



**HAL**  
open science

# Analyse et traitement de signaux partiellement polarisés Synthèse des travaux de recherche en vue de l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger des recherches

Antoine Roueff

## ► To cite this version:

Antoine Roueff. Analyse et traitement de signaux partiellement polarisés Synthèse des travaux de recherche en vue de l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger des recherches. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Aix-Marseille Université, 2015. tel-01271477

**HAL Id: tel-01271477**

**<https://hal.science/tel-01271477>**

Submitted on 9 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

ED 352 : PHYSIQUE ET SCIENCES DE LA MATIERE

FACULTE SAINT JEROME

INSTITUT FRESNEL (UMR 7249)

MEMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Physique

Spécialité : Traitement du Signal

Antoine ROUEFF

Analyse et traitement de signaux partiellement polarisés  
Synthèse des travaux de recherche en vue de l'obtention du diplôme  
d'habilitation à diriger des recherches

Soutenue le 20 mars 2015

Composition du jury :

Christian JUTTEN	Pr., Université Grenoble 1	Président du Jury
Vincent DEVLAMINCK	Pr., Université Lille 1	Rapporteur
Laurent FERRO-FAMIL	Pr., Université Rennes 1	Rapporteur
Philippe FORSTER	Pr., Université Paris X	Rapporteur
Florence TUPIN	Pr., Telecom ParisTech	Examineur
Miguel ALONSO	Pr. Ass., Université de Rochester	Examineur
Philippe REFREGIER	Pr., Ecole Centrale de Marseille	Tuteur

# Remerciements

Je remercie les membres du jury : Vincent Devlaminck, Philippe Forster, Laurent Ferro-Famil, Florence Tupin, Miguel Alonso et Christian Jutten d'avoir accepté de participer au jury de ma demande d'habilitation à diriger des recherches. Je suis flatté de pouvoir être évalué par des experts en traitement du signal, en optique et en RADAR. J'espère qu'ils trouveront quelques satisfactions à la lecture de ce document.

Je remercie également Philippe Réfrégier pour son support constant depuis mon arrivée à Marseille. J'espère avoir su tirer profit de son expérience et avoir l'occasion de continuer à progresser dans mon métier d'enseignant-chercheur à ses côtés.

Les travaux présentés dans ce document ont été accomplis en collaboration avec de nombreux co-auteurs, notamment deux doctorants Aurélien Arnaubec et Valentine Wasik que je souhaite aussi remercier. Je remercie également Pascale Dubois Fernandez qui est notre collaboratrice privilégiée à l'ONERA sur la thématique PolInSAR.

Je remercie également le directeur de l'institut Fresnel Stefan Enoch et le directeur de l'école Centrale de Marseille Frédéric Fotiadu pour leur appui.

Enfin, je remercie mes collègues de l'équipe PhyTI : Nicolas Bertaux, Muriel Roche, Frédéric Galland et Marc Allain, avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon activité de recherche au long de ces sept dernières années.

# Table des matières

<b>Notice individuelle</b>	<b>6</b>
Curriculum Vitae	8
Activités d'enseignement	11
Activités de recherche	12
Production scientifique	16
Encadrements	18
Contrats	19
Participation aux tâches collectives	21
Collaborations scientifiques	22
<b>Synthèse des activités de recherche</b>	<b>23</b>
Préambule sur la synthèse des activités de recherche	24
<b>1 La polarisation en sismique, en optique et en RADAR</b>	<b>25</b>
1.1 Introduction	25
1.2 La polarisation en sismique (travaux de thèse)	26
1.3 La polarisation en optique	29
1.3.1 Introduction	29
1.3.2 Rapide historique sur la polarisation en optique : du déterminisme à l'aléatoire	29
1.3.3 Définition et représentation des propriétés de polarisation en optique 2D	30
1.3.4 Formalisme des matrices de Jones	36
1.4 La polarisation en imagerie RADAR à synthèse d'ouverture	43
1.4.1 Introduction	43
1.4.2 Imagerie Radar à synthèse d'ouverture polarimétrique	43
1.5 Conclusion	46
<b>2 Analyse de la cohérence de la lumière partiellement polarisée</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction	47
2.2 Contexte scientifique	48
2.2.1 Analyse des degrés de cohérence	48
2.3 Analyse de la cohérence au sens des degrés intrinsèques	58
2.3.1 Lien avec la cohérence au sens de Glauber	58



2.3.2	Lien avec la cohérence au sens de Wolf	59
2.4	Analyse des lumières partiellement polarisées et partiellement cohérentes	62
2.4.1	Introduction	62
2.4.2	Analyse de la cohérence fondée sur l'expérience d'une détection homodyne	62
2.4.3	Lien avec les paramètres de Stokes généralisés	63
2.4.4	Manifestation d'une anisotropie de cohérence pour une lumière totalement dépolarisée	65
2.4.5	Isotropie de cohérence	68
2.5	Analyse du cas particulier des champs à deux composantes	70
2.5.1	Définition d'un champ à deux composantes	70
2.5.2	Invariance des propriétés de cohérence dans un domaine	71
2.5.3	Estimation des états de polarisation et filtrage polarimétrique dans le cas anisotrope	72
2.6	Conclusion	74
<b>3</b>	<b>Estimation de paramètres de végétation avec le système SAR polarimétrique interférométrique</b>	<b>75</b>
3.1	Contexte scientifique	75
3.1.1	Analyse environnementale	75
3.1.2	Analyse d'une image SAR	75
3.1.3	Modèle Random Volume over Ground (RVoG) et estimation de la hauteur de végétation	78
3.1.4	Amélioration des modèles décrivant les mécanismes de rétro-diffusion	82
3.1.5	Plan du chapitre	84
3.2	Recherche d'invariants pour réduire la complexité de la description du problème	84
3.2.1	Etude quantitative de la précision des estimations	84
3.2.2	Réduction de la complexité de la description du problème d'estimation des hauteurs	87
3.2.3	Analyse des précisions sur l'estimation la hauteur de végétation pour $N = 100$	89
3.3	Analyse des gains possibles sur les performances d'estimation	93
3.3.1	Introduction	93
3.3.2	Influence de la connaissance des symétries du sol et du volume	93
3.3.3	Influence de la connaissance de la hauteur topographique	94
3.3.4	Influence de la connaissance des matrices $T_{vol}$ et $T_{gro}$	95
3.4	Analyse d'un compromis entre complexité du système et performance des estimateurs avec le système PolInSAR compact	96
3.4.1	Introduction	96

3.4.2	Analyse de la perte de précision	97
3.4.3	Analyse dans la sphère de Poincaré	100
3.5	Conclusions et perspectives	104
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>108</b>

# Notice individuelle

## Curriculum Vitae

### Etat civil et coordonnées

Antoine ROUEFF,  
39 rue Vacon, 13001, Marseille.

Français, né le 19 avril 1976 à Paris.  
Marié, sans enfant.

Tél professionnel : 04.91.28.80.48.  
E-mails : antoine.roueff@fresnel.fr, antoine.roueff@centrale-marseille.fr

### Fonction actuelle

Maître de Conférences (61<sup>ème</sup> section CNU) depuis septembre 2006 à  
l'Ecole Centrale Marseille,  
Technopôle de Château Gombert,  
38 rue Joliot Curie, 13451, Marseille cedex 13.

Activité de recherche à l'Institut Fresnel (UMR 7249),  
au sein de l'équipe "Physique et traitement de l'Image" (PhyTI),  
Domaine Universitaire de Saint Jérôme,  
Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13397, Marseille cedex 20.

### Formation

- 1997-2000 : Diplôme d'ingénieur de l'Ecole Nationale des Ingénieurs  
Electriciens de Grenoble (ENSIEG).  
Option : Signaux Naturels et Télédétection.
- 2000 : DEA de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.  
Ecole doctorale : Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécom-  
munications et Signal.

Spécialité : Signal, Image, Parole et Télécoms.

- 2003 : **Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.**  
Spécialité : Traitement du Signal, Mention : Très Honorable.  
Sujet : *“Traitement des signaux sismiques multicauteurs et multicomposantes utilisant les représentations temps-fréquence”*.  
Laboratoire des Images et des Signaux (LIS, actuellement GIPSA-Lab).  
Date de Soutenance : 30 juin 2003.  
Composition du Jury :
  - \* Jean Marc Chassery, DR. au LIS (Président),
  - \* Philippe Bolon, Pr. au LISTIC (Rapporteur),
  - \* Frédéric Truchetet, Pr. à l'université de Dijon (Rapporteur),
  - \* Mickaël Unser, Pr. à EPFL (Examinateur),
  - \* Jérôme Mars, MCF au LIS (Directeur de thèse),
  - \* Jocelyn Chanussot, MCF au LIS (co-encadrant).

#### Parcours professionnel

- 2000-2003 : **Thèse de doctorat** au Laboratoire des Images et des Signaux (LIS), à Grenoble sous la direction de Jérôme Mars et Jocelyn Chanussot.  
Collaborations : Guy Canadas du centre de recherche de la société Total de Pau, H. Pedersen du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT) de Grenoble.
- 2003-2005 : **Stage post-doctoral** au Commissariat à l'énergie Atomique (CEA) à la Direction des Applications Militaires (DAM) dans le Département Analyse et Surveillance de l'Environnement (DASE), à Paris.  
Sujet : *“Développement d'outils de traitement du signal pour la détection, la localisation et la discrimination d'évènements naturels et artificiels enregistrés par la nouvelle station hydroacoustique du système de surveillance internationale localisée dans l'océan Indien”*.  
Principales collaborations au CEA : Yves Cansi et Pierre-Franck Piserchia.
- 2005-2006 : **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (ATER)** à Centrale Marseille.
- Depuis 2006 : **Maître de Conférences (MCF)** en section 61 à Centrale Marseille.  
Recherche à l'institut Fresnel (UMR 7249) dans l'équipe Physique et traitement d'image (PhyTI).

## Mots Clés

- Enseignement : théorie du signal, traitement statistique du signal, analyse spectrale, reconnaissance des formes.
- Recherche : analyse des signaux polarimétriques et interférométriques en sismique, optique et RADAR. Traitement statistique du signal. Optique statistique.

## Activités d'enseignement

### Période doctorale (192H)

- 2000-2003 : Moniteur à l'Université Joseph Fourier (Grenoble).

Formation en 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année de l'ISTG.

Enseignements : automatique, calcul scientifique et traitement du signal.

### Période post-doctorale (80H)

- 2003-2005 : Vacataire à l'IUT de Ville d'Avray.

Formation en IUP au département Génie Electronique et Informatique Industrielle (GEII).

Enseignements : traitement du signal, télécommunications et électronique.

### Période ATER, puis MCF

- Depuis 2005 : Ecole Centrale de Marseille.

Formation en 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année.

Enseignements : cours, travaux dirigés (TD) et travaux pratiques (TP) en traitement du signal, TD en probabilités-statistiques (pour une analyse détaillée, voir ci-dessous).

### Détail des enseignements à l'Ecole Centrale Marseille

Depuis 2006, je suis Maître de Conférences à Centrale Marseille. Une synthèse de mes activités d'enseignant est présentée tableau [0.1](#). Ce tableau présente les volumes horaires des cours effectués devant les étudiants en Traitement du Signal et des Images (T.S.I.), en Probabilités et Statistiques (Probas/Stats.) et en Informatique Industrielle (Info. Indus.) ainsi que des heures prises en compte par le référentiel enseignant de l'école. Ce tableau montre l'évolution du nombre d'heures que j'effectue en traitement du signal et des images (de 80 heures en 2006, je suis maintenant à 160 heures en 2014) ainsi que la progression de ma participation aux tâches collectives de l'école : aux Relations Internationales (RI) et la responsabilité du groupe thématique (Gr. Th.). Je détaillerai cette activité plus loin dans le paragraphe "Participation aux Tâches collectives" et je me concentre ci-dessous sur mon activité d'enseignant devant les étudiants.

Une synthèse de la répartition de mon activité d'enseignant en cours, TD et TP prévue pour l'année prochaine (2014-2015) est présentée tableau [0.2](#). Ce tableau montre, qu'en première, deuxième et troisième année, une part importante de mes enseignements sont des séances de travaux pratiques. Les heures de

Année	T.S.I.	Probas/Stats.	Info. Indus.	R.I.	Gr. Th.	Total
2006-2007	82	56	58	0	0	200
2007-2008	101	56	52	0	0	217
2008-2009	125	59	50	0	0	245
2009-2010	124	48	53	0	0	253
2010-2011	172	44	0	0	0	226
2011-2012	160	42	0	38	24	270
2012-2013	147	22	0	5	24	198
2013-2014	165	20	0	44	24	253

Table 0.1 – Synthèse du service d’enseignement effectué à Centrale Marseille en heures équivalent travaux dirigés (HeqTD). La première colonne indique l’année universitaire. Ensuite, les trois colonnes suivantes concernent des enseignements (cours, TD et TP) effectués devant les étudiants : en traitement du signal et des images (T.S.I.), probabilités et statistiques (Probas/Stats.), et informatique industrielle (Info. Indus.). La colonne R.I. est liée à une activité menée pour les relations internationales de l’école. La colonne Gr. Th. est liée à la responsabilité administrative du groupe thématique “traitement de l’information”. La dernière colonne est le total des heures effectuées sur l’année. Le total est un peu plus grand que la somme des autres colonnes du fait de la prise en compte de divers tâches mineures non répertoriées dans ce tableau.

Année	Cours magistraux	Travaux dirigés	Travaux pratiques
Première	0	22H	36H
Deuxième	18H	20H	40H
Troisième	20H	0H	32H

Table 0.2 – Répartition des heures en cours, TD et TP prévue pour 2014-2015 en première, deuxième et troisième année de Centrale Marseille.

travaux dirigés concernent deux cours de tronc commun de la formation d’ingénieurs de Centrale Marseille : l’un en théorie du signal et l’autre en probabilités et statistiques. Les cours magistraux en deuxième et troisième années concernent trois enseignements dont j’ai la responsabilité (administrative) : un cours d’option d’approfondissement en traitement du signal en deuxième année (volume horaire : 30H), un cours d’introduction au traitement du signal en deuxième année du cursus ingénieur de Centrale Pékin (volume horaire : 16H), et un cours de spécialisation en analyse des signaux en troisième année (volume horaire : 50H).

Au cours de mon expérience d’enseignant, j’ai eu de nombreuses occasions de remettre en question ma pédagogie. Pour enseigner le traitement du signal dans une école Centrale, c’est-à-dire une école d’ingénieurs généralistes, plutôt que d’organiser des séances de TD avec des exercices types qui seront révisés rapidement avant l’examen et encore plus rapidement oubliés après l’examen, je pense qu’il est aujourd’hui plus intéressant d’insister principalement sur les

séances de cours et les séances de travaux pratiques (TP).

Dans la plupart de mes enseignements, les séances de cours et de TP s'enchainent les unes après les autres. En cours, j'insiste sur les grands principes et je donne des exemples pour susciter des discussions avec les étudiants. En TP j'organise les séances de manière à ce que les étudiants puissent assimiler et comprendre les concepts du cours. De la même façon que les relecteurs d'un article scientifique ont souvent besoin de voir l'application d'une théorie sur un jeu de données réelles, les étudiants ont, eux aussi, besoin d'éprouver une théorie en TP. De plus, les séances de TP sont aussi un moment privilégié pendant lequel les étudiants peuvent développer leur esprit critique, qui est une qualité essentielle pour un ingénieur scientifique.

Enfin, les étudiants en école d'ingénieurs sont très sensibles au côté "utilitaire" d'une théorie car ils souhaitent agir sur le monde. Il est par conséquent très profitable d'inviter des intervenants du monde industriel afin que ceux-ci expliquent qu'un ingénieur doit avoir des compétences solides en traitement du signal pour pouvoir mener à bien de grands projets. La plupart des étudiants de Centrale se destinent au métier d'ingénieur, il est important qu'ils puissent se projeter dans des métiers où ils pourront s'épanouir.



## **Activités de recherche**

### **Période doctorale**

- 2000-2003 : Thèse de doctorat au **Laboratoire des Images et des Signaux** (LIS, actuellement GIPSA-Lab) de l'INPG,  
Equipe de recherche : Signaux Naturels et Télédétection.  
Thème : Analyse temps-fréquence des signaux sismiques, de leur polarisation et de leur dispersion.

### **Période post-doctorale**

- 2003-2005 : Stage post-doctoral à la Direction des Applications Militaires (DAM) du CEA, au département Analyse et Surveillance de l'Environnement (DASE).  
Thème : Détection, localisation et discrimination des évènements enregistrés par le système de surveillance internationale hydroacoustique situé dans l'océan indien.

### **Période ATER, puis MCF**

- Depuis 2005 : Institut Fresnel,  
Equipe : Physique et traitement d'image (PhyTI).  
Thèmes : Optique statistique et analyse statistique des systèmes polarimétriques interférométriques SAR.

# Production scientifique

## Publications liées aux travaux de thèse

### Articles de revues internationales avec comité de lecture

1. A. Roueff, J. Chanussot, J. I. Mars, and M.-Q. Nguyen, “Unsupervised separation of seismic waves using the watershed algorithm on time-scale images,” *Geophysical Prospecting*, vol. 52, pp. 287–300, 2004.
2. A. Roueff, J. I. Mars, J. Chanussot, and H. Pedersen, “Dispersion estimation from linear array data in the time-frequency plane,” *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 53, no. 10, pp. 3738–3748, 2005.
3. A. Roueff, J. Chanussot, and J. I. Mars, “Estimation of polarization parameters using time-frequency representations and its application to waves separation,” *Signal Processing*, vol. 86, no. 12, pp. 3714–3731, 2006.

### Articles de revues nationales avec comité de lecture

1. A. Roueff, J. I. Mars, J. Chanussot, and H. Pedersen, “Nouvelle méthode d’estimation de la dispersion à partir d’un réseau linéaire de capteurs,” *Traitement du signal*, vol. 21, no. 5, pp. 295–312, 2004.
2. A. Roueff, J. Chanussot, J. I. Mars, and M. Nguyen, “Partition d’une séquence d’images temps-échelle pour la séparation d’ondes dans un profil sismique,” *Traitement du signal*, vol. 21, no. 1, pp. 17–36, 2004.

### Articles de conférences internationales avec comité de lecture et avec actes

1. A. Roueff, J. Chanussot, B. Nicolas, and J. Mars, “Unsupervised seismic wave separation in the time/scale plane,” in *Proc. of the 63<sup>th</sup> meeting of European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE’01)*, Amsterdam, Netherlands, 2001.
2. A. Roueff, J. Chanussot, J. Mars, and G. Canadas, “Stacking in the time-scale plane,” in *72nd Int. Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG’02)*, Salt Lake City, USA, 2002.
3. A. Roueff, J. Chanussot, and J. Mars, “Efficient oblique polarization filter with cross scalogram,” in *72nd Int. Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG’02)*, Salt Lake City, USA, 2002.
4. A. Roueff and J. Chanussot, “Estimation of polarization on time-scale plane for seismic wave separation,” in *11<sup>th</sup> European Signal Processing Conference (EUSIPCO’02)*, Toulouse, France, 2002.
5. A. Roueff, J. Chanussot, and J. Mars, “On the use of time-scale representations for the analysis of seismic signals,” in *Proc. of the SPIE’s International Symposium on Wavelet Applications in Industrial Processing, Rhode Island, USA*, 2003.
6. A. Roueff, H. Pederson, J. Chanussot, and J. Mars, “Simultaneous group and phase correction for the estimation of dispersive propagating waves in the time-frequency plane,” in *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP ’03)*, Hong-Kong, 2003.
7. C. Paulus, A. Roueff, and J. Mars, “Dispersion correction based on gradient computations,” in *Proc. of the 66<sup>th</sup> meeting of European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE’04)*, Paris, France, 2004.

8. A. Roueff, J. Mars, and J. Chanussot, "Multicomponent and linear array sensor analysis using time-frequency representations," in *SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, Avignon, France, 2005*.

### Articles de conférences nationales avec comité de lecture et avec actes

1. A. Roueff, J. Chanussot, B. Nicolas, and J. Mars, "Séparation d'ondes sismiques par ligne de partage des eaux sur des images temps-échelle," in *18<sup>ième</sup> colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Toulouse, France, 2001*.
2. A. Roueff, J. Mars, and J. Chanussot, "Estimation de la dispersion par une analyse multi-spectrale dans le plan temps-fréquence," in *19<sup>ième</sup> colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Paris, France, 2003*.

## Publications liées à l'activité de recherche effectuée après la thèse

### Articles de revues internationales avec comité de lecture

1. J. Guilbert, J. Vergoz, E. Schissle, A. Roueff, and Y. Cansi, "Use of hydroacoustic and seismic arrays to observe rupture propagation and source extent of the Mw = 9.0 sumatra earthquake," *Geophys. Res. Lett.*, vol. 32, no. 15, 2005.
2. Ph. Réfrégier and A. Roueff, "Coherence polarization filtering and relation with intrinsic degrees of coherence," *Opt. Lett.*, vol. 31, no. 9, pp. 1175–1177, 2006.
3. Ph. Réfrégier and A. Roueff, "Linear relations of partially polarized and coherent electromagnetic fields," *Opt. Lett.*, vol. 31, no. 19, pp. 2827–2829, 2006.
4. Ph. Réfrégier and A. Roueff, "Visibility interference fringes optimization on a single beam in the case of partially polarized and partially coherent light," *Opt. Lett.*, vol. 32, no. 11, pp. 1366–1368, 2007.
5. A. Roueff and Ph. Réfrégier, "Separation technique of a mixing of two uncorrelated and perfectly polarized lights with different coherence and polarization properties," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, no. 4, pp. 838–845, 2008.
6. J. Tervo, Ph. Réfrégier, and A. Roueff, "Minimum number of modulated Stokes parameters in Young's interference experiment," *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, vol. 10, no. 5, p. 055002, 2008.
7. A. Roueff, Ph. Roux, and Ph. Réfrégier, "Wave separation in ambient seismic noise using intrinsic coherence and polarization filtering," *Signal Processing*, 2009.
8. J. Tervo, T. Setälä, A. Roueff, Ph. Réfrégier, and A. Friberg, "Two-point stokes parameters : interpretation and properties," *Optics Letters*, vol. 34, no. 20, pp. 3074–3076, 2009.
9. Ph. Réfrégier, J. Tervo, and A. Roueff, "A temporal-coherence anisotropy of unpolarized light," *Optics Communications*, vol. 282, no. 6, pp. 1069–1073, 2009.
10. A. Roueff, A. Arnaubec, P.-C. Dubois-Fernandez, and Ph. Réfrégier, "Cramer-Rao lower bound analysis of vegetation height estimation with random volume over ground model and polarimetric SAR interferometry," *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 8, no. 6, pp. 1115–1119, Nov. 2011.
11. Ph. Roux, M. Wathelet, and A. Roueff, "The san andreas fault revisited through seismic-noise and surface-wave tomography," *Geophys. Res. Lett.*, vol. 38, 2011.
12. J.-P. Da Costa, F. Galland, A. Roueff, and C. Germain, "Unsupervised segmentation based on von Mises circular distributions for orientation estimation in textured images," *Jour. of Elec. Imaging*, vol. 21, no. 2, 2012.

13. A. Arnaubec, A. Roueff, P.-C. Dubois-Fernandez, and Ph. Réfrégier, "Vegetation Height Estimation Precision with Compact PolInSAR and homogeneous Random Volume over Ground Model," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 52, pp. 1879–1891, Mar 2014.
14. Ph. Réfrégier, A. Roueff, and V. Wasik, "Isotropic bicomponent partially polarized and partially coherent light," *Opt. Lett.*, vol. 39, no. 4, pp. 1073–1076, Feb 2014.
15. Ph. Réfrégier, A. Roueff, A. Arnaubec, and P.-C. Dubois-Fernandez, "Invariant Contrast Parameters of PolInSAR and Homogenous RVoG Model," *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 11, no. 8, pp. 1414–1417, Aug 2014.
16. Ph. Réfrégier, A. Roueff, and V. Wasik, "Van Cittert-Zernike theorem and symmetry properties of the normalized cross-spectral density matrix," *Opt. Lett.*, vol. 39, no. 21, pp. 6150–6153, Nov 2014.

### **Article de revue internationale sans comité de lecture**

1. Ph. Réfrégier and A. Roueff, "Intrinsic coherence : a new concept in polarization and coherence theory," *Optics and Photonics news*, vol. 18, pp. 30–35, 2007.

### **Articles de conférences internationales avec comité de lecture et avec actes**

1. A. Roueff, P.-F. Piserchia, J.-L. Plantet, Y. Cansi, and G. Ruzie, "Noise characterization at the international station of crozet islands (h04)," in *148th Meeting of the Acoustical Society of America*, San Diego, CA, 2004.
2. J. Guilbert, Y. Cansi, E. Schissele, A. Roueff, and J. Vergoz, "An original image of the seismic rupture of the Sumatra Mw=9.3 using pmcc from seismic and hydroacoustic small array," in *European Geosciences Union, Vienna, Austria*, 2005.
3. J. Guilbert, Y. Cansi, E. Schissele, A. Roueff, and J. Vergoz, "Mapping of excitation and reflection areas of the t-waves generated by the Mw=9.3 and Mw=8.7 sumatra earthquakes," in *European Geosciences Union, Vienna, Austria*, 2005.
4. A. Roueff, M. Aupetit, P.-F. Piserchia, and Y. Cansi, "Discrimination of events at the international station of crozet islands," in *Proc. of the IEEE Conference OCEANS, Brest, France*, 2005.
5. Ph. Réfrégier and A. Roueff, "Coherence theory in the context of partially polarized light," in *Proc. of the 5<sup>th</sup> International workshop on Information Optics, Toledo, Spain*, 2006.
6. F. Goudail, Ph. Réfrégier, and A. Roueff, "Intrinsic degrees of coherence of partially polarized light : theoretical aspects and applications," in *Proc. of the 8<sup>th</sup> International Conference on Correlation Optics, Chernivtsi, Ukraine*, 2007.
7. J.-P. Da Costa, F. Galland, A. Roueff, and C. Germain, "Unsupervised segmentation based on von mises circular distributions for orientation estimation in textured images," in *Proc. of the International Conference on Quality Control by Artificial Vision, Saint Etienne, France*, 2011.
8. A. Arnaubec, A. Roueff, P.-C. Dubois-Fernandez, and Ph. Réfrégier, "Influence of the nature of a priori knowledge on the precision of vegetation height estimation in polarimetric SAR interferometry," in *EUSAR, Nuremberg, Germany*, 2012.
9. A. Roueff, A. Arnaubec, P.-C. Dubois-Fernandez, and Ph. Réfrégier, "Analysis of vegetation height estimation fluctuations of PolInSAR measurement using the Cramer Rao bound," in *Proc. of the meeting PolInSAR, Frascati, Italy*, 2013.

## **Participation à des conférences internationales avec comité de lecture et sans acte**

1. Ph. Réfrégier, A. Roueff, and J. Tervo, "Visibility parameters in young's interference experiment with unpolarized light," in *the 4<sup>th</sup> EOS Topical Meeting on Advanced Imaging Techniques, Lille, France, 2007*.
2. Ph. Réfrégier, A. Roueff, F. Goudail, and J. Tervo, "A review of some anisotropy properties of totally unpolarized light," in *the 5<sup>th</sup> EOS Topical Meeting on Advanced Imaging Techniques, Switzerland, 2010*.
3. V. Wasik, A. Roueff, and Ph. Réfrégier, "Bi-component partially coherent light," in *the 1<sup>st</sup> Conference on Coherence and Random Polarization, Joensuu, Finland, 2014*.

## **Participation à des ouvrages**

1. Ph. Réfrégier and A. Roueff, *Advances in Information Optics and Photonics*. SPIE Press Book, 2008, ch. Intrinsic Degrees of Coherence for Electromagnetic fields.

## **Articles de conférences nationales avec comité de lecture et avec actes**

1. A. Roueff, P.-F. Piserchia, J.-L. Plantet, Y. Cansi, and G. Ruzie, "Caractérisation du bruit à la station du système de surveillance internationale des îles crozet (ha4)," in *7<sup>ième</sup> journées d'Acoustique Sous-Marine, Brest, Le Quartz, France, 2004*.
2. A. Roueff, K. Castor, P.-F. Piserchia, J. Talandier, and Y. Cansi, "Caractérisation de familles d'évènements dans l'océan indien," in *7<sup>ième</sup> journées d'Acoustique Sous-Marine, Brest, Le Quartz, France, 2004*.
3. M. Diong, P. Lasaygues, A. Roueff, and A. Litman, "Outils statistiques pour l'amélioration de systèmes d'imagerie par diffraction," in *12<sup>e</sup> Congrès d'Acoustique, Poitiers, France, 2014*.

# Encadrements

## Thèses

### Thèses en cours

- **Pierre Capdessus** (thèse financée par la région PACA et l'ONERA de Salon de Provence), *Evaluation de techniques de télédétection pour la caractérisation de la structure de la végétation*. Ecole Centrale Marseille, Ecole doctorale 352 "Physique et sciences de la matière".

Thèse débutée le 1<sup>er</sup> novembre 2014.

Directeur de thèse : Antoine Roueff de l'Institut Fresnel.

Co-encadrante : Pascale Dubois-Fernandez de l'ONERA de Salon de Provence.

- **Valentine Wasik** (thèse financée par le ministère de la recherche), *Analyse des propriétés de polarisation et de cohérence des ondes optiques et électromagnétiques interagissant avec des milieux aléatoires*.

Université d'Aix-Marseille, Ecole doctorale 352 "Physique et sciences de la matière".

Thèse débutée le 1<sup>er</sup> octobre 2013.

Directeur de thèse : Philippe Réfrégier de l'Institut Fresnel.

Co-encadrant : Antoine Roueff de l'Institut Fresnel.

Publications avec l'étudiant :

- 2 revues internationales [81, 82],
- 1 conférence internationale [126].

- **Mouhamadou Lamine Diong** (thèse financée par l'institut Carnot), *Développements d'outils statistiques pour améliorer les outils d'imagerie acoustique et hyperfréquences*.

Université d'Aix-Marseille, Ecole doctorale 353 "Sciences pour l'Ingénieur".

Thèse débutée le 1<sup>er</sup> octobre 2012.

Directeur de thèse : Philippe Lasaygues du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA).

Co-directeur de thèse : Antoine Roueff de l'Institut Fresnel.

Publications avec l'étudiant :

- 1 conférence nationale [16].

### Thèses soutenues

- **Aurélien Arnaubec** (thèse financée par la région PACA et l'ONERA de Salon de Provence), *Analyse de la précision d'estimation de paramètres de la biomasse végétale à l'aide de techniques PolInSAR*.

Université d'Aix-Marseille, Ecole doctorale 352 "Physique et sciences de la matière".

Thèse débutée le 1<sup>er</sup> octobre 2009.

Directeur de thèse : Philippe Réfrégier de l'Institut Fresnel.

Co-encadrants : Antoine Roueff de l'Institut Fresnel et Pascale Dubois-Fernandez de l'ONERA de Salon de Provence.

Composition du Jury :

- Vincent Devlaminck, Pr. LAGIS, Université de Lille 1 (Président),
- Eric Pottier, Pr. IETR, Université de Rennes I (Rapporteur),
- Florence Tupin, Pr. Telecom ParisTech (Rapporteur),
- Jean-Claude Souyris, Dr. au CNES de Toulouse (Examinateur),

- Philippe Réfrégier, Pr. à l'institut Fresnel (Directeur de thèse),
- Pascale Dubois-Fernandez, Ch. à l'ONERA de Salon de Provence (co-encadrante),
- Antoine Roueff, MCF à l'Institut Fresnel (co-encadrant).

Publications avec l'étudiant :

- 3 revues internationales [87, 4, 80],
- 2 conférences internationales [3, 88].

Situation en 2014 : ingénieur de recherche en contrat à durée indéterminée (CDI) au centre Méditerranée de l'IFREMER.

## Post-doc

- **Hélène Sportouche** (post-doc financée par le CNES), *Outils d'analyse des systèmes radar polarimétriques et interférométriques fondés sur des techniques statistiques pour l'étude de la végétation.*

Post-doc commencé le 1<sup>er</sup> octobre 2012.

Directeur de recherche : Antoine Roueff de l'Institut Fresnel.

## Stages

Depuis 2007, j'ai eu l'occasion d'encadrer :

- 3 stages d'étudiants de deuxième année de l'école Centrale de Marseille,
- 4 stages d'étudiants du Master "Optique, Photonique, Signal et Images".

Les étudiants ayant fait leur stage de Master sous ma responsabilité ont continué par la suite en doctorat à Telecom ParisTech (Flora Weissgerber), à Thalès (Jonathan Bosse) ou à l'institut Fresnel (Aurélien Arnaubec et Valentine Wasik).

## Contrats

- 2009-2010 : Projet **BIOMASS - TropiSAR 2010**, financement TOSCA du CNES.  
Sujet : "Partitionnement des images PolInSAR acquises par l'ONERA lors de la campagne de mesure TropiSAR à Cayenne".  
Montant : 11 keuros pour l'équipe PhyTI de l'institut Fresnel.  
Durée : 1 an.  
Partenaires : 14 laboratoires Français et en particulier : l'ONERA de Salon de Provence, IETR de Rennes , le CESBIO de Toulouse.
- 2010-2011 : Projet **BIOMASS - TropiSAR 2011**, financement TOSCA du CNES.  
Sujet : "Analyse des hauteurs de végétation et des hauteurs de sol dans les images PolInSAR acquises par l'ONERA lors de la campagne de mesure TropiSAR à Cayenne".  
Montant : 5 keuros pour l'équipe PhyTI de l'institut Fresnel.  
Durée : 1 an.  
Partenaires : 11 laboratoires Français et en particulier : l'ONERA de Salon de Provence, IETR de Rennes , le CESBIO de Toulouse.
- 2013-2014 : **Evaluation de la configuration compacte**, étude de Recherche et Technologie du CNES.  
Sujet : "Evaluation des performances du système PolInSAR compact pour l'estimation des hauteurs de végétation et des hauteurs de sol dans les images PolInSAR."

Montant : 25 keuros pour l'équipe PhytI de l'institut Fresnel.  
Durée : 1 an.  
Partenaire : l'ONERA de Salon de Provence.

Ces contrats concernent notamment l'exploitation des données RADAR acquises par l'ONERA de Salon de Provence. Les deux derniers systèmes de l'ONERA sont présentés Fig. 0.1. Cette



Figure 0.1 – Photographies des deux derniers systèmes RADAR de l'ONERA avec leur porteur. A gauche le système RADAR RAMSES installé sur un transall de l'armée. A droite le système SETHI installé sur un falcon 20. Remerciements à Pascale Dubois-Fernandez pour l'autorisation de publication de ces photographies.

collaboration avec l'ONERA de Salon de Provence est financée notamment par le CNES. Elle présente le grand intérêt de se situer au cœur de mes préoccupations sur l'étude de la cohérence des signaux électromagnétiques partiellement polarisés et de leur application en télédétection. La collaboration établie avec l'ONERA est très importante pour mes travaux de recherche comme cela sera en particulier illustré au chapitre 3.

## Participation aux tâches collectives

### Responsabilités pédagogiques

Depuis 2011, je suis responsable du groupe thématique "*Traitement de l'information*" à l'école Centrale Marseille. Avec la confiance de deux professeurs (Salah Bourennane et Philippe Réfrégier) de Centrale Marseille, je représente les 10 enseignants-chercheurs spécialisés en traitement du signal et des images, pour l'organisation des enseignements à l'école. Cette tâche consiste essentiellement à assurer une bonne communication lors de la gestion des dossiers de manière à ce que les décisions soient prises de manière collégiale et dans le respect des fonctions de chacun.

Parmi les résultats obtenus, je souhaite souligner l'aménagement d'une nouvelle salle de travaux pratiques (voir Fig.0.2). Cet aménagement, conçu et réalisé en 2013 avec le soutien de l'école, a pour but d'insister sur l'importance des séances de travaux pratiques dans nos enseignements en traitement du signal et des images. Ce laboratoire est utilisé pour structurer une pédagogie illustrative mais avec l'objectif très clair de montrer les aspects essentiels des développements théoriques en traitement du signal et des images.





Figure 0.2 – Simulation (en haut) et réalisation (en bas) de l'aménagement d'une salle de TP de traitement du signal. L'objectif est de créer un espace du type "Open Space" afin que les étudiants de l'école Centrale de Marseille puissent travailler dans un cadre plus professionnel (et moins scolaire). Remerciements à la société ADP GROUP pour l'autorisation de publication de l'image de simulation. Remerciements à Gilles Santucci pour l'autorisation de publication de la photographie.

## Responsabilités d'enseignements

En 2014-2015, j'ai la responsabilité de plusieurs unités d'enseignement à Centrale Marseille :

- un cours d'option de deuxième année (entre 40 et 50 étudiants) intitulé "*Approfondissements en traitement du signal et des images*",
- un cours de troisième année intitulé "*Analyse des signaux*" dans le parcours spécialisé "*Signal, Images, Communications*".

De plus depuis 2012, j'ai la responsabilité d'un cours d'introduction au traitement du signal à l'École Centrale de Pékin en deuxième année du cursus ingénieur. Centrale Pékin, qui fait partie du groupe des écoles Centrale, est une formation en français avec des promotions d'une centaine d'étudiants Chinois qui sont sélectionnés au sein de l'université de Beihang (25 000 étudiants). Lors de mes cours à Pékin, j'apprécie tout particulièrement la très grande motivation des étudiants Chinois. Leur soif d'apprendre compense largement la difficulté de communication due à la langue et aux différences culturelles.

## Relations Internationales à l'école Centrale Marseille

Depuis 2011, je suis chargé des relations avec les universités Chinoises pour les relations internationales de l'école. En 2011, 2013 et 2014, j'ai participé à une mission recrutement d'une soixantaine d'étudiants Chinois pour les cinq Ecoles Centrale françaises (Paris, Lyon, Nantes, Lille et Marseille). Lors de ces missions de deux semaines en Chine, nous auditionnons environ 200 étudiants venant de six excellentes universités chinoises (dont l'université Tsing Hua de Pékin).

La politique du groupe des écoles Centrale est d'accueillir des étudiants étrangers, mais elle consiste aussi à demander aux étudiants français d'effectuer une mobilité à l'étranger, le plus souvent dans l'une des universités partenaires de l'école. Pour aider à cette politique, en 2012 j'ai développé de nouveaux accords d'échange avec deux universités Taïwanaises (NTUST et NCU). Ces deux destinations sont devenues dès 2013 parmi les plus demandées par les étudiants de Centrale Marseille pour leur séjour à l'étranger.

## Conseil Scientifique

J'ai été membre élu du conseil scientifique de l'école Centrale de Marseille de 2007 à 2013.

## Collaborations scientifiques

J'ai toujours apprécié le travail en équipe. Actuellement, mes principales collaborations (en dehors des encadrements d'étudiants) sont :

- avec **Philippe Réfrégier** (équipe PhyTI, Institut Fresnel) en optique statistique ainsi que sur l'analyse des systèmes PolInSAR,
- avec **Pascale Dubois-Fernandez** de l'ONERA de Salon de Provence sur l'analyse des données PolInSAR,
- avec **Amélie Litman** (équipe HIPE, Institut Fresnel) sur les aspects électro-magnétiques et **Philippe Lasaygues** du Laboratoire de Mécanique d'Acoustique (LMA) en acoustique.

De manière moins régulière, j'ai aussi eu l'occasion de travailler ces dernières années avec :

- **Jani Tervo** de l'université de Yoennsu (3 articles en collaborations),
- **Philippe Roux** du LGIT de Grenoble (2 articles en collaborations).

Il est intéressant de souligner que ces collaborateurs sont des physiciens d'horizon très différents : optique, RADAR, acoustique, micro-ondes et géophysique.

# Synthèse des activités de recherche

## Préambule sur la synthèse des activités de recherche

La synthèse d'une activité scientifique menée pendant une dizaine d'années est l'occasion d'effectuer un bilan sur la stratégie de recherche conduite. Depuis ma thèse en sismique jusqu'à mes travaux actuels en imagerie RADAR et en optique statistique, le fil conducteur est la prise en compte de la polarisation des signaux pour leur analyse et leur traitement.

Ma motivation scientifique est de montrer qu'une analyse rigoureuse de signaux polarimétriques contribue au développement d'un traitement adapté à ces données et peut aider à la conception des systèmes d'acquisition. Les développements méthodologiques présentés ont pour objectif de caractériser l'information contenue dans les données polarimétriques en s'appuyant sur des outils statistiques et en prenant en compte l'analyse des phénomènes physiques.

Pour la rédaction de ce document, il m'a semblé intéressant de commencer par un premier chapitre introductif sur la polarisation. Dans ce chapitre, d'une part j'explique pourquoi je me suis intéressé à la polarisation lors de mon doctorat portant sur l'analyse de signaux sismiques. D'autre part, j'y présente un rapide historique sur la polarisation en optique et ainsi que les principaux concepts liés à l'analyse des propriétés de polarisation en optique et en imagerie RADAR à synthèse d'ouverture.

Le deuxième chapitre porte sur l'analyse de la cohérence de la lumière partiellement polarisée. Depuis 2003, cette problématique motive de nombreux travaux en optique statistique. Lors de mon arrivée à l'institut Fresnel en novembre 2005, Philippe Réfrégier m'a rapidement associé à ses travaux sur ce sujet. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée ont été relativement peu explorées. En effet, même si, d'une part, l'analyse polarimétrique a connu ces dernières années un développement très important et que, d'autre part, la cohérence des ondes totalement polarisées est exploitée depuis de très nombreuses années, le mélange de ces deux caractéristiques a été peu étudié jusqu'à présent.

Le troisième chapitre porte sur l'estimation de paramètres de végétation en imagerie Radar à synthèse d'ouverture polarimétrique et interférométrique. Il s'agit d'un domaine où la polarisation et la cohérence partielle des ondes sont exploitées pour une application dont l'enjeu sociétal est important puisqu'il s'agit de l'étude de la biomasse à l'échelle planétaire. Depuis 2009, date à laquelle j'ai commencé à m'intéresser à cette thématique, nous avons obtenu avec Philippe Réfrégier, Aurélien Arnaubec et Pascale Dubois-Fernandez plusieurs résultats sur la caractérisation des performances de cette technique d'imagerie. Avoir un système polarimétrique et interférométrique fournit des données riches, mais complexes à interpréter. Depuis que ce type de données

est accessible dans le cadre de l'analyse environnementale de la biomasse, la plupart des études se sont focalisées : soit sur la proposition de nouveaux algorithmes de traitement pour l'estimation des paramètres de végétation, soit sur l'amélioration des modèles de description des mécanismes de rétro-diffusion. Comme cela est expliqué dans le troisième chapitre, notre contribution est complémentaire à ces travaux puisqu'elle consiste à quantifier la précision des algorithmes d'estimation au vu de la quantité d'information disponible dans les données, et en fonction du modèle physique utilisé pour décrire ces données.

# 1 La polarisation en sismique, en optique et en RADAR

## 1.1 Introduction

Les systèmes d'imagerie polarimétriques se développent dans de nombreux domaines : l'astronomie [63], la défense [117], l'imagerie biomédicale [62], les sciences du vivant [1], .... Cette progression, due aux développements des capteurs et des moyens de calculs, offre de nombreuses perspectives. L'exemple de l'imagerie de Mueller pour la détection du cancer [62] est représentatif de l'émergence de nouvelles techniques pour lesquelles la polarisation est utilisée pour sonder des propriétés physiques peu analysées jusqu'à présent. Néanmoins, ce type d'imagerie soulève aussi de nombreuses questions quant à la nature des phénomènes observés. En traitement du signal, la nature vectorielle des données polarimétriques a nécessité de reconsidérer les traitements usuels (décomposition en valeurs singulières, transformée de Fourier, MUSIC, ...) [60], nécessitant parfois une complexité accrue dans l'analyse et le traitement [7].

L'équipe PhyTI de l'institut Fresnel s'intéresse à l'analyse statistique des images depuis 1994 et a commencé à s'intéresser aux données polarimétriques en 2001 [34]. Les travaux de l'équipe, fondés sur l'analyse statistique et les outils issus de la théorie de l'information ont porté, dès sa création, sur plusieurs applications : la détection, la segmentation, ainsi que sur l'estimation du degré de polarisation. Par ailleurs, des travaux plus théoriques sur la définition du contraste et la caractérisation de lumières non-gaussiennes ont aussi été développés au début des années 2000 [73]. L'activité de l'équipe s'est structurée autour de l'analyse des images fortement bruitées et c'est en 1999 qu'elle a commencé à s'intéresser aux images RADAR à Synthèse d'Ouverture<sup>a</sup> [28]. Sa double compétence en imagerie SAR et en polarimétrie l'a ensuite conduite à travailler en collaboration avec l'ONERA de Salon de Provence sur le système SAR polarimétrique et interférométrique en 2004 [58]. En parallèle à cette activité, l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée devient une thématique importante de l'équipe en 2005 [74]. Plus généralement, les travaux de l'équipe PhyTI consistent à développer une méthodologie qui s'appuie sur la prise en compte de modèles physiques, ce qui favorise les échanges scientifiques avec les autres équipes de l'institut Fresnel ainsi que les grands organismes de recherche. Aujourd'hui, les domaines d'application de l'équipe sont : l'imagerie RADAR, l'imagerie optique pour la biologie, l'imagerie optique sous marine, et la tomographie optique diffuse.

Ce premier chapitre décrit le contexte scientifique de mes travaux sur la polarisation. En particulier, j'y explique la raison pour laquelle je me suis intéressé à la polarisation lors de mon doctorat sur le traitement des signaux sismiques et je résume très succinctement ma thématique de recherche durant mon stage post-doctoral. Néanmoins, la plus grande partie de ce chapitre porte sur la présentation de concepts liés à l'analyse des propriétés de polarisation dans un contexte optique. Ce rappel est important pour bien comprendre le reste du document. Le lien avec l'imagerie SAR polarimétrique (PolSAR) est effectué à la fin du chapitre.

---

a. en anglais : Synthetic Aperture RADAR (SAR)

## 1.2 La polarisation en sismique (travaux de thèse)

L'objectif de mes travaux de thèse était d'analyser des signaux sismiques et en particulier de séparer les ondes de volume et les ondes de surface [86]. Les ondes de volumes intéressent les chercheurs en exploration pétrolière car ces ondes renseignent sur les réservoirs de pétrole situés dans le sous-sol alors que les ondes de surface intéressent les géologues car l'analyse de leur dispersion renseigne sur la structure du sol proche de la surface. Ce doctorat, effectué à Grenoble de 2000 à 2003 au Laboratoire des Images et des Signaux (LIS, renommé depuis GIPSA-Lab) sous la direction de Jocelyn Chausson et de Jérôme Mars, a été l'occasion d'établir des collaborations avec des géologues du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT) de Grenoble [93] ainsi que des chercheurs en exploration pétrolière du centre de recherche de Total de Pau [92].

