2})}{\widehat{v}_I}. \quad (5.33)$$

Les valeurs numériques des quatre impédances sont comparées au modèle de Melling pour les grands nombre de Stokes et modèle de Maa dans le tableau 5.1. Ces deux modèles ont été présentés dans la section 1.5.2. Rappelons leur expression

$$Z_{\text{Melling}} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \sqrt{2\omega\rho_0\mu_0} \left( 2 + \frac{h}{r_0} \right) + j\omega\rho_0 \left( h + \sqrt{\frac{2\mu_0}{\omega\rho_0}} \frac{h}{r_0} + \frac{16r_0}{3\pi} \right) \right\}, \quad (5.34)$$

	Résistance	Réactance	$ R_I $	$\psi(R_I)$
$z_{\text{Melling}} [eq. (5.34)]$	0.41	6.36	0.94	0.21
$z_{\text{Maa}} [eq. (5.35)]$	0.26	6.35	0.94	0.21
$z_w^1 [eq. (5.30)]$	1.46	6.56	0.91	0.27
$z_w^2 [eq. (5.31)]$	0.44	5.12	0.91	0.27
$z_w^3 [eq. (5.32)]$	0.64	6.23	0.93	0.21
$z_w^4 [eq. (5.33)]$	0.64	6.13	0.92	0.21

TABLE 5.1 – Impédances normalisées et coefficients de réflexion associés

et

$$Z_{\text{Maa}} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{8\mu_0 h}{r_0^2} \left( 1 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0 32} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\rho_0 \omega \mu_0}{2}} + j\omega \rho_0 \left[ h \left( 1 + \left( 3^2 + \frac{\rho_0 \omega r_0^2}{\mu_0 2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{16r_0}{3\pi} \right] \right\}. \quad (5.35)$$

Pour une meilleure lisibilité, nous avons donné les impédances normalisées  $z_w = Z_w/(\rho_0 c_0)$  dans le tableau 5.1. Les valeurs  $Z_w^1$  et  $Z_w^2$  sont assez différentes, cela signifie que la valeur de  $Z_w$  calculée par la première méthode est très sensible à la position  $x_\Gamma$  choisie dans l'équation (5.29). Les valeurs  $Z_w^3$  et  $Z_w^4$  sont proches, cela montre que la seconde méthode n'est pas très sensible au choix des valeurs  $\tilde{p}_g$  et  $\tilde{p}_d$ . De plus, les valeurs  $Z_w^3$  et  $Z_w^4$  sont plus proches des modèles que les valeurs calculées à partir du coefficient de réflexion.

Pour compléter la comparaison entre ces valeurs d'impédance, nous avons calculé le coefficient de réflexion associé à chaque impédance. Pour cela, nous avons modifié l'équation (5.29) pour exprimer  $\mathcal{R}_I$  en fonction de  $Z_w$

$$\mathcal{R}_I = \frac{Z_w}{2\rho_0 c_0 + Z_w} e^{-2jkx_\Gamma}. \quad (5.36)$$

Nous rappelons que les impédances  $Z_w^1$  et  $Z_w^2$  ont été déduites du calcul de leur coefficient de réflexion, ainsi nous ne l'avons pas recalculé avec l'expression (5.36). Comme nous l'avons mentionné précédemment, la relation (5.36) dépend du choix de la position  $x_\Gamma$ , ici nous avons choisi  $x_\Gamma = x_g$ . L'amplitude  $|\mathcal{R}_I|$  et la phase  $\psi(\mathcal{R}_I)$  des coefficients de réflexion ont été données dans le tableau 5.1. Bien que les valeurs des impédances soit différentes, nous remarquons que les valeurs des coefficients de réflexion sont proches. De plus, leur amplitude est élevée, donc la plaque est très réfléchissante. Nous souhaitons calculer les champs de pression en amont de la perforation à partir des coefficients de réflexion que nous avons calculés. Ainsi, nous pourrions visualiser l'effet de l'écart entre les différentes valeurs. Pour calculer ces champs de pression, nous allons utiliser l'expression (5.14) dans laquelle le nombre  $p_I^+$  sera égal à la valeur obtenue à l'issue de la méthode des moindres carrés, et  $p_I^-$  sera calculé avec l'équation (5.25). Les pressions sont tracées sur la figure 5.9 et sont comparées aux phaseurs des « mesures numériques ». On voit que quelle que soit la valeur de l'impédance, les champs de pressions calculés reproduisent les « mesures numériques ». Cela signifie que les différentes valeurs que nous avons calculées pour l'impédance donnent une bonne représentation de la réponse acoustique de la plaque perforée.

## 5.6 Discussion des résultats et perspectives

Ces simulations ont permis de montrer que l'hypothèse d'incompressibilité à l'intérieur de la perforation est vérifiée. Cependant, les vitesses « champ lointain »  $\widehat{v}_I$  et  $\widehat{v}_{II}$  ne sont pas égales

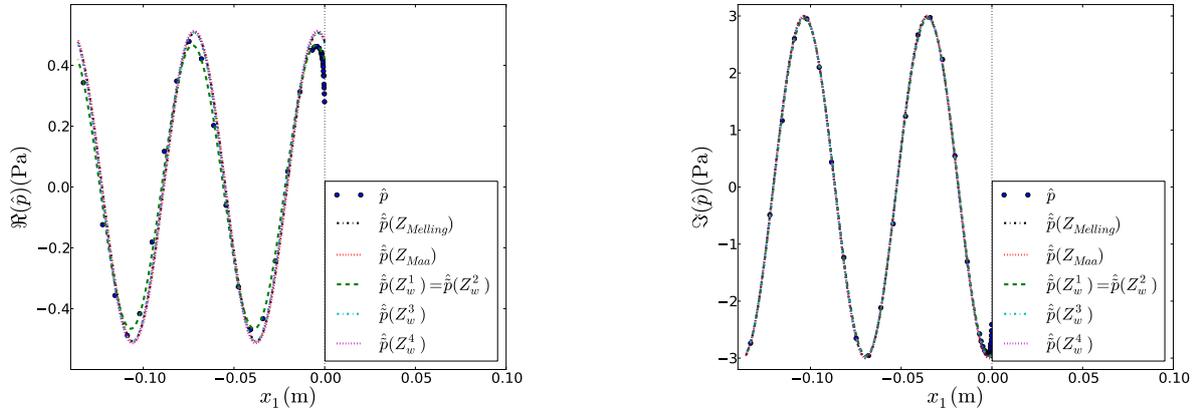


FIGURE 5.9 – Champs de pression calculés à partir des différentes valeurs d'impédance

aux extrémités de la perforation. Nous pensons que nous avons choisi une fréquence trop élevée<sup>6</sup> pour assurer un raccord parfait entre les vitesses champ lointain, et l'écart entre les valeurs  $Z_w^1$  et  $Z_w^2$  confirme cette hypothèse. Nous supposons que pour une fréquence plus faible (par exemple 500 Hz), la valeur de  $Z_w$  aurait été peu sensible au choix de la position  $x_\Gamma$ . Nous avons souhaité faire des simulations pour des fréquences plus faibles, mais le calcul divergeait avant l'établissement du réseau d'ondes stationnaires rendant l'analyse dans le domaine fréquentiel impossible. Malgré de nombreux tests (maillage différents, pas de temps plus faible, schéma de flux volumiques différents), nous n'avons pas trouvé une configuration rendant les simulations numériques possibles. Les investigations ont montré que cela venait d'un manque de robustesse de la condition de non-réflexion, qui n'a pas pu être résolu au cours de la thèse. C'est pourquoi nous n'avons pas pu vérifier nos suppositions quant au choix de la fréquence de calcul. Dans son manuscrit, Roche n'avait pas évoqué de problèmes similaires.

Ce problème nous a également empêché de faire des simulations en plaçant une cavité en aval de la perforation. En effet, le réseau d'onde stationnaire doit d'abord s'établir dans la cavité avant de s'établir dans le guide d'onde, ce qui rallonge la durée du calcul. Et comme évoqué précédemment, le calcul divergeait avant le temps final de la simulation. Nous avons voulu faire des simulations avec une cavité en aval de la perforation pour mieux caractériser la résistance de la plaque perforée. En effet, pour la plaque que nous avons modélisée, la partie imaginaire de l'impédance est très grande devant sa partie réelle. La partie réelle de l'impédance d'une cavité est quasiment nulle (il y a une dissipation très faible sur ses parois) et sa partie imaginaire dépend de sa longueur. Ainsi, nous aurions pu choisir une longueur telle que la réactance du liner (plaque + cavité) s'annule. Dans ce cas, les simulations numériques nous aurait permis de mieux estimer sa résistance.

---

6. la longueur d'onde n'est pas assez grande devant l'épaisseur de la plaque

Nous avons utilisé le code de calcul CEDRE pour calculer numériquement la réponse acoustique d'une plaque perforée. Ce code résout les équations de Navier-Stokes compressibles, ainsi les effets visqueux à l'intérieur de la perforation sont pris en compte. Le domaine de calcul choisi représente une cellule du réseau de perforation car le coût de la simulation est trop élevée pour calculer la réponse acoustique d'une plaque entière. L'impédance acoustique étant définie dans le domaine fréquentiel, nous avons imposé une source acoustique harmonique. Après une phase transitoire, un réseau d'ondes stationnaires s'établit dans le guide d'onde, ainsi, nous avons pu calculer les spectres des champs de pression et de vitesse et analyser ces champs dans le domaine fréquentiel. Cela nous a permis de vérifier l'hypothèse d'incompressibilité à l'intérieur de la perforation. A partir des données numériques, nous avons pu modéliser l'onde acoustique en champ lointain. La vitesse modélisée aurait dû être continue à travers la perforation, mais ce n'est pas tout à fait le cas. Grâce à la modélisation des pressions et de vitesses en champ lointain, nous avons calculé l'impédance avec deux méthodes différentes. La première dépend du coefficient de réflexion de la plaque perforée tandis que la seconde est directement issue de l'expression de l'impédance. On a remarqué que la première méthode est dépendante de la position  $x_T$  choisie pour représenter la plaque perforée, ce qui n'est pas le cas de la seconde méthode. Dans le chapitre suivant, nous allons résoudre un problème inverse pour calculer l'impédance à partir de mesures expérimentales.

# Problème inverse pour identifier l'impédance d'une plaque

Dans ce chapitre, nous mettrons en place une méthode inverse afin de calculer l'impédance d'une plaque perforée à partir de mesures expérimentales. Pour cela, des simulations numériques ayant pour but de reproduire les conditions expérimentales seront réalisées. Dans ces simulations, l'effet de la plaque perforée sera modélisé par une condition d'impédance, dont la valeur est l'inconnue du problème inverse. Dans un premier temps, nous présenterons la configuration expérimentale, ce qui nous permettra d'établir les équations qui seront résolues numériquement. Nous établirons ensuite le problème de minimisation associé au problème inverse. Pour le résoudre, le gradient de la fonctionnelle à minimiser doit être calculé. Pour cela, nous avons élaboré deux méthodes, la première est basée sur une formulation directe, tandis que la seconde s'appuie sur une formulation adjointe. Les impédances calculées par la méthode inverse seront comparées au modèle semi-empirique de Maa, qui est adapté à la configuration expérimentale.

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Définition du problème inverse</b>	<b>90</b>
6.1.1	Les mesures expérimentales	90
6.1.2	Le solveur Elvin	91
6.1.3	De Elvin vers Houdini	91
<b>6.2</b>	<b>La méthode d'identification</b>	<b>92</b>
6.2.1	Etablissement du problème direct	92
6.2.2	Enoncé du problème de minimisation	93
<b>6.3</b>	<b>Calcul du gradient de la fonction coût</b>	<b>94</b>
6.3.1	Calcul du gradient par méthode directe	94
6.3.2	Calcul du gradient par méthode adjointe	95
6.3.3	Éléments pour le calcul de l'état adjoint	96
<b>6.4</b>	<b>Mise en oeuvre de l'algorithme</b>	<b>98</b>
6.4.1	Validation de l'algorithme de résolution de la méthode inverse sur un synthétique	98
6.4.2	Prise en compte de l'onde incidente	99
6.4.3	Mise en oeuvre de l'algorithme sur les valeurs expérimentales	100

---

## 6.1 Définition du problème inverse

### 6.1.1 Les mesures expérimentales

Les mesures expérimentales ont été effectuées sur le banc aéro-thermo-acoustique (B2A) à l'ONERA Toulouse en 2010 au cours de l'ANR APAM [39, 41]. Le banc est constituée d'une conduite dont la section interne est carrée (50 mm x 50 mm) et la longueur totale est de 4 m. Une cellule d'essai de 200 mm de long est équipée de deux hublots en silice afin d'en permettre l'accès par des méthodes optiques. Sur la paroi inférieure de la cellule d'essai, une plaque perforée a été placée au dessus d'une cavité (voir figure 6.1).

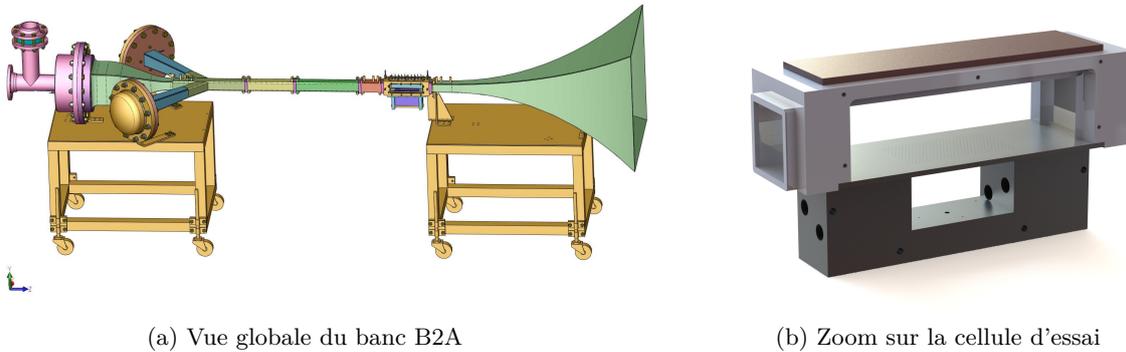


FIGURE 6.1 – Schéma du banc B2A.

La plaque perforée s'étend sur toute la largeur de la conduite, elle fait 150 mm de long et 50 mm de large. Les perforations ne sont pas inclinées, et sont cylindriques avec un diamètre de 0.45 mm. L'épaisseur de la plaque est de 4 mm afin de représenter l'épaisseur effective d'une plaque perforée réaliste dont les perforations sont inclinées avec un angle de 60 degrés. Les perforations sont centrées sur la plaque dans une zone de 90 mm x 48.6 mm, ce qui implique une porosité de 1.96 %. La cavité a une profondeur de 50 mm, pour une longueur de 90 mm et une largeur de 50 mm. Elle est localisée exactement sous la surface perforée.

