HAL open science

Dimension de Hausdorff des ensembles limites

Laurent Dufloux

To cite this version:

Laurent Dufloux. Dimension de Hausdorff des ensembles limites. Mathématiques [math]. Université Paris 13, 2015. Français. NNT : . tel-01293924

HAL Id: tel-01293924

https://hal.science/tel-01293924v1

Submitted on 25 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE
l'UNIVERSITÉ PARIS 13

Spécialité

Mathématiques

Institut Galilée – Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications

N° attribué par la bibliothèque

Présentée et soutenue publiquement par

Laurent DUFLOUX

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 13

Dimension de Hausdorff des ensembles limites

Thèse soutenue le 6 octobre 2015 devant Messieurs les Professeurs

Jean-François Quint	Directeur de thèse
François Ledrappier	Rapporteur
Julien Barral	Examinateur
Henry de Thélin	Examinateur
Pierre Pansu	Examinateur
Frédéric Paulin	Examinateur

Dimension de Hausdorff des ensembles limites

Laurent Dufloux

19 octobre 2015

A mon épouse, Jeanne,
je dédie ce travail,
humble témoignage de mon admiration
reconnaissante.

Résumé de la thèse

Soit G le groupe $\mathbf{SO}^o(1,n)$ $(n \geq 3)$ ou $\mathbf{PU}(1,n)$ $(n \geq 2)$ et fixons une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Soit Γ un sous-groupe discret de G, que nous supposons Zariski-dense et de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie.

Lorsque $G = \mathbf{SO}^o(1,n)$, nous étudions la géométrie de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long des sous-groupes fermés connexes de N, en lien avec la dichotomie de Mohammadi-Oh. Nous établissons des résultats déterministes sur la dimension des projections de la mesure de Patterson-Sullivan.

Lorsque $G = \mathbf{PU}(1,n)$, nous relions la géométrie de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long du centre du groupe de Heisenberg au problème du calcul de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite relativement à la distance sphérique au bord. Nous calculons cette dimension pour certains groupes de Schottky.

Let G be the group $\mathbf{SO}^o(1,n)$ $(n \geq 3)$ or $\mathbf{PU}(1,n)$ $(n \geq 2)$ and fix some Iwasawa decomposition $G = KAN$. Let Γ be a discrete subgroup of G. We assume that Γ is Zariski-dense with finite Bowen-Margulis-Sullivan measure.

When $G = \mathbf{SO}^o(1,n)$, we investigate the geometry of the Bowen-Margulis-Sullivan measure along connected closed subgroups of N. This is related to the Mohammadi-Oh dichotomy. We then prove deterministic results on the dimension of projections of Patterson-Sullivan measure.

When $G = \mathbf{PU}(1,n)$, we relate the geometry of Bowen-Margulis-Sullivan measure along the center of Heisenberg group to the problem of computing the Hausdorff dimension of the limit set with respect to the spherical metric on the boundary. We construct some Schottky subgroups for which we are able to compute this dimension.

Remerciements

Chacun de ceux qui ont un jour discuté avec Jean-François Quint connaît l'étendue de sa culture mathématique, la hauteur de ses vues, et son aisance technique. Il lui suffit souvent de quelques secondes pour jauger, avec la plus grande acuité, une situation mathématique. Pourtant, ce ne sont pas là les qualités que je désire évoquer ici. Ce que je retiens d'abord de lui, c'est sa gentillesse.

Durant tous nos entretiens, Jean-François a su me mettre en confiance, répondre à mes questions et dissiper mes inquiétudes, toujours avec humour. En raccrochant le téléphone, je me sentais un regain d'énergie, j'étais pour ainsi dire gonflé à bloc, et gagné par l'enthousiasme, alors même que quelques heures plus tôt je me trouvais abattu, voire désespéré, devant la lenteur de mes progrés.

Pour cela, pour ta générosité, pour ta charité, Jean-François, je te remercie. Être ton élève fut pour moi un plaisir et un honneur. Lorsque nous nous sommes rencontrés, je peux bien l'avouer aujourd'hui, les mathématiques ne m'intéressaient plus guère, et je songeais vaguement à me reconvertir dans la linguistique historique du russe. S'il en est allé autrement, si la passion des mathématiques m'est revenue, c'est, je l'affirme, très largement grâce à toi.

Les idées de M. Kenneth Falconer et M. François Ledrappier sont à la base de la présente thèse, et représentent pour moi une inspiration constante. Je mesure l'honneur que m'ont fait ces éminents mathématiciens, en acceptant de prendre sur leur temps pour lire et commenter mon manuscrit. Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de ma gratitude.

Je prie également MM. Julien Barral, Henry de Thélin, Pierre Pansu et Frédéric Paulin, qui ont accepté de figurer dans mon jury, d'accepter mes remerciements sincères.

Les moments d'échange, avec d'autres étudiants ou avec des mathématiciens professionnels, forment un contrepoids essentiel à l'activité purement mathématique, qui est intérieure, et donc solitaire. Je remercie tous ceux qui, durant ces quatre longues années, m'ont fait le plaisir de me présenter leurs idées, leurs problèmes, leurs questions, leurs univers mathématiques, de m'interroger sur mes travaux.

Je remercie ma famille et mes proches, pour leur soutien, et pour n'avoir pas trop insisté lorsque, à la question de savoir comment se passait ma thèse, je ne donnais que de vagues réponses.

Par-dessus tout, je remercie mon épouse, Jeanne, qui m'a accompagné, soutenu, et supporté, tout ce temps. Tu ne t'es jamais plainte. Ton courage est pour moi un exemple.

Introduction

1. Dimension de Hausdorff des attracteurs. Le problème de la dimension des attracteurs *conformes* est assez bien compris. On démontre, sous diverses hypothèses, que la dimension de Hausdorff d'un attracteur conforme Λ associé à une application expansive f suffisamment régulière (ici Λ est l'ensemble des points dont l'orbite négative ne part pas à l'infini) est la racine de l'équation de Bowen $P(-s \log \|f'\|) = 0$. Voir par exemple l'article fameux (Bowen, 1979), ou (Hutchinson, 1981) pour le cas de l'ensemble limite associé à une suite finie de similitudes contractantes.

C'est peu de dire que le cas des attracteurs non conformes paraît plus difficile. Il existe des formules valables «génériquement», c'est-à-dire vraies pour presque toute valeur de certains paramètres. Dans (Falconer, 1988), Kenneth Falconer introduit la fonction $\phi^s(M)$ d'une matrice M, qui joue le rôle du cocycle $\|M\|^s$, et démontre, sous certaines hypothèses, une formule (appelée depuis «formule de Falconer», bien qu'elle remonte en réalité à une note de A. Douady et J. Oesterlé (Douady et Oesterlé, 1980)) pour la dimension de Hausdorff d'un ensemble auto-affine, vraie pour presque tout choix des vecteurs de translation (relativement à la mesure de Lebesgue) des transformations affines. Les méthodes de Falconer lui imposent de se borner à des matrices de norme d'opérateur suffisamment petite $< \frac{1}{2}$. Dans une situation formellement plus simple, où l'on ne considère que deux contractions affines, dont les parties linéaires préservent les axes, M. Pollicott et H. Weiss (Pollicott et Weiss, 1994) peuvent pousser plus loin l'analyse, pour des matrices dont la norme d'opérateur est proche de 1. Leur formule coïncide avec celle de Falconer. Un phénomène nouveau apparaît : les propriétés arithmétiques des valeurs singulières jouent un rôle lorsque la plus grande est $> \frac{1}{2}$. Pollicott et Weiss exhibent des exemples où la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est strictement moindre que la valeur «générique» attendue.

La difficulté est donc réelle. Un des principaux problèmes de la théorie est de déterminer sous quelles hypothèses la formule de Falconer donne bien la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. Dans (Hueter et Lalley, 1995), I. Hueter et S. Lalley démontrent la validité de la formule de Falconer, pour l'ensemble auto-affine associée à une suite finie de contractions affines $T_1, \ldots, T_k$ du plan, moyennant des hypothèses dont voici la plus significative : si $1 > \alpha > \beta > 0$ sont les deux valeurs singulières de T_i, on suppose que $\alpha^2 < \beta$ («distortion bornée»). Notons que α et β peuvent être arbitrairement proches de 1. Malheureusement, l'argument de ces auteurs ne vaut qu'en dimension 2.

2. Ensembles limites des groupes discrets d'isométries du plan hyperbolique complexe. Venons-en maintenant au premier problème que j'ai

étudié, et qui a motivé la suite de ce travail. Soit G le groupe $\mathbf{PU}(1,2)$ des isométries directes du plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, et soit Γ un sous-groupe discret de G. L'ensemble limite Λ_Γ et l'exposant de croissance δ_Γ sont des objets d'étude classique. Dans la théorie générale des espaces CAT(-1), on définit sur le bord visuel $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$ des distances, appelées *distances de Gromov*, relativement auxquelles l'opération de G est *conforme*. On démontre alors ((Bishop et Jones, 1997), (Paulin, 1997)), sous certaines hypothèses, que l'ensemble limite (ou une partie de cet ensemble, l'ensemble limite conique), est de dimension de Hausdorff δ_Γ. Ce résultat est général et élémentaire : ce qui manifeste le fait que la conformité est une hypothèse agréable pour les problèmes de calcul de dimension.

Mais ce n'est pas tout. Le bord $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$ est difféomorphe à la sphère S^3. On peut donc le munir de la distance sphérique, relativement à laquelle l'opération de G n'est pas conforme. Précisons cela. Si g est un élément de G, pour comprendre la façon dont g «déforme» la distance sphérique sur $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, il est commode de regarder g comme une transformation du plan projectif complexe $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ muni de la distance de Fubini-Study

$$d([v],[w]) = \frac{\|v\wedge w\|}{\|v\|\|w\|}, \quad [v],[w]\in\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$$

qui induit, en restriction à $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$, la distance sphérique. Cela étant, la décomposition de Cartan de g est de la forme $g = kal$ où k, l sont des isométries et a est diagonale,

$$a = \begin{pmatrix} e^t & & \\ & 1 & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t\geq 0$$

et e^t est la norme d'opérateur de a. La relation

$$\frac{d(g[v],g[w])}{d([v],[w])} = \frac{\dfrac{\|\bigwedge^2 g\cdot(v\wedge w)\|}{\|v\wedge w\|}}{\dfrac{\|gv\|}{\|v\|}\dfrac{\|gw\|}{\|w\|}}$$

montre que le membre de gauche est majoré par e^{-t}. D'autre part, si le point $[v\wedge w]\in\mathbf{P}(\bigwedge^2\mathbf{C}^3)$ est *uniformément loin* de la droite projective complexe passant par $[l^{-1}e_2\wedge l^{-1}e_3]$ et $[l^{-1}e_3\wedge l^{-1}e_1]$, on aura un contrôle de la forme

$$\frac{\|\bigwedge^2 g\cdot(v\wedge w)\|}{\|v\wedge w\|}\geq\frac{1}{C}e^t$$

où C est uniforme, ce qui donne l'encadrement

$$\frac{1}{C}e^{-t}\leq\frac{d(g[v],g[w])}{d([v],[w])}\leq e^{-t}.$$

En se servant de ces relations élémentaires, on peut traiter le cas de certains groupes de Schottky $\Gamma\subset\mathbf{PU}(1,2)$, dit «bien positionnés», et démontrer que la dimension de Hausdorff (relative à la distance sphérique) de l'ensemble limite d'un tel groupe est égale à δ_Γ. Ceci vaut en toute dimension ; on a donc le

Théorème A (paragraphe 3.4.2.2, corollaire 3.4.2.10)**.** *Soit Γ un sous-groupe de Schottky bien positionné de $\mathbf{PU}(1,n)$ ($n \geq 2$). La dimension de Hausdorff de l'ensemble limite Λ_Γ, relativement à la distance sphérique sur le bord, est égale à l'exposant de croissance δ_Γ.*

Pour de tels groupes, la trace, sur l'ensemble limite, des boules «rondes» (de la distance sphérique) coïncide peu ou prou avec la trace des boules «aplaties» (de la distance de Gromov). Ce phénomène est illustré sur les figures ci-après ; l'axe horizontal correspond à la «distribution CR» (voir chapitre 3) et l'axe vertical correspond à une direction transverse. Sont schématisées deux boules de même rayon, la première «ronde» (correspondant à la distance sphérique) et la deuxième «plate» (correspondant à la distance de Gromov). Sur le premier schéma figure l'ensemble limite associé à un groupe de Schottky bien positionné ; sur le second schéma figure l'ensemble limite associé à un groupe discret de gros exposant.

Moralement, avec les groupes de Schottky bien positionnés, on n'est pas très loin du cas des attracteurs conformes.

Après les groupes de Schottky bien positionné, il était raisonnable de chercher à traiter le cas des groupes de Schottky généraux. Je n'y suis pas parvenu et mes travaux sur ce problème se sont arrêtés là. Voici cependant une conjecture.

Conjecture 0.0.0.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathbf{PU}(1,n)$ ($n \geq 2$), Zariski-dense et convexe-cocompact, d'exposant de croissance δ_Γ, et d'ensemble limite Λ_Γ. La dimension de Hausdorff de Λ_Γ relativement à la distance sphérique est donnée par la formule*

$$\dim(\Lambda_\Gamma) = \begin{cases} \delta_\Gamma & \textit{si } \delta_\Gamma \leq 2(n-1) \\ 2(n-1) + \frac{1}{2}(\delta_\Gamma - 2(n-1)) & \textit{si } \delta_\Gamma > 2(n-1) \end{cases}.$$

La formule précédente provient de la formule de Falconer, *via* un argument heuristique que je préfère passer sous silence. Voir aussi la conjecture 3.4.2.3 (paragraphe 3.4.2.1) pour une conjecture reliée à celle-ci mais portant sur l'entropie de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long du centre du groupe de Heisenberg. Pour l'instant, notons que cette conjecture fait apparaître une dichotomie : la formule dépend de la position de δ_Γ par rapport au nombre $2(n-1)$.

3. Dynamique de la mesure de Burger-Roblin : dichotomie de Oh et Mohammadi. La suite de mon travail a été inspirée par une prépublication de Hee Oh et Amir Mohammadi, maintenant publiée par le journal de l'AMS, (Mohammadi et Oh, 2015). Si G est le groupe $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ des isométries directes de l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$, et si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa, ces auteurs étudient la dynamique de la mesure dite de Burger-Roblin sur $\Gamma\backslash G$ (où Γ est un sous-groupe discret convexe cocompact et Zariski-dense de G) sous l'opération d'un sous-groupe à un paramètre U de N. Leurs résultats font apparaître une dichotomie : si $\delta_\Gamma > 1$, l'opération est ergodique (c'est-à-dire que tout borélien de $\Gamma\backslash G$ qui est U-invariant est négligable ou de mesure totale), et sinon elle ne l'est pas.

Lorsque $\delta_\Gamma > 1$, Oh et Mohammadi commencent par démontrer que la mesure de Burger-Roblin, et la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan, sont récurrentes pour l'opération d'un sous-groupe à un paramètre de N (voir définition

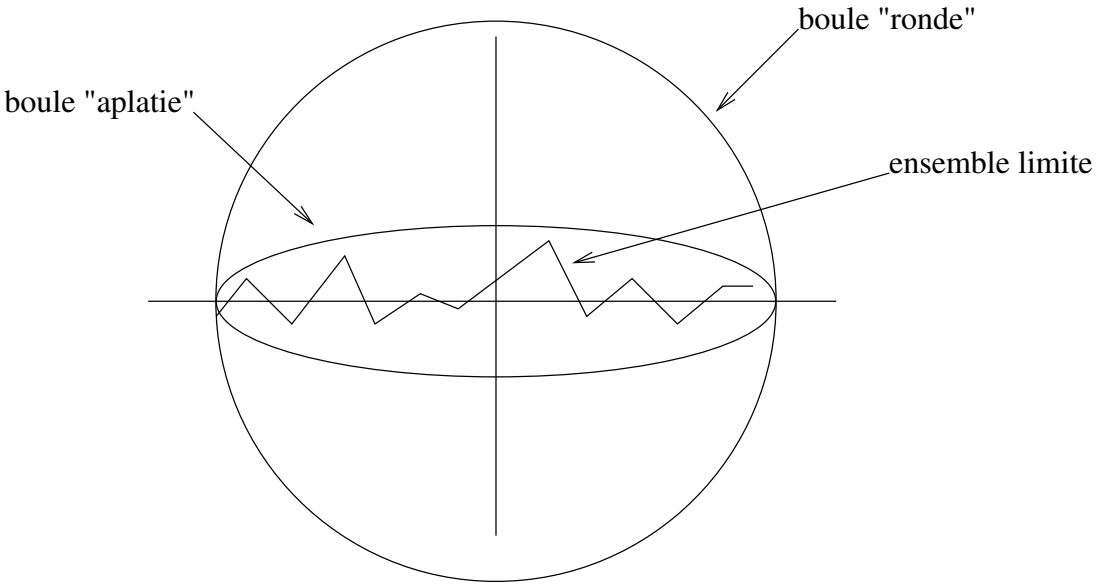

FIGURE 1 – Ensemble limite transversalement trivial

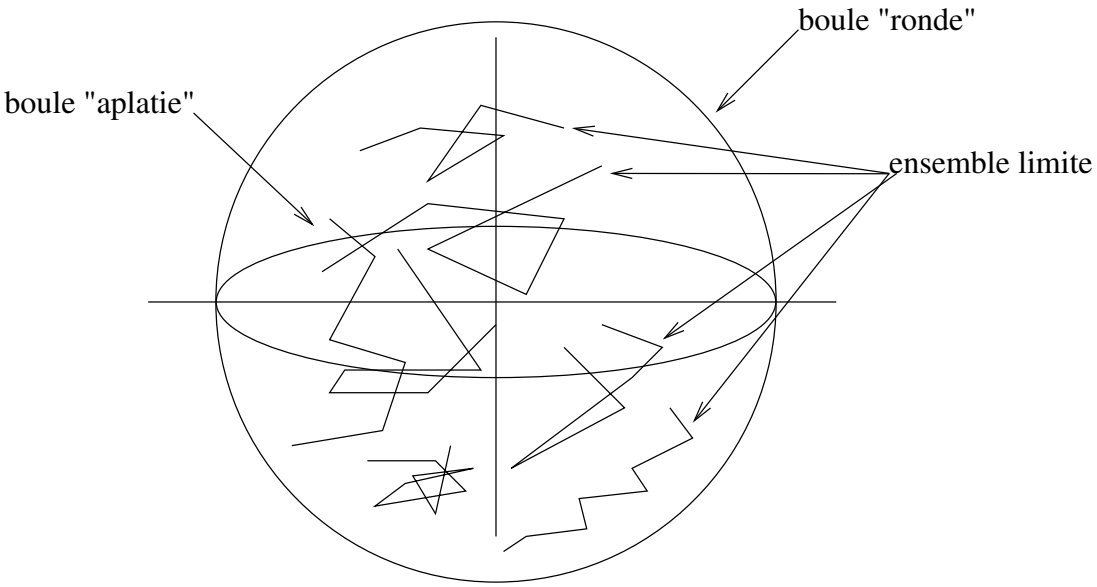

FIGURE 2 – Ensemble limite transversalement non trivial

2.1.2.2). En revanche, pour $\delta_\Gamma \leq 1$, ils ne démontrent pas que cette mesure soit totalement dissipative, comme on pourrait s'y attendre.

On peut reformuler l'énoncé portant sur la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan comme ceci : si U est un sous-groupe à un paramètre de N, pour que les conditionnelles de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long de U soient triviales, il faut que δ_Γ soit ≤ 1. Oh et Mohammadi ne s'intéressent pas à la réciproque de cet énoncé.

La géométrie des conditionnelles de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan

le long du centre du groupe de Heisenberg (et, plus précisément, la dimension de ces conditionnelles) est intimement liée, via la formule de Ledrappier-Young, à la dimension de Hausdorff dont j'ai parlé plus haut. Par conséquent, la compréhension de ce dernier problème passe par l'étude de la «dichotomie de Oh et Mohammadi» transposée au cas hyperbolique complexe. Mais avant d'étudier l'analogue (éventuel) de cette dichotomie dans le cas hyperbolique complexe, il m'a paru nécessaire de tâcher d'approfondir ces résultats de Oh et Mohammadi. En particulier, il s'agissait de savoir si, lorsque $\delta_\Gamma \leq 1$, la mesure de Burger-Roblin est totalement dissipative pour l'opération d'un sous-groupe à un paramètre de N. Plus précisément, voici l'énoncé que je souhaitais établir.

Conjecture 0.0.0.2. *Soit Γ un sous-groupe Zariski-dense et de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie de $\mathbf{PO}(1,n)$ ($n \geq 3$). Soit U un m-plan de N ($1 \leq m \leq n-1$). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'exposant de croissante δ_Γ est $\leq n-m$;*
2. *L'opération de U sur la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan est totalement dissipative ;*
3. *L'opération de U sur la mesure de Burger-Roblin est totalement dissipative.*

L'équivalence de 1 et 2 est établie au chapitre 3. Nous abordons ce problème «par en haut», au moyen de la théorie de l'entropie. Nous étudions une quantité, appelée «entropie de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long de U», que nous notons $h_{\mathrm{BMS}}(U)$, et une «dimension transverse (à U) des conditionnelles de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan le long de N», notée $\delta_{N/U}$, et démontrons les résultats suivants (où $G = \mathbf{SO}^o(1,n)$, $n \geq 3$)

Théorème B (section 3.2, théorème 3.2.0.5)**.** *Soit Γ un sous-groupe discret de G,* Zariski-dense *et de mesure de BMS* finie. *Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. Pour tout m-plan U contenu dans N, on a l'alternative suivante :*

1. *Ou bien $\delta_\Gamma \leq n-m$, et alors on a $\delta_{N/U} = \delta_\Gamma$ et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = 0$;*
2. *Ou bien $\delta_\Gamma > n-m$, et alors on a $\delta_{N/U} = n-m$ et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = \delta_\Gamma - (n-m)$.*

Le théorème 3.2.0.5 contient quelques raffinements supplémentaires que nous ne citons pas ici. La conséquence suivante du théorème B contient pleinement l'équivalence des assertions 1 et 2 de la conjecture ci-dessus, en toute dimension.

Théorème C (section 3.2, corollaire 3.2.0.7)**.** *On conserve les hypothèses du théorème. Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$ et U un m-plan. Pour que l'opération de U sur la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan de $\Gamma\backslash G$ soit totalement dissipative (resp. totalement récurrente), il faut et il suffit que $\delta_\Gamma \leq n-m$ (resp. $\delta_\Gamma > n-m$).*

En revanche, je ne suis pas parvenu à démontrer que 2 et 3 sont équivalentes. Cela reste à faire. Signalons que Barbara Schapira et François Maucourant savent démontrer (sous certaines hypothèses sur Γ) l'assertion 3 lorsque $\delta_\Gamma < 1$. Leurs méthodes sont différentes des miennes.

4. Conditionnelles et entropie d'une mesure le long d'une opération de groupe. Pour établir les résultats cités au paragraphe 3 ci-dessus, je fais grand usage de la théorie des conditionnelles d'une mesure le long d'une opération de groupe. Cette théorie est, depuis (Ledrappier et Young, 1985), «classique» ; j'ai cependant dû, faute d'un exposé qui me satisfasse, la développer depuis ses premiers éléments : c'est le chapitre 2 de cette thèse. Autant l'avouer, ce développement comporte bien des lacunes, mais il suffit à mes besoins.

Le chapitre 2 s'achève sur le théorème 2.2.5.1 qui transpose à ce cadre de la formule de Pesin, ou de Ledrappier-Young, (Ledrappier et Young, 1985) théorème C'. Tous les autres résultats de cette thèse reposent sur ce théorème; en particulier, le résultat cité au paragraphe 2 sur les groupes de Schottky «bien positionnés», que je démontrais dans une première version avec des arguments élémentaires d'algèbre linéaire, est maintenant donné comme corollaire quasi immédiat de cette formule de Ledrappier-Young.

5. Dimension des projections de la mesure de Patterson-Sullivan. La démonstration du théorème B ci-dessus passe par un fait général (conséquence d'un théorème de Marstrand) qui s'énonce ainsi.

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$, Zariski-dense et de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, et soit μ la mesure de Patterson-Sullivan d'exposant δ_Γ associée à Γ. Tirons un point $\xi \in \mathbf{S}^2$ au hasard selon la loi de μ et identifions μ avec une mesure de probabilité $\hat{\mu}$ sur $\mathbf{R}^2$ via la projection stéréographique $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{S}^2 \setminus \{\xi\}$. Si l'on tire au hasard une droite U de $\mathbf{R}^2$ (suivant la mesure de Lebesgue de la droite projective réelle) et que l'on projette orthogonalement $\hat{\mu}$ sur U, la mesure obtenue est de dimension inférieure $\inf\{\delta_\Gamma, 1\}$.

On peut dire plus. Au chapitre 3, je démontre, sous une formulation un peu différente, le résultat que voici. Commençons par une définition simplifiée (en 3.3.1 nous donnons une définition pour les mesures de Radon).

Définition. *Une mesure de probabilité sur* $\mathbf{R}^n$ *est* régulière *si elle est de dimension exacte* δ *et si pour tout* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *et tout* k*-plan* U*, la projection orthogonale de cette mesure sur* U *est de dimension inférieure égale presque partout à* $\inf\{k, \delta\}$.

Théorème D (paragraphe 3.3.1, théorème 3.3.1.2)**.** *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $G = \mathbf{SO}^o(1,n)$*, Zariski-dense et de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie. Soit* μ *la mesure de Patterson-Sullivan d'exposant* δ_Γ *associée à* Γ*. Pour* μ*-presque tout* ξ*, l'image réciproque de* μ *par la projection stéréographique* $\mathbf{R}^{n-1} \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}} \setminus \{\xi\}$ *est* régulière.

Voici une conséquence assez frappante : pour μ-presque tout ξ, pour *toute* droite vectorielle U du tangent $T_\xi \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, et pour μ-presque tout η, si S est le petit cercle passant par ξ et η et tangent en ξ à U, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu\left(V(S,\varepsilon) \setminus B(\xi,\rho)\right)}{\log \varepsilon} = \inf\{\delta_\Gamma, n-1-m\}$$

où $V(S,\varepsilon)$ est le ε-voisinage de S (pour la distance sphérique) et $B(\xi,\rho)$ une boule de rayon $\rho > 0$ fixé centrée en ξ.

Je ne suis pas encore parvenu à démontrer le même énoncé avec $\mu(V(S,\varepsilon))$ au lieu de $\mu(V(S,\varepsilon) \setminus B(\xi,\rho))$. Voir le corollaire 3.3.1.5 et la discussion qui le suit.

Table des matières

1 Théorie générale de la dimension **15**
1.1 Dimension des mesures dans les espaces doublants 15
1.1.1 Rappels sur la désintégration des mesures 15
1.1.2 Définitions générales 16
1.1.3 Espaces doublants 19
1.2 Dimension des projections 26
1.2.1 Énergie d'une mesure de Radon 27
1.2.2 Le théorème de Marstrand 27
1.2.3 Projections de mesures fractales 30

2 Conditionnelles et entropie **33**
2.1 Théorie générale 33
2.1.1 Construction des conditionnelles 34
2.1.2 Récurrence ; dissipativité 44
2.1.3 Transitivité de la désintégration le long d'un groupe . . . 50
2.2 Théorie ergodique et entropie 55
2.2.1 Définition de l'entropie ; dimension des conditionnelles . . 56
2.2.2 Croissance de l'entropie 59
2.2.3 Inégalité maximale 62
2.2.4 Deux lemmes techniques 64
2.2.5 La formule de Ledrappier-Young 68

3 Calculs d'entropies et de dimensions **71**
3.1 Préliminaires 71
3.1.1 Espaces hyperboliques réels et complexes 71
3.1.2 Bord à l'infini 71
3.1.3 Fibré unitaire tangent 72
3.1.4 Horosphères et coordonnées de Hopf 73
3.1.5 Théorie de Patterson-Sullivan 74
3.1.6 Conditionnelles le long du groupe horosphérique 79
3.2 Calculs d'entropie 80
3.3 Dimension des projections 83
3.3.1 Position du problème 83
3.3.2 Démonstration du théorème 86
3.4 Présentation du cas hyperbolique complexe 88
3.4.1 L'espace hyperbolique complexe et son bord 88
3.4.2 Entropie et dimension de Hausdorff 92

Chapitre 1

Théorie générale de la dimension

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques faits élémentaires sur la dimension des mesures. Dans le paragraphe 1.1.2 nous rappelons les définitions ; dans le paragraphe 1.1.3 nous faisons la théorie élémentaire des espaces métriques doublants pour établir des lemmes qui nous serviront au chapitre 2 à étudier la notion de «dimension transverse» (dans le cadre des conditionnelles le long d'une opération de groupe). La paragraphe 1.2.2 contient un théorème classique de J. M. Marstrand. Le paragraphe 1.2.3 contient l'énoncé d'un théorème de M. Hochman sur les projections de mesures «fractales» et leur dimension. Nous commençons au paragraphe 1.1.1 par des rappels sur la désintégration des mesures.

1.1 Dimension des mesures dans les espaces doublants

1.1.1 Rappels sur la désintégration des mesures

Définition 1.1.1.1. *Soient (X, Σ, μ) et (Y, T, ν) deux espaces mesurés et ϕ une application mesurable $X \to Y$. On dit que ν est pseudo-image de μ par ϕ si c'est une mesure finie dont les parties négligeables sont celles dont les images réciproques par ϕ sont négligeables pour μ.*

Si μ est σ-finie, il existe une mesure pseudo-image de μ par ϕ : on peut se donner une mesure finie μ' sur (X, Σ) équivalente à μ et prendre pour ν l'image de μ' par ϕ.

Définition 1.1.1.2. *Soient (X, Σ, μ) et (Y, T, ν) deux espaces mesurés et ϕ une application mesurable $X \to Y$. Supposons que ν soit pseudo-image de μ par ϕ. Une* désintégration *de μ au-dessus de ν (le long de ϕ) est la donnée d'une application $y \mapsto \mu_y$, associant à tout point $y \in Y$ une mesure μ_y sur Σ, et possédant les propriétés suivantes :*

1. *Pour ν-presque tout y, μ_y est concentrée sur $\phi^{-1}(y)$, c'est-à-dire que $\phi^{-1}(y)$ est de complémentaire négligeable pour μ_y ;*

2. *Pour toute partie $A \in \Sigma$, l'application $y \mapsto \mu_y(A)$ est ν-mesurable (c'est-à-dire mesurable pour la tribu complétée de T relativement à ν) ;*
3. *Pour toute application $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$, l'application $y \mapsto \int_Y f(x) d\mu_y(x)$ définit un élément de $L^1(Y, \mathrm{T}, \nu)$, et on a la relation*

$$\int_Y d\nu(y) \int_X f(x) d\mu_y(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Les mesures μ_y ($y \in Y$) seront appelées «conditionnelles de μ au-dessus de ν (le long de ϕ)».

Nous nous servirons souvent de la proposition suivante.

Proposition 1.1.1.3 ((Kechris, 1995)). *Soit $\phi : X \to Y$ une application borélienne entre deux espaces boréliens standards (X, Σ) et (Y, T). Soient μ une mesure σ-finie sur Σ et ν une pseudo-image de μ par ϕ. On peut désintégrer μ au-dessus de ν le long de ϕ et la désintégration obtenue est essentiellement unique, au sens suivant : si (μ_y) et (μ'_y) sont deux telles désintégrations, on a $\mu_y = \mu'_y$ pour ν-presque tout y.*

Remarque 1.1.1.4. *Nous employerons la locution «désintégrons μ le long de ϕ» pour dire que nous nous donnons une pseudo-image ν de μ par ϕ et que nous désintégrons μ au-dessus de ν. Si ν et ν' sont deux mesures pseudo-images de μ par ϕ, et si (μ_y) et (μ'_y) sont les désintégrations associées, les mesures μ_y et μ'_y sont proportionnelles pour ν-presque tout y.*

Rappelons qu'un espace mesurable (X, Σ) est un borélien standard si Σ est la tribu borélienne d'une topologie d'espace polonais (séparable complètement métrisable) sur X.

1.1.2 Définitions générales

Définition 1.1.2.1. *Soit X un espace métrique, et μ une mesure sur X pour laquelle toute boule est de mesure finie. La dimension (locale) inférieure de μ en un point x est le nombre fini ou infini*

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \mu(B(x, \rho))}{\log \rho};$$

la dimension (locale) supérieure de μ en x est le nombre fini ou infini

$$\overline{\dim}(\mu, x) = \limsup_{\rho \to 0} \frac{\log \mu(B(x, \rho))}{\log \rho}.$$

La dimension inférieure de μ est l'infimum μ-essentiel de $\underline{\dim}(\mu, x)$, i.e.

$$\underline{\dim}(\mu) = \sup\{s \geq 0 \ ; \ \underline{\dim}(\mu, x) \geq s \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x\}.$$

Si les dimensions inférieure et supérieure de μ sont égales μ-presque partout à un même nombre δ, nous dirons que μ est de dimension exacte égale à δ.

Autrement dit, μ est de dimension exacte δ si

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log \mu(B(x,\rho))}{\log \rho} = \delta$$

pour μ-presque tout x. Notons que dans ces définitions il n'y a pas lieu de préciser si les boules sont ouvertes ou fermées.

On peut calculer les dimensions locales le long des suites qui ne tendent pas trop rapidement vers 0. Plus précisément :

Lemme 1.1.2.2. *Soit μ une mesure sur l'espace métrique X, pour laquelle toute boule est de mesure finie, et soit x un point de X. Soit $(\rho_n)_n$ une suite de nombre réels > 0 tendant vers 0 en décroissant. On suppose qu'il existe une constante $C > 1$ telle que $\rho_n \leq C\rho_{n+1}$ pour tout n. Alors*

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(B(x,\rho_n))}{\log \rho_n}$$

et de même pour la $\overline{\dim}$.

Démonstration. Évidente. □

Il est facile d'en déduire que les applications $x \mapsto \underline{\dim}(\mu, x)$ et $x \mapsto \overline{\dim}(\mu, x)$ sont boréliennes, ce dont nous nous servirons librement.

Rappelons aussi la définition des mesures de Hausdorff et de la dimension de Hausdorff. Soit toujours X un espace métrique. Pour toute partie A et tous réels $\delta > 0$, $s \geq 0$ notons $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ le nombre

$$\inf\left\{\sum_i \left(\frac{\operatorname{diam}(U_i)}{2}\right)^s \ ; \ \text{les } U_i \text{ sont des ouverts de diamètre} \leq 2\delta \text{ et } A \subset \bigcup_i U_i\right\}.$$

Notons qu'on pourrait se borner dans cette borne inférieure aux recouvrements de A par des boules ouvertes de rayon $\leq \delta$.

La fonction $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ est décroissante et on note $\mathcal{H}^s(A)$ la limite (*i.e.* le supremum) de $H^s_\delta(A)$ lorsque δ tend vers 0. La *dimension de Hausdorff* de A est le nombre

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \inf\{s > 0 \ ; \ \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s > 0 \ ; \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Lemme 1.1.2.3. *Soit μ une mesure sur l'espace métrique X pour laquelle les boules sont de mesure finie. La dimension inférieure de μ, $\underline{\dim}(\mu)$, est la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des parties boréliennes de mesure > 0 pour μ. Autrement dit,*

$$\underline{\dim}(\mu) = \inf\{\dim_{\mathrm{H}}(A) \ ; \ \mu(A) > 0\}$$

Démonstration. Voir (Ledrappier, 2013), proposition 2.5. Ledrappier démontre ce lemme pour une mesure finie mais son argument demeure pour notre lemme avec des modifications de détail. □

Pour énoncer le lemme suivant, définissons la propriété de Besicovitch, qui nous servira encore au chapitre 2.

