HAL
open science

APPROCHE NUMERIQUE POUR LA PROPAGATION MULTI-MODALE GUIDEE

Jean-Mathieu Mencik

To cite this version:

Jean-Mathieu Mencik. APPROCHE NUMERIQUE POUR LA PROPAGATION MULTI-MODALE GUIDEE. Vibrations [physics.class-ph]. Université de Tours, 2008. tel-01300254

HAL Id: tel-01300254

https://hal.science/tel-01300254v1

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS
Année Universitaire : 2008-2009

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Synthèse d'activités scientifiques

Discipline : MÉCANIQUE

présentée et soutenue publiquement

par :

Jean-Mathieu Mencik

le 26 novembre 2008

Sujet :

APPROCHE NUMÉRIQUE POUR LA PROPAGATION MULTI-MODALE GUIDÉE

- - - - - - - - - -

JURY :

A. CHAIGNE, Professeur, UME, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées	Rapporteur
C. GONTIER, Professeur, LMR, École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire	Examinateur
M.N. ICHCHOU, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Président de jury
P. LADEVÈZE, Professeur, LMT, École Normale Supérieure de Cachan	Rapporteur
B.R. MACE, Professeur, ISVR, Université de Southampton	Rapporteur
N. RANGANATHAN, Professeur, LMR, Université François Rabelais de Tours	Examinateur

Table des matières

Liste des figures **7**

Avant propos **8**

Summary **9**

1 Introduction **11**

2 Présentation de la méthode WFE **13**
2.1 Introduction 13
2.2 Propagation d'ondes élastiques 13
2.2.1 Propos liminaires 13
2.2.2 Modèle éléments finis de référence 13
2.2.3 Calcul des modes d'ondes élastiques 14
2.2.4 Résultats numériques 16
2.3 Calcul de la réponse forcée 18
2.3.1 Problème aux limites 18
2.3.2 Problème de Neumann 19
2.3.3 Résultats numériques 20
2.4 Conclusions 22

3 Propagation multi-modale dans les systèmes élasto-acoustiques **23**
3.1 Introduction 23
3.2 Formulation du modèle éléments finis de référence 23
3.3 Calcul des modes d'ondes élasto-acoustiques 25
3.3.1 Généralités 25
3.3.2 Résultats numériques 26
3.4 Réponse harmonique 27
3.4.1 Généralités 27
3.4.2 Résultats numériques 28
3.5 Réponse temporelle 31
3.5.1 Propos liminaires 31
3.5.2 Résultats numériques 31
3.6 Conclusions 32

4 Propagation multi-modale dans les systèmes multi-couches **33**
4.1 Introduction 33
4.2 Analyse de la formulation WFE 33

4.2.1 Propos liminaires . . . 33
4.2.2 Discussion . . . 34
4.3 Présentation de la méthode MWFE . . . 37
4.3.1 Calcul des modes d'ondes locaux . . . 37
4.3.2 Schéma de sous-structuration . . . 37
4.3.3 Construction des modes d'ondes globaux . . . 39
4.3.4 Résultats numériques . . . 41
4.4 Calcul de la réponse forcée . . . 44
4.4.1 Propos liminaires . . . 44
4.4.2 Problème de Neumann-Dirichlet . . . 45
4.4.3 Résultats numériques . . . 47
4.5 Conclusions . . . 50

5 Propagation multi-modale dans les systèmes élastiques couplés 51
5.1 Introduction . . . 51
5.2 Formulation du problème de couplage élastique . . . 52
5.3 Formalisme DMM . . . 56
5.4 Application au contrôle non-destructif . . . 58
5.4.1 Propos liminaires . . . 58
5.4.2 Applications numériques . . . 59
5.4.3 Mise en oeuvre expérimentale . . . 61
5.5 Conclusions . . . 62

6 Bilan et perspectives 63
6.1 Introduction . . . 63
6.2 Sur la réponse forcée des systèmes . . . 63
6.2.1 Note sur la description du problème aux limites . . . 63
6.2.2 Note sur les critères de sélection des bases modales . . . 64
6.2.3 Comportement des poutres à section élancée . . . 64
6.3 Sur la propagation multi-modale dans les systèmes élasto-acoustiques . . . 65
6.3.1 Note sur le calcul des modes d'ondes . . . 65
6.3.2 Prise en compte des phénomènes d'entraînement . . . 66
6.3.3 Prédiction du rayonnement acoustique des conduites . . . 67
6.4 Sur la convergence de la méthode MWFE . . . 68
6.5 Sur le formalisme DMM . . . 68
6.5.1 Note sur la convergence du formalisme . . . 68
6.5.2 Description des systèmes élasto-acoustiques couplés . . . 68
6.6 Quelques perspectives annexes . . . 69

Références bibliographiques 71

Curriculum Vitae 74

Liste des publications 76

Encadrements et responsabilités administratives 78

Collaborations à des contrats industriels 80

Liste des figures

1.1 Illustration des éléments d'un châssis d'automobile. 11

2.1 Modèle éléments finis d'une structure élastique à section rectangulaire et modèle éléments finis d'une sous-structure typique. 14
2.2 Courbes de dispersion $\{\omega \mapsto k_j(\omega)\}_j$: (———) solutions WFE ; (. . . . . .) solutions analytiques. 17
2.3 Evolution fréquentielle des formes de section associées au mode de compression (à gauche) et au mode de flexion (à droite). 17
2.4 Illustration du problème de Neumann. 19
2.5 Illustration d'une structure composée de $N = 60$ sous-structures identiques, excitée par forces transversales sur sa frontière gauche. 21
2.6 Réponse harmonique de l'extrémité gauche de la poutre sous excitation transversale : solutions WFE (–o–o–) pour 10 modes (a) et 40 modes (b) ; solution éléments finis classique (———). 21

3.1 Illustration d'une conduite élastique à section constante contenant un fluide acoustique, et illustration d'un sous-système élasto-acoustique représentatif. 24
3.2 Illustration du modèle éléments finis d'un sous-système élasto-acoustique. 24
3.3 Courbes de dispersion $\{\Omega \mapsto k_j(\Omega)\}_j$: (———) solutions WFE ; $(\cdots\cdots)$ solutions analytiques pour la coque de Donnell équivalente *in vacuo* ; $(- - -)$ solutions analytiques $s = 0$ pour le fluide dans la conduite *rigide* ; $(- \cdot -\cdot)$ solution analytique $s = 1$ pour le fluide dans la conduite *rigide*. 27
3.4 Illustration d'une conduite élastique contenant un fluide acoustique excité par déplacement et couplé à un système masse-ressort. 28
3.5 Evolution spatiale de la pression acoustique moyenne à la fréquence $\Omega = 2.5$: solutions WFE (———) décrites avec 1 mode (à gauche) et 10 modes (à droite), comparées à la solution analytique décrivant le fluide dans la conduite *rigide* $(\cdots\cdots)$. 30
3.6 Evolution spatiale de la pression acoustique moyenne à la fréquence $\Omega = 3$: solutions WFE (———) décrites avec 1 mode (à gauche) et 10 modes (à droite), comparées à la solution analytique décrivant le fluide dans la conduite *rigide* $(\cdots\cdots)$. 30
3.7 Réponse temporelle d'une ligne d'échappement : (———) solution WFE avec 10 modes ; (———) solution analytique `AMESim`©. 32

4.1 Illustration d'un système élastique multi-couche à section rectangulaire et illustration d'un sous-système représentatif. 34
4.2 Modèle éléments finis d'une poutre sandwich et modèle éléments finis d'une sous-structure représentative. 35
4.3 Courbes de dispersion associées aux modes d'ondes globaux se propageant dans la structure sandwich : solutions WFE. 36

4.4 Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes à $600\,Hz$: (a) mode de compression standard ; (b) mode de compression parasite. 36
4.5 Composantes force (parties réelles) des formes d'ondes à $600\,Hz$: (a) mode de compression standard ; (b) mode de compression parasite. 36
4.6 Modèles éléments finis des trois couches découplées utilisés pour la construction des modes d'ondes globaux. 41
4.7 Courbes de dispersion associées aux modes d'ondes globaux se propageant dans la structure sandwich : (———) solutions MWFE ; (. . . . . .) solutions WFE. 42
4.8 Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes obtenues par l'approche MWFE à $100\,Hz$: (a) mode de compression ; (b) mode de cisaillement ; (c) mode de flexion propagatif ; (d) mode de flexion évanescent. 43
4.9 Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes obtenues par l'approche MWFE à $1500\,Hz$: (a) mode de compression ; (b) mode de cisaillement ; (c) mode de flexion propagatif ; (d) mode de flexion évanescent.. 43
4.10 Illustration du problème de Neumann-Dirichlet. 46
4.11 Modèle éléments finis de la poutre sandwich, dont l'extrémité droite est encastrée et dont l'extrémité gauche est excitée par forces axiales ou transversales. 47
4.12 Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation axiale : (a) solution WFE avec 4 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 4 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———). 48
4.13 Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation axiale : (a) solution WFE avec 25 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 8 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———). 48
4.14 Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation transversale : (a) solution WFE avec 4 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 4 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———). 49
4.15 Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation transversale : (a) solution WFE avec 25 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 8 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———). 49

5.1 Illustration de plusieurs guides d'ondes élastiques connectés au travers d'un élément de couplage excité par forces et déplacements imposés. 52
5.2 Illustration du problème de couplage entre deux sous-structures identiques connectées à un élément élastique. 58
5.3 Illustration du problème de couplage entre deux guides d'ondes identiques connectés à un élément élastique illustrant une entaille de profondeur $a = h_y/2$ (à gauche) et une entaille de profondeur $a = h_y/4$ (à droite). 59
5.4 Evolutions fréquentielles des coefficients de réflexion au niveau d'une grande entaille. . . 60
5.5 Evolutions fréquentielles des coefficients de réflexion au niveau d'une petite entaille. . . 60
5.6 Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes pour les modes standards et les modes de section, évaluées aux maxima des coefficients de réflexion. 61
5.7 Illustration du montage expérimental permettant de générer des modes longitudinaux dans une conduite cylindrique. 61
5.8 Illustration de la réflexion d'une onde longitudinale : (———) conduite sans défaut ; (———) conduite avec masse ponctuelle. 62

6.1 Modèle éléments finis d'une poutre de grande largeur (selon l'axe y) et modèle éléments finis d'une sous-structure représentative. 65

6.2 Illustration d'une poutre de grande largeur sollicitée par forces localisées, en extrémité (à gauche) et au milieu (à droite). 65
6.3 Illustration d'une conduite élastique contenant un fluide acoustique à vitesse d'entraînement uniforme. 66
6.4 Illustration d'une conduite élastique axisymétrique rayonnant dans un milieu infini. . . . 67
6.5 Modèles CAO et éléments finis de deux conduites connectées à un élément absorbeur de vibrations. 69
6.6 Descriptions éléments finis de sous-structures représentatives associées au formalisme WFE : plaque multi-couche [MM08] (à gauche) ; pneu d'automobile [WMB07](à droite). 69
6.7 Description du comportement vibratoire d'une plaque via la *Théorie Variationnelle des Rayons Complexes* [LR05]. 70

Avant propos

Ce mémoire présente la synthèse de mes travaux de recherche sur la description numérique de la propagation d'ondes dans les systèmes élancés. Ces travaux de recherche ont été réalisés en grande partie au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'Ecole Centrale de Lyon, dans le cadre d'un séjour post-doctoral de trois ans, et plus récemment au sein du Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (LMR) de l'Université de Tours, dans le cadre de mes fonctions de maître de conférences à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire. Ces travaux ont permis la concrétisation de six articles dans les revues internationales à comité de lecture, d'un article dans les revues nationales à comité de lecture et de sept actes de congrès ; ils s'inscrivent par ailleurs dans le cadre de collaborations industrielles variées et de deux co-encadrements de thèses effectuées au sein du LTDS.

Ces activités de recherche gravitent autour de la *Méthode WFE* (*« Wave Finite Elements »*) : cette méthode permet de décrire numériquement la propagation d'ondes en basses et moyennes fréquences (BF & MF) dans les systèmes élancés à section complexe. Cette approche multi-modale a été originellement développée pour décrire les systèmes élastiques ; elle présente des avantages intéressants pour le calcul des réponses dynamiques en BF & MF, dans le sens où elle suggère des temps de calculs extrêmement réduits et s'appuie sur des bases de représentation *a priori* hautement convergentes.

Les travaux de recherche présentés dans ce document ont été initiés pour étendre le champ d'application de la méthode WFE. Ces travaux concernent des adaptations de la méthode WFE pour décrire les systèmes élasto-acoustiques, les systèmes multi-couches et la réflexion / transmission d'ondes élastiques au niveau de jonctions complexes. Ils s'inscrivent dans le cadre d'applications industrielles d'actualité telles que l'étude des conduites avec fluide interne (ex : ligne d'échappement, circuit de climatisation), la description des structures sandwichs (ex : coiffe de lanceur spatial) et le contrôle non-destructif des systèmes.

Summary

In this manuscript, we investigate the *Wave Finite Element* (WFE) method to numerically describe the multi-modal wave propagation into slender systems. Such systems are extensively used in many engineering areas, such as automotive and aeronautic fields among others, and can reveal complex and multi-physic cross-sections. The WFE formalism also provides the low- and mid- frequency (LF & MF) vibratory behavior of those systems using wave modes as representation bases. Those wave modes involve the standard propagating and evanescent wave motions (say longitudinal, flexural, torsional and shearing) and additional MF solutions, termed cross-section modes, which exhibit non uniform cross-section shapes. Compared to the standard finite element method [ZT00, BS01], the WFE method appears advantageous as it involves relatively small numerical models, whose sizes are related to the cross-section dynamics only, and uses highly convergent reduced wave motion bases to describe the MF behavior of systems [MGB00]. Also the numerical implementation of the method appears easy to handle as it requires the extraction of typical mass / stiffness operators obtained via commercial finite element codes.

The framework of the WFE method is recalled in Chapter 2. The method has been originally developed to numerically describe the multi-modal wave propagation into beam-like structures. The wave modes stand for specific cross-section shapes propagating at specific velocities and are numerically extracted from an eigenvalue problem established from the finite element model of a typical subsystem. It is shown that the numerical approach particularly provides the frequency evolution of the standard wave shapes which is not reflected by analytical approaches. Also, the WFE method is used to describe the forced response of systems : the strategy consists in projecting the related kinematic variables (displacements, forces) onto wave mode bases having appropriate sizes with regard to the studied frequency range. The convergence of the WFE formalism with regard to the size of the wave mode bases is examined with a view to describing the harmonic response of an elastic beam.

In this manuscript, we extend the WFE method to investigate the wave propagation into elasto-acoustic and multi-layered systems. Also, the method is applied to describe the reflection / transmission mechanisms occurring between several waveguides connected through an elastic junction.
The elasto-acoustic wave propagation into elastic pipes with internal fluid is investigated in Chapter 3. The WFE method provides complex MF frequency evolutions of the elasto-acoustic modes which are not predicted by analytical theories. Those complex evolutions relate the modal coupling induced from the fluid-structure interaction phenomena. The WFE formalism is applied to describe the response of an acoustic fluid in an axisymmetric pipe, using LF & MF wave modes as representation basis. Also the formalism is investigated to describe the time response of an exhaust line.
The wave propagation into multi-layered systems is investigated in Chapter 4. We present the *Modified Wave Finite Element* (MWFE) method to construct the global wave modes from the local

wave modes propagating in the layers with free interfaces. The formalism uses a dynamic substructuring scheme which allows the dynamics of the layer cross-sections to be projected onto reduced local wave mode bases with appropriate dimension. Especially when layer cross-sections exhibit multiscale behavior, the MWFE method solves a set of numerical issues associated with the WFE method. Those issues are related to numerical pollution effects and are highlighted in the case of a sandwich beam consisting in a rubber core surrounded by two steel skins. The MWFE method allows the classic global wave motions to be correctly captured. Also the MWFE method constitutes an underlying efficient reduced model to predict the forced response of multi-layered systems. This is explained because the kinematic variables, especially the boundary conditions, are projected onto reduced bases with small dimension, containing global wave motions whose natures remain unchanged over the studied frequency range. Also, the boundary value problem associated with the MWFE formalism is investigated. The problem is established from a duality principle between incident and reflected waves, which enforces the convergence of the model. Numerical simulations involving a sandwich structure under axial and transverse loads show the pertinence of the MWFE formalism.

The reflection / transmission mechanisms of the WFE wave modes propagating into several slender structures connected through a complex elastic junction is investigated in Chapter 5. The reflection and transmission coefficients are numerically determined in the framework of the *Diffusion Matrix Model* (DMM). The formalism uses a finite element model consisting in several typical substructures, described using WFE wave modes, connected through the coupling element. Also the DMM is based on the Lagrange multiplier formalism which relates the dynamics of each system from an appropriate mesh density. The mesh tying problem is formulated in the framework of the Mortar method which consists in projecting the high regular dynamics of the WFE solutions onto the low regular dynamics of the coupling element. Also, the DMM constitutes an efficient numerical tool to investigate non-destructive testing applications using MF wave modes. In this case, the DMM relates two coaxial identical waveguides connected through a notch-like coupling element. It is shown that the DMM successfully provides the complex MF wave shapes which are reflected from small structural defects located in a beam-like structure.

We finally present in Chapter 6 a set of WFE issues which could be investigated in further works.

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes élancés de types poutres ou conduites interviennent dans de nombreuses applications industrielles : citons à titre d'exemple les éléments d'un fuselage d'avion ou d'un châssis d'automobile (cf. Fig. 1.1), les circuits de climatisation, les conduites offshore. L'analyse du comportement vibratoire de ces systèmes élancés, ou d'assemblages de ces systèmes élancés, constitue à l'heure actuelle un sujet d'intense recherche. La description de ces systèmes soulève de nombreuses problématiques numériques, rattachées notamment aux caractères *multi-physiques* (i.e. structure, fluide et/ou matériau) et *multi-échelles* (i.e. diversité des longueurs d'ondes) que peuvent révéler leur section.

FIGURE 1.1 – Illustration des éléments d'un châssis d'automobile.

La *Méthode des Éléments Finis* [ZT00, BS01] demeure l'outil numérique le plus utilisé pour décrire le comportement vibratoire de ces systèmes. Elle reste cependant pénalisée en moyennes fréquences (MF) par les temps CPU excessifs qu'elle génère, pour le traitement de modèles à grands nombres de degrés de liberté (ddl's), et par la faible convergence des bases modales « classiques » pour décrire le comportement dynamique de ces systèmes.
L'utilisation des approches ondulatoires numériques permet *a priori* de s'affranchir de ces limitations. Ces approches sont basées sur la représentativité des champs cinématiques à partir de bases de *modes d'ondes*. Elles s'appuient sur des modèles éléments finis à faibles ddl's et s'appuient sur des bases de représentation fortement convergentes, traduisant les phénomènes physiques essentiels en basses et moyennes fréquences (BF & MF) qui se propagent le long de ces systèmes [MI07]. Comparativement aux approches analytiques classiques [Gra91, Fun03], ces approches *multi-modales* numériques sont non contraintes en BF par les hypothèses usuelles du type

ondes planes et permettent de retranscrire en MF les dynamiques non uniformes de section.
Les travaux présentés dans ce mémoire s'appuient sur la méthode développée par Zhong & Williams [ZW95], originellement développée pour décrire numériquement la propagation multi-modale guidée dans les structures élancées. Cette méthode est plus communément connue sous le nom de *« Wave Finite Elements »* (WFE) dans la littérature internationale [MM08]. Le formalisme permet de décrire la réponse vibratoire des systèmes par projection des variables cinématiques (déplacements, forces) sur des bases de modes d'ondes [DMB06, YL89]. Contrairement aux approches hybrides éléments finis / analytiques également utilisées pour les problèmes de propagation d'ondes [NF08, Sho04], la méthode WFE présente l'avantage de pouvoir être aisément implémentée à partir des opérateurs standards de masses et de raideurs obtenues via des codes éléments finis commerciaux.
Le deuxième chapitre du mémoire présente le principe de la méthode WFE pour décrire la propagation d'ondes élastiques et la réponse forcée des structures. Les chapitres 3 à 5 sont consacrés à la présentation synthétique de mes travaux de recherche sur la méthode WFE :
Le chapitre 3 concerne l'application de la méthode WFE pour décrire la propagation d'ondes élasto-acoustiques dans les conduites avec fluide interne [MI07]. La méthode permet de décrire certaines évolutions fréquentielles des modes d'ondes élasto-acoustiques en MF non prédites par les modèles analytiques. Ce chapitre présente par ailleurs l'application de la méthode WFE pour décrire la réponse forcée des systèmes élasto-acoustiques. Le calcul de la réponse temporelle d'une ligne d'échappement est notamment traité.
Le chapitre 4 concerne le développement d'une version modifiée de la méthode WFE, appelée MWFE (*« Modified Wave Finite Elements »*), pour décrire la propagation d'ondes dans les systèmes multi-couches. Cette version est basée sur une technique de sous-structuration dynamique qui permet de construire numériquement les modes d'ondes globaux se propageant dans un système multi-couche à partir des modes d'ondes locaux se propageant dans les couches homogènes avec interfaces libres. La méthode MWFE a été mise au point pour s'affranchir des effets de pollutions numériques (génération de modes parasites) induits par la méthode WFE lorsque les couches exhibent des comportements dynamiques multi-échelles (BF & MF). Ce chapitre concerne par ailleurs l'utilisation du formalisme MWFE pour décrire la réponse forcée des systèmes multi-couches ; cette étude s'appuie sur une version alternative du problème aux limites, basée sur le principe de dualité entre ondes incidentes et ondes réfléchies, qui améliore la convergence du formalisme.
Le chapitre 5 concerne le développement d'un modèle de matrice de diffusion en vue de caractériser la réflexion et la transmission des ondes se propageant dans différentes structures connectées au travers d'un élément de couplage élastique de forme arbitraire [MI05]. Ce modèle s'appuie sur le formalisme des *Multiplicateurs de Lagrange* pour décrire le comportement dynamique de chaque système à partir d'un maillage adapté. Il est appliqué au contrôle non-destructif pour décrire la réflexion d'ondes complexes au niveau de défauts de formes [IMZ09].
Le chapitre 6 présente finalement un ensemble de perspectives de recherche, relatives à la méthode WFE, qui pourront être abordées dans l'avenir.

Chapitre 2

Présentation de la méthode WFE

2.1 Introduction

La méthode WFE a été originellement développée pour décrire numériquement la propagation d'ondes dans les structures élancées, élastiques et dissipatives [Mea73, ZW95] . Le concept de propagation d'ondes est relié à celui de modes d'ondes, définissant un ensemble de vitesses de propagation associées à des formes de sections spécifiques. Ces formes d'ondes constituent *a priori* une base de représentation pour décrire localement les champs cinématiques de ces structures [YL89].
Le formalisme WFE est rappelé ci-dessous : la stratégie de calcul des modes d'ondes élastiques est tout d'abord présentée ; la stratégie de calcul de la réponse forcée des structures élancées est par ailleurs détaillée.

2.2 Propagation d'ondes élastiques

2.2.1 Propos liminaires

On présente le formalisme WFE pour décrire la propagation d'ondes dans une structure élancée, élastique et dissipative. La structure est supposée vibrer linéairement, sous excitation harmonique de fréquence $\omega/2\pi$, autour d'une configuration de référence reflétant la position d'équilibre statique. L'hypothèse sous-jacente à la méthode WFE est la périodicité de la structure, c'est-à-dire que cette dernière doit être décrite par un ensemble de sous-structures identiques, connectées selon une direction donnée. Une structure à section uniforme vérifie notamment cette hypothèse et peut être discrétisée par un ensemble de sous-structures identiques (cf. figure 2.1).

2.2.2 Modèle éléments finis de référence

La méthode WFE s'appuie sur le modèle éléments finis d'une sous-structure représentative, extraite du système global (cf. figure 2.1). Au vu du caractère périodique du problème, les frontières gauche et droite de cette sous-structure sont supposées contenir le même nombre n de ddl's. L'équilibre dynamique du problème discrétisé s'exprime classiquement dans le domaine fréquentiel par

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

où $\mathbf{D}$ représente l'opérateur de rigidité dynamique ; $\mathbf{q}$ et $\mathbf{F}$ représentent respectivement les déplacements nodaux et forces nodales. Par condensation dynamique des ddl's internes sur les ddl's de frontières, l'équation (2.1) peut être formulée en termes de *vecteurs d'états* [ZW95] :

$$\mathbf{u}_{\mathtt{R}} = \mathbf{S}\mathbf{u}_{\mathtt{L}}, \tag{2.2}$$

où $\mathbf{u}_{\mathtt{L}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{L}})^T\,(-\mathbf{F}_{\mathtt{L}})^T)^T$ et $\mathbf{u}_{\mathtt{R}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{R}})^T\,(\mathbf{F}_{\mathtt{R}})^T)^T$ représentent des vecteurs de taille $(2n \times 1)$, partitionnés en composantes déplacement et force ; les indices $\mathtt{L}$ et $\mathtt{R}$ renvoient respectivement aux frontières gauche et droite de la sous-structure ; finalement, $\mathbf{S}$ représente un opérateur *symplectique* [ZW95] de taille $(2n \times 2n)$ qui s'exprime par

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} -(\mathbf{D}^*_{\mathtt{LR}})^{-1}\mathbf{D}^*_{\mathtt{LL}} & -(\mathbf{D}^*_{\mathtt{LR}})^{-1} \\ \hline \mathbf{D}^*_{\mathtt{RL}} - \mathbf{D}^*_{\mathtt{RR}}(\mathbf{D}^*_{\mathtt{LR}})^{-1}\mathbf{D}^*_{\mathtt{LL}} & -\mathbf{D}^*_{\mathtt{RR}}(\mathbf{D}^*_{\mathtt{LR}})^{-1} \end{array}\right], \tag{2.3}$$

où $\mathbf{D}^*$ représente l'opérateur de rigidité dynamique condensé sur les ddl's de frontières.
Introduisons finalement les vecteurs et valeurs propres de $\mathbf{S}$, respectivement notés $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ et $\{\mu_j\}_j$, tels que :

$$\mathbf{S}\mathbf{\Phi}_j = \mu_j\mathbf{\Phi}_j \qquad , \qquad |\mathbf{S} - \mu_j\mathbf{I}| = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

La signification physique des solutions $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ sera précisée dans la suite.

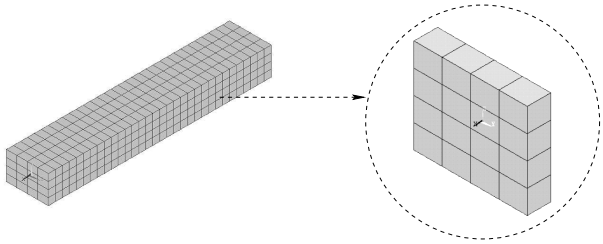

FIGURE 2.1 – Modèle éléments finis d'une structure élastique à section rectangulaire et modèle éléments finis d'une sous-structure typique.

2.2.3 Calcul des modes d'ondes élastiques

Supposons que la structure globale soit constituée d'un assemblage de N sous-structures identiques. Les relations de couplage entre deux sous-structures consécutives k et $k-1$ s'expriment

$$\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \mathbf{u}_{\mathtt{R}}^{(k-1)} \qquad k = 2, \ldots, N, \tag{2.5}$$

et permettent d'obtenir, à partir de (2.2), la description des variables cinématiques (déplacements, forces) de la sous-structure k à partir des variables cinématiques de la sous-structure $k-1$:

$$\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \mathbf{S}\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k-1)} \qquad k = 2, \ldots, N. \tag{2.6}$$

La forme des solutions de $\mathbf{u}_{\mathtt{L}}$ s'obtient par considération du *théorème de Bloch* [Wil78] :

$$\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \mu\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k-1)} \qquad k = 2, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Cette forme de solutions caractérise une onde se propageant selon l'axe principal de la structure à une célérité déterminée à partir de la valeur μ. En combinant (2.7) et (2.6), on retrouve le problème aux valeurs propres (2.4). Dans ce sens, les paramètres $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_{j=1,\ldots,2n}$ représentent les modes d'ondes se propageant dans la structure : ils traduisent un ensemble de vitesses de propagation, décrites à partir des valeurs propres $\{\mu_j\}_j$, associées à un ensemble de formes de section $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$, partitionnées en composantes déplacement et force. Au regard du caractère symplectique de $\mathbf{S}$, ces modes d'ondes vérifient la relation d'orthogonalité suivante [ZW95] :

$$(\mathbf{\Phi}_m)^T \mathbf{J}_n \mathbf{\Phi}_j = 0 \quad \text{pour} \quad \mu_m \neq 1/\mu_j \qquad \text{où} \quad \mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Les vecteurs propres $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ constituent la matrice des modes d'ondes $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Ci-dessus, $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}$, $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}$, $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}}$ et $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}$ représentent des matrices de taille similaire $(n \times n)$, où les indices $\mathbf{q}$ et $\mathbf{F}$ reflètent les composantes déplacement et force de $\mathbf{\Phi}$, et où les exposants `inc` et `ref` reflètent les modes qui sont incidents à – et réfléchis par – une limite donnée de la structure globale. Notons que dans le cadre de cette étude, le terme *réfléchi* désigne par convention un mode qui « apparaît réfléchi » par une limite du guide d'ondes, lorsque l'on observe cette limite depuis l'intérieur du système. Ce mode englobe formellement un ensemble de trois composantes : celle effectivement réfléchie, celle transmise et celle générée par les sources d'excitation. Notons finalement que l'ensemble des modes incidents et l'ensemble des modes réfléchis sont associés respectivement à l'ensemble des valeurs propres $\{\mu_j \,:\, |\mu_j| < 1\}$ et à l'ensemble des valeurs propres $\{\mu_k \,:\, |\mu_k| > 1\}$.

Par considération du théorème de Bloch, les valeurs propres $\{\mu_j\}_j$ décrivent les vitesses de propagation et précisément les nombres d'ondes $\{k_j\}_j$ de la manière suivante :

$$k_j = -\frac{\mathtt{Log}(|\mu_j|)}{\mathtt{i}d} - \frac{\mathtt{Arg}(\mu_j)}{d} \qquad j = 1, \ldots, 2n, \tag{2.10}$$

où d représente l'épaisseur de la sous-structure représentative.