En amont de la cellule d'essai, deux haut parleurs délivrent des ondes planes progressives dans une gamme de fréquences comprises entre 260 Hz et 620 Hz, ce qui est bien inférieur à la fréquence de coupure de la conduite (qui est égale à 3500 Hz). La forme du pavillon de terminaison garantit une sortie quasi-anéchoïque, caractérisée par un coefficient de réflexion inférieur à 0.2 dans la gamme de fréquence étudiée. La composante dans la direction axiale  $x_1$  et la composante dans la direction verticale  $x_3$  de la vitesse acoustique sont mesurées par Vélocimétrie Laser Doppler (LDV). Des détails sur la technique de mesure et le post-traitement utilisé pour obtenir la vitesse acoustique sont donnés dans différentes publications [15, 38, 46]. Le domaine de mesure est un rectangle de 150 mm de longueur et 30 mm de hauteur, situé juste au dessus de la partie inférieure de la conduite. Il y a 300 points de mesures différents, s'étendant de 30 mm en amont de la surface perforée à 30 mm en aval de celle-ci. Un schéma représentant la configuration expérimentale est montré sur la figure 6.2.

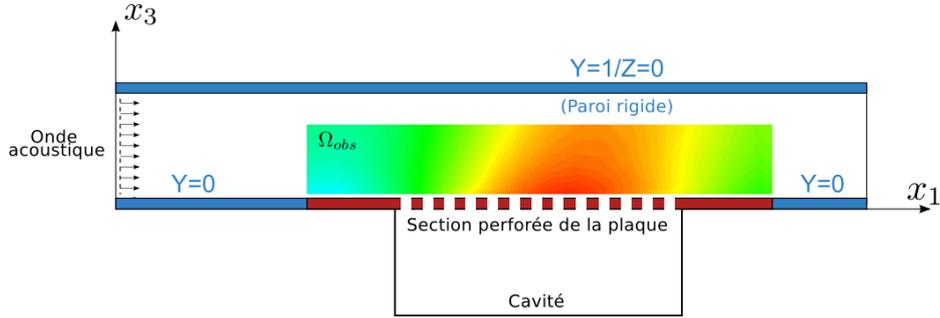


FIGURE 6.2 – Schéma de la configuration expérimentale où la zone de mesures expérimentales est notée  $\Omega_{obs}$ . La plaque perforée est représentée en rouge, et la zone perforée est montrée avec des rayures blanches.

### 6.1.2 Le solveur Elvin

Au cours de ses travaux de thèse [44], Julien Primus a élaboré une méthode afin de résoudre ce type de problème inverse pour caractériser des matériaux utilisés dans les liners acoustiques. Dans ce cas d'applications, un écoulement porteur est présent, donc Primus a développé un solveur résolvant les équations d'Euler linéarisées harmoniques afin d'en tenir compte. Les équations sont discrétisées sur un maillage triangulaire par une méthode Galerkin discontinue avec une approximation spatiale d'ordre un. La frontière (notée  $\Gamma_{imp}$ ) du domaine de calcul correspondant à la plaque perforée a été modélisée par une condition aux limites d'impédance du type

$$p = Zv_n \text{ sur } \Gamma_{imp}. \quad (6.1)$$

Pour résoudre le problème inverse, Primus a introduit une fonction coût  $\mathcal{J}$  définie par

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega_{obs}} \|\mathbf{v}_{calc}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_{mes}(\mathbf{x})\|^2 d\Omega_{obs}, \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{v}_{calc}$  sont les vitesses calculées expérimentalement et  $\mathbf{v}_{mes}$  le champ de vitesse interpolé sur le domaine  $\Omega_{obs}$  à partir des mesures expérimentales. Le but de la méthode inverse est de trouver la valeur  $Z_{min}$  de l'impédance qui minimise la fonction  $\mathcal{J}$ . Cette dernière est fonction de  $Z$  par l'intermédiaire du champ  $\mathbf{v}_{calc}$  qui dépend de la condition aux limites (6.1). Primus a ensuite développé une méthode numérique pour minimiser  $\mathcal{J}$ , dont nous allons énoncer brièvement le principe. Tout d'abord, une valeur initiale  $Z^0$  de l'impédance est imposée afin de calculer un champ numérique  $\mathbf{v}_{calc}$ . A partir de ce champ, la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  ainsi que son gradient peuvent être calculés, ce qui permet de déduire une nouvelle valeur  $Z^1$  de l'impédance avec laquelle la valeur de  $\mathcal{J}$  devrait être inférieure à la précédente. Cette opération est alors répétée jusqu'à ce que le minimum de  $\mathcal{J}$  soit atteint. L'étape cruciale de ce principe est le calcul de la nouvelle valeur de l'impédance à chaque itération. Le solveur de Primus a été baptisé Elvin, des précisions sur son algorithme et son implantation sont apportées dans la publication [45].

### 6.1.3 De Elvin vers Houdini

Il n'y a pas d'écoulement porteur dans les expériences que nous avons présentées dans la section 6.1.1. Dans ce cas, les équations d'Euler linéarisées harmoniques sont équivalentes à l'équation de Helmholtz, car il existe une relation explicite entre la pression et la vitesse acoustique. Nous

avons mis en place un algorithme de résolution du problème inverse s'appuyant sur un solveur d'ordre élevé des équations de Helmholtz. Ce solveur, dénommé Houdini, est développé par Julien Diaz (Projet Magique3D, INRIA), il est basé sur une formulation IPDG<sup>1</sup> (voir par exemple [31]). Comme nous l'avons expliqué, Primus a considéré comme « champ de vitesse expérimental » une interpolation sur un domaine continu des vitesses mesurées. Dans la suite, nous considérerons seulement les vitesses mesurées elles-même. Ainsi, la fonction coût ne sera pas définie par une intégrale mais par une somme.

## 6.2 La méthode d'identification

### 6.2.1 Etablissement du problème direct

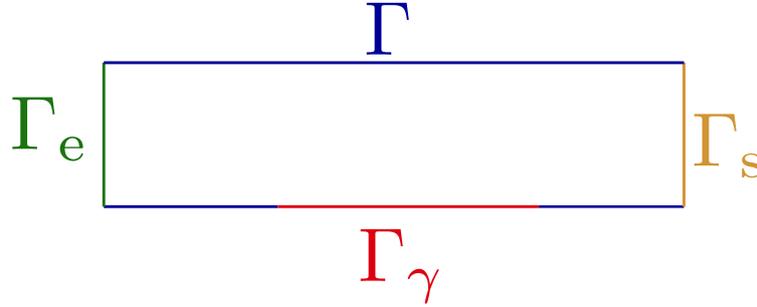


FIGURE 6.3 – Schéma du domaine de calcul

Nous allons présenter le système d'équation choisie pour modéliser la configuration expérimentale. Les mesures ont été effectuées dans le plan  $x_2 = 0$ , donc nous considérons un domaine de calcul  $\Omega_{\text{calc}}$  bi-dimensionnel (voir figure 6.3) défini par

$$\mathbf{x} \in \Omega_{\text{calc}} = \{0 < x_1 < 0.2, \quad 0 < x_2 < 0.05\}. \quad (6.3)$$

Dans le domaine  $\Omega_{\text{calc}}$  la pression acoustique vérifie l'équation de Helmholtz

$$-(\Delta p + k^2 p) = 0, \quad (6.4)$$

où  $k = \omega/c_0$  est le nombre d'onde. L'équation de Helmholtz dérive des équations de Navier-Stokes dans lesquelles on considère les effets visqueux négligeables et les fluctuations acoustiques comme étant des perturbations linéaires d'un champ moyen dans le cas où la vitesse moyenne est nulle (voir section 2.1). La vitesse acoustique s'exprime en fonction du champ de pression acoustique par

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \nabla p. \quad (6.5)$$

Sur la frontière  $\Gamma_s$  en sortie du domaine de calcul, on considère la condition de non-réflexion

$$\partial_{\mathbf{n}} p + jk p = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale sortante du domaine de calcul. Cette condition permet de supprimer les ondes entrantes dans le domaine. En effet, rappelons la décomposition d'une onde plane

$$p(x_1) = p^+ e^{-jkx_1} + p^- e^{jkx_1} \quad (6.7)$$

1. Interior Penalty Discontinuous Galerkin

$$v_1(x_1) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( p^+ e^{-jkx_1} - p^- e^{jkx_1} \right) \quad (6.8)$$

Pour éliminer toute onde entrante, on souhaite annuler le terme  $p^-$ . Ainsi on pose

$$p(x_1) - \rho_0 c_0 v_1(x_1) = 2p^- e^{jkx_1} = 0, \quad (6.9)$$

qui est une relation équivalente à l'équation (6.6) en utilisant la relation (6.5). Sur la frontière  $\Gamma_e$  en entrée du domaine, on considère une condition similaire à celle en sortie, à part qu'on ne veut pas annuler l'onde entrante mais l'imposer égale à l'onde  $p^{\text{inc}}$  émise par la source, ainsi

$$\partial_{\mathbf{n}} p + jkp = 2jkp^{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma_e. \quad (6.10)$$

Sur les frontières  $\Gamma$ , on met la condition classique de paroi rigide  $\partial_{\mathbf{n}} p = 0$  (équivalente à la relation  $v_n = 0$ ). Enfin, sur la frontière  $\Gamma_\gamma$  on écrit

$$\partial_{\mathbf{n}} p + jk\gamma p = 0, \quad (6.11)$$

où  $\gamma$  est l'admittance réduite, définie par  $\gamma = \rho_0 c_0 / Z$ . On écrit cette relation sur l'admittance et non sur l'impédance pour garantir la linéarité du système d'équation selon l'inconnue du problème inverse. On remarque que les conditions de non-réflexion et de paroi rigide sont des cas particuliers de condition d'impédance, avec respectivement  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0$ . Le système d'équations vérifié par  $p$ , qu'on appellera également problème direct, s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\Delta p + k^2 p) = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}} p + jkp = 2jkp_{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}} p + jkp = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}} p + jk\gamma p = 0 & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (6.12)$$

### 6.2.2 Enoncé du problème de minimisation

Nous allons maintenant présenter le problème de minimisation que nous voulons résoudre afin de calculer l'admittance modélisant les propriétés acoustiques de la plaque perforée. Pour alléger l'écriture du raisonnement, nous n'écrirons le problème de minimisation que pour les mesures de vitesse axiale. Cependant, la méthode est applicable aux mesures de vitesse verticale. Nous définissons la fonction coût  $\mathcal{J}$  telle que

$$\mathcal{J}(\gamma) = \sum_j |p_x(\mathbf{x}_j) - m_j|^2, \quad (6.13)$$

où  $p_x$  est la dérivée de  $p$  dans la fonction  $x_1$ , et  $m_j$  la vitesse axiale mesurée à la position  $\mathbf{x}_j$  et multipliée par le coefficient  $j\omega\rho_0$ . Nous avons choisi cette convention afin d'alléger les notations, mais en pratique, c'est la valeur de  $p_x$  qui est divisée par le coefficient  $j\omega\rho_0$ . Nous cherchons  $\gamma_{\text{min}}$  tel que

$$\gamma_{\text{min}} = \arg \min \mathcal{J}(\gamma). \quad (6.14)$$

Pour calculer numériquement le minimum de  $\mathcal{J}$ , nous allons utiliser une méthode du gradient. Le principe de cette méthode est similaire à celui présenté dans la section 6.1.2. Au début de chaque itération, la valeur de l'admittance est fixée. Le problème direct est résolu, puis la valeur de  $\mathcal{J}$  est calculée. Une nouvelle admittance pour laquelle  $\mathcal{J}$  sera inférieure à la valeur précédente est

trouvée. On note  $a$  et  $b$ , la partie réelle et la partie imaginaire de  $\gamma$ . A chaque itération, les parties réelle et imaginaire de l'admittance sont calculées par

$$a_{i+1} = a_i - \alpha_i \delta a_i \quad \text{et} \quad b_{i+1} = b_i - \alpha_i \delta b_i. \quad (6.15)$$

où  $\delta a_i$  et  $\delta b_i$  sont les dérivées de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $a$  et  $b$ . Le coefficient  $\alpha_i$  est déterminé par la méthode de la bisection<sup>2</sup>. Ainsi, on peut écrire

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - \alpha_i h_i, \quad (6.16)$$

avec  $h_i = \delta a_i + j \delta b_i$ . Pour calculer  $h$ , nous avons utilisé deux méthodes. La première consiste à calculer analytiquement les expressions de  $\delta a$  et  $\delta b$ , tandis que la seconde fait intervenir un état adjoint. Nous présentons ces deux méthodes dans la section suivante.

## 6.3 Calcul du gradient de la fonction coût

### 6.3.1 Calcul du gradient par méthode directe

Pour alléger les écritures, on note

$$f_j = (\partial_x p(x_j) - m_j). \quad (6.17)$$

Ainsi

$$\mathcal{J}(p, \gamma) = \sum_j f_j^* f_j, \quad (6.18)$$

où  $f_j^*$  est le conjugué complexe de  $f_j$ .