Définition 1.1.2.4. *On dit qu'un espace métrique X possède la propriété de Besicovitch s'il existe un entier N tel que, pour toute partie* bornée *A de X et toute application $r : A \to]0, \infty[$, on puisse trouver une partie $A' \subset A$ de façon que les boules fermées $B(x, r(x))$ recouvrent A lorsque x parcourt A', et que tout point de X appartienne à au plus N boules fermées $B(x, r(x))$ ($x \in A'$) ; autrement dit,*

$$\mathbf{1}_A \leq \sum_{x \in A'} \mathbf{1}_{B(x,r(x))} \leq N.$$

Le cas échéant, le plus petit entier N pour lequel ceci soit vrai est appelé constante de Besicovitch de X.

Lemme 1.1.2.5. *Soit X un espace métrique possédant la propriété de Besicovitch. Il existe une constante M, ne dépendant que de la constante de Besicovitch de X, telle que pour toute partie bornée A de X et toute application $r : A \to]0, \infty[$, on puisse trouver des parties $A_1, \ldots, A_M \subset A$ pour lesquelles*

1. *les boules fermées $B(x, r(x))$, $x \in A_i$ soiente deux-à-deux disjointes lorsque i est fixé, $1 \leq i \leq M$;*
2. *les boules $B(x, r(x))$ recouvrent A lorsque x parcourt $A_1 \cup \ldots \cup A_M$.*

Démonstration. Voir (Mattila, 1995), théorème 2.7 (2). □

Lemme 1.1.2.6. *Soit X un espace métrique possédant la propriété de Besicovitch. Soient μ, λ deux mesures σ-finies sur X pour lesquelles les boules sont de mesure finie. On suppose que μ est* absolument continue *par rapport à λ. Alors, pour μ-presque tout x, on a*

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \underline{\dim}(\lambda, x)$$

et de même pour la dimension supérieure. Si λ est de dimension exacte δ, il en est de même de μ.

Démonstration. Puisque μ, λ sont σ-finies et que μ est absolument continue par rapport à λ, nous pouvons introduire la dérivée de Radon-Nikodym f de μ par rapport à λ, *i.e.* $\mu = f\lambda$; elle est localement μ-intégrable. Pour λ-presque tout x, on a

$$f(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mu(B(x, \rho))}{\lambda(B(x, \rho))}$$

((Mattila, 1995), théorème 2.12, énoncé pour des mesures de Radon sur l'espace euclidien, mais la démonstration vaut sans changement dans notre situation).

Pour λ-presque tout x tel que $f(x) > 0$ (c'est-à-dire, pour μ-presque tout x), on a donc

$$\liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \mu(B(x, \rho))}{\log \rho} = \liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \lambda(B(x, \rho))}{\log \rho}$$

et de même pour les limites supérieures, ce qui démontre la première assertion du lemme. La deuxième s'en déduit aussitôt. □

Le problème qui nous occupera tout au long de ce travail est le suivant : étant donnée une mesure de probabilité μ sur un espace métrique μ et une «projection» π, c'est-à-dire une application lipschitzienne $X \to Y$, comparer $\underline{\dim}(\mu)$ et $\underline{\dim}(\pi\mu)$. En toute généralité, on a le résultat suivant.

Lemme 1.1.2.7. *Soient X, Y deux espaces métriques, $\pi : X \to Y$ une application lipschitzienne et μ une mesure de probabilité sur X. On a*

$$\underline{\dim}(\mu, x) \geq \underline{\dim}(\pi\mu, \pi x)$$

pour tout $x \in X$, et

$$\underline{\dim}(\mu) \geq \underline{\dim}(\pi\mu).$$

Il en va de même pour les dimensions supérieures.

Démonstration. Résulte aussitôt des définitions. □

Avant de clore ce paragraphe, donnons encore une définition.

Définition 1.1.2.8. *Soient X un ensemble et d, d' deux distances sur X. On suppose que d et d' induisent la même topologie sur X. On dit que d et d' sont bilipschitz équivalentes dans un ouvert U de X s'il existe une constante $C > 1$ (dépendant de U) telle que pour tous $x, y \in U$ on ait*

$$\frac{1}{C} d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C d(x, y).$$

On dit que d et d' sont localement bilipschitz équivalentes si X peut être recouvert par des ouverts où d et d' sont bilipschitz équivalentes.

1.1.3 Espaces doublants

Pour mettre au point une théorie non-triviale et suffisamment riche de la dimension des mesures (ou des ensembles), on est rapidement conduit à faire des hypothèses sur les objets étudiés. Il y a, à un niveau élémentaire, deux hypothèses «standards». On peut supposer que l'espace métrique où l'on se place possède la propriété de Besicovitch, ce qui permet notamment d'utiliser toute la théorie de la différentiation des mesures.

Ou bien on peut ne pas vouloir faire d'hypothèse aussi forte sur l'espace, et on étudiera des mesures possédant de «bonnes» propriétés, par exemple les mesures *doublantes*. On récupère à nouveau tout l'attirail des théorèmes classiques, mais cette fois en se servant du lemme de recouvrement de Vitali (qui vaut dans un espace métrique quelconque).

Or notre volonté ici est bien de disposer de résultats aussi généraux que possible puisque nous voulons les utiliser pour la théorie générale de l'entropie le long des opérations de groupe et qu'il serait désagréable d'avoir à se limiter à certains groupes particuliers, possédant la propriété de Besicovitch, ou à certaines mesures particulières, dont les conditionnelles le long de l'opération soient doublantes.

C'est pourquoi nous introduisons ici les espaces métriques doublants et reprenons les résultats de base de (Käenmäki *et al.*, 2010) sur ces espaces. A titre d'exemple, pour justifier notre démarche, rappelons que le groupe de Heisenberg, muni de la distance de Korányi ou de Carnot-Carathéodory, ne jouit pas de la propriété de Besicovitch (voir (Korányi et Reimann, 1995), page 17, et (Rigot, 2004)).

Il est vrai que le groupe de Heisenberg admet une distance homogène (*i.e.* pour laquelle les «homothéties de Heisenberg» sont des similitudes), bilipschitz-équivalentes aux distances précédentes, et pour laquelle la propriété de Besicovitch est satisfaite (Le Donne et Rigot, 2014). Pour le cas de l'espace de Heisenberg, on pourrait reproduire la théorie classique à moindre coût.

Signalons cependant que ce théorème de Mme Rigot et M. Le Donne ne se généralise pas tel quel aux groupes de Carnot de rang supérieur ; plus précisément, la construction de (*loc. cit.*), consistant à produire une distance homogène dont la boule de rayon 1 soit «ronde», ne donne pas lieu, dans les groupes de Carnot de rang supérieur, à une distance possédant la propriété de Besicovitch (Le Donne et Rigot, 2015).

Cela étant dit, je considère que la théorie élémentaire des espaces doublants est suffisamment simple et adaptée aux questions qui nous intéressent pour justifier l'exposé qui suit.

Les résultats principaux de ce paragraphe sont la proposition 1.1.3.15 et son corollaire ; ils nous serviront au chapitre 2.

Définition 1.1.3.1. *Un espace métrique X est* doublant *s'il existe une constante N telle que pour tout rayon $R > 0$, toute boule fermée de rayon R soit recouverte par N boules fermées de rayon $R/2$.*

Le plus petit N tel que cette propriété soit satisfaite est appelé constante de doublement *de X.*

Notons que si X est doublant, de constante de doublement N, et si $\lambda \in]0,1[$, toute boule de rayon $R > 0$ est recouverte par N^k boules de rayon λR, où k est le plus petit entier tel que $2^{-k} \leq \lambda$.

Décrivons maintenant les espaces doublants qui nous intéresseront dans la suite (au chapitre 2).

Définition 1.1.3.2. *Nous dirons qu'un groupe métrique est* doublant *s'il est localement compact, si sa distance est invariante à droite, et s'il possède un automorphisme α_G qui est une similitude de rapport $\alpha < 1$.*

Nous noterons simplement α l'automorphisme α_G. On a donc, pour tous $g, h \in G$, $d(\alpha g, \alpha h) = \alpha d(g, h)$, et $\alpha \in]0,1[$.

Lemme 1.1.3.3. *Dans un groupe métrique doublant G, toute boule fermée est compacte.*

Démonstration. Soit V un voisinage relativement compact de e dans G. Il contient une boule fermée $B(e, r)$, $r > 0$. Cette boule est donc compacte. Par conséquent, l'automorphisme α étant continu, toute boule $B(e, \alpha^k r)$ (k entier relatif), est compacte. Comme $\alpha^k r$ peut être rendu arbitrairement grand, et que la distance de G est invariante à droite, on en déduit aussitôt que toute boule fermée est compacte. □

Un espace métrique où toute boule fermée est compacte est parfois dit *propre*.

Lemme 1.1.3.4. *Soit G un groupe doublant et λ un réel positif < 1. Il existe une constante N ne dépendant que de G et λ telle que, pour tout rayon $R > 0$, la boule $B(e, R)$ soit recouverte par au plus N translatées à gauche de la boule $B(e, \lambda R)$.*

Démonstration. Puisque $B(e,1)$ est compacte et que $B(e,\alpha\lambda)$ est d'intérieur non vide, on peut trouver des éléments $g_1,\dots,g_N \in G$ tels que les $g_iB(e,\alpha\lambda)$ recouvrent $B(e,1)$.

Soit $R>0$ et soit k l'entier relatif tel que $\alpha^{k+1} \leq R < \alpha^k$. On a $B(e,R) \subset B(e,\alpha^k)$, donc $\alpha^{-k}B(e,R) \subset B(e,1)$, de sorte que les $g_iB(e,\alpha\lambda)$ $(1 \leq i \leq N)$ recouvrent $\alpha^{-k}B(e,R)$. Puisque α est un automorphisme de groupe, on en déduit que $B(e,R)$ peut être recouvert par N translatées à gauche de $B(e,\alpha^{k+1}\lambda)$. Or $B(e,\alpha^{k+1}\lambda)$ est contenue dans $B(e,\lambda)$ puisque $\alpha^{k+1} \leq R$. D'où le lemme. □

Corollaire 1.1.3.5. *Tout groupe métrique doublant est, en tant qu'espace métrique, doublant.*

Exemples 1.1.3.6. *L'espace euclidien* $\mathbf{R}^n$*, l'espace de Heisenberg (muni d'une distance* homogène*, c'est-à-dire une distance invariante à droite, pour laquelle les homothéties de Heisenberg sont des similitudes) sont des groupes doublants.*

Il en va de même, plus généralement, des groupes de Carnot, que je m'abstiens de définir car nous n'aurons pas à les considérer.

Nous revenons à la théorie générale des espaces doublants, étant entendu que nous ne l'appliquerons qu'aux groupes doublants définis ci-dessus ; mais l'exposé qui suit ne serait pas considérablement simplifié si nous nous restreignions aux groupes doublants.

Remarque 1.1.3.7. *L'existence d'une constante de doublement est une propriété de «finitude de la dimension». Plus précisément, la définition que nous donnons des espaces doublants revient à dire qu'un espace est doublant si sa* dimension de Assouad *est finie (voir, par exemple, (Luukkainen, 1998)). En particulier, on voit aussitôt que cette propriété est invariante par transformation bilipschitz, contrairement à la propriété de Besicovitch.*

Lemme 1.1.3.8. *Tout espace doublant est séparable.*

Démonstration. Il résulte de la définition que pour tout i, un espace métrique doublant peut être recouvert par une suite dénombrable de rayon 2^{-i}. Le lemme s'en déduit. □

Une partie A de X dans laquelle deux points distincts quelconques sont à distance $> \delta$ l'un de l'autre est dite *δ-séparée.*

Lemme 1.1.3.9 ((Käenmäki *et al.*, 2010) lemme 2.1)**.** *, Soit X un espace métrique doublant de constante de doublement N. Le cardinal de toute partie δ-séparée bornée $A \subset X$ est majoré par*

$$\left(\frac{2\mathrm{diam}(A)}{\delta}\right)^{\log_2 N}.$$

Démonstration. Puisque A est bornée, elle est contenue dans une boule fermée de rayon $\mathrm{diam}(A)$. Si k est le plus petit entier tel que $2^{-k} \leq \dfrac{\delta}{2\mathrm{diam}(A)}$, on peut donc recouvrir A par N^k boules de rayon $\delta/2$. Puisque A est δ-séparée, deux points de A ne peuvent appartenir à une même boule de rayon $\delta/2$; par suite, A contient au plus N^k éléments. □

Proposition 1.1.3.10. *Soit X un espace métrique doublant de constante de doublement N, et soit μ une mesure borélienne pour laquelle toute boule de X est de mesure finie. La dimension (locale) inférieure de μ est presque partout $\leq \log_2 N$.*

Démonstration. Soit D un réel $> \log_2 N$ et supposons donnés un réel $\rho_0 > 0$ et une partie $E \subset X$ telle que pour tout $x \in E$ et tout $\rho < \rho_0$ on ait

$$\mu(B(x,\rho)) \leq \rho^D.$$

Nous allons voir que E est négligeable, on peut pour cela le supposer borné. Soit $\delta < \rho_0/2$ et donnons-nous une partie $\delta/2$-séparée maximale A contenue dans E. D'une part, les $B(x,\delta)$ recouvrent E lorsque x parcourt A ; et d'autre part, A contient au plus

$$\left(\frac{4\mathrm{diam}(E)}{\delta}\right)^{\log_2 N}$$

éléments. On a donc

$$\mu(E) \leq \mathrm{Card}(A)\delta^D \leq C\delta^{D-\log_2 N}$$

où C est une constante > 0 indépendante de δ. En faisant tendre δ vers 0, on voit que $\mu(E) = 0$. □

Remarque 1.1.3.11. *L'énoncé plus fort obtenu en remplaçant la dimension inférieure par la dimension supérieure est vrai aussi ((Käenmäki* et al.*, 2010), lemme 2.2) mais nous n'en aurons pas besoin.*

L'énoncé suivant est une forme faible du lemme 1.1.2.5.

Lemme 1.1.3.12 ((Käenmäki *et al.*, 2010), lemme 2.1)**.** *Soit X un espace doublant, de constante de doublement N. Soient δ un réel > 0, et A une partie de X telle que les boules fermées $B(x, \frac{\delta}{2})$ soient deux à deux disjointes lorsque x parcourt A. On peut écrire A comme une réunion $A_1 \cup \ldots A_M$, où chaque A_i est telle que les boules fermées $B(x,\delta)$ soient deux à deux disjointes lorsque x parcourt A_i, et M ne dépend que de N.*

Démonstration. Définissons une suite $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ de parties de A comme suit : pour $i \geq 0$, A_{i+1} est une partie de $A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_i)$, telle que les boules fermées $B(x,\delta)$ soient deux à deux disjointes lorsque x parcourt A_{i+1}, et est maximale pour cette propriété. La construction s'arrête au temps n si $A_1 \cup \ldots \cup A_n = A$. Nous allons voir que la construction s'arrête nécessairement après un temps fini.

Supposons que $A_1, \ldots, A_M$ aient été construites (et soient toutes non vides). Soit x un point de $A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{M-1})$. Par maximalité de $A_1, \ldots, A_{M-1}$, on peut trouver des points $x_i \in A_i$ $(1 \leq i \leq M-1)$ tels que les boules fermées $B(x,\delta)$ et $B(x_i,\delta)$ se rencontrent. Chaque boule fermée $B(x_i, \frac{\delta}{2})$ est donc contenue dans $B(x, 2\delta)$. On sait d'autre part que $B(x, 2\delta)$ peut s'écrire comme la réunion d'au plus N^3 boules fermées $B(y_j, \frac{\delta}{4})$. A tout x_i, associons un indice j tel que $x_i \in B(y_j, \frac{\delta}{4})$, ce qui entraîne que la boule $B(y_j, \frac{\delta}{4})$ est contenue dans $B(x_i, \frac{\delta}{2})$. Puisque les $B(x_i, \frac{\delta}{2})$ sont deux à deux disjointes, cette application $i \mapsto j$ est injective, et on en déduit que $M - 1 \leq N^3$.

□

Dans ce lemme, le rayon des boules est fixé, contrairement à ce que permet la propriété de Besicovitch. Le lemme 1.1.3.12 suffit néanmoins à démontrer une version faible du théorème de densité de Lebesgue.

Lemme 1.1.3.13 ((Käenmäki *et al.*, 2010), proposition A.2)**.** *Soient X un espace doublant, et μ une mesure borélienne finie. Soit A une partie μ-mesurable de X.*

Pour μ-presque tout $x \in A$, on a

$$\limsup_{\rho \to 0} \frac{\mu(A \cap B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))} = 1.$$

Noter qu'à la différence du théorème de densité de Lebesgue, le membre de gauche est ici une limite supérieure et non une limite.

Démonstration. Supposons donnés des réels fixés $\rho_0 > 0$, $t \in]0,1[$ et une partie $B \subset A$ tels que pour tout $x \in B$ et pour tout $\rho < \rho_0$ on ait

$$\frac{\mu(A \cap B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))} \leq t.$$

Nous allons montrer que B est négligeable. Fixons $\varepsilon > 0$ et donnons-nous un voisinage U de B tel que $\mu(U) < (1+\varepsilon)\mu(B)$, comme il est loisible puisque μ est régulière (comme l'est toute mesure borélienne finie sur un espace métrique séparable). Il existe $\delta < \rho_0$ tel que $d(B, \complement U) > \delta$.

Soit maintenant B' une partie de B telle que les boules fermées $B(x,\delta/2)$ soient deux à deux disjointes lorsque x parcourt B', et maximale pour cette propriété, de sorte que les $B(x,\delta)$ recouvrent B lorsque x parcourt B'. En vertu du lemme 1.1.3.12, on peut trouver dans B' une partie B'' telle que les boules $B(x,\delta)$ soient deux à deux disjointes lorsque x parcourt B'', et que

$$\mu\left(\bigcup_{x \in B''} B(x,\delta)\right) \geq \frac{1}{M}\mu(B)$$

où M est une constante qui ne dépend que de la constante de doublement de X.

Cela étant, on a

$$\mu(B) \leq \sum_{x \in B''} \mu(A \cap B(x,\delta)) + \mu\left(U \setminus \bigcup_{x \in B''} B(x,\delta)\right)$$

et la somme du membre de droite est majorée par $t \sum_{x \in B''} \mu(B(x,\delta))$ par définition de B. Puisque les $B(x,\delta)$ sont deux à deux disjointes ($x \in B''$), on en tire

$$\mu(B) \leq \mu(U) - (1-t)\mu\left(\bigcup_{x \in B''} B(x,\delta)\right)$$

et on obtient finalement, chaque $B(x,\delta)$ ($x \in B''$) étant contenue dans U,

$$\mu(B) \leq \left(1 + \varepsilon - \frac{1-t}{M}\right)\mu(B).$$

Cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$; puisque $t < 1$, on a donc nécessairement $\mu(B) = 0$. □

Remarque 1.1.3.14. *Signalons le résultat suivant ((Käenmäki* et al.*, 2010), théorème A.1) : il existe un espace métrique compact doublant Σ portant une mesure de probabilité borélienne μ et une partie compacte A de mesure positive tel que pour tout $x \in A$, on ait*

$$\liminf_{\rho \to 0} \frac{\mu(A \cap B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))} = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.1.3.15. *Soit X un espace métrique complet* doublant*, et $\pi : X \to Y$ une application lipschitzienne de X dans un espace métrique Y complet séparable. Soit λ une mesure de probabilité sur X, μ son image par π et*

$$\lambda = \int d\mu(y)\lambda_y$$

la désintégration de λ le long de π. On suppose qu'il existe une constante $\gamma \geq 0$ et une application mesurable $\delta : Y \to [0, \infty[$ telles que pour λ-presque tout x on ait

$$\underline{\dim}(\lambda_{\pi(x)}, x) \geq \gamma, \quad \underline{\dim}(\mu, \pi(x)) \geq \delta(\pi(x)).$$

Alors, pour λ-presque tout x, on a

$$\overline{\dim}(\lambda, x) \geq \gamma + \delta(\pi(x)).$$

Si, au lieu de supposer que X est doublant, on suppose qu'il est séparable et possède la propriété de Besicovitch (définition 1.1.2.4), on obtient la conclusion plus forte

$$\underline{\dim}(\lambda, x) \geq \gamma + \delta(\pi(x))$$

pour λ-presque tout x.

Notons que si X est doublant, il est séparable ; ceci justifie la possibilité de désintégrer λ le long de π.

Démonstration. Le cas où X possède la propriété de Besicovitch est traité dans (Ledrappier et Young, 1985) (lemme 11.3.1). Nous ne démontrons donc cette proposition que pour X doublant. Á vrai dire, nous ne faisons que reprendre l'argument de (*ibid.*) en invoquant le lemme 1.1.3.13 au lieu du théorème de densité usuel.

Supposons pour simplifier que π est 1-lipschitzienne. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut produire un borélien $A \subset X$ de mesure $\lambda(A) \geq 1 - \varepsilon$ et un réel $\rho_1 > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tout $\rho < \rho_1$, on ait

$$\lambda_{\pi(x)}(B(x,\rho)) \leq \rho^{\gamma - \varepsilon}.$$

Pour λ-presque tout x_0 dans A, il y a (lemme 1.1.3.13) des réels $\rho > 0$ arbitrairement petits pour lesquels

$$\lambda(A \cap B(x_0,\rho)) \geq \frac{1}{2}\lambda(B(x_0,\rho)).$$

Fixons un tel x_0. On a, si ρ est un réel tel que l'inégalité précédente soit satisfaite,

$$\lambda(B(x_0,\rho)) \leq 2\lambda(A \cap B(x_0,\rho)) = \int d\mu(y)\lambda_y(A \cap B(x_0,\rho)).$$

Supposons que y soit tel que $A \cap B(x_0,\rho) \cap \pi^{-1}(y)$ contienne un point x. On a donc $A \cap B(x_0,\rho) \subset B(x,2\rho)$, et si ρ est pris $< \frac{1}{2}\rho_1$, on aura $\lambda_y(A \cap B(x_0,\rho)) \leq (2\rho)^{\gamma-\varepsilon}$ puisque x appartient à A. En intégrant ceci, on obtient

$$\lambda(B(x_0,\rho)) \leq 2(2\rho)^{\gamma-\varepsilon}\mu(\pi(B(x_0,\rho))) \leq 2(2\rho)^{\gamma-\varepsilon}\mu(B(\pi(x_0),\rho))$$

où la deuxième inégalité vient de ce que $\pi(B(x,\rho)) \subset B(\pi(x),\rho)$ (car π est supposée 1-lipschitzienne). On peut trouver des $\rho > 0$ arbitrairement petits pour lesquels cette majoration de $\lambda(B(x_0,\rho))$ ait lieu. Par suite, on a

$$\limsup \frac{\log(\lambda(B(x_0,\rho)))}{\log \rho} \geq \gamma - \varepsilon + \underline{\dim}(\mu, \pi(x)).$$

Il est maintenant facile de conclure. □

Corollaire 1.1.3.16. *Soit X un espace métrique complet* doublant*, Y un espace borélien standard, et $\pi : X \to Y$ une application borélienne. Soit λ une mesure de probabilité sur X, μ son image par π et*

$$\lambda = \int d\mu(y)\lambda_y$$

la désintégration de λ le long de π. On suppose qu'il existe une constante $\gamma \geq 0$ telle que pour λ-presque tout x on ait

$$\underline{\dim}(\lambda_{\pi(x)}, x) \geq \gamma.$$

Alors, pour λ-presque tout x, on a

$$\overline{\dim}(\lambda, x) \geq \gamma.$$

Démonstration. Il suffit de reprendre sans changement la démonstration de la proposition précédente jusqu'à l'avant-dernière équation, où l'on majore maintenant $\mu(\pi(B(x_0,\rho)))$ par 1 et la conclusion s'ensuit. □

Lorsque X est un espace produit et que π est la projection sur le premier facteur, on peut démontrer une inégalité dans l'autre direction. Nous ne nous en servirons pas.

Proposition 1.1.3.17. *Soient X, Y deux espaces métriques et soit λ une mesure de probabilité sur $X \times Y$. Soit π la projection $X \times Y \to X$ et μ l'image de λ par π. Notons $\overline{\dim}_P(Y)$ la dimension de* packing *supérieure de Y. On a*

$$\underline{\dim}(\mu) \geq \underline{\dim}(\lambda) - \overline{\dim}_P(Y).$$

Pour la dimension de *packing*, voir (Mattila, 1995) paragraphe 5.9.

Démonstration. Soit A une partie de X non négligeable pour μ. Le produit $A \times Y$ est non négligeable pour λ ; par suite, on a $\underline{\dim}(\lambda) \leq \mathrm{di}_{\mathrm{H}}(A \times Y)$. D'autre part, on a l'inégalité (*op. cit.*, théorème 8.10) $\dim_{\mathrm{H}}(A \times Y) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A) + \overline{\dim}_P(Y)$. Par conséquent, on a la minoration

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \geq \dim_{\mathrm{H}}(A \times Y) - \overline{\dim}_P(Y) \geq \underline{\dim}(\lambda) - \overline{\dim}_P(Y).$$

En prenant l'infimum du membre de gauche lorsque A parcourt les parties non négligeables pour μ, on obtient

$$\underline{\dim}(\mu) \geq \underline{\dim}(\lambda) - \overline{\dim}_P(Y).$$

□

Remarques 1.1.3.18. 1. *Mattila énonce l'inégalité* $\dim_{\mathrm{H}}(A \times B) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A) + \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(B)$ *pour des parties de l'espace euclidien, mais en réalité cette hypothèse n'est utile que pour l'inégalité «réciproque»* $\dim_{\mathrm{H}}(A) + \dim_{\mathrm{H}}(B) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A \times B)$*, laquelle repose sur le lemme de Frostman (alors que celle dont nous nous servons est élémentaire).*

2. *On ne peut pas remplacer la dimension de* packing *supérieure par la dimension de Hausdorff. En effet, soient* A, B *deux parties de la droite réelle, de dimension de Hausdorff nulle, et telles que* $A \times B$ *soit de dimension de Hausdorff égale à* 1 *; de telles parties sont construites dans (Falconer, 2014), exemple 7.8.*

   Soit λ *une mesure de probabilité sur* $A \times B$ *telle que* $\underline{\dim}(\lambda) > 0$ *; l'existence de* λ *est une conséquence du lemme de Frostman, (Mattila, 1995), théorème 8.8. Si* μ *est l'image de* λ *par la projection de* $A \times B$ *sur* A*, on a* $\underline{\dim}(\mu) = 0$*, et* $\underline{\dim}(\lambda) - \dim_{\mathrm{H}}(B) = 1$*, donc on n'a pas dans ce cas*

$$\underline{\dim}(\mu) \geq \underline{\dim}(\lambda) - \dim_{\mathrm{H}}(B).$$

1.2 Dimension des projections

Nous nous plaçons dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) et nous intéressons au problème suivant : étant donnée une mesure de Radon μ, étudier la dimension des projections de μ sur les m-plans de $\mathbf{R}^n$.

Dans un premier temps, nous énonçons le théorème classique de Marstrand sur la dimension presque sûre des projections des mesures de Radon dans l'espace euclidien. Le théorème original (Marstrand, 1954) porte sur les ensembles mais nous serons plutôt intéressé à étudier la dimension des mesures. Les résultats principaux de cette sous-section sont le corollaire 1.2.2.3 et la proposition 1.2.2.6. L'emploi de méthodes relevant de la théorie du potentiel pour démontrer le théorème de J. M. Marstrand remonte à R. Kaufman.

Le théorème de Marstrand donne une information presque sûre. En général, il ne permet pas de dire quoi que ce soit sur une projection fixée. Ce second problème est, de loin, beaucoup plus délicat. Il a fait l'objet de beaucoup de travaux dans des cas plus ou moins particuliers. Lorsque la mesure considérée est, en un certain sens, «fractale», on peut s'attendre à ce que les conclusions du théorème de Marstrand demeurent, sauf éventuellement pour certains choix exceptionnels de m-plans.

Donnons un exemple d'une telle situation. Soient μ, ν des mesures de probabilité sur $[0,1]$ invariantes par $\times 2$ et $\times 3$ respectivement. Alors pour toute projection $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ qui n'est pas la projection sur la première ou la deuxième coordonnée, on a

$$\underline{\dim}(\pi(\mu \otimes \nu)) = \inf\{1, \underline{\dim}(\mu \otimes \nu)\}.$$

Ce théorème ((Hochman et Shmerkin, 2012), théorème 1.3) a été établi par M. Hochman et P. Shmerkin en lien avec une conjecture de Furstenberg. Pour ce faire, ces auteurs ont développé et amélioré une théorie due à Furstenberg lui-même (Furstenberg, 2008). Ces travaux ont encore été développés par M. Hochman (Hochman, 2010). Le théorème que nous énonçons en 1.2.3 provient du dernier travail cité.

Les résultats de cette section nous serviront au chapitre 3.

1.2.1 Énergie d'une mesure de Radon

Définition 1.2.1.1. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbf{R}^n$ et s un nombre réel. La s-énergie de μ est le nombre*

$$I_s(\mu) = \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

Lemme 1.2.1.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$ et s un réel > 0 tel que $\mu(B(x,\rho)) \leq \rho^s$ pour μ-presque tout x et tout $\rho \leq \rho_0$, où ρ_0 est une constante > 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, la $(s-\varepsilon)$-énergie de μ est finie.*

Démonstration. Calcul immédiat. □

Le lien entre l'énergie d'une mesure et sa dimension inférieure est précisé par le lemme suivant.

Lemme 1.2.1.3. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbf{R}^n$ et s un réel > 0. On suppose qu'il existe une suite (f_k) d'applications mesurables $\mathbf{R}^n \to [0,1]$, qui tend en croissant vers 1 μ-presque partout, et telle que la s-énergie de $f_k\mu$ soit finie pour tout k. Alors $\underline{\dim}(\mu) \geq s$.*

Démonstration. Voir (Ledrappier et Lindenstrauss, 2003), proposition 2.2. □

1.2.2 Le théorème de Marstrand

Dans le contexte de l'étude de la dimension des mesures projetées, on distingue deux cas. Un cas «sous-critique», où la mesure considérée est de dimension moindre que l'espace sur lequel on la projette, et la dimension est presque sûrement préservée. Un cas «sur-critique», où la mesure considérée est de dimension strictement plus grande que l'espace sur lequel on la projette et alors les projections sont presque sûrement absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et en particulier leur dimension est celle de cet espace.

Nous commençons par préciser le sens de la phrase «pour presque tout m-plan de $\mathbf{R}^n$».

1.2.2.1 La grassmannienne des m-plans

La grassmannienne des m-plans de $\mathbf{R}^n$ est l'espace $G(m,n)$ dont les points sont les sous-espaces vectoriels de dimension m dans $\mathbf{R}^n$. C'est une partie de l'espace projectif associé à la m-ème puissance extérieure de $\mathbf{R}^n$. Elle possède donc une topologie naturelle, pour laquelle elle est compacte, voir par exemple (Bourbaki, 1947), chapitre VI, p. 20, propositions 7 et 8.

L'opération naturelle de $O(n)$ sur $G(m,n)$ est continue et transitive. La mesure de probabilité qui s'en déduit sur $G(m,n)$ sera appelée *mesure de Haar*. Elle est par définition $O(n)$-invariante. Toute assertion «mesurée» les m-plans de $\mathbf{R}^n$ sera relative à cette mesure. Nous la noterons γ ou $\gamma_{n,m}$ s'il y a lieu.

Pour tout m-plan V, nous noterons π_V la projection orthogonale sur V.

1.2.2.2 Le cas sous-critique

Lemme 1.2.2.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$. Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$ et soit s un réel, $s < m$. Il existe une constante (dépendant de s, n, m) C telle que*

$$\int d\gamma_{n,m}(V)\ I_s(\pi_V \mu) \leq C I_s(\mu).$$

Démonstration. Voir (Mattila, 1995), démonstration du théorème 9.3. □

Proposition 1.2.2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$. Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. On suppose que $\underline{\dim}(\mu) \leq m$. Alors pour presque tout m-plan V, on a*

$$\underline{\dim}(\pi_V \mu) = \underline{\dim}(\mu).$$

Démonstration. Il est immédiat que $\underline{\dim}(\pi_V \mu) \leq \underline{\dim}(\mu)$ quel que soit V car π_V est une application lipschitzienne. Pour l'inégalité réciproque, on peut supposer que $\underline{\dim}(\mu) > 0$.

Fixons un réel s, $0 < s < \underline{\dim}(\mu)$. Pour tout entier $k \geq 1$, soit E_k l'ensemble des x pour lesquels on a $\mu(B(x,\rho)) \leq \rho^s$ dès que $\rho \leq 1/k$. Soit $\varepsilon > 0$. La $(s-\varepsilon)$-énergie de $\mu|E_k$ est finie. Par conséquent, pour presque tout m-plan V, la $(s-\varepsilon)$-énergie de $\pi_V(\mu|E_k)$ est finie aussi (lemme 1.2.2.1).

Soit $f_{k,V}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\pi_V(\mu|E_k)$ par rapport à $\pi_V\mu$. La suite (E_k) est croissante et sa réunion est de μ-mesure totale. On en déduit que pour tout V, la suite $f_{k,V}$ converge $\pi_V\mu$-presque partout en croissant vers 1. D'après le lemme 1.2.1.3, on a donc $\underline{\dim}(\pi_V\mu) \geq s - \varepsilon$ pour presque tout V, quel que soit $\varepsilon > 0$. D'où la proposition. □

Corollaire 1.2.2.3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$, de dimension exacte $\delta \leq m$. Alors pour presque tout m-plan V, $\pi_V\mu$ est de dimension exacte δ.*

Démonstration. Pour presque tout m-plan V et $\pi_V\mu$-presque tout v, on a $\underline{\dim}(\pi_V\mu, v) \geq \delta$ d'après la proposition 1.2.2.2 et $\overline{\dim}(\pi_V\mu, v) \leq \delta$ puisque π_V est lipschitzienne et que $\overline{\dim}(\mu, x) \leq \delta$ pour μ-presque tout x.

□

1.2.2.3 Le cas sur-critique

Lemme 1.2.2.4. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$ et m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. On suppose que la m-énergie de μ est finie. Alors pour presque tout m-plan V, $\pi_V\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de V.*

Démonstration. Voir (Mattila, 1995), théorème 9.7. □

Lemme 1.2.2.5. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$ et m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. Soit s un réel, $m < s < n$. On suppose que la s-énergie de μ est finie. Pour tout m-plan V, désintégrons μ au-dessus de $\pi_V\mu$:*

$$\mu = \int d(\pi_V\mu)(v)\ \mu_{V,v}.$$

Il existe une constante C ne dépend que de n, m et s telle que

$$\int d(\pi_V\mu)(v) d\gamma_{n,m}(V)\ I_{s-m}(\mu_{V,v}) \leq C I_s(\mu).$$

Démonstration. Voir (Mattila, 1995), théorème 10.7. □

Proposition 1.2.2.6. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$ et soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. Nous supposons que $\underline{\dim}(\mu) > m$.*

Pour presque tout m-plan V, $\pi_V\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de V, et si

$$\mu = \int d(\pi_V\mu)(v)\ \mu_{v,V}$$

est la désintégration de μ le long de π_V, on a $\underline{\dim}(\mu_{v,V}) \geq \underline{\dim}(\mu) - m$ pour $\pi_V\mu$-presque tout v.

Démonstration. Soit s un réel, $m < s < \underline{\dim}(\mu)$ et soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $m < s - \varepsilon$. Pour tout $k \geq 1$, soit E_k l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $\mu(B(x,\rho)) \leq \rho^s$ dès que $\rho \leq 1/k$. Les E_k forment une suite croissante de parties mesurables dont la réunion est de μ-mesure totale. La $(s-\varepsilon)$-énergie de $\mu|E_k$ est finie. Nous en déduisons deux faits.