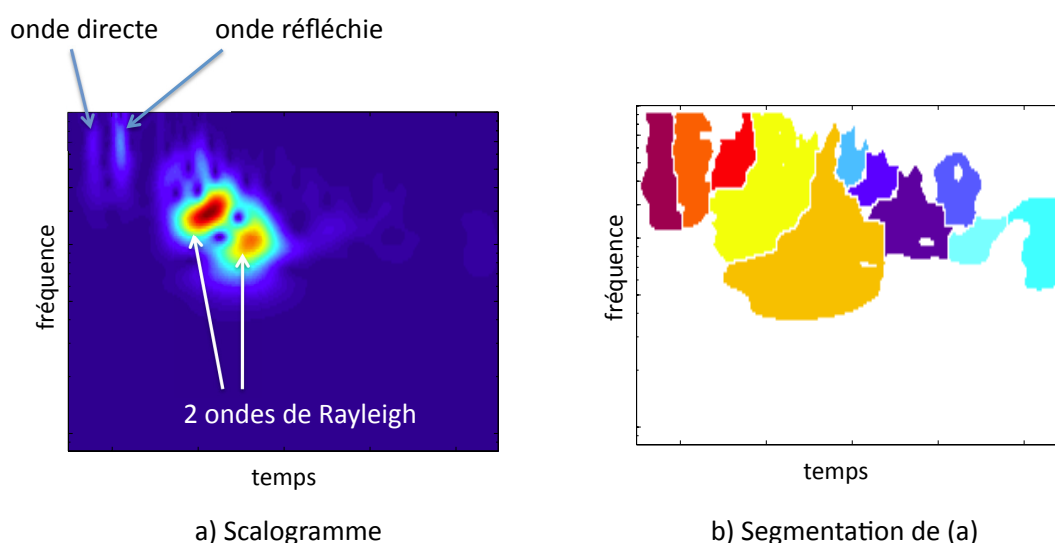


Figure 1.1 – Segmentation d'une représentation temps-échelle d'un signal géophysique acquis dans le massif de Chantourne (Isère). Figure extraite de [86].

A cette époque, ce qui m'intéressait en traitement du signal était d'analyser les données de manière à induire un traitement adapté permettant d'accomplir une tâche particulière le mieux possible. L'objectif initial de ma thèse était d'automatiser les algorithmes de filtrage temps-fréquence à l'aide de techniques de segmentation [91]. Une illustration de ce traitement est présentée Fig. 1.1. Le scalogramme à gauche correspond au module de la transformée en ondelette continue d'un signal, effectuée avec l'ondelette de Morlet [59]. Dans cette représentation temps-fréquence, avec l'aide d'un géophysicien, on reconnaît 4 ondes sismiques : l'onde directe, l'onde réfléchie, et 2 ondes de Rayleigh. L'onde directe arrive la première sur le capteur. L'onde réfléchie est la suivante car la réflexion ne s'est pas effectuée très profondément. Les ondes de Rayleigh, qui sont des ondes de surface, sont plus lentes que les ondes de volume (onde directe et réfléchie), c'est pourquoi elles arrivent plus tard. Ces ondes de surface sont d'énergie beaucoup plus importante. Dans l'image du scalogramme présentée Fig. 1.1(a), chacune des ondes a une forme de bosse avec un seul maximum local. Pour construire le masque temps-fréquence permettant de séparer au mieux les différentes ondes par filtrage temps-fréquence, on a utilisé dans [91] l'algorithme de croissance de région appelé la ligne de partage des eaux (en anglais watershed) [125]. Pour décrire cet algorithme de segmentation issu de la morphologie mathématique, on utilise souvent l'image d'un relief topographique immergé dans l'eau. La ligne de partage des eaux qui sépare les différents bassins détermine les frontières entre les différentes régions de

l'image. Sur l'exemple présenté Fig. 1.1 (a), si on prend le négatif de l'image, à chacune des ondes correspond un minimum local et la ligne de partage des eaux plus un seuillage de l'image (pour éviter de prendre en compte le bruit) mène à l'image des étiquettes présentée Fig. 1.1(b). Cette image des étiquettes fournit pour chacune des ondes un masque temps-fréquence permettant de l'extraire du signal initial [91]. Dans ce traitement, le recours à un algorithme de segmentation permet ainsi d'automatiser le filtrage.

Néanmoins, si on regarde attentivement le scalogramme Fig. 1.1(a), il semble que les deux motifs des deux ondes de Rayleigh se recouvrent partiellement dans le plan temps-fréquence. Ainsi, après quelques mois de thèse, ce qui m'a motivé était de réussir à séparer les ondes sismiques pour lesquelles les supports temps-fréquence n'étaient pas totalement disjoints. J'ai alors cherché un nouveau degré de liberté pour réussir à séparer les ondes, et c'est ainsi que je me suis intéressé à la polarisation. L'une des contributions de ma thèse est d'avoir proposé une estimation des paramètres de polarisation dans le plan temps-fréquence [90] afin de réussir à séparer les ondes même quand leur support temps-fréquence se recouvrent partiellement.

Dans [90], le signal mesuré  $\mathbf{y}(t)$  est issu d'un capteur multi-composante qui enregistre les vibrations sismiques suivant les directions horizontales et verticales. Le modèle suppose la présence de deux ondes totalement polarisées :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{j}_1 s_1(t) + \mathbf{j}_2 s_2(t), \quad (1.1)$$

où pour chacune des ondes  $i \in \{1, 2\}$ , le vecteur  $\mathbf{j}_i$  est un vecteur de Jones qui représente l'état de polarisation de l'onde et la fonction scalaire  $s_i(t)$  représente ses fluctuations temporelles. Dans le traitement proposé [90], on suppose que les motifs temps-fréquence associés respectivement à  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  ne se recouvrent que partiellement. Ainsi, pour chacune des deux ondes, il existe un voisinage du plan temps-fréquence dans lequel une seule onde est présente et c'est dans ce voisinage qu'est estimé l'état de polarisation de cette onde. Un exemple de résultat montrant le potentiel de ce traitement est illustré Fig. 1.2 pour un signal synthétique. Pour cet exemple, chaque onde polarisée est décrite par un chirp<sup>b</sup> avec une enveloppe gaussienne. Néanmoins, la première onde a une fréquence instantanée qui augmente au cours du temps alors que celle de la deuxième onde diminue au cours du temps. Un filtrage temps-fréquence comme celui effectué dans [91] ne permet pas de séparer correctement ces deux ondes. En revanche, l'estimation des états de polarisation dans le plan temps-fréquence permet d'aboutir au résultat présenté Fig. 1.2. Ensuite, je me suis intéressé aux traitements multi-capteurs car ce type de données est très souvent disponible en géophysique. Ainsi, le troisième axe de recherche de ma thèse portait sur une analyse multi-capteurs dans laquelle j'utilisais les différences de vitesse de groupe estimées dans le plan temps-fréquence pour séparer les ondes dispersives [89].

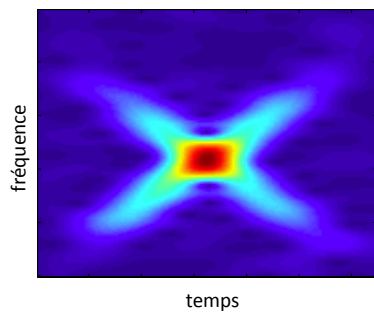
Lors de mon stage post-doctoral au CEA au Département Analyse et Surveillance de l'Environnement (DASE), j'ai analysé les capacités de détection d'une station d'hydrophones installée par le CEA dans l'océan indien. Parmi les résultats obtenus, j'ai notamment découvert une forte corrélation entre le niveau de bruit des signaux enregistrés par la station et les phénomènes de marées [94]. De plus, parmi les nombreux événements détectés par le réseau entre 2003 et 2005 [89], j'ai participé à l'étude des ondes générées par le tsunami de Sumatra de décembre 2004 [35]. Lors de l'analyse de ces données, j'ai constaté que l'analyse menée pendant mon doctorat fondée sur le scalogramme (ou le spectrogramme) n'est plus efficace lorsque le niveau de bruit ambiant est important.

Pour détecter les événements présents dans les données enregistrées par la station d'hydrophones du CEA située dans l'océan indien, j'ai utilisé principalement deux algorithmes. Le premier était fondé sur un critère de rapport d'amplitudes (l'équivalent d'un maximum de vraisemblance généralisé), ce qui permettait de détecter des signaux avec un fort rapport signal à bruit.

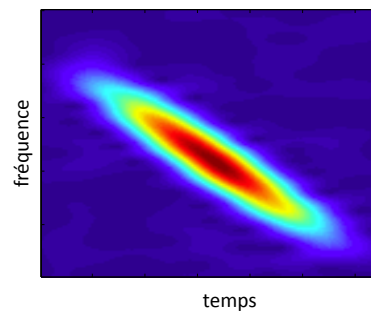
---

b. Un chirp est un signal avec une fréquence instantanée qui évolue linéairement en fonction du temps

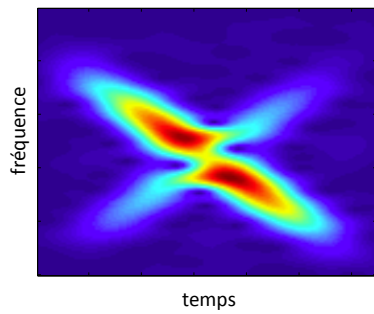




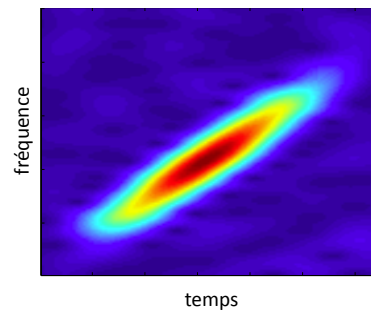
a) Composante horizontale avant traitement



c) Composante horizontale après traitement



b) Composante verticale avant traitement



d) Composante verticale après traitement

Figure 1.2 – Illustration sur un signal synthétique du résultat obtenu par filtrage polarimétrique. A gauche les données initiales. Chaque composante est la somme de deux chirps, dont l'un a une fréquence instantanée qui augmente avec le temps alors que l'autre a une fréquence instantanée qui diminue. A droite le résultat du filtrage. Figure extraite de [86].

Le deuxième était un algorithme développé au Département Analyse et Surveillance de l'Environnement (DASE) [10] et adapté aux réseaux de capteurs. Le principe est le suivant. Supposons que l'on dispose d'un réseau de 3 capteurs. Soit  $\Delta_{ij}$  le retard qui maximise la corrélation entre le signal enregistré au capteur  $i$  et celui enregistré au capteur  $j$ . Le détecteur conçu au DASE a pour principe de détecter un événement lorsque le module de

$$\Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{31} \quad (1.2)$$

est plus petit qu'un certain seuil. En effet, si un événement arrive de manière "cohérente" sur les trois capteurs à une certaine vitesse depuis une certaine direction, alors ce critère est proche de 0. Par contre, si le signal enregistré sur chacun des capteurs ne correspond pas à un événement arrivant sur le réseau, alors ce critère n'a aucune raison a priori d'être proche de 0. Par rapport à un détecteur classique basé sur un rapport d'amplitude, ou même par rapport aux algorithmes du type MUSIC [99], l'algorithme du DASE se montre performant. Comme il est simple à mettre en œuvre, il est utilisé comme une brique élémentaire dans le plan temps-fréquence, ce qui permet d'augmenter ses capacités de détection. C'est en utilisant cet algorithme pour l'analyse des données réelles que j'ai commencé à comprendre l'intérêt d'analyser les propriétés de cohérence.

C'est avec ce bagage en polarisation et en cohérence que je suis arrivé à Marseille en ATER dans l'équipe PhyTI. A cette époque, ma plus grosse lacune était en statistique, sujet sur lequel j'ai pu progresser rapidement grâce à mon intégration dans l'équipe. En conclusion sur ce paragraphe relatif à ma formation avant mon arrivée à Marseille, si je devais citer un point fort de cette formation je dirais l'analyse et l'interprétation des données réelles.

## 1.3 La polarisation en optique

### 1.3.1 Introduction

J'ai commencé à étudier l'optique statistique lors de mon arrivée à Marseille en tant qu'ATER en novembre 2005. Plus précisément, j'ai étudié les propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée. Ces travaux sont complémentaires avec des analyses plus appliquées comme en sismique (voir paragraphe précédent) et en RADAR (voir chapitre 3) et je l'espère à moyen terme en optique. Le paragraphe suivant propose un rapide historique sur la polarisation en optique, suivi du rappel des principaux concepts utiles à l'analyse des propriétés de polarisation. L'étude de la cohérence optique sera introduite au chapitre 2 de ce document.

### 1.3.2 Rapide historique sur la polarisation en optique : du déterminisme à l'aléatoire

L'objectif de cette partie est de souligner l'influence des travaux fondateurs sur la polarisation en optique. Pour un historique plus complet, nous renvoyons aux ouvrages de références d'optique, comme par exemple au premier chapitre de [8] dans lequel sont rappelés plusieurs faits historiques.

Entre le XVII<sup>ème</sup> et le XIX<sup>ème</sup> siècle, de nombreux scientifiques cherchent à décrire les lois de l'optique, et à cette occasion, découvrent la polarisation. Pendant cette période, la description est purement déterministe. Le débat porte notamment sur la nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière. La théorie ondulatoire est présentée par Huygens en 1672 alors que la théorie corpusculaire, qui pendant longtemps va dominer le monde scientifique, est proposée par Newton

en 1704. Il faudra attendre l'expérience de Young sur la visibilité des franges d'interférence proposée en 1801 et surtout les travaux de Fresnel en 1816 pour réaliser que la théorie de Newton n'est pas suffisante pour décrire le comportement de la lumière.

En 1815, Arago et Fresnel discutent de la différence entre les propriétés de polarisation et la capacité de deux ondes à interférer :

*“deux ondes, linéairement polarisées avec des polarisations orthogonales, si elles viennent de la même onde linéairement polarisée et si elles sont ramenées dans le même plan de polarisation, peuvent interférer.”.*

Nous verrons plus loin que cette remarque est fondamentale pour comprendre une motivation importante de nos travaux.

En 1852, Stokes [107] propose de décrire la polarisation de la lumière partiellement polarisée à l'aide de quatre mesures d'intensité (qui sont à présent appelés les paramètres de Stokes). Ces travaux de Stokes sont souvent cités comme révolutionnaires car les amplitudes des signaux optiques ne pouvant pas, en général, être mesurés directement, la grandeur observable en optique est, le plus souvent, une intensité moyenne (par exemple moyennée pendant la durée d'acquisition).

En 1892, Poincaré [66] propose de représenter les propriétés polarimétriques de la lumière partiellement polarisée par un point dans une sphère, qu'on appelle à présent sphère de Poincaré. Ce point a pour coordonnées cartésiennes une version normalisée des 4 paramètres de Stokes, alors que ses coordonnées sphériques font apparaître l'orientation et l'ellipticité définies dans le formalisme de Jones (1941)[43] ainsi que le degré de polarisation.

À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, l'émergence de la théorie électro-magnétique, qui commence avec les équations de Maxwell en 1864, permet de définir les lois qui régissent le comportement des ondes électro-magnétiques. Néanmoins pour l'étude de la polarisation et de la cohérence telle qu'elle est menée dans ce document, l'évolution la plus importante est le passage du formalisme déterministe au formalisme aléatoire. En 1930, Wiener [127] définit la matrice de cohérence (en anglais “coherency matrix”). En 1954, Wolf [128] propose un formalisme général des propriétés de cohérence pour une lumière quasi-monochromatique avec une source non ponctuelle. De plus, toujours en 1954, Wolf [129] montre l'importance de la matrice de cohérence, et souligne le lien entre la matrice de polarisation (qui correspond à la matrice de cohérence en un point de l'espace et à un instant donné) et les paramètres de Stokes.

Ensuite l'aventure continue, mais dans cette introduction nous souhaitons juste situer les principaux travaux fondateurs dans la période qui concerne le passage du formalisme déterministe au formalisme aléatoire pour la description de la polarisation de la lumière. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les concepts nécessaires à l'analyse des propriétés de polarisation.

### 1.3.3 Définition et représentation des propriétés de polarisation en optique 2D

Considérons un champ électrique transverse<sup>c</sup> décrit au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$  par le vecteur aléatoire complexe circulaire centré à deux composantes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [E_x(\mathbf{r}, t), E_y(\mathbf{r}, t)]^T$  où  $\mathbf{a}^T$  est la transposée du vecteur  $\mathbf{a}$ . L'analyse des propriétés statistiques d'ordre 2 du champ  $\mathbf{E}$  est souvent suffisante pour décrire le résultat des expériences en optique. C'est pourquoi l'outil mathématique fondamental en optique statistique est la matrice de cohérence du champ. Soient  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  deux coordonnées spatio-temporelles du champ, la matrice de cohérence est définie par [31, 52] :

$$\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (1.3)$$

où  $\dagger$  représente l'opérateur complexe conjugué transposé et  $\langle \rangle$  est l'espérance statistique. Dans cette formulation, l'espérance correspond à une moyenne statistique sur l'ensemble des réali-

c. Un champ transverse oscille dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.

sations du champ  $\mathbf{E}$ . Selon l'expérience considérée, cette moyenne peut être calculée de différentes manières. Par exemple, si le champ est un processus stochastique stationnaire, alors  $\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  ne dépend que de  $\tau = t_2 - t_1$  et si de plus ce processus est ergodique alors l'espérance peut se calculer à partir du calcul de l'intégrale :

$$\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0, \tau) = \lim_{\substack{T_1 \mapsto -\infty \\ T_2 \mapsto \infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt. \quad (1.4)$$

Ainsi lors de mesures, on supposera souvent que le champ est stationnaire et ergodique et de plus que le temps d'acquisition  $T$  est suffisamment grand pour que l'on puisse obtenir une bonne approximation de l'intégrale décrite Eq. (1.4).

Dans ce premier chapitre, on s'intéresse essentiellement aux propriétés de polarisation du champ décrites par les moments d'ordre 2. Ces propriétés sont décrites par la matrice de polarisation, qui est définie localement par :

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t, t) = \begin{pmatrix} \langle E_x(\mathbf{r}, t) E_x^*(\mathbf{r}, t) \rangle & \langle E_x(\mathbf{r}, t) E_y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \\ \langle E_y(\mathbf{r}, t) E_x^*(\mathbf{r}, t) \rangle & \langle E_y(\mathbf{r}, t) E_y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

où  $*$  est le complexe conjugué.

Dans le reste de ce paragraphe, on suppose que le champ est stationnaire. Dans ce cas  $\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0, 0)$  ne dépend pas de  $t$  et par conséquent la dépendance en  $t$  peut être omise. De plus, ci-dessous on analyse les propriétés du champ en un point de l'espace en omettant la dépendance en  $\mathbf{r}$  pour ne pas alourdir les notations. La matrice de polarisation  $\Gamma$  est une matrice de covariance, elle est donc hermitienne avec des valeurs propres positives ou nulles [38] :

$$\Gamma = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^\dagger, \quad (1.6)$$

où  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  et où  $\mathbf{U}$  est une matrice unitaire.

La polarisation décrit localement l'orientation des fluctuations du champ. Pour une onde transverse, cela correspond à la répartition d'intensité dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Pour commencer par un exemple simple, considérons le cas particulier d'un champ déterministe et parfaitement mono-chromatique. Si on trace la partie réelle de  $E_x(t)$  (notée  $\Re(E_x(t))$ ) en fonction de la partie réelle de  $E_y(t)$  (notée  $\Re(E_y(t))$ ) en fonction du temps, alors la trajectoire obtenue décrit une ellipse comme celle du schéma présenté Fig. 1.3. Cette ellipse peut être paramétrée par l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$ . Par exemple  $\chi = 0$  correspond au cas particulier d'une polarisation linéaire alors que  $\chi = \pi/2$  correspond au cas particulier d'une polarisation circulaire. Dans ce cas déterministe et mono-chromatique, le champ  $\mathbf{E}(t)$  peut être décrit par :

$$\mathbf{E}(t) = E e^{2i\pi\nu t} \mathbf{u}, \quad (1.7)$$

où  $E$  est un scalaire complexe qui dépend de l'amplitude et de la phase du champ au point considéré,  $\nu$  est la fréquence (temporelle) du champ et  $\mathbf{u}$  est le vecteur de Jones [43] décrit par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \chi - i \sin \psi \sin \chi \\ \sin \psi \cos \chi + i \cos \psi \sin \chi \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où  $i^2 = -1$  et où apparaissent l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$  présentées Fig. 1.3. La polarisation dans le cas déterministe et mono-chromatique est entièrement paramétrée par  $\psi$  et  $\chi$ .

Si à présent, on revient sur le cas général d'un champ  $\mathbf{E}(t)$  aléatoire, la description des propriétés de polarisation est plus compliquée. Pour interpréter la situation, une solution est d'effectuer

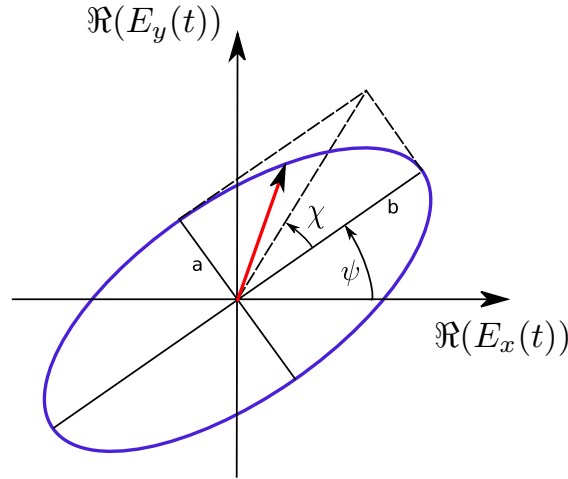


Figure 1.3 – Trajectoire d'un champ transverse monochromatique et déterministe. L'ellipse de polarisation est paramétrée par l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$ .

une analyse en composantes principales du champ :

$$\mathbf{E}(t) = \epsilon_1(t)\mathbf{u}_1 + \epsilon_2(t)\mathbf{u}_2, \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont les deux vecteurs colonnes de  $\mathbf{U}^d$  (donc orthogonaux) et où pour  $j \in \{1, 2\}$

$$\epsilon_j(t) = \mathbf{u}_j^\dagger \mathbf{E}(t) \quad (1.10)$$

est une variable aléatoire scalaire, qui représente la coordonnée du champ  $\mathbf{E}(t)$  suivant la direction  $\mathbf{u}_j$ . Le champ  $\mathbf{E}(t)$  est alors interprétable comme la somme de deux contributions décorré- lées au sens où :

$$\langle \epsilon_1(t)\epsilon_2^*(t) \rangle = 0, \quad (1.11)$$

et chacune de ces contributions est dite “totalement polarisée” car elle s'écrit sous la forme

$$\mathbf{E}_j(t) = \epsilon_j(t)\mathbf{u}_j, \quad (1.12)$$

où  $\epsilon_j(t)$  est une variable aléatoire scalaire et  $\mathbf{u}_j$  peut s'écrire comme un vecteur de Jones (voir Eq. (1.8)). Enfin l'intensité de chacune de ces deux contributions est donnée par la valeur propre  $\lambda_j$  :

$$\langle |\epsilon_j(t)|^2 \rangle = \lambda_j. \quad (1.13)$$

La décomposition de la matrice de polarisation correspondante est

$$\mathbf{\Gamma} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^\dagger. \quad (1.14)$$

Analysons deux exemples particuliers. Si  $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$  alors

$$\mathbf{\Gamma} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\dagger \quad (1.15)$$

et le champ est dit “totalement polarisé”. Dans cette situation particulière, si de plus on suppose que le champ est quasi-monochromatique, alors chaque réalisation du champ  $\mathbf{E}(t)$ , sélectionnée

---

d.  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sur une durée finie, a une trajectoire dans le plan transverse qui peut être approximativement décrite par une ellipse comme cela est illustré Fig. 1.4(a). Dans ce cas, les paramètres d'ellipticité et d'orientation (notés  $\chi$  et  $\psi$  Fig. 1.4(a)) sont liés au vecteur propre  $\mathbf{u}_1$ , mais la trajectoire n'est pas parfaitement elliptique à cause de la largeur spectrale de  $\epsilon_1(t)$ .

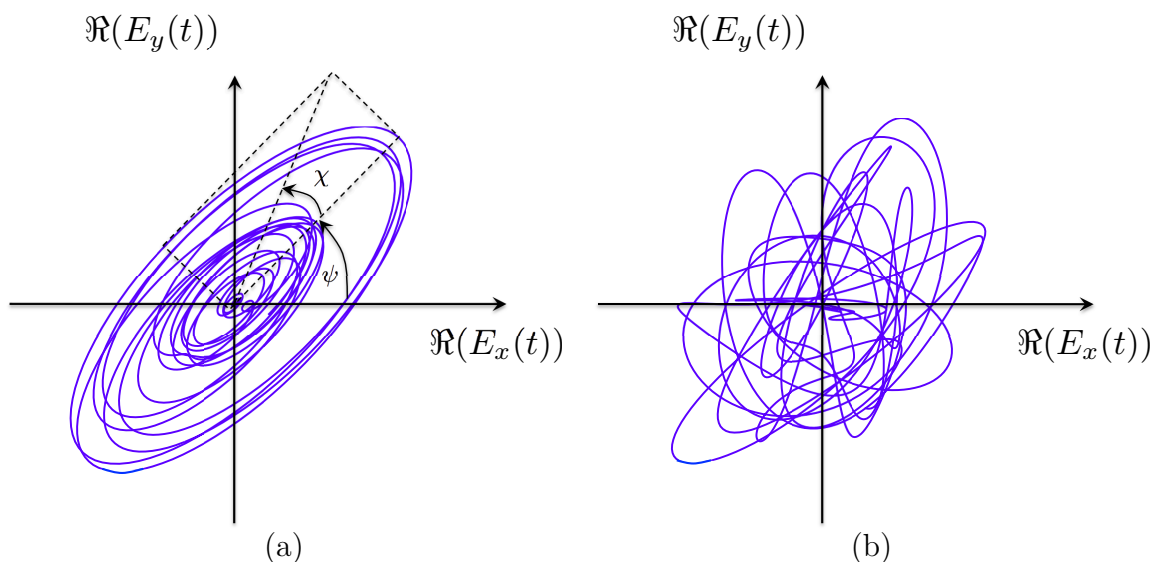


Figure 1.4 – Trajectoire d'un champ transverse quasi-monochromatique : (a) Totalement polarisé. (b) Totalement dépolarisé.

Si maintenant  $\lambda_1 = \lambda_2$ , alors

$$\mathbf{\Gamma} = \lambda_1 \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \lambda_1 \mathbf{Id}, \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{Id}$  est la matrice identité. Dans ce cas, le champ est dit “totalement dépolarisé”. Le sous espace associé à  $\lambda_1$  est de dimension 2 : il n'y a pas d'état de polarisation privilégié dans le plan transverse. Un exemple de la trajectoire pour un champ quasi-monochromatique totalement dépolarisé est présenté Fig.1.4(b).

Ces deux situations particulières sont des cas extrêmes. Pour décrire la situation intermédiaire d'un champ partiellement polarisé caractérisée par  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , il peut être intéressant d'effectuer une autre décomposition de la matrice de polarisation :

$$\mathbf{\Gamma} = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger + \lambda_2 \mathbf{Id}, \quad (1.17)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\mathbf{\Gamma} = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{Id}. \quad (1.18)$$

Avec cette décomposition, la première matrice correspond à la contribution d'un champ totalement polarisé, dont l'état de polarisation est caractérisée par l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$  associées au vecteur  $\mathbf{u}_1$ , et la deuxième matrice correspond à la contribution d'un champ totalement dépolarisé et décorrélé du premier. Un exemple de champ partiellement polarisé et quasi-monochromatique est présenté Fig. 1.5. Cette figure correspond à un cas intermédiaire entre Fig. 1.4(a) et Fig. 1.4(b). Notons que l'intensité totale du champ est donnée par :

$$\mathcal{I} = \text{tr} [\mathbf{\Gamma}], \quad (1.19)$$

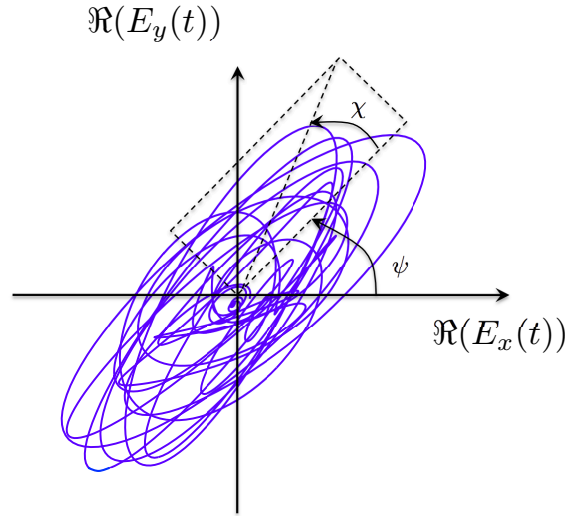


Figure 1.5 – Trajectoire d'un champ transverse quasi-monochromatique et partiellement polarisé. L'état principal de polarisation défini par l'ellipticité et l'orientation est caractérisé par le vecteur propre  $\mathbf{u}_1$ .

où  $\text{tr}$  est la trace, et le degré de polarisation est défini par

$$\mathcal{P} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (1.20)$$

et peut être interprété comme le rapport entre l'intensité de la partie totalement polarisée ( $\lambda_1 - \lambda_2$ ) et l'intensité totale du champ ( $\lambda_1 + \lambda_2$ ). Ce rapport est compris entre 0 et 1, et ses deux valeurs extrêmes correspondent respectivement aux champs totalement dépolarisés et aux champs totalement polarisés.

Finalement, au sens des moments statistiques d'ordre 2, le champ stationnaire est caractérisé localement (c'est-à-dire à une coordonnée spatiale) par les 4 paramètres réels de la matrice  $\Gamma$  (les deux termes positifs sur la diagonale et les parties réelle et imaginaire du terme anti-diagonal) ou par n'importe quelle transformation bijective de ces 4 paramètres. En particulier, le champ est aussi caractérisé localement par les 4 paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle E_x(t)(E_x(t))^* \rangle + \langle E_y(t)(E_y(t))^* \rangle \\ S_1 &= \langle E_x(t)(E_x(t))^* \rangle - \langle E_y(t)(E_y(t))^* \rangle \\ S_2 &= \langle E_y(t)(E_x(t))^* \rangle + \langle E_x(t)(E_y(t))^* \rangle \\ S_3 &= i [\langle E_y(t)(E_x(t))^* \rangle - \langle E_x(t)(E_y(t))^* \rangle] \end{aligned}, \quad (1.21)$$

ou bien par les 4 paramètres  $\{\mathcal{I}, \mathcal{P}, \psi, \chi\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= S_0 \\ \mathcal{P} &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} / S_0 \\ 2\psi &= \arctan(S_2 / S_1) \\ 2\chi &= \arctan(S_3 / \sqrt{S_1^2 + S_2^2}) \end{aligned}. \quad (1.22)$$

Ainsi, la lumière est caractérisée localement au sens des moments statistiques d'ordre 2 par l'intensité  $\mathcal{I} = S_0$ , qui est une grandeur à laquelle on est habitué, ainsi que par la polarisation, caractérisée soit par le triplet  $\{S_1/S_0, S_2/S_0, S_3/S_0\}$ , soit par le triplet  $\{\mathcal{P}, \psi, \chi\}$ .

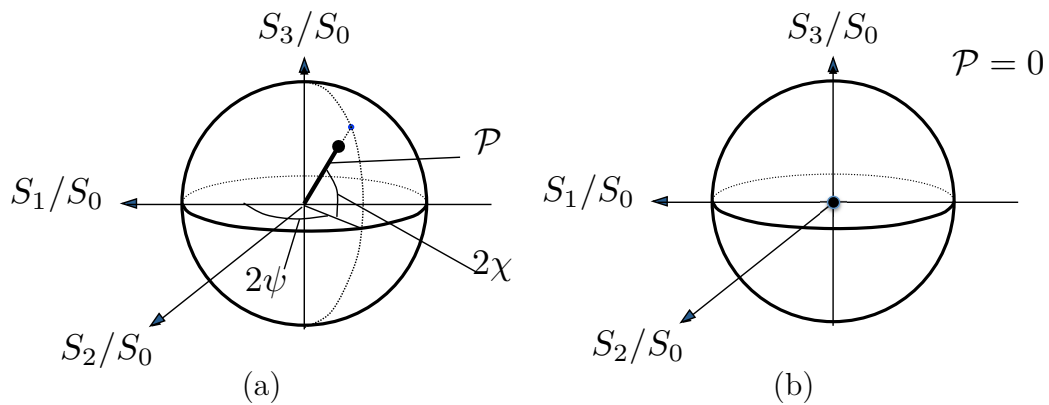


Figure 1.6 – Représentation des propriétés polarimétriques (au sens des moments statistiques d'ordre 2) avec un point dans la sphère de Poincaré. La distance entre le point et le centre de la sphère est fixée par le degré de polarisation  $\mathcal{P}$ , la longitude et la latitude du point sont fixées respectivement par l'angle  $2\psi$  et l'angle  $2\chi$ . (a) Cas général d'une onde partiellement polarisée. (b) Cas particulier d'une onde totalement dépolarisée.

Dans la sphère de Poincaré représentée Fig. 1.6, ces propriétés de polarisation du champ sont décrites par un point dont les coordonnées cartésiennes correspondent à une version normalisée des 4 paramètres de Stokes  $[S_1, S_2, S_3]^T/S_0$ . En coordonnées sphériques, la distance entre le centre de la sphère et ce point est égal au degré de polarisation  $\mathcal{P}$  et les deux angles qui définissent respectivement la longitude et la latitude sont reliés à l'orientation  $\psi$  et l'ellipticité  $\chi$  (voir Fig. 1.6.(a)). En particulier, lorsque le point est au centre de la sphère (voir Fig. 1.6.(b)), le champ est totalement dépolarisé et la polarisation n'a pas de direction privilégiée dans le plan transverse.



### 1.3.4 Formalisme des matrices de Jones

A présent que nous avons défini les propriétés de polarisation du champ au sens des moments statistiques d'ordre 2, et que nous avons vu comment ces propriétés pouvaient être représentées dans la sphère de Poincaré, il est intéressant d'analyser l'évolution de ces propriétés lorsque le champ subit des transformations. La plupart des travaux en optique consiste à sonder un milieu à l'aide d'une source naturelle ou artificielle. Analyser l'évolution des propriétés de la lumière, lorsque celle-ci se propage au sein d'un milieu plus ou moins inconnu est donc essentiel pour caractériser le milieu.

Dans ce document, on considère principalement l'action de milieux optiquement minces sur des champs quasi-monochromatiques de sorte à pouvoir utiliser le formalisme des matrices de Jones. Dans cette situation, le milieu optique peut être décrit par une matrice (de Jones)  $J$ , et si on note  $E$  le champ incident, alors le champ  $A$  transformé par le milieu s'écrit :

$$A = JE. \quad (1.23)$$

Commençons par utiliser ce formalisme de la matrice de Jones pour décrire les transformations du champ lorsque celui-ci traverse certains composants optiques standards. Considérons l'exemple d'un polariseur "à grille" [41] orienté linéairement présenté Fig. 1.7. Avec ce type de

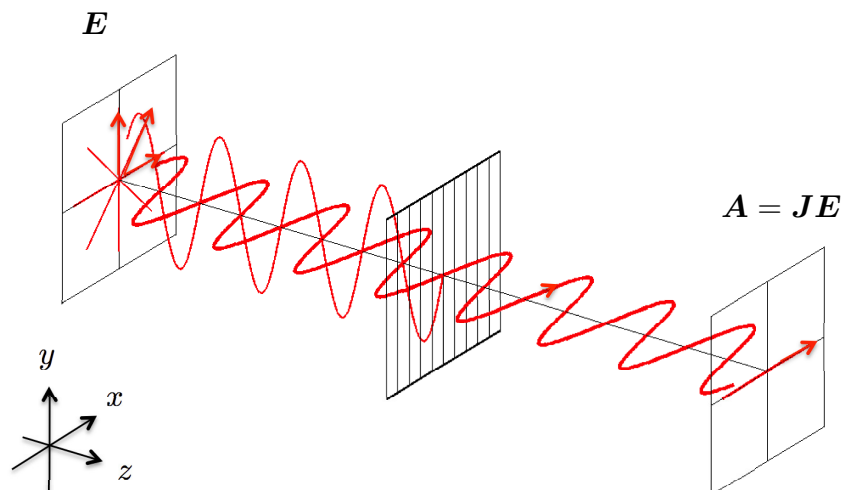


Figure 1.7 – Polariseur linéaire du type “grille métallique”. Le champ incident  $E$  présente plusieurs polarisations alors que le champ à la sortie du polariseur  $A$  est polarisé suivant l'axe des  $x$ .

polariseur, la composante du champ qui est parallèle à l'orientation de la grille est absorbée ou réfléchi alors que celle qui est perpendiculaire à l'orientation de la grille métallique est transmise. Par conséquent, à la sortie d'un tel instrument le champ  $A$  est totalement polarisé suivant l'axe des  $x$ . La matrice de Jones d'un tel polariseur s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Avec un polariseur, l'état de polarisation du champ à la sortie ne dépend pas de l'état de polarisation du champ incident. Ce n'est pas le cas de tous les instruments optiques. L'exemple d'une lame quart d'onde est présenté Fig. 1.8. Comme le montre la figure, ce composant optique permet notamment de passer d'une polarisation linéaire à  $\pi/4$  à une polarisation circulaire. Comme cela est expliqué, notamment dans [41], la matrice de Jones associée à une lame quart d'onde

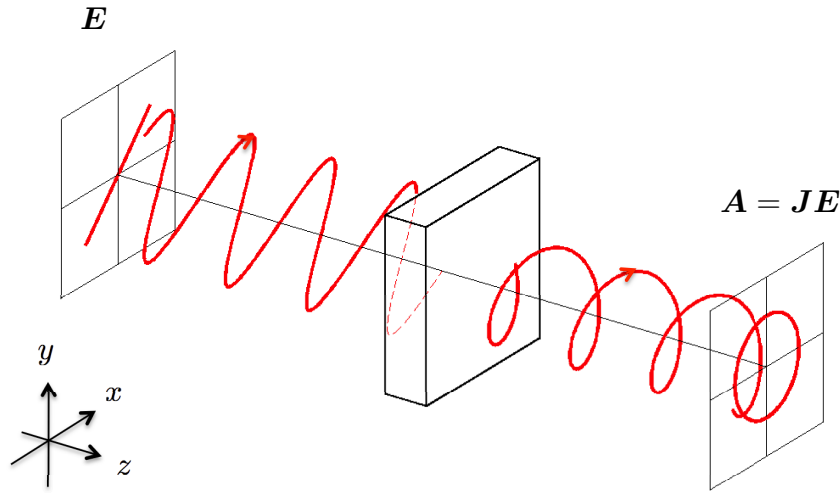


Figure 1.8 – Lame quart d’onde qui permet par exemple de passer d’un champ  $\mathbf{E}$  avec une polarisation linéaire à  $\pi/4$  à un champ  $\mathbf{A}$  avec une polarisation circulaire.

s’écrit :

$$\mathbf{J} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Ce type de composant est basé sur le phénomène de biréfringence des cristaux. L’état de polarisation du champ à la sortie dépend de l’état de polarisation du champ incident car ces matériaux biréfringents peuvent introduire un déphasage entre les composantes qui change l’état de polarisation de la lumière.

Un autre composant très utile en optique et utilisant la biréfringence est le “rotateur” [41], qui permet d’effectuer une rotation des axes principaux du champ  $\mathbf{E}$  et pour laquelle la matrice de Jones s’écrit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Notons que ces deux composants : lame quart d’onde et rotateur sont décrits par des matrices de Jones unitaires alors que les polariseurs sont décrits par des matrices de Jones singulières. Il existe bien sûr des composants optiques décrits par une matrice de Jones qui n’est ni singulière, ni unitaire. Par exemple, on peut trouver des matériaux dichroïques<sup>e</sup> pour lesquels la matrice de Jones correspondante s’écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

où  $|\alpha| < 1$ . Avec ce composant optique, le champ n’est atténué que suivant la direction verticale (axe  $y$ ).

Plus généralement, dans un montage optique, si le champ  $\mathbf{E}$  subit plusieurs transformations successives à travers des composants optiques dont le comportement peut être décrit par des matrices de Jones  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_N$ , alors le champ  $\mathbf{A}$  modifié par l’ensemble de ces composants s’écrit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \dots \mathbf{J}_N \mathbf{E}. \quad (1.28)$$

Avec les quelques composants optiques cités, il est déjà possible d’effectuer de nombreuses analyses. En particulier, il est possible de mesurer les quatre paramètres de Stokes d’un faisceau [52].

e. Un matériau dichroïque est absorbant, mais son pouvoir d’absorption dépend de l’état de polarisation du champ incident [41].

En effet, une manipulation mathématique permet de constater que les quatre paramètres de Stokes définis Eq. (1.21) peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle |E_x(t)|^2 \rangle + \langle |E_y(t)|^2 \rangle \\ S_1 &= \langle |E_x(t)|^2 \rangle - \langle |E_y(t)|^2 \rangle \\ S_2 &= \langle |E_\alpha(t)|^2 \rangle - \langle |E_\beta(t)|^2 \rangle \\ S_3 &= \langle |E_r(t)|^2 \rangle - \langle |E_l(t)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

où  $E_\alpha$  représente le champ après passage dans un polariseur orienté suivant la direction linéaire à  $\pi/4$ ,  $E_\beta$  suivant la direction linéaire à  $-\pi/4$ ,  $E_r$  suivant la direction circulaire droit et  $E_l$  suivant la direction circulaire gauche. Ainsi en mesurant les 6 intensités dans les directions de polarisation linéaire horizontale ( $x$ ), linéaire verticale ( $y$ ), linéaire  $\pi/4$  ( $\alpha$ ), linéaire  $-\pi/4$  ( $\beta$ ), circulaire gauche ( $l$ ) et circulaire droit ( $r$ ), on obtient une mesure des quatre paramètres de Stokes  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

Après avoir décrit les transformations du champ par des composants optiques standards, considérons à présent le cas général d'un milieu inconnu décrit par une matrice de Jones  $\mathbf{J}$  et éclairé par un faisceau incident  $\mathbf{E}$  et pour lequel le champ modifié  $\mathbf{A}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{E}. \quad (1.30)$$

Dans ce document, on s'intéressera à deux types de situations. Celles où la matrice de Jones  $\mathbf{J}$  est déterministe, et celles où elle est aléatoire. Si la matrice de Jones  $\mathbf{J}$  est déterministe, alors le lien entre la matrice de polarisation  $\Gamma_{\mathbf{A}}$  du champ  $\mathbf{A}$  et la matrice de polarisation  $\Gamma_{\mathbf{E}}$  du champ  $\mathbf{E}$  est très simple puisqu'on a :

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \mathbf{J}\Gamma_{\mathbf{E}}\mathbf{J}^\dagger. \quad (1.31)$$

Par contre, si la matrice  $\mathbf{J}$  est aléatoire, alors la relation  $\Gamma_{\mathbf{A}} = \mathbf{J}\Gamma_{\mathbf{E}}\mathbf{J}^\dagger$  n'est, en général, pas vérifiée. Dans ce cas, on parle alors de milieux aléatoires et, comme cela est souligné dans [46], on peut soit utiliser le formalisme de Mueller pour analyser la transformation du vecteur de Stokes<sup>f</sup>, soit conserver le formalisme de Jones mais en tenant compte du caractère aléatoire des matrices  $\mathbf{J}$ . Ce point est déterminant pour la compréhension des phénomènes physiques.

Analysons plusieurs exemples en commençant par celui très simple d'un atténuateur pour lequel la matrice de Jones s'écrit :

$$\mathbf{J} = \alpha \mathbf{Id}, \quad (1.32)$$

où  $\alpha$  est un nombre scalaire de module plus petit que 1. Si  $\alpha$  est déterministe, alors la matrice de polarisation du champ  $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{E}$  s'écrit

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = |\alpha|^2 \Gamma_{\mathbf{E}}, \quad (1.33)$$

et l'intensité du champ  $\mathbf{A}$  définie par :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = \text{tr}(\langle \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \rangle), \quad (1.34)$$

s'écrit :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = |\alpha|^2 \langle \text{tr}(\mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger) \rangle = |\alpha|^2 \mathcal{I}_{\mathbf{E}}, \quad (1.35)$$

où  $\mathcal{I}_{\mathbf{E}}$  est l'intensité du champ  $\mathbf{E}$ . Avec un atténuateur  $|\alpha| < 1$  et l'intensité du champ à la sortie est plus petite que l'intensité du champ incident :  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}} < \mathcal{I}_{\mathbf{E}}$ . En revanche, les vecteurs propres de la matrice  $\Gamma_{\mathbf{A}}$  et le degré de polarisation sont inchangés donc les propriétés de polarisation ne

---

f. Le vecteur de Stokes est le vecteur donc les 4 composantes sont les 4 paramètres de Stokes.

sont pas modifiées. Le point dans la sphère de Poincaré qui représente les propriétés polarimétriques du champ  $\mathbf{A}$  a les mêmes coordonnées que le point associé au champ  $\mathbf{E}$ .

Qu'en est-il si on suppose que  $\alpha$  est une variable aléatoire indépendante du champ  $\mathbf{E}$ ? Par un calcul similaire au précédent, il est facile d'obtenir :

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}} = \langle |\alpha|^2 \rangle \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{E}} \text{ et } \mathcal{I}_{\mathbf{A}} = \langle |\alpha|^2 \rangle \mathcal{I}_{\mathbf{E}}. \quad (1.36)$$

Ainsi, pour ce premier exemple particulier, même si le milieu est aléatoire, les propriétés de polarisation du champ ne sont pas modifiées. Seule l'intensité du champ est perturbée.

Maintenant, si on considère un exemple plus complexe pour lequel la matrice de Jones s'écrit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}, \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{U}$  est une matrice unitaire. Dans ce cas, l'intensité du champ  $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{E}$  est

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = \text{tr} \left( \langle \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \rangle \right), \quad (1.38)$$

ce qui mène à

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = \langle \text{tr} \left( \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger \right) \rangle, \quad (1.39)$$

puis à

$$\mathcal{I}_{\mathbf{A}} = \text{tr} \left( \langle \mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger \rangle \right) = \mathcal{I}_{\mathbf{E}}. \quad (1.40)$$

Cela signifie que lorsque le champ est modifié par ce type de transformation, l'intensité n'est pas modifiée. En d'autres termes, de tels composants optiques n'absorbent pas d'énergie de la lumière. Intéressons nous à présent aux propriétés de polarisation du champ  $\mathbf{A}$ .

Comme affirmé précédemment, on distingue le cas où la matrice de Jones est déterministe du cas où elle est aléatoire. Si la matrice  $\mathbf{U}$  est déterministe, alors il est possible de montrer [8, 50] que cette transformation correspond à la multiplication du vecteur de Stokes normalisé  $[S_1, S_2, S_3]^T / S_0$  par une matrice du groupe des rotations 3D  $\mathcal{O}(3)$ . Ainsi, dans la sphère de Poincaré (voir Fig. 1.9(a)), seul l'état principal de polarisation décrit par le couple  $(\chi, \psi)$  est modifié et le degré de polarisation  $\mathcal{P}$  reste inchangé<sup>g</sup>. Par contre, si la matrice  $\mathbf{U}$  est aléatoire, alors le degré de polarisation de  $\mathbf{A}$  peut soit rester constant soit diminuer [76]. Fig. 1.9(b) représente le cas extrême où le champ  $\mathbf{A}$  devient totalement dépolarisé.

Pour illustrer la capacité d'une matrice de Jones aléatoire à dépolariser le champ  $\mathbf{E}$ , considérons l'exemple d'un champ stationnaire  $\mathbf{E}(t)$  totalement polarisé suivant l'état de polarisation linéaire horizontal :

$$\mathbf{E}(t) = E(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

modifié par un rotateur d'angle  $\theta(t)$  :

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Si  $\theta(t)$  est constant (c'est-à-dire indépendant de  $t$ ), alors le champ :

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{E}(t), \quad (1.43)$$

---

g. Une interprétation plus mathématique consiste simplement à remarquer que la transformation considérée ne modifie pas les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $\mathbf{\Gamma}$ . Or comme le degré de polarisation  $\mathcal{P} = (\lambda_1 - \lambda_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$ , il n'est donc pas modifié.

reste totalement polarisé et l'état de polarisation est linéaire et orienté suivant l'angle  $\theta(t)$ . Par contre, si  $\theta(t)$  peut être décrit par une variable aléatoire uniforme entre 0 et  $2\pi$ , alors un calcul simple montre la matrice de covariance de  $\mathbf{A}(t)$  devient :

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \langle |E(t)|^2 \rangle \mathbf{Id}, \quad (1.44)$$

ce qui correspond à un champ totalement dépolarisé.