La dérivée de  $\mathcal{J}$  par rapport à la partie réelle de  $\gamma$  s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{J} = \sum_j \left[ \frac{\partial f_j}{\partial a} f_j^* + \frac{\partial f_j^*}{\partial a} f_j \right] \quad (6.19a)$$

$$= \sum_j \left[ \frac{\partial f_j}{\partial a} f_j^* + \left( \frac{\partial f_j}{\partial a} \right)^* f_j \right]. \quad (6.19b)$$

De même la dérivée de  $\mathcal{J}$  par rapport à la partie imaginaire de  $\gamma$  s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial b} \mathcal{J} = \sum_j \left[ \frac{\partial f_j}{\partial b} f_j^* + \left( \frac{\partial f_j}{\partial b} \right)^* f_j \right]. \quad (6.20)$$

La variable  $f_j$  est fonction de  $\gamma$  par l'intermédiaire du champ  $p$ . Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial a} f_j = \partial_x \partial_a p(x_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial b} f_j = \partial_x \partial_b p(x_j). \quad (6.21)$$

Comme  $p$  est holomorphe par rapport à la variable  $\gamma$ , on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial a} f_j = \partial_x p_\gamma(x_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial b} f_j = j \partial_x p_\gamma(x_j), \quad (6.22)$$

2. On divise  $\alpha_i$  par deux si la fonctionnelle augmente.

avec  $p_\gamma$  la dérivée complexe de  $p$  par rapport à  $\gamma$ . La dérivée de  $\mathcal{J}$  par rapport aux variables  $a$  et  $b$  s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{J} = \sum_j \left\{ f_j^* [\partial_x p_\gamma(x_j)] + f_j [\partial_x p_\gamma(x_j)]^* \right\} \text{ et } \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{J} = \sum_j \left\{ f_j^* [j \partial_x p_\gamma(x_j)] + f_j [j \partial_x p_\gamma(x_j)]^* \right\}. \quad (6.23)$$

Pour simplifier ces expressions, on rappelle quelques propriétés sur les nombres complexes.

$$c_1^* c_2 + c_1 c_2^* = 2\Re(c_1^* c_2) = 2\Re(c_1 c_2^*), \quad (6.24)$$

$$c_1^* (j c_2) + c_1 (j c_2)^* = -2\Im(c_1^* c_2) = 2\Im(c_1 c_2^*). \quad (6.25)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux nombres complexes. L'expression des dérivées de  $\mathcal{J}$  se simplifie en

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{J} = 2 \sum_j \Re \{ f_j [\partial_x p_\gamma(x_j)]^* \} \text{ et } \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{J} = 2 \sum_j \Im \{ f_j [\partial_x p_\gamma(x_j)]^* \}. \quad (6.26)$$

La direction de descente  $h$  de l'algorithme du gradient est donc égale à

$$h = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{J} + j \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{J} = 2 \sum_j f_j [\partial_x p_\gamma(x_j)]^*. \quad (6.27)$$

L'expression (6.27) est dépendante de la dérivée de  $p$  par rapport à la variable  $\gamma$ . Elle est solution du système

$$\begin{cases} -(\Delta p_\gamma + k^2 p_\gamma) = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}} p_\gamma + j k p_\gamma = 0 & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}} p_\gamma + j k p_\gamma = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}} p_\gamma + j k \gamma p_\gamma = -j k p & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} p_\gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.28)$$

On remarque que le premier membre du système (6.28) est identique à celui du système (6.12). Numériquement, on n'écrira qu'une fois la matrice de rigidité de ces systèmes et on ne fera qu'une fois la factorisation de cette matrice.

### 6.3.2 Calcul du gradient par méthode adjointe

La deuxième méthode pour calculer le gradient de  $\mathcal{J}$  consiste à introduire le Lagrangien  $\mathcal{L}$  associé au problème de minimisation, sous la contrainte que le système direct (6.28) soit satisfait. Il s'écrit en fonction de  $p$ ,  $\gamma$  et du multiplicateur de Lagrange  $\psi$ . Dans cette méthode, on considère les variables  $p$  et  $\gamma$  indépendantes. Le Lagrangien est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, \gamma, \psi) = & \mathcal{J}(p, \gamma) + \int_{\Omega} \psi^* (\Delta p + k^2 p) d\Omega - \int_{\Gamma_e} \psi^* (\partial_{\mathbf{n}} p + j k p - 2j k p^{\text{inc}}) d\Gamma_e \\ & - \int_{\Gamma_s} \psi^* (\partial_{\mathbf{n}} p + j k p) d\Gamma_s - \int_{\Gamma_\gamma} \psi^* (\partial_{\mathbf{n}} p + j k \gamma p) d\Gamma_\gamma - \int_{\Gamma} \psi^* \partial_{\mathbf{n}} p d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Il faut ajouter le complexe conjugué des contraintes dans l'expression (6.29), afin d'assurer que le Lagrangien soit réel. Les conditions d'optimalités s'obtiennent par l'annulation des dérivées au sens de Fréchet du Lagrangien par rapport au variable  $p$ ,  $\gamma$  et  $\psi$ . La dérivée de  $\mathcal{L}$  par rapport

à la variable  $\psi$  est nulle quand  $p$  est solution du système direct. L'annulation de la dérivée du Lagrangien par rapport à la variable  $\gamma$  permet de calculer une expression du vecteur  $h$

$$h = jk \int_{\Gamma_\gamma} \psi^* p. \quad (6.30)$$

Cette expression dépend de l'état adjoint  $\psi$ . Les contraintes sur  $\psi$  se calculent par l'annulation de la dérivée du Lagrangien par rapport à la variable  $p$ . Dans ce cas,  $\psi$  vérifie le système suivant

$$\begin{cases} -(\Delta\psi + k^2\psi) = S & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi - jk\psi = 0 & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi - jk\psi = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi - jk\gamma^*\psi = 0 & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.31)$$

Le second membre  $S$  est la dérivée de la fonction coût par rapport à la variable  $p$ . La fonction  $\mathcal{J}$  n'est pas holomorphe vis-à-vis de la variable  $p$ , donc on calcule sa dérivée en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $p$ . Les calculs sont similaires à ceux énoncés dans la section 6.3.1. Il faut préciser que  $\partial_x p$  est interprété comme un produit de dualité entre la dérivée de la masse de Dirac  $\delta_x$  et la fonction  $p$ . On écrit alors

$$S = -2 \sum_j \{f_j [\delta_x(x - x_j)]\}. \quad (6.32)$$

Pour ne pas assembler une nouvelle matrice de rigidité pour la résolution numérique du système (6.31), nous calculerons directement  $\psi^*$  qui est solution de

$$\begin{cases} -(\Delta\psi^* + k^2\psi^*) = -2 \sum_j \{f_j^* [\delta_x(x - x_j)]\} & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi^* + jk\psi^* = 0 & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi^* + jk\psi^* = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi^* + jk\gamma\psi^* = 0 & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi^* = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.33)$$

### 6.3.3 Éléments pour le calcul de l'état adjoint

Le calcul de l'état adjoint passe par la résolution du système (6.33). Ce système contient au second membre des termes fortement singuliers : des dérivées de la masse de Dirac. Nous avons utilisé deux méthodes afin de les modéliser : une méthode d'extraction de singularité, dite analytique, et une méthode purement numérique. Ces deux méthodes donnent des résultats très similaires.

#### 6.3.3.1 Méthode analytique

Nous proposons ici une méthode dite d'extraction de singularité pour résoudre le problème de Helmholtz

$$\begin{cases} -(\Delta u + k^2 u) = \delta_x & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ Bu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.34)$$

Sans perte de généralité, on suppose que le support de la dérivée de la masse de Dirac est  $\{0\}$ . L'idée principale est de soustraire à  $u$  une solution  $u_0$  du problème de Helmholtz posé sur tout  $\mathbb{R}^2$

$$-(\Delta u_0 + k^2 u_0) = \delta_x \text{ dans } \mathbb{R}^2. \quad (6.35)$$

Cette fonction est donnée par exemple à l'aide des fonctions de Bessel

$$u_0(\mathbf{x}) = \frac{kY_1(kr)}{4} \cos \theta, \quad (6.36)$$

avec  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires. La fonction  $\tilde{u} = u - u_0$  vérifie alors le système

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)\tilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ B\tilde{u} = -Bu_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.37)$$

Ce système est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  dès que les conditions aux limites  $B$  sont suffisamment régulières. Le système (6.37) peut-être alors être résolu à l'aide d'un code éléments finis classiques.

### 6.3.3.2 Méthode numérique

L'idée consiste à faire comme si la dérivée de la masse de Dirac était bien un élément dans le dual de  $H^1(\Omega)$ . Cette approche semble au premier abord contraire au cadre fonctionnel car les éléments de  $H^1(\Omega)$  n'admettent pas en général de dérivées ponctuelles. Toutefois, il est tout à fait possible d'évaluer une dérivée ponctuelle dans le domaine discret. En effet, en repérant le triangle  $T$  qui contient le support de la dérivée de la masse de Dirac, l'approximation  $u_h$  s'écrit sous la forme d'une combinaison de fonction de classe  $C^\infty$  par morceaux

$$u_h|_T(\mathbf{x}) = \sum u_h|_{j,T} \omega_{j,T}(\mathbf{x}), \quad (6.38)$$

avec  $\omega_{j,T}(\mathbf{x})$  les fonctions de base de la méthode éléments finis et  $u_h|_{j,T}$  les valeurs nodales associées à l'élément fini. Il suffit alors de dériver cette expression par rapport à  $\mathbf{x}$  pour obtenir le terme source à intégrer dans le solveur. Si la masse de Dirac est à l'interface entre plusieurs éléments, il suffit de calculer son approximation dans un seul élément. Cette méthode a également été utilisée pour évaluer la dérivée de la solution du problème direct (qui intervient dans l'expression de  $\mathcal{J}$ ). Elle est justifiée par la théorie des inégalités inverses.

### 6.3.3.3 Comparaison des deux méthodes

Le calcul de la dérivée de la masse de Dirac intervient dans le second membre du système adjoint (6.33). Pour comparer les deux méthodes, nous allons calculer une solution du système direct (6.12). Ensuite nous calculerons la solution du problème adjoint (sans multiplier le terme source par  $f_j$ ) pour chaque point de mesure, soit en discrétisant la dérivée de la masse de Dirac numériquement (on notera alors la solution  $\psi_{\text{num}}^*$ ), soit par l'intermédiaire de la résolution du système suivant

$$\begin{cases} -(\Delta \tilde{\psi} + k^2 \tilde{\psi}) = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\psi} + jk \tilde{\psi} = -(\partial_{\mathbf{n}} \psi_0 + jk \psi_0) & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\psi} + jk \tilde{\psi} = -(\partial_{\mathbf{n}} \psi_0 + jk \psi_0) & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\psi} + jk \gamma \tilde{\psi} = -(\partial_{\mathbf{n}} \psi_0 + jk \psi_0) & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\psi} = -\partial_{\mathbf{n}} \psi_0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.39)$$

où  $\psi_0$  est la solution de  $-(\Delta\psi_0 + k^2\psi_0) = -\delta_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . La solution du problème adjoint est alors calculé par  $\psi_{\text{ana}}^* = \tilde{\psi} + \psi_0$  dans  $\Omega_{\text{calc}}$ . Une fois les problèmes direct et adjoint résolus, nous calculons l'intégrale  $h_j = \int_{\Gamma_\gamma} \psi^* p d\Gamma_\gamma$  qui intervient dans le calcul de la direction de descente  $h$ . Les résultats sont tracés sur la figure 6.4. On remarque que les deux méthodes donnent des résultats

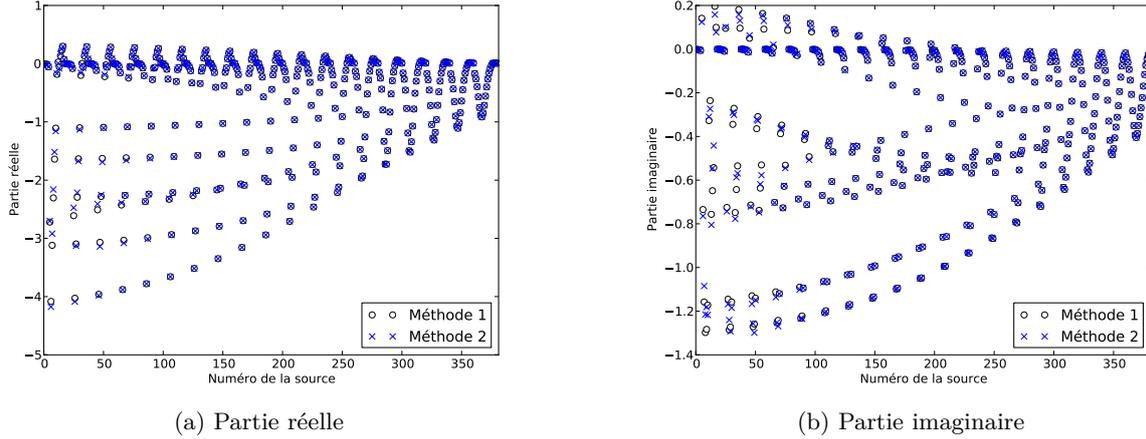


FIGURE 6.4 – Calcul de la valeur  $h_j$

très similaires sauf pour les premières mesures. Près de la position de la masse de Dirac, il y a une différence entre les valeurs de  $\psi_{\text{ana}}^*$  et  $\psi_{\text{num}}^*$ . Dès qu'on s'éloigne de cette position, cette différence s'atténue. Or les premières mesures sont localisées très près de la paroi  $\Gamma_\gamma$ , c'est pour cela que les valeurs de  $h_j$  sont différentes pour les deux méthodes. La méthode analytique est plus contraignante à mettre en oeuvre, puisqu'il faut évaluer la fonction  $\psi_0$  et ses dérivées sur toutes les frontières du domaine de calcul alors que le support de la dérivée discrète de la masse de Dirac n'est compris qu'à l'intérieur d'un seul élément du domaine.

## 6.4 Mise en oeuvre de l'algorithme

### 6.4.1 Validation de l'algorithme de résolution de la méthode inverse sur un synthétique

Avant d'utiliser le code sur les mesures expérimentales, nous souhaitons vérifier si le programme fonctionne. Pour cela, nous avons créé numériquement un champ de mesure en choisissant une admittance cible. Ensuite, avant le début de l'algorithme d'inversion, on fixe l'admittance initiale à une valeur différente de l'admittance cible. Après l'exécution du calcul, on vérifie si l'algorithme a convergé vers l'admittance cible.

Dans le code Houdini, nous avons ajouté une fonctionnalité qui permet de découper la surface de la plaque en plusieurs admittances. L'ensemble des tests sur les deux méthodes a été présenté à la conférence « Theory and Computational Methods for Inverse and Ill-posed Problems » [23].