Premièrement, pour presque tout m-plan V, la projection $\pi_V(\mu|E_k)$ s'écrit $f_{k,V}\lambda_V$, où λ_V est la mesure de Lebesgue sur V (ref). Fixons un tel m-plan V.

La suite $(f_{k,V})$ est croissante λ_V-presque sûrement. Sa limite f_V est finie λ_V-presque sûrement car

$$\mu(\pi_V^{-1}(A)) = \int_A d\lambda_V\ f_V$$

pour tout borélien $A \subset V$ par convergence monotone. La mesure $\pi_V\mu$ est donc elle-même absolument continue et on a $\pi_V\mu = f_V\lambda_V$.

Désintégrons $\mu|E_k$ au-dessus de $\pi_V(\mu|E_k) = f_{k,V}\lambda_V$:

$$\mu|E_k = \int d\lambda_V(v)\ f_{k,V}(v)\mu_{v,k,V}.$$

On a d'autre part

$$\mu|E_k = \int d\lambda_V(v)\ f_V(v)(\mu_{v,V}|E_k)$$

de sorte que $\mu_{v,k,V}$ est proportionnelle à $\mu_{v,V}|E_k$ pour $f_V\lambda_V$-presque tout v et tout k assez grand.

D'après le lemme, la $(s-\varepsilon-m)$-énergie de $\mu_{v,k,V}$ est finie pour presque tout V et $f_{k,V}\lambda_V$-presque tout v. La réunion des E_k étant presque sûrement de mesure totale pour $\mu_{v,V}$, nous en déduisons que $\underline{\dim}(\mu_{v,V}) \geq s-\varepsilon-m$ pour presque tout V et $f_V\lambda_V$-presque tout v (ref).

D'où la proposition, car ε est arbitrairement petit. □

1.2.3 Projections de mesures fractales

Nous allons énoncer un théorème (théorème 1.2.3.3) dû à M. Hochman portant sur la dimension des projections de mesures «autosimilaires» dans l'espace euclidien. Nous devons en passer par un certain nombre de définitions et fixer des notations.

1.2.3.1 Notations

Nous nous plaçons dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Le cube unité $[-1,1]^n$ est noté B_1. Les travaux de MM. Furstenberg, Hochman et Shmerkin ont pour objet des mesures qui sont en un certain sens autosimilaires. La connaissance d'une telle mesure revient à sa connaissance au voisinage d'un point générique. Il est donc possible, et commode, de tronquer les mesures étudiées en les conditionnant au voisinage de 0. La forme du voisinage n'est pas de première importance, et c'est pour des raisons techniques que ces auteurs ont intérêt à considérer un voisinage cubique de l'origine (ce qui simplifie des calculs faisant intervenir des entropies relatives à des partitions dyadiques).

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon (non nulles). Pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'homothétie de rapport e^t de $\mathbf{R}^n$, que nous noterons S_t («S» pour «*scale*»), induit une transformation de $\mathcal{M}$ appliquant μ sur la mesure image $S_t\mu$.

Si μ est une mesure de Radon pour laquelle B_1 n'est pas négligeable, nous noterons μ^* la mesure proportionnelle à μ pour laquelle B_1 est de mesure 1, c'est-à-dire

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu(B_1)}.$$

De même, nous noterons $\mu^\square$ la mesure de probabilité obtenue en conditionnant μ à B_1, lorsque cela a un sens.

L'ensemble des mesures de Radon pour lesquelles B_1 est de mesure 1 sera noté $\mathcal{M}^*$. L'ensemble des mesures de probabilité qui sont concentrées sur B_1 sera noté $\mathcal{M}^\square$.

Si μ est une mesure dont le support contient l'origine de $\mathbf{R}^n$, toutes les transformées $S_t\mu$ chargent B_1 et on peut donc poser $S_t^*\mu = (S_t\mu)^*$ et $S_t^\square\mu = (S_t\mu)^\square$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la translation appliquant x sur 0 sera notée T_x ; si μ est une mesure de Radon non nulle, on posera $T_x^*\mu = (T_x\mu)^*$.

Nous garderons la lettre μ pour des mesures de Radon sur $\mathbf{R}^n$ et la lettre P pour des mesures de probabilité sur des espaces de mesures et nous parlerons

alors de *distribution*. Par exemple, si $\mu \in \mathcal{M}$, la mesure de Dirac en μ, δ_μ, est une distribution sur $\mathcal{M}$.

1.2.3.2 Distributions fractales

Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}^*$ possédant les propriétés suivantes :

1. pour tout voisinage ouvert relativement compact U de l'origine, la mesure

$$\int dP(\mu) \int_U \delta_{T_x^* \mu} \, d\mu(x)$$

   sur $\mathcal{M}^*$ est équivalente à P (on dit alors que P est *quasi-Palm*) ;

2. P est S^*-invariante, i.e. l'image de P par S_t^* est égale à P pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Nous dirons que P est une *distribution fractale*. Si P est ergodique pour le flot $(S_t^*)_t$, nous dirons que P est une *distribution fractale ergodique*.

Notons que si P est une distribution quasi-Palm, le support de μ contient l'origine pour P-presque tout μ. Si P est une distribution fractale, on peut donc considérer son image $P^\square$ par l'application $\mu \mapsto \mu^\square$, c'est une distribution sur $\mathcal{M}^\square$.

Une distribution sur $\mathcal{M}^\square$ de la forme $P^\square$ où P est une distribution fractale ergodique sera appelée *distribution ergodique restreinte*. Ceci est justifié par le lemme suivant.

Lemme 1.2.3.1. *Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}$ dont le support contient l'origine. L'application $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}^\square$ appliquant μ sur $\mu^\square$ entrelace les opérations des semi-flots $(S_t^*)_{t\geq 0}$ et $(S_t^\square)_{t\geq 0}$, et induit une bijection $P \mapsto P^\square$ des distributions $(S_t^*)_{t\geq 0}$-invariantes de $\mathcal{M}^*$ sur les distributions $(S_t^\square)_{t\geq 0}$-invariantes de $\mathcal{M}^\square$.*

Démonstration. Voir (Hochman, 2010) lemme 3.1. □

Notons que l'opération $\mu \mapsto \mu^\square$ n'est pas inversible.

1.2.3.3 Mesures uniformément scalantes

Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbf{R}^n$ et x un point du support de μ. Nous noterons $\mu_{x,t}$ l'image de μ par la composée $S_t \circ T_x$ ($t \in \mathbf{R}$), et $\mu_{x,t}^\square$ la mesure $\mu_{x,t}$ conditionnée à B_1. Considérons la distribution sur $\mathcal{M}^\square$

$$\langle \mu \rangle_{x,T} = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{\mu_{x,t}^\square} \, dt.$$

S'il existe une distribution P sur $\mathcal{M}^\square$ telle que, pour μ-presque tout x, $\langle \mu \rangle_{x,T}$ converge vers P lorsque $T \to \infty$, nous dirons que μ est *uniformément scalante*, et qu'elle *engendre* P.

Le lien entre mesures uniformément scalantes et distributions fractales est précisé par le théorème suivant, dont nous n'aurons pas à nous servir car sa conclusion sera aisément vérifiée dans le cas d'espèce où nous voulons appliquer cette théorie.

Théorème 1.2.3.2. *Si μ est une mesure uniformément scalante engendrant une distribution P, P est une distribution ergodique restreinte. Réciproquement, si P est une distribution fractale ergodique, P-presque toute μ est une mesure uniformément scalante engendrant $P^{\square}$.*

Démonstration. Voir (Hochman, 2010), théorèmes 1.6 et 1.7. □

1.2.3.4 Dimension moyenne d'une projection

Soit P une distribution sur $\mathcal{M}^{\square}$. Soit π une application linéaire surjective $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq m \leq n-1$. Notons

$$E_P(\pi) = \int dP(\mu)\ \underline{\dim}(\pi\mu).$$

Théorème 1.2.3.3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$, uniformément scalante, engendrant une distribution fractale* ergodique *restreinte P. Pour toute application linéaire surjective $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq m \leq n-1$, on a*

$$\underline{\dim}(\pi\mu) \geq E_P(\pi).$$

Démonstration. Voir (Hochman, 2010), théorème 1.23. □

L'intérêt de ce théorème tient à ce qu'il porte sur une projection fixée, et qu'il permet de déduire une propriété certaine (une borne inférieure pour la dimension de $\pi\mu$) d'une propriété «en moyenne».

Chapitre 2

Conditionnelles et entropie le long d'une opération de groupe

L'objet de ce chapitre est de présenter en détail la théorie des conditionnelles d'une mesure le long d'une opération de groupe, et de l'entropie associée en présence d'un automorphisme relativement auquel le groupe opérant paramètre un «sous-feuilletage» du «feuilletage stable».

L'existence de ces conditionnelles, et les faits essentiels de la théorie, sont «bien connus» de tous les spécialistes. Je ne sache pas, pour autant, que ces résultats aient fait l'objet d'un exposé élémentaire, systématique et circonstancié. Certes, il y a (Lindenstrauss, 2006), mais je dois reconnaître que je ne suis pas capable de lire ce travail.

Le début de ce chapitre (*i.e.* jusqu'au paragraphe 2.1.1.3) est, pour l'essentiel, un développement du paragraphe 4.1 de (Benoist et Quint, 2011). Je dois remercier le Professeur Yves Benoist qui a bien voulu m'expliquer, en quelques diagrammes, les grandes lignes de sa construction.

2.1 Théorie générale

Nous commençons par définir les conditionnelles et détailler leur construction (paragraphe 2.1.1). Le résultat principal est la proposition 2.1.1.14, due à Y. Benoist et J.-F. Quint (Benoist et Quint, 2011).

Nous montrons ensuite (paragraphe 2.1.2) comment la théorie des conditionnelles permet de généraliser la décomposition classique de Hopf au cas où l'opération du groupe ne préserve pas la mesure. Il sera nécessaire alors de supposer que la mesure étudiée est *finie*. Le résultat principal de cette partie, dont nous ne nous servirons d'ailleurs pas, est le théorème 2.1.2.6. Nous démontrons aussi que l'invariance de la mesure équivaut au fait que les conditionnelles coïncident avec la mesure de Haar.

Enfin, nous établissons au paragraphe 2.1.3 la transitivité de l'opération de désintégration d'une mesure le long d'une opération de groupe.

Les résultats utiles au chapitre 3 sont les propositions 2.1.1.14, 2.1.1.18, 2.1.1.25, 2.1.1.26, 2.1.3.5.

Le lecteur est invité à lire ce chapitre en ayant à l'esprit l'une des deux situations suivantes :

1. G est un espace euclidien et H un sous-espace vectoriel de G
2. G est le groupe de Heisenberg et H son centre.

2.1.1 Construction des conditionnelles

2.1.1.1 Sections lacunaires

La pierre d'angle de toute la construction est le résultat suivant, dû à A. Kechris.

Théorème 2.1.1.1. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, et X un espace borélien standard où G opère mesurablement à gauche. Soit U un voisinage compact symétrique de l'élément neutre dans G. Il existe un borélien Σ de X – appelé par abus* section *de l'opération de G sur X tel que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

1. *La section Σ est* complète *: $X = G\Sigma$.*
2. *La section Σ est U-*lacunaire *: si $x \in \Sigma$ et $g \in U$ sont tels que $gx \in \Sigma$, alors $gx = x$.*

Démonstration. Voir (Kechris, 1992). □

Nous dirons que Σ est une *section U-lacunaire de l'opération de G sur X* si c'est une partie borélienne de X possédant la deuxième propriété ci-dessus. Nous dirons que Σ est une *section U-lacunaire complète* si elle possède les deux propriétés. Nous omettrons parfois de préciser l'ouvert U relativement auquel la section est lacunaire.

En général, les éléments d'une section lacunaire seront appelés x', y', etc. pour les distinguer de ceux de X qui seront notés x, y, etc.

Une section lacunaire Σ étant donnée, l'application $a : G \times \Sigma \to X$ appliquant (g, x') sur gx' sera appelée *application associée à* Σ. Nous nous permettrons souvent, ayant introduit une section lacunaire Σ, d'employer la lettre a en ce sens, sans écrire systématiquement «soit a l'application associée».

Notons tout de suite une conséquence facile et cruciale de la lacunarité.

Lemme 2.1.1.2. *Soit U un voisinage compact symétrique de l'élément neutre dans G et donnons-nous une section U^2-lacunaire Σ. On suppose que pour tout $x' \in \Sigma$, U^2 contient au plus N éléments fixant x', où N est une constante fixée. Alors pour tout $h \in G$ et tout $x \in X$, l'ensemble $hU \times \Sigma$ contient au plus N éléments (g, x') tels que $gx' = x$.*

Démonstration. Quitte à remplacer x par $h^{-1}x$, on peut supposer que h est l'élément neutre e de G. Si $(g_1, x'_1), (g_2, x'_2) \in U \times \Sigma$ sont tels que $g_1 x'_1 = g_2 x'_2$, on a $g_2^{-1} g_1 x'_1 = x'_2$, ce qui implique, $g_2^{-1} g_1$ étant élément de U^2 (et Σ étant U^2-lacunaire), que $x'_2 = x'_1$. Autrement dit, $g_2^{-1} g_1$ est un élément de U^2 fixant x'_1, et la conclusion s'ensuit facilement. □

Nous aurons besoin d'un énoncé un peu plus précis que le théorème 2.1.1.1 aux paragraphes 2.2.3 et suivants.

Théorème 2.1.1.3. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, et X un espace borélien standard où G opère mesurablement à gauche. Soit U un voisinage compact symétrique de e dans G. Il existe un borélien Σ de X tel que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

1. *La section Σ est U^2-*complète *: $X = U^2\Sigma$ (où U^2 est l'image de U par l'application $(g,h) \mapsto gh$).*
2. *La section Σ est U-*lacunaire.

Démonstration. Reprendre (Becker et Kechris, 1996). □

Notation 2.1.1.4. *Lorsque G opère sur X, pour toute partie A de X et tout point $x \in X$, on notera $T_G(x, A)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $gx \in A$ («transporteur de x dans A»).*

2.1.1.2 Conditionnelles au-dessus d'une section lacunaire

Nous fixons un espace borélien standard X où opère mesurablement à gauche un groupe localement compact à base dénombrable G.

Définition 2.1.1.5. *Nous dirons que l'opération de G est* à stabilisateurs discrets *(resp.* à stabilisateurs uniformément discrets*) si pour tout $x \in X$, le stabilisateur de x dans G est une partie discrète de G (resp. s'il existe un voisinage V de l'élément neutre dans G tel que pour tout $x \in X$, le seul élément de V fixant x soit l'élément neutre).*

Énonçons tout de suite un lemme qui nous servira plus tard. Rappelons que les groupes doublants ont été définis au chapitre 1 (définition 1.1.3.2).

Lemme 2.1.1.6. *Soit G un groupe métrique doublant opérant mesurablement sur un espace borélien standard X avec des stabilisateurs* uniformément discrets. *Il existe des constantes $\rho_0, K > 0$ telles que, pour tout $\rho < \rho_0$ et toute section $B(e,\rho)$-lacunaire Σ de l'opération de G sur X, on ait*

$$\mathrm{Card}\,\{(g,x') \in B(e,4\rho) \times \Sigma \ ; \ gx' = x\} \leq K$$

quel que soit le point $x \in X$.

Démonstration. Raisonner comme dans la démonstration du lemme 2.1.1.2 en tenant compte de la propriété de doublement pour voir que K ne dépend que de la constante de doublement de G. □

Dorénavant, nous supposerons toujours que l'opération est, au minimum, à stabilisateurs *discrets*. En conséquence, si Σ est une section lacunaire de cette opération, on voit aussitôt que pour tout $x \in X$, le transporteur de x dans Σ est une partie *discrète* – et, partant, *dénombrable* – de G. L'application associée $a : G \times \Sigma \to X$ est donc *à fibres dénombrables*. À ce propos, rappelons le fait suivant, dont nous nous servirons librement.

Lemme 2.1.1.7 ((Kechris, 1995))**.** *Si $p : X \to Y$ est une application borélienne entre deux espaces boréliens standards, telle que pour tout $y \in Y$ la fibre $p^{-1}(y)$ soit au plus dénombrable, il existe une suite dénombrable (s_n) d'applications boréliennes $X \to Y$ telle que la fibre $p^{-1}(y)$ soit l'ensemble*

$$\{s_n(y) \ ; \ n \geq 1\}$$

quel que soit $y \in Y$.

Dans le lemme suivant, la notation δ_x désigne la mesure de Dirac en x.

Lemme 2.1.1.8. *Soient X, Y deux espaces boréliens standards et p une application borélienne $X \to Y$. On suppose que p est à fibres* dénombrables. *Pour toute mesure σ-finie λ sur Y, la mesure $\tilde{\lambda}$ sur X définie par*

$$\tilde{\lambda} = \int d\lambda(y)\ \mathrm{Card}_{p^{-1}(y)} = \int d\lambda(y) \sum_{x \in p^{-1}(y)} \delta_x$$

(où $\mathrm{Card}_{p^{-1}(y)}$ est la mesure de comptage sur l'ensemble $p^{-1}(y)$) est σ-finie.

Démonstration. Il existe une famille $(s_n)_{n \geq 1}$ d'applications boréliennes $X \to Y$ paramétrant les fibres de p, c'est-à-dire telles que pour tout $y \in Y$, on ait

$$p^{-1}(y) = \{s_n(y); n \geq 1\}.$$

Soit A une partie borélienne de Y telle que $\lambda(A) < \infty$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\tilde{\lambda}(s_n(A)) < \infty$. En effet, par définition

$$\tilde{\lambda}(s_n(A)) = \int d\lambda(y)\ \mathrm{Card}\left(p^{-1}(y) \cap s_n(A)\right)$$

et l'intégrande $\mathrm{Card}\left(p^{-1}(y) \cap s_n(A)\right)$ vaut 1 dans A et 0 ailleurs. D'où le lemme. □

Notation 2.1.1.9. *Dans les conditions du lemme 2.1.1.8, la mesure $\tilde{\lambda}$ sera notée $p^*\lambda$.*

Fixons maintenant une mesure σ-finie λ sur X. Soit Σ une section lacunaire de l'opération de G sur X. La mesure $a^*\lambda$ sur $G \times \Sigma$ est σ-finie d'après le lemme 2.1.1.8 et le paragraphe qui le précède. Nous pouvons donc la désintégrer au-dessus de Σ ; la mesure portée par la fibre au-dessus de $x' \in \Sigma$ sera notée $\sigma_\Sigma(x')$.

Plus précisément, choisissons sur Σ une mesure de probabilité λ_Σ, pseudo-image de $a^*\lambda$ par la projection $G \times \Sigma \to \Sigma$. Nous pouvons alors écrire

$$a^*\lambda = \int d\lambda_\Sigma(x')\ \sigma_\Sigma(x') \otimes \delta_{x'}$$

où $\sigma_\Sigma(x')$ est une mesure sur G qui est presque sûrement σ-finie.

Le choix de la pseudo-image λ_Σ est arbitraire (car $a^*\lambda$ n'est pas finie en général) mais la classe de cette mesure est uniquement définie. On peut donc parler sans ambiguïté des parties négligeables de Σ.

Le lemme suivant caractérise ces parties négligeables.

Lemme 2.1.1.10. *Soit Σ une section lacunaire. Pour qu'une partie A de Σ soit négligeable, il faut et il suffit que GA soit λ-négligeable dans X.*

Démonstration. Dire que $A \subset \Sigma$ est négligeable, c'est dire que $a^*\lambda(G \times A) = 0$, c'est-à-dire que

$$\int d\lambda(x)\ \mathrm{Card}(T(x, A)) = 0$$

ce qui équivaut à dire que λ-presque aucun x n'appartient à GA.

□

Lorsque Σ est une section lacunaire telle que $G\Sigma$ ne soit pas négligeable, on dira (par abus de langage) que Σ n'est pas négligeable.

Lemme 2.1.1.11. *Supposons que λ soit* finie *et soit Σ une section lacunaire. Alors, presque sûrement, $\sigma_\Sigma(x')$ est une* mesure de Radon *sur G.*

Si, en outre, les stabilisateurs de l'opération de G sur X sont uniformément discrets, *la mesure $a^*\lambda(K \times \Sigma)$ est finie pour toute partie compacte K de G.*

Démonstration. Soit U un voisinage symétrique compact de e dans G tel que Σ soit U^2-lacunaire. Nous allons voir que pour tout $h \in G$, $\sigma_\Sigma(x')(hU)$ est presque sûrement finie, ce qui suffit à démontrer que $\sigma_\Sigma(x')$ est presque sûrement de Radon.

Pour tout $n \geq 1$, introduisons l'ensemble Σ_n formé des $x' \in \Sigma$ tels que $U^2 \cap \mathrm{Stab}(x')$ contienne au plus n éléments. On peut vérifier que Σ_n est un ensemble borélien.

D'après le lemme 2.1.1.2, on a $\mathrm{Card}(a^{-1}(x) \cap hA \times \Sigma_n) \leq n$ pour tout $x \in X$. En intégrant ceci par rapport à λ, on voit que

$$a^*\lambda\{(g, x') \in hU \times \Sigma_n\} = \int d\lambda(x)\ \mathrm{Card}(a^{-1}(x) \cap hU \times \Sigma_n) \leq n\lambda(X) < \infty$$

donc $\sigma_\Sigma(x')(hU) < \infty$ pour presque tout $x' \in \Sigma_n$.

Puisque le stabilisateur de tout point de X est discret, il est clair que Σ est réunion des Σ_n. Par conséquent, $\sigma_\Sigma(x')(hU) < \infty$, presque sûrement.

Si les stabilisateurs de l'opération de G sur X sont uniformément discrets, nous pouvons, quitte à réduire U, supposer que les relations $gx = x$, $g \in U^2$ entraînent $g = e$. On en déduit que pour tout $x \in X$, il y a au plus un couple $(g, x') \in U \times \Sigma$ tel que $gx' = x$. Par conséquent, $a^*\lambda(U \times \Sigma) \leq 1$, et aussi $a^*\lambda(hU \times \Sigma) \leq 1$ quel que soit $h \in G$. On conclut facilement. □

Lemme 2.1.1.12. *Soit Σ une section lacunaire, et soit A (resp. Σ') une partie λ-négligeable de X (resp. une partie négligeable de Σ). Pour presque tout $x' \in \Sigma$, on a $\sigma_\Sigma(x')(T(x', A)) = 0$ (resp. $T(x', \Sigma') = \varnothing$).*

Si Σ est une section lacunaire complète, la réciproque est vraie, autrement dit toute partie A de X telle que, presque sûrement, $\sigma_\Sigma(x')(T(x', A)) = 0$, est négligeable.

Démonstration. L'assertion sur A équivaut à dire que $a^*\lambda\{(g, x') \in G \times \Sigma; gx' \in A\} = 0$, ce qui est immédiat à partir des définitions. L'assertion sur Σ' s'en déduit en remarquant que, par hypothèse, $G\Sigma'$ est une partie λ-négligeable de X.

Si Σ est lacunaire complète, on a

$$\lambda(A) \leq a^*\lambda\{(g, x') \in G \times \Sigma; gx' \in A\}$$

et on en déduit la réciproque annoncée. □

Introduisons quelques notations.

Notation 2.1.1.13. *Si λ, μ sont deux mesures proportionnelles sur G (i.e. $\mu = c\lambda$, où c est une constante finie > 0) on écrira $\lambda \simeq \mu$. La classe d'une mesure pour cette relation d'équivalence est appelée* mesure projective. *La classe d'une mesure σ-finie (resp de Radon) est appelée* mesure projective σ-finie *(resp.*

mesure projective de Radon*). Si λ est une mesure sur G, la classe de λ sera notée $[\lambda]$.*

On notera $\mathcal{M}^1_\sigma(G)$ et $\mathcal{M}^1_{\mathrm{rad}}(G)$ l'espace des mesures projectives sur G, respectivement σ-finies et de Radon.

Si $h \in G$, l'application de translation à droite $G \to G$ qui applique g sur gh^{-1} sera notée $\delta(h)$.

Voici le résultat de base de la théorie ; il est tiré de (Benoist et Quint, 2011).

Proposition 2.1.1.14. *Soit X un borélien standard où opère mesurablement à gauche un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs* discrets*, et soit λ une mesure σ-finie sur X. Il existe une application $\sigma : X \to \mathcal{M}^1_\sigma(G)$ possédant la propriété suivante : pour toute section lacunaire Σ, il existe une partie conégligeable X' de X telle que pour presque tout $x' \in \Sigma$ et tout $g \in G$ tel que $gx' \in X'$, on ait*

$$\delta(g)^*\sigma(gx') = [\sigma_\Sigma(x')].$$

Cette propriété caractérise l'application σ en dehors d'un ensemble négligeable.

L'application σ est G-équivariante modulo λ ; autrement dit il existe une partie λ-conégligeable X' de X telle que pour tout $x \in X'$ et tout $g \in G$, si $gx \in X'$, on a

$$\sigma(gx) = \delta(g)_*\sigma(x).$$

Si la mesure λ est finie*, alors σ est à valeurs dans $\mathcal{M}^1_{\mathrm{rad}}(G)$, et est* mesurable *lorsque l'on munit $\mathcal{M}^1_{\mathrm{rad}}$ de la tribu quotient (de la tribu usuelle sur l'espace des mesures de Radon de G).*

La tribu usuelle sur l'espace des mesures de Radon de G est la tribu borélienne associée à la topologie vague.

La démonstration de proposition 2.1.1.14 fait l'objet de la sous-section suivante.

Définition 2.1.1.15. *Dans les conditions de la proposition 2.1.1.14, nous dirons que σ est* l'application de désintégration de λ le long de G*, et que $\sigma(x)$ est la* conditionnelle de λ en x le long de G.

Notation 2.1.1.16. *Lorsque le contexte rend ambiguë la notation σ, on précisera le groupe, voire la mesure, en indice : σ_G, $\sigma_{G,\lambda}$, etc.*

Remarque 2.1.1.17. *On parlera par abus du support de $\sigma(x)$, d'ensemble $\sigma(x)$-négligeable, et ainsi de toute autre notion ne faisant intervenir que la classe projective des mesures sur G.*

Notons aussi que la désintégration de λ le long de G ne dépend que de la classe projective $[\lambda]$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate, et importante, de l'unicité dans la proposition 2.1.1.14.

Proposition 2.1.1.18. *Soient X, Y deux espaces boréliens standards où G opère mesurablement à gauche avec des stabilisateurs discrets. Soit α un automorphisme mesurable du groupe G. Soit ϕ un isomorphisme borélien $X \to Y$ qui est un α-morphisme de G-ensembles, c'est-à-dire que $\phi(gx) = \alpha(g)\phi(x)$ pour*

tous $g \in G, x \in X$. Soient λ une mesure σ-finie sur X et $\mu = \phi_*\lambda$ son image directe par ϕ. Désintégrons λ et μ le long de G. Pour λ-presque tout x, on a

$$\sigma_\mu(\phi(x)) = \alpha_*\sigma_\lambda(x).$$

Finissons ce paragraphe avec le fait suivant, que nous utiliserons souvent sans le mentionner explicitement.

Lemme 2.1.1.19. *Pour λ-presque tout x, le support de $\sigma(x)$ contient l'élément neutre de G.*

Démonstration. Soit $\rho > 0$ et A_ρ l'ensemble des x tels que $\sigma(x)(B(e,\rho)) = 0$. Il suffit (lemme 2.1.1.12) de voir, une section lacunaire complète Σ étant donnée, que pour presque tout $x' \in \Sigma$ on a $\sigma_\Sigma(x')(T(x', A_\rho)) = 0$. Or par définition de σ, $T(x', A_\rho)$ est l'ensemble des g tels que $\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')(B_\rho) = 0$, c'est-à-dire que $\sigma_\Sigma(x')(B(g,\rho)) = 0$. Il est bien clair que cet ensemble est $\sigma_\Sigma(x')$-négligeable ; d'où le lemme. □

2.1.1.3 Démonstration de la proposition 2.1.1.14

Nous conservons les notations de la proposition : X est un borélien standard où opère mesurablement à gauche un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs *discrets*, et λ est une mesure σ-finie sur X.

Lemme 2.1.1.20. *Soient $\Sigma \subset \Sigma'$ deux sections lacunaires de l'opération de G sur X. Pour presque tout $x' \in \Sigma'$, on a $\sigma_\Sigma(x') \simeq \sigma_{\Sigma'}(x')$.*

Notons que la trace, sur Σ', de la classe de mesure portée par Σ, coïncide avec la classe de mesure portée par Σ' (lemme 2.1.1.10).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la transitivité des désintégrations (au sens usuel). □

Le lemme suivant est une simple conséquence des propriétés d'unicité des désintégrations ; nous l'énonçons abstraitement pour qu'il apparaisse bien qu'aucune des propriétés des objets que nous considérons n'entrent en jeu ici.

Lemme 2.1.1.21. *Soient Σ_1, Σ_2, G trois espaces boréliens standards. Soient*

1. *$\alpha : \Sigma_1 \to \mathrm{Aut}(G)$ une application borélienne dans le groupe des automorphismes boréliens de G (*i.e. *l'application $(x', g) \mapsto \alpha(x') \cdot g$ est borélienne de $\Sigma_1 \times G$ dans G) ;*
2. *$\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ un isomorphisme borélien ;*
3. *$\psi : G \times \Sigma_1 \to G \times \Sigma_2$ la bijection donnée par $(g, x') \mapsto (\alpha(x') \cdot g, \phi(x'))$.*

L'application ψ est un isomorphisme borélien. Donnons-nous une mesure borélienne σ-finie λ^1 sur $G \times \Sigma_1$ et soit λ^2 l'image directe $\psi_*\lambda^1$. Désintégrons λ^1 et λ^2 au-dessus de Σ_1 et Σ_2 respectivement :

$$\lambda^1 = \int d\lambda^1_{\Sigma_1}(x')\sigma_{\Sigma_1}(x') \otimes \delta_{x'}, \quad \lambda^2 = \int d\lambda^2_{\Sigma_2}(y')\sigma_{\Sigma_2}(y') \otimes \delta_{y'}.$$

Alors, pour presque tout $x' \in \Sigma_1$, on a

$$\sigma_{\Sigma_1}(x') \simeq (\alpha(x'))^*\sigma_{\Sigma_2}(\phi(x')).$$

Démonstration. Les mesures $\phi_*\lambda^1_{\Sigma_1}$ et $\lambda^2_{\Sigma_2}$ sont équivalentes ; on peut, sans perte de généralité, les supposer égales. Cela étant, soit f une fonction λ^1-intégrable. On a, par un calcul immédiat,

$$\int f d(\psi_*\lambda^1) = \int d\lambda^1_{\Sigma_1}(x')\langle f, (\alpha(x')_*\sigma_{\Sigma_1}(x')) \otimes \delta_{\phi(x')}\rangle$$

et

$$\int f d\lambda^2 = \int d\lambda^1_{\Sigma_1}(x')\langle f, \sigma_{\Sigma_2}(\phi(x')) \otimes \delta_{\phi(x')}\rangle.$$

La propriété usuelle d'unicité des désintégrations donne donc $\alpha(x')_*\sigma_{\Sigma_1}(x') = \sigma_{\Sigma_2}(\phi(x'))$ pour presque tout x'.

□

Définition 2.1.1.22. *Nous dirons qu'une section lacunaire Σ de l'opération de G sur X est* petite *s'il existe un recouvrement ouvert dénombrable (V_n) de G tel que chaque application $V_n \times \Sigma \to X$ (appliquant $(g, x') \in V_n \times \Sigma$ sur gx') soit injective.*

Le lemme suivant nous sera utile à maintes reprises.

Lemme 2.1.1.23. *Toute section lacunaire Σ de l'opération de G sur X est réunion dénombrable de* petites *sections lacunaires.*

Démonstration. Rappelons que tout groupe localement compact à base dénombrable est métrisable. Munissons donc G d'une distance d compatible avec sa topologie. L'opération de G sur X étant à stabilisateurs discrets, il existe une application borélienne $\rho : \Sigma \to]0, \infty[$ telle que, pour tout $x' \in \Sigma$, les relations $gx' = x'$ et $d(g, e) < \rho(x')$ entraînent $g = e$. Posons $\Sigma_n = \rho^{-1}(]1/n, \infty[)$. Soit U un voisinage compact symétrique de e dans G tel que Σ soit U-lacunaire, et soit W_n un voisinage symétrique de e tel que W_n^2 soit contenu dans $U \cap B(e, 1/n)$. En reprenant l'argument du lemme 2.1.1.11, on voit que l'application $gW_n \times \Sigma_n \to X$ est injective quel que soit $g \in G$. La section lacunaire Σ_n est donc petite.

□

Lemme 2.1.1.24. *Soit Σ une section lacunaire de l'opération de G sur X. Il existe une partie conégligeable $\Sigma' \subset \Sigma$ telle que, pour tout $x' \in \Sigma'$ et tout $g \in G$ tel que $gx' \in \Sigma'$, on ait*

$$\sigma_\Sigma(gx') \simeq \delta(g)_*\sigma_\Sigma(x').$$

Démonstration. Nous allons procéder par étapes en réduisant successivement le lemme à des énoncés de plus en plus simple.

Première réduction. Le lemme se ramène à l'énoncé **(R)** suivant : soient Σ_1, Σ_2 deux sections lacunaires et $s : \Sigma_1 \to G$ une application borélienne telle que $s(x')x'$ appartienne à Σ_2 pour tout $x' \in \Sigma_1$; alors pour presque tout $x' \in \Sigma_1$, on a $\sigma_{\Sigma_2}(s(x')x') \simeq \delta(s(x'))_*\sigma_{\Sigma_1}(x')$.

En effet, supposons que l'énoncé **(R)** soit acquis, et démontrons le lemme. Donnons-nous des applications boréliennes $s_n : \Sigma \to G$ $(n \geq 1)$ telles que l'ensemble $\{(g, x') \in G \times \Sigma; gx' \in \Sigma\}$ soit la réunion des graphes $\{(s_n(x'), x'); x' \in \Sigma\}$. Introduisons l'ensemble $\Sigma_n = \{s_n(x')x'; x' \in \Sigma\}$; on peut vérifier que c'est un borélien de Σ. Pour alléger les notations, notons ϕ_n l'application $\Sigma \to \Sigma_n$ qui applique x' sur $s_n(x')x'$.

On a, par hypothèse, $\sigma_{\Sigma_n}(\phi_n(x')) \simeq \delta(s_n(x'))_*\sigma_\Sigma(x')$ pour presque tout $x' \in \Sigma$.

D'autre part, pour presque tout $x' \in \Sigma$, on a $\sigma_{\Sigma_n}(\phi_n(x')) \simeq \sigma_\Sigma(\phi_n(x'))$: cela provient du lemme 2.1.1.20 et du fait que l'image réciproque, par ϕ_n, d'une partie négligeable de Σ_n, est une partie négligeable de Σ, comme on le vérifie facilement.

Ceci démontre la première réduction.

Deuxième réduction. Il suffit de démontrer **(R)** en faisant l'hypothèse supplémentaire que Σ_1 est *petite*.

En effet, supposons que Σ_1 soit réunion d'une suite de boréliens Σ_1^n tels que l'énoncé **(R)** soit acquis lorsqu'on remplace Σ_1 par n'importe lequel de ces boréliens Σ_1^n (et qu'on restreint s à Σ_1^n). Pour tout n et pour presque tout $x' \in \Sigma_1^n$, on a donc $\sigma_{\Sigma_2}(s(x')x') \simeq \delta(s(x'))\sigma_{\Sigma_1^n}(x')$. On obtient la deuxième réduction en utilisant à nouveau le lemme 2.1.1.20.