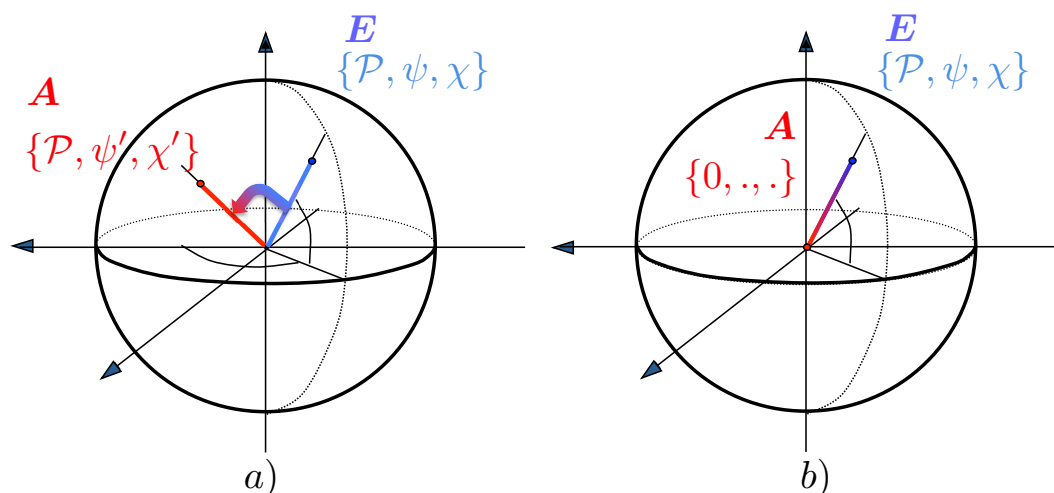


Figure 1.9 – Modification des propriétés polarimétriques par l'application d'une matrice unitaire :  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{E}$ . (a) Cas d'une matrice  $\mathbf{U}$  déterministe : le degré de polarisation  $\mathcal{P}$  reste identique, par contre l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$  sont modifiées. (b) Cas d'une matrice  $\mathbf{U}$  aléatoire et pour laquelle le champ  $\mathbf{A}$  devient totalement dépolarisé

Soulignons que pour pouvoir constater qu'un milieu inconnu "dépolarise" comme on l'a illustré à travers quelques exemples, il est préférable que le faisceau incident  $\mathbf{E}$  soit polarisé. En effet si champ  $\mathbf{E}$  est totalement dépolarisé :

$$\Gamma_{\mathbf{E}} = \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E}}}{2} \mathbf{Id}, \quad (1.45)$$

alors l'application d'une matrice unitaire  $\mathbf{U}$  à travers la transformation  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{E}$  ne modifie par la matrice de polarisation :

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \Gamma_{\mathbf{E}}. \quad (1.46)$$

Cette propriété d'invariance aux transformations du champ par des matrices de Jones unitaires décrit une symétrie remarquable de la lumière totalement dépolarisée.

Pour conclure cette introduction sur l'analyse des propriétés de polarisation en optique et faciliter la transition vers le RADAR, considérons l'expérience décrite Fig. 1.10. A la sortie du laser, le champ stationnaire  $\mathbf{E}(t)$  a un degré de polarisation  $\mathcal{P}$ . Le modulateur spatial de lumière modifie l'état principal de polarisation en chaque point  $\mathbf{r}$  du faisceau élargi, de telle sorte que le champ transformé par le modulateur au point  $\mathbf{r}$  s'écrit  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r})\mathbf{E}(t)$  où  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  est une matrice unitaire.

Pour une coordonnée spatiale  $\mathbf{r}$  fixée, si on suppose qu'un analyseur de polarisation mesure la matrice de polarisation du champ  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  au point  $\mathbf{r}$  et que pendant la durée d'acquisition le modulateur spatial de lumière reste constant (de sorte que la matrice  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  est déterministe), alors cette mesure correspond au point  $\mathbf{r}$  à :

$$\Gamma_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) (\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^{\dagger} \rangle_t, \quad (1.47)$$

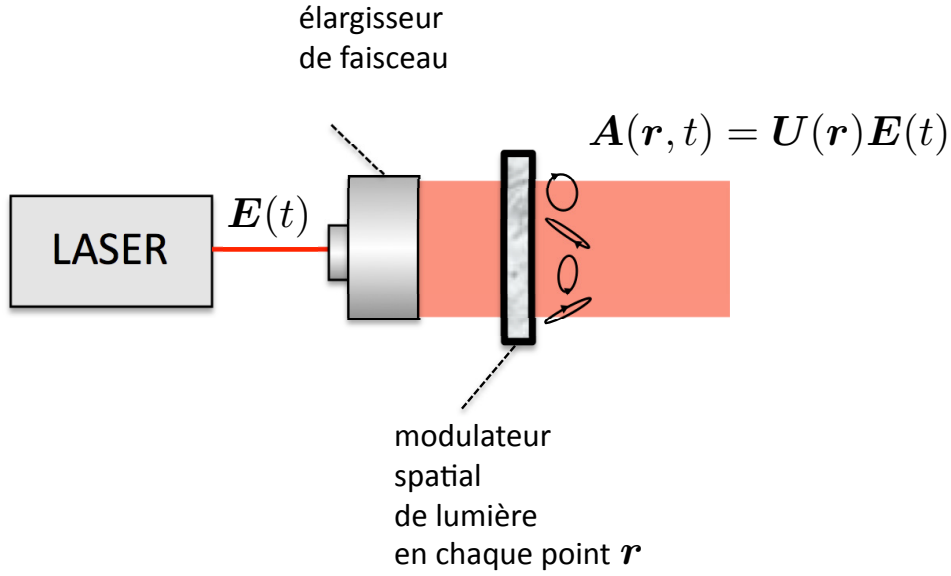


Figure 1.10 – Génération d'un champ qui vérifie :  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r})\mathbf{E}(t)$ , où  $\mathbf{E}(t)$  est un champ stationnaire incident qui fluctue en fonction du temps et  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  est une matrice unitaire dont les caractéristiques varient dans l'espace.

où  $\langle \rangle_t$  représente l'espérance mathématique suivant les différentes réalisations de  $\mathbf{E}(t)$ . Comme  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  est déterministe (à  $\mathbf{r}$  fixé), on obtient donc :

$$\mathbf{\Gamma}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r})\mathbf{\Gamma}_E(\mathbf{U}(\mathbf{r}))^\dagger. \quad (1.48)$$

Ainsi le degré de polarisation associé à la matrice  $\mathbf{\Gamma}_A(\mathbf{r})$  reste égal à  $\mathcal{P}$ . Par contre en chaque point  $\mathbf{r}$ , l'état principal de polarisation (décrit par l'ellipticité et l'orientation) est modifié la matrice  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ . Il est alors possible de régler le modulateur spatial de lumière de sorte à ce que les propriétés de polarisation mesurées en chaque point  $\mathbf{r}$  du faisceau élargi mène à l'image présentée Fig. 1.11 où les propriétés de polarisation de  $\mathbf{\Gamma}_A(\mathbf{r})$  recouvrent de manière uniforme la sphère de Poincaré de rayon égal à  $\mathcal{P}$  à cause de la dépendance à  $\mathbf{r}$ .

Pour cette même expérience décrite Fig. 1.10, si à présent on suppose que les matrices  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  correspondent à un processus stochastique ergodique et homogène (c'est-à-dire stationnaire par rapport à la variation  $\mathbf{r}$ ) et que le système de mesure utilisé permet de mesurer les champs à chaque instant, alors il est possible de mesurer :

$$\mathbf{\Gamma}'_A(t) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) (\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^\dagger \rangle_{\mathbf{r}}, \quad (1.49)$$

où  $\langle \rangle_{\mathbf{r}}$  représente l'espérance suivant les différentes réalisations de  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ .

Les propriétés décrites par  $\mathbf{\Gamma}_A(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{\Gamma}'_A(t)$  sont bien sûr très différentes. Pour illustrer ces différences, supposons que le champ  $\mathbf{E}(t)$  est totalement polarisé suivant l'axe horizontal :

$$\mathbf{E}(t) = E(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

alors :

$$\mathbf{\Gamma}_A(t) = |E(t)|^2 \langle \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) (\mathbf{u}_1(\mathbf{r}))^\dagger \rangle, \quad (1.51)$$

où  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$  est le premier vecteur colonne de  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ . Or, si le vecteur  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$  correspond à un vecteur de Jones uniformément réparti dans la sphère de Poincaré (comme c'est le cas représenté

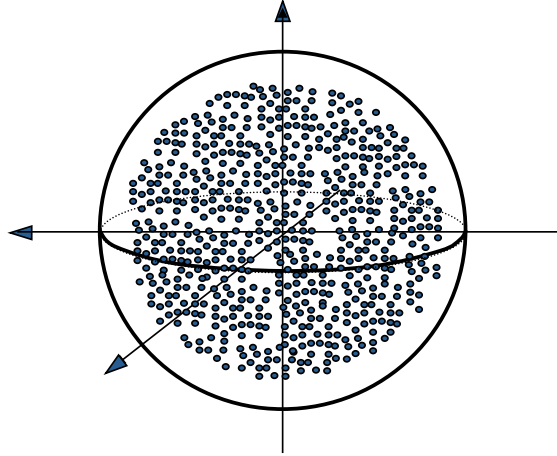


Figure 1.11 – Représentation dans la sphère de Poincaré des propriétés de polarisation décrit par  $\Gamma_A(\mathbf{r})$  pour les différents  $\mathbf{r}$  (voir expérience Fig. 1.10).

Fig. 1.11), alors le degré de polarisation associé à  $\Gamma_A(t)'$  est égal à 0. Ainsi le champ  $A(\mathbf{r}, t)$  est temporellement totalement polarisé au point  $\mathbf{r}$ , mais spatialement totalement dépolarisé à l'instant  $t$ .

L'objectif de cette partie est d'illustrer que l'analyse des propriétés de polarisation fondée sur les moments statistiques d'ordre 2 permet de décrire de nombreuses situations physiques. Il est néanmoins important de souligner qu'une analyse des moments d'ordre 2 ne correspond qu'à une description partielle des propriétés statistiques de la lumière si celle-ci n'est pas gaussienne. En particulier, lorsqu'on applique une matrice de Jones aléatoire  $U$  au champ  $E$  à travers la transformation  $A = UE$ , même si le champ  $E$  est gaussien, en général le champ  $A$  n'est pas gaussien [76]. Cela signifie qu'une caractérisation à l'aide des moments statistiques d'ordre supérieur à deux devient nécessaire pour une description complète des propriétés de polarisation. Par exemple dans [68], la divergence de Kullback-Leibler, qui tient compte de l'ensemble des moments statistiques, est utilisée pour caractériser différentes propriétés de polarisation pour la lumière non-gaussienne. Ce point n'est pas traité dans ce document, mais ouvre un champ de perspectives intéressantes pour des projets futurs.

## 1.4 La polarisation en imagerie RADAR à synthèse d'ouverture

### 1.4.1 Introduction

L'analyse des propriétés polarimétriques avec un RADAR date des années 1940 pour la caractérisation des avions en imagerie RADAR, puis pour l'estimation de paramètres géophysiques. En télédétection, le système Radar à synthèse d'ouverture (SAR), développé dans les années 1950, a démontré sa capacité à fournir des images de qualité avec le satellite SEASAT en 1978 (voir [50] pour un historique plus complet).

Le développement technique des capteurs et des capacités de calculs a favorisé, pendant les années 1990, le développement de missions satellitaires et aéroportées fournissant de nombreuses images RADAR. La disponibilité des données issues de ces missions a entraîné une forte croissance de l'activité scientifique liée à l'analyse des images SAR et à la conception de nouveaux systèmes d'imagerie. En 1997, l'article de Cloude et Pottier [13] démontre l'intérêt du SAR polarimétrique (PolSAR) pour la caractérisation des données. En 1998, l'article de Cloude et Papathanassiou [11] illustre les capacités du système polarimétrique SAR interférométrique (PolInSAR) pour l'analyse de la végétation.

L'un des premiers thèmes de recherche de l'équipe PhyTI est l'analyse des performances de détecteurs de cibles dans les images bruitées pour lesquelles le fond de l'image peut être décrit par une texture aléatoire [75]. L'équipe s'est notamment intéressée aux données SAR pour la segmentation [28] et la détection de bords [29]. Une activité importante avec comme caractéristique le développement d'algorithmes de segmentation rapide et sans paramètres à régler a été développée avec succès [20, 24, 21, 53, 14, 22]. Lors de la thèse de Jérôme Morio sur le système PolInSAR, en plus de résultats sur la segmentation de ces images multi-composantes [57], il a été démontré que les outils issus de la théorie de l'information (information de Shannon et distance de Bhattacharyya) permettaient de comparer les informations apportées par les systèmes SAR, PolSAR, InSAR et PolInSAR [58].

Pour ma part, j'ai commencé à travailler sur le système PolInSAR lors du co-encadrement de la thèse d'Aurélien Arnaubec (2009-2012) dont le directeur était Philippe Réfrégier et Pascale Dubois-Fernandez était l'encadrante pour l'ONERA de Salon de Provence. Le sujet était l'estimation des paramètres de biomasse avec le système PolInSAR et le modèle RVoG. Cette thématique sera détaillée au chapitre 3. Dans cette section, on rappelle le lien entre l'analyse des propriétés de polarisation en optique et celle effectuée en RADAR.

### 1.4.2 Imagerie Radar à synthèse d'ouverture polarimétrique

La polarimétrie RADAR à synthèse d'ouverture (PolSAR) aéroportée (ou satellitaire) consiste à éclairer une scène avec une onde électro-magnétique et à déduire, des propriétés polarimétriques de l'onde reçue, des caractéristiques sur la scène éclairée. Pour une présentation approfondie de ce sujet, je conseille la lecture des ouvrages de référence [56, 50]. Une illustration de l'acquisition d'une image PolSAR est présentée Fig. 1.12. Lorsque le champ émis par le RADAR atteint la végétation, une partie de l'onde est absorbée et une autre partie est diffusée. Si, comme c'est le cas sur le schéma, l'émetteur et le récepteur sont placés au même endroit, on appelle l'onde mesurée par le capteur l'onde "rétro-diffusée". Pour avoir une description complète de la scène (du point de vue polarimétrique), deux ondes polarisées sont alternativement émises par le RADAR, l'une avec une polarisation linéaire horizontale ( $H$ ), l'autre avec une polarisation linéaire verticale ( $V$ ).

A l'issue du traitement de synthèse du Radar à synthèse d'ouverture (en anglais SAR<sup>h</sup>), en

---

h. SAR : Synthetic Aperture Radar



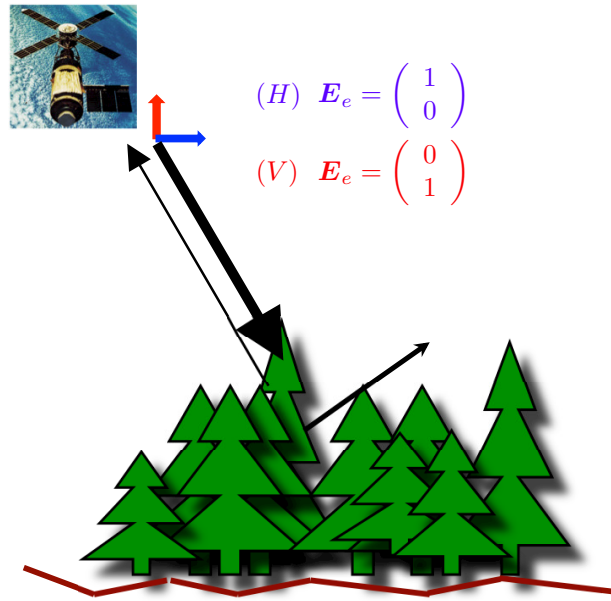


Figure 1.12 – Illustration de l’acquisition d’une image PolSAR. L’émetteur et le récepteur sont sur le satellite. En configuration complète, le système PolSAR émet deux ondes : l’une avec une polarisation linéaire horizontale ( $H$ ) et l’autre avec une polarisation linéaire verticale ( $V$ ).

chaque pixel de l’image obtenue, tout se passe comme si le champ émis est décrit par un vecteur  $\mathbf{E}_e$  qui s’écrit en polarisation linéaire horizontale  $\mathbf{E}_e = [1, 0]^T$  et en polarisation linéaire verticale  $\mathbf{E}_e = [0, 1]^T$ , et le champ rétro-diffusé par la scène est décrit par un vecteur  $\mathbf{E}_r$  relié à  $\mathbf{E}_e$  à travers l’équation :

$$\mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{pmatrix} \mathbf{E}_e, \quad (1.52)$$

où la matrice

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

s’appelle la matrice de diffusion et est assimilable à une matrice de Jones. Dans cette matrice, qui caractérise les propriétés de la scène éclairée par le RADAR au pixel considéré, le terme  $S_{XY}$  décrit le mécanisme de rétro-diffusion mesuré lorsque l’onde à l’émission est polarisée suivant la direction  $Y$  et à la réception l’onde est polarisée suivant la direction  $X$ . Ainsi lorsque le système PolSAR émet deux ondes (en polarisation horizontale et verticale), le système est dit “complet” et à l’issue de l’acquisition, on caractérise le milieu éclairé en chaque pixel de l’image par le vecteur :

$$[S_{HH}, S_{HV}, S_{VH}, S_{VV}]^T. \quad (1.54)$$

De plus, lorsque l’émetteur et le récepteur sont situés au même endroit (comme c’est le cas sur le schéma Fig. 1.12), en utilisant le principe de réciprocité, on obtient que  $S_{HV} = S_{VH}$ . Dans ce cas, le vecteur mesuré en chaque pixel est défini par :

$$\mathbf{v} = [S_{HH}, \sqrt{2}S_{HV}, S_{VV}]^T. \quad (1.55)$$

Dans la plupart des images SAR, la longueur d’onde du RADAR (de l’ordre du cm) est en général beaucoup plus petite que la résolution de l’image obtenue (de l’ordre du mètre). Par conséquent,

on considère souvent qu'en chaque pixel de l'image, les éléments de la matrice  $\mathbf{S}$  qui sont mesurés représentent la somme de nombreuses contributions indépendantes qui correspondent aux réponses des différents diffuseurs situés dans le pixel considéré. Pour cette raison, dans une région homogène d'une image PolSAR, les mesures acquises aux différents pixels sont souvent modélisées comme des réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire complexe circulaire gaussien, ce qui correspond au phénomène de speckle. Une telle modélisation revient à considérer qu'au sein d'une région homogène, les mesures sont entièrement caractérisées par leur matrice de covariance :

$$\mathbf{T} = \langle \mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HH}(S_{HV})^* \rangle & \langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{HV}(S_{HH})^* \rangle & 2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HV}(S_{VV})^* \rangle \\ \langle S_{VV}(S_{HH})^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{VV}(S_{HV})^* \rangle & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (1.56)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est l'espérance statistique. Pour estimer la matrice  $\mathbf{T}$ , le plus souvent on considère la mesure  $\mathbf{v}$  comme un processus stochastique ergodique, dont on estime la matrice de covariance à partir d'un échantillon  $\chi = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$  constitué d'un ensemble de mesures indépendantes localisées dans une zone homogène de l'image PolSAR. La matrice  $\mathbf{T}$  est alors estimée par la matrice de covariance empirique définie par :

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^\dagger, \quad (1.57)$$

Il est intéressant de noter la différence entre le précédent paragraphe en optique Eq. (1.4), où l'espérance est estimée à partir du calcul de l'intégrale temporelle de l'intensité du champ supposé stationnaire, alors que dans ce paragraphe en PolSAR Eq. (1.57), l'espérance est estimée avec la matrice empirique de la mesure  $\mathbf{v}$  supposée homogène dans la zone de l'image considérée.

Quelle information sur la scène peut-on obtenir à partir de la matrice  $\mathbf{T}$  estimée ? Une partie importante des études en imagerie PolSAR consiste à utiliser des modèles paramétriques pour extraire des matrices  $\hat{\mathbf{T}}$  différentes caractéristiques sur la forme des diffuseurs [13, 18, 19, 116]. Néanmoins, étant donnée la complexité d'une scène et la résolution des images, il est délicat de trouver une paramétrisation qui soit à la fois réaliste, ce qui nécessite beaucoup de paramètres, et pour laquelle les paramètres peuvent être estimés de manière précise, ce qui nécessite la définition d'échantillons  $\chi = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$  homogènes et de grande taille.

L'une des solutions pour définir des échantillons  $\chi = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$  homogènes et de grande taille, est d'appliquer un algorithme de partitionnement en zones statistiquement gaussiennes et homogènes [57]. Une autre solution est de relâcher l'hypothèse de gaussianité, ce qui permet de considérer des zones (et donc des échantillons  $\chi$ ) de plus grande tailles, mais qui nécessite l'utilisation de lois de probabilité plus complexe à manipuler [65, 122]. Néanmoins, la solution la plus courante consiste à effectuer une classification en zones de même nature [13] à l'aide de paramètres réduits estimés dans une fenêtre glissante.

Dans [13], l'un des paramètres proposés pour effectuer l'analyse des images PolSAR est :

$$H = -\frac{1}{\log(3)} \sum_{n=1}^3 P_n \log_3 P_n, \quad (1.58)$$

où  $P_n = \frac{\lambda_n^{(T)}}{\sum_{n=1}^3 \lambda_n^{(T)}}$  et où  $(\lambda_n^{(T)})_{n=1,\dots,3}$  sont les 3 valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T}$  estimée. Ce paramètre, appelé entropie, permet par exemple de séparer une surface parfaite qui dépolarise peu et pour laquelle  $H \simeq 0$ , d'un volume qui dépolarise du fait de rebonds multiples, ce qui implique que  $H > 0$ .

Une caractéristique intéressante du paramètre  $H$  est qu'il est invariant à plusieurs transforma-

tions. Le paramètre  $H$  est invariant à un changement de base des axes de polarisation du RADAR du type  $v \mapsto Uv$  car il ne dépend que des valeurs propres de la matrice  $T$ . De plus, il est invariant à l'application d'une amplification du type  $v \mapsto \alpha v$  où  $\alpha$  est scalaire. Ces invariances peuvent permettre de faciliter le regroupement des zones d'une image PolSAR au sein d'une classe de même nature. Par exemple, on sait que l'intensité rétro-diffusée dans l'image dépend de l'angle d'incidence du RADAR. Il est donc intéressant que le paramètre  $H$  soit invariant à cette évolution de l'intensité.

Nos travaux en imagerie RADAR, dont les résultats sont présentés au chapitre 3, ne portent pas sur ces analyses des images PolSAR, mais sur l'estimation de la hauteur de végétation à partir de données polarimétriques SAR interférométriques (PolInSAR). Le système PolInSAR correspond à la concaténation de deux images PolSAR dont les acquisitions  $v_1$  et  $v_2$  ont été effectuées depuis des points de l'espace proches. La mesure ainsi obtenue  $k = [v_1^T, v_2^T]^T$  a pour matrice de covariance :

$$\Upsilon = \langle k k^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^\dagger & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

où  $\forall i, j$

$$T_{ij} = \langle v_i v_j^\dagger \rangle \quad (1.60)$$

est la matrice de covariance entre  $v_i$  et  $v_j$ . Cette problématique, qui repose sur l'analyse de propriétés de polarisation et de cohérence sera présentée au chapitre 3. Avant d'aborder cette partie, il est intéressant de commencer par l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée au chapitre 2.

## 1.5 Conclusion

Ce premier chapitre d'introduction sur la polarisation a présenté les plusieurs notions utiles pour la description de nos travaux. Le formalisme présenté est utilisé dans les chapitres suivants : les matrices de cohérence et de polarisation en optique statistique, la matrice de diffusion et sa caractérisation par la matrice de covariance en RADAR. Notons que dans le premier cas, on analyse les moments statistiques d'ordre 2 du champ  $E$ , alors que dans le deuxième cas, on analyse les moments statistiques d'ordre 2 des éléments de la matrice de diffusion (et non du champ).

Ce chapitre a aussi été l'occasion d'évoquer l'évolution de ma thématique de recherche depuis l'analyse des signaux géophysiques jusqu'à l'analyse de la polarisation en optique statistique et en RADAR. Dans les chapitres suivants, on cherchera à souligner les liens entre les différents travaux réalisés sur l'analyse de la cohérence de la lumière partiellement polarisée et sur l'estimation de paramètres de biomasse avec un système PolInSAR, notamment lors de l'analyse du système PolInSAR compact où l'on utilisera la représentation dans la sphère de Poincaré pour décrire les propriétés physiques du problème.

# 2 Analyse de la cohérence de la lumière partiellement polarisée

## 2.1 Introduction

L'expérience la plus connue fondée sur la cohérence est sans doute celle de Michelson-Morley qui, entre 1881 et 1887, ont essayé de montrer à l'aide d'un interféromètre que la vitesse de la lumière dépendait de l'orientation de l'interféromètre. Néanmoins, pour les physiciens, le moment où le concept de cohérence a été le plus important est probablement lors de la discussion sur la nature corpusculaire et ondulatoire de la lumière (discussion portée notamment par Newton, Huygens, Young, Fresnel, ...). En effet, la capacité des ondes à interférer a été fondamentale pour révéler que la lumière pouvait avoir un comportement ondulatoire. A notre époque, la cohérence est utilisée dans de nombreuses applications. La tomographie par cohérence optique, qui date des années 1990, est très utilisée notamment en imagerie médicale [40]. En RADAR, l'interférométrie permet de mesurer les déplacements géophysiques avec une précision remarquable [56]. En sismique les travaux sur la corrélation de la coda<sup>a</sup> [9] permettent d'imager la structure du sous-sol qui est situé proche de la surface. Dans les travaux présentés dans ce chapitre, on analyse les propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée.

Pourquoi s'intéresser à l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée au XXI siècle ? L'analyse des propriétés de cohérence de la lumière, qui commence avec les travaux de Verdet [124] en 1865, a connu un développement très important jusqu'au milieu du vingtième siècle. Pour ne citer que quelques-uns des articles les plus connus : Van Cittert [120] en 1934, Zernike [132] en 1938 et Wolf [129] en 1954. Pourtant en 2003, après cinquante ans de travaux en optique statistique, Wolf a souligné la nécessité de mieux comprendre les propriétés de cohérence pour la lumière partiellement polarisée [130]. L'un des points qui a motivé l'analyse de Wolf est l'article de James [42] dans lequel l'auteur souligne que les propriétés de polarisation d'une lumière partiellement cohérente peuvent changer au cours de la propagation. A la suite de l'article de James, Gori souligne dans [32] que l'information sur la polarisation et la cohérence se trouve dans la matrice de cohérence, mais Wolf dans [130] propose de caractériser la cohérence avec un seul paramètre scalaire. A la suite de l'article de Wolf de 2003, différentes approches ont été proposées pour analyser les propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée [111, 74, 51, 55]. Pour ma part, j'ai commencé à travailler sur ce sujet à mon arrivée à Marseille en novembre 2005.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Je commence par présenter le contexte scientifique de cette étude et notamment je tente d'illustrer la difficulté de décrire simplement les propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée. Ensuite, je décris les premiers résultats auxquels j'ai participé sur l'interprétation physique du cas de la lumière totalement cohérente au sens des degrés intrinsèques. Après, j'ouvre la discussion sur le cas général de la

---

a. En sismique, la coda fait référence au contenu d'un enregistrement sismique après le passage de l'onde directe due au séisme. Dans cette période qui suit un évènement sismique, le signal paraît très bruité, car il est la somme de contributions issues des diffusions multiples.

lumière partiellement cohérente, mais en fondant l'analyse sur des expériences particulières. Ces expériences illustrent en particulier l'existence de différentes propriétés de symétrie pour la lumière partiellement polarisée et partiellement cohérente. Ce chapitre se termine par l'analyse des lumières à deux composantes qui ont des propriétés de séparabilité et d'invariance spécifiques.

## 2.2 Contexte scientifique

### 2.2.1 Analyse des degrés de cohérence

#### 2.2.1.1 Degré de cohérence standard

Lorsque le champ  $E(\mathbf{r}, t)$  est totalement polarisé et que son état de polarisation, décrit par un vecteur unitaire déterministe  $\mathbf{u}$ , est constant dans tout l'espace, le champ peut s'écrire

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

où  $E(\mathbf{r}, t)$  est une variable aléatoire scalaire. Dans ce cas, le champ scalaire  $E(\mathbf{r}, t)$  suffit à décrire la lumière. On parle alors de formalisme "scalaire" et le degré de cohérence entre deux champs  $E(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $E(\mathbf{r}_2, t_2)$  est défini sans ambiguïté par :

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\langle E(\mathbf{r}_1, t_1) (E(\mathbf{r}_2, t_2))^* \rangle}{\sqrt{\langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}. \quad (2.2)$$

Pour comprendre physiquement la notion de cohérence, il est intéressant de lire l'ouvrage de Goodman [31] où il donne de nombreuses interprétations physiques. Notamment il explique que le concept de cohérence temporelle est lié à la capacité de deux faisceaux lumineux, l'un étant retardé par rapport à l'autre, à générer des franges d'interférence. Ce phénomène intervient par exemple dans l'expérience de l'interféromètre de Michelson, qui est très utilisé notamment pour effectuer de la spectroscopie très précise ou pour la technique de tomographie par cohérence optique [40].

Dans notre étude, on préférera s'intéresser à l'expérience des fentes d'Young, car cela nous permet d'analyser la cohérence spatiale entre deux faisceaux lumineux situés à deux endroits différents. Comme cela est illustré Fig. 2.1, dans l'expérience des fentes d'Young, si on modifie l'intensité des champs pour maximiser la visibilité des franges d'interférence, on obtient alors le module du degré de cohérence  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ .

En effet, si on note  $\mathcal{I}(x)$  l'intensité du champ observé sur l'écran à l'abscisse  $x$  qui résulte de la somme des deux faisceaux :  $\alpha_1 E(\mathbf{r}_1, t - \frac{d_1}{c}) + \alpha_2 E(\mathbf{r}_2, t - \frac{d_2}{c})$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière, alors on peut montrer (voir [31] pour un détail complet des calculs) que l'intensité  $\mathcal{I}(x)$  s'écrit

$$\mathcal{I}(x) = \alpha_1^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t - \frac{d_1}{c})|^2 \rangle + \alpha_2^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t - \frac{d_2}{c})|^2 \rangle + 2\alpha_1\alpha_2 \Re \left( \langle E(\mathbf{r}_1, t - \frac{d_1}{c}) E^*(\mathbf{r}_2, t - \frac{d_2}{c}) \rangle \right). \quad (2.3)$$

Ensuite, en utilisant l'hypothèse que la lumière est quasi-monochromatique de fréquence  $\nu$  et stationnaire, et de plus en supposant que les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont proches, on obtient une nouvelle expression de l'intensité  $\mathcal{I}(x)$  :

$$\mathcal{I}(x) = \alpha_1^2 \mathcal{I}_1 + \alpha_2^2 \mathcal{I}_2 + 2\alpha_1\alpha_2 \sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} |\mu| \cos(2\pi\nu \frac{d_1 - d_2}{c} + \phi), \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{I}_i$  est l'intensité du faisceau  $E(\mathbf{r}_i, t)$ ,  $\phi$  un angle lié à la phase de la corrélation entre les deux faisceaux  $E(\mathbf{r}_1, t)$  et  $E(\mathbf{r}_2, t)$  et  $|\mu|$  le module du degré de cohérence entre  $E(\mathbf{r}_1, t)$  et  $E(\mathbf{r}_2, t)$ .

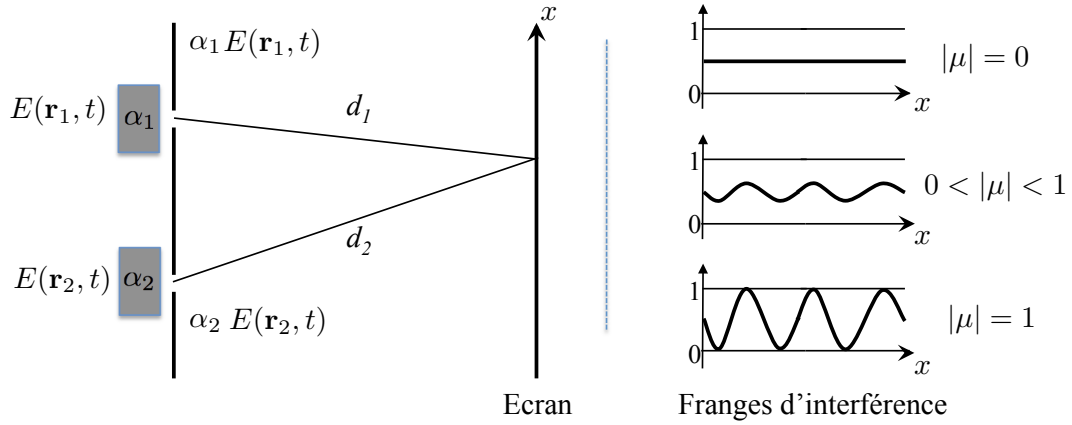


Figure 2.1 – Dans l'expérience des fentes d'Young, lorsque une lumière quasi-monochromatique est totalement polarisée et que l'état de polarisation est constant, si on place deux amplificateurs idéaux, chacun décrit mathématiquement par la multiplication du champ par un scalaire positif  $\alpha_1$  (respectivement  $\alpha_2$ ), alors il est possible d'optimiser la visibilité des franges d'interférence en modifiant les intensités des champs  $\alpha_1 E(\mathbf{r}_1, t)$  et  $\alpha_2 E(\mathbf{r}_2, t)$  de manière à ce que la visibilité des franges d'interférence observée sur l'écran soit maximale et soit égale au module du degré de cohérence  $\mu$  (défini Eq. (2.2)). Ce résultat est symbolisé à droite par 3 exemples de franges d'interférence avec leur module de degré de cohérence associé.

Ainsi, la visibilité des franges d'interférence sur l'écran définie par :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{I}_{max} - \mathcal{I}_{min}}{\mathcal{I}_{max} + \mathcal{I}_{min}}, \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{I}_{max}$  et  $\mathcal{I}_{min}$  représentent respectivement la valeur maximum et minimum de l'intensité  $\mathcal{I}(x)$ , vérifie :

$$\mathcal{V} = \frac{2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}}{\alpha_1^2\mathcal{I}_1 + \alpha_2^2\mathcal{I}_2} |\mu|. \quad (2.6)$$

Cette formule montre qu'il est simple de déterminer les amplifications  $\alpha_i$  qui optimisent la visibilité des franges : il suffit de choisir par exemple  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_i}}$  pour obtenir :

$$\mathcal{V} = |\mu|. \quad (2.7)$$

Cette équation montre le lien entre la mesure de la visibilité de la frange d'interférence et le module du degré de cohérence entre les deux faisceaux totalement polarisés.

### 2.2.1.2 Degré de cohérence de Wolf

En 2003, Wolf repose la question de la définition du degré de cohérence pour la lumière partiellement polarisée, auquel cas il faut tenir compte de la nature vectorielle du champ électrique. Pour expliquer l'approche de Wolf, considérons l'expérience des fentes d'Young présentée Fig. 2.2 où l'intensité des champs a été modifiée de manière à optimiser la visibilité des franges d'interférence. Wolf montre que si on considère le degré de cohérence entre  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)$  défini

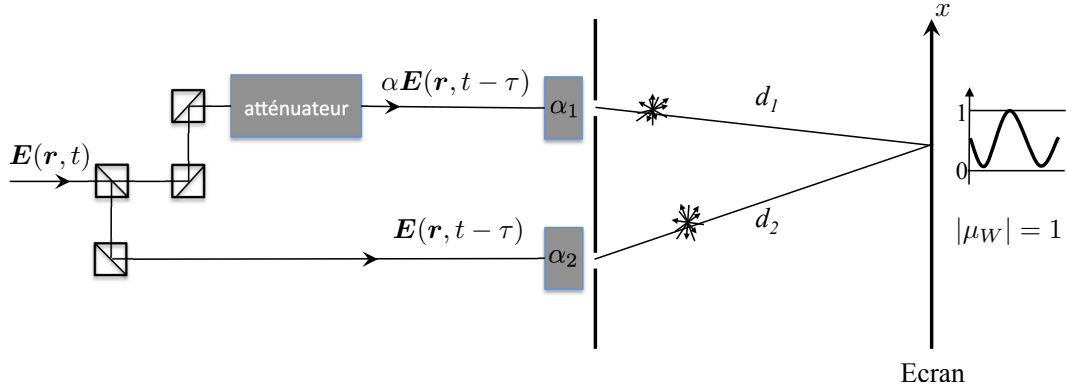


Figure 2.2 – Expérience dans laquelle un faisceau quasi-monochromatique et stationnaire est dupliqué par un miroir semi-réfléchissant, puis l'un des faisceaux passe dans un atténuateur. Dans ce schéma on suppose que la distance du chemin optique entre le faisceau incident à gauche décrit par  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et chacune des fentes est identique. Après optimisation de la visibilité des franges d'interférences effectuée par l'ajustement des amplificateurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , cette expérience génère des franges d'interférence avec une visibilité égale à 1.

par :<sup>b</sup>

$$\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\text{tr}(\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1))\text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2))}}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  et  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_i, t_i)$  sont les matrices de cohérence et de polarisation définies Eq. (1.3) et Eq. (1.5), alors dans l'expérience présentée Fig. 2.2 où l'on fait interférer les faisceaux  $\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau)$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau)$ , le module du degré  $\mu_W$  est égal à 1. En effet, si on appelle  $\mathbf{\Omega}$  la matrice de cohérence entre les deux faisceaux qui interfèrent et  $\mathbf{\Gamma}_i$  la matrice de polarisation du  $i^{\text{ème}}$  faisceau, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \alpha\alpha_1\alpha_2 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}, t - \tau) \rangle \\ \mathbf{\Gamma}_1 &= \alpha^2\alpha_1^2 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}, t - \tau) \rangle \quad . \\ \mathbf{\Gamma}_2 &= \alpha_2^2 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}, t - \tau) \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

Une application directe de la formule Eq. (2.8) mène à  $\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = 1$ . De plus, comme le souligne Wolf dans [130], ce résultat est indépendant du degré de polarisation du champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Le point essentiel pour Wolf est que ce degré de cohérence est relié à la capacité des deux champs à générer des franges d'interférence.

### 2.2.1.3 Degré de cohérence de Tervo, Setälä et Friberg

Dès 2003, une équipe Finlandaise (Tervo, Setälä et Friberg) [111] fait remarquer que le degré  $\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  ne dépend que de la trace de la matrice  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  et que par conséquent une partie de la corrélation entre les deux faisceaux n'est pas prise en compte dans la mesure de la cohérence. Pour illustrer leur point de vue, ils modifient l'expérience présentée Fig. 2.2 en ajoutant une lame biréfringente qui fait tourner la polarisation d'un angle de  $90^\circ$  et de plus ils choisissent un faisceau incident totalement polarisé, comme cela est présenté Fig. 2.3. Dans

b. Soulignons que dans [130], Wolf mentionne qu'un tel degré de cohérence avait déjà été proposé dans [44] en 1963.

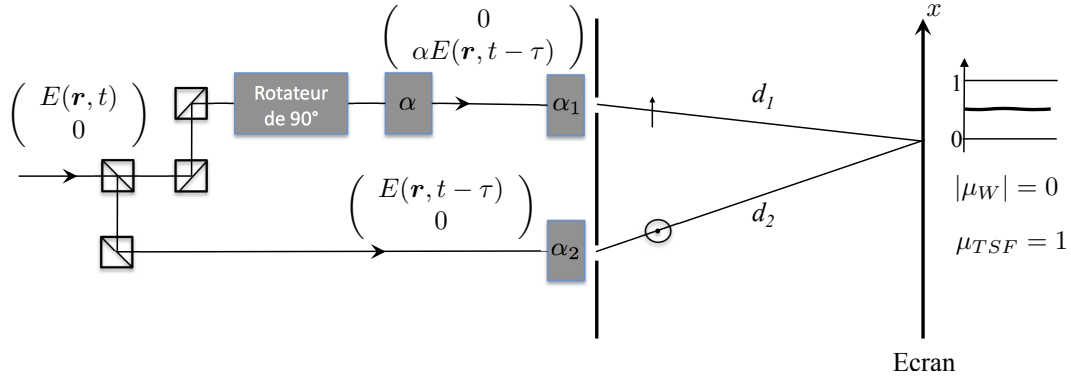


Figure 2.3 – Mêmes expérience que Fig. 2.2 sauf qu'un rotateur d'angle  $90^\circ$  a été ajouté et que le faisceau incident est supposé totalement polarisé suivant l'axe des  $x$ . Dans cette situation, quel que soit le réglage des amplificateurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , aucune frange d'interférence n'est visible sur l'écran.

ce cas, les franges d'interférence disparaissent et comme la corrélation n'est pas présente sur la diagonale de la matrice  $\Omega$ , mais sur l'anti-diagonale :

$$\Omega = \alpha\alpha_1\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & \langle |E(\mathbf{r}, t - \tau)|^2 \rangle \\ \langle |E(\mathbf{r}, t - \tau)|^2 \rangle & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

on a donc  $\mu_W = 0$ . Par cette expérience, on observe que  $\mu_W = 0$  ne fait pas la distinction entre la situation où les deux champs sont incohérents entre eux au sens où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

et la situation décrite Fig. 2.3 et par Eq. (2.10) où certains termes de corrélation sont non nuls, mais ils sont situés sur l'anti-diagonal de la matrice  $\Omega$ . Dans [111], l'équipe Finlandaise propose alors un autre degré de cohérence défini par :

$$\mu_{TSF}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)^2 = \frac{\text{tr}(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger)}{\text{tr}(\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1))\text{tr}(\Gamma(\mathbf{r}_2, t_2))}, \quad (2.12)$$

où le terme  $\text{tr}(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger)$  est la norme de Frobenius de la matrice  $\Omega$  et est égal, dans le cas général, à :

$$\text{tr}(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)(\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger) = \sum_{(u,v) \in \{x, y\}^2} |\langle E_u(\mathbf{r}_1, t_1)E_v^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle|^2. \quad (2.13)$$

Ainsi le degré  $\mu_{TSF}$ , contrairement à  $\mu_W$ , tient compte de tous les termes de la matrice  $\Omega$ . Ce point est important car dans le cas de l'expérience décrite Fig. 2.3, la prise en compte des termes anti-diagonaux permet à

$$\mu_{TSF}^2 = \frac{\text{tr}(\Omega\Omega^\dagger)}{\text{tr}(\Gamma_1)\text{tr}(\Gamma_2)}, \quad (2.14)$$

de vérifier

$$\mu_{TSF} = 1, \quad (2.15)$$

ce qui signifie que  $\mu_{TSF}$  est capable de détecter la corrélation entre les deux faisceaux.

Une autre propriété, citée dans [111], est que dans l'expérience présentée Fig. 2.2, si le fais-



ceau incident est partiellement polarisé avec un degré de polarisation  $\mathcal{P}$ , le degré  $\mu_{TSF}$  vérifie :

$$\mu_{TSF}^2 = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P}^2). \quad (2.16)$$

Ce résultat implique que pour une même visibilité des franges d'interférence sur l'écran, le degré  $\mu_{TSF}$  peut prendre des valeurs différentes comprises entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et 1. Ainsi, le degré  $\mu_{TSF}$  ne fait pas la différence entre la situation où les deux faisceaux qui interfèrent sont identiques, mais avec un degré de polarisation  $\mathcal{P} = 0$ , et la situation où les deux faisceaux sont totalement polarisés et avec le même état de polarisation mais partiellement cohérents avec un degré standard de cohérence  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### 2.2.1.4 Cohérence au sens de Glauber

En 1963, Glauber dans [30], présente une théorie quantique de la cohérence, qui donne lieu à des interprétations intéressantes en optique classique. Dans cet article, Glauber s'intéresse aux corrélations d'ordre  $N$  :

$$\Omega_{X_1 \dots X_N X_{N+1} \dots X_{2N}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N+1}, \dots, \mathbf{x}_{2N}) = \langle E_{X_1}(\mathbf{x}_1) \dots E_{X_N}(\mathbf{x}_N) E_{X_{N+1}}^*(\mathbf{x}_{N+1}) \dots E_{X_{2N}}(\mathbf{x}_{2N}) \rangle, \quad (2.17)$$

où  $E_{X_n}(\mathbf{x}_n)$  représente la composante  $X_n$  du vecteur  $\mathbf{E}$  à la coordonnée spatio-temporelle  $\mathbf{x}_n$ . Au sein de la théorie de Glauber, un champ est cohérent au sens des corrélations d'ordre 1 si il vérifie la relation de factorisation à l'ordre 1 :  $\forall(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$

$$\Omega(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{x}_1) (\psi(\mathbf{x}_2))^\dagger, \quad (2.18)$$

où  $\psi(\mathbf{x})$  est un vecteur déterministe.

Dans [102], l'équipe Finlandaise considère un champ stationnaire et montre que si, pour tout couple  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  appartenant à un certain domaine spatial  $\mathcal{D}$ , et pour tout retard  $\tau \in \mathbb{R}$ , on a

$$\mu_{TSF}(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau) = 1, \quad (2.19)$$

alors le champ satisfait la relation de factorisation,  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2$  et  $\forall\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\Omega(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau) = \psi(\mathbf{r}_1) (\psi(\mathbf{r}_2))^\dagger e^{-2i\pi\nu\tau}, \quad (2.20)$$

où  $\psi(\mathbf{r})$  est un vecteur déterministe et  $\nu$  est la fréquence du champ. Ce résultat souligne un lien entre la cohérence au sens de  $\mu_{TSF} = 1$  et la cohérence au sens de Glauber. Notons aussi que dans ce cas le champ est forcément monochromatique. L'équipe Finlandaise obtient un résultat similaire dans le domaine spectral [101]. Soit  $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  la matrice de cohérence spectrale définie par :

$$\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbb{R}} \Omega(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau, \quad (2.21)$$

où le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  est supposé stationnaire (ce qui signifie que la matrice  $\Omega(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau)$  est indépendante de  $t$ ). Si l'équivalent spectral de  $\mu_{TSF}$  défini par

$$\mu_{TSF,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)^2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))^\dagger)}{\text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)) \text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2))}, \quad (2.22)$$

est égale à 1,  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2$ , alors le champ satisfait la relation de factorisation,  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2$

$$\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_\nu(\mathbf{r}_1) (\psi_\nu(\mathbf{r}_2))^*, \quad (2.23)$$

où  $\psi_\nu(\mathbf{r}_i)$  est un vecteur déterministe pour  $i = 1, 2$ . Ainsi dans le cas cohérent au sens de Glauber, la matrice de cohérence se décompose suivant un unique mode cohérent alors que dans le cas général, elle peut se décomposer suivant un nombre infini de modes cohérents [33].

