



**HAL**  
open science

## Deux Réseaux et Plusieurs Dimensions

Stam Nicolis

► **To cite this version:**

Stam Nicolis. Deux Réseaux et Plusieurs Dimensions. Physique des Hautes Energies - Réseau [hep-lat].  
Université de Tours, 2010. tel-01295226

**HAL Id: tel-01295226**

**<https://hal.science/tel-01295226>**

Submitted on 31 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année Universitaire : 2010-2011

## **HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES**

Discipline : .Physique.....

présentée et soutenue publiquement

.... par :  
Stamatios Nicolis.....

le...6 décembre 2010.....

**Deux réseaux et plusieurs dimensions**

-----

**JURY :**  
**(Par ordre alphabétique)**

Prénom:	NOM	Grade	Etablissement d'exercice
Constantin	BACHAS	Directeur de Recherches	CNRS, Paris
Maxim	CHERNODUB	Chargé de Recherches, HDR	CNRS, Tours
Philippe	de FORCRAND	Professeur	ETH Zuerich
Emilian	DUDAS	Directeur de Recherches	CNRS, Paris
Hector	GIACOMINI	Professeur des Universités	Université de Tours
Antti	NIEMI	Directeur de Recherches	CNRS, Tours

# Deux Réseaux et Plusieurs Dimensions

*Thèse présentée pour obtenir l'Habilitation à diriger des Recherches*



## Résumé

Cette thèse comprend deux parties. Dans la première l'on expose les résultats qui portent sur l'étude des théories de jauge anisotropes. L'anisotropie est introduite d'abord comme une astuce technique, qui permet de définir des fermions chiraux sur réseau en évitant les hypothèses du théorème de Nielsen et Ninomiya. On discute les limitations de cette approche, lorsque les champs de jauge deviennent dynamiques et comment y remédier. Au coeur de la solution est la prédiction d'une nouvelle phase, dans laquelle les degrés de liberté seraient confinés à des branes quadridimensionnelles, sur lesquelles les forces seraient de type Coulomb ou Yukawa. L'existence de cette phase serait valable au-delà des équations classiques du mouvement, comme témoignent les études par Monte Carlo ainsi qu'une analyse de type champ moyen. La mise en relation de ces résultats avec la physique des D-branes, ainsi que des modèles de type "monde de branes" et, plus généralement, avec la physique au-delà du modèle standard, est une direction de recherche prometteuse, vu la possibilité d'effectuer des calculs concrets dans un cadre numérique sous contrôle.

Dans la deuxième partie l'on étudie une différente discrétisation, celle de l'espace de phases d'un système quantique. On calcule l'opérateur d'évolution quantique, à partir de celui classique, en déterminant la représentation métaplectique. On construit l'opérateur d'évolution le plus général, qui réalise la quantification cohérente des symplectomorphismes linéaires du plan. Ces opérateurs sont également pertinents pour la réalisation d'algorithmes quantiques, ainsi que pour la description de groupes "quantiques", lorsque le paramètre de déformation est une racine de l'unité.

On étudie, finalement, la généralisation à l'espace de phase à trois dimensions, introduite par Nambu et l'on construit la quantification cohérente du crochet correspondant, pour les flots linéaires sur un espace de phase *tri-dimensionnel*, à partir de ceux du plan. Il s'agit de la première discrétisation de la dynamique de Nambu, qui respecte toutes les propriétés du crochet de Nambu.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I</b>	<b>Discrétisation de l'Espace-temps</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Champs sur Réseau</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Le champ scalaire sur réseau . . . . .	12
2.3	Le champ fermionique sur réseau . . . . .	17
2.4	Le champ de jauge sur réseau . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Etude quantitative des théories de champs sur réseau</b>	<b>30</b>
3.1	Champs de Jauge sans matière . . . . .	32
3.2	Champs de Jauge en présence de la matière . . . . .	36
3.3	Les méthodes de calcul . . . . .	37
3.3.1	La méthode du champ moyen pour les théories de jauge sur réseau . . . . .	38
3.3.2	La méthode de Monte Carlo pour les théories de champs sur réseau . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Fermions Chiraux et Champs de Jauge sur Réseau</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	La proposition de Kaplan . . . . .	51
4.2.1	En l'absence des champs de jauge . . . . .	51
4.2.2	La contribution des champs de jauge . . . . .	54
4.3	Le diagramme de phases . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Théories de Jauge Anisotropes sur Réseau</b>	<b>60</b>
5.1	Introduction . . . . .	60
5.2	Le diagramme de phases pour la théorie anisotrope sans matière . . . . .	62
5.3	Le diagramme de phases pour la théorie anisotrope avec matière . . . . .	66
5.3.1	Publication : <i>Phys. Lett.</i> <b>B316</b> (1993) 339 . . . . .	67
5.3.2	Publication : <i>Nucl. Phys.</i> <b>B450</b> (1995) 437 . . . . .	69
5.3.3	Publication : <i>JHEP</i> <b>0102 :005</b> (2001) . . . . .	73

5.3.4	Publication : <i>Eur. Phys. J. C</i> <b>24</b> 287 (2002). . . . .	75
<b>6</b>	<b>Conclusions–Perspectives</b>	<b>77</b>
<b>II</b>	<b>Discrétisation de l’Espace de Phases</b>	<b>79</b>
<b>7</b>	<b>Introduction</b>	<b>80</b>
7.1	Publication : <i>J. Phys. A : Math. Gen.</i> <b>29</b> (1996) 6737 . . . . .	85
7.2	Publication : <i>J. Phys. A : Math. Gen.</i> <b>31</b> (1998) L655 . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Le modèle d’Azbel–Hofstadter et les groupes quantiques</b>	<b>89</b>
8.1	Publication : <i>J. Phys. A : Math. Gen.</i> <b>31</b> (1998) 3961 . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Le Crochet de Nambu</b>	<b>93</b>
9.1	Publication : <i>J. Phys. A : Math. Theor.</i> <b>42</b> (2009) 275201 . . . . .	95
<b>10</b>	<b>Conclusions–Perspectives</b>	<b>97</b>
<b>III</b>	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>98</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La physique, comme son nom l'indique, est l'étude de la nature. Cette étude n'est pas seulement "qualitative", elle est, également, "quantitative" : pour appréhender la complexité des phénomènes physiques, on observe, on essaie de "systématiser" nos observations, on construit des "modèles" simples, dont on essaie d'extraire toutes les propriétés possibles, afin que l'on se rende compte que l'on comprend leur logique et l'on essaie de les raffiner, pour que l'on puisse acquérir une vision de plus en plus exacte.

Dans ce cadre les méthodes numériques jouent un rôle fondamental. Elles permettent, d'une part, d'obtenir des valeurs de plus en plus précises, pour comparer avec des mesures expérimentales ; d'autre part, elles permettent de calculer des quantités que l'on ne peut obtenir par aucune approche "analytique", qui serait fondée sur le développement dans un paramètre et l'on s'intéresse à la "zone grise", qui se trouve entre le domaine de validité du développement du couplage faible et celui du couplage fort ; ou, encore, aux cas où la dépendance dans la constante de couplage est non-analytique. Bien entendu un programme d'ordinateur va toujours afficher un résultat et c'est à nous de l'interpréter, comme pour une mesure expérimentale ou un calcul quelconque d'ailleurs. De la même façon que l'on teste un appareil de mesure ou une méthode de calcul sur des exemples simples, on teste (voire on *doit* tester) nos algorithmes et nos codes. C'est un effet sociologique intéressant, pourtant, que perdure une certaine réticence à accepter les résultats des simulations numériques par rapport à la facilité avec laquelle on accepte ceux, parfois beaucoup plus approximatifs, d'un calcul analytique.

Les sujets de cette thèse sont, à ce titre, exemplaires. Dans la première partie on emploie une technique, inventée par Wilson dans les années soixante-dix, pour étudier numériquement les théories quantiques de champs, dans lesquelles la symétrie chirale est une symétrie locale, comme c'est le cas dans le secteur électrofaible du modèle standard. On se rend compte que la technique numérique appropriée peut être mise en place de manière simple, si l'on travaille dans un espace-temps à plus de quatre dimensions. On essaie de comprendre les conséquences, pour la physique à quatre dimensions, des dimensions supplémentaires : On a mis en évidence le diagramme de phase de telles théories de jauge anisotropes, éventuellement couplées avec des scalaires. Il permet l'identification de théories de champs quadri-dimensionnels, qui seraient

fortement couplées (constante de couplage grande le long les dimensions supplémentaires). L'étude des modèles supersymétriques, qui impliquent tous les champs avec des contraintes particulières, est une direction, bien sûr, qui constitue une prochaine étape. Une autre est l'enquête sur d'autres types de défauts que ceux étudiés jusqu'ici, à savoir des configurations solitoniques d'un champ scalaire. Dans leur papier [51] Jackiw et Rebbi ont montré que le monopôle de 't Hooft–Polyakov, aussi, pouvait servir comme configuration, qui donnerait lieu à des modes zéros fermioniques d'une chiralité définie. Cette configuration peut être, alors, identifiée avec une D-brane, puisqu'elle porte une charge magnétique et ouvre la possibilité d'une étude numérique concrète des D-branes, jusqu'ici absente, vu la difficulté d'effectuer de tels calculs en théorie de cordes (qui impliquent la gravitation) directement.

Quoique les techniques numériques dans ce domaine soient, désormais, bien établies, la simulation de degrés de liberté fermioniques est toujours délicate et plusieurs tests sont nécessaires pour s'assurer de la qualité des résultats.

Dans la deuxième partie on essaie de mieux comprendre l'espace de matrices unitaires et l'on est amené à étudier les propriétés de l'opérateur d'évolution d'un système quantique à un degré de liberté. La construction de cet opérateur, pour qu'il réalise une quantification cohérente est présentée. Cette approche peut être, également, pertinente pour l'étude numérique de la famille de modèles d'Eguchi–Kawai.

Première partie

Discrétisation de l'Espace-temps

# Chapitre 2

## Champs sur Réseau

Dans ce chapitre l'on rappelle l'utilisation d'un réseau spatiotemporel pour "régulariser" les divergences d'une théorie de champs. On met en exergue le problème particulier posé par les champs fermioniques et l'on expose la solution proposée par Kaplan en 1992 en section 4.2. On discute, par la suite, comment cette astuce technique peut avoir des conséquences physiques intéressantes.

### 2.1 Introduction

Une théorie de champs est un système à un nombre infini de degrés de liberté. Pour faire des calculs à l'ordinateur, il est indispensable de commencer avec un nombre *fini* de degrés de liberté et obtenir la théorie avec un nombre infini par une procédure de limite appropriée. Une manière particulièrement intéressante fut inventée par K. G. Wilson en 1974 [12]; elle fut inspirée par ses travaux sur les phénomènes critiques. On considère les points d'espace-temps qui sont les sommets d'un réseau hypercubique (cf. fig. 2.1)

$$x_\mu = n_\mu a$$

de pas  $a$ , avec  $n_\mu = (n_0, n_1, n_2, \dots, n_{D-1})$  et  $0 \leq n_\mu < N_\mu$ , où  $N_\mu$  indique le nombre de points dans la direction  $\mu$ . Le nombre de degrés de liberté est, ainsi, réduit à  $\prod_{\mu=0}^{D-1} N_\mu$  (dans le cas d'un réseau isotrope on obtient, alors,  $N^D$ ) et l'on note, également, que l'on a introduit une limite *inférieure* à la valeur possible de l'impulsion, à savoir,  $2\pi/(Na)$ , avec  $N \equiv \max_\mu \{N_\mu\}$  ainsi qu'une limite *supérieure*,  $2\pi/a$ . Par définition la distance la plus petite que l'on puisse mesurer est le pas du réseau,  $a$ . Les quantités calculées vont, alors, génériquement, dépendre aussi bien de  $N$  que de  $a$ , ainsi que des propriétés géométriques du réseau-l'on note que l'invariance de Lorentz est explicitement brisée et ne reste que le sous-groupe hypercubique. Mais par l'expérience acquise par l'étude des systèmes, qui possèdent un *point critique*, c.à.d. un point de transition du second ordre, on sait qu'à un tel point les quantités physiques ont des valeurs limites bien définies, si l'on prend la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$  de manière à garder certaines combinaisons

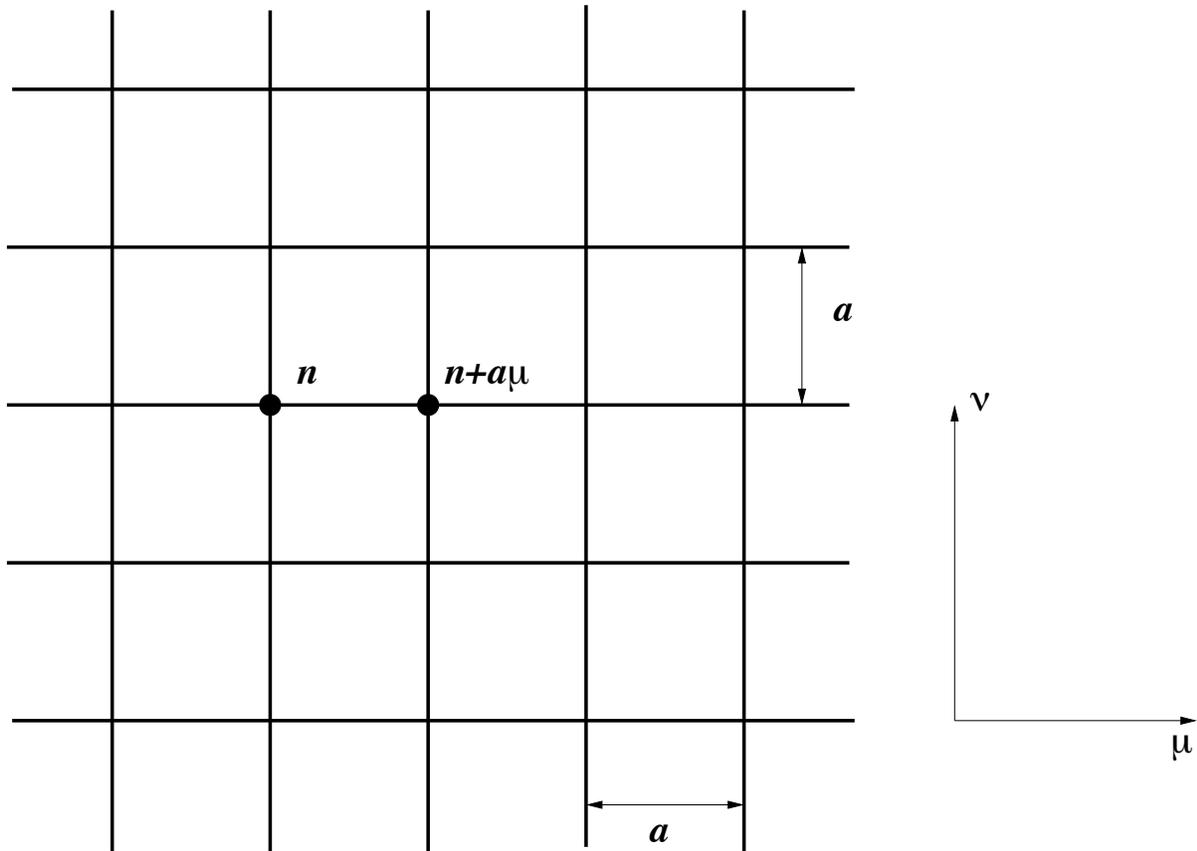


FIGURE 2.1 – Le plan  $\mu - \nu$  d'un réseau hypercubique de pas  $a$ .

fixes (on se rappelle qu'en thermodynamique classique la pression et la température ont des valeurs limites bien définies si  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $N/V \equiv \rho$  fixe qui est la densité, par exemple). On se rend compte qu'il est essentiel de bien comprendre quelles sont les propriétés qui dépendent de manière sensible du réseau ainsi introduit, mais qui ne peuvent pas influencer la physique à des échelles "grandes" par rapport à son pas et "petites" par rapport à sa taille-et, par conséquent, on peut choisir de manière à simplifier les calculs (que l'on appelle, alors, des propriétés *non pertinentes*) et quelles, par contre, peuvent influencer la physique aux échelles qui nous intéressent (propriétés *pertinentes*).

Notre outil pour effectuer ces calculs sera l'intégrale fonctionnelle [1, 2, 3]. Elle comprend, *a priori*, deux ingrédients : l'action "classique" et la mesure des configurations des champs.

On va essayer d'illustrer ces notions avec trois exemples simples : le champ scalaire, le champ fermionique et le champ de jauge, éléments de base pour la construction des modèles plus compliqués, par la suite. Comme la régularisation par le réseau est moins présente à l'esprit, on commence par une présentation élémentaire.

En  $D$  dimensions et signature de Minkowski, l'action du champ scalaire neutre est

$$S_M[\phi] \equiv \int dx_0 d^{D-1} \mathbf{x} \mathcal{L} = \int dx_0 d^{D-1} \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \lambda_0 V(\phi) \right] \quad (2.1)$$

On va poser  $\eta^{\mu\nu} \equiv (1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{D-1})$  (espace-temps plat).

Parmi toutes les configurations de champs, celles qui sont particulièrement intéressantes sont celles qui extrémisent l'action et sont solutions de l'équation Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi - m_0^2 \phi - \lambda_0 \frac{\partial V}{\partial \phi}}_{-\square \phi} = 0 \quad (2.2)$$

avec des conditions aux bords appropriées-d'habitude on considère le cas où les champs tendent vers zéro à l'infini.

Pour décrire l'espace de toutes les configurations de champs il s'avère utile d'introduire le poids d'une configuration, formellement donné par l'expression suivante

$$\rho[\phi] \equiv \frac{e^{iS[\phi]/\hbar}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}}$$

On remarque la ressemblance avec le poids d'une configuration en mécanique statistique, quoique, pour l'instant, cette ressemblance soit formelle, vu que ce poids est complexe-on verra plus bas que cette ressemblance n'est pas une illusion mais recèle des éléments d'intérêt pour la compréhension de la physique. L'apparition d'un troisième élément, au-delà de l'action,  $S[\phi]$  et de la mesure,  $\mathcal{D}\phi$  : le dénominateur,

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar} \quad (2.3)$$

nous fait penser à la fonction de partition. Et, comme en physique statistique, on s'intéresse aux moments du poids, les fonctions de corrélation,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)e^{iS[\phi]/\hbar}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rho[\phi] \quad (2.4)$$

Ce sont les quantités qui, typiquement, sont accessibles à des expériences d'une part et, comme on verra, au calcul numérique d'autre part. Pour l'instant cette expression reste formelle, tant que l'on n'ait pas défini concrètement la mesure d'intégration. Par contre, à partir de ses moments on peut calculer le poids. Prenons, à titre d'exemple, le problème plus simple : déterminer une fonction à une variable,  $\rho(x)$ , si l'on connaît ses *moments*, les quantités

$$\langle x^l \rangle \equiv \int dx x^l \rho(x)$$

(pour  $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Une solution consiste à écrire la *fonction caractéristique*, la transformée de Fourier,  $\tilde{\rho}(k)$ ,

$$\tilde{\rho}(k) \equiv \int dx e^{ikx} \rho(x)$$

de la fonction  $\rho(x)$  et en déduire que

$$\frac{d^l \tilde{\rho}(k)}{dk^l} = i^l \int dx e^{ikx} x^l \rho(x) \Rightarrow \langle x^l \rangle = i^{-l} \left. \frac{d^l \tilde{\rho}(k)}{dk^l} \right|_{k=0}$$

ce qui implique que

$$\tilde{\rho}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l k^l}{l!} \langle x^l \rangle \Rightarrow \rho(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{\rho}(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ik)^l \langle x^l \rangle}{l!}$$

On remarque que ce n'est pas facile de caractériser les propriétés des suites  $\langle x^l \rangle$ , pour lesquelles la fonction  $\rho(x)$  existe. La solution à ce problème fut, en fait, trouvée par Tschebyscheff, à la fin du dix-neuvième siècle. Ce que l'on cherche dans notre cas est la généralisation lorsque  $\rho$  est une fonctionnelle à un nombre infini d'arguments. Donner un sens à cette généralisation, appropriée pour la mécanique statistique (en particulier pour les systèmes désordonnés et chaotiques) et la théorie quantique de champs, est un domaine très actif de la physique mathématique des cents dernières années. C'est un résultat mathématique assez non-trivial de mener à bien cette construction pour le cas des champs libres à quatre dimensions; pour certains cas des champs en interaction, à trois et deux dimensions d'espace-temps c'est également possible. Pour le cas physique de quatre dimensions d'espace-temps, par contre, cette construction n'a pas, encore, été réalisée, avec le même degré de rigueur, pour les champs en interaction. Il est intéressant de

noter, cependant, que la régularisation par un réseau spatiotemporel est à la base de l'approche constructive en théorie de champs.

L'introduction d'un réseau réduit le problème à celui d'un nombre *fini* de degrés de liberté. La mesure devient concrète :

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{n=1}^N \prod_{\mu=0}^{D-1} d\phi_{n\mu} \equiv [d\phi_{n\mu}]$$

Sur chaque noeud de ce réseau vit un nombre réel (pour le champ scalaire neutre), qui prend toutes les valeurs possibles entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Le problème de la mesure est, alors, résolu. Pour calculer les fonctions de corrélation,  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , il faut, alors, calculer deux intégrales à  $N^D$  variables—et, si la dimension de l'espace-temps,  $D$ , est un “petit” nombre (un pour la mécanique quantique, deux à quatre pour la mécanique statistique et la théorie quantique des champs), on s'intéresse au cas où  $N$  est grand, plus particulièrement infini. Il est évident que l'on ne peut calculer ces intégrales directement : si  $D = 4$  et  $N = 32 = 2^5$  (taille typique pour un réseau actuel), on aura deux intégrales à  $2^{20} \approx 10^6$  variables à calculer. Aucune méthode d'intégration directe ne peut être même envisagée ici : si l'on emploie  $K$  noeuds par dimension, donc variable, on aurait besoin de  $K^{10^6}$  noeuds ! Par conséquent, on doit employer une méthode plus astucieuse, la méthode de Monte Carlo, pour sélectionner, parmi toutes les configurations, celles dont la contribution sera, numériquement, la plus importante. De surcroît,  $\exp(iS/\hbar)$  est une fonction oscillante—elle va osciller “lentement” pour les configurations de champs “proches” à celles qui sont solutions des équations d'Euler-Lagrange, plus violemment pour celles qui sont “loin”. C'est beaucoup plus difficile d'effectuer des estimations, aussi bien numériques qu'analytiques, pour une intégrale dont l'intégrande est une fonction oscillante que pour celle qui ne l'est pas. On va, alors, employer une astuce, proposée par Wick[5] et appelée, depuis, *la rotation de Wick* : on va poser  $x_0 = -ix_D$ ,  $k_0 = ik_D$  pour les coordonnées et impulsions respectivement. Cette transformation consiste à effectuer une rotation de  $+\pi/2$  dans le plan complexe de la variable  $x_0$ , respectivement  $-\pi/2$  pour  $k_0$ . Cette opération a les conséquences suivantes pour l'action, d'abord au niveau formel

$$S_M = -i \int dx_D d^{D-1}\mathbf{x} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_D} \right)^2 - \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \lambda_0 V(\phi) \right] =$$

$$i \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_D} \right)^2 + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \lambda_0 V(\phi) \right] \equiv iH^{(D+1)}$$

L'action d'un système à  $D-1$  dimensions spatiales (et une dimension temporelle) et de signature Minkowskien correspond à l'énergie interne d'un système à  $D$  dimensions spatiales (et, donc,  $D+1$  dimensions d'espace-temps). La symétrie sous transformations de Lorentz devient la symétrie sous rotations. La fonction,  $Z$ , génératrice des fonctions de corrélation de la théorie de champs devient la fonction de partition, dans le sens de la physique statistique :

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{iS_M[\phi]/\hbar} = \int \mathcal{D}\phi e^{-H^{(D+1)}/\hbar} \quad (2.5)$$

et l'on remarque que  $1/\hbar$  semble jouer le rôle de l'inverse de la température,  $\beta = 1/(k_B T)$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue. Les fluctuations quantiques correspondent, ainsi, aux fluctuations statistiques d'un système qui serait en équilibre thermodynamique à la température  $\hbar/k_B$ . Les exponentielles oscillatoires deviennent amorties, ce qui facilite le contrôle de la convergence des intégrales.

Reste la question des conditions aux bords. Le choix le plus simple est celui des conditions aux bords périodiques.

## 2.2 Le champ scalaire sur réseau

Maintenant procédons à l'écriture de l'action du champ scalaire (euclidien) sur un réseau hypercubique. D'abord, comme dans le continu, il est utile d'effectuer une intégration par parties et remplacer la partie cinétique

$$\int d^D x \frac{1}{2} \left[ \sum_{r=1}^D \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_r} \right)^2 \right]$$

par

$$\int d^D x \left[ -\frac{1}{2} \phi(x) \nabla_D^2 \phi(x) \right]$$

La fonction de partition (le facteur de normalisation) est donnée par l'expression suivante

$$Z_E = \int [d\phi_{n_\mu}] e^{-S_E/\hbar}$$

On va remplacer les dérivées par des différences finies,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_r^2} \approx \frac{\phi_{n+\hat{r}a} - 2\phi_n a + \phi_{n-\hat{r}a}}{a^2}$$

dans la direction  $r = 1, 2, \dots, D$  (et l'on a noté  $\hat{r}$  le vecteur unitaire dans la direction correspondante). Ainsi l'on obtient,

$$S_E[\phi] = a^D \sum_n^{N^D-1} \left[ -\phi_n \sum_{r=1}^D \frac{\phi_{n+\hat{r}a} - 2\phi_n + \phi_{n-\hat{r}a}}{a^2} + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_n^2 + \lambda_0 V(\phi_n) \right] \quad (2.6)$$

La fonction de partition,  $Z_E$  est donnée par

$$Z_E = \int \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{r=1}^D d\phi_{n_r} e^{-S_E[\phi]} \quad (2.7)$$

et la mesure, que l'on cherche, est donnée, formellement, par l'expression

$$\rho(\phi) = \frac{e^{-S_E[\phi]}}{Z_E} \quad (2.8)$$

Pour le cas des champs libres,  $\lambda_0 = 0$  il s'agit d'une mesure gaussienne, déterminée par ses deux premiers moments,  $\langle \phi_n \rangle$  et  $\langle \phi_n \phi_{n'} \rangle - \langle \phi_n \rangle \langle \phi_{n'} \rangle$ , où les crochets angulaires indiquent la moyenne par rapport à la mesure (2.8). Le choix des conditions aux bords périodiques nous permet de diagonaliser la partie quadratique de l'action euclidienne par transformée (discrète) de Fourier : D'abord, on définit les composantes de l'impulsion sur le réseau comme

$$\mathbf{p} \equiv \frac{2\pi \mathbf{P}}{Na} \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{P} \equiv (P_1, P_2, \dots, P_D)$  est un vecteur, dont les composantes sont des entiers modulo  $N$ .

$$\phi_{\mathbf{n}} = \frac{1}{N^{D/2}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}a \cdot \mathbf{n}} \hat{\phi}_{\mathbf{p}} \Leftrightarrow \tilde{\phi}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{N^{D/2}} \sum_{\mathbf{n}=0}^{N-1} e^{-i\mathbf{p}a \cdot \mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}} \quad (2.10)$$

Ainsi,

$$S_E^0[\hat{\phi}] = a^D \times \sum_{\mathbf{p}} \hat{\phi}_{\mathbf{p}} \left[ -\frac{1}{a^2} \sum_{r=1}^D \cos p_r a + \frac{1}{2} \left( m_0^2 + \frac{2D}{a^2} \right) \right] \hat{\phi}_{-\mathbf{p}} \quad (2.11)$$

Puisque la transformation entre  $\phi_{\mathbf{n}}$  et  $\hat{\phi}_{\mathbf{p}}$  est unitaire, on a que

$$\prod_{\mathbf{n}} d\phi_{\mathbf{n}} = \prod_{\mathbf{p}} d\hat{\phi}_{\mathbf{p}}$$

et

$$S_E^0[\hat{\phi}_{\mathbf{p}}] = S_E^0(\phi_{\mathbf{n}})$$

Par conséquent

$$\langle \phi_{\mathbf{n}} \rangle \equiv \frac{\int (\prod_{\mathbf{l}} d\phi_{\mathbf{l}}) \phi_{\mathbf{n}} e^{-S_E^0[\phi]}}{Z_E} = \frac{\int (\prod_{\mathbf{q}} d\hat{\phi}_{\mathbf{q}}) \hat{\phi}_{\mathbf{p}} e^{-S_E^0[\hat{\phi}]}}{Z_E} = \langle \hat{\phi}_{\mathbf{p}} \rangle = 0$$

et

$$\langle \phi_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}'} \rangle = \langle \hat{\phi}_{\mathbf{p}} \hat{\phi}_{\mathbf{p}'} \rangle = -\frac{a^D}{a^2} \sum_{r=1}^D \cos p_r a + \frac{a^D}{2} \left( m_0^2 + \frac{2D}{a^2} \right) \quad (2.12)$$

Il est intéressant de constater que le pas du réseau nous livre les "dimensions d'échelle classiques", puisque l'on peut absorber le pas du réseau de la manière suivante

$$\phi_{\mathbf{n}}^{\text{latt}}(a) \equiv a^{\frac{D-2}{2}} \phi_{\mathbf{n}} \quad m_{\text{latt}}(a)^2 \equiv a^2 m_0^2 + 2D \quad (2.13)$$

avec  $\phi_{\mathbf{n}}^{\text{latt}}(a)$  désormais sans dimensions (et  $m_{\text{latt}}(a)$  sans dimensions également). Grâce à ces relations on peut comparer les fonctions de corrélation obtenues sur des réseaux de pas différents

$$\frac{a_1^{(2-D)M/2} \langle \phi_{\mathbf{n}_1}(a_1)^{\text{latt}} \phi_{\mathbf{n}_2}(a_1)^{\text{latt}} \dots \phi_{\mathbf{n}_M}(a_1)^{\text{latt}} \rangle}{a_2^{(2-D)M/2} \langle \phi_{\mathbf{n}_1}(a_2)^{\text{latt}} \phi_{\mathbf{n}_2}(a_2)^{\text{latt}} \dots \phi_{\mathbf{n}_M}(a_2)^{\text{latt}} \rangle} = \quad (2.14)$$

pourvu que l'on prenne pour masse l'expression  $m_{\text{latt}}(a_1)$  au membre de gauche et  $m_{\text{latt}}(a_2)$  au membre de droite, vu que toutes les deux quantités sont égales à la fonction à  $M$ -points  $\langle \phi_{\mathbf{n}_1} \phi_{\mathbf{n}_2} \dots \phi_{\mathbf{n}_M} \rangle$ . Ici c'est une identité triviale, ainsi que la relation

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{(2-D)M/2} \langle \phi_{\mathbf{n}_1}(a_1)^{\text{latt}} \phi_{\mathbf{n}_2}(a_1)^{\text{latt}} \dots \phi_{\mathbf{n}_M}(a_1)^{\text{latt}} \rangle = \langle \phi_{\mathbf{n}_1} \phi_{\mathbf{n}_2} \dots \phi_{\mathbf{n}_M} \rangle \quad (2.15)$$

Mais ces relations deviennent vraiment utiles et pas du tout triviales pour des champs en interaction. En fait la relation (2.14) exprime comment varie la fonction de corrélation, sur réseau, lorsque l'on varie le pas du réseau—et, pour le champ libre elle indique que cette fonction est, en fait, indépendante de la valeur du pas. Cette invariance n'est plus vraie, en présence des interactions. La relation (2.15) exprime l'existence de la limite continue, donc l'existence des fonctions de corrélation qui soient indépendantes de la régularisation. L'existence de cette limite est une question ouverte pour le cas des champs en interaction à quatre dimensions.

