Dynamique des étoiles de masse intermédiaire en rotation rapide et contraction gravitationnelle

Delphine Hypolite

▶ **To cite this version:**

Delphine Hypolite. Dynamique des étoiles de masse intermédiaire en rotation rapide et contraction gravitationnelle. Astrophysique [astro-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2015. Français. NNT : 2015TOU30234 . tel-01258439v2

HAL Id: tel-01258439
https://hal.science/tel-01258439v2

Submitted on 14 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *21/10/2015* **par :**

Delphine HYPOLITE

Dynamique des étoiles de masse intermédiaire en rotation rapide et contraction gravitationnelle

---

JURY

Corinne CHARBONNEL	Directeur de recherche	Examinateur
François LIGNIERES	Directeur de Recherche	Examinateur
Stéphane MATHIS	Chercheur CEA	Examinateur
Ana PALACIOS	Astronome adjoint	Rapporteur
Michel RIEUTORD	Professeur	Directeur de thèse
Lionel SIESS	Chercheur FNRS	Rapporteur
Francisco ESPINOSA LARA	Chercheur	Invité

École doctorale et spécialité :
SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :
Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur de Thèse :
Michel RIEUTORD

Rapporteurs :
Ana PALACIOS et *Lionel SIESS*

Remerciements

Il est amusant que les remerciements arrivent en premier, quand, en réalité, ils closent le long travail de rédaction d'un manuscrit de thèse. Cet exercice est plaisant en ce qu'il demande de se remémorer les meilleurs moments passés durant les années de thèse mais il est aussi source de frustration car il s'agit d'être concis.

Je remercie tout d'abord Corinne Charbonnel pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury et pour m'avoir chaleureusement soutenue à chacune de nos rencontres. Ce qu'elle incarne, aussi bien en tant que personne que femme de science, est pour moi un modèle.

Je remercie Michel Rieutord, directeur de cette thèse, pour son encadrement constructif. Son esprit scientifique, sa rigueur professionnelle et ses qualités pédagogiques sont pour moi un exemple.

Je remercie mes rapporteurs Ana Palacios et Lionel Siess qui se sont prêtés à l'exercice difficile de relecture de ce manuscrit. Cette version a largement bénéficié de leurs remarques pertinentes.

Je remercie François Lignières qui m'a aidée dès ma candidature à l'école doctorale. Chacun de nos échanges a été riche d'enseignements. Ses capacités de leader et son esprit de défi ont élargi ma perception du métier.

Je remercie Francisco Espinosa Lara qui a eu la gentillesse de répondre à toutes mes questions sur le code Ester et ce même bien après son retour en Espagne.

Je remercie Stéphane Mathis pour la confiance qu'il me témoigne en m'offrant un post-doctorat à ses côtés. Ses conseils toujours rassurants et ses remarques témoignant d'une grande intelligence ont renforcé en moi l'envie de poursuivre dans la recherche scientifique.

Je remercie toute l'équipe PS2E pour m'avoir accueillie et soutenue avec bienveillance.

J'ai une pensée toute particulière pour Sylvie Vauclair, Pascal Petit et Laurène Jouve qui ont suscité et entretenu en moi le goût de la physique stellaire.
Je remercie aussi Thierry Roudier qui démontre jour après jour les vertus d'un sourire franc.

Je suis très reconnaissante envers Bertrand Putigny qui m'a grandement aidée lors de cette dernière année à maîtriser le code Ester et ce avec toujours beaucoup de gentillesse et d'humilité.

Je tiens aussi à remercier François Rincon dont j'ai fortement apprécié la relecture de mon manuscrit et les conseils à un moment critique de la rédaction.

Je remercie Thierry Contini pour m'avoir initiée au plaisir de la diffusion du savoir et pour m'avoir soutenue dans toutes mes entreprises.

Je remercie également Marie-Claude Cathala pour sa disponibilité et sa gentillesse. Au-delà de ses responsabilités au sein de l'école doctorale, c'est une personne qu'il fait bon rencontrer.

Je remercie Francis Dhiver pour sa relecture et ses remarques qui témoignent d'un esprit vif et de beaucoup d'humour.

Je remercie maintenant et tout naturellement tous les doctorants qui ont ramé dans le même bateau que moi durant ces trois dernières années. Leur amitié, leur humour, leur amour et les nombreuses parties de tarot ont été pour moi une source inépuisable de réconfort et d'encouragement.

Je remercie, pour finir, ma famille qui s'est toujours montrée encourageante. Leur soutien constant et les nombreuses relectures ont énormément apporté à ce manuscrit et je peux dire que sans elle je n'en serais pas là.

Résumé

La rotation a un impact majeur sur la structure et l'évolution des étoiles. En particulier, elle est connue pour être responsable de processus de mélanges macroscopiques des éléments chimiques et de transport de moment cinétique au sein des zones radiatives des étoiles. Dans la première partie de cette thèse, nous montrons comment l'état actuel de la modélisation stellaire justifie une nouvelle approche bi-dimensionnelle qui ne repose pas sur les hypothèses usuelles de rotation faible ou de rotation différentielle sphérique.

Nous développons, dans la deuxième partie, un modèle simplifié (approximation de Boussinesq) d'étoiles en rotation rapide, en deux dimensions, où la rotation différentielle qui s'instaure et la circulation méridienne associée sont calculées de manière cohérente. Nous y identifions les paramètres pertinents à la description de l'écoulement induit par une contraction gravitationnelle dans un environnement stratifié de manière stable.

Dans la troisième partie, nous démontrons que cet écoulement de spin-up l'emporte sur l'écoulement barocline à l'issue d'un temps de Kelvin-Helmholtz. La rotation différentielle adopte un profil universel cylindrique et la circulation méridienne est celle d'un écoulement de spin-up. Une couche de Stewartson s'établit aussi sur le cylindre tangent au noyau du modèle et pourrait être la source d'un couplage efficace de la rotation du noyau et de celle de l'enveloppe d'une étoile en fin de Séquence Principale.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous étudions Achernar, étoile en rotation rapide de type *Be* à l'aide du code compressible ESTER. Les modèles obtenus tendent à montrer que l'étoile est en contraction gravitationnelle post-Séquence Principale. Pour en rendre compte, le code ESTER a été modifié afin de suivre l'évolution chimique de l'étoile sur une échelle de temps nucléaire.

Abstract

Rotation greatly impacts stellar structure and evolution. Particularly, it is known to be responsible of macroscopic mixings of chemical elements and transport of angular momentum within the radiative zones of stars. In the first part of this thesis, we show how the actual state of stellar modeling calls for a bi-dimensional approach going beyond usual assumptions of slow rotation and spherical differential rotation.

We develop, in the second part of this thesis, a simplified model (Boussinesq approximation) of rapidly rotating stars in two dimensions, where the establishing differential rotation and associated meridional circulation are solved self-consistently. We describe the relevant parameters of the flow induced by a gravitational contraction in a stably stratified environment.

In the third part, we demonstrate that this spin-up flow outweighs the baroclinic flow on a Kelvin-Helmholtz timescale. The differential rotation adopts an universal cylindrical profile and the meridional circulation is typical of the spin-up flow. A Stewartson layer appears too upon the tangent cylinder to the core and could explain an efficient coupling between the rotation of the core and the one of the envelope for stars at the end of the Main Sequence.

In the last part of this thesis, we study Achernar, a rapidly rotating *Be* star, with the full-compressible ESTER code. Models we obtain tend to show that the star is undergoing a post Main Sequence gravitational contraction. To account this, the ESTER code has been modified to follow the chemical evolution of stars on a nuclear timescale.

Table des matières

Remerciements **i**

Introduction **1**

1 Présentation de la problématique **5**

1.1 Problématiques associées à la rotation stellaire 5

1.1.1 Historique du modèle standard et des mécanismes de mélange 5

1.1.2 Rotation et zone radiative 9

1.1.3 Les modèles 1D actuels 10

1.2 La problématique des étoiles en rotation rapide 13

1.2.1 Historique de la modélisation stellaire en 2D 13

1.2.2 Les modèles d'étoiles de Pré-Séquence Principale 14

1.3 La contraction gravitationnelle : Le problème de spin-up en mécanique des fluides 15

1.4 Application astrophysique : Etude de l'étoile α Eridani 18

1.5 Introduction aux concepts de base de la mécanique des fluides 21

1.5.1 La dynamique des fluides visqueux incompressibles 21

Equation de continuité 21

Equation de Navier-Stokes 21

Définition du concept de couche limite 22

1.5.2 La dynamique des fluides visqueux incompressibles en rotation 23

Ecoulement géostrophique 23

Couche d'Ekman 24

Couche de Stewartson 24

Baroclinicité 25

Approximation de Boussinesq 26

Objectifs du travail de thèse **27**

2 Modèle d'enveloppe stellaire incompressible en contraction gravitationnelle **29**
2.1 Le modèle . . . 29
2.1.1 Description du modèle . . . 29
2.1.2 Caractéristiques du cœur . . . 30
2.2 Equations de la dynamique d'une enveloppe stellaire en contraction gravitationnelle . . . 31
2.2.1 Equations du mouvement . . . 32
Equation de continuité . . . 32
Equation de Navier-Stokes . . . 32
2.2.2 Equations sans dimensions . . . 33
2.2.3 Forçage et linéarisation . . . 34
Evaluation des nombres sans dimension . . . 34
Définition du forçage . . . 36
Linéarisation . . . 36
Equation de la vorticité . . . 37
2.2.4 Conditions aux limites . . . 37
2.3 L'accélération du taux de rotation du cœur et analyse aux couches limites . . 38
2.3.1 Solution analytique de l'écoulement de spin-up dans le cas non visqueux 38
2.3.2 Correction de couche limite à l'interface cœur-enveloppe . . . 38
2.3.3 Correction de couche limite à la surface . . . 39
2.3.4 Théorème du moment cinétique . . . 40
2.3.5 Evolution temporelle du taux de rotation du cœur . . . 41
2.4 Dynamique d'une enveloppe stratifiée stablement . . . 43
2.4.1 Equations sans dimension de la dynamique des fluides baroclines . . . 44
2.4.2 Fréquence de Brunt-Väisälä . . . 46
2.4.3 Ecoulement azimutal . . . 46
2.4.4 Equations de la dynamique des fluides du cas barocline avec contraction gravitationnelle . . . 48

3 Simulations numériques et résultats **51**
3.1 Solutions stationnaires numériques et analytiques . . . 51
3.1.1 Ecoulement stationnaire induit par la contraction gravitationnelle . . . 51
3.1.2 Ecoulement stationnaire barocline . . . 52
3.2 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle . . . 54
3.2.1 Compétition entre l'écoulement barocline et l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle . . . 54
3.2.2 Nombre B_a critique, dépendance à la viscosité . . . 56
3.3 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle avec des conditions Glissement Sans Frottement à la surface 58

3.3.1 Ecoulement barocline . . . 59
3.3.2 Ecoulement géostrophique . . . 59
3.3.3 Nombre B_a critique . . . 62
3.3.4 Amplitude de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle . 63
3.4 Solutions transitoires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle . . . 65
3.4.1 Solution transitoire induite par la contraction gravitationnelle . . . 67
3.4.2 Solution transitoire barocline . . . 68
Equation de l'énergie . . . 68
Equation du mouvement . . . 70
En résumé . . . 71
3.5 Stabilité . . . 71
3.5.1 Instabilité centrifuge . . . 71
3.5.2 Stabilité de la couche de Stewartson . . . 74
3.6 Caractéristiques de la dynamique . . . 76
3.6.1 Impact du nombre de Prandtl . . . 76
3.6.2 Expansion de l'enveloppe . . . 77
Vent stellaire isotrope . . . 77
Vent stellaire anisotrope . . . 78
3.7 Conclusion . . . 80

4 Contraction gravitationnelle d'un fluide compressible 83
4.1 Etude de l'étoile α Eridani et modélisation bidimensionnelle avec le code ESTER 84
4.1.1 Modélisation d'α Eridani par le code ESTER, modèle de Séquence-Principale . . . 84
4.1.2 Modélisation d'α Eridani par le code ESTER, modèle en contraction gravitationnelle . . . 85
4.1.3 Impact de la composition chimique . . . 90
4.2 Modification du code ESTER, évolution de la composition chimique . . . 98
4.2.1 Calcul de taux de production d'énergie nucléaire et variation de la composition chimique par le code CESAM2k . . . 99
4.2.2 Mise en œuvre . . . 101
4.3 Bilan . . . 102

Conclusions et perspectives 105

A Méthode numérique associée au code 2D incompressible 109
A.1 Discrétisation radiale . . . 109
A.2 Projection des équations sur la base des harmoniques sphériques . . . 110
A.3 Méthode de résolution du système d'équations . . . 112

A.4 Conditions aux bords sur le champ de température 112

B Le code ESTER **115**

B.0.1 Equations de la dynamique 116
Adimensionnalisation des équations 117
Composition chimique des modèles ESTER et production d'énergie nucléaire 118
B.0.2 Méthode numérique 119
Différenciation des fonctions 119
Coordonnées sphéroïdales 119
Conditions aux bords 120
Algorithme de Newton 121

Publication **121**

Bibliographie **137**

Introduction

La vie sur les planètes repose, lorsqu'elle existe, sur la source d'énergie que leur fournit leur étoile mère. Ainsi sur Terre, elle dépend du Soleil et de son évolution. Bien que les mécanismes d'évolution stellaire à l'échelle de temps nucléaire soient clairement identifiés, un approfondissement de leur compréhension paraît de nature à ouvrir des perspectives sur des questions astrophysiques de premier ordre telles que :

⋆ comment se forment et évoluent les systèmes planétaires ?

⋆ comment évolue la composition chimique de la Galaxie ?

Lors de la formation stellaire, l'accrétion d'un disque de poussière et de gaz autour de la proto-étoile peut conduire à la formation d'un cortège planétaire. L'étendue de la zone habitable autour de l'étoile dépend des paramètres stellaires. De plus, les paramètres orbitaux des planètes (distance à l'astre central, orientation de l'axe et vitesse de rotation...etc.) sont connus pour influencer leur climat. Par exemple, l'angle que fait l'axe de rotation de la Terre avec l'écliptique est responsable des saisons et leur intensité est sensible aux variations d'obliquité de la Terre. En parallèle, les planètes subissent des phénomènes comme le vent stellaire ou l'activité magnétique stellaire et notamment lorsque l'activité solaire a connu à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle un minimum, appelé minimum de Maunder, l'Europe a traversé un petit âge glaciaire.

Concernant la seconde question, via la nucléosynthèse et l'enrichissement du milieu interstellaire en éléments lourds, les étoiles sont responsables de l'évolution chimique de la Galaxie. Elles influencent les nouvelles générations stellaires en polluant les environnements avoisinants en éléments lourds issus des processus de fin de vie des étoiles.

On comprend ainsi que prédire l'évolution temporelle des étoiles est primordial en astrophysique. Or l'âge des étoiles n'est pas un paramètre bien connu. Dans le système solaire, la radioactivité naturelle permet de dater les corps célestes comme les météorites par exemple, mais ne donne aucune indication sur l'historique du Soleil sur ces cinq derniers milliards d'années (par exemple sa luminosité au cours du temps). Les seuls outils qui permettent d'estimer un âge stellaire en établissant la chronologie des évènements sont les modèles stel-

laires. Ces simulations numériques sont à l'image de la compréhension que nous avons des mécanismes physiques en jeu au sein des étoiles. Les premiers modèles d'étoiles ainsi créés sont sphériques, à l'équilibre hydrostatique. Les zones convectives sont mélangées et les zones radiatives au repos.

Si les modèles standard d'évolution stellaire reproduisent de nombreuses propriétés stellaires observées, il existe des différences, appelées anomalies, entre les abondances en éléments chimiques des modèles et les données observationelles. D'une manière générale, les anomalies d'abondance sont corrélées à la rotation des étoiles, les rotateurs lents et rapides présentant des anomalies systématiques sur la Séquence Principale. Cette rotation, généralement différentielle, est responsable d'un mélange supplémentaire dans les zones radiatives des étoiles, appelé mélange rotationnel qui pourrait permettre d'interpréter les observations d'abondances. Par exemple, le lithium 7, qui est présent en trop grande quantité à la surface des modèles d'étoiles de faible masse, pourrait être davantage ramené en profondeur où il est détruit.

Mais le mélange rotationnel, processus qui en plus de mélanger les éléments chimiques, redistribue le moment cinétique et affecte la dynamique des zones radiatives, n'est pas le seul effet de la rotation. En effet, la rotation a un impact majeur sur tous les champs de la physique stellaire. Elle modifie, en les aplatissant, la forme des étoiles et par conséquent les quantités de surface comme la gravité effective ou la température effective ne sont pas constantes à la surface. Les phénomènes de vent stellaire ou de perte de masse deviennent anisotropes. La rotation induit aussi le splitting rotationnel entre les modes d'oscillations non-axisymétriques dans les spectres issus de l'astérosismologie. Cela fait naître le besoin de modèles théoriques et numériques plus sophistiqués. Mais modéliser les étoiles est une entreprise complexe qui nécessite une approche multi-disciplinaire impliquant, pour n'en citer que quelques unes, les théories de la mécanique des fluides, de la thermodynamique ou de la physique nucléaire. Dans l'idéal, il s'agit de résoudre temporellement et spatialement les équations de la magnétohydrodynamique en trois dimensions. Cependant, la physique stellaire rencontre un problème classique de disparité d'échelles de temps et d'espace. Par exemple, la turbulence agit aux petites échelles de temps (de l'ordre par exemple de la minute) alors que la durée de vie d'une étoile est de l'ordre du million ou du milliard d'années. Ainsi, nous faisons généralement appel aux modèles à une dimension (1D) qui ont la capacité de couvrir la vie entière des étoiles. Mais de nombreux résultats récents remettent en question l'implémentation de la rotation dans les modèles 1D. Il a, entre autres, été mis en évidence que, selon la façon dont la rotation est prise en compte, par exemple via un processus de diffusion ou une modélisation au premier ordre de l'advection méridienne, les codes 1D produisent des tracés évolutifs différents, remettant en cause l'estimation de l'âge des étoiles (ainsi que des amas) et notre interprétation du diagramme HR. Cela provient principalement du fait que les effets de la rotation sont intrinsèquement multi-dimensionnels, comme le sont la rotation différentielle en latitude du Soleil ou la circulation méridienne associée.

Le travail présenté dans cette thèse propose une approche bi-dimensionnelle (profondeur et latitude) pour décrire les profils de rotation interne des étoiles. Nous nous intéressons aux étoiles de Pré-Séquence Principale où la source d'énergie est gravitationnelle via la

contraction que l'étoile subit sur l'échelle de temps de Kelvin-Helmholtz. Au cours de la contraction, la pression centrale augmente tandis que le rayon diminue et que le taux de rotation augmente. C'est ce que l'on appelle en mécanique des fluides un phénomène de spin-up. Finalement, la température centrale atteint celle de fusion de l'hydrogène et l'étoile atteint la Séquence Principale. Notre but est de décrire la rotation différentielle installée dans les zones radiatives à l'issue de cette phase de contraction, de façon à fournir aux modèles de Séquence Principale des conditions initiales dynamiques réalistes.

Dans le premier chapitre, nous discutons les questions astrophysiques auxquelles ce travail de thèse se rapporte. Nous détaillons l'état de l'art en termes de modélisation stellaire et de mécanique des fluides et nous précisons les défis techniques et problématiques stellaires qu'un modèle de spin-up à deux dimensions soulève. Après avoir explicité les objectifs détaillés de la thèse, nous développons dans le deuxième chapitre un modèle incompressible d'étoile en rotation rapide et contraction gravitationnelle. Nous présentons dans le chapitre trois les résultats que ce modèle numérique nous livre. En l'occurence, nous décrivons l'état dynamique d'une étoile atteignant la Séquence Principale dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq. Ces deux chapitres ont fait l'objet d'une publication Hypolite & Rieutord (2014). Dans le quatrième et dernier chapitre, nous décrivons brièvement le code ESTER, code 2D compressible, que nous testons avec l'étoile Achernar, étoile *Be* de masse intermédiaire en rotation rapide, dont les paramètres stellaires n'ont encore été reproduits par aucun code d'évolution.

Chapitre 1

Présentation de la problématique

1.1 Problématiques associées à la rotation stellaire

Pour connaître l'histoire des étoiles et être capable de prédire leur évolution, l'outil de prédilection est la modélisation stellaire. Seuls capables d'apporter une chronologie aux évènements, les modèles numériques peuvent être comparés aux données observationnelles et testent notre compréhension des mécanismes physiques agissant dans les intérieurs stellaires. Avant de développer les problématiques soulevées par une modélisation à deux dimensions, il est nécessaire de décrire le rôle que la modélisation à une dimension a joué. En effet, elle a bâti nos connaissances et intuitions en physique stellaire car elle est la seule à livrer une description de l'évolution des étoiles sur les plus grandes échelles de temps.

1.1.1 Historique du modèle standard et des mécanismes de mélange

Nous souhaitons rappeler les étapes clef dans la construction des modèles d'évolution stellaire à une dimension. Nous voulons amener le lecteur à comprendre comment la rotation stellaire s'est naturellement imposée dans les modèles, pour mieux répondre aux exigences observationnelles.

Sur la Séquence Principale, les modèles d'évolution stellaire standard (sans mécanisme de transport), développés en imposant la symétrie sphérique, sont des modèles à l'équilibre hydrostatique où la composition chimique évolue dans le temps. Ces codes nécessitent la résolution des équations de structure conjointement à l'équation d'évolution temporelle de la composition chimique. Dans les régions internes, l'équation de l'énergie nécessite une prescription du flux de chaleur. Il est alors déterminé en fonction de la stabilité d'une région vis-à-vis du critère de Schwartzchild. Lorsque ce critère prévoit une zone stable (lorsque le gradient de température local est inférieur en valeur absolue au gradient adiabatique), le transport d'énergie est radiatif, i.e. le flux de chaleur est transporté vers la surface par les photons. La zone est stipulée mécaniquement au repos. Par conséquent, les abondances d'éléments chimiques produits ou détruits localement se maintiennent à leur profondeur

initiale. Si, vis-à-vis de ce même critère, la zone est instable, le transport d'énergie est convectif et la zone est considérée comme étant chimiquement homogène car instantanément mélangée par les mouvements de matière. En résumé, dans ces modèles, seule la convection, paramétrée par la hauteur de pression dans la théorie de la longueur de mélange (Böhm-Vitense, 1958), mélange les éléments chimiques au sein de l'étoile.

Les modèles résultant de cette implémentation montrent des différences systématiques avec les observations. Par exemple, Maeder (1974) a mis en évidence que les modèles ne prévoient pas l'emplacement observé des sous-Géantes dans un diagramme couleur-magnitude. Le lithium 7, isotope issu notamment de la nucléosynthèse primordiale, est détruit dès que la température atteint 2.6 10^6K (Wallerstein & Conti, 1969). A cette température, cet isotope ne pourrait alors disparaître de la surface que durant la phase de Pré-Séquence Principale d'après les modèles standard d'étoiles de type solaire et, pour une température effective donnée, son abondance devrait rester constante pendant la Séquence Principale (Balachandran, 1995). Or les modèles d'étoile de type solaire de Séquence-Principale présentent une abondance de lithium 7 dix fois supérieure aux observations (Spite & Spite, 1982). Les étoiles de masse intermédiaire de Séquence Principale présentent également des anomalies d'au moins un ordre de grandeur en éléments lourds (Preston (1974),Talon (1997)). Il est à noter que ces types spectraux ont des rotations particulièrement lentes. Les étoiles massives de type O et B, généralement en rotation rapide, ont des abondances d'hélium supérieures aux modèles standard de Séquence Principale (Langer, 1992). Cela laisse à penser que les anomalies d'abondance peuvent être corrélées à la rotation des étoiles. Cependant, dans un premier temps, ce sont d'abord des processus dits non standard, capables de faire migrer des éléments chimiques au travers des zones radiatives, qui sont ajoutés aux modèles pour pallier ces désaccords. Les premiers processus d'origine microphysique ajoutés peuvent être distingués au nombre de trois principaux :

- ⋆ La diffusion atomique qui se base sur le mouvement stochastique des particules (Chapman, 1917). Ce processus est analogue à une diffusion de concentration chimique et tend à adoucir les gradients de composition chimique.
- ⋆ Le triage gravitationnel qui fait descendre les éléments lourds par rapport aux éléments légers. Ce mécanisme à tendance à accentuer les gradients de composition chimique.
- ⋆ L'accélération radiative qui fait remonter les ions via la pression de radiation (Alecian, 1994). Cet effet accentue lui aussi les gradients de composition chimique.

Cette liste n'est pas exhaustive et d'autres effets ont montré un affaiblissement des excès d'abondance comme par exemple les travaux d'Eddington.

La zone radiative contrôle ainsi l'échelle de temps de transport des éléments chimiques. La diffusion explique par exemple les faibles abondances d'hélium des étoiles *Ap-Bp* (Michaud, 1980) mais l'écart entre prédiction et observations reste non négligeable concernant les abondances de lithium 7.

Le traitement de la zone convective a été amélioré en prenant en compte des mécanismes comme l'overshoot et la convection pénétrative (Maeder & Meynet, 1989). Selon la valeur

du nombre de Péclet

$$Pe = \frac{lv}{\kappa}$$

qui quantifie le transport par advection par rapport au transport diffusif, un panache convectif peut perdre son identité thermique et modifier la stratification dans la zone radiative. La limite de la zone convective peut ainsi varier et permettre à des éléments chimiques contenus dans une enveloppe convective d'atteindre des zones plus profondes et plus chaudes.

Cette implémentation permet de retrouver le profil de vitesse du son à l'intérieur du Soleil avec une différence inférieure à 1% par rapport aux résultats issus de l'héliosismologie. Malgré cela, le ratio de surface de carbone 12 sur carbone 13 ou azote 14 est prédit plus important que celui observé sur la branche des Géantes pour les étoiles de faible masse (Charbonnel, 1994). La conjecture est que le carbone 13 n'est pas été assez ramené en surface par dragage convectif au moment du premier dredge-up. Les éléments C, N et O ne sont pas parfaitement reproduits (Maeder *et al.*, 2014) et le « problème » du lithium persiste (Cyburt *et al.*, 2008). Il faut invoquer un processus supplémentaire pour transporter le lithium depuis l'enveloppe jusque dans les régions où il est brûlé. De plus, davantage d'éléments synthétisés au cœur devraient pouvoir remonter à la surface des étoiles comme l'indique les observations d'étoiles de Séquence Principale.

La rotation est alors largement désignée comme élément indispensable à la modélisation stellaire par de nombreux travaux sur la problématique. D'ores et déjà parce que les anomalies d'abondance et la rotation stellaire sont corrélées, e.g. (Savanov, 1995), (Frischknecht *et al.*, 2010), (Maeder, 2009). Par exemple, comme le montre la figure (1.1), Lyubimkov *et al.* (2004) a trouvé une corrélation entre la surabondance d' hélium avec le $v \sin i$ des étoiles de type B dans la partie haute de la Séquence Principale. Ensuite parce que, comme nous allons le voir, la prise en compte des effets de la rotation sur la dynamique interne des étoiles et sur les propriétés de transport d'éléments ou de moment cinétique semble essentielle à la résolution de nombreux problèmes.

En effet, la rotation a un impact sur la plupart des champs de la physique stellaire et interpréter les observations d'abondances est loin d'en être l'unique enjeu :

- ⋆ Concernant la modélisation stellaire, tous les paramètres de sortie, la température effective, la gravité effective ou la luminosité par exemple, sont différents dès lors que la rotation est prise en compte (Meynet & Maeder, 2000). Or, une des méthodes d'estimations des âges stellaires et des amas les plus usitées repose sur la comparaison d'observations par rapport aux tracés évolutifs issus des modèles (Soderblom, 2010).

- ⋆ Autre exemple, le transport induit par la rotation dans les zones radiatives joue un rôle clef dans la nucléosynthèse des éléments s, en ce qu'il fournit davantage de source de neutrons, dans les étoiles massives à faible métallicité (Frischknecht *et al.*, 2012).

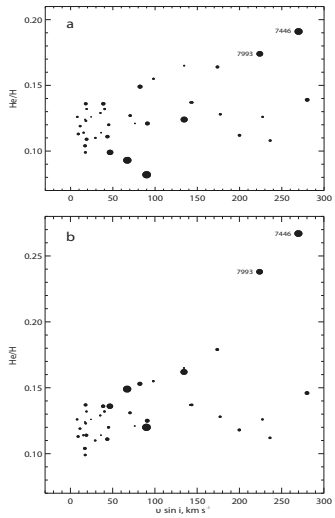


FIGURE 1.1 – Abondance d'hélium en fonction de la vitesse de rotation projetée le long de l'axe de visée d'étoiles dont l'âge normalisé est 70% de la durée de la Séquence Principale (Lyubimkov *et al.*, 2004). Les étoiles HR 7993 et 7446 ont respectivement une masse de $14.9M_{\odot}$ et $17.6M_{\odot}$. La taille des cercles est proportionnelle à la masse des étoiles.

⋆ On pense aussi que la rotation est cruciale pour comprendre l'évolution des étoiles de première génération. Ces étoiles, moins métalliques que les étoiles actuelles, étaient plus compactes et avaient des vents stellaires plus faibles. Elles devaient donc avoir un taux de rotation plus élevé. Ces effets rotationnels contribuent à l'enrichissement en métal du milieu interstellaire et mieux les comprendre permettrait de reconstruire l'histoire chimique de la Galaxie et de comprendre comment les étoiles actuelles ont été influencées par la première génération. En effet, l'évolution chimique des galaxies et de l'enrichissement en métaux du milieu intergalactique sont des problématiques liées à la formation stellaire encore mal maitrisées (Sobral *et al.* (2015), Lilly *et al.* (2013)).

⋆ La rotation est aussi importante à la fin de vie des étoiles. Concernant les étoiles massives, Metzger *et al.* (2011) montrent que l'effet combiné de la rotation et des champs magnétiques peut conduire à l'explosion en supernovae et la production d'un sursaut gamma (GRBs).

⋆ Les étoiles de types *Be*, qui sont des étoiles en rotation rapide, sont connues pour avoir des épisodes de forts vents stellaires anisotropes. Elles sont souvent massives ($M = [2M_{\odot}, 16M_{\odot}]$,) avec un disque de décrétion pulsant sous l'effet du κ mécanisme. La perte de masse par vent radiatif est plus importante au pôle par l'effet d'assom-

brissement gravitationnel mais la gravité effective plus faible à l'équateur conduit à une perte de masse équatoriale lorsque l'étoile atteint la vitesse de rotation critique (la gravité est compensée par la force centrifuge). De récents travaux montrent que la rotation rapide pourrait être la base du phénomène de perte de masse équatorial (Neiner *et al.*, 2013). En effet, la rotation en excitant des ondes gravito-inertielles dans l'enveloppe permettrait le transport de moment cinétique du noyau vers la surface. La surface en tournant de plus en plus vite pourrait alors atteindre la vitesse critique. Maeder (2002) montre que l'anisotropie de la perte de masse de ces étoiles a un impact sur la quantité de moment cinétique emporté et influence l'évolution du taux de rotation stellaire.

⋆ Dernier exemple, la rotation altère les fréquences des modes d'oscillation dans les spectres des étoiles. Elle lève la dégénerescence sur les modes non-axisymétriques en générant un splitting rotationnel (Deupree & Beslin, 2010). Pour des taux de rotation faible, la théorie asymptotique de Tassoul (1980) permet l'indentification des modes. Ce domaine en progrès nécessite d'être généralisé aux rotateurs rapides (Reese *et al.*, 2006) afin d'avoir une nouvelle fenêtre sur les étoiles de type précoce.

1.1.2 Rotation et zone radiative

Si aujourd'hui il peut paraître évident que pour rendre compte des effets de la rotation dans les étoiles, les zones radiatives ne peuvent pas rester au repos, il a fallu que cela soit démontré. Considérons une étoile dans un état barotrope. La pression, la température et la densité ont des gradients alignés et nous pouvons les écrire comme des fonctions du potentiel uniquement : $P(\Phi)$, $T(\Phi)$ et $\rho(\Phi)$ où Φ est le potentiel total (somme des potentiels gravitationnels et centrifuges $\Delta\Phi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2$). Si la zone radiative est au repos, elle est notamment à l'équilibre thermique, soit

$$\vec{\nabla} \cdot (\chi(\Phi)\vec{\nabla}T(\Phi)) = 0 \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\chi(\Phi)T'(\Phi)\vec{\nabla}\Phi) = 0 \tag{1.1}$$

où T' est la dérivée spatiale de la température. Comme $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}f \cdot \vec{A}$, avec $f = \chi(\Phi)T'(\Phi)$ et $A = \vec{\nabla}\Phi$,
alors cette équation conduit à

$$\chi(\Phi)T'(\Phi)\Delta\Phi + \vec{\nabla}f(\Phi) \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0\ . \tag{1.2}$$

En utilisant l'équation de Poisson, on constate que le terme de gauche ne dépend que de Φ. D'où

$$F(\Phi) + \vec{\nabla}f(\Phi) \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0 \leftrightarrow F(\Phi) + f'(\Phi)(\vec{\nabla}\Phi)^2 = 0 \tag{1.3}$$

où f' est la dérivée spatiale de la fonction f. Or sur une équipotentielle, cette expression implique que la gravité effective (via $\vec{\nabla}\Phi$) est constante. Pourtant, un simple modèle de

Roche montre que celle-ci est différente au pôle et à l'équateur par exemple :

$$\vec{g}_{\text{eff pôle}} = -\frac{GM}{r_p^2}\vec{e_z} \quad ; \quad \vec{g}_{\text{eff équateur}} = -\left(\frac{GM}{r_e^2} - r_e\Omega^2\right)\vec{e_s} \tag{1.4}$$

Cela remet donc en question l'hypothèse de départ : la zone radiative d'une étoile en rotation n'est pas barotrope (on ne peut pas écrire la température, la densité et la pression comme des fonctions du potentiel uniquement). Ce résultat est connu sous le nom de paradoxe de Von Zeipel (von Zeipel (1924)). Vogt (1925), Eddington (1929) et Sweet (1950) ont alors proposé l'ajout du terme d'advection dans l'équation (1.1)

$$\vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{\nabla} T) = \rho c_v \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \tag{1.5}$$

qui génère une circulation méridienne et dont on peut entièrement déterminer les composantes de vitesse en couplant la résolution de cette équation à celle de conservation de la masse si T est prescrit.

C'est Randers (1941) qui remarque que le champ de vitesse calculé de cette façon n'est pas solution de l'équation du mouvement et donc ne conserve pas le moment cinétique.

L'erreur est de penser que l'on pouvait prescrire le champ de température. En effet, il varie trop rapidement sur l'échelle de temps de la vie des étoiles et le terme temporel $\frac{\partial T}{\partial t}$ n'est pas négligeable dans l'équation de l'énergie en cas de rotation rapide. En effet, le champ de température s'ajuste à la déformation de l'étoile sur un temps d'Eddington-Sweet. Par conséquent, on ne peut pas déduire le champ de vitesse de l'équation de l'énergie de cette façon. La solution est apportée par Busse (1981). Il montre que la baroclinicité [1] produit une rotation différentielle (vent thermique) et non pas une circulation méridienne. En effet, les modes baroclines, amortis sur le temps d'Eddington-Sweet, n'ont pas de circulation méridienne quand la viscosité tend vers zéro.

Le champ de température dans les étoiles en rotation est à l'origine d'un couple barocline qui génère de la rotation différentielle. Le couple visqueux engendre une circulation méridienne associée (Rieutord, 2006). Cette circulation à grande échelle peut aussi bien transporter des éléments chimiques que du moment cinétique au travers des zones radiatives. La rotation différentielle y contribue également via les instabilités de cisaillement.

1.1.3 Les modèles 1D actuels

Aujourd'hui, la majorité des codes d'évolution stellaire 1D contiennent une façon de rendre compte du transport de moment cinétique et des éléments chimiques par les écoulements induits par la rotation dans les zones radiatives stratifiées stablement.

Les deux types de modélisation les plus répandus sont les suivants :

1. Cas non barotrope. Nous définissons ce concept de manière plus détaillée dans la dernière section de ce chapitre.

- ⋆ Le premier utilise une méthode décrite par Pinsonneault (1997). Le transport de moment cinétique et celui des éléments chimiques sont décrits par deux équations de diffusion couplées nécessitant l'ajustement empirique d'un coefficient de diffusion turbulente.
- ⋆ Le second est l'approche développée par Zahn (1992), Maeder & Zahn (1998) et Mathis & Zahn (2005). Les effets de la rotation sont moyennés sur une isobare. La rotation différentielle ne dépend ainsi que de la profondeur, ce que l'on appelle un profil de rotation *shellular*. La rotation est considérée comme étant une petite perturbation ne nécessitant que les premières harmoniques sphériques pour être décrite. Cette étude est limitée à de faibles taux de rotation. Cette rotation différentielle n'engendre alors pas explicitement de circulation méridienne associée. L'advection méridienne est modélisée au premier ordre en distinguant le transport de moment cinétique et celui des éléments chimiques. De plus, ces modèles présupposent une turbulence dans les zones radiatives qui redistribuent efficacement le moment cinétique et les éléments chimiques dans la direction horizontale (sur les isobares). L'équation du moment cinétique est écrite

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho r^2 \bar{\Omega}\right) = \underbrace{\frac{1}{5r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r^4 \bar{\Omega} U\right)}_{\text{circulation méridienne}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho \nu_v r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r}\right)}_{\text{turbulence}} \tag{1.6}$$

  et exprime l'effet conjoint de la circulation méridienne et de la diffusion turbulente (Chaboyer & Zahn, 1992).

La turbulence est générée par diverses instabilités hydrodynamiques comme par exemple celles liées à la stratification en densité (instabilité thermohaline, convection double diffusive, semi-convection), ou celles liés à la rotation (instabilité de Rayleigh-Taylor). D'autres termes peuvent aussi s'ajouter à droite dans l'équation du moment cinétique pour décrire par exemple une perte de masse ou encore la présence de champs magnétiques.

Ces modèles, précis concernant la microphysique, reproduisent de nombreuses observations, même s'ils reposent sur l'ajustement de coefficients de diffusion (la diffusivité turbulente), et confirment la nécessité de bien prendre en compte la rotation.

Par exemple, Charbonnel & Talon (1999) ont montré que les ondes de gravité internes ont les bonnes propriétés pour expliquer l'abondance de lithium en fonction de la masse des étoiles.On explique aussi le nombre de super géantes rouges dans les galaxies à faible métallicité (Maeder & Meynet, 2001) et le ratio de supernovae de type Ibc II est aussi reproduit (Meynet & Maeder, 2005).

Mais d'autres anomalies persistent. Par exemple, une des plus connues est celle identifiée grâce à la distribution d'étoiles B du Petit Nuage de Magellan dans un diagramme représentant l'abondance d'azote en fonction de la vitesse de rotation (appelé diagramme de Hunter), cf figure 1.2. Comme l'identifie Brott *et al.* (2011), des rotateurs lents montrent souvent une surabondance d'azote, et des rotateurs rapides quelque fois une sous-abondance

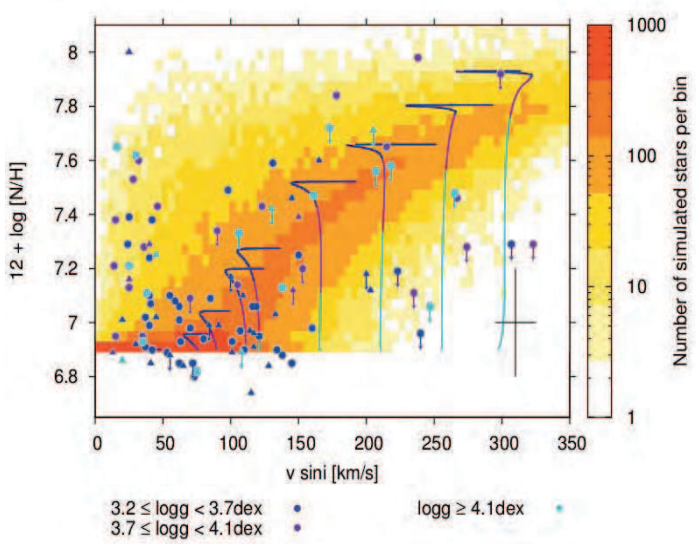


FIGURE 1.2 – Diagramme de Hunter (Brott *et al.*, 2011). L'abondance d'azote de surface $12 + \log N/H$ est représentée en fonction de la vitesse de rotation projetée des étoiles $v \sin i$. Les pixels, associés à la barre de couleur, montrent le nombre de modèles d'étoiles obtenus avec un code d'évolution stellaire avec rotation. Sont superposées en bleu et violet des données observationnelles provenant du Petit Nuage de Magellan.

d'azote par rapport aux modèles. Or on s'attend à ce que le mélange rotationnel soit corrélé au taux de rotation. Cela indique que soit il s'agit d'une composition particulière de la nébuleuse dans laquelle sont nées ces étoiles, soit les modèles 1D ne rendent pas suffisamment compte des caractéristiques du profil de rotation interne. Ce diagramme est bien sûr aussi influencé par l'usage de la vitesse de rotation projetée $v \sin i$ en abscisse. Il a aussi été remis en question récemment car la somme des abondances de carbone, d'azote et d'oxygène n'est pas constante dans ces travaux contrairement à ce qui est observé (Maeder *et al.*, 2014).

D'autre part, des travaux comme Martins & Palacios (2013) ont montré que selon la prescription utilisée pour rendre compte des effets de la rotation dans les modèles 1D, ceux-ci livrent des résultats divergents. Meynet *et al.* (2013) montrent également des différences importantes sur de paramètres de sortie de simulation comme par exemple les tracés évolutifs, la durée de la Séquence Principale, la composition de surface et la vitesse de rotation pendant la Séquence Principale selon la prescription du coefficient de diffusion de moment cinétique utilisée.

Cela illustre la difficulté des modèles 1D à rendre compte des effets intrinsèquement multidimensionnels de la rotation. En particulier, si dans les modèles 1D avec rotation, des anomalies d'abondance persistent, c'est parce qu'en certaines circonstances, la rotation stellaire est rapide. Or, la prescription de Zahn (1992), par exemple, repose sur un développement perturbatif et le taux maximal de rotation qui peut être utilisé de manière réaliste via cette prescription n'est pas connu. Pour s'en affranchir, il est nécessaire de relaxer la symmétrie sphérique des modèles et résoudre le champ de vitesse en prenant en compte les effets de la rotation de manière cohérente puisque les écoulements sont multi-dimensionnels.

1.2 La problématique des étoiles en rotation rapide

La première étape vers des modèles plus réalistes est de décrire les écoulements d'une étoile en rotation en deux dimensions. En l'absence de champ magnétique non-axisymétrique et sur des échelles de temps où l'on pourra moyenner les effets de la turbulence, cette approche semble suffisante pour fournir des paramètres de sortie pouvant être comparés aux observations et donner des contraintes aux modèles 1D.

1.2.1 Historique de la modélisation stellaire en 2D

L'observation des binaires à éclipse a appelé à des modèles à deux dimensions qui ont émergé dans les années soixante-dix afin de décrire la forme aplatie des étoiles en rotation. En effet, ces étoiles en montrant différentes faces avec des intensités lumineuses différentes au cours du temps ont mis en évidence le phénomène d'assombrissement gravitationnel (pôle plus lumineux que l'équateur).

On peut citer les premiers travaux de James (1964) qui considéra la rotation solide d'un polytrope auto-gravitant. En résolvant, à l'équilibre hydrostatique, l'équation de Poisson, il

fournit des tables qui, pour des indices polytropiques choisis, indique les rayons polaires et équatoriaux de l'étoile pour différents taux de rotation.

Par la suite, les efforts se sont concentrés à s'affranchir de l'utilisation d'un polytrope car il était déjà clair que les étoiles sont dans un état barocline. Pour une revue détaillée, nous conseillons la lecture de l'historique des modéles à deux dimensions de Rieutord & Espinosa Lara (2013).

On peut résumer le point faible de ces tentatives au fait qu'elles ne décrivent jamais la dynamique des zones radiatives. Or c'est bien cela qu'il nous faut résoudre pour quantifier le mélange et transport d'éléments chimiques et de moment cinétique. De surcroît, il serait préférable que la forme de l'étoile ainsi que le taux de rotation soient calculés de manière cohérente plutôt que d'être imposés.

Un effort considérable a été fait dans ce domaine avec la mise au point récemment du code ESTER (Espinosa Lara & Rieutord, 2012). Il s'agit du premier code à résoudre en deux-dimensions les équations hydrodynamiques d'une étoile en rotation rapide dans le cas compressible et stationnaire. Nous le décrivons brièvement en annexe.

Idéalement, modifier ce code de façon à ce qu'il évolue temporellement permettrait de comprendre l'impact de la rotation sur les différentes étapes de la vie des étoiles. Cependant, une telle entreprise est délicate. En effet, dès lors que l'on veut rendre compte par exemple de la contraction gravitationnelle d'une étoile de Pré-Séquence Principale (ou du cœur d'une étoile post Séquence Principale) par refroidissement radiatif, les équations couplées du mouvement et de l'énergie doivent évoluer en temps. Sans aucune connaissance a priori des solutions du problème, les résultats de telles simulations ne seraient pas interprétables facilement. C'est pourquoi, une première approche intéressante serait d'étudier l'interaction de la rotation et de la contraction gravitationnelle dans le cas incompressible. En effet, on s'attend à ce que celle-ci ait un impact significatif sur la rotation différentielle des étoiles quand on ne peut les considérer à l'équilibre thermique en ce qu'elle va induire une accélération de la rotation et une telle approche permettrait d'ouvrir la voie vers un modèle compressible. Par exemple, Espinosa Lara & Rieutord (2007) ont montré que la gestion des couches limites dans le code ESTER a été largement facilitée grâce à leur connaissance de l'écoulement barocline dans le cas incompressible (Rieutord, 2006), quand bien même les profils de rotation différentielle issues de ces modèles soient très différents.

Dans la section suivante, nous décrivons les principaux modèles de Pré-Séquence Principale.

1.2.2 Les modèles d'étoiles de Pré-Séquence Principale

Récemment des contraintes observationnelles sur la vitesse de rotation des étoiles de Pré-Séquence Principale ont été apportées (Irwin & Bouvier (2009), Hartman *et al.* (2010), Agüeros *et al.* (2011), Meibom *et al.* (2011), Irwin *et al.* (2011), Affer *et al.* (2012), 2013) montrant que les étoiles les plus massives sont généralement en rotation rapide. Il a été observé que le moment cinétique spécifique diminue de 5 ordres de grandeur entre la naissance d'une

étoile et le moment où elle atteint la Séquence Principale (Maeder, 2009) de manière encore mal comprise. Pourtant, via la contraction gravitationnelle, on s'attend à ce que le taux de rotation global de l'étoile augmente au cours de cette phase mais elle est aussi ralenties par des intéractions magnétiques avec son environnement. Pour cette raison, les modèles numériques qui ont suivis (Irwin *et al.* (2007), Bouvier (2008), Denissenkov *et al.* (2010), Spada *et al.* (2011), Reiners & Mohanty (2012), Gallet & Bouvier (2013)) prennent en compte des processus comme l'interaction étoile-disque circumstellaire ou le freinage magnétique, et des mécanismes de perte et de redistribution du moment cinétique internes étroitement liés à la rotation (Maeder *et al.*, 2014). Il s'agit bien souvent de modèles à double zone en rotation solide qui testent par exemple des relations de temps de couplage entre le cœur et l'enveloppe limité aux étoiles de faible masse ($0.4 - 2M_{\odot}$). Ces modèles d'évolution du moment cinétique ne permettent par conséquent pas d'avoir des contraintes sur le champ de rotation différentielle car ils ne décrivent pas la dynamique interne des étoiles. Pourtant ce champ de rotation différentielle est décisif, outre les mélanges qu'il induit, puisqu'il est à l'origine de celui des étoiles de Séquence Principale. Il est donc primordial d'établir des modèles dynamiques 2D qui, négligeant, dans un premier temps, l'effet des champs magnétiques, décrivent les écoulements d'un fluide soumis à une contraction gravitationnelle.

1.3 La contraction gravitationnelle : Le problème de spin-up en mécanique des fluides

Lorsqu'une perturbation en densité provoque au sein de nébuleuses un collapse gravitationnel, des étoiles peuvent se former (McKee & Ostriker, 2007). Le moment cinétique d'une parcelle de fluide en collapse de masse m est défini par

$$\vec{L} = \int \vec{r} \wedge \vec{v} dm \tag{1.7}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'élément fluide de masse dm. La somme du moment cinétique des éléments fluides a alors très peu de chance d'être nulle. Cela se traduit par une rotation moyenne de la parcelle de fluide autour du centre de masse. Durant cette phase, la combustion de l'hydrogène au cœur de l'étoile n'étant pas encore amorcée (sauf pour les étoiles de plus de six masses solaires qui sont directement sur la Séquence Principale), l'étoile en formation subit un refroidissement radiatif qui se traduit par une contraction gravitationnelle. La conservation du moment cinétique implique une augmentation de son taux de rotation et c'est ce que l'on appelle en mécanique des fluides un phénomène de spin-up.

Quand on impose à un fluide de densité uniforme d'augmenter son taux de rotation, le fluide tend vers une nouvelle rotation solide au taux de rotation imposé. L'écoulement quasi-stationnaire de transition vers la nouvelle rotation est l'écoulement de spin-up (si le taux de rotation imposé est plus faible, ou si un mécanisme ralentit une zone, on parle de

spin-down). Après quelques rotations, les couches d'Ekman [2] sont établies sur les bords du conteneur. La convergence d'un flux de matière dans ces couches d'Ekman, couplée à la géométrie du conteneur, produit une circulation dans les régions internes en réponse à la conservation de la masse (Greenspan, 1969*b*). Ces mouvements sont dissipés par diffusion visqueuse à mesure que le système tend vers la nouvelle rotation.

Ce problème a été étudié à plusieurs reprises et nous renvoyons à la revue détaillée de Duck & Foster (2001). La principale motivation de ces études étant les applications industrielles, aucune étude ne porte à ce jour sur le spin-up de fluide compressible et il s'agit pour beaucoup de spin-up induit par des conditions aux bords.

Des travaux théoriques ont été menés sur la dynamique des écoulements de spin-up (ou de spin-down) de fluide stratifiée dans des cylindres en rotation (Holton (1965), Pedlosky (1967), Sakurai (1969), Sakurai *et al.* (1971)). Cette configuration est aussi le siège de l'instabilité de Taylor-Couette générée par les effets de la viscosité. Pour une étude à application astrophysique dans une configuration sphérique, on peut citer le travail de Friedlander (1976). Pour la première fois, une approche hydrodynamique est utilisée pour avancer sur la problématique de la tachocline solaire. Elle étudie l'écoulement d'un fluide en rotation dans une coquille sphérique. En utilisant l'approximation Boussinesq [3], elle fournit la solution de l'écoulement de spin-down généré par des contraintes visqueuses exercées à la surface de la sphère (le noyau solaire). Ce travail montre que le temps d'établissement des écoulements est celui d'Eddington-Sweet, c'est-à-dire le temps de Kelvin Helmholtz (temps thermique) que multiplie $\frac{\mathcal{N}^2}{2\Omega^2}$ où $\mathcal{N}$ est l'échelle de fréquence de Brunt-Väisälä et Ω est le taux de rotation du fluide [4]. Elle illustre ainsi le ralentissement du cœur radiatif du Soleil dû à la viscosité.

2. Ces couches sont des couches limites qui apparaissent dans tout fluide en rotation au voisinage des parois et où les forces visqueuses compensent l'accélération de Coriolis. Nous définissons plus en détail ce concept en fin de chapitre.

3. Cette approximation consiste à estimer que seules les variations de masse volumique liées à la force d'Archimède sont importantes. Elle est décrite en fin de chapitre et utilisée dans le chapitre 2.