Troisième réduction Il suffit de démontrer **(R)** en faisant les hypothèses que 1° Σ_1 est petite et 2° que s est telle que l'application $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ qui applique x' sur $s(x')x'$ soit un *isomorphisme*.

En effet, on peut supposer que Σ_1 est petite, et se donner un recouvrement ouvert (V_n) de G tel que chaque application $V_n \times \Sigma_1 \to X$ soit injective. Posons $\Sigma_1^n = s^{-1}(V_n)$. Chaque application $\phi_n = \phi|\Sigma_1^n$ est injective. Quitte à remplacer Σ_2 par $\phi(\Sigma_1^n)$, et en raisonnant comme ci-dessus au moyen du lemme 2.1.1.20, on conclut.

Dernière étape. Pour achever, démontrons le lemme en supposant que l'application $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ (qui applique x' sur $s(x')x'$) est un isomorphisme et que Σ_1 est petite.

Posons $\alpha(x') = \delta(s(x'))$ (de sorte que α est une application borélienne $\Sigma_1 \to \mathrm{Aut}(G)$ est borélienne) et $\psi(g, x') = (\alpha(x') \cdot g, \phi(x'))$. Soient $a_1 : G \times \Sigma_1 \to X$ et $a_2 : G \times \Sigma_2 \to X$ les applications associées aux deux sections. Montrons que $a_2^*\lambda = \psi_* a_1^*\lambda$. Pour le voir il suffit, Σ_1 étant petite (et ψ étant un isomorphisme) de vérifier que, si $V \subset G$ est un borélien tel que la restriction $a_1|(V \times \Sigma_1)$ soit injective, alors les mesures restreintes $(\psi_* a_1^*\lambda)|\psi(V \times \Sigma_1)$ et $(a_2^*\lambda)|\psi(V \times \Sigma)$ coïncident. C'est un simple jeu d'écriture, conséquence de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \times \Sigma_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ G \times \Sigma_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et la conclusion provient du lemme 2.1.1.21.

□

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.1.1.14.

Démonstration de la proposition 2.1.1.14. Fixons une section lacunaire complète à l'action de G sur X. Soit Σ' une partie conégligeable de Σ comme dans le lemme 2.1.1.24 et posons $X' = G\Sigma'$. Définissons une application $\tilde{\sigma}$ de $G \times \Sigma'$ dans l'espace des mesures projectives σ-finies :

$$\tilde{\sigma}(g, x') = [\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')]$$

(où $[\mu]$ est la classe projective de μ). Puisque l'application $a : G \times \Sigma' \to X'$ est à fibres dénombrables, elle admet des sections boréliennes. Soit s une telle section, et posons $\sigma = \tilde{\sigma} \circ s$; en vertu du lemme 2.1.1.24, cette application ne dépend pas du choix de la section.

Si Σ_1 est une autre section lacunaire, la réunion $\Sigma \cup \Sigma_1$ est une section lacunaire, et on en déduit (vu le lemme 2.1.1.24) qu'on a aussi $\sigma(gx'_1) = [\delta(g)_* \sigma_{\Sigma_1}(x'_1)]$ pour presque tout x'_1 et tout g tel que gx'_1 appartienne à un certain ensemble de mesure 1 (dépendant de Σ et Σ_1).

La vérification des autres propriétés énoncées dans la proposition ne pose pas de problème.

Dans le cas où λ est une mesure de probabilité, la mesurabilité de σ provient du fait que l'application $x' \mapsto \sigma_\Sigma(x')$ est mesurable ($x' \in \Sigma$) et de la continuité de l'application $G \times \mathcal{M}_{\mathrm{rad}}(G) \to \mathcal{M}_{\mathrm{rad}}(G)$ (définie par $(g, \mu) \mapsto g_*\mu$) lorsque $\mathcal{M}_{\mathrm{rad}}(G)$ des mesures de Radon sur G est muni de la topologie vague. □

2.1.1.4 Cas d'une opération lisse

Lorsque l'opération de G sur X est *lisse*, ce qui signifie que le quotient $G\backslash X$ est un borélien standard (pour la tribu quotient), les conditionnelles le long de l'opération de G coïncident avec les conditionnelles au sens usuel (au-dessus de $G\backslash X$). C'est ce que nous précisons dans la proposition suivante, où l'application ρ_x désigne l'application orbitale de G sur Gx, i.e. $\rho_x(g) = gx$.

Proposition 2.1.1.25. *Soit X un espace borélien standard où opère mesurablement un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs discrets, et soit λ une mesure σ-finie sur G.*

Supposons que l'opération de G sur X soit lisse. *On note $x \mapsto \bar{x}$ l'application de passage au quotient $X \to G\backslash X$. Fixons une probabilité $\bar{\lambda}$ sur $G\backslash X$, pseudo-image de λ, et soit*

$$\lambda = \int d\bar{\lambda}(\bar{x}) \lambda_{\bar{x}}$$

la désintégration de λ correspondante. Soit σ l'application de désintégration de λ le long de G.

Pour λ-presque tout x, $\sigma(x)$ est la classe projective de $(\rho_x)^* \lambda_{\bar{x}}$.

Rappelons que la mesure $(\rho_x)^* \lambda_{\bar{x}}$ sur G est définie dans le lemme 2.1.1.8.

Démonstration. Soit $s : G\backslash X \to X$ une section borélienne au sens usuel (*i.e.* $\overline{s(\bar{x})} = \bar{x}$ pour tout $\bar{x}$) et soit $\Sigma = s(G\backslash X)$ son image. Posons

$$\tilde{\lambda} = \int d\bar{\lambda}(\bar{x}) \; (\rho_{s(\bar{x})})^* \lambda_{\bar{x}} \otimes \delta_{s(\bar{x})} \; ;$$

c'est une mesure sur $G \times \Sigma$ et on vérifie qu'elle coïncide avec $a^*\lambda$, où $a : G \times \Sigma \to X$ est l'application associée à Σ. La proposition s'en déduit, par unicité des conditionnelles au sens usuel. □

2.1.1.5 Désintégration d'une mesure quotient

Proposition 2.1.1.26. *Soit X un espace borélien standard. Soit Γ un groupe* dénombrable *opérant mesurablement à droite sur X. On suppose que cette opération est* lisse, *de sorte que le quotient X/Γ est un espace borélien standard. On note $p : X \to X/\Gamma$ l'application de passage au quotient.*

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, opérant mesurablement à gauche sur X. On suppose que l'opération de G sur X/Γ est à stabilisateurs discrets (et donc aussi l'opération de G sur X).

Soit $\tilde{\mu}$ une mesure σ-finie sur X, et Γ-invariante. Soit μ la mesure σ-finie sur X/Γ, quotient de μ par Γ.

Désintégrons $\tilde{\mu}$ et μ le long de G ; soient $\tilde{\sigma}$ et σ les applications correspondantes.

Alors pour $\tilde{\mu}$-presque tout $\tilde{x}$, on a

$$\sigma(p(\tilde{x})) = \tilde{\sigma}(\tilde{x}).$$

Avant de démontrer la proposition, prenons quelques lignes pour rappeler la construction de la mesure μ quotient de $\tilde{\mu}$. Puisque l'opération de Γ sur X est lisse, on peut désintégrer $\tilde{\mu}$ au-dessus d'une mesure de probabilité pseudo-image μ'. L'invariance de $\tilde{\mu}$ sous Γ entraîne que les conditionnelles de $\tilde{\mu}$ au-dessus de μ' sont μ'-presque sûrement proportionnelles à la mesure de comptage ; autrement dit, il existe une application borélienne $c : X/\Gamma \to]0, \infty[$ telle que

$$\tilde{\mu} = \int d\mu'(x\Gamma)\ c(x\Gamma)\mathrm{Haar}_{x\Gamma}.$$

La mesure $\mu = c\mu'$ est σ-finie (puisque elle est équivalente à une mesure finie) et on a $\tilde{\mu} = p^*\mu$, ce qui signifie que μ est quotient de $\tilde{\mu}$ par Γ.

Démonstration de la proposition. Soit Σ une section lacunaire de l'opération de G sur X/Γ, et soit $\widetilde{\Sigma}$ l'image inverse $p^{-1}(\Sigma)$; on vérifie aussitôt que $\widetilde{\Sigma}$ est une section lacunaire de l'opération de G sur X.

Donnons-nous une section borélienne $s : X/\Gamma \to X$; ceci est possible car l'opération de Γ sur X est lisse. Les ensembles $s(\Sigma)\gamma$, lorsque γ parcourt Γ, sont deux à deux disjoints, et partitionnent $\widetilde{\Sigma}$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{\tilde{a}} & X \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ G \times \Sigma & \xrightarrow{a} & X/\Gamma \end{array}$$

où $\tilde{a}, a$ sont les applications associées aux sections lacunaires $\widetilde{\Sigma}, \Sigma$ respectivement, et q applique $(g, \tilde{x})$ sur $(g, p(\tilde{x}))$.

Par définition des conditionnelles le long de G, tout revient à désintégrer $\tilde{a}^*\tilde{\mu}$ (resp. $a^*\mu$) au-dessus de $\widetilde{\Sigma}$ (resp. Σ) et à vérifier que la fibre de $\tilde{a}^*\tilde{\mu}$ au-dessus de $\tilde{x} \in \widetilde{\Sigma}$ est proportionnelle à la fibre de $a^*\mu$ au-dessus de $p(\tilde{x})$, et ce pour presque tout $\tilde{x}$.

On a $\tilde{a}^*\tilde{\mu} = q^*(a^*\mu)$ puisque $\tilde{\mu} = p^*\mu$ par définition de μ, et que $a \circ q = p \circ \tilde{a}$.

D'autre part, l'application $\Sigma \times \Gamma \to \tilde{\Sigma}$ qui à (x', γ) associe $s(x')\gamma$ est un isomorphisme borélien, et si on note $\eta : \tilde{\Sigma} \to \Sigma \times \Gamma$ sa réciproque, on vérifie que l'isomorphisme $\Psi : G \times \tilde{\Sigma} \to G \times \Sigma \times \Gamma$ appliquant $(g, \tilde{x}')$ sur $(g, \eta(\tilde{x}'))$ applique $\tilde{a}^*\tilde{\mu}$ sur la mesure $(a^*\mu) \otimes \mathrm{Haar}_\Gamma$.

On vérifie aussi que la fibre de $(a^*\mu) \otimes \mathrm{Haar}_\Gamma$ au-dessus de $(x', \gamma) \in \Sigma \otimes \Gamma$ est proportionnelle à la fibre de $a^*\mu$ au-dessus de x', pour presque tout x' et pour tout γ.

Comme il est clair que les conditionnelles de $\tilde{a}^*\tilde{\mu}$ au-dessus de $\widetilde{\Sigma}$ et celles de son image $\Psi_*(\tilde{a}^*\tilde{\mu})$ au-dessus de $\Sigma \times \Gamma$ sont presque sûrement proportionnelles, ce qui précède démontre la proposition. □

2.1.1.6 Désintégration d'une mesure absolument continue

Proposition 2.1.1.27. *Soit X un espace borélien standard portant une mesure σ-finie λ. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable opérant mesurablement sur X avec des stabilisateurs discrets. Soit μ une mesure σ-finie sur X, absolument continue par rapport à λ.*

Désintégrons λ et μ le long de l'opération de G et soient σ_λ et σ_μ les applications de désintégration correspondantes.

Pour μ-presque tout x, $\sigma_\mu(x)$ est absolument continue par rapport à $\sigma_\lambda(x)$, et la dérivée de Radon-Nikodym est donnée par

$$g \mapsto \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}(gx).$$

La conclusion s'entend ainsi : pour μ-presque tout x, si $\hat{\sigma}_\mu(x)$ (resp. $\hat{\sigma}_\lambda(x)$) est un représentant de la mesure projective $\sigma_\mu(x)$ (resp. $\sigma_\lambda(x)$), alors celle-là est absolument continue par rapport à celle-ci et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_\mu(x)}{\mathrm{d}\hat{\sigma}_\lambda(x)}(g) = c\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}(gx)$$

pour $\sigma_\mu(x)$-presque tout g.

La démonstration est un simple jeu d'écriture, dont je préfère me dispenser.

2.1.2 Récurrence ; dissipativité

Nous conservons les notations précédentes : G est un groupe localement compact à base dénombrable, X est un espace borélien standard où G opère mesurablement avec des stabilisateurs discrets, et λ est une mesure σ-finie sur X.

2.1.2.1 Trivialité des conditionnelles

Proposition 2.1.2.1. *Soit W un borélien de X. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour λ-presque tout $x \in W$, $\sigma(x)$ est triviale, i.e. $\sigma(x) = [\delta_e]$ (où δ_e est la mesure de Dirac en l'élément neutre de G).*
2. *Le borélien W contient une partie conégligeable Σ (i.e. $\lambda(W \setminus \Sigma) = 0$) telle que pour tous $x \in \Sigma$, $g \in G$, la relation $gx \in \Sigma$ entraîne $g = e$ (autrement dit le transporteur $T(x, \Sigma)$ est trivial).*

Le cas échéant, $\sigma(x)$ est presque sûrement triviale dans GW et le stabilisateur de presque tout point de GW est trivial.

Démonstration. Supposons vérifiée la première assertion. Soit Σ un ensemble conégligeable dans W tel que 1° $\sigma(x) = [\delta_e]$ pour $x \in \Sigma$ et 2° $\sigma(gx) = \delta(g)_*\sigma(x)$ dès que x, gx appartiennent à Σ (proposition 2.1.1.14). Si x et gx appartiennent à Σ, on a $[\delta_e] = [\delta_g]$, c'est-à-dire que $g = e$. D'où la deuxième assertion.

Réciproquement, supposons vérifiée la deuxième assertion. Il est clair que Σ est une section lacunaire et que l'application $a : G \times \Sigma \to X$ est un isomorphisme borélien sur son image. On voit alors aussitôt que $\sigma_\Sigma(x)$ est presque sûrement une mesure de Dirac lorsque $x \in GW$. La première assertion s'en déduit.

La fin de la proposition est claire. □

2.1.2.2 Décomposition de Hopf

Définition 2.1.2.2. *Un borélien W est appelé* ensemble errant *si le transporteur $T(x, W)$ est relativement compact pour λ-presque tout $x \in W$.*

Un borélien A est appelé ensemble récurrent *si, pour toute partie borélienne B de A, et pour λ-presque tout $x \in B$, le transporteur $T(x, B)$ n'est pas relativement compact.*

Le lemme suivant indique que ces notions sont duales l'une de l'autre.

Lemme 2.1.2.3. *Pour qu'un ensemble A soit récurrent, il faut et il suffit que $A \cap W$ soit négligeable pour tout ensemble errant W.*

Démonstration. Résulte aussitôt des définitions. □

Nous allons généraliser à notre situation le théorème de décomposition de Hopf ; avant cela, donnons l'énoncé classique et sa démonstration. Rappelons que si (X, Σ, μ) est un espace de probabilité, et T une application mesurable $X \to X$, on dit que T quasi-préserve μ si $T_*\mu$ et μ sont équivalentes. Dans ce cas, on dit qu'un ensemble $W \in \Sigma$ est errant si les ensembles $T^k W$ $(k \geq 0)$ sont deux à deux disjoints, et on dit qu'un ensemble $A \in \Sigma$ est récurrent si pour toute partie $B \in \Sigma$ contenue dans A et presque tout $x \in B$, la suite des itérées $T^k x$ $(k \geq 1)$ passe infiniment souvent par A.

Théorème 2.1.2.4. *Soient (X, Σ, μ) un espace de probabilité et T une application mesurable $X \to X$ qui quasi-préserve μ. Il existe une partition mesurable $X = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, unique modulo des ensembles négligeables, où $\mathcal{C}$ est un ensemble récurrent et $\mathcal{D}$ une réunion dénombrable d'ensembles errants.*

Démonstration. Soit α_1 le supremum des mesures des ensembles errants. On peut se borner au cas où $\alpha_1 > 0$, sinon on vérifie facilement que X est lui-même un ensemble récurrent. Choisissons un ensemble errant W_1 de mesure $> \frac{1}{2}\alpha_1$. Poursuivons en considérant le supremum α_2 des mesures des ensembles errants disjoints de W_1, supposons que $\alpha_2 > 0$ et choisissons un tel errant W_2 de mesure $> \frac{1}{2}\alpha_2$. On produit ainsi des errants deux-à-deux disjoints $W_1, \ldots, W_n$ et une suite décroissante $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$ telle que $\mu(W_i) > \frac{1}{2}\alpha_i$. Si $\alpha_{n+1} = 0$, on s'arrêt là et on pose $\mathcal{D} = W_1 \cup \ldots \cup W_n$; sinon, on définit une suite infinie et on pose $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 1} W_n$. Il est facile de voir qu'en posant $\mathcal{C} = X \setminus \mathcal{D}$ on obtient une partition de X qui répond à la question. □

Définition 2.1.2.5. *On dit qu'une partie A de X est faiblement G-invariante s'il existe un ensemble X' conégligeable dans X tel que, posant $A' = A \cap X'$, on ait $(GA') \cap X' = A'$.*

Théorème 2.1.2.6. *Soit X un espace borélien standard où opère mesurablement un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs discrets. Soit λ une mesure σ-finie sur X.*

L'espace X admet une partition borélienne $X = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, où $\mathcal{C}$ est un ensemble récurrent et $\mathcal{D}$ une réunion dénombrable d'ensembles errants. Cette partition est unique à un ensemble négligeable près. En outre, les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont faiblement G-invariants.

Si λ' est une mesure finie *équivalente à λ, et si σ est l'application de désintégration de λ le long de G, on peut prendre pour $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des x pour lesquels $\sigma(x)$ est infinie (resp. finie).*

Démonstration. Les notions d'ensemble errant et d'ensemble récurrent ne dépendent que de la classe de la mesure. On peut donc supposer que λ est finie. Définissons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ comme indiqué dans la dernière partie du théorème. Ces deux boréliens partitionnent X. Si l'on note X' une partie conégligeable de X telle que les relations $x, gx \in X'$ entraînent $\sigma(gx) = \delta(g)_*\sigma(x)$, il est clair que, posant $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap X$, on a $(G\mathcal{C}') \cap X' = \mathcal{C}'$, et de même pour $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que ces deux ensembles sont faiblement G-invariants.

Si $\mathcal{C}$ n'est pas négligeable, on peut, pour vérifier que $\mathcal{C}$ est un ensemble récurrent, remplacer X par $G\mathcal{C}'$ et λ par sa restriction à $G\mathcal{C}'$, et se ramener au cas où $\mathcal{C} = X$ et σ est infinie presque partout. La conclusion provient alors du lemme 2.1.2.8 ci-dessous.

On voit de même que $\mathcal{D}$ est réunion dénombrable d'ensembles errants en se servant du lemme 2.1.2.7.

L'unicité (à un ensemble négligeable près) de cette décomposition est claire. □

Lemme 2.1.2.7. *Si $\sigma(x)$ est finie pour λ-presque tout x, X est réunion dénombrable d'ensembles errants.*

Démonstration. Munissons G d'une distance invariante par translation à droite, compatible avec sa topologie et telle que toute boule fermée soit compacte (Struble, 1974) et posons, pour tout entier $N \geq 1$,

$$W_N = \left\{ x \in X ; \frac{\sigma(x)(B(e,N))}{\sigma(x)(G)} > \frac{1}{2} \right\}$$

et soit W'_N l'intersection de W_N avec une partie conégligeable X' de X telle que les relations $x, gx \in X'$ entraînent $\sigma(gx) = \delta(g)_*\sigma(x)$.

Nous allons montrer que chaque ensemble W'_N est errant. Soit donc $x \in W'_N$ et soit g un élément du transporteur $T(x, W'_N)$. Par définition de W'_N, on a

$$\frac{\sigma(x)(B(e,N))}{\sigma(x)(G)} + \frac{\sigma(x)(B(g,N))}{\sigma(x)(G)} > 1$$

ce qui n'est possible que si $B(e,N)$ et $B(g,N)$ se rencontrent. On a donc nécessairement $d(g,e) \leq 2N$; en particulier, $T(x, W'_N)$ est relativement compact.

La réunion des W_N $(N \geq 1)$ est de mesure totale, et le lemme est démontré. □

Lemme 2.1.2.8. *Supposons que λ soit* finie. *Si $\sigma(x)$ est infinie pour λ-presque tout x, X est un ensemble récurrent.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\sigma(x)$ soit presque sûrement infinie et que cependant X contienne un ensemble errant non négligeable. Nous allons produire une section lacunaire non négligeable Σ telle que

$T(x', \Sigma)$ contienne au plus N éléments (où $N \geq 1$ est une constante) pour presque tout $x' \in \Sigma$. L'application associée $G \times \Sigma \to X$ est alors à fibres finies de cardinal $\leq N$, de sorte que que $a^*\lambda$ est finie (comme l'est λ), ce qui entraîne aussitôt que presque toute conditionnelle $\sigma_\Sigma(x')$ est finie, contrairement à l'hypothèse.

Donnons-nous donc un ensemble errant non négligeable W. Soit W' l'ensemble (de mesure totale dans W) des $x \in W$ tels que $T(x, W)$ est relativement compact. Soit Σ_0 une section lacunaire complète et posons

$$\Sigma = \{x' \in \Sigma_0 \ ; \ \sigma_{\Sigma_0}(x')(T(x', W')) > 0\}.$$

On vérifie facilement que Σ est une section lacunaire non négligeable telle que $\sigma_\Sigma(x')(T(x', W')) > 0$ pour presque tout $x' \in \Sigma$.

Il est clair que l'ensemble $T(x', W)$ est relativement compact pour presque tout $x' \in \Sigma$. Par conséquent, $\sigma_\Sigma(x')$ étant presque sûrement de Radon, la mesure $\sigma_\Sigma(x')(T(x', W))$ est presque sûrement finie. Quitte à réduire Σ, on peut supposer 1° que Σ est une petite section et 2° qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $x' \in \Sigma$, on ait

$$\frac{\sigma_\Sigma(x')(T(x', W))}{\sigma_\Sigma(x')(U)} \leq C,$$

où U est un voisinage compact de l'élément neutre de G tel que la restriction à $U \times \Sigma$ de l'application $(g, x') \mapsto gx'$ soit injective.

En intégrant ceci par rapport à λ_Σ, on obtient

$$a^*\lambda\{(g, x') \in G \times \Sigma \ ; \ gx' \in W\} \leq Ca^*\lambda(U \times \Sigma)$$

et le membre de droite est fini (car l'application $U \times \Sigma \to X$ est injective et λ est finie). Le membre de gauche pouvant se réécrire

$$\int_W d\lambda(x) \ \mathrm{Card}(T(x, \Sigma))$$

ce qui précède montre que $T(x, \Sigma)$ est presque sûrement fini pour $x \in W$.

Il est facile d'en déduire que $T(x', \Sigma)$ est presque sûrement fini pour $x' \in \Sigma$. Quitte à réduire Σ une fois encore, on peut supposer qu'il existe un entier N tel que $T(x', \Sigma)$ contienne au plus N éléments pour tout $x' \in \Sigma$. □

Remarque 2.1.2.9. *La finitude de λ est cruciale dans ce lemme : l'opération de la droite réelle* $\mathbf{R}$ *sur elle-même par translation n'est pas récurrente bien que les conditionnelles de la mesure de Lebesgue le long de* $\mathbf{R}$ *soient évidemment infinies presque partout.*

Définition 2.1.2.10. *La partition $X = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ exhibée dans le théorème est appelée* décomposition de Hopf *de X (relative à l'opération de G et à la classe de la mesure λ).*

On appelle $\mathcal{C}$ la partie récurrente *et $\mathcal{D}$ la partie* dissipative. *Si $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) est de mesure totale, on dit que l'opération est totalement récurrente (resp. totalement dissipative).*

Exemple 2.1.2.11. *On peut montrer que les points x dont le stabilisateur est infini forment un ensemble borélien E. D'autre part, il est classique que le stabilisateur de tout point x est fermé. Le stabilisateur d'un point $x \in E$ est donc un ensemble discret, fermé, et infini ; on en déduit (G étant localement compact à base dénombrable) qu'un tel stabilisateur n'est pas relativement compact. Ceci montre que l'ensemble E est contenu (à un ensemble négligeable près) dans la partie récurrente de X.*

2.1.2.3 Invariance par un sous-groupe

Nous laissons là les questions de récurrence et de dissipativité, et conservons les hypothèses précédentes : X est un espace borélien standard où opère mesurablement un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs discrets.

Fixons un sous-groupe fermé H de G. Dans la situation classique où X porte une mesure σ-finie λ qui se désintègre (au sens classique) d'une façon compatible avec l'opération de H (c'est-à-dire que les conditionnelles sont portées par des ensembles H-invariants), il est facile de voir que l'invariance de λ par H équivaut à l'invariance presque sûre des conditionnelles.

Nous allons généraliser ce résultat à notre situation. Commençons par préciser ce que signifie la H-invariance d'une mesure projective sur G. Si μ est une mesure sur G qui est invariante par toute translation à gauche par un élément de h, il en va de même de toute mesure proportionnelle à μ. Cette propriété ne dépend donc que de la classe projective $[\mu]$.

Définition 2.1.2.12. *Soit $[\mu]$ une mesure projective sur G. On dit que $[\mu]$ est H-invariante si μ est H-invariante.*

Notons que H opère de façon naturelle sur l'espace des mesures projectives sur G (par $(h, [\mu]) \mapsto [\gamma(h)_*\mu]$ où $\gamma(h)$ est la translation à gauche par h). En général, un point fixe de cette opération n'est pas une mesure projective H-invariante au sens précédent.

Lemme 2.1.2.13. *Soit H un groupe topologique* à base dénombrable *opérant continûment sur un espace localement compact à base dénombrable X. Soit μ une mesure de Radon sur X. On suppose que H contient un sous-groupe* partout dense Γ *qui préserve μ. Alors H préserve μ.*

Démonstration. Soit U un ouvert relativement compact de X et g un élément de H. Donnons-nous une suite g_n d'éléments de Γ qui converge vers g (possible car H est à base dénombrable). On a $\liminf_n \mathbf{1}_{g_n U} \geq \mathbf{1}_{gU}$ par continuité de l'opération. En vertu du lemme de Fatou, on a donc $\mu(gU) \leq \liminf_n \mu(g_n U) = \mu(U)$. En appliquant ceci à g^{-1} et à l'ouvert relativement compact gU, on voit que $\mu(gU) = \mu(U)$.

Puisque X est à base dénombrable, tout ouvert de X est réunion d'une famille dénombrable d'ouverts relativement compacts. Ce qui précède entraîne donc que $\lambda(U) = \lambda(hU)$ pour tout ouvert U et tout $h \in H$. Puisque μ est une mesure de Radon, on en déduit que μ est H-invariante. □

Théorème 2.1.2.14. *On suppose que G opère mesurablement sur X avec des stabilisateurs discrets. Soit λ une mesure σ-finie sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La mesure λ est H-invariante.*
2. *Pour toute section lacunaire Σ, la mesure $a^*\lambda$ est H-invariante (pour l'opération de H sur $G \times \Sigma$ donnée par $h \cdot (g, x') = (hg, x')$).*
3. *Pour presque tout $x \in X$, $\sigma(x)$ est H-invariante (à gauche).*

Démonstration. Il est immédiat que 1 entraîne 2. Montrons que 2 entraîne 3. Soit Σ une section lacunaire et supposons que $a^*\lambda$ soit H-invariante. Pour tout $h \in H$ et pour presque tout $x' \in \Sigma'$, $\sigma_\Sigma(x')$ est h-invariante. On en déduit, H étant séparable, qu'il contient un sous-groupe dénombrable dense Γ tel que $\sigma_\Sigma(x')$ soit Γ-invariante pour presque tout $x' \in \Sigma$. En vertu du lemme 2.1.2.13, $\sigma_\Sigma(x')$ est H-invariante pour presque tout x'. Cela étant, si $x' \in \Sigma$ est tel que $\sigma_\Sigma(x')$ soit H-invariante et si $g \in G$ est tel que $\sigma(gx') = [\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')]$, il est clair que $\sigma(gx')$ est une mesure projective H-invariante (puisque la multiplication à gauche par h commute avec la multiplication à droite par g). On a donc démontré que 2 entraîne 3. Il est facile de voir de la même façon que 3 entraîne 2.

Pour conclure, il reste à vérifier que 2 entraîne 1. Soit B un borélien de X et $h \in H$. On veut montrer que $\lambda(hB) = \lambda(B)$. On peut se borner au cas où il existe une (petite) section lacunaire Σ et un ouvert V de G tel que B soit contenu dans $V\Sigma$. On a alors

$$\lambda(B) = a^*\lambda\left((a|V \times \Sigma)^{-1}(B)\right) = a^*\lambda\left(h(a|V \times \Sigma)^{-1}(B)\right)$$

où la première inégalité provient de l'injectivité de $a|V\times\Sigma$ et la deuxième de la h-invariance de $a^*\lambda$. Pour tout $x \in V\Sigma$, on a $h(a|V\times\Sigma)^{-1}(x) = (a|hV\times\Sigma)^{-1}(hx)$, de sorte que le membre de droite est égal à

$$a^*\lambda\left(a|hV \times \Sigma)^{-1}(hB)\right) = \lambda(hB)$$

où la dernière égalité provient de l'injectivité de $a|hV \times \Sigma$.

Le théorème est démontré. □

2.1.2.4 Quasi-invariance par un groupe dénombrable

Le paragraphe précédent ne se généralise pas tel quel au cas d'une mesure quasi-invariante λ. Le lemme 2.1.2.13 ne demeure pas : si G est un groupe localement compact à base dénombrable et Γ un sous-groupe dénombrable dense de G, on peut munir G d'une mesure de probabilité λ concentrée sur Γ, et alors il est clair que λ est quasi-invariante pour l'opération de Γ, mais ne l'est pas pour l'opération de G.

En revanche, le théorème 2.1.2.14 demeure lorsque l'on remplace l'invariance par la quasi-invariance si on suppose que G est dénombrable. La démonstration est facile et nous ne la donnons pas.

Proposition 2.1.2.15. *Soit X un espace borélien standard muni d'une mesure σ-finie λ. Soit G un groupe* dénombrable *opérant mesurablement sur X.*

On suppose que λ est quasi-invariante *relativement à cette opération. Pour tout $g \in G$, on a donc une dérivée de Radon-Nikodym*

$$\frac{\mathrm{d}g^*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}(x) = \theta(g, x)$$

pour λ-presque tout x.

Désintégrons λ le long de l'opération de G et soit σ l'application de désintégration. Pour λ-presque tout x, $\sigma(x)$ est la classe de la mesure sur G

$$\sum_{g\in G}\theta(g,x)\delta_g$$

(où δ_g est la mesure de Dirac en g).

Démonstration. Propositions 2.1.1.27 et 2.1.1.18. □

J'ignore si cette proposition vaut aussi pour G localement compact à base dénombrable.

Corollaire 2.1.2.16. *Sous les hypothèses de la proposition, la décomposition de Hopf est donnée par*

$$\mathcal{C}=\{x\in X\ ;\ \sum_{g\in G}\theta(g,x)=\infty\}$$

$$\mathcal{D}=\{x\in X\ ;\ \sum_{g\in G}\theta(g,x)<\infty\}.$$

Remarque 2.1.2.17. *Je ne sais pas s'il est possible d'adapter ce corollaire pour supprimer l'hypothèse de dénombrabilité. Si G est un groupe localement compact à base dénombrable et que λ est quasi-invariante, il est tentant d'écrire*

$$\mathcal{C}=\left\{x\in X\ ;\ \int_G\theta(g,x)dg=\infty\right\}$$

$$\mathcal{D}=\left\{x\in X\ ;\ \int_G\theta(g,x)dg<\infty\right\}$$

où dg est l'élément de mesure de Haar sur G. Je n'ai pas eu le temps de réfléchir sérieusement à cette question.

2.1.3 Transitivité de la désintégration le long d'un groupe

Lemme 2.1.3.1. *Soient X,Y,Z trois espaces boréliens standards et*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "r"] & \\ Y \arrow[r, "q"] & Z \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif, dont les flèches sont des applications boréliennes. Soient λ une mesure σ-finie sur X, μ une mesure de probabilité sur Y, pseudo-image de λ par p, et soit enfin ν une mesure de probabilité sur Z, pseudo-image de μ par q ; il est clair que ν est pseudo-image de λ par r.

Désintégrons, respectivement, λ au-dessus de μ le long de p et au-dessus de ν le long de r, et μ au-dessus de ν le long de q :

$$\lambda=\int d\mu(y)\lambda_y^\mu,\quad \lambda=\int d\nu(z)\lambda_z^\nu,\quad \mu=\int d\nu(z)\mu_z^\nu$$

(où, λ_y^μ est μ-presque sûrement concentrée sur $p^{-1}(y)$, etc.). Alors, pour ν-presque tout z, μ_z^ν est une pseudo-image de λ_z^ν par p, et la désintégration de λ_z^ν au-dessus de μ_z^ν le long de p est donnée par

$$\lambda_z^\nu = \int d\mu_z^\nu(y)\lambda_y^\mu.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'unicité presque sûre des mesures conditionnelles. □

Le lemme ci-après, qui est une conséquence facile du précédent, nous servira à plusieurs reprises.

Lemme 2.1.3.2. *Soient X, Y des espaces boréliens standards, et G un groupe topologique localement compact à base dénombrable opérant mesurablement sur X et Y avec des stabilisateurs discrets. Supposons donnée une mesure σ-finie λ sur $X \times Y$. Fixons une mesure de probabilité λ_Y sur Y, pseudo-image de λ par l'application de projection $X \times Y \to Y$. Soit*

$$\lambda = \int d\lambda_Y(y)\ \sigma_Y(y) \otimes \delta_y$$

la désintégration de λ qui s'en déduit (où δ_y est la masse de Dirac en y).

Faisons opérer G sur $X \times Y$ par $g \cdot (x, y) = (gx, y)$; cette opération est mesurable et à stabilisateurs discrets.

Pour λ-presque tout (x, y), la conditionnelle $\sigma_{\sigma_Y(y)}(x)$ de $\sigma_Y(y)$ le long de l'opération de G est bien définie car $\sigma_Y(y)$ est σ-finie pour λ_Y-presque tout y ; de même, la conditionnelle $\sigma_\lambda(x, y)$ de λ le long de G existe pour λ-presque tout x.

Ces conditionnelles sont égales :

$$\sigma_\lambda(x, y) = \sigma_{\sigma_Y(y)}(x)$$

pour λ-presque tout (x, y).

Démonstration. Soit Σ une section lacunaire de l'opération de G sur X. Notons que $\Sigma \times Y$ est une section lacunaire de l'opération de G sur $X \times Y$. Soit $a : G \times \Sigma \to X$ l'application associée à Σ, et soit $a \times 1_Y : G \times \Sigma \times Y \to X \times Y$ l'application associée à $\Sigma \times Y$. On vérifie que

$$(a \times 1_Y)^*\lambda = \int d\lambda_Y(y)\ (a^*\sigma_Y(y)) \otimes \delta_y.$$

Par ailleurs, si $\lambda_{\Sigma\times Y}$ est une mesure de probabilité sur $\Sigma \times Y$, pseudo-image de $(a \times 1_Y)^*\lambda$ par la projection sur $\Sigma \times Y$, λ_Y est une pseudo-image de $\lambda_{\Sigma\times Y}$ par la projection sur Σ. On peut donc désintégrer $\lambda_{\Sigma\times Y}$ au-dessus de λ_Σ :

$$\lambda_{\Sigma\times Y} = \int d\lambda_Y(y)\ \theta_y \otimes \delta_y.$$

En vertu du lemme de transitivité précédent (lemme 2.1.3.1) appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd} G \times \Sigma \times Y \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \Sigma \times Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

(et aux mesures σ-finies $(a \times 1_Y)^*\lambda$, $\lambda_{\Sigma\times Y}$ et λ_Y), nous savons que pour λ_Y-presque tout y : 1° θ_y est une pseudo-image de $a^*\sigma_Y(y)$ et 2° la désintégration de $a^*\sigma_Y(y)$ au-dessus de θ_y est donnée par

$$a^*\sigma_Y(y) = \int d\theta_y(x')\ \sigma_{\Sigma\times Y}(x', y) \otimes \delta_{x'}.$$

Ceci signifie que la conditionnelle de $a^*\sigma_Y(y)$ au-dessus de x' est proportionnelle à la conditionnelle de $(a \times 1_Y)^*\lambda$ au-dessus de (x', y), pour $\lambda_{\Sigma\times Y}$-presque tout (x', y).