Pour mieux comprendre la différence entre les travaux qui portent sur la cohérence au sens où  $\mu_{TSF} = 1$  et ceux qui traitent de la cohérence au sens où  $|\mu_W| = 1$ , il est important de souligner que dans la plupart de ces études, la cohérence au sens où

$$|\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)| = 1, \quad (2.24)$$

est analysé dans le cadre de l'expérience des fentes d'Young et que dans ce cas, cette égalité n'est vérifiée que pour un couple de coordonnées spatiales  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  et non dans un domaine entier comme c'est le cas des études décrites précédemment [102, 101]. En fait, ce que montrent ces travaux est que la cohérence de Glauber et celle de  $\mu_{TSF} = 1$ , quand elle est analysée dans un domaine, portent sur la nature monomode du champ alors que la cohérence de Wolf, décrite par  $|\mu_W| = 1$  dans l'expérience des fentes d'Young porte sur la capacité de deux faisceaux à générer des interférences avec une visibilité égale à 1.

Une autre propriété de la cohérence de Glauber qu'il est intéressant de souligner est que la propriété de factorisation décrite Eq. (2.18) reste vérifiée lorsque le champ est modifié par une transformation locale déterministe inversible du type  $\forall \mathbf{x}$  :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est une matrice de Jones non singulière et déterministe. Nous revenons en détail sur l'importance de cette propriété d'invariance ci-dessous.

### 2.2.1.5 Degrés intrinsèques de cohérence

En résumé, on a souligné que le degré de Wolf  $\mu_W$  est lié à la visibilité des franges d'interférence, mais on a noté un mélange entre les propriétés de cohérence décrites par  $\mu_W$  et les états principaux de polarisation des faisceaux incidents. Pour le degré  $\mu_{TSF}$ , on a mentionné la prise en compte de tous les termes de corrélation de  $\Omega$ , le lien avec la cohérence de Glauber, mais on a remarqué aussi un mélange entre les propriétés de cohérence décrites par  $\mu_{TSF}$  et les degrés de polarisation des faisceaux incidents. Enfin, la cohérence au sens de Glauber dans un domaine correspond à une analyse monomode. Cette propriété est invariante aux transformations linéaires locales, déterministes et inversibles du champ. Comme la propriété  $\mu_{TSF} = 1$ , la cohérence de Glauber implique que le champ est totalement polarisé<sup>c</sup>. Finalement, à partir de ces différentes analyses, on peut se demander s'il est possible de définir un degré de cohérence qui ne soit pas influencé par les propriétés de polarisation des champs.

Dans l'approche développée par Réfrégier et Goudail en 2005 dans [74], les auteurs proposent de définir des degrés de cohérence indépendants des propriétés de polarisation. Pour cela, les auteurs cherchent pour le couple de coordonnées spatio-temporelles  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  les degrés de cohérence qui sont invariants aux transformations locales et déterministes du type :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{J}_1\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \text{ et } \mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t_2) = \mathbf{J}_2\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  sont des matrices de Jones inversibles (c'est-à-dire non singulières) et déterministes. En effet, si quelles que soient les matrices  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  les degrés de cohérence entre  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)$

---

c. En effet, Eq. (2.18) montre que la matrice de polarisation obtenue pour  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  est singulière.

et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)$  sont égaux aux degrés de cohérence entre  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t_2)$ , alors ces degrés de cohérence sont indépendants des propriétés de polarisation car on peut toujours se ramener au cas de lumières totalement dépolarisées en choisissant  $\mathbf{J}_1 = (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1))^{-1/2}$  et  $\mathbf{J}_2 = (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2))^{-1/2}$ <sup>d</sup>. Avec ces matrices de Jones  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$ , le triplet :

$$\{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1), \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2), \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)\}, \quad (2.27)$$

qui décrit les propriétés de polarisation et de cohérence au sens des moments d'ordre 2, devient

$$\{\mathbf{Id}, \mathbf{Id}, \mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)\}, \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{M}$  est appelé la matrice de cohérence normalisée [74] définie par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1))^{-1/2} \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2))^{-1/2}. \quad (2.29)$$

Ainsi, le point de départ de l'approche développée dans [74] peut se résumer sous la forme d'une question : est-ce qu'il existe des grandeurs issues de  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2)$  et  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  qui soient invariantes par les transformations du type  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{J}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t_2) = \mathbf{J}_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)$  ? Dans [74], les auteurs montrent que la réponse est affirmative puisque le couple

$$\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2), \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2), \quad (2.30)$$

qui correspond aux deux valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  définie Eq. (2.29) vérifie cette propriété d'invariance. En effet, considérons la décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{U}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) (\mathbf{U}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger, \quad (2.31)$$

où

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) & 0 \\ 0 & \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

et pour laquelle  $1 \geq \mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \geq \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \geq 0$  et où  $\mathbf{U}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  sont des matrices unitaires<sup>e</sup>. Après application de la transformation Eq. (2.26), le triplet

$$\{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1), \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2), \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)\}, \quad (2.33)$$

devient

$$\{\mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{J}_1^\dagger, \mathbf{J}_2 \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{J}_2^\dagger, \mathbf{J}_1 \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{J}_2^\dagger\}, \quad (2.34)$$

Or, un calcul simple montre que la matrice de cohérence normalisée du champ  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \left( \mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{J}_1^\dagger \right)^{-1/2} \mathbf{J}_1 \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{J}_2^\dagger \left( \mathbf{J}_2 \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{J}_2^\dagger \right)^{-1/2}, \quad (2.35)$$

d. L'exposant  $^{-1/2}$  est à considérer au sens des matrices, ainsi  $\mathbf{J}^{-1/2}$  est une matrice qui vérifie  $\mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{J}^{-1/2} = \mathbf{J}^{-1}$ .

e. Notons que les paramètres  $\mu_S$  et  $\mu_I$  décrits Eq. (2.32) sont mathématiquement analogues aux corrélations canoniques [100] qui ont été initialement utilisées en analyse de données inhomogènes (éventuellement de dimensions différentes) [39]. Il est intéressant de remarquer que, si les considérations qui ont abouti à la formulation Eq. (2.32) sont essentiellement fondées sur des arguments d'invariance par des transformations linéaire locales déterministes, des paramètres analogues du point de vue mathématique, ont été mis en œuvre en 1998 dans le contexte de l'imagerie PolInSAR [11].

peut s'écrire :

$$M_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{V}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) (\mathbf{V}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger, \quad (2.36)$$

où pour  $n \in \{1, 2\}$

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \left( \mathbf{J}_n \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_n, t_n) \mathbf{J}_n^\dagger \right)^{-1/2} \mathbf{J}_n (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_n, t_n))^{1/2} \mathbf{U}_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2), \quad (2.37)$$

et il est facile de vérifier que

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) (\mathbf{V}_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2))^\dagger = \mathbf{Id}, \quad (2.38)$$

ce qui confirme que les matrices  $M$  et  $M_A$  ont les mêmes valeurs singulières  $\mu_S$  et  $\mu_I$ .

Dans [74], les auteurs ont appelé  $\mu_S$  et  $\mu_I$  les degrés intrinsèques de cohérence et ils en ont donné plusieurs interprétations physiques. En particulier, il est montré dans [74] que le degré  $\mu_S$  correspond au maximum du module du degré de cohérence standard  $\mu$  (voir Eq. (2.2)) lorsque chacun des champs est modifié par une matrice de Jones déterministe unitaire appropriée, puis traverse un polariseur afin que chacun des champs soit totalement polarisé. Cette situation est illustrée Fig. 2.4. Une autre interprétation de  $\mu_S$  et  $\mu_I$ , expliquée dans [74], est qu'après appli-

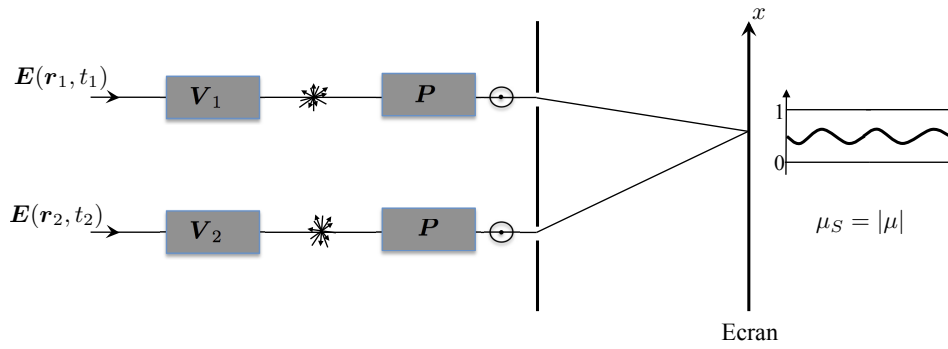


Figure 2.4 – Schéma permettant de relier  $\mu_S$  au degré de cohérence standard  $\mu$ . Il existe un couple de matrices de Jones unitaire  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  pour lesquelles après passage dans les polariseurs  $\mathbf{P}$ , le module du degré standard de cohérence vérifie  $|\mu| = \mu_S$ .

cation de la transformation qui rend chacun des champs totalement dépolarisé, tout se passe comme si le champ pouvait se décomposer en la somme de deux champs incohérents entre eux, mais qui sont chacun totalement polarisés. Le premier champ totalement polarisé est associé au degré de cohérence à  $\mu_S$  et le deuxième champ est associé à  $\mu_I$ .

Pour mieux comprendre les conséquences de la propriété d'invariance, qui est le point de départ de la définition des degrés  $\mu_S$  et  $\mu_I$ , notons tout d'abord que la condition de factorisation qui correspond à un état cohérent au sens de Glauber vérifie la même propriété d'invariance que les degrés intrinsèques  $\mu_S$  et  $\mu_I$ . En effet, si :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) (\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2))^\dagger \rangle = \psi(\mathbf{r}_1, t_1) (\psi(\mathbf{r}_2, t_2))^\dagger, \quad (2.39)$$

alors

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t_1) (\mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t_2))^\dagger \rangle = (\mathbf{J}_1 \psi(\mathbf{r}_1, t_1)) (\mathbf{J}_2 \psi(\mathbf{r}_2, t_2))^\dagger. \quad (2.40)$$

Qu'en est-il des degrés de cohérence  $\mu_W$  et  $\mu_{TSF}$  ? Commençons par une famille de transforma-

tions moins générale que celle décrite Eq. (2.26) et pour laquelle :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{U}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \text{ et } \mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t_2) = \mathbf{U}_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (2.41)$$

où  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  sont des matrices unitaires et déterministes. Comme cela est souligné par l'équipe Finlandaise dans [111], le degré  $\mu_{TSF}$  est invariant à ce type de transformation, mais le degré  $\mu_W$  ne l'est pas. L'expérience présentée précédemment Fig. 2.3 est d'ailleurs un cas particulier de ce type de transformation puisque la rotation de l'état de polarisation est décrite par une matrice unitaire.

Maintenant, regardons une nouvelle expérience présentée Fig. 2.5, pour laquelle on analyse la cohérence entre  $\mathbf{J}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t, -\tau)$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau)$  où  $\mathbf{J}$  est une matrice déterministe inversible qui correspond à un instrument contenant des matériaux dichroïques. Dans ce cas, d'une part le de-

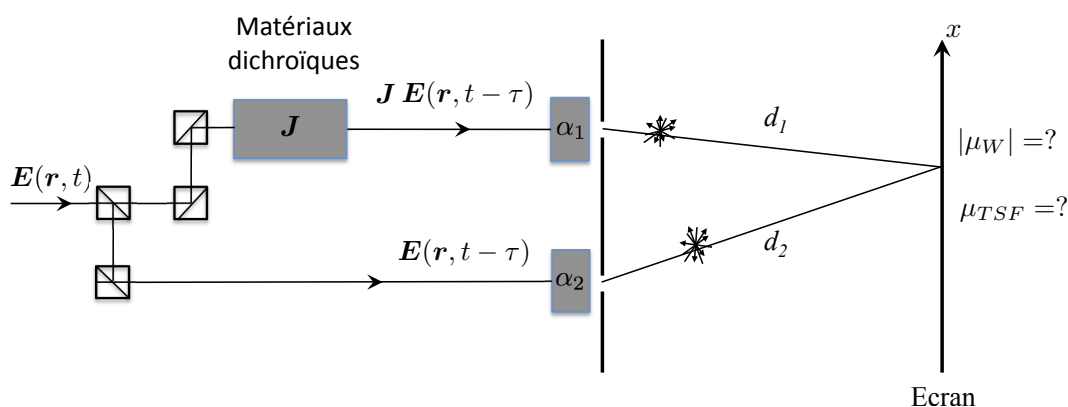


Figure 2.5 – Expérience où l'un des faisceaux passe à travers des matériaux dichroïques de sorte que le champ subit une transformation déterministe réversible (c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{J}$  est non singulière). Dans cette situation, les valeurs de  $|\mu_W|$  et de  $\mu_{TSF}$  dépendent de  $\mathbf{J}$ .

gré  $\mu_W$  dépend de  $\mathbf{J}$  car celui-ci peut faire varier l'état de polarisation du faisceau. D'autre part,  $\mu_{TSF}$  dépend lui aussi de  $\mathbf{J}$  car la transformation  $\mathbf{J}$  peut par exemple faire varier le degré de polarisation du champ. Ainsi les deux degrés  $\mu_W$  et  $\mu_{TSF}$  ne sont pas, en général, invariants aux transformations décrites Eq. (2.26) et ces degrés ne détectent pas que la relation déterministe entre les deux champs. Pourtant si on modifie le montage comme cela est proposé Fig. 2.6, alors on retrouve des franges d'interférence avec une visibilité égale à 1. De plus il est facile de montrer que les degrés intrinsèques sont égaux à 1 dans ces deux expériences. Ainsi contrairement aux degrés  $\mu_W$  et  $\mu_{TSF}$ , les degrés intrinsèques permettent, dans ces expériences, de décrire la capacité des champs à générer des franges d'interférence lorsque l'expérimentateur peut optimiser les propriétés de polarisation de chacun des deux champs.

Considérons un cas particulier où les calculs sont faciles à mener pour mieux illustrer ce résultat. Si on a deux champs tels que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) = \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) \\ \epsilon_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) = \begin{pmatrix} \epsilon_2(t) \\ \epsilon_1(t) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

où  $\epsilon_1(t)$  et  $\epsilon_2(t)$  sont deux variables aléatoires scalaires décorréliées  $\langle \epsilon_1(t)(\epsilon_2(t))^* \rangle = 0$ . Soit  $\mathcal{I}_n$  l'intensité :  $\mathcal{I}_n = \langle |\epsilon_n(t)|^2 \rangle$  pour  $n \in \{1, 2\}$ . Pour cet exemple, les matrices de polarisation sont :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, t_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_2, t_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

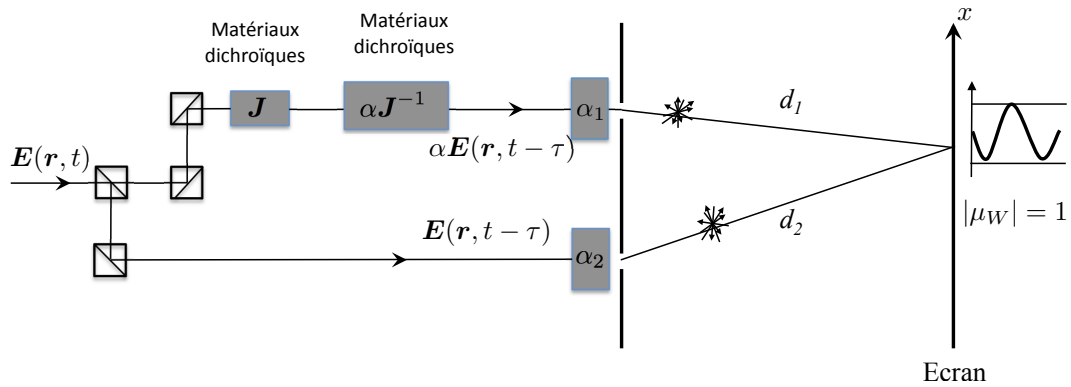


Figure 2.6 – Même expérience que Fig. 2.5, mais pour laquelle on a ajouté un nouveau composant optique qui correspond à une matrice de Jones du type  $\alpha \mathbf{J}^{-1}$ .

le degré de polarisation est identique en  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  :

$$\mathcal{P} = \frac{|\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2|}{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}, \quad (2.44)$$

la matrice de cohérence s'écrit :

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

la matrice de cohérence normalisée s'écrit :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

et les différents degrés de cohérence sont :

$$\begin{aligned} \mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= 0 & \mu_{TSF}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \sqrt{1 + \mathcal{P}^2} / \sqrt{2} \\ \mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= 1 & \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= 1 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ainsi, avec cet exemple, le degré  $\mu_W$  ne détecte pas la capacité des deux champs à générer des franges d'interférence car ce degré est sensible aux états de polarisation des champs et parce qu'on a choisi un cas particulier pour lequel les états de polarisation sont orthogonaux. Le degré  $\mu_{TSF}$  détecte la corrélation entre les deux faisceaux, mais il dépend du degré de polarisation  $\mathcal{P}$  des champs. Seuls les degrés intrinsèques ne sont influencés ni par les états de polarisation des champs, ni par leur degré de polarisation.

Cette exemple montre que la propriété d'invariance, qui est à la base de la définition des degrés intrinsèques de cohérence proposés dans [74], permet de détecter la capacité des champs à générer des franges d'interférences lorsque l'on peut modifier les propriétés des champs par des matrices de Jones déterministes. Comme cela est expliqué dans le paragraphe suivant, ma première participation sur cette thématique a consisté à préciser les propriétés des lumières cohérentes au sens des degrés intrinsèques.

## 2.3 Analyse de la cohérence au sens des degrés intrinsèques

### 2.3.1 Lien avec la cohérence au sens de Glauber

Dans [74], il est montré que si le champ est la somme de deux champs qui vérifient chacun la relation de factorisation de Glauber à l'ordre 1, que ces deux champs sont incohérents entre eux et que les états de polarisation de ces deux champs sont différents, alors les deux degrés intrinsèques de cohérence sont égaux à 1, mais le champ total ne vérifie pas la relation de factorisation de Glauber. En effet comme on l'a vu précédemment, un champ cohérent au sens de Glauber est forcément totalement polarisé. De plus dans [74], il est aussi montré que l'on peut effectuer un filtrage polarimétrique pour retrouver un champ totalement polarisé avec un degré standard de cohérence égal à  $\mu_S$  (voir Fig. 2.4). Lorsque j'ai eu l'occasion de participer aux travaux de recherche sur ce sujet, cette utilisation du filtrage polarimétrique m'a rappelé mes travaux de thèse au cours desquels j'avais utilisé le filtrage polarimétrique pour séparer les ondes sismiques [90].

Dans [77], ceci nous a donné l'idée d'utiliser ce filtrage polarimétrique pour retrouver un champ cohérent au sens de Glauber lorsque le champ initial est la somme de deux champs polarisés avec des états de polarisation non parallèles et que l'un de ces deux champs est cohérent au sens de Glauber. Dans [77], cette analyse a été menée dans le domaine spectral. Dans ce cas, la matrice de cohérence normalisée s'écrit :

$$M_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1))^{-1/2} \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2))^{-1/2}, \quad (2.48)$$

et les degrés intrinsèques notés  $\mu_{S,\nu}$  et  $\mu_{I,\nu}$  sont obtenus à partir de la décomposition en valeurs singulières

$$M_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{U}_{1,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathbf{D}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\mathbf{U}_{2,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))^\dagger, \quad (2.49)$$

où

$$\mathbf{D}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{pmatrix} \mu_{S,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & 0 \\ 0 & \mu_{I,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

et où  $\mathbf{U}_{1,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  et  $\mathbf{U}_{2,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  sont deux matrices unitaires.

Considérons un champ dans un domaine  $\mathcal{D}$ , qui est la somme de deux champs incohérents entre eux, chacun des deux champs étant totalement polarisé. De plus, on suppose que l'un des deux champs vérifie la relation de factorisation de Glauber, qui s'écrit dans le domaine spatio-fréquentiel,  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2$  :

$$\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\psi}_\nu(\mathbf{r}_1) (\boldsymbol{\psi}_\nu(\mathbf{r}_2))^*, \quad (2.51)$$

où  $\boldsymbol{\psi}_\nu(\mathbf{r}_i)$  est un vecteur déterministe pour  $i = 1, 2$ . Dans [77], on a montré que si les états de polarisation des deux champs sont non parallèles, alors d'une part le plus grand degré intrinsèque de cohérence  $\mu_{S,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est égal à 1 pour tous les couples  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2$  et d'autre part, même si le deuxième champ est partiellement cohérent, il est néanmoins possible de retrouver un champ totalement cohérent au sens de Glauber (c'est-à-dire qui vérifie la relation de factorisation de Glauber) en sélectionnant par filtrage polarimétrique le champ totalement polarisé associé au plus grand degré intrinsèque  $\mu_{S,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .

Cette expérience particulière montre que la nature vectorielle du champ permet d'avoir des situations riches où l'application d'un filtrage polarimétrique permet de retrouver un champ monomode parfaitement cohérent au sens de Glauber. Avec un champ scalaire (c'est-à-dire totalement polarisé), on a un seul degré de cohérence et une transformation linéaire déterministe des champs ne modifie pas ce degré, il n'est donc pas possible de retrouver un champ mono-

mode dans le formalisme scalaire<sup>f</sup>. Cette expérience montre aussi l'intérêt d'avoir deux degrés de cohérence, puisque cela permet de rendre compte de situations physiques particulières.

### 2.3.2 Lien avec la cohérence au sens de Wolf

L'un des points essentiels dans l'approche de Wolf est le lien avec la visibilité des franges d'interférence. Comme expliqué dans l'article de Wolf [130], dans une expérience des fentes d'Young, lorsque une lumière stationnaire est quasi-monochromatique, le module  $|\mu_W|$  correspond au maximum de visibilité des franges lorsque l'on modifie l'intensité de chacun des deux champs qui interfèrent pour optimiser la visibilité des franges. Considérons le schéma présenté Fig. 2.7, sur lequel on a ajouté deux matrices de Jones  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  (à gauche) qui symbolisent la possibilité d'un expérimentateur de choisir deux composants optiques pour optimiser la visibilité des franges d'interférence. Lorsque Wolf modifie uniquement l'intensité des deux champs qui interfèrent, il ne considère que l'ensemble des matrices de Jones pour lesquelles  $\mathbf{J}_n = \alpha_n \mathbf{I}d$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux scalaires positifs déterministes. En termes de matériel optique, cela correspond à l'application d'atténuateurs et d'amplificateurs.

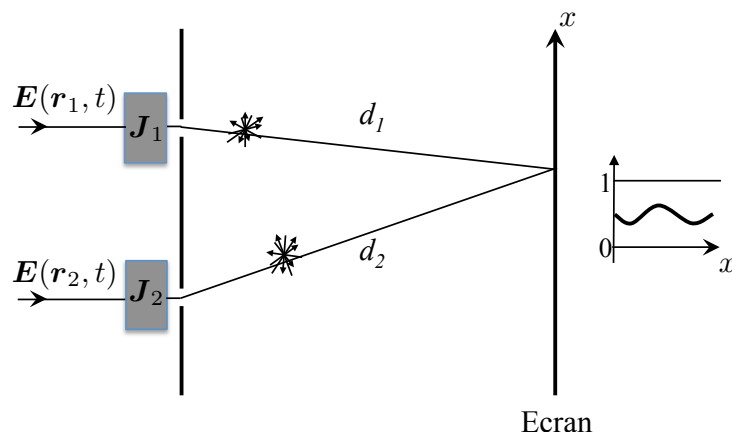


Figure 2.7 – Expérience des fentes d'Young sur laquelle on rajoute à gauche deux matrices de Jones  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  pour pouvoir optimiser la visibilité des franges d'interférence issues des champs  $\mathbf{J}_1 \mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{J}_2 \mathbf{E}_2$  et visibles sur l'écran à droite.

Dans [74], il est montré que si on analyse le maximum du module de degré de cohérence standard entre les deux champs lorsque ceux-ci sont modifiés par des transformations unitaires, puis totalement polarisées, alors le maximum obtenu est égal au plus grand des degrés intrinsèques de cohérence  $\mu_S$ . Dans [77], on a précisé ce résultat en soulignant que  $\mu_S$ , correspond aussi à la valeur maximum de  $|\mu_W|$  quand chacun des deux champs est multiplié par une transformation linéaire locale déterministe. Cette optimisation correspond sur le schéma présenté Fig. 2.7 au cas où la maximisation de la visibilité des franges s'effectue sur l'ensemble des matrices de Jones  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  déterministes. Ainsi, on retrouve sur ce schéma présenté Fig. 2.7 l'idée déjà présente dans [74] (voir Fig. 2.4) où les auteurs associent les propriétés de cohérence à la capacité des champs à générer des franges d'interférence lorsque les champs peuvent être modifiés par des matrices de Jones.

Par la suite on a encore précisé l'analyse du cas cohérent en se focalisant sur les situations physiques pour lesquelles  $\mu_S = \mu_I = 1$ . Dans [78], on a montré que  $\mu_S = \mu_I = 1$  est la condition

f. Rappelons que l'on raisonne sur la cohérence spectrale, il n'est donc pas envisageable d'appliquer un filtrage fréquentiel aux champs pour augmenter la cohérence.



nécessaire et suffisante pour avoir un champ partiellement polarisé qui puisse vérifier  $|\mu_W| = 1$  après transformation déterministe des champs. Pour résumer, d'une part  $\mu_S = 1$  signifie que, après transformation déterministe des champs, il est possible d'obtenir un champ totalement cohérent (au sens où  $|\mu_W| = 1$ ) à condition de le filtrer pour qu'il soit totalement polarisée. D'autre part  $\mu_S = \mu_I = 1$  signifie que, après transformation déterministe des champs, il est possible d'obtenir un champ partiellement polarisé et totalement cohérent (au sens où  $|\mu_W| = 1$ ). Ce résultat montre que l'utilisation de deux paramètres  $\mu_S$  et  $\mu_I$  permet de différencier les deux situations physiques différentes.

Une autre propriété importante que nous avons montré dans [78] est que la cohérence au sens des degrés intrinsèques  $\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = 1$  correspond à restreindre l'aléatoire entre les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)$  dans le sens où, si

$$\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = 1, \quad (2.52)$$

alors il existe une matrice déterministe inversible  $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  telle que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1), \quad (2.53)$$

où cette égalité est à considérer au sens des moindres carrés. Ainsi, connaître le champ en  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  permet de connaître parfaitement le champ en  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  à une transformation linéaire près. Cette propriété permet en particulier d'analyser les cas précédemment illustrés Fig. 2.5 et Fig. 2.6 sans même avoir besoin de poser les calculs.

Avec le degré de cohérence de Wolf, la situation est différente. Si

$$|\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)| = 1, \quad (2.54)$$

alors il existe un scalaire déterministe  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  tel que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1). \quad (2.55)$$

La cohérence au sens de Wolf contraint non-seulement l'aléatoire entre les deux champs, mais contraint aussi les états de polarisation des deux champs à être égaux ce qui n'est pas le cas de la relation Eq. (2.53). Notons qu'une propriété similaire appelée "similarité statistique" a été défini pour les champs scalaires dans [67] dans le domaine temporel, puis dans [48] dans le domaine spectrale.

En 2007, deux nouvelles définitions du degré de cohérence [51, 55] ont été proposées et par la suite plusieurs ouvrages ont été publiés sur l'analyse de la cohérence de la lumière partiellement polarisée [131, 54]. Le degré de cohérence de Martinez-Herrero et Mejias que nous proposons de noter  $\mu_{MHM,\nu}$  est défini dans comme le maximum du module du degré de cohérence  $\mu_{W,\nu}$  quand chacun des deux champs est modifiable par un composant optique décrit par une matrice unitaire [55] :

$$\mu_{MHM,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \max_{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2} \frac{|\text{tr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathbf{V}_2^\dagger)|}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)) \text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2))}}, \quad (2.56)$$

où  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  appartiennent à l'ensemble des matrices unitaires. Dans [55], les auteurs montrent que cette optimisation mène à :

$$\mu_{MHM,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{(\sigma_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \sigma_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)) \text{tr}(\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2))}}, \quad (2.57)$$

où  $\sigma_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  et  $\sigma_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  sont les valeurs singulières de  $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .

Pour conclure l'analyse du cas particulier de la lumière totalement cohérente, je reprends une

analyse proposée dans l'ouvrage [54] et présentée Fig. 2.8. Les auteurs montrent ainsi graphi-

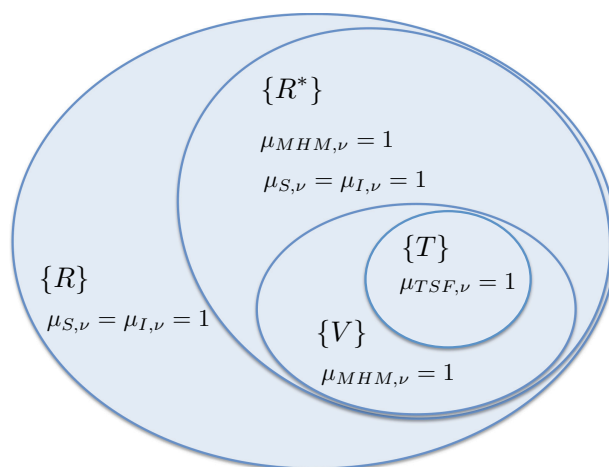


Figure 2.8 – Analyse effectuée dans [54] sur la relation entre les différentes propriétés de lumières cohérentes.

quement une relation entre les contraintes que l'on peut imposer aux lumières dites “cohérentes”. Sur ce graphique, il y a quatre niveaux de contraintes :

- l'ensemble  $\{T\}$  correspond à celui pour lequel  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2, \mu_{TSE, \nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$ . Ceci implique que la matrice de cohérence spectrale est factorisable sous la forme :  $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_1) (\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_2))^\dagger$ , où  $\boldsymbol{\psi}$  est un vecteur déterministe. Dans cette situation, la lumière est monomode (et donc totalement polarisée). Cette ensemble est le plus petit des 4.
- l'ensemble  $\{V\}$  correspond à l'ensemble des lumières qui atteignent une visibilité des franges d'interférence égale à 1 lorsque chacun des champs peut être modifié par une transformation unitaires (c'est-à-dire quand  $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2, \mu_{MHM, \nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$ ). Ces champs s'écrivent sous la forme  $\forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{U}(\mathbf{r})\mathbf{E}_0$ , où  $\mathbf{E}_0$  est un vecteur aléatoire,  $f(\mathbf{r})$  une fonction scalaire déterministe et  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  une matrice unitaire. Ainsi, contrairement à l'ensemble  $\{T\}$ , il n'est pas nécessaire que la lumière soit totalement polarisée.
- l'ensemble  $\{R\}$  est l'ensemble des champs introduits dans [71] et dénommés les champs cohérents au sens des moindres carrés. Ils correspondent aux champs pour lesquels les degrés intrinsèques sont égaux à 1 dans tout l'espace ( $\forall(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathcal{D}^2, \mu_{S, \nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mu_{I, \nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$ ). Ces lumières correspondent à la somme de deux champs cohérents au sens de Glauber :  $\forall \mathbf{r}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_1 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{r}) + \epsilon_2 \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{r})$  où  $\langle \epsilon_1(\epsilon_2)^* \rangle = 0$ , et  $\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{r})$  et  $\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{r})$  sont des vecteurs déterministes non parallèles.
- l'ensemble  $\{R^*\}$  est un cas intermédiaire entre  $\{V\}$  et  $\{R\}$ . Dans ce cas, le champ s'écrit sous la forme  $\forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r})\mathbf{U}(\mathbf{r})\mathbf{E}_0$  où  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  est une matrice diagonale. Cette formulation est donc moins contrainte que celle de  $\{V\}$ . Par contre, cela correspond aussi au cas où  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_1 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{r}) + \epsilon_2 \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{r})$ , mais par rapport à  $\{R\}$ , on rajoute la contrainte que les vecteurs  $\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{r})$  et  $\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{r})$  sont orthogonaux.

Cette étude montre que l'analyse du cas cohérent de la lumière partiellement polarisée est très riche si bien que chacune des définitions présentées est intéressante pour décrire des propriétés particulières de la lumière. Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse aux lumières partiellement polarisées et partiellement cohérentes.

## 2.4 Analyse des lumières partiellement polarisées et partiellement cohérentes

### 2.4.1 Introduction

Une des particularités des degrés intrinsèques de cohérence est que contrairement aux autres degrés qui sont scalaires (comme par exemple  $\mu_W$  ou  $\mu_{TSF}$ ), ils nous amènent à définir un couple de degré de cohérence ( $\mu_S$  et  $\mu_I$ ). Dans [69] Réfrégier a montré que la caractérisation des propriétés de symétrie d'une lumière partiellement polarisée analysée en un couple de points et pour laquelle les champs sont multipliés par des matrices de Jones inversibles nécessite 2 grandeurs scalaires et que les deux degrés intrinsèques de cohérence permettent de décrire ces symétries. Ainsi, il est démontré dans [69], qu'il existe 4 types de situations physiques ayant des propriétés de symétries différentes :

- $\mu_S = \mu_I = 0$ , qui correspond à la symétrie la plus importante,
- $\mu_S > \mu_I = 0$ ,
- $\mu_S = \mu_I > 0$ ,
- $\mu_S > \mu_I > 0$ , qui correspond à la symétrie la moins importante.

Dans la suite de ce chapitre, on montre qu'en fonction du type de lumière analysée :

- les lumières pour lesquelles  $\mu_S > \mu_I$ ,
- ou celles pour lesquelles  $\mu_S = \mu_I$ .

on peut observer des propriétés différentes lors d'expériences optiques spécifiques. Avec ces études, on cherche à induire une meilleure compréhension des propriétés de cohérence pour la lumière partiellement polarisée.

### 2.4.2 Analyse de la cohérence fondée sur l'expérience d'une détection homodyne

Dans [79], nous nous sommes intéressés à la détection homodyne décrite sur le schéma présenté Fig. 2.9. Cette expérience correspond à une situation où pour des raisons expérimentales particulières, on ne souhaite pas modifier l'un des deux faisceaux. Ce peut être par exemple parce que ce faisceau est déjà de très faible intensité car il s'est propagé sur une très grande distance ou parce qu'il contient une information que l'on ne souhaite pas modifier.

Précédemment, on a rappelé que  $\mu_S$  est la valeur maximum de  $|\mu_W|$  lorsque les champs sont modifiés par des matrices de Jones déterministes. La détection homodyne correspond au cas où l'optimisation de la visibilité des franges d'interférence s'effectue en agissant sur l'intensité et la polarisation d'un seul des deux champs (par exemple le premier). Cette optimisation correspond sur le schéma présenté Fig. 2.7 au cas où la maximisation de la visibilité des franges s'effectue sur l'ensemble pour lequel  $\mathbf{J}_2 = \mathbf{Id}$  alors que la matrice de Jones  $\mathbf{J}_1$  appartient à l'ensemble des matrices déterministes. Dans ce contexte, on a montré dans [79] que si  $\mu_S = \mu_I$  alors après optimisation de  $|\mu_W|$ , les propriétés de polarisation du champ  $\mathbf{J}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t)$  sont identiques à celles de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t)$ . Par contre, si  $\mu_S > \mu_I$ , en général, les propriétés de polarisation du champ  $\mathbf{J}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t)$  ne sont pas identiques à celles de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t)$ . En particulier si  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t)$  est totalement dépolarisé (c'est-à-dire son degré de polarisation  $\mathcal{P}_2 = 0$ ), alors le degré de polarisation  $\mathcal{P}'_1$  du champ  $\mathbf{J}_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t)$  qui optimise la visibilité des franges vérifie

$$\mathcal{P}'_1 = \frac{\mu_S^2 - \mu_I^2}{\mu_S^2 + \mu_I^2}. \quad (2.58)$$

Ce qui est remarquable dans cette expression, c'est que le degré de polarisation obtenu dépend des degrés intrinsèques de cohérence et que  $\mathcal{P}'_1 = 0$  si et seulement si  $\mu_S = \mu_I$ .

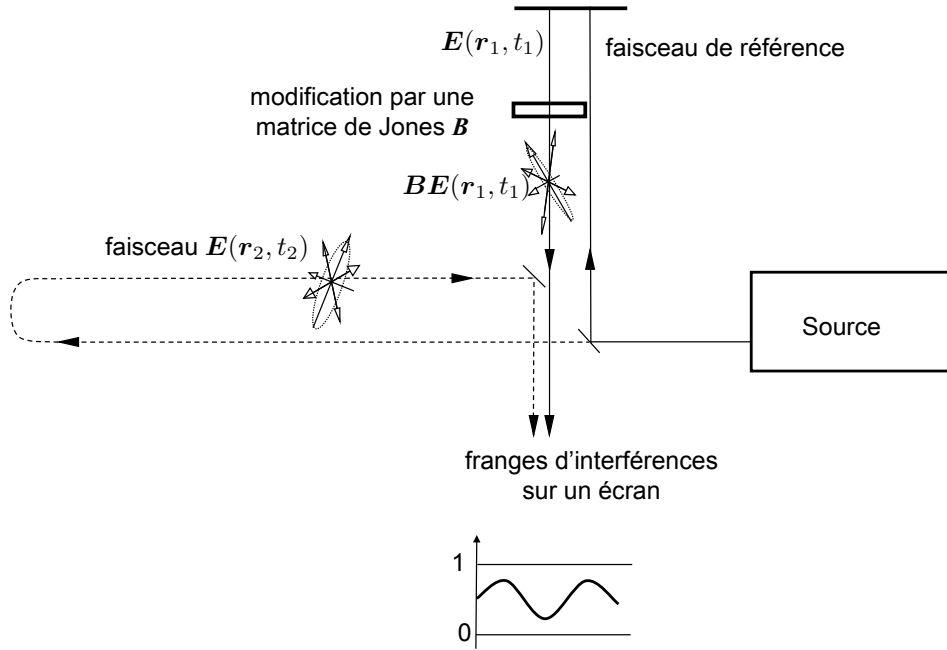


Figure 2.9 – Montage optique d’une détection homodyne.

Lors de cette expérience, en effectuant l’optimisation des franges d’interférence en considérant qu’on ne peut modifier qu’un seul des deux faisceaux, on introduit une rupture de la symétrie du problème d’optimisation qui a pour conséquence un mélange entre les propriétés de polarisation et les propriétés de cohérence. Cette expérience met aussi en évidence une différence de comportement entre le cas  $\mu_S = \mu_I$  et  $\mu_S \neq \mu_I$ . Dans la suite de ce chapitre, on va analyser d’autres exemples où cette propriété de cohérence ( $\mu_S > \mu_I$ ) caractérise des propriétés particulières de la lumière partiellement polarisée.

### 2.4.3 Lien avec les paramètres de Stokes généralisés

Dans le chapitre 1, on a rappelé que les paramètres de Stokes, qui correspondent à une combinaison des coefficients de la matrice de polarisation, permettent de décrire les propriétés de polarisation. En 2005 dans [47], Korotkova et Wolf proposent de définir les paramètres de Stokes généralisés, qui cette fois correspondent à une combinaison de la matrice de cohérence :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
 \mathcal{S}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
 \mathcal{S}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
 \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= i(W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

où  $(W_{uv}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))_{(u,v) \in \{x, y\}^2}$  sont les éléments de la matrice spectrale de cohérence  $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  définie Eq. (2.21). Le degré spectral de cohérence de Wolf peut alors s’écrire :

$$\mu_{W,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\mathcal{S}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\mathcal{S}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)\mathcal{S}_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}, \tag{2.60}$$

où l’on peut noter que  $\mathcal{S}_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i)$  est égal au paramètre de Stokes standard précédemment défini en temps Eq. (1.21).

Dans [103], l'équipe Finlandaise montre que dans une expérience des fentes d'Young comme celle représentée Fig. 2.10, le paramètre de Stokes standard au niveau de l'écran peut s'écrire

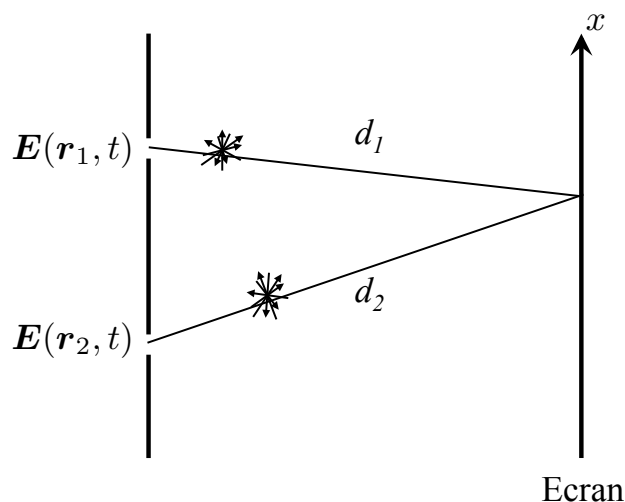


Figure 2.10 – Expérience des fentes d'Young. Les deux faisceaux incidents quasi-monochromatiques sont en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  et la position sur l'écran est localisée par la coordonnée en  $x$ .

pour  $n = 0, 1, 2, 3$  :

$$S_n(x) = S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x) + 2\sqrt{S_0^{(1)}(x)S_0^{(2)}(x)}|\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|\cos(2\pi\nu\frac{d_1 - d_2}{c} + \phi), \quad (2.61)$$

ce qui rappelle la modulation de l'intensité précédemment décrite Eq. (2.4), mais où cette fois,  $S_n^{(m)}(x)$  représente le paramètre de Stokes du champ sur l'écran si seule la fente  $m$  localisée en  $\mathbf{r}_m$  avait été ouverte et où :

$$\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{S_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{S_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)S_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}} \quad (2.62)$$

correspond à une version normalisée du  $n^{\text{ème}}$  paramètre de Stokes généralisé.

Ainsi, comme cela est expliqué dans [103], le degré standard de cohérence  $\mu$  (défini Eq. (2.2)) décrit la visibilité des franges associées à l'intensité du champ, alors que  $|\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|$  décrit le contraste associé à la modulation du  $n^{\text{ème}}$  paramètre de Stokes standard. De plus, observant que  $\eta_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est égal à  $\mu_{W,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  et que le degré spectral  $\mu_{TSF,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  vérifie l'équation :

$$\mu_{TSF,\nu}^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^3 |\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2, \quad (2.63)$$

les auteurs montrent ainsi que  $\mu_{TSF,\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  prend en compte l'ensemble des contrastes.

Dans [112], on a montré en collaboration avec Tervo et Setälä le lien entre les paramètres de Stokes généralisés et les schéma de mesures expérimentales des corrélations. Ce résultat est fondé sur une généralisation du calcul précédemment décrit Eq. (1.29) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \mathcal{S}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \mathcal{S}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - W_{\beta\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W_{rr}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - W_{ll}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (2.64)$$

qui permet de relier les paramètres de Stokes généralisés à la mesure des éléments de corrélation lorsque les champs sont polarisés dans les directions de polarisation linéaire horizontale ( $x$ ), linéaire verticale ( $y$ ), linéaire  $\pi/4$  ( $\alpha$ ), linéaire  $-\pi/4$  ( $\beta$ ), circulaire gauche ( $l$ ) et circulaire droit ( $r$ ).

De plus, dans [112] on a aussi discuté des différences entre les paramètres de Stokes standards et les paramètres de Stokes généralisés. Par la suite, dans [110] on a précisé cette analyse et on a montré que le nombre de paramètres de Stokes généralisés non nuls, et par conséquent le nombre de contrastes  $(|\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|)_{n=0..3}$  non nuls, pouvait être réduit à 2 par l'application de transformations déterministes unitaires et à 1 lorsque les valeurs singulières de la matrice  $\Omega$  sont identiques. En effet la décomposition en valeurs singulières de  $\Omega$  peut s'interpréter comme un changement de base à l'issue duquel la nouvelle matrice de cohérence est diagonale et ses éléments sont les valeurs singulières. Cette transformation permet ainsi d'annuler  $\mathcal{S}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  et  $\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  qui ne dépendent que des termes anti-diagonaux de  $\Omega$  (voir Eq. (2.59)). De plus lorsque les deux valeurs singulières sont égales, alors  $\mathcal{S}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  s'annule lui aussi.

Pour faire le lien avec les degrés intrinsèques, il suffit de considérer que les deux faisceaux sont totalement dépolarisés ( $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = 0$ ). Dans ce cas, les valeurs singulières de  $\Omega$  sont proportionnelles aux degrés intrinsèques de cohérence. Cette analyse montre que pour une lumière totalement dépolarisée le nombre de contrastes  $(|\eta_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|)_{n=0..3}$  non nuls peut être réduit à 1 par des transformations unitaires déterministes si les degrés intrinsèques  $\mu_S$  et  $\mu_I$  sont égaux, alors que le nombre de contrastes ne peut être réduit qu'à 2 si  $\mu_S > \mu_I$ . Ainsi à travers l'expérience de la mesure des contrastes des paramètres de Stokes se manifeste à nouveau une différence entre les lumières pour lesquelles  $\mu_S = \mu_I$  et celles pour lesquelles  $\mu_S > \mu_I$ .

## 2.4.4 Manifestation d'une anisotropie de cohérence pour une lumière totalement dépolarisée

Par la suite, nous avons continué la collaboration avec Tervo pour montrer dans [83] que si une lumière totalement dépolarisée vérifie la propriété  $\mu_S > \mu_I$ , alors on peut observer la manifestation d'une anisotropie de cohérence. Pour introduire ce résultat, il est utile de commencer par analyser l'anisotropie lié à la polarisation qui apparaît lorsque le degré de polarisation est non nul. Dans l'expérience décrite Fig. 2.11, il est possible de conserver l'orientation définie par l'état de polarisation où le champ est d'énergie maximum si et seulement si le degré de polarisation est non nul. En effet, soit une lumière dont les propriétés de polarisation sont décrites par une matrice  $\Gamma$  connue. La matrice  $\Gamma$  est hermitienne avec des valeurs propres positives ou nulles. Elle peut donc s'écrire :

$$\Gamma = \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{N}^\dagger, \quad (2.65)$$

où

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  et  $\mathbf{N}$  une matrice unitaire. Si la lumière est partiellement polarisée alors  $\lambda_1 > \lambda_2$  et le premier vecteur colonne définit l'orientation de référence. Lorsque le champ est modifié par une matrice  $\mathbf{U}$  inconnue, le champ transformé s'écrit  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{U} \mathbf{E}(t)$ . L'analyseur de polarisation peut mesurer  $\Gamma_A$ , et on peut calculer sa décomposition en valeurs propres :

$$\Gamma_A = \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{W}^\dagger, \quad (2.67)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice unitaire qui n'est pas obtenue à partir de la connaissance de  $\mathbf{U}$ , mais simplement à partir de la décomposition en valeurs propres de  $\Gamma_A$ . Ainsi il suffit à l'expérimentateur d'appliquer la transformation  $\mathbf{V} = \mathbf{N} \mathbf{W}^\dagger$  pour retrouver à la sortie du montage un champ dont

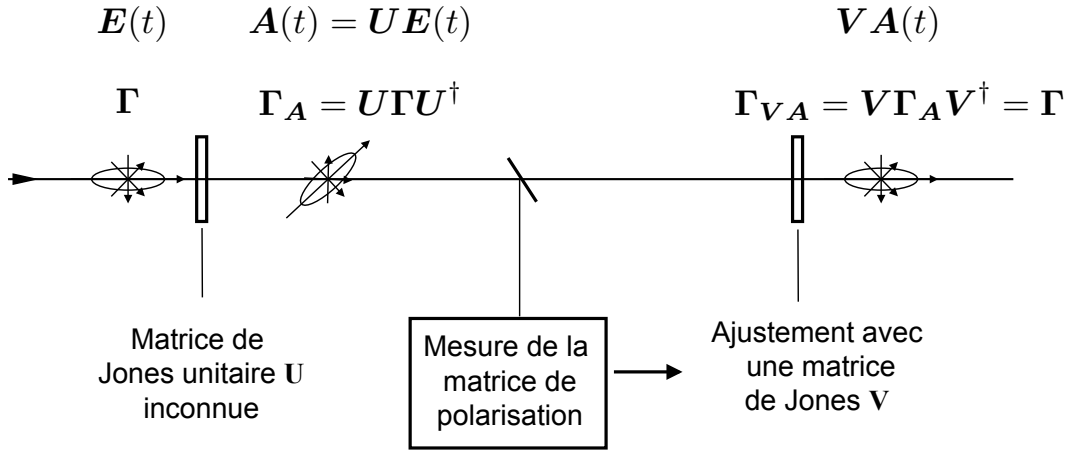


Figure 2.11 – Illustration d’une anisotropie de polarisation caractérisée par la capacité à aligner un champ suivant une orientation de référence absolue définie par l’état de polarisation où le champ est d’énergie maximum. Le champ peut être modifié par une transformation unitaire  $U$  inconnue, cette transformation peut être compensée par l’application d’une autre matrice  $V$  de manière à retrouver le même état de polarisation que celui du champ initial.

la matrice de polarisation s’écrit :

$$\Gamma_{VA} = NDN^\dagger = \Gamma, \quad (2.68)$$

et ainsi retrouver la polarisation de départ.