4. Pour les définitions des différentes échelles de temps, nous renvoyons au chapitre 2.

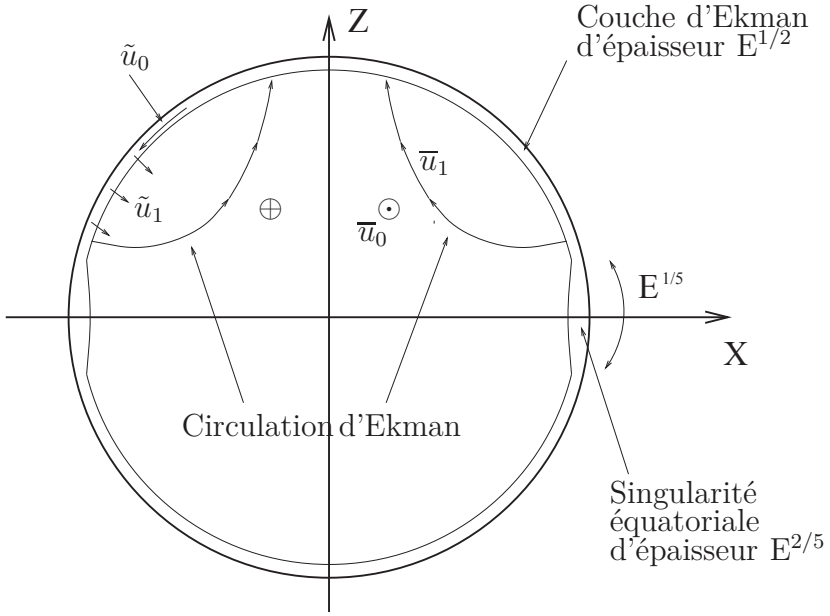


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de l'écoulement de spin-up d'un fluide au sein d'une sphère. $\overline{u}_0$ est l'écoulement géostrophique azimutal ; $\tilde{u}_0$ la composante méridienne de l'écoulement dans la couche d'Ekman et $\tilde{u}_1$ le pompage d'Ekman générant la circulation d'Ekman $\overline{u}_1$ (Rieutord, 2014).

Les écoulements de Couette ont aussi fait l'objet d'études expérimentales. Par exemple, Rieutord *et al.* (2012) ont observé les modes inertiels (la force de rappel est la force de Coriolis) de l'eau entre deux coquilles sphériques en rotation. Ils montrent l'importance de la viscosité qui génèrent des couches de cisaillement au niveau du cylindre tangent à la sphère interne et excitent les modes.

Le spin-up dans une sphère a été étudié d'un point de vue analytique par Rieutord (2014). La théorie de couche limite fournit les amplitudes des composantes de vitesse de l'écoulement de spin-up. Comme le montre la figure (1.3), le pompage d'Ekman génère une circulation méridienne et montre l'importance notamment de cette circulation d'Ekman dans le transport de moment cinétique à l'intérieur du fluide. Elle contrôle la durée du spin-up, temps beaucoup plus court que celui de la diffusion visqueuse.

A l'heure actuelle, aucune étude n'a été menée à notre connaissance sur le spin-up d'un fluide par contraction gravitationnelle.

Pour conclure cette introduction au contexte scientifique qui a motivé ce travail, nous présentons nos objectifs détaillés dans l'entre-chapitre suivant.

La section suivante est dédiée à l'étoile Achernar qui sert de cible d'étude à la dernière partie de notre travail. Nous présentons dès à présent ces caractéristiques principales.

1.4 Application astrophysique : Etude de l'étoile α Eridani

Dans le dernier chapitre, nous travaillons avec le code ESTER afin de faire le lien entre des modèles de contraction gravitationnelle incompressibles et les futurs modèles compressibles. A cette fin, nous détaillons ici ce que nous savons à l'heure actuelle de l'étoile α Eridani, étoile dont les paramètres observés servent à tester le code ESTER.

Achernar, aussi connue sous le nom α Eridani, HD 472 ou HD10144, est une étoile *Be* de masse intermediaire en rotation rapide. Il s'agit de l'étoile *Be* la plus proche (d = 42.75 pc, Hipparcos, van Leeuwen (2007)) et la plus brillante ce qui fait d'elle une candidate privilégiée pour les instruments à haute résolution angulaire (2002 VINCI, 2009 AMBER) (Domiciano de Souza *et al.* (2003), Domiciano de Souza *et al.* (2012*a*)).

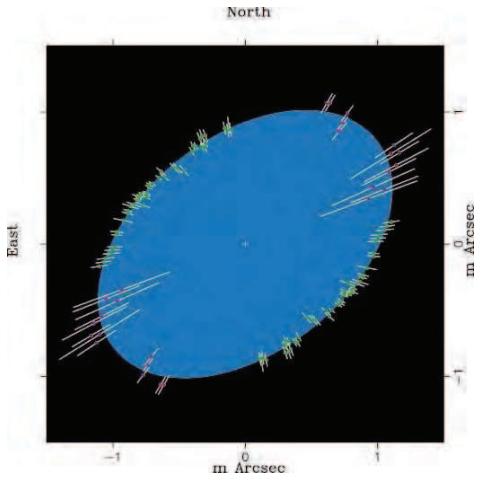


FIGURE 1.4 – Ellipse ajustée aux visibilités au carré observées d'Achernar par interférométrie avec l'instument VINCI du VLTI (Domiciano de Souza *et al.*, 2003).

Comme le révèle la figure (1.4), les observations suggèrent un fort aplatissement R_{eq}/R_p, estimaté alors autour de 1.5 (Domiciano de Souza *et al.*, 2003), où R_{eq} est le rayon équatorial et R_p le rayon polaire. Cet aplatissement n'est pas expliqué par les modèles de rotation standard. Par exemple, Jackson *et al.* (2004) ont développé un modèle 2D axisymétrique d'un polytrope en rotation rapide et différentielle (paramétrisation d'une loi cylindrique) à moment cinétique constant qui reproduit les rayons observés mais avec des modèles en moyenne plus froids et plus rapides.

En plus du manque de dynamique (rotation différentielle cohérente et circulation méridienne associée), cela peut être dû au fait que la rotation n'est pas le seul mécanisme capable d'étendre (en apparence) la photosphère d'une étoile. Dans le cas d'Achernar, deux autres

mécanismes possibles ont été identifiés :

- ⋆ Les épisodes *Be* où l'étoile éjecte de la matière à l'équateur et forme un disque circumstellaire (Vinicius *et al.* (2006), Carciofi *et al.* (2008)).
- ⋆ La présence d'un compagnon (Kervella & Domiciano de Souza (2007), Kervella *et al.* (2008)),

Ces raisons rendent la surface véritable de l'étoile difficile à distinguer et l'estimation du véritable rayon équatorial lié à la rotation peut être faussée.

De nouvelles observations interférométriques dans le visible et l'infra-rouge conduites entre août-septembre 2011 et septembre 2012 au ESO-VLTI (PIONIER and AMBER) ont permis une nouvelle estimation des paramètres stellaires d'Achernar. En couplant les observations interférométriques avec des observations spectroscopiques, polarimétriques et photométriques, Domiciano de Souza *et al.* (2014*a*) ont été capables d'écarter l'influence d'un disque circumstellaire (période *B* normale) et de son compagnon hors du champ sur la période d'observation.

Le code CHARRON, qui décrit un modèle de Roche (rotation solide et masse concentrée au centre de l'étoile) associé à une loi d'assombrissement gravitationnel $T_{eff} \propto g_{eff}^{\beta}$, et une méthode de Monte-Carlo Chaîne de Markov (MCMC) ont été utilisés pour contraindre les paramètres photosphériques (Domiciano de Souza *et al.*, 2012*b*). Cette méthode a nécessité de fixer en amont les paramètres suivants :

- ⋆ la masse M = 6.1 $M_{\odot}$ (Harmanec (1988), confirmée par les modèles de Jackson *et al.* (2004))
- ⋆ la température effective moyenne $\bar{T}_{eff}$ = 15 000 K (Vinicius *et al.* (2006))
- ⋆ la distance d = 42.75 pc (van Leeuwen (2007))

et retourne les histogrammes des paramètres libres obtenus : le rayon équatorial, la vitesse équatorial, le paramètre β associé à la loi d'assombrissement gravitationnel, l'inclinaison de l'étoile et la position (en angle) du pôle visible. Le meilleur modèle obtenu suivant cette méthode est montré par la figure (1.5)

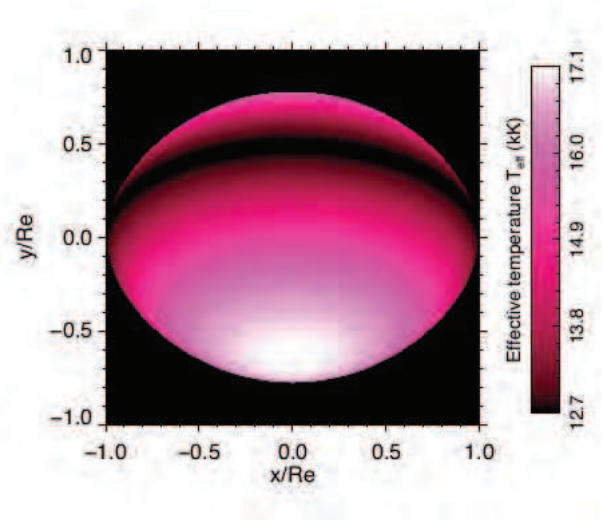


FIGURE 1.5 – Température effective d'Achernar correspondant au modèle de meilleure correspondance CHARRON où le rayon est normalisé à l'aide du rayon équatorial obtenu $R_e = 9.16 R_\odot$ (Domiciano de Souza *et al.*, 2014*a*).

Nous listons, de manière non exhaustive, les paramètres stellaires déterminés de cette manière dans le tableau suivant

Paramètres stellaire	Moyen de détermination	Domiciano de Souza *et al.* (2014*a*)
M ($M_\odot$)	Fixée	6.10
R_{eq} ($R_\odot$)	Libre	9.16±0.23
R_{pol} ($R_\odot$)	Dérivé	6.78
T_{eq} (K)	Dérivée	12673 K
T_{pol} (K)	Dérivée	17124 K
L ($L_\odot$)	Dérivée	3019.952
V_{eq} (km/s)	Libre	$298.8^{+6.9}_{-5.5}$
P_{eq} (j)	Dérivée	1.55

TABLE 1.1 – Liste de paramètres stellaires d'Achernar déterminés par Domiciano de Souza *et al.* (2014*a*). Ils sont soit fixés en accord avec des travaux précédents, soit déterminés via une méthode d'ajustement aux observations, soit dérivés depuis les paramètres issus du modèle de meilleure concordance. Seuls les paramètres résultant d'un ajustement sont fournis avec une barre d'erreur.

Ces nouvelles données de l'interférométrie appellent à une modélisation en deux dimensions avec la prise en compte cohérente de la rotation. Bien que cette étoile soit classée

parmis les étoiles de Séquence Principale (Hiltner *et al.* (1969)), nous montrerons au chapitre 5 qu'elle pourrait se trouver dans le gap de Hertzsprung où elle subit les effets d'une contraction gravitationnelle de son noyau et d'un dilatation de son enveloppe. Reproduire une telle étoile serait inédit et, à l'aide du code ESTER, de nature à révéler des effets de la compressiblité sur la dynamique d'une étoile en rotation rapide et contraction gravitationnelle.

Dans la section suivante, nous introduisons les concepts de base de la mécanique des fluides essentiels à la compréhension de ce manuscrit. Nous conseillons aussi la lecture de Rieutord (2014). Le lecteur averti peut directement passer à la lecture du chapitre suivant.

1.5 Introduction aux concepts de base de la mécanique des fluides

1.5.1 La dynamique des fluides visqueux incompressibles

Pour décrire la dynamique d'un fluide incompressible visqueux à viscosité et densité constantes, deux équations sont nécessaires et suffisantes : l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes.

Equation de continuité

Dans sa formulation générale, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.8}$$

où ρ est la densité de l'enveloppe et $\vec{v}$ le champ de vitesse. L'hypothèse d'incompressibilité du fluide, applicable lorsque le nombre de Mach de l'écoulement est très faible

$$M = \frac{V}{c_s}$$

avec V l'amplitude de la vitesse du fluide et $c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$ la vitesse de propagation du son dans le milieu, nous restreint aux écoulements subsoniques. Dans ce cas, l'équation (1.8) se simplifie sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \, . \tag{1.9}$$

Equation de Navier-Stokes

Dans un repère inertiel, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux soumis aux seules forces de pression s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} \tag{1.10}$$

où t est le temps, P est la pression, $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla et μ est la viscosité dynamique. Cette équation met en jeu la dérivée particulaire de la vitesse (la dérivée particulaire est généralement notée D est la somme de la dérivée temporelle et du terme d'advection), le gradient de pression et les forces visqueuses.

Pour un fluide incompressible, cette équation se simplifie en

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu \Delta \vec{v} \tag{1.11}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique.
En opérant les changements de variables suivants

$$\vec{v} = V\vec{u}, \quad P = \rho V^2 p, \quad \vec{r} = L\tilde{r}, \quad \text{et} \quad t = \frac{L}{V}\tau,$$

pour passer en grandeurs sans dimension, l'équation (1.11) s'écrit

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\Delta \vec{u} \tag{1.12}$$

où V est l'échelle caractéristique de vitesse, L est la longueur caractéristique, $\vec{u}$ est le vecteur vitesse sans dimension, τ est le temps dynamique sans dimension, $\tilde{r}$ est le vecteur position sans dimension, p est la pression sans dimension et Re est le nombre sans dimension de Reynolds. Il quantifie le rapport des vitesses de transport dynamique et diffusif

$$Re = \frac{VL}{\nu}\,. \tag{1.13}$$

Lorsque $Re \to \infty$, on retrouve le fluide parfait.

Définition du concept de couche limite

Considèrons maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle. Loin de ce solide, la vitesse du fluide est uniforme, tel un fluide parfait (sans viscosité). Par contre, au niveau de l'obstacle, le fluide adhère à la paroi (sa vitesse est nulle). Pour répondre à cette condition aux limites, Rieutord (2014) montre que la vitesse du fluide doit nécessairement varier très rapidement dans une région autour du solide d'épaisseur caractéristique

$$\delta = \mathcal{O}(Re^{-1/2}) \tag{1.14}$$

Cela découle du fait que dans cette zone, les forces visqueuses sont dominantes et notamment $\Delta\vec{u} \geq \mathcal{O}(Re)$ d'après l'équation (1.12). La zone autour de l'obstacle où la vitesse varie rapidement s'appelle la couche limite. Elle trouve son origine dans la singularité qui apparaît lorsque le nombre de Reynolds devient grand (les dérivées secondes disparaissent).

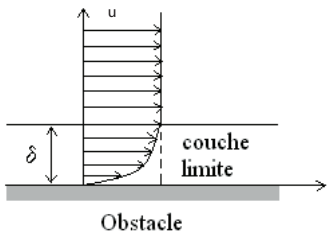


FIGURE 1.6 – Représentation schématique de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. Seule une composante du champ de vitesse est représentée.

Comme le montre la figure [5] (1.6), nous pouvons dès lors considérer deux zones distinctes :

- ⋆ les régions extérieures à la couche limite où les effets de la viscosité ne se font pas ressentir (fluide parfait).
- ⋆ l'intérieur de la couche limite où la viscosité joue un rôle prépondérant.

De la même façon, une couche limite peut se former à une limite non solide du domaine (via une condition au bord) ou à une interface entre deux fluides.

1.5.2 La dynamique des fluides visqueux incompressibles en rotation

Lorsque les fluides sont en rotation, les termes d'accélération de Coriolis et accélération centrifuge son ajoutées à l'équation de Navier-Stokes dans le repère en corotation

$$\rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})\right) = -\vec{\nabla}P + \mu\Delta\vec{v}\,. \tag{1.15}$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation.

Ecoulement géostrophique

L'écoulement géostrophique est l'écoulement stationnaire résultant de l'équilibre géostrophique : lorsque le gradient de pression compense l'accélération de Coriolis. Les effets du terme d'advection ainsi que des forces visqueuses sont négligés.

$$\rho 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = -\vec{\nabla}P \tag{1.16}$$

Si on prend le rotationnelle de cette équation (1.16), on montre que

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \vec{0}\,. \tag{1.17}$$

5. Image provenant du site de l'université de Nantes.

Cette expression constitue le théorème de Taylor-Proudman et indique que le vecteur vitesse ne dépend que des coordonnées perpendiculaires à l'axe de rotation. En l'occurence, dans une configuration axisymmétrique, l'écoulement géostrophique ne dépend que la distance à l'axe de rotation notée s en coordonnées cylindriques. L'écoulement s'effectue en colonnes appelées colonnes de Taylor.

Couche d'Ekman

Dans les fluides en rotation, les effets de la viscosité sont controlés par le nombre sans dimension d'Ekman

$$E = \frac{\nu}{2\Omega L} \, . \tag{1.18}$$

La couche d'Ekman est une forme de couche limite qui apparaît dans tout fluide en rotation au voisinage des parois. Elle est d'épaisseur caractéristique

$$\delta = \mathcal{O}(E^{1/2}) \, . \tag{1.19}$$

Dans ces couches, les forces visqueuses sont d'ordre comparable à l'accélération de Coriolis.

Couche de Stewartson

La couche de Stewartson (Stewartson, 1966) est une couche de cisaillement cylindrique qui apparaît au sein d'un écoulement de Couette dans un cylindre muni de disques (Hollerbach (2003)), ou entre deux coquilles sphériques concentriques (Dormy *et al.* (1998)), en rotation différentielle. Cette couche se forme pour empêcher une discontinuité de vitesse, de viscosité ou de densité, à l'interface que délimite le cylindre tangent (cf la zone $r \leq \eta$ sur la figure 1.7). Elle permet aux écoulements de circuler d'une couche d'Ekman (au niveau de la sphère interne) à l'autre (au niveau de la sphère externe). Nous présentons une représentation schématique de cette configuration dans le cas de deux sphères concentriques sur la figure (1.7).

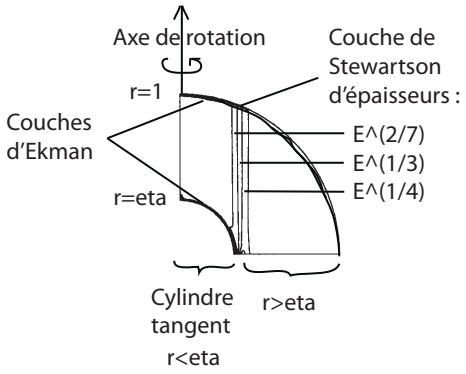


FIGURE 1.7 – Représentation schématique de l'écoulement d'un fluide entre deux coquilles sphériques tournant à des taux de rotation différents selon le même axe. Eta (noté η dans la suite) est le rayon normalisé de la sphère interne par rapport au rayon de la sphère externe. Des couches d'Ekman se forment sur les deux sphères connectées par une couche de Stewartson. Celle-ci est divisée en trois couches : une d'épaisseur $\mathcal{O}(E^{2/7})$, une d'épaisseur $\mathcal{O}(E^{1/4})$ et la dernière d'épaisseur $\mathcal{O}(E^{1/3})$.

Stewartson a montré que cette couche se décompose en trois épaisseurs caractéristiques :

- ⋆ une épaisseur $\mathcal{O}(E^{2/7})$ en $r \to \eta$, $r < \eta$ où la dépendance en s de la solution est décrite par des fonctions de Bessel et des fonctions gamma.
- ⋆ une épaisseur $\mathcal{O}(E^{1/4})$ en $r \to \eta$, $r > \eta$ où vitesse azimutale et circulation méridienne tendent exponentiellement vers zéro.
- ⋆ une épaisseur $\mathcal{O}(E^{1/3})$ en $r \simeq \eta$ qui assure la continuité de la circulation méridienne. Cette couche est très agéostrophique, c'est-à-dire qu'elle est dominée par les effets de la viscosité et qu'il y a une forte dépendance de la solution avec z.

Dans les deux épaisseures externes, la vitesse azimutale dépend uniquement de la coordonnée radiale cylindrique s et la circulation méridienne ne dépend que de la coordonnée le long de l'axe de rotation (Oz).

Baroclinicité

Les enveloppes à densité variable telle que la densité évolue sur l'échelle du rayon de l'étoile sont dites stratifiées en densité, et stables quand le gradient d'entropie est positif (critère de Schwartzchild). Si le gradient de densité est non nul et non aligné avec le gradient de pression, i.e. les isopycnes et les isobares sont des surfaces différentes, cela génère des écoulements baroclines qui modifient la dynamique d'une enveloppe.

Pour illustration, prenons l'équation du mouvement d'un fluide newtonien stratifié soumis

aux seules forces de gravité et de pression

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\mu\Delta\vec{v} \tag{1.20}$$

où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur. L'équation de la vorticité s'écrit

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})=\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho^2}\wedge\vec{\nabla}P-\nu\vec{\nabla}^3\wedge\vec{v} \tag{1.21}$$

Le terme $\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho^2}\wedge\vec{\nabla}P$, non nul quand les gradients de pression et de densité ne sont pas colinéaires, génère de la vorticité.

Dans les modèles sphériques sans rotation, les gradients sont alignés mais l'alignement est rompu dès que les modèles sont mis en rotation.

Approximation de Boussinesq

Cette approximation consiste à négliger les fluctuations de densité dans les équations de la dynamique, sauf dans les termes où elles sont multipliées par une accélération comme l'accélération de la pesanteur ou l'accélération centrifuge. Autrement dit, les effets de la compressibilité d'un fluide soumis à cette hypothèse ne se manifestent qu'au travers de la force d'Archimède. Cette hypothèse implique l'approximation de Cowling où l'on néglige les variations d'auto-gravité (Cowling, 1933). Cette approximation est valable pour tout fluide à partir du moment où les écoulements sont subsoniques et que les variations de masse volumique à l'équilibre sont petites. Dans ce cas, l'écoulement est régit par

$$\rho_0\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\vec{\nabla}P+(\rho_0+\delta\rho)\vec{g}+\mu\Delta\vec{v} \tag{1.22}$$

où on a écrit $\rho=\rho_0+\delta\rho$. La fluctuation $\delta\rho$ n'a été gardé que devant le terme d'accélération de la pesanteur. L'équation de l'énergie associée est la suivante

$$\rho_0\frac{DT}{Dt}=\vec{\nabla}\cdot(\chi\vec{\nabla}T) \tag{1.23}$$

où T est le champ de température et χ la conductivité thermique. Cette équation est nécessaire car nous remplaçons les fluctuations de densité par les fluctuations de température via l'équation d'état $\rho=\rho_0(1-\alpha(T-T_0))$.

Objectifs du travail de thèse

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la rotation est un élément indispensable de la modélisation stellaire. Nous souhaitons apporter un éclairage nouveau sur la problématique des étoiles en contraction gravitationnelle, en montrant quelles en sont les caractéristiques importantes, dans l'optique de fournir des conditions dynamiques initiales aux modèles d'étoiles de Séquence Principale. Si notre première motivation est de comprendre l'intéraction de ces deux mécanismes, rotation et contraction gravitationnelle, elle s'incrit dans un contexte plus général qui est de comprendre l'impact de la rotation sur l'évolution stellaire.

Pour rendre compte de manière réaliste de ses effets sur l'évolution stellaire, un idéal serait d'utiliser le code 2D compressible ESTER en le faisant évoluer dans le temps. Or, le rôle de la rotation sur la dynamique d'une étoile en contraction gravitationnelle (comme c'est le cas des étoiles de Pré-Séquence Principale ou du cœur des étoiles traversant le gap de Hertsprung) n'est pas connu aujourd'hui. Une étape nécessaire est par conséquent le défrichage de la dynamique de spin-up par contraction gravitationnelle dans le cas incompressible.

Voici le plan que nous avons suivi :

- ⋆ Nous avons tout d'abord mis au point un modèle numérique incompressible capable de rendre compte de la contraction gravitationnelle d'une enveloppe en rotation. Notre intérêt porte sur les enveloppes essentiellement radiatives ($2M_\odot < M < 6M_\odot$ (Stahler & Palla, 2008)) car ces zones contrôlent l'échelle de temps du transport dans les étoiles. Cette première étape vers un modèle plus réaliste (compressible) est détaillée dans le chapitre deux. Nous avons alors quantifié les nombres contrôlant l'amplitude de l'écoulement de spin-up induit par la contraction gravitationnelle puis caractérisé l'écoulement barocline issu de la stratification de cette enveloppe sous l'hypothèse Boussinesq. Nous avons cherché à savoir lequel de ces deux écoulements prédomine à la fin d'un temps thermique. Ce travail à la fois analytique et numérique est présenté dans les chapitres deux et trois et l'article scientifique qui en a découlé est inclut en annexe (Hypolite & Rieutord, 2014). Au cours de ce travail, nous avons évalué des indicateurs de stabilité afin d'avoir des éléments de compréhension lorsqu'on étudiera un modèle compressible.

⋆ L'objectif du chapitre quatre de ce travail de thèse est d'étudier l'impact de la compressibilité sur les écoulements. En deuxième étape intermédiaire vers un modèle compressible de contraction gravitationnelle, nous avons voulu reproduire une étoile comme Achernar à l'aide du code ESTER. Les précédents échecs de la modélisation stellaire sur cette problématique ont été à la base de l'hypothèse qu'Achernar n'est pas une étoile de Séquence Principale mais plutôt une étoile dont le cœur est en contraction gravitationnelle. Cette hypothèse est soutenue par les modèles d'évolution 1D CESAM2k et CYCLIST qui, d'après les observations, révèlent une étoile plutôt proche de la ZAMS ou traversant le gap de Hertzsprung. Nous avons utilisé la masse et la vitesse de rotation déduites des observations comme paramètres d'entrée au code ESTER dans le but d'obtenir un modèle ayant les mêmes caractéristiques de taille, de température effective et de luminosité que celles estimées par Domiciano de Souza *et al.* (2014*a*). Cette étude nous a incité à d'abord considérer l'évolution de la composition chimique d'une étoile et le problème des gradients de composition avant d'étudier l'évolution par refroidissement radiatif, déclencheur d'une contraction gravitationnelle.

Chapitre 2

Modèle d'enveloppe stellaire incompressible en contraction gravitationnelle

Nous allons voir dans ce chapitre comment nous construisons un modèle en deux dimensions qui rend compte des effets de la contraction gravitationnelle d'une étoile en rotation. Ce type de modélisation peut aussi être appliqué à l'étude de la dynamique des planètes géantes puisqu'elles sont aussi en contraction gravitationnelle. Dans un premier temps, nous avons adopté une approche simplifiée en étudiant la dynamique d'un fluide incompressible. Cette démarche permet d'identifier les mécanismes principaux régissant les écoulements s'établissant dans l'enveloppe. Ces indications nous guiderons pour, ensuite, développer un modèle compressible.

Nous nous concentrons sur les étoiles de masse intermédiaire, en l'occurence de masse comprise entre deux et six masses solaires. Ainsi, il s'agit d'étoiles essentiellement radiatives pendant la Pré-Séquence Principale (Stahler & Palla, 2008) et nous pouvons négliger la convection de surface.

Toujours à des fins simplificatrices, nous négligeons tout champ magnétique et cherchons à caractériser le champ de rotation en deux dimensions : profondeur et latitude.

2.1 Le modèle

2.1.1 Description du modèle

On considère un fluide auto-gravitant, newtonien, incompressible, visqueux à viscosité constante à l'intérieur d'une coquille sphérique. La densité du fluide notée ρ est constante.

Pour éviter la singularité centrale qu'engendre un terme de contraction gravitationnelle (en $1/r^2$) dans les équations de la dynamique, nous ne résolvons pas le cœur. Cette seconde coquille représente une interface cœur-enveloppe au travers de laquelle on impose un flux de

matière entrant. Il s'agit de forcer le spin-up non pas par les bords mais par un écoulement radial de faible amplitude par rapport à la vitesse de rotation. Il est à noter qu'une telle configuration ne tend pas vers un état stationnaire de rotation solide à cause de la nature du forçage et des conditions aux limites. Ce flux est décrit par une vitesse radiale constante V_a à l'interface et V_a est négative. Le cœur aspire, de manière isotrope, la matière contenue dans l'enveloppe et tourne de plus en plus vite. Il a la même composition chimique que l'enveloppe mais une densité supérieure.

La sphère externe du modèle a un rayon fixe $R_\star$, paroi qui laisse entrer de la matière de manière à conserver la masse dans l'enveloppe. Cette configuration permet l'étude d'une enveloppe à masse constante soumise à une aspiration radiale quand bien même la masse du système complet (cœur et enveloppe) augmente.

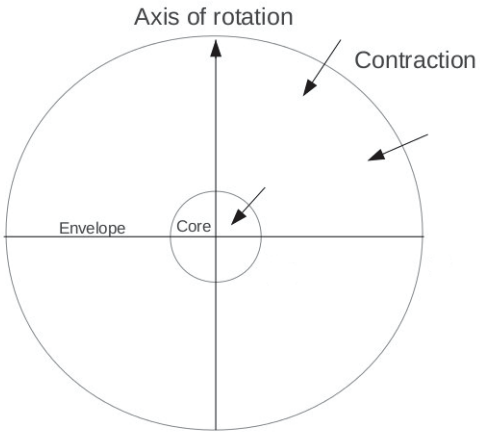


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du modèle. L'enveloppe est aspirée radialement par le cœur au rayon $r = R_{\text{cœur}}$.

Ce système est en rotation autour de l'axe Oz au temps initial $t = 0$ et on suppose que les coquilles n'en souffrent d'aucune déformation. En l'absence de champ magnétique, de turbulence ou de convection, on s'attend à ce que l'écoulement soit axisymétrique par rapport à l'axe de rotation et symétrique par rapport à l'équateur. En effet, rien dans la physique mise en jeu ne brise ces symétries.

2.1.2 Caractéristiques du cœur

Le cœur est une sphère de moment cinétique $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ où $\vec{\Omega}$ est son taux de rotation tel que $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$ et I, le moment d'inertie, s'écrit

$$I = \frac{2}{5} M_{\text{cœur}} R_{\text{cœur}}^2 \ . \tag{2.1}$$

La masse du cœur $M_{\text{cœur}}$ croît au fur et à mesure de l'aspiration de l'enveloppe avec un taux $\dot{M}_{\text{cœur}} = 4\pi R_{\text{cœur}}^2 \rho V_a$ où ρ est la densité de l'enveloppe constante en temps. Nous supposons que le phénomène d'aspiration radiale de la matière est assez lent [1] pour pouvoir être considéré comme linéaire. L'évolution de la masse du cœur peut alors s'écrire telle que

$$M_{\text{cœur}} = M_0 + \dot{M}_{\text{cœur}} t = M_0 \left(1 + \frac{t}{t_a}\right) . \tag{2.2}$$

où M_0 est la masse initiale du cœur. Elle vaut $M_0 = \frac{4}{3}\pi R_{\text{cœur}}^3 \rho_0$. La densité initiale du cœur ρ_0 et celle de l'enveloppe sont telles que $\frac{\rho_0}{\rho} = \tilde{\rho}$. On a introduit t_a, le temps caractéristique de l'aspiration de la matière. Il correspond au temps nécessaire pour que le cœur double sa masse (ou de manière équivalente sa densité).

$$t_a = \frac{\eta \tilde{\rho} R_\star}{3 V_a} \tag{2.3}$$

où $\eta = \frac{R_{\text{cœur}}}{R_\star}$ est un "rapport d'aspect" du modèle. Nous le comparons à un temps connu de la physique stellaire, le temps de Kelvin-Helmholtz, échelle de temps qui correspond au temps que passerait une étoile à briller à la luminosité $L_\star$ uniquement grâce à l'énergie tirée d'une contraction gravitationnelle

$$t_{\text{KH}} = \frac{G M_\star^2}{R_\star L_\star} = \frac{R_\star}{V_a} . \tag{2.4}$$

Ces deux temps sont comparables tant que le produit du ratio de la densité initiale du cœur par rapport à l'enveloppe $\tilde{\rho}$ et du rapport d'aspect de l'étoile η est $\mathcal{O}(1)$. L'expression (2.1) montre que, lorsque la masse du cœur augmente à rayon fixé, le moment d'inertie et le moment cinétique augmentent aussi.

2.2 Equations de la dynamique d'une enveloppe stellaire en contraction gravitationnelle

Comme nous l'avons rappelé en début de manuscrit, deux équations sont nécessaires et suffisantes à la description la dynamique d'un fluide incompressible visqueux à viscosité et densité constantes : l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes. Ces deux équations, la première scalaire et la seconde vectorielle, permettent de résoudre les trois composantes du champ de vitesse.

1. Cette hypothèse est validée dans le paragraphe [2.2.3] de ce chapitre où l'on montre que le nombre de Rossby $Ro = V_a / 2\Omega R_\star \ll 1$.

2.2.1 Equations du mouvement

Equation de continuité

L'équation de conservation de la masse, restreinte aux écoulements subsoniques (petit nombre de Mach) par l'hypothèse d'incompressibilité, s'écrit simplement

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.5}$$

comme nous l'avons établi à la fin du chapitre précédent.

Equation de Navier-Stokes

Dans un repère inertiel, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux soumis aux seules forces de pression s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} \tag{2.6}$$

où t est le temps, P est la pression, $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla et μ est la viscosité dynamique. Pour un fluide incompressible, cette équation se simplifie en

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{v} \tag{2.7}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique.
Le cœur du modèle tourne avec un taux de rotation $\Omega(t)$ croissant avec le temps. On se place dans le repère en corotation, en écrivant

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + \vec{w} \, . \tag{2.8}$$

où $\vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ est la composante de vitesse de rotation de l'enveloppe au taux de rotation du cœur. Dans ce repère, la vitesse résiduelle perçue est notée $\vec{w}$ et l'équation du mouvement se lit

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} = -\vec{\nabla}\Pi + \nu \Delta \vec{w} - \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} \, . \tag{2.9}$$

Nous notons l'apparition du terme d'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega} \wedge \vec{w}$. Ce terme apparaît conjointement à un terme d'accélération centrifuge. Comme celui-ci dérive du potentiel centrifuge $\Phi_c = -\frac{1}{2}s^2\Omega^2$ (potentiel parabolique qui repousse vers l'extérieur), nous le rassemblons avec la pression sous forme d'un gradient de pression réduite Π telle que $\Pi = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2$.

Nous remarquons aussi le terme dépendant de l'accélération de la rotation du cœur $\dot{\Omega}$ dont nous ne connaissons pas l'expression. Nous devons la définir pour pouvoir résoudre les équations (2.5) et (2.9).

2.2.2 Equations sans dimensions

A des fins numériques, il convient d'adimensionner les équations. Cette étape fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques de l'écoulement qui permettent notamment de distinguer et comparer les différents régimes d'écoulements dans différents systèmes (les intérieurs stellaires et les océans par exemple). Pour ce faire, nous déterminons les échelles caractéristiques pertinentes à l'étude de l'écoulement que nous souhaitons étudier.

Grandeurs caractéristiques :

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux en rotation entre deux coquilles sphériques, les grandeurs caractéristiques que nous retenons sont :

- ⋆ Echelle de longueur : Nous prenons le rayon de la sphère externe $R_\star$, le rayon caractéristique d'une étoile de Pré-Séquence Principale. Un tel rayon à la birthline varie avec la masse de l'étoile, son ordre de grandeur est $14R_\odot$ pour une étoile de $3M_\odot$.

- ⋆ Echelle de vitesse : Nous choisissons la vitesse d'aspiration radiale de la matière au cœur telle que $\vec{w} = V_a\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le champ de vitesse sans dimension. Nous ferons varier l'intensité de l'aspiration pour tester l'existence de différents régimes.

- ⋆ Echelle de temps : Le temps caractéristique d'une contraction gravitationnelle est le temps de Kelvin-Helmholtz, équivalent au temps nécessaire à la complète absorption du fluide contenu dans l'enveloppe et correspondant au temps dynamique. Nous écrivons $t = \frac{R_\star}{V_a}\tau$ où τ est le temps sans dimension.

Equations sans dimension :

En opérant ces changements de variables, l'équation (2.9) devient

$$Ro\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau} + Ro(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{e}_z\wedge\vec{u} = -\vec{\nabla}p + E\Delta\vec{u} - \dot{\omega}\vec{e}_z\wedge\vec{r} \tag{2.10}$$

où trois nombres sans dimension sont apparus. Nous notons p la nouvelle expression de la pression réduite telle que $\vec{\nabla}p = \frac{\vec{\nabla}\Pi}{2\Omega V_a}$.

Nombres sans dimension

Deux des nombres sans dimension qui sont apparus sont des nombres connus de la mécanique des fluides en rotation :

- ⋆ Un nombre de Rossby $Ro = \frac{V_a}{2\Omega R_\star}$ qui quantifie la vitesse d'aspiration du fluide par rapport à la vitesse de rotation. Il mesure aussi l'importance du terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ par rapport à l'accélération de Coriolis.

- ⋆ Le nombre d'Ekman $E = \frac{\nu}{2\Omega R_\star^2}$ mesure l'amplitude de la force visqueuse par rapport à l'accélération de Coriolis.

Le troisième nombre sans dimension est $\dot{\omega} = \frac{\dot{\Omega} R_{\rm ext}}{2\Omega V_a}$, il s'agit de l'accélération de la rotation du cœur adimensionnée.

2.2.3 Forçage et linéarisation

Evaluation des nombres sans dimension

Avant de poursuivre la dérivation des équations, nous évaluons la valeur des nombres de Rossby et d'Ekman typiques d'une étoile principalement radiative de Pré-Séquence Principale. Pour ce faire, nous considérons la contraction gravitationnelle d'une étoile de trois masses solaires.

Böhm & Catala (1995) ont observé l'étoile HD 37806, une étoile de Pré-Séquence Principale de $3M_\odot$ et rapportent une vitesse de rotation $V_{\rm rot} = \Omega R_\star \sim 120$ km.s^{-1} et une température effective de l'ordre de 10^4K. Les modèles stellaires 1D de PMS de Stahler & Palla (2008) permettent d'associer à cette température effective une luminosité de l'ordre de $L_\star \sim 10^2 L_\odot$. Sur un diagramme HR, un tel modèle est à plus de mi parcours de la Pré Séquence Principale. Grâce à la relation $L_\star = 4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4$, nous pouvons déduire approximativement son rayon $R_\star \sim 3R_\odot$. Le tracé évolutif de Stahler & Palla (2008) utilisé précèdemment permet aussi d'obtenir l'ordre de grandeur du rayon initial de l'étoile (au début de la PMS) $R_\star \sim 14R_\odot$. Cette valeur permet d'estimer le temps de Kelvin-Helmholtz (expression 2.4), durée totale de la contraction, à 2 10^5 ans. La vitesse d'aspiration radiale est alors de l'ordre de $V_a \sim 1.6\ 10^{-5}$m.s^{-1}.Cela nous permet d'obtenir une estimation du nombre de Rossby

$$Ro \sim 7 \times 10^{-9} \ .$$

La vitesse d'aspiration radiale est très petite devant la vitesse de rotation. Cela confirme l'hypothèse initiale d'aspiration "lente" permettant l'utilisation d'équations linéarisées.

Pour estimer le nombre d'Ekman, la viscosité cinématique d'une enveloppe radiative doit être calculée. Différentes prescriptions existent :

- ⋆ La prescription de viscosité turbulente de Zahn (Zahn, 1992) prédit $\nu \sim 10^4$ m^2·s^{-1} et ainsi nous obtenons
$$E \sim 10^{-10} \ .$$

- ⋆ Si par contre, nous utilisons une viscosité radiative (e.g. Espinosa Lara & Rieutord, 2013) comme le montre la figure 2.2, $\nu \sim 10^2$ m^2·s^{-1}, nous obtenons

$$E \sim 10^{-12} \ .$$

Quelle que soit la prescription utilisée sur la viscosité cinématique, on constate que les nombres de Rossby et d'Ekman sont très petits devant l'unité. Le fluide est complètement dominé par la rotation.

De plus, nous remarquons que

$$Ro \ll \sqrt{E} \ . \tag{2.11}$$

Le nombre de Prandtl est le nombre sans dimension qui quantifie la viscosité cinématique du fluide par rapport à la diffusivité thermique

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \tag{2.12}$$

où la diffusivité thermique s'écrit $\kappa = \frac{\chi}{\rho c_P}$ avec χ la condutivité thermique et c_P la capacité calorifique. Nous considérons que dans l'enveloppe radiative, le gaz peut être considéré comme parfait et monoatomique, ce qui simplifie le calcul de la capacité calorifique

$$c_P = \frac{5}{2}\mathcal{R}_M \ .$$

Nous avons noté $\mathcal{R}_M$ la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire du gaz (que nous considérons être de l'hydrogène). Nous calculons la conductivité thermique radiative de l'enveloppe telle que

$$\chi = \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_{opa}} \tag{2.13}$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann et κ_{opa} est l'opacité, à l'aide d'un modèle ESTER à une dimension [2] d'une étoile de $3M_\odot$ sans noyau convectif chimiquement homogène ($Y = 0$ et $Z = 0.02$).

Le nombre de Prandtl calculé de cette manière est montré en fonction du rayon normalisé sur la figure (2.2). Certaines zones ont un nombre de Prandtl d'ordre de grandeur comparable au nombre de Prandtl caractérisant le plasma solaire en zone radiative 2.10^{-6} (Ruediger *et al.*, 2014) mais atteint des valeurs très faibles près de la surface. A des fins numériques, nous sommes cependant limités à la valeur $\mathrm{Pr} = 10^{-4}$.

2. Le code ESTER et sa version 1D sont décrits en annexe.

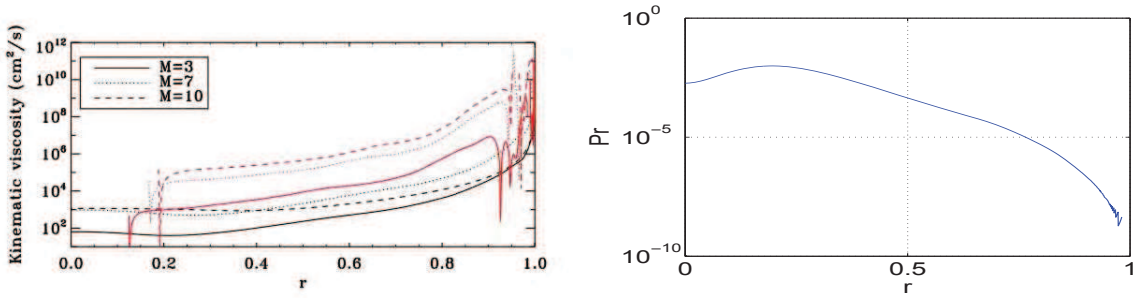


FIGURE 2.2 – A gauche : Profils de viscosité cinématique radiative (en noir) et turbulente (en rouge) en fontion du rayon normalisé pour trois différentes masses au niveau de la ZAMS issus de modèles ESTER 2D (Espinosa Lara & Rieutord, 2013). A droite : Nombre de Prandtl Pr en fonction du rayon normalisé dans l'enveloppe radiative d'une étoile de $3M_\odot$ au niveau de la ZAMS issu d'un modèle ESTER 1D.

Définition du forçage

L'aspiration radiale de la matière contenue dans l'enveloppe se traduit par une condition à l'interface cœur-enveloppe, i.e. en $r = \eta$, sur la composante radiale de la vitesse telle que, en adimensionné

$$u_r(r = \eta) = -1 \tag{2.14}$$

Nous projetons cette condition sur la base des harmoniques sphériques[3] tel que $\vec{e_r} \cdot \vec{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l Y_l^m$.

Puisque la condition au bord (2.14) est indépendante de la latitude θ, alors, sur cette base, elle s'exprime uniquement à l'aide de la première harmonique

$$u_{m=0}^{l=0}(r = \eta) = -\sqrt{4\pi} \tag{2.15}$$

Grâce à l'équation de la continuité qui impose $\frac{\partial(r^2 u_{m=0}^{l=0}(r))}{\partial r} = 0$,
on en déduit

$$u_{m=0}^{l=0}(r) = -\frac{\sqrt{4\pi}\eta^2}{r^2} = \sqrt{4\pi}\vec{u^0}(r) \tag{2.16}$$

Notons que le champ de vitesse radial sans dimension est de l'ordre de l'unité.

Linéarisation

Le forçage radial $\mathcal{O}(1)$ implique que la circulation méridienne (les composantes u_s et u_z de la vitesse) est aussi $\mathcal{O}(1)$. De plus, comme nous faisons l'hypothèse simplificatrice d'un

3. La méthode numérique complète employée pour résoudre les équations différentielles est explicitée en annexe.

champ axisymétrique alors l'opérateur $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$ est également $\mathcal{O}(1)$. Ainsi, dans le membre de gauche de l'équation (2.10), le terme temporel $Ro\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}$ et le terme non-linéaire, qui s'écrit en coordonnées cylindriques

$$Ro(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = Ro\begin{pmatrix} (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_s & -\frac{u_\varphi^2}{s} \\ (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\varphi & -\frac{u_s u_\varphi}{s} \\ (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_z & \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

sont négligeables devant le terme d'accélération de Coriolis si la vitesse azimutale est telle que $u_\varphi \ll Ro^{-1}$.
Sous cette hypothèse, l'équation (2.10) devient

$$\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla}p + E\Delta\vec{u} - \dot{\omega}\vec{e}_z \wedge \vec{r}\,. \tag{2.18}$$

Cela implique que nous ne décrivons pas les ondes inertielles, ni le régime transitoire.

Equation de la vorticité

On soustrait au champ de vitesse l'expression $\vec{u^0}(r) = -\frac{\eta^2}{r^2}\vec{e}_r$ (2.16) en écrivant $\vec{u} = \vec{u^0}(r) + \vec{u'}$ dans l'équation (2.10). On aura noté que $\Delta\vec{u^0} = \vec{0}$. Le champ de vitesse résiduel est solution de l'équation forcée

$$\vec{e}_z \wedge \vec{u'} = -\vec{\nabla}p + E\Delta\vec{u'} + (\frac{\eta^2}{r^2} - \dot{\omega}r)\sin\theta\vec{e}_\varphi\,. \tag{2.19}$$

Nous prenons le rotationnel de cette équation afin d'éliminer le terme de gradient de pression, qui est un scalaire passif de la dynamique, et obtenons l'équation de la vorticité

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{e}_z \wedge \vec{u'} - E\Delta\vec{u'}\right) = 2(\frac{\eta^2}{r^3} - \dot{\omega})\cos\theta\vec{e}_r + (\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega})\sin\theta\vec{e}_\theta\,. \tag{2.20}$$

2.2.4 Conditions aux limites

Pour compléter les équations (2.5) et (2.20), nous fixons les conditions aux bords, c'est-à-dire à l'interface cœur-enveloppe $r = \eta$ et à la surface du modèle $r = 1$. Dans un premier temps sur les deux bords, nous imposons des conditions de non glissement, aussi appelées conditions rigides, i.e. les composantes de la vitesse sont nulles. Lorsque l'on écrit $\vec{u} = \vec{u^0}(r) + \vec{u'}$, les conditions de non glissement aux bords s'écrivent

$$\begin{cases} u'_r(r=\eta) = u'_r(r=1) = 0 \\ u'_{\text{tangent}}(r=\eta) = u'_{\text{tangent}}(r=1) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Ces conditions impliquent littéralement que le cœur et la surface tournent au même taux de rotation. Si cela n'a aucune raison de se produire naturellement, il s'agit d'une première étape qui livre des solutions analytiques permettant de calibrer les solutions numériques. Dans la suite, nous abandonnons le prime sur le vecteur vitesse $\vec{u}$. Il reste à exprimer l'accélération du taux de rotation du cœur $\dot{\omega}$.

2.3 L'accélération du taux de rotation du cœur et analyse aux couches limites

2.3.1 Solution analytique de l'écoulement de spin-up dans le cas non visqueux

Afin de déterminer le taux de rotation du cœur en fonction du temps, nous cherchons l'expression de la vitesse azimutale u_φ près du cœur (quand $r \to \eta^+$). Comme le nombre d'Ekman est très faible dans l'enveloppe, il y a formation de couches limites sur les bords et ce que nous recherchons est en fait la solution à l'intérieur de la couche limite à l'interface cœur-enveloppe. Pour l'obtenir, nous résolvons d'abord le champ de vitesse loin des couches limites. On résout l'équation (2.19) dans le cas non visqueux $E = 0$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} p + (\frac{\eta^2}{r^2} - \dot{\omega} r) \sin\theta \vec{e}_\varphi \tag{2.22}$$

et notons $\bar{u}$ la solution loin des couches limites. En coordonnées cylindriques, la projection de l'équation suivant $\vec{e}_\varphi$ donne accès à la composante $\bar{u}_s$ de la vitesse. La composante $\bar{u_z}$ de la vitesse est obtenue à partir de l'équation de continuité $\bar{u}_z = -\int \frac{1}{s}\partial_s(s\bar{u}_s)dz$. Nous obtenons donc l'expression de la circulation méridienne qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{u}_s &=& \frac{\eta^2}{r^2}\sin\theta - \dot{\omega} r \sin\theta \\ \bar{u}_z &=& z(\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega}) \end{array} \right. \tag{2.23}$$

En coordonnées sphériques, elle s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{u}_r &=& \frac{\eta^2}{r^2} + (2 - 3\sin^2\theta) r\dot{\omega} \\ \bar{u}_\theta &=& -3r\sin\theta\cos\theta\dot{\omega} \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Nous notons que, comme attendue, cette circulation est $\mathcal{O}(1)$.

2.3.2 Correction de couche limite à l'interface cœur-enveloppe

De la projection sur la direction azimutale du rotationnel de l'équation (2.22), il découle que $\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial z} = 0$. Il s'agit d'une illustration du théorème de Taylor-Proudman (Greenspan, 1969*b*) qui prévoit que l'écoulement soit géostrophique, i.e. qu'il ne dépende pas de la coordonnée le long de l'axe de rotation Oz.

En considérant la symétrie par rapport à l'axe de rotation Oz, cet écoulement s'écrit comme une fonction de la coordonnée radiale cylindrique uniquement $\bar{u}_\varphi = U(s)\vec{e_\varphi} = \bar{u}_0$ où U est une fonction dont l'expression est à déterminer. Ce champ de vitesse ne respecte pas les conditions rigides à l'interface cœur-enveloppe alors nous lui ajoutons une correction de couches limites $\widetilde{u}_0$ telle que $\bar{u}_0 + \widetilde{u}_0 = 0$ en $r = \eta$.