Description des modes dans le domaine fréquentiel

La méthode WFE permet de décrire les évolutions fréquentielles des modes d'ondes (en particulier les courbes de dispersions $\{\omega \mapsto k_j(\omega)\}_j$) par considération de la propriété d'orthogonalité (2.8). La stratégie employée pour décrire le suivi d'un mode d'onde dans le domaine fréquentiel se décrit de la manière suivante :

Connaissant deux modes j et m définis à la fréquence $\omega/2\pi$, tels que $\mu_m(\omega) = 1/\mu_j(\omega)$, et pour Δ_ω suffisamment petit, le mode j défini à $\omega + \Delta_\omega$ est tel que [MI07] :

$$|(\mathbf{\Phi}_m(\omega))^T \mathbf{J}_n \mathbf{\Phi}_j(\omega + \Delta_\omega)| = \mathtt{max}_k\{|(\mathbf{\Phi}_m(\omega))^T \mathbf{J}_n \mathbf{\Phi}_k(\omega + \Delta_\omega)|\}. \tag{2.11}$$

En pratique, l'utilisation de ce critère implique de normaliser tous les modes $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ de manière similaire, via notamment la norme hermitienne [MI08].

Définition des domaines BF & MF
Dans le cadre de la méthode WFE, nous définissons les domaines BF & MF au regard de la *densité modale de section*, qui renvoie au nombre de fréquences de coupure – c'est-à-dire les fréquences auxquelles les modes évanescents et complexes deviennent propagatifs – contenues à l'intérieur d'une bande de fréquences donnée. Dans ce sens, le domaine BF renvoie au domaine « modal » pour lequel la densité modale de section est faible ; le domaine MF représente une zone intermédiaire entre le domaine « modal » et le domaine « non-modal » [1], pour laquelle la densité modale de section exhibe de large variations [MI08].

Note sur la convergence de la méthode
La méthode WFE génère de la dispersion numérique liée à la représentation discrète par éléments finis des solutions d'ondes $\{\mathtt{exp}(-\mathtt{i}k_i d)\}_i$. Cette erreur de convergence est d'ordre $O(k^2 d^2)$ dans le cas où l'interpolation est linéaire ; elle peut être minimisée en choisissant l'épaisseur d suffisamment faible, dans la mesure du raisonnable (au regard des problèmes singuliers pouvant être générés si l'élancement des éléments finis est trop élevé).

2.2.4 Résultats numériques

La méthode WFE est appliquée pour décrire la propagation d'ondes le long d'une structure à section rectangulaire. Le modèle éléments finis décrivant la structure à partir de sous-structures identiques est illustré sur la figure 2.1. Chaque sous-structure est maillée par 16 éléments 3D linéaires et exhibe les caractéristiques suivantes : densité $\rho = 7800\,kg/m^3$, module d'Young $E = 2\times10^{11}\,Pa$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, facteur de perte $\eta = 0.01$, section $30\,cm\times20\,cm$ et épaisseur $d = 5\,cm$.
Le formalisme WFE s'appuie sur le modèle éléments finis d'une sous-structure représentative, telle qu'illustrée sur la figure 2.1. L'obtention des modes d'ondes $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_{j=1,\ldots,2n}$ se propageant dans la structure s'obtient par résolution du problème aux valeurs propres (2.4). La figure 2.2 illustre les courbes de dispersion obtenues par la méthode WFE (cf. (2.10)) pour les *modes standards* (compression, torsion, flexions, cisaillement) et quelques *modes de section* [2] [MIJ06]. La figure 2.3 illustre par ailleurs l'évolution fréquentielle des formes de section associées aux modes de compression et de flexion, calculés par la méthode WFE.
Soulignons que la méthode WFE permet de retranscrire en BF les modes d'ondes analytiques et qu'elle permet de décrire en MF les fluctuations spatiales des champs cinématiques de section, non prédites par les modèles analytiques d'ondes planes [Gra91], associées aux modes standards. La méthode apparaît de ce fait bien adaptée au domaine des faibles longueurs d'ondes. Elle permet en outre de décrire les comportements dynamiques faiblement réguliers de structures sur la base de modes de section, qui reflètent à fréquences élevées les dynamiques de section non uniformes.

1. Le domaine non-modal reflète une zone fréquentielle pour laquelle la densité modale de section est élevée et uniforme.
2. Ces modes exhibent en BF et MF des formes de section révélant des ondes stationnaires ; ces modes deviennent propagatifs à certaines fréquences de coupures pour lesquelles la structure révèle des résonances de section.

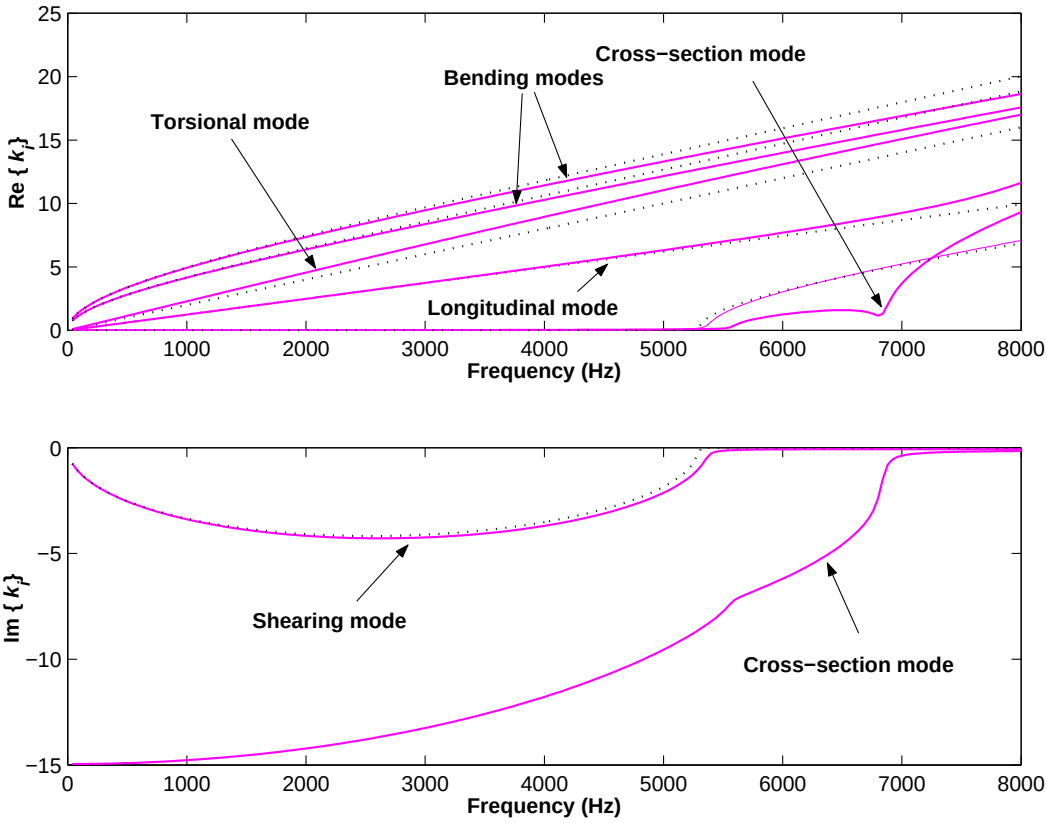

FIGURE 2.2 – Courbes de dispersion $\{\omega \mapsto k_j(\omega)\}_j$: (———) solutions WFE ; (. . . . . .) solutions analytiques.

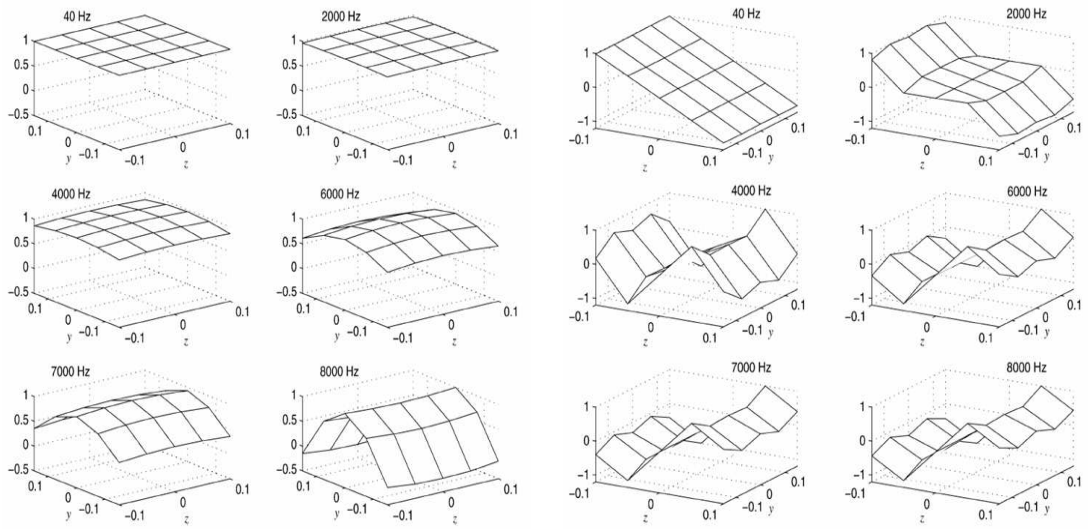

FIGURE 2.3 – Evolution fréquentielle des formes de section associées au mode de compression (à gauche) et au mode de flexion (à droite).

2.3 Calcul de la réponse forcée

2.3.1 Problème aux limites

Considérons une structure composée de N sous-structures identiques (cf. figure 2.1). Le formalisme WFE consiste à décrire, pour une sous-structure k donnée, les vecteurs d'états $\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)}$ ou $\mathbf{u}_{\mathtt{R}}^{(k)}$ à partir d'une base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_{j=1,\ldots,2m}$ $(m \leq n)$ extraite de la base complète des modes d'ondes $\{\mathbf{\Phi}_j\}_{j=1,\ldots,2n}$ [MI07] :

$$\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{(k)} \quad , \quad \mathbf{u}_{\mathtt{R}}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{(k+1)} \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.12}$$

où $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ représente la matrice associée à la base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_{j=1,\ldots,2m}$, exprimée par (cf. (2.9)) :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{ref}} \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Ci-dessus, $\widetilde{\mathbf{Q}}$ représente les amplitudes modales, qui sont partitionnées en composantes incidente $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}$ et réfléchie $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}$ de la manière suivante : $\widetilde{\mathbf{Q}} = ((\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}})^T\,(\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}})^T)^T$. Au vu de (2.6), la distribution spatiale de ces composantes s'écrit de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(k)} = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]^{k-1}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \qquad k = 1, \ldots, N+1, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(k)} = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}]^{k-1}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \qquad k = 1, \ldots, N+1, \tag{2.15}$$

où $[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]$ et $[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}]$ désignent les matrices diagonales $(m \times m)$ des valeurs propres $\{\widetilde{\mu}_j^{\mathtt{inc}}\}_j$ et $\{\widetilde{\mu}_j^{\mathtt{ref}}\}_j$, extraites de $\{\mu_j\}_j$, associées respectivement aux modes incidents $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}$ et réfléchis $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}$. Par ailleurs, les conditions de frontières peuvent être écrites d'une manière générale par [MIJ06] :

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}|_{lim} = \widetilde{\mathbb{C}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}|_{lim} + \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{2.16}$$

où $\widetilde{\mathbb{C}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ représentent respectivement la matrice de diffusion et les effets des sources d'excitation [MI05]. Il a été montré en ref. [MIJ06] que la relation générale (2.16) s'applique pour décrire les conditions aux limites classiques du type Neumann et Dirichlet. Ces conditions s'expriment formellement

$$[\mathbf{0}|\mathbf{I}]\,\mathbf{u} = \pm\mathbf{F}_0 \qquad \text{(condition de Neumann)}, \tag{2.17}$$

$$[\mathbf{I}|\mathbf{0}]\,\mathbf{u} = \mathbf{q}_0 \qquad \text{(condition de Dirichlet)}, \tag{2.18}$$

et se traduisent, par projection du vecteur d'état $\mathbf{u}$ sur la base réduite des modes d'ondes (cf. (2.12)), sous la forme suivante :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} = \pm\mathbf{F}_0 \qquad \text{(condition de Neumann)}, \tag{2.19}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} = \mathbf{q}_0 \qquad \text{(condition de Dirichlet)}. \tag{2.20}$$

Le signe $\pm$ devant $\mathbf{F}_0$ souligne le caractère négatif ou positif que revêt la composante force du vecteur d'état selon la frontière $\mathtt{L}$ ou $\mathtt{R}$ considérée, dans le sens où $\mathbf{u}_{\mathtt{L}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{L}})^T\,(-\mathbf{F}_{\mathtt{L}})^T)^T$ et $\mathbf{u}_{\mathtt{R}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{R}})^T\,(\mathbf{F}_{\mathtt{R}})^T)^T$.

En résumé, le problème aux limites constitué des relations (2.14), (2.15) et (2.16) permet de décrire de manière *unique* les amplitudes modales associées aux ondes se propageant dans la structure. L'évolution spatiale des variables cinématiques (déplacements et forces) de la structure s'obtient finalement au vu de (2.12).

Note sur la dualité ondes incidentes / ondes réfléchies
Au vu du caractère symplectique de $\mathbf{S}$, les modes incidents et réfléchis sont duaux dans le sens où :

$$[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}] = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]^{-1}. \tag{2.21}$$

Il n'est pas évident que cette relation soit exactement vérifiée numériquement, dans le sens où la description des matrices $[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]$ et $[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}]$ peut être sujette à des effets de dispersion numérique ; elle est cependant usuellement utilisée pour renforcer la convergence de la méthode WFE. Soulignons cependant qu'il n'existe à priori aucune relation de ce type pour décrire, en ce qui concerne les formes modales, la dualité entre $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}}$, et la dualité entre $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}$.

Note sur la convergence de la méthode
La méthode WFE s'appuie sur la représentativité des variables cinématiques d'une structure à partir d'une base réduite de modes d'ondes. Paradoxalement, celle-ci doit être « suffisamment » riche pour décrire, à fréquence donnée, la dynamique spatiale éventuellement peu régulière de la structure, mais ne doit pas être surdimensionnée pour ne pas inclure de modes parasites, sources de problèmes numériques singuliers [MI08]. Cela nécessite tout d'abord d'adapter la densité de maillage de section (frontières gauche ou droite de la sous-structure représentative) pour décrire des modes de section d'ordres suffisamment élevés au regard du domaine fréquentiel étudié. Cela nécessite par ailleurs de sélectionner *judicieusement* dans la base complète des $\{\boldsymbol{\Phi}_j\}_j$ les modes d'ondes qui contribuent effectivement à la réponse de la structure. Deux techniques empiriques ont été examinées à ce sujet : (i) par sélection des modes propagatifs et qui deviennent propagatifs en deçà d'une certaine fréquence limite [DMB06] ; (ii) par sélection des modes qui sont les plus excités par les conditions aux limites imposées, c'est-à-dire dont les puissances associées sont suffisamment élevées [MI07]. Soulignons que ces techniques demeurent approximatives et qu'elles suscitent une prise en main minutieuse pour chaque application considérée.

2.3.2 Problème de Neumann

Nous appliquons la méthode WFE pour décrire le problème de Neumann, illustrant une structure dont les limites gauche et droite sont soumises à des champs de forces surfaciques (cf. figure 2.4).

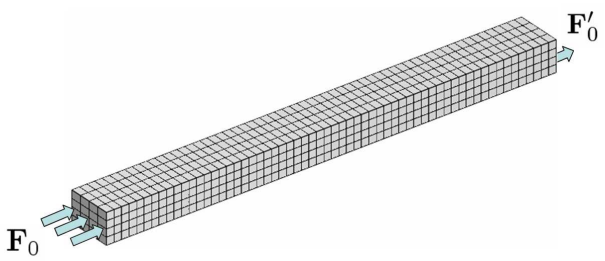

FIGURE 2.4 – Illustration du problème de Neumann.

Pour cet exemple, les conditions aux limites (2.19) et (2.20) se traduisent par :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathbf{F}_0, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(N+1)} + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(N+1)} = \mathbf{F}'_0, \tag{2.23}$$

où N représente le nombre de sous-structures composant la structure globale ; $\mathbf{F}_0$ et $\mathbf{F}'_0$ représentent les vecteurs forces appliqués aux frontières gauche et droite du modèle éléments finis de la structure (cf. figure 2.1). En observant les relations (2.14) et (2.15), on déduit :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathbf{F}_0, \tag{2.24}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]^N\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}]^N\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = \mathbf{F}'_0. \tag{2.25}$$

En observant la relation de dualité (2.21), on obtient finalement :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathbf{F}_0, \tag{2.26}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = \mathbf{F}'_0, \tag{2.27}$$

où $\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}] = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}]^{-1}$. Sous forme matricielle, ce système d'équations donne :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}} \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}'_0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

La résolution du système (2.28) donne les amplitudes modales $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)}$ et $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)}$ associées à la sous-structure 1. La description des variables cinématiques de la sous-structure k s'obtient par considération des relations (2.14) et (2.15) et par considération de la décomposition (2.12).

Note sur la résolution du système (2.28)
D'un point de vue numérique, la résolution directe du système (2.28) – par inversion de la matrice du membre de gauche – peut s'avérer délicate au vu des caractères asymptotiques suivants,

$$\left(\mathtt{min}_j\{|\mu_j^{\mathtt{inc}}|\}\right)^N \to 0 \quad , \quad \left(\mathtt{min}_j\{|\mu_j^{\mathtt{inc}}|\}\right)^{-N} \to \infty \qquad \text{lorsque } N \to \infty, \tag{2.29}$$

si l'on suppose que $||[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]||_{\mathtt{max}} < 1$. Dans ce sens, le problème apparaît singulier. Cette problématique peut être levée en reformulant le système (2.28) de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}'_0 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

La première matrice du membre de gauche de (2.30) apparaît cette fois-ci bien conditionnée, dans la mesure où tous les modes d'ondes sont normalisés de la même manière (par exemple, via la norme hermitienne [MI08]) ; la deuxième matrice du membre de gauche de (2.30) est diagonale et peut être inversée sans difficulté. La résolution du système (2.30) donne alors :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}^+ \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}'_0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

où le symbole $+$ désigne la pseudo-inverse.

2.3.3 Résultats numériques

Le modèle de réponse forcée obtenu par résolution numérique de (2.31) est mis en situation pour décrire le comportement vibratoire d'une poutre de $3\,m$ de longueur dans la bande de fréquences $\mathcal{B}_f = [100\,Hz\,,\,8000\,Hz]$. La structure est constituée de $N = 60$ sous-structures identiques (cf.

figure 2.5), dont les caractéristiques sont similaires à celles spécifiées précédemment. La structure est excitée transversalement sur sa frontière gauche par un champ de forces surfaciques uniforme que reflète le vecteur $\mathbf{F}_0$; l'extrémité droite de la structure est supposée libre ($\mathbf{F}'_0 = \mathbf{0}$).

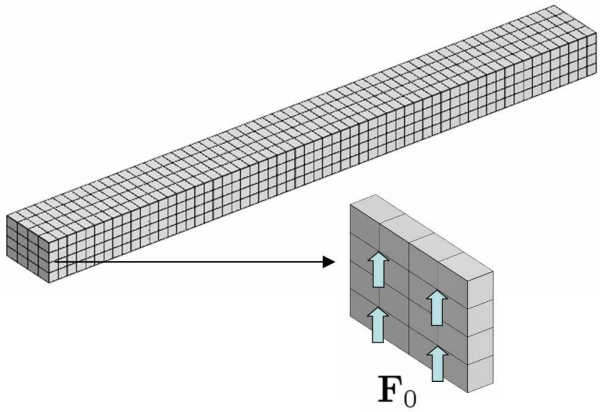

FIGURE 2.5 – Illustration d'une structure composée de $N = 60$ sous-structures identiques, excitée par forces transversales sur sa frontière gauche.

On compare sur la figure 2.6 les solutions obtenues par la méthode WFE, dans les cas où la base de représentation $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_j$ contient respectivement $m = 10$ et $m = 40$ modes d'ondes, à la solution obtenue par la méthode des éléments finis classique. Notons que dans chacun des cas, la base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_j$ est construite à partir des modes propagatifs (compression, flexion, cisaillement) et des modes de section qui deviennent propagatifs en deçà d'une fréquence limite [3].

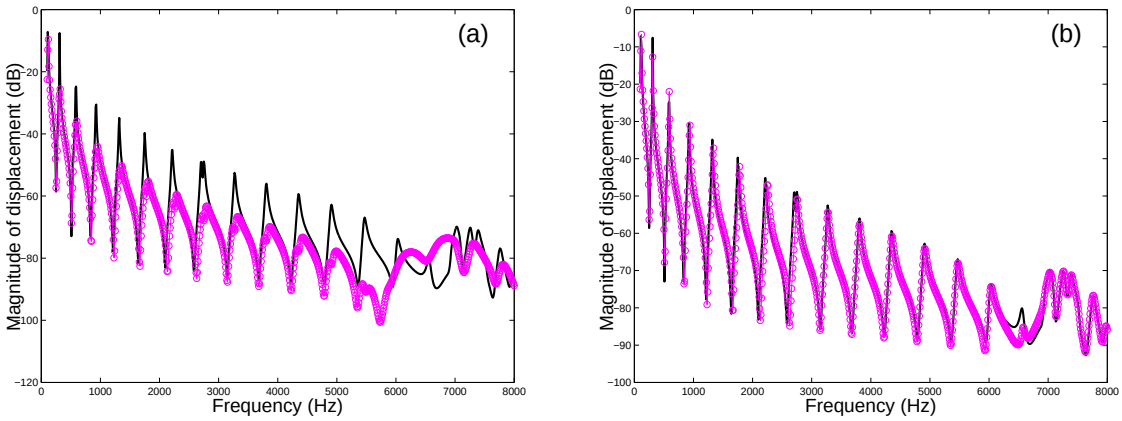

FIGURE 2.6 – Réponse harmonique de l'extrémité gauche de la poutre sous excitation transversale : solutions WFE (–o–o–) pour 10 modes (a) et 40 modes (b) ; solution éléments finis classique (———).

La formulation WFE présente un manque de convergence au dessus de $2000\,Hz$, lorsqu'elle est établie à partir de 10 modes ; en d'autres termes, la base de représentation n'est pas suffisamment riche pour décrire les comportements dynamiques de fréquences élevées, moins réguliers qu'en BF. En revanche, la formulation s'avère suffisamment prédictive lorsqu'elle est établie à partir de 40 modes. La complétude de la base $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_j$ est cette fois-ci vérifiée, dans le sens où elle contient un nombre suffisant de modes de section capables de décrire les dynamiques moins régulières de

3. Cette fréquence, choisie empiriquement, définie la taille de la base réduite [DMB06].

structure à fréquences élevées.

2.4 Conclusions

Nous avons présenté la méthode WFE pour décrire numériquement la propagation d'ondes dans les structures élastiques élancées et pour décrire le comportement dynamique de ces structures soumises à des conditions de frontières de type Neumann et Dirichlet. La méthode a été numériquement testée et vérifiée pour décrire la propagation d'ondes dans une structure élastique à section rectangulaire ainsi que pour calculer la réponse dynamique de cette structure excitée par forces imposées. Il apparaît que la convergence du formalisme WFE est intimement liée à la dimension des bases modales réduites utilisées pour le calcul de la réponse forcée. La stratégie de sélection de ces bases réduites est centrale à la méthode : elle n'est pas bien définie à l'heure actuelle et peut être source, si elle est mal appréhendée, d'une convergence faible et d'effets de pollution numérique. Le problème associé à la sélection des bases modales réduites sera mis en situation dans la suite.
Les chapitres 3, 4 et 5 présentent des applications et des adaptations de la méthode WFE pour décrire les systèmes élasto-acoustiques, les systèmes multi-couches et les problèmes de couplages entre différentes structures élastiques.

Chapitre 3

Propagation multi-modale dans les systèmes élasto-acoustiques

3.1 Introduction

Nous abordons le problème de propagation d'ondes dans les structures élastiques contenant un fluide acoustique. Ces systèmes sont fréquemment rencontrés dans l'industrie, illustrant par exemple des conduites offshore, des circuits de climatisation ou des lignes d'échappements. L'étude des ondes se propageant le long de ces systèmes trouve son application dans des domaines diverses tels que le contrôle non-destructif et le rayonnement acoustique des structures. L'objectif de ce chapitre est l'étude des mécanismes de propagation d'ondes vibratoires et acoustiques dans ces systèmes. Ces mécanismes sont mal appréhendés en MF par les approches analytiques [Kum72, KS72, SPKC92, FF82], au vu des phénomènes complexes de transferts énergétiques entre fluide et structure mis en jeu.
Nous appliquons la méthode *Wave Finite Elements* (WFE) pour décrire la propagation d'ondes élasto-acoustiques en BF et MF. L'ensemble de cette étude est présenté en détails en ref. [MI07]. Dans une première étape, nous présentons le modèle éléments finis de référence associé à la méthode ; ce modèle s'appuie sur la formulation symétrique $(\mathbf{U}, \mathbf{\Psi})$ d'un sous-système élasto-acoustique représentatif. Nous présentons dans un second temps la stratégie de calcul des modes d'ondes élasto-acoustiques ; l'évolution fréquentielle des modes d'ondes en BF & MF est mise en évidence dans le cadre d'une application numérique. Nous appliquons par ailleurs le formalisme WFE pour décrire la réponse harmonique d'une conduite élastique axisymétrique contenant un fluide acoustique. La stratégie de calcul de la réponse en temps des conduites avec fluide interne est présentée en fin de chapitre.

3.2 Formulation du modèle éléments finis de référence

Nous décrivons le comportement élasto-acoustique d'une structure élancée contenant un fluide acoustique. La structure est supposée élastique et dissipative ; le fluide intérieur est supposé homogène, barotrope, compressible et non dissipatif. Nous étudions les vibrations linéaires du système élasto-acoustique, sous excitation harmonique de fréquence $\omega/2\pi$, autour d'une configuration de référence dans laquelle le fluide est au repos [1]. Rappelons que l'hypothèse sous-jacente à la mé-

1. En d'autres termes, les phénomènes d'entraînement du fluide ne sont pas pris en compte dans le cadre de cette étude.

thode WFE est la périodicité de la structure, c'est-à-dire que cette dernière doit pouvoir être assimilée à un ensemble de sous-structures identiques, de section éventuellement complexe, connectées selon une direction principale (cf. chapitre 2). Le système global (structure et fluide) s'assimile donc à un ensemble de sous-systèmes élasto-acoustiques identiques, chaque sous-système étant composé d'une partie solide (sous-structure) et d'une partie fluide (cf. figure 3.1).

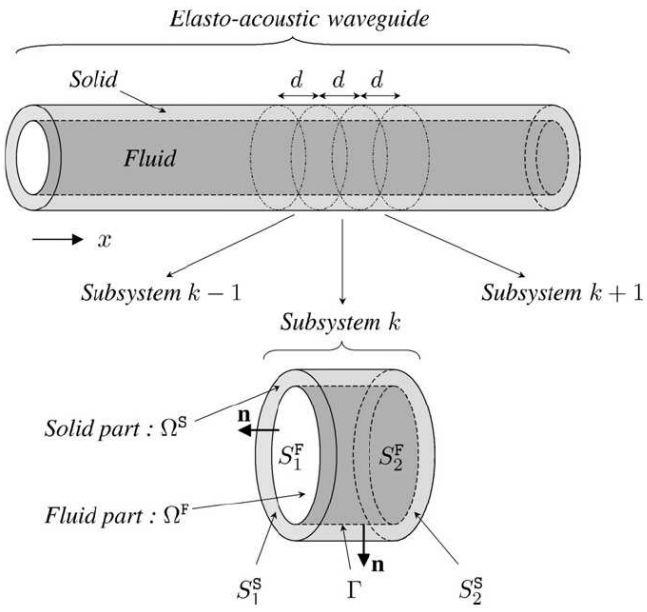

FIGURE 3.1 – Illustration d'une conduite élastique à section constante contenant un fluide acoustique, et illustration d'un sous-système élasto-acoustique représentatif.

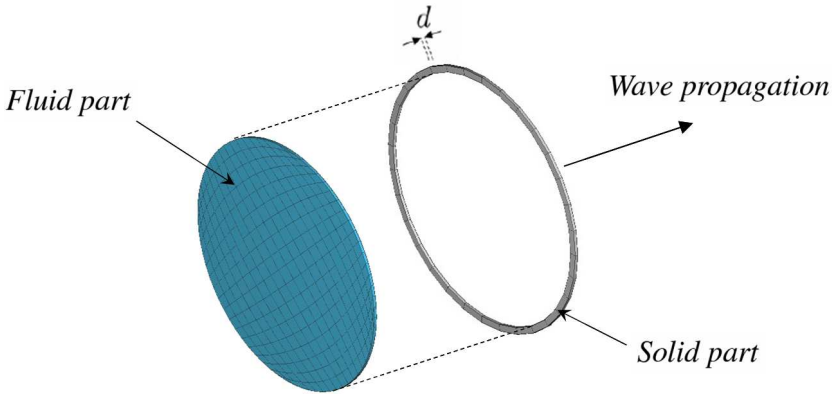

FIGURE 3.2 – Illustration du modèle éléments finis d'un sous-système élasto-acoustique.