Au contraire, si la lumière est totalement dépolariée (i.e.  $\Gamma = \alpha Id$ ), il n’est pas possible de définir d’orientation de référence à partir de  $\Gamma$  puisque le sous espace associé à la valeur propre est de dimension 2. D’ailleurs, dans ce cas, il n’est même pas possible de détecter la modification de l’orientation de départ puisque  $\Gamma = \Gamma_A$ .

La possibilité d’aligner le champ suivant une direction de référence lorsque la lumière est partiellement polarisée est bien connue [8], mais son rappel permet d’introduire l’anisotropie de cohérence que nous avons démontrée dans [83]. Considérons une lumière totalement dépolariée qui n’a, a priori, pas d’orientation privilégiée. Dans l’expérience décrite Fig. 2.12, les propriétés de cohérence temporelle sont décrites par la matrice  $\Omega(\tau)$  connue. Les degrés intrinsèques de cohérence sont définis à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de cohérence normalisée :

$$M(\tau) = N_1(\tau) \begin{pmatrix} \mu_S(\tau) & 0 \\ 0 & \mu_I(\tau) \end{pmatrix} N_2^\dagger(\tau), \quad (2.69)$$

où la matrice de cohérence normalisée est définie Eq. (2.29). Dans le cas d’un champ totalement dépolarié, on a  $M(\tau) = \frac{I}{2}\Omega(\tau)$ , ce qui permet d’obtenir l’équation :

$$\Omega(\tau) = \frac{I}{2} N_1(\tau) D(\tau) N_2^\dagger(\tau), \quad (2.70)$$

où

$$D(\tau) = \begin{pmatrix} \mu_S(\tau) & 0 \\ 0 & \mu_I(\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

g. Pour simplifier les notations, on a remplacé  $(N_2(\tau))^\dagger$  par  $N_2^\dagger(\tau)$

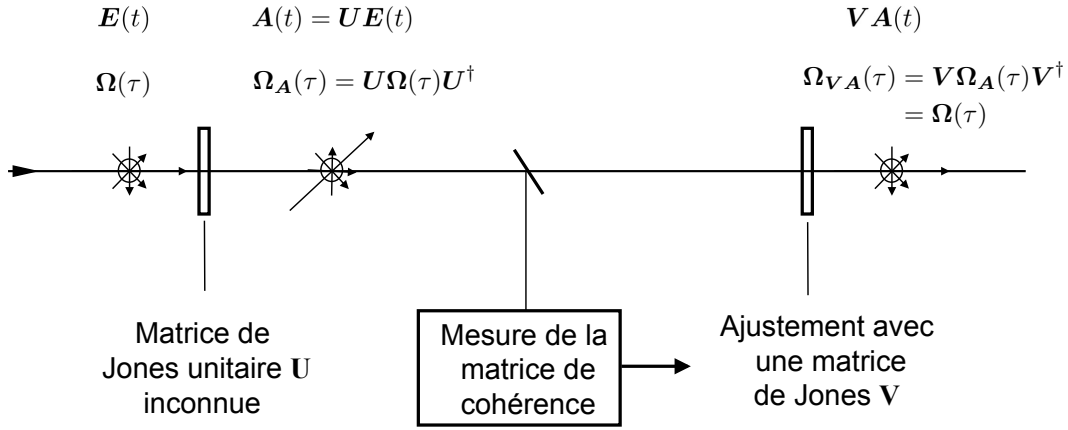


Figure 2.12 – Illustration d’une anisotropie de cohérence caractérisée par la capacité à aligner un champ suivant une orientation de référence liée aux propriétés de polarisation et de cohérence du champ. Le champ peut être modifié par une transformation unitaire  $U$  inconnue, cette transformation peut être compensée par l’application d’une autre matrice  $V$  de manière à retrouver la même matrice de cohérence et ainsi la même orientation de référence.

Montrons que  $N_1(\tau)$ , qui est une matrice unitaire, peut être utilisée pour aligner le champ suivant une orientation de référence. Dans [83], on a choisi de s’intéresser à la matrice  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$  car celle-ci est hermitienne et avec des valeurs propres positives comme une matrice de polarisation :

$$\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau) = \frac{\mathcal{I}^2}{4} N_1(\tau) D^2(\tau) N_1^\dagger(\tau), \quad (2.72)$$

Si le champ est modifié par une matrice  $U$  inconnue de sorte que le champ transformé s’écrit :  $A(t) = UE(t)$ , alors lorsque l’analyseur de cohérence mesure  $\Omega_A(\tau)$  et on peut effectuer la décomposition en valeurs propres de  $\Omega_A(\tau)\Omega_A^\dagger(\tau)$  :

$$\Omega_A(\tau)\Omega_A^\dagger(\tau) = \frac{\mathcal{I}^2}{4} W(\tau) D^2(\tau) W^\dagger(\tau), \quad (2.73)$$

où  $W(\tau)$  est une matrice unitaire. Il suffit à l’expérimentateur d’appliquer la transformation  $V = N_1(\tau) (W(\tau))^\dagger$  pour retrouver à la sortie du montage :

$$\Omega_{VA}(\tau)\Omega_{VA}^\dagger(\tau) = \frac{\mathcal{I}^2}{4} N_1(\tau) D^2(\tau) N_1^\dagger(\tau) = \Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau). \quad (2.74)$$

Ainsi il est possible d’avoir comme orientation de référence l’état de polarisation associé au premier vecteur colonne de  $N_1(\tau)$  si et seulement si  $\mu_S(\tau) > \mu_I(\tau)$ .

Pour interpréter le résultat de cette expérience, reprenons la comparaison avec l’analyse d’une lumière partiellement polarisée. Si le degré de polarisation, défini par la différence normalisée des valeurs propres de la matrice  $\Gamma$  :

$$\mathcal{P} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (2.75)$$

n’est pas égal à zéro, alors il existe une anisotropie de polarisation qui permet d’aligner le champ suivant une orientation de référence. Si on cherche une formulation similaire pour l’expérience proposée, on obtient : si le paramètre défini par la différence normalisée des valeurs propres de



la matrice  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$  :

$$\mathcal{Q}(\tau) = \frac{\mu_S^2(\tau) - \mu_I^2(\tau)}{\mu_S^2(\tau) + \mu_I^2(\tau)}. \quad (2.76)$$

n'est pas égal à zéro, alors il existe une anisotropie de cohérence qui permet d'aligner le champ suivant une orientation de référence. On peut donc interpréter  $\mathcal{Q}(\tau)$  comme un degré d'anisotropie de cohérence.

Soulignons que dans l'expérience analysée, la détermination d'une orientation de référence peut être effectuée à partir de  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$  ou de  $M(\tau)M^\dagger(\tau)$  car les matrices  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$  et  $M(\tau)M^\dagger(\tau)$  ont les mêmes vecteurs singuliers puisque la lumière est totalement dépolarisée. De plus, au lieu de travailler à partir de  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$ , on aurait pu mener le même raisonnement en fondant notre analyse sur la matrice  $\Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau)$ . Avec cette matrice, la seule différence est que l'orientation est dans ce cas décrite par le premier vecteur colonne de  $N_2(\tau)$  et non de  $N_1(\tau)$ . Enfin notons que la valeur du paramètre  $\mathcal{Q}(\tau)$  défini Eq. (2.76) est identique que l'on fonde l'analyse sur  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$ ,  $\Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau)$ ,  $M(\tau)M^\dagger(\tau)$  ou  $M^\dagger(\tau)M(\tau)$ .

En perspective à ce travail, il serait intéressant de poursuivre ces travaux en considérant d'autres expériences d'optique fondées sur l'analyse de cette anisotropie de cohérence afin de mieux comprendre les propriétés physiques décrites par les matrices  $\Omega(\tau)\Omega^\dagger(\tau)$ ,  $\Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau)$ ,  $M(\tau)M^\dagger(\tau)$  et  $M^\dagger(\tau)M(\tau)$ .

## 2.4.5 Isotropie de cohérence

Plus récemment [81], dans la lignée des travaux réalisés sur les propriétés d'irréversibilité [70, 76], nous nous sommes intéressés, dans le cadre de la thèse de Valentine Wasik, non pas à une propriété d'anisotropie de cohérence, mais cette fois à une propriété d'invariance des propriétés de cohérence lors de transformations de Jones aléatoires. Cette nouvelle expérience permet ainsi d'analyser les propriétés physiques sous un angle différent du précédent. Considérons l'expérience des fentes d'Young représentée Fig. 2.13. On s'intéresse au problème de savoir si le degré

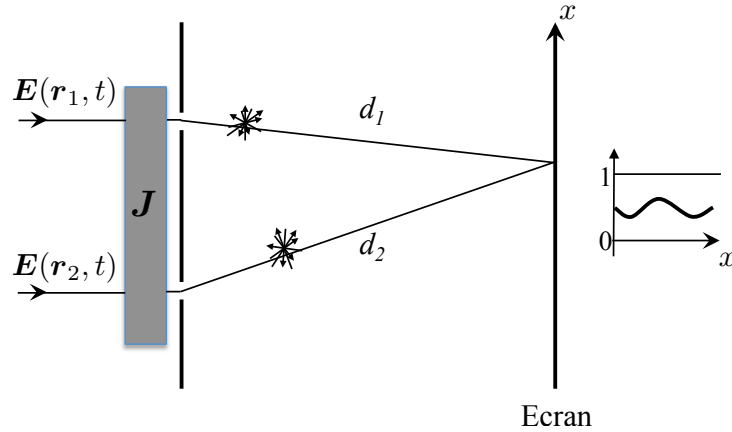


Figure 2.13 – Expérience des fentes d'Young pour laquelle on précède l'analyse des franges d'interférence par une transformation éventuellement aléatoire du champ décrit par une matrice de Jones  $J$ .

de cohérence  $\mu_W$ , qui est relié à la visibilité et à la position des franges d'interférence [31], reste invariant lorsque les deux champs qui interfèrent subissent la même transformation aléatoire. En d'autres termes, on considère une transformation du type :

$$A(\mathbf{r}_1, t_1) = JA(\mathbf{r}_1, t_1) \text{ et } A(\mathbf{r}_2, t_2) = JA(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (2.77)$$

où  $\mathbf{J}$  est une matrice aléatoire décorrélée de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Rappelons que si le champ est totalement polarisé et que la matrice de Jones Eq. (2.77) peut être remplacée par un scalaire  $\alpha$ , alors on peut conserver le formalisme scalaire et la situation est relativement simple car quel que soit le champ  $E(\mathbf{r}, t)$ , le degré de cohérence standard du champ modifié de sorte que  $A(\mathbf{r}, t) = \alpha E(\mathbf{r}, t)$  et défini par

$$\mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\langle A(\mathbf{r}_1, t_1) A^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |A(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |A(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}, \quad (2.78)$$

vérifie

$$\mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\langle |\alpha|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |\alpha|^2 \rangle \langle |\alpha|^2 \rangle}} \frac{\langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}} = \mu_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2). \quad (2.79)$$

Ce rapide calcul rappelle que dans l'expérience présentée Fig. 2.13, si le champ est totalement polarisé et que  $\mathbf{J} = \alpha$  est scalaire, alors la visibilité et la position des franges d'interférence ne sont pas modifiées même si le milieu décrit par le scalaire  $\alpha$  est aléatoire. Il est intéressant d'analyser comment évolue cette propriété pour la lumière partiellement polarisée. On a montré dans [81] que dans le cas où le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  est partiellement polarisée, le degré  $\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  (qui décrit la position et la visibilité des franges d'interférences) reste inchangé par l'application d'une matrice aléatoire  $\mathbf{J}$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}_i, t_i) &= g(\mathbf{r}_i, t_i) \Gamma \quad \text{pour } i \in \{1, 2\} \\ &\text{et} \\ \Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \sqrt{g(\mathbf{r}_1, t_1) g(\mathbf{r}_2, t_2)} \Gamma \end{aligned} \quad (2.80)$$

Remarquons que pour une lumière quelconque, il est simple, au moins théoriquement, de forcer la propriété décrite par la première relation. Par exemple, il suffit d'appliquer localement au champ la transformation linéaire déterministe

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = (\Gamma(\mathbf{r}, t))^{-1/2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.81)$$

pour que la matrice de polarisation du champ transformée vérifie  $\Gamma_{E'}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Id}$ .

Par contre, la deuxième relation est plus contraignante car elle porte sur les propriétés de cohérence entre les couples de points. Pour être invariante aux transformations aléatoires comme décrit par Eq. (2.77), la matrice de cohérence normalisée (définie Eq. (2.29)) doit pouvoir s'écrire

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{Id}, \quad (2.82)$$

Cette égalité correspond à une propriété de symétrie particulière pour laquelle on a :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{V} \mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \mathbf{V}^\dagger, \quad (2.83)$$

pour toute matrice unitaire  $\mathbf{V}$ . De plus, cette propriété s'interprète facilement avec les degrés intrinsèques. En effet, la relation Eq. (2.82) implique que

$$\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = |\mu_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)|. \quad (2.84)$$

Ainsi, dans le précédent paragraphe, on a observé que la propriété

$$\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) > \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \quad (2.85)$$

permet d'aligner le champ suivant une orientation de référence, le cas considéré ici décrit une situation différente où les propriétés de cohérence restent invariantes aux transformations du

champ par une matrice de Jones aléatoire. Nous voyons ainsi que les situations physiques pour lesquelles  $\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ , qui possèdent un groupe de symétrie plus grand que quand  $\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) > \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) > 0$  [69], possèdent également des propriétés physiques remarquables expérimentalement. Dans le paragraphe suivant, on revient sur la différence de comportements  $\mu_S > \mu_I$  et  $\mu_S = \mu_I$  en se focalisant sur le cas particulier de champs à deux composantes.

## 2.5 Analyse du cas particulier des champs à deux composantes

### 2.5.1 Définition d'un champ à deux composantes

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux propriétés des champs à deux composantes. En s'appuyant sur nos précédentes publications [95, 81], on peut montrer qu'il y a équivalence entre avoir une lumière "deux composantes" au sens où :

$\forall(\mathbf{r}, t) \in \mathcal{D}$ , le champ se décompose comme la somme de deux composantes totalement polarisées

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t)E_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)E_2(\mathbf{r}, t), \quad (2.86)$$

où les vecteurs déterministes  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)$  ne sont pas parallèles et les deux champs scalaires  $E_1(\mathbf{r}, t)$  et  $E_2(\mathbf{r}, t)$  sont incohérents dans le sens où  $\forall(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \in \mathcal{D}^2$

$$\langle E_1(\mathbf{r}_i, t_i) (E_2(\mathbf{r}_j, t_j))^* \rangle = 0, \quad (2.87)$$

et une lumière qui vérifie la propriété suivante :

$\forall(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \in \mathcal{D}^2$  la matrice de cohérence normalisée peut s'écrire

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i) \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) & 0 \\ 0 & \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \end{pmatrix} (\mathbf{V}_j(\mathbf{r}_j, t_j))^\dagger, \quad (2.88)$$

où  $\forall i$  la matrice  $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i)$  est une matrice unitaire qui ne dépend que de  $(\mathbf{r}_i, t_i)$ , contrairement aux matrices  $\mathbf{U}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j)$  définies Eq. (2.31) qui dépendent de  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j)$ . En d'autres termes, les matrices unitaires  $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i)$  sont définies "localement".

Pour ces lumières "deux composantes", la transformation locale suivante,  $\forall(\mathbf{r}_i, t_i) \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_i, t_i) = \mathbf{T}(\mathbf{r}_i, t_i)\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t_i), \quad (2.89)$$

où  $\mathbf{T}(\mathbf{r}_i, t_i) = \mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i)^\dagger (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_i, t_i))^{-1/2}$ , permet de se ramener au cas où :

$$\mathbf{\Omega}_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) & 0 \\ 0 & \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

où  $\forall n \in \{1, 2\}$ , le scalaire  $\mu_n(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j)$  est égal au degré de cohérence complexe défini Eq. (2.2) entre  $E_n(\mathbf{r}_i, t_i)$  et  $E_n(\mathbf{r}_j, t_j)$ .

Dans les deux paragraphes suivants, on va montrer que ces champs à deux composantes ont des propriétés de cohérence particulières.

## 2.5.2 Invariance des propriétés de cohérence dans un domaine

Précédemment, dans l'expérience décrite Fig. 2.13, on a analysé une invariance des propriétés de cohérence quand le champ est modifié par une transformation linéaire aléatoire et quand le champ est analysé pour un couple de faisceaux. L'une des raisons pour laquelle nous avons analysé les champs à deux composantes est que ces lumières permettent de généraliser l'analyse d'invariance des propriétés de cohérence à l'étude du champ dans un domaine. Dans [81], on a montré que la propriété d'invariance de  $\mu_W$  par l'application de transformations aléatoires comme décrit par Eq. (2.77) peut être obtenue dans tout un domaine  $(\mathbf{r}, t) \in \mathcal{D}$  après application d'une transformation locale du type  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , si et seulement si le champ a "deux composantes" au sens où,  $\forall(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \in \mathcal{D}^2$  :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i) \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) & 0 \\ 0 & \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \end{pmatrix} (\mathbf{V}_j(\mathbf{r}_j, t_j))^\dagger, \quad (2.91)$$

et de plus les propriétés de cohérence de ces deux composantes sont identiques :

$$\mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j). \quad (2.92)$$

Considérons l'exemple du montage optique présenté Fig. 2.14 et permettant de générer un champ "deux composantes". Chacun des lasers génère un champ stationnaire partiellement cohérent et totalement polarisé. Les deux champs ainsi générés sont supposés incohérents entre eux. Ceux-ci passent dans un élargisseur de faisceau. Le passage dans les modulateurs spatiaux de lumière modifie l'état de polarisation du champ en chaque point du plan. Finalement le miroir semi-réfléchissant effectue la sommation des deux champs polarisés.

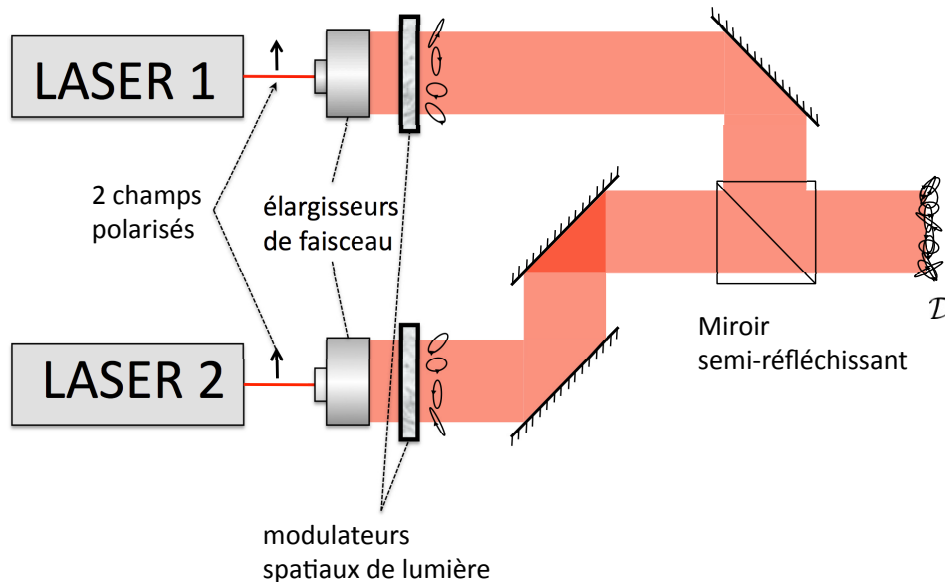


Figure 2.14 – Génération d'un champ à "deux composantes". Chaque laser produit un champ polarisé et partiellement cohérent. Le champ total est la somme de deux composantes totalement polarisées avec des états de polarisation non parallèles et incohérentes entre elles.

Ainsi,  $\forall(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \in \mathcal{D}^2$ , dans le plan à la sortie du montage et  $\forall(t_i, t_j)$ , on a :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mathbf{V}_i(\mathbf{r}_i, t_i) \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) & 0 \\ 0 & \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \end{pmatrix} (\mathbf{V}_j(\mathbf{r}_j, t_j))^\dagger, \quad (2.93)$$

où les propriétés de cohérence sont liées aux caractéristiques des deux lasers. Si de plus les propriétés de cohérence des lasers sont égaux, et que les temps de propagation entre chacun des lasers et le plan  $\mathcal{D}$  sont identiques, alors :

$$\forall(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \in \mathcal{D}^2$$

$$\mu_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mu_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j). \quad (2.94)$$

Dans ce cas, il est possible d'ajouter à la sortie du montage au plan  $\mathcal{D}$  (voir Fig. 2.14) une lame biréfringente que l'on fait tourner au cours du temps de manière à appliquer une transformation aléatoire identique à toutes les coordonnées spatiale du plan  $\mathcal{D}$ . Le degré de cohérence  $\mu_W$  entre deux couples  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  ne sera pas modifié par l'application de la lame biréfringente. Par contre, si on considère un champ qui est généré par la somme de trois composantes comme cela est décrit sur le schéma présenté Fig. 2.15, dans cette situation, les propriétés de cohérence décrites par degré  $\mu_W$  ne sont pas invariantes à toutes les transformations décrite Eq. (2.77), mais seulement à une partie d'entre elles.

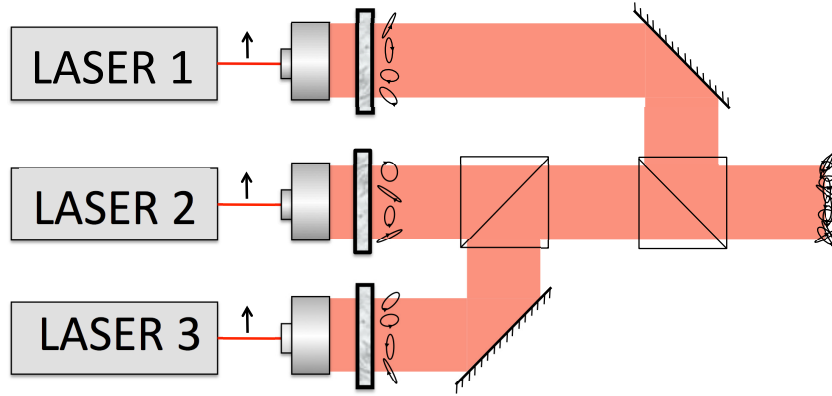


Figure 2.15 – Génération d'un champ à “trois composantes”. Le champ total est la somme de trois composantes totalement polarisées et incohérentes entre elles.

L'expérience analysée ici est très particulière. Elle montre néanmoins que les propriétés d'invariance sont elles aussi reliées aux propriétés de cohérence puisqu'elle nécessitent ici que  $\mu_S = \mu_I$ . Plus généralement, l'analyse des propriétés de cohérence des lumières qui vérifient

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) = \mu(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_i, t_j) \mathbf{Id} \quad (2.95)$$

est actuellement en cours.

### 2.5.3 Estimation des états de polarisation et filtrage polarimétrique dans le cas anisotrope

Dans le paragraphe précédent, on a insisté sur une propriété particulière des champs à deux composantes dans le cas particulier où  $\mu_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$  (ce qui implique que  $\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ ). Nous avons étudié un cas différent dans [95]. En effet, si  $\mu_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) > \mu_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ , alors on a montré dans [95] qu'il est possible d'identifier l'ellipticité et l'orientation de chacune des deux composantes, ce qui permet de les séparer, sans

information a priori sur leur état de polarisation et surtout sans avoir besoin que ceux-ci soient orthogonaux. Cela est illustré par le schéma présenté Fig. 2.16. D'un point de vue "traitement du

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t)E_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)E_2(\mathbf{r}, t)$$

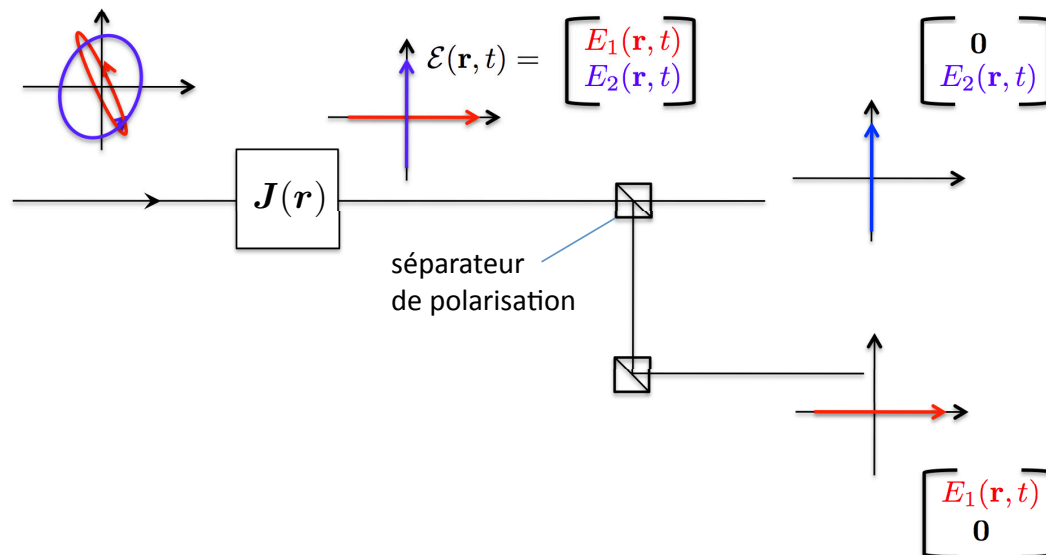


Figure 2.16 – Si  $\mu_S > \mu_I$ , alors l'optimisation des degrés intrinsèques de cohérence dans le cas de champs "deux composantes" permet d'estimer la matrice de Jones  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  qui permet de séparer les deux champs polarisés à l'aide d'un séparateur de polarisation [41].

signal", soulignons que dans [6], une approche similaire, c'est-à-dire reposant sur une analyse en composante principale des moments d'ordre 2, a été proposée dans un cadre différent.

L'un des points intéressants est que cette technique de séparation fondée sur la maximisation des propriétés de cohérence entre un couple de champs analysés en deux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  est une expérience simple directement reliée à la capacité des champs à interférer. Cette technique de séparation a d'ailleurs été appliquée sur des données réelles géophysiques pour la séparation des ondes de Love et des ondes de Rayleigh en collaboration notamment avec Philippe Roux du LGIT de Grenoble [96, 97]. Dans cette analyse, les données acquises à proximité de la faille sismique de San Andrés contiennent un nombre très important de signaux qui sont dus à des micro-séismes qui donnent l'aspect d'un bruit continu. Comme ces micro-séismes se propagent dans toutes les directions de manière irrégulière mais quasi-continue, le calcul des inter-corrélations entre deux capteurs sur plusieurs heures de données (voir plusieurs jours) permet d'estimer la fonction de Green entre les deux capteurs considérés.

Comme l'orthogonalité entre les états de polarisation des composantes n'est pas nécessaire avec la technique de séparation fondée sur les degrés intrinsèques de cohérence, dans l'analyse menée [96], on a pu vérifier a posteriori sur les données réelles que les ondes de Love et ondes de Rayleigh estimées avaient correctement été séparées car leur état de polarisation étaient effectivement quasiment orthogonaux.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de montrer la richesse de l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée. Bien que le nombre d'équipes internationales s'intéressant à ce sujet depuis une dizaine d'années soit non négligeable, le sentiment demeure que, si l'analyse mathématique des propriétés au second ordre est simple, notre compréhension des phénomènes physiques reste encore superficielle. Notre réflexion a été fondée sur plusieurs expériences de pensée (c'est-à-dire sans mesures expérimentales). Néanmoins, la richesse des situations physiques que recouvrent les propriétés de cohérence des lumières partiellement polarisées offre encore de nombreuses perspectives d'études et un défi majeur car de nombreuses expériences ne prennent pas encore en compte à la fois le caractère partiellement polarisé et partiellement cohérent de la lumière, ou plus généralement du champ électro-magnétique.

Pour progresser sur ce sujet, nous allons donc continuer à considérer différentes expériences. En particulier, l'expérience de Hanbury Brown and Twiss (HBT) [37] est une piste intéressante qui nous donnerait l'occasion de travailler sur des moments statistiques d'ordre supérieur à deux. Cela pourrait aussi être intéressant pour caractériser des lumières non gaussiennes. Par ailleurs, la généralisation de l'analyse des propriétés de cohérence au cas des champs non-transverses, c'est-à-dire où il est nécessaire de tenir compte des trois dimensions du champ électrique, est une autre perspective motivante car elle offre un degré de liberté supplémentaire qui devrait encore enrichir ce sujet [84]. Enfin, le développement de collaborations avec des équipes effectuant des expériences optiques est aussi une perspective très motivante qui permettrait d'enrichir notre analyse des situations physiques.

# 3 Estimation de paramètres de végétation avec le système SAR polarimétrique interférométrique

## 3.1 Contexte scientifique

### 3.1.1 Analyse environnementale

Le contexte des études décrites dans ce chapitre est l'estimation de la biomasse pour l'étude du cycle du carbone. Alors que la quantité de  $CO_2$  émise sur la planète est relativement bien estimée, les scientifiques ont encore beaucoup de difficultés à comprendre où ce  $CO_2$  est stocké [49]. En particulier on ignore la proportion de  $CO_2$  qui est incorporée dans la biomasse des forêts car on ne dispose pas de mesure de cette biomasse à l'échelle planétaire. Le point le plus crucial est l'analyse des forêts tropicales qui sont les principales réserves mondiales de biomasse, mais qui sont aussi les forêts les plus difficiles à étudier.

Pour pallier cette méconnaissance, il est prévu d'envoyer un satellite dédié à l'estimation de la biomasse aux alentours de 2020 [49]. Ce satellite sera équipé d'un système SAR polarimétrique (PolSAR) en bande P. Cette bande de fréquence correspond à la plus grande des longueurs d'onde disponible (environ 60 cm) du fait de la taille des satellites (avoir une grande longueur d'onde nécessite d'avoir une grande antenne) ainsi que de l'allocation des plages de fréquences pour les systèmes de télécommunications et de défense. L'intérêt d'avoir une grande longueur d'onde pour l'estimation de la biomasse est d'augmenter la pénétration des ondes dans la végétation et d'être plus sensible aux branches qu'aux feuilles des arbres.

Les études qui proposent d'estimer la biomasse à partir de mesures d'intensité avec un système PolSAR datent d'une vingtaine d'années [114]. Les résultats sont intéressants mais ces techniques présentent plusieurs limitations. D'une part, l'intensité rétro-diffusée n'est pas uniquement reliée à la quantité de biomasse, elle est aussi fortement dépendante de l'angle d'incidence ainsi que de la pente topographique. D'autre part, une autre difficulté est l'effet de saturation de l'intensité rétro-diffusée lorsque la végétation est très dense ou que les arbres sont très grands. Par exemple, dans les forêts tropicales, il est difficile de relier la quantité de biomasse à l'intensité rétro-diffusée. Pour tenir compte de ces deux effets, il est nécessaire d'estimer d'une part la topographie du sol pour avoir une idée des pentes et d'autre part d'intégrer la hauteur de végétation aux modèles d'estimation de la biomasse [49].

### 3.1.2 Analyse d'une image SAR

Le système SAR est une technique d'imagerie cohérente qui émet une onde, puis mesure la contribution rétro-diffusée par l'ensemble des diffuseurs. Grâce à sa technique de synthèse, l'image obtenue a une résolution qui permet de décrire la scène malgré quelques déformations géométriques [50]. L'image SAR formée a souvent un aspect bruité à cause du phénomène de



speckle [31]. Ce phénomène se produit avec des systèmes d'imagerie cohérents quand le nombre de diffuseurs au sein de chaque pixel est important et que ceux-ci renvoient vers le RADAR des contributions indépendantes. En effet, dans ce cas, l'application du théorème Centrale limite montre que l'amplitude mesurée en chaque pixel peut alors être modélisée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale complexe circulaire. Ainsi, le module carré de cette mesure, qu'on appellera "intensité", suit alors une loi exponentielle, ce qui génère un bruit du type "poivre et sel".

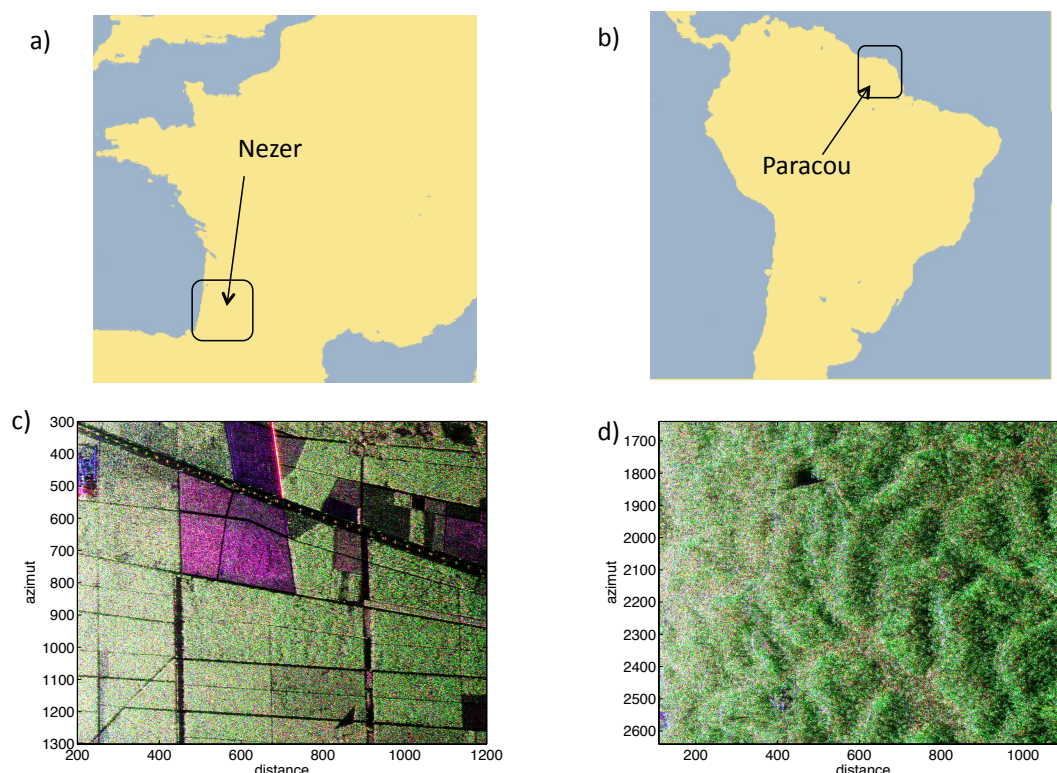


Figure 3.1 – Deux jeux de données réelles ont été analysées en détails (voir [88] et [2]). Le premier jeu a été acquis dans la forêt tempérée de Nezer (voir carte (a)) et le deuxième dans la forêt tropicale de Paracou en Guyane (voir carte (b)). Les deux images en composition RVB correspondant respectivement à Nezer en (c) et Paracou en (d) ont été générées avec les intensités dans la base de Pauli (Rouge :  $\frac{1}{2}\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle$ , Vert :  $2\langle |S_{HV}|^2 \rangle$  et bleu :  $\frac{1}{2}\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle$ ). Images générées à partir de données fournies par Pascale Dubois-Fernandez de l'ONERA.

Deux exemples de données réelles avec du speckle sont présentés Fig. 3.1. Dans ces images, le rendu couleur est obtenu par la combinaison de trois composantes polarimétriques. Ces images montrent que lorsque la zone étudiée correspond à une forêt entretenue sur un sol plat, comme c'est le cas de la forêt de Nezer, il est facile de distinguer des zones homogènes qui délimitent les chemins et les parcelles de forêts, alors que dans la forêt tropicale de Guyane, la nature plus chahutée de la végétation, la présence de collines, qui génèrent des phénomènes d'ombre, et l'absence de chemins visibles rend plus difficile l'analyse de l'image.

Pour comprendre le phénomène de speckle, il est intéressant de souligner que si on effectue deux acquisitions d'une même zone dans les mêmes conditions, c'est-à-dire avec un système RADAR installé sur un porteur ayant deux fois exactement la même trajectoire, et dans un intervalle de temps proche de sorte que la zone étudiée n'a pas changé, et si en plus on néglige

le bruit du capteur, alors on obtient deux fois exactement la même réalisation de speckle sur les deux images. En physique, on parle alors de “désordre gelé”. Cela signifie que la nature bruitée n’est pas due à une fluctuation temporelle (comme par exemple un bruit thermique), mais à la complexité de la scène imagée.

Pour analyser les images SAR avec du speckle, le plus souvent on cherche des régions homogènes de l’image où les mesures sont identiquement distribuées et caractérisées par leur moment statistique d’ordre 2 (c’est-à-dire leur variance). L’estimation de ce moment peut notamment s’effectuer par l’application d’une fenêtre glissante sur l’image dans laquelle est calculée la variance empirique. Comme cela est illustré Fig. 3.2 sur une image SAR simulée, il y a un compromis sur la taille de la fenêtre glissante. Avec une grande fenêtre, la variance au sein de chaque région est

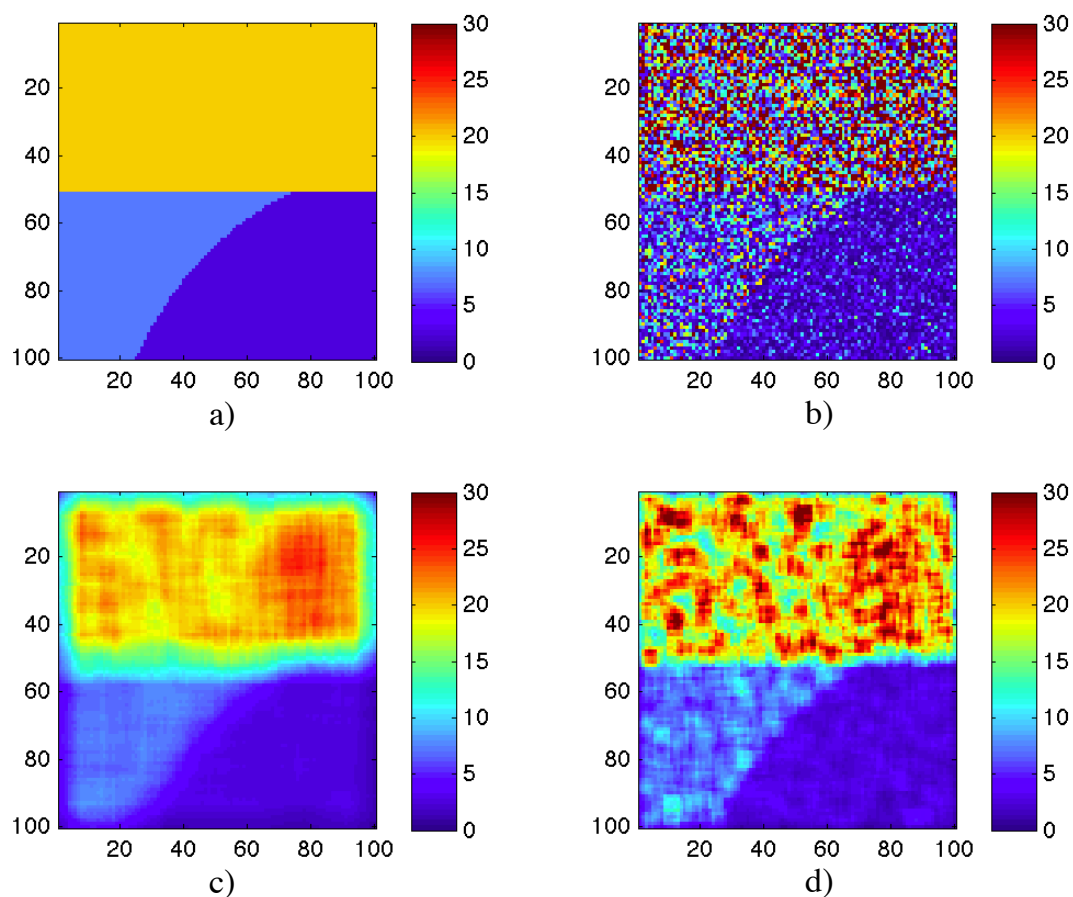


Figure 3.2 – Exemple d’une image SAR (scalaire) simulée pour illustrer le compromis sur la taille de la fenêtre glissante lors du débruitage des images SAR. (a) Image des intensités sans bruit de speckle. (b) Image des intensités avec bruit de speckle. (c) Image des intensités filtrée avec une fenêtre glissante de taille  $15 \times 15$ . (d) Image des intensités filtrée avec une fenêtre glissante de taille  $5 \times 5$ . Dans ces 4 images, toutes les valeurs d’intensité plus grandes que 30 ont été représentées en marron.

mieux estimée car la fenêtre glissante contient plus de mesures indépendantes. En effet, les fluctuations sont moins importantes sur l’image présentée Fig. 3.2.(c) que sur l’image Fig. 3.2.(d). Par contre, avec une grande fenêtre, la frontière est moins visible qu’avec une petite fenêtre car le filtrage lisse d’autant plus l’image que la taille de la fenêtre est importante.

Lorsque l’on traite des images InSAR, PolSAR ou PolInSAR, en chaque pixel on mesure un vec-

teur. En effet, en configuration InSAR ce vecteur est la concaténation de deux images SAR scalaires  $[v_1, v_2]^T$  acquises depuis deux positions proches du RADAR. En PolSAR, comme mentionné au chapitre 1, le vecteur mesuré s'écrit  $\mathbf{v} = [S_{HH}, \sqrt{2}S_{HV}, S_{VV}]^T$  et contient les différents éléments de la matrice de diffusion (voir Eq. (1.53)). En PolInSAR, le vecteur mesuré  $\mathbf{k} = [v_1, v_2]^T$  est de dimension 6 et correspond à la concaténation de deux images PolSAR acquises depuis deux positions proches du RADAR. De même que pour les images SAR scalaires, en présence de speckle le traitement des images InSAR, PolSAR et PolInSAR consiste le plus souvent à calculer des matrices de covariance empiriques. Par exemple en PolInSAR :

$$\hat{\Upsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{k}_n \mathbf{k}_n^\dagger, \quad (3.1)$$

où  $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N\}$  est un ensemble de mesures localisées dans une zone homogène de l'image PolInSAR considérée. Ainsi, pour avoir une estimation précise de la matrice de covariance  $\Upsilon$ , il est préférable de sélectionner une grande région homogène, c'est-à-dire avec beaucoup de pixels. Néanmoins, du fait de la résolution des images et de la variation spatiale de la scène, il peut être difficile de définir de grandes régions homogènes [57]. Dans l'analyse menée dans ce chapitre, la question du nombre de mesures nécessaire à une "bonne" estimation est un enjeu crucial qu'il faut prendre en compte pour évaluer les performances du système PolInSAR.

### 3.1.3 Modèle Random Volume over Ground (RVoG) et estimation de la hauteur de végétation

Lorsqu'un satellite revisite la même zone avec une incidence légèrement différente, il est possible d'utiliser deux acquisitions PolSAR pour définir un système SAR polarimétrique et interférométrique (PolInSAR). Depuis une quinzaine d'années, de nombreuses études ont démontré la faisabilité d'utiliser le système PolInSAR pour estimer la hauteur de végétation et la hauteur du sol [119, 64, 12, 108, 25, 17].

Pour expliquer le principe de ces estimateurs, revenons tout d'abord à l'analyse d'une surface avec une configuration SAR interférométrique (InSAR). Quand un système InSAR éclaire une surface, si les deux acquisitions  $v_1$  et  $v_2$  ont été effectuées depuis deux endroits dans l'espace suffisamment proches l'un de l'autre, alors la réalisation de speckle, qui décrit la scène vue depuis le système RADAR, est quasiment identique et la seule différence entre les deux acquisitions  $v_1$  et  $v_2$  est un déphasage  $\phi$  dû à la différence de marche entre les deux acquisitions :

$$v_1 \simeq v_2 e^{i\phi}. \quad (3.2)$$

Considérons le schéma représenté Fig. 3.3. Le déphasage  $\phi$  entre les deux mesures  $v_1$  et  $v_2$  est donné par :

$$\phi = \frac{4\pi}{\lambda} (r_1 - r_2), \quad (3.3)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du RADAR. Lorsque la distance entre les antennes est faible par rapport à la distance au point  $P$ , on peut considérer que :

$$\phi = \frac{4\pi}{\lambda} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}), \quad (3.4)$$

où  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p})$  est le produit scalaire entre les deux vecteurs représentés Fig. 3.3. Comme cela est expliqué notamment dans [5], on peut montrer par des arguments géométriques que :

$$\phi = k_z z_g, \quad (3.5)$$

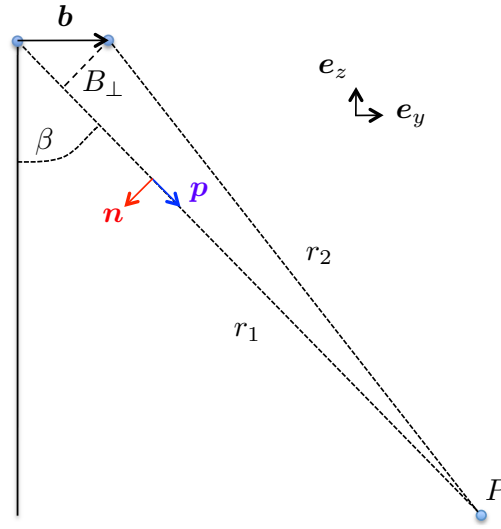


Figure 3.3 – Géométrie InSAR où l'on a représenté  $r_1$  et  $r_2$  la distance entre chacune des acquisitions et le point éclairé sur le sol noté  $P$ . L'angle  $\beta$  est l'angle d'incidence. La distance  $B_{\perp}$  s'appelle la baseline orthogonale. Les deux vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{p}$  sont unitaires. Le vecteur  $\mathbf{b}$  relie les deux coordonnées des deux récepteurs du système InSAR.

où  $z_g$  est la hauteur du sol par rapport à une altitude de référence qui dépend de la calibration du RADAR et  $k_z$  est le vecteur d'onde vertical (aussi appelé la sensibilité verticale) qui peut s'écrire :

$$k_z = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{B_{\perp}}{r \sin \beta}, \quad (3.6)$$

où  $\beta$  est l'angle d'incidence et  $r$  la distance entre le point  $P$  et le RADAR ( $r \simeq r_1 \simeq r_2$ ) et  $B_{\perp}$  est appelé la ligne de base orthogonale (voir Fig. 3.3).