Ceci démontre le lemme. □

Reprenons les notations habituelles : X est un espace borélien standard où opère mesurablement un groupe localement compact à base dénombrable G, et λ est une mesure σ-finie sur X. Voici une première conséquence du lemme 2.1.3.2.

Lemme 2.1.3.3. *Soit Σ une section lacunaire et soit $a : G \times \Sigma \to X$ l'application associée. Pour $a^*\lambda$-presque tout (g, x'), on a*

$$\sigma_{a^*\lambda}(g, x') = \sigma_\lambda(gx')$$

où l'opération de G sur $G \times \Sigma$ est donnée par $g_1 \cdot (g_2, x') = (g_1 g_2, x')$.

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 2.1.3.4. *Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit Σ une* petite *section lacunaire à l'opération de G sur X. Soit $a : G \times \Sigma \to X$ l'application associée. Désintégrons λ et $a^*\lambda$ le long de H.*

Pour $a^*\lambda$-presque tout (g, x'), on a

$$\sigma_{H,\lambda}(gx') = \sigma_{H,a^*\lambda}(g, x')$$

où l'opération de H sur $G \times \Sigma$ est donnée par $h \cdot (g, x') = (hg, x')$.

Démonstration. Soit T une section borélienne (au sens usuel) à la projection canonique $G \to G/H$; l'application $H \times T \to G$ est donc un isomorphisme mesurable. Puisque Σ est petite, on peut écrire $T = \cup T_n$ où chaque T_n est un borélien tel que l'application $T_n \times \Sigma \to T_n\Sigma$ (appliquant (g', x') sur $g'x'$) soit un isomorphisme borélien.

Notons que $T_n\Sigma$ est alors une section lacunaire à l'opération de H sur X. Fixons un indice n ; on peut supposer que $T_n\Sigma$ n'est pas négligeable (i.e. $HT_n\Sigma$ n'est pas λ-négligeable).

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H \times T_n \times \Sigma & \xrightarrow{\eta} & H \times T_n\Sigma \\ \downarrow{\scriptstyle a'} & & \downarrow{\scriptstyle a''} \\ G \times \Sigma & \xrightarrow{a} & X \end{array}$$

où $\eta(h, g', x') = (h, g'x')$, $a'(h, g', x') = (hg', x')$ et $a''(h, y') = hy'$.

L'image réciproque, par l'isomorphisme η_n, de la mesure $(a'')^*\lambda$ est donc égale à $(a')^*a^*\lambda$. Puisque η_n est H-équivariante, en désintégrant les deux mesures précédentes le long de H on obtient (proposition 2.1.1.18)

$$\sigma_{H,(a\circ a')^*\lambda}(h, g', x') = \sigma_{H,(a'')^*\lambda}(h, g'x')$$

pour $(a \circ a')^*\lambda$-presque tout (h, g', x').

D'autre part, puisque $T_n\Sigma$ est une section lacunaire à l'opération de H sur X, on a aussi (lemme 2.1.3.3)

$$\sigma_{H,(a'')^*\lambda}(h, y') = \sigma_{H,\lambda}(hy')$$

pour $(a'')^*\lambda$-presque tout (h, y'). Enfin, T_n étant lui-même une section lacunaire à l'opération de H sur G, on a (*ibid.*)

$$\sigma_{H,(a\circ a')^*\lambda}(h, g', x') = \sigma_{H,a^*}(hg', x')$$

pour $(a \circ a')^*\lambda$-presque tout (h, g', x').

Les trois égalités précédentes entraînent que

$$\sigma_{H,\lambda}(hg'x') = \sigma_{H,a^*\lambda}(hg', x')$$

pour $(a \circ a')^*\lambda$-presque tout (h, g', x') ; d'où

$$\sigma_{H,\lambda}(gx') = \sigma_{H,a^*\lambda}(g, x')$$

pour $a^*\lambda$-presque tout $(g, x') \in HT_n \times \Sigma$. Ceci étant valable pour chaque indice n, on a la même relation pour $a^*\lambda$-presque tout $(g, x') \in G \times \Sigma$, ce qui est l'énoncé du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème exprimant la transitivité de la désintégration le long d'un groupe.

Proposition 2.1.3.5. *Soit $\sigma_{G,\lambda}$ l'application de désintégration de λ le long de G. Soit H un sous-groupe fermé de G. Pour λ-presque tout $x \in X$, on peut désintégrer $\sigma_{G,\lambda}(x)$ le long de H (à gauche), et on a, pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$-presque tout $g \in G$,*

$$\sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(x)}(g) = \sigma_{H,\lambda}(gx).$$

Autrement dit, la conditionnelle de λ le long de H en gx est presque sûrement égale à la conditionnelle de $\sigma_{G,\lambda}(x)$ le long de H en g.

Démonstration. Donnons-nous une *petite* section lacunaire Σ de l'opération de G sur X et soit $a : G \times \Sigma \to X$ l'application associée. Désintégrons la mesure σ-finie $a^*\lambda$ le long de H. Nous savons (lemme 2.1.3.4) que

$$\sigma_{H,\lambda}(gx') = \sigma_{H,a^*\lambda}(g, x')$$

pour $a^*\lambda$-presque tout $(g, x') \in G \times \Sigma$. D'autre part, si

$$a^*\lambda = \int d\lambda_\Sigma(x')\sigma_\Sigma(x') \otimes \delta x'$$

est la désintégration de $a^*\lambda$ au-dessus d'une mesure de probabilité λ_Σ sur Σ qui est une pseudo-image de $a^*\lambda$, on a

$$\sigma_{H,a^*\lambda}(g, x') = \sigma_{H,\sigma_\Sigma(x')}(g)$$

pour $a^*\lambda$-presque tout (g, x') (lemme 2.1.3.2).

Fixons maintenant un $x' \in \Sigma$ tel que $\sigma_{H,\lambda}(gx') = \sigma_{H,\sigma_\Sigma(x')}(g)$ pour $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout $g \in G$. Soit g_0 un élément de G tel que $\sigma_{G,\lambda}(g_0x')$ soit la classe projective de $[\delta(g_0)_*\sigma_\Sigma(x')]$. L'isomorphisme borélien $\delta(g_0) : G \to G$ est H-équivariant à gauche (car la loi de G est associative). On a donc (proposition 2.1.1.18)

$$\sigma_{H,\sigma_\Sigma(x')}(g) = \sigma_{H,\delta(g_0)_*\sigma_\Sigma(x')}(gg_0^{-1})$$

pour $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout g. Autrement dit,

$$\sigma_{H,\sigma_\Sigma(x')}(g) = \sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(g_0x')}(gg_0^{-1})$$

pour $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout g. Posant $x = g_0x'$, ce qui précède montre que

$$\sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(x)}(g) = \sigma_{H,\lambda}(gx)$$

pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$-presque tout g.

Ceci démontre la proposition pour λ-presque tout $x \in G\Sigma$. On conclut grâce au lemme 2.1.1.23. □

Corollaire 2.1.3.6. *Pour λ-presque tout x, si l'on désintègre (au sens classique) $\sigma_{G,\lambda}(x)$ le long de $\pi : G \to H\backslash G$, la conditionnelle au-dessus de $\pi(g)$ est un représentant de la mesure projective*

$$(\rho_g)_*\sigma_{H,\lambda}(gx)$$

pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$-presque tout g.

Rappelons que les conditionnelles d'une mesure infinie ne sont uniquement définies qu'à une constante multiplicative près.

Démonstration. Immédiat vu les propositions 2.1.3.5 et 2.1.1.25. □

Pour formuler le corollaire suivant, introduisons la notion de mesure portée par un graphe borélien.

Définition 2.1.3.7. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et soit H un sous-groupe fermé de G. On dit qu'une mesure de Radon μ sur G est portée par un graphe borélien au-dessus de G/H si G contient une partie borélienne E de mesure totale pour μ telle que toute classe à droite modulo H dans G rencontre E en au plus un point.*

On vérifie qu'il revient au même de dire qu'il existe une section borélienne $G/H \to G$ (de l'application de passage au quotient $G \to G/H$) qui applique G/H sur un ensemble de mesure totale pour μ.

Corollaire 2.1.3.8. *Pour que les conditionnelles de λ le long de H soient triviales, c'est-à-dire pour que $\sigma_{H,\lambda}(x) = [\delta_e]$ pour λ-presque tout x, et il faut et il suffit que $\sigma_{G,\lambda}(x)$ soit portée par un graphe borélien au-dessus de G/H, pour λ-presque tout x.*

Démonstration. Supposons que les conditionnelles de λ le long de H soient triviales. Soit x un élément de X tel que pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$-presque tout g, on ait

$$\sigma_{H,\lambda}(gx) = \sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(x)}(g)$$

et soit E un ensemble borélien de G, de mesure totale pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$, et tel que les relations $g \in E, hg \in E$ entraînent

$$\sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(x)}(hg) = \delta(h)_* \sigma_{H,\sigma_{G,\lambda}(x)}(g).$$

Puisque les conditionnelles de λ le long de H sont triviales, on a, pour $\sigma_{G,\lambda}(x)$-presque tout g, $\sigma_{H,\lambda}(gx) = [\delta_e]$. Par suite, si g et hg appartiennent à eux, on a $[\delta_e] = [\delta_h]$ ce qui implique que $h = e$.

La réciproque résulte aussitôt du corollaire 2.1.3.6 ; en vertu du fait évident que si ν est une mesure de Radon sur G qui est portée par un graphe borélien au-dessus de G/H, ses conditionnelles au-dessus de G/H sont triviales. □

2.2 Théorie ergodique et entropie

L'objet de cette section est d'introduire l'entropie d'une mesure finie le long d'une opération de groupe et d'en faire l'étude. Dans le paragraphe 2.1.2 nous définissons l'entropie en terme de *dimension* des conditionnelles.

L'approche usuelle est de définir l'entropie le long d'un «feuilletage» qui est un «sous-feuilletage» du «feuilletage stable» (ou instable) d'un automorphisme hyperbolique α, en produisant des «partitions subordonnées au feuilletage» possédant certaines propriétés, ce qui permet de considérer l'entropie de Kolmogorov-Sinaï de α relative à une telle partition. On interprète ensuite cette entropie en terme de dimension des conditionnelles.

Nous nous bornerons au point de vue «dimensionnel». Pour nous, l'entropie d'une mesure de probabilité le long d'une opération de groupe sera essentiellement la dimension des mesures conditionnelles. Nous développerons la théorie sous cet angle, jusqu'à démontrer, sous certaines hypothèses, une formule d'additivité de l'entropie, à la manière de ce que font Mme Young et M. Ledrappier dans (Ledrappier et Young, 1985).

Tous nos outils et méthodes relèvent de ce qu'on appelle parfois «théorie géométrique de la mesure». Notre approche est, pour dire le moins, largement inspirée de (*ibid.*).

Fixons maintenant les notations et hypothèses de cette section. Comme précédemment, X est un espace borélien standard où opère mesurablement un groupe localement compact à base dénombrable G avec des stabilisateurs discrets. L'espace X porte une mesure de *probabilité* X qui donne lieu à l'application de désintégration de λ le long de G, $\sigma : X \to \mathcal{M}^1_{\mathrm{rad}}(G)$.

Nous supposons donnés un automorphisme mesurable $\alpha_X : X \to X$ et un automorphisme de groupe continu $\alpha_G : G \to G$, et faisons les hypothèses suivantes :

1. $\alpha_X(gx) = \alpha_G(g)\alpha_X(x)$ pour tous $g \in G, x \in X$;
2. α_G est *contractant* : pour tout voisinage compact U de e et pour tout compact K, il existe un entier n tel que

$$\alpha^k K \subset U$$

pour tout $k \geq n$;

3. α_X préserve λ.

Nous désignerons désormais α_X et α_G par le seul symbole α.

Lemme 2.2.0.9. *Pour λ-presque tout x, on a $\sigma(\alpha x) = \alpha_* \sigma(x)$.*

Démonstration. Voir lemme 2.1.1.18. □

2.2.1 Définition de l'entropie ; dimension des conditionnelles

2.2.1.1 Définition de l'entropie

Lemme 2.2.1.1. *Pour λ-presque tout x et tout voisinage relativement compact B de e, la limite*

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\log \sigma(x)(\alpha^{-n}B)}{n}$$

existe, et ne dépend pas de B.

Démonstration. Fixons un voisinage relativement compact B de e dans G et posons $I(x) = \log \dfrac{\sigma(x)(\alpha^{-1}B)}{\sigma(x)(B)}$. En se servant du lemme 2.2.0.9, on voit aussitôt que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\sigma(x)(\alpha^{-n}B)}{\sigma(x)(B)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma(\alpha^k x)(\alpha^{-1}B)}{\sigma(\alpha^k x)(B)}$$

et en prenant les logarithmes, en divisant par n avant de passer à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \sigma(x)(\alpha^{-n}B)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I(\alpha^k x)$$

où la limite du membre de droite existe (éventuellement infinie) pour λ-presque tout x en vertu du théorème ergodique de Birkhov appliqué à la fonction presque sûrement positive I.

L'indépendance de la limite du membre de gauche vis-à-vis de B provient du caractère contractant de α.

Lorsque n tend vers $-\infty$, l'argument est le même, et les deux limites coïncident ; en effet, la limite lorsque $n \to \infty$ est égale à l'espérance de I conditionnellement à la tribu des invariants de α, et la limite lorsque $n \to -\infty$ est égale à l'espérance de la fonction I', définie comme I en remplaçant B par $\alpha^{-1}(B)$ (ce qui, nous l'avons dit, ne change presque sûrement pas la limite), conditionnellement à la même tribu des invariants. □

Définition 2.2.1.2. *La valeur de la limite du lemme est appelée* entropie de λ le long de G en x. *Sa valeur moyenne est appelée* entropie de λ le long de G, *et notée $h_\lambda(G)$.*

Remarque 2.2.1.3. *Il ne faudrait pas croire que le nombre $h_\lambda(G)$ possède le moindre rapport avec l'entropie d'un élément $g \in G$ relative à la mesure λ, et à telle partition dénombrable de X. Dans les situations qui nous intéressent, cette dernière entropie serait d'ailleurs nulle.*

On peut penser à $h_\lambda(G)$ comme à l'entropie de l'endomorphisme α, relative à λ, dans la «direction de G». Il serait souhaitable de développer ce point de vue, et de faire le lien avec la théorie ici exposée.

Je m'autorise cependant à conserver, pour la quantité étudiée ici, le nom d'entropie, et la notation $h_\lambda(G)$, car cet usage est avéré ; voir par exemple (Einsiedler et Lindenstrauss, 2010).

J'omets la référence à α dans les énoncés et dans les notations bien que toute la théorie en dépende.

Corollaire 2.2.1.4. *On a la formule*

$$h_\lambda(G) = \int d\lambda(x)\ \log \frac{\sigma(x)(\alpha^{-1}B)}{\sigma(x)(B)}$$

pour tout voisinage ouvert relativement compact B de l'élément neutre dans G.

Démonstration. Conséquence classique du théorème ergodique de Birkhov. □

2.2.1.2 Interprétation de l'entropie en terme de dimension

Dans ce paragraphe, nous gardons les hypothèses et notations précédentes et nous supposons en outre que G est muni d'une distance d (compatible avec sa topologie) qui est invariante à droite et pour laquelle α est une similitude, et le rapport de similitude sera aussi noté α ; en particulier, pour tout $\rho > 0$, on a $\alpha(B(e,\rho)) = B(e,\alpha\rho)$ avec $\alpha < 1$. Pour simplifier, nous supposerons, dans toute la suite, que λ est *α-ergodique.*

Lemme 2.2.1.5. *La limite*

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log \sigma(x)(B(e,\rho))}{\log \rho}$$

existe, pour λ-presque tout x, et est égale à $\dfrac{h_\lambda(G)}{\log \alpha^{-1}}$.

Démonstration. Toute boule fermée de G est compacte : si $\rho > 0$ est assez petit, la boule fermée $B(e,\rho)$ est compacte car G est localement compact, et, α étant une similitude contractante, on en déduit que toute boule fermée $B(e,\alpha^k\rho)$ est compacte aussi ($k \in \mathbf{Z}$) ; de là, la distance de G étant invariante à droite, on voit que toute boule fermée de G est compacte.

Le présent lemme résulte alors facilement du lemme 2.2.1.1. □

Avant d'énoncer la proposition suivante, rappelons qu'une mesure μ sur un espace métrique (Y,d) est dite «de dimension exacte égale à δ» si, pour μ-presque tout y, la limite

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log \mu(B(y,\rho))}{\log \rho}$$

existe et est égale à δ.

Proposition 2.2.1.6. *Pour λ-presque tout $x \in X$, $\sigma(x)$ est une mesure de dimension exacte égale à* $\dfrac{h_\lambda(G)}{\log \alpha^{-1}}$.

Démonstration. Soit X' un borélien de mesure totale dans X tel que les relations $x, gx \in X'$ entraînent $\sigma(gx) = \delta(g)_*\sigma(x)$, et qu'en outre on ait

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\log \sigma(x)(B(e,\rho))}{\log \rho} = \frac{h_\lambda(G)}{\log \alpha^{-1}}$$

pour tout $x \in X'$. Puisque la distance de G est invariante à droite, on a, pour tout $g \in G$, $B(g,\rho) = B(e,\rho)g$. En particulier, si $x \in X'$ et $gx \in X'$, on a

$$\lim_{\rho} \frac{\log \sigma(x)(B(g,\rho))}{\log \rho} = \lim_{\rho} \frac{\log \sigma(gx)(B(e,\rho))}{\log \rho} = \frac{h_\lambda(G)}{\log \alpha^{-1}}.$$

La proposition s'ensuit, car pour λ-presque tout x et pour $\sigma(x)$-presque tout g, on a $gx \in X'$. □

Corollaire 2.2.1.7. *Si $h_\lambda(G) > 0$, les conditionnelles de λ le long de G sont presque sûrement sans atome.*

Démonstration. Une mesure de Radon possédant des atomes ne peut pas être de dimension exacte > 0. □

2.2.1.3 Nullité de l'entropie

Proposition 2.2.1.8. *Pour que l'entropie de λ le long de G soit nulle, il faut et il suffit que les conditionnelles de λ le long de G soient triviales.*

Démonstration. Il est clair que si $\sigma(x) = [\delta_e]$ pour λ-presque tout G, l'entropie de λ le long de H est nulle.

Réciproquement, supposons que $h_\lambda(G) = 0$, c'est-à-dire (corollaire 2.2.1.4) que

$$\frac{\sigma(x)(\alpha^{-1}(B))}{\sigma(x)(B)} = 0$$

pour λ-presque tout x, où B est un voisinage ouvert relativement compact de e dans G, fixé à l'avance.

On a donc, pour λ-presque tout x et tout entier $k \in \mathbf{Z}$,

$$\sigma(x)\left(\alpha^{-(k+1)}(B) \setminus \alpha^{-k}(B)\right) = 0$$

et on en déduit, en prenant la réunion sur $k \in \mathbf{Z}$, et en tenant compte du caractère contractant de α, que

$$\sigma(x)(G \setminus \{e\}) = 0$$

pour λ-presque tout x. Autrement dit, $\sigma(x)$ est triviale pour λ-presque tout x. □

Corollaire 2.2.1.9. *Si $h_\lambda(G)$ est nulle (resp. non nulle), l'opération de G sur X est totalement dissipative (resp. totalement récurrente) relativement à λ.*

Démonstration. Si $h_\lambda(G) = 0$, les conditionnelles de λ le long de G sont presque sûrement triviales donc finies.

Réciroquement, si les conditionnelles de λ le long de G sont finies presque sûrement, on a $h_\lambda(G) = 0$ en faisant tendre n vers $+\infty$ dans le lemme 2.2.1.1.

Il suffit pour obtenir le corollaire d'utiliser le théorème 2.1.2.6. □

2.2.2 Croissance de l'entropie

2.2.2.1 Dimension transverse ; entropie transverse

Comme précédemment, X est un espace borélien standard, muni d'une mesure de *probabilité* λ ; α_X est un automorphisme de X préservant λ et tel que λ soit α_X-*ergodique* ; G est un groupe localement compact à base dénombrable muni d'une distance compatible invariante à droite d, et d'un automorphisme α_G, qui est une similitude de rapport $\alpha < 1$. On se donne une opération mesurable de G sur X avec des stabilisateurs discrets, telle que, pour tous $g \in G$ et $x \in X$, on ait $\alpha_X(gx) = \alpha_G(g)\alpha_X(x)$.

Par définition, G est un groupe doublant, et en particulier est, comme espace métrique, doublant (corollaire 1.1.3.5).

Soit $\sigma : X \to \mathcal{M}^1_{\mathrm{rad}}(G)$ l'application de désintégration de λ le long de G. Les notions en lien avec l'entropie ci-dessous sont relatives à α_X et α_G (et nous noterons α_X et α_G par la même lettre α).

Proposition 2.2.2.1. *L'entropie de λ le long de G est finie, majorée par une constante ne dépendant que de G (et α).*

Démonstration. Les conditionnelles de λ le long de G sont presque sûrement de Radon, et les boules fermées de G sont compactes ; il suffit d'appliquer la proposition 1.1.3.10. □

Proposition 2.2.2.2. *Si H est un sous-groupe fermé de G tel que $\alpha H = H$, on a $h_\lambda(G) \geq h_\lambda(H)$.*

L'entropie de λ le long de H est bien définie puisque α induit un automorphisme sur H qui est évidemment contractant.

Démonstration. Notons σ_G et σ_H respectivement les applications de désintégration de λ le long de G et H, et $\pi : G \to G/H$ l'application de passage au quotient.

Nous allons appliquer la proposition 1.1.3.16. Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de e dans G. Pour λ-presque tout x, nous pouvons définir la mesure de probabilité

$$\nu(x) = \frac{\sigma_G(x)|B}{\sigma_G(x)(B)};$$

c'est la mesure de probabilité obtenue en normalisant la restriction de $\sigma(x)$ à B.

Pour λ-presque tout x, si l'on désintègre $\nu(x)$ le long de π, la conditionnelle que l'on obtient au-dessus de $\pi(g)$ est (pour $\nu(x)$-presque tout g) proportionnelle à la restriction de $\sigma_H(gx)$ à un voisinage de e dans H (proposition 2.1.3.5). En particulier, ces conditionnelles sont presque sûrement de dimension exacte égale à $\dfrac{h_\lambda(H)}{\log \alpha^{-1}}$. La proposition 1.1.3.16 montre alors que $\overline{\dim}(\nu(x), g) \geq \dfrac{h_\lambda(H)}{\log \alpha^{-1}}$ pour $\nu(x)$-presque tout g.

Mais, B étant un voisinage ouvert de e, la mesure $\nu(x)$ est-elle même de dimension exacte presque partout égale à $\dfrac{h_\lambda(G)}{\log \alpha^{-1}}$, en vertu de la proposition 2.2.1.6. Nous avons donc démontré que $h_\lambda(G) \geq h_\lambda(H)$.

□

Nous allons maintenant préciser ce résultat et définir une notion de dimension transverse à H. Nous supposerons que H est un sous-groupe fermé, invariant (globalement) par α, et *distingué*. Cette dernière hypothèse assure que G/H porte une distance quotient qui est définie de façon naturelle.

Explicitement, si d est la distance (invariante à droite) de G, on pose

$$d(gH, g'H) = \inf\{d(gh, g'h'); h, h' \in H\}$$

et on vérifie qu'on définit ainsi une distance sur G/H, qui est invariante à droite (pour l'opération de G/H sur lui-même), que l'application de passage au quotient $\pi : G \to G/H$ est 1-lipschitzienne, et que l'automorphisme de groupe $G/H \to G/H$ qu'induit α par passage au quotient est une similitude de rapport α.

Comme, en outre, G/H est localement compact à base dénombrable, nous pouvons résumer tout ceci en disant que G/H est canoniquement muni d'une structure de groupe doublant lorsque H est un sous-groupe fermé, (globalement) α-invariant et distingué.

Nous conservons ces hypothèses et notations dans l'énoncé des résultats et définitions suivants.

Proposition 2.2.2.3. *Pour tout voisinage ouvert relativement compact B de e dans G, pour λ-presque tout x, l'image par π de la mesure de probabilité*

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

est de dimension inférieure presque sûrement constante, et la valeur presque sûre de cette dimension inférieure ne dépend pas de B.

Démonstration. Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de e dans G et posons

$$\nu^B(x) = \frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

pour tout $x \in X$ tel que cela ait un sens (donc pour λ-presque tout x).

Notons aussi $\theta^B(x)$ l'image par π de $\nu^B(x)$; c'est donc (λ-presque sûrement) une mesure de probabilité sur G/H portée par $\pi(B)$. Nous allons commencer par montrer que la dimension inférieure de $\theta^B(x)$ en l'élément neutre $\pi(e) \in G/H$ est λ-presque sûrement constante en x ; nous en déduirons que cette valeur constante ne dépend pas de B. Ensuite nous montrerons que la dimension inférieure de $\theta^B(x)$ en presque tout point est égale à sa dimension en $\pi(e)$, et ce, λ-presque sûrement.

Notons, pour simplifier, $B^T(\rho)$ l'image inverse, par π, de la boule $B(\pi(e), \rho)$ de G/H, c'est-à-dire l'ensemble $B(e, \rho)H$, et posons

$$\delta_B(x) = \liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \theta^B(x)(B(\pi(e), \rho))}{\log \rho} = \liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \sigma(x)(B \cap B^T(\rho))}{\log \rho}$$

où, dans la deuxième égalité (qui résulte aussitôt des définitions) nous commettons l'abus de langage usuel de confondre $\sigma(x)$ avec une mesure dont elle est la classe projective.

Pour λ-presque tout x, on a, vu le lemme 2.2.0.9,

$$\delta_B(\alpha x) = \liminf_{\rho \to 0} \frac{\log \sigma(x)(\alpha^{-1}B \cap B^T(\alpha^{-1}\rho))}{\log \rho}$$

et le membre de droite est clairement égal à $\delta_{\alpha^{-1}B}(x)$.

Cela étant, si $B' \subset B \subset B''$ sont des voisinages ouverts relativement compacts de e, on a

$$\delta_{B'}(x) \geq \delta_B(x) \geq \delta_{B''}(x)$$

de sorte que, pour montrer que δ_B est presque sûrement constante et ne dépend pas de B, il suffit de le démontrer lorsque B est une boule ouverte $B(e, R)$. Dans ce cas, on a $B \subset \alpha^{-1}(B)$, ce qui entraîne $\delta_B(\alpha x) \leq \delta_B(x)$ au vu de ce qui précède.

Il est facile, en utilisant le théorème ergodique de Birhov, et l'ergodicité de λ, d'en déduire que δ_B est presque partout constante. Puisque $\delta_B \circ \alpha = \delta_{\alpha^{-1}B}$, la valeur presque sûre de δ_B est égale à la valeur presque sûre de $\delta_{\alpha^k B}$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Il est clair alors que δ_B est égale presque partout à une constante $\delta_{G/H}$ qui ne dépend pas de B.

Soit maintenant X' une partie de mesure totale dans X, où $\delta_B = \delta_{G/H}$ pour tout voisinage ouvert relativement compact B de e, et tel qu'en outre les relations $x, gx \in X'$ entraînent $\sigma(gx) = \delta(g)_* \sigma(x)$.

Pour tout $x \in X'$ et tout g tel que $gx \in X'$, on a

$$\underline{\dim}(\theta^B(x), \pi(g)) = \liminf \frac{\log \sigma(x)(B \cap \pi^{-1}(B(\pi(g), \rho)))}{\log \rho}$$

et $\pi^{-1}(B(\pi(g), \rho)) = B^T(\rho)H$ car H est distingué dans G. La quantité précédente est donc égale à

$$\liminf \frac{\log \sigma(gx)(Bg^{-1} \cap B^T(\rho))}{\log \rho}.$$

Or, si g appartient à B, l'ensemble Bg^{-1} est un voisinage ouvert relativement compact de e, de sorte que

$$\underline{\dim}(\theta^B(x), \pi(g)) = \delta_{Bg^{-1}}(gx).$$

La conclusion s'ensuit. □

Définition 2.2.2.4. *On appelle cette quantité «dimension transverse» (à H, le long de G). On la note $\delta_{G/H}$.*

Proposition 2.2.2.5. *On a $h_\lambda(G) - h_\lambda(H) \geq \log \alpha^{-1} \delta_{G/H}$.*

Démonstration. Il suffit de raisonner comme dans la démonstration de la proposition 2.2.2.2 en appliquant cette fois-ci la proposition 1.1.3.15 au lieu de la proposition 1.1.3.16. □

La démonstration des propositions 2.2.2.2 et 2.2.2.5 contient l'assertion suivante que nous formulons séparément.

Corollaire 2.2.2.6. *Soit B un voisinage ouvert relativement compact de l'élément neutre de G et, pour presque tout x, $\nu^B(x)$ la mesure*

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}.$$

Si l'on désintègre $\nu^B(x)$ le long de π, les conditionnelles sont presque toutes de dimension exacte égale à $\dfrac{h_\lambda(H)}{\log \alpha^{-1}}$.

Questions 1. *Conservons les hypothèes précédentes.*

1. *Si $\delta_{G/H} = 0$, est-ce que $\sigma_G(x)$ est presque sûrement portée par H ? Autrement dit, la nullité de la dimension transverse implique-t-elle que la «mesure transverse» soit triviale ?*
2. *Peut-on démontrer, sous des hypothèses de «non-dégénérescence» des mesures conditionnelles, que la relation $h_\lambda(H) > 0$ entraîne $\delta_{G/H} = \dim(G/H)$ (par exemple en supposant que H est presque sûrement négligeable pour $\sigma_G(x)$) ?*

Avant d'achever ce paragraphe, introduisons, pour référence future, une dernière définition.

Définition 2.2.2.7. *Soit μ une mesure de Radon sur un groupe localement compact à base dénombrable G, et H un sous-groupe fermé distingué de G. Nous dirons que μ est absolument continue transversalement à H si, pour tout ouvert relativement compact $B \subset G$ tel que $\mu(B) > 0$, l'image, dans G/H, de la restriction de μ à B, est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G/H.*

Rappelons que la mesure de Haar de G/H est le quotient par H de la mesure de Haar de G. Dans la situation de ce paragraphe, pour vérifier que les conditionnelles de λ le long de G soient absolument continues transversalement à H on peut, dans la définition, se borner aux ensembles B qui sont des voisinages de l'élément neutre de G.

2.2.3 Inégalité maximale

Nous démontrons ici une inégalité maximale due à Rudolph et Lindenstrauss (Lindenstrauss, 2006). Dans une version antérieure, cette inégalité servait à la démonstration du théorème de Ledrappier-Young (section 2.2.6) ; ce n'est plus le cas et cette inégalité n'est pas utilisée ailleurs dans cette thèse.

Théorème 2.2.3.1. *Soit X un espace borélien standard où un groupe métrique doublant G opère mesurablement avec des stabilisateurs uniformément discrets. On suppose que G possède la propriété de Besicovitch. Alors, si λ est une probabilité sur X, f une fonction positive et λ-intégrable sur X, et si l'on pose*

$$M[f](x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\sigma(x)(B(e,r))} \int_{B(e,r)} f(gx) d(\sigma(x))(g)$$

on a, pour tout $\lambda > 0$, l'inégalité maximale

$$\lambda\{x \in X; M[f](x) > \lambda\} \leq \frac{C\|f\|_1}{\lambda}$$

où C est une constante ne dépendant que de la constante de Besicovitch de G.

Démonstration. Nous noterons, pour abréger, $I(r,x)$ la moyenne

$$\frac{1}{\sigma(x)(B(e,r))}\int_{B(e,r)} f(gx)\ d\sigma(x)(g).$$

Fixons $\lambda > 0$. Pour $R > 0$, appelons E_R l'ensemble des x pour lesquels

$$\sup_{0<r<R} I(r,x) > \frac{\lambda}{2}$$

et E l'ensemble E_∞.On peut se donner $R > 0$ tel que $\lambda(E_R) > \frac{1}{2}\lambda(E)$. Il s'agit donc de contrôler $\lambda(E_R)$. Soit $r : E_R \to]0,R[$ une application mesurable telle que pour tout $x \in E_R$ on ait $I(r(x),x) > \lambda/2$.

Soit U la boule fermée $B(e,R/2)$, et $\Delta = U^2$ la boule $B(e,R)$. Ce sont des voisinages symétriques compacts de e. Soit Σ une section U-lacunaire et Δ-complète.

Puisque Σ est Δ-complète, on a

$$\lambda(E_R) \leq a^*\lambda\{(g_0,x') \in \Delta\times\Sigma; g_0x' \in E_R\}.$$

En utilisant l'invariance à droite de la distance de G et la définition de σ, on voit que pour $a^*\lambda$-presque tout $(g_0,x') \in \Delta\times\Sigma$ tel que $g_0x' \in E_R$, on a

$$\frac{1}{\sigma_\Sigma(x')(B(g_0,r(g_0x')))}\int_{B(g_0,r(g_0x'))} f(gx')d\sigma_\Sigma(x')(g) = I(r(g_0x'),g_0x') > \frac{\lambda}{2}.$$

Fixons $x' \in \Sigma'$ et majorons la $\sigma_\Sigma(x')$-mesure des $g_0 \in \Delta$ tels que $g_0x' \in E_R$. Puisque G possède la propriété de Besicovitch, on peut se donner une partie $\Delta' \subset \Delta$ telle que les boules $B(g_0,r(g_0x'))$ recouvrent Δ lorsque g_0 parcourt Δ', avec une multiplicité $\leq C(G)$ où $C(G)$ ne dépend que de la constante de Besicovitch de X (lemme 1.1.2.5). On a donc

$$\begin{aligned}\sigma_\Sigma(x')\{g_0 \in \Delta; g_0x' \in E_R\} &\leq \sum_{g_0\in\Delta'} \sigma_\Sigma(x')(B(g_0,r(g_0x'))) \\ &\leq \frac{2}{\lambda}C(G)\int_{B(e,2R)} f(gx')d\sigma_\Sigma(x')(g).\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$a^*\lambda\{(g_0,x') \in \Delta\times\Sigma; g_0x' \in E_R\} \leq \frac{2C(G)}{\lambda}\int d\lambda(x)f(x)\kappa(x)$$

où l'on a posé $\kappa(x) = \mathrm{Card}\{(g_0,x') \in B(e,2R)\times\Sigma; g_0x' = x\}$; et il suffit, pour conclure, de voir que κ est uniformément bornée par une constante ne dépendant que de G (lemme 2.1.1.6).

Le théorème est démontré. □

On peut se demander si l'hypothèse que G possède la propriété de Besicovitch est bien nécessaire. Je ne peux l'affirmer certainement, mais cela me paraît vraisemblable, car la validité du lemme maximal dont nous faisons usage dans la démonstration est équivalente à la propriété de Besicovitch (faible), comme l'affirme D. Preiss dans (Preiss, 1983), et le démontrent P. Assouad et Th. Quentin de Gromard dans (Assouad et Quentin de Gromard, 2006).