La correction de couche limite est telle que

$$(\vec{n} \wedge \widetilde{u}_0 + i\widetilde{u}_0) = -(\vec{n} \wedge \bar{u}_0 + i\bar{u}_0)_{\zeta=0}\ e^{-(1-i)\alpha} \tag{2.25}$$

avec la coordonnée $\alpha = \zeta\sqrt{\dfrac{|\cos\theta|}{2}} = (r-\eta)\sqrt{\dfrac{|\cos\theta|}{2E}}$ et $\vec{n} = -\vec{e}_r$, et où n'a été gardée que la solution décroissante (Greenspan (1969*b*), Rieutord (1987)).
Nous en déduisons

$$\left\{\begin{array}{lcl} \widetilde{u}_\theta &=& \vec{e_\theta} \cdot \mathcal{I}m\left(-(\vec{n} \wedge \bar{u}_0 + i\bar{u}_0)_{\zeta=0}\ e^{-(1-i)\alpha}\right) = -U(\eta\sin\theta)\ \sin\alpha\ e^{-\alpha} \\ \widetilde{u}_\varphi &=& -U(\eta\sin\theta)\ \cos\alpha\ e^{-\alpha} \end{array}\right. \tag{2.26}$$

La conservation de la masse permet de trouver la relation entre le pompage d'Ekman $\widetilde{u}_r$ et la solution géostrophique $U(s)$. A l'ordre dominant, elle s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\eta\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\widetilde{u}_\theta)}{\partial\theta} \tag{2.27}$$

En intégrant de part et d'autre par rapport à ζ, en utilisant la condition au bord $\bar{u_r}(\zeta = 0) + \widetilde{u}_r(\zeta = 0) = 0$ d'après l'équation (2.21) et en intégrant de part et d'autre par rapport à θ, on montre que

$$U(\eta\sin\theta) = \eta\sqrt{\frac{2}{E}}\frac{\sqrt{|\cos\theta|}}{\sin\theta}\left(1 - \cos\theta + \eta\dot{\omega}\cos\theta\sin^2\theta\right) \tag{2.28}$$

Nous avons imposé un écoulement géostrophique nul le long de l'axe de rotation $U(\theta = 0) = 0$. Cette expression définit la fonction U pour un rayon compris entre zéro et le cylindre tangent à la sphère interne $s \in [0;\eta]$. Dans cet intervalle, on a

$$U(s) = \eta\sqrt{\frac{2}{E}}\frac{\eta}{s}\left(1 - \left(\frac{s}{\eta}\right)^2\right)^{1/4}\left(1 - \left(1 - \left(\frac{s}{\eta}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{\dot{\omega}s^2}{\eta}\left(1 - \left(\frac{s}{\eta}\right)^2\right)^{1/2}\right). \tag{2.29}$$

L'expression complète de la vitesse azimutale au premier ordre est

$$u_\varphi = U(s) - U(\eta\sin\theta)\ \cos\alpha\ e^{-\alpha} \tag{2.30}$$

2.3.3 Correction de couche limite à la surface

Nous dérivons aussi une analyse de la couche limite à la surface du modèle. Nous recherchons $\bar{u}_\varphi = U(s)\vec{e_\varphi}$ et sa correction de couche limite $\widetilde{u}_0$ pour que la condition $\bar{u}_0 + \widetilde{u}_0 = 0$ soit satisfaite en $r = 1$. La correction est telle que

$$(\vec{n} \wedge \widetilde{u}_0 + i\widetilde{u}_0) = -(\vec{n} \wedge \bar{u}_0 + i\bar{u}_0)_{\zeta=0}\ e^{-(1+i)\alpha} \tag{2.31}$$

avec $\alpha = \zeta\sqrt{\frac{|\cos\theta|}{2}} = (1-r)\sqrt{\frac{|\cos\theta|}{2E}}$ et $\vec{n} = \vec{e}_r$. Les corrections de couche limite à la surface s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{u}_\theta & = & -U(\sin\theta)\ \sin\alpha\ e^{-\alpha} \\ \widetilde{u}_\varphi & = & -U(\sin\theta)\ \cos\alpha\ e^{-\alpha} \end{array} \right. \tag{2.32}$$

On impose la conservation de la masse à l'ordre dominant

$$-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\eta\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\widetilde{u}_\theta)}{\partial\theta} \tag{2.33}$$

et nous permet de déduire l'expression de l'écoulement géostrophique en $r = 1$

$$U(\sin\theta) = \sqrt{\frac{2}{E}}\left(\eta^2\frac{\cos^{3/2}\theta}{\sin\theta} - \dot{\omega}\sin\theta\cos^{3/2}\theta\right) \tag{2.34}$$

Soit

$$U(s) = \sqrt{\frac{2}{E}}(1-s^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{s} - \dot{\omega}s\right) \tag{2.35}$$

2.3.4 Théorème du moment cinétique

Nous exprimons l'évolution du moment cinétique du cœur afin d'obtenir une nouvelle expression mettant en jeu l'accélération de sa rotation $\dot{\omega}$. D'après le théorème du moment cinétique, la dérivée temporelle du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces appliquées sur le système, i.e. le cœur. En l'occurence, le couple de deux forces doit être considéré : celui dû au forçage qui aspire la matière contenue dans l'enveloppe (un flux de masse entrant) et celui des forces visqueuses agissant à l'interface cœur-enveloppe. L'équation du moment cinétique du cœur projetée dans la direction parallèle à l'axe de rotation Oz s'écrit alors :

$$\frac{dL_z}{dt} = \vec{e}_z \cdot \left(-\int_{(S)}(\vec{r}\wedge\rho\vec{v})\vec{v}\cdot d\vec{S} + \int_{(S)}\vec{r}\wedge[\sigma]d\vec{S}\right) \tag{2.36}$$

où S est la surface du cœur et $\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{r} + \vec{w}$. Le terme $\rho\vec{v}$ est le flux de masse entrant (unité : kg.m^{-2}.s^{-1}) et le terme $\vec{v}\cdot d\vec{S}$ est un débit volumique (m^3.s^{-1}) de sorte que le terme $(\vec{r}\wedge\rho\vec{v})\vec{v}\cdot d\vec{S}$ a bien la dimension d'un flux de moment (kg.m^2.s^{-2}). Le tenseur $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes qui rend compte de la viscosité du fluide. Seule sa composante $\sigma_{\varphi r} = \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)$ intervient dans l'expression du couple visqueux.
On montre que l'expression (2.36) peut s'écrire

$$M_{\text{cœur}}\dot{\Omega} = V_a(\eta R_\star)^2\rho\frac{8\pi}{3}\Omega + 5\pi V_a\eta\rho\nu\int_0^\pi \sin^2\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}|_{r=\eta}d\theta \tag{2.37}$$

En utilisant l'expression de la vitesse azimutale (2.30), nous calculons l'intégrale dans l'équation (2.37). Au bord du cœur, le terme dominant de la vitesse azimutale est le terme de correction de couche limite, ainsi il est le seul que nous gardons dans le terme dérivé

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \simeq \frac{\eta}{E}|\cot\theta|\left(1-\cos\theta+\eta\dot{\omega}\cos\theta\sin^2\theta\right) \quad \text{en} \quad r=\eta \tag{2.38}$$

ce qui implique

$$\int_0^\pi \sin^2\theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}|_{r=\eta} d\theta = \eta\frac{2}{3E}\left(\frac{1}{2}+\eta\dot{\omega}\frac{2}{5}\right) \tag{2.39}$$

et ainsi l'équation (2.37) devient

$$M_{\text{cœur}}\dot{\Omega} = \frac{8\pi}{3}V_a(\eta R_\star)^2\rho\Omega\left(\frac{9}{4}+\eta\dot{\omega}\right) \tag{2.40}$$

Nous adimensionnons avec les mêmes échelles que précédemment $t = \frac{R_\star}{V_a}\tau$ et $\dot{\omega} = \frac{\dot{\Omega}R_\star}{2\Omega V_a}$. D'après l'expression (2.2), l'évolution de la masse du cœur respecte la loi $M_{\text{cœur}} = \frac{4\pi R_\star^3}{3}\rho_0\left(1+\frac{\tau}{\tau_a}\right)$ où $\tau_a = \frac{\eta\tilde{\rho}}{3}$ est le temps caractéristique de l'aspiration adimensionné et $\tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}$. Nous obtenons

$$\dot{\omega} = \left(\frac{9}{4\eta\tilde{\rho}}\frac{1}{(1+\tau/\tau_a)}\right)\left(1-\frac{1}{\tilde{\rho}(1+\tau/\tau_a)}\right)^{-1} \tag{2.41}$$

Si nous estimons que le temps d'établissement des solutions stationnaires est plus court que le temps caractéristique de l'aspiration $\tau \ll \tau_a$ et que l'on impose au départ que le cœur du modèle est plus dense que l'enveloppe $\tilde{\rho} > 1$ alors l'accélération du taux de rotation du cœur se simplifie en

$$\dot{\omega} \sim \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta}\,. \tag{2.42}$$

Cette expression montre que la dérivée du taux de rotation est toujours positive. Ainsi la rotation est croissante dans le temps. Elle indique aussi que moins le cœur est dense et plus il est petit, plus il accèlère sa rotation ce qui est un résultat attendu.

2.3.5 Evolution temporelle du taux de rotation du cœur

De l'expression (2.40), nous pouvons aussi montrer

$$m\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{2}{\eta\tilde{\rho}}\Omega\left(\frac{9}{4}+\frac{\eta}{2}\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{d\tau}\right) \tag{2.43}$$

avec $m = M_{\text{cœur}}/M_0$ où pour rappel M_0 est la masse initiale du cœur. Il en découle la loi d'évolution temporelle du taux de rotation du cœur

$$\Omega(\tau) = \Omega_0\left(\frac{\tau}{\tau_a}+1-\frac{1}{\tilde{\rho}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.44}$$

où $\Omega_0 = \Omega(\tau = 0)$ est le taux de rotation au temps initial et τ/τ_a varie de zéro à un. Cette fonction dépend du ratio des densités initiales cœur-enveloppe $\tilde{\rho}$ et nous pouvons distinguer trois cas de figure :

- ⋆ $0 < \tilde{\rho} < 1$: Dans ce modèle, le cœur est moins dense que l'enveloppe. Il s'agit d'une configuration absurde car instable gravitationellement. Le taux de rotation serait très faible (en comparaison aux autres configurations) voire négatif.
- ⋆ $\tilde{\rho} = 1$: Le modèle est homogène. Ce cas de figure, très peu probable, produit le modèle au taux de rotation le plus faible des configurations stables.
- ⋆ $\tilde{\rho} > 1$: Dans ce modèle, le cœur est plus dense que l'enveloppe. Cette configuration est stable vis-àvis de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le taux de rotation augmente dans le temps, de manière plus importante que dans le cas $\tilde{\rho} = 1$ et d'autant plus importante que $\tilde{\rho}$ est grand devant l'unité.

On remarque qu'au temps $\tau = 0$, si $\tilde{\rho} \geq 1$, le taux de rotation déterminé via l'expression (2.44) est différent de Ω_0. Il s'agit d'une conséquence de la linéarisation, lorsque l'on a négligé la solution transitoire via le terme $Ro\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$. Pour y pallier, on peut modifier le couple visqueux dans l'expression (2.37) de façon à ce qu'il soit nul aux premiers instants, tel que

$$M_{\text{cœur}}\dot{\Omega} = V_a(\eta R_\star)^2\rho\frac{8\pi}{3}\Omega + \left(5\pi V_a\eta\rho\nu\int_0^\pi \sin^2\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}|_{r=\eta}d\theta\right) \times (1 - e^{-\tau/Ro}) \tag{2.45}$$

En effet, comme le temps d'établissement des couches limites (aussi connu sous le nom de temps d'Ekman) est de quelques rotations $(2\Omega)^{-1}$, la viscosité ne fait pas sentir ses effets tant que $\tau \ll Ro$, l'échelle de temps de la rotation. En annulant le couple visqueux puis en procédant au même développement amenant à l'expression (2.44), le taux de rotation du cœur obéit à la loi

$$\Omega = \Omega_0\left(\frac{\tau}{\tau_a} + 1\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.46}$$

quelle que soit la valeur de $\tilde{\rho}$.

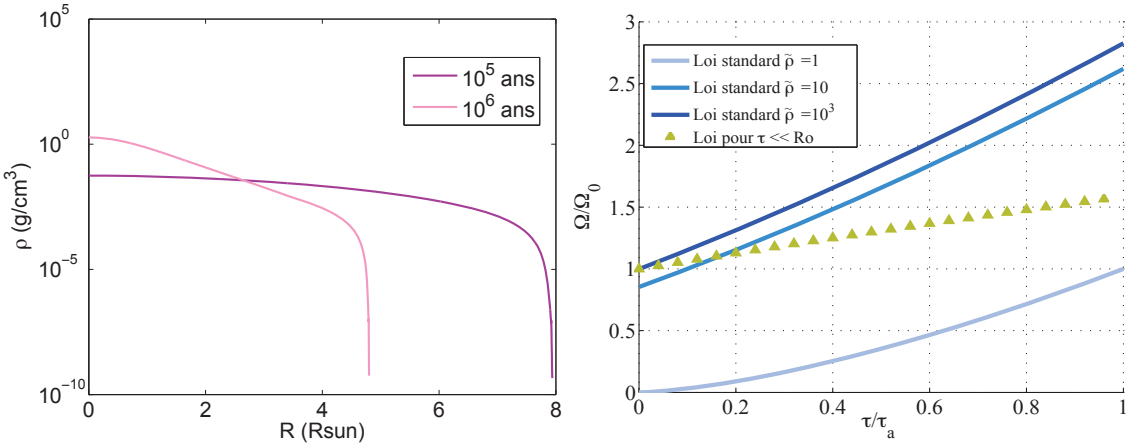


FIGURE 2.3 – A gauche : Densité en fonction de la profondeur en rayon solaire d'un modèle CESAM2k (Morel, 1997) de $3M_\odot$ à l'âge de 10^5 ans et 10^6 ans. L'étoile se contracte et devient plus dense. On observe un ratio $\tilde{\rho} \gg 1$. A droite : Taux de rotation du cœur en fonction du temps adimensionné normalisé pour $\tilde{\rho} = 1, 10, 10^3$. Les triangles représentent le cas où le couple visqueux est négligé et montre l'accélération de la rotation quand $\tau \ll Ro$ (Il s'agit du tracé de la fonction (2.46) qui ne nécessite pas de valeur du nombre de Rossby). La loi (2.44) tend vers $\Omega_0 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_a}\right)^{3/2}$ quand $\tilde{\rho} \to +\infty$, le modèle où $\tilde{\rho} = 10^3$ est quasiment superposé à cette limite.

D'après les modèles 1D CESAM2k, visible sur la figure (2.3) gauche, la densité au centre d'une étoile de Pré-Séquence Principale est d'au moins 5 ordres de grandeur supérieure à la densité de surface. Pour cette raison, nous utilisons des valeurs de $\tilde{\rho}$ toujours supérieure à l'unité bien que la position du noyau dans ce type de modèle soit purement arbitraire.

2.4 Dynamique d'une enveloppe stratifiée stablement

Jusqu'à ce point, nous avons considéré un modèle à densité constante dans l'enveloppe. Pourtant, comme le montre la figure gauche de la figure (2.3), les modéles d'étoiles de Pré-Séquence Principale ont une densité qui varie de plusieurs ordres de grandeur dans l'enveloppe. Ces enveloppes sont stratifiées en densité, et stables quand le gradient d'entropie est positif (critère de Schwartzchild). La rotation stellaire génère alors un couple barocline[4], en rompant l'alignement des isopycnes et des isobares, dont les effets doivent être pris en compte en particulier pour étudier la dynamique d'étoile en rotation rapide.

4. La notion de baroclinicité a été introduite à la fin du chapitre précédent.

2.4.1 Equations sans dimension de la dynamique des fluides baroclines

Comme précédemment, un fluide à densité homogène, visqueux à viscosité constante est étudié dans un conteneur sphérique, sous l'approximation de Boussinesq. Cette approximation consiste à négliger les fluctuations de densité dans les équations de la dynamique, sauf dans les termes où elles sont multipliées par une accélération comme l'accélération de la pesanteur ou l'accélération centrifuge. Nous reprenons le modèle d'enveloppe radiative barocline en rotation rapide développé par Rieutord (2006). Au départ, le modèle est à l'équilibre hydrostatique, équilibre thermique et mécanique, caractérisé par une fréquence de Brunt-Väisälä proportionnelle au gradient de température hydrostatique

$$N^2(r) = \alpha g_s r \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{eq}}}{\mathrm{d}r} \tag{2.47}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique. Lorsque le modèle est mis en rotation, l'écoulement issu de la stratification et de la rotation est solution, dans le repère en corotation, des équations couplées

$$\begin{aligned} \rho\left(2\Omega\,\vec{\wedge}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) &= -\vec{\nabla}P + \rho(\vec{g} + \Omega^2 s\vec{e_s}) + \mu\Delta\vec{v} \\ \rho c_P \vec{v}\cdot\vec{\nabla}T &= \vec{\nabla}\cdot(\chi\vec{\nabla}T) + Q \end{aligned} \tag{2.48}$$

où Q représentent des puits de chaleur de sorte que la stratification soit stable, $\vec{g} = -g_s\vec{r}$ et g_s est la gravité de surface et χ est la conductivité thermique. La première équation est celle de Navier-Stokes. La seconde est l'équation de l'énergie, nécessaire pour résoudre le champ de température additionnellement au champ de vitesse. Les grandeurs pression, température et densité, sont décomposées en solutions hydrostatiques auxquelles s'ajoutent leurs fluctuations (elles-même composées d'une partie barotrope et d'une partie barocline).

$$P = P_{eq} + \delta P, \quad T = T_{eq} + \delta T, \quad \rho = \rho_{eq} + \delta\rho \tag{2.49}$$

Même si l'enveloppe a une densité homogène, il existe une fluctuation à cette densité dans le modèle en rotation. La fluctuation de densité est liée à une fluctuation de température via la relation $\delta\rho/\rho = -\alpha\delta T$, ce qui caractérise la stratification de l'enveloppe. En utilisant ces décompositions, les équations (2.48) s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho\left(2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) &= -\vec{\nabla}\delta P + \delta\rho(\vec{g} + \Omega^2 s\vec{e_s}) + \rho_{eq}\Omega^2 s\vec{e_s} + \mu\Delta\vec{v} \\ \rho c_P(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}T_{eq} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\delta T) &= \vec{\nabla}\cdot(\chi\vec{\nabla}\delta T) \end{aligned} \tag{2.50}$$

auxquelles nous avons retranché les termes décrivant l'équilibre hydrostatique et thermique. Sous l'hypothèse de Boussinesq et en supposant que la conductivité thermique soit homogène, on obtient

$$\begin{aligned} 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} &= -\vec{\nabla}\delta P - \alpha\delta T(\vec{g} + \Omega^2 s\vec{e_s}) - \alpha\delta T_{eq}\Omega^2 s\vec{e_s} + \nu\Delta\vec{v} \\ \vec{v}\cdot\vec{\nabla}T_{eq} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\delta T &= \kappa\Delta\delta T \end{aligned} \tag{2.51}$$

où $\kappa = \frac{\chi}{\rho c_P}$. En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et en utilisant la relation (2.47), l'équation de la vorticité s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \alpha\delta T(\vec{g} + \Omega^2 s\vec{e_s}) - \nu\Delta\vec{v} = \vec{\nabla} \times (-\alpha\delta T_{eq}\Omega^2 s\vec{e_s}) \\ = -\varepsilon N^2(r)\sin\theta\cos\theta\vec{E_\varphi}\end{aligned} \tag{2.52}$$

où δT_{eq} est la contribution sphérique de la fluctuation thermique qui quantifie l'écart à l'équilibre hydrostatique. Par opposition, δT n'est pas sphérique. Le nombre ε est le ratio de la force centrifuge par rapport à la gravité $\varepsilon = \Omega^2 R/g$. Nous adimensionnons ces équations en utilisant l'échelle de vitesse d'aspiration radiale définie pour notre modèle de contraction gravitationnelle, à savoir, $\vec{v} = V_a\vec{u}$ telle que le membre de droite de l'équation de la vorticité soit $\mathcal{O}(B_a)$. Ce nombre sans dimension est le rapport entre l'échelle de vitesse des écoulements baroclines $V = \frac{\varepsilon\mathcal{N}^2 R_\star}{2\Omega}$ et la vitesse V_a

$$B_a = \frac{V}{V_a}\ . \tag{2.53}$$

L'échelle de température $\delta T = \varepsilon T^* \theta_T$ est telle que le terme contenant les fluctuations de température soient également $\mathcal{O}(B_a)$ et T^* est une échelle de température arbitraire. Sa valeur est déterminée implicitement par la valeur des paramètres sans dimension. On note θ_T la fluctuation de la température sans dimension. La fréquence de Brunt-Väisälä est adimensionnée par la valeur $\mathcal{N}^2 = \frac{\alpha T^* g_s}{R_\star}$. La fréquence de Brunt-Väisälä sans dimension est notée n_T. Pour finir, le nombre sans dimension $\tilde{E}_T$ quantifie la diffusion thermique tel que $\tilde{E}_T = \frac{\kappa\varepsilon}{VR_\star}$. Il peut aussi s'écrire

$$\tilde{E}_T = \frac{E}{\mathrm{Pr}}\frac{4\Omega^2}{\mathcal{N}^2}$$

où $\mathrm{Pr} = \nu/\kappa$ est le nombre de Prandtl comparant la viscosité du fluide à sa conductivité thermique κ. En lui donnant la valeur de E/Pr, nous imposons implicitement $\mathcal{N}^2 \sim 4\Omega^2$, et décrivons une rotation rapide. Le temps d'Eddington-Sweet est alors équivalent au temps de Kelvin-Helmholtz.

Sachant le nombre de Rossby petit devant l'unité, l'équation de la vorticité est linéaire et stationnaire

$$\vec{\nabla} \times (\vec{e_z} \wedge \vec{u} - B_a\theta_T\vec{r} - E\Delta\vec{u}) = -B_a n_T^2 \sin\theta\cos\theta\vec{e_\varphi}\ . \tag{2.54}$$

La dynamique du système est forcé par le couple barocline $-B_a n_T^2 \sin\theta\cos\theta\vec{e_\varphi}$. Cette équation est couplée à l'équation linéarisée stationnaire de conservation de l'énergie

$$(n_T^2/r)u_r = B_a\tilde{E}_T\Delta\theta_T\ . \tag{2.55}$$

L'équation de conservation de la masse (2.5) sous l'hypothèse de Boussinesq est inchangée. Les équations (2.5), (2.54) et (2.55) décrivent le champ de vitesse et de température d'un modèle barocline pour peu que l'on connaisse la fréquence de Brunt-Väisälä.

2.4.2 Fréquence de Brunt-Väisälä

Pour compléter les équations (2.5), (2.54) et (2.55), nous choisissons le profil de fréquence de Brunt-Väisälä caractérisant la stratification de l'enveloppe. Pour ce faire, nous utilisons la même prescription que Rieutord (2006) inspirée des modèles fournis par le code d'évolution stellaire 1D CESAM2K (Morel (1997)). Comme le montre la partie gauche de la figure (2.4), une enveloppe radiative est caractérisée par une fréquence de Brunt-Väisälä positive.

Nous choisissons un profil de fréquence tel que

$$n_T^2(r) = (\alpha(r-\eta) + \beta(r-\eta)^2 + \gamma(r-\eta)^3)^2 \quad \text{pour} \quad r \in [\eta; 1] \tag{2.56}$$

où les coefficients α, β et γ sont issus d'un ajustement polynomial pour s'adapter aux points représentés par des triangles sur la partie droite de la figure (2.4). Ces points ont été choisis arbitrairement pour que la fréquence soit grossièrement de la même forme que les profils issus des modèles 1D dans les zones radiatives. La fréquence est imposée nulle dans le cœur.

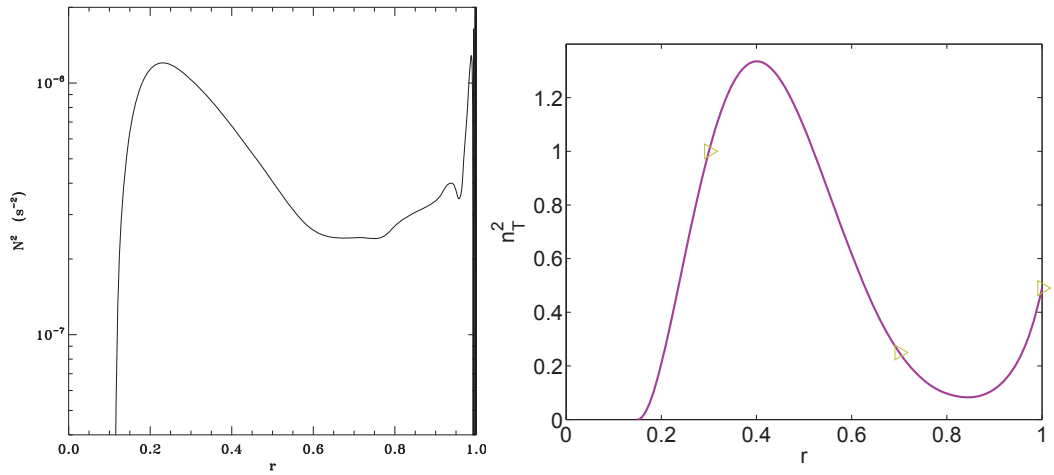


FIGURE 2.4 – A gauche : Fréquence de Brunt-Väisälä en fonction de la profondeur normalisée d'un modèle CESAM2k (Morel, 1997) de $3M_\odot$ arrivant sur la ZAMS. A droite : Fréquence de Brunt-Väisälä d'après l'expression (2.56) en fonction du rayon normalisé pour $\eta = 0.15$. Les coefficients α, β et γ ont été déterminé tel que $n_T(r = 0.3) = 1$, $n_T(r = 0.7) = 1/2$ et $n_T(r = 1) = 0.7$ (triangles).

2.4.3 Ecoulement azimutal

La fréquence de Brunt-Väisälä connue et les conditions rigides aux bords fixées, nous pouvons résoudre le système d'équations (2.5), (2.54) et (2.55). En l'occurence, dans le cas non visqueux $E = 0$, la composante suivant $\vec{e}_\varphi$ de l'équation du mouvement (2.54) induit

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = B_a n_T^2(r)\cos(\theta)\sin(\theta) = B_a n_T^2(r)\frac{sz}{s^2+z^2} \tag{2.57}$$

lorsque les fluctuations de température sont nulles. D'où

$$u_\varphi = sB_a \int \frac{n_T^2(r)z}{r^2} dz + F(s) \tag{2.58}$$

où $F(s)$ est un écoulement géostrophique provenant de l'intégration en z. En notant que, à s constant, $rdr = zdz$, on obtient

$$u_\varphi = sB_a \int_r^1 \frac{n_T^2(r)}{r} dr + F(s) = -sB_a g(r) + F(s) \tag{2.59}$$

où l'introduction de la fonction g a pour but d'alléger l'écriture, notons que $g(1) = 0$. Cette solution est appelée vent thermique. Il s'agit de l'écoulement produit par le gradient de température. Lorsque les conditions aux bords sont sans glissement au niveau de la paroi externe, nous pouvons caractériser l'écoulement $F(s)$ grâce à une analyse dans la couche limite en $r = 1$. Les corrections à ajouter au niveau de la paroi sont solution de l'équation

$$\widetilde{u} = \mathcal{I}m\{-(\vec{e_r} \wedge u_\varphi \vec{e_\varphi} + iu_\varphi \vec{e_\varphi})_{r=1} e^{-\alpha(1+i)}\}$$

avec $\alpha = (1-r)\sqrt{\dfrac{|\cos\theta|}{2E}} = \zeta\sqrt{\dfrac{|\cos\theta|}{2}}$. L'expression de u_φ permet d'exprimer les corrections tangentielles

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\theta = -F(\sin\theta)\sin\alpha e^{-\alpha} \\ \widetilde{u}_\phi = -F(\sin\theta)\cos\alpha e^{-\alpha} \ . \end{cases} \tag{2.60}$$

La conservation de la masse s'écrit de la façon suivante

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta \widetilde{u}_\theta)}{\partial\theta} \tag{2.61}$$

qui revient à la relation

$$\widetilde{u}_r(1) = -\frac{\sqrt{E}}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \int_\zeta^\infty \widetilde{u}_\theta d\zeta \right) \ . \tag{2.62}$$

La condition de non glissement se traduit notamment par $\tilde{u}_r + \overline{u}_r = 0$ en $r = 1$, impliquant finalement

$$\bar{u}_r(1) = -\sqrt{\frac{E}{2}} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} F(\sin\theta) \right) \ . \tag{2.63}$$

En parallèle, l'équation du mouvement (2.51) sans dimension s'écrit

$$\vec{e_z} \wedge \vec{u} - B_a \theta_T \vec{r} - E\Delta\vec{u} = -\vec{\nabla}\delta P - B_a \frac{\alpha \delta T_{eq} \Omega^2}{\mathcal{N}^2} s\vec{e_s} \tag{2.64}$$

dont la composante azimutale est

$$\sin\theta \bar{u_r} + \cos\theta \bar{u_\theta} = E\Delta\bar{u_\varphi} \ . \tag{2.65}$$

où $\bar{u_\varphi} = -sB_a g(r) + F(s)$. Ainsi, pour que les relations (2.63) et (2.65) sont compatibles, l'écoulement géostrophique doit être tel que

$$F \equiv \mathcal{O}(B_a\sqrt{E}) \ .$$

et est donc négligeable pour des nombres d'Ekman petits. En conclusion, à l'ordre dominant, l'écoulement azimutal, c'est-à-dire la rotation différentielle, est principalement une fonction du rayon

$$\bar{u}_\varphi = -sB_a \int_r^1 \frac{n^2(x)}{x} dx \ . \tag{2.66}$$

et la circulation méridienne associée est $\mathcal{O}(B_a E)$ d'après l'équation (2.65).

2.4.4 Equations de la dynamique des fluides du cas barocline avec contraction gravitationnelle

Pour rendre compte de la contraction gravitationnelle dans une enveloppe stratifiée, nous généralisons les équations baroclines pour prendre en compte les effets de la contraction via une aspiration radiale

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times (\vec{e}_z \wedge \vec{u} - B_a \theta_T \vec{r} - E\Delta\vec{u}) = -B_a n_T^2 \sin\theta\cos\theta\vec{e}_\varphi \\ +2(\frac{\eta^2}{r^3} - \dot{\omega})\cos\theta\vec{e}_r + (\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega})\sin\theta\vec{e}_\theta \\ \\ (n_T^2/r)u_r = B_a \tilde{E}_T \Delta\theta_T \\ \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \ . \end{cases} \tag{2.67}$$

L'équation du mouvement est forcée par le couple barocline $-B_a n_T^2 \sin\theta\cos\theta\vec{e}_\varphi$ et le couple de contraction gravitationnelle $2(\frac{\eta^2}{r^3} - \dot{\omega})\cos\theta\vec{e}_r + (\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega})\sin\theta\vec{e}_\theta$. Ces deux mécanismes génèrent leur solution particulière, respectivement les expressions (2.35) et (2.66). Comme le système est linéaire, la composante azimutale de la vitesse solution de l'équation de la vorticité du set d'équations (2.67) est la somme de la solution liée à la contraction gravitationnelle et de la solution barocline

$$u_\varphi(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2}{E}}(1-r^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{r} - \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta}r\right) - rB_a\int_r^1 \frac{n^2(r)}{r}dr \ . \tag{2.68}$$

La solution barocline agit sur le couple visqueux et nous dérivons un nouveau taux de rotation

$$\Omega(\tau) = \Omega_0\left(1 - \frac{1}{\tilde{\rho}} + \frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{10}{3}EB_aC(\eta)} \tag{2.69}$$

avec $C(x) = \frac{1}{x}\int_x^1 \frac{n^2(r)}{r}dr$. L'accélération de la rotation du cœur au cours de la contraction est d'autant plus importante que le paramètre B_a est grand devant $\frac{3}{10C(\eta)}E^{-1} \sim 10^{-2} \times E^{-1}$.

Sous cette condition, le taux de rotation est supérieur au cas sans baroclinicité comme nous le montrons sur la figure (2.5).

En comparaison à l'expression (2.44), pour $\tilde{\rho} > 1$ et dès que $B_a \geq 10^{-2} \times E^{-1}$, la rotation du cœur est plus importante grâce à la contribution barocline qui augmente à mesure que le nombre d'Ekman diminue ou que le nombre B_a augmente. Pour $\tilde{\rho} = 1$, lorsque B_a augmente (ou E diminue), la contribution barocline ralentit la rotation du cœur. Le cœur tourne quand même de plus en plus vite mais il accèlère plus lentement que si l'enveloppe n'était pas stratifiée. Si $B_a < 10^{-2} \times E^{-1}$ alors la loi de rotation est la même que dans le cas non stratifié.

La loi à petit τ (2.46), où le couple visqueux est annulé, est valable avec ou sans couple barocline.

Nous dérivons aussi la nouvelle accélération du taux de rotation adimensionné

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tilde{\rho}\eta}\left(\frac{9}{4} + 5EB_aC(\eta)\right) \tag{2.70}$$

sous les hypothèses que le temps d'établissement de la solution stationnaire est plus court que le temps de la contraction $\tau \ll \tau_a$ et que le système est dans une configuration stable $\tilde{\rho} > 1$.

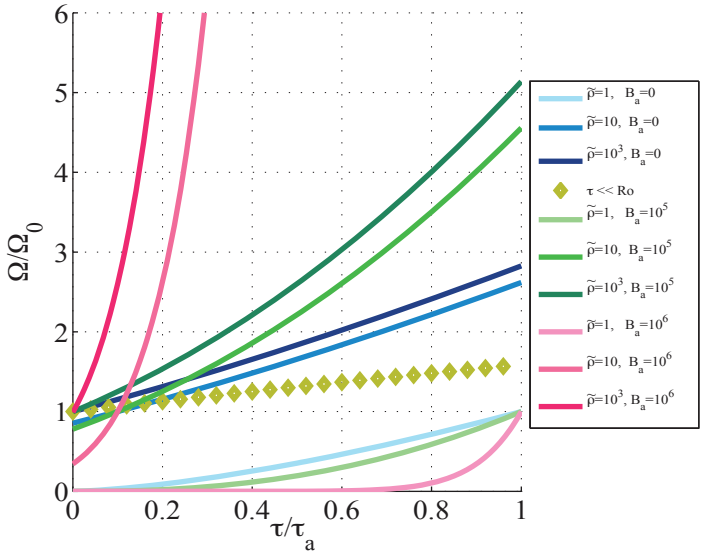


FIGURE 2.5 – Taux de rotation du cœur en fonction du temps adimensionné normalisé pour $\tilde{\rho} = 1, 10, 10^3$. Les courbes bleues sont identiques à celles de la figure (2.3) et les losanges correspondent aux triangles de cette même figure. En vert : Cas avec baroclinicité et $E = 10^{-7}$, $B_a = 10^5$. En rose : idem avec $B_a = 10^6$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé les équations hydrodynamiques permettant l'étude de la dynamique d'une enveloppe radiative en contraction gravitationnelle. Le modèle est considéré sphérique et se compose d'un noyau de taille arbitraire lorsqu'il s'agit d'une étoile de Pré-Séquence Principale et d'une enveloppe radiative. Nous rendons compte des effets de la contraction gravitationnelle à l'aide d'un écoulement radial imposé vers l'intérieur de telle sorte que l'enveloppe soit progressivement absorbée au cours du temps par le noyau du modèle. Cette aspiration radiale de la matière génère un couple de contraction gravitationnelle dans l'équation du moment. Cette configuration permet l'étude de l'écoulement de spin-up qui se développe sur le temps de Kelvin-Helmholtz en sein d'un fluide visqueux en rotation. En prenant en compte les effets d'une stratification stable, cet écoulement de spin-up est en compétition avec l'écoulement barocline qui dominerait en l'absence de contraction. Nous simplifions les équations de l'hydrodynamique d'un tel modèle en suivant l'hypothèse de Boussinesq. Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats de la résolution numérique de ces équations et détaillons le comportement de ces deux écoulements en fonction des paramètres et des conditions au bord du modèle. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations est décrite en annexe.

Chapitre 3

Simulations numériques et résultats

Sommaire

2.1 Le modèle 29
2.2 Equations de la dynamique d'une enveloppe stellaire en contraction gravitationnelle 31
2.3 L'accélération du taux de rotation du cœur et analyse aux couches limites 38
2.4 Dynamique d'une enveloppe stratifiée stablement 43

Dans ce chapitre, nous résolvons numériquement les équations de la dynamique établies dans le chapitre précédent. Nous étudions l'écoulement barocline et l'écoulement de spin-up afin de caractériser la dynamique de l'enveloppe à l'issue d'un temps de Kelvin-Helmholtz.

3.1 Solutions stationnaires numériques et analytiques

3.1.1 Ecoulement stationnaire induit par la contraction gravitationnelle

Quand les conditions aux bords sont rigides des deux côtés, et en l'occurence à la surface, nous avons développé l'expression analytique de la solution particulière de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle : l'écoulement géostrophique hors du cylindre tangent au cœur. La vitesse azimutale à l'équateur $\theta = \frac{\pi}{2}$ s'écrit

$$u_\varphi(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = U(r) = \sqrt{\frac{2}{E}}(1 - r^2)^{3/4} \left(\frac{\eta^2}{r} - \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta} r \right) \tag{3.1}$$

et la composante radiale

$$u_r(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\eta^2}{r^2} - \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta} r \ . \tag{3.2}$$

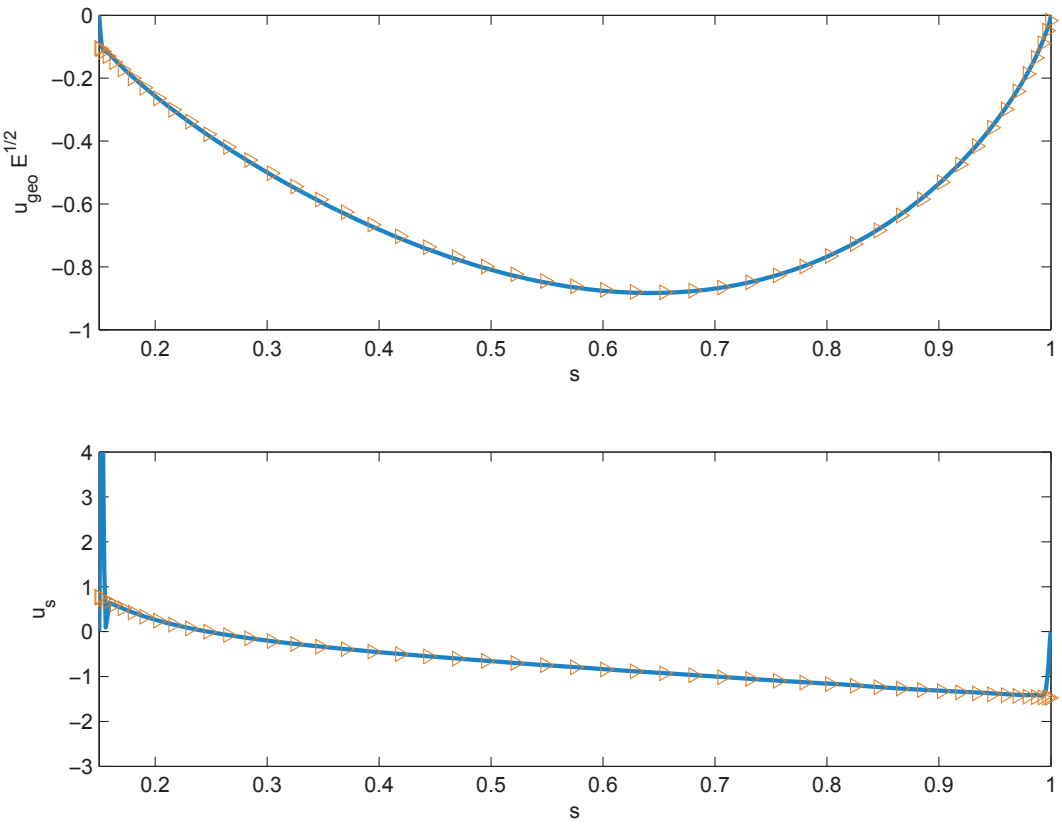


FIGURE 3.1 – Comparaison à l'équateur des solutions numérique et analytique (triangles) des composantes de vitesse azimutale et radiale en fonction de la profondeur pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$.

Comme le montre la figure (3.1), loin des bords, la solution analytique est en parfait accord avec la solution numérique. Sur les bords, il faudrait inclure les corrections de couche limite pour que les deux courbes se superposent.

3.1.2 Ecoulement stationnaire barocline

De la même façon que pour l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle, nous comparons la solution particulière analytique dérivée dans le cas stratifié stable sans contraction gravitationnelle (2.59) à sa solution numérique. A l'équateur, on trace

$$u_\varphi(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = -rB_a \int_r^1 \frac{n^2(r)}{r} dr \tag{3.3}$$

et

$$u_r(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = E \left((\Delta - \frac{1}{s^2}) u_\varphi \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} . \tag{3.4}$$

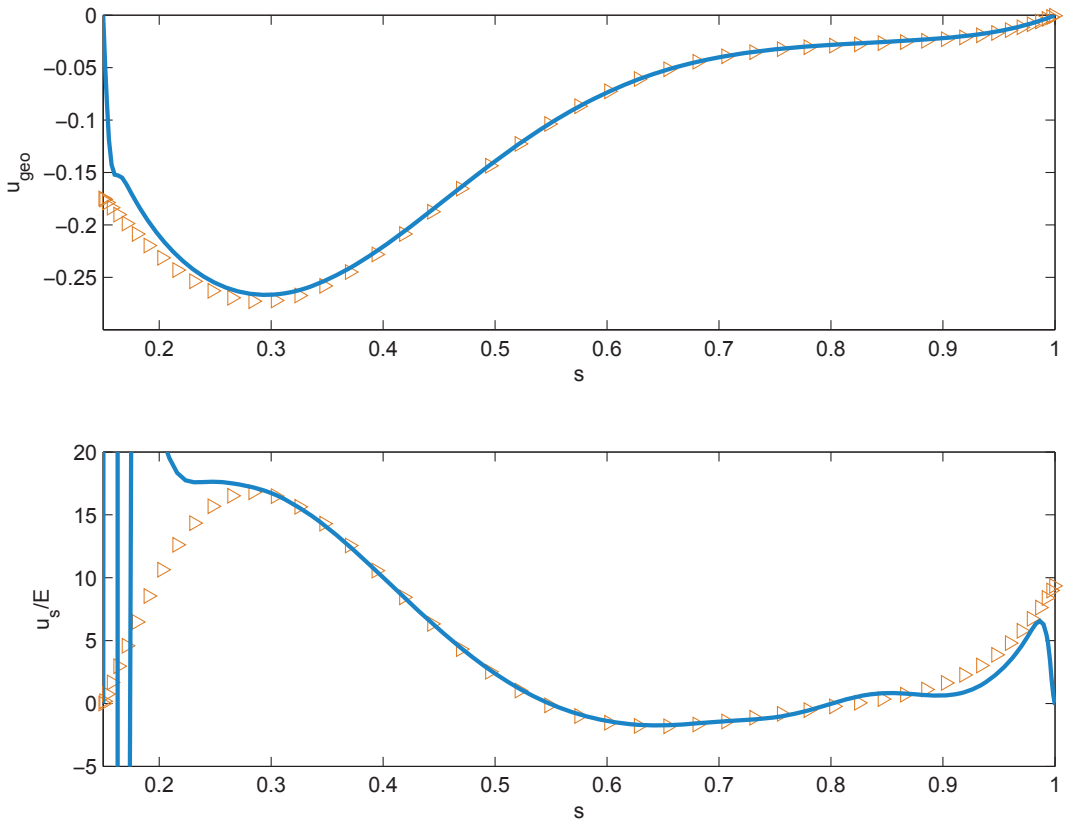


FIGURE 3.2 – Comparaison à l'équateur des solutions numérique et analytique (triangles) des composantes de vitesse azimutale et radiale en fonction de la profondeur pour $E = 10^{-6}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$.

La figure (3.2) montre une parfaite concordance entre les deux solutions, loin des bords. Sur les bords des deux représentations (3.1) et (3.2), l'écart entre solution analytique et solution numérique provient des corrections de couches limites qui ne sont pas représentées dans la solution analytique tracée.

Nous montrons ainsi la cohérence des solutions numériques des équations de la dynamique par rapport à ce que l'analyse nous avait indiqué dans le chapitre précédent. Cela présage que nous pouvons étudier les solutions numériques avec confiance dans le cas où les solutions analytiques ne sont pas accessibles comme par exemple lorsque l'on met des solutions de glissement sans frottement à la surface du modèle (section suivante de ce chapitre).

3.2 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle

3.2.1 Compétition entre l'écoulement barocline et l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle

Comme le montre l'expression de la solution non visqueuse complète (2.68), le paramètre B_a détermine lequel du terme de contraction gravitationnelle et du terme barocline, est de plus forte amplitude. Pour un B_a "fort", on s'attend à ce que le terme barocline soit dominant, et, pour une valeur modérée à faible de B_a, à ce que le terme de contraction gravitationnelle contrôle la dynamique.

A l'équateur, la solution hors des couches limites est

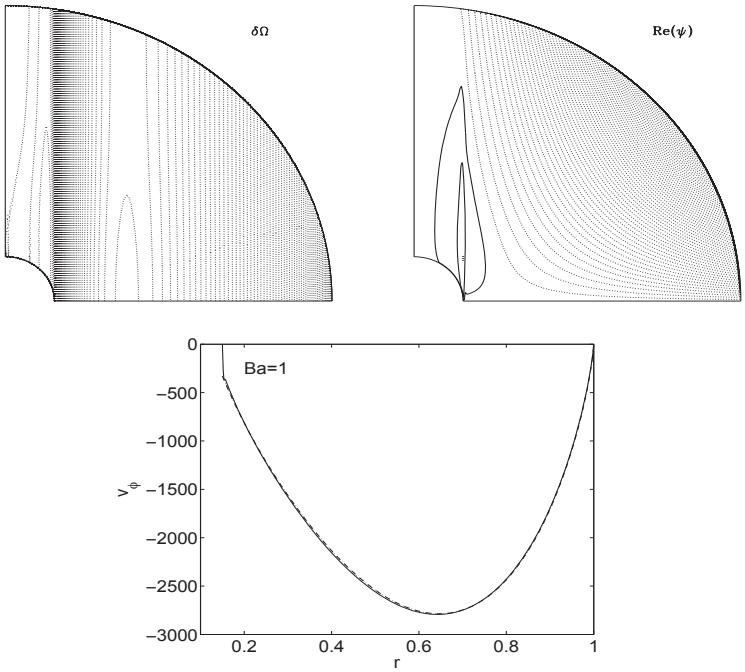
$$u_\varphi(r,\theta=\frac{\pi}{2}) = -rB_a\int_r^1 \frac{n^2(r)}{r}dr + \sqrt{\frac{2}{E}}(1-r^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{r}-\frac{9}{4\tilde{\rho}\eta}r\right) \tag{3.5}$$

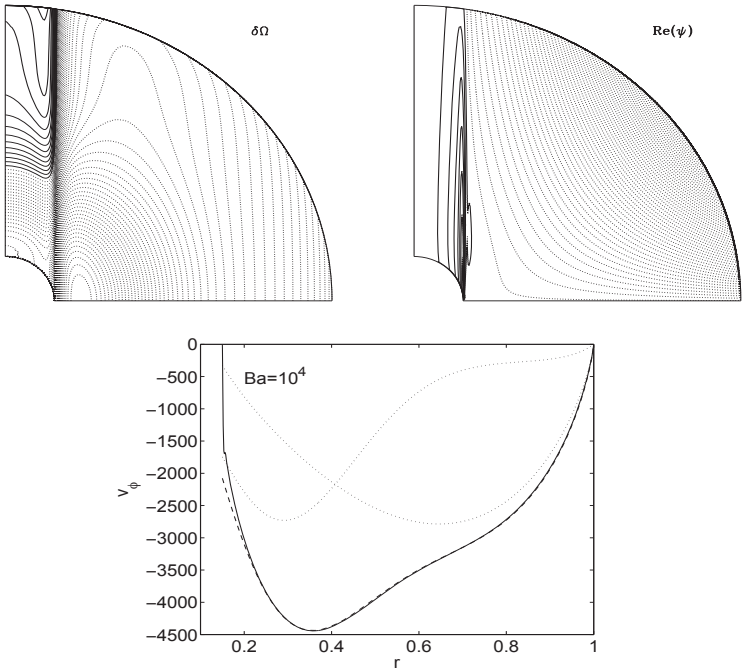
Nous déterminons la valeur critique du paramètre B_a pour laquelle le système bascule entre les différentes dynamiques. Sur la figure (3.3), la rotation différentielle $\delta\Omega$, la circulation méridienne ψ et le profil de vitesse azimutale à l'équateur $u_\varphi(r,\theta=\frac{\pi}{2})$ sont tracés pour différentes valeurs de B_a : 1, $10^4, 10^5, 10^7$ (de haut en bas). La circulation méridienne est une fonction définie telle que $\vec{v} = \vec{\nabla}\times\psi(r,\theta)\vec{e_\varphi}$ soit

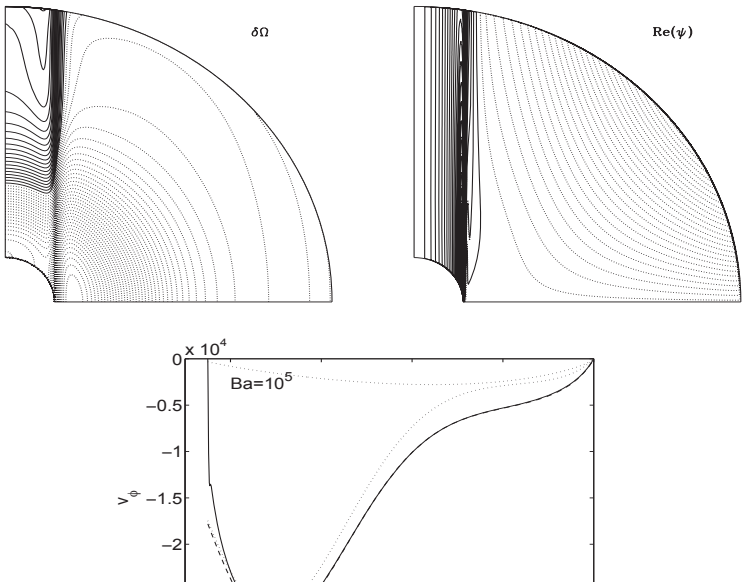
$$v_r = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta\psi \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{1}{r}\partial_r(r\psi)\ . \tag{3.6}$$

Les contours où ψ est constante représentent les lignes de courant de l'écoulement (la vitesse est tangentielle à ces lignes de courant). On a choisit une valeur d'Ekman faible $E = 10^{-7}$, un faible nombre de Prandtl $\mathrm{Pr} = 10^{-4}$ et un ratio des densités supérieur à un, e.g. $\tilde{\rho} = 10$.

Quand $B_a = 1$, la dynamique est celle d'un écoulement induit par la contraction gravitationnelle. La rotation différentielle est parallèle à l'axe de rotation et ne dépend que de la coordonnée s. Il s'agit de colonnes de Taylor. La circulation méridienne présente deux cellules de circulation. Le cœur accélère en prenant du moment angulaire aux régions avoisinantes de l'enveloppe qui ralentissent.


δΩ
Re(ψ)
Ba=1
v_ϕ
r
0
−500
−1000
−1500
−2000
−2500
−3000
0.2
0.4
0.6
0.8
1


δΩ
Re(ψ)
Ba=10^4
v_ϕ
r
0
−500
−1000
−1500
−2000
−2500
−3000
−3500
−4000
−4500
0.2
0.4
0.6
0.8
1


δΩ
Re(ψ)
x 10^4
Ba=10^5
v_ϕ
0
−0.5
−1
−1.5
−2

En parallèle, du moment angulaire est injecté à la surface de l'étoile qui accélère. Cela induit un flux de matière de l'extérieur vers l'intérieur dans le plan méridien. Le fluide est pompé vers le cœur à l'équateur et remonte vers la surface au pôle. Une deuxième cellule de sens inverse redistribue le moment cinétique dans le cylindre tangent au cœur. Une couche de Stewartson se forme parallèlement à l'axe de rotation Oz à $s = \eta$, délimitant le cylindre parallèle à l'axe de rotation tangent à la sphère interne. Cette couche de cisaillement a notamment l'épaisseur caractéristique $E^{1/4}$. Elle évite la discontinuité sur le profil de vitesse provenant de l'incompatibilité entre le forçage radial et l'écoulement géostrophique en $r = \eta$.

A $B_a = 10^4$, les maximums en valeur absolue des composantes de vitesse azimutale associée à l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle et barocline sont égaux.