Le modèle éléments finis d'un sous-système représentatif k ($k = 1, \ldots, N$) est illustré sur la figure 3.2. L'épaisseur du sous-système, selon l'axe principal x, est notée d. Notons $\mathbf{U}$ et $\mathbf{p}$ les déplacements nodaux de la partie solide et les pressions acoustiques nodales de la partie fluide ; introduisons par ailleurs les potentiels de vitesses $\mathbf{\Psi}$ définis tels que $\mathbf{p} = -\mathtt{i}\omega\rho_0\mathbf{\Psi}$, où ρ_0 représente la densité du fluide. La formulation symétrique $(\mathbf{U}, \mathbf{\Psi})$ permettant de traduire l'équilibre dynamique du sous-système, en régime permanent et sous excitation harmonique, s'exprime clas-

siquement par [MO92] :

$$\mathbb{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

où $\mathbf{q}$ et $\mathbf{F}$ définissent les variables cinématiques :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Psi} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\mathtt{S}} \\ \frac{1}{\mathtt{i}\omega}\mathbf{F}^{\mathtt{A}} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ci-dessus, $\mathbf{F}^{\mathtt{S}}$ représente les forces appliquées sur les frontières gauche et droite $S_1^{\mathtt{S}} \cup S_2^{\mathtt{S}}$ de la partie solide (cf. figure (3.1) ; $\mathbf{F}^{\mathtt{A}}$ représente les forces acoustiques appliquées sur les frontières gauche et droite $S_1^{\mathtt{F}} \cup S_2^{\mathtt{F}}$ de la partie fluide (cf. figure (3.1) ; $\mathbb{K}$ désigne un opérateur de rigidité dynamique symétrique défini par [MO92] :

$$\mathbb{K} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathtt{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\rho_0\mathbf{M}^{\mathtt{A}} \end{bmatrix} + \mathtt{i}\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \rho_0\mathbf{C} \\ \rho_0\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathtt{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\rho_0\mathbf{K}^{\mathtt{A}} \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

où $\mathbf{M}^{\mathtt{S}}$ et $\mathbf{M}^{\mathtt{A}}$ représentent les opérateurs de masses structurales et acoustiques, respectivement ; $\mathbf{K}^{\mathtt{S}}$ et $\mathbf{K}^{\mathtt{A}}$ représentent les opérateurs de raideurs structurales et acoustiques, respectivement ; $\mathbf{C}$ représente l'opérateur de couplage fluide-structure. Les phénomènes de dissipation à l'intérieur de la partie solide sont pris en compte à partir d'un facteur de perte $\eta^{\mathtt{S}}$ tel que $\mathbf{K}^{\mathtt{S}} = \mathfrak{Re}\{\mathbf{K}^{\mathtt{S}}\}(1 + \mathtt{i}\eta^{\mathtt{S}})$. Par condensation dynamique des ddl's internes sur les ddl's de frontières $S_1^{\mathtt{S}} \cup S_1^{\mathtt{F}}$ et $S_2^{\mathtt{S}} \cup S_2^{\mathtt{F}}$ (cf. figure (3.1)), on reformule (3.3) en termes de *vecteurs d'états* (cf. chapitre 2) :

$$\mathbf{u}_{\mathtt{R}} = \mathbf{S}\mathbf{u}_{\mathtt{L}}, \tag{3.4}$$

où $\mathbf{u}_{\mathtt{L}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{L}})^T\,(-\mathbf{F}_{\mathtt{L}})^T)^T$, $\mathbf{u}_{\mathtt{R}} = ((\mathbf{q}_{\mathtt{R}})^T\,(\mathbf{F}_{\mathtt{R}})^T)^T$; $\mathbf{S}$ est défini par

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} -(\mathbb{K}^*_{\mathtt{LR}})^{-1}\mathbb{K}^*_{\mathtt{LL}} & -(\mathbb{K}^*_{\mathtt{LR}})^{-1} \\ \hline \mathbb{K}^*_{\mathtt{RL}} - \mathbb{K}^*_{\mathtt{RR}}(\mathbb{K}^*_{\mathtt{LR}})^{-1}\mathbb{K}^*_{\mathtt{LL}} & -\mathbb{K}^*_{\mathtt{RR}}(\mathbb{K}^*_{\mathtt{LR}})^{-1} \end{array}\right] \tag{3.5}$$

et désigne un opérateur symplectique de taille $(2n \times 2n)$, où n représente le nombre de ddl's structuraux et acoustiques contenus sur la frontière gauche $S_1^{\mathtt{S}} \cup S_1^{\mathtt{F}}$ ou droite $S_2^{\mathtt{S}} \cup S_2^{\mathtt{F}}$; ci-dessus, $\mathbb{K}^*$ désigne l'opérateur de rigidité dynamique condensé sur les ddl's de frontières.

3.3 Calcul des modes d'ondes élasto-acoustiques

3.3.1 Généralités

Le calcul des modes d'ondes élasto-acoustiques $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ s'obtient dans le cadre de la méthode WFE par résolution du problème aux valeurs propres suivant (cf. chapitre 2) :

$$\mathbf{S}\mathbf{\Phi}_j = \mu_j\mathbf{\Phi}_j \quad , \quad |\mathbf{S} - \mu_j\mathbf{I}| = \mathbf{0}, \tag{3.6}$$

où $\mathbf{S}$ est donné par (3.5). La forme de la matrice des modes d'ondes $\mathbf{\Phi}$ est analogue à (2.9), c'est-à-dire : $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^T]^T$. Dans le cas présent, les composantes $\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}}$ et $\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}}$ s'expriment par

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{S}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{A}} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{S}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{A}} \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

où les composantes $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{S}}$ et $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{S}}$ sont associées respectivement aux déplacements et forces de section de la partie solide, et où les composantes $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{A}}$ et $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{A}}$ sont associées respectivement aux potentiels de vitesses (c'est-à-dire aux pressions) et aux forces acoustiques de section de la partie fluide.

3.3.2 Résultats numériques

La méthode WFE est appliquée pour décrire numériquement la propagation des modes d'ondes élasto-acoustiques dans une conduite cylindrique élastique (acier) contenant un fluide acoustique (eau). Une telle conduite est illustrée sur la figure 3.1. La section du système est telle que $|S_1^{\mathsf{S}}| = |S_2^{\mathsf{S}}| = \pi((R^{\mathsf{S}})^2 - (R^{\mathsf{F}})^2)$ et $|S_1^{\mathsf{F}}| = |S_2^{\mathsf{F}}| = \pi(R^{\mathsf{F}})^2$ où $R^{\mathsf{S}} = 5 \times 10^{-2} m$, $R^{\mathsf{F}} = R^{\mathsf{S}} - h$ et $h/R^{\mathsf{S}} = 0.05$.
Le formalisme WFE s'appuie sur le modèle éléments finis d'un sous-système élasto-acoustique représentatif, tel que décrit sur la figure 3.2. Ce sous-système est maillé par éléments finis 3D linéaires [ZT00] et ne contient pas de noeuds internes (en d'autres termes, les noeuds sont contenus sur les frontières gauche et droite). Le nombre de ddl's contenu sur S_1^{S} ou S_2^{S} (cf. figure 3.1) est $n^{\mathsf{S}} = 192$; le nombre de ddl's contenu sur S_1^{F} ou S_2^{F} est $n^{\mathsf{F}} = 361$. L'épaisseur du sous-système est $d = 1\,mm$ (cf. figure 3.2) ; elle est choisie suffisamment faible au regard de la convergence de la méthode WFE pour décrire les modes d'ondes en MF (cf. chapitre 2). L'obtention des modes d'ondes élasto-acoustiques $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ se propageant dans la structure s'obtient par résolution du problème aux valeurs propres (3.6).
Introduisons la fréquence adimensionnée $\Omega = \omega R^{\mathsf{F}}/c_L$, exprimée à partir de la vitesse de phase $c_L = (E^{\mathsf{S}}/\rho^{\mathsf{S}}(1-(\nu^{\mathsf{S}})^2))^{1/2}$ du mode de compression associée à une coque de Donnell équivalente *in vacuo* [FF82, JF86] : les courbes de dispersion $\{\Omega \mapsto k_j(\Omega)\}_j$, obtenues par la méthode WFE (cf. (2.10)), de huit modes significatifs sont tracées sur la bande de fréquences $\mathcal{B}_\Omega = [0.1, 3]$ (cf. figure 3.3). A l'intérieur de $\mathcal{B}_\Omega$, ces courbes illustrent des modes élasto-acoustiques propagatifs et des modes élasto-acoustiques qui deviennent propagatifs à certaines fréquences de coupures. Les solutions WFE sont comparées à des solutions analytiques représentant :

- Les modes *élastiques* d'anneau, de compression et de torsion d'une coque de Donnell *in vacuo* de rayon R^{F} [JF86] ;
- les trois premiers modes *acoustiques* du fluide à paroi rigide, exprimés à partir de la fonction de Bessel d'ordre $s = 0$ (modes axisymétriques), et le troisième mode *acoustique* du fluide à paroi rigide, exprimé à partir de la fonction de Bessel d'ordre $s = 1$.

Les solutions analytiques reflètent correctement les tendances basses et hautes fréquences des modes numériques « standards » 1-3 et du mode numérique d'anneau 6. Les écarts observés entre les deux types de solutions, dans les domaines basses et hautes fréquences, reflètent les effets de charge du fluide, non pris en compte dans la solution analytique de structure élastique, ainsi que les effets de vibrations de paroi, non pris en compte dans la solution analytique acoustique. Les solutions numériques 1-3 et 6 révèlent des changements de natures analogues à ceux prédits par Fuller & Fahy [FF82], dans le sens où les courbes de dispersion de ces modes « bifurquent » d'un mouvement d'onde fortement élastique à un mouvement d'onde fortement acoustique ou *vice versa*. Ces bifurcations apparaissent notamment aux coïncidences des longueurs d'ondes élastiques et acoustiques, lorsque les transferts d'énergies peuvent s'opérer.
Soulignons cependant que la méthode WFE permet de décrire des comportements ondulatoires MF non expliqués par les théories analytiques classiques [FF82]. L'évolution fréquentielle du mode 7 permet d'illustrer ces propos, dans le sens où la courbe de dispersion associée bifurque du troisième mode acoustique analytique $s = 0$ (axisymétrique) vers le troisième mode acoustique analytique $s = 1$ (asymétrique) aux alentours du mode analytique de torsion. Ces comportements modaux complexes sont décrits dans le cadre de la méthode WFE et reflètent les effets de couplages entre différents modes de même nature (élastique ou acoustique), non prédits par les approches analytiques [FF82]. Ces mécanismes sont délicats à appréhender et n'interviennent pas forcément aux phénomènes de coïncidence des longueurs d'ondes élastiques et acoustiques.

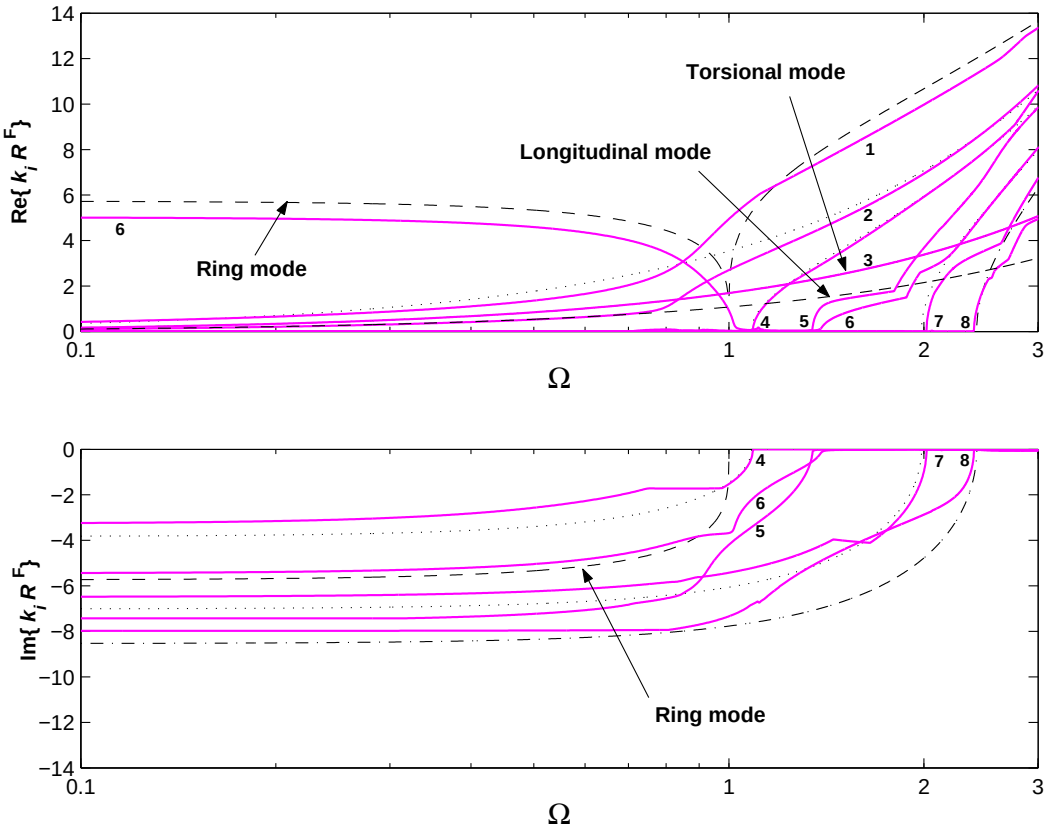

FIGURE 3.3 – Courbes de dispersion $\{\Omega \mapsto k_j(\Omega)\}_j$: (———) solutions WFE ; $(\cdots\cdots)$ solutions analytiques pour la coque de Donnell équivalente *in vacuo* ; $(- - -)$ solutions analytiques $s = 0$ pour le fluide dans la conduite *rigide* ; $(- \cdot - \cdot)$ solution analytique $s = 1$ pour le fluide dans la conduite *rigide*.

3.4 Réponse harmonique

3.4.1 Généralités

La stratégie de calcul de la réponse forcée est présentée dans le chapitre 2. Elle s'appuie sur la décomposition du système global en N sous-systèmes élasto-acoustiques identiques (cf. figure 3.1). La technique consiste à décrire, pour un sous-système k donné, les vecteurs d'états $\mathbf{u}_{\mathtt{L}}^{(k)}$ ou $\mathbf{u}_{\mathtt{R}}^{(k)}$ à partir d'une base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_{j=1,\ldots,2m}$ $(m \leq n)$ extraite de la base complète des modes d'ondes élasto-acoustiques $\{\mathbf{\Phi}_j\}_{j=1,\ldots,2n}$ (cf. (2.12)).
La distribution spatiale des amplitudes modales $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}$ s'obtient par considération des relations (2.14) et (2.15) et des conditions aux limites. Les conditions aux limites classiques du type Neumann et Dirichlet s'expriment dans le cas présent par :

$$[\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}|\mathbf{I}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}]\,\mathbf{u} = \mathbf{F}_0^{\mathtt{S}} \qquad \text{(condition de Neumann, partie solide)}, \tag{3.8}$$

$$[\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{I}_{n^{\mathtt{F}}}]\,\mathbf{u} = \frac{1}{\mathtt{i}\omega}\mathbf{F}_0^{\mathtt{A}} \qquad \text{(condition de Neumann, partie fluide)}, \tag{3.9}$$

$$[\mathbf{I}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}]\,\mathbf{u} = \mathbf{q}_0 \qquad \text{(condition de Dirichlet, partie solide)}, \tag{3.10}$$

$$[\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{I}_{n^{\mathtt{F}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{S}}}|\mathbf{0}_{n^{\mathtt{F}}}]\,\mathbf{u} = \mathbf{\Psi}_0 \qquad \text{(condition de Dirichlet, partie fluide)}. \tag{3.11}$$

3.4.2 Résultats numériques

Nous appliquons la méthode WFE pour décrire le comportement vibroacoustique d'une conduite élastique axisymétrique de longueur $L = 0.3\,m$, telle qu'illustrée sur la figure 3.4, contenant un fluide compressible. La conduite est encastrée sur ses deux extrémités. Le fluide est excité en $x = 0$ (extrémité gauche) par déplacement imposé $U_{\mathtt{ex}}$ et est couplé en $x = L$ (extrémité droite) à un système masse-ressort $\{M^{\mathtt{c}}\,,\, K^{\mathtt{c}}(1+\mathtt{i}\eta^{\mathtt{c}})\}$ présentant les caractéristiques suivantes : $M^{\mathtt{c}} = 0.2\,kg$ [2] ; $\sqrt{K^{\mathtt{c}}/M^{\mathtt{c}}} \times R^{\mathtt{F}}/c_L = \Omega^{\mathtt{c}}$ où $\Omega^{\mathtt{c}} = 2.5$; $\eta^{\mathtt{c}} = 0.01$.

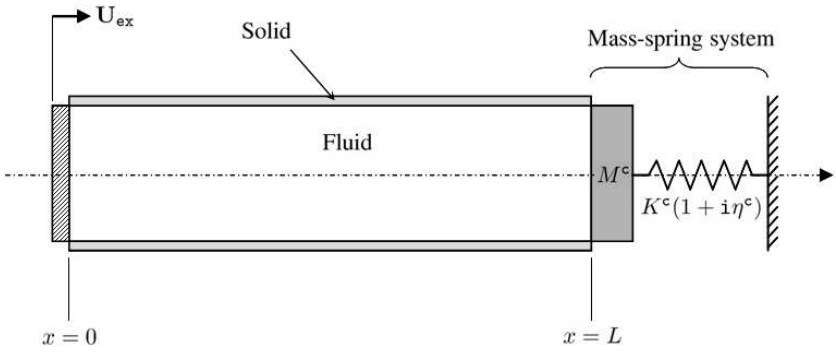

FIGURE 3.4 – Illustration d'une conduite élastique contenant un fluide acoustique excité par déplacement et couplé à un système masse-ressort.

Dans le cadre de la méthode WFE, le système global est décrit à partir de 300 sous-systèmes élasto-acoustiques identiques (cf. figures 3.1 et 3.2), dont les caractéristiques sont similaires à celles spécifiées précédemment. Les conditions de frontières du système conduite-fluide s'expriment formellement :

$$x = 0 : \qquad \mathbf{w}^{\mathtt{S}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}^{\mathtt{A}} = \mathbf{U}_{\mathtt{ex}}, \tag{3.12}$$

$$x = L : \qquad \mathbf{w}^{\mathtt{S}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_{S^{\mathtt{c}}} p\, ds = \mathtt{i}\omega Z U_L, \tag{3.13}$$

où $S^{\mathtt{c}}$ représente la surface de couplage entre le fluide et le système masse-ressort, U_L représente le déplacement de la masse $M^{\mathtt{c}}$ et Z représente l'opérateur d'impédance de frontière de l'élément de couplage : $\mathtt{i}\omega Z = -\omega^2 M^{\mathtt{c}} + K^{\mathtt{c}}(1 + \mathtt{i}\eta^{\mathtt{c}})$. Sous l'hypothèse d'uniformité des champs de forces acoustiques en $x = 0$ et $x = L$, on montre que les conditions (3.12) et (3.13) peuvent être écrites sous la forme suivante [MI07] :

$$x = 0 : \qquad \mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathtt{i}\omega}\mathbf{F}^{\mathtt{A}} = \frac{\mathtt{i}\omega\rho_0|S^{\mathtt{F}}|}{n^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}}\mathbf{1}_{n^{\mathtt{F}}\times 1}U_{\mathtt{ex}}, \tag{3.14}$$

$$x = L : \qquad \mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathtt{i}\omega}\mathbf{F}^{\mathtt{A}} = \frac{\mathtt{i}\omega\rho_0^2|S^{\mathtt{F}}|^2}{Z n^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}}\mathbf{\Psi}, \tag{3.15}$$

où $n^{\mathtt{F}}$ désigne le nombre de ddl's de surface pour la partie fluide et $n^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}$ désigne le nombre de ddl's de surface pour la partie fluide, qui n'appartiennent pas à l'interface de couplage avec la partie solide. A partir de (3.14) et (3.15), les conditions de frontières peuvent s'expliciter sous le formalisme WFE suivant (cf. (2.16)) :

2. Le rapport de masses entre l'élément de couplage et le fluide à l'intérieur de la conduite est approximativement 10%.

Pour la frontière gauche :

$$\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}\right)^{(1)} = \widetilde{\mathbb{C}}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}\right)^{(1)} + \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{3.16}$$

où $\widetilde{\mathbb{C}}$ représente la matrice de diffusion (décrivant la réflexion et transmission des modes d'ondes) :

$$\widetilde{\mathbb{C}} = -\begin{bmatrix} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{S}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{ref}} \\ (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{F}})^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{S}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{inc}} \\ (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{F}})^{\mathtt{inc}} \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

et $\widetilde{\mathcal{F}}$ représente les effets des sources d'excitation :

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{S}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{ref}} \\ (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{F}})^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}^{+} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{\mathtt{i}\omega\rho_0|S^{\mathtt{F}}|}{n^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}}\mathbf{1}_{n^{\mathtt{F}}\times 1}U_{\mathtt{ex}} \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Pour la frontière droite :

$$\left(\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\mathtt{ref}}\right)^{(N+1)} = \widetilde{\mathbb{C}}'\left(\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\mathtt{inc}}\right)^{(N+1)}, \tag{3.19}$$

où $\widetilde{\mathbb{C}}'$ représente la matrice de diffusion :

$$\widetilde{\mathbb{C}}' = -\begin{bmatrix} (\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{S}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{ref}} \\ (\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{F}})^{\mathtt{ref}} - \frac{\mathtt{i}\omega\rho_0^2|S^{\mathtt{F}}|^2}{Zn^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}}(\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} (\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{S}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{inc}} \\ (\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{F}})^{\mathtt{inc}} - \frac{\mathtt{i}\omega\rho_0^2|S^{\mathtt{F}}|^2}{Zn^{\mathtt{F}}_{\mathtt{I}}}(\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{A}}_{\mathbf{q}})^{\mathtt{inc}} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Ci-dessus, $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}$ désignent les modes incidents et réfléchis relatifs à la frontière gauche, tandis que $\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{inc}}$ et $\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{ref}}$ désignent les modes incidents et réfléchis relatifs à la frontière droite. Ces modes sont reliés de la manière suivante [MI07] : $\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{inc}} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}$, $\underline{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}^{\mathtt{ref}} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}$, $\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\mathtt{inc}} = \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}$ et $\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\mathtt{ref}} = \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}$.

Nous déterminons ci-après la distribution spatiale de la pression acoustique moyennée sur la section du fluide, définie par

$$< P >= -\frac{\mathtt{i}\omega\rho_0 \sum_i \Psi_i}{n^{\mathtt{F}}}, \tag{3.21}$$

où Ψ_i représente la $i-$ème composante du vecteur $\mathbf{\Psi}$. La solution WFE, obtenue par résolution numérique du problème aux limites constitué des relations (2.14), (2.15) et des conditions aux limites (3.16) et (3.19), est comparée à la solution analytique pour le fluide à paroi rigide [Bru83], exprimée à partir du premier mode acoustique $s = 0$. La solution WFE est exprimée, d'une part à partir du mode 2 (cf. figure 3.3) qui est proche de la solution analytique lorsque $\Omega > 1.5$, et d'autre part à partir des 10 modes élasto-acoustiques qui sont les plus sollicités par l'excitation. Ces modes sont associés aux puissances acoustiques modales les plus élevées [Lan99] et sont supposés supporter la dynamique du système lorsque $\Omega \leq 3$ [3]. Les deux types de solutions sont

3. En d'autres termes, la base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_j$ est supposée complète au regard des fréquences considérées.

illustrés sur la figure 3.5 lorsque $\Omega = \Omega^c = 2.5$ – reflétant la résonance du système masse-ressort – et sur la figure 3.6 lorsque $\Omega = 3$.

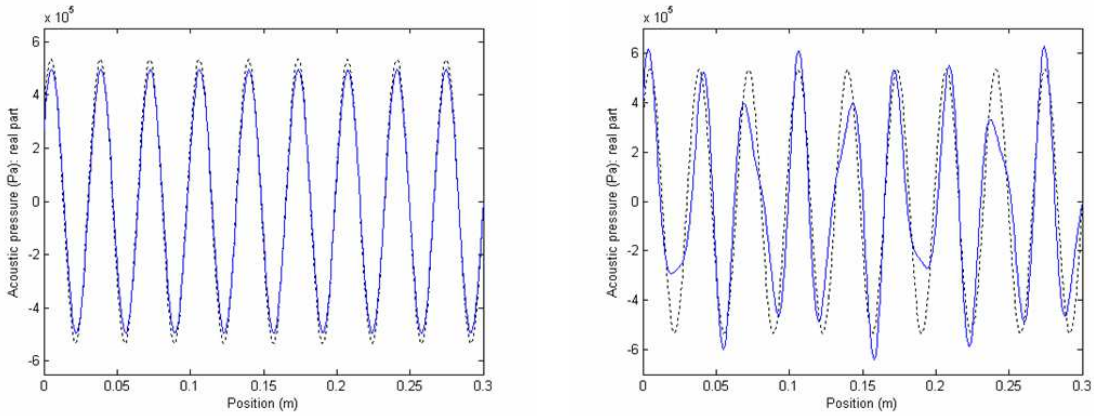

FIGURE 3.5 – Evolution spatiale de la pression acoustique moyenne à la fréquence $\Omega = 2.5$: solutions WFE (———) décrites avec 1 mode (à gauche) et 10 modes (à droite), comparées à la solution analytique décrivant le fluide dans la conduite *rigide* (· · · · · ·).

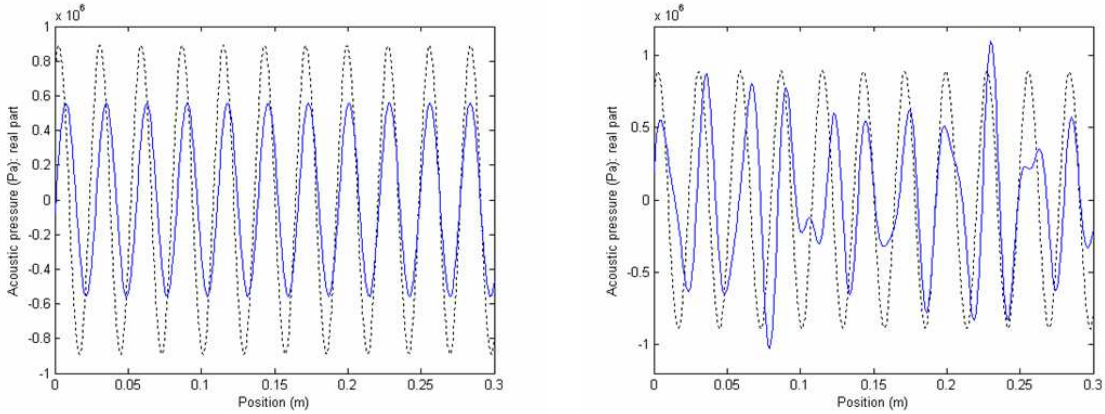

FIGURE 3.6 – Evolution spatiale de la pression acoustique moyenne à la fréquence $\Omega = 3$: solutions WFE (———) décrites avec 1 mode (à gauche) et 10 modes (à droite), comparées à la solution analytique décrivant le fluide dans la conduite *rigide* (· · · · · ·).

La solution WFE construite uniquement à partir du mode 2 apparaît similaire à la solution analytique lorsque $\Omega = 2.5$. Ces deux solutions se révèlent cependant sensiblement différentes lorsque $\Omega = 3$, au regard des effets d'interaction fluide-structure qui ne sont pas retranscrits par la théorie analytique. La solution WFE, obtenue à partir de 10 modes, apparaît moins régulière que la solution analytique lorsque $\Omega = 2.5$ et $\Omega = 3$; la solution numérique, obtenue à partir de la base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\}_j$ supposée complète, permet de décrire les phénomènes d'interaction fluide-structure et de couplage modal qui se révèlent prépondérants aux fréquences élevées.

3.5 Réponse temporelle

3.5.1 Propos liminaires

Le calcul de la réponse temporelle des systèmes via la méthode WFE s'opère usuellement par *Transformée de Fourier inverse* de la réponse harmonique [vF86]. Cette dernière s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{u}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(k)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(k)} \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{3.22}$$

soit par considération des relations (2.14) et (2.15)

$$\mathbf{u}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-(k-1)}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{3.23}$$

où $\boldsymbol{\mu} = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{ref}}] = [\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathtt{inc}}]^{-1}$ (cf. (2.21)). Notons que contrairement aux matrices modales usuelles issues de la méthode des éléments finis, la matrice des modes d'ondes $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ issue de la méthode WFE dépend de la fréquence. L'intégration temporelle de (3.23) nécessite donc la prise en compte de cette dépendance fréquentielle. La réponse temporelle s'exprime donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathbf{u}^{(k)}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)}\right] \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-(k-1)}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)}\right] \qquad k = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3.24}$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathbf{u}^{(k)}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}\right] * \left\{\mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)}\right]\right\} \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}\right] * \left\{\mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-(k-1)}\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)}\right]\right\} \\ &\quad k = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ associe à chaque fonction $g(\omega)$ sa transformée de Fourier inverse $g(t)$.

Note sur la convergence du modèle
La convergence du modèle WFE décrit à partir de (3.25) n'apparaît pas optimale au regard des différentes intégrations numériques qu'il requiert. Ces intégrations peuvent se révéler extrêmement coûteuses en termes de temps de calculs, pour retranscrire correctement les comportements MF. Notons qu'une solution alternative à la transformée de Fourier inverse consiste à transposer à la fonction de transfert obtenue par (3.22) un système linéaire du premier ordre de la forme $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$.

3.5.2 Résultats numériques

La méthode WFE a été utilisée dans le cadre d'une application industrielle pour décrire la réponse temporelle d'un gaz, à l'intérieur d'une ligne d'échappement, à partir du code commercial `AMESim`©. La ligne d'échappement illustre une conduite axisymétrique telle que décrite sur la figure 3.1. Le gaz est soumis sur la frontière gauche à un débit acoustique simulant une montée en régime. La solution WFE est obtenue par considération d'un système du premier ordre équivalent $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$ (voir ci-dessus) ; la fonction de transfert, reliant la pression acoustique du gaz en sortie de ligne à la pression acoustique d'entrée, est construite à partir de 10 modes élasto-acoustiques *significatifs*, tels que décrits dans le cadre du calcul de la réponse harmonique. La

solution WFE est comparée à une solution analytique déjà implémentée dans AMESim© (cf. figure 3.7). Il apparaît que la solution WFE reflète des comportements dynamiques plus riches que ceux décrits par la solution analytique ; elle permet notamment de décrire des couplages modaux MF complexes résultant des phénomènes d'interaction fluide-structure et non décrits par les approches standards.

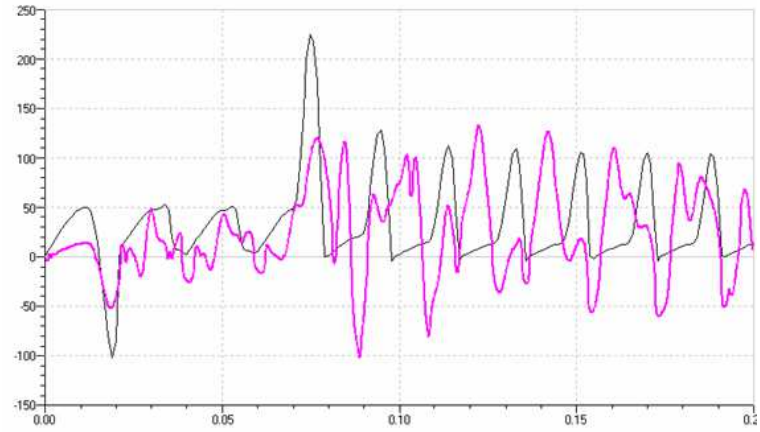

FIGURE 3.7 – Réponse temporelle d'une ligne d'échappement : (———) solution WFE avec 10 modes ; (———) solution analytique AMESim©.