2.2.4 Deux lemmes techniques

Les résultats de cette sous-section sont utiles à la sous-section suivante.

2.2.4.1 Enoncés

Nous allons généraliser deux lemmes sur les mesures de l'espace euclidien à la situation des conditionnelles d'une mesure de probabilité le long d'une opération de groupe. Commençons par rappeler les énoncés classiques.

Fixons les notations. Nous nous plaçons dans un espace métrique complet séparable X possédant la propriété de Besicovitch et considérons deux mesures de Radon μ, ν, et supposons pour simplifier que μ est *finie*.

Pour tout $x \in X$ et tout rayon $\rho > 0$, posons

$$\phi_\rho(x) = \frac{\nu(B(x,\rho))}{\mu(B(x,\rho))} \in [0, +\infty]$$

et

$$\phi_*(x) = \inf_{\rho>0} \phi_\rho(x).$$

Lemme 2.2.4.1. *La fonction $-\log \phi_*$ est ν-intégrable et on a*

$$\int -\log \phi_* d\nu \leq C(X)\mu(X)$$

où $C(X)$ est la constante de Besicovitch de X.

Démonstration. Soit E_t l'ensemble des x tels que $\phi_*(x) < e^{-t}$ ($t > 0$ fixé). Si $x \in E_t$, il existe un rayon $r(x) > 0$ tel que $\nu(B(x, r(x))) < e^{-t}\mu(B(x, r(x)))$. Soit A une partie de E_t telle que les $B(x, r(x))$ recouvrent E_t avec multiplicité $\leq C(X)$, où $C(X)$ est la constante de Besicovitch de X. On a donc

$$\nu(E_t) \leq \sum_{x \in A} \nu(B(x, r(x))) \leq e^{-t} C(X)\mu(X).$$

En intégrant, on obtient

$$\int_0^\infty \nu\{x \in X \ ; \ -\log \phi_*(x) > t\} \ dt \leq C(X)\mu(X) \int_0^\infty e^{-t} \ dt$$

d'où le lemme. □

Lemme 2.2.4.2. *Si l'on suppose que ν est absolument continue par rapport à μ, on a*

$$\lim_{\rho \to 0} \phi_\rho(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x)$$

pour μ-presque tout x.

Voir (Mattila, 1995) théorème 2.12.

Nous allons maintenant formuler et démontrer les lemmes correspondants dans le cadre des conditionnelles le long d'une opération de groupe. Fixons les notations. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable opérant mesurablement sur un espace borélien standard X avec des stabilisateurs *uniformément discrets*. Soit H un sous-groupe distingué fermé de G. Le quotient G/H

est localement compact à base dénombrable, donc métrisable. Nous supposons que le groupe topologique localement compact à base dénombrable G/H est muni d'une distance compatible, propre et invariante par translation à droite, que nous notons d. Nous faisons en outre l'hypothèse que l'espace métrique G/H possède la propriété de Besicovitch.

Dans ce qui suit, toutes les boules sont relatives à cette distance. Par exemple, $B(H,\rho)$ désigne la boule (ouverte) de rayon ρ centrée en l'élément neutre de G/H. Nous noterons $\pi : G \to G/H$ l'application de passage au quotient.

Soit λ une mesure de probabilité sur X. Désintégrons la le long de l'opération de G et soit σ l'application de désintégration. Notons que $\sigma(x)$ est une mesure de Radon projective pour λ-presque tout x. Désintégrons aussi λ le long de H et soit σ_H l'application de désintégration associée.

Fixons des voisinages relativement compacts $A \subset B$ de l'élément neutre dans G. Pour tout $x \in X$ et tout $\rho > 0$, posons

$$\phi_\rho(x) = \frac{\pi_*(\sigma(x)|A)(B(H,\rho))}{\pi_*(\sigma(x)|B)(B(H,\rho))}.$$

Pour abréger, nous noterons $B_\rho^T(g)$ $(g \in G)$ l'ensemble $\pi^{-1}(B(\pi(g),\rho))$, de sorte que

$$\phi_\rho(x) = \frac{\sigma(x)(A \cap B_\rho^T(e))}{\sigma(x)(B \cap B_\rho^T(e))}.$$

Notons la relation $B_\rho^T(g)g' = B_\rho^T(gg')$, conséquence de l'invariance de d par translation à droite.

Posons aussi $\phi_*(x) = \inf_{\rho>0} \phi_\rho(x)$. Nous pouvons maintenant énoncer les résultats de ce paragraphe.

Lemme 2.2.4.3. *L'intégrale*

$$\int -\log \phi_*(x) d\lambda(x)$$

est finie.

Lemme 2.2.4.4. *Pour λ-presque tout x, on a*

$$\lim_{\rho\to 0} \phi_\rho(x) = \frac{\sigma_H(x)(A)}{\sigma_H(x)(B)}$$

où σ_H est l'application de désintégration de λ le long de H.

2.2.4.2 Démonstration du lemme 2.2.4.3

Fixons un voisinage compact symétrique Δ de l'élément neutre dans G tel que $\Delta^4 \subset A$. Donnons-nous (théorème 2.1.1.3) une section Δ-lacunaire Σ à l'opération de G sur X telle que $X = \Delta^2\Sigma$. On a

$$\begin{aligned}\int -\log \phi_* d\lambda &\leq \int d(a^*\lambda)(g,x')\mathbf{1}_{\Delta^2}(g)(-\log \phi_*(gx')) \\ &= \int d\lambda_\Sigma(x') \int_{\Delta^2} d(\sigma_\Sigma(x'))(g)(-\log \phi_*(gx')).\end{aligned}$$

Pour λ_Σ-presque tout x' et $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout g, on a $\sigma(gx') = [\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')]$. Fixons un tel x'. On a, la fonction ϕ_* étant majorée par 1,

$$\int_{\Delta^2} -\log \phi_*(gx')d(\sigma_\Sigma(x'))(g) = \int_0^\infty \sigma_\Sigma(x')\{g \in \Delta^2 \ ; \ \phi_*(gx') < e^{-t}\}dt.$$

Si l'on pose

$$\tilde{\phi}_\rho(x', g) = \frac{\sigma_\Sigma(x')(\Delta^2 \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(B\Delta^2 \cap B_\rho^T(g))}$$

(où $B\Delta^2$ est l'image de $B \times \Delta^2$ par l'application $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$) et

$$\tilde{\phi}_*(x', g) = \inf_{\rho>0} \tilde{\phi}_\rho(x', g)$$

on a

$$\tilde{\phi}_*(x', g) \leq \phi_*(gx')$$

pour λ_Σ-presque tout x' et $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout $g \in \Delta^2$. En effet, si $g \in \Delta^2$ est tel que $\sigma(gx') = [\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')]$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_\rho(gx') &= \frac{\sigma(gx')(A \cap B_\rho^T(e))}{\sigma(gx')(B \cap B_\rho^T(e))} \\
&= \frac{\sigma_\Sigma(x')(Ag \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(Bg \cap B_\rho^T(g))} \\
&\geq \frac{\sigma_\Sigma(x')(\Delta^2 \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(B\Delta^2 \cap B_\rho^T(g))}
\end{aligned}$$

puisque $\Delta^2 \subset Ag$ (resp. $Bg \subset B\Delta^2$) pour tout $g \in \Delta^2$.

Cela étant, pour λ_Σ-presque tout x', on a

$$\int_{\Delta^2} d\sigma_\Sigma(x')(g)(-\log \tilde{\phi}_*(x', g)) \leq c(n)\sigma_\Sigma(x')(B\Delta^2)$$

en vertu du lemme 2.2.4.1, puisque G/H possède la propriété de Besicovitch. Il ne reste plus qu'à intégrer (en $d\lambda_\Sigma(x')$) pour conclure, compte tenu du lemme 2.1.1.11.

2.2.4.3 Démonstration du lemme 2.2.4.4

Nous aurons besoin du fait élémentaire suivant.

Lemme 2.2.4.5. *Soit μ une mesure de Radon sur G dont le support contient l'élément neutre. Soient $A \subset B$ des voisinages compacts de l'élément neutre. Soit ν une pseudo-image de μ par π et*

$$\mu = \int_{G/H} d\nu(x)\mu_x$$

la désintégration de μ associée.

Pour μ-presque tout $g \in B$, on a

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\mu(A \cap B_\rho^T(g))}{\mu(B \cap B_\rho^T(g))} = \frac{\mu_{\pi(g)}(A)}{\mu_{\pi(g)}(B)}.$$

Démonstration. Puisque l'espace métrique quotient G/H possède la propriété de Besicovitch, le membre de gauche est égal à la dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{\mathrm{d}(\pi_*(\mu|A))}{\mathrm{d}(\pi_*(\mu|B))}(\pi(g))$$

pour μ-presque tout $g \in B$. On vérifie aussitôt que cette dérivée de Radon-Nikodym est égale au membre de droite. □

Passons maintenant à la démonstration du lemme 2.2.4.4.

1. Soient $A' \subset B'$ deux voisinages compacts de l'élément neutre dans G. Soit Σ une section lacunaire de l'opération de G sur X. On a, pour presque tout $x' \in \Sigma$ et pour $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout $g \in A'$,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sigma_\Sigma(x')(A' \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(B' \cap B_\rho^T(g))} = \frac{\sigma_H(gx')(A' \cap H)}{\sigma_H(gx')(B' \cap H)}.$$

   Cela provient du lemme 2.2.4.5 ci-dessus et du corollaire 2.1.3.6.

2. Posons maintenant, pour tout $x \in X$,

$$\theta(x) = \limsup_{\rho\to 0} \left| \frac{\sigma(x)(A \cap B_\rho^T)}{\sigma(x)(B \cap B_\rho^T)} - \frac{\sigma_H(x)(A \cap H)}{\sigma_H(x)(B \cap H)} \right|.$$

   Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, les x pour lesquels $\theta(x) \geq \varepsilon$ forment une partie négligeable pour λ.

3. Fixons un rayon $r > 0$ assez petit (en un sens que nous préciserons bientôt). Posons pour alléger les notations $U = B(e, r)$; c'est un voisinage ouvert relativement compact de l'élément neutre. Donnons-nous une section U-lacunaire et U^2-complète Σ de l'opération de G sur X. Pour presque tout $x' \in \Sigma$ et $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout g, on a $\sigma(gx') = [\delta(g)_*\sigma_\Sigma(x')]$; par suite, pour tout $\rho > 0$,

$$\frac{\sigma(gx')(A \cap B_\rho^T)}{\sigma(gx')(B \cap B_\rho^T)} = \frac{\sigma_\Sigma(x')(Ag \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(Bg \cap B_\rho^T(g))}.$$

   Nous supposons r assez petit pour que les ensembles

$$A_{-r} = \bigcap_{g\in U^2} Ag, \quad B_{-r} = \bigcap_{g\in U^2} Bg$$

   soient des voisinages de l'élément neutre. Introduisons aussi les «épaississements»

$$A_{+r} = AU^2, \quad B_{+r} = BU^2$$

   qui sont relativement compacts.

4. On a donc, pour presque tout $x' \in \Sigma$ et $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout $g \in U^2$,

$$\frac{\sigma_\Sigma(x')(A_{-r} \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(B_{+r} \cap B_\rho^T(g))} \leq \frac{\sigma(gx')(A \cap B_\rho^T)}{\sigma(gx')(B \cap B_\rho^T)} \leq \frac{\sigma_\Sigma(x')(A_{+r} \cap B_\rho^T(g))}{\sigma_\Sigma(x')(B_{-r} \cap B_\rho^T(g))}.$$

On en déduit, vu le point 1 ci-dessus, l'encadrement

$$\frac{\sigma_H(gx')(A_{-r}\cap H)}{\sigma_H(gx')(B_{+r}\cap H)} \leq \liminf_{\rho\to 0}\frac{\sigma(gx')(A\cap B_\rho^T)}{\sigma(gx')(B\cap B_\rho^T)}$$
$$\leq \limsup_{\rho\to 0}\frac{\sigma(gx')(A\cap B_\rho^T)}{\sigma(gx')(B\cap B_\rho^T)} \leq \frac{\sigma_H(gx')(A_{+r}\cap H)}{\sigma_H(gx')(B_{-r}\cap H)}.$$

5. Posons

$$\theta'_r(x) = \left|\frac{\sigma_H(x)(A\cap H)}{\sigma_H(x)(B\cap H)} - \frac{\sigma_H(x)(A_{-r}\cap H)}{\sigma_H(x)(B_{+r}\cap H)}\right| + \left|\frac{\sigma_H(x)(A\cap H)}{\sigma_H(x)(B\cap H)} - \frac{\sigma_H(x)(A_{+r}\cap H)}{\sigma_H(x)(B_{-r}\cap H)}\right|.$$

On sait, d'après le point 4, que pour presque tout $x' \in \Sigma$ et $\sigma_\Sigma(x')$-presque tout $g \in U^2$, on a $\theta(gx') \leq \theta'_r(gx')$. On a donc, Σ étant U^2-complète,

$$\begin{aligned}\lambda\{x\in X\ ;\ \theta(x)\geq\varepsilon\} &\leq a^*\lambda\{(g,x')\in U^2\times\Sigma\ ;\ \theta(gx')\geq\varepsilon\}\\ &\leq a^*\lambda\{(g,x')\in U^2\times\Sigma\ ;\ \theta'_r(gx')\geq\varepsilon\}\\ &= \int_{\theta'_r\geq\varepsilon} d\lambda(x)\kappa(x)\end{aligned}$$

où $\kappa(x)$ est le cardinal de l'ensemble des $(g,x')\in U^2\times\Sigma$ tels que $gx'=x$. D'après le lemme 2.1.1.6, κ est uniformément majorée par une constante $K>0$ *indépendante de* r.
On obtient finalement

$$\lambda\{x\ ;\ \theta(x)\geq\varepsilon\} \leq K\lambda\{x\ ;\ \theta'_r(x)\geq\varepsilon\}$$

pour tout $r>0$. Il suffit, pour conclure, de voir que $\theta'_r(x)$ tend vers 0 avec r, puisque A et B sont des ensembles ouverts relativement compacts et que $\sigma_H(x)$ est une mesure de Radon. Le lemme est démontré.

2.2.5 La formule de Ledrappier-Young

Nous reprenons les hypothèses et notations posées au début du paragraphe 2.2.2.1. Soit H un sous-groupe fermé distingué de G. Rappelons que le quotient G/H est un groupe métrique doublant et que nous notons $\pi : G\to G/H$ l'application de passage au quotient. Nous faisons deux hypothèses supplémentaires.

1. L'opération de G sur X est à stabilisateurs *uniformément discrets*.
2. L'espace métrique G/H jouit de la propriété de Besicovitch.

Théorème 2.2.5.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$h_\lambda(G) = h_\lambda(H) + \log\alpha^{-1}\delta_{G/H}.$$

Démonstration. Pour alléger les notations (déjà passablement lourdes), nous nous bornerons au cas où $\alpha : G\to G$ est une similitude de rapport $\alpha = e^{-1}$, ce qui ne change absolument rien à la démarche et permet de faire l'économie d'un symbole.

Rappelons que nous avons démontré l'inégalité

$$h_\lambda(G) - h_\lambda(H) \geq \delta_{G/H}$$

sous des hypothèses plus générales (proposition 2.2.2.3).

Il s'agit donc d'établir l'inégalité réciproque. Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de l'élément neutre dans G. Nous devons minorer la dimension locale inférieure de la mesure

$$\pi_* \left(\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)} \right)$$

en l'élément neutre de G/H, pour λ-presque tout x (proposition 2.2.2.3). Introduisons une notation pour les «boules transverses», images réciproques par π des boules de G/H. Pour $\rho > 0$ et $g \in G$, soit

$$B_\rho^T(g) = \pi^{-1}(B(\pi(g), \rho))$$

et notons que l'invariance à droite de la distance de G/H entraîne $B_\rho^T(gg') = B_\rho^T(g)g'$ pour tous $g, g' \in G$. Posons aussi $B_\rho^T = B_\rho^T(e)$, où e est l'élément neutre de G.

Pour majorer $\delta_{G/H}$, il suffit de majorer

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{-n} \log \left(\frac{\sigma(x)(B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(B)} \right)$$

pour λ-presque tout x (lemme 1.1.2.2).

La clef de la démonstration est la relation

$$\frac{\sigma(x)(B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(B)} = \frac{\sigma(x)(B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(\alpha B \cap B_{e^{-n}}^T)} \times \frac{\sigma(x)(\alpha B)}{\sigma(x)(B)} \times \frac{\sigma(x)(\alpha B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(\alpha B)}$$

qui donne, en itérant,

$$\frac{\sigma(x)(B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(B)} = \prod_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\sigma(\alpha^{-i}x)(B \cap B_{e^{-(n-i)}}^T)}{\sigma(\alpha^{-i}x)(\alpha B \cap B_{e^{-(n-i)}}^T)} \times \frac{\sigma(\alpha^{-i}x)(\alpha B)}{\sigma(\alpha^{-i}x)(B)} \right) \times \frac{\sigma(\alpha^{-p}x)(B \cap B_{e^{-(n-p)}}^T)}{\sigma(\alpha^{-p}x)(B)}$$

(nous avons utilisé la relation $\sigma(\alpha x) = \alpha_* \sigma(x)$, valable pour λ-presque tout x, et le fait que $\alpha^{-i} B_{e^{-n}}^T = B_{e^{-(n-i)}}^T$).

Pour $p \leq n$, le facteur le plus à droite est évidemment ≤ 1. Posons

$$\phi_\rho(x) = \log \frac{\sigma(x)(\alpha B \cap B_\rho^T)}{\sigma(x)(B \cap B_\rho^T)}, \tau(x) = \log \frac{\sigma(x)(B)}{\sigma(x)(\alpha B)}, \phi_*(x) = \inf_{\rho > 0} \phi_\rho(x)$$

de sorte que le produit télescopique établi ci-dessus donne, pour $p \leq n$,

$$\frac{1}{-n} \log \frac{\sigma(x)(B \cap B_{e^{-n}}^T)}{\sigma(x)(B)} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \phi_{e^{-(n-i)}}(\alpha^{-i}x) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \tau(\alpha^{-i}x).$$

Fixons un petit $\varepsilon > 0$ et prenons pour p la partie entière de $(1-\varepsilon)n$. Nous choisissons p ainsi pour que les nombres $e^{-(n-i)}$ tendent uniformément vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et que $i \leq p$.

Traitons d'abord le deuxième terme du membre de droite. On a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leq i\leq(1-\varepsilon)n} \tau(\alpha^{-i}x) = (1-\varepsilon)\int \tau d\lambda = (1-\varepsilon)h_\lambda(G)$$

où la première égalité vient du théorème ergodique de Birkhov et la deuxième se déduit aussitôt du corollaire 2.2.1.4.

Occupons-nous maintenant du terme restant. Pour λ-presque tout x, il existe un nombre $\rho(x) > 0$ tel que la relation $\rho < \rho(x)$ entraîne

$$\phi_\rho(x) \geq \log\left(\frac{\sigma_H(x)(\alpha B)}{\sigma_H(x)(B)}\right) - \varepsilon$$

(lemme 2.2.4.4). Soit $\rho_0 > 0$ et soit M l'ensemble des x tels que $\rho(x) > \rho_0$. Si ρ_0 est choisi assez petit, on a

$$\int_{\complement M} \phi_* d\lambda \geq -\varepsilon$$

en vertu du lemme 2.2.4.3.

Séparons maintenant, dans la somme étudiée, les indices i pour lesquels $\alpha^{-i}x \in M$ de ceux pour lesquels $\alpha^{-i}x \in \complement M$. Primo,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n} \sum_{0\leq i\leq(1-\varepsilon)n} \mathbf{1}_M(\alpha^{-i}x)\phi_{e^{-(n-i)}}(\alpha^{-i}x) \geq \\
&\qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leq i\leq(1-\varepsilon)n} \mathbf{1}_M(\alpha^{-i}x)\left(\log\left(\frac{\sigma_H(\alpha^{-i}x)(\alpha B)}{\sigma_H(\alpha^{-i}x)(B)}\right) - \varepsilon\right) \\
&\qquad = (1-\varepsilon)\int_M \left(\log\left(\frac{\sigma_H(x)(\alpha B)}{\sigma_H(x)(B)}\right) - \varepsilon\right) d\lambda(x) \\
&\qquad \geq -h_\lambda(H) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Secundo,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n} \sum_{0\leq i\leq(1-\varepsilon)n} \mathbf{1}_{\complement M}(\alpha^{-i}x)\phi_{e^{-(n-i)}}(\alpha^{-i}x) \\
&\qquad \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leq i\leq(1-\varepsilon)n} \mathbf{1}_{\complement M}(\alpha^{-i}x)\phi_*(\alpha^{-i}x) \\
&\qquad = (1-\varepsilon)\int_{\complement M} \phi_* d\lambda \geq -\varepsilon(1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{-n} \log\left(\frac{\sigma(x)(B \cap B^T_{e^{-n}})}{\sigma(x)(B)}\right) \geq (1-\varepsilon)h_\lambda(G) - h_\lambda(H) - \varepsilon - \varepsilon(1-\varepsilon)$$

pour λ-presque tout x et tout $\varepsilon > 0$. La démonstration est terminée.

Pour finir, considérons la situation suivante : G est le groupe de Heisenberg de rang 1 (voir définition au chapitre 3) et H est un sous-groupe

□

Chapitre 3

Calculs d'entropies et de dimensions

3.1 Préliminaires

3.1.1 Espaces hyperboliques réels et complexes

Soit n un entier ≥ 1. Soit $\mathbf{K}$ le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbf{C}$. Le groupe $\mathbf{SO}^\circ(1,n)$ est la composante connexe de l'identité dans le groupe spécial orthogonal d'une forme quadratique réelle de signature $(1,n)$. Le groupe $\mathbf{PU}(1,n)$ est le groupe projectif unitaire d'une forme quadratique hermitienne de signature $(1,n)$. Dans toute cette section, nous posons $G = \mathbf{SO}^\circ(1,n)$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $G = \mathbf{PU}(1,n)$ si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Le quotient G/K est l'espace hyperbolique sur $\mathbf{K}$ de dimension n, $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. Nous noterons d la distance hyperbolique dans $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. Le groupe des isométries directes de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ est égal à G. Le point fixé par K dans $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ est appelé *point de base* et noté o. Changer de point de base revient à remplacer K par un de ses conjugués.

L'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est une variété riemannienne complète de dimension n à courbure sectionnelle identiquement égale à -1.

L'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est une variété hermitienne complète de dimension complexe n, à courbure sectionnelle pincée comprise entre -4 et -1.

3.1.2 Bord à l'infini

Nous noterons $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ le bord à l'infini de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. C'est l'espace des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotiques. L'espace $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \cup \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ est compact. Puisque l'opération de G sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ est par isométries, elle se prolonge continûment au bord.

Fixons une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Nous noterons M le normalisateur de N dans K. Le groupe parabolique $P = MAN$ est le stabilisateur dans G d'un point $\xi_+ \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. Le bord de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ s'identifie donc au quotient G/P. C'est une variété différentielle, difféomorphe à la sphère de dimension $n-1$ (resp. $2n-1$) si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

Pour tous $\xi \in \partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et $x, y \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, on pose

$$b_\xi(x,y) = \lim_{t\to\infty} d(x,\xi_t) - d(y,\xi_t)$$

où $t \mapsto \xi_t$ est une géodésique aboutissant en ξ. Ce nombre est bien défini et ne dépend pas du choix de la géodésique ξ_t. Ceci définit la *fonction de Busemann*. C'est une application continue.

Pour tous $\xi, \eta \in \partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, on définit le *produit de Gromov de ξ et η basé en x* :

$$(\xi,\eta)_x = \frac{1}{2}\left(b_\xi(x,p) + b_\eta(x,p)\right)$$

où p est un point de la géodésique $]\xi,\eta[$. On convient que $(\xi,\xi)_x = +\infty$. Ceci ne dépend pas du choix de p. On définit ensuite la *distance visuelle basée en x*

$$d_x(\xi,\eta) = e^{-(\xi,\eta)_x}.$$

On vérifie que c'est bien une distance. Elle est aussi appelée *distance de Gromov*. Elle est compatible avec la topologie de $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. La famille $(d_x)_{x\in\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}$ possède les propriétés suivantes :

1. Conformité : $d_y(\xi,\eta) = e^{\frac{1}{2}(b_\xi(x,y)+b_\eta(x,y))} d_x(\xi,\eta)$;
2. G-équivariance : $d_{gx}(g\xi, g\eta) = d_x(\xi,\eta)$ pour tout $g \in G$.

En fait, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, cette distance coïncide avec la distance sphérique usuelle. Plus précisément, il existe un difféomorphisme de $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ sur la sphère de dimension $n-1$ appliquant d_o sur la distance «sinus de l'angle», définie par $d(x,y) = |\langle x,y\rangle|$ (x, y deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^n$).

En revanche, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il n'est pas vrai que la distance de Gromov d_o soit bilipschitz-équivalente à une distance riemannienne sur $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, vu comme la sphère $\mathbf{S}^{2n-1}$. Nous reviendrons sur ce point.

3.1.3 Fibré unitaire tangent

Rappelons que nous avons fixé une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et que nous notons M le normalisateur de N dans K. Le groupe diagonal A centralise M. On note $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ le *fibré unitaire tangent* de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, ensemble des couples (x,u), où x est un point de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et u un vecteur unitaire tangent à $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ en x. C'est une variété riemannienne (resp. hermitienne si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) muni de la métrique de Sasaki. On notera souvent u un point de $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, la donnée de x étant sous-entendue.

L'opération de G sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ étant par isométries, elle s'étend au fibré unitaire tangent et on vérifie que M est le stabilisateur d'un point de $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. Plus précisément, si o est le point de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ fixé par K, et ξ_+ l'unique point du bord fixé par N, le point (x,u) de $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, où u est le vecteur unitaire portant la géodésique issue de x et aboutissant en ξ_+, est fixé par M. Le fibré unitaire tangent de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ s'identifie donc à l'espace quotient G/M, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} & \xrightarrow{\sim} & G/M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} & \xrightarrow{\sim} & G/K \end{array}$$

L'application $u \mapsto u^+$ qui à u associé l'extrêmité positive de la géodésique issue de x et portée par u est un homéomorphisme de l'ensemble U_x des vecteurs unitaires tangents en x sur le bord $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$. Si $g \in G$, on notera $g^+ = (gM)^+$. Définitions semblables pour u^- et g^-.

Notons que N n'opère pas à droite sur G/M car M n'est pas normalisé par N. En revanche, puisque M normalise N, les N-orbites sont bien définies dans G/M : la N-orbite de gM est l'ensemble décrit par les gnM lorsque n parcourt N, et cet ensemble ne dépend que de gM.

Puisque A normalise M, l'opération $(g, a) \mapsto ga$ de A sur G par translation *à droite* passe au quotient en une opération *à droite* de A sur G/M, $(gM, a) \mapsto gaM$. Il existe un unique isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur A, $t \mapsto a_t$, tel que l'opération de $\mathbf{R}$ sur G/M donnée par $(gM, t) \mapsto ga_tM$ coïncide avec le *flot géodésique*. Autrement dit, ga_tM tend vers g^+ lorsque $t \to \infty$, et la distance hyperbolique entre gM et ga_tM est égale à t pour tout t.

3.1.4 Horosphères et coordonnées de Hopf

Munissons G de la distance G-invariante à gauche et K-invariante à droite dont la distance hyperbolique sur G/K est le quotient à droite par K. Le quotient par M à droite de cette distance est une distance riemannienne (resp. hermitienne si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) sur G/M. On vérifie que pour tout $u \in U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, l'ensemble des v tels que la distance entre ua_t et va_t tende vers 0 lorsque $t \to -\infty$ est égal à la N-orbite de u (rappelons que les N-orbites sont bien définies dans G/M, car N est normalisé par M). Cette N-orbite est appelée *horosphère instable passant par* u. On la note $H^+(u)$.

L'application $v \mapsto v^+$ est une bijection de $H^+(u)$ sur $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \setminus \{u^-\}$. L'horosphère $H^+(u)$ est une sous-variété de $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et cette bijection $H^+(u) \to \partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \setminus \{u^-\}$ est un difféomorphisme.

L'application $H^+(u) \to \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ qui à (x, v) associe x est un difféomorphisme sur une sous-variété de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, aussi appelée horosphère. Les horosphères de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ sont les lignes de niveau de la fonction de Busemann, *i.e.* si $\xi \in \partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, toute horosphère basée en ξ est le lieu de l'équation

$$b_\xi(x, o) = c$$

pour une certaine constante $c \in \mathbf{R}$.

Nous allons maintenant définir une distance, dite *distance de Hämenstadt*, sur chaque horosphère. Soit $H = H^+(u)$ une horosphère instable. Soient v, w deux points de H, et $t \mapsto v_t$, $t \mapsto w_t$ les géodésiques issues de u^-, et telles que $v_0 = v$ et $w_0 = w$. On pose

$$d_H(v, w) = \lim_{t \to \infty} e^{-t + \frac{1}{2} d(v_t, w_t)}.$$

On montre dans l'appendice de (Hersonsky et Paulin, 1997) que cette limite existe et définit bien une distance sur H. Pour tout $g \in G$, on a $d_{gH}(gv, gw) = d_H(v, w)$.

Ceci permet de définir, par transport de structure, une distance sur $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \setminus \{u^-\}$, dite *distance d'Euclide-Cygan* ; plus précisément, si ζ est un point du bord, on pose $d_\zeta(\xi, \eta) = d_{H^+(u)}(v, w)$ où u est tel que $u^- = \zeta$, v est le point de $H^+(u)$ tel que $v^+ = \xi$ et de même $w \in H^+(u)$ est tel que $w^+ = \eta$. Ceci ne

dépend pas du choix de u puisque la famille des distances de Hämenstadt est, comme on l'a vu, G-équivariante, et en particulier A-équivariante.

On montre dans (*loc. cit.*) que pour tout $\xi \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et tout $x \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, les distances d_ξ et d_x sont localement bilipschitz équivalentes sur $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \setminus \{\xi\}$.

Nous aurons aussi besoin du fait suivant. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, nous munissons N de la distance euclidienne, et si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, nous le munissons de la distance de Heisenberg (voir *infra*, paragraphe 3.4.1.2).

Lemme 3.1.4.1 ((Hersonsky et Paulin, 2002), proposition 3.12)**.** *Pour tout $g \in G$, l'application $N \to H^+(gM)$ appliquant n sur gnM est une similitude.*

Autrement dit, cette application applique la distance euclidienne (resp. la distance de Heisenberg) sur un multiple de la distance de Hämenstadt.

Nous noterons, comme c'est la coutume, $\partial^2\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ l'ensemble des couples (ξ, η) de points *distincts* du bord. L'application de $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ dans $\partial^2\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \times \mathbf{R}$ qui applique (x, u) sur $(u^-, u^+, b_{u^-}(x, o))$ («coordonnées de Hopf de (x, u)») est un difféomorphisme. Nous noterons, pour simplifier, $u = (\xi, \eta, s)$ si cet difféomorphisme applique u sur (ξ, η, s).

3.1.5 Théorie de Patterson-Sullivan

Soit Γ un sous-groupe discret de G. Pour tout point $x \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, les points d'accumulation de l'orbite Γo dans $\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}} \cup \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ forment une partie Λ_Γ contenue dans Γ qui ne dépend pas du choix de x ; on l'appelle *ensemble limite de* Γ.

Un point de l'ensemble limite $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est dit *conique* s'il existe une suite infinie (γ_n) dans Γ telle que la distance de $\gamma_n o$ à la géodésique $]o, \xi[$ soit borné uniformément en n. L'ensemble des points limites coniques est noté Λ^c_Γ.

Nous supposerons toujours que Γ est non-élémentaire, ce qui signifie que l'ensemble limite contient au moins 3 éléments, et on montre qu'en fait il est infini non dénombrable.

L'exposant de croissance de G,

$$\delta_\Gamma = \limsup \frac{1}{R} \log \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma; d(x, \gamma x) \leq R\}$$

ne dépend pas de x. C'est un nombre fini, et $0 < \delta_\Gamma \leq n - 1$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (resp. $0 < \delta_\Gamma \leq 2n - 1$ si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

Le théorème suivant a une longue histoire. Il a été démontré à ce niveau de généralité (*i.e.* pour un groupe seulement supposé discret et non-élémentaire) dans (Bishop et Jones, 1997) et (Paulin, 1997).

Théorème 3.1.5.1. *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. La dimension de Hausdorff de l'ensemble Λ^c_Γ des points limites coniques de Γ, relativement à la distance visuelle basée en un point quelconque, est égale à δ_Γ.*

Notons que les distances visuelles sont deux-à-deux localement bilipschitz équivalentes, de sorte que le choix du point où est basée la distance visuelle est indifférent.

3.1.5.1 Densités conformes au bord

Définition 3.1.5.2. *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. Soit β un nombre réel ≥ 0. On appelle* densité Γ-conforme de dimension β *toute famille $(\mu_x)_{x \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}$ de mesures finies sur $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, qui est :*

1. *Γ-équivariante :*
$$\gamma_* \mu_x = \mu_{\gamma x}$$
pour tout $x \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et tout $\gamma \in \Gamma$;
2. *conforme : pour tous $x, y \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, μ_x et μ_y sont* équivalentes *et le cocycle de Radon-Nikodym est donné par*
$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\beta b_\xi(y,x)}.$$

On démontre que la dimension d'une densité Γ-conforme ne peut être nulle ; autrement dit, le bord $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ ne porte pas de mesure de probabilité Γ-invariante.

Le résultat suivant, à la base de toute la théorie, remonte à Patterson (dans le cas «hyperbolique réel»).

Théorème 3.1.5.3 ((Patterson, 1976)). *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G, d'exposant de croissance δ_Γ. Il existe une densité Γ-conforme de dimension δ_Γ.*

Dans le contexte de la géométrie ergodique des groupes discrets, nous conserverons la lettre μ pour les densités Γ-conforme.

3.1.5.2 Mesure de Bowen-Margulis-Sullivan

Définition de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan. Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. Soit μ une densité Γ-conforme de dimension δ_Γ. Soit $x \in \mathbf{H}$. La mesure $m^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}_{\mathrm{BMS}}$ sur $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ définie par
$$dm^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}_{\mathrm{BMS}}(u) = e^{\delta(b_\xi(x,u)+b_\eta(x,u))} d\mu_x(\xi) d\mu_x(\eta) ds$$
(où $u = (\xi, \eta, s)$) est appelée *mesure de Bowen-Margulis-Sullivan* (ou «mesure BMS») associée à μ.

C'est une mesure de Radon qui ne dépend pas du choix de x. Elle est invariante par le flot géodésique et par Γ. Nous la noterons $m^{G/M}_{\mathrm{BMS}}$ lorsque nous voudrons préciser que la mesure que nous considérons vit sur G/M.

Puisque $m^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}_{\mathrm{BMS}}$ est une mesure de Radon Γ-invariante sur $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, elle passe au quotient en une mesure de Radon sur $\Gamma\backslash U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$, que nous noterons $m^{\Gamma\backslash U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}_{\mathrm{BMS}}$ ou $m^{\Gamma\backslash G/M}_{\mathrm{BMS}}$.

Définition 3.1.5.4. *Nous dirons qu'un sous-groupe discret non-élémentaire Γ de G est de mesure de BMS finie s'il admet une densité Γ-conforme μ d'exposant δ_Γ telle que la mesure de BMS associée sur $\Gamma\backslash U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ soit* finie.

Le résultat suivant est dû à D. Sullivan dans le cas «hyperbolique réel» (Sullivan, 1984), et étendu au cas des espaces CAT(-1) dans (Roblin, 2003).