Ce qui n'est pas explicite ici est le fait que la limite  $a \rightarrow 0$  n'est pas suffisante—il faut, également, prendre la limite thermodynamique, c.à.d.  $N \rightarrow \infty$ , avec  $Na \rightarrow \infty$ .

Pour le cas de la masse ce qui est intéressant de remarquer est que, si l'on veut décrire une particule physique dans le continu, donc  $m_0^2 \geq 0$ , il faut que la masse sur réseau satisfasse  $m_{\text{latt}}(a)^2 \geq 2D/a^2$ , l'égalité impliquant que la particule sera de masse nulle.

Les conditions aux bords périodiques imposent que les composantes,  $p_r$ , de l'impulsion prennent valeurs dans la zone de Brillouin,  $[-\pi/a, \pi/a)$ . Les zéros (en impulsion) de l'expression (2.12) sont les pôles du propagateur. Pour une particule à masse nulle,  $m_0 = 0$ , dans la limite continue, on trouve que ces zéros sont donnés par

$$-\frac{2}{a^2} \sum_{r=1}^D \cos p_r a + \frac{2D}{a^2} = \frac{4}{a^2} \sum_{r=1}^D \sin^2 \frac{p_r a}{2} = 0 \quad (2.16)$$

C'est une somme de termes non-négatifs, par conséquent, la seule solution est  $p_1 = 0, p_2 = 0, \dots, p_D = 0$ —ainsi on trouve le pôle habituel. De plus, comme  $p_r \in [-\pi/a, \pi/a)$ , il n'y a pas d'autre solution. Bien sûr, il faut se souvenir que l'on s'est placé en signature Euclidien—ainsi la relation de dispersion, appropriée pour Minkowski, sera obtenue en “défaisant” la rotation de Wick et en posant  $p_D = -ip_0$ , ce qui implique pour la “vraie” relation de dispersion

$$-\sinh^2 \frac{p_0 a}{2} + \sum_{r=1}^{D-1} \sin^2 \frac{p_r a}{2} = 0 \quad (2.17)$$

Pour mieux saisir ses conséquences, prenons l'exemple de  $D = 2$ , donc 1+1 dimensions en Minkowski. Alors cette relation devient

$$\sinh^2 \frac{p_0 a}{2} = \sin^2 \frac{p_1 a}{2} \quad (2.18)$$

Dans la limite continue,  $a \rightarrow 0$ , on obtient la relation de dispersion appropriée pour une particule (voire antiparticule) de masse nulle, à savoir

$$p_0 = \pm p_1 \quad (2.19)$$

Pour un pas  $a > 0$ , on peut, également, résoudre les relations (2.17,2.18) et exprimer  $e^{p_0 a/2}$  ou  $e^{-p_0 a/2}$  comme fonctions des composantes des impulsions. Dans le cas particulièrement simple de 1+1 dimensions on trouve les relations suivantes, seules compatibles avec la contrainte que les impulsions restent dans la zone de Brillouin

$$\frac{p_0 a}{2} = \ln \left[ \pm \sin \frac{p_1 a}{2} + \sqrt{1 + \sin^2 \frac{p_1 a}{2}} \right] \quad (2.20)$$

que l'on trace dans le dessin 2.2.

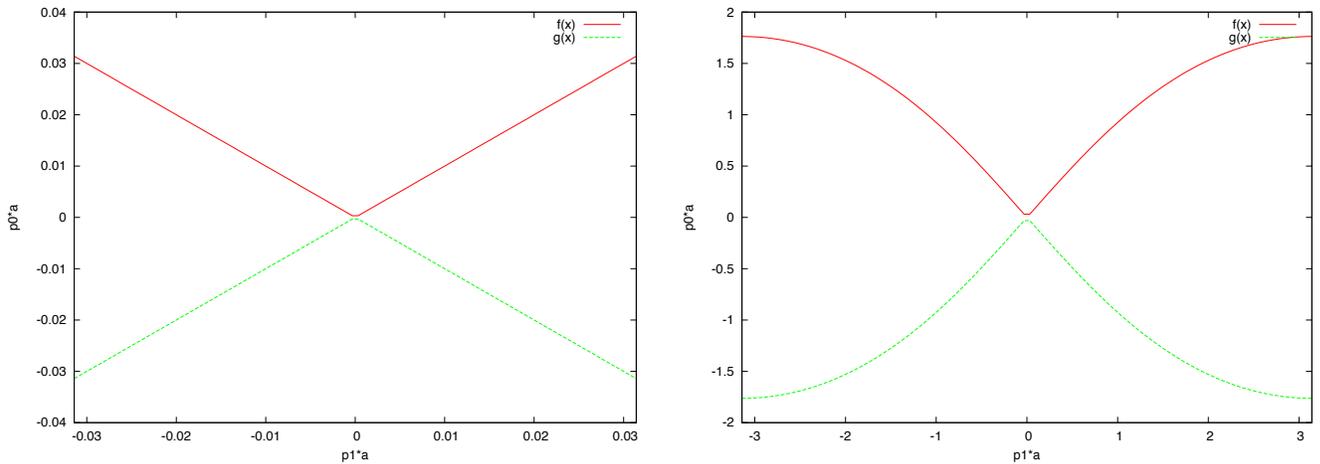


FIGURE 2.2 – La relation de dispersion sur réseau. On affiche  $p_0 a$  comme fonction de  $p_1 a$ , pour le champ scalaire à  $D = 1 + 1$ , dans la première zone de Brillouin. La courbe rouge correspond à la particule, la courbe verte à l’antiparticule. Pour  $|p_1 a| \ll 1$  on retrouve les relations du continu,  $p_0 = \pm p_1$ . Mais, même avec un pas de réseau fini on note que  $p_0 = 0$  n’est possible que lorsque  $p_1 = 0$ .

Pour une particule massive, on aurait

$$\frac{4}{a^2} \sum_{r=1}^D \sin^2 \frac{p_r a}{2} + m_0^2 = 0 \quad (2.21)$$

Dans cette expression, également, on doit “défaire” la rotation de Wick, pour mettre en évidence les conséquences physiques. Ainsi, l’on pose  $p_D = -ip_0$  et l’on trouve la relation

$$\frac{4}{a^2} \sinh^2 \frac{p_0 a}{2} = m_0^2 + \frac{4}{a^2} \sum_{r=1}^{D-1} \sin^2 \frac{p_r a}{2}$$

qui, dans la limite  $a \rightarrow 0$ , devient la relation habituelle,  $p_0^2 = m_0^2 + \mathbf{p}^2$ . Pour  $a > 0$ , on peut, également, résoudre pour  $e^{p_0 a/2}$  comme fonction des composantes des impulsions. On trouve la relation, analogue à (2.20),

$$\frac{p_0 a}{2} = \ln \left[ \pm \sqrt{\frac{a^2 m_0^2}{4} + \sum_{r=1}^{D-1} \sin^2 \frac{p_r a}{2}} + \sqrt{1 + \frac{a^2 m_0^2}{4} + \sum_{r=1}^{D-1} \sin^2 \frac{p_r a}{2}} \right] \quad (2.22)$$

Cette relation, dans la limite  $a \rightarrow 0$ , prend la forme attendue,  $p_0 = \pm \sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2}$ . Pour  $m_0 a = 0$  elle coïncide, bien sûr, avec l'expression pour la particule à masse nulle. Pour  $m_0 a \ll 1$  on trouve bien l'hyperbole lorsque  $|p_1 a| \ll 1$ , cf. fig. 2.3 et des effets du pas du réseau lorsque  $|p_1 a|$  devient plus grand. Il est intéressant d'afficher la relation de dispersion lorsque  $m_0 a \sim 1$  ou même

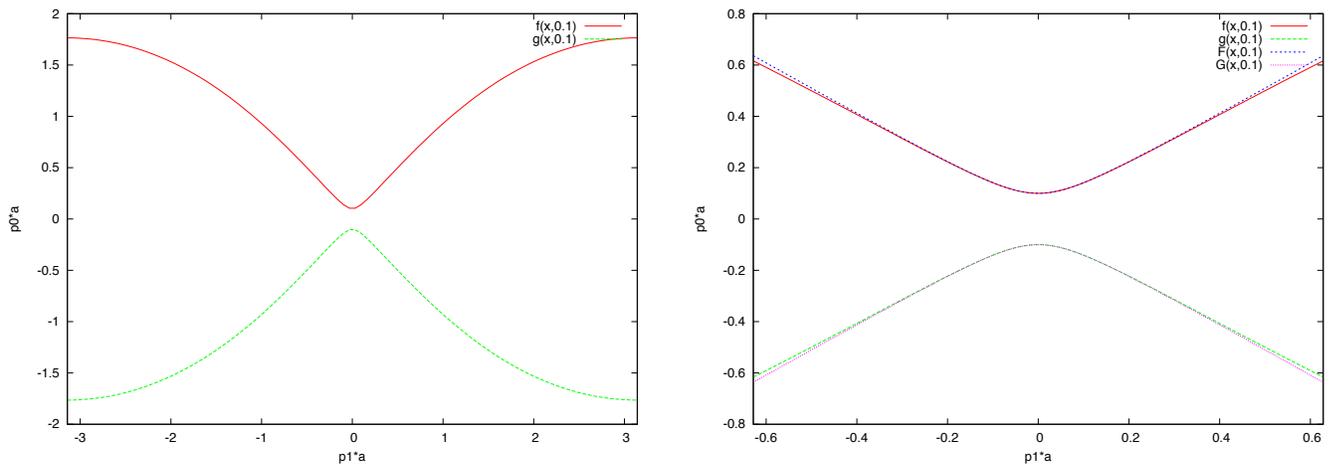


FIGURE 2.3 – La relation de dispersion pour une particule massive,  $m_0 a = 0.1$  pour  $D = 2$ . On affiche la relation sur toute la zone de Brillouin, ainsi qu’au voisinage de l’origine,  $|p_1 a| \ll 1$ , où l’on note qu’elle s’approche la relation du continu,  $p_0 a = \pm \sqrt{(p_1 a)^2 + (m_0 a)^2}$ .

$m_0 a \gg 1$ -ce qui veut dire que l’on veut étudier une particule dont la masse est comparable à l’échelle de régularisation “ultra-violette”. Des courbes correspondantes sont affichées dans la fig. 2.4. On constate que, comme on pouvait s’y attendre, l’énergie de la particule varie que très peu, comme fonction de son impulsion, lorsque  $m_0 a = 4$ .

On trouve toujours que la relation de dispersion est monotone dans l’intervalle  $[0, \pi/a)$  et, par conséquent, elle décrit la propagation d’une seule particule (ou antiparticule).

Comme on verra dans la section suivante, pour les fermions la relation de dispersion ne sera pas monotone dans la première zone de Brillouin.

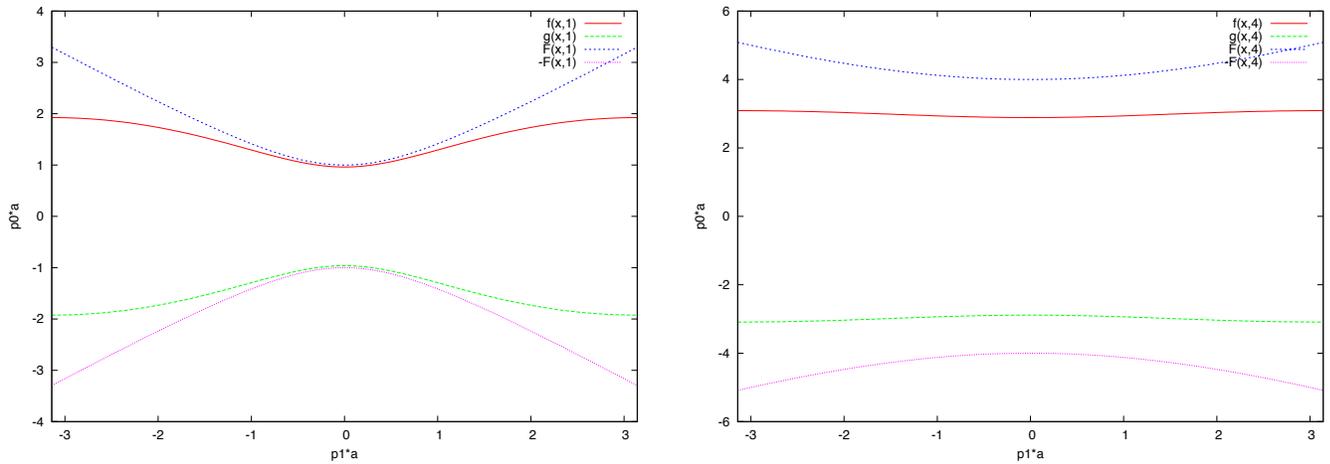


FIGURE 2.4 – La relation de dispersion pour une particule massive, avec  $m_0 a = 1$  et  $m_0 a = 4$ . On trace, également, les relations correspondantes pour le continu.

## 2.3 Le champ fermionique sur réseau

L'action dans le continu, en signature de Minkowski est, bien sûr,

$$S_M^f = \int d^D x \bar{\psi} (i\rlap{\not{\partial}}\psi - m_0) \psi \quad (2.23)$$

avec  $\rlap{\not{\partial}} \equiv \gamma_\mu (i\partial_\nu) \eta^{\mu\nu}$ . Les matrices de Dirac satisfont les relations

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$$

avec  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{D-1}) = \eta^{\mu\nu}$ . Ainsi la matrice  $\gamma_0$  est hermitienne, tandis que les  $\gamma_j$  sont anti-hermitiennes. Lors de la rotation de Wick, on pose  $\gamma_D \equiv -i\gamma_0$  et les matrices satisfont

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$$

et sont toutes anti-hermitiennes. Ceci est sujet de convention : On peut très bien multiplier les deux membres de cette relation par  $-1$  et définir des matrices,  $\Gamma_\mu \equiv \pm i\gamma_\mu$  hermitiennes, si l'on veut. C'est la convention que l'on suivra ici :  $\Gamma_D = \gamma_0, \Gamma_j = -i\gamma_j$  seront les matrices de Dirac dans l'Euclidien.

On obtient, alors, l'expression suivante pour l'action dans l'euclidien

$$S_E^f = \int d^D x \bar{\psi} (\rlap{\not{\partial}}\psi - m_0) \psi \Leftarrow S_{E,\text{latt}}^f = a^D \sum_n \left[ \bar{\psi}_n \sum_{\mu=1}^D \Gamma_\mu \frac{\psi_{n+a\hat{\mu}} - \psi_{n-a\hat{\mu}}}{2a} - m_0 \bar{\psi}_n \psi_n \right] \quad (2.24)$$

où l'on a remplacé la dérivée  $\partial_\mu \psi(x)$  par la différence "symétrique"  $(\psi_{n+a\hat{\mu}} - \psi_{n-a\hat{\mu}})/(2a)$ .

Ainsi les champ fermioniques  $\bar{\psi}_n$  et  $\psi_n$  vivent sur les sites du réseau, comme le champ scalaire. Par un calcul tout à fait similaire à celui pour le champ scalaire on peut obtenir le poids d’une configuration de champs,  $\rho(\bar{\psi}, \psi)$ . L’invariance de Lorentz (ou par rapport au sous-groupe discret des rotations sur un réseau euclidien) implique que  $\langle \psi \rangle = 0$  et  $\langle \bar{\psi} \rangle = 0$ . Ainsi le poids statistique,  $\rho(\{\bar{\psi}\}, \{\psi\})$  sera donné par l’expression

$$\rho(\{\bar{\psi}\}, \{\psi\}) = \frac{1}{Z_E} e^{-\bar{\psi}_n \mathbf{D}_{n,n'} \psi_n} \quad (2.25)$$

avec  $[\mathbf{D}^{-1}]_{n,n'} = \langle \bar{\psi}_n \psi_{n'} \rangle$ , comme pour le champ scalaire. Ici l’on note, cependant, que, au contraire de ce qui se passe avec le champ scalaire, la matrice  $\mathbf{D}$  n’est pas, obligatoirement, définie–positive. Ceci rend ainsi problématique l’échantillonnage de l’espace de configurations des champs par Monte Carlo, sur lequel on reviendra par la suite. En fait, on ne traite pas directement les variables fermioniques : aussi bien analytiquement, que numériquement, les variables fermioniques servent, essentiellement, à définir de manière commode le déterminant d’un opérateur, grâce à l’identité

$$\det(\mathbf{D}) = \mathcal{N} \int [d\bar{\psi}_n][d\psi_n] e^{-\bar{\psi}_n \mathbf{D}_{n,n'} \psi_{n'}} \quad (2.26)$$

Une conséquence pertinente de cette expression est la suivante : si le modèle, qui nous intéresse, contient plusieurs “saveurs”,  $N_f$ , de fermions, alors on a

$$S_{\text{saveurs}} = \int \prod_{f=1}^{N_f} [d\bar{\psi}_n^f][d\psi_n^f] e^{-\sum_f \bar{\psi}_n^f \mathbf{D}_{n,n'}^{(f)} \psi_{n'}^f} = \mathcal{N} \det \left( \prod_{f=1}^{N_f} \mathbf{D}^{(f)} \right) \quad (2.27)$$

Avec un nombre pair de saveurs, en particulier, on peut se rendre compte que le produit pourra être défini positif. Un cas d’intérêt pratique est celui où deux saveurs auraient la même masse, auquel cas le déterminant fermionique est le carré du déterminant de chaque saveur et, par conséquent, est manifestement, non-négatif. On peut s’imaginer, alors, qu’une théorie avec un nombre *impair* de “saveurs” sera intrinsèquement incohérente. Plus précisément, on sait que c’est impossible de réaliser la compensation d’anomalies [27, 29] avec un nombre impair de saveurs *chiraux*.

On note, aussi, que l’on ne peut pas avoir un terme d’interaction “directe” entre fermions,  $(\bar{\psi}\psi)^p$ , avec  $p > 1$ , qu’en dimension  $D = 2$ –le modèle de Gross et de Neveu [14]–car l’opérateur  $\bar{\psi}\psi$  est de dimension  $D - 1$ , ce qui rendrait toute interaction directe non-renormalisable (sauf en dimension  $D = 2$ ).

Pour calculer le propagateur, on passe, de nouveau, en espace de Fourier,

$$\psi_{\mathbf{n}} = \frac{1}{N^{D/2}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}} \tilde{\psi}_{\mathbf{p}} \Leftrightarrow \bar{\psi}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{N^{D/2}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}} \tilde{\bar{\psi}}_{\mathbf{p}}$$

et l’on peut, ainsi, diagonaliser l’action,

$$S_{\text{latt}}^0 = a^D \sum_{\mathbf{p}} \bar{\psi}_{\mathbf{p}} \left[ i \sum_{\mu=1}^D \Gamma_{\mu} \frac{\sin p_{\mu} a}{a} - m_0 \right] \psi_{-\mathbf{p}}$$

Par conséquent, l'inverse du propagateur a comme expression

$$\frac{\delta S_{\text{latt}}^0}{\delta\psi_{\mathbf{p}}\delta\bar{\psi}_{\mathbf{p}'}} = \left[ i \sum_{\mu=1}^D \Gamma_{\mu} \frac{\sin p_{\mu}a}{a} - m_0 \right] \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = [\langle \bar{\psi}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}'} \rangle_{\text{latt}}]^{-1} \quad (2.28)$$

On trouve, alors, que le propagateur fermionique sur réseau prend la forme suivante

$$[\langle \bar{\psi}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}'} \rangle]^{-1} = \frac{\left( \sum_{\mu=1}^D -i\Gamma_{\mu} \frac{\sin p_{\mu}a}{a} + m_0 \right) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{\sum_{\mu=1}^D \frac{\sin^2 p_{\mu}a}{a^2} + m_0^2} \quad (2.29)$$

qu'il est, encore une fois, intéressant de comparer avec son expression (formelle) dans le continu,

$$[\langle \bar{\psi}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}'} \rangle]^{-1} = \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{i\not{\mathbf{p}} + m_0} = \frac{-i(\not{\mathbf{p}} - m_0)\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{\mathbf{p}^2 + m_0^2} \quad (2.30)$$

On constate que la masse ne reçoit pas de correction, dépendante du pas du réseau, comme fut le cas pour le champ scalaire. La raison est que l'action pour le champ fermionique possède une symétrie que l'action du champ scalaire n'a pas, la symétrie chirale et la régularisation par le réseau respecte cette symétrie. Mais il y a un prix à payer.

On note que les sinus ont comme argument  $pa$  et non  $pa/2$ , comme c'était le cas du champ scalaire. Ceci est dû au fait que l'opérateur à différences finies pour le champ scalaire est du second ordre, tandis que celui pour le champ fermionique est du premier ordre. Comme la taille de la zone de Brillouin est pourtant, la même, la conséquence est que  $\sin pa$  devient zéro *deux* fois par direction : une fois à l'origine et une fois au bord. Par contre,  $\sin(pa/2)$  ne devient zéro qu'à l'origine et *non* au bord. Une autre expression de la différence est que, dans le cas du champ scalaire, les modes de Fourier de la somme  $\phi_{n+\mu} + \phi_{n-\mu}$  donnent le terme en  $\cos pa$  (et, donc, en  $\sin^2 pa/2$ ), tandis que, pour le champ fermionique, les modes de Fourier de la *différence*  $\psi_{n+\mu} - \psi_{n-\mu}$  donnent le terme en  $\sin^2 pa$ .

Comme pour le champ scalaire, on va étudier le dénominateur et en extraire la relation de dispersion. Pour le cas à masse nulle,  $m_0 = 0$ , on trouve

$$\sinh^2 p_0 a = \sum_{\mu=1}^{D-1} \sin^2 p_{\mu} a \quad (2.31)$$

Dans la limite  $a \rightarrow 0$  on obtient la relation habituelle pour une particule relativiste, à savoir,  $p_0 = \pm p_1$ . Mais, pour tout pas fini,  $a > 0$ , la relation de dispersion devient (dans le cas à 1+1 dimensions, où l'on peut faire des dessins plus faciles à saisir)

$$p_0 a = \ln \left[ \pm \sin p_1 a + \sqrt{1 + \sin^2 p_1 a} \right] \quad (2.32)$$

que l'on trace dans les dessins 2.5 et 2.6. On constate qu'elle n'est pas monotone et l'on note que, en plus de l'origine,  $p_0 = 0, p_1 = 0$ , les bords de la zone de Brillouin,  $p_0 = 0, p_1 = \pm\pi/a$

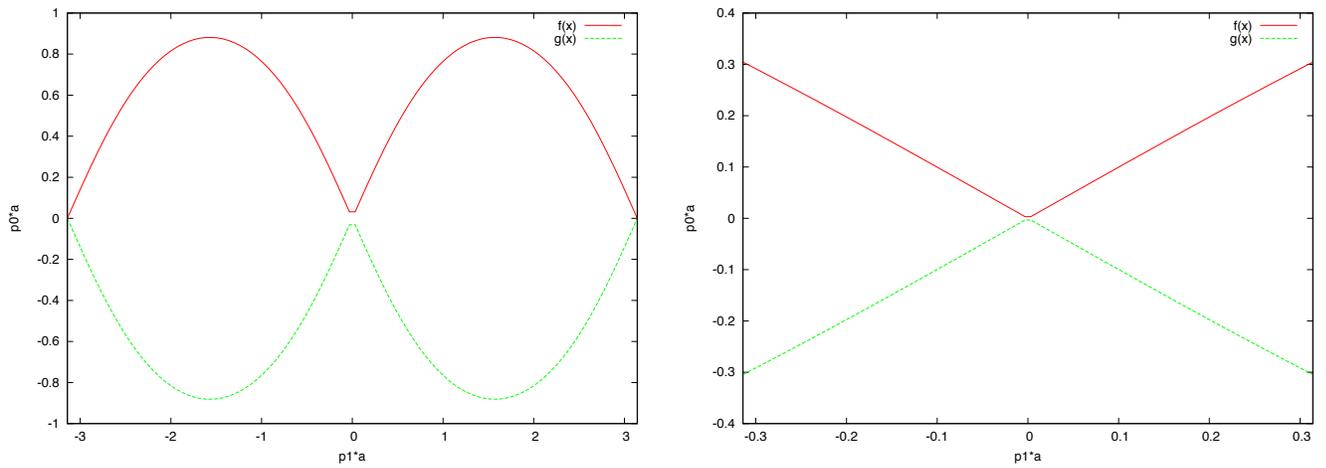


FIGURE 2.5 – La relation de dispersion,  $p_0 a$  comme fonction de  $p_1 a$ , pour le cas à 1 + 1 dimensions, dans la zone de Brillouin.

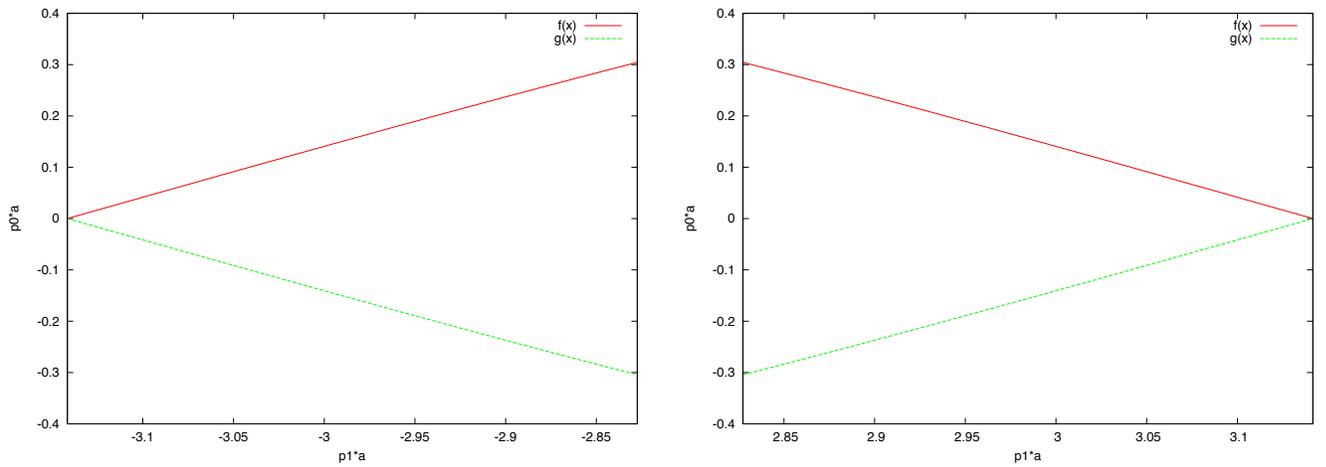


FIGURE 2.6 – La relation de dispersion,  $p_0 a$  comme fonction de  $p_1 a$ , pour le cas à 1 + 1 dimensions, près des deux bords de la zone de Brillouin. On note qu'elle décrit, également, des particules à masse nulle.

sont, aussi, des pôles du propagateur. A  $D$  dimensions il y a  $2^D$  sommets aux bords de la zone de Brillouin (vu que les coordonnées peuvent prendre deux valeurs pour une (anti)particule, à savoir 0 et  $\pi/a$  et chaque sommet est défini par un vecteur à  $D$  composantes. Par conséquent, au lieu de décrire une particule, on décrit  $2^D$  particules : la particule d'origine et  $2^D - 1$  "partenaires". Ces partenaires ont la même masse et la même normalisation que la particule d'origine. Doit-on les interpréter comme des particules nouvelles ? Peut-on le faire ? Doit-on les éliminer, car elles seraient des artéfacts de la régularisation ? Et par quels mécanismes ?