Nous montrons sur la figure 6.5 un test effectué avec la méthode adjointe. L'admittance a été découpée en dix valeurs. Chacune des deux figures est constitué de quatre tracés, deux pour la partie réelle de l'admittance (en haut), et deux pour la partie imaginaire (en bas). A gauche,

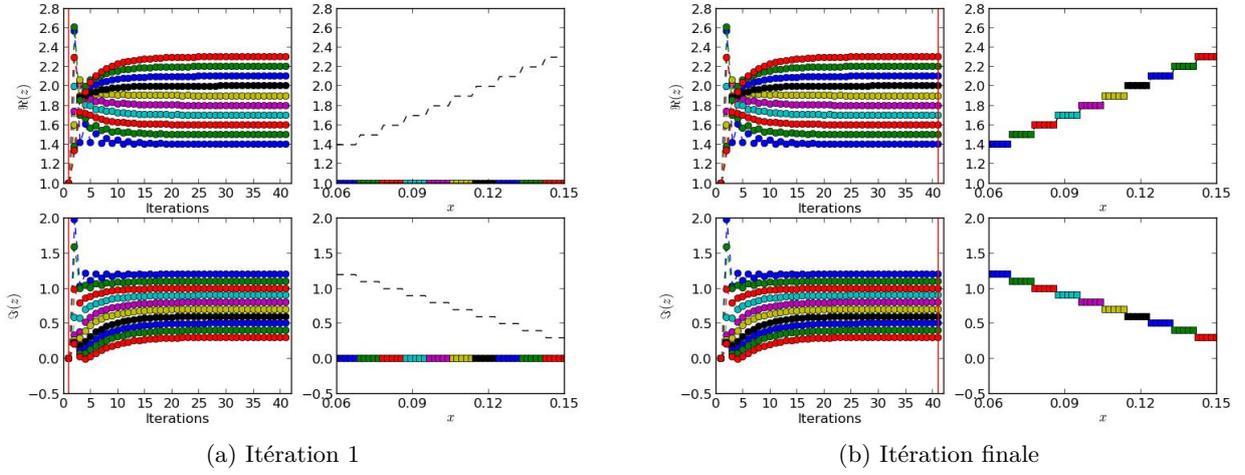


FIGURE 6.5

l'évolution de chaque morceau d'admittance est représentée en fonction des itérations, la ligne rouge verticale représentant l'itération courante à laquelle l'admittance est tracé à droite. Le tracé en pointillé correspond à l'admittance cible. La figure 6.5a représente la valeur initiale de l'admittance tandis que la figure 6.5b représente sa valeur à l'itération finale. On remarque que l'algorithme a parfaitement fonctionné et a convergé rapidement vers les admittances cibles.

### 6.4.2 Prise en compte de l'onde incidente

L'adaptation du code pour l'utilisation des mesures expérimentales a été réalisée par Hendrik Stelwagen au cours d'un stage d'une durée de deux mois.

Les algorithmes ne sont pas directement utilisables sur les données réelles. En effet, pour les calculs sur synthétiques, nous avons imposé un terme source unitaire  $p_{\text{inc}} = 1$ . Or, les mesures expérimentales dépendent de l'amplitude et de la phase de l'onde incidente. C'est pourquoi, nous allons modifier les algorithmes élaborés précédemment afin d'identifier le paramètre complexe  $C$  correspondant à la valeur de l'onde incidente sur  $\Gamma_e$ . Pour la méthode analytique, calculons  $h_c$  la direction de descente pour la variable  $C$

$$h_c = 2 \sum_j f_j [\partial_x p_C(x_j)]^* . \quad (6.40)$$

Ce calcul est identique à celui de  $h$  développé dans la section 6.3.1. La dérivée de la variable  $p$  par rapport à  $C$  (notée  $p_C$ ) est solution du système

$$\begin{cases} -(\Delta p_C + k^2 p_C) = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{calc}} \\ \partial_{\mathbf{n}} p_C + jk p_C = 2jk & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_{\mathbf{n}} p_C + jk p_C = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_{\mathbf{n}} p_C + jk \gamma p_C = 0 & \text{sur } \Gamma_\gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} p_C = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.41)$$

Ce système est identique à celui du problème direct (6.12). Pour accélérer l'exécution du code, le système (6.41) n'est résolu qu'une seule fois au début de chaque itération. En effet, si on note  $u$  sa

solution, alors la solution  $p$  du problème direct est égale à  $Cu$ , et sa dérivée  $p_C$  est égale à  $u$ . En utilisant la méthode adjointe, l'expression de  $h_C$  est donnée par

$$h_C = -2jk \int_{\Gamma_e} \psi^*. \quad (6.42)$$

En pratique, nous n'avons implémenté le calcul de  $h_C$  que pour la méthode directe.

### 6.4.3 Mise en oeuvre de l'algorithme sur les valeurs expérimentales

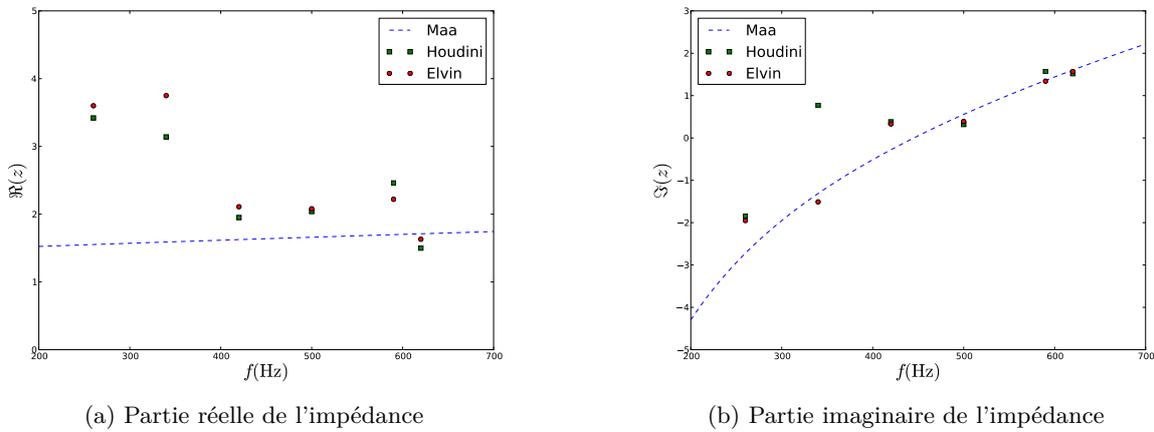


FIGURE 6.6 – Impédance identifiée par les deux algorithmes

Nous avons utilisé le code Elvin et le code Houdini afin d'identifier l'impédance de la plaque perforée pour les six fréquences de mesure. Les impédances adimensionnées ( $z = Z/(\rho_0 c_0) = 1/\gamma$ ) identifiées sont tracées sur la figure 6.6 et sont comparées au modèle de Maa auquel il faut ajouter un terme pour tenir compte de la cavité ( $z_{\text{cav}} = -j \cot(kL)$  où  $L$  est la profondeur de la cavité). On remarque que les deux codes donnent des résultats similaires. On peut donc supposer que les impédances identifiées caractérisent correctement les propriétés acoustiques de la plaque perforée. Afin d'affiner ces résultats, il faudrait identifier une impédance de sortie sur la frontière  $\Gamma_s$  afin de tenir compte d'une éventuelle réflexion dans le banc B2A. Cela pourrait expliquer les grandes valeurs identifiées pour la résistance aux deux premières fréquences de mesure. Les résultats de l'identification avec Elvin ont été synthétisés et présentés à la conférence AIAA-Aviation 2015 [42].

Une méthode inverse a été mise en place afin de calculer l'impédance d'une plaque perforée à partir de mesures expérimentales. Contrairement aux études précédemment réalisées à l'ONERA, la méthode s'appuie sur la résolution de l'équation de Helmholtz par un solveur d'ordre élevé. Deux méthodes ont été élaborées pour calculer le gradient de la fonctionnelle, la première est basée sur une formulation directe, tandis que la seconde s'appuie sur une formulation adjointe. Celle-ci fait intervenir les dérivées de la masse de Dirac, que nous avons modélisées numériquement par deux méthodes. Les impédances calculées par la méthode inverse sont en bon accord avec le modèle semi-empirique de Maa sauf pour les deux premières fréquences mesurées. Il faudrait identifier l'impédance de sortie du banc, afin de tenir compte d'une éventuelle réflexion, et de quantifier son effet sur les impédances identifiées.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Cette thèse a été consacrée à la modélisation de la réponse acoustique d'une plaque perforée par l'utilisation de techniques d'analyse asymptotique. L'influence des effets visqueux a été étudiée en particulier.

Plusieurs échelles de longueur caractérisent cette réponse acoustique : la longueur d'onde de la fluctuation acoustique incidente, la distance entre les perforations et le diamètre des perforations. Les techniques d'analyse asymptotique sont adaptées à la résolution de problèmes multi-échelle, c'est pourquoi leur mise en oeuvre nous a permis de modéliser l'effet de la plaque perforée à chaque échelle. A l'échelle des longueurs d'onde, la plaque est considérée comme une paroi infiniment fine possédant des propriétés acoustiques particulières. Ces propriétés sont caractérisées par une grandeur homogénéisée sur la plaque, l'impédance acoustique. L'impédance dépend des paramètres géométriques de la plaque perforée, tels que son épaisseur ou le rayon des perforations. A l'échelle de la distance entre les perforations, chaque perforation est modélisée de part et d'autre de la plaque comme une source et un puits ponctuel de même amplitude. Ceci est justifié par l'incompressibilité de l'écoulement au voisinage des perforations, qui implique la conservation du débit volumique à leurs extrémités. Lors de la mise en oeuvre des techniques de modélisation asymptotique, les effets visqueux ont été pris en compte. Cela nous a permis d'établir rigoureusement le lien entre la puissance acoustique active dissipée par la plaque perforée, qui est une grandeur homogénéisée, et le travail des efforts visqueux au voisinage de chaque perforation.

Ces efforts visqueux doivent être considérés non seulement à l'intérieur des perforations mais également sur les parois de la plaque perforée. Nous avons considéré que les effets visqueux n'étaient présents qu'à l'intérieur d'une couche limite acoustique située près des parois. Dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane, le champ de vitesse acoustique a été calculée et nous avons déduit l'expression du travail des efforts visqueux. Elle dépend uniquement de la vitesse tangentielle à la couche limite acoustique. Pour calculer cette vitesse, nous avons supposé que l'épaisseur de la couche limite acoustique était négligeable, et que le champ de pression était régi par l'équation de Laplace. A l'intérieur de la perforation, le calcul du travail des efforts visqueux est immédiat, car la vitesse est supposée uniforme. Nous avons utilisé des principes énergétiques pour calculer analytiquement deux approximations du champ de vitesse tangentiel à la surface des parois de la plaque perforée, afin d'en déduire deux valeurs pour travail des efforts visqueux. Cependant, une des valeurs calculées est égale à l'infini, ce qui n'est pas acceptable physiquement. C'est pourquoi le champ de vitesse a été calculé numériquement. Pour cela, nous avons utilisé le code de calcul CESC qui utilise la méthode des éléments de frontière. Cette méthode est basée sur la formulation

intégrale des équations de Laplace dont la solution s'exprime uniquement en fonction de deux densités définies sur les frontières de la perforation. Les simulations numériques nous ont permis de valider le calcul analytique de la borne inférieure. De plus, nous nous sommes rendus compte que le travail des efforts visqueux à l'intérieur de la perforation était sous-estimé par sa valeur analytique. Néanmoins, le travail des efforts visqueux calculé à partir du champ numérique sous-estime la valeur expérimentale énoncée par Ingard. Près des ouvertures de la perforation, l'expression du travail des efforts visqueux développé dans le cas d'une plaque plane n'est plus valide. En effet, dans cette région le champ de vitesse « tourne ». De plus, nous avons observé une singularité du champ de vitesse calculée numériquement, ce qui ne correspond pas à la réalité. Des investigations supplémentaires seraient nécessaires.

D'autre part, afin de vérifier les raccords entre les différentes échelles de la modélisation asymptotique, nous avons effectué des simulations numériques directes de la réponse acoustique d'une plaque perforée. Pour cela, nous avons utilisé le code CEDRE qui résout les équations de Navier-Stokes compressibles, ainsi aucun effet physique n'a été négligé dans ces simulations numériques. Cependant, ce type de simulations implique un coût de calcul important, c'est pourquoi le domaine de calcul a été restreint à une seule perforation. L'uniformité du débit volumique a été vérifiée à l'intérieur de la perforation, mais la vitesse « champ lointain » calculée n'est pas tout à fait continue. Cela est sûrement dû au choix de la fréquence acoustique de l'onde incidente qui s'est avérée trop élevée par rapport à l'épaisseur de la perforation choisie. Malheureusement, des problèmes de robustesse des simulations n'ont pas permis de faire converger des calculs à des fréquences inférieures. Pour calculer l'impédance acoustique à partir des résultats numériques, nous avons utilisé une méthode couramment employée lors des campagnes expérimentales. Elle est basée sur le calcul du coefficient de réflexion et nous en avons rappelé les principales hypothèses. Cette méthode s'est avérée sensible au choix de la position « théorique » de la condition d'impédance. Cependant, nous supposons que pour une fréquence plus faible, cette sensibilité aurait été réduite. Nous avons également développé une deuxième méthode pour calculer l'impédance à partir des résultats numériques. Elle se base directement sur la définition de l'impédance acoustique et s'appuie sur les raccords entre les échelles. Pour calculer précisément la résistance acoustique avec ces simulations, il aurait fallu choisir une configuration où la résistance était plus grande que la réactance. Afin d'annuler la réactance, une cavité peut être placée en aval de la perforation.

Enfin, l'impédance d'une plaque perforée a également été déterminée à partir de mesures expérimentales par la résolution d'un problème inverse. Pour cela, des simulations numériques résolvant l'équation de Helmholtz ont été faites. Dans ces simulations, la frontière modélisant la plaque perforée est caractérisée par une condition d'impédance, dont la valeur est l'inconnue de la méthode inverse. Cette dernière s'écrit comme un problème de minimisation de l'écart entre les vitesses calculées numériquement et celles mesurées. Le problème de minimisation a été résolu par une méthode du gradient. Pour cela, nous avons développé deux méthodes pour le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser : une méthode directe et une méthode adjointe. Cette dernière fait intervenir un terme singulier, la dérivée de la masse de Dirac. Pour la modéliser numériquement, nous avons énoncé une méthode analytique, dite d'extraction de source, basée sur la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine non-borné et une méthode numérique qui est justifiée par la théorie des inégalités inverses. Ces deux méthodes donnent des résultats similaires, sachant que la seconde est plus simple à mettre en oeuvre. L'algorithme de résolution du problème inverse calcule des impédances en bon accord avec celles prédites par un modèle théorique, sauf pour les mesures à basses fréquences. Il serait intéressant d'identifier l'impédance de sortie du domaine afin de tenir compte d'une éventuelle réflexion à la fin du banc expérimental et de quantifier son effet sur l'impédance de la plaque identifiée.

---

## Perspectives

Cette étude ouvre de nombreuses perspectives. La première concerne le calcul du travail des efforts visqueux au voisinage d'une perforation. Pour vérifier l'impact des extrémités de la perforation sur sa valeur, une étude à part entière pourrait être menée en tenant compte d'un champ de coin. Cela permettrait de développer un modèle d'impédance analytique tenant compte des effets visqueux. De plus, cette méthode serait applicable pour des géométries complexes, par exemple, pour des perforations inclinées ou coniques. Les techniques d'analyse asymptotique semblent adaptées à cette modélisation, puisqu'une étude [12] a déjà été réalisée dans le cas non visqueux. Pour compléter la modélisation analytique, une étude numérique pourrait être menée avec un code résolvant les équations de Stokes incompressibles harmoniques.