Quand $B_a = 10^5$, le profil de vitesse azimutale associée à l'écoulement barocline devient supérieur en valeur absolue au terme induit par la contraction gravitationnelle. Cela se répercute sur la forme de la rotation différentielle. En dehors du cylindre tangent au cœur, elle est grossièrement dépendante de la coordonnée sphérique r. A l'intérieur du cylindre tangent, le pôle est plus rapide que le cœur grâce à une redistribution du moment cinétique.

A $B_a = 10^7$, la circulation méridienne est à son tour affectée par l'écoulement barocline. Comme le montre Rieutord (2006), sa forme est contrôlée par le profil imposé de fréquence de Brunt-Väisälä. Il y a $N + 1$ cellules de circulation méridienne pour N changements de signe de la dérivée de $n_T^2(r)$. Le nombre de Prandtl petit permet de ne pas comprimer cette circulation dans les couches externes du modèle.

En résumé, il y a trois régimes différents :

1. Un régime à faible B_a où toute la dynamique (rotation différentielle et circulation méridienne) est caractéristique du théorème de Taylor-Proudman et d'un écoulement de spin-up.
   cf première ligne de la figure (3.3).
2. Un régime à B_a modéré, où la rotation différentielle est celle d'un écoulement barocline alors que la circulation méridienne est celle d'un spin-up.
   cf les deuxième et troisième lignes de la figure (3.3).
3. Un régime à fort B_a où toute la dynamique (rotation différentielle et circulation méridienne) est caractéristique de l'écoulement barocline.
   cf la dernière ligne de la figure (3.3).

3.2.2 Nombre B_a critique, dépendance à la viscosité

Nous notons $B_{a\,\text{critique}}^{\delta\Omega}$ le seuil à partir duquel la rotation différentielle dans l'enveloppe est caractéristique d'un écoulement barocline. Nous considérons que la transition a lieu dès lors que les maximums en valeur absolue de la composante de vitesse azimutale associée à l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle et barocline sont égaux comme c'est le cas sur la deuxième ligne de la figure (3.3). Dans cette exemple, $B_{a\,\text{critique}}^{\delta\Omega}$ vaut environ 10^4. Nous étudions la dépendance de $B_{a\,\text{critique}}^{\delta\Omega}$ à la viscosité. Sur la figure (3.4), nous montrons

les profils de vitesse azimutale à l'équateur à la transition vers une rotation différentielle barocline pour différentes valeurs du nombre d'Ekman.

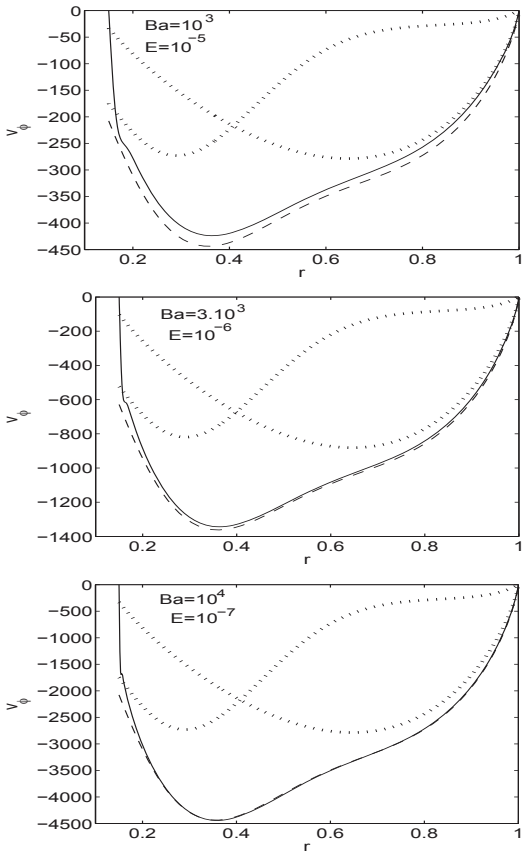


FIGURE 3.4 – Profils de vitesse azimutale à l'équateur $v_\varphi(r, \theta = \frac{\pi}{2})$ lorsque $B_a = B_{a\,\text{critique}}^{\delta\Omega}$ pour différents nombres d'Ekman, pour $Pr = 10^{-4}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. De haut en bas : $E = 10^{-5}$, $B_a = 10^3$; $E = 10^{-6}$, $B_a = 3.10^3$; $E = 10^{-7}$, $B_a = 10^4$. La ligne continue est la solution numérique, les tirets la solution analytique et les deux lignes pointillées sont les deux solutions analytiques de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle et de l'écoulement barocline.

A mesure que le nombre d'Ekman diminue, la différence entre solutions numérique et analytique s'amenuise. Le régime asymptotique des petits Ekman où la solution analytique est vraie est atteint rapidement.

Comme le montre l'expression (2.59), la composante de vitesse azimutale barocline est $\mathcal{O}(B_a)$ tandis que celle de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle est $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ d'après l'expression (2.35). On s'attend ainsi à ce que la valeur de B_a pour laquelle la rotation différentielle devient celle typique d'un écoulement dominé par la baroclinicité, notée

$B_{a\ \text{critique}}^{\delta\Omega}$ soit de l'ordre de $E^{-1/2}$ et, en l'occurence, nous observons numériquement

$$B_{a\ \text{critique}}^{\delta\Omega} \sim 3E^{-1/2} \tag{3.7}$$

La circulation méridienne nécessite une plus grande valeur de B_a pour que le changement de régime opère. En effet, la circulation méridienne d'un spin-up est elle $\mathcal{O}(1)$ (équation (2.24)) alors que celle d'un écoulement barocline est $\mathcal{O}(EB_a)$ puisque $u_s = B_a E(\Delta - 1/s^2)u_\varphi$. Cela présage d'une transition de la circulation méridienne quand $B_a = B_{a\ \text{critique}}^{\psi} \sim E^{-1}$ où $B_{a\ \text{critique}}^{\psi}$ est la valeur de transition de la circulation méridienne. Numériquement, nous observons

$$B_{a\ \text{critique}}^{\psi} \sim \frac{1}{5}E^{-1} \tag{3.8}$$

Cela confirme l'existence d'un régime intermédiaire lorsque $3E^{-1/2} < B_a < \frac{1}{5}E^{-1}$ où la circulation méridienne est caractéristique du spin-up alors que la rotation différentielle est barocline.

3.3 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle avec des conditions Glissement Sans Frottement à la surface

Si les conditions rigides à la surface du modèle sont utiles pour dériver des solutions analytiques, elles ne sont pas les conditions aux bords les plus réalistes puisqu'elles imposent un même taux de rotation au cœur et à la surface de l'étoile. Nous relâchons cette contrainte et imposons à la place des conditions de Glissement Sans Frottement (GSF) à la surface. Il s'agit d'annuler la composante horizontale de la vitesse à la surface qui tourne à un taux de rotation libre. De cette façon, on suppose également que les couches externes à la coquille n'ont pas d'impact dynamique et ne font que fournir de la matière à l'enveloppe. Ces conditions GSF s'écrivent

$$\vec{e}_r \times [\sigma]\vec{e}_r = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad u_r' = 0 \qquad \text{en} \qquad r = 1\ .$$

Cela implique $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0$ et ainsi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi'}{r}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r'}{\partial \theta}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta'}{r}\right) = 0 \qquad \text{en} \qquad r = 1\ .$$

Nous avons utilisé la même notation pour le champ de vitesse que dans la section 2.2.4 où nous avions présenté les conditions de non-glissement (cette notation se réfère au changement de variable $\vec{u} = \vec{u^0}(r) + \vec{u'}$). Dans la suite, nous abandonnons le prime sur le vecteur vitesse $\vec{u}$.

3.3.1 Ecoulement barocline

La figure (3.5) montre la dynamique d'un écoulement barocline sans contraction gravitationnelle lorsque les conditions à la surface sont GSF.

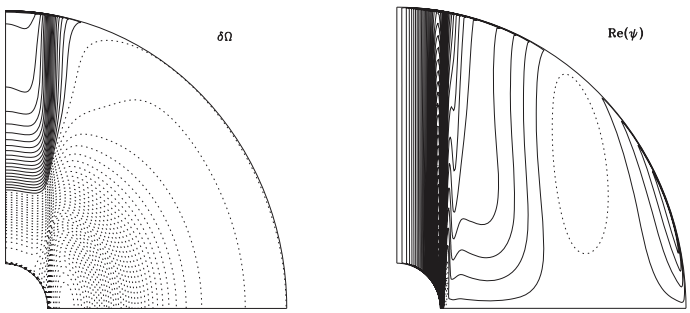


FIGURE 3.5 – Rotation différentielle $\delta\Omega$ et circulation méridienne ψ pour $E = 10^{-6}$, $Pr = 10^{-4}$, $B_a = 1$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les zones où le fluide est plus rapide que le cœur. Une circulation en lignes continues est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Ces résultats sont comparables à ceux obtenus par Rieutord (2006). De la même façon, il y a trois cellules de circulation méridienne dans l'enveloppe en réponse au sens de variation de la fréquence de Brunt-Väisälä. La seule différence notable est la présence du cœur qui provoque l'apparition d'une couche de Stewartson. Cette couche confine la rotation différentielle rapide du pôle à l'intérieur du cylindre tangent. Cette configuration offre une dynamique très similaire à celle de la dernière ligne de la figure (3.3) lorsque les conditions aux limites sont rigides. L'ordre de grandeur de l'amplitude de la vitesse azimutale (et donc de la rotation différentielle) est le même et est $\mathcal{O}(B_a)$.

3.3.2 Ecoulement géostrophique

Ecoulement barocline

Quelles que soient les conditions au bord, l'expression (2.59) est une solution particulière. Toutefois, lorsque les conditions à la surface du modèle sont GSF, l'écoulement géostrophique $F(s)$ n'est plus contraint à être $\mathcal{O}(B_a\sqrt{E})$ et donc a priori il ne doit pas être négligé. Rieutord (2006) a montré qu'avec ces conditions aux bord cet écoulement est solution de l'équation différentielle du troisième ordre forcée

$$sF'' + F' - F/s + s^2C(1) - \zeta(s)^2 L_3(F) - \zeta(s)\int_0^{\zeta(s)} \left(2C(r) + s^2\frac{C'(r)}{r}\right) dz$$

$$+n^2(1)(1+q(s)) + sF'' + q(s)(F' - F/s) = 0 \tag{3.9}$$

avec $\zeta(s) = \sqrt{1-s^2}$, $L_3(F) = \frac{1}{s}\left((sF')'' - (F/s)'\right)$ et $C(r) = \left(\frac{n^2}{r}\right)' + \frac{4n^2}{r^2}$. Les primes désignent des dérivées radiales.

La résolution de cette équation étant complexe, nous ne cherchons pas l'expression analytique de l'écoulement géostrophique $F(s)$ et donc nous nous contenterons de la solution numérique lorsque les conditions à la surface sont GSF.

Ecoulement induit par la contraction gravitationnelle

La solution non visqueuse de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle dans l'enveloppe a toujours la forme géostrophique $\bar{u}_\varphi = U(s)\vec{e}_\varphi$. Nous écrivons la composante azimutale de l'équation du moment cinétique

$$\bar{u_s} = E\Delta\bar{u_\varphi} \tag{3.10}$$

où $\Delta \sim \mathcal{O}(1)$ est l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques. La composante méridienne est $\mathcal{O}(1)$ via la condition d'aspiration radiale que nous imposons et par conséquent l'écoulement azimutal ne peut qu'être $\mathcal{O}(E^{-1})$. L'origine de cet écoulement est la non conservation du moment cinétique dans l'enveloppe (mais conservation de la masse). En effet, par exemple, une couche 1 au niveau du cœur, comprise entre les rayons adimensionnés $r = \eta$ et $r = \eta + dr_1$, a un moment d'inertie I_1 tel que $I_1 < I_2$ où I_2 est le moment d'inertie d'une couche de surface 2 comprise entre $r = 1 - dr_2$ et $r = 1$ de même masse. Le moment cinétique l_1 emportée dans le noyau par la couche 1 d'épaisseur $dr_1 = 1\%$ est alors tel que $l_1/l_2 \simeq 42$ en supposant que les deux couches ont le même taux de rotation (le nombre de Rossby est faible). l_2 est le moment cinétique de la couche 2. Cette différence indique que les couches en se rapprochant du cœur perdent de leur moment cinétique par frottements visqueux et le transférent vers la surface. Cet équilibrage du moment cinétique via les forces visqueuses est ce que traduit l'équation (3.10).

En imposant des conditions aux bords GSF à la surface du modèle, l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle nécessite des corrections de couche limite différentes par rapport au cas de conditions aux bords rigides. D'après (Greenspan, 1969*b*), les corrections à la surface sont telles que

$$\vec{e}_r \wedge \widetilde{u} + i\widetilde{u} = \vec{C}(\bar{u})\ e^{-\zeta\sqrt{i|\cos\theta|}} \tag{3.11}$$

et $\vec{C}(\bar{u})$ est un vecteur complexe dont nous cherchons l'expression. La coordonnée dilatée s'écrit $\zeta = (1-r)/\sqrt{E}$. On en déduit directement

$$\widetilde{u_\theta} + i\widetilde{u_\varphi} = C\ e^{-\zeta\sqrt{i|\cos\theta|}} \tag{3.12}$$

où C est un complexe tel que $\vec{e_\varphi} \cdot \vec{C}(\bar{u}) = C$. Comme dans la couche limite, l'écoulement est essentiellement tangentiel, le champ de vitesse total $\vec{u} = \bar{u} + \widetilde{u}$ a une composante u_θ et une composante u_φ telles que

$$u_\theta + iu_\varphi = C\ e^{-\zeta\sqrt{i|\cos\theta|}} - 3r\sin\theta\cos\theta\dot{\omega} + iU(s) \tag{3.13}$$

satisfaisant à la surface à la condition GSF

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta + iu_\varphi}{r}\right) = 0 \tag{3.14}$$

Les solutions sont les mêmes que celles obtenues par Rieutord (2006) à l'exception des termes faisant intervenir la fréquence de Brunt-Väisälä. La vitesse méridienne u_θ et le pompage d'Ekman $\widetilde{u}_r$ s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_\theta &=& \sqrt{\frac{E}{2}}\Gamma(\theta)e^{-\xi}\left(\cos\xi + \sin\xi\right) - 3r\sin\theta\cos\theta\dot{\omega} \\ \widetilde{u}_r &=& Ef(\theta)e^{-\xi}\cos\xi \end{array}\right. \tag{3.15}$$

où

$$\Gamma(\theta) = \frac{U(\sin\theta) - \sin\theta U'(\sin\theta)}{\sqrt{|\cos\theta|}} \quad ; \quad f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\Gamma(\theta) \quad \text{et} \quad \xi = \zeta\sqrt{|\cos\theta|/2}\,. \tag{3.16}$$

et

$$C = (1+i)\sqrt{\frac{E}{2}}\Gamma(\theta)$$

Nous observons numériquement que l'écoulement géostrophique $U \sim \mathcal{O}(E^{-1})$ (nous le détaillons dans une prochaine sous-section). Il induit donc un écoulement latitudinal $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ et un pompage d'Ekman $\mathcal{O}(1)$. Ce résultat est en accord avec l'équation de conservation de la masse qui impose un ratio $\sqrt{E}$ entre le pompage et la composante latitudinale

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{3.17}$$

dans la couche limite.

Il est à noter qu'à l'équateur, la solution $\tilde{u}_\theta$ est singulière (le dénominateur de $\Gamma(\theta)$ s'annule). En réponse à cette singularité, l'épaisseur caractéristique de la couche limite augmente à l'approche de l'équateur. Comme le montre la figure (1.3), elle croît en passant de $\mathcal{O}(E^{1/2})$ à $\mathcal{O}(E^{2/5})$ dans une région de longueur en latitude $\mathcal{O}(E^{1/5})$ autour de l'équateur (K. Stewartson (1967), Greenspan (1969*a*)),

Connaissant ces ordres de grandeurs, nous analysons les solutions numériques complètes (barocline et celle de spin-up) afin d'identifier la valeur du nombre B_a critique en fonction du nombre d'Ekman.

3.3.3 Nombre B_a critique

En augmentant le nombre sans dimension B_a qui quantifie l'amplitude des écoulements baroclines, la dynamique transite d'un état dominé par la contraction gravitationnelle vers un état barocline.

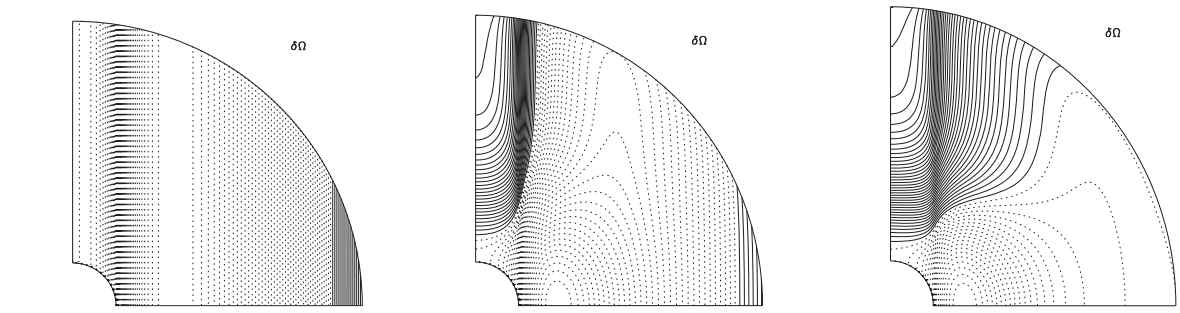


FIGURE 3.6 – Rotation différentielle $\delta\Omega$ pour $E = 10^{-6}$, $Pr = 10^{-4}$, $B_a = 0, 10^5, 10^6$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les zones où le fluide est plus rapide que le cœur.

Les figures (3.6) et (3.7) illustrent le changement de dynamique qui s'opère lorsque la nombre B_a augmente. La transition d'une dynamique dominée par la contraction gravitationnelle vers une dynamique barocline a lieu lorsque $B_a = B_{a\,\text{critique}}$. La circulation méridienne et la rotation différentielle sont affectées pour un même $B_{a\,\text{critique}}$. Il n'existe pas de régime mixte comme nous en avons observé dans le cas des conditions au bord rigides à la surface. Nous observons numériquement

$$B_{a\,\text{critique}} \sim \frac{1}{5} E^{-1} \, . \tag{3.18}$$

Cela est cohérent avec le fait que la vitesse azimutale induite par la contraction gravitationnelle est $\mathcal{O}(E^{-1})$ alors que la vitesse azimutale barocline est $\mathcal{O}(B_a)$.

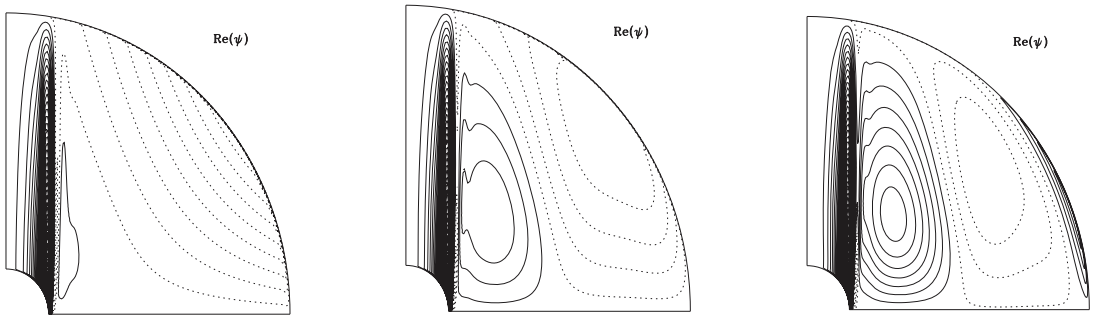


FIGURE 3.7 – Circulation méridienne ψ pour $E = 10^{-6}$, $Pr = 10^{-4}$, $B_a = 0, 10^5, 10^6$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Une circulation en lignes continues est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

3.3.4 Amplitude de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle

L'état stationnaire typique d'un écoulement induit par la contraction gravitationnelle a une rotation différentielle cylindrique comme le montre la figure (3.8). Les régions équatoriales de surface tournent plus vite que le cœur alors que le pôle est plus lent. La circulation méridienne montre deux cellules dont une est une couche de Stewartson qui délimite le cylindre tangent à $s = \eta$.

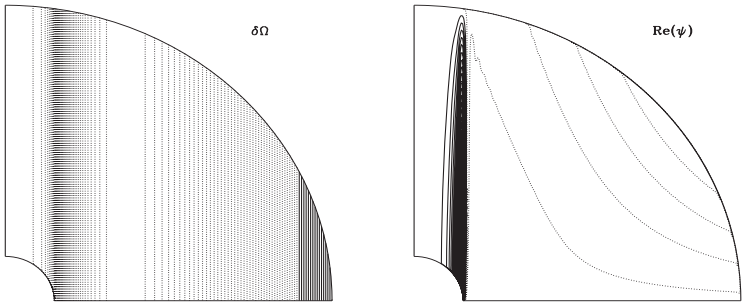


FIGURE 3.8 – Rotation différentielle $\delta\Omega$ et circulation méridienne ψ pour $E = 10^{-7}$,$\eta = 0.15$, et $\tilde{\rho} = 10$ dans le cas d'une stratification neutre. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les zones où le fluide est plus rapide que le cœur. Une circulation en lignes continues est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les conditions aux bords sont rigides en $r = \eta$ et GSF en $r = 1$.

Nous étudions l'amplitude de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle en

fonction de la viscosité. Illustrée par la figure (3.9), nous comparons les amplitudes de la vitesse azimutale de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle à l'intérieur et l'extérieur du cylindre tangent, en fonction du nombre d'Ekman. Comme les conditions à l'interface cœur-enveloppe sont rigides, on s'attend, d'aprés l'expression (2.30), à ce que l'écoulement dans le cylindre tangent soit $\mathcal{O}(E^{-1/2})$. Cependant, quand le cœur est de petite taille typiquement $\eta = 0.15$ ou 0.25, les solutions numériques montrent que la couche de Stewartson influence certainement la dynamique de l'intérieur du cylindre tangent car l'état asymptotique n'est atteint que pour de très faibles valeurs du nombre d'Ekman $E \leq 10^{-8}$. A l'inverse, lorsque le cœur est plus gros, $\eta = 0.5$ par exemple, la loi d'échelle $E^{-1/2}$ dans le cylindre tangent apparaît facilement : pour tout nombre d'Ekman inférieur à 10^{-5}. En dehors du cylindre tangent, les solutions numériques montrent que la rotation différentielle est systématiquement $\mathcal{O}(E^{-1})$ dès que les conditions à la surface sont GSF.

Le passage d'un écoulement azimutal $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ dans le cylindre tangent au noyau à un écoulement $\mathcal{O}(E^{-1})$ dans l'enveloppe provient certainement de la présence de la couche de Stewartson. Ce que nous pouvons en dire c'est que si nous considérons $E^{1/4}$ comme épaisseur caractéristique de l'une des couches imbriquées dans la couche de Stewartson, alors d'après l'équation (3.10) $u_s \sim \mathcal{O}(1)$ dans le cylindre tangent puisque $u_\varphi \sim \mathcal{O}(E^{-1/2})$. La conservation de la masse induit $u_z \sim \mathcal{O}(E^{-1/4})$. Si par contre $u_\varphi \sim \mathcal{O}(E^{-1})$ alors $u_s \sim \mathcal{O}(E^{-1/2})$. L'analyse de la couche de Stewarston, en se basant sur les travaux de Stewartson (1966) par exemple, apporterait une description complète de la dynamique au niveau de la couche mais n'est pas indispensable à la description dans un modèle aussi simplifié que le notre.

L'amplitude de l'écoulement azimutale est ainsi très grande puisque le nombre d'Ekman est très petit. Cela présage que l'état stationnaire est difficilement atteignable sur un temps aussi court que celui de Kelvin-Helmholtz. De plus, cet état est a posteriori difficilement descriptible par des équations linéaires puisqu'on s'attend dès lors à ce que les termes non-linéaires soient importants, en l'occurence $\mathcal{O}(\frac{Ro}{E^2})$.

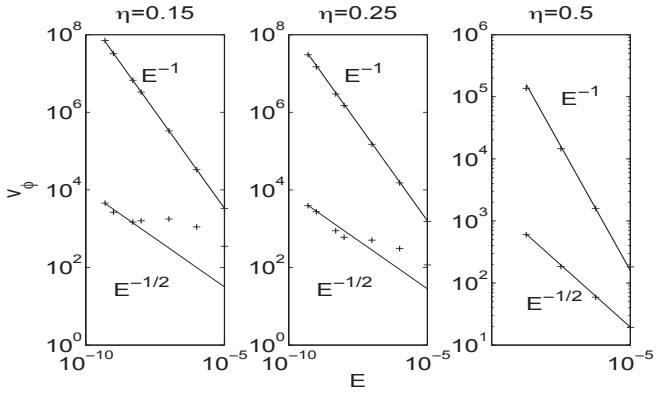


FIGURE 3.9 – Logarithme de la valeur absolue de l'amplitude de la vitesse azimutale numérique en fonction du logarithme du nombre d'Ekman à $z = 0.5$. A gauche : $\eta = 0.15$, au milieu : $\eta = 0.25$, à droite : $\eta = 0.5$. Dans le cylindre tangent, les points de mesures sont respectivement $s = 0.1, 0.2, 0.25$, la vitesse azimutale suit une loi d'échelle en $E^{-1/2}$. Elle est proportionelle à E^{-1} dans l'enveloppe (point de mesure $s = 0.65$). La vitesse azimutale est principalement négative pour les "petits" cœurs (e.g. $\eta = 0.15$ ou $\eta = 0.25$) et positive quand le cœur est plus gros (e.g. $\eta = 0.5$).

3.4 Solutions transitoires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle

L'amplitude importante de l'écoulement stationnaire induit par la contraction gravitationnelle dans l'enveloppe impose l'étude de son évolution temporelle car nous avons besoin de connaître les caractéristiques du transient à la fin d'un temps de Kelvin-Helmholtz en fonction des paramètres du problème. Pour ce faire, nous résolvons le set d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \wedge \left(Ro \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} - E \Delta \vec{u} \right) & = & 2(\frac{\eta^2}{r^3} - \dot{\omega}) \cos\theta \vec{e}_r + (\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega}) \sin\theta \vec{e}_\theta \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.19}$$

avec un schéma implicite d'ordre 1. La méthode d'Euler backward consiste à réécrire les dérivées temporelles en différence finies telles que, par exemple

$$\frac{\partial}{\partial t} w_m^l = \frac{(w_m^l)_{n+1} - (w_m^l)_n}{\delta t} = f\left((w_m^l)_n, (u_m^l)_n \right) \tag{3.20}$$

où l'indice n est à comprendre au sens de « au pas de temps n » et δt est le pas de temps.

Comme il s'agit d'une méthode implicite, les modes Coriolis (ondes inertielles) sont filtrés car ils sont sur des échelles de temps de la rotation contrairement aux modes baroclines. Un schéma implicite est inconditionnellement stable et nous résolvons l'échelle séculaire

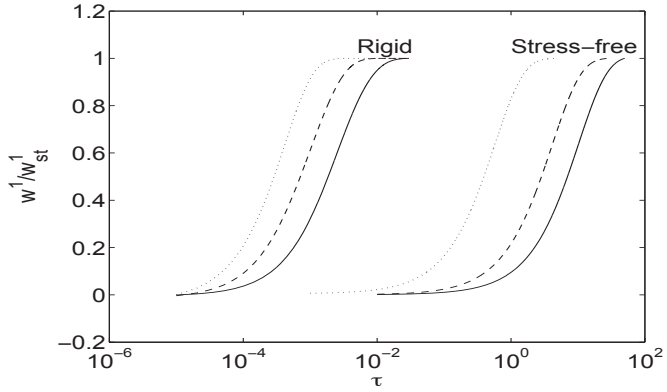


FIGURE 3.10 – Evolution temporelle de la composante principale de la vitesse azimutale $w^{l=1}$ normalisée par la solution stationnaire correspondante $w^{l=1}_{\rm st}$ en fonction du temps adimensionné τ pour $E = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (pointillés, tirets, et ligne continue, respectivement) et $Ro = 10^{-6}$ au rayon $r = 0.88$. A gauche sont les solutions avec des conditions rigides sur les deux bords et à droite celles où les conditions GSF ont été utilisées à la surface. Dans ce cas, la durée du transient $\tau_{\rm GSF}$ est plus grande que 1 et suit la loi en $E^{-0.86}$.

d'évolution du système. Comme la composante $w^{l=1}$ est la composante majoritaire de la vitesse azimutale, son comportement reflète celui de la rotation différentielle. Sur la figure (3.10), nous traçons cette composante pour différentes valeurs du nombre d'Ekman et comparons la durée du transient dans les cas où les conditions à la surface sont rigides et GSF.

Lorsqu'elles sont rigides, l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle est rapidement stationnaire. L'étude de la solution stationnaire que nous avons mené dans la première partie de cette thèse est ainsi justifiée.

Par contre, l'utilisation des conditions GSF à la surface conduit à des solutions transitoires qui s'établissent sur un temps plus long que le temps de Kelvin-Helmholtz, $\tau_{\rm GSF} > 1$. Les solutions numériques montrent que la durée du transient obéit à la loi

$$\tau_{\rm GSF} \propto RoE^{-0.86} \, . \tag{3.21}$$

Nous observons que la solution transitoire est approximativement auto-similaire. En effet, le profil de la vitesse azimutale u_φ reste quasiment inchangé tandis que son amplitude croît au cours du temps. A titre d'exemple, nous avons tracé le profil radial de la vitesse azimutal à l'équateur à différents instants sur la figure (3.11) droite. Les profils sont normalisés par l'amplitude maximum à chaque instant et sont quasiment superposés. La rotation différentielle associée à cet écoulement est parallèle à l'axe Oz comme le montre la figure (3.11) gauche. L'amplitude de la vitesse azimutale croît selon les profils temporels présentés sur la figure (3.10). Ces profils peuvent être approximés par la fonction

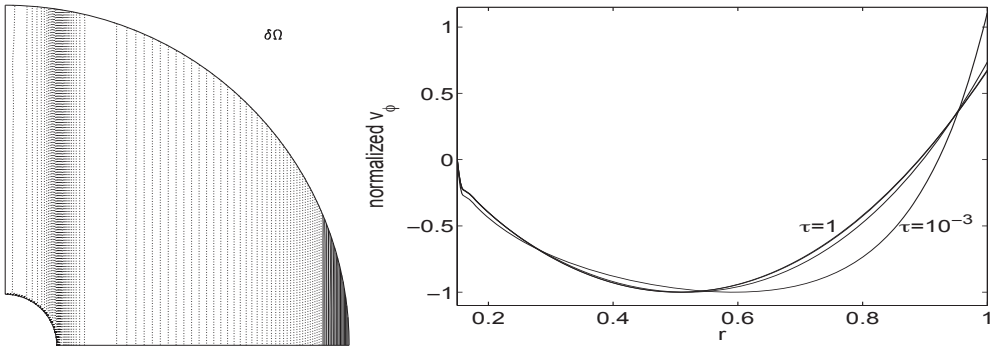


FIGURE 3.11 – A gauche : La rotation différentielle associée au transient pour $E = 10^{-6}$ et $Ro = 10^{-6}$ au temps $\tau = 0.02$ quand les conditions à la surface sont GSF. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les zones où le fluide est plus rapide que le cœur. A droite : Profils de vitesse azimutale dans le plan équatorial en fonction du rayon normalisée à différents instants de la simulation. Les courbes sont normalisées par le maximum en valeur absolue de l'amplitude de vitesse azimutal à chaque instant.

$$\frac{A}{E}(1 - e^{-\tau \ln 10/\tau_{\rm GSF}}) \tag{3.22}$$

où A est une constante d'ordre unité.

La loi d'échelle (3.21) évoque la loi d'échelle en $E^{-6/7}$ caractéristique de la couche de Stewarston des écoulements de Couette dans la configuration sphérique (Stewartson, 1966).

3.4.1 Solution transitoire induite par la contraction gravitationnelle

L'enveloppe radiative est stratifiée stable et, en l'absence de forçage dû à la contraction gravitationnelle, elle se relaxe vers un état barocline stationnaire. Le temps d'amortissement des modes baroclines est le temps de Eddington-Sweet

$$\tau_{ED} = \frac{\tau_{KH}}{\gamma} \tag{3.23}$$

qui dépend du taux de rotation via $\gamma = 4\Omega^2/\mathcal{N}^2$. Pour une rotation rapide, ce temps est de l'ordre de grandeur du temps de Kelvin-Helmholtz ($\gamma \sim 1$). Nous estimons donc que les modes baroclines sont amortis à la fin de la contraction.

A l'aide de modèles ESTER, Espinosa Lara & Rieutord (2007) et Espinosa Lara & Rieutord (2013) fournissent la vitesse caractéristique de l'écoulement barocline stationnaire d'une enveloppe radiative. Ils montrent que la rotation différentielle est de l'ordre de 15% de la vitesse équatoriale à l'état stationnaire. Nous considérons donc que cette valeur $0.15\Omega R_\star$

est l'amplitude maximale que l'écoulement barocline transitoire peut atteindre sur un temps de Kelvin-Helmholtz. L'écoulement induit par la contraction gravitationnelle, quant à lui, se développe et évolue dans le temps selon la loi (3.22). Pourvu qu'initialement, B_a soit inférieur à $\frac{E^{-1}}{5}$, les deux écoulements sont d'égales amplitudes au temps τ_c tel que

$$\frac{A}{E}(1-10^{-\tau_c \ln 10/\tau_{\rm GSF}}) = 0.15\frac{\Omega R_\star}{V_a}$$

soit

$$\tau_c \sim \frac{0.15}{2A}E^{0.14}\ . \tag{3.24}$$

Pour un nombre d'Ekman est petit et A est d'ordre unité, le temps τ_c est inférieur au temps de Kelvin-Helmholtz ($\tau_c \sim 0.1$ pour $E = 10^{-7}$). Cela signifie qu'à la fin d'un temps de Kelvin-Helmholtz, l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle a une amplitude plus importante que l'écoulement barocline et contrôle la dynamique.

Nous confirmons ce résultat avec une simulation numérique intégrant l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle à partir d'un écoulement barocline stationnaire préexistant. Sur la figure (3.12), on montre l'évolution temporelle du profil de vitesse azimutale pris à l'équateur. La solution initiale est celle d'un écoulement barocline stationnaire. Le profil de vitesse azimutale est modifié au fur et à mesure de la croissance de la solution induite par la contraction gravitationnelle. Pour un nombre d'Ekman égal à $E = 10^{-5}$, la transition entre les deux régimes se produit entre $\tau = 10^{-3}$ et $\tau = 10^{-2}$, ce qui est encore inférieur à notre première estimation $\tau_c \sim 0.2$ via la loi (3.24).

Dans cette configuration, l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle est quasiment auto-similaire à partir du moment où il est dominant et donc a priori au moins pour 80% de la durée de la contraction.

3.4.2 Solution transitoire barocline

Nous fournissons dans cette sous-section des pistes permettant l'étude de la solution transitoire barocline. En l'occurence, nous cherchons le transient qui mène au système d'équations de Rieutord (2006).

Equation de l'énergie

Une façon d'étudier la solution transitoire barocline est de résoudre l'équation de l'énergie avec le terme temporel $\frac{\partial T}{\partial t}$ d'une étoile à densité constante

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})T = \kappa\Delta T + Q \tag{3.25}$$

où κ est la diffusivité thermique et $Q < 0$ sont les puits de chaleur stabilisants. Nous adimensionnons cette équation à l'aide des échelles suivantes

$$t = \frac{R_\star^2}{\kappa}\tau, \quad \vec{v} = V\vec{u}, \quad T = \epsilon T_\star \theta_T \tag{3.26}$$

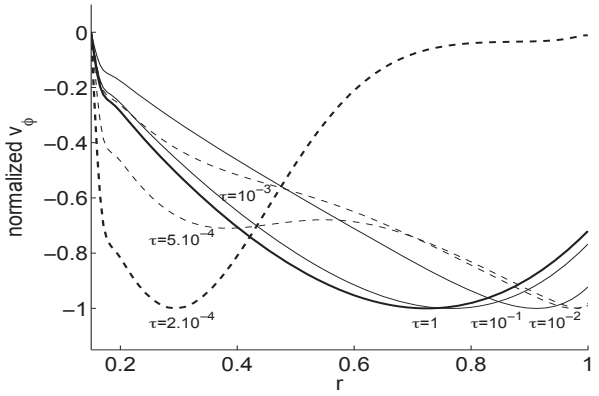


FIGURE 3.12 – Profils radiaux de la vitesse azimutale à l'équateur à différents instants pour $E = 10^{-5}$, $B_a = 10^2$, $Pr = 10^{-4}$, and $Ro = 10^{-5}$. Les profils sont adimensionnés de la même façon que pour la figure (3.11). Le temps sans dimension τ est spécifié pour chaque courbe. Les pointillés montrent une dynamique barocline tandis que les lignes continues montrent le spin-up. Les profils en gras sont le point de départ et d'arrivée de la simulation.

Le temps est celui de la diffusion thermique, l'échelle de vitesse celle de l'écoulement barocline et nous reprenons la même échelle sur la température que celle des fluctuations de température du modèle développé par Rieutord (2006). Cela conduit à

$$\frac{\partial \theta_T}{\partial \tau} + \frac{PrRo}{E}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\theta_T - \Delta\theta_T = q \tag{3.27}$$

Nous avons poser $q = \frac{\mathrm{Pr}\,Ro}{E}\frac{R}{V\epsilon T_\star}Q$ (q est de signe négatif). En estimant que $\mathrm{Pr}\,Ro \ll E$, nous négligeons le terme non linéaire et projetons sur la base des harmoniques sphériques (les notations sont introduites dans l'annexe A présentant la méthode numérique)

$$\left(r^2 t_m^l{}'' + 2r t_m^l{}' - (\Lambda + \frac{r^2}{\delta\tau})t_m^l\right)_n = -\sqrt{4\pi}qr^2\delta_{l0} - \frac{r^2}{\delta\tau}(t_m^l)_{n+1} \tag{3.28}$$

La méthode implicite Euler backward (3.20) a été utilisée pour décrire la dérivée temporelle. n et $n+1$ se réfèrent à deux instants de la simulation séparés par un pas de temps adimensionné $\delta\tau$. La solution stationnaire du champ de température est

$$t_0^0(r,\tau_{st}) = -\frac{q\sqrt{4\pi}}{6}r^2 - a\frac{1}{r} + b \tag{3.29}$$

avec

$$a = \frac{q\sqrt{4\pi}}{6}\eta(\eta+1), \quad b = \frac{q\sqrt{4\pi}}{6}\left(\eta(\eta+1)+1\right) \tag{3.30}$$

quand les fluctuations thermiques sont nulles sur les deux bords.

Numériquement, l'évolution temporelle de la composante principale du champ de température vers la solution stationnaire suit la loi

$$t_0^0(r,\tau) = (1 - e^{\tau \ln(10)/\tau_{st}}) t_0^0(r,\tau_{st}) \tag{3.31}$$

où τ_{st}, qui est défini comme le temps nécessaire pour atteindre 90% de l'amplitude de la solution stationnaire, est $\mathcal{O}(1)$. La dérivée radiale de la solution stationnaire du champ de température $t_0^{0\prime}(r,\tau)$ suit la même évolution temporelle $t_0'^0(r,\tau) = (1 - e^{\tau \ln(10)/\tau_{st}}) t_0'^0(r,\tau_{st})$. Le temps d'établissement de la solution stationnaire est indépendant de l'amplitude des puits de chaleur q. Par contre, les amplitudes des solutions stationnaires (température et sa dérivée radiale) sont proportionnelles à q.

Equation du mouvement

Le terme de température $t_0^0(r,\tau)$ est couplé au champ de vitesse via les modes $l \geq 1$ pairs et l'équation du mouvement qui adimensonnée s'écrit

$$Ro\partial_\tau \vec{u} + Ro(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{2\Omega V R\rho} + E\Delta\vec{u} - \frac{\alpha g T_\star}{2\Omega V}\theta_T(\vec{r} + \epsilon s \vec{e}_s) \tag{3.32}$$

Nous avons utilisé les mêmes échelles que précédemment. Contrairement à ce qui a été fait dans Rieutord (2006), nous ne distinguons pas la contribution barocline de la contribution sphérique du champ de température. Pour que le forçage soit d'ordre un, nous posons $\frac{\alpha g T_\star}{2\Omega V} = 1$. Cette équation est résolue dans le cas stationnaire puisque $Ro \ll 1$, l'équation est ainsi linéaire et nous en prenons le rotationnel pour écrire l'équation de la vorticité

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u} - E\Delta\vec{u}) = -\vec{\nabla} \wedge \theta_T(\vec{r} + \epsilon s \vec{e}_s) \tag{3.33}$$

Equation de w_m^l (sur $\vec{R}_l^m$)

$$E\Delta_l w_m^l + \left(A_{l-1}^l r^{l-1} \partial_r (\frac{u_m^{l-1}}{r^{l-2}}) + A_{l+1}^l r^{-l-2} \partial_r (r^{l+3} u_m^{l+1}) \right) = 0 \tag{3.34}$$

Equation de u_m^l (sur $\vec{T}_l^m$)

$$E\Delta_l \Delta_l (r u_m^l) - \left(B_{l-1}^l r^{l-1} \partial_r (\frac{w_m^{l-1}}{r^{l-1}}) + B_{l+1}^l r^{-l-2} \partial_r (r^{l+2} w_m^{l+1}) \right) - \Lambda(1+\epsilon) t_m^l \tag{3.35}$$

$$= \delta_{l2}(1 - e^{\tau \ln(10)/\tau_{st}}) r^3 \left(\frac{2\epsilon}{3\sqrt{5}} r t_0^{0\prime}(r,\tau) \right)$$

L'équation du mouvement est ainsi forcé par le couple $\delta_{l2}(1 - e^{\tau \ln(10)/\tau_{st}}) r^3 \left(\frac{2\epsilon}{3\sqrt{5}} r t_0^{0\prime}(r,\tau) \right)$. La solution particulière t_0^0, provenant des puits de chaleur Q, génére ce couple barocline qui est analogue au membre de droite de l'équation du mouvement (2.67).

Equation de t_m^l L'équation de l'énergie est

$$\left(r^2 t_m^l{}'' + 2r t_m^l{}' - (\Lambda + \frac{r^2}{\delta\tau})t_m^l - r\frac{PrRo}{E}t_0^0{}'(r,\tau)u_m^l\right)_n = \left(-\frac{r^2}{\delta\tau}t_m^l\right)_{n+1} \tag{3.36}$$

En résumé

Avec un tel modèle, le champ de vitesse s'adapte à l'évolution du champ de température et atteint un état stationnaire sur le temps de la diffusion thermique quelles que soient les conditions aux bords à la surface du modèle (solides ou GSF) et indépendamment du nombre de Prandtl. Cela vient du fait que, suivant cette description, nous ne permettons pas au champ de vitesse de rétroagir sur le champ de température imposé. La solution que l'on obtient est ainsi la solution découplée où les modes baroclines ne sont pas excités. La dynamique associée est comparable à celle décrite par Rieutord (2006) à la différence du nombre de cellules de circulation méridienne ici régit par le profil du gradient radial de température.

Les modes baroclines s'amortissant sur un temps d'Eddington-Sweet (Busse (1981)) font partie de la solution couplée qui n'apparaîtrait qu'en permettant la rétroaction du champ de vitesse sur le champ de température (nous devrions alors résoudre le terme d'advection dans l'équation de la température et le terme temporel dans l'équation du mouvement).

3.5 Stabilité

La question de la stabilitié des écoulements dans le cas incompressible est intéressante au regard de futurs modèles compressibles. En effet, les instabilités qui pourraient se développer en générant de la turbulence peuvent induire un mélange supplémentaire et conduire à une nouvelle rotation différentielle.

Nous étudions la stabilité de l'écoulement vis-à-vis des perturbations axisymétriques et celle de la couche de Stewartson car c'est dans cette couche qu'il y a les plus forts gradients de vitesse.

3.5.1 Instabilité centrifuge

L'étude de la stabilité du système vis-à-vis des perturbations axisymétriques aussi connue comme la stabilité centrifuge consiste à déterminer les régions dans lesquelles le moment cinétique décroît avec la distance à l'axe de rotation (vers l'extérieur). Les régions instables sont telles que

$$\frac{\partial L_z}{\partial s} < 0 \tag{3.37}$$

où L_z est le moment cinétique spécifique et s la coordonnée raidiale cylindrique. Cette expression est connue sous le nom de critère de Rayleigh. Dans notre cas, dans l'enveloppe, le

moment cinétique intrinsèque s'écrit

$$L_z = \Omega s^2 + s v_\varphi = \Omega R^2 (s^2 + 2Ros u_\varphi) \ . \tag{3.38}$$

En écrivant $u_\varphi = -\sum_l w_m^l \frac{\partial}{\partial\theta} Y_l^m$ (l'écriture du vecteur vitesse projetée sur la base des harmoniques sphériques est présentée en annexe A) et en notant que dans une configuration axisymétrique

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right) = -l(l+1)Y_l^m \tag{3.39}$$

le critère de Rayleigh (3.37) indique que l'écoulement est instable dans les zones où

$$\cos\theta + Ro \sum_l l(l+1) w_m^l Y_l^m < 0 \ . \tag{3.40}$$

On remarque que de la même façon que dans Rieutord (2006), l'instabilité centrifuge est contrôlée par le nombre de Rossby et nous rappelons que nous avons estimé sa valeur autour de 3.10^{-9}. Pour que l'instabilité se déclenche, il faut que la vitesse azimutale (négative pour η petit) ait une amplitude telle que $Row_m^l \geq \mathcal{O}(1)$. Pour des conditions aux bords rigides, l'écoulement azimutale est $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ et nous avons montré que $Ro \ll \sqrt{E}$. Dans ce cas, $Row_m^l = \mathcal{O}(\frac{Ro}{\sqrt{E}}) \ll 1$ et donc globalement [1] l'écoulement est stable. Par contre, si les conditions sont GSF à la surface, l'amplitude de la vitesse azimutale est $\mathcal{O}(E^{-1})$ ce qui implique que $Row_m^l = \mathcal{O}(\frac{Ro}{E}) \geq 1$. Le critère prédit donc que l'instabilité centrifuge peut éventuellement se développer puisque la vitesse azimutale a une amplitude majoritairement négative, voir par exemple la figure (3.11). Comme le montre la figure (3.13), seules les régions équatoriales de surface sont stables d'après le critère de Rayleigh.

1. La seule région où $\cos\theta + Ro\sum_l \Lambda w_m^l Y_l^m$ peut être négatif quand les conditions aux bords sont rigides est à l'équateur lorsque $\cos\theta$ tend vers 0.

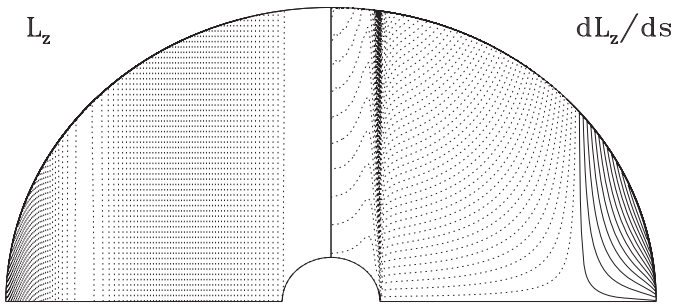


FIGURE 3.13 – Moment cinétique dans la direction parallèle à l'axe de rotation quand l'enveloppe est contrôlée par l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle et la dérivée par rapport à la coordonnée radiale cylindrique pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les conditions aux bords sont GSF à la surface. Les lignes pointillées indiquent des valeurs négatives (zone instable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge) et les lignes continues des valeurs positives (zone stable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge).

Dans le cas où l'écoulement barocline est dominant $B_a > B_{a\ \text{critique}}$, l'écoulement azimutal est $\mathcal{O}(B_a)$ quelles que soient les conditions aux bords.

- ⋆ Lorsque les conditions aux bords sont rigides à la surface, la valeur seuil sur la rotation différentielle (et donc sur la vitesse azimutale) $B^{\delta\Omega}_{a\ \text{critique}}$ est de l'ordre de $3E^{-1/2}$, il y a deux cas possibles :
  - ∗ Si $3E^{-1/2} < B_a < E^{-1}$, il faut aussi que RoB_a soit de l'ordre de l'unité ou supérieur pour que l'instabilité se déclenche.
  - ∗ Si $E^{-1} < B_a$, l'instabilité se déclenche forcément d'après le critère de Rayleigh (3.37).
- ⋆ Lorsque les conditions aux bords sont GSF à la surface, la valeur seuil $B_{a\ \text{critique}}$ est de l'ordre de $\sim 1/5E^{-1}$. Dans ce cas, la condition $RoB_a > 1$ est aisément vérifiée et l'instabilité centrifuge se déclenche.

Ce dernier cas de figure est illustrée par la figure (3.14) où l'on voit que seules les régions polaires restent stables tandis que la majorité de l'enveloppe est instable.

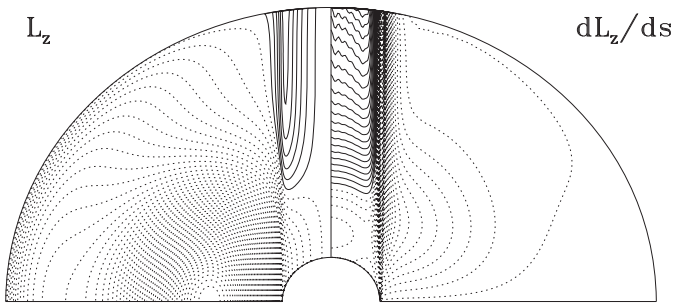


FIGURE 3.14 – Moment cinétique dans la direction parallèle à l'axe de rotation quand l'enveloppe est dominée par la baroclinicité $B_a = 10^7$ et la dérivée par rapport à la coordonnée radiale cylindrique pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les conditions aux bords sont GSF à la surface. Les lignes pointillées indiquent des valeurs négatives et les lignes continues des valeurs positives.

Cette étude dans le cas incompressible nous indique que l'instabilité centrifuge peut se déclencher. Pour une future étude de la dynamique de contraction gravitationnelle dans le cas compressible, cela ne signifie pas directement qu'elle se déclenchera puisque la compressibilité du fluide a un effet majeur sur la dynamique et que la rotation différentielle peut être modifiée. Par exemple, la rotation différentielle de l'écoulement barocline obtenue dans le cas compressible par Espinosa Lara & Rieutord (2013) est très différente de celle de cas Boussinesq de Rieutord (2006) (le signe de la rotation différentielle est opposé). Cela signifie par contre qu'une nouvelle étude de stabilité dans le cas compressible sera nécessaire.