Ces questions ont occupé les chercheurs et le résultat [12, 8, 7] est que, puisque ces particules sont "physiques" (c.à.d. ne sont pas des phantômes ni des tachyons) elles vont inévitablement contribuer aux fonctions de corrélation [8].

Alors on doit imaginer des mécanismes, qui puissent distinguer le pôle "physique" (et sa contribution aux fonctions de corrélation) des autres. Deux idées ont survécu : (a) modifier l'action par des termes supplémentaires (Wilson), (b) séparer les excitations dans l'espace-temps—au lieu dans l'espace des impulsions (Kogut–Susskind, Kaplan). La deuxième idée trouve son aboutissement dans la réalisation des "fermions sur parois" (*domain-wall fermions*), comme on expliquera par la suite.

Commençons par l'idée de Wilson. Dans son cours à Cargèse, il proposa l'utilisation d'un réseau hypercubique pour l'étude numérique et non-perturbative de la QCD et il introduisit un terme supplémentaire dans l'action fermionique, qui possède les propriétés suivantes : (a) être un terme proportionnel au pas du réseau, ainsi n'apparaissant pas, lors de la limite continue,  $a \rightarrow 0$  et (b) levant la dégénérescence de masse entre les partenaires et le fermion original, de façon à ce que les premiers se découplent. Un tel terme, par définition, n'est pas unique, mais la forme la plus simple, qu'il puisse prendre est

$$S_{\text{wilson}} = a^D \sum_{n,\mu} \frac{r}{2a} \bar{\psi}_n (\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + \psi_{n-\mu}) \quad (2.33)$$

Que ce terme soit proportionnel au pas du réseau est facile à voir, car il a la forme

$$a \times \frac{r}{2} \times \bar{\psi}_n \times \underbrace{\sum_{\mu} \frac{\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + \psi_{n-\mu}}{a^2}}_{\square_{\psi}}$$

En ce qui concerne sa capacité à lever la dégénérescence entre partenaires et fermion original, on note que le fait qu'il ne contient pas de matrices de Dirac implique qu'il contribuera au terme de masse du fermion. Le fait qu'il est proportionnel au  $\square$  implique que sa contribution sera sensible à l'impulsion de l'excitation, en particulier, il aura une contribution différente à l'origine qu'aux bords de la zone de Brillouin. Effectivement, par transformée de Fourier on trouve que ce terme devient

$$\tilde{S}_{\text{wilson}} = -a^D \sum_{p,\mu} \left( \frac{2r}{a} \sin^2 \frac{p_{\mu}a}{2} \right) \bar{\tilde{\psi}}_p \tilde{\psi}_p \quad (2.34)$$

et l'on note (a) que, pour  $a \rightarrow 0$ , il donne une contribution qui tend vers zéro, proportionnellement au pas,  $a$ , du réseau et (b) qu'à l'origine, il donne une contribution nulle, mais, aux bords de la zone de Brillouin, où une composante, au moins, du vecteur  $p_\mu$  est égale à  $\pi/a$ , il donne une contribution à la masse de l'excitation proportionnelle à  $1/a$ .

Au lieu de garder séparés, l'action "naïve" et le terme de Wilson, on peut les combiner de la façon suivante :

$$S_{\text{fermion}} = a^D \sum_n \left[ \bar{\psi}_n \sum_{\mu=1}^D \left( \frac{\Gamma_\mu + r}{2a} \psi_{n+\mu} - \frac{\Gamma_\mu - r}{2a} \psi_{n-\mu} \right) - \bar{\psi}_n \left( m_0 + \frac{Dr}{a} \right) \psi_n \right] \quad (2.35)$$

La relation de dispersion, pour le cas  $m_0 = 0$ , prend la forme suivante

$$-\sinh^2 p_0 a + \sin^2 p_1 a + r^2 (2 - \cosh p_0 a - \sin p_1 a)^2 = 0 \quad (2.36)$$

Pour  $r = 0$  on retrouve la relation 2.32—et l'on peut contrôler que, pour  $r \neq 0$ , dans la limite  $a \rightarrow 0$  (voire pour  $|p_0 a|, |p_1 a| \ll 1$ ), on retrouve la relation  $p_0 = \pm p_1$ —la contribution du terme de Wilson est, effectivement, non-pertinente dans la limite continue.

Pour un pas  $a > 0$  on peut, en principe, exprimer  $p_0 a$  comme fonction de  $p_1 a$ —mais la procédure devient assez onéreuse. En employant un logiciel de manipulation symbolique on peut tracer les courbes correspondantes, pour le cas  $D = 2 = 1 + 1$ , dans 2.7. Par conséquent les excitations peuvent, désormais, être distinguées et celles avec une masse, qui devient infinie, à la limite continue, vont découpler—pourvu, bien sûr, qu'elles ne portent d'autres charges et pourront contribuer de façon, qui ne dépende pas de leur masse. On pense, bien sûr, à l'anomalie chirale, qu'il faut calculer, alors, à part. Finalement, comme ce terme agit comme une masse, il brise explicitement la symétrie chirale. Par conséquent, pour récupérer la symétrie chirale dans la limite continue il faut procéder à un ajustement des paramètres de la théorie : Comme pour le cas du champ scalaire, on définit la masse sur réseau, sans dimensions,  $m_{\text{latt}}(a)$ , par la relation

$$m_{\text{latt}}(a) \equiv m_0 a + Dr$$

et l'on choisit

$$m_{\text{latt}}(a) = Dr \equiv m_{\text{latt}}^*$$

de façon à obtenir un fermion à masse nulle dans la limite continue—au moins pour le champ libre.

L'idée de Kogut et de Susskind [13], présentée quelque temps après la publication de Wilson, fut d'essayer de séparer les degrés de liberté fermioniques, en exploitant les symétries discrètes du réseau hypercubique, en particulier sa structure "bi-partite" en sites, dont la somme des coordonnées (entières) est paire et celles dont la somme est impaire. L'avantage est qu'une version discrète de la symétrie chirale reste—bien sûr elle est sensible à la structure du réseau. Un inconvénient est que, puisque l'on répartit les degrés de liberté, qui, en principe, se trouvent sur le même site, sur deux, la taille effective du réseau est d'un facteur  $2^D$  plus faible que sa taille nominale. Par conséquent les effets de taille finie seront, de façon correspondante, plus

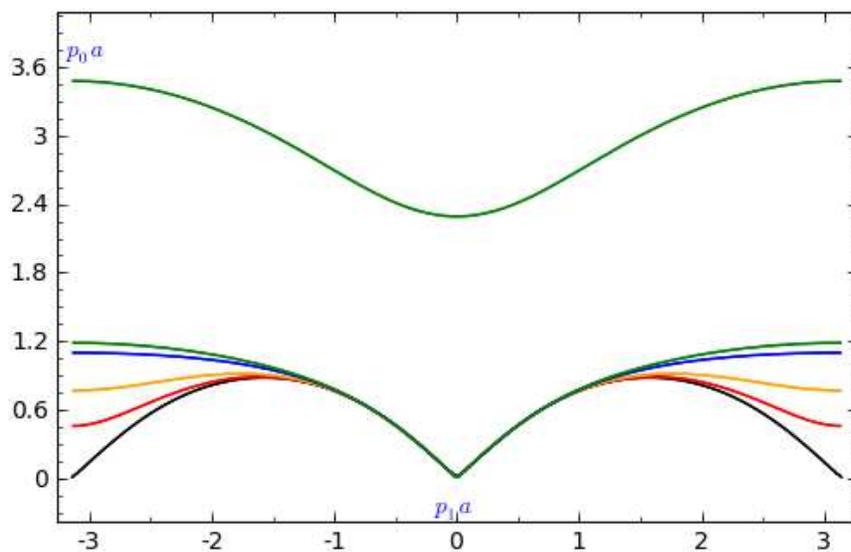


FIGURE 2.7 – La relation de dispersion,  $p_0 a$  comme fonction de  $p_1 a$ , en présence du terme de Wilson. On trace, en particulier, les courbes qui correspondent aux valeurs  $r = 0$  (noire),  $r = 0.25$  (rouge),  $r = 0.5$  (orange),  $r = 1$  (bleue) et  $r = \sqrt{1.5}$  (verte). On note que, pour  $0 \leq r < 1$ , la courbe n'est pas monotone, mais, pour  $r > 0$  seul le zéro à l'origine subsiste. Pour  $r = 1$  la courbe est monotone. Il faut faire attention de choisir la bonne branche de la fonction  $\cosh^{-1}$ , à savoir celle pour laquelle  $p_0 = 0$ , lorsque  $p_1 = 0$ .

importants (mais cette remarque ne tient pas compte de toutes les astuces, qui ont été inventées dans ce sujet et dont la discussion sort du cadre de cet exposé).

Puisque l'on ne va pas employer cette réalisation par la suite, on renvoie pour les détails dans l'article de revue de Kogut [7].

L'idée de Kaplan sera l'objet d'un chapitre suivant. On peut dire, schématiquement, qu'elle exprime la synthèse de l'idée de Wilson et de l'idée de Kogut et de Susskind. L'idée est de séparer les deux chiralités le long des dimensions supplémentaires, au lieu de les séparer dans l'espace-temps ordinaire—c'est grâce à ça que l'on peut s'affranchir des détails du réseau qui restent dans l'approche de Kogut et de Susskind; mais l'on doit retenir le terme de Wilson, cependant, car c'est lui qui distingue les “partenaires” du fermion original sur la paroi elle-même.

Cette présentation fournit une indication des subtilités que présente l'étude numérique des degrés de liberté fermioniques.

## 2.4 Le champ de jauge sur réseau

Les champs qui décrivent la matière portent des *charges*, charge électrique, charge faible, “couleur” qui sont conservées. La loi de conservation est une loi *locale*, ce qui veut dire que la variation dans le temps de sa densité est le résultat d'un courant. La densité et le courant sont, alors, les sources d'un champ. On cherche à écrire une action sur réseau pour ce champ.

On se rappelle que, dans le continu, on commence par une symétrie *globale* (c.à.d. indépendante de la position dans l'espace et de l'instant du temps) de la forme

$$\phi(x)_{\text{nouv}} = e^{iq\alpha_A T^A} \phi(x)_{\text{ancien}} \quad [\phi(x)^\dagger]_{\text{nouv}} = [\phi(x)^\dagger]_{\text{ancien}} e^{-iq\alpha_A T^A} \quad (2.37)$$

où  $T^A$  sont les générateurs de l'algèbre de Lie,  $[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C$  et  $\alpha_A$  sont des constantes. On note par  $q$  la charge du champ  $\phi$  sous cette transformation. Pour la charge électrique l'algèbre de Lie est  $U(1)$ , pour la charge (électro)faible elle est  $SU(2) \times U(1)$  et pour la couleur elle est  $SU(3)$ . Les termes

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + m_0^2 \phi^\dagger \phi$$

pour le champ scalaire complexe, ainsi que

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m_0 \bar{\psi} \psi$$

pour le champ fermionique sont invariantes, lorsque l'on remplace les champs “anciens” par les champs “nouveaux” définis par les expressions de l'éq. (2.37). On peut, également, vérifier que l'action du champ scalaire complexe ou fermionique est, également, invariante. Les choses deviennent plus intéressantes lorsque l'on essaie de rendre ces symétries *locales*, c.à.d. lorsque l'on veut imposer la symétrie pour le cas où les paramètres  $\alpha_A$  sont des fonctions du site,  $\alpha_A = \alpha_A(x)$ . Dans le continu la solution consiste à remplacer les dérivées ordinaires,  $\partial_\mu \phi$  par les dérivées covariantes, de façon à compenser les termes proportionnels à  $\partial_\mu \alpha_A(x)$ . Par

conséquent on a besoin d'un champ qui porte un indice de vecteur de Lorentz ! Comment réaliser cette construction, lorsque les champs de matière vivent sur les sites d'un réseau ? La réponse vient—comme dans le continu, d'ailleurs— en regardant les termes dans l'action sur le réseau qui ne sont pas automatiquement invariants. Ainsi l'on note les produits  $\phi_n^\dagger \phi_{n\pm\mu}$ ,  $\bar{\psi}_n \psi_{n\pm\mu}$ ,  $\bar{\psi}_n \gamma_\mu \psi_{n\pm\mu}$  pour le champ scalaire et fermionique respectivement. Ce sont les seuls termes qui ne soient pas invariants lorsque le paramètre de la transformation (2.37) dépend du site. Ils changent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\phi_n^\dagger \phi_{n+\mu} &\rightarrow \phi_n^\dagger e^{-iq\alpha_n, AT^A} e^{iq\alpha_{n+\mu}, AT^A} \phi_{n+\mu} \\ \phi_n^\dagger \phi_{n-\mu} &\rightarrow \phi_n^\dagger e^{-iq\alpha_n, AT^A} e^{iq\alpha_{n-\mu}, AT^A} \phi_{n-\mu} \\ \bar{\psi}_n \psi_{n+\mu} &\rightarrow \bar{\psi}_n e^{-iq\alpha_n, AT^A} e^{iq\alpha_{n+\mu}, AT^A} \psi_{n+\mu} \\ \bar{\psi}_n \psi_{n-\mu} &\rightarrow \bar{\psi}_n e^{-iq\alpha_n, AT^A} e^{iq\alpha_{n-\mu}, AT^A} \psi_{n+\mu}\end{aligned}$$

Mais l'on note que, si l'on introduit un champ supplémentaire,  $U_\mu(n)$ , associé au *lien* entre les sites  $n$  et  $n + \mu$  et dans le sens du site  $n$  au site  $n + \mu$ , de façon à ce que les monômes  $\phi_n^\dagger \phi_{n+\mu}$  et  $\phi_n^\dagger \phi_{n-\mu}$  soient remplacés par  $\phi_n^\dagger U_\mu(n) \phi_{n+\mu}$ , respectivement par  $\phi_n^\dagger U_\mu^\dagger(n - \mu) \phi_{n-\mu}$  (et de façon analogue pour les fermions), on déduit que *ces* monômes resteront invariants, pourvu que l'on impose la variation

$$U_\mu(n) \rightarrow e^{iq\alpha_n, AT^A} U_\mu(n) e^{-iq\alpha_{n+\mu}, AT^A} \quad (2.38)$$

(cf. fig. 2.8) [Il est intéressant de remarquer que cette procédure de rendre le produit de deux

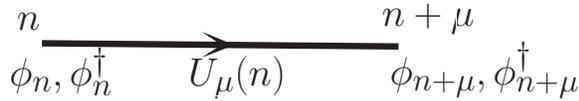


FIGURE 2.8 – La configuration typique de champs autour d'un lien du réseau : les champs de matière sont situés sur les noeuds et les champs de jauge sur le lien entre deux noeuds. Les champs prennent valeurs dans le groupe de Lie.

champs, localisés à des points non-coïncidents, invariant de jauge fut introduite par Schwinger [16].]

On veut bien identifier les champs  $U_\mu(n)$  avec les champs prenant valeurs dans *le groupe* de jauge. Pour conforter cette intuition, on va essayer de retrouver les transformations habituelles, dans le continu. A cette fin on va développer les exponentiels

$$\begin{aligned}e^{iq\alpha_n, AT^A} &\approx I + iq\alpha_n, AT^A + \dots \\ e^{iq\alpha_{n+\mu}, AT^A} &\approx I + iq\alpha_{n+\mu}, AT^A + \dots\end{aligned}$$

et l'on va supposer que  $U_\mu(n)$  sont des éléments du *groupe de Lie*, correspondant à l'algèbre et écrire

$$U_\mu(n) = e^{iaqgA_{\mu, M}(n)T^M} \approx I + iaqgA_{\mu, M}(n)T^M + \dots$$

Alors, si l'on développe ainsi les deux membres de la transformation de jauge, éq. (2.38) jusqu'au premier ordre dans le pas du réseau ainsi que dans la variation  $\alpha_n^M$ , on retrouve, effectivement, la règle pour le continu, à savoir

$$A_\mu^M(n) \rightarrow A_\mu^M(n) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_n^M + A_\mu^L(n) \alpha_n^J f_{LJ}^M$$

Les termes cinétiques habituels sont les limites “directes” des expressions du type  $\phi_n^\dagger U_\mu(n) \phi_{n+\mu}$ . Pour le cas du champ scalaire chargé, donc complexe, l'action sur réseau est donnée par l'expression

$$S_{\text{scalar,latt}} = a^D \sum_n \left[ \left( -\phi_n^\dagger \sum_{\mu=1}^D \frac{U_\mu(n) \phi_{n+\mu} + U_\mu^\dagger(n-\mu) \phi_{n-\mu}}{a^2} \right) + \left( m_0^2 + \frac{2D}{a^2} \right) \phi_n^\dagger \phi_n \right] \quad (2.39)$$

Dans la limite  $a \rightarrow 0$  on pose  $x \equiv n \cdot a$  et l'on développe à l' $O(a^3)$  près, pour compenser les dénominateurs à  $a^2$  (pour raisons de simplicité on présente le cas où le champ de jauge est abélien, le cas non-abélien ne présentant pas de complications de principe) :

$$\begin{aligned} \phi_{n\pm\mu} &\approx \phi(x) \pm a \partial_\mu \phi(x) + \frac{a^2}{2} \nabla_D^2 \phi(x) + O(a^3) \\ U_\mu(n) &\approx 1 + iaqqA_\mu(x) - \frac{a^2}{2} q^2 g^2 A^2(x) + O(a^3) \\ U_\mu^\dagger(n-\mu) &\approx 1 - iagqA_\mu + a^2 \left( i\partial \cdot gqA(x) - \frac{g^2 q^2 A^2}{2} \right) + O(a^3) \end{aligned} \quad (2.40)$$

En remplaçant ces développements dans l'expression (2.39) on trouve le résultat suivant pour l'action dans la limite  $a \rightarrow 0$  (où, bien sûr, on remplace  $a^D \sum_n$  par  $\int d^D x$ )

$$S_{\text{scalar}} = \int d^D x \phi^\dagger(x) \left[ -\nabla_D^2 + q^2 g^2 A^2(x) - igqA \cdot \partial + m_0^2 \right] \phi(x) \quad (2.41)$$

Si l'on répète la même démarche pour le champ fermionique couplé à un champ de jauge on doit développer à l' $O(a^2)$  près pour compenser la puissance du pas de réseau aux dénominateurs—et l'on peut négliger le terme de Wilson. Ainsi l'on trouve que

$$\begin{aligned} S_{\text{fermion,latt}} &= a^D \sum_n \left[ \left( -\bar{\psi}_n \sum_{\mu=1}^D \gamma_\mu \frac{U_\mu(n) \psi_{n+\mu} - U_\mu^\dagger(n-\mu) \psi_{n-\mu}}{2a} \right) + im_0 \bar{\psi}_n \psi_n \right] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \\ &\int d^D x \left[ -\bar{\psi} (\not{\partial} + iqqA - im_0) \psi \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Maintenant que l'on sait écrire les termes d'interaction de champs de la matière, qui vivent sur les sites du réseau, avec le champ de jauge extérieur, on doit écrire le terme qui décrit la propagation du champ de jauge. Dans le continu et en signature de Minkowski on a appris que le terme approprié est

$$\mathcal{L}_{\text{gauge,kin,Mink}} = (-1/4g^2) \text{Tr} [F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}] \quad (2.43)$$

avec

$$F_{\mu\nu}^A \equiv \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f^{ABC}[A_\mu^B, A_\nu^C] \quad (2.44)$$

où  $f^{ABC}$  sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie. , qui est invariant de jauge grâce à la trace sur l'algèbre de Lie. Lorsque l'on passe en signature Euclidien, on doit poser  $A_0 \equiv iA_D$ , lorsque l'on pose  $x_0 \equiv -ix_D$ , pour que  $S = iH$ . On trouve, alors, que, sous ces conditions,

$$\mathcal{L}_{\text{gauge,kin,E}} = \frac{1}{4g^2} \text{Tr} [F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu,A}] \quad (2.45)$$

On cherche à transcrire sur le réseau une expression qui, dans la limite continue,  $a \rightarrow 0$ , coïncidera avec éq. (2.45). Une possibilité, bien entendu, est d'y remplacer les dérivées par des différences finies, comme pour le champ scalaire ou fermionique. Ainsi, pour le cas  $U(1)$  on obtient l'expression

$$S_{\text{gauge, latt}} = a^D \sum_{n=0}^{N^D-1} \frac{1}{16g^2 a^2} \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} (A_\nu(n + \mu \cdot a) - A_\nu(n - \mu \cdot a) - A_\mu(n + \nu \cdot a) + A_\mu(n - \nu \cdot a)) \\ (A_\sigma(n + \rho \cdot a) - A_\sigma(n - \rho \cdot a) - A_\rho(n + \sigma \cdot a) + A_\rho(n - \sigma \cdot a)) \quad (2.46)$$

Elle possède, par construction, la bonne limite continue et elle est invariante sous la transformation

$$A_\mu(n)^{\text{new}} = A_\mu(n)^{\text{old}} + \frac{f(n + \mu \cdot a) - f(n - \mu \cdot a)}{2a} \quad (2.47)$$

transcription, sur le réseau, de la transformation de jauge du continu. Puisque les variables  $A_\mu(n)$  prennent toutes les valeurs réelles, elles appartiennent à l'algèbre de Lie, comme dans le continu.

Mais l'on peut employer les éléments du groupe de jauge,  $U_\mu(n)$ , et construire l'action de jauge sur réseau seulement à partir d'eux. L'idée est que, vu la règle de la transformation pour le lien, éq. (2.38), si l'on considère le produit des variables sur les liens d'une boucle, alors la trace (sur le groupe) sera invariante sous transformations de jauge. La boucle la plus simple est, bien sûr, la plaquette élémentaire du réseau—explicitement

$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n + \mu)U_\mu^\dagger(n + \nu)U_\nu^\dagger(n) \quad (2.48)$$

La démonstration est la suivante :

$$U_\mu(n) \rightarrow e^{ig\theta_n} U_\mu(n) e^{-ig\theta_{n+\mu}} \\ U_\nu(n + \mu) \rightarrow e^{ig\theta_{n+\mu}} U_\nu(n + \mu) e^{-ig\theta_{n+\mu+\nu}} \\ U_\mu^\dagger(n + \nu) \rightarrow [e^{ig\theta_{n+\nu}} U_\mu(n + \nu) e^{-ig\theta_{n+\mu+\nu}}]^\dagger = e^{ig\theta_{n+\mu+\nu}} U_\mu^\dagger(n + \nu) e^{-ig\theta_{n+\nu}} \\ U_\nu^\dagger(n) \rightarrow [e^{ig\theta_n} U_\nu(n) e^{-ig\theta_{n+\nu}}]^\dagger = e^{ig\theta_{n+\nu}} U_\nu^\dagger(n) e^{-ig\theta_n}$$

Par conséquent, la plaquette se transforme comme

$$U_{\mu\nu}(n) \rightarrow e^{ig\theta_n} U_{\mu\nu}(n) e^{-ig\theta_n}$$

Lorsque l'on calcule la trace, sur la représentation du groupe de jauge, de cette expression on obtient

$$\text{Tr} [U_{\mu\nu}(n)] \rightarrow \text{Tr} [e^{ig\theta_n} U_{\mu\nu}(n) e^{-ig\theta_n}] = \text{Tr} [U_{\mu\nu}(n)]$$

grâce à la cyclicité de la trace. Dans le cas particulier d'un groupe abélien (dont toutes les représentations sont unidimensionnelles) la plaquette n'est pas seulement covariante, mais, déjà, invariante, puisque  $e^{ig\theta_n} U_{\mu\nu}(n) e^{-ig\theta_n} = e^{ig\theta_n} e^{-ig\theta_n} U_{\mu\nu}(n) = e^{-ig\theta_n + ig\theta_n} U_{\mu\nu}(n) = U_{\mu\nu}(n)$ .

C'est le terme qu'a écrit Wilson et l'action s'appelle *l'action de Wilson*.

$$S_{\text{jauge}} = \beta \sum_{n, \mu < \nu} (1 - \text{Re}(\text{Tr} [U_{\mu\nu}(n)])) \quad (2.49)$$

On obtient, ainsi, la formulation "compacte", appelée ainsi car les matrices  $U_\mu(n)$  vivent sur une variété compacte, vu que  $U_\mu(n) U_\mu^\dagger(n) = I$  et que  $I$  est un opérateur compact, puisque le groupe de jauge est compact.

C'est un exercice intéressant de montrer que, effectivement, si l'on développe la plaquette on retrouve le terme cinétique habituelle. On écrit

$$\begin{aligned} U_\mu(n) &= e^{iaA_\mu(n)} \\ U_\nu(n + \mu) &= e^{iaA_\nu(n+\mu)} \approx e^{ia[A_\nu(n) + a\partial_\mu A_\nu(n)]} \\ U_\mu^\dagger(n + \nu) &= e^{-iaA_\mu(n+\nu)} \approx e^{-ia[A_\mu(n) + a\partial_\nu A_\mu(n)]} \\ U_\nu^\dagger(n) &= e^{-iaA_\nu(n)} \end{aligned}$$

Dans le cas abélien on trouve immédiatement que

$$\begin{aligned} U_\mu(n) U_\nu(n + \mu) U_\mu^\dagger(n + \nu) U_\nu^\dagger(n) &\approx e^{ia^2(\partial_\mu A_\nu(n) - \partial_\nu A_\mu(n))} \approx \\ 1 + ia^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{a^4}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + O(a^6) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu\nu}(n)) &= 1 - \frac{a^4}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu(n))^2 \Leftrightarrow \\ S &= a^4 \beta \sum_n \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 = a^D \times a^{4-D} \beta \sum_n \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \end{aligned}$$

et l'on fait l'identification

$$\beta a^{4-D} \equiv \frac{1}{g^2} \quad (2.50)$$

Ainsi  $\beta$  "grand" est le régime de couplage "faible" et  $\beta$  "petit" est le régime de couplage "fort". On trouve, également, la dimension d'échelle "classique" du couplage.

Avec ces ingrédients on peut écrire l'action, qui sera l'objet de nos études par la suite (on n'explique pas le nombre de saveurs fermioniques, ni les éventuels indices de symétrie interne,

pour ne pas trop alourdir la notation)

$$\begin{aligned}
S_{\text{latt}} &= S_{\text{gauge}} + S_{\text{fermion}} + S_{\text{scalaire}} = \\
&a^5 \left[ \beta \sum_{n,\mu < \nu} (1 - \text{Re}[U_{\mu\nu}(n)]) + \beta' \sum_{n,\mu} (1 - \text{Re}[U_{\mu 5}(n)]) \right] - \\
&a^5 \sum_n \left[ -\bar{\psi}_n \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu}}{2a} + iM(x_5)\bar{\psi}_n\psi_n \right] + \\
&\underbrace{a^6 \times \frac{r}{2a^2} \sum_n \bar{\psi}_n \sum_{\mu} (U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu})}_{S_{\text{Wilson}}} + \\
&a^5 \sum_n \left[ -\phi_n^{\dagger} \sum_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\phi_{n+\mu} + U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\phi_{n-\mu}}{a^2} + m_{\text{latt}}^2 \phi_n^{\dagger} \phi_n + V(\phi_n^{\dagger} \phi_n) + \right. \\
&\quad \left. \underbrace{G\bar{\psi}_n \phi_n \psi_n + G^{\dagger} \bar{\psi}_n \phi_n^{\dagger} \psi_n}_{\text{Yukawa}} \right]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

On y remarque, d'une part, que la masse du fermion affiche une dépendance explicite à la cinquième dimension et que le champ de jauge, également, possède un couplage différent selon que l'on se trouve dans un sous-espace à quatre dimensions ou dans l'espace à cinq dimensions. Cette anisotropie, pour l'instant, est introduite à la main—on verra sa signification physique dans un prochain chapitre. Le cas “habituel” est celui où  $\beta = \beta'$  et  $M(x_5) = m_0$  (et  $D = 4$ ).

# Chapitre 3

## Etude quantitative des théories de champs sur réseau

Avec les outils du chapitre précédent on peut, maintenant, commencer l'étude quantitative des théories de champs sur réseau.

L'objet principal de cette étude sera *le diagramme de phases* de ces théories. D'intérêt particulier seront les points, lignes ou surfaces de transition entre les différentes phases, ainsi que leur ordre : si l'on trouve une transition de phase de second ordre, alors on sait que, dans le voisinage de ce point critique, on pourra définir une théorie de champs, qui sera indépendante de la régularisation employée. Si, par contre, on trouve une transition de phase du premier ordre, alors on sait que les quantités mesurées seront sensibles aux détails de la régularisation. La même conclusion reste valable pour le cas où l'on est loin d'une surface de transition.

Les paramètres à notre disposition, qui vont nous permettre d'établir le diagramme de phase, sont les constantes de couplage.