Une étude numérique pour différentes configurations (dépendantes du nombre de Helmholtz et du nombre de Stokes) permettrait de confirmer les différentes suppositions émises lors des simulations de type DNS présentées dans ces travaux. De plus, des effets physiques plus complexes tel que les niveaux sonores élevés ou la présence d'un écoulement traversant pourraient être pris en compte dans les simulations. Pour ce dernier cas, des études [20, 65] ont été récemment réalisées avec un solveur Lattice-Boltzmann, qui donne des résultats similaires aux solveurs Navier-Stokes classiques pour des temps de calcul beaucoup plus rapides, ce qui semble donc être une voie très prometteuse.

Finalement, rappelons que cette étude traite une approche fréquentielle de la modélisation de l'impédance acoustique. On ne peut pas directement utiliser ces modèles dans des solveurs temporels. Dans le domaine temporel, l'impédance est un opérateur de convolution non local en temps. Il est donc nécessaire de développer des méthodes particulières afin de modéliser l'impédance dans le domaine temporel, puis de l'implanter dans des codes de calcul.



# Annexes



## Les modèles acoustiques d'impédance pour les géométries complexes

Nous allons exprimer les modèles d'impédance développés par Laurens et collab. [25, 26] pour des configurations géométriques complexes. Ces modèles ne tiennent pas compte des effets visqueux, ni d'aucun autre effet physique complexe.

### A.1 Perforation conique

La conductivité de Rayleigh pour une perforation conique (voir figure A.1) s'écrit

$$\frac{\pi r_0^- r_0^+}{h + \frac{8}{3\pi}(r_0^- + r_0^+) + \frac{1}{2h}(r_0^- - r_0^+)^2} < K_R < \frac{\pi r_0^- r_0^+}{h + \frac{\pi}{4}(r_0^- + r_0^+)}. \quad (\text{A.1})$$

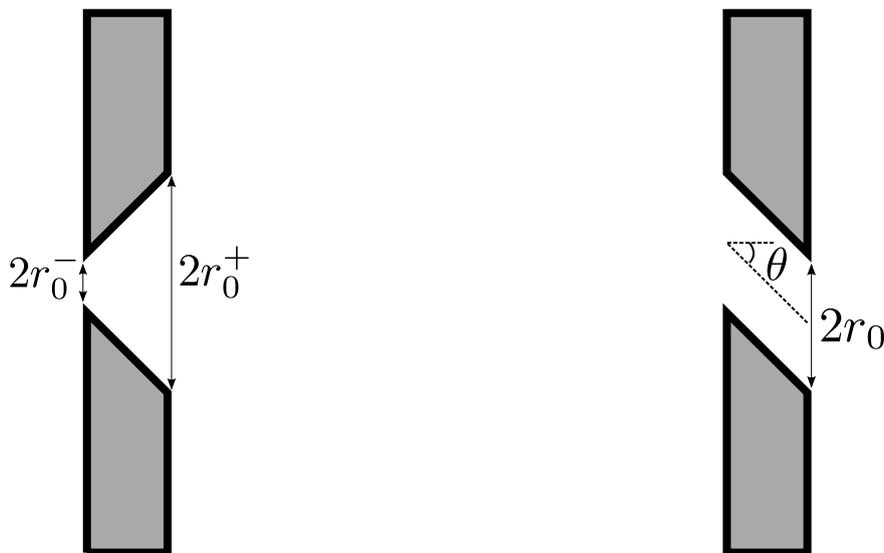


FIGURE A.1 – Perforation conique et perforation inclinée avec des ouvertures circulaires.

## A.2 Perforation inclinée

### A.2.1 Ouvertures circulaires

Ce modèle est valide pour des perforations inclinées dont les ouvertures sur la plaque perforée sont circulaires (voir figure A.1). La conductivité de Rayleigh est égale à

$$\frac{\pi r_0^2}{\frac{16r_0}{3\pi} + \frac{h}{\cos^2 \theta}} < K_R < \frac{\pi r_0^2}{\frac{\pi r_0}{2} + \frac{h}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{16r_0}{3\pi h} \sin^2 \theta\right)^{-1}}. \quad (\text{A.2})$$

### A.2.2 Ouverture elliptique

Ce modèle est valide pour des perforations inclinées dont les ouvertures sur la plaque perforée et la section transverse sont elliptiques (voir figure A.2 et figure A.3). La conductivité de Rayleigh s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi ab}{h/\cos^2 \theta + (16b/3\pi) (K(\epsilon)/K(0))} < K_R \\ < \frac{\pi ab}{(\pi b/2) (K(\epsilon)/K(0)) + (h/\cos^2 \theta) / (1 + (16a^2/3\pi bh) (D(0)/D(\epsilon)) \sin^2 \theta)}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où  $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  est l'excentricité de l'ellipse et  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce définie par

$$K(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi. \quad (\text{A.4})$$

L'intégrale elliptique complète de seconde espèce  $E$  est égale à

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad (\text{A.5})$$

et  $D$  est défini par

$$D(\epsilon) = \frac{K(\epsilon) - E(\epsilon)}{\epsilon^2}. \quad (\text{A.6})$$

Pour des perforations avec une section transverse circulaire, le modèle (A.3) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\pi r^2}{h/\cos \theta + (16r/3\pi) (K(\sin \theta)/K(0)) \cos \theta} < K_R \\ < \frac{\pi r^2}{((\pi r/2) (K(\sin \theta)/K(0)) \cos \theta + h/\cos \theta) / (1 + (16r/3\pi h) (D(0)/D(\sin \theta)) \tan^2 \theta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

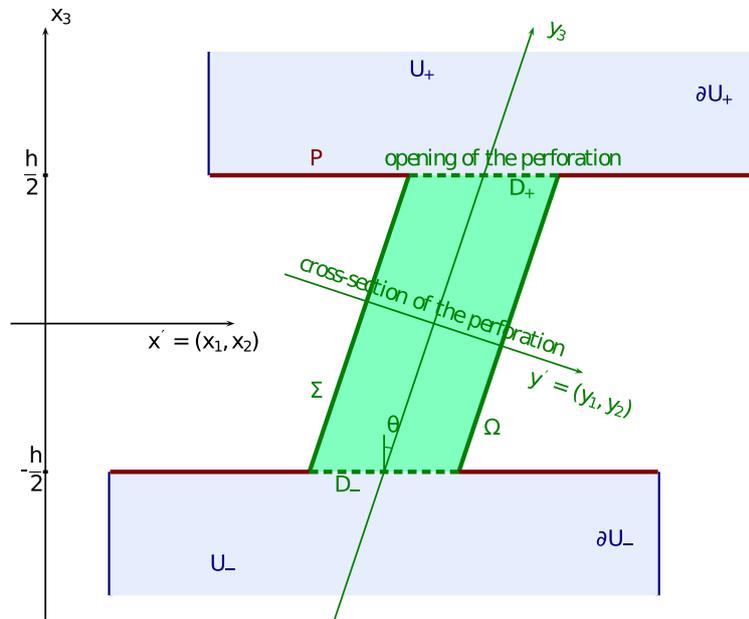


FIGURE A.2 – Perforation inclinée avec ouverture elliptique. Image extraite de l'article [25] de Laurens et collab.

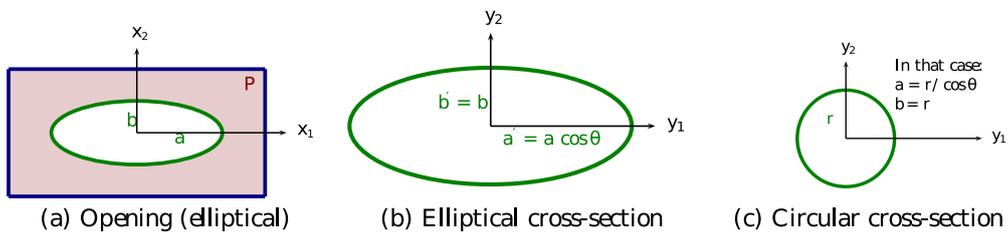


FIGURE A.3 – Ouverture et section transverse de la perforation. Image extraite de l'article [25] de Laurens et collab.



## Le calcul de la dissipation d'énergie par une plaque perforée

### B.1 Calcul du travail des efforts visqueux dans une couche limite acoustique

Nous détaillons ici le calcul du travail des efforts visqueux dans la couche limite acoustique fait dans la section 3.2. Le calcul de la moyenne temporelle du travail des efforts visqueux s'écrit

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_{\dot{\Omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( \nabla \left[ \Re \left( \hat{\mathbf{v}} e^{j\omega t} \right) \right] + \left( \nabla \left[ \Re \left( \hat{\mathbf{v}} e^{j\omega t} \right) \right] \right)^T \right)^2 dt d\dot{\Omega}. \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane, le champ de vitesse s'écrit

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}^\infty \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \dot{x}_3} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\Upsilon_0}} \dot{x}_3} \right). \quad (\text{B.2})$$

Ainsi

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_{\dot{\Omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_1 e^{j\omega t} \right) \right]^2 + 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_2 e^{j\omega t} \right) \right]^2 dt d\dot{\Omega}, \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{\dot{x}_3=0}^{+\infty} \iint_{\dot{S}} 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_1 e^{j\omega t} \right) \right]^2 + 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_2 e^{j\omega t} \right) \right]^2 d\dot{S} d\dot{x}_3 dt, \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{\Upsilon_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \iint_{\dot{S}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{\dot{x}_3=0}^{+\infty} 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_1 e^{j\omega t} \right) \right]^2 + 2 \left[ \Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_2 e^{j\omega t} \right) \right]^2 d\dot{x}_3 dt d\dot{S}. \quad (\text{B.5})$$

où  $\dot{S}$  est la surface de la plaque plane.

Nous allons détailler les équations pour le terme  $\Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_1 e^{j\omega t} \right)$ , sachant que les calculs pour le terme  $\Re \left( \partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_2 e^{j\omega t} \right)$  sont similaires. Calculons d'abord la dérivée par rapport à la variable  $\dot{x}_3$  de  $\hat{v}_{\dot{x}_1}$

$$\partial_{\dot{x}_3} \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_s}} \hat{v}_1^\infty (1+j) e^{-\frac{(1+j)\dot{x}_3}{\sqrt{2\lambda_s}}}, \quad (\text{B.6})$$

donc sa partie réelle est égale à

$$\begin{aligned} \Re\left(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_1 e^{j\omega t}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_s} e^{-\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s}} \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \left( \cos\left(\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s} - \omega t\right) + \sin\left(\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s} - \omega t\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \Im(\hat{v}_1^\infty) \left( \cos\left(\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s} - \omega t\right) - \sin\left(\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{2}\lambda_s} - \omega t\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Le carré de cette expression s'écrit alors

$$\begin{aligned} \left[ \Re\left(\partial_{\dot{x}_3}^* \hat{v}_1 e^{j\omega t}\right) \right]^2 &= \frac{1}{2\lambda_s^2} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \left\{ -2\Re(\hat{v}_1^\infty)\Im(\hat{v}_1^\infty) \cos\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s} - 2\omega t\right) \right. \\ &\quad \left. \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left( 1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s} - 2\omega t\right) \right) + \left[ \Im(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left( 1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s} - 2\omega t\right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nous allons maintenant calculer l'intégrale selon  $\dot{x}_3$  d'un des termes de l'expression précédente

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left( 1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s} - 2\omega t\right) \right) d\dot{x}_3, \quad (\text{B.9a})$$

$$= \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}\right) \cos(2\omega t) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}\right) \sin(2\omega t) \right] d\dot{x}_3, \quad (\text{B.9b})$$

$$= \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} d\dot{x}_3 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}\right) \cos(2\omega t) d\dot{x}_3 \right\} \quad (\text{B.9c})$$

$$- \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}\right) \sin(2\omega t) d\dot{x}_3, \quad (\text{B.9d})$$

$$= \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left\{ \left[ -\frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \right]_0^{+\infty} - \Im \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} e^{-j\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \cos(2\omega t) d\dot{x}_3 \right) \right\} \quad (\text{B.9e})$$

$$- \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \Re \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} e^{-j\frac{\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \sin(2\omega t) d\dot{x}_3 \right), \quad (\text{B.9f})$$

$$= \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left\{ \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} - \Im \left( \left[ -\frac{\lambda_s}{(1+j)\sqrt{2}} e^{-\frac{(1+j)\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \cos(2\omega t) \right]_0^{+\infty} \right) \right\} \quad (\text{B.9g})$$

$$- \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \Re \left( \left[ -\frac{\lambda_s}{(1+j)\sqrt{2}} e^{-\frac{(1+j)\sqrt{2}\dot{x}_3}{\lambda_s}} \sin(2\omega t) \right]_0^{+\infty} \right), \quad (\text{B.9h})$$

$$= \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left\{ \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} - \Im \left( \frac{(1-j)\lambda_s}{2\sqrt{2}} \cos(2\omega t) \right) - \Re \left( \frac{(1-j)\lambda_s}{2\sqrt{2}} \sin(2\omega t) \right) \right\}, \quad (\text{B.9i})$$

$$= \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} \left[ \Re(\hat{v}_1^\infty) \right]^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \right\}. \quad (\text{B.9j})$$

On peut calculer de la même manière le terme

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}x_3^*}{\lambda_s}} [\Im(\widehat{v}_1^\infty)]^2 \left(1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}x_3^*}{\lambda_s} - 2\omega t\right)\right) dx_3^*, \quad (\text{B.10a})$$

$$= \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} [\Im(\widehat{v}_1^\infty)]^2 \left\{1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t)\right\}, \quad (\text{B.10b})$$

et le terme

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}x_3^*}{\lambda_s}} \Re(\widehat{v}_1^\infty) \Im(\widehat{v}_1^\infty) \cos\left(\frac{\sqrt{2}x_3^*}{\lambda_s} - 2\omega t\right) dx_3^*, \quad (\text{B.11a})$$

$$= \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}} \Re(\widehat{v}_1^\infty) \Im(\widehat{v}_1^\infty) \left\{\frac{1}{2} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t)\right\}. \quad (\text{B.11b})$$

Si on regroupe les différents résultats qu'on vient de trouver

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\Re(\partial_{x_3^*} \widehat{v}_1 e^{j\omega t})]^2 dX_3 &= \frac{\sqrt{2}}{4\lambda_s} \left([\Re(\widehat{v}_1^\infty)]^2 + [\Im(\widehat{v}_1^\infty)]^2\right) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4\lambda_s} \left([\Re(\widehat{v}_1^\infty)]^2 - [\Im(\widehat{v}_1^\infty)]^2 - 2\Re(\widehat{v}_1^\infty)\Im(\widehat{v}_1^\infty)\right) \left(\frac{1}{2} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

L'intégration de la relation précédente sur une période temporelle s'écrit

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{+\infty} [\Re(\partial_{x_3^*} \widehat{v}_1 e^{j\omega t})]^2 dx_3^* dt = \frac{\sqrt{2}}{4\lambda_s} \left([\Re(\widehat{v}_1^\infty)]^2 + [\Im(\widehat{v}_1^\infty)]^2\right), \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{\sqrt{2\omega\rho_0}}{4\sqrt{\Upsilon_0}} |\widehat{v}_1^\infty|^2. \quad (\text{B.14})$$

En multipliant ce résultat par  $\Upsilon_0$ , et en ajoutant le terme dépendant de  $\widehat{v}_2$ , on trouve

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}) \rangle = \iint_{\dot{S}} \frac{\sqrt{2\omega\rho_0\Upsilon_0}}{4} (|\widehat{v}_1^\infty|^2 + |\widehat{v}_2^\infty|^2) d\dot{S}, \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{\sqrt{2\omega\rho_0\Upsilon_0}}{4} \iint_{\dot{S}} |\widehat{v}_t^\infty|^2 d\dot{S}, \quad (\text{B.16})$$

où  $|\widehat{v}_t^\infty|$  est la norme de la vitesse tangentielle extérieure à la couche limite.