Dans le cas particulier d'une surface où l'Eq. (3.2) est vérifiée, le degré de cohérence défini en configuration InSAR par :

$$\mu_{InSAR} = \frac{\langle v_1 v_2^* \rangle}{\sqrt{\langle |v_1|^2 \rangle \langle |v_2|^2 \rangle}} \quad (3.7)$$

est de module proche de 1 et l'estimation de la phase  $\phi = k_z z_g$  est très précise [104]. Remarquons que la connaissance de l'angle  $\phi$  modulo  $2\pi$  permet de remonter à la hauteur  $z_g$  avec une hauteur d'ambiguïté égale  $h_a = 2\pi/k_z$ .

Dans le problème qui nous intéresse, la scène ne correspond pas à une surface, mais à une végétation dont les diffuseurs sont situés entre la hauteur de sol  $z_g$  et la hauteur de canopée  $z_g + h_v$  (c'est-à-dire hauteur du sol plus hauteur de végétation). On suppose que  $\forall n \in \{1, 2\}$  :

$$\langle |v_n|^2 \rangle = \int_{z_g}^{z_g + h_v} S_v(z) dz, \quad (3.8)$$

où  $S_v(z)$  est une fonction positive qui peut s'interpréter comme l'intensité de l'onde rétro-diffusée par les diffuseurs situés à l'altitude  $z$ . De plus on suppose aussi que

$$\langle v_1 v_2^* \rangle = \int_{z_g}^{z_g + h_v} e^{ik_z z} S_v(z) dz. \quad (3.9)$$

où tout se passe comme si le volume était constitué d'un ensemble continue de surfaces indépendantes les unes des autres. Avec ces hypothèses, dans Eq. (3.9) on reconnaît un calcul de transformée de Fourier. Ainsi, lorsque l'on dispose de plusieurs baselines (c'est-à-dire plusieurs termes de corrélations avec différentes valeurs de  $k_z$ ), il est alors possible d'utiliser les techniques dites "tomographiques" [85, 109] pour retrouver la fonction  $S_v(z)$ . Dans notre étude, nous nous intéressons à un seul couple d'antennes, c'est pourquoi l'analyse dans ce chapitre est fondée sur l'étude des propriétés de cohérence. Avec les hypothèses considérées, la cohérence s'écrit :

$$\mu_{InSAR} = \frac{\int_{z_g}^{z_g+h_v} e^{ik_z z} S_v(z) dz}{\int_{z_g}^{z_g+h_v} S_v(z) dz}. \quad (3.10)$$

Comme la fonction  $S_v(z)$  est positive, le terme de cohérence  $\mu_{InSAR}$  est forcément de module plus petit que 1. En d'autres termes, on a une perte de cohérence à cause du fait que les diffuseurs ne sont pas tous à la même altitude. Ce qui est intéressant pour l'estimation de la hauteur des arbres est que cette perte de cohérence (ou tout simplement "décohérence") est liée à la hauteur de végétation  $h_v$ .

Lorsque l'on passe au système PolInSAR, en conservant les notations du chapitre 1 où l'on a noté  $\mathbf{v}_n$  la  $n^{\text{ème}}$  image PolSAR (voir Eq. (1.55)), on généralise facilement les équations Eq. (3.8) et Eq. (3.9). Ainsi  $\forall n \in \{1, 2\}$  :

$$\mathbf{T}_n = \langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^\dagger \rangle = \int_{z_g}^{z_g+h_v} \mathbf{T}(z) dz, \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{T}(z)$  représente une matrice de covariance et

$$\mathbf{T}_{12} = \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^* \rangle = \int_{z_g}^{z_g+h_v} e^{ik_z z} \mathbf{T}(z) dz. \quad (3.12)$$

Dans [118, 119], Treuhaf propose le modèle Random Volume over Ground (RVoG) pour décrire les mécanismes de rétro-diffusion en configuration InSAR, puis PolInSAR, ce qui permet de paramétrer simplement les fonctions  $S_v(z)$  et  $\mathbf{T}(z)$ , c'est-à-dire avec un faible nombre de paramètres. Ce modèle, schématisé Fig. 3.4, reprend les hypothèses précédentes Eq. (3.11), Eq. (3.12) et suppose de plus que l'onde rétro-diffusée correspond à la somme de deux contributions,  $\forall z \in [z_g, z_g + h_v]$  :

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{T}_{vol} f(z) + \mathbf{T}_{gro} f(z_g) \delta(z - z_g), \quad (3.13)$$

où dans cette équation  $f(z)$  représente l'atténuation subie par la contribution des diffuseurs localisés à la hauteur  $z$  et due au trajet allée-retour dans le volume entre la canopée située à la hauteur  $z_g + h_v$  et la hauteur  $z$ . Les deux matrices de covariance  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  sont de taille  $3 \times 3$  et correspondent aux propriétés polarimétriques respectivement du volume et du sol lorsque l'atténuation dans le volume n'est pas prise en compte. Ce modèle suppose donc que les propriétés de polarisation du volume ne dépendent pas de  $z$ . De plus, en supposant que le volume a une densité verticale des diffuseurs constante, la fonction  $f(z)$  est alors caractérisée par un paramètre d'atténuation  $\sigma_v$ , supposé isotrope :

$$f(z) = e^{2(z-(z_g+h_v))\sigma_v / \cos \beta}, \quad (3.14)$$

où  $\beta$  est l'angle d'incidence. Avec ce modèle, l'atténuation au niveau de la canopée est égale à un (c'est-à-dire  $f(z_g + h_v) = 1$ ), l'onde rétro-diffusée par la canopée n'est pas atténuée car cette onde ne s'est pas propagée dans la végétation. Par contre, au niveau du sol, le trajet aller-retour dans le volume induit une atténuation de  $f(z_g) = e^{-2h_v \sigma_v / \cos \beta}$ .

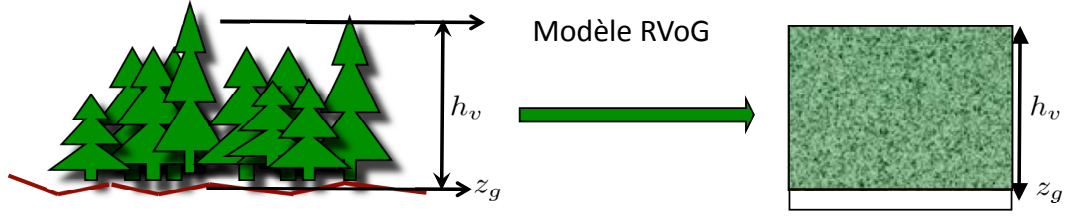


Figure 3.4 – Modélisation de la végétation par le modèle RVoG [118] constitué d’une surface située à la hauteur  $z_g$  et d’un volume situé entre la hauteur  $z_g$  et la hauteur  $z_g + h_v$ .

Avec ce modèle RVoG [119, 64], les matrices de covariance  $\Upsilon$  des mesures PolInSAR (voir Eq. (1.59))

$$\Upsilon = \langle \mathbf{k} \mathbf{k}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{12}^\dagger & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

sont reliées aux deux paramètres du RADAR : l’angle d’incidence  $\beta$  et le vecteur d’onde  $k_z$  ainsi qu’aux paramètres de végétation que sont  $\mathbf{T}_{vol}$ ,  $\mathbf{T}_{gro}$ ,  $\sigma_v$ ,  $h_v$  et  $z_g$ . En effet, avec les hypothèses effectuées, le calcul des intégrales mène au modèle décrit [64] :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_2 = I_1 \mathbf{T}_{vol} + a \mathbf{T}_{gro} \\ \mathbf{T}_{12} &= e^{ik_z z_g} (I_2 \mathbf{T}_{vol} + a \mathbf{T}_{gro}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\sigma_v}{\cos \beta} & a &= e^{-\alpha h_v} \\ I_1 &= \frac{1 - e^{-\alpha h_v}}{\alpha} & I_2 &= \frac{e^{ik_z h_v} - e^{-\alpha h_v}}{ik_z + \alpha} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Parmi ces paramètres, la hauteur de végétation  $h_v$  et la hauteur du sol  $z_g$  sont deux paramètres d’intérêt. En bande P, l’atténuation dans le volume  $\sigma_v$  est souvent supposée connue [25], mais les matrices de covariance de taille  $3 \times 3$  du volume  $\mathbf{T}_{vol}$  et du sol  $\mathbf{T}_{gro}$  sont inconnues. Comme ces matrices sont hermitiennes, chacune peut être paramétrée par 9 paramètres réels. Si on ajoute  $h_v$  et  $z_g$ , on a un problème d’estimation avec 20 paramètres réels scalaires inconnus. Entre 2001 et 2009, une partie importante de l’activité scientifique en PolInSAR a consisté à proposer des estimateurs de la hauteur de végétation  $h_v$  et la hauteur du sol  $z_g$  en utilisant le modèle RVoG [119, 64, 12, 108, 25, 17]. L’émergence de ces techniques d’estimation a motivé de nombreuses analyses avec des données réelles pour vérifier leur pertinence.

Il est intéressant de noter que la grande majorité de ces estimateurs est fondée sur l’analyse des propriétés de cohérence des mesures. En effet dans [64, 12, 25, 17], on s’intéresse à la cohérence définie par :

$$\gamma(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}_{12} \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}_1 \mathbf{w}} \sqrt{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}_2 \mathbf{w}}}, \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{w}$  est un vecteur complexe (non nul) de dimension 3. Dans [64], il est montré que dans le cadre du modèle RVoG, la cohérence s’écrit :

$$\gamma(\mathbf{w}) = e^{ik_z z_g} \frac{\gamma_v + \mu(\mathbf{w})}{1 + \mu(\mathbf{w})}, \quad (3.19)$$

où  $\gamma_v = \frac{I_2}{I_1}$  et  $\mu(\mathbf{w}) = \frac{a}{I_1} \frac{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}_{gro} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}_{vol} \mathbf{w}}$ . Comme l’illustre le schéma représenté Fig. 3.5, l’ensemble décrit par  $\mathbf{w} \mapsto \gamma(\mathbf{w})$ , qu’on appelle “la région de cohérence” [64], décrit alors un segment. Si on prolonge ce segment comme indiqué sur la figure, on sait que l’une des intersections avec le cercle unité se trouve en  $e^{ik_z z_g}$  et que le point  $\gamma_v e^{ik_z z_g}$  se trouve sur le segment représenté Fig. 3.5 en pointillé. Comme  $\gamma_v$  est paramétré par  $h_v$ , de nombreux estimateurs de  $z_g$  et de  $h_v$

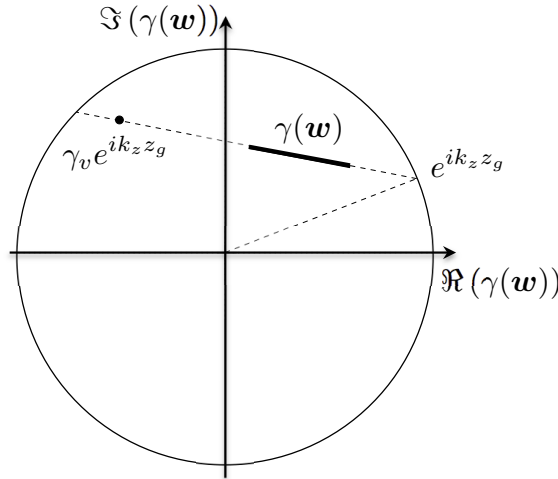


Figure 3.5 – Représentation dans le plan complexe des propriétés de cohérence décrites par  $\gamma(\mathbf{w})$  avec le modèle RVoG.

utilisent ces deux propriétés. Le point de départ de ces estimateurs est d'estimer la région de cohérence décrite par la fonction  $\mathbf{w} \mapsto \gamma(\mathbf{w})$  en remplaçant dans Eq. (3.18)  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_{12}$  par les covariances empiriques notées respectivement  $\hat{T}_1$ ,  $\hat{T}_2$  et  $\hat{T}_{12}$ . L'étape suivante consiste à estimer la droite qui permet de décrire au mieux (par exemple au sens des moindres carrés dans [12]) la région de cohérence estimée. Un point important à noter pour la suite de la discussion est qu'en présence du bruit de speckle, la droite qui passe par la région de cohérence est d'autant plus difficile à estimer que le segment représenté Fig. 3.5 est petit. En particulier, dans le cas extrême où la région de cohérence se réduit à un point, il est impossible d'estimer la droite qui passe par  $e^{ik_z z_g}$  et  $\gamma_v e^{ik_z z_g}$ .

### 3.1.4 Amélioration des modèles décrivant les mécanismes de rétro-diffusion

Une autre part importante de l'activité scientifique porte sur l'amélioration des modèles permettant de décrire les données PolSAR. En supposant des propriétés que nous détaillons ci-dessous sur le sol et sur le volume, il est possible d'en déduire une forme plus contrainte des matrices de polarisation du sol  $T_{gro}$  et du volume  $T_{vol}$  qui interviennent dans le modèle RVoG (voir Eq. (3.16)).

En effet on peut montrer que pour une région homogène éclairée par un système PolSAR, si les propriétés au sens des moments statistiques d'ordre 2 sont invariantes au sens de passage de l'avion (ce qui revient à faire un changement de repère  $H \mapsto -H$  et  $V \mapsto V$ ), alors la matrice de covariance  $T$  possède certains paramètres égaux à 0. Cette propriété est appelée dans [61] la symétrie de réflexion et permet de déduire que la matrice de covariance en PolSAR, notée dans ce cas  $T_R$ , s'écrit

$$\mathbf{T}_R = \langle \mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & 0 & \langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle \\ 0 & 2\langle |S_{HV}|^2 \rangle & 0 \\ \langle S_{VV}(S_{HH})^* \rangle & 0 & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Ce type de symétrie est vérifié par exemple lorsque la scène éclairée est une surface homogène plate, comme cela est illustré Fig. 3.6.



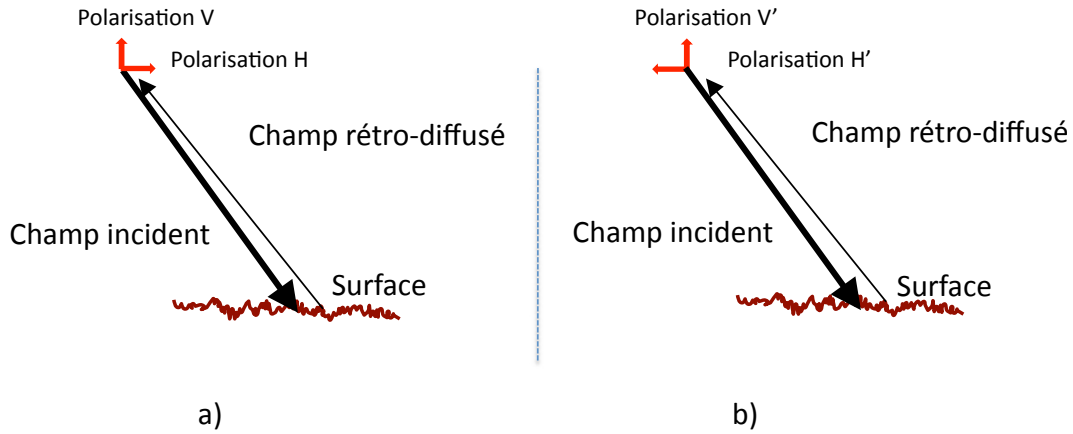


Figure 3.6 – Avec une surface homogène et plate, la matrice de covariance  $\mathbf{T}$  est invariante à un changement de repère caractérisé lors du passage de (a) à (b) par  $H \mapsto -H$  et  $V \mapsto V$ .

Dans certains cas particuliers, une deuxième propriété de symétrie peut s'ajouter à la première. En effet si en plus de la symétrie de réflexion, les propriétés au sens des moments statistiques d'ordre 2 sont aussi invariantes par rotation des axes de références  $H, V$ , alors cette propriété, appelé dans [61] la symétrie azimutale, permet de simplifier encore la matrice de covariance noté dans ce cas  $\mathbf{T}_A$  :

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} 2\langle |S_{HV}|^2 \rangle + \Re(\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle) & 0 & \Re(\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle) \\ 0 & 2\langle |S_{HV}|^2 \rangle & 0 \\ \Re(\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle) & 0 & 2\langle |S_{HV}|^2 \rangle + \Re(\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

où  $\Re(\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle)$  est la partie réelle de  $\langle S_{HH}(S_{VV})^* \rangle$ . Cette symétrie est valable par exemple pour un volume isotrope, comme cela est illustré Fig. 3.7.

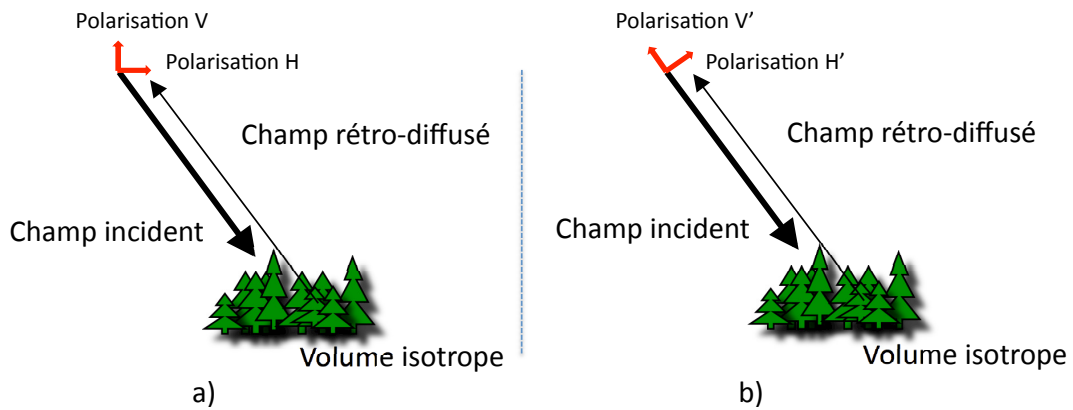


Figure 3.7 – Avec un volume isotrope, la matrice de covariance  $\mathbf{T}$  est invariante à un changement de repère caractérisé lors du passage de (a) à (b) par une rotation des axes de références ( $H, V$ ).

Ainsi dans le cas général, la matrice  $\mathbf{T}$  est paramétrée par 9 paramètres réels inconnus, en présence d'une symétrie de réflexion la matrice  $\mathbf{T}_R$  est paramétrée par 5 paramètres réels inconnus et en présence d'une symétrie azimutale, la matrice  $\mathbf{T}_A$  est paramétrée par seulement



2 paramètres réels inconnus. Dans le cadre du modèle RVoG, il est possible de supposer que le sol a une symétrie de réflexion et que le volume de végétation a une symétrie azimutale. Avec de telles connaissances a priori, le problème d'estimation passe d'un problème à 20 paramètres inconnus à un problème à 9 paramètres inconnus [108].

### 3.1.5 Plan du chapitre

Lorsque nous avons commencé à nous intéresser à cette thématique lors de la thèse d'Aurélien Arnaubec en 2009, plutôt que de proposer un nouvel estimateur ou de travailler sur le choix de modèle, nous avons choisi d'entrer dans cette thématique en commençant par quantifier la précision disponible dans les données PolInSAR au vu du modèle RVoG utilisé pour décrire ces données. Comme cela est expliqué dans la suite, nous avons observé lors de cette analyse une grande diversité de situations possibles et nous avons dû chercher à réduire la complexité de la description du problème.

Dans les paragraphes suivants, après avoir introduit les paramètres pertinents pour la description du problème, nous analysons les gains envisageables pour améliorer la précision des estimations par l'introduction de connaissances a priori. En fait, l'ordre de présentation des résultats de ce chapitre n'est pas chronologique car nous avons commencé à regarder l'apport des connaissances a priori avant d'avoir réduit la complexité de la description du problème. Néanmoins il m'a semblé plus didactique de présenter nos résultats sur l'impact des connaissances a priori après avoir défini les paramètres pertinents qui décrivent le problème d'estimation. Il en est de même pour la dernière partie de ce chapitre, qui porte sur l'analyse d'un compromis entre la complexité du système et la précision d'estimation avec la configuration PolInSAR compacte. Un autre intérêt de terminer ce chapitre par l'analyse du système compact est qu'on y développe une analyse fondée sur les propriétés de symétrie dans la sphère de Poincaré, ce qui offre l'occasion d'illustrer la synergie entre mes activités en RADAR et en optique.

## 3.2 Recherche d'invariants pour réduire la complexité de la description du problème

### 3.2.1 Etude quantitative de la précision des estimations

Lorsque nous avons commencé à travailler sur ce sujet, de nombreuses études avaient déjà démontré sur des acquisitions aéroportées ou satellitaires la faisabilité d'estimer la hauteur de végétation avec le système PolInSAR [119, 64, 12, 108, 25, 17], mais à notre connaissance, il n'y avait pas eu d'analyse de la précision avec laquelle on pouvait espérer réaliser ces estimations. Plutôt que de proposer un nouvel estimateur, notre première contribution [87] a donc consisté à quantifier la précision d'estimation de la hauteur de végétation avec le système PolInSAR dans le cadre du modèle RVoG considéré. Afin d'être indépendant du choix de l'estimateur du moment qu'il n'est pas biaisé, nous avons utilisé la borne de Cramer Rao (BCR) comme valeur de référence de la précision des estimations. Ce choix peut paraître optimiste car la BCR est une borne qui n'est pas toujours atteignable [121]. Néanmoins, comme cela sera discuté plus loin, nous avons observé que la précision donnée par la BCR semblait être atteinte par un estimateur.

Soit  $\chi = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$  un échantillon de  $N$  mesures indépendantes issues d'une zone homogène (c'est-à-dire que les mesures sont identiquement distribuées) d'une image PolInSAR pouvant être décrite par le modèle RVoG. Cet échantillon est supposé distribué suivant une loi complexe Gaussienne circulaire et sa matrice de covariance est supposée être paramétrée comme indiqué Eq. (3.16). Le vecteur des paramètres inconnus est :

$$\theta = (\theta_i)_{i=1,\dots,20} = \{t_{vol,1}, \dots, t_{vol,9}, t_{gro,1}, \dots, t_{gro,9}, h_v, z_g\}, \quad (3.22)$$

où  $(t_{vol,n})_{n=1,\dots,9}$  (respectivement  $(t_{gro,n})_{n=1,\dots,9}$ ) sont les 9 paramètres réels qui interviennent dans la paramétrisation des matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  (resp.  $\mathbf{T}_{gro}$ ). Soit  $\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi})$  un estimateur de  $\theta_i$ , supposé non-biaisé, c'est-à-dire :  $\langle \hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}) \rangle = \theta_i$ , où  $\langle \cdot \rangle$  représente l'espérance statistique sur les différentes réalisations de l'échantillon  $\boldsymbol{\chi}$ . La précision de l'estimateur décrite par sa variance

$$\text{var}(\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi})) = \langle (\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}) - \langle \hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}) \rangle)^2 \rangle, \quad (3.23)$$

est bornée par la borne de Cramer Rao (BCR) :

$$\text{var}(\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi})) \geq BCR(\theta_i). \quad (3.24)$$

La borne de Cramer-Rao  $BCR(\theta_i)$  est égal au  $i^{\text{ème}}$  terme diagonal de l'inverse de la matrice de Fisher  $\mathbf{I}_F$ . On rappelle [26] que le terme  $i, j$  de la matrice de Fisher est défini par :

$$[\mathbf{I}_F]_{ij} = -\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log P(\boldsymbol{\chi}, \theta) \rangle, \quad (3.25)$$

où  $P(\boldsymbol{\chi}, \theta)$  représente la densité de probabilité de l'échantillon  $\boldsymbol{\chi}$  quand le paramètre est  $\theta$ . Dans le cas d'une loi normale centrée, le calcul de la matrice de Fisher est particulièrement simple puisqu'il suffit d'utiliser la formule de Slepian-Bang [106] :

$$[\mathbf{I}_F]_{ij} = N \text{tr} \left( \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \theta_i} \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \theta_j} \right). \quad (3.26)$$

La BCR est très utilisée en traitement du signal (voir par exemple [45]) car elle permet de déterminer une borne inférieure des performances d'estimation en ne tenant compte que de l'information contenue dans les données et donc sans être influencé par le choix d'un estimateur particulier. En plus, comme le montrent les formules précédentes, son calcul est particulièrement simple dans le cas gaussien. Au contraire, pour un estimateur donné  $\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi})$  le calcul de sa variance n'est pas toujours facile et la plupart du temps il faut effectuer une simulation Monte Carlo pour estimer sa moyenne et sa variance.

Lorsqu'un estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\chi}) = \{\hat{\theta}_1(\boldsymbol{\chi}), \dots, \hat{\theta}_{20}(\boldsymbol{\chi})\}$  non biaisé, de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\chi}) - \langle \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\chi}) \rangle) (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\chi}) - \langle \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\chi}) \rangle)^\dagger \rangle, \quad (3.27)$$

vérifie  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{20}$

$$\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{I}_F^{-1} \mathbf{a}, \quad (3.28)$$

alors cet estimateur est dit efficace. Il atteint les performances optimales qui sont alors décrites par la BCR. Néanmoins, rappelons que la BCR n'est pas toujours atteignable et qu'il existe un nombre important de travaux qui s'intéressent aux calculs d'autres bornes qui peuvent être plus grandes que la BCR [115, 121]. Enfin, rappelons que le terme anti-diagonal de la matrice  $\mathbf{I}_F^{-1}$  a aussi une interprétation. Il est égal à la covariance des estimateurs efficaces :

$$[\mathbf{I}_F^{-1}]_{ij} = \text{cov}(\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}), \hat{\theta}_j(\boldsymbol{\chi})), \quad (3.29)$$

où

$$\text{cov}(\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}), \hat{\theta}_j(\boldsymbol{\chi})) = \langle (\hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}) - \langle \hat{\theta}_i(\boldsymbol{\chi}) \rangle) (\hat{\theta}_j(\boldsymbol{\chi}) - \langle \hat{\theta}_j(\boldsymbol{\chi}) \rangle) \rangle. \quad (3.30)$$

Pour vérifier que la BCR était représentative de la précision des estimateurs, nous avons comparé par simulation Monte Carlo la valeur de la BCR sur la hauteur de végétation à la variance de l'estimateur proposé dans [64]. A cette époque, alors que le nombre d'estimateurs proposés continuait d'augmenter, nous avons constaté que l'estimateur proposé dès 2001 était efficace

lorsque la taille d'échantillon correspondait approximativement à une précision sur l'estimation de la hauteur de végétation de l'ordre du mètre [87]. Une illustration de ces performances est

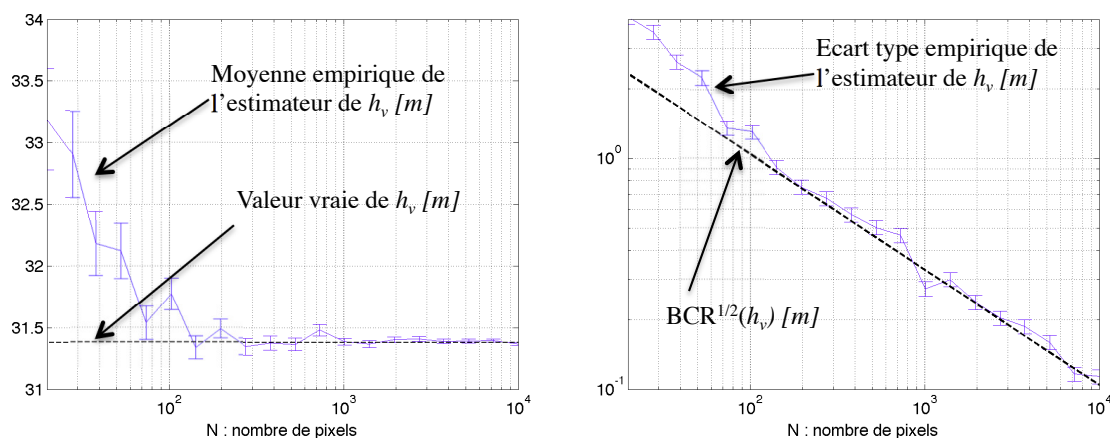


Figure 3.8 – Résultat d'une simulation Monte Carlo illustrant les performances de l'estimateur proposé dans [64] sur un exemple dont les caractéristiques sont décrites dans le tableau 3.1. Dans la simulation Monte Carlo, le nombre de réalisations des échantillons  $\chi$  est égal à 100.

présentée Fig. 3.8. Pour une taille d'échantillon de 200, le biais est faible, l'écart type est plus petit que le mètre, et surtout est du même ordre de grandeur que la racine carrée de la BCR. Une telle étude reproduite sur de nombreux exemples nous a convaincus que la recherche d'un nouvel estimateur n'était pas la priorité.

$h_v, z_g$ [m]	$\sigma_v$ [ $m^{-1}$ ]	$T_{gro}$	$1000 T_{vol}$ [ $m^{-1}$ ]
31.4, 1	0.046	$\begin{pmatrix} 68 & -0.65 + i & -6 - 14i \\ -0.65 - i & 23 & -3.6 - 0.26i \\ -6 + 14i & -3.6 + 0.26i & 61 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & -7 & 30 - 5i \\ -7 & 76 & -8 + 1i \\ 30 + 5i & -8 - i & 120 \end{pmatrix}$

Table 3.1 – Paramètres du volume et du sol pour l'exemple considéré Fig. 3.8. Les matrices de polarisation du sol et du volume sont données dans la base lexicographique (définie par  $S_{HH}, \sqrt{2}S_{HV}, S_{VV}$ ). Les paramètres du RADAR sont  $k_z = 0.09$  [ $m^{-1}$ ] et  $\beta = \pi/4$ .

En complément à ces études par simulation Monte Carlo, nous avons aussi analysé en détail deux jeux de données réelles acquis en bande P par l'ONERA de Salon de Provence. Comme montré Fig. 3.1, ces deux jeux de données correspondent à des végétations très différentes. La forêt de Nezer est tempérée et bien entretenue avec des parcelles régulières délimitées par des chemins. La forêt de Paracou est tropicale et donc très chahutée, en plus la topographie y varie beaucoup, ce qui rend difficile la sélection de grandes zones homogènes. En étudiant les données de Nezer, dans [88] on a pu observer que les valeurs de BCR de hauteur de végétation et de hauteur de sol étaient du même ordre de grandeur que les variances empiriques de l'estimateur. Cette analyse, qui a nécessité d'avoir de grandes zones homogènes pour pouvoir estimer la variance des estimateurs a ainsi permis de vérifier l'intérêt du modèle RVoG et du calcul de la BCR pour l'analyse de la précision des estimations sur données réelles. De plus, un autre résultat qui a permis de vérifier que le modèle RVoG est adéquat à l'analyse des données réelles est l'analyse de robustesse de l'estimateur effectuée dans [2]. Lors de cette étude, nous avons considéré plusieurs écarts au modèle et nous avons vérifié que l'estimateur proposé dans [12] était robuste à ces écarts.

Etant donnés ces résultats, la question qui nous motivait n'était donc ni de trouver un nouvel estimateur, ni de proposer un nouveau modèle pour décrire nos données. En revanche, ce qui nous a interrogés est que nous observions une grande variation des valeurs de BCR de  $h_v$  notée  $BCR(h_v)$  en fonction des situations physiques considérées. Cette variation est illustrée Fig. 3.9 où l'on a présenté deux exemples représentatifs de ceux observés dans [2]. Pour l'exemple 1, la précision sur l'estimation de la hauteur de végétation obtenue pour une taille d'échantillon de 100 pixels varie peu en fonction de  $h_v$ , on reste avec une précision meilleure que le mètre pour  $h_v$  et  $z_g$ . Par contre, pour l'exemple 2, la précision sur l'estimation de la hauteur de végétation change d'un facteur 10 quand la hauteur de végétation  $h_v$  passe de 23 mètres à 26 mètres. Le principal problème soulevé lors de ces travaux était donc de comprendre pourquoi pour certains jeux de paramètres, une centaine de mesures permet d'avoir une estimation de la hauteur de végétation de l'ordre du mètre et pourquoi pour d'autres jeux de paramètres, il faut plus de  $10^4$  mesures indépendantes pour avoir une précision sur l'estimation de la hauteur de végétation de l'ordre du mètre. Etant donné l'objectif d'envoyer un satellite pour effectuer ces estimations et les résolutions associées à ces missions [49], l'enjeu est très important.

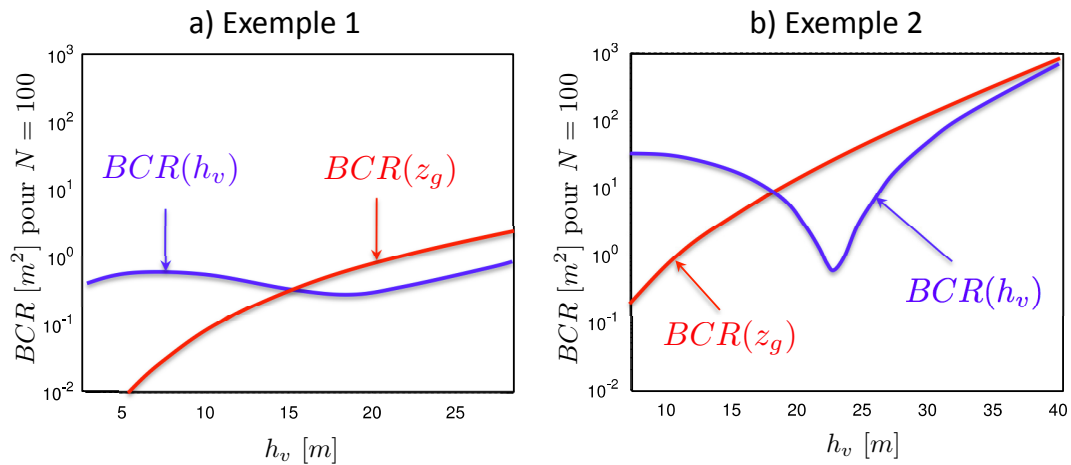


Figure 3.9 – Deux exemples analysés dans [2] montrant la variété des situations possibles pour les valeurs de BCR en fonction des jeux de paramètres. Que ce soit pour l'exemple 1 en (a) ou l'exemple 2 en (b), chacune des courbes montre l'évolution de la BCR des hauteurs de végétation et de sol lorsque la valeur du paramètre  $h_v$  du modèle RVoG change alors que les autres paramètres du modèle restent constants.

D'un point de vue méthodologique, la principale difficulté pour appréhender cette diversité de situations est que le modèle RVoG fait intervenir 20 paramètres réels inconnus et que sonder un espace à 20 dimensions avec simplement 10 valeurs par dimension nécessite  $10^{20}$  simulations, ce qui n'est pas réalisable. Ainsi, même si la BCR nous permet d'analyser la précision dans toutes les situations physiques envisageables, à ce stade, il est difficile d'essayer de prédire la précision que l'on pourra obtenir car d'une part, on ne connaît pas a priori les valeurs des paramètres inconnus, et d'autre part parmi ces 20 paramètres inconnus, on ne sait pas lesquels sont importants pour avoir une bonne précision sur l'estimation de la hauteur de végétation.

### 3.2.2 Réduction de la complexité de la description du problème d'estimation des hauteurs

L'analyse des paramètres de contraste invariants fait partie des sujets qui intéressent l'équipe PhyTI depuis longtemps (voir notamment [73] dans le contexte de la polarimétrie). Le principe

consiste à réduire la complexité de la description du problème en cherchant un ensemble réduit de paramètres qui caractérisent les performances du système. Pour le problème d'estimation de la hauteur de végétation avec le système PolInSAR et le modèle RVoG, dès 2003 Cloude et Pathanassiou avaient souligné dans [12] que les valeurs propres de  $\mathbf{T}_{vol}^{-1}\mathbf{T}_{gro}$  jouaient un rôle important dans le problème d'estimation (où  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  caractérisent respectivement les propriétés du volume et du sol voir Eq. (3.16)). Dans [80] on a démontré en utilisant les invariances de groupe du problème que la borne de Cramer Rao des hauteurs de végétation et de sol ne dépendent que de 4 paramètres parmi les 20 paramètres inconnus : la hauteur de végétation  $h_v$  et les trois valeurs propres (réelles)  $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$  de  $\mathbf{T}_{vol}^{-1}\mathbf{T}_{gro}$  où  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Ainsi au lieu d'avoir à sonder un espace de dimension 20, il suffit de sonder un espace de dimension 4 pour décrire l'ensemble des valeurs possibles de BCR de  $h_v$  et de  $z_g$ .

De plus, en définissant comme nouveaux paramètres

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}, \\ \mathcal{E} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}, \quad (3.31)$$

<sup>a</sup> on a observé lors des simulations dans [80] que seul le triplet  $\{h_v, \mathcal{A}, \mathcal{E}\}$  a une importance et qu'en comparaison la valeur propre  $\lambda_2$  a très peu d'influence sur les BCR de hauteur de végétation et de sol. Pour interpréter l'évolution de la BCR de la hauteur de végétation en fonction de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$ , dans [80] on a fait des simulations dans lesquelles on a fait varier les 3 paramètres  $\{h_v, \mathcal{A}, \mathcal{E}\}$ . Le graphique présenté Fig. 3.10 synthétise le résultat de cette analyse.

La première remarque sur les courbes représentées Fig. 3.10 est que la  $BCR(h_v)$  en fonction de  $h_v$  présente souvent un minimum local (c'est aussi le cas Fig. 3.9). Dans [80], on a observé que si on augmente la valeur de  $\mathcal{E}$ , alors la valeur de  $h_v$  où se trouve le minimum local augmente. Cette évolution est symbolisée Fig. 3.10 par le passage de la courbe rouge à la courbe bleue. De plus, dans [80], on a aussi observé que si on diminue la valeur de  $\mathcal{A}$ , alors la valeur de  $BCR(h_v)$  augmente très rapidement sauf au niveau du minimum local où la valeur de  $BCR(h_v)$  ne change pas. Cette évolution est symbolisée Fig. 3.10 par le passage de la courbe verte à la courbe rouge.

Dans [4], on a montré que la valeur de hauteur de végétation où se situe le minimum local correspond approximativement à une situation physique pour laquelle le rapport d'énergie entre sol et volume est proche de 1. Cette condition s'interprète facilement : pour réussir à estimer la hauteur de végétation et la hauteur du sol, il faut que le système soit capable de voir à la fois le sol et la végétation. En effet, si le RADAR ne voit que le sol, il sera possible de bien estimer  $z_g$ , mais il ne sera pas possible d'estimer  $h_v$ . Si au contraire, le RADAR ne voit pas du tout le sol, alors il ne sera possible d'estimer ni  $z_g$  ni  $h_v$ . L'existence du minimum peut donc s'interpréter comme le résultat du compromis entre la nécessité d'éclairer le sol et la nécessité d'éclairer le volume.

Pour interpréter le sens physique de  $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{A}$  il est intéressant de souligner que si dans le modèle RVoG décrit Eq. (3.16), on remplace  $\mathbf{T}_{vol}$  par  $\alpha_{vol}\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  par  $\alpha_{gro}\mathbf{T}_{gro}$  alors le paramètre  $\mathcal{E}$  est modifié en  $\frac{\alpha_{gro}}{\alpha_{vol}}\mathcal{E}$ , mais le paramètre  $\mathcal{A}$  ne change pas. Ceci montre que le paramètre  $\mathcal{E}$  est lié au rapport des intensités entre la contribution du sol et celle du volume. Pour le paramètre  $\mathcal{A}$ , cela montre qu'il ne dépend pas des intensités, mais uniquement des propriétés

---

a. soulignons que le paramètre  $\mathcal{A}$  est différent de l'anisotropie définie par Hajnsek, Pottier et Cloude dans [36] où leur paramètre d'anisotropie est définie par :

$$A = \frac{\lambda_2^{(T)} - \lambda_3^{(T)}}{\lambda_2^{(T)} + \lambda_3^{(T)}},$$

où  $\lambda_1^{(T)} < \lambda_2^{(T)} < \lambda_3^{(T)}$  sont les 3 valeurs propres d'une matrice de polarisation  $\mathbf{T}$  d'une image PolSAR.

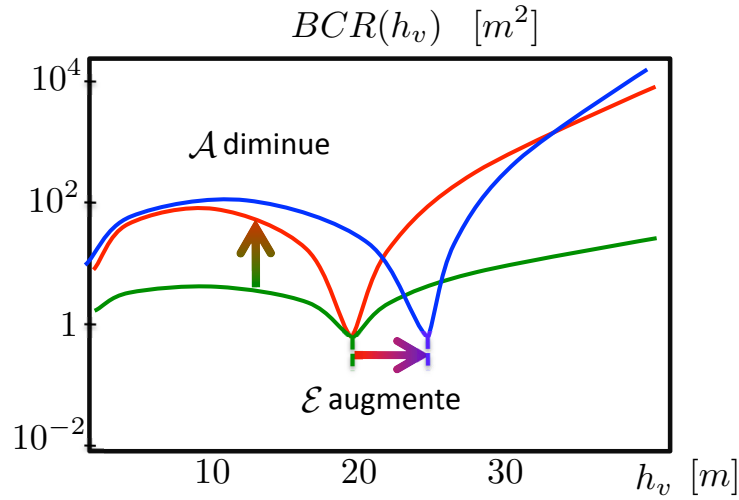


Figure 3.10 – Synthèse des résultats obtenus dans [80] sur l'influence des paramètres  $h_v$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  sur la BCR de la hauteur de végétation  $h_v$ .

de polarisation de  $\mathbf{T}_{vol}$  et de celle de  $\mathbf{T}_{gro}$ . De plus si on intervertit les rôles de  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$ , la valeur du paramètre  $\mathcal{A}$  reste inchangé<sup>b</sup>.

Analysons le cas particulier où  $\mathcal{A} = 0$ . Il est facile de montrer que cela implique que  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  sont proportionnels. On peut ainsi interpréter le paramètre  $\mathcal{A}$  comme un contraste entre les propriétés de polarisation de  $\mathbf{T}_{vol}$  et celle de  $\mathbf{T}_{gro}$ . De plus, soulignons que si  $\mathcal{A} = 0$ , alors l'équivalent de la matrice de cohérence normalisée définie en optique Eq. (2.29) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{T}_{11}^{-1/2} \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{22}^{-1/2} = \mu \mathbf{Id}, \quad (3.32)$$

où  $\mu$  est un nombre complexe de module plus petit que 1.<sup>c</sup> Cette relation implique que pour tous les vecteurs  $\mathbf{w}$ , la cohérence  $\gamma(\mathbf{w})$  définie Eq. (3.18) est constante. La région de cohérence illustrée dans le cas général Fig. 3.5 se réduit alors à un point dans le plan complexe. Ainsi, lorsque  $\mathcal{A} = 0$ , il n'est pas possible de dissocier la contribution du sol de celle du volume, ce qui correspond à une situation où l'estimation de la hauteur de végétation est impossible.

A présent que l'on a rappelé que les estimateurs étaient efficaces et surtout que l'on a décrit les paramètres pertinents qui déterminent la valeur des BCR des hauteurs de sol et de végétation, dans la section suivante nous présentons une analyse générale de la précision que l'on peut espérer atteindre en fonction des paramètres invariants.

### 3.2.3 Analyse des précisions sur l'estimation la hauteur de végétation pour $N = 100$

Dans ce paragraphe, on cherche empiriquement les valeurs des paramètres invariants pour lesquels on peut espérer avoir une bonne précision d'estimation de la hauteur de végétation. Pour tenter de répondre à cette question, on construit des représentations qui décrivent l'évolution de

b. En effet, si  $\mathbf{T}_{vol}^{-1} \mathbf{T}_{gro} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$ , alors  $\mathbf{T}_{gro}^{-1} \mathbf{T}_{vol} \mathbf{X} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{X}$ . Par conséquent, si on intervertit les rôles de  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$ , les valeurs propres deviennent  $\frac{1}{\lambda_3}$ ,  $\frac{1}{\lambda_2}$  et  $\frac{1}{\lambda_1}$ . Donc le paramètre  $\mathcal{A}$  reste inchangé.

c. Un calcul direct montre que  $\mu = e^{k_z z_g} \frac{I_2/I_1 + a\lambda_i/I_1}{1 + a\lambda_i/I_1}$ .

la BCR de la hauteur de végétation en fonction de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  où

$$\mathcal{R} = \frac{a}{I_1} \mathcal{E}, \quad (3.33)$$

avec  $a$  et  $I_1$  définis Eq. (3.17). Par rapport à  $\mathcal{E}$ , le paramètre  $\mathcal{R}$  a le défaut de ne pas dépendre que de  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$ . En revanche, l'intérêt d'analyser  $\mathcal{R}$  plutôt que  $\mathcal{E}$  est qu'il est interprétable comme un rapport d'intensité entre la contribution du sol  $a\mathbf{T}_{gro}$  et la contribution du volume  $I_1\mathbf{T}_{vol}$  (voir Eq. (3.16)) car  $\mathcal{R}$  est la somme des valeurs propres de la matrice  $(I_1\mathbf{T}_{vol})^{-1} a\mathbf{T}_{gro}$ .

Fig. 3.11(a) montre que  $BCR^{1/2}(h_v)$  est de l'ordre du mètre pour une taille d'échantillon  $N = 100$  quand le paramètre  $\mathcal{R}$  est de l'ordre de 2 et que le paramètre  $\mathcal{A}$  est grand. Pour analyser la sensibilité de ces cartes aux paramètres que sont : la hauteur de végétation  $h_v$ , le vecteur d'onde  $k_z$  et l'angle d'incidence  $\beta$ , on fait varier ces paramètres et on trace les nouvelles cartes Fig. 3.11(b), (c) et (d). Pour les variations considérés, les valeurs de  $BCR^{1/2}(h_v)$  changent peu, et de plus il semble que le voisinage où  $BCR^{1/2}(h_v)$  est minimum reste caractérisé par  $\mathcal{R} \simeq 2$  et  $\mathcal{A}$  grand. Soulignons que si cette analyse permet d'analyser simplement le problème

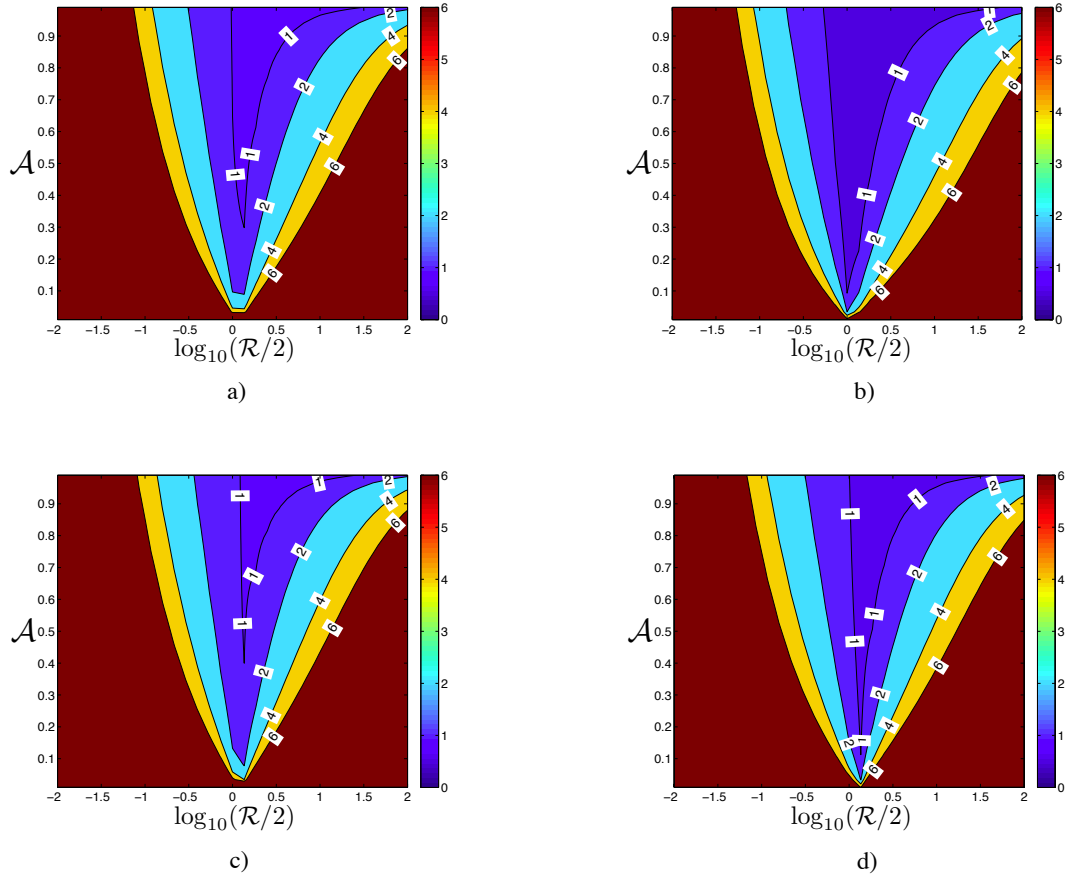


Figure 3.11 – (a) Cartes de  $BCR^{1/2}(h_v)$  [m] pour une taille d'échantillon  $N = 100$ . Pour obtenir cette image, on a fait varier les paramètres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  et on a fixé les autres paramètres :  $h_v = 30$  [m],  $\sigma_v = 0.0461$  [ $m^{-1}$ ], angle d'incidence  $\beta = 35^\circ$  et  $k_z = 0.9$  [ $m^{-1}$ ]. Toutes les valeurs de  $BCR^{1/2}(h_v)$  plus grande que 6 sont représentées en marron. (b) Même chose que (a), mais avec  $h_v = 20$  [m]. (c) Même chose que (a), mais avec  $k_z = 0.06$  [ $m^{-1}$ ]. (d) Même chose que (a), mais avec  $\beta = 55^\circ$ .



d'estimation en fonction des paramètres  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{A}$ . Le problème d'optimisation du système reste délicat car d'une part, on ne connaît pas a priori la valeur de ces deux paramètres, et d'autre part, pour une optimisation du système, il faut tenir compte de nombreux autres phénomènes et notamment le bruit capteur et le "frequency shift" [27].