Ce point mérite une discussion. En effet, si l'on considère, à titre d'exemple, la théorie d'un champ scalaire, avec action euclidienne

$$S_E = \int d^D x_E \left[ \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + g \frac{\phi^4}{4!} \right]$$

les solutions de l'équation d'Euler–Lagrange,

$$-\square\phi + m^2\phi + \frac{g}{6}\phi^3 = 0 \tag{3.1}$$

semblent dépendre de la constante de couplage,  $g$ . Mais si l'on effectue le changement de variables  $\phi(x) = \Phi/\sqrt{|g|}$ , on trouve que l'action euclidienne devient

$$S_E = \frac{1}{g^2} \int d^D x_E \left[ \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{m^2}{2} \Phi^2 + \frac{\Phi^4}{4!} \right]$$

et que  $\Phi$  satisfait l'équation

$$-\square\Phi + m^2\Phi + \frac{\Phi^3}{6} = 0 \tag{3.2}$$

qui est indépendante de la constante de couplage  $g$ , pourvu que celle-ci soit différente de zéro. On en déduit que l'espace des configurations de champs classiques est indépendant de la valeur de la constante de couplage (pourvu qu'elle soit non-nulle) et, par conséquent, il n'existe pas de transition d'une phase à une autre, si l'on varie  $g$  d'une valeur non-nulle à une autre, *pourvu* que l'on ne passe pas par la valeur  $g = 0$ , seule "privilegiée". En ce qui concerne la dépendance sur  $m$ , toujours au niveau classique, il est intéressant de noter que, si  $m^2 = 0$ , alors l'équation prend la forme

$$-\square\Phi + \frac{1}{6}\Phi^3 = 0$$

et ne semble dépendre d'aucun paramètre. Ainsi, dans ce cas, le "diagramme de phases" de la théorie consiste de trois parties : la partie  $g < 0$ , le point  $g = 0$  et la partie  $g > 0$ . Et ces parties sont l'union de trois points : le point  $g = 0$ , un point quelconque  $g < 0$  et un point quelconque  $g > 0$ .

Si l'on considère ce type de champ couplé à un champ de jauge, alors on doit remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes et ajouter le terme cinétique pour le champ de jauge

$$S_E = \int d^D x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta^{\mu\nu} [(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi] [(\partial_\nu - iqA_\nu)\phi^\dagger] + m^2\phi^\dagger\phi + \frac{g}{4!} (\phi^\dagger\phi)^2 \right]$$

et les solutions des équations d'Euler–Lagrange semblent dépendre des deux constantes de couplage,  $q$  et  $g$ . Mais l'on remarque que, si l'on effectue le changement de variables suivant

$$\phi = \frac{\Phi}{\sqrt{|g|}} \quad \text{et} \quad A_\mu = \frac{B_\mu}{q}$$

alors l'action prend la forme

$$S_E = \frac{1}{g^2} \int d^D x \left[ -\frac{g^2}{4q^2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \delta^{\mu\nu} [(\partial_\mu + iB_\mu)\Phi] [(\partial_\nu - iB_\nu)\Phi^\dagger] + m^2\Phi^\dagger\Phi + \frac{1}{4!} (\Phi^\dagger\Phi)^2 \right]$$

(avec  $G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ) et l'on constate que la constante de couplage  $g$  est devenue, encore une fois, un facteur global et les équations du mouvement ne sont sensibles qu'au rapport  $g/q$  et non aux deux constantes séparément.

Lorsque l'on considère la théorie quantique les choses changent, car l'amplitude de transition entre deux configurations  $\{\Phi_1\}$  et  $\{\Phi_2\}$ , qui est la quantité qui nous intéresse, est proportionnelle à

$$e^{-(S[\Phi_1]-S[\Phi_2])/g^2\hbar}$$

(dans la pratique on travaillera dans des unités où  $\hbar = 1$ ). Cette amplitude est, par conséquent, sensible au rapport  $\Delta S/\hbar \equiv (S[\Phi_1]-S[\Phi_2])/\hbar$ , *mesuré dans les unités de  $g^2$* . (D'autre part, cette amplitude reçoit des contributions de *toutes* les configurations de champs, chacune pondérée par  $e^{-S[\Phi]/g^2}$ , qu'elles soient ou non solutions des équations du mouvement.)

De même, dans la théorie quantique avec champ scalaire chargé et champ de jauge, l'amplitude de transition entre deux configurations de champs est sensible non seulement au rapport  $q/g$ , mais, aussi, à  $g^2$ , ainsi à toutes les deux constantes de couplage.

Ces considérations restent valables sur le réseau.

### 3.1 Champs de Jauge sans matière

Pour pouvoir parler du tout de phases d'une théorie, il nous faut un *paramètre d'ordre*, c.à.d. une quantité, qui prend des valeurs distinctes dans chaque "phase" et-également important !- dont les fluctuations caractérisent le passage d'une phase à l'autre.

Pour la théorie avec champs scalaires le paramètre d'ordre typique est la valeur moyenne du champ,  $\langle \phi(x) \rangle$ —pour le cas avec champs fermioniques le paramètre d'ordre typique est  $\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle$ . Ces quantités sont *locales* et l'on remarque que les symétries dont la brisure elles caractérisent, sont des symétries *globales*. Lorsque l'on emploie la discrétisation sur réseau, ces paramètres continuent à être pertinentes pour caractériser les phases de la théorie.

Pour une théorie de jauge sur réseau on peut montrer [40], par contre, qu'une telle quantité locale n'existe pas. La quantité appropriée pour caractériser les phases d'une théorie de jauge sur réseau s'avère être *la boucle de Wilson*,  $W(C)$ , qui est définie comme la trace sur la représentation du groupe du produit des liens le long la boucle  $C$ , cf. fig. 3.1

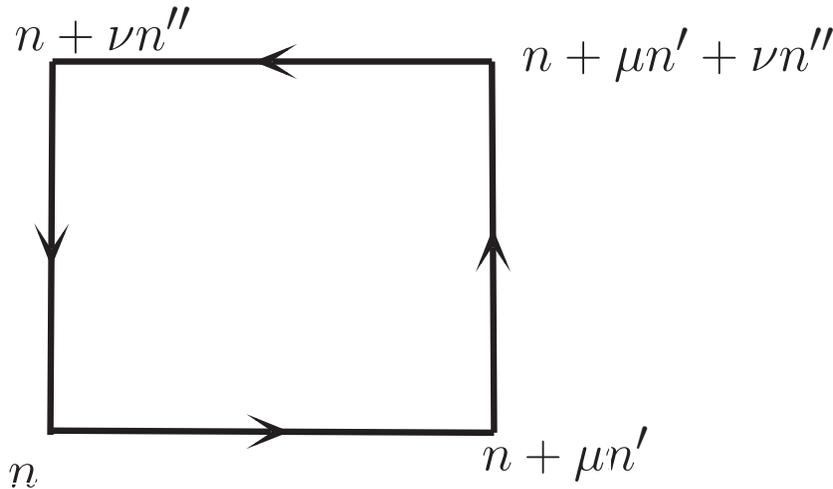


FIGURE 3.1 – Une boucle de Wilson sur le réseau, de taille  $(n' - n) \times (n'' - n)a^2$ .

$$W(C) = \text{Tr} \left[ P \prod U_\mu(n) \right] \quad (3.3)$$

où le préfacteur " $P$ " veut dire *path ordered*—on suit le chemin, dans le sens des flèches.

Sa valeur moyenne, par rapport à la mesure  $e^{-S_E}/Z_E$ ,  $\langle W(C) \rangle$ , peut afficher deux comportements distincts, dans la limite des grandes boucles :

- Loi des aires :  $\langle W(C) \rangle \sim e^{-A/A_0}$
- Loi des périmètres :  $\langle W(C) \rangle \sim e^{-L/L_0}$

qui caractériseront les deux phases possibles d'une théorie de jauge : la phase *confinante* et la phase *Coulombienne*. Pour comprendre ces affirmations et se convaincre que les phases méritent bien leurs noms, on va rappeler le calcul fait par Fischler [41]. On dessine les lignes d'univers d'une paire de charges (de signe opposé) *statiques*, cf. fig. 3.2. L'amplitude de transition vide-

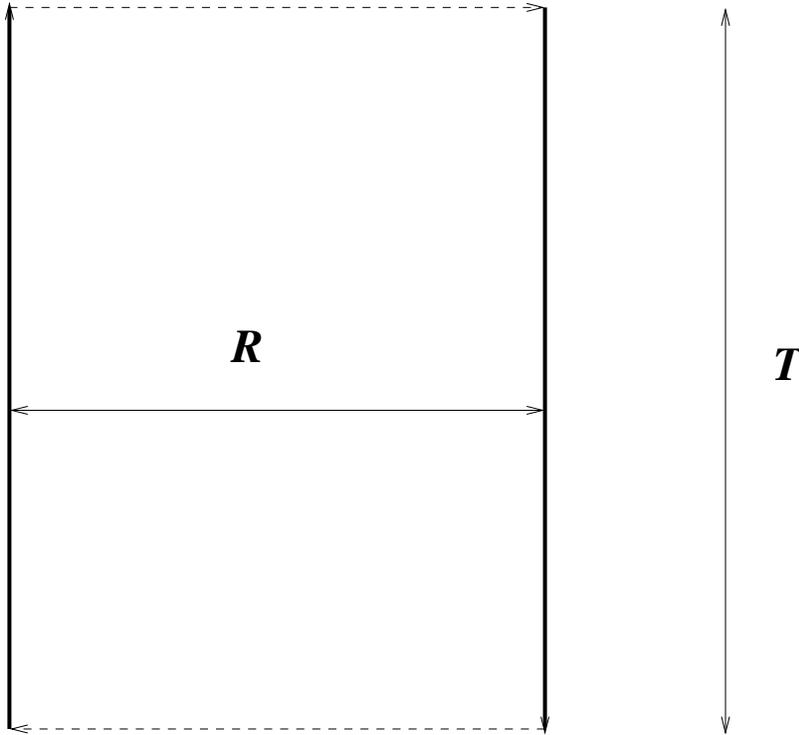


FIGURE 3.2 – Les lignes d'univers d'une paire de charges statiques, séparées de  $R$ . La paire vit pendant un temps  $T$ . Dans la limite  $T \rightarrow \infty$ , la boucle peut être considérée rectangulaire.

vide sera modifiée par la présence de la paire, de la manière suivante :

$$\langle 0|0 \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}U_\mu] e^{-S_E + \int J_\mu^a A_\mu^a d^D x}}{\int [\mathcal{D}U_\mu] e^{-S_E}} = \langle e^{\int J_\mu^a A_\mu^a d^D x} \rangle = \frac{Z_E[J]}{Z_E[0]} \quad (3.4)$$

Dans la théorie euclidienne cette amplitude, dans la limite  $T \rightarrow \infty$ , est égale à  $e^{-(E_0(J) - E_0)T}$ , avec  $E_0(J)$  l'énergie de l'état fondamental en présence de la source  $J$ , et  $E_0$  en l'absence de celle-ci. Pour une source statique cette différence des énergies est le potentiel,  $V(R)$ . Par conséquent,

$$V(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} \ln \langle W(C) \rangle$$

Pour les charges statiques, la source aura la forme suivante

$$J_\mu^a = \delta_{\mu,D} \frac{T^a}{2} Q [\delta^{(D-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_+) - \delta^{(D-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_-)] \quad (3.5)$$

où  $Q$  est la valeur de la charge.

Par conséquent

$$e^{\int d^D x J_\mu^a A_\mu^a} = e^{\int_C A_\mu^a \frac{T^a}{2} dx_\mu} \equiv e^{W(C)}$$

L'aire de la boucle étant  $R \times T$ , on déduit que, si  $W(C) \sim e^{-RT/A_0}$ , alors  $V(R) \sim R$  et il y a une force constante entre les charges, qui seront confinées. Le rapport

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V(R)}{R} \equiv \sigma$$

est appelé, pour des raisons évidentes, *la tension de la corde*. Par contre, si  $W(C) \sim e^{-(R+T)/\ell_0}$ , alors  $V(R) \sim 1/\ell_0$  et la force s'anule à grande distance—les charges sont libres. En effet, comme a noté Creutz, si l'on mesure les quatres boucles de Wilson,  $W(R \pm 1, T \pm 1)$ , sous l'hypothèse que  $R$  et  $T$  soient suffisamment grands pour que l'on se trouve dans le régime asymptotique, alors on déduit que

$$\sigma = \frac{1}{4} \ln \frac{W(R+1, T+1)W(R-1, T-1)}{(W(R+1, T-1)W(R-1, T+1))} \quad (3.6)$$

Par ailleurs, si les boucles de Wilson affichent un comportement de loi de périmètres,  $W(R, T) \sim \exp(-(R+T)/\ell_0)$ , alors le rapport de Creutz est identiquement nul, ce qui est cohérent avec l'existence de charges libres.

On peut essayer de mener le calcul de  $\langle W(C) \rangle$  dans le continu. Pour le cas de l'électrodynamique quantique on peut faire le calcul exactement [41, 7], puisque les intégrales sont gaussiennes :

$$\langle W(C) \rangle = Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_E[A] + \int d^D x A_\mu J_\mu} = Z[0]^{-1} e^{-\int d^D x d^D y J_\mu(x) G_{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)} \quad (3.7)$$

où  $G_{\mu\nu}(x-y)$  est le propagateur du photon et l'on trouve que

$$V(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{T} \ln \langle W(C) \rangle \right) = \text{const} \times \frac{Q^2}{R^{D-3}} \quad (3.8)$$

qui est bien la loi de Coulomb à  $D$  dimensions. (Ici l'on note que  $\langle W(C) \rangle \sim e^{-T/R^{D-3}}$ . A  $D = 4$  dimensions il est intéressant de remarquer qu'il est proportionnel au rapport  $T/R$ . Dans tous les cas, la tension de la corde est nulle, signe d'une phase déconfinante.) La formulation dans le continu nous donne la possibilité de calculer le potentiel entre charges statiques dans l'approximation du couplage faible. La formulation sur réseau nous donne la possibilité de calculer la valeur moyenne des boucles de Wilson pour toute valeur de la constante de couplage, en particulier en régime de couplage fort et déduire, ainsi, quand la tension de la corde pourra devenir non-nulle (en couplage fort).

On peut, intuitivement, comprendre que la phase confinante correspondra à une situation de couplage fort, tandis que la phase Coulombienne à une phase de couplage faible. Mais le contraire n'est pas, nécessairement, vrai, car, en couplage faible, il peut y avoir des configurations de type instanton, qui confinent des charges—un tel exemple est fourni par le modèle de Higgs abélien à 1+1 dimensions [6].

Est-ce que toute théorie de jauge présente les deux phases, avec une transition entre les deux ? A température zéro, à laquelle on travaille, la réponse surprenante est que les théories de jauge non-abéliennes ne présentent qu'une phase, la phase confinante—par contre, les théories de jauge abéliennes *non-compactes* présentent seulement la phase Coulombienne—et les théories de jauge abéliennes compactes présentent toutes les deux phases. L'affirmation sur les théories de jauge abéliennes non-compactes est une conséquence du fait que le champ de jauge est neutre ; par contre, l'affirmation sur les théories de jauge abéliennes compactes est plus difficile à saisir. Elle fut présentée pour la première fois par Polyakov [18], qui proposa, d'ailleurs, que toute théorie, symétrique sous un groupe de jauge compact, aurait une phase confinante. De point de vue technique il n'est pas difficile de montrer que, dans le régime de fort couplage, une théorie de jauge, définie par l'action de type Wilson, affichera un comportement de loi d'aires pour la valeur moyenne de la boucle de Wilson. L'argument est le suivant [7] : On veut calculer

$$\langle W(C) \rangle \equiv \frac{1}{Z_E} \int [\mathcal{D}U_\mu] e^{\int_C A_\mu dx_\mu} e^{-S_E}$$

Lors d'un développement en couplage fort on explicite la constante de couplage,  $\exp(-S_E) \equiv \exp(-\sum_P U_{\mu\nu}(P)/g^2)$  et l'on développe en puissances de  $1/g^2$ . Le terme  $e^{\int_C A_\mu dx_\mu}$ , dans la limite de couplage fort, est une somme sur les liens des plaquettes, qui “pavent” la boucle. Le terme  $e^{-S_E/g^2}$  va donner une série en  $1/g^2$ , dont les coefficients sont des sommes des plaquettes. L'intégrale sur les liens, éléments du groupe, va éliminer tous les termes qui ne représentent pas des plaquettes, qui “pavent” l'aire de la boucle. On trouve ainsi que

$$\langle W(C) \rangle \sim \left( \frac{1}{g^2} \right)^{\text{Aire}(C)} = e^{-\text{Aire}(C) \ln g^2}$$

Ce raisonnement repose essentiellement, comme a noté Polyakov, sur la compacité de la variété du groupe de jauge—car c'est elle qui garantit la convergence de l'intégrale sur le groupe. Par conséquent, la partie non-triviale consiste à démontrer que, pour les théories de jauge non-abéliennes, il n'y a pas de transition de phase, lorsque l'on réduit la constante de couplage, qui conduirait, alors, vers une phase Coulombienne. Une telle démonstration manque encore. Mais on peut employer les simulations numériques de type Monte Carlo pour mesurer la tension de la corde et sa dépendance à la constante de couplage. Alors on trouve, effectivement, que les modèles avec groupe de jauge non-abélien n'ont pas de phase Coulombienne—la tension de la corde reste toujours non-nulle, tandis que, dans le cas des groupes abéliens compacts, l'on trouve une transition de phase entre une phase confinante (tension de corde non-nulle) et une phase Coulombienne (tension de corde nulle).

## 3.2 Champs de Jauge en présence de la matière

Lors de l'analyse précédente les charges étaient statiques et il faut étudier ce qui change, lorsque l'on doit tenir compte de leur dynamique. Une chose, qui change, est qu'il faut une énergie *finie* pour créer une paire de charges dynamiques du vide. Ainsi, si l'on commence avec deux charges statiques, à partir du moment, où il deviendra énergétiquement favorable de créer des paires, donc à partir d'une séparation suffisamment grande, celles-ci pourront écranter les fluctuations des champs de jauge et, ainsi, conduire à une loi de périmètre pour la boucle de Wilson—malgré le fait que ce qui se passe, en fait, est l'écrantage d'états liés de charges confinées. On a besoin, par conséquent, de raffiner l'analyse car la loi des périmètres pour la boucle de Wilson n'est plus suffisante pour exclure le confinement de charges individuelles. Ceci fut entrepris par Fredenhagen et Marcu [42] et leur argument est le suivant : on va comparer le comportement d'une boucle de Wilson, où l'on a inséré les deux charges, et celui de la boucle de Wilson sans les charges. Si ce rapport tend vers une constante non-nulle, lorsque la taille de la boucle (et, donc, la séparation des charges) croît, alors on a confinement—la présence de charges dynamiques ne modifie pas le comportement de la boucle de Wilson. Si, par contre, ce rapport tend vers zéro, alors, on peut séparer les charges individuelles. Ce rapport ne peut diverger car il exprime la probabilité de transition de l'état à deux charges à un état quelconque de la théorie. En équations on écrit [43]

$$\Sigma \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\langle \phi_n^\dagger [\prod U] \phi_{n'} \rangle|^2}{W(C)} \quad (3.9)$$

où le produit des liens porte sur ceux qui relient la charge au site  $n$  à celle au site  $n'$ ; et en dessins, cf. 3.2 Alessandrini *et al.* [43] ont calculé cette quantité dans le modèle le plus simple,

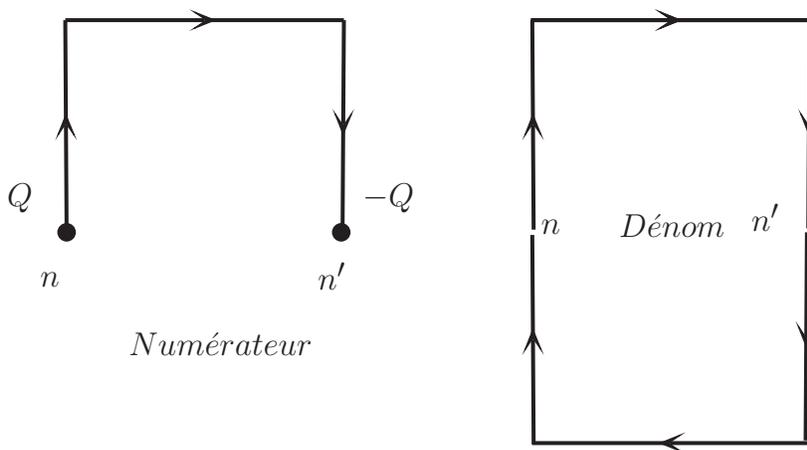


FIGURE 3.3 – Le paramètre de Fredenhagen et Marcu

le modèle de Higgs abélien. Ils ont trouvé que seulement dans la phase Coulombienne existent

des charges non-confinées—dans la phase de Higgs les charges sont confinées, de même que dans la phase confinante. Ces résultats confirment que le comportement de la boucle de Wilson ne suffit pas pour caractériser les phases d’une théorie avec degrés de liberté dynamiques. La raison, pourquoi ce résultat est surprenant est, en effet, que, dans la phase de Higgs, malgré le fait que le champ de jauge soit massif et, donc, transmet des forces à courte portée, il n’y ait pas de charges isolées, mais, seulement, des dipôles—qui est l’effet de la compacité du groupe.

Pour le cas non-abélien le paramètre de Fredenhagen et Marcu est, bien sûr, encore plus pertinent—et il fut introduit, d’ailleurs, pour le cas de la chromodynamique quantique. Jusqu’ici la difficulté de mener des simulations avec quarks dynamiques a fait que l’on n’ait pas pu le mesurer de façon probante dans ce contexte.

Une autre classe de théories, où ce calcul serait intéressant, est celui avec dimensions supplémentaires, où certains champs seraient “confinés” sur une “brane”. Cette brane est définie par le comportement de la boucle de Wilson : loi de périmètres sur la brane, loi d’aires vers les directions perpendiculaires. En présence de charges dynamiques la loi de périmètres est-elle suffisante pour caractériser la brane? Ce calcul n’a pas encore été entrepris.

Maintenant que l’on dispose d’un paramètre d’ordre, on peut tracer le diagramme de phases et s’occuper de l’ordre des transitions éventuelles. On va prendre comme exemple la théorie, qui va nous occuper le plus par la suite, à savoir, la théorie de jauge  $U(1)$  compacte et réaliser le calcul dans l’approximation du champ moyen.

L’action de Wilson est donnée par

$$S_{\text{jauge}} = \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu} (1 - \text{Re} [U_{\mu\nu}(n)]) \quad (3.10)$$

On ne dispose que d’un paramètre, la constante  $\beta \equiv 1/g^2$  : couplage fort correspond à des petites valeurs de  $\beta$  et couplage faible à des grandes valeurs de  $\beta$ . L’action euclidienne correspond à l’énergie interne du système statistique et, puisque  $||U_\mu(n)|| = 1$ , il s’agit, en fait d’un modèle sigma non-linéaire, car l’intégrale fonctionnelle doit porter sur les variables  $U_\mu(n)$ , qui prennent valeurs sur la variété du groupe. Un défi pour l’approximation du champ moyen sera de résoudre cette contrainte et d’exprimer la fonction de partition en termes de variables non-contraintes. Plus précisément encore, il s’agit de’un modèle sigma non-linéaire *jaugé*, puisque l’action est invariante sous des transformations locales des  $U_\mu(n)$ .

Dans la section qui suit, on expose cette approche, ainsi que la méthode de Monte Carlo qui permet de sonder les corrections à l’approximation du champ moyen de façon plus efficace que le calcul direct de celles-ci.

### 3.3 Les méthodes de calcul

Dans cette section on exposera les méthodes numériques, que l’on a employées pour obtenir les résultats concrets, qui seront le sujet des deux chapitres qui vont suivre.

On a employé deux méthodes : l’approximation du champ moyen et la méthode de Monte Carlo.

### 3.3.1 La méthode du champ moyen pour les théories de jauge sur réseau

La méthode du champ moyen nous permet d'obtenir un premier aperçu du diagramme de phase d'un système statistique—et fournit le point de départ du calcul des corrections, dues aux fluctuations. La méthode de Monte Carlo sera sensible aux fluctuations, négligées dans l'approximation du champ moyen, mais sera sensible, également, à des incertitudes dues aux corrélations entre configurations engendrées. Ainsi les deux méthodes sont complémentaires.

La méthode du champ moyen pour les systèmes statistiques, qui sont invariants sous des symétries *locales* fut mise au point dans les années quatre-vingt—un article de référence est le travail de Drouffe et Zuber [37]. L'idée est la suivante : On cherche à calculer la fonction de partition d'une théorie de jauge, définie par les liens,  $U \equiv U_\mu(n)$  (on va noter le lien du site  $n$  vers le site  $n + \mu$  par  $l$  pour alléger la notation dans certaines expressions qui suivent) :

$$Z[J] = e^{W[J]} = \int \mathcal{D}U e^{-S[U] + \sum_{\text{liens}} (J \cdot U)}$$

Ici  $\mathcal{D}U$  est la mesure sur le groupe de jauge. En suivant l'approche habituelle en mécanique statistique, la quantité qui va nous renseigner sur les différentes phases de la théorie est l'énergie libre l'énergie libre de Helmholtz,  $W[J] = \ln Z[J]$ .

Pour faire l'intégration sur le groupe de jauge on va employer l'astuce suivante [35] : on va remplacer

$$\int \mathcal{D}U e^{-S[U] + \sum_n J_\mu(n) \cdot U_\mu(n)}$$

par

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}U \underbrace{\left[ \prod_{\text{liens}} dV_l \delta(V_l - U_\mu(n)) \right]}_1 e^{-S[U] + \sum_n J_\mu(n) \cdot U_\mu(n)} = \\ & \int \mathcal{D}U \prod_{\text{liens}} dV_l \frac{d\alpha_l}{2\pi i} e^{-\alpha_l (V_l - U_\mu(n))} e^{-S[U] + \sum_n J_\mu(n) \cdot U_\mu(n)} = \\ & \int \prod_{\text{liens}} dV_l \frac{d\alpha_l}{2\pi i} e^{-S[V_l] - \alpha \cdot V + \sum_l w(\alpha_l + J_l)} \end{aligned}$$

où

$$e^{\sum_l w(\alpha_l + J_l)} = \int \mathcal{D}U e^{-4\text{Re}(\alpha + J) \cdot \text{Re}(U) - 4\text{Im}(\alpha + J) \cdot \text{Im}(U)}$$

Par cette astuce on a découplé les liens et l'on a isolé l'intégrale sur le groupe. En fait, comme  $\alpha_l$  et  $V_l$  sont, *a priori*, des nombres complexes,

$$\alpha \cdot V \equiv 2\text{Re}(\alpha \cdot V) = \text{Re}(2\alpha \cdot V)$$

Pour le groupe de jauge  $U(1)$  compact l'intégrale sur le groupe peut être exprimée en termes de fonctions élémentaires :

$$\int \mathcal{D}U e^{-4\text{Re}(\alpha)\text{Re}(U)-4\text{Im}(\alpha)\text{Im}(U)} = \prod_{\text{liens}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_l}{2\pi} e^{-(\alpha+\alpha^\dagger)\cdot\cos\theta - i(\alpha-\alpha^\dagger)\sin\theta} \equiv \prod_{\text{liens}} I_0(2|\alpha_l|) \quad (3.11)$$

où  $I_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel "modifiée".

Jusqu'ici le calcul est exact. Il nous reste à traiter l'expression

$$Z[J] = \int \prod_{\text{liens}} \left[ dV_l \frac{d\alpha_l}{2\pi i} \right] e^{-S[V_l] - \text{Re}(2\alpha \cdot V) + \sum_l w(2\alpha_l + J_l)}$$

et l'on posera dorénavant  $2\alpha_l \rightarrow \alpha_l$ . Dans cette expression les variables d'intégration,  $V_l$  et  $\alpha_l$ , ne sont plus contraintes : le domaine d'intégration va de  $-\infty$  à  $+\infty$  pour chacune. Par conséquent on peut employer la méthode du col. Mais il y a un point subtil, encore [37], car ce n'est pas clair quelle est la (petite) variable du développement. En fait il s'agit d'un développement en  $1/D$ , comme on peut se l'attendre pour l'approximation du champ moyen.