## B.2 Calcul des deux champs de vitesse théoriques

Pour calculer les corrections de col des modèles de résistance, nous devons modéliser le travail des efforts visqueux près des parois de la plaque perforée. Son expression dépend de la vitesse tangentielle à la plaque qui est comprise entre deux valeurs, que nous pouvons calculer analytiquement. Avant de calculer les deux expressions des vitesses tangentielles, nous allons énoncer un résultat préliminaire. Dans cette section, nous détaillons les calculs des résultats énoncés dans la section 3.3.

### B.2.1 La formule de Copson

Soient  $\check{\mathbf{x}}$  et  $\check{\mathbf{y}}$  définis dans le plan complexe par  $\check{\mathbf{x}} = \check{r}e^{j\psi}$  et  $\check{\mathbf{y}} = \check{\rho}e^{j\theta}$ . Le module  $|\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}}|$  s'écrit alors

$$|\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}}| = \sqrt{(\check{r} \cos \psi - \check{\rho} \cos \theta)^2 + (\check{r} \sin \psi - \check{\rho} \sin \theta)^2} = \sqrt{\check{r}^2 + \check{\rho}^2 - 2\check{r}\check{\rho} \cos(\psi - \theta)}. \quad (\text{B.17})$$

Dans la suite, on pose  $\alpha = \psi - \theta$ . Ecrivons la formule de Copson [8]

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\check{r}^2 + \check{\rho}^2 - 2\check{r}\check{\rho} \cos(\alpha)}} d\alpha = 4 \int_0^{\min(\check{\rho}, \check{r})} \frac{1}{\sqrt{(\check{\rho}^2 - \check{t}^2)(\check{r}^2 - \check{t}^2)}} d\check{t}, \quad (\text{B.18})$$

donc

$$\int_{B_1} \frac{1}{|\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}}|} ds_{\check{\mathbf{y}}} = \int_{\check{\rho}=0}^1 \check{\rho} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\check{r}^2 + \check{\rho}^2 - 2\check{r}\check{\rho} \cos(\alpha)}} d\alpha d\check{\rho}, \quad (\text{B.19a})$$

$$= 4 \int_{\check{\rho}=0}^1 \int_{\check{t}=0}^{\min(\check{\rho}, \check{r})} \frac{1}{\sqrt{(\check{\rho}^2 - \check{t}^2)(\check{r}^2 - \check{t}^2)}} \check{\rho} d\check{t} d\check{\rho}. \quad (\text{B.19b})$$

### B.2.2 Calcul du champ de vitesse par l'approximation de Kelvin

Nous supposons que le champ de vitesse dans le domaine  $\check{\Omega}^+$  s'écrit

$$\check{\mathbf{v}}(\check{\mathbf{x}}) = \check{\nabla} \int_{B_1} \frac{\check{V}_1^{\text{perfo}}}{2\pi|\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}}|} ds_{\check{\mathbf{y}}}. \quad (\text{B.20})$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons la formule de Copson (B.19)

$$\int_{B_1} \frac{1}{|\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}}|} ds_{\check{\mathbf{y}}} = 4 \int_{\check{\rho}=0}^1 \int_{\check{t}=0}^{\min(\check{\rho}, \check{r})} \frac{\check{\rho} d\check{t} d\check{\rho}}{\sqrt{(\check{\rho}^2 - \check{t}^2)(\check{r}^2 - \check{t}^2)}}, \quad (\text{B.21a})$$

$$= 4 \int_{\check{\rho}=0}^1 \int_{\check{t}=0}^{\check{\rho}} \frac{\check{\rho} d\check{t} d\check{\rho}}{\sqrt{(\check{\rho}^2 - \check{t}^2)(\check{r}^2 - \check{t}^2)}}, \quad (\text{B.21b})$$

où  $\check{\rho}$  désigne le module de  $\check{\mathbf{y}}$  et  $\check{r}$  le module de  $\check{\mathbf{x}}$ . Ici  $|\check{\mathbf{x}}| > |\check{\mathbf{y}}|$ , ainsi  $\min(\check{\rho}, \check{r}) = \check{\rho}$ . Ici  $\check{\rho}$  varie entre 0 et 1 et  $\check{t}$  entre 0 et  $\check{\rho}$ . On remarque donc que  $\check{t}$  varie entre 0 et 1, et  $\check{\rho}$  entre  $\check{t}$  et 1. Si on inverse

les deux intégrales, on a

$$\int_{B_1} \frac{1}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|} ds_{\dot{\mathbf{y}}}^* = \frac{2}{\pi} \int_{t^*=0}^1 \int_{\rho^*=t^*}^1 \frac{\dot{\rho}^* d\dot{\rho}^* dt^*}{\sqrt{(\dot{\rho}^{*2} - \dot{t}^2)(\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2)}}, \quad (\text{B.22a})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{t^*=0}^1 \left[ \frac{\sqrt{\dot{\rho}^{*2} - \dot{t}^2}}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2}} \right]_{\rho^*=t^*}^{\rho^*=1} dt^*, \quad (\text{B.22b})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{t^*=0}^1 \frac{\sqrt{1 - \dot{t}^2}}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2}} dt^*. \quad (\text{B.22c})$$

On peut réécrire cette intégrale

$$\int_{t^*=0}^1 \frac{\sqrt{1 - \dot{t}^2}}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2}} dt^* = \int_{t^*=0}^1 \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^* + \int_{t^*=0}^1 \frac{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^* - \int_{t^*=0}^1 \frac{\dot{r}^{*2}}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*, \quad (\text{B.23a})$$

$$= \frac{1}{\dot{r}^*} \int_{t^*=0}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{t}^2/\dot{r}^{*2}} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^* + \dot{r}^* \int_{t^*=0}^1 \frac{\sqrt{1 - \dot{t}^2/\dot{r}^{*2}}}{\sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^* - \dot{r}^* \int_{t^*=0}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{t}^2/\dot{r}^{*2}} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*. \quad (\text{B.23b})$$

On introduit K et E les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce [7], définies par

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 t^{*2}} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*, \quad (\text{B.24})$$

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^{*2}}}{\sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*. \quad (\text{B.25})$$

Ces définitions sont équivalentes à celles données dans l'annexe A. Il existe une troisième définition pour K et E où l'argument n'est pas mis au carré [1]

$$K(m) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - m t^{*2}} \sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*, \quad (\text{B.26})$$

$$E(m) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - m t^{*2}}}{\sqrt{1 - \dot{t}^2}} dt^*. \quad (\text{B.27})$$

Il faut être vigilant à la définition choisie dans la bibliographie avant de citer une propriété. Pour la suite, nous choisissons les définitions (B.24) et (B.25). Ainsi

$$\int_{t^*=0}^1 \frac{\sqrt{1 - \dot{t}^2}}{\sqrt{\dot{r}^{*2} - \dot{t}^2}} dt^* = \frac{1}{\dot{r}^*} K\left(\frac{1}{\dot{r}^*}\right) + \dot{r}^* E\left(\frac{1}{\dot{r}^*}\right) - \dot{r}^* K\left(\frac{1}{\dot{r}^*}\right). \quad (\text{B.28})$$

Il existe une expression analytique pour calculer les dérivées de K et E [7]

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}. \quad (\text{B.30})$$

Ainsi

$$\frac{d}{dk} kK = K + \frac{E}{1-k^2} - K = \frac{E}{1-k^2}, \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{d}{dk} \frac{E}{k} = -\frac{E}{k^2} + \frac{E}{k^2} - \frac{K}{k^2} = \frac{K}{k^2}, \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{d}{dk} \frac{K}{k} = -\frac{K}{k^2} + \frac{E}{k^2(1-k^2)} - \frac{K}{k^2} = \frac{E}{k^2(1-k^2)} - 2\frac{K}{k^2}, \quad (\text{B.33})$$

et donc

$$\frac{d}{dk} \left( kK + \frac{E}{k} - \frac{K}{k} \right) = \frac{k^2E + (1-k^2)K - E}{k^2(1-k^2)}, \quad (\text{B.34a})$$

$$= \frac{-E + K}{k^2}. \quad (\text{B.34b})$$

En posant  $k = 1/\dot{r}$ , on obtient

$$\frac{d}{d\dot{r}} \left[ \frac{1}{\dot{r}} K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) + \dot{r} E \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) - K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) \right] = E \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) - K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right). \quad (\text{B.35})$$

Dans les coordonnées polaires, la vitesse tangentielle à la plaque est la vitesse dans la direction radiale ainsi

$$\dot{v}_t(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \int_{B_1} \frac{\dot{V}_1^{\text{perfo}}}{2\pi |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|} dS_{\dot{\mathbf{y}}} = \frac{2\dot{V}_1^{\text{perfo}}}{\pi} \left[ E \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) - K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) \right]. \quad (\text{B.36})$$

La moyenne temporelle du travail s'écrit alors

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = 2\pi R_0^2 \dot{R}_S \int_{\dot{r}=1}^{+\infty} |\dot{v}_t|^2 \dot{r} d\dot{r}, \quad (\text{B.37a})$$

$$= \frac{8}{\pi} R_0^2 \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 \int_{\dot{r}=1}^{+\infty} \dot{r} \left[ E \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) - K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) \right]^2 d\dot{r}. \quad (\text{B.37b})$$

Le calcul de cette intégrale est explicité dans le livre de Byrd et collab. [7]

$$\int_{k=0}^1 \frac{[K(k) - E(k)]^2}{k^3} dk = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}, \quad (\text{B.38})$$

donc pour  $k = 1/\dot{r}$ , on a

$$\int_{\dot{r}=1}^{+\infty} \left[ K \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) - E \left( \frac{1}{\dot{r}} \right) \right]^2 \dot{r} d\dot{r} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}. \quad (\text{B.39})$$

Ainsi, on trouve

$$\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = \frac{8}{\pi} R_0^2 \dot{R}_S |\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2 \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.40})$$

## B.2.3 Calcul du champ de vitesse par l'approximation de Dirichlet

Dans cette section, on suppose que le champ de vitesse dans le domaine  $\Omega^+$  s'écrit

$$\dot{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{x}}) = \dot{\nabla} \int_{B_1} \frac{\dot{V}_1^{\text{perfo}}}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{y}}|^2}} ds_{\dot{\mathbf{y}}}. \quad (\text{B.41})$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons à nouveau la formule de Copson, ainsi

$$\int_{B_1} \frac{1}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{y}}|^2}} \dot{r} d\theta d\dot{r} = \frac{2}{\pi} \int_{\dot{\rho}^*=0}^1 \int_{\dot{t}^*=0}^{\dot{\rho}^*} \frac{\dot{\rho}^* d\dot{t}^* d\dot{\rho}^*}{\sqrt{(\dot{\rho}^{*2} - \dot{t}^{*2})(\dot{r}^{*2} - \dot{t}^{*2})(1 - \dot{\rho}^{*2})}}, \quad (\text{B.42a})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\dot{t}^*=0}^1 \int_{\dot{\rho}^*=\dot{t}^*}^1 \frac{\dot{\rho}^* d\dot{\rho}^* d\dot{t}^*}{\sqrt{(\dot{\rho}^{*2} - \dot{t}^{*2})(\dot{r}^{*2} - \dot{t}^{*2})(1 - \dot{\rho}^{*2})}}. \quad (\text{B.42b})$$

On pose le changement de variable  $z = \dot{\rho}^2$

$$2 \int_{\dot{\rho}^*=\dot{t}^*}^1 \frac{\dot{\rho}^* d\dot{\rho}^*}{\sqrt{(\dot{\rho}^{*2} - \dot{t}^{*2})(1 - \dot{\rho}^{*2})}} = \int_{z=\dot{t}^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{(z - \dot{t}^2)(1 - z)}}, \quad (\text{B.43a})$$

$$= \int_{z=\dot{t}^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{-z^2 - \dot{t}^2 + (1 + \dot{t}^2)z}}, \quad (\text{B.43b})$$

$$= \int_{z=\dot{t}^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{-(z^2 - \frac{\dot{t}^2+1}{2})^2 + (\frac{\dot{t}^2+1}{2})^2 - \dot{t}^2}}, \quad (\text{B.43c})$$

$$= \int_{z=\dot{t}^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{-(z^2 - \frac{\dot{t}^2+1}{2})^2 + (\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2}}. \quad (\text{B.43d})$$