Peut-on espérer avoir le même type de caractérisation pour les estimateurs  $\hat{h}_v$ ? Si on fonde notre estimation de la droite qui permet de remonter à  $z_g$  et  $h_v$  (voir Fig. 3.5) sur les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T}_{11}^{-1}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}$  comme cela est proposé dans [17], alors un calcul simple permet de montrer que la variance de l'estimateur de  $h_v$  et  $z_g$  a les mêmes invariants que les BCR de  $h_v$  et  $z_g$ .<sup>d</sup> Il est alors intéressant de tracer côte à côte la BCR et l'erreur quadratique moyenne (EQM) définie par :

$$\text{eqm}(\hat{h}_v) = \langle (\hat{h}_v - h_v)^2 \rangle, \quad (3.34)$$

et estimée par simulation Monte Carlo. L'EQM estimée noté  $\widehat{\text{eqm}}(\hat{h}_v)$  permet alors d'analyser l'efficacité de l'estimateur. Une illustration de cette analyse est présentée Fig. 3.12. Lorsque la BCR est plus petite que 1, l'erreur quadratique moyenne estimée aussi. Plus généralement, cette

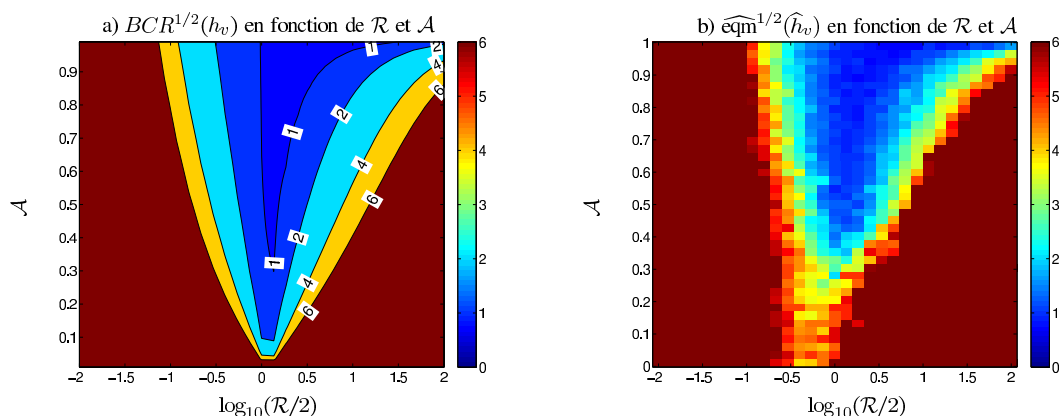


Figure 3.12 – (a) Même figure que Fig. 3.11(a). (b) Image de la racine carrée des erreurs quadratiques moyennes de l'estimateur  $\hat{h}_v$  pour une taille d'échantillon égale à 100 et estimée avec une simulation Monte Carlo qui a nécessité  $P = 100$  réalisations pour chaque couple  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  considéré. Toutes les valeurs de  $BCR^{1/2}(h_v)$  et de  $\text{eqm}^{1/2}(\hat{h}_v)$  plus grandes que 6 m sont représentées en marron.

étude de l'EQM permet ainsi de vérifier si la précision annoncée par la BCR peut être atteinte pour la taille d'échantillon considérée.

Comme on a vu que la BCR de  $h_v$  est plus faible quand le paramètre  $\mathcal{R}$  est de l'ordre de 2, mais que ce paramètre dépend à la fois du paramètre  $\mathcal{E}$  (qui est la somme des valeurs propres de  $\mathbf{T}_{vol}^{-1}\mathbf{T}_{gro}$ ) et de la hauteur de végétation  $h_v$ , il est intéressant d'analyser s'il existe une condition simple sur  $h_v$  et  $\mathcal{E}$  pour laquelle  $\mathcal{R} = 2$ . On trace Fig. 3.13 l'évolution de  $\mathcal{R}$  en fonction de  $\mathcal{E}$  et  $h_v$ . L'image montre que si on souhaite avoir le paramètre  $\mathcal{R}$  de l'ordre de 2, cela dépend à la fois de  $h_v$  et de  $\mathcal{E}$ . Si on cherche la hauteur de végétation  $h_v$  notée  $h_{opt}$  pour laquelle :

$$\mathcal{R} = 2. \quad (3.35)$$

d. Pour que l'invariance soit vérifiée, lors de l'estimation des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T}_{11}^{-1}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}$ , il faut remplacer  $\mathbf{T}_{11}$  et  $\mathbf{T}_{22}$  par  $\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{T}}_{11} + \hat{\mathbf{T}}_{22})$ , et  $\mathbf{T}_{12}$  par  $\hat{\mathbf{T}}_{12}$ .



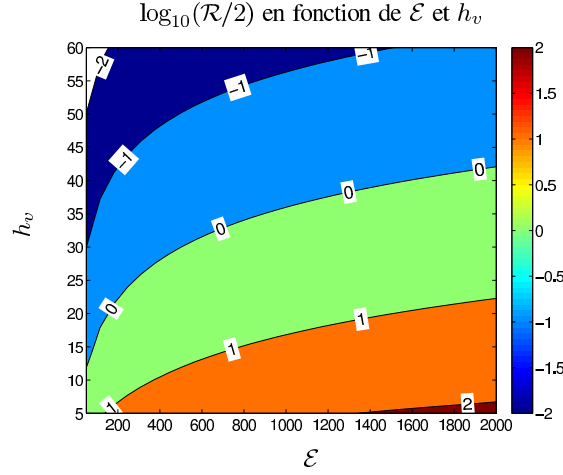


Figure 3.13 – Représentation de  $\log_{10}(\mathcal{R}/2)$  en fonction de la hauteur de végétation  $h_v$  et de  $\mathcal{E}$  (la somme des valeurs propres de  $\mathbf{T}_{vol}^{-1}\mathbf{T}_{gro}$ ). Les paramètres suivants sont fixés : atténuation  $\sigma_v = 0.0461 [m^{-1}]$ , angle d'incidence  $\beta = 35^\circ$  et  $k_z = 0.9 [m^{-1}]$ .

D'après Eq. (3.33),  $\mathcal{R} = 2$  implique que :

$$\mathcal{E} = 2 \frac{I_1}{a}. \quad (3.36)$$

Or comme d'après, Eq. (3.16),  $a = e^{-\alpha h_v}$ . Ainsi la valeur  $h_{opt}$  pour laquelle  $\mathcal{R} = 2$  vérifie :

$$\mathcal{E} = 2I_1 e^{\alpha h_{opt}}, \quad (3.37)$$

et par conséquent

$$\alpha h_{opt} = \log(\mathcal{E}/2I_1). \quad (3.38)$$

De plus, lorsque  $h_v$  est grand, on a  $I_1 \simeq 1/\alpha$ , ce qui mène à une expression relativement simple :

$$h_{opt} \simeq \frac{1}{\alpha} \log(\alpha \mathcal{E}/2). \quad (3.39)$$

La détermination de ces différents paramètres ne résout pas le problème d'estimation, mais cela permet d'interpréter l'évolution des précisions en fonction des situations physiques considérées. Pour prolonger ce travail, une piste est d'analyser comment évoluent ces différentes grandeurs en fonction du type de végétation analysée. Cette analyse pourra s'effectuer de deux manières. Une première possibilité est de partir d'un modèle particulier, comme par exemple des modèles de Freeman [19] et d'analyser comment les propriétés des diffuseurs influencent les paramètres  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $h_{opt}$ . Une autre solution est d'estimer sur les données réelles les paramètres  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$ . La difficulté de cette deuxième piste est qu'il sera difficile de s'assurer que la précision d'estimation des matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  soit suffisante pour que l'interprétation que l'on en tire soit satisfaisante.

## 3.3 Analyse des gains possibles sur les performances d'estimation

### 3.3.1 Introduction

Où sont les gains possibles pour l'amélioration des performances sur l'estimation de la hauteur de végétation ? Au vu des résultats obtenus, notamment dans [87], on a le sentiment qu'améliorer les estimateurs ne nous permettrait pas de gagner de manière importante en performance car ceux-ci semblent proches d'être efficaces. De plus, on a vu dans les images présentés Fig. 3.11 que la précision dépend fortement des valeurs de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$ , et donc dépend de la situation physique considérée.

Dans cette partie, on présente nos résultats sur l'analyse de l'impact de l'ajout de connaissances a priori sur la précision d'estimation. Cette analyse a été initiée dès [87], puis dans [3], donc avant la détermination des paramètres invariants dans [80]. Néanmoins, il est intéressant de revisiter ces résultats en s'appuyant sur les paramètres invariants  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  pour en tirer une conclusion plus générale que l'étude des cas particuliers traités dans [87, 3].

### 3.3.2 Influence de la connaissance des symétries du sol et du volume

Comme on l'a mentionné à la section 3.1.4 plusieurs travaux portent sur l'amélioration des modèles qui caractérisent les mécanismes de rétro-diffusion. Si on a la connaissance a priori que la surface a une symétrie de réflexion et que le volume a une symétrie azimutale, alors on peut contraindre les matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  et ainsi diminuer le nombre de paramètres inconnus du modèle RVoG de 20 à 9. Ainsi, plusieurs estimateurs fondés sur le maximum de vraisemblance ont été proposés dans [108] en fonction des hypothèses de symétrie du sol et de la végétation.

Pour calculer la précision décrite par la BCR de  $h_v$  lorsque l'on a la connaissance a priori que les matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  sont contraintes, il suffit de reprendre les calculs en modifiant simplement le vecteur des paramètres inconnus qui est dans le cas contraint de dimension 9. Ainsi la nouvelle

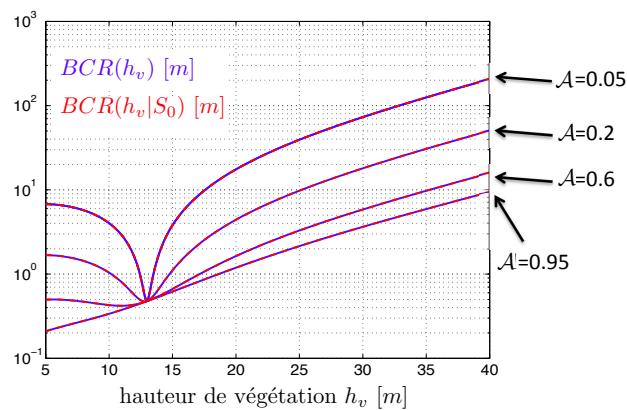


Figure 3.14 – Comparaison entre la BCR de  $h_v$  avec la connaissance a priori des formes contraintes de  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  (9 paramètres inconnus) notée  $BCR(h_v|S_0)$  représentée en rouge et celle sans cette connaissance a priori (20 paramètres inconnus) notée  $BCR(h_v)$  et représentée en bleu. Ces courbes ont été obtenues en faisant varier les paramètres  $\mathcal{A}$  et  $h_v$ . Les autres paramètres sont  $\mathcal{E} = 50$  [m],  $\beta = \pi/4$ ,  $k_z = 0.1$  [ $m^{-1}$ ],  $\sigma_v = 0.0345$  [ $m^{-1}$ ]. La taille d'échantillon est supposée égale à 100.

matrice de Fisher est de taille  $9 \times 9$  et la BCR de  $h_v$  que l'on note dans ce cas  $BCR(h_v|S_0)$  est forcément plus petite que  $BCR(h_v)$  qui n'a pas la connaissance que les matrices  $T_{vol}$  et  $T_{gro}$  sont contraintes. Dans [87, 3], nous avons comparé les  $BCR(h_v)$  (20 paramètres inconnus) et  $BCR(h_v|S_0)$  (9 paramètres inconnus). Pour illustrer le résultat que nous avons obtenu, on a tracé plusieurs exemples Fig. 3.14, pour différentes valeurs des paramètres invariants  $h_v$  et  $\mathcal{A}$ . Les courbes  $h_v \mapsto BCR(h_v)$  et  $h_v \mapsto BCR(h_v|S_0)$  sont quasiment identiques, ce qui montre que la connaissance des propriétés de symétrie n'apporte pas de gain significatif sur la précision d'estimation de la hauteur de végétation.

L'interprétation de ce résultat est délicate. On a néanmoins observé que lorsque la connaissance porte sur des paramètres non-nuls de  $T_{vol}$  et  $T_{gro}$ , alors l'influence n'est plus négligeable.

### 3.3.3 Influence de la connaissance de la hauteur topographique

Dans ce paragraphe, on analyse l'influence de la connaissance a priori de la hauteur du sol  $z_g$  sur la précision de l'estimation de la hauteur de végétation. Même si on ne dispose pas d'un modèle numérique de terrain, analyser l'impact de cette connaissance est intéressant ne serait-ce que pour améliorer notre compréhension du problème d'estimation.

Considérons l'exemple représenté Fig. 3.15, qui correspond à une représentation en couleur du résultat obtenu dans [4]. La courbe verte, qui représente la BCR de  $h_v$  sans connaissance

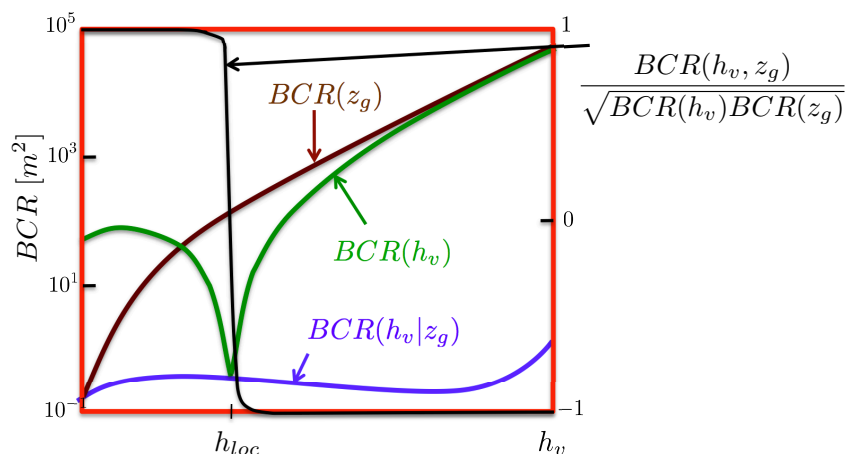


Figure 3.15 – Influence de la connaissance a priori de la hauteur de sol  $z_g$  sur la précision d'estimation de la hauteur de végétation  $h_v$ . Les courbes  $BCR(h_v)$  et  $BCR(h_v|z_g)$  sont respectivement les BCR de  $h_v$  sans et avec la connaissance a priori du paramètre  $z_g$ . La courbe marron  $BCR(z_g)$  est la BCR de  $z_g$ . La courbe en noir est une covariance normalisée entre -1 et 1 (voir axe à droite). Ces courbes ont été obtenues en fixant tous les paramètres sauf  $h_v$ . La taille d'échantillon est supposée égale à 100.

a priori, présente un minimum local marqué pour une hauteur de végétation notée  $h_{loc}$ . Cette hauteur est liée à  $h_{opt}$  précédemment définie, mais on en donne ici une nouvelle interprétation. On observe qu'en ce minimum local, la courbe verte rejoint la courbe bleue, qui correspond à la précision sur l'estimation de  $h_v$  quand la hauteur du sol  $z_g$  est connue a priori. Dans [4], nous avons interprété ce résultat en montrant que ce minimum très marqué est dû à la très forte corrélation entre l'estimation de  $h_v$  et l'estimation de  $z_g$  quand la valeur du paramètre  $h_v$  est

différente de  $h_{loc}$ . Cette corrélation est décrite par la covariance normalisée calculée avec :

$$\eta = \frac{BCR(h_v, z_g)}{\sqrt{BCR(h_v)BCR(z_g)}}, \quad (3.40)$$

où  $BCR(h_v, z_g)$  est le terme anti-diagonal de la matrice  $\mathbf{I}_F^{-1}$ , alors que  $BCR(h_v)$  et  $BCR(z_g)$  se trouvent sur la diagonale de cette matrice.

Lorsque le terme de corrélation normalisée  $\eta$  est positif, une sur-estimation de  $z_g$  entraîne une sur-estimation de  $h_v$ , alors que quand il est négatif une sur-estimation de  $z_g$  entraîne une sous-estimation de  $h_v$ . En revanche, quand il est égal à 0, une mauvaise estimation de  $z_g$  n'entraîne pas d'erreur sur l'estimation de  $h_v$ . Sur l'exemple traité Fig. 3.15, on observe que la méconnaissance de  $z_g$  a un impact fort sur la précision d'estimation de  $h_v$  décrite par  $BCR(h_v)$  dès que le module de la corrélation est proche de 1. Empiriquement, ceci correspond aux situations où  $h_v$  est plus petit ou plus grand que  $h_{loc}$ .

Une autre caractéristique de la figure Fig. 3.15, est qu'après le minimum local, la courbe verte de  $BCR(h_v)$  augmente rapidement pour rejoindre la courbe marron de  $BCR(z_g)$ .<sup>e</sup> Ce résultat s'interprète facilement. Lorsque les arbres sont de plus en plus grands, la contribution de l'onde rétro-diffusée qui atteint le sol est de plus en plus petite, par conséquent, si on ne connaît pas la hauteur de sol  $z_g$ , il est de plus en plus difficile d'estimer  $h_v$ . En revanche, quand la hauteur du sol  $z_g$  est connue, la précision sur la hauteur de végétation décrite par  $BCR(h_v|z_g)$  change peu lorsque la hauteur de végétation augmente.

### 3.3.4 Influence de la connaissance des matrices $\mathbf{T}_{vol}$ et $\mathbf{T}_{gro}$

Dans ce paragraphe, on continue l'analyse de l'impact des connaissances a priori en s'intéressant cette fois aux matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$ . Les courbes présentées Fig. 3.16 montrent qu'en comparaison avec la connaissance de la hauteur de sol, la connaissance de la matrice  $\mathbf{T}_{vol}$  est très intéressante lorsque la hauteur de végétation est petite, par contre au delà du minimum local, l'influence de la connaissance des matrice  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  est moins importante que la connaissance de la hauteur de sol  $z_g$ .

Quel est le bilan de l'impact des différentes connaissances a priori ? On peut noter que pour les grands arbres (c'est-à-dire quand  $h_v$  plus grand que  $h_{loc}$ ) la difficulté pour estimer  $h_v$  vient essentiellement de la difficulté à estimer  $z_g$ . Soulignons que dans [3], on a vérifié qu'un estimateur de la hauteur de végétation à  $z_g$  connu était simple à mettre en œuvre et efficace. De plus,

e. En effet quand la hauteur de végétation est très grande, le contribution du sol est faible et le modèle devient approximativement

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \mathbf{T}_{22} = \mathbf{T}_{vol}/\alpha \\ \mathbf{T}_{12} &= e^{ik_z(h_v+z_g)}\mathbf{T}_{vol}/(ik_z + \alpha) \end{aligned} ,$$

ainsi la connaissance de  $\alpha$  (angle d'incidence du RADAR et atténuation du volume) et de  $k_z$  (vecteur d'onde du RADAR) permet d'estimer précisément la hauteur de canopée  $h_c$  définie par

$$h_c = z_g + h_v.$$

Or si  $\text{var}(\hat{h}_c)$  est proche de 0, alors on a

$$\text{var}(\hat{h}_v) \simeq \text{var}(\hat{z}_g) \text{ et } \frac{\text{cov}(\hat{h}_v, \hat{z}_g)}{\sqrt{\text{var}(\hat{h}_v)\text{var}(\hat{z}_g)}} \simeq -1.$$

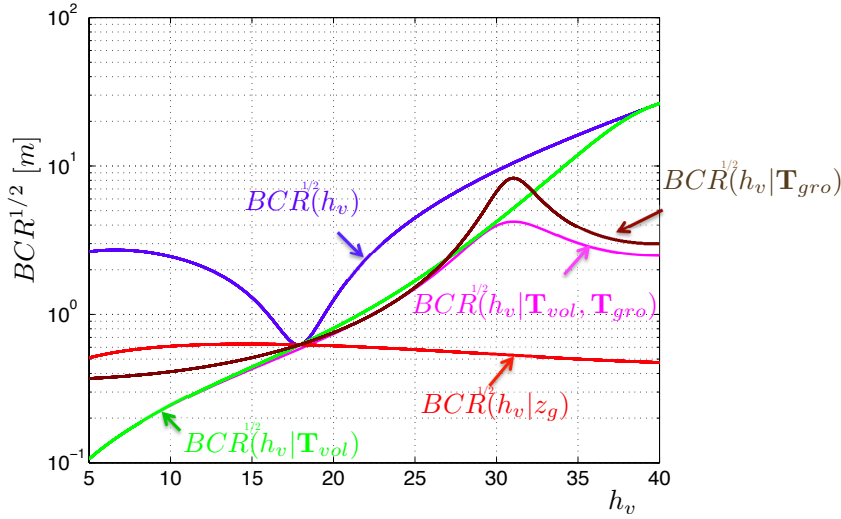


Figure 3.16 – Comparaison des influences des connaissances de  $z_g$ ,  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  sur la précision d’estimation de la hauteur de végétation  $h_v$ . En magenta,  $BCR(h_v|\mathbf{T}_{vol}, \mathbf{T}_{gro})$  représente la BCR de  $h_v$  lorsque les deux matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  sont connues. La taille d’échantillon est supposée égale à 100. La valeur de  $h_v$  varie, et les autres paramètres sont fixés avec  $\mathcal{A} = 0.2$ ,  $\mathcal{E} = 100$  [m],  $\beta = \pi/4$ ,  $k_z = 0.1$  [ $m^{-1}$ ] et  $\sigma_v = 0.0345$  [ $m^{-1}$ ].

rappelons que les modèles qui relient la quantité de biomasse à l’intensité rétro-diffusée en  $HV$  ne semblent plus vérifiés pour les grands arbres [49]. En conséquence, le résultat de l’étude de l’influence de  $z_g$  semble montrer qu’un effort accru sur l’estimation de  $z_g$  est une perspective intéressante pour améliorer l’estimation de  $h_v$ , et donc aussi la quantité de biomasse. L’estimation du modèle numérique de terrain par des techniques complémentaires au PolInSAR ou bien le développement d’une approche multi-échelle pour estimer le paramètre  $z_g$  avec une précision accrue sont donc deux perspectives très intéressantes.

Pour ce qui est de la connaissance des matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  pour les petits arbres, une application directe de ce résultat paraît moins évidente. Néanmoins, l’analyse des estimations des matrices  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  et de leur précision est de toute façon une perspective intéressante pour une meilleure compréhension des mécanismes de rétro-diffusion dans les données PolInSAR.

### 3.4 Analyse d’un compromis entre complexité du système et performance des estimateurs avec le système PolInSAR compact

#### 3.4.1 Introduction

Précédemment, la détermination des paramètres invariants  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  a permis une analyse de la difficulté d’estimer les hauteurs de végétation et de sol avec le système PolInSAR complet. Dans cette dernière partie, on traite du cas particulier du système PolInSAR compact [105] analysé dans [4]. Alors que le système PolInSAR complet consiste à émettre une polarisation linéaire horizontale  $H$  puis une polarisation linéaire verticale  $V$ , le système compact consiste à n’envoyer qu’une seule polarisation [105]. Dans la perspective du projet BIOMASS, et plus généralement

de l'envoi de satellites, l'une des questions est d'étudier si la réduction de la complexité du système du mode complet au mode compact, qui permet une réduction du coût du système, implique du point de vue du traitement une perte de performance importante. Lorsque l'on émet une seule polarisation plutôt que deux, le vecteur mesuré en PolInSAR passe de la dimension 6 à la dimension 4, ce qui implique que le système sonde moins d'information sur la scène. Néanmoins, on peut aussi remarquer que si le RADAR n'émet qu'une seule polarisation, alors on peut multiplier par deux le nombre d'acquisitions suivant cette direction, ce qui implique un gain de deux sur la résolution de l'image en azimuth par rapport à la configuration complète.

Du point de vue du modèle, lorsqu'on passe du système PolInSAR complet au système PolInSAR compact, les paramètres du modèle RVoG de hauteurs de sol et de végétation, l'angle d'incidence du RADAR, l'écartement entre les antennes et l'atténuation de l'onde dans le volume demeurent identiques. Seules les matrices de polarisation du sol et du volume changent. Si on note  $\mathbf{T}_{vol}$  et  $\mathbf{T}_{gro}$  les matrices de volume et du sol qui permettent de décrire les données avec le système complet et si on note  $\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi)$  et  $\tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi)$  les matrices de volume et du sol qui permettent de décrire les données avec le système compact lorsque l'état de polarisation émis est paramétré par l'ellipticité  $\chi$  et l'orientation  $\psi$  (tous deux représentés Fig. 1.3), alors on peut montrer [4] que pour  $m \in \{vol, gro\}$

$$\tilde{\mathbf{T}}_m(\chi, \psi) = \mathbf{A}(\chi, \psi) \mathbf{T}_m (\mathbf{A}(\chi, \psi))^\dagger, \quad (3.41)$$

où

$$\mathbf{A}(\chi, \psi) = \begin{pmatrix} J_1(\chi, \psi) & J_2(\chi, \psi)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & J_1(\chi, \psi)/\sqrt{2} & J_2(\chi, \psi) \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

avec

$$\begin{aligned} J_1(\chi, \psi) &= \cos \psi \cos \chi - i \sin \psi \sin \chi \\ J_2(\chi, \psi) &= \sin \psi \cos \chi + i \cos \psi \sin \chi \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ainsi, les matrices  $\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi)$  et  $\tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi)$  sont de taille  $2 \times 2$  en configuration compacte et le nouveau vecteur de paramètre inconnu est :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\chi, \psi) = \{\tilde{t}_{vol,1}(\chi, \psi), \dots, \tilde{t}_{vol,4}(\chi, \psi), \tilde{t}_{gro,1}(\chi, \psi), \dots, \tilde{t}_{gro,4}(\chi, \psi), h_v, z_g\}. \quad (3.44)$$

L'objectif de notre analyse sur ce sujet est d'une part de quantifier la perte de précision sur l'estimation du paramètre  $h_v$  liée à la diminution du nombre de composantes du vecteur mesuré et d'autre part d'analyser l'influence du choix de la polarisation d'émission sur cette perte de précision. En particulier, existe-t-il un état de polarisation qui permette de minimiser la perte de résolution quelle que soit la situation physique considérée ? Dans la littérature [105], les polarisations d'émission les plus couramment utilisées sont : linéaire horizontale ( $H$ ), linéaire verticale ( $V$ ), linéaire à  $45^\circ$  ( $\pi/4$ ) et Circulaire  $C$ . Ci-dessous nous effectuerons une comparaison de ces quatre états de polarisation.

### 3.4.2 Analyse de la perte de précision

Dans [4], pour quantifier la perte de précision sur l'estimation de la hauteur de végétation  $h_v$  en fonction de la polarisation émise, nous avons analysé le rapport

$$\rho(\chi, \psi) = \frac{BCR_C(\chi, \psi)}{BCR_F}, \quad (3.45)$$

où  $BCR_C(\chi, \psi)$  est la BCR de la hauteur de végétation obtenue avec le système PolInSAR compact lorsqu'à l'émission l'état de polarisation est paramétré par le couple ellipticité, orientation  $(\chi, \psi)$  et  $BCR_F$  la BCR sur la hauteur de végétation obtenue avec le système complet (en anglais "Full"). Une illustration de cette analyse est présentée Fig. 3.17. Pour l'exemple 1 présenté

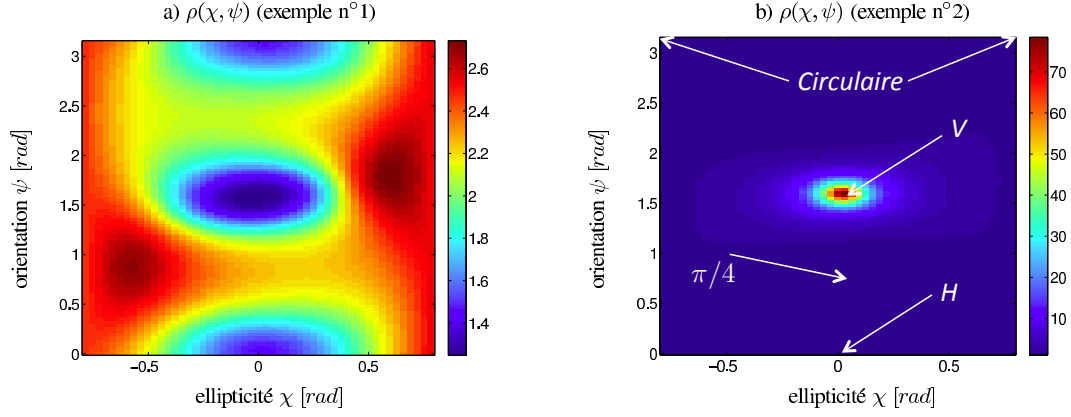


Figure 3.17 – Analyse de la perte de précision décrite par  $\rho(\chi, \psi)$  (défini Eq. (3.45)) induite par le passage du système PolInSAR complet au système PolInSAR compact pour l'estimation de la hauteur de végétation avec le modèle RVoG sur deux exemples dont les paramètres du modèle sont donnés dans le tableau 3.2. A droite on a indiqué par des flèches les polarisations d'émission les plus couramment utilisées : linéaire horizontale (H), linéaire verticale (V), linéaire à  $\pi/4$  et circulaire. Notons que pour l'exemple n°1,  $\mathcal{A} = 0.5$ ,  $\mathcal{E} = 1600$  et  $\mathcal{R} = 3.6$ , alors que pour l'exemple n°2,  $\mathcal{A} = 0.32$  et  $\mathcal{E} = 1500$  et  $\mathcal{R} = 2$ .

$Ex$	$h_v$ [m]	$T_{gro}$	$1000 T_{vol}$ [ $m^{-1}$ ]
n°1	31.4	$\begin{pmatrix} 68 & -0.65 + i & -6 - 14i \\ -0.65 - i & 23 & -3.6 - 0.26i \\ -6 + 14i & -3.6 + 0.26i & 61 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & -7 & 30 - 5i \\ -7 & 76 & -8 + 1i \\ 30 + 5i & -8 - i & 120 \end{pmatrix}$
n°2	35	$\begin{pmatrix} 91 & -1.6 + 1.6i & 2.9 - 12i \\ -1.6 - 1.6i & 51 & -5 - 0.7i \\ 2.9 + 12i & -5 + 0.7i & 71 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 150 & -8 + 2i & 40 - 6i \\ -8 - 2i & 120 & -13 + 0.5i \\ 40 + 6i & -13 - 0.5i & 180 \end{pmatrix}$

Table 3.2 – Paramètres du volume et du sol pour les exemples 1 et 2. Les matrices de polarisation du sol et du volume sont données dans la base lexicographique. Les autres paramètres sont  $\sigma_v = 0.046$  [ $m^{-1}$ ],  $z_g = 1$  [m],  $k_z = 0.09$  [ $m^{-1}$ ],  $\beta = \pi/4$  pour les deux exemples considérés.

Fig. 3.17(a), le choix de la polarisation émise a peu d'influence car l'augmentation de la BCR varie simplement de 1.3 à 2.7. Au contraire pour l'exemple 2 présenté Fig. 3.17(b), l'utilisation de la polarisation linéaire verticale  $V$  entraîne une augmentation de la BCR de la hauteur de végétation d'un facteur supérieur à 70.

Pour interpréter ce résultat, on peut, comme précédemment, s'appuyer sur les paramètres invariants de la BCR de la hauteur de végétation. Avec le système compact, seules les matrices de polarisation du sol et du volume  $\tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi)$  et  $\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi)$  varient avec  $\chi$  et  $\psi$ . De plus, elles sont de dimension 2, donc les deux seuls paramètres invariants qui dépendent de  $\chi, \psi$  sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(\chi, \psi) &= \frac{\sigma}{I_1} (\tilde{\lambda}_1(\chi, \psi) + \tilde{\lambda}_2(\chi, \psi)) \\ \tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) &= \frac{\tilde{\lambda}_1(\chi, \psi) - \tilde{\lambda}_2(\chi, \psi)}{\tilde{\lambda}_1(\chi, \psi) + \tilde{\lambda}_2(\chi, \psi)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

où  $\tilde{\lambda}_1(\chi, \psi)$  et  $\tilde{\lambda}_2(\chi, \psi)$  sont les deux valeurs propres de la matrice  $(\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi))^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi)$ .

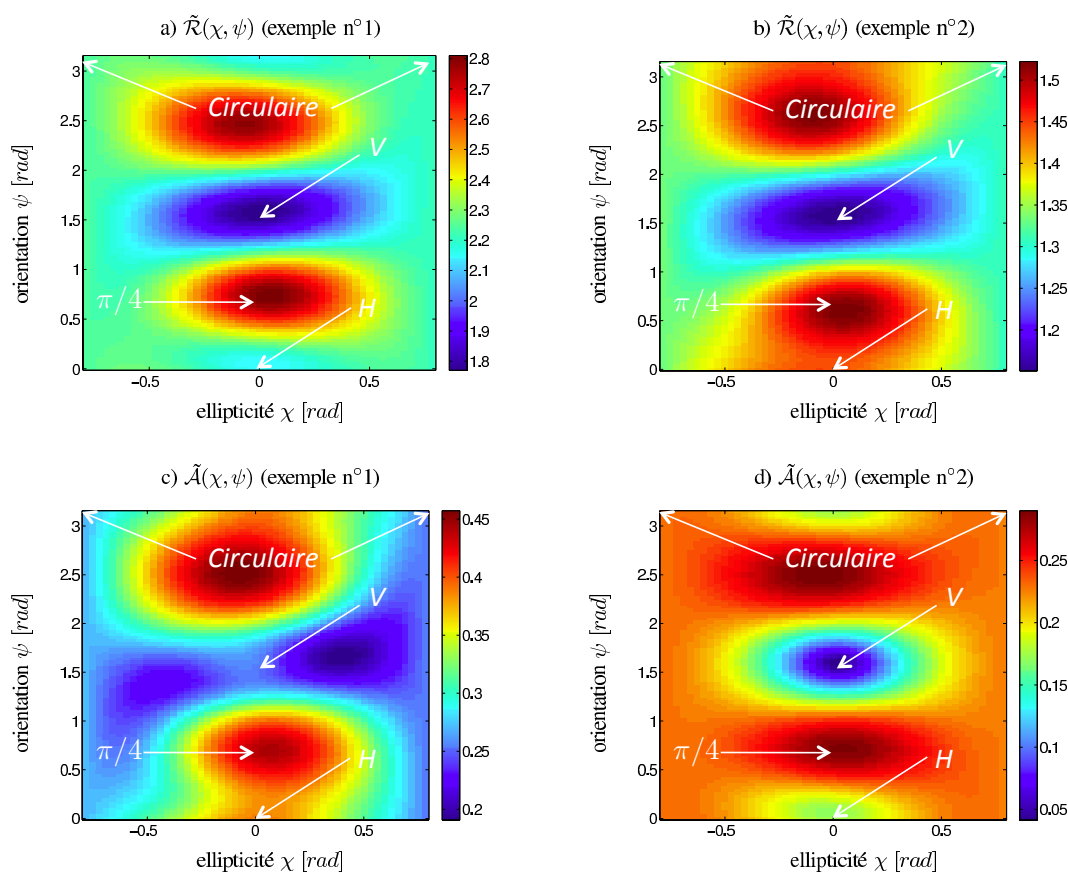


Figure 3.18 – Analyse des paramètres  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  et  $\tilde{\mathcal{R}}(\chi, \psi)$  (définis Eq. (3.46)) pour les deux exemples analysés en Fig. 3.17.

Comme le montrent les images présentées Fig. 3.18(a) et Fig. 3.18(b), le paramètre  $\tilde{\mathcal{R}}(\chi, \psi)$  varie entre 1.8 et 2.8 pour l'exemple 1 et entre 1.15 et 1.55 pour l'exemple 2. Ainsi pour ces deux exemples, l'ordre de grandeur de  $\tilde{\mathcal{R}}(\chi, \psi)$  décrit un bon équilibre entre la contribution du sol et celle du volume. Par ailleurs, sur l'image présentée Fig. 3.18(d), on observe qu'avec l'exemple 2, pour la polarisation d'émission linéaire verticale  $V$ , le paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  est plus petit que



0.1, ce qui coïncide sur l'image Fig. 3.17(b) à la polarisation d'émission pour laquelle la perte de précision décrite par  $\rho(\chi, \psi)$  est proche de 70. Pour les autres polarisations d'émission et pour l'exemple 1 présenté Fig. 3.18(c), le paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  est plus grand que 0.2 et la perte de précision  $\rho(\chi, \psi)$  est moins importante.

Cette analyse démontre qu'il est absolument nécessaire d'optimiser la polarisation d'émission car le choix d'une mauvaise polarisation peut entraîner une perte de précision supérieure à 70. Par contre, l'analyse étant effectuée sur simplement deux exemples, elle ne permet pas d'effectuer un choix entre les différentes polarisations d'émission. Néanmoins, ayant souligné la forte influence du paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ , on peut noter que la valeur de  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  est maximum à proximité de la polarisation linéaire  $\pi/4$  pour les deux exemples. Dans le paragraphe suivant, on présente une deuxième analyse en faveur de la polarisation linéaire à  $\pi/4$ .

### 3.4.3 Analyse dans la sphère de Poincaré

Une question qui intéresse les spécialistes est de savoir s'il est possible de déterminer une hiérarchie entre les différentes polarisations d'émission possibles. Pour mener cette analyse, on se propose d'effectuer un lien avec de précédents travaux de l'équipe PhyTI en optique statistique [73]. Avec le système compact, le lien avec l'optique est facile car lorsque l'on analyse les données en configuration PolInSAR compacte dans une région homogène, tout se passe comme si en chaque récepteur on avait la contribution de deux champs partiellement polarisés. L'un de ces champs correspond à la contribution de l'onde rétro-diffusée par le volume, l'autre à la contribution de l'onde rétro-diffusée par le sol. Ces deux contributions sont incohérentes entre elles.

En 2002, Réfrégier et Goudail dans [73] se sont intéressés au contraste entre deux lumières partiellement polarisées. L'objectif de cette analyse était la définition du contraste entre deux zones homogènes d'une image acquise par un système d'imagerie polarimétrique. Les auteurs ont montré dans [73] que le contraste qui décrit la capacité à différencier les deux zones de l'image étudiée dépend des deux valeurs propres  $\tilde{\lambda}_1$  et  $\tilde{\lambda}_2$  de la matrice  $\Gamma_1^{-1}\Gamma_2$  où, pour  $n \in \{1, 2\}$ ,  $\Gamma_n$  décrit les propriétés de polarisation de la région  $n$ . Si on applique cette analyse à nos deux contributions venant du sol et du volume, cela implique que le contraste entre les deux contributions du champ rétro-diffusé est décrit par les deux valeurs propres de  $\frac{a}{I_1} (\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi))^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi)$  qui sont alors  $\check{\lambda}_1 = \frac{a}{I_1} \tilde{\lambda}_1(\chi, \psi)$  et  $\check{\lambda}_2 = \frac{a}{I_1} \tilde{\lambda}_2(\chi, \psi)$ . De plus, dans [73], il est montré qu'une transformation bijective des deux valeurs propres permet de définir un nouveau couple de paramètres de contraste :

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \check{\lambda}_1 \check{\lambda}_2 \\ \beta_C &= \frac{\check{\lambda}_1 + \check{\lambda}_2}{2\sqrt{\check{\lambda}_1 \check{\lambda}_2}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

et que ces nouveaux paramètres ont l'intérêt de pouvoir s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \left( \frac{I_{gro}}{I_{vol}} \right)^2 \frac{1 - \mathcal{P}_{gro}^2}{1 - \mathcal{P}_{vol}^2} \\ \beta_C &= \frac{1 - \mathcal{P}_{gro} \mathcal{P}_{vol} \cos \Omega}{\sqrt{1 - \mathcal{P}_{gro}^2} \sqrt{1 - \mathcal{P}_{vol}^2}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

où  $I_X$  et  $\mathcal{P}_X$  sont respectivement l'intensité et le degré de polarisation associés à la matrice  $\tilde{\mathbf{T}}_X(\chi, \psi)$  pour  $X \in \{vol, gro\}$ , et  $\Omega$  est l'angle formé dans la sphère de Poincaré entre les deux états de polarisations principaux (voir représentation de Poincaré sur Fig. 3.19). L'intérêt de ce nouveau jeu de paramètres est donc de proposer une représentation graphique reliée aux paramètres invariants.

Revenons à présent sur notre problème d'estimation en configuration compacte. Dans l'analyse

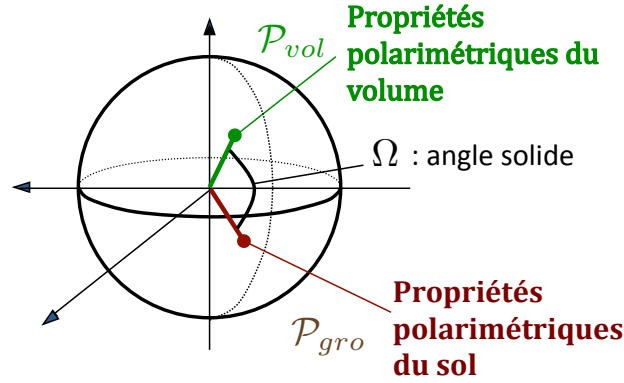


Figure 3.19 – Représentation des propriétés de polarisation dans la sphère de Poincaré des contributions du volume et du sol en configuration PolInSAR compacte. Les rayons  $\mathcal{P}_{vol}$  et  $\mathcal{P}_{gro}$  sont les degrés de polarisation des contribution du champ rétro-diffusé qui viennent respectivement du volume et du sol, et  $\Omega$  est l'angle solide entre les deux états principaux de polarisation des deux contributions du champ.

précédente, on a observé que le paramètre  $\tilde{\mathcal{R}}(\chi, \psi)$  était relativement stable et que le paramètre important était  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ . Or un calcul simple montre que :

$$\tilde{\mathcal{A}}^2(\chi, \psi) = 1 - \frac{1}{\beta_C^2}. \quad (3.49)$$

Ainsi, on peut montrer que

$$\tilde{\mathcal{A}}^2(\chi, \psi) = \frac{\mathcal{P}_{vol}^2 + \mathcal{P}_{gro}^2 - 2\mathcal{P}_{vol}\mathcal{P}_{gro} \cos \Omega - \mathcal{P}_{vol}^2 \mathcal{P}_{gro}^2 \sin^2 \Omega}{(1 - \mathcal{P}_{vol}\mathcal{P}_{gro} \cos \Omega)^2}, \quad (3.50)$$

où, comme on l'avait déjà souligné, ce paramètre ne dépend pas des intensités  $I_{vol} = \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}}_{vol}(\chi, \psi))$  et  $I_{gro} = \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}}_{gro}(\chi, \psi))$ , mais uniquement de la différence des propriétés de polarisation ( $\mathcal{P}_{vol}$ ,  $\mathcal{P}_{gro}$  et  $\Omega$ ). Analysons certains cas particuliers. Si l'onde rétro-diffusée par le sol (ou par le volume) est totalement polarisée alors :

$$\lim_{\mathcal{P}_{gro} \rightarrow 1} \tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) = 1, \quad (3.51)$$

ce qui correspond à la valeur maximum du paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ .

Un autre cas intéressant correspond à la situation pour laquelle  $\Omega = 0$ . Dans ce cas :

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) = \frac{|\mathcal{P}_{vol} - \mathcal{P}_{gro}|}{1 - \mathcal{P}_{vol}\mathcal{P}_{gro}}. \quad (3.52)$$

Ainsi, quand  $\Omega = 0$ , il faut que les degrés de polarisation soient différents pour que le paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  soit grand. En effet si en plus de  $\Omega = 0$ , on a  $\mathcal{P}_{vol} = \mathcal{P}_{gro}$ , alors :

$$\lim_{\substack{\Omega \rightarrow 0 \\ \mathcal{P}_{vol} \rightarrow \mathcal{P}_{gro}}} \tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) = 0. \quad (3.53)$$

Dans cette situation, les propriétés de polarisation des deux matrices sont identiques.

Pour interpréter le rôle de  $\Omega$ , notons que :

$$\tilde{\mathcal{A}}^2(\chi, \psi) = 1 - \frac{(1 - \mathcal{P}_{gro}^2)(1 - \mathcal{P}_{vol}^2)}{(1 - \mathcal{P}_{gro}\mathcal{P}_{vol}\cos\Omega)^2}. \quad (3.54)$$

Ainsi, quand  $\mathcal{P}_{vol}$  et  $\mathcal{P}_{gro}$  sont fixés, le contraste est d'autant plus important que l'angle  $\Omega$  est proche de  $\pi$  modulo  $2\pi$ . Dans la sphère de Poincaré Fig. 3.19, il faut donc que les états de polarisation soient opposés pour maximiser le paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ . Enfin remarquons que si  $\mathcal{P}_{vol} = 0$ , alors

$$\lim_{\mathcal{P}_{vol} \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) = \mathcal{P}_{gro}. \quad (3.55)$$

En effet, si l'un des champs rétro-diffusé est totalement dépolarisé, le paramètre  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  ne dépend plus de l'angle  $\Omega$  car celui-ci n'est pas défini.

Dans [4], pour les quatre polarisations d'émission typiques que sont : linéaire horizontale, linéaire verticale, linéaire à  $\pi/4$  et circulaire, on a corrélié les valeurs de  $\rho(\chi, \psi)$  aux paramètres  $\mathcal{P}_{vol}$ ,  $\mathcal{P}_{gro}$  et  $\Omega$  qui sont liés à  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ . Un résumé des valeurs observées dans [4] est présenté dans le tableau 3.3.