Dans ces conditions on est, maintenant, en position d'évaluer cette intégrale par la méthode du col : Si l'on définit

$$S_{\text{eff}}[V_l, \alpha_l; J_l] \equiv S[V_l] + \alpha \cdot V - \sum_l w(\alpha_l + J_l)$$

on cherche  $V_l^*, \alpha_l^*$ , les configurations qui extrémisent  $S_{\text{eff}}$  lorsque  $J_l \equiv 0$  :

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}[V_l, \alpha_l]}{\partial V_l} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_{\text{eff}}[V_l, \alpha_l]}{\partial \alpha_l} = 0$$

On développe  $S_{\text{eff}}[V_l, \alpha_l]$  autour de  $V_l^*, \alpha_l^*$  :

$$Z[J] = \underbrace{e^{-S_{\text{eff}}[V_l^*, \alpha_l^*; J]}}_{Z_{\text{MF}}[J]} \int \left[ \prod_{\text{liens}} dV_l \frac{d\alpha_l}{2\pi i} \right] e^{-\sum_{p=2}^{\infty} \delta S^{(p)}} \quad (3.12)$$

La contribution du champ moyen sera, alors, donnée par

$$Z_{\text{MF}}[J] = e^{-S[V_l^*] - \alpha^* \cdot V^* + \sum_l w(\alpha_l^* + J_l)} \quad (3.13)$$

ce qui donne l'expression suivante pour l'énergie libre de Helmholtz

$$W_{\text{MF}}[J] = -S[V_l^*] - \alpha^* \cdot V^* + \sum_l w(\alpha_l^* + J_l) \quad (3.14)$$

Dans le cadre de l'approximation du champ moyen on remarque que l'une des équations pour la configuration extrémale, à savoir

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \alpha_l} = 0 \Leftrightarrow V_l = \frac{I_1(\alpha_l)}{I_0(\alpha_l)} \quad (3.15)$$

nous permet d'obtenir une action effective, qui ne dépend que des variables  $\alpha_l$  exclusivement :

$$S_{\text{eff}}(V_l, \alpha_l) = S_{\text{eff}}\left(\frac{I_1(\alpha_l)}{I_0(\alpha_l)}, \alpha_l\right) \equiv S_{\text{MF}}(\alpha_l) \quad (3.16)$$

L'équation, qui détermine  $\alpha_l^*$ , est

$$\frac{\delta S_{\text{MF}}(\alpha_l)}{\delta \alpha_l} = 0 \quad (3.17)$$

Et l'on pourra introduire sa solution,  $\alpha_l^*$ , dans éq. (3.15) pour obtenir le lien,  $V_l^*$ -et, par conséquent, la valeur moyenne de la boucle de Wilson et, ainsi, la tension de la corde.

Comme l'indice  $l$  étiquette les liens, on aura, en principe, autant d'équations que des liens du réseau—ce qui rend le problème très difficile à traiter. Mais l'on peut s'imaginer que les configurations invariantes par les symétries du réseau seraient particulièrement intéressantes à étudier. Parmi celles les plus simples sont les configurations uniformes. On pose, ainsi,  $\alpha_l \equiv \alpha$  et  $V_l \equiv V$ . Alors on n'a qu'une équation à résoudre, par la méthode de Newton–Raphson, par exemple. On obtient, ainsi,  $\alpha^*$  et  $V^*$  par l'équation (3.15). Il y a, maintenant, deux cas de figure : soit l'on trouve comme solution  $\alpha^* = 0 \Leftrightarrow V^* = 0$ , ce qui implique que la tension de la corde est infinie et l'on se trouve, certainement, dans la phase confinante ; soit que  $\alpha^* \neq 0 \Leftrightarrow V^* \neq 0$ . Ce résultat mérite une discussion. En effet, comme on n'a pas imposé une condition de jauge,  $V^*$ , qui représente la valeur moyenne du lien dans le groupe, doit toujours être égal à zéro, d'après une interprétation “directe” du théorème d'Elitzur. Comment peut-on même imaginer qu'il soit possible d'obtenir une valeur  $V^* \neq 0$ ? La réponse est que, lorsque  $V_l = V, \alpha_l = \alpha$ , la symétrie n'est plus locale, elle n'est que globale. L'argument d'Elitzur dépend du fait que l'on peut varier un nombre *fini* de liens, ce qui est exclu par construction pour une configuration uniforme. Alors une solution  $V^* \neq 0$  n'est pas en contradiction avec le théorème d'Elitzur, car il n'exclut pas que l'on puisse briser une symétrie globale. Le sens physique de la solution  $V^* \neq 0$  est que, si l'on calcule une quantité invariante de jauge, comme la boucle de Wilson de longueur  $L$ , alors, dans ce cas,  $\langle W_L \rangle \sim (V^*)^L \sim \exp(-L \ln(1/V^*))$  et l'on trouve une loi de périmètre, donc on se trouve dans la phase déconfinante—et cette affirmation est invariante de jauge. Il est rassurant que l'on trouve la solution  $V^* = 0$  à couplage fort et la solution  $V^* \neq 0$  à couplage faible.

On a obtenu ainsi une description complète des phases de la théorie dans l'approximation du champ moyen. On doit encore comprendre quelles sont les quantités que l'on doit varier pour passer de la phase confinante à la phase Coulombienne. On doit, aussi, discuter la pertinence des corrections à l'approximation du champ moyen. Il est, alors, préférable d'employer un exemple concret. Pour préparer la discussion prochaine sur le cas anisotrope, on va présenter le cas du groupe  $U(1)$ —mais l'on va garder la dimension,  $D$ , de l'espace–temps, comme un paramètre libre.

La quantité physique, qui va contrôler quelle phase sera choisie par le système, est l'énergie libre,  $W_{\text{MF}} \equiv -S_{\text{MF}}(\alpha^*)$ .

L'énergie libre,  $W_{\text{MF}}$ , est constituée des termes suivantes :

– *L'action de Wilson :*

$$S[V] = \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu} (1 - V^4) = N^D \frac{D(D-1)}{2} \beta (1 - V^4)$$

puisque l'étiquette du site prend toutes les valeurs entières entre 0 et  $N^D - 1$  (à raison de  $N$  sites par dimension d'espace-temps) et la double somme sur les directions de la plaquette comprend  $D(D-1)/2$  termes (et l'on emploie conditions aux bords périodiques sur toutes les directions).

– *Le terme de l'intégrale sur le groupe :*

$$\sum_{\text{liens}} w(\alpha_l) = \ln I_0(\alpha) \sum_{\text{liens}} 1 = N^D D \ln I_0(\alpha)$$

puisque'il y a  $2D$  liens par site mais chaque lien relie deux sites.

– *Le terme de la contrainte :*

$$\sum_{\text{liens}} \alpha_l \cdot V_l = \alpha V N^D D$$

Ainsi l'expression finale est

$$W_{\text{MF}}(V, \alpha) = -N^D \frac{D(D-1)}{2} \beta (1 - V^4) - N^D D \alpha V + N^D D \ln I_0(\alpha) \quad (3.18)$$

et l'énergie libre par site est donnée par l'expression suivante

$$f_{\text{MF}}(V, \alpha) = -D \left( -\frac{D-1}{2} \beta (1 - V^4) - \alpha V + \ln I_0(\alpha) \right) \quad (3.19)$$

Si l'on y remplace  $V$  par  $I_1(\alpha)/I_0(\alpha)$ , on trouve une fonction à une variable,  $\alpha$  et dépendante d'un paramètre,  $\beta$  et de la dimension  $D$ . Le voisinage de l'origine,  $\alpha = 0$  (donc  $V = 0$ ), correspond à la phase confinante, le voisinage de l'infini à la phase déconfinante, Coulombienne. Si l'on effectue un développement limité autour de l'origine, on trouve que

$$f_{\text{MF}}(V(\alpha), \alpha) \approx \beta \frac{D(D-1)}{2} + \frac{D}{4} \alpha^2 + O(\alpha^3)$$

Par conséquent l'origine est un minimum local pour toute valeur du couplage,  $\beta$  et pour toute dimension de l'espace-temps,  $D$  à l'approximation du champ moyen. S'il existe un minimum local ailleurs, la transition entre la phase confinante et la phase Coulombienne ne pourra être que du premier ordre. En effet, si l'on trace son allure, pour  $D = 4$  (cf. fig. 3.3.1), on trouve que pour des petites valeurs de  $\beta = 1/g^2$ , donc en couplage *fort*, la fonction ne possède qu'un seul minimum, à l'origine,  $\alpha^* = 0$ , par conséquent  $V^* = 0$ , résultat cohérent avec le raisonnement général exposé ci-dessus. Lorsque  $\beta$  augmente, donc le couplage diminue, on constate que l'énergie libre affiche un minimum secondaire, à  $\alpha^* > 0$ , pour  $\beta_c^{(1)} \approx 1$ —mais, pour  $\beta < \beta_c^{(2)} \approx 1.216$ [37], il

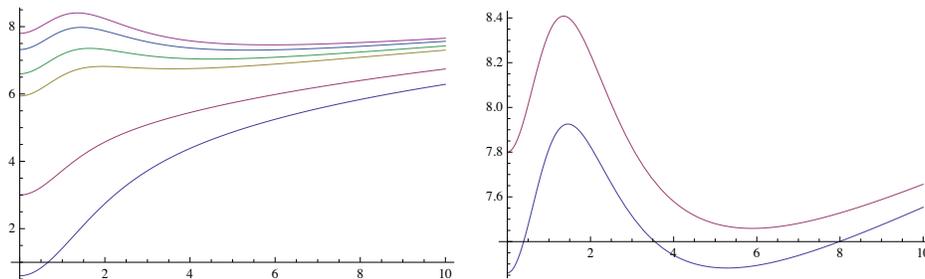


FIGURE 3.4 – L'énergie libre par site, dans l'approximation du champ moyen, pour la théorie  $U(1)$  à  $D = 4$ .

s'agit d'une configuration *métastable*, puisque l'on note que son énergie est supérieure à celle de la configuration à  $\alpha^* = 0$ . Pour  $\beta = \beta_c^{(2)} \approx 1.216$ , on remarque que les deux configurations deviennent dégénérées, séparées par une barrière de hauteur et largeur finies—il y a, donc, une transition du premier ordre entre les deux. Pour  $\beta > \beta_c^{(2)}$  le minimum à  $\alpha^* > 0$  devient le minimum global et le système se trouvera, alors, dans la phase Coulombienne (cf. panneau de droite de la fig. 3.3.1).

Il est intéressant de remarquer que le *seul* terme, qui soit sensible au groupe de jauge, est le terme  $\sum_{\text{liens}} w(\alpha_l + J_l)$ . Pour le groupe  $U(1)$  la fonction  $w(\alpha) = \ln I_0(\alpha)$ , tandis que pour le groupe  $SU(2)$ <sup>1</sup> elle vaut  $w(\alpha) = \ln(I_0(\alpha) - I_2(\alpha))$  Par conséquent on peut répéter l'analyse sans trop d'effort et trouver que l'origine est, toujours, un minimum local pour  $SU(2)$  également

$$f_{\text{MF}}^{SU(2)}(V(\alpha), \alpha) \approx \beta \frac{D(D-1)}{2} + \frac{D}{8} \alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (3.20)$$

et qu'il existerait un minimum à  $\alpha > 0$  pour  $\beta > \beta_c^{(1),SU(2)}$  qui, pour  $\beta = \beta_c^{(2),SU(2)}$  deviendrait dégénéré avec le minimum à l'origine et, pour  $\beta > \beta_c^{(2),SU(2)}$ , deviendrait le minimum global. Ainsi y aurait-il une phase Coulombienne, même pour le cas  $SU(2)$ —à couplage *faible*—et la transition de phase serait du premier ordre, ce qui excluerait, également, l'existence d'une théorie continue. Ces résultats sont en flagrante contradiction avec les résultats obtenus par théorie de perturbations en couplage faible dans la théorie continue en régularisation dimensionnelle, où l'on trouve que la théorie est renormalisable, c.à.d. qu'il existe une théorie, indépendante de la régularisation. Par conséquent l'existence d'une phase Coulombienne doit être considérée comme un artéfact de l'approximation du champ moyen pour le cas du groupe  $SU(2)$ . Et, en effet, si l'on tient compte des corrections à cette approximation [36, 34, 37], on trouve qu'à  $D = 4$ , la théorie avec groupe de jauge  $SU(2)$  ne possède qu'une phase, confinante, résultat cohérent, par ailleurs, avec des simulations numériques directes (effectuées dans les mêmes travaux). Ainsi

1. Dans ce cas, bien sûr,  $\alpha_l$  et  $V_l$  appartiennent à l'algèbre  $SU(2)$ . On fait l'hypothèse que  $\alpha = \alpha_0 \cdot I$  et  $V = V_0 \cdot I$  et l'on supprime l'indice par la suite. [34]

le minimum à  $\alpha = 0$  est physique—le minimum à  $\alpha > 0$  est un artéfact de l’approximation du champ moyen.

Pour le groupe  $U(1)$  la situation est moins clair. La contribution des corrections à l’approximation du champ moyen a été calculée [36, 37] et les conclusions ne sont pas, en fait, aussi tranchées que l’on pouvait penser. D’abord le calcul est assez onéreux (au moins dans les années quatre-vingt, quand les logiciels de calcul symbolique étaient, encore, dans les premiers étapes de leur développement)—l’étude la plus poussée semble être le travail de Flyvbjerg [36] qui calcule les corrections à cinq boucles; ensuite les résultats pour le cas  $D = 4$  indiquent que les premières corrections sont plus importantes que l’on ne pouvait se l’attendre—ainsi les corrections suivantes devaient être prises en compte; et la question déjà, si le minimum à  $\alpha = 0$  pouvait devenir un maximum, ce qui serait l’indication que la transition vers la phase Coulombienne serait continue, reste, toujours, ouverte. Les simulations numériques, n’ont pas été, à ce jour, concluantes, sur l’ordre de la transition, non plus.

### 3.3.2 La méthode de Monte Carlo pour les théories de champs sur réseau

Il est toujours utile de pouvoir résoudre un problème de plusieurs façons distinctes. L’approximation du champ moyen est une approche facile à comprendre et à programmer—la prise en compte des corrections devient, par contre, de plus en plus onéreuse et l’on peut se poser la question si l’effort en vaut la peine—si l’on dispose d’une autre méthode, qui peut nous fournir des résultats fiables pour les quantités que l’on cherche, qui soit cohérente avec les corrections à l’approximation du champ moyen mais plus facile à programmer. La réponse est la méthode de Monte Carlo.

On va illustrer la méthode sur le calcul d’une quantité qui est pertinente pour la localisation d’une transition de phase, facile à calculer dans l’approximation du champ moyen, de façon à pouvoir comparer directement les deux approches. Cette quantité est la valeur moyenne de la plaquette élémentaire,  $\langle U_{\mu\nu}(n) \rangle$ , comme fonction de la constante de couplage,  $\beta$ . Plus précisément on s’intéresse à la boucle d’hystérésis de cette quantité, comme fonction de  $\beta$ . La raison est la suivante : comme cette quantité est, en fait, la première dérivée de l’énergie libre, si la transition de phase est du premier ordre, alors cette boucle aura une aire finie, proportionnelle à la “chaleur latente”. Si par contre, la transition de phase est continue (du second ordre), alors la boucle aura une aire, théoriquement zéro, en pratique très petite. L’existence même d’une transition sera signalée par le fait que cette quantité affichera une variation abrupte, comme fonction de  $\beta$ , au voisinage du point de transition.

Dans l’approximation du champ moyen on calcule

$$\langle U_{\mu\nu}(n) \rangle = \frac{\partial f_{\text{MF}}}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \frac{df}{d\beta} = \frac{df}{d\beta} = \frac{D(D-1)}{2} (1 - V(\alpha)^4) \quad (3.21)$$

puisque l’on se trouve à un état d’équilibre, donc l’énergie libre est stationnaire par rapport à la variation des paramètres,  $\alpha = \alpha^*(\beta)$  et la seule contribution est la dépendance explicite.

Pour des raisons présentées auparavant, si l'on trace cette quantité comme fonction de  $\beta$ , on va mettre en évidence une boucle d'hystérésis entre  $\beta_c^{(1)}$  et  $\beta_c^{(2)}$ , avec  $\beta_c^{(1)} \approx 1$  et  $\beta_c^{(2)} \approx 1.216$ .

On se propose, par conséquent, de comparer ce résultat à

$$\langle U_{\mu\nu}(n) \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}U U_{\mu\nu}(n) e^{-S_E[U]}}{\int \mathcal{D}U e^{-S_E[U]}} \quad (3.22)$$

pour le cas du groupe de jauge discret,  $\mathbb{Z}_2$ .

Par invariance de translations et de rotations du réseau on s'attend, bien sûr, à ce que le résultat soit indépendant du site,  $n$  et du plan,  $(\mu, \nu)$ . L'algorithme le plus simple à réaliser est l'algorithme de Metropolis : On commence avec une configuration initiale de liens,  $U_\mu(n)$ , choisis complètement au hasard. Pour le cas du groupe  $\mathbb{Z}_2$ , on choisirait  $U_\mu(n) = 1$  ou  $U_\mu(n) = -1$  avec probabilité égale ; pour le cas du groupe  $U(1)$  on écrirait  $U_\mu(n) = \exp(i\theta_\mu(n))$  et l'on choisirait  $\theta_\mu(n)$  de manière uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi)$ -ce qui garantit que l'on échantillonne le cercle de façon uniforme également.

Ensuite, on essaie d'engendrer une nouvelle configuration, de la façon suivante : On passe en revue chaque lien,  $U_\mu(n)$ , et l'on essaie de le modifier, tout en restant dans le groupe. Ainsi, on essaie de remplacer  $U_\mu(n)$  par  $U_\mu(n)V_\mu(n)$  (pas de sommation sur  $\mu$  ou  $\nu$ !), avec  $V_\mu(n)$  un élément du groupe choisit uniformément dans celui-ci. Ainsi, pour le groupe  $\mathbb{Z}_2$  on essaie de "flipper" le lien, c.à.d. de remplacer  $U_\mu(n)$  par  $-U_\mu(n)$  ; pour  $U(1)$  on essaie de remplacer  $U_\mu(n)$  par  $U_\mu(n)e^{i\phi}$ , avec  $\phi$  uniformément distribué sur  $[0, 2\pi)$  et indépendamment choisi pour chaque lien. On calcule la variation de l'action,  $S[U]$ ,  $\delta S \equiv S_{\text{nouvelle}} - S_{\text{ancienne}}$ , provoquée par cette variation et l'on accepte le changement au lien du site  $n$  au site  $n + \mu$ , si la condition suivante est remplie :

$$e^{-\delta S} > r \quad (3.23)$$

où  $r$  est un nombre uniformément distribué entre 0 et 1 et indépendamment choisi pour chaque lien. Un passage en revue de tous les liens du réseau s'appelle un *balayage* (*sweep* en anglais) de celui-ci. On dispose, alors, de la configuration  $C_1$ . On continue, ainsi et l'on engendre une suite de configurations,  $C_2, C_3, \dots, C_m, \dots, C_{M-1}$ . Dans chacune on calcule la valeur de la plaquette, moyennée sur toutes les directions,

$$U^{(m)} \equiv \frac{2}{D(D-1)} \frac{1}{N^D} \sum_n \sum_{\mu < \nu} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}^{(m)}(n))) \quad (3.24)$$

où l'on a ajouté une constante conventionnelle (son utilité sera expliquée par la suite). Naïvement, si l'on calcule, maintenant,

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} U^{(m)}$$

alors, puisque l'on échantillonne les configurations avec un poids statistique,  $e^{-S_E[U]}$ , proportionnel à leur action euclidienne, on peut espérer que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} U^{(m)} = \langle U_{\mu\nu}(n) \rangle \quad (3.25)$$

ce qui est une expression de l'ergodicité de l'algorithme. On renvoie au cours de Sokal [45] pour une exposition détaillée, en particulier pour le calcul des erreurs systématiques et statistiques. Ici on note seulement que l'on peut s'attendre à ce que la configuration  $C_0$ , qui ne reflète certainement pas la physique du système, ne doit pas être prise en compte, ainsi qu'un certain nombre des configurations successives à elle. On cherche, en fait, à effectuer la somme sur un grand nombre de configurations, qui seraient tirées suivant la distribution  $\exp(-S_E)$ , mais qui seraient, dans la mesure du possible, statistiquement indépendantes les unes des autres.

On est, maintenant, en position de comparer les résultats des simulations numériques et de l'approximation du champ moyen pour la valeur moyenne de la plaquette, ce qui, en fait, est, également, à une constante additive près, la valeur moyenne de l'énergie interne euclidienne. Le choix de la normalisation est tel que,  $U^{(m)} \neq 0$  dans la phase confinante, mais  $U^{(m)} \approx 0$  dans la phase Coulombienne.

Pour illustrer ces calculs sur un cas concret on choisit le cas d'un groupe de jauge discret, le groupe  $\mathbb{Z}_2$ .

C'est la théorie la plus simple que l'on puisse imaginer et elle fut introduite par Wegner [11] comme un exemple pour la généralisation du groupe de symétrie globale de type Ising à une symétrie locale. Dans ce cas  $w(\alpha) = \ln \cosh(\alpha)$ ,  $V(\alpha) = \tanh(\alpha)$  et l'on trouve le résultat suivant pour l'énergie interne par site

$$\langle U_{\text{MF}}(\alpha^*(\beta)) \rangle = \frac{D(D-1)}{2} (1 - \tanh^4(\alpha^*(\beta))) \quad (3.26)$$

avec  $\alpha^*(\beta)$  déterminée par l'équation

$$\frac{\partial f_{\text{MF}}}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^* = 2\beta(D-1) \tanh^3 \alpha^* \quad (3.27)$$

et l'on se rend compte [37] que la constante de couplage "effective" est la combinaison  $\tilde{\beta} \equiv 2\beta(D-1)$ .

Dans la figure 3.5 on affiche  $\langle U(\beta) \rangle$ , obtenu par simulations Monte Carlo sur des réseaux de tailles  $8^3, 8^4, 8^5$ , pour mettre en évidence l'influence de la dimension de l'espace-temps et les résultats pour des réseaux de tailles  $16^3, 32^3, 64^3, 16^4$  pour mettre en évidence les effets, éventuels, de la taille finie—que l'on peut constater être assez faibles, dans ce cas, en comparaison aux effets dimensionnels. On note que, pour  $\beta < \beta_c^{(1)}$ , l'approximation du champ moyen prévoit  $\langle U_{\text{MF}} \rangle \equiv 1$ , artéfact de l'approximation du champ moyen.

Par conséquent on peut employer tous les deux outils pour étudier les fermions chiraux sur réseaux, en interaction avec des champs de jauge. C'est le sujet du chapitre qui suit.

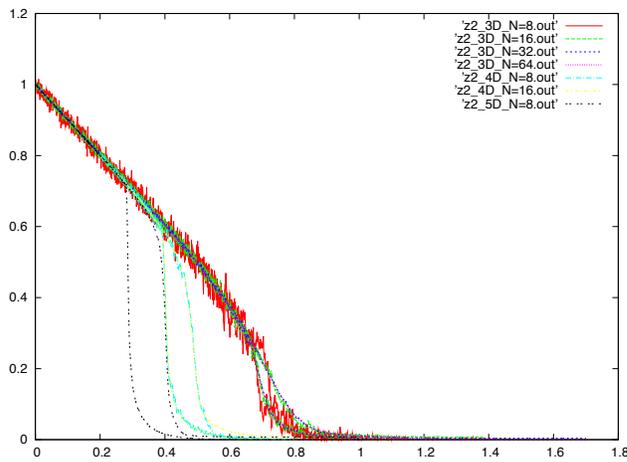


FIGURE 3.5 – Boucles d’hystérésis pour l’énergie interne, calculées dans par simulations de Monte Carlo. Elles mettent en évidence la transition du premier ordre entre une phase confinante  $\langle E \rangle \neq 0$ , lorsque  $\beta < \beta^{(1)}$  et une phase déconfinante,  $\langle E \rangle \approx 0$ , lorsque  $\beta > \beta^{(2)} > \beta^{(1)}$ . L’accord avec la prédiction du champ moyen est qualitatif.

# Chapitre 4

## Fermions Chiraux et Champs de Jauge sur Réseau

### 4.1 Introduction

On va employer les méthodes exposées dans le chapitre précédent pour améliorer la modélisation non-perturbative des champs fermioniques. Dans le chapitre 2 on s’est rendu compte que c’était impossible de trouver une régularisation des champs fermioniques, qui respecte à la fois l’invariance de jauge et l’invariance chirale. En fait, la régularisation par le réseau respecte l’invariance de jauge—mais non l’invariance chirale. Cette affirmation a même acquis le statut d’un théorème [10] et rechercher à contourner ses hypothèses semblait, pendant longtemps, un exercice trop compliqué. Pour les applications en QCD, où la symétrie chirale est une symétrie *globale*, le fait que la régularisation la brise n’implique autre chose, en principe, que l’on ne pourra la récupérer que lors de la limite continue et que l’on aura des erreurs systématiques supplémentaires, lors des calculs sur réseau—comme pour la symétrie des rotations (en Euclidien ; qui deviendra la symétrie de Lorentz en Minkowski). Mais pendant longtemps les réseaux que l’on pouvait utiliser étaient tellement petits et leurs mailles tellement grandes que les erreurs systématiques dues à ces effets étaient dominants. Maintenant, où l’on peut réaliser des simulations où la masse des pions est de plus en plus proche à la valeur “physique”, les effets de la brisure explicite de l’invariance chirale commencent à être “visibles” et l’on aimerait pouvoir les réduire, voire les éliminer, pour pouvoir comprendre le mécanisme détaillé de sa (presque) brisure—qui est, toujours, un problème ouvert. Alors la recherche sur comment contourner le théorème de Nielsen et de Ninomiya est devenue d’actualité.

Dans le secteur électrofaible la symétrie chirale est *locale*. Dans ce cas, la régularisation par le réseau brise l’invariance de jauge et l’existence d’une limite continue n’est pas *a priori* garantie—il faut bien contrôler que les identités de Ward–Takahashi sont satisfaites. Jusqu’à présent l’approche perturbative aux phénomènes du secteur électrofaible est en très bon accord avec les mesures expérimentales—mais pour comprendre l’hierarchie de masses, par exemple, on a besoin d’une approche non-perturbative du couplage des fermions et champs de jauge avec le

Higgs, qui pourra être réalisée par la régularisation du réseau. Jusqu'à présent des modèles où des champs scalaires étaient couplés à des champs de jauge ont été étudiés, ainsi que ceux où des fermions étaient couplés à des scalaires—mais dans aucun cas on n'a pu étudier le système complet de champs de jauge, champs scalaires et champs fermioniques, avec une symétrie chirale jaugée.

Un pas dans cette direction fut réalisé à la fin des années quatre-vingt par le groupe de Rome [39]. Dans ces travaux la symétrie fondamentale est celle, globale, de BRST, qui assure, déjà dans l'approche perturbative, que, dans une théorie de jauge, les degrés de liberté de norme négative découplent à tous les ordres et que l'on n'est pas sensible au choix particulier de condition de jauge (qui introduit les fantômes, dont la contribution compense celle des degrés de liberté supplémentaires, de norme négative, des champs de jauge) dans le sens que seuls les contre-termes symétriques (sous le groupe de jauge) sont nécessaires pour absorber toutes les divergences de la théorie. Ainsi, en principe, si l'on écrit *tous* les contre-termes, ceux qui ne sont pas symétriques seront proportionnels à des puissances positives du pas du réseau et ne laisseront aucune trace dans la limite continue—mais sont indispensables pour les calculs à pas fini. Or ce schéma, correct dans son principe, est tellement élaboré dans la pratique, que seulement un nombre limité de calculs concrets a été mené jusqu'au bout.

Au début des années quatre-vingt-dix, Kaplan [15] a remarqué qu'une étude de Callan et Harvey [49] pouvait fournir la possibilité de séparer les composantes chirales fermioniques sur le réseau et, ainsi, conduire à une formulation de calcul plus efficace que celle du groupe de Rome. L'étude de sa proposition sera le sujet principal de la première partie de cette thèse.

L'idée est la suivante :

Soit un champ de Dirac,  $\bar{\psi}(x), \psi(x)$  en interaction avec un champ scalaire,  $\Phi(x)$  à  $D = 2p+1$  dimensions. L'action est, bien sûr, donnée par l'expression (en Miinkowski)

$$S = \int d^D x \left[ \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} \Phi \square \Phi - V(\Phi) - G \bar{\psi} \Phi \psi \right] \quad (4.1)$$

Maintenant on choisit  $V(|\Phi|) \equiv g(|\Phi|^2 - v^2)^2$  et l'on impose la condition, le long la dimension  $2p+1$

$$\lim_{x_{2p+1} \rightarrow \pm\infty} \Phi = \pm v$$

Cette condition équivaut à imposer une paroi à  $x_{2p+1} = 0$ . On note qu'elle brise l'invariance par translations le long la direction  $x_{2p+1}$ —et ainsi l'invariance de Lorentz dans  $D$  dimensions. Quelles sont les conséquences pour les champs qui vivent sur la paroi? Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} -\square \Phi - V'(\Phi) - G \bar{\psi} \psi &= 0 \\ -\not{\partial} \psi - G \Phi \psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si l'on définit la matrice  $\gamma_{\text{int}} \equiv \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{2p}$ , on se rend compte qu'elle anticommute avec toutes les autres matrices de Dirac—c'est l'analogue de la matrice  $\gamma_5$  à quatre dimensions. On écrit, maintenant, l'équation pour  $\psi$  comme suit

$$-\not{\partial} \psi - G \Phi \psi = -\gamma_\alpha \partial_\alpha \psi - \gamma_{\text{int}} \psi - G \Phi \psi = 0$$

Un mode zéro à  $2p$  dimensions satisfait  $-\gamma_\alpha \partial_\alpha \psi = 0$  et il est, également, un vecteur propre de la matrice  $\gamma_{\text{int}}$  avec valeur propre  $\lambda_\pm \equiv \pm 1$ . Ainsi l'équation, qui nous fournira l'allure du mode zéro le long la dimension supplémentaire prend la forme

$$-\lambda_\pm \partial_{x_{2p+1}} \psi = G \Phi(x_{2p+1}) \psi$$

dont la solution est immédiate :

$$\psi(x_{\parallel}; x_{2p+1}) = e^{-\frac{G}{\lambda_\pm} \int^{x_{2p+1}} \Phi(u) du} \psi_0(x_{\parallel}) \quad (4.3)$$

où  $\psi_0$  est un mode zéro. On note, maintenant, une chose très intéressante : l'expression  $\lambda_\pm \int^{x_{2p+1}} \Phi(u) du$  a le signe de  $\lambda_\pm$ . Par conséquent, *un* seulement des deux modes zéros chiraux sera normalisable à  $x_{2p+1} = 0$  ! Si l'on ajoute une paroi à  $x_{2p+1} = L$ , de pente opposée (cf. dessin 4.1) alors on peut

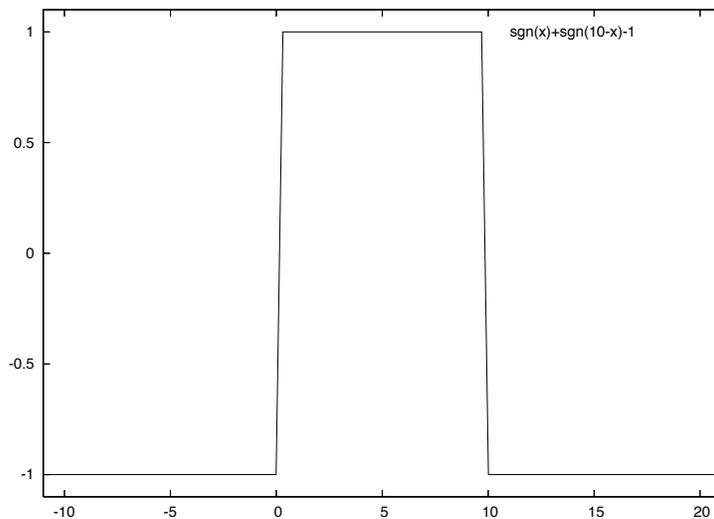


FIGURE 4.1 – Deux parois, une localisée à  $x_{2p+1} = 0$  et l'autre à  $x_{2p+1} = L = 10$ .

imposer des conditions aux bords périodiques le long  $x_{2p+1}$  et l'on aura un mode zéro, fonction propre de  $\lambda_+$  (par exemple), localisé au voisinage de  $x_{2p+1} = 0$  et l'autre mode zéro, fonction propre de  $\lambda_-$ , localisé autour de  $x_{2p+1} = L$ . Plus franches seront les “marches”, mieux localisés seront les modes zéro. On note que seul le comportement du champ scalaire à l'infini le long la direction  $x_{2p+1}$  était pertinent pour obtenir ce résultat—son allure dans l'espace transverse ne porte pas sur l'existence de ces modes zéro chiraux.