3.6 Conclusions

Nous avons appliqué la méthode WFE pour décrire numériquement la propagation d'ondes dans les systèmes élasto-acoustiques. La méthode a été testée pour décrire la propagation d'ondes BF & MF dans une conduite élastique axisymétrique remplie d'un fluide acoustique. L'approche numérique permet de décrire les évolutions complexes MF des modes d'ondes élasto-acoustiques, non décrites par les approches analytiques. La méthode WFE a par ailleurs été appliquée pour décrire la réponse spatiale du fluide, à l'intérieur de la conduite, sollicité par déplacement harmonique imposé et couplé à un système masse-ressort. La formulation WFE, établie à partir d'un seul mode acoustique, permet de décrire fidèlement la solution acoustique du fluide à paroi rigide. La formulation permet en outre de décrire le comportement spatial MF non régulier du fluide lorsqu'elle est construite sur la base de 10 modes élasto-acoustiques. La méthode WFE a finalement été implémentée dans le code commercial AMESim© pour décrire la réponse temporelle d'un gaz à l'intérieur une ligne d'échappement.

Chapitre 4

Propagation multi-modale dans les systèmes multi-couches

4.1 Introduction

Les systèmes multi-couches représentent des solutions légères et rigides pour la conception des systèmes mécaniques, dans l'industrie automobile, aéronautique et aérospatiale notamment. La compréhension et la prédiction de leurs comportements vibratoires suscitent un engouement croissant dans la littérature internationale [MSG06, MG03, BS05]. Pour décrire la propagation d'ondes dans ces systèmes, la méthode WFE apparaît cependant problématique d'un point de vue numérique, au regard du comportement dynamique multi-échelle que peuvent exhiber ces couches. Dans ce cas, la méthode génère des modes parasites HF qui perturbent la description des modes *physiques* dans le domaine fréquentiel.
Nous présentons ci-après une version modifiée de la méthode WFE, appelée méthode MWFE (« *Modified Wave Finite Elements* »). Cette méthode s'appuie sur une technique de sous-structuration dynamique permettant de construire les modes d'ondes *globaux* se propageant dans un système multi-couche à partir des modes d'ondes *locaux* se propageant dans les couches homogènes avec interfaces libres. La méthode MWFE permet de s'affranchir des problèmes numériques associés à la méthode WFE et permet de décrire le comportement dynamique des systèmes multi-couches à partir de bases de modes d'ondes dont les natures sont correctement retranscrites à l'intérieur des bandes de fréquences étudiées. L'ensemble de cette étude est présenté en détails en refs. [MI08, Men08].
Ci-après, les problématiques associées à la méthode WFE sont mises en évidence. Nous présentons dans la suite la méthode MWFE pour décrire la propagation d'ondes dans les systèmes multi-couches. Nous présentons finalement la stratégie de calcul de la réponse forcée des systèmes multi-couches à partir de la méthode MWFE.

4.2 Analyse de la formulation WFE

4.2.1 Propos liminaires

Dans le cadre de la méthode WFE, nous examinons la propagation d'ondes dans une structure élancée, élastique et dissipative, composée de M couches homogènes de sections constantes (cf. figure 4.1). Le système multi-couche est supposé vibrer linéairement sous excitation harmonique

de fréquence $\omega/2\pi$.

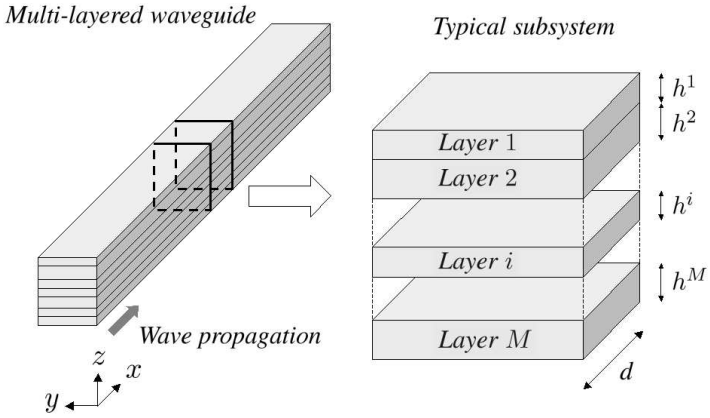

FIGURE 4.1 – Illustration d'un système élastique multi-couche à section rectangulaire et illustration d'un sous-système représentatif.

La méthode WFE s'appuie sur le modèle éléments finis d'un sous-système multi-couche extrait du système global (cf. chapitre 2), tel que décrit sur la figure 4.1. Les modes d'ondes $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ se propageant le long du système multi-couche sont numériquement calculés à partir du problème aux valeurs propres (2.4), établi sur la base du modèle éléments finis du sous-système (cf. chapitre 2).

4.2.2 Discussion

En pratique, l'implémentation de la méthode WFE consiste à mailler de manière uniforme la section d'une structure avec un nombre de noeuds suffisant pour décrire le comportement dynamique de cette section à l'intérieur d'une bande de fréquences donnée. Cette routine a été appliquée avec succès aux systèmes homogènes [MIJ06], dans le sens où leur section exhibe spatialement la même échelle de vibrations. Ce critère ne peut cependant pas être justifié dans le cas des systèmes multi-couches, dans le sens où leur section peut révéler spatialement des comportements dynamiques de natures très disparates. Ce type de système illustre par exemple une poutre sandwich composée d'un coeur souple en caoutchouc, vibrant en MF, et de deux peaux rigides en acier, vibrant en BF (cf. figure 4.2). Pour appliquer la méthode WFE, la densité de maillage de la section globale doit être suffisamment riche pour décrire notamment le comportement MF du coeur ; cela suppose, dans la mesure où l'on admet la compatibilité des maillages aux interfaces entre couches, de mailler les couches rigides aussi finement. La dimension du problème aux valeurs propres (2.4) peut donc largement excéder la somme des dimensions caractéristiques des couches : le processus d'extraction numérique des modes d'ondes génère de ce fait des modes d'ordres élevés associés à des valeurs propres extrêmement larges ou proches de zéro. Ces modes HF n'ont pas de réalité physique et sont sources d'une mauvaise convergence du problème aux valeurs propres (2.4) pour décrire les modes BF & MF.

Pour illustrer ces propos, nous examinons le problème de propagation d'ondes dans la poutre sandwich illustrée sur la figure 4.2, composée d'un coeur en caoutchouc (couche 2) et de deux peaux en acier (couches 1 et 3). Les peaux exhibent les mêmes caractéristiques : densité $\rho^1 = \rho^3 =$

$7850\,kg/m^3$, module d'Young $E^1 = E^3 = 2.1 \times 10^{11}\,Pa$, coefficient de Poisson $\nu^1 = \nu^3 = 0.3$ et section $50 \times 2\,mm^2$; le coeur possède les caractéristiques suivantes : densité $\rho^2 = 950 kg/m^3$, module d'Young $E^2 = 1.5 \times 10^6 Pa$, coefficient de Poisson $\nu^2 = 0.3$ et section $50 \times 20\,mm^2$. Les trois couches ont le même amortissement structural $\eta = 0.01$. Les modes d'ondes globaux $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ se propageant dans le système couplé sont obtenus numériquement sur la base du modèle éléments finis d'un sous-système multi-couche représentatif, tel que décrit sur la figure 4.2. L'épaisseur du sous-système selon l'axe x est $d = 2 \times 10^{-3} m$. Les couches 1 et 3 (peaux) sont maillées par 4 éléments 3D linéaires tandis que la couche 2 (coeur) est maillée par 16 éléments 3D linéaires. Dans le cadre de la méthode WFE, ce maillage grossier est supposé adéquat pour décrire les modes standards BF du système global ainsi que les premiers modes de section, reflétant la dynamique locale MF du coeur.

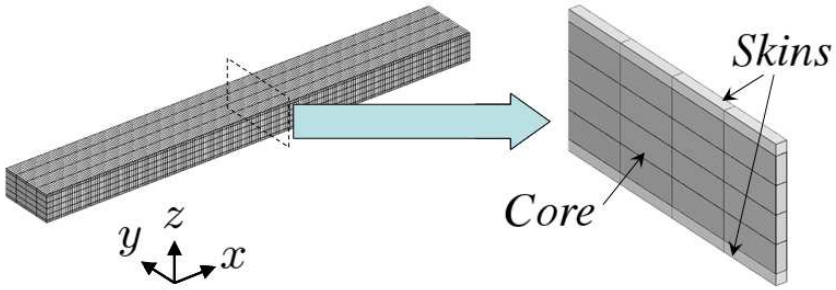

FIGURE 4.2 – Modèle éléments finis d'une poutre sandwich et modèle éléments finis d'une sous-structure représentative.

Les courbes de dispersion $\{\omega \mapsto k_j(\omega)\}_j$ de quelques modes propagatifs sont estimées par la méthode WFE et tracées sur la bande de fréquences $\mathcal{B}_f = [100\,Hz\,,\,1500\,Hz]$ (cf. figure 4.3). Ces modes représentent notamment les modes standards de compression, flexion et cisaillement. L'évolution de chaque mode numérique dans le domaine fréquentiel est estimée au regard du critère (2.11) développé dans le chapitre 2. En BF, les courbes de dispersion des modes standards apparaissent similaires aux solutions analytiques développées en ref. [BS05]. Les solutions numériques WFE, obtenues par résolution du problème aux valeurs propres (2.4), dévoilent cependant des changements de natures non prédits par la théorie analytique. Ces changements de natures traduisent formellement des interférences entre modes BF et modes HF parasites. Les figures 4.4 et 4.5 illustrent précisément la similarité entre le mode de compression BF et un mode parasite – non propagatif – aux alentours de $600\,Hz$, où l'on note un changement de nature du mode BF (cf. figure 4.3). La dépendance entre modes standards et parasites est donc établie : elle perturbe l'extraction des modes standards et génère des problèmes singuliers, notamment dans le calcul des réponses forcées.

Nous proposons ci-après une méthode permettant de s'affranchir des effets de pollutions numériques associés à la formulation WFE. Cette méthode, appelée MWFE (*Modified Wave Finite Elements*), s'appuie sur une technique de sous-structuration permettant de décrire le comportement dynamique de chaque couche sur une base de modes locaux à *dimension adaptée* pour décrire le comportement dynamique du système global. Ces modes locaux reflètent les ondes se propageant dans chaque couche avec interface libre.

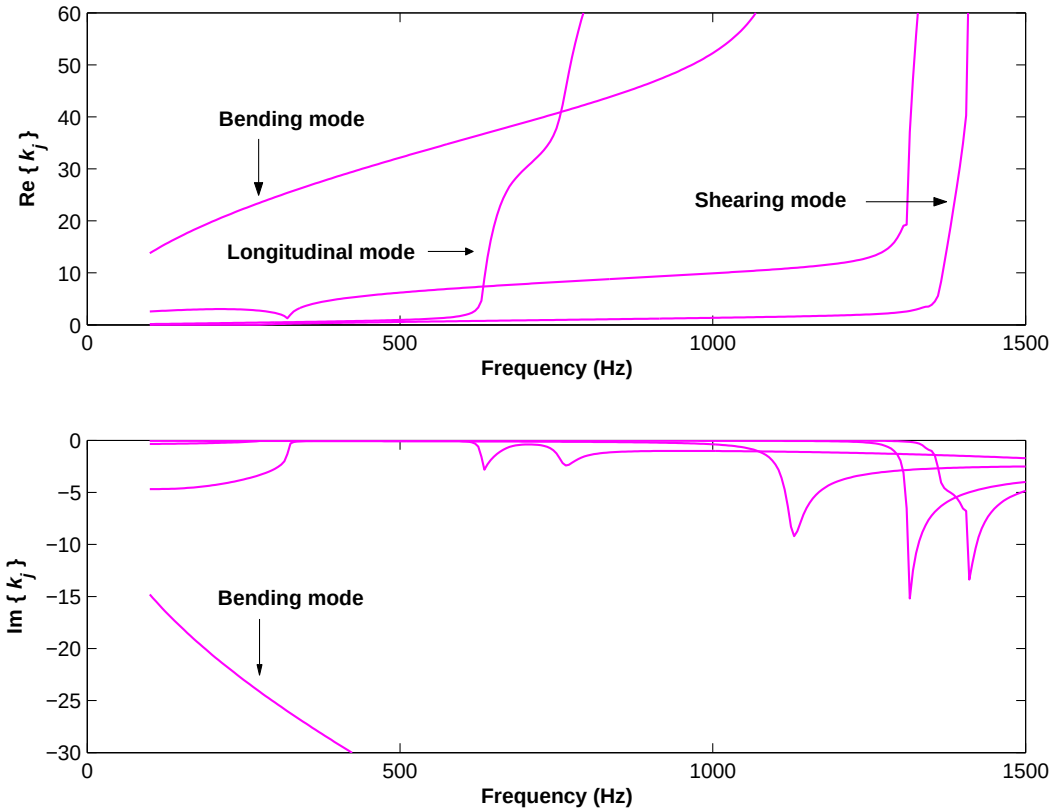

FIGURE 4.3 – Courbes de dispersion associées aux modes d'ondes globaux se propageant dans la structure sandwich : solutions WFE.

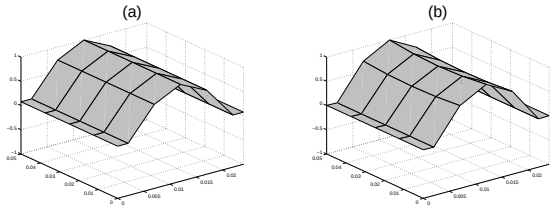

FIGURE 4.4 – Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes à $600\,Hz$: (a) mode de compression standard ; (b) mode de compression parasite.

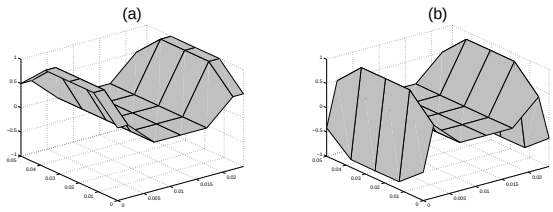

FIGURE 4.5 – Composantes force (parties réelles) des formes d'ondes à $600\,Hz$: (a) mode de compression standard ; (b) mode de compression parasite.

4.3 Présentation de la méthode MWFE

4.3.1 Calcul des modes d'ondes locaux

Considérons un sous-système multi-couche extrait du système global, englobant M couches homogènes (cf. figure 4.1). Les frontières gauche et droite de chaque couche i $(i = 1, \ldots, M)$ sont respectivement notées $\{S^i_{\mathtt{L}}\}_i$ et $\{S^i_{\mathtt{R}}\}_i$ et sont supposées contenir le même nombre n^i de ddl's (cf. chapitre 2). Notons Γ^i la surface de couplage entre la couche i et son voisinage, représentant l'ensemble des couches $\{j\}_{j\neq i}$ connectées.
La méthode MWFE consiste à construire la base des modes d'ondes globaux $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$, attachée au système multi-couche, à partir d'un ensemble de bases locales $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_j\}_{j=1,\ldots,2m^i}\}_i$ à dimensions spécifiques $\{2m^i\}_i$ $(m^i \leq n^i\ \forall i)$, attachées aux couches homogènes $\{i\}_i$ avec interfaces $\{\Gamma^i\}_i$ libres. Pour chaque couche i découplée de son voisinage, la base locale $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_j\}_{j=1,\ldots,2m^i}$ est supposée refléter, à l'intérieur d'une bande de fréquences donnée, l'échelle de vibrations de la section $S^i_{\mathtt{L}}$ ou $S^i_{\mathtt{R}}$; cette base est extraite de la base complète $\{\mathbf{\Phi}^i_j\}_{j=1,\ldots,n^i}$ des modes d'ondes se propageant dans la couche i avec interface libre ; ces modes sont obtenus dans le cadre de la méthode WFE par résolution du problème aux valeurs propres suivant (cf. (2.4)) :

$$\mathbf{S}^i\mathbf{\Phi}^i_j = \mu^i_j\mathbf{\Phi}^i_j \quad , \quad |\mathbf{S}^i - \mu^i_j\mathbf{I}| = 0 \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{S}^i$ représente un opérateur symplectique de dimension $(2n^i \times 2n^i)$, exprimé à partir de l'opérateur de rigidité dynamique $\mathbf{D}^i$ associé au modèle éléments finis de la couche homogène i avec interface libre. La matrice des modes d'ondes locaux $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i$ s'exprime usuellement à partir des matrices $(n^i \times 2m^i)$ $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{q}}$ et $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{F}}$ (cf (2.13)) :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{q}} \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{F}} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{4.2}$$

La stratégie de calcul des modes d'ondes globaux $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$ s'appuie sur une technique de sous-structuration présentée ci-dessous.

4.3.2 Schéma de sous-structuration

Le schéma de sous-structuration associé à la méthode MWFE est intégralement présenté en ref. [MI08]. Le formalisme est brièvement rappelé ci-dessous :
L'équilibre dynamique de l'ensemble des couches connectées – composant le sous-système multi-couche – s'écrit :

$$\left[\mathbf{D}^{\mathtt{local}} + \mathbf{D}^{\mathtt{coupling}}\right] \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}^M \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

où $\mathbf{D}^{\mathtt{local}}$ représente une matrice diagonale par blocs, composée des opérateurs de rigidités dynamiques $\{\mathbf{D}^i\}_i$ des couches avec interfaces libres ; $\mathbf{D}^{\mathtt{coupling}}$ exprime les couplages inertielles, élastiques et dissipatifs entre couches. $\{\mathbf{q}^i\}_i$ représente les déplacements nodaux des couches. $\mathcal{F}^i$ désigne la restriction à la couche i des forces nodales $\mathbf{F}$ appliquées au sous-système ; les forces $\{\mathcal{F}^i\}_i$ s'expriment à partir des forces $\{\mathbf{F}^i\}_i$ appliquées aux couches avec interfaces libres de la

manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}^M \end{pmatrix} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E}^{\texttt{coupling}}\right] \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}^M \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

L'équation (4.4) décrit la continuité des forces $\{\mathcal{F}^i\}_i$ aux interfaces $\{\Gamma_i\}_i$; il n'existe en revanche aucune relation traduisant la continuité des forces $\{\mathbf{F}^i\}_i$ aux interfaces $\{\Gamma_i\}_i$.
En reformulant l'équilibre dynamique (4.3) en termes de vecteurs d'états, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\mathtt{R}}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\mathtt{R}}^M \\ \hline \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^M \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\mathtt{L}}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\mathtt{L}}^M \\ \hline -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^1 \\ \vdots \\ -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^M \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

où

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^M \end{pmatrix} = \mathcal{G}^* \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathtt{R}}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{\mathtt{R}}^M \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^1 \\ \vdots \\ -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^M \end{pmatrix} = \mathcal{G}^* \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_{\mathtt{L}}^1 \\ \vdots \\ -\mathbf{F}_{\mathtt{L}}^M \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Les matrices $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}^*$ sont détaillées en ref. [MI08]. $\mathcal{S}$ représente une matrice de taille $(2\sum_i n^i \times 2\sum_i n^i)$ qui n'est pas symplectique *a priori*. Le schéma de sous-structuration, établi par (4.5) et (4.6), permet de décrire localement les variables cinématiques (déplacements et forces) de chaque couche indépendamment de son voisinage. Il permet notamment de représenter les modes globaux du système multi-couche à partir d'un ensemble de bases de modes d'ondes locaux, attachées aux couches avec interfaces libres et dont les dimensions peuvent être individuellement adaptées aux échelles de vibrations mises en jeu. Les modes d'ondes globaux sont définis ci-après :

Les relations de couplage entre deux sous-systèmes k et $k-1$ s'expriment :

$$\mathbf{q}_{\mathtt{L}}^{i\,(k)} = \mathbf{q}_{\mathtt{R}}^{i\,(k-1)} \quad , \quad -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^{i\,(k)} = \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^{i\,(k-1)} \qquad k = 2, \ldots, N \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{4.7}$$

où N représente le nombre de sous-systèmes multi-couches composant le système global. Les équations (4.5) et (4.7) permettent d'aboutir à une relation de la forme (2.6). Par considération du théorème de *Bloch* [Wil78], les solutions recherchées $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ sont de la forme (2.7) et sont obtenues par résolution numérique du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathcal{S} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|M} \\ \hline (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|M} \end{pmatrix} = \mu_j \begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|M} \\ \hline (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|M} \end{pmatrix} \qquad , \qquad |\mathcal{S} - \mu_j \mathbf{I}| = 0, \tag{4.8}$$

où $(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|i}$ et $(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|i}$ représentent des vecteurs de taille $(n^i \times 1)$ et désignent les restrictions à $S_{\mathtt{L}}^i$ ou $S_{\mathtt{R}}^i$ des composantes $(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_j$ et $(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_j$ associées au mode global j.

D'un autre côté, l'équation (4.6) permet d'associer à l'ensemble des restrictions $\{(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|i}\}_i$ l'ensemble des composantes force $\{(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|i}\}_i$ appliquées aux couches avec interfaces libres :

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|M} \end{pmatrix} = \mathcal{G}^* \begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|M} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

où $\{\{(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|i}\}_j\}_i$ et $\{\{(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|i}\}_j\}_i$ reflètent respectivement les forces associées aux couches *couplées* et *découplées*. Au regard de (4.4), la relation (4.9) permet de décrire la continuité des composantes $\{\{(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|i}\}_j\}_i$ aux niveau des interfaces $\{\Gamma^i\}_i$.
On présente ci-après la stratégie de calcul des modes d'ondes globaux $\{(\mu_j, \mathbf{\Phi}_j)\}_j$. Ces modes sont obtenus numériquement par résolution d'un problème aux valeurs propres construit à partir de bases modales locales $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_j\}_{j=1,\ldots,2m^i}\}_i$. Ces bases sont associées aux couches homogènes avec interfaces libres et possèdent des dimensions spécifiques $\{2m^i\}_i$.

4.3.3 Construction des modes d'ondes globaux

La méthode MWFE consiste à construire les modes d'ondes globaux $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ à partir d'un ensemble de bases locales réduites $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_j\}_j\}_i$ de dimensions $\{2m^i\}_i$:

$$(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|i} = \sum_{l=1,\ldots,2m^i} \alpha^i_{jl} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{q}})_l \quad , \quad (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|i} = \sum_{l=1,\ldots,2m^i} \alpha^i_{jl} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}^i_{\mathtt{F}})_l \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{4.10}$$

La décomposition (4.10) apparaît naturelle dans le sens où les composantes $\{(\mathbf{\Phi}_{\mathtt{F}})_{j|i}\}_i$ et $\{\{(\mathbf{\Phi}^i_{\mathtt{F}})_l\}_l\}_i$ reflètent communément des forces appliquées aux couches avec interfaces libres. Notons par ailleurs que la continuité des composantes $\{(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|i}\}_i$ aux interfaces $\{\Gamma^i\}_i$ est vérifiée au regard de (4.9). La construction des modes globaux $\{\mathbf{\Phi}_j\}_j$ s'écrit à partir de (4.10) et (4.9) de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|M} \\ \hline (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|M} \end{pmatrix} = \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j, \tag{4.11}$$

où $\boldsymbol{\alpha}_j$ représente les participations modales ; la matrice $\mathcal{B}$ s'exprime

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{G}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{q}} \\ \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{F}} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

où $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{q}}$ et $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{F}}$ représentent des matrices de taille $(\sum_i n^i \times 2\sum_i m^i)$:

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{q}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}^1_{\mathtt{q}} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}^2_{\mathtt{q}} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}^M_{\mathtt{q}} \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{local}}_{\mathtt{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Phi}}^1_{\mathtt{F}} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}^2_{\mathtt{F}} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}^M_{\mathtt{F}} \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

La stratégie de calcul des participations modales $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_j$ est décrite de la manière suivante :
En insérant (4.11) dans le problème aux valeurs propres (4.8), on obtient un système de taille $(2\sum_i n^i \times 2\sum_i m^i)$:

$$\mathcal{S}\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j = \mu_j \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j. \tag{4.14}$$

Ce système peut être réduit à un système de taille $(2\sum_i m^i \times 2\sum_i m^i)$ par application de la transformation $\mathcal{B}^T\mathbf{J}$:

$$\mathcal{B}^T\mathbf{J}\mathcal{S}\mathcal{B}\,\boldsymbol{\alpha}_j = \mu_j \mathcal{B}^T\mathbf{J}\mathcal{B}\,\boldsymbol{\alpha}_j, \tag{4.15}$$

où

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(2\sum_i n^i)} \\ -\mathbf{I}_{(2\sum_i n^i)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Le problème (4.15) apparaît bien conditionné : d'une part, il est homogène et non partitionné en composantes déplacement et force ; d'autre part, la matrice $\mathcal{B}$ se révèle bien conditionnée au regard des matrices $\{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^i\}_i$ qui peuvent être normalisées de manière similaire, au regard de la norme hermitienne par exemple (cf. chapitre 2). Les participations modales $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_j$ sont donc obtenues par résolution d'un problème aux valeurs propres classique :

$$\mathbf{S}^{\mathtt{MWFE}}\boldsymbol{\alpha}_j = \mu_j\boldsymbol{\alpha}_j \qquad , \qquad |\mathbf{S}^{\mathtt{MWFE}} - \mu_j\mathbf{I}| = 0, \tag{4.17}$$

où

$$\mathbf{S}^{\mathtt{MWFE}} = \left[\mathcal{B}^T\mathbf{J}\mathcal{B}\right]^{-1}\mathcal{B}^T\mathbf{J}\mathcal{S}\mathcal{B}. \tag{4.18}$$

Notons que l'existence de la matrice $[\mathcal{B}^T\mathbf{J}\mathcal{B}]^{-1}$ peut être vérifiée si $\mathcal{B}$ ne contient pas de vecteurs dépendants, c'est-à-dire lorsque la dimension de chaque base locale $\{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^i_j\}_j$ n'est pas surestimée au regard du comportement dynamique de chaque couche i.

La méthode MWFE peut donc être énoncée de la manière suivante :
Etant donné un ensemble de bases locales réduites $\{\{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^i_j\}_j\}_i$ ayant des dimensions *appropriées*, les modes globaux sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres (4.17), permettant l'obtention des paramètres $\{\mu_j\}_j$ – décrivant les vitesses de propagation des modes – et des participations modales $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_j$, et par considération de (4.11), permettant d'établir les restrictions à $\{S^i_{\mathtt{L}}\}_i$ ou $\{S^i_{\mathtt{R}}\}_i$ des formes de section modales $\{\{\boldsymbol{\Phi}_{j|i}\}_i\}_j$.

Soulignons que la méthode MWFE présente les avantages suivants :
- La taille du problème aux valeurs propres (4.17) représente la somme de dimensions adaptées aux échelles de vibrations des couches : dans ce sens, les comportements dynamiques essentiels BF & MF sont correctement décrits par la formulation ;
- La taille du problème aux valeurs propres (4.17) est généralement plus faible que celle du problème aux valeurs propres WFE (cf. (2.4)) : les temps CPU peuvent être réduits ;
- La matrice $\mathbf{S}^{\mathtt{MWFE}}$ est homogène et non partitionnée en composantes force et déplacement : le problème aux valeurs propres (4.17) apparaît bien conditionné.

Note sur la convergence de la méthode MWFE
La convergence de la méthode MWFE dépend étroitement du choix des bases locales réduites $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^i\}_j\}_i$ pour décrire les modes globaux. La stratégie de sélection de ces bases locales reste un problème délicat au regard des critères suivants : (i) ces bases locales doivent être suffisamment riches pour décrire les modes d'ondes globaux ; (ii) les dimensions de ces bases ne doivent pas être surestimées pour éviter les problèmes mal conditionnés ; (iii) la dimension du problème global varie en fonction de la fréquence.

Description des modes d'ondes globaux dans le domaine fréquentiel
Notons que la stratégie WFE pour décrire l'évolution fréquentielle de chaque mode global (cf. (2.11)) ne peut pas être appliquée au formalisme MWFE dans le sens où $\mathbf{S}^{\mathtt{MWFE}}$ n'est pas symplectique. Un critère analogue basé sur le produit scalaire hermitien peut cependant être proposé :
Connaissant le mode global j défini à la fréquence $\omega/2\pi$ et pour Δ_ω suffisamment petit, le mode global j défini à $\omega + \Delta_\omega$ est tel que

$$|\left(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j(\omega+\Delta_\omega)\right)^H\left(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j(\omega)\right)| = \mathtt{max}_k\{|\left(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_k(\omega+\Delta_\omega)\right)^H\left(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j(\omega)\right)|\} \tag{4.19}$$

En pratique, l'utilisation de ce critère implique de normaliser chaque composante $(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j)$ à partir de la norme hermitienne $\left((\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j)^H(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j)\right)^{1/2}$ [MI08].

4.3.4 Résultats numériques

Les modes d'ondes globaux se propageant dans la structure sandwich décrite précédemment sont calculés sur la bande de fréquences $\mathcal{B}_f = [100\,Hz\,,\,1500\,Hz]$ à partir de la méthode MWFE. La stratégie de calcul des modes globaux nécessite de résoudre le problème aux valeurs propres (4.17), pour obtenir les valeurs propres $\{\mu_j\}_j$ et les participations modales $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_j$, et de considérer (4.11) pour construire les formes de section modales $\{\{\mathbf{\Phi}_{j|i}\}_i\}_j$. Le modèle éléments finis sous-jacent à la méthode MWFE est décrit sur la figure 4.6 et représente les trois couches avec interfaces libres. Les caractéristiques de maillage sont similaires à celles détaillées précédemment : les couches 1 et 3 (peaux en acier) sont maillées chacune par 4 éléments 3D linéaires tandis que la couche 2 (coeur en caoutchouc) est maillée par 16 éléments 3D linéaires.

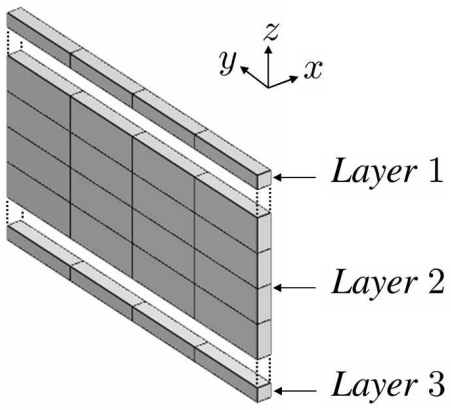

FIGURE 4.6 – Modèles éléments finis des trois couches découplées utilisés pour la construction des modes d'ondes globaux.