Théorème 3.1.5.5. *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. Si Γ est de mesure de BMS finie, il existe (à homothétie près) une unique densité Γ-conforme de dimension δ_Γ ; elle est sans atome, son support est l'ensemble limite Λ, et l'ensemble limite conique est de mesure totale. La mesure de BMS finie considérée est mélangeante pour le flot géodésique sur $\Gamma\backslash U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$.*

Tous nos résultats seront énoncés sous cette hypothèse. Lorsque Γ est de mesure de BMS finie, nous dirons (par abus de langage) «soit μ la mesure de Patterson-Sullivan» pour exprimer que nous choisissons l'une quelconque des mesures de *la* densité Γ-conforme de dimension δ_Γ, et que nous la normalisons pour que sa masse totale soit 1.

Désintégration de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan au-dessus de l'espace des horosphères. Soient $\xi \in \partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K}$ et $s \in \mathbf{R}$. Les lignes de niveau de l'application $\partial^2\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \times \mathbf{R} \to \partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \times \mathbf{R}$ appliquant (ξ, η, s) sur (ξ, s) sont les horosphères (instables). L'espace de ces horosphères, noté $\mathcal{H}$, s'identifie donc à $\partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \times \mathbf{R}$. Nous écrirons, par abus de notation, $H = (\xi, s)$.

On vérifie que G/MN s'identifie à $\mathcal{H}$ et que l'application $\partial^2\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \times \mathbf{R} \to \partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \times \mathbf{R}$ correspond à l'application canonique $G/M \to G/MN$.

Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. Si μ est une densité Γ-conforme de dimension δ, on définit sur $\mathcal{H}$ une mesure $m_\mathcal{H}$ en posant

$$dm_\mathcal{H}(\xi, s) = d\mu_x(\xi)e^{\delta b_\xi(x,h)}ds$$

où h est un point quelconque de l'horosphère $H = (\xi, s)$. C'est une mesure de Radon, indépendante de x et du choix de o, et Γ-invariante.

Manifestement, $m_\mathcal{H}$ est pseudo-image de la mesure de BMS $m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_\mathbf{K}}$. Désintégrons celle-ci au-dessus de celle-là :

$$m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_\mathbf{K}} = \int dm_\mathcal{H}(H)m_H$$

où m_H est la mesure sur H définie par

$$dm_H(u) = d\mu_x(u^+)e^{\delta b_{u^+}(x,u)}.$$

Notons que la mesure m_H, vue dans G/M, est portée par une N-orbite.

Dans le théorème suivant, la dimension de la mesure m_H est relative à la distance de Hämenstadt sur H, et la dimension de la mesure de Patterson-Sullivan sur $\partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K}$ est relative à une distance visuelle de Gromov.

Théorème 3.1.5.6. *Soit Γ un sous-groupe discret de G de mesure de BMS finie. La mesure de Patterson-Sullivan sur $\partial\mathbf{H}^n_\mathbf{K}$ est de dimension exacte égale à δ_Γ. De même, pour toute horosphère (instable) H, la mesure m_H sur H est de dimension exacte égale à δ_Γ.*

Démonstration. Commençons par montrer que les dimensions locales inférieures et supérieures de m_H sont m_H-presque partout égales, pour toute horosphère H. Soit ϕ l'application borélienne $U\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\phi(u) = \log \frac{m_{H^+(u)}(B(u, e^{-1}))}{m_{H^+(u)}(B(u, 1))}$$

partout où cela a un sens, c'est-à-dire $m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_\mathbf{K}}$-presque partout. Notons g_t : $U\mathbf{H}^n_\mathbf{K} \to U\mathbf{H}^n_\mathbf{K}$ le flot géodésique au temps t dans $U\mathbf{H}^n_\mathbf{K}$. La relation $(g_t)_* m_{H^+(u)} = e^{-t\delta_\Gamma} m_{H^+(g_t u)}$ entraîne, par «télescopage», que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \phi(g^t u)dt = \frac{1}{T}\log m_{H^+(u)}(B(u, e^{-T})) + O(1/T)$$

et le membre de gauche admet une limite lorsque $T \to \infty$, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}$-presque tout u, en vertu du théorème ergodique de Birkhov. Par conséquent, la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log m_{H^+(u)}(B(u, e^{-T}))$$

existe pour $m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}$-presque tout u. Cette limite ne dépend presque sûrement pas de u, puisque $m_{\mathrm{BMS}}^{U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}}$ est (g_t)-ergodique, et nous allons voir que sa valeur presque sûre est δ_Γ.

Pour cela, considérons maintenant la mesure de Patterson-Sullivan μ. Pour toute horosphère instable $H = H^+(u)$, soit θ_H la mesure image réciproque de μ par le difféomorphisme $H \to \partial\mathbf{H} \setminus \{u^-\}$ appliquant v sur v^+. Les mesures m_H et θ_H sont équivalentes, et la dérivée de Radon-Nikodym est une application continue de H dans $]0, \infty[$. Par conséquent, la mesure θ_H est de dimension exacte, égale à celle de m_H (relativement à la distance de Hämenstadt).

D'autre part, nous avons dit que l'image réciproque, par θ_H, de la distance de Gromov au bord, est localement bilipschitz équivalente à la distance de Hämenstadt sur H. Ce qui précède montre donc que la mesure de Patterson-Sullivan μ (qui est sans atome, *cf* théorème 3.1.5.5) est, pour la distance de Gromov, de dimension exacte égale à celle de m_H.

La conclusion provient alors du théorème 4.3 de (Ledrappier, 2013). □

3.1.5.3 Relèvement M-invariant de la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan

Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. Soit μ une densité Γ-conforme de dimension δ_Γ. Considérons la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan $m_{\mathrm{BMS}}^{G/M}$ sur l'espace $U\mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ identifié à G/M. Elle se relève de façon unique en une mesure de Radon sur G qui est AM-invariante à droite et Γ-invariante à gauche, soit m_{BMS}^{G}. Le quotient de m_{BMS}^{G} par Γ à gauche est une mesure de Radon sur $\Gamma\backslash G$, AM-invariante à droite, soit $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$.

De même, la mesure horosphérique $m_{\mathcal{H}}$ sur l'espace des horosphères, identifié à G/MN, admet un unique relèvement M-invariant à droite à G/N qui est une mesure de Radon, soit $m_{\mathcal{H}}^{G/N}$.

La mesure $m_{\mathcal{H}}^{G/N}$ est pseudo-image de m_{BMS}^{G}. Disons maintenant comment désintégrer celle-ci au-dessus de celle-là.

Lemme 3.1.5.7. *Soit M un groupe topologique* compact *opérant à droite sur deux espaces boréliens standards $\widetilde{X}$ et X, et soit $q : \widetilde{X} \to X$ une application borélienne M-équivariante. Soient $\tilde{\lambda}, \lambda$ des mesures σ-finies sur $\widetilde{X}$ et X respectivement telles que λ soit pseudo-image de $\tilde{\lambda}$ par q. On suppose que $\tilde{\lambda}$ et λ sont M-invariantes, de sorte qu'on dispose de mesures quotients de $\tilde{\lambda}$ et λ par M, $\tilde{\mu}$ et μ respectivement, sur $\widetilde{X}/M$ et X/M respectivement. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \widetilde{X}/M & \xrightarrow{q'} & X/M \end{array}$$

et μ est pseudo-image de $\tilde{\mu}$ par q', ce qui donne lieu à la désintégration

$$\tilde{\mu} = \int d\mu(\dot{x})\tilde{\mu}_x.$$

Supposons que pour tout $x \in X$, la restriction $\tilde{p}|q^{-1}(x)$ de $\tilde{p}$ à la fibre $q^{-1}(x)$ soit injective. *Alors la désintégration de $\tilde{\lambda}$ au-dessus de λ est donnée par*

$$\tilde{\lambda} = \int d\lambda(x)\tilde{p}^*\tilde{\mu}_{p(x)}.$$

Dans l'énoncé du lemme, $\tilde{p}^*\tilde{\mu}_{p(x)}$ est l'image directe, par l'isomorphisme $(q')^{-1}(p(x)) \to q^{-1}(x)$ réciproque de $\tilde{p}|q^{-1}(x)$, de la mesure $\tilde{\mu}_{p(x)}$, qui est λ-presque sûrement portée par $(q')^{-1}(p(x))$.

Démonstration. Avant toute chose, notons qu'une opération mesurable de M sur un espace borélien standard quelconque est toujours lisse puisque M est compact.

Soit $\tilde{\lambda} = \int d\lambda(x)\tilde{\lambda}_x$ la désintégration de $\tilde{\lambda}$ au-dessus de λ. On a $\tilde{p}_*\tilde{\lambda} = \tilde{\mu}$ puisque M est compact. Autrement dit,

$$\int d\lambda(x)\tilde{p}_*\tilde{\lambda}_x = \int d\mu(\dot{x})\tilde{\mu}_{\dot{x}}$$

et le membre de droite est aussi égal à

$$\int d\lambda(x)\tilde{\mu}_{p(x)}$$

en raison encore de la compacité de M. Le lemme en résulte, par unicité des conditionnelles de $\tilde{\lambda}$ au-dessus de λ. □

Appliquons ce lemme au diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{q} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G/M & \xrightarrow{q'} & G/MN \end{array}$$

où les flèches sont les applications canoniques ; ce qui est possible car pour tout g, la restriction à gN de l'application canonique $G \to G/M$ est injective. Munissons G (resp. G/N, G/M, G/MN) de la mesure m^G_{BMS} (resp. $m^{G/N}_{\mathcal{H}}$, $m^{G/M}_{\mathrm{BMS}}$, $m^{G/MN}_{\mathcal{H}}$). Désintégrons m^G_{BMS} au-dessus de $m^{G/N}_{\mathcal{H}}$ le long de q :

$$m^G_{\mathrm{BMS}} = \int dm^{G/N}_{\mathcal{H}}(gN)m_{gN}.$$

Pour $m^{G/N}_{\mathcal{H}}$-presque tout gN, on a $m_{gN} = (\tilde{p})^*\mu_{gMN}$.

3.1.5.4 Mélange du flot géodésique

L'opération de A sur G par translation à droite passe au quotient en une opération à droite sur $\Gamma\backslash G$, $(\Gamma g, a) \mapsto \Gamma ga$, que nous appellerons *flot des repères*.

Nous aurons besoin du mélange de la mesure de BMS $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ relativement au flot géodésique (en fait nous nous servirons de l'ergodicité de cette mesure relativement à tout élément non trivial de A).

Théorème 3.1.5.8 ((Winter, 2014)). *Soit Γ un sous-groupe discret de mesure de BMS finie et* Zariski-dense. *La mesure de BMS $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ est mélangeante pour le flot géodésique.*

3.1.6 Conditionnelles le long du groupe horosphérique

3.1.6.1 Calcul des conditionnelles

Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G, et μ une densité Γ-conforme de dimension δ_Γ. Faisons opérer N par translation à droite sur $\Gamma\backslash G$. Cette opération est mesurable, à stabilisateurs *discrets* (car Γ est discret). L'espace topologique quotient $\Gamma\backslash G$ est localement compact à base dénombrable ; en tant qu'espace mesurable, c'est donc un espace borélien standard. Dès lors, nous pouvons désintégrer $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de cette opération, ce qui donne lieu à l'application de désintégration σ.

Calculons σ. Désintégrons m_{BMS}^{G} le long de N et notons $\bar{\sigma}$ l'application de désintégration correspondante. D'après la proposition 2.1.1.26, on a $\sigma(\Gamma g) = \bar{\sigma}(g)$ pour m_{BMS}^{G}-presque tout g.

D'autre part, l'opération de N sur G à droite étant *lisse*, la proposition 2.1.1.25 permet de calculer $\bar{\sigma}$. Pour tout $g \in G$, notons ρ_g l'application orbitale de N sur gN qui applique n sur gn. Pour m_{BMS}^{G}-presque tout g, $\bar{\sigma}(g)$ est la classe projective de $(\rho_g)^* m_{gN}$ où m_{gN} est la mesure sur gN définie en 3.1.5.3.

Les conditionnelles de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ sur $\Gamma\backslash G$ le long de N à droite se déduisent donc simplement des mesures m_H portées par les horosphères (instables) H.

Pour alléger les notations, nous désignerons en général les éléments de $\Gamma\backslash G$ par les lettres latines $x, y \ldots$.

3.1.6.2 Dimension des conditionnelles

Notons encore σ (resp. $\bar{\sigma}$) l'application de désintégration de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ (resp. de m_{BMS}^{G}) le long de l'opération de N à droite. Lorsque $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ est finie, *i.e.* lorsque Γ est de mesure de BMS finie, σ est à valeur dans l'espace des mesures de Radon projectives de N.

La proposition suivante est à la base de tous nos résultats. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, nous munissons N (qui est isomorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$) de la distance euclidienne, et si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, nous munissons N (qui est isomorphe au groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_n$) de la distance de Heisenberg (*cf* 3.4.1.2).

Proposition 3.1.6.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de G de mesure de BMS finie. Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout $x \in \Gamma\backslash G$, $\sigma(x)$ est de dimension exacte égale à δ_Γ.*

Démonstration. Vu le paragraphe précédent (3.1.6.1), c'est une conséquence du théorème 3.1.5.6 et du lemme 3.1.4.1. □

3.2 Calculs d'entropie

Soit Γ un sous-groupe discret de mesure de BMS finie. Nous avons vu comment désintégrer la mesure finie $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ sur $\Gamma\backslash G$ le long de l'opération de N.

Soit α l'automorphisme de $\Gamma\backslash G$ défini par le flot géodésique au temps -1, i.e. $\alpha(x) = xa_{-1}$ ($x \in \Gamma\backslash G$). Notons que α préserve la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan, et que celle-ci est ergodique pour α (théorème 3.1.5.8). Pour tout $n \in N$ et tout $x \in \Gamma\backslash G$, on a $\alpha(xn) = \alpha(x)\alpha(n)$ où $\alpha : N \to N$ est une homothétie si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (resp. une dilatation de Heisenberg si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) : c'est une similitude de rapport $e^{-1} \simeq 2,718$.

Nous sommes donc dans les conditions d'application de la théorie générale exposée au chapitre 2, et pouvons étudier l'entropie de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de N ou de n'importe quel sous-groupe fermé connexe de N. Si U est un sous-groupe fermé connexe de N, nous noterons $h_{\mathrm{BMS}}(U)$ l'entropie de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de U (relativement à l'automorphisme α défini ci-dessus).

Commençons par énoncer le résultat de base.

Proposition 3.2.0.2. *Soit Γ un sous-groupe discret de G de mesure de BMS finie. L'entropie de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de N en x est égale à l'exposant critique δ_Γ pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x.*

Démonstration. Voir les propositions 3.1.6.1 et 2.2.1.6. □

Problème 3.2.0.3. *Soit U un sous-groupe fermé connexe de N. Calculer l'entropie de la mesure de BMS le long de U.*

La proposition suivante est une conséquence cruciale de la théorie développée au chapitre 2.

Proposition 3.2.0.4. *Soit Γ un sous-groupe discret de G de mesure de BMS finie et Zariski-dense. Soit U un sous-groupe fermé connexe distingué de N. On a*

$$h_{\mathrm{BMS}}(N) = h_{\mathrm{BMS}}(U) + \delta_{N/U}.$$

Démonstration. Soit Y l'ensemble des points $x \in \Gamma\backslash G$ dont le stabilisateur dans N n'est pas réduit à l'élément neutre. Si x appartient à Y, il existe un élément $\gamma \in \Gamma$, distinct de l'identité, qui laisse globalement invariante l'horosphère $H^+(g)$. Par conséquent, g^+ est un point fixe parabolique. Il est évident que les points fixes paraboliques forment une partie au plus dénombrable de l'ensemble limite. Puisque la mesure de Patterson-Sullivan est sans atome (théorème 3.1.5.5), on en déduit, vu la définition de la mesure de BMS, que $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}(Y) = 0$.

On peut démontrer que Y est une partie borélienne de $\Gamma\backslash G$. Soit X son complémentaire : c'est un espace borélien standard, de mesure de BMS totale, où N opère *librement* (c'est-à-dire avec des stabilisateurs *triviaux*). Évidemment, les conditionnelles de la mesure de BMS le long de N (resp. de U) sont (presque partout) égales aux conditionnelles de la mesure de BMS *restreinte à* X le long de ce même groupe.

D'autre part, nous vérifions que le groupe métrique quotient N/U possède la propriété de Besicovitch. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, ce quotient est isométrique à un espace euclidien. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, U contient nécessairement le centre Z (qui est aussi le sous-groupe dérivé) de N, et le groupe métrique quotient N/U s'identifie (isométriquement) au groupe métrique quotient $(N/Z)/(U/Z)$. Le quotient N/Z est

isométrique à l'espace euclidien $\mathbf{R}^{2(n-1)}$, et U/Z s'identifie à un sous-espace vectoriel de cet espace euclidien ; il est clair alors que le groupe métrique quotient N/U possède bien la propriété de Besicovitch.

Nous sommes donc dans les conditions du théorème 2.2.5.1, et la relation annoncée n'est autre que la conclusion de ce théorème. □

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et que Γ est Zariski-dense, nous sommes en mesure de répondre complètement au problème posé. Cela fait l'objet de la présente section. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, nous pouvons dire bien peu de choses. Dans la section 3.4, nous dirons le lien qui existe entre l'entropie de la mesure de BMS le long du centre de N, et la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite conique *relativement à une distance riemannienne*. Nous formulerons une conjecture, et construirons ensuite des exemples de groupes de Schottky pour lesquels le calcul de l'entropie le long du centre est facile.

Jusqu'à nouvel ordre, nous fixons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Théorème 3.2.0.5. *Soit Γ un sous-groupe discret de G,* Zariski-dense *et de mesure de BMS* finie. *Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$. Pour tout m-plan U contenu dans N, on a l'alternative suivante :*

1. *Ou bien $\delta_\Gamma \leq n-m$, et alors on a $\delta_{N/U} = \delta_\Gamma$ et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = 0$;*
2. *Ou bien $\delta_\Gamma > n-m$, et alors on a $\delta_{N/U} = n-m$ et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = \delta_\Gamma - (n-m)$.*

D'autre part, les conditionnelles sont «transversalement de dimension exacte», au sens suivant : pour tout voisinage compact B de l'élément neutre dans N, pour tout m-plan U et pour presque tout $x \in \Gamma\backslash G$, l'image, dans N/U, de la restriction à B de $\sigma(x)$, est de dimension exacte *$\delta_{N/U}$.*

En outre, lorsque $\delta_\Gamma > n-m$, les conditionnelles de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de N sont (presque sûrement) absolument continues transversalement à tout U au sens suivant : pour tout voisinage ouvert relativement compact B de l'origine dans N, pour tout m-plan U, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, l'image de $\sigma(x)|B$ dans N/U est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de N/U.

Remarque 3.2.0.6. *Rappelons que $\delta_{N/U}$ est la dimension* inférieure *de l'image, dans N/U, de la mesure de probabilité*

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et tout voisinage ouvert relativement compact B de l'origine dans N fixé à l'avance.

Corollaire 3.2.0.7. *On conserve les hypothèses du théorème. Soit m un entier, $1 \leq m \leq n-1$ et U un m-plan. Pour que l'opération de U sur $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ soit totalement dissipative (resp. totalement récurrente), il faut et il suffit que $\delta_\Gamma \leq n-m$ (resp. $\delta_\Gamma > n-m$).*

Dans le premier cas, les conditionnelles de la mesure de BMS le long de N sont presque sûrement portées par un graphe au-dessus de N/U.

Démonstration. Voir corollaires 2.2.1.9 et 2.1.3.8. □

Nous commençons maintenant la démonstration du théorème 3.2.0.5.

Lemme 3.2.0.8. *La dimension transverse $\delta_{N/U}$ et l'entropie $h_{\mathrm{BMS}}(U)$ ne dépendent pas du m-plan U.*

Démonstration. Soient U, U' deux m-plans et m un élément de M tel que U' soit le conjugué de U par m, $U' = mUm^{-1}$. L'application $R_m : U \to U'$ appliquant u sur mum^{-1} est un isomorphisme de groupes. L'automorphisme de $\Gamma\backslash G$ appliquant x sur xm^{-1} entrelace l'opération de U avec l'opération de U' : pour tout $u \in U$, et tout $x \in \Gamma\backslash G$, on a $xm^{-1}(mum^{-1}) = (xu)m^{-1}$. Par conséquent, la mesure de BMS étant M-invariante, si σ_U et $\sigma_{U'}$ sont les applications de désintégration de la mesure de BMS de $\Gamma\backslash G$ le long de U et U' respectivement, on a

$$\sigma_U(x) = (R_m)_* \sigma_{U'}(xm^{-1})$$

pour presque tout $x \in \Gamma\backslash G$. Puisque R_m est une isométrie de U sur U', qui commute aux homothéties, on en déduit que $h_{\mathrm{BMS}}(U) = h_{\mathrm{BMS}}(U')$.

Notons maintenant π et π' les projections de N sur N/U et N/U' respectivement. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & N/U \\ \downarrow{\scriptstyle R_m} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{R}_m} \\ N & \xrightarrow{\pi'} & N/U' \end{array}$$

où $R_m : N \to N$ est l'application $n \mapsto mnm^{-1}$, et $\overline{R}_m$ est l'application définie par celle-ci par passage aux quotients. Notons que $\overline{R}_m$ est une isométrie de N/U sur N/U' (relativement aux distances quotients).

Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de e dans N. Pour μ-presque tout x, on a, au vu de ce qui précède,

$$\pi'_* \left(\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)} \right) = (\overline{R}_m)_* \pi_* \left(\frac{\sigma(xm^{-1})|Bm^{-1}}{\sigma(xm^{-1})(Bm^{-1})} \right).$$

Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, la dimension (inférieure) du membre de gauche (resp. de droite) en l'élément neutre de V' est égale à $\delta_{N/U'}$ (resp. à $\delta_{N/U}$). Ceci démontre que $\delta_{N/U} = \delta_{N/U'}$. □

Lemme 3.2.0.9. *Soit B un voisinage ouvert relativement compact de l'origine dans N. Supposons que U soit un m-plan tel que l'image dans N/U de la mesure de probabilité*

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x. Alors la même propriété est vraie pour tout autre m-plan U'.

Démonstration. L'argument est le même. □

Proposition 3.2.0.10. *On suppose que $\delta_\Gamma \leq n - m$. Alors, pour tout m-plan U, on a $\delta_{N/U} = \delta_\Gamma$, et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = 0$.*

Démonstration. Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de l'origine dans N. La mesure

$$\nu^B(x) = \frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

est de dimension exacte égale à δ_Γ pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x. Pour un tel x, la projection orthogonale de $\nu^B(x)$ sur presque tout $(n-m)$-plan V est donc de dimension exacte égale à δ_Γ (corollaire 1.2.2.3). Autrement dit, l'image de $\nu^B(\Gamma)$ dans N/U est de dimension exacte égale à δ_Γ pour presque tout m-plan U.

On sait (proposition 2.2.2.3) que pour tout m-plan U et pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, l'image de $\nu^B(x)$ dans N/U est de dimension (inférieure) $\delta_{N/U}$. Ce qui précède entraîne donc, par une application directe du théorème de Fubini, que pour presque tout m-plan U on a $\delta_{N/U} = \delta_\Gamma$. En vertu du lemme 3.2.0.8, on a donc $\delta_{N/U} = \delta_\Gamma$ pour *tout* m-plan U.

La relation

$$h_{\mathrm{BMS}}(N) = h_{\mathrm{BMS}}(U) + \delta_{N/U}$$

(proposition 3.2.0.4) montre aussitôt que $h_{\mathrm{BMS}}(U)$ est nulle pour tout m-plan U. La proposition est démontrée. □

Proposition 3.2.0.11. *On suppose que $\delta_\Gamma > n-m$. Alors pour tout m-plan U, on a $\delta_{N/U} = n-m$ et $h_{\mathrm{BMS}}(U) = \delta_\Gamma - (n-m)$; en outre, pour tout voisinage ouvert relativement compact B de l'élément neutre de N, et pour presque tout x, l'image de la mesure*

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

dans N/U est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Fixons un voisinage ouvert relativement compact B de l'origine dans N. Conservons la notation $\nu^B(x)$ de la démonstration précédente. Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, et presque tout m-plan U, l'image de $\nu^B(x)$ dans N/U est absolument continue (proposition 1.2.2.6) – donc de dimension exacte $n-m$, et en particulier $\delta_{N/U} = n-m$ et on conclut en utilisant à nouveau la proposition 3.2.0.4. □

Ceci achève la démonstration du théorème 3.2.0.5.

3.3 Dimension des projections

3.3.1 Position du problème

Nous allons considérablement renforcer le théorème 3.2.0.5.

Définition 3.3.1.1. *Soit μ une mesure de Radon (non nulle) sur un espace vectoriel N de dimension finie $n \geq 2$. Nous dirons que μ est* régulière *si*

1. *elle est de dimension exacte $\delta \in [0, n]$ et*
2. *pour tout ensemble ouvert relativement compact B rencontrant le support de μ, et pour tout entier k, $1 \leq k \leq n-1$ et tout k-plan V de N, l'image de $\mu|B$ par la projection orthogonale sur V est de dimension inférieure égale presque partout à $\inf\{k, \delta\}$.*

Théorème 3.3.1.2. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski-dense de G de mesure de BMS finie. La conditionnelle de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de N en x est régulière pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x.*

Remarque 3.3.1.3. *On pourrait remplacer N par n'importe quel sous-espace vectoriel de N dans l'énoncé de ce théorème, et la conclusion demeure, avec la même démonstration. Nous nous bornerons à considérer le cas de N, le cas général étant identique aux notations près.*

Remarque 3.3.1.4. *Il suffit de vérifier la propriété 2 ci-dessus pour un voisinage ouvert relativement compact fixé de l'origine dans N (et pour tout k-plan V).*

Démonstration de la remarque. Disons, pour abréger, qu'une mesure de Radon μ sur N est *régulière relativement à B* si $\mu(B) > 0$ et que pour tout k-plan V, l'image de $\mu|B$ par π_V est de dimension exacte égale à $\inf\{\delta, k\}$.

Supposons donné un voisinage ouvert relativement compact B de l'origine dans N tel que pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, la mesure $\sigma(x)$ soit régulière relativement à B.

Soit t un réel et B' le voisinage S_tB, image de B par l'homothétie de rapport e^t. Je dis que pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, $\sigma(x)$ est régulière relativement à B' ; cela provient immédiatement de ce qu'on a, t étant fixé,

$$\frac{\sigma(x)|(S_tB)}{\sigma(x)(S_tB)} = \frac{\sigma(xa_t)|B}{\sigma(xa_t)(B)}$$

pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x.

Soit maintenant X l'ensemble des points x pour lesquels $\sigma(x)$ est régulière relativement à tous ensembles S_nB lorsque n parcourt $\mathbf{N}$. Nous venons de voir que X est de mesure totale pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$.

Soit x un point de X et soit B un ensemble ouvert relativement compact dans N. Il existe un ensemble ouvert relativement compact B' contenant B et tel que $\sigma(x)$ soit régulière relativement à B'. Supposons que x soit tel que $\sigma(x)(B) > 0$. Si V est un k-plan, l'image par π_V de la mesure

$$\frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

est absolument continue par rapport à l'image par π_V de la mesure

$$\frac{\sigma(x)|B'}{\sigma(x)(B')}.$$

On en déduit (lemme 1.1.2.6) que $\sigma(x)$ est en fait régulière par rapport à B. Nous avons pleinement justifié la remarque 3.3.1.4. □

Avant de démontrer ce théorème, prenons le temps de le traduire en un énoncé portant sur la mesure de Patterson-Sullivan. Fixons quelques notations. Soit p un point de la sphère euclidienne de dimension $n-1$, $\mathbf{S}^{n-1}$, et soit ϕ la «projection stéréographique» de $\mathbf{R}^{n-1}$ sur $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \{p\}$. Soit q l'image par ϕ de l'origine. L'application tangente $T_0\phi : \mathbf{R}^{n-1} \to T_qS^{n-1}$ met en bijection les

grassmanniennes des m-plans de l'un et l'autre espace vectoriel ($0 \leq m \leq n-1$). Insistons sur le fait que cette bijection dépend de ϕ.

Si U est un m-plan de $\mathbf{R}^{n-1}$, nous noterons $T(p,U)$ la partition de $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \{p\}$ en «petites m-sphères» portées par $T_0\phi \cdot U$; autrement dit, les éléments de $T(p,U)$ sont les images par $T_0\phi$ des m-plans affines de $\mathbf{R}^{n-1}$ parallèles à U. C'est l'espace des «tranches» de $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \{p\}$ parallèles à U.

Si S_1, S_2 sont deux éléments de $T(p,U)$, la distance (dite de Hausdorff) qui les sépare est le nombre

$$d(S_1,S_2) = \max\{\sup_{x_1 \in S_1} d(x_1,S_2), \sup_{x_2 \in S_2} d(S_1,x_2)\}.$$

On vérifie que d définit une distance sur $T(p,U)$. Si K est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n-1}$, la restriction à K de l'application composée

$$\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1} \setminus \{p\} \to T(p,U)$$

est bilipschitz sur son image. Nous pouvons maintenant énoncer un corollaire au théorème 3.3.1.2.

Corollaire 3.3.1.5. *Sous les hypothèses du théorème, si μ est la mesure de Patterson-Sullivan sur $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, pour μ-presque tout ξ et pour tout m-plan U de $\mathbf{R}^{n-1}$ ($1 \leq m \leq n-2$), l'image de μ dans $T(\xi,U)$ est de dimension* inférieure *égale à* $\inf\{\delta_\Gamma, n-1-m\}$ *presque partout.*

Démonstration. Soit g un élément de G tel que $\sigma(\Gamma g)$ soit régulière, et soit $\xi = g^+$. L'image inverse, par la projection stéréographique $\mathbf{R}^{n-1} \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}} \setminus \{\xi\}$, de la mesure de Patterson-Sullivan μ, est régulière, car cette mesure est équivalente à $\sigma(g)$, avec une dérivée de Radon-Nikodym continue.

Fixons un m-plan U de $\mathbf{R}^{n-1}$. L'application $\mathbf{R}^{n-1} \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}} \setminus \{\xi\}$ passe au quotient en une bijection $\mathbf{R}^{n-1}/U \to T(\xi,U)$. D'autre part, l'application $\mathbf{R}^{n-1} \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}} \setminus \{\xi\}$ est localement bilipschitz. Par conséquent, l'application quotient $\mathbf{R}^{n-1}/U \to T(\xi,U)$ est localement bilipschitz, lorsque $T(\xi,D)$ est muni de la distance de Hausdorff et $\mathbf{R}^{n-1}/U$ de la distance quotient de la distance euclidienne (distance quotient elle-même induite par la distance de Hausdorff entre les m-plans de $\mathbf{R}^{n-1}$ parallèles à U). Le corollaire en résulte. □

De ce corollaire on déduit facilement l'assertion suivante : pour μ-presque tout ξ, pour tout m-plan U et pour μ-presque tout η, si l'on note S la m-sphère parallèle à U et passant par ξ et η, on a, pour tout $\rho > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu\left(V(S,\varepsilon) \setminus B(\xi,\rho)\right)}{\log \varepsilon} = \inf\{\delta_\Gamma, n-1-m\}$$

où $V(S,\varepsilon)$ est le ε-voisinage de S (pour la distance sphérique) et $B(\xi,\rho)$ la boule de rayon ρ centrée en ξ.

Ce dernier énoncé n'est pas très satisfaisant. Voici un énoncé qui me paraît plausible, mais que je ne suis pas parvenu à démontrer.

Conjecture 3.3.1.6. *On conserve les hypothèses du théorème. Pour μ-presque tout ξ, pour tout m-plan U et μ-presque tout η, si l'on note note S la m-sphère parallèle à U et passant par ξ et η, on a, pour tout $\rho > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu\left(V(S,\varepsilon)\right)}{\log \varepsilon} = \inf\{\delta_\Gamma, n-1-m\}$$

où $V(S,\varepsilon)$ est le ε-voisinage de S (pour la distance sphérique) et $B(\xi,\rho)$ la boule de rayon ρ centrée en ξ.

3.3.2 Démonstration du théorème

Désintégrons $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ le long de l'opération de N à droite et soit σ l'application de désintégration associée.

Nous allons appliquer le théorème 1.2.3.3 et utilisons les notations du paragraphe 1.2.3.1. Nous identifierons N à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ et noterons B_1 le cube unité $[-1,1]^n$ dans N. Si $x \in \mathbf{R}^n$, l'élément correspondant de N sera noté n_x. L'espace des mesures de Radon (non nulles) sur N sera confondu avec l'espace $\mathcal{M}$ des mesures de Radon (non nulles) sur $\mathbf{R}^n$.

Pour tout x, nous noterons

$$\sigma^*(x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma(x)(B_1)}$$

autrement dit σ^* est la composée de σ et de la transformation $[\mu] \mapsto \mu^*$. De même, nous noterons

$$\sigma^\square(x) = \frac{\sigma(x)|B_1}{\sigma(x)(B_1)}.$$

On a évidemment $\sigma^*(x) \in \mathcal{M}^*$ et $\sigma^\square(x) \in \mathcal{M}^\square$ pour presque tout x.

Définissons une distribution P sur $\mathcal{M}^*$:

$$P = \int dm_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}(x)\delta_{\sigma^*(x)}.$$

La démonstration du théorème consiste en les vérifications suivantes.

1. Cette distribution P est fractale et ergodique.
2. Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, la mesure $\sigma^\square(x)$ est uniformément scalante et engendre la version restreinte de P, c'est-à-dire $P^\square$.
3. Pour tout entier k, $1 \le k \le n-1$, et toute application linéaire surjective $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, on a
$$E_{P^\square}(\pi) = \inf\{\delta, k\}.$$

Disons tout de suite comment ce qui précède permet de démontrer le théorème. En vertu du théorème 1.2.3.3, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, et pour tout k-plan V de N, on a

$$\underline{\dim}\left(\pi_V(\sigma^\square(x)\right) \ge \inf\{\delta_\Gamma, k\}$$

où π_V est la projection orthogonale $N \to V$. L'inégalité réciproque est vraie puisque V est de dimension k et que π_V est lipschitzienne. On a donc

$$\underline{\dim}(\pi_V(\sigma^\square(x))) = \inf\{\delta_\Gamma, k\}$$

pour *tout* k-plan V. Ceci signifie que $\sigma^*(x)$ est une mesure régulière, et ce, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x.

Avant de procéder, notons que pour tout $t \in \mathbf{R}$ et pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, on a $S_t^*\sigma(x) = \sigma^*(xa_{-t})$. En revanche on ne peut pas garantir que cette

relation ait lieu pour tout t lorsque x parcourt un ensemble de mesure 1 fixé. Notons aussi que pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et pour $\sigma(x)$-presque tout n, l'image $\gamma(n^{-1})_*\sigma(x)$ de $\sigma(x)$ par la translation à gauche par n^{-1} est égale à $\sigma(xn)$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a évidemment $\gamma(n_x^{-1}) = T_x$.

Lemme 3.3.2.1. *La distribution P est fractale ergodique.*

Démonstration. Remarquons que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma\backslash G & \to & \mathcal{M}^* \\ x & \mapsto & \sigma^*(x) \end{array}$$

entrelace l'opération de $(a_t)_t$ sur $\Gamma\backslash G$ avec l'opération de $(S_t^*)_t$ sur $\mathcal{M}^*$, et qu'elle applique $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ sur P. L'invariance et l'ergodicité de P sous $(S_t^*)_t$ s'en déduisent aussitôt.