Ainsi l'on peut partager le contenu en champs fermioniques de ce modèle en trois classes : (a) le mode zéro de chiralité  $\lambda_+$ , localisé à  $x_{2p+1} = 0$  ; (b) le mode zéro de chiralité  $\lambda_-$ , localisé à  $x_{2p+1} = L$  ; (c) le mode massif, de masse  $M_0$ , qui vit dans le volume entre les hyperplans  $x_{2p+1} = 0$  et  $x_{2p+1} = L$ .

Les modes zéro ont étendu le long la dimension  $x_{2p+1}$  de l' $O(1/M_0)$ ; ainsi, si l'on prend la distance  $L$  telle que  $M_0L \gg 1$ , alors le recouvrement des deux modes sera négligeable.

En ce qui concerne le champ scalaire, on note une décomposition en trois classes également : à peu près zéro au voisinage des parois, à peu près  $+v$  entre  $x_{2p+1} = 0$  et  $x_{2p+1} = L$  et à peu près  $-v$  entre  $x_{2p+1} = L$  et  $x_{2p+1} = 0$  (cf. fig. 4.1). En particulier le champ scalaire est essentiellement constant dans “le volume” et zéro au voisinage de chaque paroi.

Ainsi l'espace des états de cette théorie se décompose en trois parties : les modes zéros, qui sont reliés par une symétrie de réflexion et les modes massifs. Dans la limite  $M_0 \rightarrow \infty$ ,  $L \rightarrow \infty$  le découplage est total—pour des valeurs finies il est exponentiellement renforcé.

Résumons la situation : les conditions aux bords, le long la direction  $x_{2p+1}$ , imposent comme solution classique (c.à.d. des équations d'Euler-Lagrange) celle où les deux chiralités du champ fermionique sont chacune localisée sur des hyperplans distincts et les modes massifs remplissent le volume entre les deux hyperplans

Les questions, auxquelles on doit maintenant répondre sont les suivantes :

1. Cette solution est un vide “classique”, car elle résout les équations classiques du mouvement. Les fluctuations quantiques vont-elles la déstabiliser ou non ?
2. Cette solution a été obtenu dans l'absence de champs de jauge ; or, tous les fermions, connus dans la nature, portent des charges de jauge. Les champs de jauge peuvent-ils détruire cette solution ?
3. Cette séparation spatiale des composantes chirales a été trouvé dans le continu ; est-il possible de la réaliser avec la régularisation du réseau ?

Les réponses courtes à ces questions sont “non”, “peut-être” et “oui” respectivement et l'on va exposer les arguments détaillés qui les appuient dans la suite de cette thèse.

Quelques commentaires sur ces questions :

La réponse à la première question apparaît facile à saisir : la valeur moyenne du champ scalaire varie de manière continue de la valeur  $-M_0$  à  $x_{2p+1} \rightarrow -\infty$  à la valeur  $+M_0$  à  $x_{2p+1} \rightarrow +\infty$  (pour une paroi), par conséquent il existera, nécessairement, une position où elle s'anulle. Cette position est celle de la paroi et les fluctuations quantiques pourront la faire varier, mais non la faire disparaître. Une complication est que les conditions aux bords périodiques impliquent que la configuration de l'état lié paroi—anti-paroi doit être stable—et l'argument que l'on vient de donner ne suffit pas. D'ailleurs ce que l'on veut est repousser les deux parois à l'infini, de façon à ce que les modes zéros ne communiquent pas. Cette question *dynamique* est difficile à traiter, car il s'agit de distinguer l'état à aucune paroi de celui à un état lié paroi—anti-paroi à la limite thermodynamique. Nous la laissons de côté dans cette thèse. Une autre façon d'aborder ce problème est de saisir que chaque paroi, individuellement, est un état BPS (porteur de charge topologique scalaire)—mais l'état lié d'un état BPS et d'un état “anti-BPS” n'est pas, nécessairement, également, un état BPS, puisque l'équation du mouvement est non-linéaire. Dans la perspective où l'on cherchera à identifier ces parois à des D-branes, il est intéressant de noter qu'il existe des configurations D3—anti-D3-branes en théories de cordes qui sont stables et qui pourraient, par conséquent, jouer le rôle qui est celui des parois “scalaires” ici. Cette di-

rection mérite une étude plus systématique et les techniques numériques ouvrent des nouvelles perspectives.

En ce qui concerne la deuxième question : la discussion précédente nous fournit l'indication suivante : La stabilité du système paroi–anti-paroi peut dépendre des couplages avec des champs de jauge : si l'état sans parois est énergétiquement favorisé par rapport à l'état paroi–anti-paroi, alors il n'y a pas d'endroit où des modes chiraux fermioniques pourront “s'accrocher” de façon distincte selon leur chiralité ; par contre si l'état paroi–anti-paroi est énergétiquement favorisé, alors les modes chiraux fermioniques auront des endroits “privilegiés”. La question pertinente est, alors, si l'on pourra mettre en évidence une transition de phase de second ordre pour le cas des couplages qui permettent l'existence de ce système : comme on verra ceci est, en fait, possible.

On démarre la présentation avec la réponse à la troisième question.

## 4.2 La proposition de Kaplan

### 4.2.1 En l'absence des champs de jauge

Essayons de transcrire les équations en tenant compte de la discrétisation de l'espace–temps introduite par le réseau. On commence par l'étude des solutions d'énergie nulle de l'équation de Dirac. Celle-ci prend la forme[53]

$$\frac{1}{2a}\gamma_\mu(\psi_{n+a\mu} - \psi_{n-a\mu}) + \frac{r}{2a}(\psi_{n+a\mu} - 2\psi_n + \psi_{n-a\mu}) + M(x_5)\psi_n = 0 \quad (4.4)$$

pour le cas, où le champ de jauge est absent,  $U_{\mu,n} = 1$ . On va travailler ici à  $D = 5$  dimensions, seulement pour des raisons pédagogiques–tous les calculs peuvent être immédiatement transposés à  $D$  quelconque, impair (dans un langage plus “savant”, les défauts sont de “co-dimension” égale à 1)–mais le cas générique peut également être traité ; il suffit de définir la chiralité de manière appropriée. Les subtilités apparaissent dès que l'on couple des champs de jauge, pas maintenant.

On pose  $n_\mu \equiv (l_\lambda, n_5)$ ,  $\lambda = 1, 2, 3, 4$  et l'invariance hypercubique ainsi que les conditions aux bords périodiques nous permettent de passer en espace d'impulsions  $p_\lambda$  dans un hyperplan quelconque. On écrit, alors,  $\psi_n \equiv \psi_{l,x_5}$  et les modes de Fourier correspondants

$$\psi_{l,x_5} = \sum_p e^{ip_\lambda l_\lambda a} \phi_{p,x_5}$$

On déduit la forme suivante pour l'équation de Dirac

$$\left( \gamma_\lambda \sin p_\lambda a + r + r \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(x_5)a \right) \phi_{p,x_5} + \frac{r + \gamma_5}{2} \phi_{p,x_5+a} + \frac{r - \gamma_5}{2} \phi_{p,x_5-a} = 0 \quad (4.5)$$

Il est intéressant de comprendre ce qui se passe si l'on pose  $r = 0$ —c.à.d. l'on n'introduit pas de terme de Wilson. Est-ce que les défauts le long de la dimension supplémentaire sont-ils suffisants pour assurer l'existence d'un mode zéro chiral dans le sous-espace quadri-dimensionnel? La récurrence (4.5) devient, dans ce cas,

$$(\gamma_\lambda \sin p_\lambda a + M(x_5)a) \phi_{p,x_5} + \frac{\gamma_5}{2} (\phi_{p,x_5+a} - \phi_{p,x_5-a}) = 0$$

Un mode zéro satisfait la condition  $(\gamma_\lambda \sin p_\lambda a) \phi_{p,x_5} = 0$ , on trouve, ainsi

$$M(x_5)a \phi_{p,x_5} + \frac{\gamma_5}{2} (\phi_{p,x_5+a} - \phi_{p,x_5-a}) = 0$$

Les modes à chiralité bien définie sont

$$\phi_{p,x_5}^L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \phi_{p,x_5} \quad \text{et} \quad \phi_{p,x_5}^R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \phi_{p,x_5}$$

(qui satisfont  $\gamma_5 \phi_{p,x_5}^L = -\phi_{p,x_5}^L$  et  $\gamma_5 \phi_{p,x_5}^R = +\phi_{p,x_5}^R$ ). On trouve immédiatement que ces modes satisfont les récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} M(x_5)a \phi_{p,x_5}^L - \frac{1}{2} (\phi_{p,x_5+a}^L - \phi_{p,x_5-a}^L) &= 0 \\ M(x_5)a \phi_{p,x_5}^R + \frac{1}{2} (\phi_{p,x_5+a}^R - \phi_{p,x_5-a}^R) &= 0 \end{aligned}$$

On note que ces récurrences sont du deuxième ordre—et que toutes les deux possèdent un vecteur propre dont la valeur propre correspondante est, en valeur absolue, inférieure à 1. Par conséquent, on obtient une superposition de modes zéros à l'origine et la chiralité n'y est pas bien définie.

Il est, bien entendu, intéressant de comprendre dans quelle mesure ce résultat est dû juste à un choix maladroit de discrétisation. On peut se convaincre, par un calcul direct, que, si l'on remplace l'approximation par différences centrées de l'opérateur de Dirac,

$$\not{D}\psi(x) \approx \gamma_\mu \frac{\psi_{n+\mu} - \psi_{n-\mu}}{2a}$$

par l'approximation par différences unilatérales, par exemple,

$$\not{D}\psi(x) \approx \gamma_\mu \frac{\psi_{n+\mu} - \psi_n}{a}$$

on trouvera bien une récurrence de premier ordre pour les modes chiraux, le long la cinquième dimension—mais cette récurrence sera *la même* pour les deux chiralités : ainsi, sur le sous-espace quadridimensionnel, où l'on aura défini les modes zéro, toutes les deux chiralités seront normalisables et le mode zéro n'aura pas de chiralité définie.

Par contre, pour  $r = 1$  les équations correspondantes pour les états chiraux,  $\phi_{p,x_5}^{L,R}$ , qui décrivent l'évolution le long la cinquième dimension sont

$$\begin{aligned} (\gamma_\lambda \sin p_\lambda a) \phi_{p,x_5}^L + \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(x_5)a \right) \phi_{p,x_5}^R + \phi_{p,x_5+a}^R &= 0 \\ (\gamma_\lambda \sin p_\lambda a) \phi_{p,x_5}^R + \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(x_5)a \right) \phi_{p,x_5}^L + \phi_{p,x_5-a}^L &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les modes zéro quadridimensionnels sont annihilés par les termes “cinétiques”  $\gamma_\lambda \sin p_\lambda a$ , ce qui découple ces équations

$$\begin{aligned} \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(x_5)a \right) \phi_{p,x_5}^R + \phi_{p,x_5+a}^R &= 0 \\ \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(x_5)a \right) \phi_{p,x_5}^L + \phi_{p,x_5-a}^L &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned} \phi_{p,Na}^R &= (-)^N \times \prod_{n=0}^{N-1} \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(na)a \right) \phi_{p,0}^R \\ \phi_{p,Na}^L &= (-)^N \times \prod_{n=0}^{N-1} \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda a - 1] + M(na)a \right)^{-1} \phi_{p,0}^L \end{aligned} \quad (4.8)$$

On constate que, si l'on impose l'existence de toutes les deux chiralités, comme solutions à énergie zéro à quatre dimensions, donc à  $x_5$  fixe, alors seulement *une* y sera normalisable dans le volume à cinq dimensions, car les deux préfacteurs ne peuvent être tous les deux, en valeur absolue, plus petits que 1. Ces récurrences ne sont autres, d'ailleurs, que la discrétisation des équations différentielles étudiées dans la section précédente. Mais il y a une différence : ces récurrences distinguent les deux chiralités grâce à la présence du terme de Wilson. Il est, alors, intéressant de comprendre ce que deviennent les “partenaires”. Le fermion d'origine correspond au point  $(0,0,0,0)$  de la zone de Brillouin. Il y a quatre partenaires, pour lesquels une composante vaut  $\pi/a$ , six pour lesquels deux composantes valent  $\pi/a$ , quatre avec trois telles composantes et un avec toutes les quatre composantes égales à  $\pi/a$ . Peuvent-ils avoir des modes zéro de chiralité définie sur le même hyperplan que le fermion original ? Les solutions (4.8) impliquent que le mode zéro “droite”, par exemple, sera normalisable à  $x_5 = 0$

si

$$\begin{aligned}
& \left| 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1] + M(na)a \right| < 1 \Leftrightarrow \\
& -1 < 1 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1] + M(na)a < 1 \Leftrightarrow \\
& -2 < \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1] + M(na)a < 0 \Leftrightarrow \\
& 2 > - \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1] - M(na)a > 0 \Leftrightarrow \\
& 2 + \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1] > -M(na)a > \sum_{\lambda=1}^4 [\cos p_\lambda - 1]
\end{aligned}$$

Pour le fermion d'origine cette condition implique que

$$2 > -M(na)a > 0$$

et l'on se rend compte facilement que les partenaires ne peuvent pas avoir un mode zéro normalisable de chiralité droite également. Ainsi le terme de Wilson reste indispensable, d'une part pour assurer l'existence d'un mode zéro de chiralité définie sur le hyperplan, où  $M(x_5)$  change de signe, d'autre part pour assurer la non-dégénérescence des partenaires avec le fermion d'origine sur le même hyperplan.

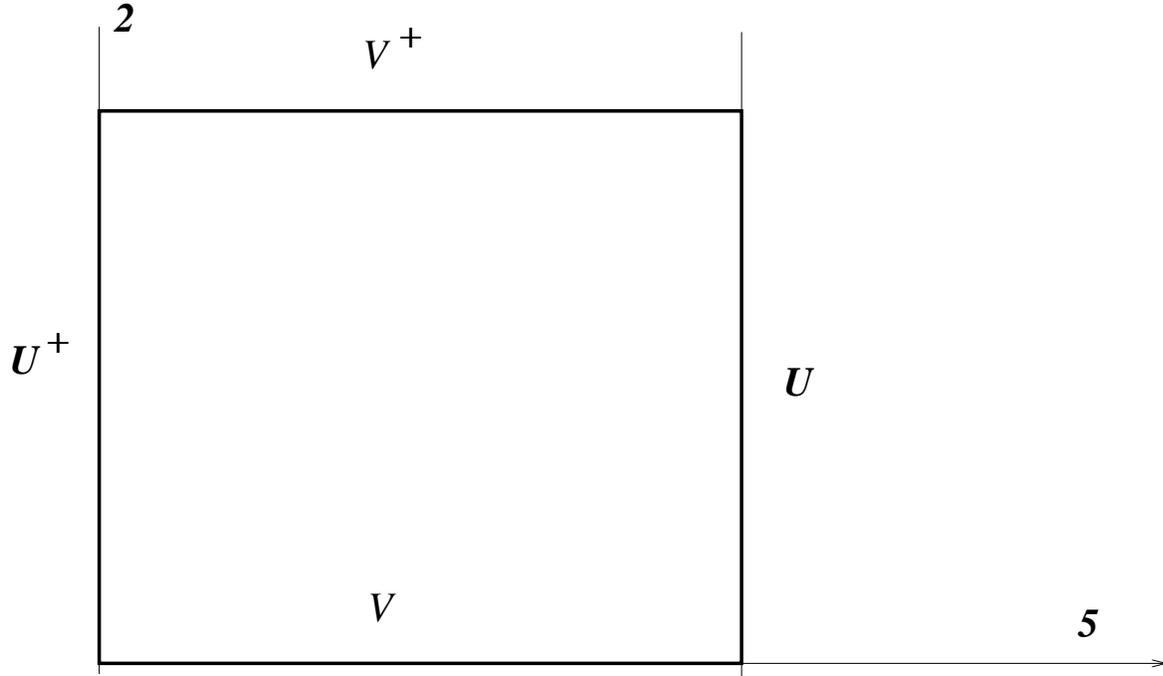
Reste à étudier la modification apportée à ces résultats par la présence de champs de jauge.

### 4.2.2 La contribution des champs de jauge

Si le lien,  $U_\mu(n) \neq I$ , alors la récurrence devient [53]

$$\frac{1}{2a} \gamma_\mu (U_\mu(n) \psi_{n+\mu} - U_\mu^\dagger(n-\mu) \psi_{n-\mu}) + \frac{r}{2a} (U_\mu(n) \psi_{n+\mu} - 2\psi_n + U_\mu^\dagger(n-\mu) \psi_{n-\mu}) + M(x_5) \psi_n = 0 \quad (4.9)$$

Cette équation nous livre la solution,  $\psi_n$ , dans une configuration de jauge *donnée*,  $U_\mu(n)$ , donc non-dynamique. On note, aussi, que le champ de jauge brise, génériquement, l'invariance par translations—par conséquent, l'analyse, que l'on a menée précédemment, ne pourra pas s'appliquer directement dans le cas d'une configuration générique : le terme  $U_\mu^\dagger(n-\mu) \psi_{n-\mu}$  n'est pas manifestement une convolution, comme les autres termes. Le cas spécial le plus simple d'une configuration de jauge, que l'on puisse traiter au même degré de détail, serait celui où  $U_\mu(n) = U(x_5)$  pour  $\mu = 1, 2, 3, 4$  et  $U_5(n) = V(x_5)$ , avec  $V(x_5)U(x_5)V^\dagger(x_5)U^\dagger(x_5) = e^{i\Phi}$ , où  $\Phi$  est le flux à travers la plaquette (cf. fig. 4.2), avec  $\Phi = \text{const}$ . Un choix, qui satisfait les équations du mouvement pour les champs de jauge, est  $V(x_5) = I$  et  $U(x_5) = e^{i\Phi x_5}$ . Le flux est à travers les plaquettes, qui pointent vers la cinquième dimension, comme indiqué dans le dessin 4.2. L'équation de récurrence prend, alors, la forme suivante :

FIGURE 4.2 – Flux à travers le plan 2 – 5 :  $\exp(i\Phi) = VUV^\dagger U^\dagger$ .

$$V(x_5)(\gamma_5 + r)\phi_{p,x_5+1} - V^\dagger(x_5)(\gamma_5 - r)\phi_{p,x_5-1} + \left[ \sum_{\mu=1}^4 (U(x_5)(\gamma_\mu + r) - U^\dagger(x_5)(\gamma_\mu - r)) + 2aM(x_5) - 10r \right] \phi_{p,x_5} = 0 \quad (4.10)$$

Lorsque, maintenant, on en déduit les récurrences pour les états à chiralité définie,  $\phi_{m,x_5}^{L,R}$ , analogues aux équations (4.6)—on pose, de nouveau,  $r = 1$ — la partie “cinétique”, qui est responsable pour le “mélange” des deux chiralités, implique le champ de jauge. La condition précédente,  $(\gamma_\mu \sin p_\mu a)\phi_{p,x_5} = 0$  n’est plus appropriée pour éliminer une chiralité : la condition d’élimination impliquera le champ de jauge :

$$\gamma_\mu \sin(\Phi + p_\mu)\phi_{p,x_5}^{L,R} = 0 \quad (4.11)$$

Les récurrences, qui déterminent les profils des modes zéro le long la direction  $x_5$ , prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{p,x_5+1}^R &= - \left[ aM(x_5) + 5 + \sum_{\mu=1}^4 \cos(\Phi x_5 + p_\mu a) \right] \phi_{p,x_5}^R \\ \phi_{p,x_5+1}^L &= \frac{1}{(aM(x_5 + 1) + 5 + \sum_{\mu=1}^4 \cos(\Phi x_5 + p_\mu a))} \phi_{p,x_5}^L \end{aligned} \quad (4.12)$$

On constate que seule une chiralité sera normalisable, car, encore une fois, les préfacteurs sont l’inverse l’un de l’autre. Par conséquent cette configuration de jauge est cohérente avec

l'existence d'un seul mode zéro de chiralité bien définie à  $x_5 = 0$ .

Bien entendu cette configuration de jauge est très spéciale. Et, comme, déjà indiqué, elle ne tient pas compte de la variation du champ de jauge, provoquée par les champs fermioniques à leur tour : les récurrences ne mettent pas en évidence les constantes de couplage,  $\beta$  et  $\beta'$ . Elle sert juste à nous reconforter qu'il existent des configurations de champs de jauge, qui ont une signification physique évidente et qui sont compatibles avec des modes zéros à chiralité définie, qui seraient localisés sur un sous-espace-temps quadridimensionnel de l'espace-temps cinq-dimensionnel.

Dans la section suivante on essaiera de "cartographier" le diagramme de phases, dans le plan  $(\beta, \beta')$ , lorsque tous les champs sont dynamiques.

### 4.3 Le diagramme de phases

On va employer l'approximation du champ moyen pour obtenir le diagramme de phases. Comme référence on va prendre le diagramme de phase de la théorie en absence des fermions, cf. fig. 5.1. Comme la masse définit une direction privilégiée, on pose  $\beta'$  le poids des plaquettes qui pointent dans cette direction et  $\beta$  le poids de celles qui appartiennent au sous-espace quadridimensionnel.

On y trouve trois phases :

- La phase *confinante* (*Strong* sur le dessin) :  $\alpha = 0, \alpha' = 0 \Rightarrow v = 0, v' = 0$ . La tension de la corde est infinie.
- La phase *Coulombienne* (*Coulomb* sur le dessin) :  $\alpha \neq 0 \Rightarrow v \neq 0$  ainsi que  $\alpha' \neq 0 \Rightarrow v' \neq 0$ . La tension de la corde est égale à zéro le long toutes les directions.
- La phase *Branaire* (*Layered* sur le dessin) :  $\alpha \neq 0 \Rightarrow v \neq 0$  mais  $\alpha' = 0 \Rightarrow v' = 0$ . La tension de la corde est égale à zéro dans tout sous-espace  $x_5 = \text{const}$  et infinie le long la direction  $\hat{5}$ . Ainsi l'espace à cinq dimensions devient un empilement de couches quadri-dimensionnelles non-intéragissantes.

Ce diagramme fut établi la première fois par Fu et Nielsen [47]. Dans le chapitre suivant on s'intéressera de déterminer l'ordre des transitions. Maintenant on va s'occuper à comprendre comment ce diagramme change lorsque l'on introduit des fermions.

Ces champs entrent dans l'action, d'une part par les "liens covariants", où l'on remplace  $\bar{\psi}_n \psi_{n+\mu}$  par  $\bar{\psi}_n U_\mu(n) \psi_{n+\mu}$ , d'autre part dans le terme des sources,  $J_\mu(n) U_\mu(n)$ . Le premier terme ne pose pas de problème ; mais l'on se rappelle que le terme des sources entre, apparemment, de façon non-linéaire, car il apparaît dans  $w(\alpha + J)$ . La solution consiste à effectuer un changement de variables,  $\alpha \rightarrow \alpha + J$  de façon à rendre la dépendance sur les sources linéaire. Ainsi la contribution des fermions sera contenue dans les termes  $J$  et  $J'$  qui modifieront les équations pour l'extrémum de l'action de la façon suivante

$$\begin{aligned} v &= \frac{dw(\alpha)}{d\alpha} & v' &= \frac{dw(\alpha')}{d\alpha'} \\ \frac{\partial S}{\partial v} + J(v, v') &= \alpha & \frac{\partial S}{\partial v'} + J'(v, v') &= \alpha' \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ces courants représentent le propagateur fermionique, dans la configuration  $(v, v')$  du champ de jauge. En effet, puisque le terme du courant entre dans l'action, désormais, de façon linéaire, on peut effectuer l'intégrale sur les fermions exactement et obtenir une action effective pour les champs de jauge. Le caractère abélien du groupe de jauge joue ici un rôle crucial. Dans le cas non-abélien il faut effectuer l'intégration simultanément sur les champs de la matière et la variété du groupe de jauge [43], puisque le changement de variables,  $\alpha + J \rightarrow \alpha$ , désormais, n'est pas diagonale dans l'espace des saveurs.

Ces termes ont été calculés dans les papiers [53, 54]. Dans l'approximation du champ moyen, le fait que les champs de jauge sont uniformes nous donne la possibilité d'obtenir des expressions concrètes par transformée de Fourier. On trouve ainsi que<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} j_\mu &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{4+D}p}{(2\pi)^{4+D}} [v \sin^2 p_\mu + r \cos p_\mu W] \frac{1}{P} & \mu = 1, 2, 3 \\ j_\nu &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{4+D}p}{(2\pi)^{4+D}} [v' \sin^2 p_\nu + r \cos p_\nu W] \frac{1}{P} & \nu = 5, \dots, 4 + D \end{aligned} \quad (4.14)$$

où l'on définit

$$\begin{aligned} W &\equiv M - r \left( \sum_{\lambda=1}^3 (1 - v \cos p_\lambda) + 1 - \cos p_4 + \sum_{\lambda=5}^{4+D} (1 - v' \cos p_\lambda) \right) \\ P &\equiv \sum_{\lambda=1}^3 v^2 \sin^2 p_\lambda + \sin^2 p_4 + \sum_{\lambda=5}^{4+D} v'^2 \sin^2 p_\lambda + W^2 \end{aligned}$$

De nouveau on peut exprimer les variables de jauge,  $v$  et  $v'$  en termes des variables auxiliaires  $\alpha$  et  $\alpha'$  par les relations  $v = dw(\alpha)/d\alpha$  et  $v' = dw(\alpha')/d\alpha'$ , comme dans le cas sans champs de matière.

On trouve, toujours, *trois* solutions : La première,  $(\alpha, \alpha') = (0, 0) \Leftrightarrow (v, v') = (0, 0)$  correspond à la phase "confinante". Dans cette phase, en effet,  $J(0, 0) = 0$  et  $J'(0, 0) = 0$ —les fermions sont confinés.

La seconde phase,  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha' \neq 0$ , alors,  $v \neq 0$  et  $v' \neq 0$ , correspond à la phase "Coulombienne".

On trouve, finalement, une troisième solution :  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha' = 0$ , ainsi  $v \neq 0$  mais  $v' = 0$ . Elle correspond à la phase "branaire", trouvée en absence de matière. On note qu'elle est cohérente avec la présence des fermions, puisque  $J'(v, 0) = 0$ . Ceci implique que les fermions sont "confinés" sur une "couche" quadri-dimensionnelle, puisqu'ils peuvent se propager sur une telle (hyper)-surface, car  $J(v, 0) \neq 0$ . Il est intéressant de noter que l'on ne trouve pas de solution de la forme  $\alpha = 0, \alpha' \neq 0$  ! La raison est une question quantitative : il y a trop peu de dimensions supplémentaires (ici une), en comparaison avec le nombre de dimensions "ordinaires" (ici quatre)—comme on verra dans le prochain chapitre, lorsque le nombre de dimensions supplémentaires devient égal à celui des dimensions "ordinaires" le système ne peut pas distinguer le sous-espace "ordinaire" du "supplémentaire".