Dans le cadre de la méthode MWFE, les modes globaux sont construits à partir des modes locaux associés aux couches avec interfaces libres. Ces modes locaux sont supposés contribuer significativement au comportement dynamique du système global dans $\mathcal{B}_f$. Pour chaque couche, la base modale réduite est définie de telle sorte qu'elle contienne les modes propagatifs et évanescents standards ainsi que les modes de section qui deviennent propagatifs ou sont proches de devenir propagatifs à l'intérieur de $\mathcal{B}_f$. Dans le cas présent, le nombre de modes locaux incidents ou réfléchis est $m^1 = m^3 = 7$ pour les peaux et $m^2 = 30$ pour le coeur. La dimension du problème MWFE est donc $2(m^1 + m^2 + m^3) = 88$ et apparaît largement réduite comparée à la dimension du problème WFE, c'est-à-dire $2n = 210$.
Les courbes de dispersion $\{\omega \mapsto k_j(\omega)\}_j$ de quelques modes standards sont estimées par la méthode MWFE et comparées aux solutions WFE sur la bande de fréquences $\mathcal{B}_f$ (cf. figure 4.7). Contrairement à la méthode WFE, la méthode MWFE permet le calcul de modes globaux dont les natures BF sont conservées sur $\mathcal{B}_f$ [1]. Cela s'explique au regard des effets de dépendance entre modes standards et modes parasites HF qui sont éliminés via le formalisme MWFE. La méthode permet en outre de décrire fidèlement les formes de section modales $\{\{\mathbf{\Phi}_{j|i}\}_i\}_j$ sur $\mathcal{B}_f = [100\,Hz\,,\,1500\,Hz]$ (cf. figures 4.8 et 4.9) qui apparaissent cohérentes au regard des solutions analytiques. Ces formes de section définissent la base des modes d'ondes globaux utilisée pour les calculs de réponses forcées.

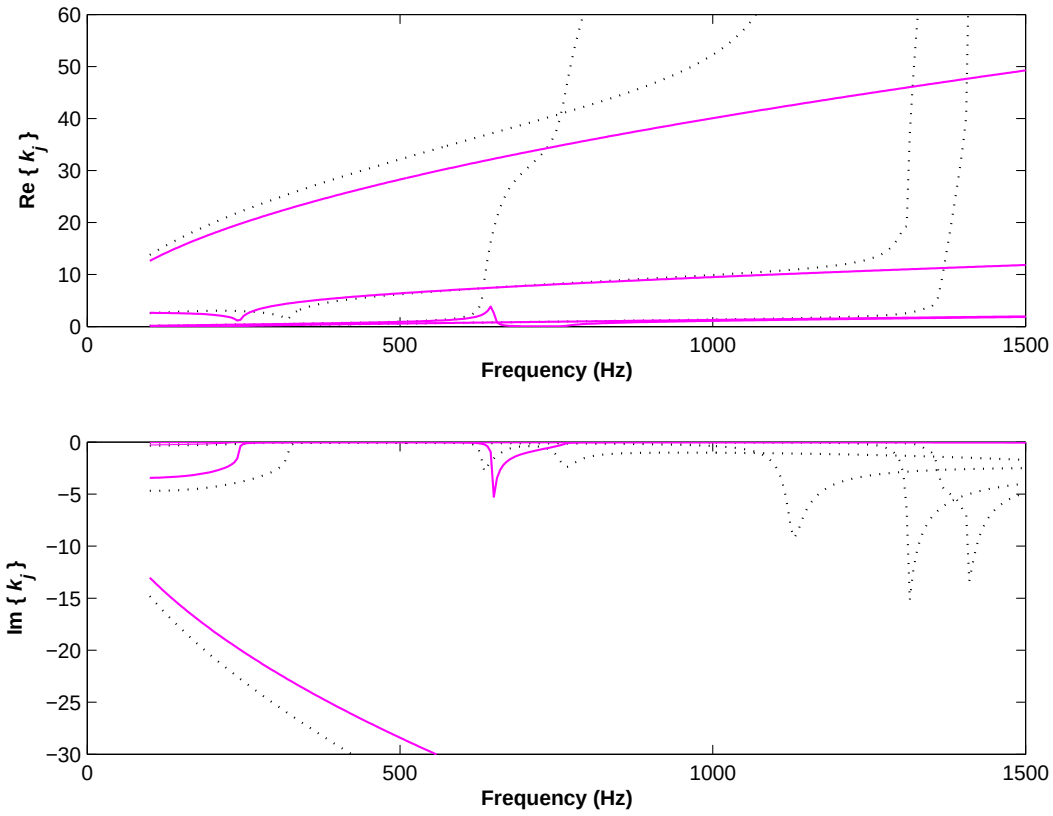

FIGURE 4.7 – Courbes de dispersion associées aux modes d'ondes globaux se propageant dans la structure sandwich : (———) solutions MWFE ; (. . . . . .) solutions WFE.

1. Soulignons le caractère fluctuant de la courbe de dispersion associée au mode de compression aux alentours de $600\,Hz$, traduisant la fréquence à laquelle les peaux ne vibrent plus et le fait que l'énergie est uniquement véhiculée par les mouvements du coeur plus souple.

Contrairement à la méthode WFE, la méthode MWFE permet de représenter le comportement dynamique des systèmes multi-couches à partir de bases réduites à faibles nombres de modes globaux, dont les natures sont cohérentes avec les domaines fréquentiels étudiés. L'application de la méthode MWFE pour décrire la réponse forcée des systèmes multi-couches est présentée ci-dessous.

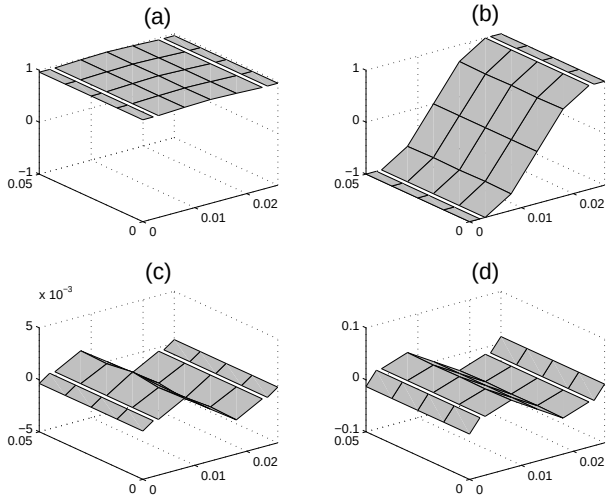

FIGURE 4.8 – Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes obtenues par l'approche MWFE à $100\,Hz$: (a) mode de compression ; (b) mode de cisaillement ; (c) mode de flexion propagatif ; (d) mode de flexion évanescent.

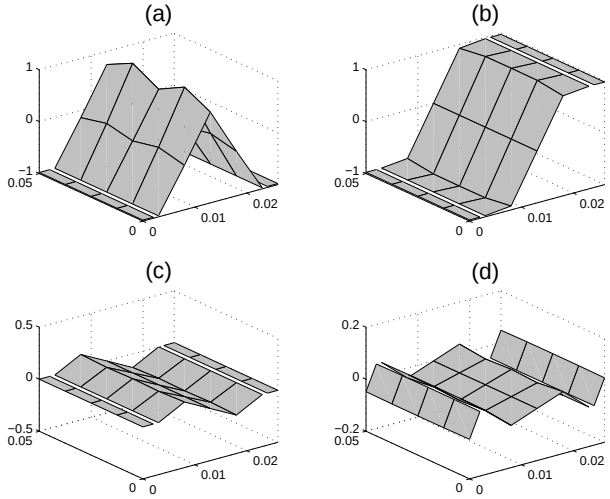

FIGURE 4.9 – Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes obtenues par l'approche MWFE à $1500\,Hz$: (a) mode de compression ; (b) mode de cisaillement ; (c) mode de flexion propagatif ; (d) mode de flexion évanescent..

4.4 Calcul de la réponse forcée

4.4.1 Propos liminaires

Nous présentons la stratégie de calcul de la réponse forcée des systèmes multi-couches par application de la méthode MWFE. Dans le cadre de cette méthode, les variables cinématiques d'un sous-système multi-couche s'expriment sous la forme de vecteurs d'états :

$$\mathcal{U}_{\mathtt{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\mathtt{L}}^{1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\mathtt{L}}^{M} \\ \hline -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^{1} \\ \vdots \\ -\mathcal{F}_{\mathtt{L}}^{M} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{U}_{\mathtt{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\mathtt{R}}^{1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\mathtt{R}}^{M} \\ \hline \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^{1} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{\mathtt{R}}^{M} \end{pmatrix} . \tag{4.20}$$

Au regard des relations de couplage entre deux sous-systèmes multi-couches k et $k-1$ (cf. (2.5)), nous obtenons :

$$\mathcal{U}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \mathcal{S}\mathcal{U}_{\mathtt{L}}^{(k-1)} \quad , \quad \mathcal{U}_{\mathtt{R}}^{(k)} = \mathcal{S}\mathcal{U}_{\mathtt{R}}^{(k-1)} \qquad k = 2, \ldots, N. \tag{4.21}$$

Notons $\{\mathbf{\Phi}_j^{\mathtt{MWFE}}\}_j$ l'ensemble des modes globaux obtenus à partir de la méthode MWFE :

$$\mathbf{\Phi}_j^{\mathtt{MWFE}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathtt{q}})_{j|M} \\ \hline (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|1} \\ \vdots \\ (\mathbf{\Phi}_{\mathcal{F}})_{j|M} \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{\Phi}_j^{\mathtt{MWFE}} = \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_j \qquad j = 1, \ldots, 2\sum_i m^i. \tag{4.22}$$

Le stratégie de calcul de la réponse forcée consiste à projeter les vecteurs d'états $\mathcal{U}_{\mathtt{L}}$ et $\mathcal{U}_{\mathtt{R}}$ sur une base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}}\}_j$ extraite de la base complète $\{\mathbf{\Phi}_j^{\mathtt{MWFE}}\}_j$:

$$\mathcal{U}_{\mathtt{L}}^{(k)} = \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right] \widetilde{\mathbf{Q}}^{(k)} \quad , \quad \mathcal{U}_{\mathtt{R}}^{(k)} = \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right] \widetilde{\mathbf{Q}}^{(k+1)} \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.23}$$

où $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]$ représente la matrice des modes d'ondes $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}}\}_j$; elle s'exprime littéralement (cf. (2.9)) :

$$[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}] = \begin{bmatrix} \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} & \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \\ \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} & \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

où $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}$, $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}$, $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}}$ et $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}$ représentent des matrices de même taille. La distribution spatiale des amplitudes modales s'obtient classiquement par considération des relations suivantes :

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(k)} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \qquad k = 1, \ldots, N+1, \tag{4.25}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(k)} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-(k-1)}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \qquad k = 1, \ldots, N+1, \tag{4.26}$$

associées aux conditions de frontières. A titre d'exemple, les conditions de Neumann et Dirichlet s'expriment (cf. Eqs. (2.19) et (2.20)) :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right] \mathcal{U} = \pm \mathcal{L}\mathbf{F}_0 \qquad \text{(condition de Neumann)}, \tag{4.27}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] \mathcal{U} = \mathcal{L}\mathbf{q}_0 \qquad \text{(condition de Dirichlet)}. \tag{4.28}$$

où $\mathcal{L}$ représente un opérateur Booléen reliant les ddl's de section de chaque couche aux ddl's de section du système global :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^M \end{pmatrix} = \mathcal{L}\mathbf{q} \quad , \quad \begin{pmatrix} \mathcal{F}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}^M \end{pmatrix} = \mathcal{L}\mathbf{F}. \tag{4.29}$$

Note sur la dualité ondes incidentes / ondes réfléchies

La convergence du système (4.27)-(4.28) pour décrire les conditions de frontières est étroitement liée au caractère dual des modes globaux incidents et réfléchis, notamment dans le sens où $||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}})_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}|| = ||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}})_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}}||$ et $||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}})_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}|| = ||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}})_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}|| \quad \forall j$. Ces relations ne sont pas exactement vérifiées numériquement : la méthode MWFE génère des effets de dispersion numérique pouvant se révéler non négligeables et extrêmement pénalisant pour le calcul de la réponse forcée, notamment lorsque les critères de sélection des bases locales réduites $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^i\}_j\}_i$ pour le calcul des modes globaux sont mal appréhendés. Pour traiter cette problématique, nous proposons d'introduire la base modale modifiée s'appuyant sur les substitutions suivantes :

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \rightarrow \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \quad , \quad \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \rightarrow -\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}. \tag{4.30}$$

La matrice des modes d'ondes modifiée s'exprime alors :

$$[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}] = \begin{bmatrix} \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} & \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \\ \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} & -\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Elle permet d'assurer la dualité ondes incidentes / ondes réfléchies pour le calcul de la réponse forcée. Nous supposerons dans la suite (sans le démontrer) que le choix de cette base de représentation modifiée permet d'aboutir aux relations (4.25)-(4.26). Cette stratégie de régularisation du problème aux limites sera mis en situation dans la suite.

4.4.2 Problème de Neumann-Dirichlet

Nous appliquons la méthode MWFE pour décrire le problème de Neumann-Dirichlet. Ce problème illustre un système multi-couche dont la frontière gauche est soumise à un champ de forces surfaciques, que reflète le vecteur $\mathbf{F_0}$, et dont la frontière droite est sollicitée par déplacements imposés $\mathbf{q_0}$ (cf. figure 4.10).

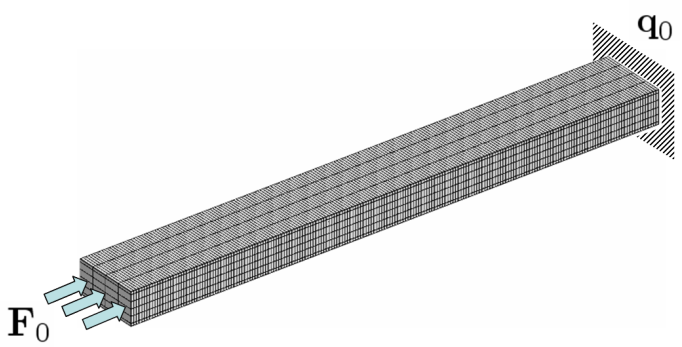

FIGURE 4.10 – Illustration du problème de Neumann-Dirichlet.

Dans ce cas, les conditions aux limites (4.27) et (4.28) se traduisent par :

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathcal{L}\mathbf{F}_0, \tag{4.32}$$

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(N+1)} + \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(N+1)} = \mathcal{L}\mathbf{q}_0, \tag{4.33}$$

soit, à partir des équations (4.25) et (4.26) :

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} + \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathcal{L}\mathbf{F}_0, \tag{4.34}$$

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N}\mathbf{Q}^{\mathtt{inc}(1)} + \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = \mathcal{L}\mathbf{q}_0, \tag{4.35}$$

L'utilisation de la base modifiée définie par (4.30) permet de régulariser le problème (4.34)-(4.35) de la manière suivante :

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} - \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = -\mathcal{L}\mathbf{F}_0, \tag{4.36}$$

$$\left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N}\mathbf{Q}^{\mathtt{inc}(1)} + \left[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}\right]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} = \mathcal{L}\mathbf{q}_0, \tag{4.37}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N} & \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{-N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left([\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}\right)^{+} \mathcal{L}\mathbf{F}_0 \\ \left([\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}\right)^{+} \mathcal{L}\mathbf{q}_0 \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

où le symbole $+$ désigne la pseudo-inverse. Les amplitudes modales $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)}$ et $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)}$ sont obtenues par résolution du système (4.38) à partir de la stratégie décrite dans le chapitre 2, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N} \\ \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{N} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\left([\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}\right)^{+} \mathcal{L}\mathbf{F}_0 \\ \left([\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}\right)^{+} \mathcal{L}\mathbf{q}_0 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

L'inversion de la deuxième matrice apparaissant dans le membre de droite de (4.39) ne pose pas de problème d'un point de vue numérique dans la mesure où $||\widetilde{\boldsymbol{\mu}}||_{\mathtt{max}} < 1$ (cf. chapitre 2).

4.4.3 Résultats numériques

Nous décrivons le comportement dynamique d'une structure sandwich de longueur $0.4\,m$, dont les extrémités droite et gauche sont respectivement encastrée et sollicitée par un champ de forces surfaciques, que reflète le vecteur $\mathbf{F}_0$, appliqué uniformément au niveau de la peau inférieure (cf. figure 4.11). Des sollicitations axiales et transversales sont respectivement considérées. La structure globale est constituée de $N = 200$ sous-systèmes identiques dont les caractéristiques sont similaires à celles décrites précédemment.

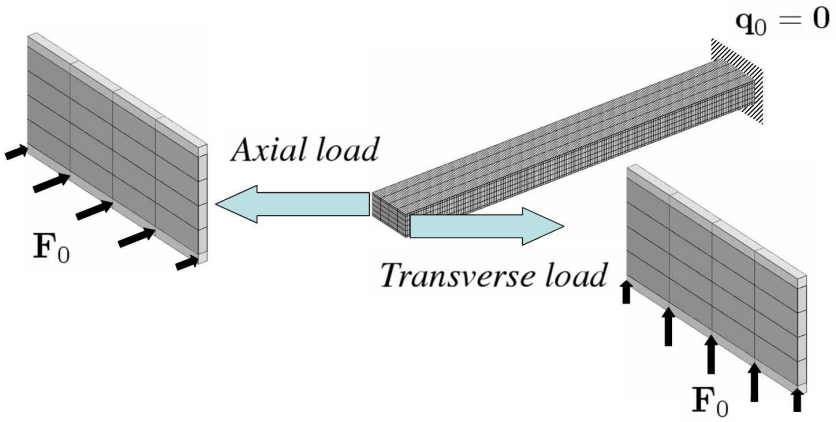

FIGURE 4.11 – Modèle éléments finis de la poutre sandwich, dont l'extrémité droite est encastrée et dont l'extrémité gauche est excitée par forces axiales ou transversales.

Nous appliquons les méthodes MWFE et WFE pour décrire la réponse harmonique de l'extrémité gauche de la structure (au milieu de la peau inférieure) dans la bande de fréquences $\mathcal{B}_f = [100\,Hz\,,\,1500\,Hz]$. Les solutions MWFE et WFE sont comparées aux résultats de simulations éléments finis pour la structure globale, illustrant la solution de référence. La solution MWFE s'obtient par résolution du système (4.39) qui s'exprime à partir de la matrice des modes globaux incidents $[\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{MWFE}}]^{\mathtt{inc}}$, construite à partir de 14 modes locaux BF pour chacune des deux peaux et de 60 modes locaux BF & MF pour le coeur [2]. Alternativement, la solution WFE s'exprime par résolution d'un problème similaire à (4.39),

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N \\ \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^N & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\left(\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}}\right)^{+} \mathbf{F}_0 \\ \left(\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}\right)^{+} \mathbf{q}_0 \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

basé sur les substitutions suivantes :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{ref}}_{\mathbf{F}} \rightarrow -\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}}, \tag{4.41}$$

où $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ représente la matrice des modes d'ondes globaux obtenues par résolution du problème au valeurs propres WFE (2.4). L'utilisation du problème modifié (4.40), basé sur le principe de dualité ondes incidentes / ondes réfléchies, permet de palier à des problèmes de convergence numériques majeurs qui ont été rencontrés au travers du formalisme WFE standard (cf. chapitre 2) pour décrire la solution du problème de Neumann-Dirichlet.

2. Les courbes de dispersion et les formes de section des modes globaux MWFE sont représentées sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9.

Réponse harmonique du système sous excitation axiale

Nous examinons la réponse harmonique de la structure sandwich sous excitation axiale (cf. figure 4.11). Les solutions WFE et MWFE sont tout d'abord estimées sur la base des 4 modes globaux standards (compression, cisaillement, flexion propagatif, flexion évanescent) décrits en figures 4.8 et 4.9. Les solutions ondulatoires sont calculées dans $\mathcal{B}_f$ et sont représentées sur la figure 4.12. Le manque de convergence de la méthode WFE est clairement établi au dessus de $600\,Hz$, dans le sens où le mode de compression n'est plus décrit par la formulation (cf. figure 4.7). En d'autre termes, la base modale WFE n'est plus consistante pour décrire la dynamique du système. D'un autre côté, il apparaît que la solution MWFE est cohérente avec les simulations éléments finis à l'intérieur de $\mathcal{B}_f$. La formulation permet de décrire les deux premières résonances du système et fournit une estimation moyenne des niveaux vibratoires au dessus de $1000\,Hz$.

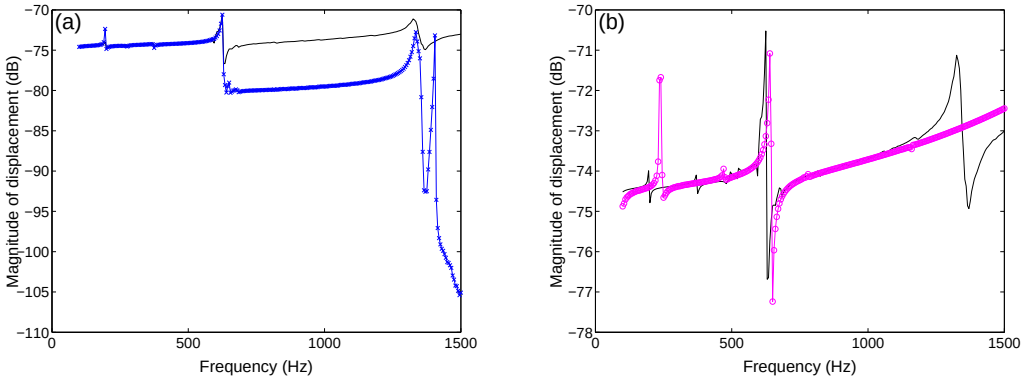

FIGURE 4.12 – Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation axiale : (a) solution WFE avec 4 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 4 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———).

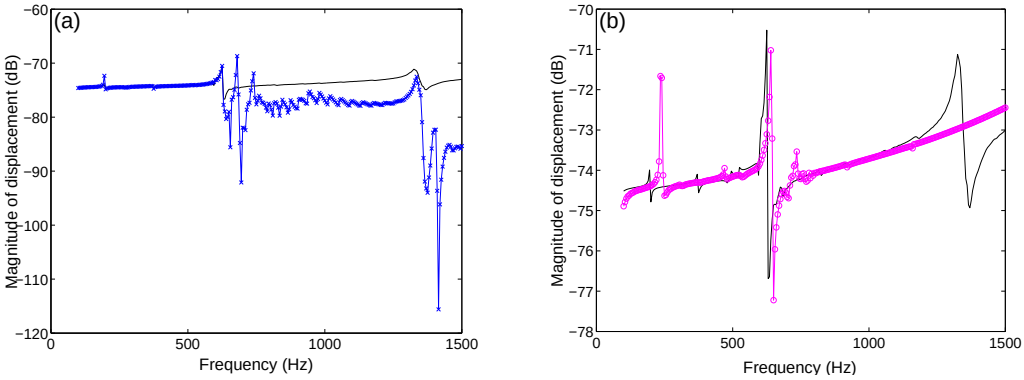

FIGURE 4.13 – Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation axiale : (a) solution WFE avec 25 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 8 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———).

Les solutions WFE et MWFE ont par ailleurs été estimées à partir de bases modales élargies, contenant les modes standards ainsi que quelques modes de section MF. La solution WFE est estimée à partir d'une base réduite $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{inc}}\}_j$ contenant 25 modes alors que la solution MWFE est estimée à partir d'une base réduite $\{(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{\mathtt{MWFE}})^{\mathtt{inc}}\}_j$ contenant 8 modes. Pour chacune des formulations, la base modale contient les modes standards ainsi que quelques modes de section additionnels. Les

solutions ondulatoires sont représentées sur la figure 4.13. Bien qu'étant exprimée à partir d'un nombre de modes de section important, la méthode WFE se révèle à nouveau pénalisée au dessus de $600\,Hz$. Cela s'explique au regard du mouvement BF de compression qui n'est pas retranscrit par la base modale. D'un autre côté, la solution MWFE approxime les résonances principales et quelques résonances additionnelles de la structure en dessous de $1000\,Hz$. Elle fournit en outre une estimation moyenne des niveaux vibratoires au dessus de $1000\,Hz$. Notons cependant que les résonances d'ordres élevées ne sont pas prédites par la méthode dans le sens où les modes globaux ont été construits à partir de bases locales supposées refléter les comportements BF de structure.

Réponse harmonique du système sous excitation transversale

Nous examinons la réponse harmonique de la structure sandwich sous excitation transversale (cf. figure 4.11). Les solutions WFE et MWFE sont tout d'abord estimées sur la base des 4 modes globaux standards (cf. figures 4.8 et 4.9). Les solutions ondulatoires sont calculées dans $\mathcal{B}_f$ et sont représentées sur la figure 4.14.

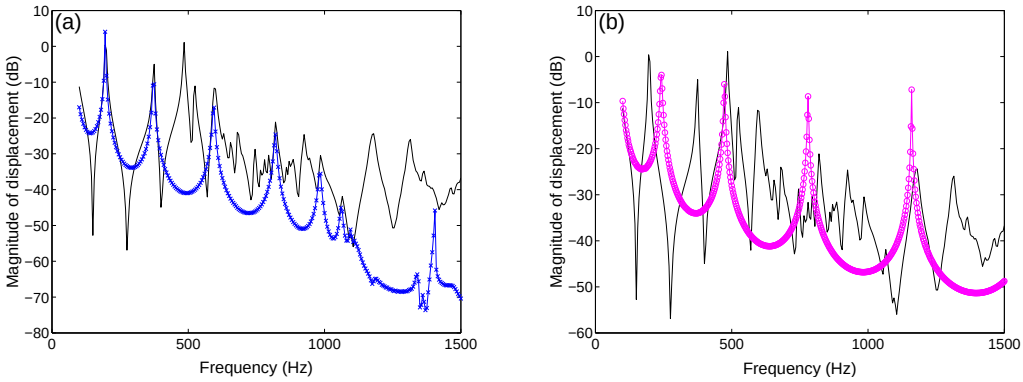

FIGURE 4.14 – Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation transversale : (a) solution WFE avec 4 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 4 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———).

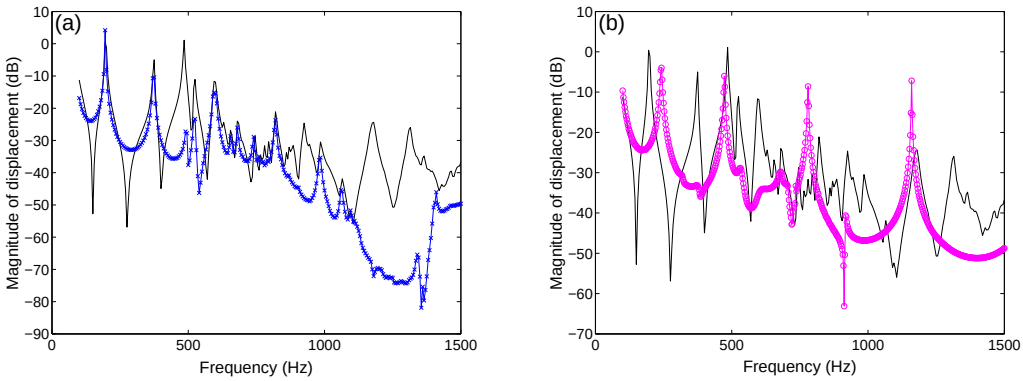

FIGURE 4.15 – Réponse en fréquences de la poutre sandwich sous excitation transversale : (a) solution WFE avec 25 modes (–x–x–) et solution éléments finis (———) ; (b) solution MWFE avec 8 modes (–o–o–) et solution éléments finis (———).

La méthode WFE permet de retranscrire correctement les résonances de flexion de la poutre en dessous de $1200\,Hz$. La méthode apparaît de nouveau faiblement convergente à fréquences élevées, au regard du mouvement de flexion qui n'est plus retranscrit par la formulation. D'un autre côté, la méthode MWFE permet d'approximer grossièrement quelques résonances de la structure. Elle estime également le comportement dynamique de la structure au delà de $1200\,Hz$. La méthode révèle un manque de convergence attribuable à la faible dimension de la base modale.
Les solutions WFE et MWFE ont par ailleurs été estimées à partir de bases modales élargies, contenant respectivement 25 et 8 modes. La méthode WFE révèle à nouveau un manque de convergence au dessous de $1200\,Hz$ et doit s'appuyer sur des bases modales plus élargies pour être précise à fréquences élevées. D'un autre côté, la méthode MWFE permet de retranscrire certaines résonances additionnelles de la structure, non décrites à partir des modes globaux standards.

Bilan

Le manque de convergence de la méthode WFE, pour décrire le comportement dynamique de la structure à fréquences élevées, a été mis en évidence. Cette problématique est attribuable au fait que les comportements BF de la structure ne sont plus retranscrits à partir des modes classiques aux fréquences élevées. Pour être convergente, la formulation doit être décrite à partir de bases modales surdimensionnées, englobant suffisamment de modes de section MF pour retranscrire les comportements standards de structure.
La méthode MWFE permet de retranscrire globalement, à partir de bases modales de faibles dimensions, le comportement dynamique de la structure sur $\mathcal{B}_f$. Notons cependant que la stratégie de calcul des modes globaux ne permet pas, sous sa forme actuelle, de décrire les modes de section d'ordres élevés. Cela s'explique au regard des dimensions des bases locales qui ont dû être *adaptées* pour décrire les modes standards. Dans cette optique, le formalisme MWFE révèle un manque de convergence pour retranscrire les comportements MF de structure.

4.5 Conclusions

Nous avons présenté la méthode MWFE pour décrire numériquement la propagation d'ondes dans les systèmes multi-couches. La méthode permet de calculer les modes d'ondes globaux par sous-structuration dynamique, à partir de bases modales locales dont les dimensions reflètent les échelles de vibrations des couches. Les modes globaux calculés reflètent les mouvements standards de structures à fréquences élevées. La méthode a été appliquée pour décrire la réponse forcée des systèmes multi-couches. La méthode s'appuie sur un problème aux limites non conventionnel établi sur le principe de dualité ondes incidentes / ondes réfléchies. Ce problème aux limites a été appliqué pour décrire la réponse harmonique d'une poutre sandwich. La méthode MWFE permet de décrire les comportements BF de la structure à partir de bases modales de faibles dimensions ; elle présente cependant un manque de convergence pour décrire les comportements MF de la structure. La construction de ces modes d'ondes globaux d'ordres élevés nécessite *a priori* de reconsidérer les dimensions des bases modales locales attachées aux couches. Ce sujet n'a pas été traité dans la présente étude et méritera plus amples considérations dans le cadre d'activités de recherche futures.