Montrons maintenant que P est quasi-Palm. Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{M}^*$ et soit E l'ensemble des $x \in \Gamma G$ tels que $\sigma^*(x) \in \mathcal{E}$. Soit W un voisinage ouvert relativement compact de l'origine dans N. Dire que $\mathcal{E}$ est négligeable pour la distribution sur $\mathcal{M}^*$

$$\int dP(\mu) \int_W d\mu(n_x)\delta_{T_x^*\mu}$$

c'est dire, compte tenu de la relation $T_x^*\sigma^*(x) = \sigma^*(xn_x)$ valable pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et $\sigma^*(x)$-presque tout $n_x \in W$, que la mesure de BMS de l'ensemble des x pour lesquels

$$\sigma^*(x)\{n \in W; xn \in E\} > 0$$

est égale à 0. Ceci est équivalent à dire que E est négligeable pour la mesure de BMS, donc que $\mathcal{E}$ est négligeable pour P. □

Lemme 3.3.2.2. *Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, la mesure $\sigma^*(x)$ est uniformément scalante et engendre $P^\square$.*

Démonstration. Soit h une application continue sur l'espace compact à base dénombrable $\mathcal{M}^\square$. Nous devons montrer que pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, pour $\sigma^\square(x)$-presque tout $n \in N$,

$$(*) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h\left(S_t^\square(\gamma(n^{-1})_*\sigma(x))\right) dt = \int h(\sigma^\square(x)) dm_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}.$$

Notons d'abord que lorsque n est l'élément neutre de N, l'égalité précédente est vraie pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x. En effet, il revient au même (h étant bornée) de démontrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 h(S_t^\square\sigma^*(xa_{-n}))dt$$

pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x. Ce qui provient du théorème ergodique de Birhov appliqué à la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 h(S_t^\square\sigma^*(x))dt$$

compte tenu que $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ est ergodique relativement à la transformation $x \mapsto xa_{-1}$ (théorème 3.1.5.8).

Appelons X l'ensemble des points x vérifiant la relation $(*)$ lorsque $n = e$. Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et $\sigma(x)$-presque tout n, on a $\gamma(n^{-1})_*\sigma(x) = \sigma(xn)$; et d'autre part pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et $\sigma(x)$-presque tout n, le translaté xn appartient X.

Ceci démontre que la relation $(*)$ a lieu pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x et $\sigma^{\square}(x)$-presque tout n.

D'où le lemme, par définition de P. □

Lemme 3.3.2.3. *Soient k un entier $1 \leq k \leq n-1$, V un k-plan de N et π la projection de orthogonale $N \to V$. On a $E_{P^{\square}}(\pi) = \inf\{\delta_\Gamma, k\}$.*

Démonstration. Soit U le $(n-k)$-plan orthogonal à V. Le quotient N/U étant isométrique à V, on a

$$\underline{\dim}(\pi\sigma^{\square}(x)) = \delta_{N/U}$$

pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x. Ainsi, $E_{P^{\square}}(\pi)$ est égal à la dimension transverse $\delta_{N/U}$. Or nous savons que $\delta_{N/U}$ ne dépend pas du $(n-k)$-plan U, et qu'elle est égale à $\inf\{\delta_\Gamma, k\}$. Le lemme est démontré. □

3.4 Présentation du cas hyperbolique complexe

3.4.1 L'espace hyperbolique complexe et son bord

3.4.1.1 Notations

Un entier $n \geq 2$ est fixé et nous notons maintenant G le groupe $\mathbf{PU}(1,n)$, groupe unitaire associé à une forme quadratique hermitienne de signature $(1,n)$. C'est le groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. La distance hyperbolique sera notée d.

Rappelons, en suivant (Quint, 2006), la construction de l'espace hyperbolique complexe dans le modèle de l'espace projectif complexe ; nous faisons ces rappels afin de pouvoir introduire simplement certains objets géométriques qui n'ont pas d'analogue dans l'espace hyperbolique réel (les géodésiques complexes).

Soit q la forme quadratique hermitienne de signature $(1,n)$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$,

$$q(x_0, \ldots, x_n) = |x_0|^2 - |x_1|^2 - \ldots - |x_n|^2$$

associée à la forme hermitienne

$$\langle x, y\rangle = \overline{x_0}y_0 - \overline{x_1}y_1 - \ldots - \overline{x_n}y_n.$$

Soit U l'ouvert de $\mathbf{C}^{n+1}$ formé des vecteurs de type «espace», c'est-à-dire des $x \in \mathbf{C}^{n+1}$ tels que $q(x) > 0$. Pour tout $x \in U$, soit E_x l'orthogonal pour q de la droite complexe portée par x. On sait que E_x est un plan complexe de dimension n et que la restriction de q à E_x est définie négative. Soit g_x le produit scalaire hermitien sur E_x défini par

$$g_x(y,z) = \frac{-1}{q(x)}\langle y, z\rangle \quad (y, z \in E_x).$$

On a évidemment $g_{\lambda x}(\lambda y, \lambda z) = g_x(y, z)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, de sorte que g passe au quotient en une métrique hermitienne sur l'ouvert de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ image de U par l'application canonique $\mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$. Cet ouvert est noté $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Muni de la métrique g, c'est une variété hermitienne de dimension complexe n appelée *espace hyperbolique complexe de dimension* n. Topologiquement, $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à la boule $\mathbf{B}^{2n}$. Nous noterons d la distance induite par la métrique g sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Le groupe des isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est le groupe projectif unitaire $\mathbf{PU}(1, n)$ que nous noterons simplement G.

Donnons la classification des sous-espaces totalement géodésiques de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$.

Proposition 3.4.1.1. *Soit V un plan complexe de dimension m de $\mathbf{C}^{n+1}$ qui rencontre U. La trace $\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est un sous-espace totalement géodésique complexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$; il est isométrique à $\mathbf{H}^{m-1}_{\mathbf{C}}$. Tout sous-espace totalement géodésique complexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est de cette forme.*

Soit V un lagrangien de dimension (réelle) m de $\mathbf{C}^{n+1}$ qui rencontre U. La trace sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ de l'image de V dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ est une sous-variété totalement géodésique réelle, isométrique à $\mathbf{H}^{n-1}$.

La courbure sectionnelle de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est comprise entre -1 et -4 ; elle vaut -1 exactement sur les 2-plans lagrangiens et -4 exactement sur les 2-plans complexes.

Rappelons qu'un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{C}^{n+1}$ est dit lagrangien s'il est totalement isotrope pour la forme bilinéaire alternée réelle $(x, y) \mapsto \mathrm{Im}\langle x, y\rangle$, *i.e.* s'il est orthogonal à lui-même pour cette forme.

Démonstration. Voir (Quint, 2006) ou (Goldman, 1999). □

Le bord visuel $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ s'identifie au bord de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ et est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^{2n-1}$. C'est l'image, dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, de l'ensemble des vecteurs $x \neq 0$ de $\mathbf{C}^{n+1}$ tels que $q(x) = 0$. Nous appellerons *géodésique complexe* la trace sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \cup \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ d'une droite projective complexe rencontrant $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Le *bord* d'une géodésique complexe est sa trace sur $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Nous parlerons, conformément à une tradition remontant à E. Cartan, de *chaîne* pour désigner le bord d'une géodésique complexe.

Pour tout $x \in \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, on définit une «distance visuelle» d_x au bord de la façon suivante : soit $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ le produit scalaire hermitien sur $\mathbf{C}^{n+1}$ pour lequel x et $x^\perp$ sont orthogonaux et tel que $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ coïncide avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans $\mathbf{C}x$ et avec $-\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans $x^\perp$; la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ est notée $\|\cdot\|_x$. On pose alors

$$d_x(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|_x \|w\|_x}}$$

pour tous $\xi, \eta \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, avec $\xi = \mathbf{P}(\mathbf{C}v)$ et $\eta = \mathbf{P}(\mathbf{C}w)$.

On vérifie que d_x est la distance de Gromov au bord basée en x, au sens général de la théorie des espaces CAT(-1).

3.4.1.2 Le groupe de Heisenberg et le bord à l'infini

Le groupe de Heisenberg. Soit $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G. Le groupe compact maximal K est isomorphe à $\mathbf{U}(n)$ et est le stabilisateur d'un point de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Contrairement au cas réel, le groupe unipotent N

n'est pas abélien. Il est isomorphe au groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_n$ que nous allons maintenant définir.

Soit V un espace vectoriel de dimension réelle $2(n-1)$. Soit ω une forme bilinéaire alternée sur V. On sait que deux telles formes sont toujours congrues ; on peut donc prendre, pour fixer les idées, $V = \mathbf{R}^{2(n-1)}$ et

$$\omega(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1}.$$

Nous munissons l'ensemble produit $\mathcal{H}_n = V \times \mathbf{R}$, de la loi de groupe

$$(v,s)\cdot(w,t) = (v+w, s+t+\omega(v,w)).$$

Pour cette loi, et avec la topologie produit, $\mathcal{H}_n$ est un groupe topologique localement compact à base dénombrable.

Le centre de $\mathcal{H}_n$, qui est aussi le sous-groupe dérivé, est égal à $\{0\}\times\mathbf{R}$.

On définit sur $\mathcal{H}_n$ une distance, appelée *distance de Heisenberg* (ou *distance de Cygan* dans la littérature), comme suit. Soit $\|\cdot\|_H$ la «norme de Heisenberg» définie par

$$\|(v,t)\|_H = \left(\|v\|^4 + t^2\right)^{1/4}$$

où $\|v\|$ est la norme euclidienne de $v \in \mathbf{R}^{n-1}$. On pose alors

$$d_H\left((v,t),(w,s)\right) = \|v\cdot w^{-1}\|_H$$

de sorte que d_H est une distance invariante à droite sur $\mathcal{H}_n$. Si l'on pose, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$,

$$h_\lambda(v,t) = (\lambda v, |\lambda|^2 t)$$

on définit un automorphisme du groupe $\mathcal{H}_n$ qui est une similitude de rapport $|\lambda|$ («similitude de Heisenberg»).

Revenons à la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. L'opération de A sur N par conjugaison est par homothéties de Heisenberg ; plus précisément, il existe un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur A, $t \mapsto a_t$, tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $n \in N$, on ait

$$a_{-t}na_t = h_{e^t}(n)$$

lorsque N est identifie à $\mathcal{H}_n$.

La distribution de Cauchy-Riemann. Soit ϕ la forme bilinéaire réelle sur $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par $\phi(x,y) = \mathrm{R}\langle x,y\rangle$. Pour tout vecteur q-isotrope $v \neq 0$, le tangent $T_{[v]}\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ s'identifie au quotient du $(2n+1)$-plan réel $v^{\perp_\phi}$ par le 2-plan réel $\mathbf{C}v$. Ce tangent contient un $(n-1)$-plan complexe, à savoir le quotient du n-plan complexe $v^\perp$ par la droite complexe $\mathbf{C}v$. Soit $P_{[v]}$ ce $(n-1)$-plan complexe contenu dans $T_{[v]}\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$; il est clair que $P_{[v]}$ ne dépend que de $[v]$. Si $g \in G$ applique $\xi \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ sur η, on a $P_\eta = T_\xi g P_\xi$. La «distribution» G-équivariante $x \mapsto P_\xi$ est appelée *distribution de Cauchy-Riemann* ou *distribution CR*.

Chaînes. Rappelons qu'une chaîne est le bord d'une géodésique complexe. Soit ξ un point du bord $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Soit v un vecteur tangent à $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ en ξ, non nul. Existe-t-il une chaîne passant par ξ et portée par v ? La réponse à cette question dépend de la position de v par rapport à la distribution CR en ξ. Plus précisément :

Lemme 3.4.1.2. *Pour que par $\xi \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ passe une chaîne portée par $v \in T_\xi\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, il faut et il suffit que v n'appartienne pas à la distribution CR en ξ.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{C}^{n+1}$ un vecteur q-isotrope $\neq 0$ et soit $v \in \mathbf{C}^{n+1}$ un vecteur non nul tel que $\mathrm{R}\langle x, v\rangle = 0$. Supposons que $\langle x, v\rangle$ soit nul. En vertu de la loi d'inertie de Sylvester, on a nécessairement $q(v) < 0$, dont q est négative dans le 3-plan réel $\mathbf{C}x \oplus \mathbf{R}v$, et ce dernier ne peut rencontrer U. Par conséquent, l'image de v dans $T_{[x]}\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ ne porte pas de chaîne passant par $[x]$.

Réciproquement, si $\langle x, v\rangle$ est non nul, on vérifie par un calcul facile que le 3-plan réel $\mathbf{C}x \oplus \mathbf{R}v$ rencontre U, ce qui signifie que v porte une chaîne passant par $[x]$. □

Lemme 3.4.1.3. *Par deux points distincts de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ passe une chaîne et une seule.*

Démonstration. Évidente. □

En particulier, l'opération de G sur le bord donne lieu à une opération sur l'espace des chaînes.

Translatées du centre dans le groupe de Heisenberg. Reprenons une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Le groupe AN fixe un point $\xi_+ \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, et A fixe un unique autre point $\xi_- \in \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \setminus \{\xi_+\}$. Ceci permet de définir une involution $\iota : \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ qui à un point ξ associe le point antipodal $\iota(\xi)$: si o est le point de $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}$ fixé par K, $\iota(\xi)$ est l'extrêmité positive de la géodésique issue de ξ passant par o. Il est clair que ι est K-équivariante (mais pas G-équivariante).

Naturellement, cette application ι n'a rien d'intrinsèque, elle dépend du choix des «coordonnées», c'est-à-dire d'une décomposition d'Iwasawa.

Cela étant, faisons opérer N au bord. Le point ξ_+ est fixé et l'opération est transitive sur le complémentaire de ce point. On obtient un homéomorphisme

$$\psi : N \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \setminus \{\xi_+\}$$

qui se prolonge en un homéomorphisme du compactifié d'Alexandrov $N \cup \{\infty\}$ de N sur le bord tout entier.

Cet homéomorphisme met en bijection les fibres de l'application de passage au quotient $N \to N/Z$ (où Z est le centre de N) avec les chaînes passant par ξ_+. En particulier, la chaîne passant par ξ_- et ξ_+ est l'ensemble $Z\xi_- \cup \{\xi_+\}$.

Tout ce qui précède se transporte, par l'opération de K, à tout point ξ du bord (ce qui revient à conjuguer A et N par un élément de K).

Distance sphérique au bord. Le bord $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à la sphère de dimension $2n-1$. Le choix d'un homéomorphisme $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \to \mathbf{S}^{2n-1}$ permet de munir le bord de la distance image réciproque de la distance sphérique sur $\mathbf{S}^{2n-1}$. En changeant d'homéomorphisme, on obtient une distance bilipschitz-équivalente à la première. La classe d'équivalence bilipschitz est donc uniquement définie. Dans la suite, on supposera que le choix a été fait d'une telle distance, et on parlera de *distance de la classe de Riemann* (étant entendu qu'on obtient une telle distance si l'on munit $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ d'une métrique riemannienne et que l'on considère la distance associée à cette métrique).

Les distances de Gromov au bord, que nous avons définies plus haut, définissent une autre classe d'équivalente bilipschitz. Par exemple, le bord $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ est

de dimension de Hausdorff $2n$ pour une distance de Gromov, et $2n-1$ pour une distance de la classe de Riemann.

La coexistence au bord de deux classes bilipschitz de distances traduit le fait que dans l'espace de Heisenberg la distance de Heisenberg n'est pas bilipschitz-équivalente à la distance euclidienne.

En lien avec ceci, M. Gromov a formulé dans (Gromov, 1996) le problème suivant. Notons $\dim_{\mathrm{H}}$ (resp. $\dim_{\mathrm{E}}$) la dimension de Hausdorff dans l'espace de Heisenberg pour la distance de Heisenberg (resp. pour la distance euclidienne). Un nombre $\alpha \in [0,3]$ étant fixé, quelles sont les valeurs possibles de $\dim_{\mathrm{H}}(A)$ lorsque A parcourt les parties de $\mathcal{H}_1$ telles que $\dim_{\mathrm{E}}(A) = \alpha$?

La réponse est donnée par le théorème de Balogh, Rickly, et Serra-Cassano.

Théorème. *Soit S une partie de $\mathcal{H}_1$ et soient α, β ses dimensions de Hausdorff pour les distances euclidienne et de Heisenberg. On a*

$$\max\{\alpha, 2\alpha - 2\} \leq \beta \leq \min\{2\alpha, \alpha + 1\}$$

et ces inégalités ne peuvent être améliorées en général.

Voir (Balogh *et al.*, 2003).

Notons pour mémoire le fait suivant.

Lemme 3.4.1.4. *Soient, sur l'espace de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, d_H la distance de Heisenberg et d_E la distance euclidienne.*

1. *Pour tout compact $K \subset \mathcal{H}_n$, il existe une constante $C > 1$ telle que*

$$\frac{1}{C} d_H(h,h')^2 \leq d_E(h,h') \leq C d_H(h,h')$$

   pour tous $h, h' \in K$.

2. *Lorsque deux éléments $h, h' \in \mathcal{H}_n$ sont congrus modulo le centre de $\mathcal{H}_n$, on a l'égalité $d_E(h,h') = d_H(h,h')^2$.*
3. *La distance de N/Z quotient de la distance de Heisenberg sur N coïncide avec la distance quotient de la distance euclidienne.*

Démonstration. Calculs immédiats. □

3.4.2 Entropie et dimension de Hausdorff

3.4.2.1 Position du problème

Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de G. On définit, comme dans le cas réel, l'ensemble limite, l'exposant critique δ_Γ, les densités Γ-conformes, la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan sur le fibré unitaire tangent de $\Gamma\backslash\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$, *etc.*

Supposons que Γ soit de mesure de BMS finie. Relevons, comme dans le cas réel, la mesure de BMS sur $\Gamma\backslash G/M$ en une mesure M-invariante à droite sur $\Gamma\backslash G$ et faisons opérer N à droite. On a, comme dans la proposition 3.1.6.1, $h_{\mathrm{BMS}}(N) = \delta_\Gamma$.

Problème 3.4.2.1. *Calculer l'entropie de la mesure de BMS sur $\Gamma\backslash G$ le long des sous-groupes fermés connexes de N.*

Rappelons que Z est le centre de N.

Conjecture 3.4.2.2. *Soit Γ un sous-groupe discret de G, Zariski-dense et de mesure de BMS finie, d'exposant de croissance δ_Γ. Si $\delta_\Gamma \leq 2(n-1)$, on a $h_{\mathrm{BMS}}(Z) = 0$. Si $2(n-1) < \delta_\Gamma \leq 2n$, on a $h_{\mathrm{BMS}}(Z) = \delta_\Gamma - 2(n-1)$.*

Je suis loin de pouvoir établir ce résultat. Cependant, dans la sous-section suivante, je construirai des groupes de Schottky pour lesquels l'entropie le long du centre est bel et bien nulle.

Notons que la formule de Ledrappier-Young

$$h_{\mathrm{BMS}}(N) = h_{\mathrm{BMS}}(Z) + \delta_{N/Z},$$

où le membre de gauche est égal à δ_Γ, ramène le calcul de $h_{\mathrm{BMS}}(Z)$ à celui de $\delta_{N/Z}$. La conjecture précédente équivaut à l'énoncé suivant : si $h_{\mathrm{BMS}}(Z) > 0$, alors $\delta_{N/Z} = 2n$.

Conjecture 3.4.2.3. *Si $h_{\mathrm{BMS}}(Z) > 0$, alors les conditionnelles sont transversalement absolument continues, c'est-à-dire que pour tout voisinage compact B de l'élément neutre dans N, l'image dans N/Z de la mesure obtenue en conditionnant $\sigma(x)$ à B est absolument continue pour presque tout x.*

Formulons maintenant un second problème, en lien avec le premier. Nous conservons les hypothèses précédentes : Γ est un sous-groupe discret Zariski-dense et de mesure de BMS finie de G. Son ensemble limite Λ_Γ est une partie de $\partial \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Comme nous l'avons dit, on peut munir le bord de deux classes bilipschitz de distances. Lorsqu'on le munit de la classe des distances visuelles de Gromov, on a le résultat suivant (voir théorème 3.1.5.1) :

Théorème 3.4.2.4. *La dimension de Hausdorff de l'ensemble limite conique est égale à δ_Γ.*

Problème 3.4.2.5. *Calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite conique, relativement à une distance riemannienne au bord.*

Précisons le lien entre ce problème et le précédent.

Théorème 3.4.2.6. *Soit Γ un sous-groupe discret de G, Zariski-dense et de mesure de BMS finie. Soit $\dim_{\mathrm{E}}(\Lambda^c_\Gamma)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite conique, relativement à une distance riemannienne au bord. On a l'encadrement*

$$\delta_\Gamma - \frac{h_{\mathrm{BMS}}(Z)}{2} \leq \dim_{\mathrm{E}}(\Lambda^c_\Gamma) \leq \delta_\Gamma.$$

Démonstration. Fixons un voisinage compact B de l'élément neutre dans N. Pour $x \in \Gamma\backslash G$, posons

$$\nu^B(x) = \frac{\sigma(x)|B}{\sigma(x)(B)}$$

et soit $\theta^B(x)$ l'image de $\nu^B(x)$ dans N/Z. Désintégrons celle-ci au-dessus de celle-là :

$$\nu^B(x) = \int d\left(\theta^B(x)\right)(v)\phi^B_v(x).$$

Pour $m^{\Gamma\backslash G}_{\mathrm{BMS}}$-presque tout x, nous savons que $\theta^B(x)$ est (relativement à la distance sur N/Z quotient de la distance de Heisenberg sur N) de dimension inférieure

égale à $\delta_{N/Z}$ presque partout, et que $\phi_v^B(x)$ est (relativement à la distance de Heisenberg) de dimension exacte égale à $h_{\mathrm{BMS}}(Z)$ pour $\theta^B(x)$-presque tout v.

Munissons maintenant N de la distance euclidienne. Chaque conditionnelle $\phi_v^B(x)$ est presque sûrement portée par un classe modulo Z, donc de dimension exacte égale à $\frac{1}{2}h_{\mathrm{BMS}}(Z)$ (lemme 3.4.1.4, point 2) ; la mesure image $\theta^B(x)$ est de dimension $\delta_{N/Z}$ puisque la distance quotient est inchangée (*ibid.*, point 3). On en déduit, vu la proposition 1.1.3.15, et compte tenu que l'espace métrique N muni de la distance euclidienne possède la propriété de Besicovitch, que la dimension *inférieure* de $\nu^B(x)$ est au moins égale à

$$\delta_{N/Z} + \frac{1}{2}h_{\mathrm{BMS}}(Z) = \delta_\Gamma - \frac{1}{2}h_{\mathrm{BMS}}(Z)$$

et ce, pour m^x_{BMS}-presque tout x.

Pour conclure, il reste à observer que la dimension, relativement à une distance riemannienne au bord, de la mesure de Patterson-Sullivan μ, est égale à la dimension de $\nu^B(x)$.

En effet, l'application $N \to \partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ appliquant n sur $(gn)^+$ est un difféomorphisme sur le complémentaire de g^-, donc est localement bilipschitz, et elle applique $\sigma(x)$ sur une mesure équivalente à μ, avec une dérivée de Radon-Nikodym continue. La dernière assertion s'en déduit, en considérant une suite croissante de voisinages compacts B_n de l'élément neutre dont la réunion recouvre N.

Puisque Λ^c_Γ est de mesure de Patterson-Sullivan, on obtient le théorème. □

Si la conjecture 3.4.2.3 recevait une réponse positive, on en déduirait que la dimension de Hausdorff de Λ^c_Γ relativement à une distance riemannienne au bord est égale à

$$\dim_{\mathrm{E}}(\Lambda^c_\Gamma) = \begin{cases} \delta_\Gamma & \text{si } \delta_\Gamma \leq 2(n-1) \\ 2(n-1) + \frac{1}{2}(\delta_\Gamma - 2(n-1)) & \text{si } \delta_\Gamma > 2(n-1) \end{cases}$$

3.4.2.2 Exemple : groupes de Schottky bien positionnés

Nous allons décrire des sous-groupes de Schottky de G pour lesquels la conclusion de la conjecture 3.4.2.3 est vérifiée.

Donnons-nous un ensemble fini $W \subset G$ d'au moins deux isométries hyperboliques et, pour tout $w \in W \cup W^{-1}$, un ouvert $B(w)$ de $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$. Nous faisons les hypothèses suivantes :

1. Les ensembles W et W^{-1} sont disjoints ;
2. Les adhérences $\overline{B(w)}$ sont deux à deux disjointes ;
3. Pour tout $w \in W \cup W^{-1}$, on a
$$w(\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \setminus B(w^{-1})) \subseteq B(w);$$
4. Aucune chaîne ne passe par trois de ces ouverts (hypothèse de «bonne position des générateurs»).

Rappelons qu'une chaîne est le bord d'une géodésique complexe.

Il est facile de se donner un ensemble W possédant ces hypothèses. On peut commencer par produire des isométries hyperboliques $w'_1, \ldots, w'_k$ telles que pour $i \neq j$, la chaîne passant par les points fixes de w_i ne passe pas par l'un des points

fixes de w_j. Ensuite, on pose $w_i = (w_i')^n$ $(1 \leq i \leq k)$ et l'ensemble W des w_i possèdera les propriétés voulues pour peu que n soit assez grand.

Les hypothèses 1 à 3 entraînent (par un argument de tennis de table remontant à F. Klein) que le sous-groupe Γ engendré par W est discret et s'identifie au groupe libre $F(W)$ construit sur l'ensemble W. Quand nous parlerons de longueur d'un élément de Γ ou de décomposition réduite d'un tel élément, il sera sous-entendu que ces notions sont relatives à la base fixée W du groupe libre Γ.

Si $f \in \Gamma$ a pour décomposition réduite $f_1 \cdots f_n$ $(n \geq 2)$, on notera $B(f)$ l'ouvert $f_1 \cdots f_{n-1} B(f_n)$. Si f, g sont deux éléments distincts de Γ, les ensembles $B(f)$ et $B(g)$ sont disjoints.

Si f, g sont deux mots de $F(W)$, de décompositions réduites respectives $\prod f_i$ et $\prod g_i$, on notera $f \wedge g$ le plus grand mot h de décomposition réduite $h_1 \cdots h_s$, tel que $f_i = g_i = h_i$ pour $1 \leq i \leq s$. Lorsque $f \wedge g$ est le mot vide, on dira que f et g sont disjoints ; à l'inverse, lorsque $f \wedge g = f$, on dira que f est un sous-mot de g. Si f est un sous-mot de g, $B(f)$ est contenu dans $B(g)$.

Lemme 3.4.2.7. *Soient f, g, h trois mots dont aucun n'est un sous-mot d'un autre. Les ouverts $B(f), B(g)$ et $B(h)$ sont disjoints, et aucune chaîne ne passe par ces trois ouverts.*

Démonstration. Soit C une chaîne passant par $B(f), B(g)$ et $B(h)$. Quitte à composer par $(f \wedge g \wedge h)^{-1}$, on peut supposer ces trois mots disjoints dans leur ensemble.

S'ils sont deux à deux disjoints, le lemme résulte directement de l'hypothèse 4.

Supposons par exemple que $k = f \wedge g$ ne soit pas le mot vide. Alors $k^{-1}(C)$ est une chaîne passant par $B(k^{-1}f)$, $B(k^{-1}g)$ et $B(k^{-1}h)$. On conclut en raisonnant par récurrence sur la somme des longueurs de f, g, h. □

Avant d'énoncer le lemme suivant, notons que si ξ est un point de l'ensemble limite, il existe, pour tout $n \geq 1$, un unique mot $f_n \in \Gamma$ de longueur n tel que ξ appartienne à $B(w)$, et f_{n+1} est un sous-mot de f_n pour tout n. On peut donc poser $f_n = \xi_1 \cdots \xi_n$ où chaque ξ_k est élément de $W \cup W^{-1}$ et $\xi_k \xi_{k+1}$ est distinct de l'élément neutre pour tout k. Ceci permet de définir une bijection de Λ sur le «bord» du groupe libre Γ, c'est-à-dire l'ensemble des mots infinis réduits écrits avec l'alphabet $W \cup W^{-1}$.

Lemme 3.4.2.8. *Soient ξ, η deux points de l'ensemble limite Λ_Γ. La chaîne passant par ξ et η ne contient aucun autre point de Λ_Γ.*

Démonstration. Supposons à l'inverse que ζ soit un troisième point de Λ_Γ situé sur cette chaîne. Puisque ξ, η, ζ sont distincts, on peut trouver un entier n tels que les mots $f = \xi_1 \cdots \xi_n$, $g = \eta_1 \cdots \eta_n$ et $h = \zeta_1 \cdots \zeta_n$ soient deux à deux distincts. En vertu du lemme précédent, aucune chaîne passant par $B(f)$ et $B(g)$ ne peut passer par $B(h)$. Mais ceci contredit le fait que la chaîne passant par ξ, η et ζ rencontre ces trois ensembles. □

Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

Proposition 3.4.2.9. *L'entropie de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma \backslash G}$ long de Z est nulle.*

Démonstration. Soit $\sigma : \Gamma\backslash G \to \mathcal{M}^1(N)$ l'application de désintégration de la mesure de BMS le long de N. Pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, le support de $\sigma(x)$ est l'image réciproque, par l'application $n \mapsto (gn)^+$ de N dans $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}} \setminus \{g^-\}$, de l'ensemble $\Lambda_\Gamma \setminus \{g^-\}$. Pour tout $n \in N$, la translatée nZ du centre de N est l'image réciproque, par cette même application, de la chaîne passant par $(gn)^+$ et par g^-.

Cela étant, pour $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$-presque tout x, g^- appartient à l'ensemble limite, et pour $\sigma(x)$-presque tout n, le point $(gn)^+$ aussi, donc la chaîne passant par g^- et $(gn)^+$ ne rencontre pas d'autre point de Λ_Γ, de sorte que nZ ne rencontre le support de $\sigma(x)$ qu'au point n.

Autrement dit, $\sigma(x)$ est portée par un graphe borélien au-dessus de N/Z. Les conditionnelles de $m_{\mathrm{BMS}}^{\Gamma\backslash G}$ sont donc triviales, et la proposition est démontrée. □

Corollaire 3.4.2.10. *La dimension de Hausdorff de Λ_Γ, relativement à une distance riemannienne, est égale à δ_Γ.*

Bibliographie

Assouad, P. et Quentin de Gromard, T. (2006). Recouvrements, derivation des mesures et dimensions. *Rev. Mat. Iberoam.*, 22(3):893–953.

Balogh, Z. M., Rickly, M. et Serra Cassano, F. (2003). Comparison of Hausdorff measures with respect to the Euclidean and the Heisenberg metric. *Publ. Mat.*, 47(1):237–259.

Becker, H. et Kechris, A. S. (1996). *The descriptive set theory of Polish group actions*, volume 232 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge.

Benoist, Y. et Quint, J.-F. (2011). Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes. *Ann. of Math. (2)*, 174(2):1111–1162.

Bishop, C. J. et Jones, P. W. (1997). Hausdorff dimension and Kleinian groups. *Acta Math.*, 179(1):1–39.

Bourbaki, N. (1947). *Éléments de mathématique. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III : Topologie générale. Chapitre V : Groupes à un paramètre. Chapitre VI : Espace numériques et espaces projectifs. Chapitre VII : Les groupes additifs R^n. Chapitre VIII : Nombres complexes.* Actualités Sci. Ind., no. 1029. Hermann et Cie., Paris.

Bowen, R. (1979). Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):11–25.

Douady, A. et Oesterlé, J. (1980). Dimension de Hausdorff des attracteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(24):A1135–A1138.

Einsiedler, M. et Lindenstrauss, E. (2010). Diagonal actions on locally homogeneous spaces. *In Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*, volume 10 de *Clay Math. Proc.*, pages 155–241. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Falconer, K. (2014). *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third édition. Mathematical foundations and applications.

Falconer, K. J. (1988). The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 103(2):339–350.

Furstenberg, H. (2008). Ergodic fractal measures and dimension conservation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(2):405–422.

Goldman, W. M. (1999). *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. Oxford Science Publications.

GROMOV, M. (1996). Carnot-Carathéodory spaces seen from within. *In Sub-Riemannian geometry*, volume 144 de *Progr. Math.*, pages 79–323. Birkhäuser, Basel.

HERSONSKY, S. et PAULIN, F. (1997). On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces. *Comment. Math. Helv.*, 72(3):349–388.

HERSONSKY, S. et PAULIN, F. (2002). Diophantine approximation for negatively curved manifolds. *Math. Z.*, 241(1):181–226.

HOCHMAN, M. (2010). Dynamics on fractals and fractal distributions. *ArXiv e-prints*.

HOCHMAN, M. et SHMERKIN, P. (2012). Local entropy averages and projections of fractal measures. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1001–1059.

HUETER, I. et LALLEY, S. P. (1995). Falconer's formula for the Hausdorff dimension of a self-affine set in $\mathbf{R}^2$. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(1):77–97.

HUTCHINSON, J. E. (1981). Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747.

KÄENMÄKI, A., RAJALA, T. et SUOMALA, V. (2010). Local homogeneity and dimensions of measures. *ArXiv e-prints*.

KECHRIS, A. S. (1992). Countable sections for locally compact group actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 12(2):283–295.

KECHRIS, A. S. (1995). *Classical descriptive set theory*, volume 156 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

KORÁNYI, A. et REIMANN, H. M. (1995). Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group. *Adv. Math.*, 111(1):1–87.

LE DONNE, E. et RIGOT, S. (2014). Besicovitch Covering Property for homogeneous distances in the Heisenberg groups. *ArXiv e-prints*.

LE DONNE, E. et RIGOT, S. (2015). Remarks about Besicovitch covering property in Carnot groups of step 3 and higher. *ArXiv e-prints*.

LEDRAPPIER, F. (2013). Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée. *In Géométrie ergodique*, volume 43 de *Monogr. Enseign. Math.*, pages 117–144. Enseignement Math., Geneva.

LEDRAPPIER, F. et LINDENSTRAUSS, E. (2003). On the projections of measures invariant under the geodesic flow. *Int. Math. Res. Not.*, (9):511–526.

LEDRAPPIER, F. et YOUNG, L.-S. (1985). The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension. *Ann. of Math. (2)*, 122(3):540–574.

LINDENSTRAUSS, E. (2006). Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Ann. of Math. (2)*, 163(1):165–219.

LUUKKAINEN, J. (1998). Assouad dimension : antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures. *J. Korean Math. Soc.*, 35(1):23–76.

MARSTRAND, J. M. (1954). Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4:257–302.

MATTILA, P. (1995). *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. Fractals and rectifiability.

Mohammadi, A. et Oh, H. (2015). Ergodicity of unipotent flows and Kleinian groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(2):531–577.

Patterson, S. J. (1976). The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, 136(3-4):241–273.

Paulin, F. (1997). On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries. *Differential Geom. Appl.*, 7(3):231–236.

Pollicott, M. et Weiss, H. (1994). The dimensions of some self-affine limit sets in the plane and hyperbolic sets. *J. Statist. Phys.*, 77(3-4):841–866.

Preiss, D. (1983). Dimension of metrics and differentiation of measures. *In General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981)*, volume 3 de *Sigma Ser. Pure Math.*, pages 565–568. Heldermann, Berlin.

Quint, J.-F. (2006). An overview of Patterson-Sullivan theory. http ://www.math.u-bordeaux1.fr/˜ jquint/publications/courszurich.pdf.

Rigot, S. (2004). Counter example to the Besicovitch covering property for some Carnot groups equipped with their Carnot-Carathéodory metric. *Math. Z.*, 248(4):827–848.

Roblin, T. (2003). Ergodicité et équidistribution en courbure négative. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (95):vi+96.

Struble, R. A. (1974). Metrics in locally compact groups. *Compositio Math.*, 28:217–222.

Sullivan, D. (1984). Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 153(3-4):259–277.

Winter, D. (2014). Mixing of frame flow for rank one locally symmetric spaces and measure classification. *ArXiv e-prints*.