3.5.2 Stabilité de la couche de Stewartson

La stabilité d'une couche de Stewartson est étudiée dans Hollerbach (2003) pour un fluide pris entre deux coquilles sphériques tournantes. La sphère interne tourne avec un taux de rotation $\Delta\Omega$ par rapport au taux de rotation de la sphère externe Ω. Comme dans notre cas, une couche de Stewartson se forme sur le cylindre tangent pour empêcher une singularité générée par le saut de vitesse à cet endroit. Un nombre de Rossby est défini tel que

$$Ro_H = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \tag{3.41}$$

Ce Rossby quantifie la différence de vitesse entre le cœur et l'enveloppe normalisée par la vitesse de rotation à la surface. Des instabilités non-axisymétriques se développent quand la rotation différentielle est suffisamment importante, en l'occurence, quand le nombre de Rossby est supérieur au seuil

$$Ro_H^c \propto E^{0.65} \tag{3.42}$$

Des modes azimutaux d'ordre $m > 0$ de plus en plus élevé sont excités à mesure que la rotation différentielle augmente ou que le nombre d'Ekman (calculé à l'aide du taux de rotation de l'ensemble Ω) diminue. Dans notre modèle, la différence de vitesse entre le cœur et l'enveloppe est donnée par la vitesse u, vitesse résiduelle adimensionnée lorsqu'on retranche la vitesse de rotation du cœur. Une équivalence au nombre de Ro_{H03} avec les notations de notre modèle serait

$$\tilde{Ro}_H = \frac{u_\varphi(r=\eta,\theta) - u_\varphi(r=1,\theta)}{\frac{\eta R_\star}{V_a}\Omega_{\text{cœur}} + u_\varphi(r=1,\theta)} \,. \tag{3.43}$$

où $u_\varphi(r = \eta, \theta) = 0$. La couche est nécessairement stable dans notre modèle lorsque les conditions aux bords sont rigides à la surface. Lorsque les conditions aux bords y sont GSF, nous avons besoin d'une estimation du taux de rotation du cœur. D'après Gallet & Bouvier (2013), le cœur d'une étoile de type solaire, pendant la Pré-Séquence Principale, tourne au taux de rotation $\Omega_{\text{cœur}} \sim 15\Omega_\odot$. Nous avons utilisé le modèle en rotation moyenne à l'âge d'environ 10 millions d'années. Dans le cas où l'écoulement induit par la contraction gravitationnelle domine, $u_\varphi = \mathcal{O}(E^{-1})$, nous estimons alors $\tilde{Ro}_H \sim 0.1$. Sachant que pour $E = 10^{-7}$, $E^{0.65} \sim 10^{-5}$, cela suggère donc que la couche de Stewartson est instable. Nous nous attendons cependant à ce que les étoiles plus massives aient un taux de rotation plus important que les étoiles de type solaire McNally (1965). La valeur de $\tilde{Ro}_{H03}$ est donc probablement plus faible que cette estimation. Mais au vue des très faibles valeurs du nombre d'Ekman mis en jeu, nous pouvons néanmoins suspecter que la couche de Stewartson développe une structure oscillante non-axisymétrique.

La structure de cette couche de cisaillement comprend plusieurs épaisseurs caractéristiques dont une en $E^{1/4}$ et une en $E^{1/3}$ (K. Stewartson, 1967). Nous montrons sur la figure (3.15) que le gradient de rotation différentielle est extrémum à l'intérieur de cette couche plus fine. Comme dans une couche de Stewartson, le cisaillement est orthoradial, le gradient de densité influence peu. Ainsi, dans un modèle compressible, on ne s'attend pas à ce que la stabilité de la couche vis-à-vis des perturbations non-axisymétriques soit très différente.

En conclusion, d'après nos estimations, les amplitudes de l'écoulement induit par la contraction gravitationnelles sont largement au dessus du seuil de déclenchement de l'instabilité de la couche de Stewartson. On s'attend donc à ce qu'il y ait de la turbulence.

Par contre, dans le cas où l'écoulement barocline domine, $u_\varphi = \mathcal{O}(B_a)$, avec $B_a = V/V_a \simeq 0.15\Omega R_\star/V_a \sim 10^{-2}$ (nous avons utilisé l'estimation de V_a issue du paragraphe 2.2.3) nous estimons $\tilde{Ro}_{H03} < E^{0.65}$. Cela suggère que la couche de Stewartson est stable dans cette configuration.

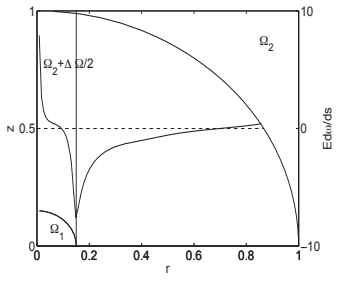


FIGURE 3.15 – Schéma du fluide en rotation où nous avons fait apparaître les notations de Hollerbach (2003). La sphère interne tourne avec un taux de rotation Ω_1, tel que $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$, et la sphère externe avec un taux $\Omega = \Omega_2$. Expérimentalement, Hollerbach (2003) observe que l'intérieur du cylindre tangent tourne avec un taux de rotation $\Omega_2 + \Delta\Omega/2$. La couche de Stewartson est en $s = \eta$, le gradient de rotation différentielle que nous avons calculé numériquement est tracé en $z = 0.5$. Ce gradient atteint son maximum dans la première épaisseur de la couche $\mathcal{O}(E^{1/3})$.

3.6 Caractéristiques de la dynamique

3.6.1 Impact du nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl est le nombre sans dimension qui quantifie la viscosité cinématique du fluide par rapport à la diffusivité thermique

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \, .$$

Augmenter ce nombre accentue les effets visqueux par rapport aux effets de la diffusion thermique. Diminuer la diffusivité thermique rend la flottaison plus forte et ainsi la stratification plus efficace. Comme le montre la figure (3.16), quand le nombre de Prandtl augmente, la dynamique de l'état stationnaire est impactée, la couche de Stewartson disparaît.

Dans le cas barocline, la dynamique devient très similaire à celle décrite par Rieutord (2006). La circulation méridienne est générée par le profil de fréquence de Brunt-Väisälä de la figure (2.4). La rotation différentielle présente un équateur lent et un pôle rapide. Dans le cas d'une dynamique de spin-up, la couche de Stewartson disparaît également laissant de manière inchangée une rotation différentielle cylindrique mais une unique cellule de circulation méridienne dans le sens des aiguilles d'une montre.

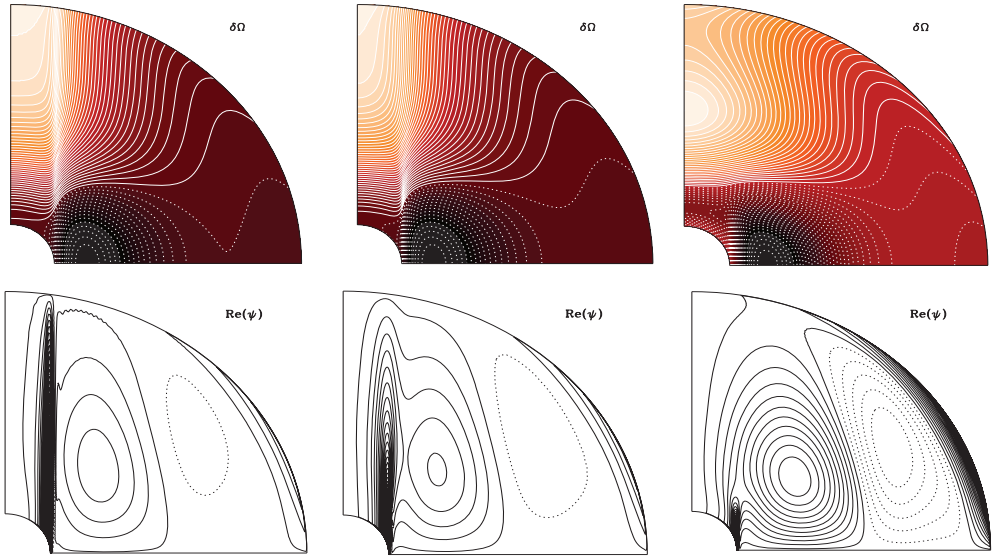


FIGURE 3.16 – Profils de rotation différentielle $\delta\Omega$, et de circulation méridienne ψ pour $E = 10^{-7}$, $Pr = 10^{-4}, 10^{-2}, 1$ (de gauche à droite), $B_a = 10^8$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les conditions en $r = 1$ sont GSF. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les régions où le fluide est plus rapide que le cœur. Une circulation en lignes continues est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

3.6.2 Expansion de l'enveloppe

Le modèle que nous avons construit peut tout autant décrite l'effet d'une contraction gravitationnelle que celui d'une perte de masse par vent stellaire par exemple. Nous livrons ici des pistes pouvant servir à l'étude de ce genre de modèles.

Vent stellaire isotrope

Nous changeons la condition radiale aux bords telle que $u_r(r = \eta) = +1$ (V_a positive) à l'interface cœur-enveloppe. Respectivement, à la surface, nous imposons $u_r(r = 1) = +\eta^2$ avec un forçage radial tel que $\vec{u^0}(r) = \frac{\eta^2}{r^2}\vec{e}_r$.

Cela génère une expansion de l'enveloppe de manière similaire aux effets d'un vent stellaire isotrope. Le cœur perd de la matière au fur et à mesure de l'expansion et subit un spin-down. La vitesse azimutale stationnaire induite par le vent stellaire est similaire à celle induite par la contraction gravitationnelle au signe près

$$U(s) = -\sqrt{\frac{2}{E}}(1 - s^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{s} + \dot{\omega}s\right) \qquad s \geq \eta \tag{3.44}$$

et l'accélération de la rotation du cœur suit

$$\dot{\omega} \sim -\frac{9}{4}\frac{1}{\eta} \tag{3.45}$$

lorsque la densité du cœur et de l'enveloppe sont identiques $\tilde{\rho} = 1$. L'écoulement induit par le vent stellaire est ainsi identique à celui induit par une contraction gravitationnelle sauf que l'amplitude de la vitesse azimutale est positive. Lorsque les conditions aux bords sont rigides, la solution à l'équateur dans le cas barocline non visqueux s'écrit

$$u_\varphi(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\frac{2}{E}}(1-r^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{r} - \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta}r\right) - rB_a\int_r^1 \frac{n^2(r)}{r}dr\ . \tag{3.46}$$

Comme les ordres de grandeur des écoulements mis en jeu sont les mêmes que précédemment, l'ordre de grandeur du critère $B_{a\ \text{critique}}$ est le même soit $\mathcal{O}(E^{-1})$ lorsque les conditions sont GSF à la surface.

Vent stellaire anisotrope

Il est possible de moduler le vent stellaire en fonction de la latitude de façon à reproduire un vent stellaire anisotrope comme peuvent l'être ceux des étoiles *Be* par exemple. Ces rotateurs rapides subissent les effets de l'assombrissement gravitationnel et leurs pôles sont généralement plus chauds que leur région équatoriale. La perte de masse radiative est par conséquent plus importante aux pôles.

Nous proposons d'étudier qualitativement la dynamique interne induite par ce type de vent.

Nous écrivons

$$v_r(r = R, \theta) = \eta^2\left(V_a + \alpha\cos^2\theta\right) \tag{3.47}$$

où α est un scalaire. La condition à la surface sur la vitesse radiale devient, de manière adimensionnée,

$$u_r(r = 1, \theta) = \eta^2\left(1 + \beta + 2\beta P_2(\cos\theta)\right) \tag{3.48}$$

où $P_2(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre associé au mode $l = 2$ et où nous avons introduit un coefficient de modulation $\beta = \frac{\alpha}{3V_a}$. Le premier terme $\eta^2(1+\beta)$ est décrit par la première harmonique Y_0^0 nous permettant d'écrire $u^{l=0}(r) = \frac{\eta^2}{r^2}(1+\beta)$. Le second terme impose la condition au bord $u^{l=2}(r=1) = 2\beta\eta^2$.

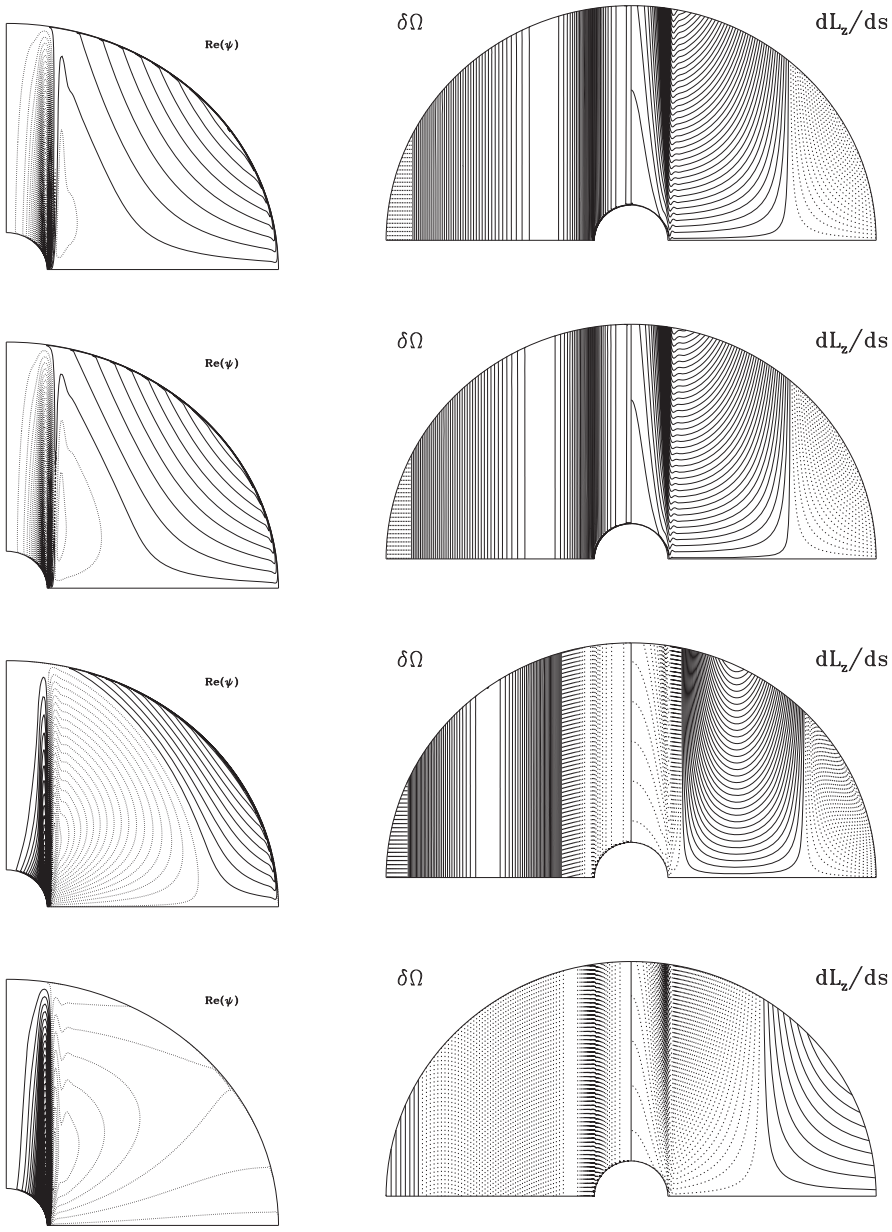


FIGURE 3.17 – Circulation méridienne ψ, rotation différentielle $\delta\Omega$ et dérivée du moment cinétique pour $\beta = 10^{-3}, 1, 10, 10^3$ (de haut en bas), $E = 10^{-6}$, $Pr = 10^{-4}$, $\eta = 0.15$ et $\tilde{\rho} = 10$. Les lignes continues de rotation différentielle montrent les régions où le fluide est plus rapide que le cœur. Une circulation en lignes continues est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les conditions à la surface sont GSF. Les termes baroclines ne sont pas inclus. Les régions instables vis-à-vis de l'instabilité centrifuge sont en ligne pointillé.

La rotation différentielle qui s'instaure dans ce système est cylindrique et de signe opposé au cas de contraction gravitationnelle. Comme étudiée par Rieutord & Beth (2014), la dynamique est celle d'un spin down. La circulation méridienne à grande échelle est générée par l'extraction de moment cinétique à la surface du modèle via le pompage d'Ekman dans les couches limites. Une couche de Stewartson est présente en réponse au saut de viscosité que représente l'interface cœur- enveloppe imposée. Quand le paramètre β a une valeur non négligeable par rapport à l'amplitude du forçage du spin-down, l'anisotropie du vent impacte la dynamique. Comme le montre la figure (3.17), pour un vent fort ($\beta = 10$), l'intérieur du cylindre tangent est plus lent et instable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge. Quand le vent est encore plus fort ($\beta = 10^3$), ce comportement gagne l'enveloppe qui restreint les régions stables vers l'équateur plus rapide que le cœur.

Il aurait pu être intéressant d'étudier la généralité de ce comportement en fonction de la viscosité de l'enveloppe ou dans un environnement stratifié. Or, Georgy *et al.* (2011) ont montré l'importance de prendre en compte la déformation de l'étoile dans l'étude de l'évolution de moment cinétique par vent stellaire anisotropique. Ce modèle est alors limité à une description qualitative et une telle étude mériterait d'être menée avec un modèle 2D comme le code ESTER qui résout la forme de l'étoile. De plus, cela permettrait de comparer cet écoulement induit par un vent stellaire anisotropique à l'écoulement barocline.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué les paramètres pertinents permettant à l'écoulement de spin-up ou à l'écoulement barocline d'avoir une plus forte amplitude et avons étudié leur impact sur la dynamique de l'état stationnaire. Lorsque nous imposons à la surface de tourner au même taux de rotation que le noyau, il apparaît que la rotation différentielle de l'écoulement de spin-up est $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ et sa circulation méridienne associée $\mathcal{O}(1)$. La rotation différentielle barocline est elle $\mathcal{O}(B_a)$ et sa circulation méridienne $\mathcal{O}(B_a E)$. Ainsi, pour une valeur de B_a inférieure à $E^{-1/2}$, la rotation différentielle est cylindrique et la circulation méridienne est celle d'un écoulement de spin-up. Si $B_a > E^{-1/2}$, la rotation différentielle est typique d'un écoulement barocline où les pôles sont plus rapides que le noyau et la rotation différentielle est quasi-sphérique en dehors du cylindre tangent au cœur. La circulation méridienne est alors caractéristique du profil de fréquence de Brunt-Väisälä que nous avons imposé. Entre ces deux régimes, la rotation différentielle est d'origine barocline tandis que la circulation méridienne est celle d'un écoulement de spin-up. En relachant la contrainte horizontale à la surface du modèle, la rotation différentielle de spin-up est $\mathcal{O}(E^{-1})$ hors du cylindre tangent au cœur (la rotation différentielle barocline est inchangée). Cela présage une transition vers un état barocline pour $B_a > E^{-1}$ mais aussi que l'état stationnaire est difficilement atteignable sur un temps aussi court que celui de Kelvin-Helmholtz. Nous avons alors résolu les équations de la dynamique temporellement et montrons que, quand bien même l'écoulement de spin-up n'atteigne pas l'état stationnaire, si $B_a < E^{-1}$, alors il

domine la dynamique sur un écoulement barocline. Ce résultat est confirmé par une analyse d'ordre de grandeur où l'amplitude de l'écoulement barocline est issue des modèles ESTER.

Cela signifie qu'à l'issue de la phase de contraction gravitationnelle, et quelles que soient les conditions initiales, l'écoulement de spin-up caractérise la dynamique de l'enveloppe.

Ces modèles montrent également que la présence d'un noyau se traduit par l'apparition d'une couche de Stewartson au niveau du cylindre tangent au noyau. Cette couche de cisaillement permet une redistribution de moment cinétique entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre tangent et l'intérieur du cylindre tourne alors en rotation quasi-solide. Cette couche est présente dans nos modèles suite à la présence du cœur que nous avons placé en $r = \eta$. Or les étoiles de Pré-Séquence Principale n'ayant pas encore commencer la fusion nucléaire sont globalement chimiquement homogènes. La couche de Stewartson qui répond à un saut de densité (ou viscosité, vitesse) n'est donc pas une caractéristique qu'on s'attend effectivement à trouver au sein des étoiles jeunes. Par contre, au sein de toutes étoiles différenciées chimiquement, cette couche est très vraisemblablement présente le long du cylindre tangent.

Chapitre 4

Contraction gravitationnelle d'un fluide compressible

Sommaire

3.1 Solutions stationnaires numériques et analytiques 51

3.2 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle 54

3.3 Solutions stationnaires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle avec des conditions Glissement Sans Frottement à la surface 58

3.4 Solutions transitoires : Dynamique d'une enveloppe barocline en contraction gravitationnelle 65

3.5 Stabilité 71

3.6 Caractéristiques de la dynamique 76

3.7 Conclusion 80

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la dynamique de fluides incompressibles (hypothèse de Boussinesq) en rotation rapide et contraction gravitationnelle. Or, généralement, les gaz stellaires sont compressibles. L'objet de ce dernier chapitre est d'étudier l'impact de la compressibilité sur la dynamique de fluides baroclines en contraction gravitationnelle via l'étude de l'étoile Achernar (α Eridani), étoile *Be* la plus proche en rotation rapide. Un modèle compressible requiert la résolution simultanée des champs de vitesse, température et densité. La fréquence de Brunt-Vaïsälä est alors calculée en sortie des simulations numériques. Pour ce faire, nous utilisons le code ESTER (Evolution STellaire en Rotation) que nous présentons brièvement en annexe. Les paramètres observés d'Achernar permettent de tester le comportement du code ESTER vis-à-vis du phénomène de contraction gravitationnelle.

4.1 Etude de l'étoile α Eridani et modélisation bidimensionnelle avec le code ESTER

4.1.1 Modélisation d'α Eridani par le code ESTER, modèle de Séquence-Principale

Comme nous l'avons détaillé dans le premier chapitre, Achernar est une étoile *Be* en rotation rapide. Nous détaillons dans la première colonne de la table (4.1), quelques uns des paramètres issus des observations interférométriques (Domiciano de Souza *et al.*, 2014*b*). La vitesse de rotation équatoriale d'Achernar correspond à un taux de rotation de

$$\Omega_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 4.69.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} .$$

Le taux de rotation critique, pour lequel la force centrifuge est égale à la force d'attraction gravitationnelle, vaut

$$\Omega_{bk} = \sqrt{\frac{GM}{R_{eq}^3}} = 5.59.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{\Omega_{eq}}{\Omega_{bk}} \simeq 0.84 .$$

L'étoile tourne donc à $\sim 84\%$ de la rotation critique.

		Achernar (α Eri)	
	Domiciano de Souza & al 2014	Modèle ESTER Séquence Principale	Modèle ESTER en contraction gravitationnelle
Masse ($M_\odot$)	6.10	6.10	6.10
R_{eq} ($R_\odot$)	9.16±0.23	3.544	9.468
R_{pol} ($R_\odot$)	6.78	3.136	6.93
T_{eq} (K)	12673	16899.65	9511.57
T_{pol}(K)	17124	19105.89	13013.11
L ($L_\odot$)	3019.952	1040.323	1014.456
V_{eq} (km/s)	$298.8^{+6.9}_{-5.5}$	295.18	294.57
P_{eq} (days)	1.55	0.607	1.626
P_{pol} (days)		0.716	1.651
$X_{env.}$		0.70	0.70
$X_{core}/X_{env.}$		0.05	0.05
Z		0.05	0.014

TABLE 4.1 – Paramètres observationnels d'Achernar, modèle ESTER à l'état stationnaire et modèle ESTER utilisant une loi de contraction gravitationnelle comme source d'énergie.

Le type spectral d'Achernar a été identifié par Hiltner *et al.* (1969) comme étant Be3V, soit une étoile de Séquence-Principale. Pourtant, une utilisation directe du code ESTER (qui fournit la solution stationnaire des équations hydrodynamiques) ne fournit pas de modèle en accord avec les observations. Comme le montrent les deux premières colonnes de la table (4.1), avec une masse de $6.1M_{\odot}$, le modèle ESTER de Séquence Principale est plus petit et plus chaud que les observations. La figure (4.1) montrent des tracés évolutifs issus de modèles 1D CESAM2K (Morel (1997)) ou SYCLIST (code de Genève, Georgy *et al.* (2014)) [1] pour des masses de $6.1M_{\odot}$ et $6.5M_{\odot}$ dans un diagramme Hertzsprung-Russel. Nous constatons que la température et luminosité observées d'Achernar (signalées par les lettres A, AP et AE dans le diagramme) correspondent davantage à des paramètres stellaires attendus pour des étapes d'évolution proches de la TAMS voire traversant le gap de Hertzsprung plutôt qu'à des paramètres de Séquence-Principale.

Durant la traversée du gap de Hertzsprung, le cœur de l'étoile est en contraction gravitationnelle. En effet, quand il n'y a plus d'hydrogène disponible au cœur de l'étoile (fin de la Séquence-Principale), l'énergie nucléaire devient nulle et ne permet plus de contrebalancer les effets de la gravité. Le cœur se contracte et la température centrale augmente tandis que l'enveloppe se dilate. La température de surface diminue en réponse à l'augmentation du rayon. C'est certainement une des raisons pour lesquelles les modèles ESTER de Séquence-Principale produisent des modèles de plus petite taille à température plus élevée. Si le cœur de l'étoile est en contraction gravitationnelle, le rayon attendu est plus important et la température effective plus faible.

4.1.2 Modélisation d'α Eridani par le code ESTER, modèle en contraction gravitationnelle

Pour prendre en compte les effets d'une contraction gravitationnelle post-Séquence Principale, le code ESTER doit faire appel à une source d'énergie gravitationnelle à la place de celle que l'étoile extrait des réactions nucléaires. D'après Maeder (2009), nous remplaçons le taux de réaction nucléaire $\varepsilon_{\star}$, dans l'équation de l'énergie (B.3),

$$\rho T \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = -\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \varepsilon_{*} \tag{4.1}$$

par un taux de production d'énergie gravitationnelle de la forme

$$\varepsilon_{grav} = C_P T \left(-4\nabla_{ad} + \frac{4\alpha - 3}{\delta} \right) \frac{\dot{R}}{R} \tag{4.2}$$

où C_P est la capacité calorifique. La variation temporelle du rayon $\dot{R}$ peut être positive (phénomène d'expansion) ou négative (phénomène de contraction). Pour un gaz parfait mo-

1. Les tracés évolutifs sont calculés via le site : http ://obswww.unige.ch/Recherche/evoldb/index/

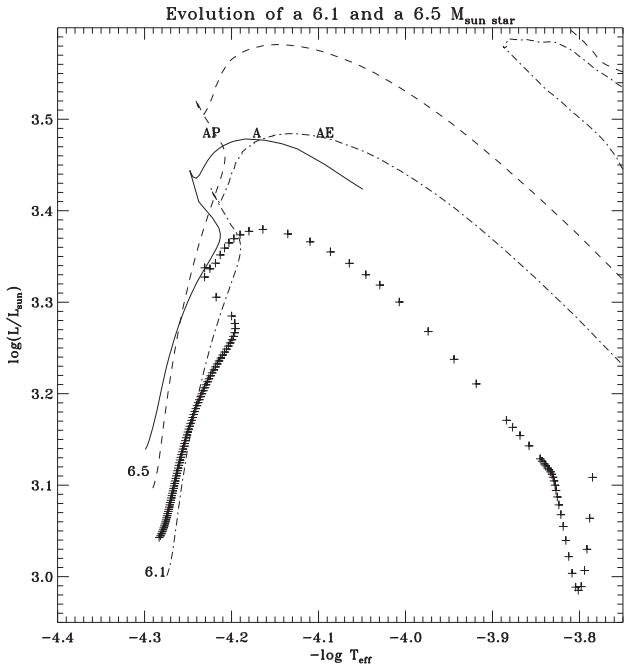


FIGURE 4.1 – Tracés évolutifs à partir de la ZAMS dans le diagramme HR de différents modèles stellaires 1D. Le tracé en croix (respectivement la ligne continue) est le tracé évolutif d'une étoile de $6.1M_\odot$ (resp. d'une $6.5M_\odot$) issu des modèles d'évolution stellaire CESAM2K. La ligne en tirets et pointillés (resp. tirets) est celui d'une étoile de $6.1M_\odot$ (resp. d'une $6.5M_\odot$) issu des modèles d'évolution stellaire SYCLIST. Les lettres AP désigne la température au pôle observée d'Achernar, AE celle à l'équateur et A la moyenne des deux.

noatomique, les coefficients thermodynamiques

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right)_{T,\mu} \quad \text{et} \quad \delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{P,\mu}$$

valent un et le gradient adiabatique $\nabla_{ad} = \frac{2}{5}$. La capacité calorifique molaire vaut $c_{P,m} = \frac{5}{2}\mathcal{R} = c_P M$ où c_P est la capacité calorifique massique et $C_P = c_P$ pour un gaz parfait monoatomique, ce qui conduit à $c_P = \frac{5}{2}\frac{\mathcal{R}}{M}$ (J/kg ou erg/g) avec $\mathcal{R}$ la constante des gaz parfaits et M la masse molaire.
Nous obtenons

$$\varepsilon_{grav} = -\frac{3}{2}\mathcal{R}_M T \frac{\dot{R}}{R} \tag{4.3}$$

où nous avons noté $\mathcal{R}_M = \frac{\mathcal{R}}{M}$. Le taux de production d'énergie gravitationnelle est ainsi proportionnel à la température et au taux de contraction $\dot{R}$. Quand une zone se contracte, il y a production d'énergie gravitationnelle ($\varepsilon_{grav} > 0$).

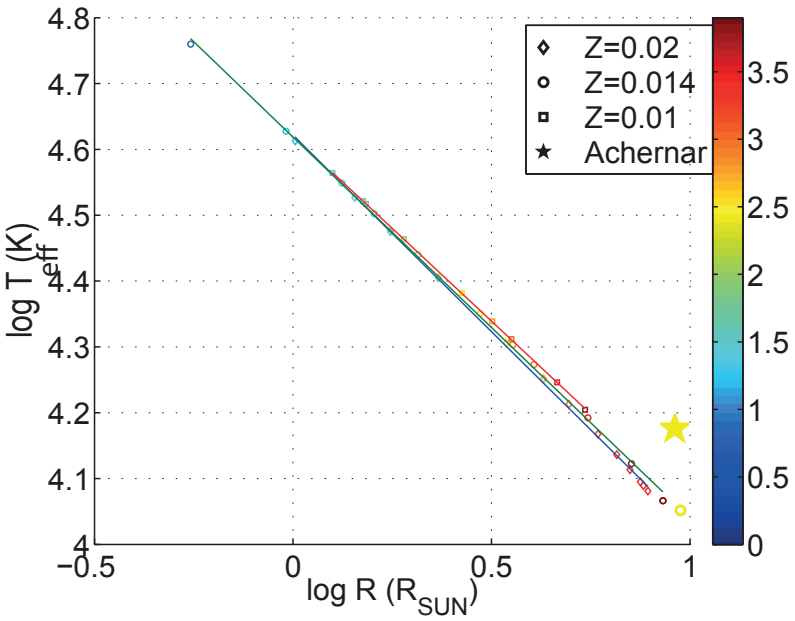


FIGURE 4.2 – Diagramme rayon-température effective de modèles ESTER 1D en valeur logarithmique. La barre de couleur indique la valeur de a et les différents symboles représentent différentes métallicités : des cercles pour $Z = 0.02$, des losanges pour $Z = 0.014$ et des carrés pour $Z = 0.01$. Les données observationnelles d'Achernar (rayon équatorial et température effective moyenne) sont représentées par l'étoile jaune. Les modèles obtenus se placent sur des droites équivalentes à des fonctions puissance dont nous estimons numériquement les équations : $T_{eff}(K) = 10^{4.62} R(R_\odot)^{-3.32Z-0.53}$.

Pour modéliser une étoile dont le cœur est en contraction gravitationnelle, nous imposons $\dot{R} < 0$ et une fraction d'hydrogène au cœur faible $X_c = 5\%$ (différent de zéro pour des raisons de convergence de l'algorithme de Newton utilisé par le code ESTER). Afin qu'il n'y ait pas de production positive d'énergie gravitationnelle dans l'enveloppe, qui elle, est en expansion, nous tronquons le profil d'énergie à la limite du noyau convectif r_c. Comme modèle de départ pour faciliter la convergence de l'algorithme de Newton, nous écrivons $\varepsilon_{grav} = a\varepsilon_0 T/T_c$ et utilisons la valeur centrale d'énergie nucléaire ε_0 d'un modèle de Séquence-Principale à composition chimique identique. Le code ESTER converge pour des valeurs de $a = \frac{3T_c}{2\varepsilon_0}\frac{\mathcal{R}}{M}\frac{\dot{R}}{R}$ représentées par l'échelle de couleur de la figure (4.2). Nous avons testé différentes valeurs de la métallicité puisque c'est une donnée mal connue de l'étoile Achernar. Le modèle 1D dont les paramètres calculés sont les plus proches de ceux issus de Domiciano de Souza *et al.* (2014*b*) est mis en rotation à $84\%\Omega_{bk}$ et le modèle 2D correspondant est décrit dans la dernière colonne de la table (4.1). Dans ce modèle, $\dot{R} \sim 10^{-12}s^{-1}$, ce qui, de manière cohérente, est l'inverse du temps de Kelvin-Helmholtz $\tau_{KH} \sim 180000$ ans $\sim 10^{12}$s. NB : Tous les modèles ESTER présentés par la suite ont été obtenus pour une masse de $6.1M_\odot$ même si les modèles 1D favorisent l'utilisation d'une masse allant jusqu'à $6.5M_\odot$ car aucun des modèles ESTER ayant une masse supérieure à $6.1M_\odot$ ne concordent davantage avec les données observationelles.

Les modèles convergés de la manière que nous venons de décrire ont des rayons et températures effectives qui suivent des lois de puissance (en fonction de la métallicité) qui ont pour équation

$$T_{eff}(K) = 10^{4.62} R(R_\odot)^{-3.32Z-0.53} \tag{4.4}$$

où la dépendance à la métallicité est assez faible. Les couples ($T_{eff} \sim 12 - 17.10^3 K$,$R \sim 6 - 9R_\odot$), issus des observations, ne sont pas solutions de cette expression. Bien que nous atteignons une gamme de rayons comparables aux observations, la température effective est plus faible. Les modèles CESAM2K montrent qu'en réalité aux stades post-Séquence-Principale, la luminosité est très largement produite par des réactions nucléaires dans une couche autour du noyau et très peu par la contraction gravitationnelle qui peut être négligée au premier ordre.

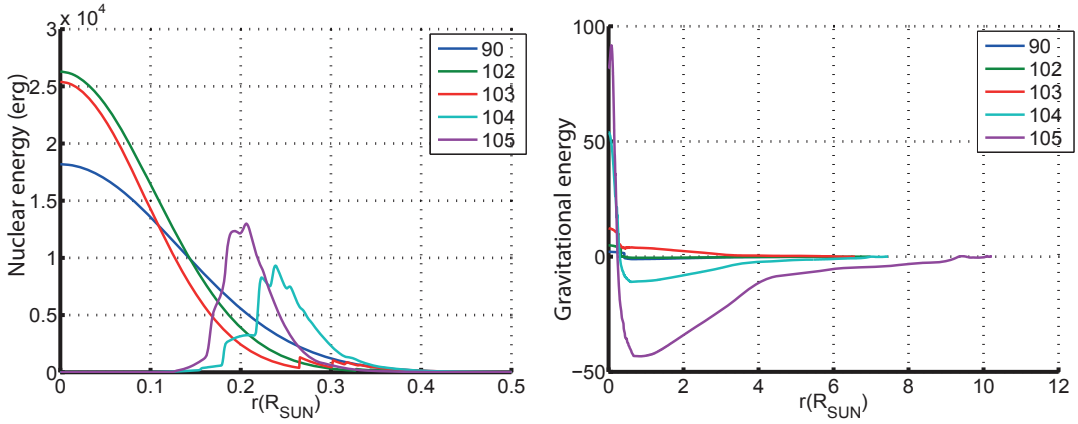


FIGURE 4.3 – Profils d'énergie nucléaire et gravitationnelle en fonction du rayon issus de modèles CESAM2k de $6.1 M_\odot$ à différents âges : 90, 102, 103, 104 et 105 millions d'années. La figure de gauche est un zoom sur les parties centrales des modèles alors que la figure de droite montre l'énergie gravitationnelle sur tout le rayon des modèles.

Pour illustration, la figure (4.3) montre le taux de production d'énergie nucléaire en fonction du rayon d'un modèle CESAM2k de $6.1 M_\odot$ à plusieurs âges : 90, 102, 103, 104 et 105 millions d'années. A partir de 103 millions d'année, la production centrale diminue tandis que l'étoile quitte la Séquence-Principale. La production est alors localisée dans une région autour du noyau où l'hydrogène brûle en couche, comme le montre les profils à l'âge de 104 et 105 millions d'années en $r_{\text{H burning shell}} \sim 0.2 - 0.25 R_\odot$. L'énergie gravitationnelle ne fait ressentir ses effets que dans l'enveloppe où elle est négative mais d'ordre bien inférieur à l'énergie nucléaire.

Pour rendre compte compte de ce phénomène d'hydrogène brûlant en couche, nous avons alors développé successivement deux stratégies :

⋆ Stratégie 1 : Modifier le profil d'énergie nucléaire. Le pic d'énergie produite par la combustion d'hydrogène en couche est approché à l'aide d'une fonction lorentzienne que montre la figure (4.4)

$$\varepsilon_{nuc} = \varepsilon_{pic} \frac{1}{(1 + \frac{r - r_{\text{H burning shell}}}{2})^2} \tag{4.5}$$

et directement implémentée dans l'équation de l'énergie. La valeur ε_{pic} est la valeur du profil d'énergie nucléaire maximum, elle se lit en $r = r_{\text{H burning shell}}$ quand l'étoile n'est plus sur la Séquence Principale. Les modèles ayant convergés de cette manière restent cantonés aux mêmes lois de puissance que les modèles précédents (utilisant la loi de contraction gravitationnelle) que montre la figure (4.2). Des tentatives d'inclusion d'une source d'énergie gravitationnelle négative dans l'enveloppe ($\dot{R} > 0$) ont été mené

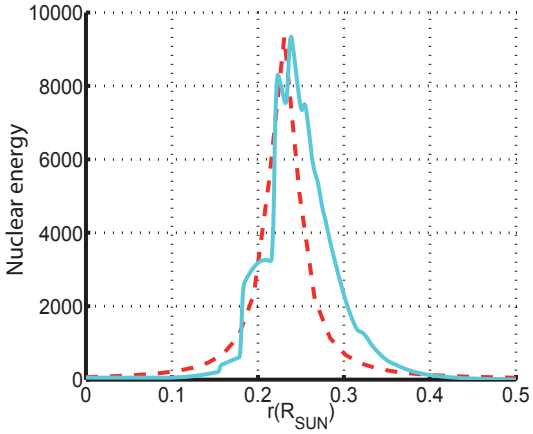


FIGURE 4.4 – En bleu : Profil d'énergie nucléaire issu d'un modèle CESAM2K de $6.1M_\odot$ à l'âge de 104 millions d'années (identique au profil bleu de la figure 4.3 gauche). La ligne pointillée rouge est une fonction lorentzienne centrée sur $r_{\text{H burning shell}}$ utilisée pour approximer le pic d'énergie nucléaire générée par la combustion d'hydrogène en couche autour du noyau du modèle.

mais n'ont conduit à aucun modèle convergé. Nous en concluons que la stratégie 1 ne permet pas d'obtenir un modèle satisfaisant les données observationnelles.

⋆ Stratégie 2 : Diminuer la fraction d'hydrogène centrale et utiliser les lois de génération d'énergie nucléaire issus des cycles p-p et CNO initialement utilisée par le code ESTER

$$\varepsilon_\star^{pp}(\rho, T, X, Z) = \varepsilon_0 X^2 \rho^2 T_9^{-2/3} e^{-bT_9^{-1/3}} \tag{4.6}$$

et

$$\varepsilon_\star^{CNO}(\rho, T, X, Z) = \varepsilon_0 Z(C+N) X \rho^2 T_9^{-2/3} e^{-bT_9^{-1/3}} \left(1 + aT_9^{1/3} + cT_9^{2/3} + dT_9\right) \tag{4.7}$$

pour générer naturellement le pic d'énergie nucléaire produite par la combustion d'hydrogène en couche. Nous discutons cette stratégie dans la section suivante.

4.1.3 Impact de la composition chimique

C'est en appliquant la seconde stratégie que nous venons de mentionner que nous montrons une limite de la première version du code ESTER. Lorsque de faibles valeurs d'abondance en hydrogène dans le noyau X_c sont utilisées afin de tendre vers les stades de fin de Séquence-Principale, les modèles présentent une anomalie dans le profil d'énergie nucléaire : les modèles génèrent deux pics d'énergie. Comme le montre la figure (4.5), pour $X_c = 0.02$, un modèle de $6.1M_\odot$ (appelé modèle 1 dans la table 4.2) a un premier pic d'énergie nucléaire au centre, provenant de la combustion de l'hydrogène dans le noyau, et un second pic dans l'enveloppe, juste après l'interface cœur-enveloppe.

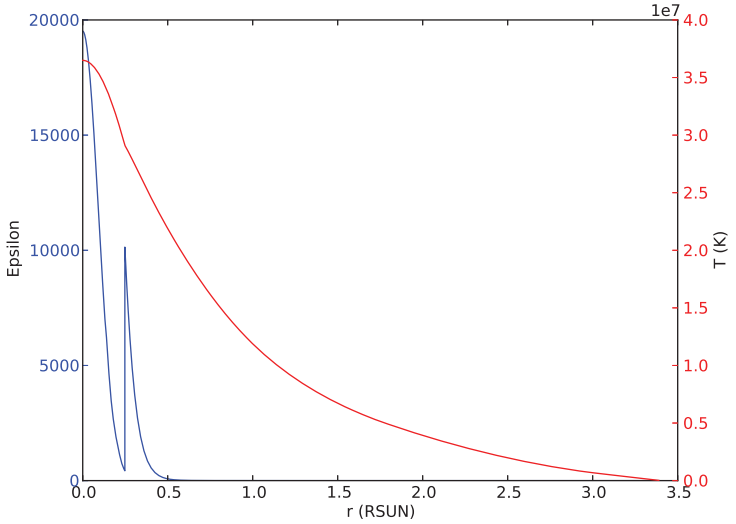


FIGURE 4.5 – Taux de production d'énergie nucléaire en erg.s^{-1}.g^{-1} (bleu) et température en Kelvin (rouge) en fonction du rayon d'un modèle 1D avec $Z = 0.02$, $X_0 = 0.7$ et $X_c = 0.02$. Le profil d'abondance d'hydrogène est la fonction marche initialement implémentée dans le code ESTER (figure B.1).

Comme le montre en annexe la figure (B.1), le profil d'abondance en hydrogène en fonction du rayon initialement codé dans ESTER est une fonction marche. Elle vaut X_0 dans l'enveloppe et $X_c X_0$ dans le noyau. Si l'abondance centrale en hydrogène est faible, la température centrale est importante et il existe une valeur d'abondance centrale pour laquelle la température provoque la création d'énergie nucléaire dans l'enveloppe [2] puisque la loi de production d'énergie nucléaire est une fonction de la température et de la composition chimique. Ce phénomène génère le second pic d'énergie nucléaire dans l'enveloppe alors que le cœur contient encore de l'hydrogène. Or la base de l'enveloppe ne produit normalement de l'énergie nucléaire qu'une fois le cœur en contraction gravitationnelle et vide de combustible.

Normalement, le cœur convectif, en diminuant en taille au cours de la Séquence Principale, génère un gradient de composition chimique progressif dans l'enveloppe. L'abondance en hydrogène est plus faible au niveau de l'interface cœur-enveloppe que ne le représente une fonction marche.

2. Les modèles ESTER sont composées d'un noyau convectif et d'une enveloppe radiative.

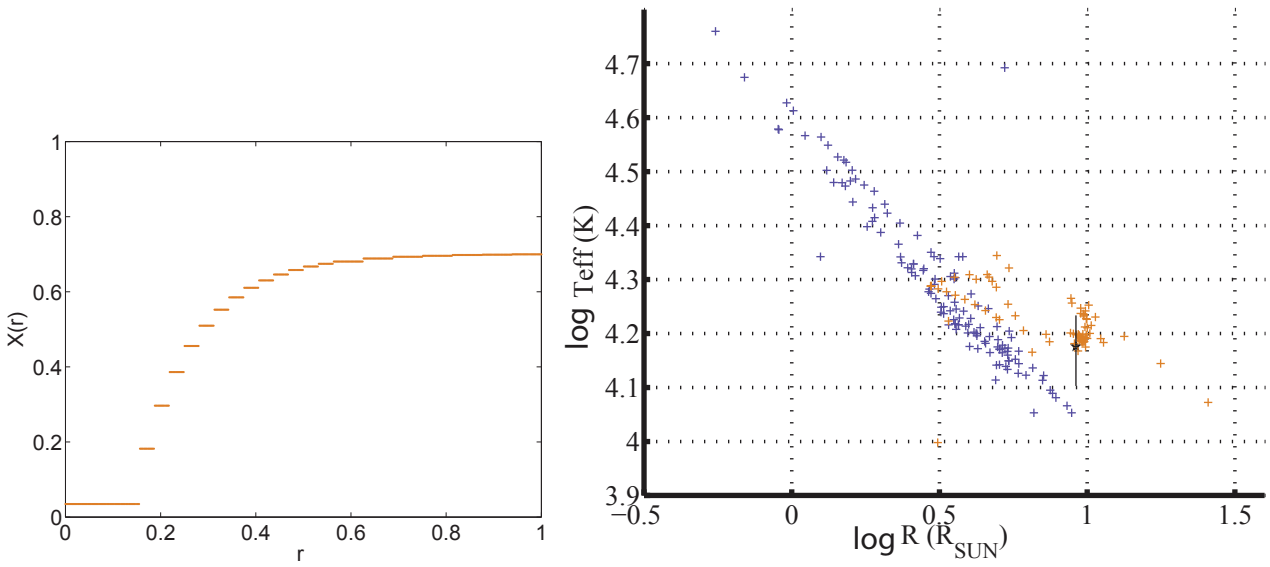


FIGURE 4.6 – A gauche : Profil d'abondance en hydrogène constant par domaine ("en marche d'escalier") en fonction du rayon adimensionné. A droite : Diagramme rayon-température effective de modèles ESTER en valeur logarithmique. Les modèles violets sont les modèles obtenus en utilisant la loi d'énergie gravitationnelle ou en modifiant la loi de production d'énergie nucléaire (stratégie 1). Les modèles orangés sont obtenus en modifiant par domaine l'abondance d'hydrogène suivant le profil (4.8). Les modèles 2D ont été moyennés. La croix noire représente les données observationnelles d'Achernar (rayon équatorial et la température effective polaire et équatoriale).

Afin de supprimer cet artéfact du code ESTER, nous modifions le profil d'abondance d'hydrogène de façon à adoucir la discontinuité à l'interface cœur-enveloppe en écrivant

$$X(r) = X_c X_0 \quad \text{si} \quad r \in [0, r_c]$$

$$X(r) = X_c X_0 + b\left(1 - e^{1-r/r_c}\right) \quad \text{si} \quad r \in [r_c, R_\star] \tag{4.8}$$

avec $b = X_0(1 - X_c)\left(1 - e^{1-R_\star/r_c}\right)^{-1}$ de sorte que

$$X(r_c) = X_c X_0 \qquad \text{et} \qquad X(R_\star) = X_0\ . \tag{4.9}$$

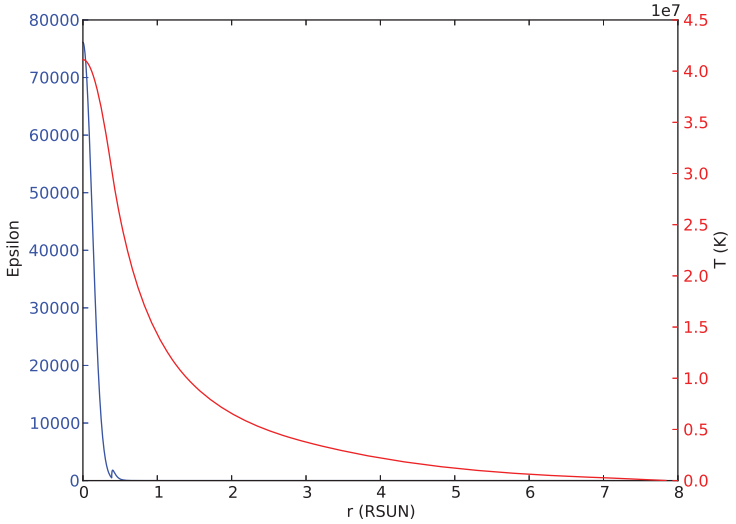


FIGURE 4.7 – Taux de production d'énergie nucléaire en erg.s^{-1}.g^{-1} (bleu) et température en Kelvin (rouge) en fonction du rayon d'un modèle 1D avec $Z = 0.02$, $X_0 = 0.7$ et $X_c = 0.02$. Le profil d'abondance d'hydrogène est la fonction marche initialement implémentée dans le code ESTER.

Dans un premier temps, nous utilisons ce nouveau profil pour modifier l'abondance d'hydrogène par domaine (profil en marche d'escalier comme le montre la figure (4.6) gauche). Le profil obtenu n'est pas continu mais le gradient est moins important que dans le cas de la fonction marche. Il illustre l'impact de l'abondance d'hydrogène sur la structure stellaire. Ce gradient a un effet sur la conductivité radiative et peut indirectement impacter la taille du noyau convectif.

Cette modification fait disparaître le second pic d'énergie nucléaire. En effet, comme le montre la figure (4.7), un modèle ESTER 1D (appelé modèle 2 dans la table 4.2) avec les mêmes paramètres d'entrée que ceux ayant servi à générer le modèle 1 a uniquement une production d'énergie nucléaire centrale. Le modèle obtenu est aussi différent du cas précédent dans les paramètres stellaires de sortie : l'étoile a un rayon et une température centrale beaucoup plus importants. Ce modèle ne montre pas de concordance avec les données observationnelles mais montre que cette modification est ainsi prometteuse puisque les modèles précédemment obtenus étaient plus froids que les données observationnelles.

	Modèles ESTER 1D	
	Modèle 1	Modèle 2
Masse ($M_\odot$)	6.10	6.10
$X_{env.}$	0.70	0.70
$X_{core}/X_{env.}$	0.02	0.02
Z	0.02	0.02
R ($R_\odot$)	3.198	7.845
r_c ($R_\odot$)	0.234	0.387
T_c (K)	3.65 10^7	4.11 10^7
T_{eff} (K)	18909	9137
L ($L_\odot$)	835	4626

TABLE 4.2 – Paramètres observationnels des modèles ESTER (1D) à l'état stationnaire avec un profil d'abondance d'hydrogène classique (modèle 1) ou un profil en marches d'escalier (modèle 2).

On montre, sur la figure (4.6) de droite, les paramètres stellaires des nouvelles solutions (en orangé) convergées avec le profil en hydrogène en marches d'escalier. Elles ne se placent pas selon une fonction de puissance comme pouvaient le faire les solutions précédentes (en violet). En modifiant les paramètres d'entrée tels que la métallicité et la fraction d'hydrogène central, nous obtenons notamment un modèle, présenté dans la seconde colonne du tableau 4.3, qui offre une reproduction satisfaisante des caractéristiques de surface de cette étoile telles que révélées par l'interférométrie La métallicité ayant permis de redonner ces données observationnelles est de 0.046. Cette valeur est nettement supérieure à la valeur solaire, ce qui la rend peu probable mais peut suggérer que la nébuleuse dans laquelle Achernar a vu le jour a été enrichie en métaux.

	Achernar (α Eri)	
	Domiciano de Souza & al 2014	Modèle ESTER 2D $X(r)$ en marche d'escalier
Masse ($M_\odot$)	6.10	6.10
R_{eq} ($R_\odot$)	9.16±0.23	9.54
R_{pol} ($R_\odot$)	6.78	6.92
T_{eq} (K)	12673	13089
T_{pol}(K)	17124	17949
L ($L_\odot$)	3019.952	2933
Ω/Ω_{bk}	84%	84%
X_0		0.70
X_c/X_0		0.47
Z		0.046

TABLE 4.3 – Paramètres observationnels d'Achernar et d'un modèle ESTER 2D utilisant un profil d'abondance en hydrogène "en marche d'escalier" selon la loi (4.8).