On pose maintenant  $Z = z - \frac{\dot{t}^2+1}{2}$ . La variable  $Z$  varie alors de  $(\dot{t}^2 - 1)/2$  à  $(1 - \dot{t}^2)/2$

$$2 \int_{\rho=\dot{t}^*}^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - \dot{t}^{*2})(1 - \rho^2)}} = \int_{Z=\frac{\dot{t}^2-1}{2}}^{\frac{1-\dot{t}^2}{2}} \frac{(\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2 dZ}{\sqrt{(\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2 - Z^2}}, \quad (\text{B.44a})$$

$$= \int_{Z=\frac{\dot{t}^2-1}{2}}^{\frac{1-\dot{t}^2}{2}} \frac{(\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2 dZ}{\sqrt{(\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2Z}{\dot{t}^2-1}\right)^2}}, \quad (\text{B.44b})$$

$$= \int_{Z=\frac{\dot{t}^2-1}{2}}^{\frac{1-\dot{t}^2}{2}} \frac{(\frac{\dot{t}^2-1}{2})^2 dZ}{-\frac{\dot{t}^2-1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2Z}{\dot{t}^2-1}\right)^2}}, \quad (\text{B.44c})$$

$$= \int_{Z=\frac{\dot{t}^2-1}{2}}^{\frac{1-\dot{t}^2}{2}} -\frac{\frac{\dot{t}^2-1}{2} dZ}{\sqrt{1 - \left(\frac{2Z}{\dot{t}^2-1}\right)^2}}, \quad (\text{B.44d})$$

car  $\dot{t}$  est choisi entre 0 et 1. On définit maintenant la variable  $a$  tel que  $a = 2Z/(\dot{t}^2 - 1)$ . Elle varie entre 1 et  $-1$

$$2 \int_{\rho=\dot{t}}^1 \frac{\dot{\rho} d\dot{\rho}}{\sqrt{(\rho^2 - \dot{t}^2)(1 - \rho^2)}} = \int_{a=1}^{-1} -\frac{da}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad (\text{B.45a})$$

$$= [\arcsin(a)]_{-1}^1, \quad (\text{B.45b})$$

$$= \pi. \quad (\text{B.45c})$$

On aboutit donc à

$$\int_{B_1} \frac{1}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{y}}|^2}} ds_{\dot{\mathbf{y}}}^* = \int_{\dot{t}=0}^1 \frac{d\dot{t}}{\sqrt{(\dot{r}^2 - \dot{t}^2)}}, \quad (\text{B.46a})$$

$$= \int_{T=0}^{1/\dot{r}} \frac{dT}{\sqrt{(1 - T^2)}}, \quad (\text{B.46b})$$

$$= [\arcsin(T)]_0^{1/\dot{r}}, \quad (\text{B.46c})$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\dot{r}}\right). \quad (\text{B.46d})$$

On peut calculer la vitesse tangentielle à la plaque pour  $\dot{\mathbf{x}} > 1$ , ainsi

$$\dot{v}_t(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \int_{B_1} \frac{\dot{v}_1}{2\pi|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{y}}|^2}} ds_{\dot{\mathbf{y}}}^* = -\frac{\dot{V}_1^{\text{perfo}}}{\dot{r}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{r}^2}}}, \quad (\text{B.47})$$

et

$$|\dot{v}_t(\dot{\mathbf{x}})|^2 = \frac{|\dot{V}_1^{\text{perfo}}|^2}{\dot{r}^2} \frac{1}{\dot{r}^2 - 1}. \quad (\text{B.48})$$

Cette expression de  $|\dot{v}_t(\dot{\mathbf{x}})|^2$  n'est pas intégrable en 1, ainsi

$$\int_{\Sigma^+} |\dot{v}_t(\mathbf{X})|^2 d\Sigma^+ = +\infty \quad (\text{B.49})$$

et  $\langle \dot{W}(\dot{\Omega}^+) \rangle = +\infty$ .

## Propagation unidimensionnelle avec une condition d'impédance

Dans cette section, nous allons écrire un modèle de propagation unidimensionnelle pour écrire des relations entre l'impédance et le coefficient de réflexion de la plaque perforée. Les variables ont une dépendance fréquentielle harmonique, par exemple  $p(\mathbf{x}, t) = \Re(p(\mathbf{x})e^{j\omega t})$ .

### C.1 Modélisation de la propagation unidimensionnelle dans un guide d'onde

Nous considérons un guide d'onde de section uniforme dont la direction axiale est  $x_1$  et au sein duquel l'écoulement porteur est au repos, sa masse volumique étant notée  $\rho_0$  et sa vitesse du son  $c_0$ . Nous supposons qu'une onde plane progressive se propage à l'intérieur du guide d'onde, ainsi nous pouvons écrire le champ de pression sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1) = p^+ e^{-jkx_1} + p^- e^{jkx_1}, \quad (\text{C.1})$$

où  $p^+$  et  $p^-$  sont deux nombres complexes.

On place une plaque perforée à la position  $x_\Gamma$  à l'intérieur du guide d'onde. Elle sépare deux domaines  $\tilde{\Omega}_I$  et  $\tilde{\Omega}_{II}$ . Nous supposons que l'extrémité amont du guide d'onde (à la position  $x_e$ ) est non réfléchissante. A l'extrémité droite du guide d'onde (à la position  $x_s$ ), nous considérons deux cas : soit la présence d'une paroi rigide, soit une sortie non-réfléchissante (voir figure C.1).

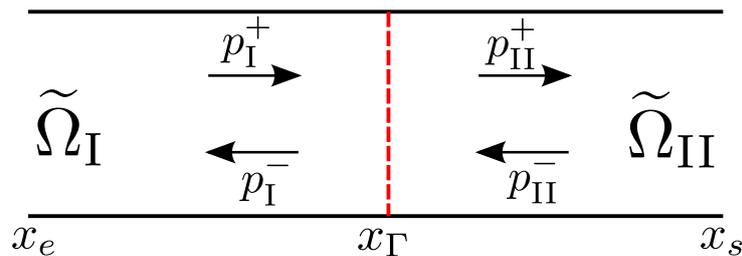


FIGURE C.1 – Propagation dans un guide d'onde

Nous allons expliciter des formules pour connaître la pression et la vitesse acoustique à une position quelconque dans le guide d'onde. Les champs de pression et de vitesse sont uniformes dans une section du cylindre et ne dépendent donc que de la variable  $x_1$ . Dans le domaine  $\tilde{\Omega}_I$ , on suppose qu'on peut écrire la pression et la vitesse acoustique sous la forme

$$p_I(\mathbf{x}) = p_I^+ e^{-jkx_1} + p_I^- e^{jkx_1}, \quad (\text{C.2})$$

$$v_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_1} - p_I^- e^{jkx_1} \right), \quad (\text{C.3})$$

avec  $p_I^+$  et  $p_I^-$  des nombres complexes. Dans le domaine  $\tilde{\Omega}_{II}$ , on peut écrire

$$p_{II}(\mathbf{x}) = p_{II}^+ e^{-jkx_1} + p_{II}^- e^{jkx_1}, \quad (\text{C.4})$$

$$v_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( p_{II}^+ e^{-jkx_1} - p_{II}^- e^{jkx_1} \right), \quad (\text{C.5})$$

avec  $p_{II}^+$  et  $p_{II}^-$  des nombres complexes. Nous rappelons que ces expressions sont valides dans la convention harmonique  $e^{j\omega t}$ .

## C.2 Sortie non réfléchissante

Nous considérons le cas d'une sortie non-réfléchissante, ainsi  $p_{II}^-$  est nul (voir figure C.2).

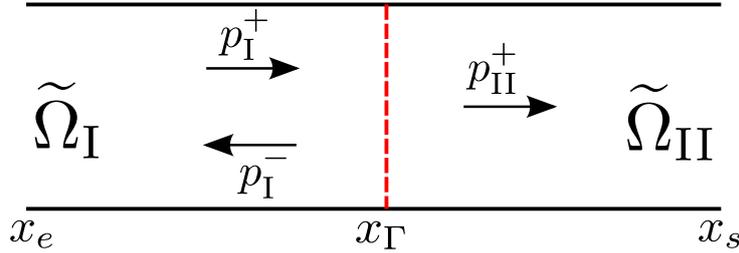


FIGURE C.2 – Propagation dans un guide d'onde avec une sortie non-réfléchissante

Nous allons maintenant introduire le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_I = \frac{p_I^-}{p_I^+}$  de la plaque. Nous souhaitons donner une relation entre  $\mathcal{R}_I$  et l'impédance de transmission  $Z_w$ . On va donc exprimer la définition de l'impédance de transmission  $p_I(x_\Gamma) - p_{II}(x_\Gamma) = Z_w v_I(x_\Gamma)$  à l'aide des équations (C.2) à (C.4).

$$p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} + p_I^- e^{jkx_\Gamma} - p_{II}^+ e^{-jkx_\Gamma} = \frac{Z_w}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} \right). \quad (\text{C.6})$$

La continuité de la vitesse en  $x_\Gamma$  :  $v_I(x_\Gamma) = v_{II}(x_\Gamma)$  impose  $p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} = p_{II}^+ e^{-jkx_\Gamma}$  ainsi

$$2p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} = \frac{Z_w}{\rho_0 c_0} \left( p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} \right). \quad (\text{C.7})$$

On peut donc exprimer l'impédance en fonction du coefficient de réflexion

$$Z_w = \rho_0 c_0 \frac{2\mathcal{R}_I e^{2jx_\Gamma}}{1 - \mathcal{R}_I e^{2jx_\Gamma}}, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathcal{R}_I = e^{-2jkx_\Gamma} \frac{Z_w}{Z_w + 2\rho_0 c_0}. \quad (\text{C.9})$$

Le même raisonnement donne une relation entre le coefficient de transmission  $\mathcal{T}_I = \frac{p_{II}^+}{p_I^+}$  et l'impédance de transmission de la plaque

$$Z_w = \rho_0 c_0 \frac{2 - 2\mathcal{T}_I}{\mathcal{T}_I}, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{T}_I = \frac{2\rho_0 c_0}{Z_w + 2\rho_0 c_0}. \quad (\text{C.11})$$

La continuité de la vitesse en  $x_\Gamma$  nous permet d'écrire une relation entre le coefficient de réflexion et de transmission

$$\mathcal{T}_I + \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma} = 1. \quad (\text{C.12})$$

On remarque que les équations (C.9) et (C.11) vérifient cette égalité. On peut maintenant exprimer les pressions et vitesses dans le guide d'onde en fonction de  $p_I^+$  et des coefficients de réflexion et de transmission

$$p_I(\mathbf{x}) = p_I^+ e^{-jkx_1} (1 + \mathcal{R}_I e^{2jkx_1}), \quad (\text{C.13})$$

$$v_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} p_I^+ e^{-jkx_1} (1 - \mathcal{R}_I e^{2jkx_1}), \quad (\text{C.14})$$

$$p_{II}(\mathbf{x}) = p_I^+ \mathcal{T}_I e^{-jkx_1}, \quad (\text{C.15})$$

$$v_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} p_I^+ \mathcal{T}_I e^{-jkx_1}. \quad (\text{C.16})$$

### C.3 Dans le cas d'une réflexion totale en sortie

On suppose maintenant qu'il y a une paroi rigide totalement réfléchissante en  $x_s$ . Ici le nombre  $p_{II}^-$  est non nul (voir figure C.3).

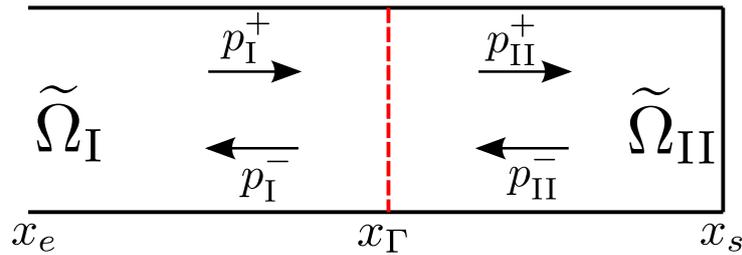


FIGURE C.3 – Propagation dans un guide d'onde avec paroi réfléchissante

On peut exprimer  $p_{II}^-$  en fonction de  $p_{II}^+$  car  $v_{II}(x_s) = 0$ . Ainsi

$$p_{II}^+ e^{-jkx_s} = p_{II}^- e^{jkx_s}, \quad (\text{C.17})$$

ainsi on peut écrire les équations de propagation dans le domaine  $\tilde{\Omega}_{II}$

$$p_{II}(\mathbf{x}) = p_{II}^+ (e^{-jkx_1} + e^{jk(x_1 - 2x_s)}), \quad (\text{C.18})$$

$$v_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{II}^+ (e^{-jkx_1} - e^{jk(x_1 - 2x_s)}). \quad (\text{C.19})$$

La continuité de la vitesse en  $x_\Gamma$  s'écrit maintenant

$$p_I^+ e^{-jkx_\Gamma} - p_I^- e^{jkx_\Gamma} = p_{II}^+ \left( e^{-jkx_\Gamma} - e^{jk(x_\Gamma - 2x_s)} \right). \quad (\text{C.20})$$

On en déduit la relation entre le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission

$$1 - \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma} = \mathcal{T}_I - \mathcal{T}_I e^{2jk(x_\Gamma - x_s)}. \quad (\text{C.21})$$

Comme précédemment, on peut exprimer l'impédance de transmission en fonction des coefficients de réflexion et de transmission :

$$Z_w = \rho_0 c_0 \frac{2\mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma} - 2e^{2jk(x_\Gamma - x_s)}}{1 - e^{2jk(x_\Gamma - x_s)} - \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma} + \mathcal{R}_I e^{2jk(2x_\Gamma - x_s)}}, \quad (\text{C.22})$$

$$Z_w = \rho_0 c_0 \frac{2 - 2\mathcal{T}_I}{\mathcal{T}_I (1 - e^{2jk(x_\Gamma - x_s)})}, \quad (\text{C.23})$$

d'où les relations suivantes

$$\mathcal{R}_I = e^{-2jkx_\Gamma} \frac{2\rho_0 c_0 e^{2j(x_\Gamma - x_s)} + Z_w - Z_w e^{2jk(x_\Gamma - x_s)}}{2\rho_0 c_0 + Z_w - Z_w e^{2jk(x_\Gamma - x_s)}}, \quad (\text{C.24})$$

$$\mathcal{T}_I = \frac{2\rho_0 c_0}{2\rho_0 c_0 + Z_w - Z_w e^{2jk(x_\Gamma - x_s)}}. \quad (\text{C.25})$$

On remarque que l'équation (C.21) est vérifiée. Le domaine  $\tilde{\Omega}_{II}$  est une cavité. En considérant l'impédance  $Z_{\text{liner}}$  du système "plaque + cavité", on aboutit à une expression plus simple du coefficient de réflexion

$$Z_{\text{liner}} = \frac{p_I(x_\Gamma)}{v_I(x_\Gamma)} = \rho_0 c_0 \frac{1 + \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma}}{1 - \mathcal{R}_I e^{2jkx_\Gamma}}, \quad (\text{C.26})$$

$$\mathcal{R}_I = \frac{Z_{\text{liner}} - \rho_0 c_0}{Z_{\text{liner}} + \rho_0 c_0} e^{-2jkx_\Gamma}. \quad (\text{C.27})$$