Chapitre 5

Propagation multi-modale dans les systèmes élastiques couplés

5.1 Introduction

Nous examinons le problème de couplage entre différentes structures élancées, connectées à un élément élastique de forme arbitraire. Nous appliquons la méthode des éléments finis pour décrire le comportement dynamique de l'élément de couplage et la méthode WFE pour décrire les comportements dynamiques des structures élancées sur des bases de modes d'ondes. Nous appliquons en outre le formalisme des *Multiplicateurs de Lagrange* [BMP, Pus04, Hac95] pour le traitement des interfaces guides d'ondes / élément de couplage. Ce formalisme permet de mailler chaque système d'une manière indépendante au regard des différentes échelles de vibrations mises en jeu. Le problème de couplage entre ces différents guides d'ondes (structures élancées) et l'élément élastique est illustré sur la figure 5.1.
Nous présentons ci-après un *Modèle de Matrice de Diffusion* (DMM) qui permet, dans le cadre de la méthode WFE, de décrire les mécanismes de réflexion et de transmission des modes d'ondes au niveau de l'élément de couplage. Les applications industrielles visées par le formalisme DMM concernent entre autres l'analyse vibratoire des systèmes couplés tels qu'un châssis d'automobile (cf. figure 1.1) et l'étude des mécanismes de réflexion d'ondes au niveau de défauts de formes pour le contrôle non-destructif des systèmes. L'ensemble de cette étude est présenté en ref. [MIJ06, MI05, IMZ09].
Dans un premier temps, nous présentons le modèle éléments finis sous-jacent au formalisme DMM, décrivant un ensemble de sous-structures – représentatives de différents guides d'ondes – connectées à un élément élastique. Le formalisme incorpore des termes d'excitations par forces et déplacements imposés pour l'élément (cf. figure 5.1) [MIJ06] et s'appuie sur la *Méthode Mortar* [BMP, CGF+02] pour la discrétisation des champs de multiplicateurs de Lagrange au niveau des interfaces de couplage. Nous présentons dans un second temps le formalisme DMM pour décrire la réflexion / transmission des modes d'ondes au niveau de l'élément de couplage. Nous appliquons par ailleurs le formalisme DMM au contrôle non-destructif des structures : les réflexions d'ondes BF & MF au niveau de défauts de formes de différents natures sont numériquement étudiées dans ce cadre ; la mise en oeuvre industrielle du problème est abordée en fin de chapitre.

5.2 Formulation du problème de couplage élastique

Considérons M structures élastiques, linéaires et dissipatives, connectées au travers d'un élément élastique. Ces structures sont supposées élancées et périodiques [1], de sorte qu'elles peuvent être décrites sur la base de modes d'ondes obtenus par la méthode WFE. L'élément de couplage est supposé élastique, linéaire et dissipatif, et peut être décrit dans le cadre de la méthode des éléments finis de la manière suivante :

$$\mathbb{K}\mathbf{q}^{\mathsf{c}} = \mathbf{F}^{\mathsf{c}}, \tag{5.1}$$

où $\mathbb{K}$ désigne l'opérateur de rigidité dynamique complexe et $\mathbf{F}^{\mathsf{c}}$ désigne les forces appliquées, englobant (i) les actions du couplage, (ii) les déplacements imposés, (iii) les forces imposées. L'élément de couplage est maillé indépendamment des systèmes environnants, la continuité des déplacements au niveau des interfaces (couplage et déplacements imposés) étant imposée par l'introduction d'un ensemble de champs de multiplicateurs de Lagrange [BMP, Pus04, Hac95].

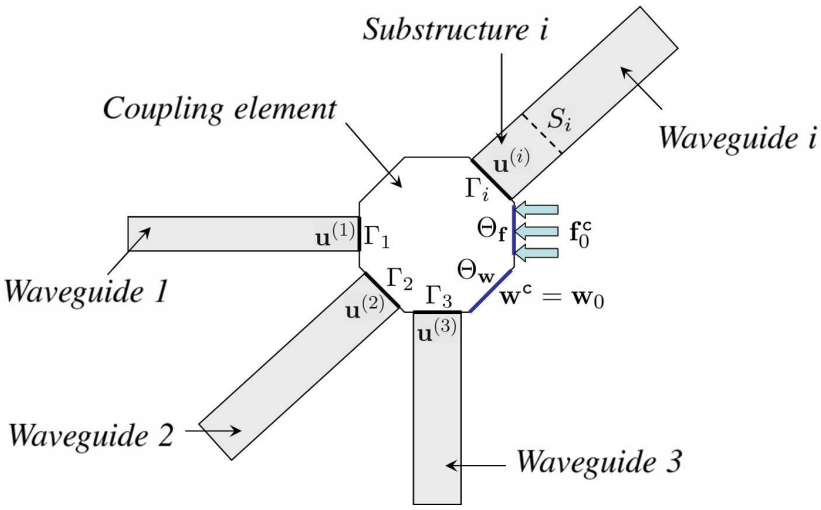

FIGURE 5.1 – Illustration de plusieurs guides d'ondes élastiques connectés au travers d'un élément de couplage excité par forces et déplacements imposés.

Le formalisme DMM s'appuie sur un modèle éléments finis traduisant le couplage entre un ensemble de sous-structures et l'élément élastique. La formulation variationnelle permettant d'écrire ce modèle est présentée ci-après :
Notons $\{\mathbf{w}^{(i)}\}_i$ et $\mathbf{w}^{\mathsf{c}}$ les champs de déplacements des sous-structures et de l'élément de couplage, respectivement. Notons S_i la surface de couplage entre chaque sous-structure i $(i = 1, \ldots, M)$, connectée à l'élément, et sa sous-structure voisine appartenant au guide d'ondes i (cf. figure 5.1). Notons $\{\Gamma_i\}_{i=1,\ldots,M}$ l'ensemble des interfaces guides d'ondes / élément de couplage, telles que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ si $i \neq j$ [2]. Notons $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{f}_0^{\mathsf{c}}$ les champs de déplacements et forces imposés à l'élément de couplage et notons $\Theta_{\mathbf{w}}$ et $\Theta_{\mathbf{f}}$ leurs surfaces d'applications respectives. Introduisons finalement les champs de multiplicateurs de Lagrange $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}_{i=1,\ldots,M}$ et $\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_{\mathbf{w}}}$, définis respectivement sur $\{\Gamma_i\}_{i=1,\ldots,M}$ et $\Theta_{\mathbf{w}}$ et traduisant les contraintes $\mathbf{w}^{\mathsf{c}} = \mathbf{w}^{(i)}$ sur Γ_i $(i = 1, \ldots, M)$ et $\mathbf{w}^{\mathsf{c}} = \mathbf{w}_0$ sur $\Theta_{\mathbf{w}}$. La formulation variationnelle exprimant l'équilibre dynamique des sous-structures couplées

1. Chaque structure est assimilée à un ensemble de sous-structures identiques.
2. Le cas de deux guides d'ondes *directement* connectés [YL89] n'est pas pris en compte dans le cadre de cette étude.

à l'élément de couplage s'écrit $\forall\delta\mathbf{w}^{(i)}$, $\forall\delta\mathbf{w}^{\mathsf{c}}$, $\forall\delta\boldsymbol{\lambda}_i$ et $\forall\delta\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_\mathbf{w}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M}\{z^{(i)}(\delta\mathbf{w}^{(i)},\mathbf{w}^{(i)})+b_{\Gamma_i}(\delta\boldsymbol{\lambda}_i,\mathbf{w}^{\mathsf{c}}-\mathbf{w}^{(i)})+b_i(\boldsymbol{\lambda}_i,\delta\mathbf{w}^{\mathsf{c}}-\delta\mathbf{w}^{(i)})\}\\
&+z^{\mathsf{c}}(\delta\mathbf{w}^{\mathsf{c}},\mathbf{w}^{\mathsf{c}})+b_{\Theta_\mathbf{w}}(\delta\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_\mathbf{w}},\mathbf{w}^{\mathsf{c}}-\mathbf{w}_0)+b_{\Theta_\mathbf{w}}(\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_\mathbf{w}},\delta\mathbf{w}^{\mathsf{c}}) \qquad (5.2)\\
&=\sum_{i=1}^{M}g_{S_i}(\delta\mathbf{w}^{(i)})+g_{\Theta_\mathbf{f}}(\delta\mathbf{w}^{\mathsf{c}}),
\end{aligned}$$

où les formes bilinéaires $\{z^{(i)}\}_i$, z^{c}, $\{b_i\}_i$, $b_{\Theta_\mathbf{w}}$ et linéaires $\{g_{S_i}\}_i$ et $g_{\Theta_\mathbf{f}}$ sont définies par [OSS97] :

$$z^{(i)}(\mathbf{w}_1^{(i)},\mathbf{w}_2^{(i)})=-\omega^2\int_{\Omega_i}\rho(\mathbf{w}_1^{(i)})^T\mathbf{w}_2^{(i)}\,d\mathbf{x}+\int_{\Omega_i}\boldsymbol{\epsilon}^T_{\mathbf{w}_1^{(i)}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{w}_2^{(i)}}\,d\mathbf{x}\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.3)$$

$$z^{\mathsf{c}}(\mathbf{w}_1^{\mathsf{c}},\mathbf{w}_2^{\mathsf{c}})=-\omega^2\int_{\Omega_\mathsf{c}}\rho(\mathbf{w}_1^{\mathsf{c}})^T\mathbf{w}_2^{\mathsf{c}}\,d\mathbf{x}+\int_{\Omega_\mathsf{c}}\boldsymbol{\epsilon}^T_{\mathbf{w}_1^{\mathsf{c}}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{w}_2^{\mathsf{c}}}\,d\mathbf{x}, \quad (5.4)$$

$$b_i(\boldsymbol{\lambda}_i,\mathbf{w}_{\Gamma_i})=\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{\lambda}_i^T\mathbf{w}_{\Gamma_i}\,ds\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.5)$$

$$b_{\Theta_\mathbf{w}}(\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_\mathbf{w}},\mathbf{w}_{\Theta_\mathbf{w}})=\int_{\Theta_\mathbf{w}}\boldsymbol{\lambda}^T_{\Theta_\mathbf{w}}\mathbf{w}_{\Theta_\mathbf{w}}\,ds, \quad (5.6)$$

$$g_{S_i}(\mathbf{w}^{(i)})=\int_{S_i}(\mathbf{w}^{(i)})^T\mathbf{f}^{(i)}\,ds\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.7)$$

$$g_{\Theta_\mathbf{f}}(\mathbf{w}^{\mathsf{c}})=\int_{\Theta_\mathbf{f}}(\mathbf{w}^{\mathsf{c}})^T\mathbf{f}_0^{\mathsf{c}}\,ds\,. \quad (5.8)$$

La discrétisation par éléments finis des champs de déplacements et de multiplicateurs de Lagrange, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w}^{(i)}=\mathbf{N}^{(i)}\mathbf{q}^{(i)} && \text{dans } \Omega_i && i=1,\dots,M, && (5.9)\\
&\mathbf{w}^{\mathsf{c}}=\mathbf{N}^{\mathsf{c}}\mathbf{q}^{\mathsf{c}} && \text{dans } \Omega_c, && && (5.10)\\
&\mathbf{w}_0=\boldsymbol{\xi}_0\mathbf{q}_0 && \text{sur } \Theta_\mathbf{w}, && && (5.11)\\
&\boldsymbol{\lambda}_i=\boldsymbol{\xi}_i\mathbf{p}_i && \text{sur } \Gamma_i && i=1,\dots,M, && (5.12)\\
&\boldsymbol{\lambda}_{\Theta_\mathbf{w}}=\boldsymbol{\xi}_{\Theta_\mathbf{w}}\mathbf{p}_{\Theta_\mathbf{w}} && \text{sur } \Theta_\mathbf{w}, && && (5.13)
\end{aligned}$$

permet d'aboutir au problème suivant :

$$\mathbf{D}^{(i)}\mathbf{q}^{(i)}=(\mathbf{L}^{(i)}_{S_i})^T\mathbf{F}^{(i)}_{S_i}+(\mathbf{L}^{(i)}_{\Gamma_i})^T\mathbf{F}^{(i)}_{\Gamma_i}\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.14)$$

$$\mathbb{K}\mathbf{q}^{\mathsf{c}}=(\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}})^T\mathbf{F}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}+(\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{f}})^T\mathbf{F}^{\mathsf{c}}_0+\sum_{i=1}^{M}(\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i})^T\mathbf{F}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}, \quad (5.15)$$

et

$$\mathcal{B}^{\mathsf{c}}_i\mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}=\mathcal{B}^{(i)}_i\mathbf{q}^{(i)}_{\Gamma_i}\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{B}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}\mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}=\mathcal{B}^0_{\Theta_\mathbf{w}}\mathbf{q}_0. \quad (5.17)$$

Ci-dessus, $\mathbf{q}^{(i)}_{\Gamma_i}$ et $\mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}$ représentent les restrictions des déplacements $\mathbf{q}^{(i)}$ et $\mathbf{q}^{\mathsf{c}}$ à Γ_i ; $\mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}$ représente la restriction des déplacements $\mathbf{q}^{\mathsf{c}}$ à $\Theta_\mathbf{w}$. $\{\mathbf{L}^{(i)}_{\Gamma_i}\}_i$, $\{\mathbf{L}^{(i)}_{S_i}\}_i$, $\{\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}\}_i$, $\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}$ et $\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{f}}$ représentent des opérateurs Booléens définis par

$$\mathbf{q}^{(i)}_{\Gamma_i}=\mathbf{L}^{(i)}_{\Gamma_i}\mathbf{q}^{(i)}\quad,\quad \mathbf{q}^{(i)}_{S_i}=\mathbf{L}^{(i)}_{S_i}\mathbf{q}^{(i)}\quad,\quad \mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}=\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Gamma_i}\mathbf{q}^{\mathsf{c}}\qquad i=1,\dots,M, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}=\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}\mathbf{q}^{\mathsf{c}}\quad,\quad \mathbf{q}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{f}}=\mathbf{L}^{\mathsf{c}}_{\Theta_\mathbf{f}}\mathbf{q}^{\mathsf{c}}. \quad (5.19)$$

En outre, $\{\mathcal{B}_i^{(i)}\}_i$, $\{\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}}\}_i$, $\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}$ et $\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{0}$ désignent des matrices de couplages définies par :

$$\mathcal{B}_i^{(i)} = \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\xi}_i)^T \mathbf{N}_{\Gamma_i}^{(i)}\, ds \qquad , \qquad \mathcal{B}_i^{\mathtt{c}} = \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\xi}_i)^T \mathbf{N}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}\, ds \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{5.20}$$

$$\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}} = \int_{\Theta_\mathbf{w}} (\boldsymbol{\xi}_{\Theta_\mathbf{w}})^T \mathbf{N}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}\, ds \qquad , \qquad \mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{0} = \int_{\Theta_\mathbf{w}} (\boldsymbol{\xi}_{\Theta_\mathbf{w}})^T \boldsymbol{\xi}_0\, ds, \tag{5.21}$$

où $\mathbf{N}_{\Gamma_i}^{(i)}$ et $\mathbf{N}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}$ désignent les traces de $\mathbf{N}^{(i)}$ et $\mathbf{N}^{\mathtt{c}}$ sur Γ_i, respectivement, et où $\mathbf{N}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}$ désigne la trace de $\mathbf{N}^{\mathtt{c}}$ sur $\Theta_\mathbf{w}$.
Finalement, dans (5.14) et (5.15), $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)}\}_i$, $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}\}_i$ représentent les forces d'interfaces appliquées respectivement aux guides d'ondes et à l'élément de couplage sur $\{\Gamma_i\}_i$, définies par :

$$\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} = (\mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \mathbf{p}_i \qquad , \qquad \mathbf{F}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}} = -(\mathcal{B}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}})^T \mathbf{p}_i \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{5.22}$$

Les équations (5.14) et (5.15) expriment l'équilibre dynamique de chaque sous-structure i et de l'élément de couplage. Les équations (5.16) et (5.17) expriment la continuité des déplacements sur $\{\Gamma_i\}_i$ et $\Theta_\mathbf{w}$ au sens faible. Il a été montré que la *Méthode Mortar* [BMP, CGF+02] permet d'optimiser la convergence du modèle numérique de couplage : dans ce cadre, les fonctions d'interpolations des multiplicateurs de Lagrange sont choisies de sorte qu'elles correspondent aux traces sur $\{\Gamma_i\}_i$ et $\Theta_\mathbf{w}$ des fonctions d'interpolations du déplacement de l'élément de couplage :

$$\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{N}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}} \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{\Theta_\mathbf{w}} = \mathbf{N}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}. \tag{5.24}$$

La méthode Mortar permet notamment de retranscrire sur $\{\Gamma_i\}_i$ la dynamique de l'élément de couplage, décrite par éléments finis, à partir des mouvements d'ondes se propageant dans les différentes structures. La méthode Mortar implique l'unicité de la solution du problème de couplage, au regard des matrices $\{\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}}\}_i$ et $\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}$ qui sont carrées définies positives [Pus04] :

$$\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}} = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{N}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}})^T \mathbf{N}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}\, ds \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}} = \int_{\Theta_\mathbf{w}} (\mathbf{N}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}})^T \mathbf{N}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}\, ds. \tag{5.26}$$

Dans ce sens, les équations (5.16), (5.17) et (5.22) permettent d'obtenir

$$\mathbf{q}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}} = (\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}})^{-1} \mathcal{B}_i^{(i)} \mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)} \qquad , \qquad \mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} = -(\mathcal{B}_i^{(i)})^T (\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}})^{-T} \mathbf{F}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}} \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{5.27}$$

$$\mathbf{q}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}} = (\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}})^{-1} \mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{0} \mathbf{q}_0. \tag{5.28}$$

La relation (5.27) détermine de manière unique, à partir de $\mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)}$ et $\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}$, les déplacements $\mathbf{q}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}$ et les forces d'interfaces $\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)}$ de l'élément de couplage sur Γ_i ; la relation (5.28) détermine de manière unique, à partir de $\mathbf{q}_0$, les déplacements $\mathbf{q}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}}$ de l'élément de couplage sur $\Theta_\mathbf{w}$. $(\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}})^{-1}\mathcal{B}_i^{(i)}$ et $(\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}})^{-1}\mathcal{B}_{\Theta_\mathbf{w}}^{0}$ représentent ici des opérateurs de projections permettant d'exprimer les déplacements de l'élément de couplage sur les interfaces Γ_i et $\Theta_\mathbf{w}$ à partir des déplacements imposés $\mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)}$ et $\mathbf{q}_0$. Par ailleurs, $-(\mathcal{B}_i^{(i)})^T(\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}})^{-T}$ représentent un opérateur de projection permettant d'exprimer les forces d'interfaces appliquées aux guides d'ondes sur Γ_i à partir des forces imposées $\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{\mathtt{c}}$.
Sous forme matricielle, l'ensemble des relations (5.27) et (5.28) s'exprime

$$\mathbf{q}_\Gamma^{\mathtt{c}} = \mathbf{T}\mathbf{q}_\Gamma^{\mathtt{wg}} \qquad , \qquad \mathbf{F}_\Gamma^{\mathtt{wg}} = -\mathbf{T}^T \mathbf{F}_\Gamma^{\mathtt{c}} \qquad , \qquad \mathbf{q}_{\Theta_\mathbf{w}}^{\mathtt{c}} = \mathbf{T}_0 \mathbf{q}_0, \tag{5.29}$$

où

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathcal{B}^{\mathtt{c}}_{\Gamma_1})^{-1}\mathcal{B}^{(1)}_{\Gamma_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}\cdots & (\mathcal{B}^{\mathtt{c}}_{\Gamma_M})^{-1}\mathcal{B}^{(M)}_{\Gamma_M} & \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_0 = (\mathcal{B}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}})^{-1}\mathcal{B}^{0}_{\Theta_\mathbf{w}}, \tag{5.30}$$

et où $\mathbf{q}^{\mathtt{wg}}_\Gamma = ((\mathbf{q}^{(1)}_{\Gamma_1})^T \dots (\mathbf{q}^{(M)}_{\Gamma_M})^T)^T$ et $\mathbf{F}^{\mathtt{wg}}_\Gamma = ((\mathbf{F}^{(1)}_{\Gamma_1})^T \dots (\mathbf{F}^{(M)}_{\Gamma_M})^T)^T$ représentent les déplacements et forces relatifs aux guides d'ondes sur $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$.

Les équations (5.29) établissent les relations entre les variables cinématiques des guides d'ondes à celles de l'élément de couplages sur $\{\Gamma_i\}_i$. Pour décrire la réflexion / transmission d'ondes au niveau de l'élément, la méthode WFE s'appuie sur un modèle éléments finis exprimant les couplages entre les déplacements d'interfaces $\{\mathbf{q}^{(i)}_{\Gamma_i}\}_i$. Ce modèle s'obtient par condensation de l'opérateur de rigidité dynamique $\mathbb{K}$ sur les interfaces $\{\Gamma_i\}_i$. La méthodologie est détaillée ci-après :
Considérons la réponse dynamique de l'élément de couplage :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{\mathtt{II}} & \mathbb{K}_{\mathtt{IF}} \\ \mathbb{K}_{\mathtt{FI}} & \mathbb{K}_{\mathtt{FF}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\mathtt{I}} \\ \mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\mathtt{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{\mathtt{c}} \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

où $\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\mathtt{F}} = ((\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_\Gamma)^T(\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}})^T(\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{f}})^T)^T$ et $\mathbf{F}^{\mathtt{c}} = ((\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_\Gamma)^T(\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}})^T(\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{f}})^T)^T$ représentent les déplacements et forces définis sur la surface $\Gamma \cup \Theta_\mathbf{w} \cup \Theta_\mathbf{f}$; $\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\mathtt{I}}$ désigne les déplacements des ddl's internes, hors des excitations. Par condensation de $\mathbb{K}$ sur $\Gamma \cup \Theta_\mathbf{w} \cup \Theta_\mathbf{f}$, on obtient :

$$\mathbb{K}^*\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\mathtt{F}} = \mathbf{F}^{\mathtt{c}} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} \mathbb{K}^*_{\Gamma\Gamma} & \mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{w}} & \mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{f}} \\ \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{w}\Gamma} & \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{w}\Theta_\mathbf{w}} & \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{w}\Theta_\mathbf{f}} \\ \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Gamma} & \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{w}} & \mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{f}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{\mathtt{c}}_\Gamma \\ \mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}} \\ \mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{f}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\mathtt{c}}_\Gamma \\ \mathbf{F}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}} \\ \mathbf{F}^{\mathtt{c}}_0 \end{pmatrix}, \tag{5.32}$$

où

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K}_{\mathtt{FF}} - \mathbb{K}_{\mathtt{FI}}(\mathbb{K}_{\mathtt{II}})^{-1}\mathbb{K}_{\mathtt{IF}}. \tag{5.33}$$

En condensant par ailleurs $\mathbb{K}^*$ sur Γ, on obtient :

$$\mathbb{K}^{**}\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_\Gamma = \mathbf{F}^{\mathtt{c}}_\Gamma + \mathbb{R}_\mathbf{w}\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}} + \mathbb{R}_\mathbf{f}\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_0, \tag{5.34}$$

où

$$\mathbb{K}^{**} = \mathbb{K}^*_{\Gamma\Gamma} - \mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{f}}(\mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{f}})^{-1}\mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Gamma}. \tag{5.35}$$

La matrice $\mathbb{R}_\mathbf{w}$ permet de retranscrire les excitations par déplacements $\mathbf{q}^{\mathtt{c}}_{\Theta_\mathbf{w}}$,

$$\mathbb{R}_\mathbf{w} = -\mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{w}} + \mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{f}}(\mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{f}})^{-1}\mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{w}}, \tag{5.36}$$

tandis que la matrice $\mathbb{R}_\mathbf{f}$ permet de retranscrire les excitations par forces $\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_0$,

$$\mathbb{R}_\mathbf{f} = -\mathbb{K}^*_{\Gamma\Theta_\mathbf{f}}(\mathbb{K}^*_{\Theta_\mathbf{f}\Theta_\mathbf{f}})^{-1}. \tag{5.37}$$

Au regard de (5.29), (5.34) s'exprime finalement

$$-\mathbf{T}^{\mathtt{T}}\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\mathbf{q}^{\mathtt{wg}}_\Gamma = \mathbf{F}^{\mathtt{wg}}_\Gamma - \mathbf{T}^{\mathtt{T}}\mathbb{R}_\mathbf{w}\mathbf{T}_0\mathbf{q}_0 - \mathbf{T}^{\mathtt{T}}\mathbb{R}_\mathbf{f}\mathbf{F}^{\mathtt{c}}_0. \tag{5.38}$$

L'équation (5.38) constitue la formulation de couplage sous-jacente au formalisme DMM. Elle relie les variables cinématiques de différents guides d'ondes connectés à un élément de couplage qui peut être *a priori* complexe et sollicité par forces et déplacements imposés. Par projection des variables cinématiques sur des bases modales WFE, cette relation permet de décrire en BF & MF les mécanismes de diffusion (réflexion et transmission) d'ondes au niveau de cet élément de couplage. Le formalisme DMM est présenté ci-dessous.

5.3 Formalisme DMM

Le modèle de matrice de diffusion (DMM) s'exprime à partir de (5.38), en projetant les variables cinématiques (déplacements et forces) de chaque guide d'ondes i sur une base réduite de modes d'ondes $\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{(i)}\}_j$ [3] :

$$\mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)} = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{inc}(i)} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{q}}^{\mathtt{ref}(i)} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(i)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(i)} \end{array}\right) \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{5.39}$$

$$\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{inc}(i)} & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathtt{F}}^{\mathtt{ref}(i)} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(i)} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(i)} \end{array}\right) \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{5.40}$$

Les équations (5.39) et (5.40) s'appuient sur le découpage de la matrice des modes d'ondes $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{(i)}$ proposé par (2.13). Les exposants `inc` et `ref` renvoient aux modes d'ondes qui sont respectivement incidents à – et réfléchis par – l'élément de couplage [4]. $\{\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(i)}\}_i$ et $\{\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(i)}\}_i$ désignent les amplitudes des modes incidents et réfléchis. Les variables cinématiques $\mathbf{q}_\Gamma^{\mathtt{wg}}$ et $\mathbf{F}_\Gamma^{\mathtt{wg}}$, traduisant les déplacements et forces de l'ensemble des guides d'ondes sur $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$, s'expriment alors :

$$\mathbf{q}_\Gamma^{\mathtt{wg}} = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} \end{array}\right), \tag{5.41}$$

$$\mathbf{F}_\Gamma^{\mathtt{wg}} = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} & \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} \end{array}\right), \tag{5.42}$$

où

$$\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} = \left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}(M)} \end{array}\right], \quad \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} = \left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}(M)} \end{array}\right], \tag{5.43}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}} = \left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}(M)} \end{array}\right], \quad \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} = \left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}(M)} \end{array}\right], \tag{5.44}$$

et où $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} = ((\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(1)})^T \ldots (\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}(M)})^T)^T$ et $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} = ((\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(1)})^T \ldots (\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}(M)})^T)^T$ représentent les amplitudes de l'ensemble des modes incidents à – et réfléchis par – l'élément de couplage, respectivement. En insérant (5.41) et (5.42) dans (5.38), on exprime la relation entre modes

3. Ces modes sont obtenus dans le cadre de la méthode WFE par résolution du problème aux valeurs propres (2.4).

4. Rappelons que le terme *réfléchi* désigne, par convention, un mode qui « apparaît réfléchi » par l'élément de couplage et que ce mode englobe formellement un ensemble de trois composantes : celle effectivement réfléchie, celle transmise et celle générée par les sources d'excitation.

réfléchis et incidents de la manière suivante :

$$\left[\ \mathbf{T}^T\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} + \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}\ \middle|\ \mathbf{T}^T\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} + \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}\ \right]\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}\\ \widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}\end{pmatrix} \tag{5.45}$$
$$= \mathbf{T}^T\mathbb{R}_{\mathbf{w}}\mathbf{T}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{T}^T\mathbb{R}_{\mathbf{f}}\mathbf{F}_0^{\mathtt{c}}.$$

L'équation (5.45) permet de décrire les amplitudes $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}}$ des modes réfléchis à partir des amplitudes $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}$ des modes incidents de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} = \widetilde{\mathbb{C}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}} + \widetilde{\mathcal{F}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^{\mathtt{c}}), \tag{5.46}$$

où $\widetilde{\mathbb{C}}$ représente la matrice de diffusion de l'élément de couplage, traduisant les coefficients de réflexion / transmission des modes d'ondes :

$$\widetilde{\mathbb{C}} = -\left[\mathbf{T}^T\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} + \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}\right]^+\left[\mathbf{T}^T\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} + \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}\right], \tag{5.47}$$

et où $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^{\mathtt{c}})$ représente les effets des sources d'excitation :

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^{\mathtt{c}}) = \left[\mathbf{T}^T\mathbb{K}^{**}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} + \widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}\right]^+\left[\mathbf{T}^T\mathbb{R}_{\mathbf{w}}\mathbf{T}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{T}^T\mathbb{R}_{\mathbf{f}}\mathbf{F}_0^{\mathtt{c}}\right]. \tag{5.48}$$

Le formalisme DMM est décrit à partir des équations (5.46), (5.47) et (5.48) : il permet d'appréhender les mécanismes de réflexion et de transmission d'ondes à l'intérieur de différents guides d'ondes connectés au travers d'un élément élastique. Le formalisme est général et reflète *a priori* l'ensemble des conditions de frontières associées à la méthode WFE (cf (2.16)). Il permet notamment de retrouver les résultats classiques de conditions aux limites [YL89] : à titre d'exemple, pour un guide d'ondes excité sur une extrémité libre par une force $\mathbf{F}_0$, $\mathbb{K}^{**} = \mathbf{0}$, $\widetilde{\mathbb{C}} = -(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}})^+\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}_0^{\mathtt{c}}) = (\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}})^+\mathbf{F}_0$; pour un guide d'ondes soumis sur une de ses extrémités à un déplacement $\mathbf{q}_0$, $\mathbb{K}^{**} \to \infty$, $\widetilde{\mathbb{C}} = -(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}})^+\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbf{q}_0) = (\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}})^+\mathbf{q}_0$.

Le formalisme DMM a été testé et vérifié numériquement pour décrire, d'une part la réflexion / transmission des modes d'ondes dans plusieurs systèmes connectés par ressort ou système masse-ressort avec force appliquée [MI05, MIJ06], et d'autre part la réflexion / transmission des modes d'ondes dans deux systèmes connectés à une jonction souple [IMZ09]. Dans ces cas, le formalisme permet de retranscrire les solutions analytiques BF, basées sur la description en ondes planes, et permet de décrire en MF les mécanismes de couplages entre modes standards (compression, flexion) et modes de section, non prédits par les théories analytiques.