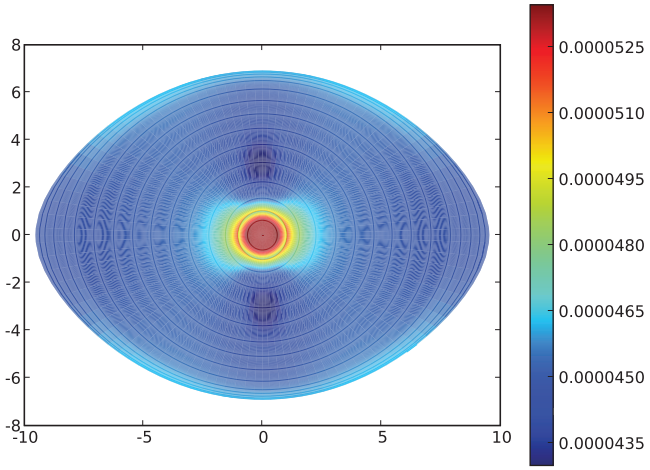


FIGURE 4.8 – Rotation différentielle dans le plan méridien du modèle 2D ESTER dont les paramètres stellaires sont décrits en table 4.3 avec un profil d'abondance en hydrogène décrit par la loi (4.8) et constant dans chaque domaine. Les axes sont en rayons solaires. La barre de couleur est en s^{-1}. Le cœur tourne plus vite que l'enveloppe.

Mais, comme le montre la figure (4.8), la rotation différentielle de ce modèle est disconti-

nue aux interfaces des domaines en réponse aux discontinuités d'abondance d'hydrogène et cela nuit à la bonne convergence de l'algorithme de Newton. Une solution envisagée serait de généraliser la condition de saut consistant à imposer la continuité de $\rho(\theta)\left(s\Omega^2(\theta)\vec{e}_s\cdot\vec{e}_T-\vec{e}_T\cdot\vec{\nabla}\phi\right)$ ($\vec{e}_T$ est le vecteur unitaire tangent à l'interface) aux interfaces des domaines du modèle. Cette condition est uniquement présente à l'interface cœur-enveloppe où elle assure la continuité de la pression. Une deuxième solution est d'utiliser directement un profil d'abondance d'hydrogène continu. En effet, ce sont les discontinuités de densité (liés à la variation de composition chimique) qui génèrent des discontinuités de rotation différentielle car le gradient du potentiel est continu (Espinosa Lara & Rieutord, 2013).

De plus, la fraction d'hydrogène centrale de ce modèle $X_c = 0.47$ n'est pas celle d'un modèle de fin de Séquence-Principale. Nous en concluons qu'un tel modèle ne doit pas être considéré comme représentatif d'une étoile comme Achernar. Malheureusement, avec cette configuration, le code n'a pas convergé pour des fractions d'hydrogène central inférieures à $X_c = 0.47$.

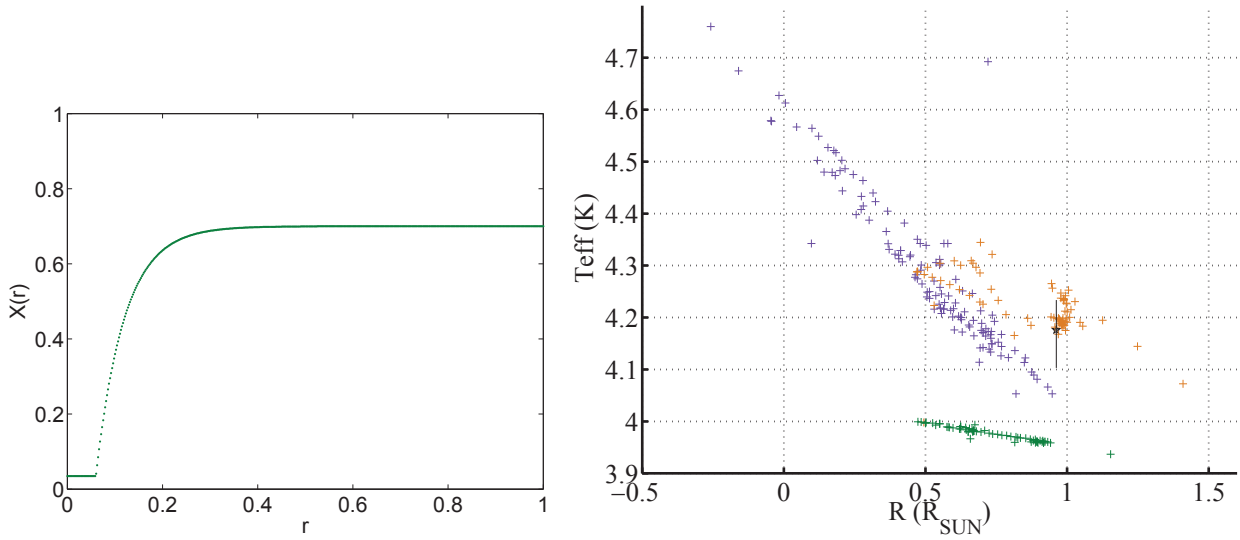


FIGURE 4.9 – A gauche : Profil d'abondance en hydrogène en fonction du rayon adimensionné. La composition chimique est une fonction de chaque point de grille radial. A droite : Diagramme rayon-température effective de modèles ESTER en valeur logarithmique. Les modèles violets sont les modèles obtenus en utilisant la loi d'énergie gravitationnelle ou en modifiant la loi de production d'énergie nucléaire (stratégie 1). Les modèles orangés sont obtenus en modifiant par domaine l'abondance d'hydrogène. Les modèles verts sont obtenus en implémentant le profil dl'abondance d'hydrogène continu (4.8).Les modèles 2D ont été moyennés. La croix noire représente les données observationnelles d'Achernar (seul le rayon équatorial en représenté).

Nous modifions l'abondance d'hydrogène dans chaque moitié de domaine (on double le nombre de marches d'escalier). Paradoxalement, les modèles obtenus ainsi ne sont pas réalistes (tout du moins, moins réalistes que les précédents). En effet, ils présentent une rotation différentielle très différente avec une enveloppe plus rapide que le cœur, voir la figure (4.10), ce qui n'a pas lieu d'être pour les stades évolutifs de fin de Séquence Principale ou en traversée du gap de Hertzsprung.

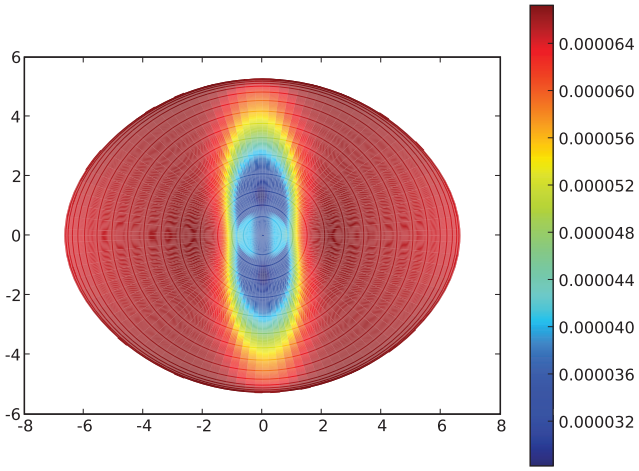


FIGURE 4.10 – Rotation différentielle dans le plan méridien d'un modèle ESTER 2D à $70\%\Omega_{bk}$ et $X_c = 0.5$ ($X_0 = 0.7$ et $Z = 0.02$). Les axes sont en rayons solaires. La barre de couleur indique le taux de rotation en s^{-1} indiquant que le cœur tourne moins vite que l'enveloppe.

Afin de supprimer les discontinuités aux interfaces et d'éviter ces solutions non physiques, nous implémentons le profil d'abondance d'hydrogène (4.8) sur chaque point de grille radial, cf la figure (4.9) de gauche. Les modèles obtenus ainsi sont représentés par les croix vertes sur la figure (4.9) de droite. Ils ne sont pas davantage représentatifs des données observationnelles. Mais, si on néglige partiellement les effets de mélange de la convection dans le noyau à des fins numériques, des modèles convergent sans hydrogène au cœur $X_c = 0$. Pour cela, nous imposons la condition au bord $X(r = 0) = X_c X_0$ au lieu d'imposer $X(r = r_c) = X_c X_0$ et le profil (4.8) s'applique à $r \in [r_j, R_\star]$. Le protocole consiste ensuite à faire tendre r_j vers la limite du noyau convectif car le profil d'abondance en hydrogène qui semblerait le plus réaliste pour produire un modèle de fin de Séquence Principale est un modèle où $X_c = 0$ dans le noyau convectif et où un profil comme (4.8) établit le gradient de composition dans l'enveloppe sans discontinuité. Les modèles convergés avec ce profil présentent bien un pic de production d'énergie nucléaire dans une couche autour du cœur, cf figure (4.11), mais aucun

ne correspond aux paramètres stellaires d'Achernar à l'heure actuelle. En effet, ils sont beaucoup plus petits et plus froids. Malheureusement, nous constatons aussi que lorsque r_j tend vers r_c, ni l'évolution de la limite du cœur convectif, ni celle du rayon ou de la température effective n'est monotone. Cette méthode n'est donc pas satisfaisante.

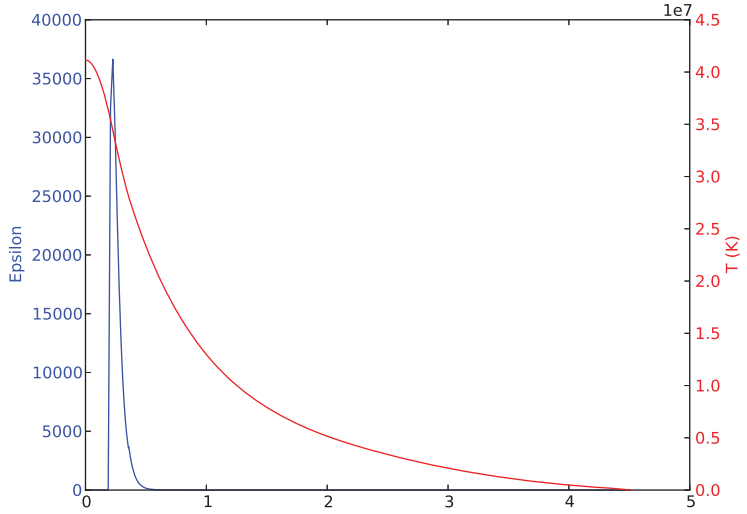


FIGURE 4.11 – Energie nucléaire produite (en erg.s^{-1}.g^{-1}) en fonction du rayon en rayon solaire où $X_c = 0$ de 0 jusqu'au rayon $r_j = r_c/3 + \Sigma_{i=1\cdots7}\Delta r_i$ et $r_c = 0.354 R_\odot$. On représente en rouge le profil de température en Kelvin.

4.2 Modification du code ESTER, évolution de la composition chimique

Pour pallier les problèmes de convergence vers des modèles non physiques ou atteindre une gamme de paramètres stellaires en accord avec les observations avec un profil de composition chimique continu, nous abandonnons la stratégie 2 et rendons le code ESTER « évolutif », c'est-à-dire capable de suivre l'évolution d'une étoile sur l'échelle de temps nucléaire. Il s'agit d'utiliser le code ESTER (stationnaire) pour faire le calcul de la structure thermodynamique en 2D et de mettre à jour la composition chimique via les routines du code CESAM2k (Morel, 1997). De cette façon, le gradient d'abondance en hydrogène est généré naturellement, ce qui devrait permettre la convergence de modèles ESTER vers les stades de fin de Séquence Principale de manière plus réaliste.

4.2.1 Calcul de taux de production d'énergie nucléaire et variation de la composition chimique par le code CESAM2k

Dans cette partie, nous détaillons les différentes étapes de calcul exécutées par les routines du code CESAM2k dont nous allons avoir besoin. Nous reprenons les notations de l'auteur Morel (1997). En l'occurence, nous voulons attirer l'attention du lecteur sur l'utilisation des expressions « au temps t » et « au temps $t + dt$ » qui font allusion à des étapes de calcul. Le modèle intermédiaire « au temps $t + dt$ » n'est pas le modèle au pas de temps suivant.

Dans notre cas, parce que nous nous concentrons sur les étoiles de masse intermédiaire, nous souhaitons calculer l'énergie nucléaire totale produite par la chaîne proton-proton et le cycle CNO. Ces deux réseaux d'équations conduisent à un système de 14 équations différentielles couplées suivant 9 isotopes : l'hydrogène (proton), l'hélium 3, l'hélium 4, le carbone 12, le carbone 13, l'azote 14, l'azote 15, l'oxygène 16 et l'oxygène 17. Dans les faits, on considère aussi un élément fictif supplémentaire pour tenir compte de la troncature dans les réseaux. Le deutérium, le lithium 7 et le béryllium 7 sont estimés à l'équilibre. Les 14 équations considérées sont les suivantes :

chaîne p-p	cycle CNO
$^1H(p,\beta^+\nu)^2H$	$^{12}C(p,\gamma)^{13}N(\beta^+\nu)^{13}C$
$^2H(p,\gamma)^3He$	$^{13}C(p,\gamma)^{14}N$
$^3He(^3He,2p)^4He$	$^{14}N(p,\gamma)^{15}O(\beta^+\nu)^{15}N$
$^4He(^3He,\gamma)^7Be$	$^{15}N(p,\gamma)^{16}O$
$^7Be(\beta^-\nu\gamma)^7Li$	$^{16}O(p,\gamma)^{17}F(\beta^+\nu)^{17}O$
$^7Li(p,\alpha)^4He$	$^{15}N(p,\alpha)^{12}C$
$^7Be(p,\gamma)^8B^*(\beta^+\nu)^8Be(\alpha)^4He$	$^{17}O(p,\alpha)^{14}N$

TABLE 4.4 – Réactions nucléaires sélectionnées d'après Morel (1997).

Toutes les réactions nucléaires peuvent s'écrire sous la forme

$$\ll\ 1+2=3+4\ \gg \tag{4.10}$$

où chaque chiffre représente le noyau d'un élément chimique ou une particule (neutrino, positron... etc.). Si $1 \neq 2$ et $3 \neq 4$, l'évolution de la quantité des noyaux d'un élément, notée y_i, s'écrit alors

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dy_3}{dt} = -y_1 y_2 \rho \mathcal{N} < \sigma v >_{12} = -y_1 y_2 \rho \Lambda_{12}$$

où σ est la section efficace et Λ_{ij} le taux de réaction (Pichon, 1990).

Les taux de réaction $\Lambda_{ij} = \mathcal{N} < \sigma v >_{ij}$ de chaque équation sont déterminées d'après les tables NACRE (Angulo *et al.* (1999), Morel *et al.* (1999)) et dépendent de la température

et de la densité issues du calcul de structure du modèle (densité, pression, température) à l'instant t. Il s'agit de calculer la probabilité de collision de deux particules ayant l'énergie nécessaire pour franchir la barrière coulombienne (par effet tunnel) en comptabilisant l'écrantage induit par les électrons. L'énergie nucléaire totale produite est alors déterminée par le calcul du défaut de masse de chaque réaction (on soustrait l'énergie emportée par les neutrinos) (Clayton, 1968).

Cette énergie en se thermalisant donne accès à une nouvelle structure thermodynamique à l'instant suivant $t + dt$.

L'évolution de la composition chimique associée peut alors être déterminée. Pour résoudre temporellement les équations différentielles couplées, le code CESAM2k contient un algorithme de Runge-Kutta. Il s'agit d'une méthode implicite qui permet notamment de suivre l'évolution des réactions nucléaires lentes sans pour autant engendrer des erreurs numériques sur les espèces chimiques à courte échelle de temps. A titre d'illustration de la mise en pratique de cette méthode, considérons une seule équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \tag{4.11}$$

En la complétant avec une condition initiale, cette méthode permet d'approximer la solution au pas de temps suivant par

$$y_{n+1} = y_n + h\Sigma_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{4.12}$$

où h est le pas de l'itération. Les k_i sont définis par $f(t_n + c_i h, y_n + h\Sigma_{i=1}^{s} a_{ij} k_j)$. Les coefficients a_{ij}, b_i et c_j sont propres à la méthode utilisée, dans notre cas, il s'agit de la méthode d'ordre 3 Lobatto IIIc (Hairer & Wanner, 1991), et se lisent dans le tableau de Butcher suivant :

0	1/6	-1/3	1/6
1/2	1/6	5/12	-1/12
1	1/6	2/3	1/6
	1/6	2/3	1/6

TABLE 4.5 – Tableau de Butcher de la méthode Runge-Kutta Lobatto IIIc. Les éléments de la première colonne sont les c_i, les éléments de la dernière ligne sont les b_i et les autres coefficients composent la matrice a.

Cette méthode repose ainsi sur l'interpolation de la fonction f sur s pas de temps intermédiaires appelés étapes de la méthode. L'utilisation de la structure thermodynamique à l'instant t et celle au temps $t + dt$ permet l'interpolation de la densité, de la pression et de la température aux différentes étapes de la méthode d'intégration. Les abondances sont extrapolées à partir de celle de l'instant t uniquement.

Les équations d'évolution de la composition chimique sont résolues ensuite itérativement à l'aide du schéma de Newton-Raphson. Cela nécessite le calcul d'un jacobien à chaque itération.

En appelant la routine d'intégration temporelle implicite une fois dans la zone convective, où le calcul est intégral pour rendre compte du mélange quasi-instantané à l'échelle de temps nucléaire, et une fois dans les couches de la zone radiative de manière locale (à chaque points de collocation), la variation de composition chimique entre les deux instants est déterminée en tout point du modèle.

4.2.2 Mise en œuvre

Pour faire évoluer la composition chimique temporellement dans ESTER, un moyen simple est d'utiliser la méthode précédemment décrite (routines CESAM2K) et d'utiliser le code ESTER comme routine de calcul de la structure thermodynamique.

L'organigramme (4.12) représente l'ordre des différentes étapes à accomplir pour avoir des modèles 2D évoluant dans le temps en fonction de la nucléosynthèse :

1. A partir de conditions initiales (composition chimique où seule l'abondance de l'isotope ^{13}N est nulle), le code ESTER fournit une structure 2D associée au temps t.
2. A l'aide de cette structure, les routines CESAM2k déterminent l'énergie nucléaire produite.
3. Cette énergie est injectée dans le code ESTER pour produire une nouvelle structure 2D appelée structure au temps $t + dt$.
4. Les structures ESTER 2D au temps t et $t+dt$ sont utilisées par les routines CESAM2k pour déterminer la variation de composition chimique.
5. La composition chimique est mise à jour.
6. La nouvelle composition chimique permet à nouveau l'obtention d'une structure ESTER 2D au temps t (étape 1.).

Ce cycle, en se perpétuant, fournit à chaque instant t la structure 2D évoluant en réponse à la variation de composition chimique induite par les réactions nucléaires.

En terme technique, la mise en œuvre d'un tel cycle nécessite l'adaptation des outils numériques de CESAM2K. Chaque objet doit avoir la latitude comme dimension supplémentaire. Par exemple, la matrice d'abondance (rayon, élément chimique) devient un objet 3D (rayon, latitude, élément chimique). Les calculs sont alors faits latitude par latitude bien que, dans les zones radiatives, cela néglige tout transport horizontal d'élément chimique.

Pour que cet algorithme amorce l'évolution, il faut que les deux modèles, celui à l'instant t et celui à l'instant $t + dt$, soient différents. Il s'agit d'une condition *sine qua none* pour qu'il y ait variation de la composition chimique. Les conditions initiales sont pour cela déterminantes. Nous pouvons choisir artificiellement un premier pas de temps important (les pas de temps suivants sont déterminés de manière adaptative), baisser la luminosité, diminuer l'abondance d'hydrogène centrale ou encore augmenter la température centrale. Nous choisissons de diminuer l'abondance d'hydrogène centrale de 5%, ce qui correspond

d'après un modèle CESAM2k à un premier pas de temps d'environ cinq millions d'années (lorsque le point de départ de la simulation est la ZAMS).

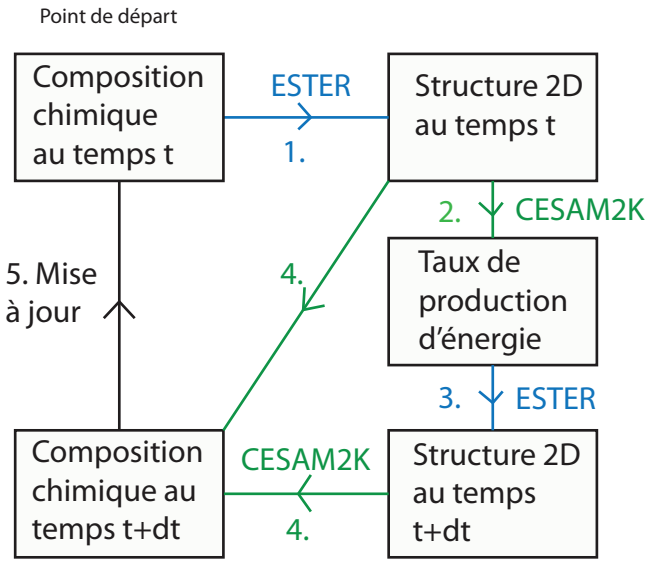


FIGURE 4.12 – Organigramme d'avancement en temps du code ESTER par résolution de la nucléosynthèse. Les flèches bleues correspondent aux étapes où le code ESTER traditionnel est utilisé, les flèches vertes sont celles représentant l'usage des routines CESAM2K.

Au cours de l'évolution, le cœur convectif rétrécit et laisse derrière lui une trace (un gradient d'abondance d'hydrogène) dans l'enveloppe radiative. Dans le code ESTER, le mapping est calculé et modifié au besoin à chaque itération de Newton (par exemple, si un gradient est trop important, un domaine est ajouté) et tous les champs sont réinterpolés sur la nouvelle grille. Cela signifie que les points de grille et les abondances en éléments chimiques sont indépendants, comme si la limite du noyau était une paroi poreuse, cette méthode est donc adaptée pour mettre en évidence une éventuelle trace du cœur.

A l'heure d'aujourd'hui, toutes ces modifications sont opérationnelles. Cependant, des difficultés numériques ne nous permettent pas encore de présenter de résultats pertinents.

4.3 Bilan

Afin de reproduire une étoile traversant le gap de Hertzsrpung comme Achernar à l'aide du code ESTER, nous avons montré que l'adaptation d'une loi d'énergie gravitationnelle à la place de celle que l'étoile extrait des réactions nucléaires n'est pas satisfaisante. Les modèles 1D ont révélé qu'aux stades post-Séquence Principale, la source principale d'énergie de l'étoile

est celle produite par réactions nucléaires dans une couche autour du noyau convectif lorsque celui-ci en se contractant permet à la base de l'enveloppe radiative d'être suffisamment chaude. Nos efforts pour reproduire des profils d'énergie nucléaire identiques à ceux issus de la modélisation 1D ont mis en évidence la nécessité d'une meilleure description de la distribution d'abondance d'hydrogène. Nous avons alors constaté que les modèles issus d'une telle description, difficiles à faire converger, appelent à une implémentation de l'évolution temporelle des profils d'abondance. Nous avons alors adapté des routines du code CESAM2k, en l'occurence celles qui calculent le taux de production d'énergie nucléaire et la variation temporelle de la composition chimique, pour être appelées par le code ESTER qui lui génère la structure associée en deux dimensions. Cette implémentation constitue un premier code en deux dimensions qui suit l'évolution chimique d'une étoile sur l'échelle de temps nucléaire.

Conclusions et perspectives

Résumé du travail effectué

L'objectif principal de ce travail a été d'étudier l'interaction entre la rotation stellaire et la contraction gravitationnelle.

Pour ce faire, dans le chapitre deux, nous avons construit un modèle d'étoile en contraction gravitationnelle dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq. Dans le chapitre trois, nous avons montré, à l'aide de ce modèle, que l'écoulement de spin-up contrôle la dynamique d'une enveloppe radiative à l'issue d'un temps de Kelvin-Helmholtz. Cet écoulement se caractérise par une rotation différentielle cylindrique où le cylindre tangent au cœur tourne quasiment en rotation solide avec le cœur et efface les conditions dynamiques initiales.

D'un point de vue de la mécanique des fluides, nous fournissons les lois d'échelle de l'écoulement de spin-up s'établissant au sein d'un fluide pris entre deux coquilles sphériques. Nous avons établi, dans le cas de conditions rigides sur les deux parois du domaine, l'expression analytique de la rotation différentielle grâce à une analyse asymptotique appliquant la théorie de la couche limite.

Dans le chapitre 5, nous avons voulu faire un pas supplémentaire vers un modèle de contraction gravitationnelle compressible avec le code ESTER en s'appliquant à modéliser une étoile comme Achernar. Les données observationnelles de cette étoile et les modèles 1D suggèrent qu'il s'agisse d'une étoile post Séquence Principale. Les modèles 1D ont aussi motivé une modification du code ESTER pour faire évoluer temporellement la composition chimique de l'étoile puisqu'ils révèlent que la source d'énergie nucléaire issue de la combustion de l'hydrogène dans une couche autour du noyau est plus importante que celle que l'étoile extrait d'une contraction gravitationnelle du cœur à l'âge estimé d'Achernar.

Applications astrophysiques

En terme d'applications stellaires, il est intéressant de se demander si l'écoulement de spin-up peut s'établir sur des séquences d'évolution autres que celles contrôlées par un temps de Kelvin-Helmholtz (Pré-Séquence Principale, gap de Hertzsprung), comme par exemple sur une échelle de temps nucléaire. Ce que notre modèle nous apprend c'est que la vitesse d'aspiration radiale que nous imposons pour rendre compte d'une éventuelle variation de

rayon serait d'autant plus faible et le nombre sans dimension B_a plus important que l'échelle de temps serait longue. Cela signifie aussi que la rotation différentielle associée à l'écoulement barocline aurait une amplitude d'autant plus forte. D'après notre modèle incompressible, si B_a reste inférieur à E^{-1}, alors l'écoulement de spin-up domine sur l'écoulement barocline sur un temps proportionnel à $E^{0.14}$. En effet, la diminution du nombre de Rossby compense l'augmentation de l'échelle de temps. Or d'après les estimations des nombres sans dimension que nous avons réalisées au chapitre deux, le nombre B_a vaut 2.5 10^9 si l'on considère une échelle de temps cent fois supérieure au temps de Kelvin-Helmholtz. Cette valeur est bien inférieure à nos estimations de E^{-1} et indique que l'écoulement de spin-up dominerait. Ces estimations sont basées sur des caractéristiques d'étoiles de Pré-Séquence Principale, mais ce résultat reste valable quand bien même le rayon et la vitesse de rotation devaient être plus faibles comme par exemple pour une étoile de Séquence Principale. Remarquons toutefois que si l'échelle de temps tend vers l'infini, le nombre B_a tend aussi vers l'infini. Cela s'explique par le fait que la condition $B_a < E^{-1}$ ne serait plus vérifiée. Par contre, si nous prenons en compte les effets d'une viscosité turbulente alors le nombre d'Ekman pourrait être plus grand jusque $E = E_{turb} = 10^{-8}$ par exemple. La condition $B_a < E^{-1}$ risque de ne plus être vérifiée non plus.

Ces résultats doivent être confirmés par une étude dans le cas compressible mais suggèrent que, dès lors qu'il y a une variation de rayon sur une échelle de temps longue, l'écoulement de spin-up (ou de spin-down de manière analogue selon le signe de $\dot{R}$) peut s'établir.

Une autre application de nos résultats est liée à l'astérosismologie qui a permis pour la première fois d'avoir accès à la structure interne d'étoiles, autres que le Soleil. Des estimations de profils de rotation à l'intérieur de géantes rouges ont par exemple été obtenues par inversion de modèles basés sur des observations fournies par la mission Kepler (e.g. Deheuvels *et al.* (2012)). La figure (4.13) montre que les travaux actuels en modélisation stellaire 1D prévoient des profils de rotation aux ordres de grandeur très différents (e.g. Marques *et al.* (2013)). Il y a trois ordres de grandeur de différence entre les modèles théoriques et les observations. Plusieurs mécanismes de transport ont été testés dans les codes d'évolution stellaire 1D comme par exemple la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement (Eggenberger *et al.* (2012)) ou les ondes internes de gravité (Charbonnel *et al.* (2013)). Aucun de ces candidats n'a, pour l'instant, permis d'expliquer le flux de moment cinétique efficace entre le cœur et l'enveloppe. Cela suggère l'exploration d'autres pistes.

Le modèle Boussinesq que nous avons développé montre qu'une couche de Stewartson apparaît au niveau du cylindre tangent au noyau. Si cette couche apparaît en réponse à la présence artificielle d'un cœur dans la phase de Pré-Séquence Principale, pour des phases post-Séquence Principale où une contraction gravitationnelle opère aussi, il existe véritablement un gradient de composition et de viscosité entre le noyau et l'enveloppe. Les modèles 1D n'incluent pas cette couche qui vient de la résolution 2D des équations hydrodynamiques prenant en compte les effets de la rotation de manière cohérente. Ils prévoient généralement une interface cœur-enveloppe sphérique comme interface de couplage et ainsi

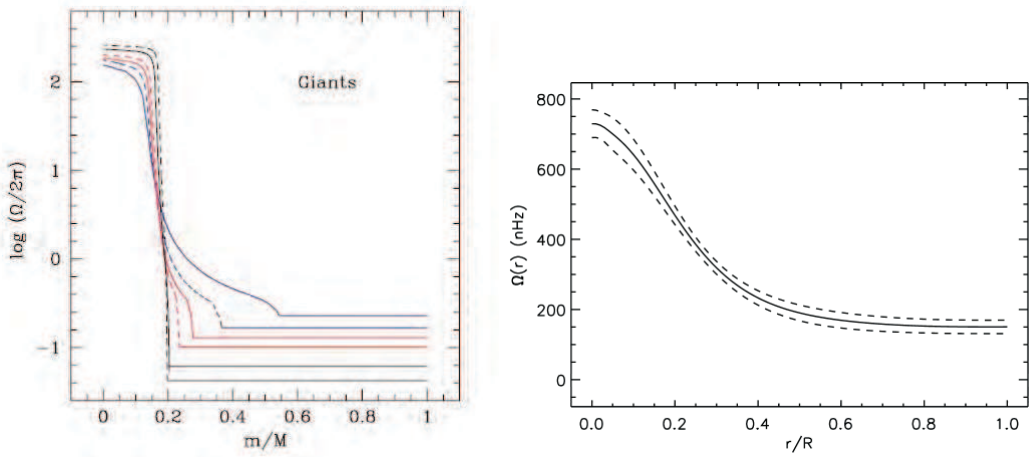


FIGURE 4.13 – A gauche : Profils de rotation interne théoriques de géantes basés sur les modèles stellaires 1D prenant en compte l'instabilité de cisaillement et la circulation méridienne dans le transport de moment cinétique (Marques *et al.* (2013)). Le taux de rotation du cœur est estimé à $\sim 2.10^{-4}$Hz. A droite : profil de rotation interne obtenu par inversion basée sur des observations de KIC 7341231 (Deheuvels *et al.* (2012)). Dans ce cas, le taux de rotation du cœur est estimé à $\sim 7.10^{-7}$Hz

un flux de moment cinétique proportionnel à $4\pi\eta^2 R_\star^2$. Une couche de cisaillement comme celle de Stewartson délimite la surface du cylindre tangent $4\pi\eta R_\star^2$. La colonne délimitée par le cylindre tangent est dynamiquement couplé au cœur du modèle (rotation quasi solide). Ce fort couplage laisse à penser que, par rapport à un modèle 1D, le transport de moment cinétique, dans un modèle qui résout la couche de Stewartson, est augmenté d'un facteur $1/\eta$ si l'on suppose que les gradients de composition et de vitesse sont similaires.

Perspectives

La problématique de la dynamique des étoiles de Pré-Séquence Principale, nécessitant l'étude de l'interaction de la rotation et de la contraction gravitationnelle est très riche et offre de nombreuses perspectives pour la compréhension de l'impact de la rotation sur l'évolution stellaire.

- ⋆ Les modifications en cours sur le code ESTER permettant l'évolution de la composition chimique pourrait prochainement être en mesure de reproduire les conditions stellaires conduisant une étoile à atteindre la rotation critique et ainsi d'apporter des contributions intéressantes à plusieurs branches de la physique stellaire comme l'évolution des étoiles *Be*.

- ⋆ Par ailleurs, comme il est connu que durant la phase de Pré-Séquence Principal le taux de rotation de l'étoile est régulé par les effets de champs magnétiques (Edwards *et al.* (1993), Bouvier *et al.* (1993), Rebull *et al.* (2004)), il serait très intéressant d'ajouter du champ magnétique aux modèles de spin-up par contraction gravitationnelle. D'une part, parce que plus généralement des champs magnétiques non-axisymétriques stables peuvent exister à la surface de rotateurs rapides comme les *roAp* par exemple (Leroy *et al.* (1995)). D'autre part, parce l'interaction d'une étoile avec un champ magnétique connecté à un disque n'est pas complètement connue aujourd'hui.
- ⋆ Finalement, un tel modèle pourrait contribuer à l'étude de l'impact dynamique de vent stellaire des étoiles par exemple de type *AeBe* de Herbig. Les couches de surface sont ralenties par le vent (spin-down) et cela peut entrainer une instabilité de cisaillement (Lignières *et al.*, 1996). La perte de moment cinétique est dépendante de la latitude privilégiant les modèles 2D. On pourrait alors analyser l'état dynamique de l'étoile lorsque cet écoulement de spin-down est dans un environnement magnétisé. Une étude de cette interaction en 2D permettrait d'identifier les modèles 1D les plus pertinents et de tester la loi d'isorotation de Ferraro (Ferraro, 1937).

Annexe A

Méthode numérique associée au code 2D incompressible

A.1 Discrétisation radiale

Pour résoudre le système d'équations (2.67), nous avons besoin d'une méthode de discrétisation des variables efficace en nombre de points fini. Une méthode aux différences finies seraient trop gourmande en 2D, c'est pourquoi nous utilisons une méthode spectrale, réputée pour sa précision sur un nombre de points réduit (Peyret (2012), Grandclément (2006), Bonazzola *et al.* (1999)).

Radialement, les équations sont discrétisées sur une grille de collocation de Gauss-Lobatto de N_r points associée aux polynômes de Chebyshev (e.g. Canuto *et al.* (2006), Fornberg (1998) [1998]). La coordonnée radiale d'un point de grille r_j est définit par

$$\begin{cases} r_j = \frac{1}{2}(-(1-\eta)\cos(\frac{j\pi}{N_r-1}) + 1 + \eta); \\ 0 \leq j \leq N_r - 1; \\ r_j \in [\eta; 1] \end{cases} \tag{A.1}$$

Ces abscisses ne sont pas également espacées comme le montre la figure (A.1). Par exemple, les régions centrales telles que $r_j \in [0.4; 0.6]$ d'un modèle projeté sur une telle grille de collocation avec une résolution radiale $N_r = 100$ sont décrites par 15 points quand les régions en surface ($r_j \in [0.8; 1]$) sont décrites par 33 points. Cet espacement particulier favorise la description des couches limites apparaissant dans les fluides en rotation. Pour une résolution radiale N_r donnée, l'espacement entre deux points de grille au bord du domaine $\Delta r = r_1 - r_0$ est comparé à $\sqrt{E}$, épaisseur caractéristique des couches limites d'un fluide visqueux en rotation (Greenspan, 1969*b*). Par exemple, pour une valeur du nombre d'Ekman prise à $E = 10^{-7}$, $\sqrt{E} \sim 10^{-4}$. Pour bien décrire la couche limite, il est préférable de prendre $N_r = 200$ ($\Delta r \sim 5.10^{-5}$) plutôt que $N_r = 100$ ($\Delta r \sim 2.10^{-4}$).

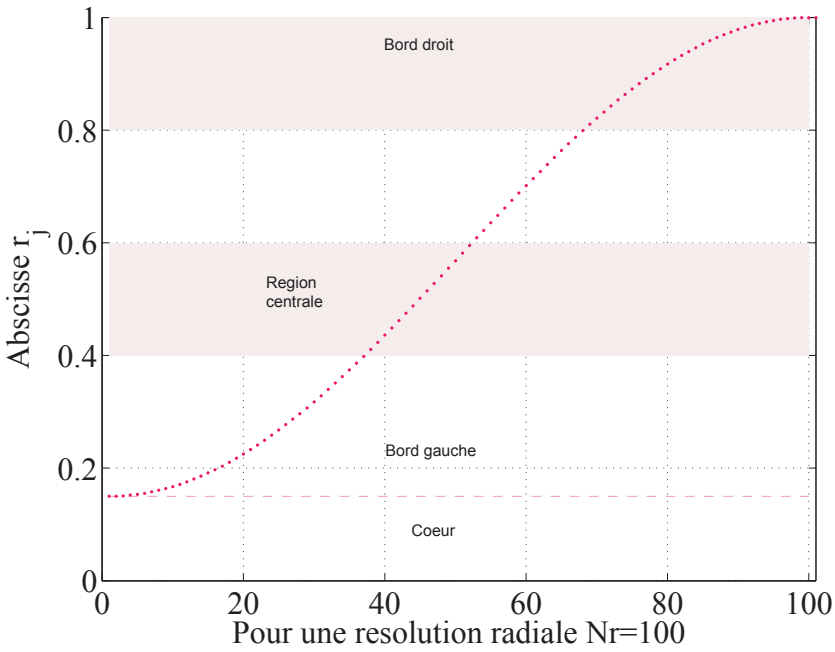


FIGURE A.1 – Abscisses des points de grille Gauss-Lobatto. Les appelations "bord gauche" et "bord droit" se réfèrent respectivement à l'interface cœur-enveloppe et à la surface du modèle.

Dans la direction horizontale (i.e. en latitude), les équations sont projetées sur la base des harmoniques sphériques.

A.2 Projection des équations sur la base des harmoniques sphériques

On représente le champ de vitesse comme suit

$$\vec{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l \vec{R}_l^m + v_m^l \vec{S}_l^m + w_m^l \vec{T}_l^m \tag{A.2}$$

où

$$\vec{R}_l^m = Y_l^m \vec{e_r}, \qquad \vec{S}_l^m = \vec{\nabla} Y_l^m, \qquad \vec{T}_l^m = \vec{\nabla} \wedge \vec{R}_l^m \tag{A.3}$$

Y_l^m sont les harmoniques sphériques normalisées, $\vec{e_r}$ le vecteur radial unité et $\vec{\nabla}$ est défini sur la sphère unité.

Les composantes u_m^l, v_m^l, w_m^l sont fonctions de la profondeur $u_m^l(r)$, $v_m^l(r)$, $w_m^l(r)$. Le système est axisymétrique par rapport à l'axe de rotation z, ce qui se traduit par $m = 0$.

L'équation de continuité (2.5) s'écrit dans cette base

$$v_m^l = \frac{1}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_m^l) \tag{A.4}$$

où $\Lambda = l(l+1)$.

L'équation de la vorticité du système (2.67) s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{l-1}^l r^{l-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_m^{l-1}}{r^{l-2}}\right) + A_{l+1}^l r^{-l-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{l+3}u_m^{l+1}\right) \\ -A_{l-1}^l \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^l \frac{\partial}{\partial r}\frac{r u_m^{l-1}}{r^{l-1}}\right) - A_{l+1}^l \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-l-1}\frac{\partial}{\partial r}(r^{l+2} r u_m^{l+1})\right) \\ -B_{l-1}^l r^{l-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_m^l}{r^{l-1}}\right) - B_{l+1}^l r^{-l-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{l+2}w_m^{l+1}\right) - l(l+1)t_m^l \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \Delta_l w_m^l \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Delta_l w_m^l) \\ \Delta_l\Delta_l(r u_m^l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(\frac{\eta^2}{r^2} - r\dot{\omega})\delta_{l1} \\ -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(\frac{\eta^2}{r^3} + 2\dot{\omega})\delta_{l1} \\ -\sqrt{\frac{16\pi}{5}}n_T^2(r)\delta_{l2} \end{pmatrix} . \tag{A.5}$$

où le symbole δ_{ij} est le symbole de Kronecker et les coefficients A_{l-1}^l,A_{l+1}^l,B_{l-1}^l et B_{l+1}^l sont les termes de couplages

$$\begin{cases} A_{l+1}^l = \frac{1}{(l+1)}\frac{1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \quad ; \quad B_{l+1}^l = \frac{l(l+1)(l+2)}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \\ A_{l-1}^l = \frac{1}{l}\frac{1}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \quad ; \quad B_{l-1}^l = \frac{l(l^2-1)}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} . \end{cases} \tag{A.6}$$

On projette également les fluctuations de température sur la base des hamoniques sphériques

$$\theta_T = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l} t_m^l Y_l^m . \tag{A.7}$$

L'équation de l'energie s'écrit

$$B_a \tilde{E}_T \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}t_m^l + 2r\frac{\partial}{\partial r}t_m^l - \Lambda t_m^l\right) = n_T^2(r) r^2 u_m^l . \tag{A.8}$$

L'équation de la vorticité dans la direction $\vec{R}_l^m$ et $\vec{S}_l^m$ est redondante. Pour cette raison, nous résolvons uniquement les première et troisième lignes qui, couplées à l'équation (A.8), permettent la résolution des termes u_m^l, w_m^l et t_m^l. Les composantes v_m^l de la vitesse sont déduites de l'équation de continuité (A.4).

Puisque le système est en rotation, alors il existe un équateur par rapport auquel il y a une solution symétrique v_φ (dont w^1 est la composante principale) et une solution antisymétrique v_θ (dont w^2 est la composante principale). Comme on force le système via la composante

u^0 et que les modes $l = 0$ et $l = 1$ sont couplés via l'équation de la vorticité projetée sur $\vec{R}_{l=1}^{m=0}$ alors la composante w^1 est excitée. Elle excite à son tour les compostantes u^2, w^3 et t^2 via l'équation de la vorticité projetée sur $\vec{T}_{l=2}^{m=0}$. Ainsi de suite, entre $l = 1$ et la valeur de troncature $l_{\max}$, les composantes non nulles sont les composantes w^l à l impair et les composantes u^l (et t) à l pair. La solution antisymétrique n'est jamais excitée.

A.3 Méthode de résolution du système d'équations

Une fois discrétisé à l'aide des éléments spectraux, on écrit le système (2.67) sous la forme $A\vec{X} = \vec{B}$. Le vecteur solution $\vec{X}$ a la forme

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} w^{l=1} \\ w^{l=3} \\ \vdots \\ w^{l=l_{\max-1}} \\ u^{l=2} \\ u^{l=4} \\ \vdots \\ u^{l=l_{\max}} \\ t^{l=2} \\ t^{l=4} \\ \vdots \\ t^{l=l_{\max}} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

La matrice A est composée des membres de gauche des équations tandis que le vecteur B contient les membres de droite. Il s'agit ensuite de procéder à la résolution du système.

Le spectre de la solution fournit l'amplitude normalisée des coefficients sur la base des polynômes de Chebyshev et des harmoniques sphériques. Nous veillons à ce que l'amplitude à la troncature soit au moins inférieure à 10^{-6} pour s'assurer que les erreurs engendrées par la troncature et par la précision machine (erreur d'arrondi due au nombre de chiffre significatif choisi) multipliées par le conditionnement de la matrice A ne génèrent pas des erreurs $\mathcal{O}(1)$.

A.4 Conditions aux bords sur le champ de température

Pour compléter le set d'équations (2.67) et de conditions aux bords sur le champ de vitesse (2.21), nous ajoutons les conditions aux bords sur le champ de température. Nous imposons qu'il n'y a pas de fluctuation de température à la surface du modèle. Au niveau du cœur $r = \eta$, nous imposons une condition de continuité en annulant la dérivée première

de la fluctuation de température. Cela s'écrit

$$\begin{cases} t_l'(r=\eta) = 0 \\ t_l(r=1) = 0 \, . \end{cases} \tag{A.10}$$

Annexe B

Le code ESTER

Créé par F. Espinosa Lara et M. Rieutord (Espinosa Lara & Rieutord (2012)), le code ESTER donne accès à la dynamique d'étoile en rotation rapide. Les équations hydrodynamiques sont résolues sur les échelles de temps longues fournissant une solution stationnaire des écoulements équivalente à la phase de Séquence Principale où l'étoile puise son énergie de la combustion d'hydrogène au cœur. En négligeant le flux convectif, ESTER se concentre sur la description des étoiles de type précoce ("early type"), composées d'un cœur convectif et d'une enveloppe radiative. Cette structure discrimine les étoiles de masse inférieure à $2M_\odot$. En effet, moins l'étoile est massive, plus la zone convective de surface (ou enveloppe convective) est profonde, essentiellement à cause d'effets d'opacité. Or le flux convectif n'est plus négligeable dans ces enveloppes convectives.

En parallèle, les étoiles sont considérées évoluer à moment cinétique constant. Cette hypothèse est mise à mal par les étoiles massives $M > 8M_\odot$ connues pour avoir de forts vents stellaires et donc une perte de moment cinétique conséquente. L'étude est ainsi contrainte aux étoiles de masse intermédiaire dont la masse est comprise entre $2M_\odot < M < 8M_\odot$.

Sans convection de surface, ni champ magnétique, les écoulements sont axisymétriques par rapport à l'axe de rotation (les effets de la turbulence peuvent être négligés sur les grandes échelles de temps). Les équations de la dynamique résolues en deux dimensions (rayon et latitude) fournissent la structure de l'étoile (champs de pression, température et densité) parallèlement au champ de vitesse.

Sous ces hypothèses simplificatrices, on peut citer à titre d'exemple que le code permet de décrire de manière réaliste une étoile comme Véga, étoile de Séquence Principale de masse $2.4M_\odot$ avec un faible champ magnétique (Petit *et al.*, 2010).

La rotation différentielle et la circulation méridienne associée sont calculées de manière cohérente sans recours à des constantes d'ajustement. De plus, il n'y a pas de limitation sur le taux de rotation qui peut atteindre le taux de rotation critique, noté Ω_{bk}. Ce taux de rotation est celui au-delà duquel l'étoile éjecte de la matière par l'équateur. On détermine sa

valeur en compensant la force de gravité par la force centrifuge, ce qui mène à la définition

$$\Omega_{bk} = \sqrt{\frac{GM}{R_e^3}} \tag{B.1}$$

où R_e est le rayon équatorial et M la masse de l'étoile.

B.0.1 Equations de la dynamique

Par rapport au cas incompressible, nous résolvons le champ de densité, conjointement au champ de température et de vitesse, de l'écoulement stationnaire d'un fluide auto-gravitant, compressible, visqueux à viscosité constante et soumis à des sources de chaleur.

Pour ce faire, il faut résoudre une équation supplémentaire : l'équation de Poisson. Les équations pour décrire l'état stationnaire d'une étoile simple est

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{B.2}$$

$$\rho T\vec{v}\cdot\vec{\nabla}S = -\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \varepsilon_* \tag{B.3}$$

$$\rho(2\vec{\Omega}_*\wedge\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}) = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}(\phi - \tfrac{1}{2}\Omega_*^2 s^2) + \vec{F}_v \tag{B.4}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0\ . \tag{B.5}$$

Il se compose donc de

- ⋆ l'équation de Poisson (B.2) qui décrit la distribution de masse où ϕ est le potentiel gravitationel.
- ⋆ l'équation de l'énergie (B.3) où S l'entropie est advectée par le champ de vitesse quand il y a production d'énergie nucléaire ε_*. Le flux d'énergie $\vec{F}$ est tel que

$$\vec{F} = -\chi_r\vec{\nabla}T - \frac{\chi_{\rm turb}T}{\mathcal{R}_M}\vec{\nabla}S \tag{B.6}$$

  avec $\chi_r = 16\sigma T^3/3\kappa\rho$ la conductivité radiative et $\chi_{\rm turb}$ la conductivité thermique turbulente sous l'hypothèse que le flux de chaleur convectif est proportionnel à un gradient d'entropie. $\mathcal{R}_M$ est le ratio entre la constante des gaz parfaits et le poids moléculaire moyen du fluide et σ est la constante de Stefan-Boltzmann.
  - ∗ Dans la zone radiative, l'advection d'entropie par la circulation méridienne est négligée.
  - ∗ Dans le cœur convectif, le gradient d'entropie est posé nul et le gradient de pression ne dépend plus que du gradient de température.

  L'équation de l'énergie devient relativement simple

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \varepsilon_* = 0 \tag{B.7}$$

  avec $\vec{F} = -\chi_r\vec{\nabla}T$.

⋆ l'équation du moment cinétique (B.4) où s est la coordonnée radiale cylindrique. La force visqueuse $\vec{F}_v$ s'écrit

$$\vec{F}_v = \mu\vec{\mathcal{F}}_\mu(\vec{v}) = \mu\left[\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{v}\right) + 2\left(\nabla\ln\mu\cdot\nabla\right)\vec{v} + \nabla\ln\mu\times\left(\nabla\times\vec{v}\right) - \frac{2}{3}\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\nabla\ln\mu\right] \tag{B.8}$$

En considérant la viscosité dynamique constante alors $\vec{F}_v = \mu\left[\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\right]$.

L'équation du moment cinétique est séparée en sa partie azimutale (dont on a pris le rotationnel)

$$s\frac{\partial\Omega^2}{\partial z}\vec{e}_\varphi = -\frac{\vec{\nabla}\rho\wedge\vec{\nabla}p}{\rho^2} \tag{B.9}$$

et sa partie méridienne

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho s^2\Omega\vec{u}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\mu s^2\vec{\nabla}\Omega\right) \tag{B.10}$$

où $\vec{u}$ est la circulation méridienne. Cette équation illustre l'équilibre de flux de moment cinétique entre son advection par la circulation méridienne et sa diffusion par les forces visqueuses.

⋆ l'équation de conservation de la masse (B.5) dans le cas compressible.

Les équations sont complétées par les équations de la microphysique : Les champs de pression, d'opacité et l'énergie nucléaire sont tabulés tels que

$$\begin{cases} P \equiv P(\rho,T) & \text{OPAL} \\ \kappa \equiv \kappa(\rho,T) & \text{OPAL} \\ \varepsilon_* \equiv \varepsilon_*(\rho,T) & \text{NACRE} \end{cases} \tag{B.11}$$

Angulo *et al.* (1999)

Adimensionnalisation des équations

Les équations sont adimensionnées en utilisant pour échelle de longueur le rayon polaire R_p. Les valeurs centrales adimensionnent respectivement les champs de pression, de température et de densité. L'échelle du potentiel gravitationnel P_c/ρ_c est choisie de façon à ce que, conjointement avec l'échelle de vitesse azimutale $1/R_p\sqrt{P_c/\rho_c}$, l'équation de la vorticité (B.9) soit $\mathcal{O}(1)$. L'échelle $E\sqrt{P_c/\rho_c}$ est utilisée sur la composante méridienne puisque la circulation méridienne d'un écoulement barocline est $\mathcal{O}(E)$.

Avec ces échelles, l'équation de Poisson (B.2) devient

$$\Delta\phi = \pi_c\rho \tag{B.12}$$

où $\pi_c = \frac{4\pi G\rho_c^2 R_p^2}{P_c}$ est la pression centrale adimensionnée.

L'équation de l'énergie (B.7) se lit maintenant

$$\Delta T + \vec{\nabla} \ln \chi_r \cdot \vec{\nabla} T - \Lambda \frac{\varepsilon_\star}{\chi_r} = 0 \tag{B.13}$$

où $\Lambda = \rho_c R^2 / T_c$ est une constante avec dimension mais où $\rho_c R^2 / T_c \chi_r$ est bien sans dimension. Concernant le champ de vitesse, l'équation de la vorticité sans dimensions (B.9) est inchangée et la partie méridienne obéit à l'équation sans dimension

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho s^2 \Omega \vec{u}) = E \vec{\nabla} \cdot (\mu s^2 \vec{\nabla} \Omega) \tag{B.14}$$

Le nombre d'Ekman est définit par $\mu_c / \rho_c \Omega_0 R_p^2$ avec $\Omega_0 = \sqrt{P_c / R_p^2 \rho_c}$. Pour finir, l'équation de conservation de la masse sans dimension est identique à l'équation (B.5).