1. Dans ces expressions on travaille dans la jauge axiale  $U_4 = I$ .

En ce qui concerne l'apport des champs fermioniques, ils vont écranter les champs de jauge abéliens et, ainsi, la phase Coulombienne va "gagner du terrain" au dépens de la phase des couches. Ceci est indiqué dans le dessin 4.3. Mais la question fondamentale est, que nous

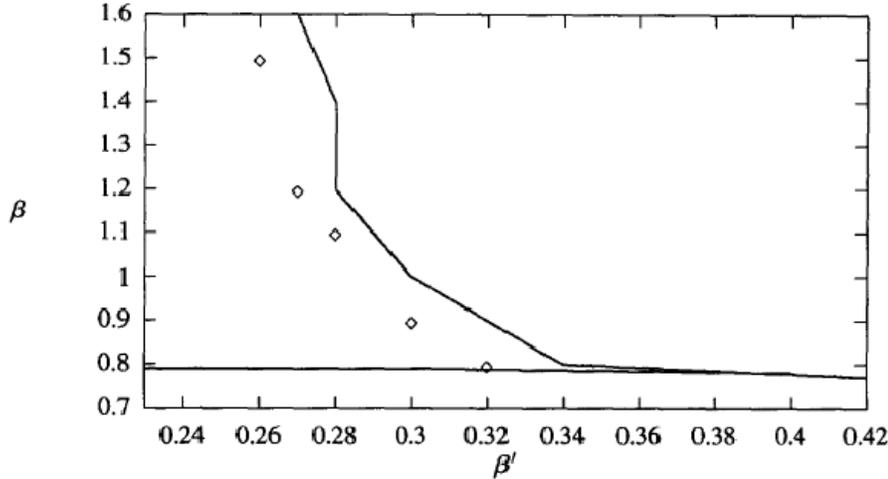


FIGURE 4.3 – Diagramme de phases en présence de fermions. Les lignes continues sont les frontières entre les phases, lorsque seuls les champs de jauge sont présents. On note que la phase Coulombienne à cinq dimensions est plus large en présence des fermions—ce qui est cohérent avec l'écrantage.

renseigne ce diagramme sur l'existence de modes zéro chiraux, localisés à quatre dimensions ? C'est ici que la différence entre les configurations de jauge externes et celles dynamiques est la plus marquée. Dans la phase confinante cinq-dimensionnelle, bien entendu, la question n'a pas de sens, puisque les fermions sont confinés. Dans la phase Coulombienne cinq-dimensionnelle, il n'est pas possible de définir un sous-espace quadri-dimensionnel "privilegié". Ainsi la présence des champs de jauge permet aux fermions de se propager partout dans l'espace et leur chiralité sur un sous-espace quadri-dimensionnel n'est pas, *a priori*, protégée. Finalement, dans la phase "branaire" on trouve [53] que le propagateur fermionique est explicitement localisé sur un sous-espace quadridimensionnel quelconque et qu'il ne possède pas de chiralité définie (cette expression est valable dans la limite  $\beta \gg 1$  où  $v \sim 1$ ; pour  $|v| < 1$  on doit l'inclure, mais le fait que le propagateur soit ultra-local le long la cinquième dimension n'est pas affecté) :

$$G^{-1}(p; x_5, x'_5) = \left( i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin p_{\mu} + r \sum_{\mu=1}^4 (\cos p_{\mu} - 1) - r + M(x_5) \right) \delta_{x_5, x'_5} \quad (4.15)$$

Une manière de comprendre que ce résultat est, en fait, attendu, est que, dans la phase "branaire" on se trouve dans une région du diagramme de phases où le couplage quadri-dimensionnel est faible,  $\beta > 1$  et le couplage le long la cinquième dimension est fort,  $\beta' < 1$ . Par conséquent

les deux chiralités subissent une force attractive, qui, dans la phase “branaire” conduit à la disparition du pôle chirale du spectre.

Ces résultats furent confirmés par des simulations numériques dans réf. [55]. Par conséquent il semble que la proposition de Kaplan soit valable pour des champs fermioniques libres, ou couplés à certaines configurations de champs de jauge externes, mais rencontre des difficultés lorsque les champs de jauge deviennent dynamiques.

Cette conclusion a contribué à une confusion considérable et plusieurs scénarios alternatifs ont été explorés [55].

Mais il y a une issue possible : si la transition de phase entre la phase “branaire” et la phase Coulombienne cinq-dimensionnelle est continue. Alors, à la frontière entre les deux phases, on pourra obtenir une théorie, indépendante de la régularisation, avec fermions chiraux. Une prédiction frappante de ce scénario est que le couplage quadri-dimensionnel renormalisé dépend de manière paramétrique du couplage le long la cinquième dimension et pourra, éventuellement, servir de signal pour la mise en évidence expérimentale des dimensions supplémentaires dans cette approche. Ce scénario est le sujet du chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Théories de Jauge Anisotropes sur Réseau

### 5.1 Introduction

La leçon que l'on peut tirer du chapitre précédent est que pour étudier, par la régularisation par le réseau, les théories de champs qui comprennent des fermions chiraux, il est *commode* de travailler dans un espace-temps à plus de quatre dimensions. On a trouvé que, cependant, on peut retrouver des théories de champs à quatre dimensions, mais sous certaines conditions, qui semblent très restrictives, pour être utiles. Dans ce chapitre on va essayer d'approfondir cette situation.

Pour mieux comprendre les enjeux, commençons avec l'action isotrope à cinq dimensions

$$\begin{aligned} S = & \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}(n))) + \\ & a^5 \sum_n \bar{\psi}_n \left[ \left( \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu}}{2a} \right) - M(n_5)\psi_n \right] + \\ & a^6 \times r \sum_n \bar{\psi}_n \left[ \sum_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu}}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dans cette expression  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$  (on est en euclidien) et la masse  $M(n_5)$  possède le profil d'une paroi de domaine le long la cinquième dimension. Puisque le groupe de jauge est compact, si l'on pouvait faire tous les calculs exactement, on pouvait ne pas "fixer" une jauge. Mais, puisque l'on doit mettre en place un schéma approché, on doit imposer une condition de jauge, de façon à pouvoir échantillonner convenablement l'espace des configurations des champs. On va choisir  $U_4 = I$ .

La prochaine question est, comment arriver à la limite continue? La réponse immédiate serait que c'est impossible, car la théorie est à cinq dimensions, par conséquent, non-renormalisable

dans l'incarnation continue habituelle—elle ne pourra jamais s'affranchir des détails de la régularisation et la seule possibilité serait celle triviale de la théorie libre.

Mais si l'on réfléchit un peu plus, on se rend compte que cette conclusion n'est pas inévitable. La raison est la suivante : le terme de masse brise l'invariance de Lorentz (à cinq dimensions, et en signature de Minkowski). Celle-ci, d'autre part, est reliée à l'invariance de jauge, puisque le champ de jauge, ainsi que le champ fermionique, porte un indice de Lorentz. Par conséquent, si l'on peut avoir des doutes sur l'existence de la théorie à cinq dimensions, dans le continu, ces arguments ne nous permettent pas de conclure qu'un point fixe non-trivial n'existe pas pour une théorie, où les champs seraient limités à quatre dimensions. Et, finalement, c'est cette possibilité qui est la plus intéressante de point de vue de la physique : on dispose de beaucoup plus de données expérimentales à quatre dimensions qu'à cinq. Ainsi l'on peut généraliser l'action précédente et écrire

$$\begin{aligned}
S = & \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu < 5} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}(n))) + \beta' \sum_n \sum_{\mu} (1 - \text{Re}(U_{\mu 5}(n))) + \\
& a^5 \sum_n \bar{\psi}_n \left[ \left( \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu}}{2a} \right) - M(n_5)\psi_n \right] + \\
& a^6 \times r \sum_n \bar{\psi}_n \left[ \sum_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + U_{\mu}^{\dagger}(n-\mu)\psi_{n-\mu}}{a^2} \right]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La théorie isotrope,  $\beta = \beta'$  n'aura certainement pas une limite continue qui corresponde à une théorie en interaction, mais cette paramétrisation nous permet de chercher d'autres cas de figure. Cette paramétrisation est, par ailleurs, cohérente avec l'anisotropie imposée par le terme de masse. Reste à comprendre comment les champs,  $U_{\mu}(n)$ ,  $\psi_n$  et  $\bar{\psi}_n$ , où l'indice de site,  $n$  prend valeurs dans cinq dimensions, se laisseraient réduire à une dépendance à quatre ou moins de dimensions.

Il est intéressant de discuter ici les similarités et différences avec l'approche de type Kaluza–Klein ou Randall–Sundrum. Aussi bien dans ces modèles que les nôtres on essaie d'exploiter la liberté offerte par les dimensions “supplémentaires”. Dans le cas de Kaluza–Klein ou de Randall–Sundrum l'accent a été mis sur l'étude des solutions des équations du mouvement, tandis que notre approche nous permet de calculer les fonctions de corrélation en tenant compte des configurations de champs qui ne satisfont pas nécessairement les équations du mouvement. On s'attend à retrouver, évetuellement, les solutions de Kaluza–Klein ou Randall–Sundrum dans un domaine de l'espace de phases, déterminé par les constantes de couplage et notre approche nous permet de “cartographier” cet espace au-delà de ce domaine. En particulier les modèles Kaluza–Klein et Randall–Sundrum font l'hypothèse que les constantes de couplage sont isotropes, c.à.d. ont la même valeur le long toutes les dimensions der l'espace–temps, donc correspondent à la droite  $\beta = \beta'$ .

Dans les sections qui suivent on va essayer de comprendre sous quelles conditions l'anisotropie des couplages pourrait conduire à des transitions de phases de second ordre. On commence sans matière.

## 5.2 Le diagramme de phases pour la théorie anisotrope sans matière

On commence avec la théorie de jauge, anisotrope, mais sans matière, objet du travail de Fu et de Nielsen [47]. Elle comprend les deux premiers termes de l'éq. (5.2)

$$S = \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu < 5} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}(n))) + \beta' \sum_n \sum_{\mu} (1 - \text{Re}(U_{\mu 5}(n))) \quad (5.3)$$

Comme pour tout système en physique statistique, il est utile d'employer, d'abord, l'approximation du champ moyen pour obtenir une idée grossière du diagramme des phases. En fait, en suivant Fu et Nielsen, on peut écrire l'action pour le cas général d'un espace-temps  $D$ -dimensionnel, dans lequel les plaquettes, qui appartiennent dans un sous-espace  $d_{\parallel}$ -dimensionnel ont un poids  $\beta$ , tandis que celles qui "pointent" vers les dimensions "supplémentaires",  $d_{\perp} \equiv D - d_{\parallel}$ , ont un poids  $\beta'$ . On va faire l'hypothèse simplificatrice (implicite dans ref. [47]) que les " $d_{\parallel}$ -branes" sont parallèles. Ainsi les plaquettes à poids  $\beta'$  ont seulement deux liens dans le "bulk". Dans l'approximation du champ moyen le potentiel effectif prend la forme suivante (on reprend les notations du chapitre précédent)

$$V_{\text{eff}}^{\text{MF}}(v, v', \alpha, \alpha') = \beta \frac{d_{\parallel}(d_{\parallel} - 1)}{2} (1 - v^4) + \beta' \frac{d_{\perp}(d_{\perp} - 1)}{2} (1 - v'^4) + \beta' d_{\parallel} d_{\perp} (1 - v^2 v'^2) + \text{Re}[d_{\parallel} \alpha v + d_{\perp} \alpha' v'] - d_{\parallel} w(\alpha) - d_{\perp} w(\alpha') \quad (5.4)$$

où  $w(\alpha)$  contient l'information sur le groupe de jauge,

$$w(\alpha) = \ln \int \mathcal{D}U e^{\text{Re}[\alpha U]}$$

Pour le cas du groupe  $U(1)$  compact, on trouve que  $w(\alpha) = \ln I_0(\alpha)$ . On s'intéresse aux extréma du potentiel effectif, solutions des équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{MF}}}{\partial v} = 0 &\Leftrightarrow v = \frac{dw(\alpha)}{d\alpha} \\ \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{MF}}}{\partial \alpha} = 0 &\Leftrightarrow v' = \frac{dw(\alpha')}{d\alpha'} \\ \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{MF}}}{\partial v'} = 0 &\Leftrightarrow -2\beta d_{\parallel}(d_{\parallel} - 1)v^3 - 2\beta' d_{\parallel} d_{\perp} v v'^2 + \alpha = 0 \\ \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{MF}}}{\partial v'} = 0 &\Leftrightarrow -2\beta' d_{\perp}(d_{\perp} - 1)v'^3 - 2\beta' d_{\parallel} d_{\perp} v^2 v' + \alpha' = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

On trouve immédiatement que l'origine,  $(v = 0, v' = 0, \alpha = 0, \alpha' = 0)$  est une solution de ces équations. D'après la discussion du chapitre précédent cette solution appartient la phase confinante, avec tension de la corde infinie. On s'intéresse, alors, à sa stabilité. Ainsi l'on développe

$V_{\text{eff}}^{\text{MF}}$  à l'ordre quadratique autour de l'origine. On remarque que les seuls termes qui puissent contribuer à cet ordre sont les constantes ainsi que les termes de la troisième ligne de l'éq. (5.4). On trouve

$$V_{\text{eff}}^{\text{MF}}(v(\alpha), v'(\alpha'), \alpha, \alpha') \approx V_{\text{eff}}^{\text{MF}}(0, 0, 0, 0) + \frac{1}{2} (d_{\parallel} \alpha^2 + d_{\perp} \alpha'^2) \quad (5.6)$$

La phase confinante, par conséquent, va occuper une région finie autour de l'origine, dans le plan  $(\beta, \beta')$ .

Pour  $\beta$  et  $\beta'$  tous les deux “grands” on s'attend à trouver des solutions avec  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha' \neq 0$ —et c'est le cas. Elles correspondent à la phase Coulombienne—et pour le groupe  $U(1)$  elles sont physiques. Pour les groupes non-abéliens elles seraient un artéfact de l'approximation du champ moyen, car l'on ne s'attend pas à une phase Coulombienne en couplage faible dans ce cas, en absence de charges duales.

Mais l'on note que l'on peut trouver d'autres solutions, en particulier  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha' = 0$ , lorsque  $\beta$  est suffisamment “grand”, pour que l'équation

$$\alpha = 2\beta d_{\parallel} (d_{\parallel} - 1) v^3 \quad (5.7)$$

avec  $v = dw(\alpha)/d\alpha$ , possède une solution  $\alpha \neq 0$ .

Cette solution correspondrait à une phase Coulombienne dans le sous-espace à  $d_{\parallel}$  dimensions et une phase confinante le long les  $d_{\perp}$  dimensions “supplémentaires”. Si l'on développe le potentiel effectif autour de cette solution, on trouve une contribution du terme “mixte”  $\beta' d_{\parallel} d_{\perp} (1 - v^2 v'^2)$  à l'ordre quadratique. (Elle est absente dans le cas isotrope, car, dans ce cas,  $v = v'$  et la contribution du terme des plaquettes n'intervient ainsi qu'à l'ordre quartique.) Cette contribution est très intéressante, car elle intervient avec “le mauvais signe” pour la variable  $v'$  et peut, ainsi, déstabiliser le confinement le long les dimensions supplémentaires. Puisque cette contribution intervient à l'ordre quadratique, la transition sera, en plus, de second ordre. C'est le vrai apport de l'anisotropie des couplages. Le calcul est direct :

$$V_{\text{eff}}^{\text{MF}}(v, v', \alpha, \alpha') \approx \text{const} + \alpha'^2 w''(0) d_{\perp} \left[ -\beta' d_{\parallel} v^2(\alpha) w''(0) + \frac{1}{2} \right] \quad (5.8)$$

(On a regroupé dans “const” toutes les quantités qui sont indépendantes de  $\alpha'$ .)

Par conséquent le minimum, à  $\alpha' = 0$ , va devenir un maximum lorsque

$$\beta' > \beta'_{\text{crit}} \equiv \frac{1}{2d_{\parallel} v^2(\alpha) w''(0)}$$

et que ce point critique existe, pourvu que  $v(\alpha) \neq 0$ , à savoir que le sous-espace à  $d_{\parallel}$  dimensions se trouve dans la phase Coulombienne. Il y a une dépendance implicite sur  $\beta$ , vu que  $\alpha$ , racine de l'éq. (5.7), est une fonction de ce couplage. Dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$  on a

$$\beta'_{\text{crit}} \rightarrow \frac{1}{2d_{\parallel} w''(0)}$$

Dans le cas du groupe  $U(1)$  on a  $w''(0) = 1/2$ , ainsi  $\beta'_{\text{crit}} \rightarrow 1/d_{\parallel}$ . Il est intéressant de noter que la valeur de  $\beta'_{\text{crit}}$  affiche une dépendance dans la dimension du sous-espace en  $1/d_{\parallel}$ , ce qui est cohérent avec l'approximation du champ moyen [37]. Cependant on remarque que dans ce calcul la distinction entre groupes abéliens et groupes non-abéliens ne semble jouer aucun rôle—c'est la compacité du groupe qui est importante, pour assurer que  $w(0)$  est fini et que  $\infty > w''(0) > 0$ . Par conséquent on peut se fier de ce résultat pour les groupes abéliens, car on s'attend à trouver une phase Coulombienne à couplage faible ; par contre, pour des groupes non-abéliens une étude numérique plus approfondie est nécessaire. Berman et Rabinovici [58] ont réalisé la première étude numérique par simulations Monte Carlo pour les groupes  $U(1)$  et  $SU(2)$ . Dans le premier cas leurs résultats sont cohérents avec l'étude de Fu et de Nielsen ; dans le deuxième ils sont plus nuancés. Vu que la taille des réseaux employés était très petite ( $4^5$  et  $3^6$ ) une étude plus poussée, réalisable avec les moyens de calcul actuels, est nécessaire. de Forcrand, Kurkela et Panero [59] ont réalisé une telle étude et ont trouvé qu'il existait deux cas possibles pour la limite continue à quatre dimensions : le cas de théorie de jauge pure et celui d'une théorie comprenant des champs de Yang-Mills couplés à un champ scalaire, qui appartient à la représentation adjointe. Une question encore ouverte est comment le scénario de la phase "branaire" est réalisé (ou non) dans ce modèle. Une autre est la caractérisation de la dynamique des composantes supplémentaires des champs de jauge (par exemple du champ  $A_5(x)$ ).

Dans le dessin 5.1 on affiche le diagramme de phases pour les cas  $d_{\parallel} = 4$  et  $d_{\perp} = 1$  (ainsi  $D = 5$ ) et  $d_{\perp} = 2$  ( $D = 6$ ). La conclusion que l'on peut tirer est que l'anisotropie des couplages de jauge modifie de manière qualitative, et non seulement quantitative, le diagramme de phases d'une théorie de jauge. En particulier, elle permet de mettre en évidence une nouveauté pour les théories de jauge sur réseau, une transition de seconde ordre, dans l'approximation du champ moyen, ce qui conduirait à l'existence d'une théorie dans le continu, qui serait inaccessible jusqu'à présent. Mais il ne s'agit pas d'une surprise totale : déjà Peskin [48] avait étudié le comportement de la boucle de Wilson et trouvé qu'elle aurait un comportement Coulombien sous l'hypothèse qu'une théorie de jauge sur réseau afficherait une transition de phases de second ordre. Mais à l'époque on ne connaissait pas de scénario où une théorie de jauge sur réseau affiche un point de transition de second ordre à couplage faible. L'anisotropie réalise ce scénario de façon "mixte" à travers le couplage faible porte dans un sous-espace et le couplage fort dans les dimensions supplémentaires. Toutes les deux contributions sont essentielles. Si ce comportement persiste en présence de la matière et, en particulier des fermions, alors il fournit une issue aux difficultés rencontrées dans le chapitre précédent pour réaliser la proposition de Kaplan en présence de champs de jauge dynamiques.

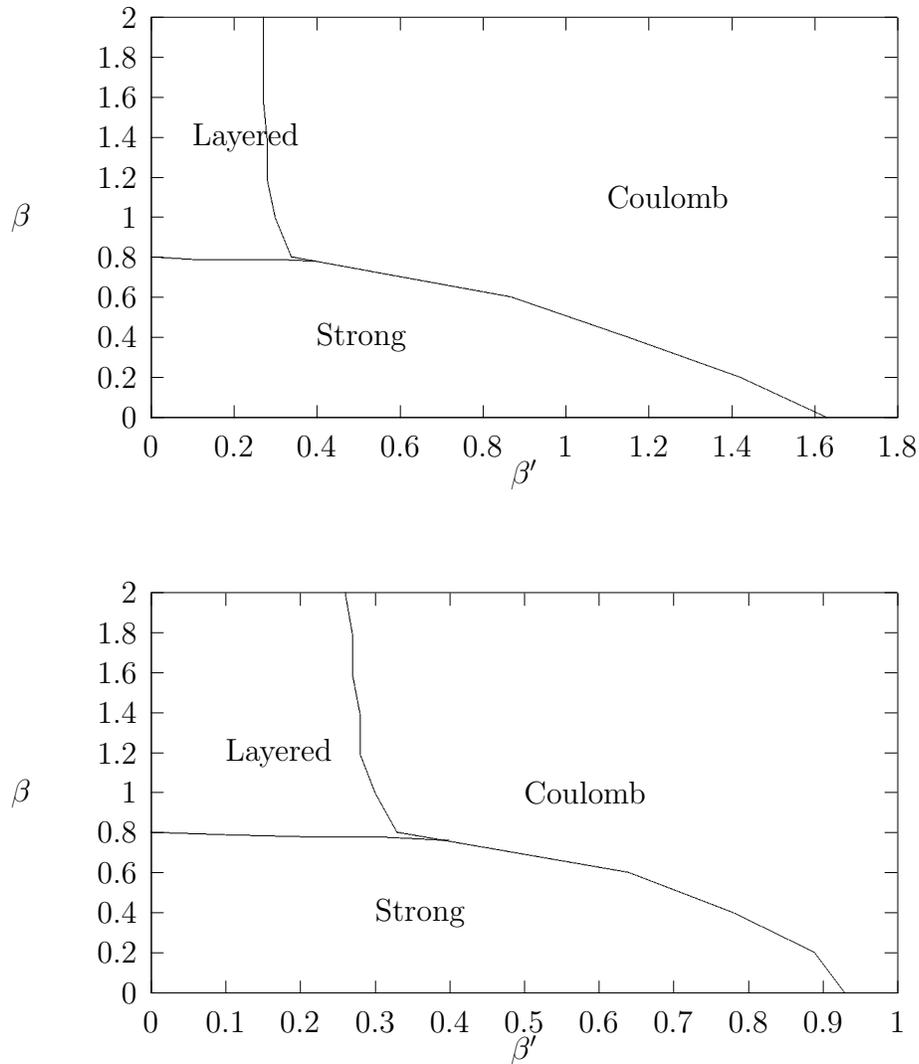


FIGURE 5.1 – Le diagramme de phases de la théorie anisotrope à cinq (en haut) ou six (en bas) dimensions avec groupe de jauge  $U(1)$ . On distingue *trois* phases : deux phases à cinq dimensions, confinante et Coulombienne et une phase, qui est Coulombienne à quatre dimensions et confinante dans la cinquième, voire sixième, dimension. On constate que la taille de la “phase des couches” n’est pas affectée quand on passe de cinq à six dimensions—par contre les “phases de volume” le sont.

### 5.3 Le diagramme de phases pour la théorie anisotrope avec matière

La contribution des fermions au potentiel effectif va être proportionnel à  $\text{Tr} \log G^{-1}(v, v')$ , où  $G^{-1}(v, v')$  est l'inverse propagateur fermionique en présence des champs de jauge  $v$  et  $v'$ . Comme on a trouvé dans le chapitre précédent, les fermions vont modifier seulement deux des quatre équations, qui déterminent les extréma du potentiel effectif, dans l'approximation du champ moyen et ceci de façon à ce que la phase branaire,  $v \neq 0, v' = 0$  reste solution—comme les deux autres, d'ailleurs. Il est, ainsi, légitime de développer le potentiel effectif autour du point  $(v, v' = 0)$ . Le résultat de ce calcul [54] est que, effectivement, l'écrantage des fermions se manifeste par un décalage du point critique,  $\beta'_{\text{crit}}$  à une valeur plus faible que celle trouvée en leur absence.

En conclusion, il est possible de réaliser la proposition de Kaplan—mais il faut se placer sur la frontière entre phase branaire et phase Coulombienne cinq-dimensionnelle. Dans le cadre de l'approximation du champ moyen il suffit d'imposer, en même temps, que l'échelle de masse pour les fermions, dans le volume à cinq dimensions, devienne infinie et que la pente du profil de masse à  $x_5 = 0$  (et  $x_5 = L$ ) devienne infiniment raide, de façon à localiser les modes zéro sur les parois et découpler les degrés de liberté de volume de ceux des parois. La tension infinie de la corde, le long la cinquième dimension est cohérente avec ce scénario. Elle implique, notamment, que, dans la phase “branaire”, les “branes” possèdent épaisseur nulle. Les corrections à l'approximation du champ moyen vont conduire à une tension finie, comme indiquent les simulations numériques. Par conséquent, les branes ont, en réalité, une épaisseur *finie*, proportionnelle à  $1/\sqrt{\text{tension}}$ .

**5.3.1 Publication : *Phys. Lett.* B316 (1993) 339**

“Chiral Defect Fermions and the Layered Phase”



**5.3.2 Publication : *Nucl. Phys.* B450 (1995) 437**

“Gauge Theories with a Layered Phase”,



Pour le modèle standard on doit ajouter des champs scalaires. Ces champs seront, également, chargés sous le groupe de jauge, pour pouvoir donner, à travers les termes de Yukawa, les masses aux fermions. Le premier exercice à résoudre, serait, alors, de tracer le diagramme de phases du modèle abélien de Higgs à cinq dimensions. L'action peut être écrite sous la forme suivante [57]

$$\begin{aligned}
S = & \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu < 5} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}(n))) + \beta' \sum_n \sum_{\mu} (1 - \text{Re}(U_{\mu 5}(n))) \\
& - \beta_h \sum_n \sum_{1 \leq \mu \leq 4} \text{Re}(\phi_n^\dagger U_\mu(n) \phi_{n+\mu}) - \beta'_h \sum_n \text{Re}(\phi_n^\dagger U_5(n) \phi_{n+\hat{5}}) \\
& + (1 - 2\beta_R) \sum_n \phi_n^\dagger \phi_n + \beta_R \sum_n (\phi_n^\dagger \phi_n)^2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

avec les définitions

$$\begin{aligned}
m^2 a_S^2 & \equiv \frac{2}{\beta_h} (1 - 2\beta_R - 4\beta_h - \beta'_h) \\
\frac{\lambda}{a_S} & = \frac{4\beta_R}{\beta_h^2 \xi} \\
\xi & \equiv \frac{a_S}{a_T}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Dans la phase symétrique on va retrouver les phases confinante et Coulombienne. Dans la phase brisée on pourra trouver une phase de couches, où les sous-espaces quadri-dimensionnels seraient dans la phase de Higgs, avec confinement le long la dimension supplémentaire. Et l'on pourra, aussi, trouver une transition de second ordre, entre la phase de Higgs à cinq dimensions et la phase de Higgs à quatre. Ici, aussi, l'anisotropie des couplages de jauge joue un rôle crucial : sans elle, en effet, la théorie serait toujours dépendante de la régularisation.

Les résultats furent le sujet de deux publications [56, 57]. Dans la première on effectue un "tour d'horizon" du diagramme de phases, vu le nombre important des constantes de couplage. Dans la deuxième on a déterminé la région dans l'espace des paramètres, où une possible limite continue peut exister, en mesurant la susceptibilité du lien de jauge (qui est une observable, vu que l'on a fixé la jauge—on a employé la jauge axiale,  $U_4 \equiv I$ ) et en remarquant qu'elle affiche une allure d'autant plus aigüe et grande, plus le volume augmente (cf. fig. 5.2).

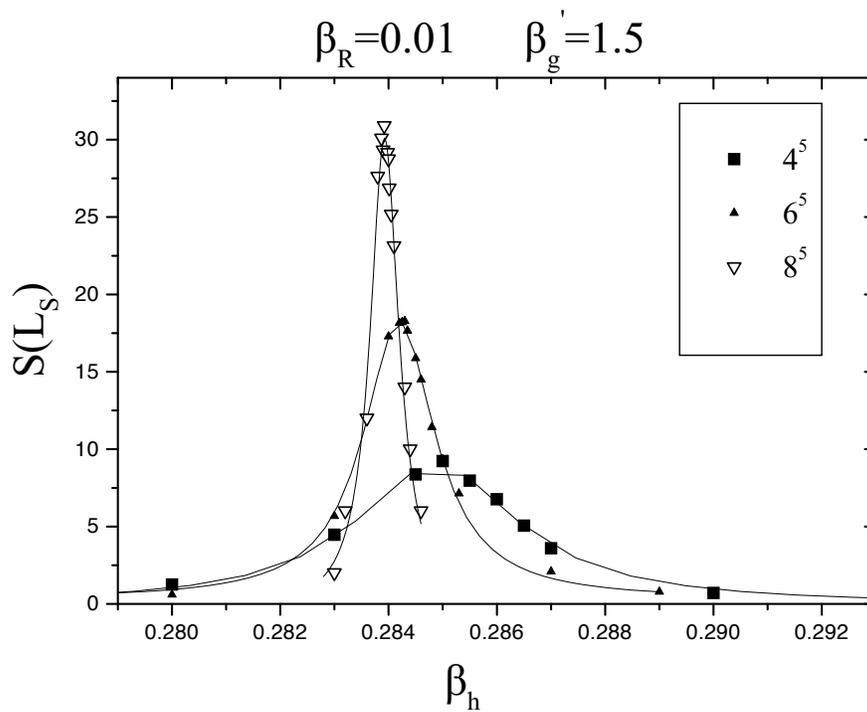


FIGURE 5.2 – La susceptibilité du lien “spatial” comme fonction de la constante de couplage du Higgs dans la couche,  $\beta_h$ , pour différentes valeurs du volume.  $\beta_R$  est la constante de couplage quartique et  $\beta'_g$  est la constante de couplage de jauge vers la cinquième dimension.