	$\mathcal{P}_{vol}$	$\mathcal{P}_{gro}$	$\Omega$	$\rho$
Polarisation linéaire horizontale $H$	[0.4, 0.5]	[0.6, 1]	0	[1.4, 1.6]
Polarisation linéaire verticale $V$	[0.4, 0.5]	[0.4, 0.1]	0	[1.7, 150]
Polarisation linéaire à $\pi/4$	[0.4, 0.5]	[0.3, 1]	$>0$	[1.1, 3]
Polarisation circulaire	[0, 0.2]	[0.2, 1]	$>0$	[1.8, 4]

Table 3.3 – Ordres de grandeur obtenus à partir des exemples traités dans [4] et pour lesquels le sol a une symétrie de réflexion et le volume une symétrie azimutale. Les paramètres  $(\mathcal{P}_u)_{u \in \{vol, gro\}}$  sont les degrés de polarisation de l'onde rétro-diffusée respectivement par le volume et le sol. L'angle  $\Omega$  est représenté Fig. 3.19.

Pour les exemples considérés, pour lesquels le sol a une symétrie de réflexion et le volume une symétrie azimutale, on observe les résultats suivants. La polarisation linéaire verticale peut avoir une très grande valeur de  $\rho(\chi, \psi)$  (150). Ceci peut s'expliquer par l'observation que  $\Omega = 0$  et que les degrés de polarisation peuvent être proches : on a vu Eq. (3.53) que  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$  est dans ce cas très petit. Pour la polarisation linéaire horizontale, les valeurs de  $\rho(\chi, \psi)$  sont de l'ordre de 1.4 à 1.6, ce qui correspond à une perte de résolution très faible. Cela vient sans doute d'écart importants entre les degrés de polarisation  $\mathcal{P}_{vol}$  et  $\mathcal{P}_{gro}$ . Avec la polarisation linéaire à  $\pi/4$ , on a potentiellement un très bon choix car l'angle  $\Omega$  est non nul, ce qui peut permettre d'augmenter le contraste  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi)$ . En effet, on observe une valeur de  $\rho(\chi, \psi)$  qui descend jusqu'à 1.1. Enfin la polarisation circulaire correspond souvent au cas où le degré de polarisation de la contribution du volume est très faible. Eq. (3.55), on a vu que dans cette situation le contraste  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) \simeq \mathcal{P}_{gro}$ . Les valeurs correspondantes de  $\rho(\chi, \psi)$  observées varient entre 1.8 et 4, ce qui est légèrement moins bon que pour  $\pi/4$  et  $H$ , mais reste un bon résultat par rapport au cas pathologique de la polarisation  $V$ .

Une synthèse de ces différents comportements est présentée Fig. 3.20. Avec les polarisations linéaires horizontales et verticales, les états principaux de polarisation des ondes rétro-diffusées par le volume et par le sol sont parallèles dans la sphère de Poincaré. Cette particularité vient du fait que la végétation est isotrope et par conséquent quelle que soit la polarisation linéaire émise par le RADAR, la contribution rétro-diffusée par le volume a le même état principal de polarisation que celui de l'onde émise. De plus, comme le sol a une symétrie de réflexion, si l'onde émise possède une polarisation linéaire horizontale ou verticale, alors l'onde rétro-diffusée

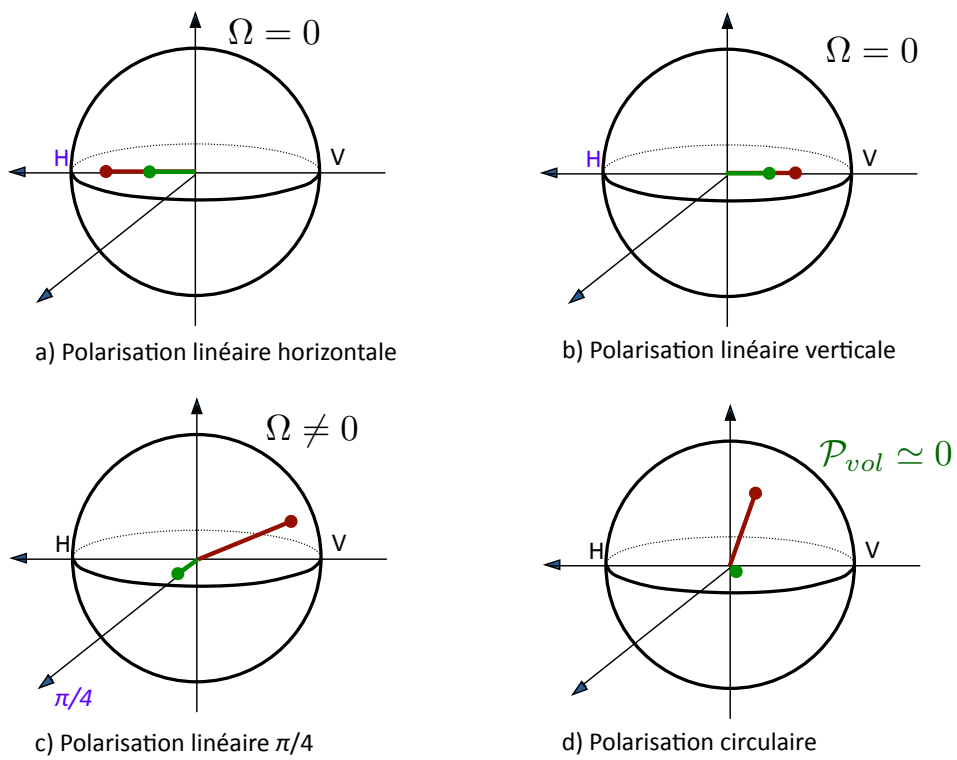


Figure 3.20 – Résumé des comportements observés en fonction des polarisations d'émission pour les exemples considérés où le sol, représenté en marron, a une symétrie de réflexion et le volume, représenté en vert, une symétrie azimutale.

par le sol possède elle aussi une polarisation linéaire horizontale ou verticale. En revanche, avec la polarisation linéaire à  $\pi/4$ , la situation est différente. Le volume isotrope renvoie une contribution avec un état principal linéaire à  $\pi/4$ , mais le sol ne renvoie pas une polarisation linéaire à  $\pi/4$ . On a donc deux contributions avec des états de polarisation différents et donc un angle  $\Omega > 0$ , comme cela est visible Fig. 3.20(c). Cette propriété  $\Omega > 0$  favorise l'existence d'un contraste plus important et d'une valeur de  $\rho(\chi, \psi)$  plus petite. Pour la polarisation circulaire, l'onde rétro-diffusée par le volume est presque totalement dépolarisée, ainsi le contraste n'est finalement lié qu'au degré de polarisation du sol :  $\tilde{\mathcal{A}}(\chi, \psi) \simeq \mathcal{P}_{gro}$ .

En résumé, le système compact semble une option intéressante pour réduire la complexité du système. Néanmoins, il faut optimiser le choix de la polarisation émise car il existe des exemples pour lesquels il peut y avoir une perte de précision très importante. L'étude proposée, fondée sur les propriétés de symétrie de  $T_{vol}$  et  $T_{gro}$ , semble montrer que la polarisation linéaire à  $\pi/4$  est une bonne candidate. Il sera intéressant de développer cette étude pour confirmer ce résultat. La polarisation circulaire semble elle aussi une bonne candidate, mais l'interprétation dans la sphère de Poincaré semble montrer que l'origine du contraste en circulaire est différent du cas linéaire  $\pi/4$ .

### 3.5 Conclusions et perspectives

L'analyse de la végétation avec le système PolInSAR est un sujet de recherche passionnant avec un enjeu sociétal important. Lorsque j'ai commencé à étudier les articles scientifiques sur ce sujet, il y avait essentiellement deux types de travaux. Les premiers proposaient des algorithmes d'estimation, notamment de la hauteur des arbres. Les seconds développaient de nouveaux modèles de rétro-diffusion pour mieux analyser les données. Dans l'étude à laquelle j'ai participé, nous avons choisi de commencer par la quantification de la précision des estimations en fonction de la situation physique considérée. Cela a permis de confirmer la faisabilité de la technique d'estimation de la hauteur des arbres, mais a aussi souligné qu'il existait des situations physiques pour lesquelles l'estimation n'est pas possible avec un nombre raisonnable d'échantillons.

Dans ce document, j'ai choisi d'insister sur la détermination des paramètres invariants de la BCR de  $h_v$ , car c'est pour moi un résultat très important qui permet de donner une description simplifiée du problème d'estimation, c'est-à-dire avec un minimum de paramètres. Parmi ces paramètres invariants, il me semble que le paramètre  $\mathcal{A}$  est particulièrement intéressant car il décrit la différence entre les propriétés polarimétriques des contributions rétro-diffusées par le sol et le volume. Une perspective intéressante est donc d'analyser comment évolue ce paramètre en fonction des situations physiques considérées.

L'analyse de l'impact des connaissances a priori a aussi permis des avancées significatives. Elle a souligné d'une part le rôle capital de la connaissance de la hauteur de sol  $z_g$  dans l'estimation du paramètre  $h_v$ , et d'autre part l'impact tout à fait négligeable de la connaissance des propriétés de symétrie de  $T_{vol}$  et  $T_{gro}$ . A ma connaissance, nous avons été les premiers à observer que la connaissance de la hauteur du sol  $z_g$  pouvait permettre de gagner un facteur 100 sur la variance d'estimation de la hauteur de végétation  $h_v$ . L'amélioration de l'estimation de  $z_g$  est donc une perspective importante de ce travail car cela pourrait permettre d'effectuer des estimations de  $h_v$  dans des zones homogènes de plus petite taille.

La suite de cette étude à court terme est d'étudier la possibilité de relâcher la contrainte sur la connaissance de l'atténuation dans le volume et la prise en compte du phénomène de décohérence temporelle. Cette étape est nécessaire pour étendre le champ de validité de la technique d'estimation de la hauteur de végétation. Par contre, une telle évolution nécessitera de considérer des données plus complexes : dual baseline ou multi-baseline. A plus long terme, une perspective motivante qui posera certainement de nouveaux défis est l'analyse des nouveaux systèmes d'imagerie tel que le LIDAR. Le problème consistera alors à développer une stratégie de synergie permettant d'utiliser les informations complémentaires de ces différents modes d'acqui-

sition. Néanmoins, cela ne sera possible que si on dispose d'une compréhension suffisante des mécanismes de rétro-diffusion dans chacun des modes d'acquisition considérés.

Pour ce projet, il me faudra développer de nouvelles collaborations au sein de la communauté "télé-détection" au niveau national et international tout en approfondissant celle déjà très riche avec l'ONERA de Salon de Provence. La compréhension des phénomènes physiques issue de l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée a contribué à faciliter mon entrée dans la thématique PolInSAR. L'exemple du recours à la sphère de Poincaré pour comparer les polarisations d'émission en configuration compacte en est une illustration. Néanmoins, je souhaiterais aussi souligner que l'expérience de l'équipe PhyTI en RADAR a aussi été un atout très important, notamment pour la compréhension et le traitement des données réelles.

En terme de traitement, les analyses auxquelles j'ai participé ont été conduites en supposant que les échantillons étaient gaussiens et identiquement distribués. Or l'émergence de données de télé-détection avec une très haute résolution (THR), a motivé le développement d'analyses statistiques remettant en cause l'hypothèse gaussienne [113, 65, 122]. En parallèle à ces travaux, une approche différente remettant en cause non pas la loi de probabilité, mais l'hypothèse d'homogénéité de l'échantillon, a été développée dans l'équipe [23, 123]. Il me paraît intéressant de continuer dans cette voie en complexifiant non pas la loi de probabilité décrivant les données, mais plutôt en imposant une structure particulière à la variation spatiale des paramètres. Enfin une piste qui, sauf erreur de ma part, n'a pas suscité pour l'instant de nombreux travaux, est l'estimation sur données réelles de la précision des estimations. Ce problème, qui consiste à étudier la précision à laquelle on peut estimer la BCR est au cœur de mes préoccupations que sont : l'analyse et le traitement des données.

# Conclusions et Perspectives

L'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée a mobilisé de nombreuses équipes de recherche depuis une dizaine d'année. J'ai contribué à ce sujet en fondant mes analyses sur plusieurs expériences particulières permettant de souligner l'existence de propriétés de cohérence particulières de la lumière partiellement polarisée. Sur cette thématique de recherche, la difficulté principale n'est pas de mener les calculs. La difficulté est de trouver des interprétations physiques au concept de cohérence pour la lumière partiellement polarisée. Malgré les résultats obtenus, l'analyse des propriétés de cohérence de la lumière partiellement polarisée demeure à mon avis un défi majeur car il reste de nombreux phénomènes physiques à explorer.

L'analyse des champs en trois dimensions (3D) est une perspective très intéressante car elle ouvre un champ de possibilités important de développements méthodologiques. En effet, la caractérisation du comportement polarimétrique d'une onde 3D nécessite 5 paramètres lorsqu'elle est totalement polarisée et 9 paramètres lorsqu'elle est partiellement polarisée. Le degré de polarisation est décrit par deux paramètres [72]. Une généralisation au cas 3D mène de la définition de trois degrés intrinsèques de cohérence [84]. Cette problématique apparaît en optique par exemple lors de l'analyse de la lumière en champ proche. De plus, ce sujet pourrait aussi être l'occasion de revenir sur l'analyse des signaux géophysiques, car dans ce domaine, il est fréquent d'avoir accès aux amplitudes des vibrations suivant les trois dimensions de l'espace [98].

A la fin du premier chapitre, j'ai mentionné qu'en général, un champ gaussien transformé par une matrice de Jones aléatoire n'est pas gaussien. Cela signifie que pour caractériser complètement les propriétés de polarisation et de cohérence, il faudra pour certaines situations prendre en compte les moments statistiques d'ordre supérieur à deux, ce qui soulève aussi de nombreuses perspectives motivantes. Par exemple, cette étude pourra être menée à partir d'expériences mettant en œuvre des corrélations d'intensité des champs, ce qui permettra d'analyser des moments d'ordre 4. Une autre solution sera de caractériser les propriétés de polarisation à partir des densités de probabilité du champ dans la sphère de Poincaré. Si on dispose de mesures, ce thème pourrait aussi soulever de nouveaux problèmes d'estimation dans la sphère de Poincaré. En effet, comme le montre par exemple [15], il est important de revisiter la notion de distance dans la sphère de Poincaré.

En comparaison, l'objectif de l'analyse menée en imagerie PolInSAR est plus simple à appréhender. Même s'il demeure des incertitudes sur la configuration du système et sur le choix du modèle pour décrire les mécanismes de rétro-diffusion, l'intention est d'étudier le problème d'estimation des paramètres de végétation. En PolInSAR, l'enjeu sociétal et les moyens mis en œuvre sont très importants. Les données acquises par ces systèmes sont très riches en information. Les résultats obtenus ont montré l'intérêt d'une analyse de la précision fondée sur les outils statistiques. La prochaine étape dans cette étude est d'aborder les systèmes multi-baselines, qui vont permettre d'effectuer des estimations plus précises ainsi que de mieux comprendre les mécanismes de rétro-diffusion. Je dirige une thèse sur ce sujet depuis novembre 2014 en collaboration avec l'ONERA de Salon de Provence. Dans cette thèse, en plus du système PolInSAR, il est aussi

prévu d'analyser les capacités du système LIDAR, ce qui nous permettra d'affiner l'estimation de certains paramètres et de décrire les mécanismes de rétro-diffusion sous un nouvel angle.

En plus de ces deux activités de recherche, je souhaite aussi développer de nouvelles collaborations sur des problèmes physiques différents de manière à induire de nouveaux problèmes méthodologiques. En particulier, je participe actuellement à la direction de la thèse de Lamine Diong. Cette thèse est co-dirigée avec Philippe Lasaygues du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA). Amélie Litman de l'Institut Fresnel participe à la collaboration scientifique pour les aspects micro-ondes. Le projet est d'analyser la précision disponible au sein d'un système d'imagerie acoustique et micro-onde avec un formalisme unifié fondé sur les équations d'Helmholtz. Pour ce sujet, comme pour le PolInSAR, notre démarche consiste à utiliser la BCR pour sonder le problème d'estimation et ainsi aider à la conception du système de mesure.

Plus généralement, concernant mes projets à plus long terme, l'enjeu est de continuer à induire de l'analyse de travaux appliqués des analyses méthodologiques. Par exemple, développer une activité sur l'estimation des propriétés de polarisation dans la sphère de Poincaré est une piste intéressante pour décrire des propriétés de non gaussianité des champs. Sortir du cadre des transformations linéaires des champs est aussi une piste importante pour rendre compte des phénomènes physiques complexes. Ce qui est sûr est que je continuerai à travailler en collaboration avec des physiciens avec l'objectif de progresser dans la compréhension des phénomènes physiques et de développer mon expertise en analyse statistique et en traitement du signal.



# Bibliographie

- [1] D. AIT-BELKACEM, A. GASECKA, F. MUNHOZ, S. BRUSTLEIN et S. BRASSELET. « Influence of birefringence on polarization resolved nonlinear microscopy and collagen SHG structural imaging ». In : *Opt. Express* 18.14 (juil. 2010), 14859–14870 (cf. p. 25).
- [2] A. ARNAUBEC. *Analyse de la précision d'estimation de paramètres de la biomasse végétale l'aide de techniques PolInSAR, Thèse de doctorat*. Université Aix-Marseille III, France, 2012 (cf. p. 76, 86, 87).
- [3] A ARNAUBEC, A. ROUEFF, P-C DUBOIS-FERNANDEZ et Ph. RÉFRÉGIER. « Influence of the nature of a priori knowledge on the precision of vegetation height estimation in polarimetric SAR interferometry ». In : *EUSAR, Nuremberg, Germany*. 2012, p. 693–696 (cf. p. 18, 93–95).
- [4] A. ARNAUBEC, A. ROUEFF, P.-C. DUBOIS-FERNANDEZ et Ph. RÉFRÉGIER. « Vegetation Height Estimation Precision with Compact PolInSAR and homogeneous Random Volume over Ground Model ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 52 (mar. 2014), p. 1879–1891 (cf. p. 18, 88, 94, 96, 97, 102).
- [5] R BAMLER et P HARTL. « Synthetic aperture radar interferometry ». In : *INVERSE PROBLEMS* 14.4 (août 1998), R1–R54. ISSN : 0266-5611 (cf. p. 78).
- [6] A BELOUCHRANI, K ABEDMERAÏM, JF CARDOSO et E MOULINES. « A blind source separation technique using second-order statistics ». In : *IEEE Trans. Signal Process.* 45.25 (fév. 1997), 434–444. ISSN : 1053-587X (cf. p. 73).
- [7] N. le BIHAN et J. MARS. « Singular value decomposition of quaternion matrices : a new tool for vector-sensor signal processing ». In : *Signal Processing* 84.7 (2004), p. 1177–1199 (cf. p. 25).
- [8] C. BROSSEAU. *Fundamentals of polarized light - A statistical Optics approach*. New York : John Wiley, 1998 (cf. p. 29, 39, 66).
- [9] M. CAMPILLO et A. PAUL. « Long-range correlations in the diffuse seismic coda ». In : *Science* 299 (2003), p. 547–549 (cf. p. 47).
- [10] Y. CANSI. « An automatic seismic event processing for detection and location - the PMCC method ». In : *Geophys. Res. Lett.* 22.9 (mai 1995), 1021–1024 (cf. p. 29).
- [11] S. R. CLOUDE et K. P. PAPATHANASSIOU. « Polarimetric SAR Interferometry ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 36.5 (1998), p. 1151–1565 (cf. p. 43, 54).
- [12] S. R. CLOUDE et K. P. PAPATHANASSIOU. « Three-stage inversion process for polarimetric SAR interferometry ». In : *Proc. Inst. Elect. Eng. Radar Sonar Navig.* 150.3 (juin 2003), p. 125–133 (cf. p. 78, 81, 82, 84, 86, 88).
- [13] S. R. CLOUDE et E. POTTIER. « An Entropy Based Classification Scheme for Land applications of Polarimetric SAR ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 35.1 (1997), p. 68–78 (cf. p. 43, 45).

- [14] G. DELYON, F. GALLAND et Ph. RÉFRÉGIER. « Minimal Stochastic Complexity image partitioning with unknown noise model ». In : *IEEE Trans. on Image Processing* 15.10 (oct. 2006), p. 3207–3212 (cf. p. 43).
- [15] V. DEVLAMINCK et P. TERRIER. « Geodesic distance on non-singular coherency matrix space in polarization optics ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 27.8 (2010), p. 1756–1763 (cf. p. 106).
- [16] M. DIONG, P. LASAYGUES, A. ROUEFF et A. LITMAN. « Outils statistiques pour l'amélioration de systèmes d'imagerie par diffraction ». In : *12<sup>e</sup> Congrès d'Acoustique, Poitiers, France*. 2014 (cf. p. 17).
- [17] L. FERRO-FAMIL, M. NEUMANN et Y. HUANG. « Multi-baseline PolInSAR statistical techniques for the characterization of distributed media ». In : *Proc. IGARSS'09, Cape Town, South Africa*. T. 3. 2009, p. 971–974 (cf. p. 78, 81, 84, 91).
- [18] A. FREEMAN et S. L. DURDEN. « A Three-Component Scattering Model for Polarimetric SAR Data ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 36.3 (1998), p. 963–973 (cf. p. 45).
- [19] Anthony FREEMAN. « Fitting a two-component scattering model to polarimetric SAR data from forests ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 45.8 (août 2007), 2583–2592 (cf. p. 45, 92).
- [20] F. GALLAND, N. BERTAUX et Ph. RÉFRÉGIER. « Minimum Description Length Synthetic Aperture Radar image segmentation ». In : *IEEE Trans. Image Process.* 12.9 (sept. 2003), p. 995–1006 (cf. p. 43).
- [21] F. GALLAND, N. BERTAUX et Ph. RÉFRÉGIER. « Multicomponent image segmentation in homogeneous regions by stochastic complexity minimization ». In : *Pattern Recognition* 38.11 (2005), p. 1926–1936 (cf. p. 43).
- [22] F. GALLAND, J-M. NICOLAS, H. SPORTOUCHE, M. ROCHE, F. TUPIN et Philippe PHILIPPE RÉFRÉGIER. « Unsupervised Synthetic Aperture Radar image segmentation using Fisher distributions ». In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 47.8 (2009), p. 2966–2972 (cf. p. 43).
- [23] F. GALLAND et Ph. RÉFRÉGIER. « Information theory based snake adapted to inhomogeneous intensity variations ». In : *Opt. Lett.* 32.17 (2007), p. 2514–2516 (cf. p. 105).
- [24] F. GALLAND, Ph. RÉFRÉGIER et O. GERMAIN. « Synthetic Aperture Radar Oil Spill Segmentation by Stochastic Complexity Minimisation ». In : *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 1.4 (2004), p. 295–299 (cf. p. 43).
- [25] F. GARESTIER, P. C. DUBOIS-FERNANDEZ et I. CHAMPION. « Forest Height Inversion Using High-Resolution P-Band Pol-InSAR Data ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 46.11, Part 1 (nov. 2008), p. 3544–3559 (cf. p. 78, 81, 84).
- [26] P.H. GARTHWAITE, I.T. JOLLIFFE et B. JONES. *Statistical Inference*. London : Prentice Hall Europe, 1995 (cf. p. 85).
- [27] F. GATELLI, A. M. GUARNIERI, F. PARIZZI, P. PASQUALI, C. PRATTI et F. ROCCA. « The wave-number shift in SAR interferometry ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 32.4 (JUL. 1994), 855–865 (cf. p. 91).
- [28] O. GERMAIN et Ph. RÉFRÉGIER. « Snake-based method for the segmentation of objects in multichannel images degraded by speckle ». In : *Opt. Lett.* 24.12 (juin 1999), p. 814–816 (cf. p. 25, 43).
- [29] O. GERMAIN et Ph. RÉFRÉGIER. « On the bias of the Likelihood Ratio edge detector for SAR images ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 38.3 (2000), p. 1455–1458 (cf. p. 43).

- [30] R. J. GLAUBER. «The Quantum Theory of Optical Coherence ». In : *Phys. Rev.* 130.6 (1963), p. 2529–2539 (cf. p. 52).
- [31] J. W. GOODMAN. *Statistical Optics*. New York : John Wiley et Sons, Inc., 1985 (cf. p. 30, 48, 68, 76).
- [32] F. GORI. « Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams ». In : *Opt. Lett.* 23 (1998), p. 241–243 (cf. p. 47).
- [33] F. GORI, M. SANTARSIERO, R. SIMON, G. PIQUERO, R. BORGHI et G. GUATTARI. « Coherent-mode decomposition of partially polarized, partially coherent sources ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 20 (2003), p. 78–84 (cf. p. 53).
- [34] F. GOUDAIL et Ph. RÉFRÉGIER. « Statistical techniques for target detection in polarisation diversity images ». In : *Opt. Lett.* 26.9 (mai 2001), p. 644–646 (cf. p. 25).
- [35] J. GUILBERT, J. VERGOZ, E. SCHISSELE, A. ROUEFF et Y. CANSI. « Use of hydroacoustic and seismic arrays to observe rupture propagation and source extent of the Mw = 9.0 Sumatra earthquake ». In : *Geophys. Res. Lett.* 32.15 (2005) (cf. p. 27).
- [36] I. HAJNSEK, E. POTTIER et S. R. CLOUDE. « Inversion of surface parameters from polarimetric SAR ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 41.4 (2003), p. 727–744 (cf. p. 88).
- [37] T. HASSINEN, J. TERVO, T. SETÄLÄ et A. T. FRIBERG. « Hanbury Brown-Twiss effect with electromagnetic waves ». In : *Opt. Express* 19.16 (2011), p. 15188–15195 (cf. p. 74).
- [38] R.A. HORN et C.R. JOHNSON. « Topics in Matrix Analysis ». In : Cambridge University Press, 1991 (cf. p. 31).
- [39] H. HOTTELING. « Relations between two sets of variates ». In : *Biometrika* 38.3-4 (1936), p. 321–377 (cf. p. 54).
- [40] D. HUANG, E. A. SWANSON, C. P. LIN et al. « Optical Coherence Tomography ». In : *Science* 254.5035 (nov. 1991), p. 1178–1181 (cf. p. 47, 48).
- [41] S. HUARD. *Polarization of light*. Paris : Wiley, Masson, 1997 (cf. p. 36, 37, 73).
- [42] D.F.V. JAMES. « Change of polarization of light beams on propagation in free space ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 11 (1994), p. 1641–1643 (cf. p. 47).
- [43] R. C. JONES. « A new calculus for the treatment of optical systems ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 31.7 (1941), p. 488–493 (cf. p. 30, 31).
- [44] B. KARCEWSKI. « Degree of coherence of the electromagnetic field ». In : *Phys. Lett.* 5.3 (1963), p. 191–192 (cf. p. 50).
- [45] S. M. KAY. « Fundamentals of statistical signal processing - Volume I : Estimation Theory ». In : Upper Saddle River : Prentice-Hall, 1998. Chap. Statistical decision theory II, p. 186–247 (cf. p. 85).
- [46] K. KIM, L. MANDEL et E. WOLF. « Relationship between Jones and Mueller matrices for random media ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 4.3 (1987), p. 433–437 (cf. p. 38).
- [47] O. KOROTKOVA et E. WOLF. « Generalized Stokes parameters of random electromagnetic beams ». In : *Opt. Lett.* 30.2 (2005), p. 198–200 (cf. p. 63).
- [48] M. LAHIRI et E. WOLF. « Implications of complete coherence in the space-frequency domain ». In : *Opt. Lett.* 36.13 (2011), p. 2423–2425 (cf. p. 60).
- [49] T. LE TOAN, S. QUEGAN, M. W. J. DAVIDSON et al. « The BIOMASS mission : Mapping global forest biomass to better understand the terrestrial carbon cycle ». In : *Remote sensing of environment* 115.11, SI (nov. 2011), 2850–2860 (cf. p. 75, 87, 96).

- [50] J. S. LEE et E. POTTIER. *Polarimetric Radar Imaging : from basics to applications*. New York : CRC Press, 2009 (cf. p. 39, 43, 75).
- [51] A. LUIS. « Degree of coherence for vectorial electromagnetic fields as the distance between correlation matrices ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 24.4 (2007), p. 1063–1068 (cf. p. 47, 60).
- [52] L. MANDEL et E. WOLF. *Optical Coherence and Quantum Optics*. New York : Cambridge University Press, 1995 (cf. p. 30, 37).
- [53] P. MARTIN, Ph. RÉFRÉGIER, F. GALLAND et F. GUÉRAULT. « Nonparametric statistical snake based on the Minimum Stochastic Complexity ». In : *IEEE Trans. on Image Processing* 15.9 (sept. 2006), p. 2762–2770 (cf. p. 43).
- [54] R. MARTINEZ-HERRERO, P. M. MEJIAS et G. PIQUERO. *Characterization of partially polarized light fields*. T. 147. Springer, 2009 (cf. p. 60, 61).
- [55] R. MARTINEZ-HERRERO et P.M. MEJIAS. « Maximum visibility under unitary transformations in two-pinhole interference for electromagnetic fields ». In : *Opt. Lett.* 32.11 (2007), p. 1471–1473 (cf. p. 47, 60).
- [56] D. MASSONNET et J.C. SOUYRIS. *Imaging with synthetic aperture radar*. Engineering sciences : Electrical engineering. EPFL Press, 2008 (cf. p. 43, 47).
- [57] J. MORIO, F. GOUDAIL, X. DUPUIS, P. DUBOIS-FERNANDEZ et Ph. RÉFRÉGIER. « Polarimetric and Interferometric SAR Image Partition Into Statistically Homogeneous Regions Based on the Minimization of the Stochastic Complexity ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 45.11 (nov. 2007), p. 3599–3609 (cf. p. 43, 45, 78).
- [58] J. MORIO, Ph. RÉFRÉGIER, F. GOUDAIL, P. DUBOIS-FERNANDEZ et X. DUPUIS. « Information theory based approach for contrast analysis in Polarimetric and/or Interferometric SAR images ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 46.8 (2008), p. 2185–2196 (cf. p. 25, 43).
- [59] M. J. MORLET, G. ARENS, I. FOURGEAU et D. GIARD. « Sampling Theory and wave propagation ». In : *Geophysics* 47 (1982), p. 203–236 (cf. p. 26).
- [60] A. NEHORAI et E. PALDI. « Vector-sensor array processing for electromagnetic source localisation ». In : *IEEE Trans. on Sig. Proc.* 42.2 (1994), p. 376–398 (cf. p. 25).
- [61] S.V. NGHIEM, S.H. YUEH, R. KWOK et F.K. LI. « Symmetry properties in polarimetric remote-sensing ». In : *Radio Sci.* 27.5 (sept. 1992), p. 693–711 (cf. p. 82, 83).
- [62] R. NOVIKOVA, A. PIERANGELO, A. DE MARTINO et A. BENALI. « Polarimetric Imaging for Cancer Diagnosis and Staging ». In : *Optics and Photonics news* 23 (2012), p. 26–33 (cf. p. 25).
- [63] M. de Juan OVELAR, F. SNIK, C. U. KELLER et L. VENEMA. « Instrumental polarisation at the Nasmyth focus of the E-ELT ». In : *Astronomy & Astrophysics* 562 (fév. 2014) (cf. p. 25).
- [64] K. P. PAPATHANASSIOU et S. R. CLOUDE. « Single-Baseline Polarimetric SAR Interferometry ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 39.11 (nov. 2001), p. 2352–2363 (cf. p. 78, 81, 84–86).
- [65] Frederic PASCAL, Yacine CHITOUR, Jean-Philippe OVARLEZ, Philippe FORSTER et Pascal LARZABAL. « Covariance structure maximum-likelihood estimates in compound Gaussian noise : Existence and algorithm analysis ». In : *IEEE Trans. on Sig. Proc.* 56.1 (jan. 2008), 34–48 (cf. p. 45, 105).
- [66] H. POINCARÉ. *Théorie mathématique de la Lumière*. Paris : Georges Carr, 1892 (cf. p. 30).

- [67] S. A. PONOMARENKO, H. ROYCHOWDHURY et E. WOLF. « Physical significance of complete spatial coherence of optical fields ». In : *Phys. Lett. A* 345 (2005), p. 10–12 (cf. p. 60).
- [68] Ph. RÉFRÉGIER. « Polarization degree of optical waves with non-Gaussian probability density functions : Kullback relative entropy-based approach ». In : *Opt. Lett.* 30.10 (2005), p. 1090–1092 (cf. p. 42).
- [69] Ph. RÉFRÉGIER. « Symmetries in coherence theory of partially polarized light ». In : *J. of Math. Physics* 48.3 (2007), p. 033303 (cf. p. 62, 70).
- [70] Ph. RÉFRÉGIER. « Irreversible effects of random modulation on coherence properties of partially polarized light ». In : *Opt. Lett.* 33.7 (2008), p. 636–638 (cf. p. 68).
- [71] Ph. RÉFRÉGIER. « Mean square coherent light ». In : *Opt. Lett.* 33.14 (2008), p. 1551–1553 (cf. p. 61).
- [72] Ph. RÉFRÉGIER. « Evolution of 3D degrees of polarization with random unitary transformations ». In : *Opt. Lett.* 37.3 (2012), p. 428–430 (cf. p. 106).
- [73] Ph. RÉFRÉGIER et F. GOUDAIL. « Invariant polarimetric contrast parameters of coherent light ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 19.6 (2002), p. 1223–1233 (cf. p. 25, 87, 100).
- [74] Ph. RÉFRÉGIER et F. GOUDAIL. « Invariant degrees of coherence of partially polarized light ». In : *Opt. Express* 13.16 (2005), p. 6051–6060 (cf. p. 25, 47, 53–55, 57–59).
- [75] Ph. RÉFRÉGIER, F. GOUDAIL et Th. GAIDON. « Optimal location of random targets in random background : random Markov fields modelization ». In : *Opt. Commun.* 128.4,5,6 (1996), p. 211–215 (cf. p. 43).
- [76] Ph. RÉFRÉGIER et A. LUIS. « Irreversible effects of random unitary transformations on coherence properties of partially polarized electromagnetic fields ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 25.11 (2008), p. 2749–2757 (cf. p. 39, 42, 68).
- [77] Ph. RÉFRÉGIER et A. ROUEFF. « Coherence polarization filtering and relation with intrinsic degrees of coherence ». In : *Opt. Lett.* 31.9 (2006), p. 1175–1177 (cf. p. 58, 59).
- [78] Ph. RÉFRÉGIER et A. ROUEFF. « Linear relations of partially polarized and coherent electromagnetic fields ». In : *Opt. Lett.* 31.19 (2006), p. 2827–2829 (cf. p. 59, 60).
- [79] Ph. RÉFRÉGIER et A. ROUEFF. « Visibility interference fringes optimization on a single beam in the case of partially polarized and partially coherent light ». In : *Opt. Lett.* 32.11 (2007), p. 1366–1368 (cf. p. 62).
- [80] Ph. RÉFRÉGIER, A. ROUEFF, A. ARNAUBEC et P-C DUBOIS-FERNANDEZ. « Invariant Contrast Parameters of PolInSAR and Homogenous RVoG Model ». In : *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 11.8 (août 2014), p. 1414–1417 (cf. p. 18, 88, 89, 93).
- [81] Ph. RÉFRÉGIER, A. ROUEFF et V. WASIK. « Isotropic bicomponent partially polarized and partially coherent light ». In : *Opt. Lett.* 39.4 (fév. 2014), p. 1073–1076 (cf. p. 17, 68–71).
- [82] Ph. RÉFRÉGIER, A. ROUEFF et V. WASIK. « Van Cittert-Zernike theorem and symmetry properties of the normalized cross-spectral density matrix ». In : *Opt. Lett.* 39.21 (nov. 2014), p. 6150–6153 (cf. p. 17).
- [83] Ph. RÉFRÉGIER, J. TERVO et A. ROUEFF. « A temporal-coherence anisotropy of unpolarized light ». In : *Optics Communications* 282.6 (2009), p. 1069–1073 (cf. p. 65–67).
- [84] Ph. RÉFRÉGIER, V. WASIK, K. VYNCK et R. CARMINATI. « Analysis of coherence properties of partially polarized light in 3D and applicative to disordered media ». In : *Opt. Lett.* 39.8 (2014), p. 2362–2365 (cf. p. 74, 106).

- [85] A REIGBER et A MOREIRA. « First demonstration of airborne SAR tomography using multibaseline L-band data ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 38.5, Part 1 (2000), 2142–2152 (cf. p. 80).
- [86] A. ROUEFF. « Traitements des signaux sismiques multicateurs et multicomposantes, utilisation les représentations temps-fréquence ». Thèse de doct. Grenoble, France : INPG, 2003 (cf. p. 26, 28).
- [87] A. ROUEFF, A. ARNAUBEC, P. C. DUBOIS-FERNANDEZ et Ph. RÉFRÉGIER. « Cramer-Rao lower bound analysis of vegetation height estimation with random volume over ground model and polarimetric SAR interferometry ». In : *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 8.6 (nov. 2011), p. 1115–1119 (cf. p. 18, 84, 86, 93, 94).
- [88] A. ROUEFF, A. ARNAUBEC, P-C DUBOIS-FERNANDEZ et Ph. RÉFRÉGIER. « Analysis of vegetation height estimation fluctuations of PolInSAR measurement using the Cramer Rao bound ». In : Proc. of the meeting PolInSAR, Frascati, Italy, 2013 (cf. p. 18, 76, 86).
- [89] A. ROUEFF, M. AUPETIT, P-F. PISERCHIA et Y. CANSI. « Discrimination of Events at the International Station of Crozet Islands ». In : *Proc. of the IEEE Conference OCEANS, Brest, France.* 2005 (cf. p. 27).
- [90] A. ROUEFF, J. CHANUSSOT et J. I. MARS. « Estimation of polarization parameters using time-frequency representations and its application to waves separation ». In : *Signal Processing* 86.12 (2006), p. 3714–3731 (cf. p. 27, 58).
- [91] A. ROUEFF, J. CHANUSSOT, J. I. MARS et M-Q. NGUYEN. « Unsupervised separation of seismic waves using the watershed algorithm on time-scale images ». In : *Geophysical Prospecting* 52 (2004), p. 287–300 (cf. p. 26, 27).
- [92] A. ROUEFF, J. CHANUSSOT, J. MARS et G. CANADAS. « Stacking in the time-scale plane ». In : *72nd Int. Conference of the Society of Exploration Geophysicists, Salt Lake City, USA.* 2002 (cf. p. 26).
- [93] A. ROUEFF, J. I. MARS, J. CHANUSSOT et H. PEDERSEN. « Dispersion Estimation from linear array data in the time-frequency plane ». In : *IEEE Trans. on Sig. Proc.* 53.10 (2005), p. 3738–3748 (cf. p. 26).
- [94] A. ROUEFF, P-F. PISERCHIA, J-L. PLANTET, Y. CANSI et G. RUZIE. « Noise Characterization at the International Station of Crozet Islands (H04) ». In : *148th Meeting of the Acoustical Society of America.* San Diego, CA, 2004 (cf. p. 27).
- [95] A. ROUEFF et Ph. RÉFRÉGIER. « Separation technique of a mixing of two uncorrelated and perfectly polarized lights with different coherence and polarization properties ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 25.4 (2008), p. 838–845 (cf. p. 70, 72).
- [96] A. ROUEFF, Ph. ROUX et Ph. RÉFRÉGIER. « Wave separation in ambient seismic noise using intrinsic coherence and polarization filtering ». In : *Signal Processing* (2009) (cf. p. 73).
- [97] Ph. ROUX, M. WATHELET et A. ROUEFF. « The San Andreas Fault revisited through seismic-noise and surface-wave tomography ». In : *Geophys. Res. Lett.* 38 (2011) (cf. p. 73).
- [98] J. C. SAMSON et J. V. OLSON. « Some comments on the description of the polarization states of waves ». In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 61 (1980), p. 115–129 (cf. p. 106).
- [99] R. SCHMIDT. « Multiple Emitter Location and Signal Parameter estimation ». In : *IEEE trans. on antennas and propagation* 34.3 (1986), p. 276–280 (cf. p. 29).
- [100] Peter J. SCHREIER. « A Unifying Discussion of Correlation Analysis for Complex Random Vectors ». In : *IEEE Trans. on Signal Processing* 56.4 (avr. 2008), p. 1327–1336 (cf. p. 54).



- [101] T. SETÄLÄ, J. TERVO et A. T. FRIBERG. « Complete electromagnetic coherence in the space-frequency domain ». In : *Opt. Lett.* 29 (2004), p. 328–330 (cf. p. 52, 53).
- [102] T. SETÄLÄ, J. TERVO et A. T. FRIBERG. « Theorems on complete electromagnetic coherence in the space-time domain ». In : *Opt. Commun.* 238 (2004), p. 229–236 (cf. p. 52, 53).
- [103] T. SETÄLÄ, J. TERVO et A. T. FRIBERG. « Contrasts of Stokes parameters in Young's interference experiment and electromagnetic degree of coherence ». In : *Opt. Lett.* 31 (2006), p. 2669–2671 (cf. p. 64).
- [104] M. S. SEYMOUR et I. G. CUMMING. « Maximum likelihood estimation for SAR Interferometry ». In : *Proc. International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS'94)*, Pasadena CA. IEEE, 1994, p. 2272–2275 (cf. p. 79).
- [105] J.C. SOUYRIS, P. IMBO, S. FJORTOFT R. Mingot et Lee ; J.S. « Compact Polarimetry Based on Symmetry Properties of Geophysical Media : The  $\frac{\pi}{4}$  Mode ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 43.3 (mar. 2005), p. 634–646 (cf. p. 96, 97).
- [106] P. STOICA et R. MOSES. *Spectral Analysis of Signals*. New Jersey : Prentice Hall, 2005 (cf. p. 85).
- [107] G. C. STOKES. « On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources ». In : *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 9 (1852), p. 399–416 (cf. p. 30).
- [108] M. TABB, T FLYNN et R CARANDE. « Full maximum likelihood inversion of PolInSAR scattering models ». In : *Proc. IGARSS'04*. 3. IEEE, 2004, 1232–1235 (cf. p. 78, 81, 84, 93).
- [109] S. TEBALDINI. « Single and Multipolarimetric SAR Tomography of Forested Areas : A Parametric Approach ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 48.5 (mai 2010), 2375–2387 (cf. p. 80).
- [110] J. TERVO, Ph. RÉFRÉGIER et A. ROUEFF. « Minimum number of modulated Stokes parameters in Young's interference experiment ». In : *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.* 10.5 (2008), p. 055002 (cf. p. 65).
- [111] J. TERVO, T. SETÄLÄ et A. T. FRIBERG. « Degree of coherence for electromagnetic fields ». In : *Opt. Express* 11 (2003), p. 1137–1142 (cf. p. 47, 50, 51, 56).
- [112] J. TERVO, T. SETALA, A. ROUEFF, Ph. RÉFRÉGIER et A. FRIBERG. « Two-point Stokes parameters : interpretation and properties ». In : *Optics Letters* 34.20 (2009), p. 3074–3076 (cf. p. 64, 65).
- [113] C. TISON, J.-M. NICOLAS, F. TUPIN et H. MAÎTRE. « A new statistical model for Markovian classification of urban areas in high-resolution SAR images ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 42.10 (oct. 2004), p. 2046–2057 (cf. p. 105).
- [114] T. le TOAN, A. BEAUDOIN, J. RIOM et D. GUYON. « Relating forest biomass to SAR data ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 30.2 (mar. 1992), p. 403–411. ISSN : 0196-2892 (cf. p. 75).
- [115] K. TODROS et J. TABRIKIAN. « General Classes of Performance Lower Bounds for Parameter Estimation—Part I : Non-Bayesian Bounds for Unbiased Estimators ». In : *IEEE Trans. on Information theory* 56.10 (2010), p. 5045–5063 (cf. p. 85).
- [116] R. TOUZI. « Target Scattering Decomposition in Terms of Roll-Invariant Target Parameters ». In : *Canadian Journal of Remote Sensing* 45.1 (jan. 2007), 73–84 (cf. p. 45).
- [117] R TOUZI, F. J. CHARBONNEAU, R. K. HAWKINS et P. W. VACHON. « Ship detection and characterization using polarimetric SAR ». In : *Canadian Journal of Remote Sensing* 30.3 (juin 2004), 552–559 (cf. p. 25).

- [118] R. N. TREUHAF, S. N. MADSEN, M. MOGHADDAM et van ZYL J. J. « Vegetation Characteristics and Underlying Topography from Interferometric Radar ». In : *Radio Sci.* 31 (nov. 1996), p. 1449–1495 (cf. p. 80, 81).
- [119] RN TREUHAF et SR CLOUDE. « The structure of oriented vegetation from polarimetric interferometry ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 37.16 (sept. 1999), 2620–2624. ISSN : 0196-2892 (cf. p. 78, 80, 81, 84).
- [120] P.H. VAN CITTERT. « Die Wahrscheinliche Schwingungsverteilung in Einer von Einer Lichtquelle Direkt Oder Mittels Einer Linse Beleuchteten Ebene ». In : *Physica* 1 (1934), p. 201–210 (cf. p. 47).
- [121] H. L. VAN TREES et K. L. BELL. *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part I : Detection, estimation, and filtering theory.* 2<sup>e</sup> éd. New York : John Wiley et Sons, Inc., 2013 (cf. p. 84, 85).
- [122] Gabriel VASILE, Jean-Philippe OVARLEZ, Frederic PASCAL et Celine TISON. « Coherency Matrix Estimation of Heterogeneous Clutter in High-Resolution Polarimetric SAR Images ». In : *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 48.4, Part 1 (avr. 2010), 1809–1826 (cf. p. 45, 105).
- [123] E. VASQUEZ, F. GALLAND, G. DELYON et Ph. RÉFRÉGIER. « Mixed segmentation-detection-based technique for point target detection in nonhomogeneous sky ». In : *App. Opt.* 49.9 (2010), p. 1518–1527 (cf. p. 105).
- [124] E. VERDET. *Leçons d'optiques physiques.* Paris : Levisal, 1865 (cf. p. 47).
- [125] L. VINCENT et P. SOILLE. « Watersheds in digital spaces : an efficient algorithm based on immersion simulations ». In : *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13.6 (1991), p. 583–598 (cf. p. 26).
- [126] V. WASIK, A. ROUEFF et Ph. RÉFRÉGIER. « Bi-component partially coherent light ». In : 1<sup>st</sup> *Conference on Coherence and Random Polarization, Joensuu, Finland.* 2014 (cf. p. 17).
- [127] N. WIENER. « Generalized harmonic analysis ». In : *Acta Math.* 55 (1930), p. 119–260 (cf. p. 30).
- [128] E. WOLF. « A Macroscopic Theory of Interference and Diffraction of Light from Finite Sources. I. Fields with a Narrow Spectral Range ». In : *Proc. R. Soc. Lond. A* 225 (1954), p. 96–111 (cf. p. 30).
- [129] E. WOLF. « Optics in terms of observable quantities ». In : *Nuovo Cimento* 12 (1954), p. 884–888 (cf. p. 30, 47).
- [130] E. WOLF. « Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams ». In : *Phys. Lett. A* 312 (2003), p. 263–267 (cf. p. 47, 50, 59).
- [131] E. WOLF. *Introduction to the Theory of coherence and Polarization of Light.* New York : Cambridge University Press, 2007 (cf. p. 60).
- [132] F. ZERNIKE. « The concept of degree of coherence and its application to optical problems ». In : *Physica* 5 (1938), p. 785–795 (cf. p. 47).