Composition chimique des modèles ESTER et production d'énergie nucléaire

Le profil d'abondance d'hydrogène à l'intérieur de l'étoile est généré à l'aide de trois paramètres :

- ⋆ X_0, l'abondance d'hydrogène dans l'enveloppe,
- ⋆ X_c, la fraction d'abondance d'hydrogène dans le cœur par rapport à l'enveloppe,
- ⋆ r_c, la taille du noyau convectif,

de sorte que

$$\begin{aligned} X(r) &= X_c X_0 \qquad \text{si} \qquad r \in [0, r_c] \ \forall \theta \\ X(r) &= X_0 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

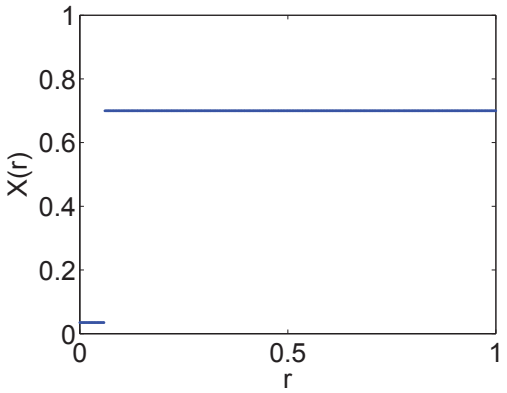


FIGURE B.1 – Profil d'abondance en hydrogène en fonction du rayon adimensionné d'un modèle ESTER dont $X_0 = 0.7$, $X_c = 0.05$ et $r_c = 6\%$.

Les abondances en éléments chimiques plus lourds sont décrites par Y l'abondance d'hélium et Z la métallicité. La limite du noyau r_c est déterminée via le critère de Schwartzchild, c'est-à-dire la zone où le gradient d'entropie (en réalité le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä) est égal a zéro. Le critère de Ledoux n'est pas pris en compte car le profil de composition chimique est discontinu en $r = r_c$. A l'interface entre les deux zones, la stratification est très forte, i.e. la fréquence de Brunt-Väisälä est très importante.

Diminuer la valeur de X_c permet d'imiter l'évolution d'une étoile le long de la Séquence-Principale. Nous utilisons cette méthode comme un "proxy" d'évolution stellaire.

B.0.2 Méthode numérique

Différenciation des fonctions

Pour résoudre le système d'équations, nous avons besoin d'un algorithme permettant l'estimation de la dérivée d'une fonction (par exemple le champ de vitesse, de température, etc...) en utilisant un nombre fini de points d'évaluation.

Il existe les algorithmes aux différences finies qui se basent sur des interpolations polynômiales de points d'évaluation sur une grille de points équidistants. L'ordre de ces méthodes (lié à l'erreur de l'estimation d'une dérivée) est au moins égal aux nombres de points d'évaluation utilisés, ce qui les rend très attractives. Cependant, ces méthodes souffrent à ordre élevé d'oscillations sur les bords des intervalles (phénomène de Runge (Runge, 1901)).

Pour cette raison, le code ESTER utilise une méthode spectrale qui, en se basant sur une grille de points à espacements variables, supprime le phénomène.

Ces méthodes sont utilisées car elles sont précises avec un faible nombre de points de grille (une méthode d'ordre n utilise $n/2$ points d'évaluation) (Peyret (2012), Grandclément (2006), Bonazzola *et al.* (1999)). Elles ont pour seul défaut de ne pas bien gérer les singularités d'une fonction (phénomène de Gibbs (Gibbs, 1898)). Pour cette raison, une méthode multi-domaine est utilisée. Le domaine est divisé en plusieurs sous-domaines dont les interfaces sont placées aux discontinuités de la fonction, par exemple à l'interface cœur convectif-enveloppe radiative. Ainsi, la fonction est continue sur chaque sous-domaine et la méthode spectrale peut y être appliquée sans problème.

Radialement, le code ESTER utilise une méthode de différenciation basée sur une méthode de collocation Gauss-Lobatto-Chebyshev associée aux polynômes de Chebyshev adaptée à la mise en place de condition aux bords (Boyd (1989)). En latitude, la méthode Gauss-Legendre, basée sur les polynômes de Legendre, est utilisée car elle est particulièrement adaptée pour les fonctions axisymétriques à la surface d'une sphère. La combinaison de ces deux méthodes permet une discrétisation spectrale des équations dans les deux dimensions.

Coordonnées sphéroïdales

Les étoiles en rotation n'ont pas une forme sphérique à cause de la force centrifuge. Les coordonnées privilégiées pour s'adapter à la morphologie déformée axisymétriquement,

utilisées dans le code ESTER, sont les coordonnées sphéroïdales $(\zeta, \theta', \varphi')$ que l'on définit telle que

$$\begin{cases} r = r(\zeta, \theta') \\ \theta = \theta' \\ \varphi = \varphi' \end{cases} \tag{B.15}$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques et

$$r(\zeta, \theta') = a_i \xi \Delta\eta_i + R_i(\theta) + A_i(\xi)(\Delta R_i(\theta) - a_i \Delta\eta_i) \; . \tag{B.16}$$

Avec cette méthode qui suit Bonazzola *et al.* (1998), l'enveloppe est subdivisée en n sous-domaines $\mathcal{D}_i$ telle que $\zeta \in [\eta_i, \eta_{i+1}]$ pour $i = 0...n-1$. Les notations utilisées sont les suivantes : η_i est le rayon polaire à la base du sous-domaine $\mathcal{D}_i$ et $\Delta\eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$. Les frontières entre les sous-domaines sont définis par $\Delta R_i(\theta) = R_{i+1}(\theta) - R_i(\theta)$. La coordonnée ξ est définie comme $(\zeta - \eta_i)/\Delta\eta_i$, l'écart au rayon polaire normalisé par l'épaisseur du sous-domaine au pôle. La constante a_i est prise égale à l'unité pour que le rayon augmente de façon monotone avec ζ. La constante $A_i(\xi)$ est posée égale à

$$A_i(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } \quad A_0(\xi) = -1.5\xi^5 + 2.5\xi^3 \tag{B.17}$$

De cette façon, le rayon sphérique équivaut au rayon polaire en $\zeta = \eta_i$ et $\zeta = \eta_{i+1}$ et le mapping [1] tend vers un mapping sphérique près du centre et est ainsi bien adapté à l'usage des polynômes de Legendre. Ce mapping particulier nécessite des conditions aux interfaces de chaque sous-domaine et au bord externe $\zeta = 1$ (la surface de l'étoile).

Conditions aux bords

Le système d'équations nécessite des conditions aux bords sur le potentiel gravitationnel, le champ de vitesse, de pression et de température et ceux à l'interface de chaque sous-domaine, au centre $\zeta = 0$ et à la surface de l'étoile $\zeta = 1$.

Aux interfaces entre les sous-domaines $R_i(\theta)$, on demande la continuité des champs scalaires.

Au centre $\zeta = 0$, on impose que les champs soient réguliers.

La surface de l'étoile $\zeta = 1$ est définie par l'isobare où la pression est

$$P_s = \frac{2}{3}\frac{\overline{g}}{\overline{\kappa}}$$

A cette surface, le potentiel gravitationnel doit être continu et tendre vers zéro à l'infini. Pour faciliter l'implémentation d'une telle condition au bord, un domaine extérieur sphérique vide est défini au-delà de la surface de l'étoile.

1. Anglicisme pour désigner la manière de cartographier le domaine de résolution des équations différentielles

Pour le champ de vitesse, on souhaiterait annuler les composantes horizontales du tenseur des contraintes (conditions Glissement Sans Frottement). On rappelle qu'habituellement ces conditions s'écrivent

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{and} \quad ([\sigma]\vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

Quand au champ de température, on considère que localement l'étoile rayonne comme un corps noir, ce qui se traduit par

$$-\chi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} T = \sigma T^4$$

Pour finir, le système conserve le moment cinétique.

Algorithme de Newton

Le système d'équations est résolu avec une méthode directe qui nécessite la factorisation d'une matrice (de grande taille) résultant de la discrétisation spectrale des équations dans les deux dimensions spatiales. La méthode choisie est un schéma itératif de Newton. Il consiste à écrire le problème sous la forme $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ où $\vec{F}$ contient les opérateurs des équations et $\vec{x}$ contient les champs à résoudre listés dans la table (B.1). La matrice jacobienne $\mathcal{J}$ de $\vec{F}$ permet d'écrire une approximation de la fonction $\vec{F}(\vec{x}) \sim \vec{F}(\vec{x}^k) + \mathcal{J}(\vec{x}^k)(\vec{x} - \vec{x}^k)$ et ainsi de calculer des itérations de Newton $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \mathcal{J}(\vec{x}^k)^{-1}\vec{F}(\vec{x}^k)$. En un nombre fini d'itérations k, l'algorithme converge vers la solution de $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ à une précision donnée. Le nombre d'itérations est d'autant plus faible que la solution de départ est a priori peu éloignée de la solution recherchée.

Pour cette raison, nous calculons généralement un modèle 1D qui sert de point de départ à un calcul de modèle 2D. Ces modèles 1D sont des modèles ESTER sans rotation ($\Omega = 0$) et toutes les grandeurs (pression, température, etc) y sont uniquement fonction du rayon.

Le système est ainsi bien posé et résolu avec un nombre d'Ekman $E \to 0$ afin d'éviter d'avoir à recourir à une résolution trop importante pour résoudre les couches limites Espinosa Lara & Rieutord (2013).

Fonction	
$\Phi(\zeta, \theta)$	potentiel gravitationnel
$P(\zeta, \theta)$	champ de pression
$P_s(\theta)$	pression de surface
P_c	pression centrale
π_c	pression centrale adimensionnée
$T(\zeta, \theta)$	champ de température
$T_s(\theta)$	température de surface
T_c	température centrale
$T_{eff}(\theta)$	température effective
$g_{sup}(\theta)$	gravité de surface effective
$F_{rad,i}(\theta, i)$	flux radiatif à l'interface entre chaque domaine
$\delta\Omega(\zeta, \theta)$	rotation différentielle
$\psi(\zeta, \theta)$	circulation méridienne
Ω	taux de rotation à l'équateur
L	luminosité
M	masse
R_p	rayon polaire
$R_i(\theta, i)$	variables liées au mapping
$\Delta R_i(\theta, i)$	
η_i	
$\Delta\eta_i$	
γ	
Λ	

TABLE B.1 – Liste des variables que contient le vecteur $\vec{x}$.

Article

Astronomy & Astrophysics manuscript no. langcorrected2˙hypolite
October 9, 2014
© ESO 2014

Dynamics of the envelope of a rapidly rotating star or giant planet in gravitational contraction

D. Hypolite[1,2] and M. Rieutord[1,2]

[1] Université de Toulouse; UPS-OMP; IRAP; Toulouse, France
[2] CNRS; IRAP; 14, avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

October 9, 2014

Abstract

Aims. We wish to understand the processes that control the fluid flows of a gravitationally contracting and rotating star or giant planet.
Methods. We consider a spherical shell containing an incompressible fluid that is slowly absorbed by the core so as to mimic gravitational contraction. We also consider the effects of a stable stratification that may modify the dynamics of a pre-main-sequence star of intermediate mass.
Results. This simple model reveals the importance of both the Stewartson layer attached to the core and the boundary conditions met by the fluid at the surface of the object. In the case of a pre-main-sequence star of intermediate mass where the envelope is stably stratified, shortly after the birth line, the spin-up flow driven by contraction overwhelms the baroclinic flow that would take place otherwise. This model also shows that for a contracting envelope, a self-similar flow of growing amplitude controls the dynamics. It suggests that initial conditions on the birth line are most probably forgotten. Finally, the model shows that the shear (Stewartson) layer that lies on the tangent cylinder of the core is likely a key feature of the dynamics that is missing in 1D models. This layer can explain the core and envelope rotational coupling that is required to explain the slow rotation of cores in giant and subgiant stars.

Key words. Stars : Rotation - Hydrodynamics

1. Introduction

The influence of rotation has long been known to be crucial for understanding mixing in radiative regions of stars and in interpreting the observed surface abundances (Strittmatter 1969). Many (if not all) stellar evolution codes now include some modelling of the transport of angular momentum and chemical elements by the flows induced by rotation in the stably stratified radiative zones. The difficulty is that stellar evolution codes are one-dimensional while fluid flows are generally multi-dimensional. Basically, two types of modelling are currently used: one is based on a simple (turbulent) diffusion process (e.g. Pinsonneault 1997) and the other includes a first-order modelling of meridional advection, distinguishing the transport of angular momentum and that of chemicals (Zahn 1992). However, both of them need adjustment of diffusion coefficients with respect to observations. While this modelling has succeeded in explaining various features of abundance patterns or evolutionary effects like the surface abundance of lithium as a function of mass (Charbonnel & Talon 1999), the (relative) high number of red super-giants in low-metallicity galaxies (Maeder & Meynet 2001), or the ratio of type Ibc to type II supernovae (Meynet & Maeder 2005), many recent results challenge our understanding of this so-called rotational mixing. One of the most famous is the distribution of LMC B-stars in a diagram plotting the nitrogen abundance versus the rotational velocity (the so-called Hunter diagram). As shown by Brott et al. (2011), many slowly rotating stars show an over abundance of nitrogen compared to the predictions of models, while some fast rotating stars show much less nitrogen than expected.

In order to progress in this difficult problem, it is clear that a better view of the dynamics of rotating stars is needed. Many processes contribute to rotational mixing. Let us recall that the timescale of element transport inside stars is essentially controlled by the radiative zones. Indeed, convective regions mix almost instantaneously. When the star is non-rotating, elements may migrate through radiative regions thanks to microscopic diffusive processes or propagating waves. In rotating stars, radiative regions are no longer at rest: beyond the global rotation baroclinic flows arise as a differential rotation and an associated meridional circulation (Rieutord 2006b). While meridional currents can obviously carry elements from deep to surface layers, differential rotation can also contribute to the transport through shear driven instabilities and associated turbulence. As pointed out by Zahn (1992), baroclinicity may be helped by angular momentum losses resulting from mass loss. To be complete, a sequence of gravitational contraction may also drive a redistribution of angular momentum and elements during the pre-main sequence or just at the end of the main sequence.

Going beyond the above mentioned modelling of rotational mixing requires relaxing the spherical symmetry of the models. A first step in this direction is to simplify the structure of the stars so as to focus on their interior hydrodynamics. This line of research was followed in Rieutord (2006a). The star was reduced to a spherical ball filled with an incompressible fluid to study the properties of the

baroclinic flows. Besides giving a simplified view of the dynamic processes controlling a radiative zone, this work has led to a simplified set-up for boundary conditions in complete (compressible) two-dimensional models of fast rotating stars (Espinosa Lara & Rieutord 2013). We address the effect of mass contraction/expansion of a star or a giant planet on the global flows that affect the envelope of the rotating object. Although this driving results from the compressibility of the fluid, we decided to investigate its consequences using an incompressible fluid. The contraction/expansion of the envelope is mimicked by a core that absorbs or injects matter at a constant rate in a surrounding stably or neutrally stratified envelope. We wish to determine the resulting flows and the circumstances when it overwhelms the eventual baroclinic flows. This will complete the work of Rieutord & Beth (2014) who studied this same competition in the case of a spin-down driven by mass losses.

The paper is organized as follows : In section 2 we describe the model and the questions of fluid dynamics that are addressed. We next consider the case where outer boundary conditions are no-slip and use the ensuing analytical solutions to enlight the dynamics (section 3). In section 4, we discuss the presumably more realistic case with stress-free boundary conditions. Conclusions and a discussion of extrapolations of the results to models with a compressible fluid follow.

2. The model

2.1. Description

To model simply the contracting/expanding star or giant planet, we consider a self-gravitating incompressible viscous fluid enclosed between two spherical shells. These shells are assumed not to be distorted by rotation. The inner shell may represents a core-envelope boundary through which a flux of matter is imposed. This flux is described by a uniform radial velocity V_s at this interface. For a contracting envelope, V_s is negative. Note that as the fluid of the envelope enters the core and as its radius is assumed fixed, the core's density linearly increases with time, namely

$$\rho_{\rm core} = \rho_0 \left(1 + \frac{t}{t_s}\right)$$

where we introduced the initial density of the core ρ_0 and the "suction time", which is the time the core needs to increase its density by a factor 2, namely

$$t_s = \frac{R_{\rm core}}{3V_s}\tilde{\rho} \tag{1}$$

where $\tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}$. This time is of same order of magnitude as the Kelvin-Helmholtz time. Here, ρ is the density of the envelope. We note that changing the sign of V_s can readily describe an expanding envelope due to a wind. The outer bounding sphere is of constant radius and lets matter through so as to ensure mass conservation in the envelope.

2.2. A digest of the following fluid dynamics

The remainder of the paper is fluid dynamics. A summary of the various steps are described below and the astrophysical implications of the results are addressed at the end of the paper.

As well known, the contraction of the star with the conservation of angular momentum induces a global acceleration of the rotation rate, namely a spin-up, of the star. The problem of spin-up flows has been considered many times in fluid dynamics literature (see the review of Duck & Foster 2001). However, these studies have been mostly motivated by engineering applications and therefore have considered a driving by boundaries and not, as in our case, by a radial flow. The influence of a stable stratification, that we need to know to deal with radiative regions of stars, has been more seldom considered in astrophysically relevant geometries. The most relevant study is certainly the work of Friedlander (1976), who considered the spin-down of the radiative core of the Sun driven by Reynolds stresses at the interface of the convective and radiative regions. So, here too, the driving of the flows is by boundaries. Friedlander's model is much simplified (as is ours) as it uses the Boussinesq approximation (i.e. neglecting the compressibility of the fluid). It also neglects baroclinic flows associated with this set-up. This work however establishes that the spin-down (or spin-up) timescale of a stably stratified fluid is the classical Eddington-Sweet timescale, namely the product of the heat diffusion timescale (also known as Kelvin-Helmholtz time scale) and the factor $(\mathcal{N}/2\Omega)^2$, where $\mathcal{N}$ is the Brunt-Väisälä frequency in the radiative region and Ω is the rotation rate. In slowly rotating stars, the Eddington-Sweet timescale is much longer than the Kelvin-Helmholtz, but in fast rotators that are considered here, these timescales are similar. Hence, the spin-up driven by a gravitational contraction has never been considered in the literature as far as we know.

The first step of our analysis considers the case of a neutrally stratified envelope like that found in a star with an outer convection zone. The translation of this constant entropy medium into the incompressible fluid model is the simple constant density fluid. This simple model allows us to derive an asymptotic solution for small Ekman numbers (i.e. small viscosity as appropriate for stellar applications). This solution shows that the spinning up core controls the flow inside its tangent cylinder and gives the amplitude of the quasi-steady flow there. Outside the tangent cylinder we find that the solution depends very much on the outer boundary conditions. We analyse the rather artificial case where no-slip conditions are imposed on the outer boundary, since this case also allows for the derivation of an analytic asymptotic solution. Moreover, with these boundary conditions, we can also solve the case where the envelope is stably stratified (but not contracting) and derive the associated differential rotation forced by the baroclinic torque.

The competition between the two forcings (spin-up and baroclinicity) necessarily arises in the pre-main-sequence phase of an intermediate mass star. We indeed expect that for such a mass range, an outer radiative envelope sets in after the birth line, likely after the disappearance of convective flows (e.g. Maeder 2009).

With our simplified model we can appreciate the result of this competition. As a first step, still using the artificial no-slip outer boundary condition, we compare the amplitudes of the baroclinic flow and the contraction-driven spin-up flow when they are taken separately. This comparison gives us a criterion on the parameters of the star. Using numerical solutions of the full problem, including the two

forcing mechanisms simultaneously, we confirm the validity of the criterion.

Our next step is to leave aside the no-slip outer boundary condition and concentrate on the more realistic stress-free condition. In such a case, the derivation of an asymptotic analytic solution is much more involved and we had to resort to numerics. Numerical solutions show that outside the tangent cylinder of the core, a steady spin-up flow of an unstratified fluid driven by contraction has an amplitude that scales with the ratio of two small parameters, namely Ro/E, where Ro is the Rossby number measuring the driving and E is the Ekman number measuring the viscosity. With stellar parameters this ratio is expected to be larger than unity showing that a steady solution is necessarily of large amplitude. In addition, the time needed to reach such a steady state is roughly the contraction time, thus suggesting that this steady state is actually never reached. This result prompted us to study the transient state of the spin-up flow first without stratification and then account for a stable stratification in the envelope. Before the transient state reaches a significant amplitude, it can be studied with linear equations that are easier to solve. This transient flow shows the emergence of a quasi-self-similar solution that simply grows in amplitude in the volume outside the core's tangent cylinder. Since our original question is to discover whether such flow is able to supersede the baroclinic flow driven by the combination of rotation and stratification, we compared the two flows. The easy way is to compare the amplitudes of the flow taken separately and quite clearly we find that the contraction-induced spin-up rapidly overtakes the amplitude of a baroclinic flow. The numerical solution of the transient starting from an established baroclinic flow confirms this result.

We now present the detailed derivation of these fluid dynamics results. The astrophysical side of the problem is addressed in section 5.

2.3. Equations of motion

In an inertial frame, the dynamics of an incompressible fluid enclosed within the two shells is governed by the equations of momentum and mass conservation :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \nu\Delta\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

where $\boldsymbol{v}$ is the velocity field, P the pressure, and ν the kinematic viscosity of the envelope. Let us now remove the bulk rotation and set

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r} + \boldsymbol{w}\ . \tag{3}$$

We define $\boldsymbol{\Omega}$ as the angular velocity of the core. Since the field $\boldsymbol{v}$ is axisymmetric,

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w}$$

where we recognise the centrifugal and Coriolis accelerations. The centrifugal potential is gathered with the pressure into Π. Substituting (3) in the set of equations (2), we find that the relative velocity $\boldsymbol{w}$ verifies

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{\nabla}\Pi + \nu\Delta\boldsymbol{w} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w} = 0\ . \end{array} \right. \tag{4}$$

Note that the RHS-term now depends on the acceleration of the rotation rate of the core $-\dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}$ where $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ needs to be determined.

2.4. Scaled equations and linearization

We scale the equations using the Kelvin-Helmholtz timescale $\frac{R}{V_s}$, which is the timescale of the complete absorption of the envelope by the core. The length scale R is the outer radius of the envelope, and the velocity scale is the suction velocity $\boldsymbol{w} = V_s\boldsymbol{u}$. The system (4) now reads

$$\left\{ \begin{array}{c} Ro\frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau} + \boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}p + E\Delta\boldsymbol{u} - \dot{\omega}\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

where p is the reduced pressure. The following dimensionless numbers appear:

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{\Omega}R}{2\Omega V_s},\quad Ro = \frac{V_s}{2\Omega R},\quad E = \frac{\nu}{2\Omega R^2}\ . \tag{6}$$

Here we introduced the non-dimensional acceleration of the core rotation rate $\dot{\omega}$, a Rossby number Ro and the Ekman number E, which measures the viscosity of the envelope.

Obviously, the suction velocity is very small compared to the rotation velocity. Hence, we expect $Ro \ll 1$. As a first step setting $Ro = 0$ seems reasonable as long as $Ro\,u$ is less than unity (so as to be able to neglect quadratic terms). Thus, we are left with a steady state problem that describes the quasi-steady evolution of the system as long as the non-dimensional time τ verifies:

$$Ro \ll \tau \ll \tau_s \tag{7}$$

where $\tau_s = \frac{\eta\tilde{\rho}}{3}$ is the scaled suction time ($\eta = \frac{R_{core}}{R}$ is the scaled inner radius). The left part of the inequality $\tau \gg Ro$ means that we neglect the transients corresponding to a few rotation periods where boundary layers form. Likewise, $\tau \ll \tau_s$ means that the rotation rate has not been changed, namely that $\dot{\Omega}t \ll \Omega$.

2.5. The acceleration of the core

2.5.1. General equation

Equation 5 need the expression of $\dot{\omega}$. By absorbing the envelope, the mass of the core grows, as its angular momentum. Evolution of the angular momentum L_z of the core is governed by

$$\frac{dL_z}{dt} = \boldsymbol{e}_z\cdot\{-\int_{(S)}(\boldsymbol{r}\wedge\rho\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{dS} + \int_{(S)}\boldsymbol{r}\wedge[\sigma]\boldsymbol{dS}\}\ . \tag{8}$$

The first integral is the flux of incoming angular momentum and the second integral is the viscous torque applied on the core surface. The tensor $[\sigma]$ is the stress tensor. We find

$$\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{r}\wedge[\sigma]\boldsymbol{e_r}) = r\sin\theta\sigma_{r\phi} = r\sin\theta\rho\nu\left.\frac{\partial w_\phi}{\partial r}\right|_{r=R_{core}}\ . \tag{9}$$

Besides, for a sphere of mass M_{core} and radius ηR :

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{5}M_{core}(\eta R)^2\boldsymbol{\Omega}\ . \tag{10}$$

With the previous scaling, we obtain

$$\begin{aligned} M_{core}\dot{\Omega} &= \tfrac{8\pi}{3}\Omega\rho V_s(\eta R)^2 \\ &+ 5\pi\nu\rho V_s\eta\int_0^\pi \sin^2\theta\,\frac{\partial u_\phi}{\partial r}\bigg|_{r=\eta} d\theta\,. \end{aligned} \tag{11}$$

The evaluation of the remaining integral needs the expression of the azimuthal flow u_ϕ at the core-envelope boundary $r=\eta$, namely in the Ekman boundary layers.

2.5.2. Boundary layer analysis

First of all, we change the boundary conditions with mass flux to ordinary boundary condition by making the substitution

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u'} - \frac{\eta^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r\,.$$

The new velocity field $\boldsymbol{u'}$ verifies

$$\left\{\begin{array}{rl} \boldsymbol{\nabla}\wedge\{\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{u'} - E\Delta\boldsymbol{u'}\} &= 2(\frac{\eta^2}{r^3}-\dot{\omega})\cos\theta\boldsymbol{e}_r \\ &+ (\frac{\eta^2}{r^3}+2\dot{\omega})\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u'} &= 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

with the boundary conditions

$$\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on} \qquad r=\eta$$

and

$$\boldsymbol{e}_r\times[\sigma]\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}, \qquad \text{and} \qquad u_r' = 0 \qquad \text{on} \qquad r=1\,.$$

These latter conditions describe stress-free boundary conditions. Indeed, we assume that the upper layers outside the outer shell have unimportant dynamic effects and are just providing/absorbing some mass. In the following, we drop the prime on the velocity field.

As shown in Espinosa Lara & Rieutord (2013), the Ekman number in stars is always very small thus leading to the formation of boundary layers near the boundaries. To derive the expression of the flow, we therefore examine the asymptotic case $E \ll 1$. We first note that if we consider the inviscid case $E=0$, the set of equations (12) is solved by

$$\left\{\begin{array}{rl} \bar{u}_r &= \frac{\eta^2}{r^2} + r\dot{\omega}\left(2-3\sin^2\theta\right) \\ \bar{u}_\theta &= -3r\dot{\omega}\sin\theta\cos\theta\,. \end{array}\right. \tag{13}$$

In the azimuthal direction, we look for a flow such as $\bar{u}_\phi = U(s)\boldsymbol{e_\phi}$ as dictated by the Taylor-Proudman theorem (e.g. Greenspan 1969). Such a flow does not verify the no-slip boundary conditions at the interface $r=\eta$. It needs boundary layer corrections so as to satisfy $\bar{u}_0+\widetilde{u}_0=0$. The bar refers to the solution within the envelope i.e. outside the boundary layer and tilded quantities are for boundary layer corrections.

Following Rieutord (2006a), we write the boundary layer corrections as:

$$(\boldsymbol{n}\wedge\widetilde{u}_0 + i\widetilde{u}_0) = -(\boldsymbol{n}\wedge\bar{u}_0 + i\bar{u}_0)_{\alpha=0}\exp\left(-(1-i)\alpha\right) \tag{14}$$

where $\alpha = (r-\eta)\sqrt{\dfrac{|\cos\theta|}{2E}}$ and $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_r$. We keep only the decreasing solution. The corrections thus read

$$\left\{\begin{array}{rl} \widetilde{u}_\theta &= -U(\eta\sin\theta)\,\sin\alpha\,e^{-\alpha} \\ \widetilde{u}_\phi &= -U(\eta\sin\theta)\,\cos\alpha\,e^{-\alpha}\,. \end{array}\right. \tag{15}$$

As in Rieutord (2006a), mass conservation gives the relation between the Ekman pumping $\widetilde{u}_r$ and the geostrophic flow U. It yields

$$1+(2-3\sin^2\theta)\eta\dot{\omega} = \frac{1}{\eta\sin\theta}\sqrt{\frac{E}{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\,U(\eta\sin\theta)}{\sqrt{|\cos\theta|}}\right) \tag{16}$$

where we keep only $\mathcal{O}(\sqrt{E})$ terms. Integrating with respect to θ, we find

$$U(\eta\sin\theta) = \eta\sqrt{\frac{2}{E}}\frac{\sqrt{|\cos\theta|}}{\sin\theta}\left(1-\cos\theta+\eta\dot{\omega}\cos\theta\sin^2\theta\right)\,. \tag{17}$$

Note that this expression defines U only within the tangent cylinder of the core defined as $s = r\sin\theta = \eta$ (s is the radial cylindrical coordinate).

Near the surface $r=\eta$ i.e. within the boundary layer, the shear is dominated by the boundary layer correction. It simplifies the computation of the radial derivative of the azimuthal flow u_ϕ which reads

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial r} = \frac{\eta}{E}|\cot\theta|\left(1-\cos\theta+\eta\dot{\omega}\cos\theta\sin^2\theta\right)\,. \tag{18}$$

Integral in (11) can now be evaluated:

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\,\frac{\partial u_\phi}{\partial r}\bigg|_{r=\eta} d\theta = \eta\frac{2}{3E}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\eta\dot{\omega}\right)\,. \tag{19}$$

We can now derive the acceleration of the angular velocity of the core. Considering quasi-steady solutions that arise when $Ro \ll \tau \ll \tau_s$, (11) leads to

$$\dot{\omega} = \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta}\,, \tag{20}$$

which completes the equations (12).

The foregoing solution (17) shows that the differential rotation driven by the mass contraction scales as $\mathcal{O}(E^{-1/2})$. It means that the linear regime that we solved is valid only when $Ro \ll \sqrt{E}$, which is actually the case (see below). The foregoing solution however describes the fluid flow only within the tangent cylinder of the core.

Outside the cylinder, the solution depends on the outer boundary conditions and on the Stewartson layer that lies upon the cylinder. This makes the global solution quite involved, all the more that we should also account for a possible stable stratification of the envelope. Indeed, during the PMS phase of intermediate mass stars, the envelope is completely radiative. Therefore the contraction-induced differential rotation competes with the differential rotation induced by the baroclinicity of the envelope.

Before getting any further, we need to evaluate stellar numbers that have appeared.

2.6. Orders of magnitude

As a test case of the foregoing problem, we first consider the contraction of a fully radiative 3 $M_\odot$ PMS star. On the birthline, the star's surface temperature is around $T_* \sim 5600K$, its luminosity $L_* \sim 10^2 L_\odot$ and its radius is $R_* \sim 10^{10}$m. The young star contracts on the Kelvin-Helmholtz time upon the PMS (Henyey) track, namely:

$$t_{\rm KH} = \frac{GM^2}{RL} \ ,$$

according to Maeder (2009). This leads to $t_{\rm KH} \sim 2.6\ 10^5$yr.

Setting arbitrarily $R_{\rm core} = 0.15R_*$, we find $V_s \sim 6 \times 10^{-5}$m.s^{-1}. Considering a rotation velocity of 10 km/s (such that near the end of the PMS after a gravitational contraction at constant angular momentum we obtain a star like HD 37806 studied by Boehm & Catala 1995), we find a Rossby number

$$Ro \sim 3 \times 10^{-9}$$

that is very small as expected.

The estimate of the Ekman number requires a value of the kinematic viscosity. If we use Zahn's prescription (Zahn 1992) for a turbulent viscosity, we obtain $\nu \sim 10^4$ m^2·s^{-1} and thus

$$E \sim 10^{-10} \ .$$

With the radiative viscosity (e.g. Espinosa Lara & Rieutord 2013), $\nu \sim 10^2$ m^2·s^{-1}, we get

$$E \sim 10^{-12} \ .$$

For both values the condition $Ro \ll \sqrt{E}$ is satisfied.

During the contraction, the quasi-steady state within the cylinder is reached after a spin-up time, namely after $\frac{(2\Omega)^{-1}}{\sqrt{E}}$. Using the previous numbers, we find that this state occurs after $\sim 10^3$ or 10^4 years so rather soon after the start of contraction. Therefore, within the tangent cylinder, we can neglect the transient phase.

If we consider the contracting envelope of a Jupiter-like giant planet, Ekman numbers are also very small although with larger uncertainties: Ogilvie & Lin (2004) give $E \sim 10^{-7}$ while Wu (2005) suggest $E \sim 10^{-13}$. The typical contraction time of giant planets is over 1 Gyrs (Fortney & Nettelmann 2010) so that $Ro \sim P_{\rm rot}/t_{\rm contraction} \sim 10^{-12}$. The condition $Ro \ll \sqrt{E}$ is also easily satisfied.

2.7. Adding stratification

2.7.1. Scaled equations

To account for a stable stratification in the envelope, we now generalize the set of equations (12) by taking the buoyancy force and the equation for temperature fluctuations into account. In PMS stars, the stable stratification of the envelope may come after a convective episode and thus may be evolving with time. To simplify and get an upper bound on the effects of stratification we impose the Brunt-Väisälä frequency as constant in time.

To be consistent with the foregoing model that uses an incompressible fluid we use the Boussinesq approximation. Following Rieutord (2006a) and combining with (12) we find

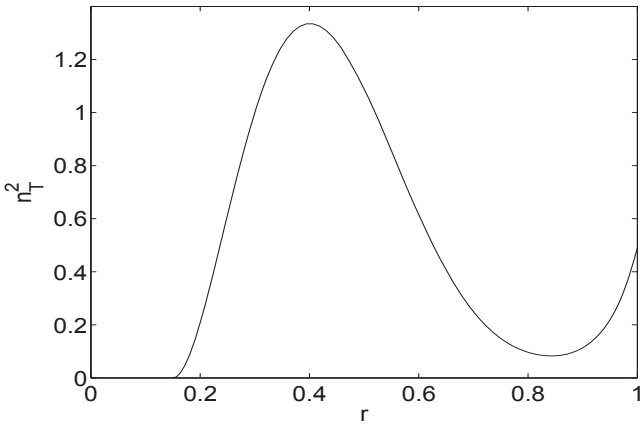


Figure 1. The typical and scaled Brunt-Väisälä frequency profile as a function of the normalized radius with $\eta = 0.15$.

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{u} - B\theta_T\boldsymbol{r} - E\Delta\boldsymbol{u}) = -Bn_T^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ -2(\frac{\eta^2}{r^3}+\dot\omega)\cos\theta\boldsymbol{e}_r + (\frac{\eta^2}{r^3}+2\dot\omega)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ \\ (n_T^2/r)u_r = B\tilde{E}_T\Delta\theta_T \\ \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \ . \end{array}\right. \tag{21}$$

We use the same scales and notations as Rieutord (2006a). The temperature perturbation is scaled as $\delta T = \epsilon T_* \theta_T$ where $\epsilon = \frac{\Omega^2 R}{g_s}$ is the ratio of centrifugal acceleration to surface gravity. Recall that the centrifugal acceleration is driving the baroclinic flow. The Brunt-Väisälä profile n_T^2 is scaled with $\mathcal{N}^2 = \frac{\alpha T_* g_S}{R}$ where α is the dilation coefficient and g_s the surface gravity.

The dimensionless number B monitors the ratio of the forcings. From the expression of the scaling of the baroclinic flow (see Rieutord 2006a), we have

$$B = \frac{\epsilon\mathcal{N}^2 R}{2\Omega V_s} \ . \tag{22}$$

Finally, the dimensionless number

$$\tilde{E}_T = \frac{E}{\lambda} \qquad \text{with} \quad \lambda = \mathcal{P}\frac{\mathcal{N}^2}{4\Omega^2} \tag{23}$$

measures heat diffusion. The dimensionless number $\mathcal{P}$ is the Prandtl number. For fast rotators, λ is a small parameter that we set to 10^{-4}, following the estimate of Rieutord & Beth (2014).

Based on stellar models, a typical profile of the Brunt-Väisälä frequency is shown in Fig. 1. We use the polynomial expression

$$\left\{\begin{array}{lcl} n_T^2(r) &=& 0 \text{ if } r < \eta \\ \\ n_T^2(r) &=& (\alpha(r-\eta)+\beta(r-\eta)^2+\gamma(r-\eta)^3)^2 \text{ if } r\in[\eta;1] \end{array}\right. \tag{24}$$

to represent this function. The coefficients α, β and γ result from the polynomial fit.

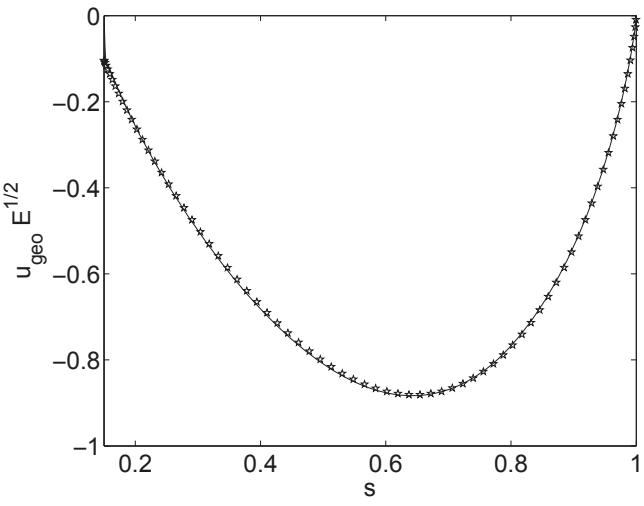


Figure 2. Comparison between numerical (solid line) and analytical (star line) solutions of the geostrophic flow at the equator $u_\phi(r, \theta = \frac{\pi}{2})$ for $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$, $\tilde{\rho} = 10$ without stratification when the envelope is rigidly rotating at the same rate as the inner one.

3. An interesting solution with rigid outer boundary conditions

Before getting into the full numerics, it is interesting to consider the case where the outer bounding sphere of the envelope is rigidly rotating at the same rate as the inner core. Outer no-slip conditions can be expected if a turbulent layer threaded by magnetic fields covers the stellar surface (see Rieutord & Beth 2014), however the synchronism between this layer and the surface is here an ad hoc assumption (which can be easily removed). The interesting point that is addressed below comes from the simple analytical solution that can be derived for the flow outside the tangent cylinder and offers an interesting view of the properties of the system.

3.1. The steady mass contraction induced flow

With no-slip conditions on the outer boundary $r = 1$, we may easily derive the expression of the geostrophic flow[1] out of the tangent cylinder of the core. When no stratification is present, the azimuthal velocity reads

$$U(s) = \sqrt{\frac{2}{E}}(1-s^2)^{3/4}\left(\frac{\eta^2}{s} - \dot{\omega}s\right) \qquad s \geq \eta\,. \tag{25}$$

As shown in Fig. 2, this analytical solution nicely matches the numerical solution.

[1] A geostrophic flow is a steady flow that realizes the perfect balance between the Coriolis force and the pressure gradient. As a consequence, it does not depend on the coordinate parallel to the rotation axis (Taylor-Proudman theorem) and behaves as a columnar flow.

3.2. The steady baroclinic flow

Let us now consider the opposite case where a pure baroclinic flow (no contraction) meets no-slip boundary conditions. It verifies

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{u} - B\theta_T\boldsymbol{r} - E\Delta\boldsymbol{u}) = -Bn_T^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ (n_T^2/r)u_r = B\tilde{E}_T\Delta\theta_T \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0\,. \end{array}\right. \tag{26}$$

As shown in Rieutord (2006a), neglecting temperature perturbations and viscosity, the $\phi-$component of the vorticity equation (26) leads to

$$\left\{\begin{array}{l} u_\phi \;=\; -sB\int_r^1 \frac{n^2(r)}{r}dr + F(s) \\ \theta_T \;=\; 0 \end{array}\right. \tag{27}$$

where $F(s)$ is a geostrophic solution determined by the boundary conditions. In order to get the expression of $F(s)$, we write

$$\bar{u}_0 = \left(-sB\underbrace{\int_r^1 \frac{n^2(r)}{r}dr}_{g(r)} + F(s)\right)\boldsymbol{e}_\phi \tag{28}$$

and look for the boundary layer corrections at $r = 1$. These are

$$\widetilde{u}_0 = \mathcal{I}m\{-(\boldsymbol{e}_r\wedge\bar{u}_0 + i\bar{u}_0)_{r=1}e^{-\alpha(1+i)}\}$$

where $\alpha = (1-r)\sqrt{\frac{|\cos\theta|}{2E}} = \zeta\sqrt{\frac{|\cos\theta|}{2}}$. Using (27) with the foregoing expression yields

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{u}_\theta = -(-\sin\theta Bg(1) + F(\sin\theta))\sin\alpha e^{-\alpha} \\ \widetilde{u}_\phi = -(-\sin\theta Bg(1) + F(\sin\theta))\cos\alpha e^{-\alpha}\,. \end{array}\right. \tag{29}$$

We note that $g(1) = 0$. Mass conservation implies

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\widetilde{u}_r}{\partial\zeta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\widetilde{u}_\theta)}{\partial\theta} \tag{30}$$

so that

$$\widetilde{u}_r(1) = -\frac{\sqrt{E}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\int_\zeta^\infty \widetilde{u}_\theta d\zeta\right)\,. \tag{31}$$

Since $\tilde{u}_r + \overline{u}_r = 0$ at $r = 1$, we finally find

$$-\bar{u}_r(r=1) = \sqrt{\frac{E}{2}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}F(\sin\theta)\right)\,. \tag{32}$$

However, the radial component of the vorticity equation (or the angular momentum equation) in the interior leads to

$$\sin\theta\overline{u}_r + \cos\theta\overline{u}_\theta = E\Delta'\overline{u}_\varphi\,.$$

Here $\overline{u}_\varphi = -sBg(r) + F(s)$ so that consistency of the solution with (32) requires that

$$F \equiv \mathcal{O}(B\sqrt{E})\,.$$

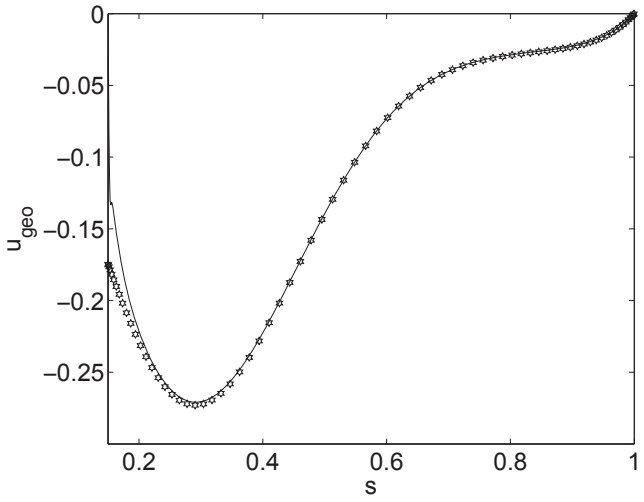


Figure 3. Comparison between numerical (solid line) and analytical (stars) solutions of the geostrophic flow at the equator $u_\phi(r, \theta = \frac{\pi}{2})$ for $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$, $\tilde{\rho} = 10$, $B = 1$, and $\lambda = 10^{-4}$ without mass contraction.

It means that in the limit of vanishing Ekman numbers the function F can be neglected. Therefore, at leading order, the envelope differential rotation is dominated by the shellular flow :

$$\bar{u}_\phi = -sB \int_r^1 \frac{n^2(x)}{x} dx = -sBg(r) \ .$$

Fig. 3 shows the comparison of the analytical solution $-sBg(r)$ with the numerical solution at the equator $\theta = \frac{\pi}{2}$. The difference on the left edge comes from the fact that $g(\eta)$ is not zero and would require an additional boundary layer correction.

3.3. Transition between the two steady flows: the baroclinic flow versus that induced by mass contraction

When gravitational contraction occurs in a baroclinic envelope, two drivings compete: the baroclinic torque and that induced by mass contraction. For a global view of this competition we resort to numerical solutions. The numerical method is detailed in appendix. The global problem is the superposition of the two flows: the flow induced by mass contraction (25) and the baroclinic flow (27). Since the system is linear, the full solution is a linear combination of both. At the equator it reads

$$u_\phi(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2}{E}}(1 - r^2)^{3/4} \left(\frac{\eta^2}{r} - \frac{9}{4\tilde{\rho}\eta} r \right) - rB \int_r^1 \frac{n^2(r)}{r} dr \ . \quad (33)$$

From the foregoing equation, we see that the differential rotation is governed by baroclinicity when

$$B \gg E^{-1/2} \ . \quad (34)$$

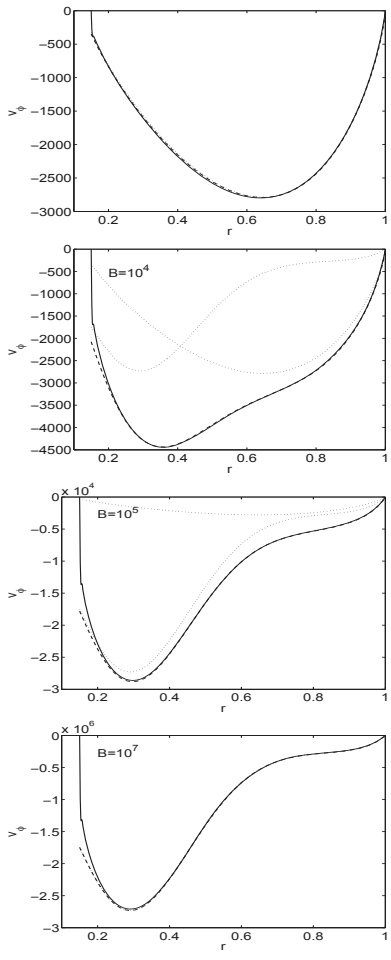


Figure 4. Evolution of the azimuthal velocity $u_\phi(r, \theta = \frac{\pi}{2})$ for $\eta = 0.15$, $\tilde{\rho} = 10$, $E = 10^{-7}$, $\lambda = 10^{-4}$, and $B = 0, 10^4, 10^5, 10^7$ (downward). The solid line is the numerical solution, the dashed line is the full analytical solution, and the two dot lines are the solutions of each flow. The transition is at $B = 10^4$, the differential rotation is then governed by baroclinicity as shown in Fig. 5. Boundary conditions are no-slip on both sides $r = \eta$ and $r = 1$.

It is shown in Fig. 4. However, we also know (from the angular momentum flux balance of a steady flow, see Rieutord 2006a) that the meridional circulation associated with baroclinic flows is $\mathcal{O}(BE)$, while the meridional circulation of the contraction-induced spin-up is $\mathcal{O}(1)$. Hence, a baroclinic flow completely controls the dynamics as long as $BE \gg 1$. Note that this inequality implies (34) since $E \ll 1$. When the spin-up strengthens, the foregoing inequalities predict an intermediate regime

$$E^{-1/2} \ll B \ll E^{-1} \quad (35)$$

where the differential rotation is of baroclinic origin ($BE^{1/2}$) but the meridional circulation is driven by contraction ($BE \ll 1$). Finally, when $BE^{1/2} \ll 1$, the flow is fully controlled by the contraction induced spin-up.

This two step transition is confirmed by numerical solutions as illustrated in Fig. 5 and Fig. 6. There, for a given E, B is progressively increased and we clearly see the inter-

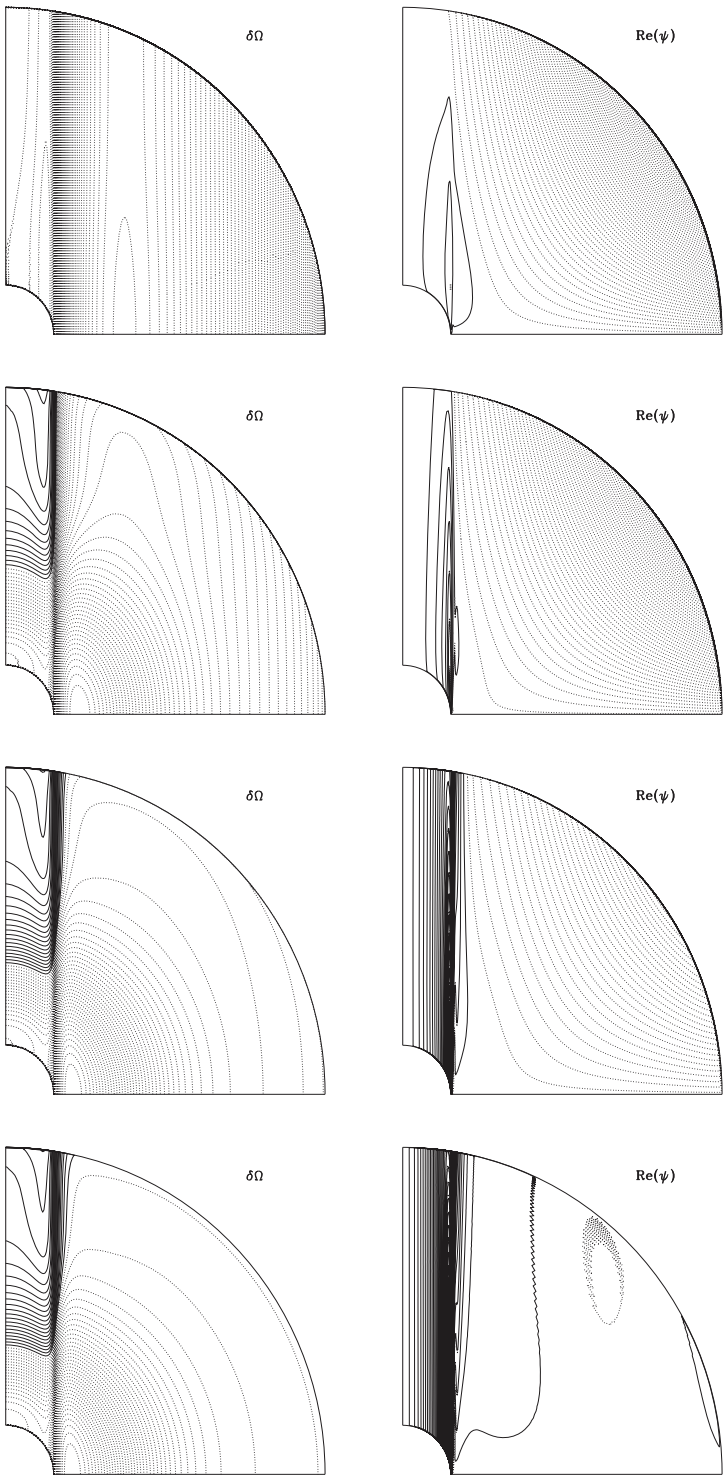


Figure 5. Evolution of the differential rotation $\delta\Omega$, the meridional circulation ψ for $\eta = 0.15$, $\tilde{\rho} = 10$, $E = 10^{-7}$, $\lambda = 10^{-4}$, and $B = 0, 10^4, 10^5, 10^7$ (downwards). In the first column, difference in differential rotation is shown with contours: solid contours are faster than the core and dashed contours are slower than the core. When the spin-up flow dominates the differential rotation we obtain a fast equator while baroclinicity induces a fast pole. In the second column, meridional circulation is described with dotted lines for clockwise circulation (solid lines for counter-clockwise circulation). Boundary conditions are no-slip on both sides $r = \eta$ and $r = 1$.