**5.3.3 Publication : *JHEP* 0102 :005 (2001)**

“ Phase structure of the 5-D Abelian Higgs model with anisotropic couplings”



**5.3.4 Publication : *Eur. Phys. J. C24 287 (2002)*.**

“Multilayer structure in the strongly coupled 5-D Abelian Higgs model”



# Chapitre 6

## Conclusions–Perspectives

Les théories de champs sur réseau, qui sont chargés sous le groupe  $U(1)$  compact, ont un diagramme de phases très intéressant. Ce sont les seules théories où l'on puisse observer, sous conditions “contrôlées”, une transition entre confinement et loi de Coulomb. L'anisotropie des couplages des champs de matière avec le champ de jauge conduit à l'apparition d'une “phase branaire”. Dans cette phase l'espace-temps à cinq dimensions est instable à la formation de couches à quatre dimensions, sur lesquelles les champs seraient confinés. C'est sur la ligne de transition entre la phase des couches et la phase de volume Coulombienne que l'on peut, cependant, obtenir une théorie chirale, indépendante de la régularisation, pourvu que les anomalies soient compensées [27]. Ce calcul concret reste encore à faire. Les problèmes suivants constituent, également, des directions futures de recherche :

- Le formalisme des fermions à parois, tel qu'il a été exposé, se prête, de manière très naturelle, à l'étude non-perturbative du secteur électrofaible, dont le groupe de jauge est  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y = U(2)$ . La partie  $U(1)$  donnera lieu à la phase des couches et, sur la ligne de transition avec la phase Coulombienne à cinq dimensions, permettra d'étudier la limite continue. Un enjeu particulier est le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie  $U(2)$  vers  $U(1)_{e.m.}$  par le mécanisme de Higgs.
- Ce formalisme est actuellement largement utilisé pour l'étude de la QCD, vu qu'il permet, en principe, une réalisation de la symétrie chirale, dont on aimerait à étudier la brisure spontanée et l'apparition des pions comme bosons de Goldstone. La relation de Ginsparg–Wilson [9] fournit une contrainte très forte sur le propagateur fermionique en présence d'un champ de jauge, pour que l'on puisse parler de symétrie chirale. Mais, comme l'on vient de se rendre compte, dans ce formalisme, la charge chirale sur la paroi est égale, en valeur absolue, à la charge de jauge dans le volume et son signe est déterminé par la chiralité sur le sous-espace. En fait, un mode zéro chirale, couplé à un champ de jauge, possède un couplage chirale *jaugé* et non seulement global, comme c'est le cas en QCD. Par conséquent, il semble que la théorie sur le sous-espace quadri-dimensionnel, où vit le mode zéro, soit invariante sous  $SU(3)_L$  et non  $SU(3)$ . Or, le groupe  $SU(3)$  n'est pas “protégé” contre l'anomalie chirale [28], ce qui veut dire que la théorie au bord quadri-

dimensionnel n'est pas protégée contre les effets quantiques dans le volume. L'élimination complète d'une chiralité rend la description de la symétrie chirale *globale* délicate et un problème ouvert dans ce formalisme. Une solution possible serait l'introduction de *deux* profils de masse indépendants, pour chaque chiralité sur une paroi donnée.

- On aimerait combiner les champs scalaires les fermions et les champs de jauge en une théorie supersymétrique, pour étudier, d'une part la réalisation de la supersymétrie dans la limite continue, d'autre part, les possibilités de sa brisure [61, 60].
- La nature des composantes supplémentaires du champ de jauge reste à élucider. Elles ressemblent à des flux qui conduisent à une compactification spontanée [62] et il serait intéressant de mettre ce genre d'hypothèses à l'épreuve concrète.
- Dans les approches à la Kaluza–Klein et Randall–Sundrum la théorie aux dimensions au-delà de quatre est non-renormalisable par comptage de puissances. Une approche pour contrôler le domaine de la validité des calculs que l'on y fait, en l'employant comme théorie effective, est celle dite “quiver” ou “moose” [63, 64]. On peut remarquer qu'elle est très semblable à la description de la phase branaire, c.à.d. on a déjà fait l'hypothèse sur le schéma de brisure de la “théorie–mère”. Il sera intéressant de rendre la correspondance plus concrète.

## Deuxième partie

# Discrétisation de l'Espace de Phases

# Chapitre 7

## Introduction

Dans la première partie on a étudié, par des méthodes numériques, des propriétés des théories de champs dans l'espace-temps. Un autre espace qui est pertinent pour la physique est l'espace des phases, dont les coordonnées sont les positions et les impulsions d'un système physique. La symétrie fondamentale est l'invariance sous les transformations canoniques-et sa prise en compte par des algorithmes numériques est un domaine de recherche qui est pertinent, également, pour la génération de configurations de champs pour la méthode de Monte Carlo (ces algorithmes appartiennent à la famille qui porte le nom "Hybrid Monte Carlo". Dans ce cas les champs eux-mêmes sont identifiés avec les coordonnées et les impulsions sont des variables auxiliaires, initialement tirées d'une distribution Gaussienne [65]).

Par conséquent on se rend compte que l'on est amené à chercher comment échantillonner l'espace de matrices unitaires. Pour une théorie de jauge c'est, bien entendu, un problème difficile, par conséquent on cherche des cas similaires, mais plus simples. Un tel cas fut proposé par Eguchi et Kawai dans les années quatre-vingt [66] et consiste à ne prendre que l'action de Wilson "sur un site". Plus précisément, l'action est la suivante

$$S = \beta \sum_{\mu < \nu} (1 - \text{Re} [\text{Tr} (U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger)]) \quad (7.1)$$

En fait ce que Eguchi et Kawai ont proposé était que la théorie de jauge, sur un réseau  $L^D$ , avec groupe  $SU(N)$ , dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , dans la limite thermodynamique,  $L \rightarrow \infty$ , était équivalente à une théorie de jauge  $SU(N)$  sur *un* site, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , dans le sens que la valeur moyenne d'une plaquette dans la première était égale à la valeur moyenne d'une plaquette dans la seconde à des corrections  $O(1/N^2)$  près. Cette "réduction" est, toujours, un sujet de recherche actif (cf. par exemple, la présentation [67]) et entre, également, dans la problématique du développement en  $1/N$  pour les théories de jauge avec groupe  $SU(N)$ .

On peut trouver une autre classe de systèmes physiques, pour lesquels l'échantillonnage de l'espace des matrices unitaires est pertinent—et peut se réduire à l'échantillonnage de l'espace de matrices  $2 \times 2$ —il s'agit de la mécanique quantique à un degré de liberté.

L'argument est le suivant : L'algèbre de Heisenberg est engendrée par les trois opérateurs,

$\widehat{q}, \widehat{p}$  et l'opérateur identité,  $I$ , où  $\widehat{q}$  est l'opérateur de position et  $\widehat{p}$  l'opérateur de l'impulsion. La seule relation de commutation différente de zéro est, bien sûr,

$$[\widehat{q}, \widehat{p}] = i\hbar I \quad (7.2)$$

et l'on se rend compte immédiatement que cette relation implique que l'on ne peut représenter ces opérateurs par des matrices de dimension finie, puisque, dans ce cas, l'on aurait que  $0 = i\hbar N$ , où  $N$  serait la dimension de la représentation. Mais, comme a remarqué H. Weyl au début des années trente [69], si l'on considère le *groupe*, engendré par les exponentiels de ces opérateurs,  $Q \equiv \exp(i\widehat{q}/\sqrt{\hbar})$ ,  $P \equiv \exp(i\widehat{p}/\sqrt{\hbar})$ , alors, ceux-ci satisfont la relation

$$QP = e^{i\hbar} PQ \quad (7.3)$$

Il est possible de trouver des matrices de taille finie,  $N$ , qui satisfont cette relation : Si l'on pose

$$\omega_N \equiv e^{i2\pi/N} \quad (7.4)$$

alors on peut vérifier que les matrices

$$Q_{k,l} \equiv \omega_N^k \delta_{k,l} \quad P_{k,l} \equiv \delta_{k-1,l} \quad (7.5)$$

où les opérations sur les indices est effectuée modulo  $N$ , satisfont bien la relation

$$QP = \omega_N PQ \quad (7.6)$$

ce qui permet d'identifier

$$\hbar \equiv \frac{2\pi}{N} \quad (7.7)$$

et de se rendre compte que la limite  $N \rightarrow \infty$  semble être la limite (sémi)-classique,  $\hbar \rightarrow 0$  ! Peut-on en déduire que la limite  $N \rightarrow \infty$  est la limite classique ? La réponse courte est négative. En effet, la taille des matrices est, également,  $N$  et ce n'est pas clair, pour l'instant, quelles sont les quantités qui doivent rester fixes, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , pour obtenir des résultats intéressants.

L'intérêt de la représentation (7.5) est multiple : tout d'abord on constate que la matrice  $Q$  résulte de la diagonalisation de la matrice  $P$ . Ensuite, que la matrice,  $F$ , dont les colonnes sont les vecteurs propres et qui satisfait, par conséquent,

$$QF = FP \Leftrightarrow Q = FPF^{-1} \quad (7.8)$$

n'est autre que

$$F_{k,l} = \frac{\omega_N^{k \cdot l}}{\sqrt{N}} \quad (7.9)$$

c.à.d. l'opérateur qui réalise la transformée de Fourier discrète. Cet opérateur joue un rôle fondamental dans le traitement du signal et l'informatique "classiques" –depuis le travail de Peter Shor [70] et de Lov Grover [71] il joue un rôle important dans le domaine de l'informatique

“quantique”, où le bit ne prend pas les deux valeurs 0 ou 1 seulement et l’une à l’exclusion de l’autre, mais, dans l’incarnation du “qubit” (bit quantique) définit un état quantique,

$$|\psi\rangle \equiv a|0\rangle + b|1\rangle \quad (7.10)$$

avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  et  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  sont les deux états du qubit. En informatique quantique, comme en mécanique quantique, on a accès à des états qui sont superpositions d’états propres de certains opérateurs, qui ne commutent pas avec l’opérateur d’évolution. Ces superpositions, qui n’ont pas d’analogie classique, permettraient, en principe, le traitement d’information de façon radicalement différente de celle employée actuellement. C’est très intéressant de comprendre quels seraient les algorithmes actuels, qui bénéficieraient, vraiment, par un ordinateur quantique et quels ne subiraient qu’une accélération pas très probante [72]. D’autre part, comme Bennett et Landauer se sont rendus compte dans les années quatre-vingt, puisque la mécanique quantique réalise une évolution *unitaire*, le premier souci doit être de remplacer les “portes” classiques (AND, OR, NOT, XOR) qui, manifestement ne le sont pas (d’abord elles n’ont pas le même nombre d’entrées que sorties, d’autre part il est, génériquement, impossible de déduire l’entrée, si l’on connaît la sortie).

La construction d’opérateurs d’évolution unitaires est un problème à la fois d’intérêt pratique et théorique. Ce problème fut abordé dans les publications [76, 77] (cf. travaux ci-joints). Dans ces travaux on présente la construction de l’opérateur d’évolution quantique le plus général, dont la représentation matricielle est de dimension  $N$  et qui réalise une quantification cohérente de l’évolution classique. Dans le premier papier  $N$  doit être un nombre premier. Dans le deuxième papier on montre, d’une part, comment généraliser la construction pour toute valeur impaire de  $N$  et, d’autre part, comment les techniques, qui furent inventées pour la réalisation de la transformée de Fourier rapide, peuvent se généraliser pour ce cas. La construction de l’opérateur unitaire pour le cas  $N = 2^n$  s’avère beaucoup plus difficile que l’on ne pouvait s’attendre, vu qu’au niveau “classique” la construction de la transformée de Fourier rapide est la plus simple dans ce cas. Malgré un certain nombre de succès limités [78], on se rend compte qu’une construction complète nous échappe. Il se peut que les difficultés rencontrées ne soient pas étrangères au fait que  $N = 2^n$  est la dimension de l’espace de phases pour  $n$  fermions—et, comme l’on vient de se rendre compte dans la première partie de ce texte, la construction de l’opérateur d’évolution discrétisé pour les fermions est hautement non-triviale.

La difficulté fondamentale vient du fait que l’on voudrait que l’opérateur unitaire d’évolution,  $U(\mathbf{A})$ , où  $\mathbf{A}$ , l’opérateur d’évolution classique, est un élément du groupe  $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ , ne réalise pas seulement une représentation *projective*, mais une représentation *fidèle* : ainsi, pour n’importe quelle paire de matrices,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de  $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ , on voudrait que

$$U(\mathbf{AB}) = U(\mathbf{A})U(\mathbf{B}) \quad (7.11)$$

Les matrices  $U(\mathbf{A})$  et  $U(\mathbf{B})$  peuvent être exprimées dans la base des monômes

$$J_{r,s} \equiv \omega_N^{r \cdot s / 2} P^r Q^s \quad (7.12)$$

avec  $r, s = 0, 1, \dots, N - 1$  et la division par 2 dans l'exposant est, en fait réalisée par le calcul de l'inverse modulo  $N$ -ce qui n'est possible que si  $N$  est impair-d'où la difficulté pour mener à bien la construction lorsque  $N = 2^p$ . On écrit

$$U(\mathbf{A}) = c_N(\mathbf{A}) \sum_{r,s=0}^{N-1} \omega_N^{\phi_{r,s}} J_{r,s} \quad (7.13)$$

avec  $c_N(\mathbf{A})$  un préfacteur à déterminer.

Si l'on fait l'hypothèse que la phase  $\phi_{r,s}$  est de la forme

$$\phi_{r,s} = A_1 r^2 + A_2 r s + A_3 s^2 \quad (7.14)$$

avec  $A_1, A_2, A_3 \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$  la condition que l'opérateur  $U(\mathbf{A})$  soit un opérateur d'évolution implique la relation suivante

$$U^\dagger(\mathbf{A}) J_{r,s} U(\mathbf{A}) = J_{(r,s)\mathbf{A}} \quad (7.15)$$

Cette relation nous permet de déterminer les coefficients  $A_1, A_2$  et  $A_3$  comme fonctions des éléments de l'opérateur classique  $\mathbf{A}$ —mais, bien entendu, le préfacteur  $c_N(\mathbf{A})$  reste indéterminé. Il sera déterminé par la condition (7.11), si cette condition admet des solutions. Concrètement,

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{AB})]_{k,l} &= c_N(\mathbf{AB}) \sum_{r,s=0}^{N-1} \omega_N^{\phi_{r,s}(\mathbf{AB})} [J_{r,s}]_{k,l} = \\ \sum_{m=0}^{N-1} [U(\mathbf{A})]_{k,m} [U(\mathbf{B})]_{m,l} &= c_N(\mathbf{A}) c_N(\mathbf{B}) \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \sum_{r,s=0}^{N-1} \omega_N^{\phi_{r,s}(\mathbf{A})} [J_{r,s}]_{k,m} \right] \left[ \sum_{r,s=0}^{N-1} \omega_N^{\phi_{r,s}(\mathbf{B})} [J_{r,s}]_{m,l} \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

Lorsque la phase  $\phi_{r,s}(\mathbf{A})$  est une forme quadratique, on peut employer les propriétés des sommes de Gauß pour obtenir une relation explicite pour le rapport  $c_N(\mathbf{AB})/(c_N(\mathbf{A})c_N(\mathbf{B}))$ . On cherche, en particulier, à s'assurer que ce rapport est indépendant des éléments des indices  $k$  et  $l$ . Alors on pourra trouver une expression pour  $c_N(\mathbf{A})$  qui ne dépendra que de  $N$  et de la matrice d'évolution classique  $\mathbf{A}$ .

Pour  $N$  impair on peut effectivement trouver la forme générale de  $c_N(\mathbf{A})$  (cf. travaux ci-joints). Pour  $N = 2^p$  on peut trouver des solutions partielles, soit pour certaines exposants  $p$ , soit pour certaines classes de matrices  $\mathbf{A}$ . Il est intéressant que cette question ne semble pas avoir été sujet d'enquête par la communauté.

Une conséquence pratique de la relation (7.15) est que l'on peut réduire le calcul de l'évolution quantique, qui mettrait en cause des matrices  $N \times N$ , à un calcul mettant en cause des matrices  $2 \times 2$ . Jusqu'ici l'informatique quantique a employé certaines de ces matrices pour la construction de "portes quantiques" et circuits quantiques. Notre analyse montre que l'on peut employer n'importe quel élément de  $SL(2, \mathbb{Z}_N)$  et construire ainsi de nouvelles portes quantiques.



**7.1 Publication : *J. Phys. A : Math. Gen.* 29 (1996) 6737**

“Holomorphic Quantization on the Torus and Finite Quantum Mechanics”



## **7.2 Publication : *J. Phys. A : Math. Gen.* 31 (1998) L655**

“Fast Quantum Maps”



## Chapitre 8

# Le modèle d’Azbel–Hofstadter et les groupes quantiques



## 8.1 Publication : *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998) 3961

“An  $SU(2)$  Analog of the Azbel–Hofstadter Hamiltonian”



# Chapitre 9

## Le Crochet de Nambu



## 9.1 Publication : *J. Phys. A : Math. Theor.* **42 (2009) 275201**

<sup>1</sup> “Nambu Quantum Mechanics on Discrete 3-Tori”

---

1. L'accès électronique au journal ne permettant pas d'atteindre le volume 42, le pré-tirage, déposé chez arXiv est affiché ici.



# Chapitre 10

## Conclusions–Perspectives

Dans cet exposé on a essayé de montrer, par quelques exemples, la relation étroite entre la physique et l’informatique. Dans la première partie on a pris au sérieux les dimensions supplémentaires, introduites, d’abord, comme une astuce pour définir les défauts sur lesquels pourraient se définir les fermions chiraux–et l’on s’est rendu compte comment l’anisotropie des couplages change le diagramme de phases des champs de jauge. On dispose d’une définition intrinsèque, engendrée par la dynamique du système, d’un monde à quatre dimensions, dont les constantes de couplages dépendraient de manière assez particulière des dimensions supplémentaires. Dans l’approximation du champ moyen les branes sont d’épaisseur nulle et la localisation des champs dans le sous-espace à quatre dimensions est exacte. Au-delà de l’approximation du champ moyen, la tension finie de la corde,  $\sigma$ , dans la phase confinante implique que les branes auront une épaisseur *finie*, inversement proportionnelle à  $\sqrt{\sigma}$ . La théorie des champs à quatre dimensions ne sera, alors, pas exactement locale–et c’est une question ouverte, dans quelle mesure ces effets pourront être mis en évidence expérimentalement. Les travaux de de Forcrand *et al.* [59] indiquent que les théories de Yang–Mills présentent un diagramme de phases assez différent de ce scénario et ce sera intéressant de comprendre ce que devient la phase “branaire” dans les théories avec groupe  $U(N) \simeq U(1) \otimes SU(N)$ .

Dans la deuxième partie l’identification de l’opérateur, qui réalise la transformée de Fourier discrète, avec un opérateur d’évolution quantique légitime, permet une compréhension plus systématique des algorithmes quantiques. On peut, ainsi, réaliser un opérateur d’évolution quantique à partir de tout opérateur d’évolution classique, non seulement à partir de la transformée de Fourier discrète. On peut identifier l’espace où agissent les portes quantiques avec un espace de phases et donner, ainsi, un fondement physique au traitement de l’information à un niveau fondamental.

La représentation métaplectique permet une étude numérique plus efficace de la famille de modèles Eguchi–Kawai. L’étude de ces modèles par cette approche n’a pas été jusqu’ici entreprise et constitue une direction de recherche à suivre.

**Troisième partie**  
**Références Bibliographiques**

# Bibliographie

- [1] R. P. Feynman and A. Hibbs, “Path Integrals and Quantum Mechanics” (1965).
- [2] J. Glimm and A. Jaffe, “Quantum Physics”, (1980).
- [3] P. Cartier and C. DeWitt-Morette, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 2237.
- [4] S. Coleman, “Soft Pions”, dans “Aspects of Symmetry” (1984).
- [5] G. C. Wick, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1124.
- [6] S. Coleman, “Secret symmetry and renormalization”, dans “Aspects of Symmetry” (1984).
- [7] J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 775. Sun”
- [8] L. Karsten and J. Smit, *Nucl. Phys.* **B183** (1981) 103.
- [9] P. Ginsparg and K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2649.
- [10] H. B. Nielsen and M. Ninomiya *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 20 ; [Erratum-ibid. **B195** (1982) 541] ; *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 173.
- [11] F. Wegner, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2259.
- [12] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) ; “Quarks On A Lattice, Or, The Colored String Model,” *Phys. Rept.* **23** (1976) 331 ; “Quarks and Strings on the Lattice” in “New Phenomena In Subnuclear Physics. Part A. Proceedings of the First Half of the 1975 International School of Subnuclear Physics”, Erice, Sicily, July 11 - August 1, 1975, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 69 (1977).
- [13] J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 395 ; L. Susskind, *Phys. Rev.* **D16** (1976) 3031.
- [14] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 3235.
- [15] D. B. Kaplan, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 342, [hep-lat/9206013]
- [16] J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 296.
- [17] J. Villain, *J. Phys. (France)* **36** (1975) 581.
- [18] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B120** (1976) 429.
- [19] S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1966) 1251.
- [20] C. G. Callan, dans “Methods in Field Theory”, *Ecole d’été des Houches* (1975), Elsevier (1975).

- [21] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182; Y. Takahashi, *Nuov. Cim.* **6** (1957) 371.
- [22] A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10** (1972) 99; J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 436.
- [23] M. Aizenmann and B. Simon, *Comm. Math. Phys.* **77** (1980) 137; Driessler, Landau, Perez *J. Stat. Phys.* **20** (1979) 123.
- [24] M. Bocchichio, L. Maiani, G. Martinelli, G. C. Rossi, M. Testa, *Nucl. Phys.* **B262** (1987) 331.
- [25] G. Martinelli, C. Pittori, C. T. Sachrajda, M. Testa and A. Vladikas, *Nucl. Phys.* **B445** (1995) 81 [arXiv :hep-lat/9411010].
- [26] B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 933.
- [27] C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, *Phys. Lett.* **B38** (1972) 519.
- [28] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 429; D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 477.
- [29] E. Witten, *Phys. Lett.* **B117** (1982) 324.
- [30] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2848.
- [31] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, vol. II, chap.22, Cambridge University Press (1996).
- [32] J. Zinn-Justin, “Quantum Field Theory and Critical Phenomena”, chap. 5 et chap. 13.
- [33] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Ann. Phys. (N. Y.)* **98** 287 (1976); *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127.
- [34] H. Flyvbjerg, B. Lautrup, J.-B. Zuber, *Phys. Lett.* **B110** (1983) 127
- [35] E. Brézin and J. -M. Drouffe, *Nucl. Phys.* **B200** (1982) 93.
- [36] H. Flyvbjerg, *Acta Phys. Pol.* **B14** (1983) 179; *Nucl. Phys.* **B235** (1984) 331.
- [37] J.-M. Drouffe and J.-B. Zuber, *Phys. Repts.* **102** (1983) 1.
- [38] J. Ambjorn, D. Espriu and N. Sasakura, *Mod. Phys. Lett.* **A12** (1997) 2665 [arXiv :hep-th/9707095].
- [39] A. Borrelli, L. Maiani, G. C. Rossi, R. Sisto, M. Testa, *Nucl. Phys.* **B333** (1990) 335.
- [40] S. Elitzur, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 3978.
- [41] W. Fischler, *Nucl. Phys.* **B129** (1977) 157.
- [42] K. Fredenhagen and M. Marcu, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 223.
- [43] V. Alessandrini, J. L. Alonso, A. Cruz and A. Tarancón, *Nucl. Phys.* **B281** (1987) 445.
- [44] J. Smit, “Introduction to Quantum Fields on a Lattice”, Cambridge University Press (2002).
- [45] A. Sokal, “Monte Carlo Methods”, Cours de Troisième Cycle en Suisse–Romande (1996).
- [46] M. Pepe, “Confinement and the center of the gauge group”, **PoS(LATT2005) 017** (205).

- [47] Y. K. Fu and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B236** (1984) 167; *ibid.* **B254** (1985) 127.
- [48] M. Peskin, *Phys. Lett.* **B94** (1980) 161.
- [49] C. G. Callan and J. Harvey, *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 427.
- [50] J. Goldstone and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1486.
- [51] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3398.
- [52] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B125** (1983) 136.
- [53] C. P. Korthals-Altes, S. Nicolis and J. Prades, *Phys. Lett.* **B319** (1993) 339, [arXiv :hep-lat/9306017]
- [54] A. Hulsebos, C. P. Korthals-Altes and S. Nicolis, *Nucl. Phys.* **B450** (1995) 437. [arXiv :hep-th/9406003]
- [55] K. Jansen, *Phys. Repts.* **273** (1995) 1, [arXiv :hep-at/9410018].
- [56] P. Dimopoulos, K. Farakos, C. P. Korthals-Altes, G. Koutsoumbas and S. Nicolis, *JHEP* **0102** (2001) [arXiv :hep-lat/0012028].
- [57] P. Dimopoulos, K. Farakos and S. Nicolis, *EPJ C* **24** (2002) [arXiv :hep-lat/0105014].
- [58] D. Berman and E. Rabinovici, *Phys. Lett.* **157B** (1985) 292.
- [59] Ph. de Forcrand, A. Kurkela and M. Panero *JHEP* **1006** (2010) 050 [arXiv :1003.4643 [hep-lat]]; PoS **LAT2009** (2009) 050 [arXiv :0911.3609 [hep-lat]].
- [60] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 60.
- [61] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 461.
- [62] M. Grana, *Phys. Rept.* **423** (2006) 91 [arXiv :hep-th/0509003].
- [63] H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 274.
- [64] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 061601 [arXiv :hep-th/0210294].
- [65] A. D. Kennedy, and P. Rossi, *Nucl. Phys.* **B327** (1989) 782; A. D. Kennedy, *The Theory of Hybrid Stochastic Algorithms*, Lectures given at the Workshop on Probabilistic Methods in Quantum Field Theory and Quantum Gravity, Cargese, France, Aug 21-27, 1989. Published in Cargese School 1989 :0209-224
- [66] T. Eguchi and H. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1063.
- [67] S. Sharpe, *Breakdown of Reduction in the Twisted Eguchi–Kawai Model*, contribution à la conférence “New Frontiers in large- $N$  Gauge Theories” (Seattle) 2009.
- [68] J. Schwinger, *Proc. Nat. Ac. Sc.* **45** (1959) 1542; *ibid.* **46** (1960) 257; *ibid.* **46** (1960) 570; *ibid.* **46** (1960) 883.
- [69] H. Weyl, *Group Theory and Quantum Mechanics* (1931); P. Cartier, “Quantum Mechanical Commutation Relations and Theta Functions”, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Boulder, Colo., 1965), Armand Borel, George D. Mostow, eds., Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IX, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1966, pp. 361-383.

- [70] P. Shor (1994) *SIAM J.Sci.Statist.Comput.* **26** (1997) 1484, [arXiv :quant-ph/9508027v2]
- [71] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 325 [arXiv :quant-ph/9706033].
- [72] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann and M. Sipser, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5442 [arXiv :quant-ph/9802045]. E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann and M. Sipser, *A Limit on the Speed of Quantum Computation for Insertion into an Ordered List*, arXiv :quant-ph/9812057.
- [73] E. G. Floratos, *Phys. Lett.* **B228** (1989) 335. E. G. Floratos, *Phys. Lett.* **B233** (1989) 395. E. G. Floratos, *Phys. Lett.* **B232** (1989) 467.
- [74] G. G. Athanasiu and E. G. Floratos, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 343.
- [75] G. G. Athanasiu and E. G. Floratos, *Phys. Lett.* **B352** (1995) 105.
- [76] G. G. Athanasiu, E. G. Floratos and S. Nicolis, *J. Phys. A : Math. Gen.* **29** (1996) 2737 [arXiv :hep-th/9509098]
- [77] G. G. Athanasiu, E. G. Floratos and S. Nicolis, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998) L655. [arXiv :math-ph/9805012]
- [78] E. G. Floratos and S. Nicolis, *Unitary evolution on a discrete phase space*, *PoS LAT2005* (2006) 260 [arXiv :hep-lat/0510043]. *Unitary evolution on the  $\mathbb{Z}(2^n) \times \mathbb{Z}(2^n)$  phase space*, [arXiv :hep-th/0505229]. *Quantum mechanics on the hypercube*, [arXiv :hep-th/0006006].
- [79] E. G. Floratos and S. Nicolis, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998) 3961.[arXiv :hep-th/9508111]
- [80] M. Axenides, E. G. Floratos and S. Nicolis, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42** (2009) 275201. [arXiv : 0901.2638 [hep-th]]