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964.
- [2] A. BENDALI et M. FARES : Boundary integral equations methods in acoustic scattering. In F. MAGOULÈS, éd. : *Computational Methods for Acoustics Problems*, chap. 1, p. 1–36. Saxe-Coburg Publications, 2007.
- [3] A. BENDALI, M. FARES, E. PIOT et S. TORDEUX : Mathematical justification of the Rayleigh conductivity model for perforated plates in acoustics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(1):438–459, 2013.
- [4] H. BODÉN : One-sided multi-port techniques for characterisation of in-duct samples with nonlinear acoustic properties. *Journal of Sound and Vibration*, 331(13):3050–3067, 2012.
- [5] G. BOYER : *Etude de stabilité et simulation numérique de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide simplifiés*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2012.
- [6] M. BRUNEAU : *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [7] P. F. BYRD et M. D. FRIEDMAN : *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Springer, 1971.
- [8] E. COPSON : On the problem of the electrified disc. In *Proc. Edinburgh Math. Soc*, vol. 8, p. 14–19. Cambridge Univ Press, 1947.
- [9] I. B. CRANDALL : *Theory of Vibration System and Sound*. Van Nostrand, 1926.
- [10] A. CUMMINGS et I.-J. CHANG : The transmission of intense transient and multiple frequency sound waves through orifice plates with mean fluid flow. *Revue de physique appliquée*, 21(2): 151–161, 1986.
- [11] X. DAI, X. JING et X. SUN : Discrete vortex model of a Helmholtz resonator subjected to high-intensity sound and grazing flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(5):2988–2996, 2012.
- [12] M. DAUGE, S. TORDEUX et G. VIAL : Selfsimilar perturbation near a corner : matching versus multiscale expansions for a model problem. In *Around the Research of Vladimir Maz'ya II*, p. 95–134. Springer, 2010.
- [13] J. D. ELDRIDGE, D. J. BODONY et M. SHOEBYI : Numerical investigation of the acoustic behavior of a multi-perforated liner. In *Proceedings of the 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics*

- Conference (28th AIAA Aeroacoustics Conference), AIAA Paper*, num. 2007-3683, p. 21–23, 2007.
- [14] V. A. FOK : *Doklady akademii nauk*, 1941.
- [15] C. HEUWINKEL, A. FISCHER, I. ROHLE, L. ENGHARDT, F. BAKE, E. PIOT et F. MICHELI : Characterization of a perforated liner by acoustic and optical measurements. *In 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2010. AIAA-2010-3765.
- [16] M. S. HOWE : On the theory of unsteady high Reynolds number flow through a circular aperture. *Proceedings of the Royal Society of London A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1725):205–223, 1979.
- [17] M. S. HOWE : *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*. Cambridge University Press, 1998.
- [18] I. J. HUGHES et A. P. DOWLING : The absorption of sound by perforated linings. *Journal of Fluid Mechanics*, 218:299–335, 1990.
- [19] U. INGARD : On the theory and design of acoustic resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(6):1037–1061, 1953.
- [20] C. JI et D. ZHAO : Lattice Boltzmann investigation of acoustic damping mechanism and performance of an in-duct circular orifice. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(6):3243–3251, 2014.
- [21] X. JING et X. SUN : Effect of plate thickness on impedance of perforated plates with bias flow. *AIAA Journal*, 38(9):1573–1578, 2000.
- [22] G. JOURDAIN et L.-E. ERIKSSON : Numerical validation of a time domain perforated plate model with nonlinear and inertial effects. *Journal of Computational Acoustics*, 22(04), 2014.
- [23] S. KABANIKHIN, V. POPIE, M. SHISHLENIN et S. TORDEUX : Determination of the impedance of a multiperforated plate : an inverse problem. *In the Fifth International Scientific Conference and Young Scientists School "Theory and Computational Methods for Inverse and Ill-posed Problems"*, 2013.
- [24] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : *Fluid Mechanics, vol. 6*, vol. 6 de *Course of theoretical physics*. Pergamon Press, 1987.
- [25] S. LAURENS, E. PIOT, A. BENDALI, M. FARES et S. TORDEUX : Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 743:448–480, 2014.
- [26] S. LAURENS, S. TORDEUX, A. BENDALI, M. FARES et P. R. KOTIUGA : Lower and upper bounds for the Rayleigh conductivity of a perforated plate. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47(06):1691–1712, 2013.
- [27] F. G. LEPPINGTON : The effective compliance of perforated screens. *Mathematika*, 24(02):199–215, 1977.
- [28] F. G. LEPPINGTON et H. LEVINE : Reflexion and transmission at a plane screen with periodically arranged circular or elliptical apertures. *Journal of Fluid Mechanics*, 61(01):109–127, 1973.
- [29] T. LUONG, M. S. HOWE et R. S. MCGOWAN : On the Rayleigh conductivity of a bias-flow aperture. *Journal of Fluids and Structures*, 21(8):769–778, 2005.

- [30] D.-Y. MAA : Potential of microperforated panel absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5):2861–2866, 1998.
- [31] V. MATTESSI : *Small heterogeneities in the context of time-domain wave propagation equation : asymptotic analysis and numerical calculation*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des pays de l'Adour, déc. 2014.
- [32] T. H. MELLING : The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *Journal of Sound and Vibration*, 29(1):1–65, 1973.
- [33] S. MENDEZ et J. D. ELDREDGE : Acoustic modeling of perforated plates with bias flow for Large-Eddy Simulations. *Journal of Computational Physics*, 228(13):4757–4772, 2009.
- [34] A. MINOTTI, F. SIMON et F. GANTIÉ : Characterization of an acoustic liner by means of Laser Doppler Velocimetry in a subsonic flow. *Aerospace Science and Technology*, 12(5):398–407, 2008.
- [35] A. MOST : *Etude numérique et expérimentale des écoulements pariétaux avec transfert de masse à travers une paroi multi-perforée*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2007.
- [36] J.-C. NÉDÉLEC : *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, vol. 144. Springer Science & Business Media, 2001.
- [37] A. NIELSEN : *Acoustic resonators of circular cross-section and with axial symmetry*. Akad. for de Tekniske Videnskaber, 1949.
- [38] H. PARISOT-DUPUIS, F. SIMON, E. PIOT et F. MICHELI : Non-intrusive planar velocity-based nearfield acoustic holography in moving fluid medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(6):4087–4097, 2013.
- [39] E. PIOT, F. MICHELI et J.-F. BREIL : Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, avec écoulement transversant. Essais pour l'ANR acoustique et paroi multi-perforée. Rap. tech., ONERA, 2011.
- [40] E. PIOT, F. MICHELI et F. SIMON : Méthodes de mesure optique appliquées à la caractérisation d'absorbants acoustiques en écoulement. In *10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [41] E. PIOT, F. MICHELI, F. SIMON et J.-F. BREIL : Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, sans écoulement. Essais pour l'ANR acoustique et paroi multi-perforée. Rap. tech., ONERA, 2010.
- [42] V. POPIE, E. PIOT, F. SIMON et S. TORDEUX : Impedance eduction of perforated plates at low strouhal numbers and high bias flow mach number. In *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3275, 2015.
- [43] V. POPIE, E. PIOT, S. TORDEUX et F. VUILLOT : Theoretical and numerical investigations of acoustic response of a multiperforated plate for combustor liners. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2015 : Turbine Technical Conference and Exposition*, vol. 4A, 2015.
- [44] J. PRIMUS : *Détermination de l'impédance acoustique de matériaux absorbants en écoulement par méthode inverse et mesures LDV*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2012.
- [45] J. PRIMUS, E. PIOT et F. SIMON : An adjoint-based method for liner impedance eduction : validation and numerical investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 2012.
- [46] J. PRIMUS, E. PIOT, F. SIMON, M. G. JONES et W. R. WATSON : ONERA-NASA cooperative

- effort on liner impedance eduction. *In Proceedings of the 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics conference*, 2013.
- [47] L. RAYLEIGH : *The theory of sound*, vol. 2. Macmillan, 1896.
- [48] S. W. RIENSTRA : Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model. *In Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*, num. 2006-2686, 2006.
- [49] S. W. RIENSTRA et A. HIRSCHBERG : *An introduction to acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2004.
- [50] J.-M. ROCHE : *Simulation numérique de l'absorption acoustique de matériaux résonants en présence d'écoulement*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2011.
- [51] J.-M. ROCHE, L. LEYLEKIAN, G. DELATTRE et F. VUILLOT : Aircraft fan noise absorption : DNS of the acoustic dissipation of resonant liners. *In Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference)*, num. 2009-3146, 2009.
- [52] J.-M. ROCHE, F. VUILLOT, L. LEYLEKIAN, G. DELATTRE, F. SIMON et E. PIOT : Numerical and experimental study of resonant liners aeroacoustic absorption under grazing flow. *In Proceedings of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, num. 2010-3767, 2010.
- [53] J. SANCHEZ-HUBERT et E. SANCHEZ-PALENCIA : Acoustic fluid flow through holes and permeability of perforated walls. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 87(2):427–453, 1982.
- [54] S. A. SAUTER et C. SCHWAB : *Boundary element methods*. Springer, 2011.
- [55] A. SCARPATO, S. DUCRUIX et T. SCHULLER : Optimal and off-design operations of acoustic dampers using perforated plates backed by a cavity. *Journal of Sound and Vibration*, 332(20):4856–4875, 2013.
- [56] K. SCHMIDT, A. THÖNS-ZUEVA et P. JOLY : High-order asymptotic expansion for the acoustics in viscous gases close to rigid walls. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(09):1823–1855, 2014.
- [57] C. K. W. TAM, H. JU, M. G. JONES, W. R. WATSON et T. L. PARROTT : A computational and experimental study of slit resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3):947–984, 2005.
- [58] C. K. W. TAM, H. JU, M. G. JONES, W. R. WATSON et T. L. PARROTT : A computational and experimental study of resonators in three dimensions. *Journal of Sound and Vibration*, 329(24):5164–5193, 2010.
- [59] C. K. W. TAM, H. JU et B. E. WALKER : Numerical simulation of a slit resonator in a grazing flow under acoustic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 313(3):449–471, 2008.
- [60] C. K. W. TAM, K. A. KURBATSKII, K. K. AHUJA et R. J. GAETA JR : A numerical and experimental investigation of the dissipation mechanisms of resonant acoustic liners. *Journal of Sound and Vibration*, 245(3):545–557, 2001.
- [61] E. O. TUCK : Matching problems involving flow through small holes. *Advances in Applied Mechanics*, 15:89–158, 1975.
- [62] M. VAN DYKE : *Perturbation methods in fluid mechanics*. Parabolic Press Stanford, California, 1975.

- 
- [63] Q. ZHANG et D. J. BODONY : Numerical simulation of two-dimensional acoustic liners with high-speed grazing flow. *AIAA journal*, 49(2):365–382, 2011.
- [64] Q. ZHANG et D. J. BODONY : Numerical investigation and modelling of acoustically excited flow through a circular orifice backed by a hexagonal cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 693:367–401, 2012.
- [65] D. ZHAO, L. ANG et C. JI : Numerical and experimental investigation of the acoustic damping effect of single-layer perforated liners with joint bias-grazing flow. *Journal of Sound and Vibration*, 342:152–167, 2015.

---

# Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux

## Résumé

Cette étude s'inscrit dans les efforts faits par l'industrie aéronautique pour la protection environnementale. Pour cela, un des objectifs principaux est de réduire les émissions de polluants et les émissions sonores des avions. Les émissions polluantes sont liées à la qualité de la combustion qui dépend elle-même de la conception des chambres de combustion. Les émissions sonores sont réduites grâce à des traitements passifs comme les structures absorbantes placées en paroi des moteurs pour diminuer le bruit de soufflante. Pour ces deux applications différentes, on utilise des matériaux perforés. En effet, les matériaux absorbants sont constitués d'une structure en nid d'abeilles surmontée d'une plaque perforée. Dans les chambres de combustion, les perforations permettent l'injection d'un air froid protégeant les parois des hautes températures, mais leur présence peut modifier la caractérisation acoustique de la chambre. L'objectif de cette thèse est de modéliser la réponse acoustique d'un matériau perforé. La taille des perforations étant petite devant les longueurs d'ondes sonores, des techniques de modélisation asymptotique adaptées à la résolution de problèmes multi-échelle peuvent être mises en oeuvre. En effet, ces méthodes permettent de faire le lien entre les effets présents à l'intérieur d'une perforation et la réponse acoustique homogénéisée de la plaque perforée. Dans ces travaux, ce sont les effets visqueux présents dans les perforations qui ont été essentiellement étudiés. Ensuite, des simulations numériques directes ont été réalisées pour vérifier la validité des hypothèses émises lors de la modélisation asymptotique. Ces travaux de thèse ont permis d'améliorer la compréhension de la modélisation de la réponse acoustique des matériaux perforés. De plus, la méthode analytique présentée peut être mise en oeuvre pour des perforations de géométrie complexe.

**Mots-clés :** impédance acoustique, modélisation asymptotique, plaques perforées, simulation numérique directe, homogénéisation.

---

## Asymptotic modeling of the acoustic response of perforated plates in a linear case with a study of viscous effects

### Abstract

This study is part of the effort made by the aeronautic industry to protect the environment. Thus, one of the main objectives is to reduce aircraft polluting emissions and sound emissions. The polluting emissions are linked to the combustion quality which depends on the combustion chamber's design. Noise pollution is reduced thanks to passive treatments such as absorbing structures placed on engine walls. For both applications, perforated plates are used. Indeed, absorbing materials are composed of honeycomb structures topped by a perforated plate. In combustion chambers, cold air is injected through perforations to protect the walls from high temperatures, but the perforations can modify the chamber's acoustic behavior. The objective of this thesis is to model the acoustic response of a perforated material. The perforation size is smaller than the sound wave length, therefore asymptotic modeling techniques adapted to resolving multiscale problems can be implemented. Indeed, these methods allow to link the effects inside the perforation with the homogenized acoustic response of the perforated plate. In this study, the viscous effects inside the perforation have been analysed. Moreover, direct numerical simulations have been performed to verify the asymptotic modeling hypotheses. The findings of this thesis allow to understand the acoustic modeling of perforated materials. Furthermore, the developed analytical method can be implemented for perforations with complex shape.

**Keywords:** acoustic impedance, asymptotic modeling, perforated plates, direct numerical simulation, homogenization.

---