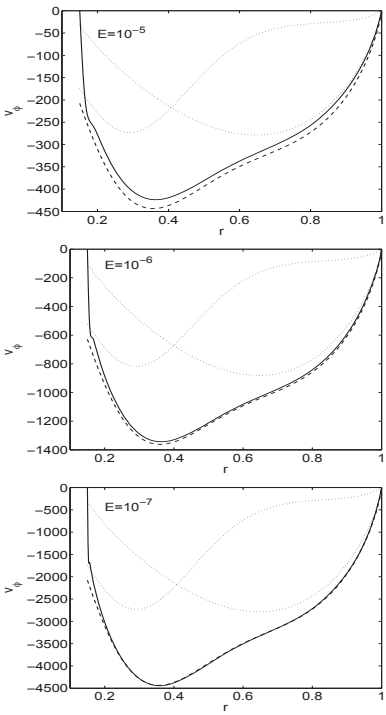


Figure 6. The azimuthal velocity u_ϕ as a function of the normalized radius for $\lambda = 10^{-4}$, $\eta = 0.15$, and $\tilde{\rho} = 10$. The solid line is the numerical solution, dotted lines are the analytical solutions of the spin-up flow and the baroclinic flow, the dashed line is the sum of both. Downwards: $E = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ and the transition value on the differential rotation is $B = 10^3, 3.10^3, 10^4$, respectively. Beyond this threshold, the baroclinicity governs the differential rotation. Boundary conditions are no-slip on both sides $r = \eta$ and $r = 1$. Note that as the Ekman number decreases, the discrepancy between the numerical and the analytical solutions decreases as well.

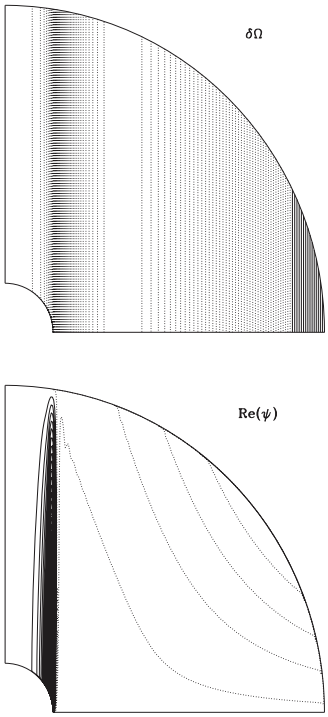


Figure 7. Differential rotation and meridional circulation for $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.15$, and $\tilde{\rho} = 10$ for an unstratified configuration. For $\delta\Omega$, dashed (resp. solid) lines represent rotation slower (resp. faster) than the core. For ψ, dotted (resp. solid) lines are for clockwise (counter-clockwise) circulation. Boundary conditions are no-slip at $r = \eta$ and stress-free at $r = 1$.

mediate regime where differential rotation and meridional circulation are of different origin (third row).

4. The case of stress-free boundary conditions

The outer layers of the envelope are not rigidly attached to the core. Therefore the use of outer stress-free boundary conditions is more realistic. In this case, however, we no longer have access to an analytical expression of the flow in the envelope and have to resort to numerical solutions.

4.1. Scaling the steady mass contraction induced flow

Let us first study the steady solution of the spin-up flow. As shown in Fig. 7, it exhibits the typical cylindrical differential rotation of a dominating mass contraction flow. The equatorial surface region rotates faster than the core and the pole is slower. The meridional circulation displays two cells with a strong Stewartson layer at $s = \eta$ (compared with the previous with no-slip conditions).

In Fig. 8, we show the amplitudes of the mass contraction flow at two positions: inside and outside of the tangent cylinder. Since the boundary conditions on the core are no-slip, the flow within the tangent cylinder is expected to be $\mathcal{O}(E^{-1/2})$ according to expression (17). For small cores $\eta = 0.15$ or 0.25, numerical solutions show that the Stewartson layer impacts the interior of the tangent cylinder and that the asymptotic state is reached only at extremely small values of the Ekman number $E \leq 10^{-8}$. When the core is bigger, for instance $\eta = 0.5$, the $E^{-1/2}$ scaling inside the tangent cylinder clearly appears for all Ekman numbers less than 10^{-5}.

Outside the tangent cylinder, numerics show that the differential rotation is always $\mathcal{O}(E^{-1})$ when the outer boundary conditions are stress-free. This important amplitude indicates that the steady state may not be reached during the contraction phase and may not be studied with linear equations since quadratic terms are expected to be important, namely $\mathcal{O}(\frac{Ro}{E^2})$.

4.2. The transient phase

The large amplitude of the steady state outside the tangent cylinder forces us to consider the time evolution of the solution of the mass contraction induced flow. To do so, we solve the set of equations (5) with an order one implicit scheme (Euler's method) so as to eliminate inertial waves and concentrate on secular evolution.

In Fig. 9, we plot a proxy of the amplitude of the differential rotation for various Ekman numbers and for no-slip and stress-free outer boundary conditions. With no-slip

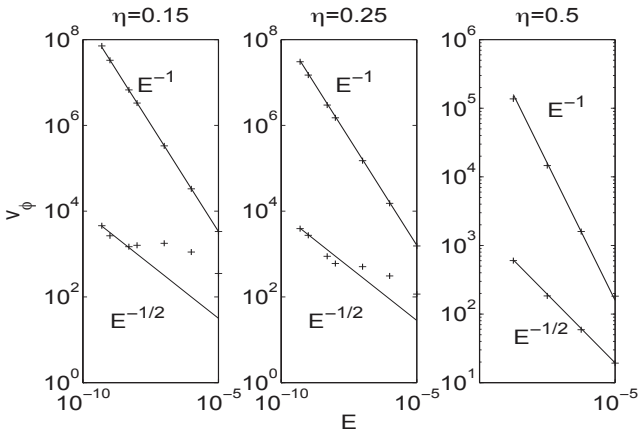


Figure 8. Logarithm of the absolute value of the amplitude of the numerical azimuthal velocity as a function of the logarithm of the Ekman number at $z = 0.5$. The left pannel is for $\eta = 0.15$, the middle one is for $\eta = 0.25$ and the right one for $\eta = 0.5$. Inside the tangent cylinder, measures were taken respectively at the points $s = 0.1, 0.2, 0.25$, the azimuthal velocity scales around $E^{-1/2}$. It is proportional to E^{-1} within the envelope $s = 0.65$. Note that the azimuthal velocity is mainly negative for small cores and positive for bigger cores like $\eta = 0.5$.

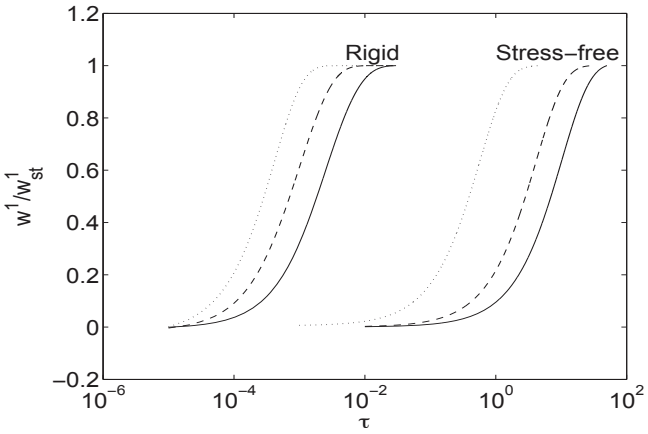


Figure 9. Time evolution of the major component of the azimuthal velocity $w^{l=1}$ normalized by its steady solution $w_{\rm st}^{l=1}$ as a function of non-dimensional time with $E = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (the dot, the dashed, and the solid line, respectively) and $Ro = 10^{-6}$ at the radius $r = 0.88$. On the left side are the solutions with rigid boundary conditions on both sides and on the right side the solutions with stress-free boundary conditions on the outer. In the first case, the steady state is reached in a time smaller than the dimensionless time of contraction, while in the second case this time is longer and scales as $E^{-0.86}$.

conditions, we see that the steady spin-up flow is quickly established and justifies the use of a steady solution. On the contrary, the use of outer stress-free boundary conditions leads to a much longer transient flow that lasts more than the typical timescale of the driving by gravitational contraction.

To go further it is interesting to characterize this transient flow with respect to the parameters of the problem. From the numerical solution we find that the transient duration $\tau_{\rm sf}$ scales like

$$\tau_{\rm sf} \propto RoE^{-0.86} \, . \tag{36}$$

This scaling of the Ekman number is very close to $E^{-6/7}$, which is reminiscent of one of the scalings of the Stewarston layer in the spherical Couette flow (see Stewartson 1966). In these layers that surround the core along the tangent cylinder, a typical thickness is $E^{2/7}$. This might control the amplitude of the flow outside the tangent cylinder when stress-free outer conditions are met. The analysis of the Stewartson layer associated with this transient flow is difficult and beyond the scope of the present work.

Another remarkable property of the transient flow is its approximate self-similarity. Its spatial shape remains almost unchanged, while its amplitude grows as time passes. The associated differential rotation is parallel to the z-axis as shown in Fig.10. Its amplitude grows according to the time profile displayed in Fig.9. This time dependence can be approximated as

$$\frac{A}{E}(1 - e^{-\tau \ln 10/\tau_{\rm sf}}) \tag{37}$$

where A is a constant of order unity.

The foregoing result may be translated in the stellar case. It shows that a contracting, fully convective star, may reach a self-similar spin-up flow with cylindrical rotation. Neglecting viscous force (in fact Reynolds stresses), we may expect that substituting $\rho\boldsymbol{v}$ to the foregoing incompressible velocity field, we can get an good representation of the actual flow in a compressible envelope. This is supported by the fact that the geostrophic balance is unchanged in this case. Of course, this conjecture has to be verified by the study of the compressible case.

4.3. Transient phase and stratification

During the contraction of a star on the PMS, a radiative envelope progressively takes the place of an initial convective envelope when the star is massive enough. This radiative envelope is stably stratified and without any extra-forcing from gravitational contraction it would relax to the steady baroclinic state that we mentioned before.

One question is therefore whether the contraction induced spin-up is strong enough to overwhelm the foregoing baroclinic flows that are themselves transient flows. To get an idea of the result, we may use the amplitude of a steady baroclinic flows as an upper limit of the actual flows. From this perspective, we can use the results of Espinosa Lara & Rieutord (2007) and Espinosa Lara & Rieutord (2013) who showed that the baroclinic flow in a radiative envelope is characterized by a differential rotation that is typically 15% of the bulk rotation. Let us assume that the maximum amplitude of the baroclinic flow reads

$$V_b = kV_{\rm eq}$$

where $k \lesssim 0.2$. During the phase of gravitational contraction the spin-up flow grows according to (37). At some time τ_c, the spin-up flow overwhelms the baroclinic flow. At such time we have

$$\frac{A}{E}(1 - e^{-\tau_c \ln 10/\tau_{\rm sf}}) = \frac{V_b}{V_s}$$

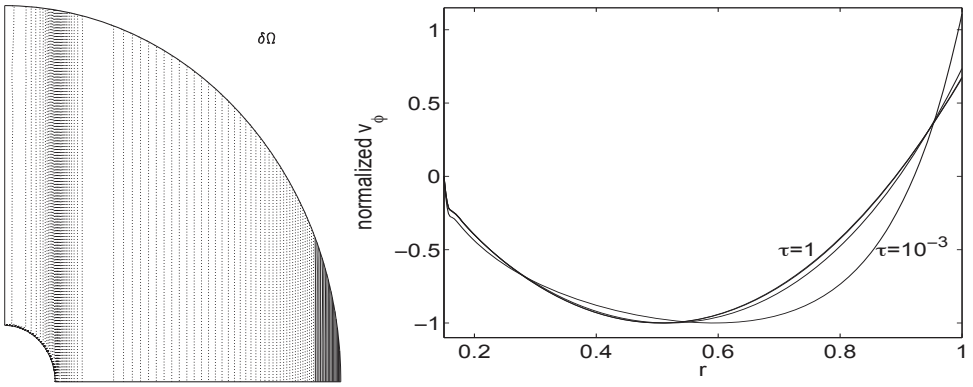


Figure 10. Left: the differential rotation associated with the transient phase of a spin-up induced by mass contraction for $E = 10^{-6}$ and $Ro = 10^{-6}$ at time $\tau = 0.02$. Dashed (solid) lines represent rotation slower (faster) than the core. Right: the profile of the corresponding azimuthal velocity in the equatorial plane as a function of the normalized radius for various times. The curves are scaled by the absolute value of the amplitude at the minimum.

with $V_s \sim R/t_{\rm KH}$, $t_{\rm KH}$ being the Kelvin-Helmholtz time of the star. Hence,

$$\frac{\tau_c}{\tau_{\rm sf}} \sim -\log\left(1 - \frac{EV_b t_{\rm KH}}{AR}\right) . \qquad (38)$$

Using numbers of a typical 3 $M_\odot$ star on the birthline, we find that

$$\frac{EV_b t_{\rm KH}}{AR} = \frac{k}{2A}\frac{\nu GM^2}{R^3 L} \lesssim 10^{-4} .$$

This small ratio indicates that $\tau_c \ll \tau_{\rm sf}$ so that the contraction-induced flow overwhelms the baroclinic flow during the linear growth of the transient flow (37). Hence, from (36) we obtain

$$\tau_c \sim \frac{E^{0.14} Ro}{A}\frac{V_b t_{\rm KH}}{R} .$$

With the definition of Ro and V_b it turns out that

$$\tau_c \sim \frac{k}{2A} E^{0.14} .$$

Because of the very small value of the Ekman number, τ_c is clearly less than unity showing that the spin-up flow will in the end take over the baroclinic flow, likely much before this latter flow can be established.

We verified this conclusion with a numerical simulation integrating the spin-up flow from a pre-existing baroclinic flow driven by a fixed stable stratification. In Fig. 11, we show the time evolution of the azimuthal velocity in the equatorial plane of the star. This describes the transient phase from a steady baroclinic flow to a growing spin-up flow. The transition between the two flows happens between $\tau = 10^{-3}$ and $\tau = 10^{-2}$. This is less than $\tau_c \sim 0.2$ (at $E = 10^{-5}$), namely less than our first evaluation obtained by a comparison of the amplitudes of the flows (see Eq. 38). The parameters have been chosen such that $BE \ll 1$, as expected in real situations. The time τ_c therefore appears as a good indicator of the time needed by spin-up to overwhelm baroclinic flows. Let us finally note that, once the spin-up flow is settled, the flow remains approximately self-similar for at least 80% of the Kelvin-Helmholtz time.

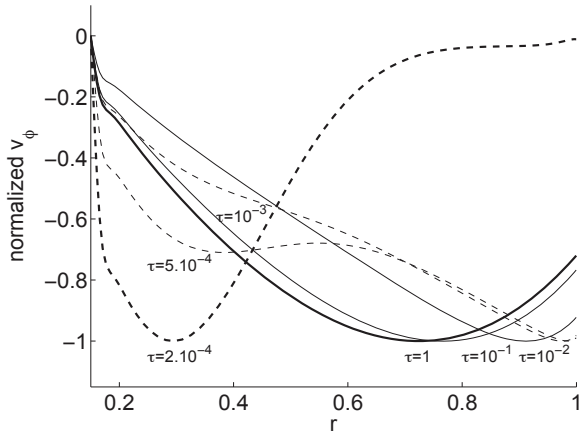


Figure 11. Radial profiles taken at various times of the azimuthal velocity in the equatorial plane of the star for $E = 10^{-5}$, $B = 10^2$, $\epsilon = 10^{-7}$, $\lambda = 10^{-4}$, and $Ro = 10^{-5}$. Profiles are scaled as in Fig. 10. The dimensionless time τ is specified for each curve. Dashed lines are profiles for baroclinicly dominated dynamics while solid lines are for spin-up dominated dynamics. The dashed bold curve shows the initial profile and the solid bold curve shows the last profile.

5. Discussion and conclusions

The gravitational contraction that occurs before or after the main sequence strongly influences the rotation rate of the stars and their internal dynamics. In the foregoing study, we have investigated the consequences of the combination of rotation and gravitational contraction with a very simplified model to decipher this complicated dynamics and be prepared for the construction of more elaborated models of rotating stars like the ESTER (For the French: Evolution STellaire En Rotation, in English: stellar evolution in rotation) models of Espinosa Lara & Rieutord (2013).

Thus, to the compressible gas of the star, we substituted an incompressible fluid that may also be stably stratified. Schematically, the bell-shaped profile of the star density is replaced by a step function delineating a central core that absorbs matter from the envelope as the star contracts. The

size of the core is small and arbitrary. The envelope is either neutrally or stably stratified.

During PMS contraction, the stellar envelope of an intermediate-mass star usually passes from a convective to a radiative state. But the radiative state is stably stratified. The combined effect of rotation and stable stratification drives a baroclinic flow that may contest a pre-existing spin-up flow built up during a previous convective phase of the envelope. The question is which of these flows will govern the dynamics of the contracting star and finally determine the initial conditions of the dynamics on the main sequence.

Using our simplified model we compared the strength of these two flows and found that although contraction is slow, the induced spin-up controls the large-scale flows of the outer envelope, namely its differential rotation and meridional circulation. Moreover, our model underlines the role of the outer boundary conditions and shows that with realistic stress-free conditions we should expect an unsteady flow. In addition, it shows that this transient flow keeps a self-similar shape during its growth (if we omit boundary layers).

When the star reaches the main sequence, the contraction turns off and the flows in the envelope relax towards the steady baroclinic flow on the Eddington-Sweet timescale. As far as intermediate-mass stars are concerned, because of their fast rotation, the Eddington-Sweet timescale is close to the Kelvin-Helmholtz timescale and the transition to the quasi-steady state of the main sequence is quite short (for instance for 7 $M_\odot$ star, the Eddington-Sweet timescale is 2.8 Myr for a rotation near break-up, to be compared to the 46 Myr of the lifetime of such stars). On the other hand, if for some reason (such as the combination of magnetic fields and mass loss) the star loses much angular momentum so that $2\Omega \ll N$ at the beginning of the main sequence, then the dynamic state of an outer envelope will be controlled by slowly decaying baroclinic modes excited by the contraction phase. The slow decay may occupy a significant fraction of the main sequence and affect the mixing processes.

Back to fluid dynamics, the simple model that we used shows other details about the dynamics of this system, like for instance the shear layer (the Stewartson layer) that circumvent the core on its tangent cylinder. This feature is clearly an artefact of the model for stars with no convective cores like PMS stars, but it is certainly an important feature for stars leaving the main sequence where the core contracts and the envelope expands. At the core-envelope interface the build-up of a density jump due to nuclear evolution, combined with rotation, triggers a Stewartson layer on the tangent cylinder of the discontinuity. This layer may indeed explain the efficient transport of angular momentum between the core and envelope of giant or subgiant stars that is needed to explain the rather mild radial differential rotation observed in these stars (Deheuvels et al. 2012; Mosser et al. 2012; Eggenberger et al. 2012). Indeed, our model shows that there is a tight coupling between the inner part of the tangent cylinder and the core itself. This coupling is essentially a consequence of the Taylor-Proudman theorem that imposes no velocity gradient along the rotation axis (columnar flow). Therefore, the transport of angular momentum between the core and the envelope is much enhanced by the Stewartson layer. Since such a layer has a surface that is $R_{\rm star}/R_{\rm core}$ larger than the surface of the core, we expect that the flux of angular momentum between the core and the envelope will be enhanced by a similar factor (viscosity and velocity gradient being assumed similar) with respect to a 1D shellular profile. Noting that the moment of inertia of the core and of the matter inside its tangent cylinder are not much different, we expect that the Stewartson layer plays a crucial role in the angular momentum exchange between the core and envelope and might well be the key feature that reconcile models and observations. It is clear that present 1D models do not take this fluid dynamics feature into account and that the final answer will be given by 2D models incorporating this flow. A dedicated study is clearly needed to give a quantitative estimate of this effect and to offer a new comparison with observations.

Hence, more than the numbers and the applicability to a given object, the foregoing Boussinesq model underlines the main features of the dynamics of a contracting and rotating envelope. It stresses the key role of outer boundary conditions and the various flows that might govern a contracting phase depending on the strength of the stratification. The side effect of the core in this model underlines the role of a Stewartson layer that may appear either after a rapid change in density or in viscosity. The model also stresses the fact that no steady state can be expected as for the interior flows, but that these flows may converge towards a universal flow when gravitational contraction ceases. The next step of these investigations focusing specifically on stars will be developed with full physics using the ESTER code of Espinosa Lara & Rieutord (2013).

Acknowledgements. We would like to thank the referee for his constructive remarks on the first version of the manuscript. We also acknowledge the support of the French Agence Nationale de la Recherche (ANR), under grant ESTER (ANR-09-BLAN-0140). The numerical calculations have been carried out on the CalMip machine of the 'Centre Interuniversitaire de Calcul de Toulouse' (CICT), which is gratefully acknowledged.

References

Boehm, T. & Catala, C. 1995, A&A, 301, 155
Brott, I., Evans, C. J., Hunter, I., et al. 2011, A&A, 530, A116
Charbonnel, C. & Talon, S. 1999, A&A, 351, 635
Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, ApJ, 756, 19
Duck, P. & Foster, M. 2001, Annual Review of Fluid Mechanics, 33, 231
Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, A&A, 544, L4
Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2007, A&A, 470, 1013
Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2013, A&A, 552, A35
Fortney, J. J. & Nettelmann, N. 2010, Space Science Rev., 152, 423
Friedlander, S. 1976, J. Fluid Mech., 76, 209
Greenspan, H. P. 1969, The Theory of Rotating Fluids (Cambridge University Press)
Maeder, A. 2009, Physics, Formation and Evolution of Rotating stars (Springer)
Maeder, A. & Meynet, G. 2001, A&A, 373, 555
Meynet, G. & Maeder, A. 2005, A&A, 429, 581
Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, A&A, 548, A10
Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477
Pinsonneault, M. 1997, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 35, 557
Rieutord, M. 2006a, A&A, 451, 1025
Rieutord, M. 2006b, in Stellar fluid dynamics and numerical simulations: From the sun to neutron stars, ed. M. Rieutord & B. Dubrulle, Vol. 21 (EAS), 275–295
Rieutord, M. & Beth, A. 2014, submitted to A&A, 1, 1
Stewartson, K. 1966, J. Fluid Mech., 26, 131
Strittmatter, P. A. 1969, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 7, 665
Wu, Y. 2005, ApJ, 635, 688
Zahn, J.-P. 1992, A&A, 265, 115

Appendix A: Numerical method

To solve the set of linear equations (12), we discretize the equations using a spectral method. We project the velocity field onto the harmonics spherical base

$$\boldsymbol{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l \boldsymbol{R}_l^m + v_m^l \boldsymbol{S}_l^m + w_m^l \boldsymbol{T}_l^m \tag{A.1}$$

where

$$\boldsymbol{R}_l^m = Y_l^m \boldsymbol{e_r}, \qquad \boldsymbol{S}_l^m = \boldsymbol{\nabla} Y_l^m, \qquad \boldsymbol{T}_l^m = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{R}_l^m \tag{A.2}$$

Y_l^m are the normalized spherical harmonics, $\boldsymbol{e_r}$ is the radial unity vector, and $\boldsymbol{\nabla}$ is defined on the unity sphere. We write the temperature perturbation onto the spherical harmonics base too:

$$\theta_T = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} t_m^l Y_l^m \, . \tag{A.3}$$

We finally add the boundary conditions on this field:

$$\begin{cases} t_l'(r=\eta) = 0 \\ t_l(r=1) = 0 \, . \end{cases} \tag{A.4}$$

We discretize the radial direction for $r \in [\eta; 1]$ onto the Gauss-Lobatto grid associated with the Chebyshev polynomials. Thereby, equations are solved in two dimensions (r, θ). The system is axisymmetric, which implies $m = 0$. The equation of continuity reads

$$v_m^l = \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_m^l) \tag{A.5}$$

where $\Lambda = l(l+1)$.
The energy equation reads

$$B\tilde{E}_T (r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} t_m^l + 2r \frac{\partial}{\partial r} t_m^l - \Lambda t_m^l) = n_T^2(r) r^2 u_m^l \, . \tag{A.6}$$

The equation of motion is projected onto two directions because equations on $\boldsymbol{R}_l^m$ and on $\boldsymbol{S}_l^m$ are redundant.
On $\boldsymbol{R}_l^m$, it reads

$$\begin{aligned} A_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_m^{l-1}}{r^{l-2}} \right) + A_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{l+3} u_m^{l+1} \right) \\ + E \Delta_l w_m^l = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{l1} (\frac{\eta^2}{r^2} - r\dot{\omega}) \end{aligned} \tag{A.7}$$

δ_{ij} is the Kronecker symbol.
On $\boldsymbol{T}_l^m$, it reads

$$\begin{aligned} -B_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_m^l}{r^{l-1}} \right) - B_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{l+2} w_m^{l+1} \right) \\ -l(l+1) t_m^l + E \Delta_l \Delta_l (r u_m^l) = -\sqrt{\frac{16\pi}{5}} n^2(r) \delta_{l2} \, . \end{aligned} \tag{A.8}$$

We note A_{l-1}^l,A_{l+1}^l,B_{l-1}^l, and B_{l+1}^l the coupling coefficients:

$$\begin{cases} A_{l+1}^l = \frac{1}{(l+1)} \frac{1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \quad ; \quad B_{l+1}^l = \frac{l(l+1)(l+2)}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \\ A_{l-1}^l = \frac{1}{l} \frac{1}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \quad ; \quad B_{l-1}^l = \frac{l(l^2-1)}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \, . \end{cases} \tag{A.9}$$

Noting that the forcing implies equatorially symmetric solutions (the resulting differential rotation is equatorially symmetric), the radial functions w^l are non-zero only for odd l while u^l and t^l only for even l. The series is therefore $w^1, u^2, t^2, w^3, \ldots$

Références

Affer, L., Micela, G., Favata, F. & Flaccomio, E. 2012 The rotation of field stars from CoRoT data. *MNRAS* **424**, 11–22.

Agüeros, M. A., Covey, K. R., Lemonias, J. J., Law, N. M., Kraus, A., Batalha, N., Bloom, J. S., Cenko, S. B., Kasliwal, M. M., Kulkarni, S. R., Nugent, P. E., Ofek, E. O., Poznanski, D. & Quimby, R. M. 2011 The Factory and the Beehive. I. Rotation Periods for Low-mass Stars in Praesepe. *"The Astrophysical Journal"* **740**, 110.

Alecian, G. 1994 Radiative acceleration in stars due to photoionization. *"A&A."* **289**, 885–892.

Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., Descouvemont, P., Baye, D., Leclercq-Willain, C., Coc, A., Barhoumi, S., Aguer, P., Rolfs, C., Kunz, R., Hammer, J. W., Mayer, A., Paradellis, T., Kossionides, S., Chronidou, C., Spyrou, K., degl'Innocenti, S., Fiorentini, G., Ricci, B., Zavatarelli, S., Providencia, C., Wolters, H., Soares, J., Grama, C., Rahighi, J., Shotter, A. & Lamehi Rachti, M. 1999 A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates. *Nuclear Physics A* **656**, 3–183.

Balachandran, S. 1995 The Lithium Dip in M67 : Comparison with the Hyades, Praesepe, and NGC 752 Clusters. *"Astron. J."* **446**, 203.

Böhm, T. & Catala, C. 1995 Rotation, winds and active phenomena in Herbig Ae/Be stars. *A&A* **301**, 155–169.

Böhm-Vitense, E. 1958 Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen. *"Zeitschrift für Astrophysik"* **46**, 108.

Bonazzola, S., Gourgoulhon, E. & Marck, J.-A. 1998 Numerical approach for high precision 3D relativistic star models. *Physical Review D* **58** (10), 104020.

Bonazzola, S., Gourgoulhon, E. & Marck, J.-A. 1999 Spectral methods in general relativistic astrophysics. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **109**, 433–473.

Bouvier, J. 2008 Lithium depletion and the rotational history of exoplanet host stars. *A.&A.* **489**, L53–L56.

Bouvier, J., Cabrit, S., Fernandez, M., Martin, E. L. & Matthews, J. M. 1993 COYOTES - Part One - Multisite UBVRI Photometry of 24 Pre Main Sequence Stars of the Taurus-Auriga Cloud. *A.&A. suppl.* **101**, 485.

Boyd, J.P. 1989 *Chebyshev and Fourier Spectral Methods.*

Brott, I., Evans, C. J., Hunter, I., de Koter, A., Langer, N., Dufton, P. L., Cantiello, M., Trundle, C., Lennon, D. J., de Mink, S. E., Yoon, S.-C. & Anders, P. 2011 Rotating massive main-sequence stars. II. Simulating a population of LMC early B-type stars as a test of rotational mixing. *A&A* **530**, A116.

Busse, F. 1981 Do Eddington-Sweet circulations exist. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **17**, 215–235.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. & Zang, T. A. 2006 *Spectral Methods.*

Carciofi, A. C., Domiciano de Souza, A., Magalhães, A. M., Bjorkman, J. E. & Vakili, F. 2008 On the Determination of the Rotational Oblateness of Achernar. *"Astrophysical Journal"* **676**, L41–L44.

Chaboyer, B. & Zahn, J.-P. 1992 Effect of horizontal turbulent diffusion on transport by meridional circulation. *A.&A.* **253**, 173–177.

Chapman, S. 1917 Convection and diffusion within giant stars. *"MNRAS"* **77**, 540.

Charbonnel, C. 1994 Clues for non-standard mixing on the red giant branch from C-12/C-13 and C-12/N-14 ratios in evolved stars. *"A&A."* **282**, 811–820.

Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A. & Talon, S. 2013 Impact of internal gravity waves on the rotation profile inside pre-main sequence low-mass stars. *Å* **554**, A40.

Charbonnel, C. & Talon, S. 1999 The hot side of the lithium dip - LiBeB abundances beyond the main sequence. *A.&A.* **351**, 635–643.

Clayton, D. D. 1968 *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis.*

Cowling, T. G. 1933 The magnetic field of sunspots. *MNRAS* **94**, 39–48.

Cyburt, R. H., Fields, B. D. & Olive, K. A. 2008 An update on the big bang nucleosynthesis prediction for ^{7}Li : the problem worsens. *"Journal of Cosmology and Astroparticle Physics"* **11**, 12.

Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., Basu, S., Antia, H. M., Appourchaux, T., Benomar, O., Davies, G. R., Elsworth, Y., Gizon, L., Goupil, M. J., Reese, D. R., Regulo, C., Schou, J., Stahn, T., Casagrande, L., Christensen-Dalsgaard, J., Fischer, D., Hekker, S., Kjeldsen, H., Mathur, S., Mosser, B., Pinsonneault, M., Valenti, J., Christiansen, J. L., Kinemuchi, K. & Mullally, F. 2012 Seismic Evidence for a Rapidly Rotating Core in a Lower-giant-branch Star Observed with Kepler. *"Astron. J."* **756**, 19.

Denissenkov, P. A., Pinsonneault, M., Terndrup, D. M. & Newsham, G. 2010 Angular Momentum Transport in Solar-type Stars : Testing the Timescale for Core-Envelope Coupling. *The Astrophysical Journal* **716**, 1269–1287.

Deupree, R. G. & Beslin, W. 2010 Rotational Splitting of Pulsation Modes. *"Astron. J."* **721**, 1900–1907.

Domiciano de Souza, A., Hadjara, M., Vakili, F., Bendjoya, P., Millour, F., Abe, L., Carciofi, A. C., Faes, D. M., Kervella, P., Lagarde, S., Marconi, A., Monin, J.-L., Niccolini, G., Petrov, R. G. & Weigelt, G. 2012*a* Beyond the diffraction limit of optical/IR interferometers. I. Angular diameter and rotation parameters of Achernar from differential phases. *"A&A."* **545**, A130.

Domiciano de Souza, A., Kervella, P., Jankov, S., Abe, L., Vakili, F., di Folco, E. & Paresce, F. 2003 The spinning-top Be star Achernar from VLTI-VINCI. *"A&A."* **407**, L47–L50.

Domiciano de Souza, A., Kervella, P., Moser Faes, D., Dalla Vedova, G., Mérand, A., Le Bouquin, J.-B., Espinosa Lara, F., Rieutord, M., Bendjoya, P., Carciofi, A. C., Hadjara, M., Millour, F. & Vakili, F. 2014*a* The environment of the fast rotating star Achernar. III. Photospheric parameters revealed by the VLTI. *Å* **569**, A10.

Domiciano de Souza, A., Kervella, P., Moser Faes, D., Dalla Vedova, G., Mérand, A., Le Bouquin, J.-B., Espinosa Lara, F., Rieutord, M., Bendjoya, P., Carciofi, A. C., Hadjara, M., Millour, F. & Vakili, F. 2014*b* The environment of the fast rotating star Achernar. III. Photospheric parameters revealed by the VLTI. *A.&A.* **569**, A10.

Domiciano de Souza, A., Zorec, J. & Vakili, F. 2012*b* CHARRON : Code for High Angular Resolution of Rotating Objects in Nature. In *SF2A-2012 : Proceedings of the*

Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics (ed. S. Boissier, P. de Laverny, N. Nardetto, R. Samadi, D. Valls-Gabaud & H. Wozniak), pp. 321–324.

Dormy, E., Cardin, P. & Jault, D. 1998 MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.

Duck, P. & Foster, M. 2001 Spin-Up of Homogeneous and Stratified Fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics* **33**, 231–263.

Eddington, A. S. 1929 Internal circulation in rotating stars. *MNRAS* **90**, 54.

Edwards, S., Strom, S. E., Hartigan, P., Strom, K. M., Hillenbrand, L. A., Herbst, W., Attridge, J., Merrill, K. M., Probst, R. & Gatley, I. 1993 Angular momentum regulation in low-mass young stars surrounded by accretion disks. *The Astronomical Journal* **106**, 372–382.

Eggenberger, P., Montalbán, J. & Miglio, A. 2012 Angular momentum transport in stellar interiors constrained by rotational splittings of mixed modes in red giants. *Å* **544**, L4.

Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2007 The dynamics of a fully radiative rapidly rotating star enclosed within a spherical box. *A&A* **470**, 1013–1022.

Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2012 Gravity darkening in binary stars. *A&A* **547**, A32.

Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2013 Self-consistent 2D models of fast rotating early-type stars. *A&A* **552**, A35.

Ferraro, V. C. A. 1937 The non-uniform rotation of the Sun and its magnetic field. *MNRAS* **97**, 458.

Fornberg, B. 1998 *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge University Press.

Friedlander, S. 1976 Quasi-steady flow of a rotating stratified fluid in a sphere. *J. Fluid Mech.* **76**, 209–228.

Frischknecht, U., Hirschi, R., Meynet, G., Ekström, S., Georgy, C., Rauscher, T., Winteler, C. & Thielemann, F.-K. 2010 Constraints on rotational mixing from surface evolution of light elements in massive stars. *"A&A."* **522**, A39.

Frischknecht, U., Hirschi, R. & Thielemann, F.-K. 2012 Non-standard s-process in low metallicity massive rotating stars. *A&A* **538**, L2.

Gallet, F. & Bouvier, J. 2013 Improved angular momentum evolution model for solar-like stars. *Å* **556**, A36.

Georgy, C., Granada, A., Ekström, S., Meynet, G., Anderson, R. I., Wyttenbach, A., Eggenberger, P. & Maeder, A. 2014 Populations of rotating stars. III. SYCLIST, the new Geneva population synthesis code. *Å* **566**, A21.

Georgy, C., Meynet, G. & Maeder, A. 2011 Effects of anisotropic winds on massive star evolution. *AA* **527**, A52.

Gibbs, J. Willard 1898 Fourier's series. *Nature* **59** (1522), 200.

Grandclément, P. 2006 Introduction to spectral methods. In *EAS Publications Series* (ed. M. Rieutord & B. Dubrulle), *EAS Publications Series*, vol. 21, pp. 153–180.

Greenspan, H.P. 1969*a* On the nonlinear interaction of inertial modes. *J. Fluid Mech.* **36**, 257–264.

Greenspan, H. P. 1969*b* *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.

Hairer , E. & Wanner, G. 1991 *Solving Ordinary Differential Equations I*.

Harmanec, P. 1988 Stellar masses and radii based on modern binary data. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **39**, 329–345.

Hartman, J. D., Bakos, G. Á., Kovács, G. & Noyes, R. W. 2010 A large sample of photometric rotation periods for FGK Pleiades stars. *MNRAS* **408**, 475–489.

Hiltner, W. A., Garrison, R. F. & Schild, R. E. 1969 MK Spectral Types for Bright Southern OB Stars. *"Astro. J."* **157**, 313.

Hollerbach, R. 2003 Instabilities of the Stewartson layer Part 1. The dependence on the sign of Ro. *J. Fluid Mech.* **492**, 289–302.

Holton, J. R. 1965 The influence of Viscous Boundary Layers on Transient Motions in a Stratified Rotating Fluid. Part I. *Journal of Atmospheric Sciences* **22**, 402–411.

Hypolite, D. & Rieutord, M. 2014 Dynamics of the envelope of a rapidly rotating star or giant planet in gravitational contraction. *AA* **572**, A15.

Irwin, J., Berta, Z. K., Burke, C. J., Charbonneau, D., Nutzman, P., West, A. A. & Falco, E. E. 2011 On the Angular Momentum Evolution of Fully Convective Stars : Rotation Periods for Field M-dwarfs from the MEarth Transit Survey. *The Astrophysical Journal* **727**, 56.

Irwin, J. & Bouvier, J. 2009 The rotational evolution of low-mass stars. In *IAU Symposium* (ed. E. E. Mamajek, D. R. Soderblom & R. F. G. Wyse), *IAU Symposium*, vol. 258, pp. 363–374.

Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., Hebb, L., Bouvier, J., Clarke, C., Moraux, E. & Bramich, D. M. 2007 The Monitor project : rotation of low-mass stars in the open cluster NGC2516. *MNRAS* **377**, 741–758.

Jackson, S., MacGregor, K. B. & Skumanich, A. 2004 Models for the Rapidly Rotating Be Star Achernar. *apj* **606**, 1196–1199.

James, R. A. 1964 The Structure and Stability of Rotating Gas Masses. *ApJ* **140**, 552.

K. Stewartson 1967 On slow transverse motion of a sphere through a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **30**, 357–369.

Kervella, P. & Domiciano de Souza, A. 2007 The environment of the fast rotating star Achernar. High-resolution thermal infrared imaging with VISIR in BURST mode. *"A&A."* **474**, L49–L52.

Kervella, P., Domiciano de Souza, A. & Bendjoya, P. 2008 The close-in companion of the fast rotating Be star Achernar. *"A&A."* **484**, L13–L16.

Langer, N. 1992 Helium enrichment in massive early type stars. *"A&A."* **265**, L17–L20.

Leroy, J. L., Landolfi, M., Landi Degl'Innocenti, M., Landi Degl'Innocenti, E., Bagnulo, S. & Laporte, P. 1995 Linear polarimetry of AP stars. IV. The influence of deviations from a pure dipolar model. *A&A* **301**, 797.

Lignières, F., Catala, C. & Mangeney, A. 1996 Angular momentum transfer in pre-main-sequence stars of intermediate mass. *A.&A.* **314**, 465–476.

Lilly, S. J., Carollo, C. M., Pipino, A., Renzini, A. & Peng, Y. 2013 Gas Regulation of Galaxies : The Evolution of the Cosmic Specific Star Formation Rate, the Metallicity-Mass-Star-formation Rate Relation, and the Stellar Content of Halos. *The Astrophysical Journal* **772**, 119.

Lyubimkov, L. S., Rostopchin, S. I. & Lambert, D. L. 2004 Surface abundances of light elements for a large sample of early B-type stars - III. An analysis of helium lines in spectra of 102 stars. *mnras* **351**, 745–767.

Maeder, A. 1974 Stellar evolution near the main sequence : on some systematic differences between cluster sequences and model calculations. *"A&A."* **32**, 177–190.

Maeder, A. 2002 Stellar evolution with rotation. IX. The effects of the production of asymmetric nebulae on the internal evolution. *A.&A.* **392**, 575–584.

Maeder, A. 2009 *Physics, Formation and Evolution of Rotating stars*. Springer.

Maeder, A. & Meynet, G. 1989 Grids of evolutionary models from 0.85 to 120 solar masses - Observational tests and the mass limits. *"A&A."* **210**, 155–173.

Maeder, A. & Meynet, G. 2001 Stellar evolution with rotation. VII. . Low metallicity models and the blue to red supergiant ratio in the SMC. *A.&A.* **373**, 555–571.

Maeder, A., Przybilla, N., Nieva, M.-F., Georgy, C., Meynet, G., Ekström, S. & Eggenberger, P. 2014 Evolution of surface CNO abundances in massive stars. *Å* **565**, A39.

Maeder, A. & Zahn, J.-P. 1998 Stellar evolution with rotation. III. Meridional circulation with MU -gradients and non-stationarity. *A.&A.* **334**, 1000–1006.

Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., Talon, S., Palacios, A., Belkacem, K., Ouazzani, R.-M., Mosser, B., Moya, A., Morel, P., Pichon, B., Mathis, S., Zahn, J.-P., Turck-Chièze, S. & Nghiem, P. A. P. 2013 Seismic diagnostics for transport of angular momentum in stars. I. Rotational splittings from the pre-main sequence to the red-giant branch. *Å* **549**, A74.

Martins, F. & Palacios, A. 2013 A comparison of evolutionary tracks for single Galactic massive stars. *A.&A.* **560**, A16.

Mathis, S. & Zahn, J.-P. 2005 Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field. *A.&A.* **440**, 653–666.

McKee, C. F. & Ostriker, E. C. 2007 Theory of Star Formation. *" Annual Review of Astronomy and Astrophysics"* **45**, 565–687.

McNally, D. 1965 The distribution of angular momentum among main sequence stars. *The Observatory* **85**, 166–169.

Meibom, S., Barnes, S. A., Latham, D. W., Batalha, N., Borucki, W. J., Koch, D. G., Basri, G., Walkowicz, L. M., Janes, K. A., Jenkins, J., Van Cleve, J., Haas, M. R., Bryson, S. T., Dupree, A. K., Furesz, G., Szentgyorgyi, A. H., Buchhave, L. A., Clarke, B. D., Twicken, J. D. & Quintana, E. V. 2011 The Kepler Cluster Study : Stellar Rotation in NGC 6811. *The Astrophysical Journal Letters* **733**, L9.

Metzger, B. D., Giannios, D., Thompson, T. A., Bucciantini, N. & Quataert, E. 2011 The protomagnetar model for gamma-ray bursts. *MNRAS* **413**, 2031–2056.

Meynet, G., Ekstrom, S., Maeder, A., Eggenberger, P., Saio, H., Chomienne, V. & Haemmerlé, L. 2013 Models of Rotating Massive Stars : Impacts of Various Prescriptions. In *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag* (ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières & J. J. Green), *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, vol. 865, pp. 3–642.

Meynet, G. & Maeder, A. 2000 Stellar evolution with rotation. V. Changes in all the outputs of massive star models. *"A&A."* **361**, 101–120.

Meynet, G. & Maeder, A. 2005 Stellar evolution with rotation. XI. Wolf-Rayet star populations at different metallicities. *A.&A.* **429**, 581–598.

Michaud, G. 1980 The astrophysical context of diffusion in stars. *"Astronomical Journal"* **85**, 589–598.

Morel, P. 1997 CESAM : a code for stellar evolution calculations. *A & A Suppl. Ser.* **124**, 597–614.

Morel, P., Pichon, B., Provost, J. & Berthomieu, G. 1999 Solar models and NACRE thermonuclear reaction rates. *A.&A.* **350**, 275–285.

Neiner, C., Mathis, S., Saio, H. & Lee, U. 2013 Be Star Outbursts : Transport of Angular Momentum by Waves. In *Progress in Physics of the Sun and Stars : A New Era in Helio- and Asteroseismology* (ed. H. Shibahashi & A. E. Lynas-Gray), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 479, p. 319.

Pedlosky, J. 1967 The spin up of a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **28**, 463–479.

Petit, P., Lignières, F., Wade, G. A., Aurière, M., Böhm, T., Bagnulo, S., Dintrans, B., Fumel, A., Grunhut, J., Lanoux, J., Morgenthaler, A. & Van Grootel, V. 2010 The rapid rotation and complex magnetic field geometry of Vega. *"A&A."* **523**, A41.

Peyret, R. 2012 *Spectral methods for incompressible viscous flow.*

Pichon, B. 1990 *Problèmes nucléaires en astrophysique.*

Pinsonneault, M. 1997 Mixing in stars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **35**, 557–605.

Preston, G. W. 1974 The chemically peculiar stars of the upper main sequence. *"Annual Review of Astronomy and Astrophysics"* **12**, 257–277.

Randers, G. 1941 Large-Scale Motion in Stars. *"Astrophysical Journal"* **94**, 109.

Rebull, L. M., Wolff, S. C. & Strom, S. E. 2004 Stellar Rotation in Young Clusters : The First 4 Million Years. *The Astronomical Journal* **127**, 1029–1051.

Reese, D., Lignières, F. & Rieutord, M. 2006 Acoustic oscillations of rapidly rotating polytropic stars. II. Effects of the Coriolis and centrifugal accelerations. *"A&A."* **455**, 621–637.

Reiners, A. & Mohanty, S. 2012 Radius-dependent Angular Momentum Evolution in Low-mass Stars. I. *The Astrophysical Journal* **746**, 43.

Rieutord, M. 1987 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part I : Steady flows. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **39**, 163–182.

Rieutord, M. 2006 The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. i. a spherical boussinesq model. *A&A* **451**, 1025–1036.

Rieutord, M. 2006 The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. I. A spherical Boussinesq model. *Å* **451**, 1025–1036.

Rieutord, M. 2014 *Une introduction à la dynamique des fluides*. Belgique : de boeck.

Rieutord, M. & Beth, A. 2014 Dynamics of the envelope of rapidly rotating stars. Effects of spin-down of the outer layers. *submitted to A&A* **1**, 1.

Rieutord, M. & Espinosa Lara, F. 2013 Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars. In *SeIsmology for studies of stellar Rotation and Convection* (ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières & J. J. Green), *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, vol. 865, pp. 49–73, astro–ph/1208.4926.

Rieutord, M., Triana, S. A., Zimmerman, D. S. & Lathrop, D. P. 2012 Excitation of inertial modes in an experimental spherical Couette flow. *Phys. Rev. E* **86** (2), 026304.

Ruediger, G., Schultz, M. & Kitchatinov, L. L. 2014 The effective magnetic Prandtl number in magnetized and differentially rotating stellar radiation zones. *ArXiv e-prints* .

Runge, Carl 1901 Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **46** (224-243), 20.

Sakurai, T. 1969 Spin down problem of rotating stratified fluid in thermally insulated circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **37**, 689–699.

Sakurai, T., Clark, A. & Clark, P. A. 1971 Spin-down of a Boussinesq fluid of small Prandtl number in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **49**, 753–773.

Savanov, I. S. 1995 Abundance anomalies in the atmospheres of rapidly-rotating AM stars. *"Astronomicheskij Zhurnal"* **72**, 733.

Sobral, D., Matthee, J., Darvish, B., Schaerer, D., Mobasher, B., Röttgering, H., Santos, S. & Hemmati, S. 2015 Evidence for PopIII-like stellar populations in the most luminous Lyman-α emitters at the epoch of re-ionisation : spectroscopic confirmation. *ArXiv e-prints* .

Soderblom, D. R. 2010 The Ages of Stars. *"Annual Review of Astronomy and Astrophysics"* **48**, 581–629.

Spada, F., Lanzafame, A. C., Lanza, A. F., Messina, S. & Collier Cameron, A. 2011 Modelling the rotational evolution of solar-like stars : the rotational coupling time-scale. *MNRAS* **416**, 447–456.

Spite, F. & Spite, M. 1982 Abundance of lithium in unevolved halo stars and old disk stars - Interpretation and consequences. *"A&A."* **115**, 357–366.

Stahler, S.W. & Palla, F. 2008 *The Formation of Stars*. WILEY-VCH.

Stewartson, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.

Sweet, P. A. 1950 The importance of rotation in stellar evolution. *MNRAS* **110**, 548.

Talon, S. 1997 Hydrodynamique des étoiles en rotation. PhD thesis, Université de Paris VII.

Tassoul, M. 1980 Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations. *"Astrophysical Journal Supplement Series"* **43**, 469–490.

van Leeuwen, F. 2007 Validation of the new Hipparcos reduction. *"A&A."* **474**, 653–664.

Vinicius, M. M. F., Zorec, J., Leister, N. V. & Levenhagen, R. S. 2006 α Eridani : rotational distortion, stellar and circumstellar activity. *"A&A."* **446**, 643–660.

Vogt, H. 1925 Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne. *Astronomische Nachrichten* **223**, 229.

von Zeipel, H. 1924 The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. *MNRAS* **84**, 665–683.

Wallerstein, G. & Conti, P. S. 1969 Lithium and Beryllium in Stars. *"Annual Review of Astronomy and Astrophysics"* **7**, 99.

Zahn, J.-P. 1992 Circulation and turbulence in rotating stars. *A&A* **265**, 115.

Résumé

La rotation a un impact majeur sur la structure et l'évolution des étoiles. En particulier, elle est connue pour être responsable de processus de mélanges macroscopiques des éléments chimiques et de transport de moment cinétique au sein des zones radiatives des étoiles. Dans la première partie de cette thèse, nous montrons comment l'état actuel de la modélisation stellaire justifie une nouvelle approche bi-dimensionnelle qui ne repose pas sur les hypothèses usuelles de rotation faible ou de rotation différentielle sphérique.

Nous développons, dans la deuxième partie, un modèle simplifié (approximation de Boussinesq) d'étoiles en rotation rapide, en deux dimensions, où la rotation différentielle qui s'instaure et la circulation méridienne associée sont calculées de manière cohérente. Nous y identifions les paramètres pertinents à la description de l'écoulement induit par une contraction gravitationnelle dans un environnement stratifié de manière stable.

Dans la troisième partie, nous démontrons que cet écoulement de spin-up l'emporte sur l'écoulement barocline à l'issue d'un temps de Kelvin-Helmholtz. La rotation différentielle adopte un profil universel cylindrique et la circulation méridienne est celle d'un écoulement de spin-up. Une couche de Stewartson s'établit aussi sur le cylindre tangent au noyau du modèle et pourrait être la source d'un couplage efficace de la rotation du noyau et de celle de l'enveloppe d'une étoile en fin de Séquence Principale.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous étudions Achernar, étoile en rotation rapide de type *Be* à l'aide du code compressible ESTER. Les modèles obtenus tendent à montrer que l'étoile est en contraction gravitationnelle post-Séquence Principale. Pour en rendre compte, le code ESTER a été modifié afin de suivre l'évolution chimique de l'étoile sur une échelle de temps nucléaire.

Abstract

Rotation greatly impacts stellar structure and evolution. Particularly, it is known to be responsible of macroscopic mixings of chemical elements and transport of angular momentum within the radiative zones of stars. In the first part of this thesis, we show how the actual state of stellar modeling calls for a bi-dimensional approach going beyond usual assumptions of slow rotation and spherical differential rotation.

We develop, in the second part of this thesis, a simplified model (Boussinesq approximation) of rapidly rotating stars in two dimensions, where the establishing differential rotation and associated meridional circulation are solved self-consistently. We describe the relevant parameters of the flow induced by a gravitational contraction in a stably stratified environment.

In the third part, we demonstrate that this spin-up flow outweighs the baroclinic flow on a Kelvin-Helmholtz timescale. The differential rotation adopts an universal cylindrical profile and the meridional circulation is typical of the spin-up flow. A Stewartson layer appears too upon the tangent cylinder to the core and could explain an efficient coupling between the rotation of the core and the one of the envelope for stars at the end of the Main Sequence.

In the last part of this thesis, we study Achernar, a rapidly rotating *Be* star, with the full-compressible ESTER code. Models we obtain tend to show that the star is undergoing a post Main Sequence gravitational contraction. To account this, the ESTER code has been modified to follow the chemical evolution of stars on a nuclear timescale.