Notes sur la convergence du formalisme DMM

Notons que la convergence du formalisme DMM pour décrire les mécanismes de réflexion / transmission d'ondes dépend des dimensions des bases réduites $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{(i)}\}_j\}_i$. A l'intérieur d'une bande de fréquences donnée, ces bases doivent être suffisamment complètes au regard du comportement dynamique de l'élément de couplage qui doit être retranscrit par les projections de $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{(i)}\}_j\}_i$ sur $\{\Gamma_i\}_i$ [5].

Notons par ailleurs que les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission déduites de la matrice de diffusion $\widetilde{\mathbb{C}}$ (cf. (5.27)) dépendent de la normalisation des modes d'ondes $\{\{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j^{(i)}\}_j\}_i$. Celle-ci doit *a priori* être effectuée de manière similaire pour tous les guides d'ondes.

5. Les opérateurs de projection permettant de retranscrire la dynamique de l'élément de couplage à partir des dynamiques des guides d'ondes sont $\{(\mathcal{B}_i^{\mathtt{c}})^{-1}\mathcal{B}_i^{(i)}\}_i$ (cf. (5.27)).

5.4 Application au contrôle non-destructif

5.4.1 Propos liminaires

Nous appliquons le formalisme DMM pour décrire la réflexion d'ondes dans deux guides à sections identiques, connectés à un élément élastique non excité. Ce problème est central pour les applications du type *contrôle non-destructif* où l'on cherche à estimer les caractéristiques de défauts de structures par réflexion d'ondes de différentes natures. Le modèle éléments finis sous-jacent au formalisme DMM décrit le couplage entre deux sous-structures identiques 1 et 2, appartenant aux deux guides d'ondes, et l'élément élastique non excité. Le problème est illustré sur la figure 5.2, où $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ reflètent les champs de multiplicateurs de Lagrange définis sur les interfaces Γ_1 et Γ_2.

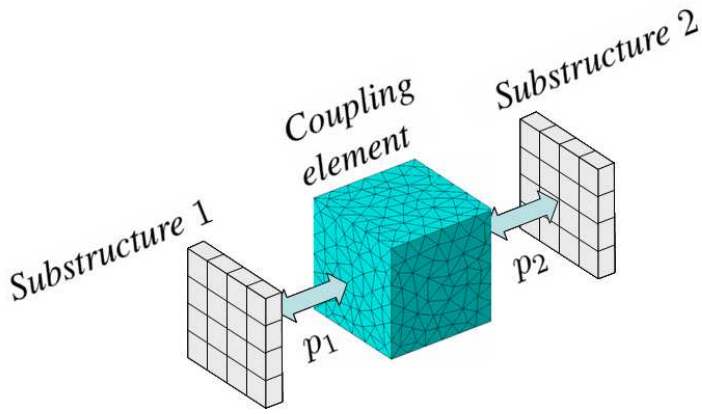

FIGURE 5.2 – Illustration du problème de couplage entre deux sous-structures identiques connectées à un élément élastique.

Dans ce cas, le formalisme DMM s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{ref}} = \widetilde{\mathbb{C}}\widetilde{\mathbf{Q}}^{\mathtt{inc}}. \tag{5.49}$$

Les composantes $\{\widetilde{\mathbb{C}}_{jk}\}_{jk}$ de la matrice de diffusion $\widetilde{\mathbb{C}}$ représentent les coefficients de réflexion et de transmission associés aux différents modes se propageant dans les deux guides d'ondes.
Afin d'appréhender les mécanismes de réflexion d'ondes au niveau de l'élément, nous proposons de décrire la matrice de diffusion à partir d'une base modifiée de la forme (4.30), qui se traduit ici de la manière suivante : $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{ref}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$ et $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{ref}}_{\mathbf{F}} \rightarrow -\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}}$. Dans ce cadre, l'équation (5.47) devient

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \left[\mathbf{I} - (\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})^{+}\mathbf{T}^{T}\mathbb{K}^{*}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}\right]^{-1}\left[\mathbf{I} + (\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})^{+}\mathbf{T}^{T}\mathbb{K}^{*}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}\right], \tag{5.50}$$

où $(\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})^{+}$ est tel que $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}}(\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})^{+} = \mathbf{I}$. Les valeurs des coefficients de réflexion sont reliées aux composantes de la matrice $(\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})^{+}\mathbf{T}^{T}\mathbb{K}^{*}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$ qui représente la projection de la « réponse modale » $\mathbf{T}^{T}\mathbb{K}^{*}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$, c'est-à-dire la réponse de l'élément de couplage au déplacement modal $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$, sur $(\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{F}})$. D'une manière générale, les réflexions apparaissent pour les modes d'ondes qui sont associés à des composantes de $\mathbf{T}^{T}\mathbb{K}^{*}\mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$ suffisamment petites au regard des composantes de $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathtt{inc}}_{\mathbf{q}}$. Cela se vérifie notamment lorsque les formes modales interfèrent avec des hétérogénéités locales contenues dans l'élément. Ces propos sont mis en évidence ci-dessous.

5.4.2 Applications numériques

Nous appliquons le formalisme DMM pour décrire la réflexion d'ondes dans deux guides à sections identiques, au niveau d'entailles de différentes dimensions. Les modèles éléments finis reflétant le couplage entre deux sous-structures identiques et ces défauts de formes sont illustrés sur la figure 5.3 : les entailles étudiées ont pour profondeur $a = h_y/2$ et $a = h_y/4$, respectivement, où h_y représente la hauteur des guides d'ondes. La densité de maillage de l'élément de couplage est supposée suffisamment élevée pour décrire les comportements locaux faiblement réguliers en pointe d'entaille. Les modes d'ondes se propageant dans les deux systèmes connectés sont obtenus dans le cadre de la méthode WFE par résolution numérique du problème aux valeurs propres (2.4).

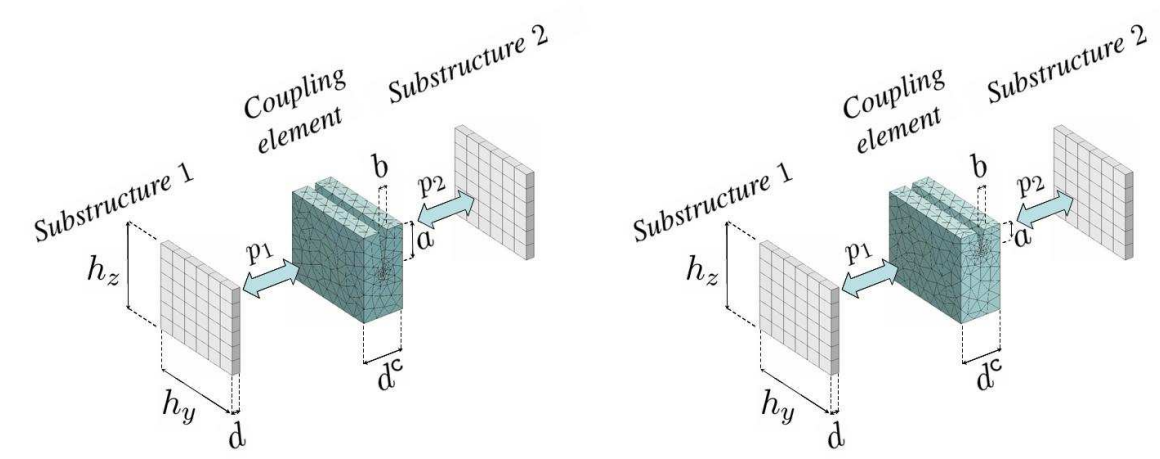

FIGURE 5.3 – Illustration du problème de couplage entre deux guides d'ondes identiques connectés à un élément élastique illustrant une entaille de profondeur $a = h_y/2$ (à gauche) et une entaille de profondeur $a = h_y/4$ (à droite).

Les coefficients de réflexion de dix modes d'ondes ont été estimés sur la bande de fréquences $\mathcal{B}_f = [10^3\, Hz\,,\, 25 \times 10^3\, Hz]$ à partir du formalisme DMM. Ces modes désignent les modes standards (compression, torsion, flexions, cisaillement) et les modes de section qui deviennent propagatifs dans $\mathcal{B}_f$. Pour décrire les coefficients de réflexion de ces dix modes, la matrice de diffusion $\widetilde{\mathbb{C}}$ a été construite sur une base élargie de trente modes, permettant de retranscrire *a priori* les comportements faiblement réguliers de l'élément de couplage [IMZ09]. Les évolutions fréquentielles des coefficients de réflexion ont été retranscrites sur les figures 5.4 et 5.5.
Les coefficients de réflexion des dix modes au niveau d'un défaut de grande dimension ($a = h_y/2$) apparaissent globalement élevés sur $\mathcal{B}_f$; ils révèlent des maxima locaux lorsque les modes révèlent des formes de section spécifiques (cf. figure 5.6) pour lesquelles les longueurs caractéristiques sont cohérentes avec la taille du défaut. D'un autre côté, il apparaît que les coefficients de réflexion des modes standards au niveau d'un défaut de petite dimension ($a = h_y/4$) sont globalement faibles sur $\mathcal{B}_f$. Logiquement, seuls certains modes de section (mode 7 notamment) permettent de détecter ce défaut par réflexion ; cela s'explique au regard des formes de section de ces modes qui révèlent, au niveau des bords notamment, des longueurs caractéristiques proches de celle du défaut.

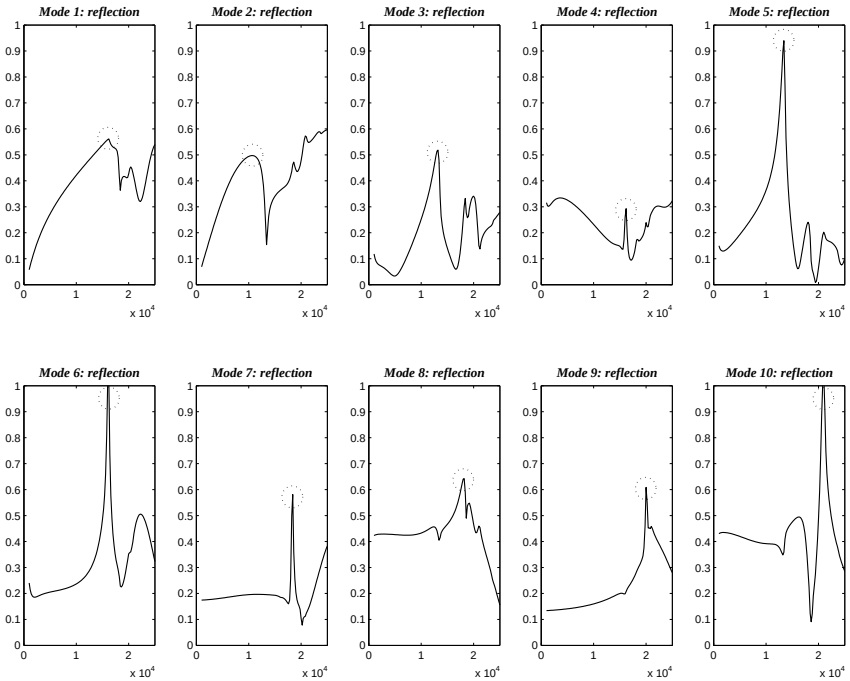

FIGURE 5.4 – Evolutions fréquentielles des coefficients de réflexion au niveau d'une grande entaille.

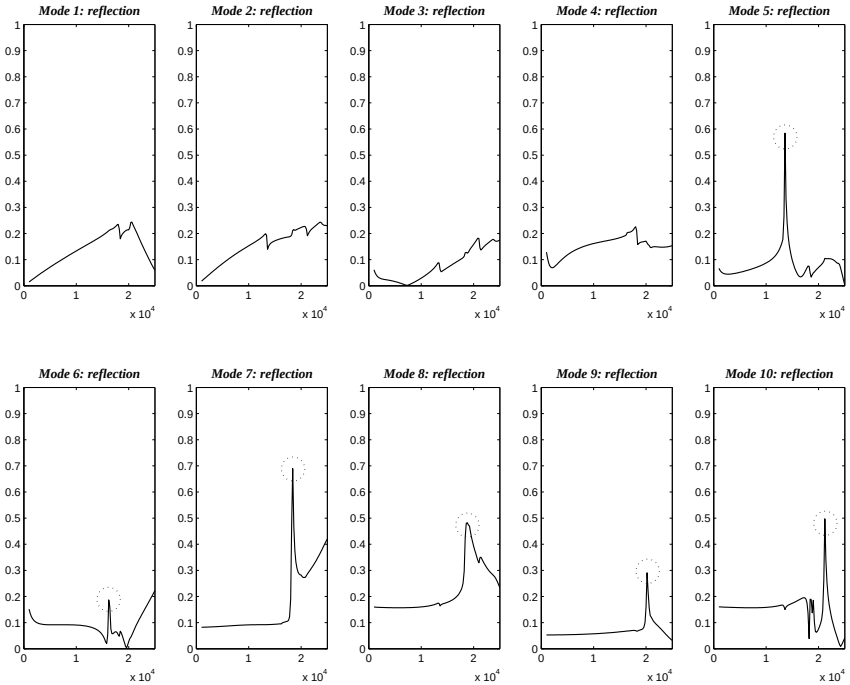

FIGURE 5.5 – Evolutions fréquentielles des coefficients de réflexion au niveau d'une petite entaille.

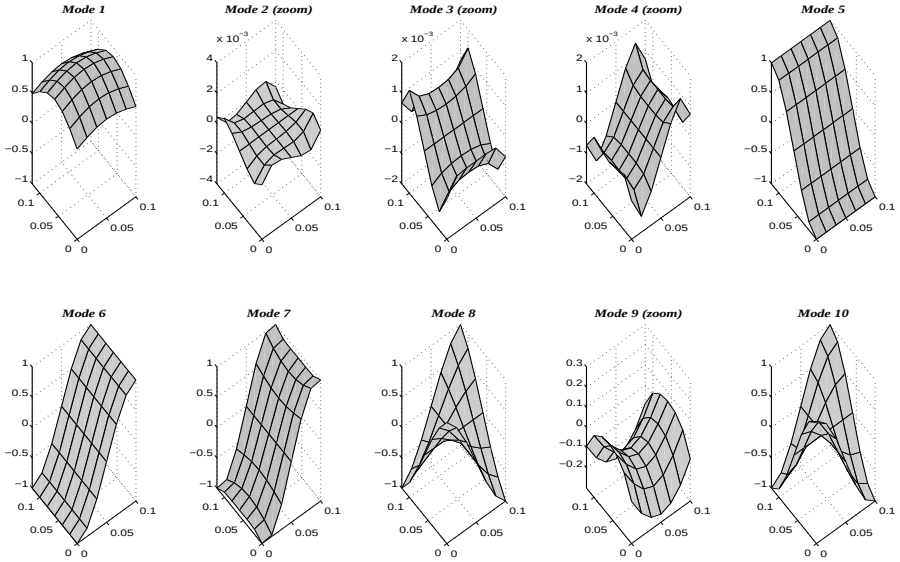

FIGURE 5.6 – Composantes déplacement (parties réelles) des formes d'ondes pour les modes standards et les modes de section, évaluées aux maxima des coefficients de réflexion.

5.4.3 Mise en oeuvre expérimentale

Le formalisme DMM permet d'estimer l'efficacité des modes d'ondes BF & MF pour le contrôle non-destructif des systèmes. Des travaux ont récemment été entrepris au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS - École Centrale de Lyon) sur la détection de défauts localisés dans une conduite homogène. Un montage expérimental reflétant la conduite instrumentée de transducteurs piézoélectriques a été développé dans ce cadre (cf. figure 5.7).

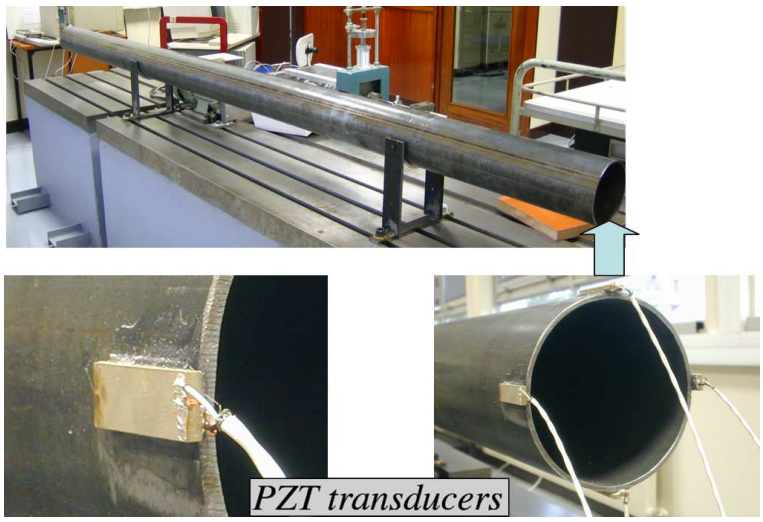

FIGURE 5.7 – Illustration du montage expérimental permettant de générer des modes longitudinaux dans une conduite cylindrique.

De part leur répartition périodique autour de la périphérie du tube, ces transducteurs permettent de générer des ondes longitudinales de formes plus ou moins complexes. Les premiers résultats ont mis en évidence l'efficacité des modes de section MF pour détecter une masse ponctuelle localisée sur la conduite (cf. figure 5.8), confortant ainsi les résultats issus du formalisme DMM.

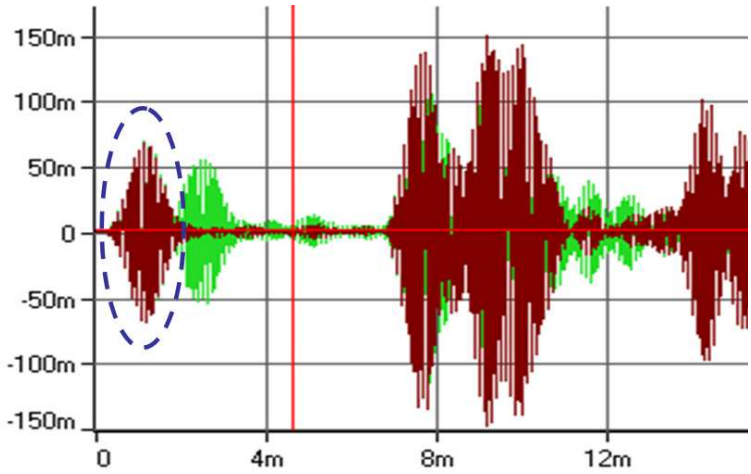

FIGURE 5.8 – Illustration de la réflexion d'une onde longitudinale : (———) conduite sans défaut ; (———) conduite avec masse ponctuelle.

5.5 Conclusions

Nous avons présenté un modèle de matrice de diffusion (DMM) pour décrire, dans le cadre de la méthode WFE, la réflexion et transmission de modes d'ondes dans plusieurs structures élancées connectées à un élément de couplage. Le formalisme est général et incorpore éventuellement des termes d'excitations par forces et déplacements imposés pour l'élément de couplage. Ce formalisme s'appuie sur un modèle éléments finis permettant de traduire les dynamiques des guides d'ondes et celle de l'élément de couplage à partir de maillages indépendants et adaptés aux échelles de vibrations mises en jeu. Le traitement des interfaces de couplage s'appuie sur la méthode Mortar qui permet de retranscrire le comportement dynamique de l'élément de couplage sur la base des mouvements d'ondes se propageant dans les guides. Le formalisme DMM constitue un outil numérique efficace pour appréhender les applications du type contrôle non-destructif des structures : il permet notamment d'identifier les modes de section MF pertinents pour détecter des défauts de diverses natures localisés dans ces structures.

Chapitre 6

Bilan et perspectives

6.1 Introduction

Au cours de ce document, nous avons exploré d'une manière générale la méthode WFE (*« Wave Finite Elements »*) pour décrire numériquement la propagation multi-modale dans les systèmes élancés de même que la réponse forcée de ces systèmes. Nous avons spécifiquement examiné et adapté le formalisme WFE pour décrire les systèmes élasto-acoustiques, les systèmes multi-couches et les mécanismes de réflexion / transmission d'ondes élastiques entre plusieurs systèmes connectés. Nous dressons ci-après quelques constats de ces activités de recherche et présentons des perspectives de recherche qui s'en dégagent.

6.2 Sur la réponse forcée des systèmes

6.2.1 Note sur la description du problème aux limites

Dans le chapitre 2, nous avons présenté le formalisme WFE pour décrire le comportement dynamique des structures élancées. La stratégie de calcul de la réponse forcée consiste à projeter les variables cinématiques (déplacements, forces) sur des bases réduites de modes d'ondes incidents et réfléchis. La technique a été appliquée avec succès pour décrire un problème de Neumann : dans ce cas, le formalisme WFE converge vers la solution de référence – décrite par la méthode des éléments finis – dès lors qu'il incorpore un nombre suffisant de modes d'ondes.
Nous avons cependant souligné la faible convergence du formalisme pour décrire les conditions de frontières du type déplacements imposés (cf. chapitre 4). Ce problème est lié aux effets de dispersion numérique qui pénalisent la description des relations de dualité entre ondes incidentes et ondes réfléchies [1], permettant notamment de retranscrire les phénomènes de résonances de section. Nous avons proposé de régulariser le problèmes aux limites WFE à partir de bases modales modifiées décrites au travers des relations suivantes :

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}} \rightarrow -\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}. \tag{6.1}$$

La convergence du formalisme WFE, établi à partir de ces bases modifiées, a été vérifiée numériquement pour décrire la réponse d'une structure sandwich encastrée, à la condition que le formalisme incorpore un nombre suffisant de modes d'ondes incidents.

1. Ces relations impliquent idéalement les égalités suivantes : $||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j)_{\mathbf{q}}^{\mathtt{inc}}|| = ||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j)_{\mathbf{q}}^{\mathtt{ref}}||$ et $||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j)_{\mathbf{F}}^{\mathtt{inc}}|| = ||(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j)_{\mathbf{F}}^{\mathtt{ref}}||$ $\forall j$.

Formellement, les modes d'ondes réfléchis, décrits dans le cadre de ces relations, ne correspondent pas aux vecteurs propres de la matrice symplectique $\mathbf{S}$ (cf. (2.4)) mais à ceux d'une matrice adjointe $\mathbf{L}^T\mathbf{S}^T\mathbf{L}$ où $\mathbf{L}$ représente une matrice d'incidence. Ce nouveau formalisme WFE mériterait d'être examiné plus en détails du point de vue de la théorie, au regard de la convergence numérique, et mériterait par ailleurs d'être généralisé à l'étude des systèmes multi-physiques (conduites avec fluide entre autres) et à l'étude des systèmes couplés via le formalisme DMM (cf. chapitre 5).

6.2.2 Note sur les critères de sélection des bases modales

Rappelons que le formalisme WFE s'appuie sur des bases modales à dimensions adaptées pour décrire le comportement dynamique des systèmes. A *fréquence donnée*, ces bases doivent être suffisamment riches pour refléter la dynamique spatiale éventuellement peu régulière de section, mais ne doivent pas être surdimensionnées au regard des problèmes singuliers pouvant être générés par la présence de modes de section d'ordres élevés [MI08]. La stratégie de sélection des modes d'ondes à prendre en compte dans la formulation du problème aux limites n'est pas bien appréhendée à l'heure actuelle : elle repose actuellement sur deux techniques empiriques : (i) par sélection des modes propagatifs et qui deviennent propagatifs en deçà d'une certaine fréquence limite [DMB06] ; (ii) par sélection des modes qui sont les plus excités par les sollicitations imposées, c'est-à-dire qui sont associés à des puissances modales suffisamment élevées [MI07]. Soulignons que ces critères de sélection assignent au formalisme WFE des bases modales à *dimension fixe* pour décrire le comportement dynamique des systèmes à l'intérieur de bandes de fréquences données, sans prise en compte du caractère évolutif de la dynamique spatiale de section à l'intérieur de ces bandes de fréquences. Cette stratégie aboutit en règle générale à la génération de bases surdimensionnées pour la description des comportements BF des systèmes.
La pertinence des critères de sélection des bases modales devra être examinée plus en détails. Le développement de routines numériques permettant la sélection de bases modales à dimension dépendante de la fréquence constitue une voie d'investigation intéressante.

6.2.3 Comportement des poutres à section élancée

La pertinence du formalisme WFE pour décrire les poutres à section élancée n'a pas été examinée dans le cadre de ce document. Ce type de systèmes est illustré sur la figure 6.1 : dans ce cas, les dimensions de la section sont telles que $h_y >> h_z$. Ces systèmes s'apparentent à des plaques minces et peuvent logiquement être appréhendés par le formalisme WFE dès lors que leurs bords latéraux sont libres d'excitations [2].
L'étude proposée vise à décrire, par la méthode WFE, le comportement dynamique BF & MF des plaques minces dont les extrémités gauche et droite sont soumises à des conditions de frontières de type Neumann / Dirichlet ou de type couplage. La figure 6.2 illustre deux types de problèmes pouvant être appréhendés par le formalisme WFE, reflétant une plaque libre excitée localement par forces sur sa frontière gauche ou plus généralement au niveau d'une interface entre deux sous-structures consécutives $k-1$ et k : dans ce dernier cas, le problème est traité sur la base de deux guides d'ondes couplés, en observant les relations de continuité des déplacements et de discontinuités des forces (cf. ref. [YL89]).

2. Cette condition est suffisante pour retranscrire la périodicité du système et satisfaire au fait que les ddl's internes d'une sous-structure représentative ne sont pas excités.

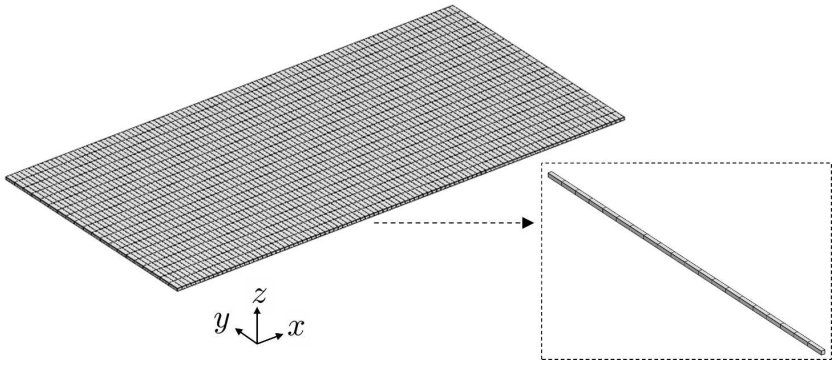

FIGURE 6.1 – Modèle éléments finis d'une poutre de grande largeur (selon l'axe y) et modèle éléments finis d'une sous-structure représentative.

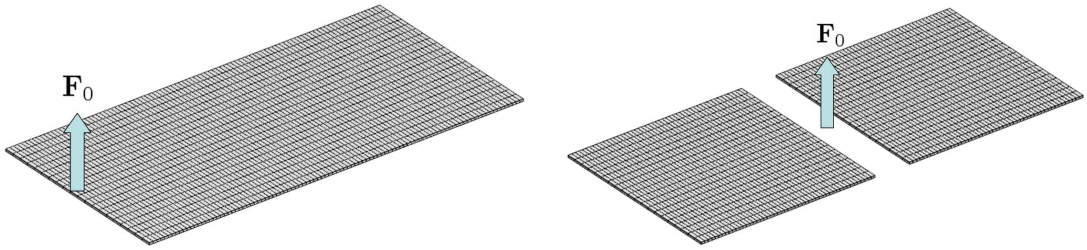

FIGURE 6.2 – Illustration d'une poutre de grande largeur sollicitée par forces localisées, en extrémité (à gauche) et au milieu (à droite).

L'étude de ces plaques minces localement excitées soulève des problèmes de convergence numérique qui sont liés à la représentativité des champs directs, reflétant des ondes cylindriques générés par les excitations, et des champs réverbérés (par les bords) à partir de bases modales WFE, traduisant des ondes se propageant selon une direction donnée x. Pour décrire ces phénomènes, le formalisme WFE doit *a priori* être établi sur la base de modes de section d'ordre suffisamment élevé permettant de retranscrire les dynamiques de section peu régulières. Notons cependant que ces modes peuvent être sources de problèmes singuliers pour le calcul des réponses forcées, dans le sens où ils sont associés à des valeurs propres $\{\mu_k\}_k$ extrêmement élevées ou proches de zéro. L'utilisation des techniques d'enrichissement des éléments finis [Hug95, FHF01, MB96], appliquées au formalisme WFE, semble constituer une voie d'investigation intéressante pour appréhender ces difficultés.

6.3 Sur la propagation multi-modale dans les systèmes élasto-acoustiques

6.3.1 Note sur le calcul des modes d'ondes

Dans le chapitre 3, nous avons appliqué la méthode WFE pour décrire les modes d'ondes élasto-acoustiques se propageant dans les systèmes du type conduites avec fluide interne. Ces modes ont été calculés à partir du problème aux valeurs propres (2.4), établi sur la base de l'opérateur de rigidité dynamique associé à un sous-système élasto-acoustique. Les courbes de dispersion obtenues dans le cadre de la méthode WFE ont été confrontées et validées en BF par rapport aux solutions

analytiques. Notons cependant que la pertinence de ces modes pour le calcul des réponses forcées en MF mériterait d'être examinée dans le cadre d'une confrontation avec des solutions éléments finis standards. Observons par ailleurs que la détermination de ces modes peut être sujette à des effets de pollutions numériques associés au caractère multi-échelle du problème couplé. Dans cette optique, la propagation d'ondes élasto-acoustiques mériterait d'être appréhendée dans le cadre du formalisme MWFE, sur la base des modes locaux élastiques et acoustiques.

6.3.2 Prise en compte des phénomènes d'entraînement

L'étude présentée dans le chapitre 3 s'intéresse aux vibrations d'un système élastique contenant un fluide acoustique sans mouvement d'entraînement. Nous proposons ci-après quelques éléments de réponse pour incorporer dans le formalisme WFE un fluide acoustique possédant une vitesse d'entraînement $V^{\mathtt{E}}$ uniforme (cf. figure 6.3). Ce type de problème est fréquemment rencontré dans l'industrie ; il illustre par exemple les vibrations d'une ligne d'échappement véhiculant un gaz interne, sollicité en sortie de moteur par débit acoustique.

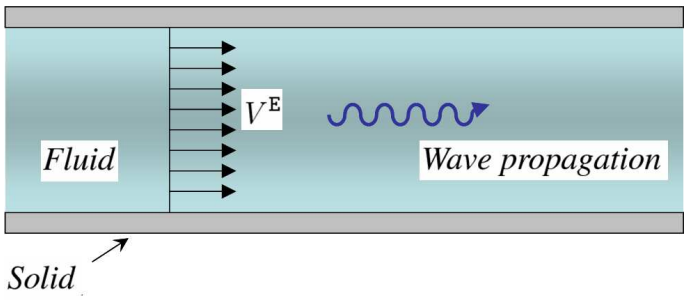

FIGURE 6.3 – Illustration d'une conduite élastique contenant un fluide acoustique à vitesse d'entraînement uniforme.

Pour ce cas, l'équation linéarisée du mouvement du fluide s'écrit [Bru83] :

$$\boldsymbol{\nabla}^2 p - \frac{1}{c_0^2}\left(\mathtt{i}\omega + V^{\mathtt{E}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p \qquad \text{dans } \Omega^{\mathtt{F}}. \tag{6.2}$$

La formulation variationnelle traduisant l'équilibre dynamique de la partie fluide d'un sous-système élasto-acoustique représentatif (cf. figure 3.1) s'écrit $\forall \delta\psi$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c_0^2}\int_{\Omega^{\mathtt{F}}} \delta\psi \left(\mathtt{i}\omega + V^{\mathtt{E}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{\mathtt{F}}} (\boldsymbol{\nabla}\delta\psi)^{\mathtt{T}}\, \boldsymbol{\nabla}\psi\, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \delta\psi \left(\mathtt{i}\omega + V^{\mathtt{E}}\frac{\partial}{\partial x}\right) (\mathbf{w}^{\mathtt{S}})^{\mathtt{T}}\, \mathbf{n}\, ds(\mathbf{x}) + \mathtt{i}\omega \int_{\partial\Omega^{\mathtt{F}}\setminus\Gamma} \delta\psi (\mathbf{w}^{\mathtt{A}})^{\mathtt{T}} \mathbf{n}\, ds(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{6.3}$$

où ψ est défini par $p = -\mathtt{i}\omega\rho_0\psi$. Par discrétisation des formulations variationnelles associées aux parties fluide et solide, il découle :

$$(\mathbb{K} + \mathbb{K}^{\mathtt{E}})\mathbf{q} = \mathbf{F}, \tag{6.4}$$

où $\mathbf{q}$ et $\mathbf{F}$ désignent les variables cinématiques du système, données par (3.2) ; $\mathbb{K}$ désigne l'opérateur de rigidité dynamique pour le système couplé avec fluide sans vitesse d'entraînement, donné par (3.3) ; $\mathbb{K}^{\mathtt{E}}$ désigne un opérateur traduisant les phénomènes d'entraînement :

$$\mathbb{K}^{\mathtt{E}} = \mathtt{i}\omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\rho_0\mathbf{D}^{\mathtt{E}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \rho_0(\mathbf{C}^{\mathtt{E}})^{\mathtt{T}} & -\rho_0\mathbf{K}^{\mathtt{E}} \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

La formulation des modes d'ondes élasto-acoustiques s'obtient par résolution du problème aux valeurs propres (2.4) dans lequel la matrice $\mathbf{S}$ est exprimée à partir de l'opérateur $\mathbb{K}+\mathbb{K}^{\mathtt{E}}$. Dans ce cas, $\mathbf{S}$ n'est pas symplectique au regard de la non-symétrie de $\mathbb{K}^{\mathtt{E}}$, ce qui signifie que la stratégie WFE pour décrire l'évolution fréquentielle de chaque mode d'ondes (cf. (2.11)) ne peut pas être utilisée ; l'évolution fréquentielle des modes d'ondes peut néanmoins être appréhendée par utilisation du critère (4.19), développé dans le cadre de la méthode MWFE, basé sur le produit scalaire hermitien.
L'application numérique du formalisme WFE, établi sur la base de l'opérateur $\mathbb{K}+\mathbb{K}^{\mathtt{E}}$, constitue une voie d'investigation future. Elle soulève une difficulté liée à l'extraction de la matrice $\mathbb{K}^{\mathtt{E}}$ via des codes éléments finis commerciaux. L'étude des conduites contenant des fluides à vitesse d'écoulement non uniforme (écoulement laminaire pour les fluides visqueux notamment) pourra faire l'objet d'examen ultérieur.

6.3.3 Prédiction du rayonnement acoustique des conduites

Nous donnons ci-après des éléments de réponse pour évaluer le rayonnement acoustique des conduites élastiques. Cette question est fréquemment rencontrée dans l'industrie, par exemple dans la description du bruit émis par une ligne d'échappement. Nous présentons ci-après une approche analytique pour déterminer le rayonnement acoustique d'une conduite axisymétrique dans un fluide léger (cf. figure 6.4) ainsi qu'une approche numérique pour déterminer le rayonnement acoustique d'une conduite de forme arbitraire dans un fluide léger ou lourd :
En ce qui concerne le rayonnement acoustique d'une conduite axisymétrique infinie ou bafflée [JF86] dans un fluide léger occupant un mileu infini sans sources d'excitation, nous suggérons d'évaluer la pression rayonnée sur la base du champ de vitesses pariétales de la conduite, obtenue numériquement par approche WFE, et de la fonction analytique de Green/Hankel associée au problème extérieur [JF86].

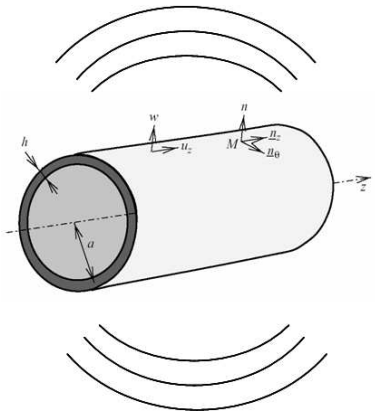

FIGURE 6.4 – Illustration d'une conduite élastique axisymétrique rayonnant dans un milieu infini.

En ce qui concerne le rayonnement acoustique d'une conduite de forme arbitraire dans un fluide léger ou lourd, occupant un milieu pouvant contenir d'autres structures vibrantes, nous suggérons d'utiliser la méthode des éléments de frontières pour la représentation numérique de l'opérateur d'impédance acoustique associé à un ensemble de surfaces rayonnantes et de discrétiser l'opérateur de Green pour le calcul de la pression rayonnée [OS98].

6.4 Sur la convergence de la méthode MWFE

Dans le chapitre 4, nous avons présenté la méthode MWFE pour décrire les modes d'ondes globaux se propageant dans les systèmes multi-couches. Ces modes sont construits par sous-structuration dynamique à partir de bases de modes d'ondes locaux dont les dimensions reflètent les échelles de vibrations des couches. Dans ce sens, la méthode MWFE permet de s'affranchir des effets de pollutions numériques induits par la méthode WFE, qui sont liés à la génération de modes parasites HF. Le formalisme MWFE constitue un outil numérique efficace pour décrire les comportements dynamiques à partir de bases réduites de faibles dimensions, représentant des modes globaux dont les natures sont préservées à l'intérieur des bandes de fréquences étudiées.
Nous avons cependant souligné le manque de convergence du formalisme MWFE pour décrire les modes de section MF. Cette problématique est en cours d'expertise : il apparaît notamment que les dimensions des bases locales choisies pour décrire les modes standards (compression, flexion, cisaillement) sont trop faibles pour décrire les modes de section MF, et *vice versa*, il apparaît que le choix de bases locales surdimensionnées pénalise le formalisme, au regard d'effets de pollutions numériques, pour décrire les modes globaux BF.
Les voies d'investigation empruntées actuellement concernent le développement et l'implémentation numérique de stratégies de sélection des bases locales pour le calcul de modes globaux de différentes natures.

6.5 Sur le formalisme DMM

6.5.1 Note sur la convergence du formalisme

Le formalisme DMM permet de décrire la réflexion / transmission de modes d'ondes entre différentes structures élancées connectées à un élément élastique de forme arbitraire. La stratégie de calcul des coefficients de réflexion et de transmission s'appuie sur le problème de couplage éléments finis entre différentes sous-structures connectées à un élément élastique. Les conditions de couplage sont formulées au sens faible dans le cadre de la méthode Mortar, dans l'optique où la dynamique de l'élément de couplage peut être décrite sur la base des mouvements d'ondes des structures.
Le formalisme DMM permet de décrire d'une manière générale les conditions de frontières relatives à la méthode WFE. Le formalisme a été vérifié, comparativement aux solutions analytiques, pour décrire en BF les coefficients de réflexion et de transmission des modes standards (cf. ref [MI05, MIJ06, IMZ09]). Il serait intéressant d'appliquer le formalisme DMM pour décrire la réponse forcée des systèmes couplés, et de confronter dans ce cas l'approche WFE à la méthode des éléments finis.

6.5.2 Description des systèmes élasto-acoustiques couplés

L'application du formalisme DMM à l'étude des systèmes élasto-acoustiques couplés est une voie d'investigation intéressante. Cet axe de recherche a été initié au Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (LMR - Université de Tours / ENI Val de Loire) dans le cadre d'une collaboration industrielle ; il s'inscrit dans le développement et l'optimisation de dispositifs de contrôle passif pour les diminutions des niveaux vibratoires et acoustiques d'une ligne d'échappement. Un tel dispositif est illustré sur la figure 6.5. Cet axe de recherche soulève de nombreuses probléma-

tiques fondamentales qui sont liées au caractère multi-physique et multi-échelle des interfaces de couplage.

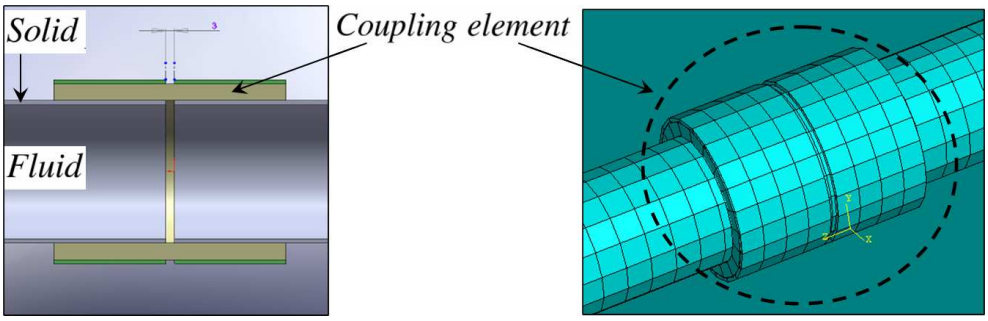

FIGURE 6.5 – Modèles CAO et éléments finis de deux conduites connectées à un élément absorbeur de vibrations.

6.6 Quelques perspectives annexes

La méthode WFE a récemment été appliquée pour décrire la propagation d'ondes dans les systèmes bidimensionnels [MM08] et les systèmes de révolution [WMB07]. Ces travaux s'inscrivent, entre autres, dans le cadre d'applications industrielles du type propagation d'ondes de chocs dans les plaques et description du comportement dynamique d'un pneu d'automobile en contact avec le sol. Pour ces deux applications, les modèles éléments finis de sous-systèmes représentatifs, sous-jacents à la méthode WFE, sont illustrés sur la figure 6.6.

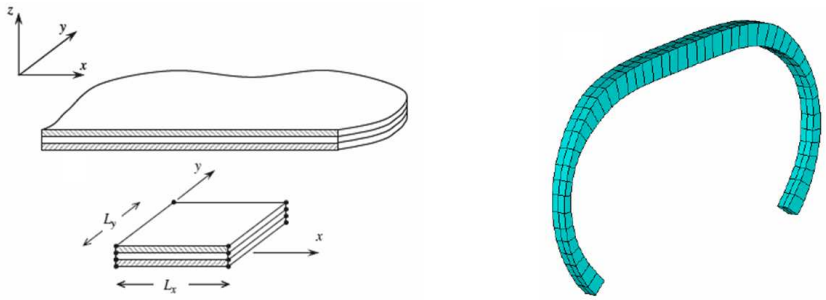

FIGURE 6.6 – Descriptions éléments finis de sous-structures représentatives associées au formalisme WFE : plaque multi-couche [MM08] (à gauche) ; pneu d'automobile [WMB07](à droite).

Concernant l'étude des systèmes bi-dimensionnels, la méthode WFE a été étendue pour décrire la propagation unidirectionnelle d'ondes, à *front rectiligne*, selon des directions $\{\theta_k\}_k$ données. Dans ce cas, la variation spatiale de ces ondes revêt la forme suivante [Mea73, MM08] :

$$w(x, y, z) = W(z)\mathrm{e}^{-k_x x - k_y y}. \tag{6.6}$$

Il semble intéressant d'examiner ce formalisme WFE pour décrire la réponse forcée des systèmes bidimensionnels. Précisément, il serait intéressant d'examiner la convergence des bases modales ainsi décrites pour représenter les phénomènes physiques complexes se propageant réellement dans ces systèmes, illustrant notamment un ensemble de champs directs et d'ondes réfléchis /

générés par les frontières [LR05] (cf. figure 6.7).
En ce qui concerne l'étude des systèmes de révolution, la méthode WFE a été étendue pour décrire la propagation d'ondes selon la direction circonférentielle. Le formalisme s'appuie sur le modèle éléments finis d'un sous-système représentatif, tel qu'illustré sur la figure 6.6. Le formalisme a été appliqué pour décrire la réponse forcée d'un pneu sous excitation harmonique localisée [WMB07]. L'analyse des systèmes de révolution excités par *force tournante*, représentant par exemple un pneu roulant sur une chaussée, constitue une voie d'investigation prometteuse notamment pour décrire l'influence des vitesses et fréquences de rotation sur la réponse forcée de ces systèmes.

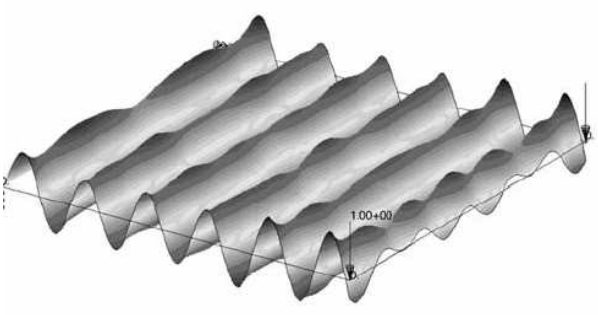

FIGURE 6.7 – Description du comportement vibratoire d'une plaque via la *Théorie Variationnelle des Rayons Complexes* [LR05].

Références bibliographiques

[BMP] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Pitman and Wiley : New York.

[Bru83] M. Bruneau. *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans, France, 1983.

[BS01] I. Babuska and T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability* . Oxford University Press, 2001.

[BS05] J. R. Banerjee and A. J. Sobey. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a three layered sandwich beam. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :2181–2197, 2005.

[CGF+02] F. Casadei, E. Gabellini, G. Fotia, F. Maggio, and A. Quarteroni. A mortar spectral/finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5119–5148, 2002.

[DMB06] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294 :205–220, 2006.

[FF82] C. R. Fuller and F. J. Fahy. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 81(4) :501–518, 1982.

[FHF01] C. Farhat, I. Harari, and L. P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6455–6479, 2001.

[Fun03] Y. C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey, 2003.

[Gra91] K. G. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford University Press, London, 1991.

[Hac95] W. Hackbusch. *Integral Equations, Theory and Numerical Treatment*. Birkhauser Verlag, Basel, 1995.

[Hug95] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4) :387–401, 1995.

[IMZ09] M. N. Ichchou, J.-M. Mencik, and W. J. Zhou. Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(15-16) :1311–1326, 2009.

[JF86] M. C. Junger and D. Feit. *Sound, Structures, abd Their Interaction (second edition)*. MIT Press, Cambridge, Massachussets, London, England, 1986.

[KS72] R. Kumar and R. W. Stephens. Dispersion of flexural waves in circular cylindrical shells. *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 329 :283–297, 1972.

[Kum72] R. Kumar. Dispersion of axially Symmetric Waves in Empty and fluid-filled cylindrical Shells. *Acustica*, 27(6) :317–329, 1972.

[Lan99] R. S. Langley. Wave evolution, reflection, and transmission along inhomogeneous waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 227(1) :131–158, 1999.

[LR05] P. Ladevèze and H. Riou. Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :3167–3191, 2005.

[MB96] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :289–314, 1996.

[Mea73] D. J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235–260, 1973.

[Men08] J.-M. Mencik. On the forced response of multi-layered systems using the modified wave finite element method. *Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology, Athens, Greece*, 2008.

[MG03] D. Roy Mahapatra and S. Gopalakrishnan. A spectral finite element for analysis of wave propagation in uniform composite tubes. *Journal of Sound and Vibration*, 268(3) :429–463, 2003.

[MGB00] J.-M. Mencik, J.-L. Guyader, and A. Berry. Formulation of an equation of diffusion for heterogeneous rods. *Proceedings of NOVEM 2000, Lyon (France)*, 2000.

[MI05] J.-M. Mencik and M. N. Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(5) :877–898, 2005.

[MI07] J.-M. Mencik and M. N. Ichchou. Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :2148–2167, 2007.

[MI08] J.-M. Mencik and M. N. Ichchou. A substructuring technique for finite element wave propagation in multi-layered systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8) :505–523, 2008.

[MIJ06] J.-M. Mencik, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. Propagation multimodale dans les systèmes périodiques couplés. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3) :293–306, 2006.

[MM08] B. R. Mace and E. Manconi. Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, In Press, Corrected Proof7, 2008.

[MO92] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Interactions fluides-structures*. Masson, 1992.

[MSG06] D. Roy Mahapatra, A. Singhal, and S. Gopalakrishnan. A higher-order finite waveguide model for spectral analysis of composite structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :1116–1135, 2006.

[NF08] C.-M. Nilsson and S. Finnveden. Waves in thin-walled fluid-filled ducts with arbitrary cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 310(1-2) :58–76, 2008.

[OS98] R. Ohayon and C. Soize. *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, San Diego, 1998.

[OSS97] R. Ohayon, R. Sampaio, and C. Soize. Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition. *Transactions of the ASME*, 64 :292–298, 1997.

[Pus04] M. A. Puso. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :315–336, 2004.

[Sho04] P. J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1917–1925, 2004.

[SPKC92] B. K. Sinha, T. J. Plona, S. Kotek, and S. Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. I : Theory. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 92(2) :1132–1143, 1992.

[vF86] A. H. von Flotow. Disturbance propagation in structural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 106(3) :433–450, 1986.

[Wil78] C.H. Wilcox. Theory of Bloch waves. *Journal d'Analyse Mathématique*, 33, 1978.

[WMB07] Y. Waki, B.R. Mace, and M. Brennan. Vibration analysis of a tyre model using the wave finite element method. *Ninetinth international congress on acoustics, Madrid, Spain*, 2007.

[YL89] Y. Yong and Y. K. Lin. Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 129(2) :99–118, 1989.

[ZT00] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method (first volume)*. Butterworth-Heinemann, fifth edition, Oxford, 2000.

[ZW95] W. X. Zhong and F. W. Williams. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. *Journal of Sound and Vibration*, 181(3) :485–501, 1995.

Curriculum Vitae

Jean-Mathieu Mencik

Adresse personnelle : 24 rue des bosseries, 41150 Onzain
Téléphone : 06 60 05 22 23
E-mail : jean-mathieu.mencik@univ-tours.fr
Date et lieu de naissance : 31/05/1972 à Mulhouse

Nationalité française
Marié, 2 enfants

FONCTIONS ACTUELLES

Maître de Conférences,
Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire

Chercheur,
Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (antenne ENIVL), Université François Rabelais de Tours

DOMAINES DE COMPETENCES

Modélisation numérique & analytique, simulation : vibrations des structures en basses et moyennes fréquences, problèmes couplés (structures-structures, fluides-structures), contrôle des structures.

Méthodes expérimentales : contrôle non destructif, rayonnement acoustique.

POSTES OCCUPES & FORMATION

2007 - 2008 : **Maître de Conférences** (depuis septembre 2007)
Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire
Université François Rabelais de Tours
Laboratoire de Mécanique et Rhéologie

2004 - 2007 : **Post-Doctorat** (janvier 2004 - juillet 2007)
Ecole Centrale de Lyon (UMR CNRS 5513),
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes,
Equipe Dynamique des Structures et des Systèmes

2005 - 2006 : **ATER à temps plein** (novembre 2005 - août 2006)
Université Lyon 1

2003 : **Post-Doctorat** (septembre 2003 - novembre 2003)
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (UPR CNRS 7051)

1999 - 2002 : **Doctorat / Ph. D.** (co-tutelle)
- Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (CANADA)
- Laboratoire Vibrations-Acoustique de l'INSA Lyon

Formulation de la réponse dynamique d'une structure maîtresse couplée à un système annexe et formulation locale du comportement énergétique des structures vibrantes

Soutenue le 27 novembre 2002 à l'Université de Sherbrooke

Directeurs : Alain BERRY (GAUS) & Jean-Louis GUYADER (LVA)
Rapporteurs : Christian SOIZE (LaM) & Jean-Claude PASCAL (LAUM)

1998 - 1999 : **Attaché de recherche**
Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (CANADA)

1997 - 1998 : Service Militaire, École Militaire de Paris

1996 - 1997 : **DEA Génie Mécanique**, Solides et Structures (Mention Bien)
Université de Valenciennes

Stage effectué chez Alcatel Alsthom Recherche

1994 - 1997 : **Ingénieur**
Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Mécanique Énergétique de Valenciennes

1992 - 1994 : **DEUG A** (Mention Assez Bien)
Université Paris XI

1991 - 1992 : **Classe Préparatoire Mathématiques Supérieures**

1991 : **Baccalauréat Série C**

EXPERIENCE INTERNATIONALE

CANADA (Doctorat/Ph.D., Etudes Doctorales) : 4 années effectuées à l'Université de Sherbrooke

Liste des publications

REVUES INTERNATIONALES A COMITE DE LECTURE

1. Ichchou M. N., Mencik, J.-M. and Zhou W. J. (2009) Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198**(15-16), 1311-1326.
2. Zhou W. J. , Ichchou M. N. and Mencik, J.-M. (2009) Analysis of wave propagation in cylindrical pipes with local inhomogeneities. *Journal of Sound and Vibration* **319**, 335-354.
3. Mencik J.-M. and Ichchou M. N. (2007) A substructuring technique for finite element wave propagation in multi-layered systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **197**(6-8), 505-523.
4. Ichchou M. N., Akrout S. and Mencik, J.-M. (2007) Guided waves group and energy velocities via finite elements. *Journal of Sound and Vibration* **305**(4-5), 931-944.
5. Mencik J.-M. and Ichchou M. N. (2007). Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid. *International Journal of Solids and Structures* **44**(7-8), 2148-2167.
6. Mencik J.-M. and Berry A. (2006). A diffusion model for a one-dimensional structure, coupled with an auxiliary system. *Journal of Sound and Vibration* **294**(4-5), 894-915.
7. Mencik J.-M. and Ichchou M. N. (2005). Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **24**(5), 877-898.
8. Mencik J.-M. and Berry A. (2005). A theoretical formulation of the dynamical response of a master structure coupled with elastic continuous fuzzy subsystems with discrete attachments. *Journal of Sound and Vibration* **280**(3-5), 1031-1050.
9. Mencik J.-M., Champoux Y. and Berry A. (2001). Development of a blocked pressure criterion for application of the principle of acoustic reciprocity. *Journal of Sound and Vibration* **245**(4), 669-684.

REVUES NATIONALES A COMITE DE LECTURE

10. Mencik J.-M., Ichchou M. N. and Jézéquel, L. (2006) Propagation multimodale dans les systèmes périodiques couplés. *Revue Européenne de Mécanique Numérique* **15**(1-3), 293-306.

MEMOIRES

11. Mencik J.-M. (2002). *Formulation de la réponse dynamique d'une structure maîtresse couplée à un système annexe et formulation locale du comportement énergétique des structures vibrantes*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, No d'ordre INSA : 02 ISAL 0077. Lien internet : http ://doc-insa.insa-lyon.fr/these/pont.php ?id=mencik
12. Mencik J.-M. (1997). *Modélisation d'un amortissement semi-actif dans le code de calculs éléments finis SAMCEF 6.1*. Mémoire de DEA, Alcatel Alsthom Recherche, Université de Valenciennes.

ACTES DE CONGRES INTERNATIONAUX

13. Mencik J.-M. (2008). On the forced response of multi-layered systems using the modified wave finite element method. *Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology, Athens, Greece*.
14. Arruda, J.R.F., Ahmida, K.M., Ichchou M. N. and Mencik, J.-M. (2007). Investigating the relations between the wave finite element and spectral element methods using simple waveguides *Proceedings of the 19 th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2007), Brasilia, Brasil*.
15. Zhou W. J., Ichchou M. N. and Mencik, J.-M. (2007). Pipe inspection using mid-frequency guided waves. *Proceedings of the 2nd World Congress on Engineering Asset Management and the 4th International Conference on Condition Monitoring, Harrogate, UK*.
16. Ichchou M. N. and Mencik J.-M. (2006). A diffusion matrix model for coupled structures using wave finite element technique. *Proceedings of the Ninth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, UK*.
17. Ichchou M. N., Bareille O. A., Mencik J.-M. and Jezequel L. (2005). Propagative approach for dispersion curve calculation : multi-modal propagation and diffusion on structure singularities. *Proceedings of Eurodyn 2005, Paris, France*.
18. Akrout S., Ichchou M. N., Mencik J.-M. and Jezequel L. (2005). Structural guided waves energy velocities by finite element method. *Proceedings of the Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisbon, Portugal*.
19. Mencik J.-M., Berry A. and Guyader J.-L. (2000). Formulation of an equation of diffusion for heterogeneous rods. *Canadian Acoustics (Acoustic week in Canada, Sherbrooke)* **28**(3), 114-115.
20. Mencik J.-M., Berry A. and Guyader J.-L. (2000). Formulation of an equation of diffusion for heterogeneous rods. *Proceedings of NOVEM 2000, Lyon, France*.

ACTES DE CONGRES NATIONAUX

21. Mencik J.-M., Ichchou M. N. and Jezequel L. (2005). Propagation multi-modale dans les systèmes périodiques couplés. 7ème *Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*.

Encadrements et responsabilités administratives

CO-ENCADREMENTS DE THESES

1. Doctorant : W. J. Zhou ; *Ecole Centrale de Lyon* (2005-2008) ; Titre de la thèse : *Détection des défauts par ondes élastiques guidées* ; Directeur : M. N. Ichchou ;

   Publications avec le doctorant :
   - Zhou W. J., Ichchou M. N. and Mencik, J.-M. (2008) Analysis of wave propagation in cylindrical pipes with local inhomogeneities. *Journal of Sound and Vibration* **In Press, Corrected Proof**.
   - Zhou W. J., Ichchou M. N. and Mencik, J.-M. (2007). Pipe inspection using mid-frequency guided waves. *Proceedings of the 2nd World Congress on Engineering Asset Management and the 4th International Conference on Condition Monitoring, Harrogate, UK*.

2. Doctorant : S. Akrout ; *Ecole Centrale de Lyon* (2002-2005) ; Titre de la thèse : *Comportement dynamique déterministe et large bande des structures guidées* ; Directeur : L. Jézéquel ;

   Publications avec le doctorant :
   - Ichchou M. N., Akrout S. and Mencik, J.-M. (2007) Guided waves group and energy velocities via finite elements. *Journal of Sound and Vibration* **305**(4-5), 931-944.
   - Akrout S., Ichchou M. N., Mencik J.-M. and Jezequel L. (2005). Structural guided waves energy velocities by finite element method. *Proceedings of the Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisbon, Portugal*.

ENCADREMENTS DE MASTER RECHERCHES

- Etudiant : I. Guirassy ; *Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire, Université François Rabelais de Tours, Société CAILLAU* (2008) ; Sujet : *Développement d'un atténuateur acoustique* ;
- Etudiante : A. Boussaa ; *Ecole Centrale de Lyon, Groupe EADS* (2006) ; Sujet : *Comportement dynamique des sandwichs par une approche propagatoire*.

ENCADREMENTS DE STAGES D'ELEVES INGENIEURS

- Etudiant : G. Sieger ; *Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire, Société SAFETY* (2008) ;
- Etudiants : G. Chollet, V. Goubin ; *Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire, Société JTEKT HPI* (2008).

RESPONSABILITES ADMINISTRATIVES

- Responsable de l'option *Production, Méthodes, Automobile et Transports*, 5ème année d'école d'ingénieurs, *Ecole Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire* (à partir de 2008).

Collaborations à des contrats industriels

COLLABORATION CAILLAU / LMR (février 2008 - juillet 2008)
Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (antenne ENIVL), Université François Rabelais de Tours
Partenariat : CAILLAU
Cadre du projet : Développement d'un dispositif permettant de réduire les niveaux vibratoires et acoustiques d'une ligne d'échappement.

PROJET PREDIT ODIN (septembre 2006 - février 2007)
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon
Partenariats : RENAULT, TREVES
Cadre du projet : Développement de matériaux pour l'insonorisation d'un compartiment moteur ; modélisation numérique des matériaux poroélastiques ; réponse temporelle (à une sollicitation de type choc piétonnier) de ces matériaux.

PROJET RNTL METISSE (janvier 2004 - juin 2005)
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon
Partenariats : IMAGINE, IFP, PSA
Cadre du projet : Prédiction du comportement vibroacoustique d'une ligne d'échappement ; intégration d'un modèle de propagation multi-modale dans le logiciel *AMESim* ; simulation de la réponse temporelle de la ligne d'échappement dans le logiciel *AMESim*.

PROJET IMPACT (janvier 2005 - décembre 2005)
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon
Partenariats : AIRBUS, SNECMA
Cadre du projet : Développement d'un modèle éléments finis d'actionneur piézoélectrique pour le contrôle des vibrations d'une aile d'avion ; dimensionnement de l'actionneur au vu du cahier des charges du constructeur.

COLLABORATION EDF / LTDS (septembre 2005 - juin 2006)
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon
Partenariat : EDF SEPTEN
Cadre du projet : Modélisation par éléments finis 1D acoustiques et simulation de la réponse impulsionnelle d'un fluide à l'intérieur du cloisonnement d'un coeur du réacteur.

PROJET DECIBEL (septembre 2003 - novembre 2003)
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille
Cadre du projet : Description analytique et mesures expérimentales (sous chambre anéchoïque) du bruit généré par des structures élastiques minces non linéaires (plaques de *von Karman,...*), sous excitations harmoniques ou dans un fluide en mouvement.