Quasi-analycité, o-minimalité et élimination des quantificateurs

Alexandre Rambaud

▶ **To cite this version:**

Alexandre Rambaud. Quasi-analycité, o-minimalité et élimination des quantificateurs. Logique [math.LO]. Univeristé Paris Diderot Paris 7, 2005. Français. NNT : . tel-01257634

HAL Id: tel-01257634
https://hal.science/tel-01257634

Submitted on 17 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 -DENIS DIDEROT
UFR de Mathématiques

Thèse

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité : Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique

Présentée par

Alexandre RAMBAUD

Quasi-analycité, o-minimalité et élimination des quantificateurs

---

soutenue le 30 juin 2005

Directeur :
Jean-Pierre RESSAYRE

Rapporteurs :
Lou van den DRIES
Jean-Philippe ROLIN

Jury :
Jean-Marie LION
Patrick SPEISSEGGER
Alex WILKIE

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur, Jean-Pierre Ressayre ; du début de mon mémoire de DEA à la fin de cette thèse, il m'a permis d'évoluer dans cette fabuleuse aventure qu'est la géométrie réelle et en particulier l'o-minimalité. Il m'a transmis sa vision du sujet, source de nombreux développements. Je le remercie également pour ses conseils, sa patience et son humanité. Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les échanges que nous avons eus.

J'aimerais remercier très vivement Lou van den Dries et Jean-Philippe Rolin qui ont référé ma thèse ainsi que les autres membres du jury, Jean-Marie Lion, Patrick Speissegger et Alex Wilkie. J'ai été à la fois très honoré et heureux d'apprendre qu'ils acceptaient de s'intéresser à cette thèse et je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour le temps qu'ils y ont consacré.

Cette thèse n'aurait pu aboutir sans le soutien de l'équipe de Logique. Je tiens ainsi à remercier Daniel Lascar en temps qu'ancien directeur de l'équipe et aussi pour avoir permis la mise en place des "mini-cours de logique" à Grenoble et à Paris, ainsi que Françoise Delon et Zoé Chatzidakis, pour leur présence aux côtés des doctorants. Je remercie aussi Richard Lassaigne pour l'intérêt qu'il a porté à la fois à ma thèse et aux "mini-cours".

Perdu dans les méandres kafkaiens et bourbeux de l'administration, j'ai été secouru, comme bon nombre d'autres "malheureux" thésards, par Michèle Wasse, le phare de l'administration du troisième cycle, Odile Ainardi et Khadija Bayoud, qui m'ont évité pas mal de tracasseries et Jacqueline Lepage. Je les remercie pour leur gentillesse et leur disponibilité.

J'ai appris pendant ces cinq années qu'une thèse, comme les grands moments de la vie, se construit à plusieurs ; je veux donc remercier toutes ces personnes que j'ai eu la chance de croiser, qui m'ont soutenu, m'ont donné confiance en moi, m'ont supporté que ce soit mathématiquement mais aussi et surtout "humainenement"...

Je remercie ainsi l'ensemble des thésards de l'ancien et du nouveau bureau 5C6 et de l'ancien bureau 5C9 ainsi que les "anciens" du septième, notamment José, Benoît, mes "mentors" de la première heure qui m'ont guidé dans la "jungle" de la thèse, Houcine, Franck et Ronald, pour nos débats mathématico-politico-socio-philosophiques, Sandra et Andrea, pour leur bonne humeur ainsi qu'Eric qui m'a toujours soutenu et remonté le moral à grands coups de décibels.
Mes remerciements vont à ceux de Grenoble aussi ; Frédéric qui , entre deux soirées, m'a convaincu de monter tenter ma chance dans la capitale... Lucien Guillou et Emmanuel Ferrand qui ont cru en moi et m'ont décidé à venir faire cette thèse.

Pendant toutes ses années -et plus encore- ma famille a toujours été à mes

côtés et m'a accompagné. Mille mercis à mes parents, sans qui de toute façon, je ne serais pas ici à parler de maths, à ma soeur Hélène, pour toutes ces années de complicité, à mes grand-parents, qui m'ont tant appris, à ma tante et à mon oncle, qui m'ont enrichi humainement et spirituellement.

Et puis, il y a "les fidèles", ceux qui sont là depuis toujours ; je les remercie de m'accepté au jour le jour pour ce que je suis...
A lot of love to Catherine and Hervé, sans oublier "tutta la famiglia" Yvan, Nige' et Thérèse... "la mia famiglia".
Plein de bonnes vibrations pour Mathilde, compagne de tant d'aventures passées, présentes et surtout à venir. Merci aussi à Sébastien pour une certaine soirée... et merci aussi à leur canapé...
Vol van liefde voor Jane et pieno d'amore per Rosaria qui m'ont accueilli dans la Maison du Bonheur, qui est devenue ma Maison. Enormes mercis au reste de la casa, Maureen, Thierry et le Petit Thomas pour leurs rires et leur joie. Et merci aussi à Janine pour ce court instant...
Plein de tendresse à Caro et à toute sa smala, Evans et la Petite Johanna, "ma grande copine".
Plein d'énergies harmonieuses pour Céline et Cyril, qui ont toujours su me redonner le sourire...
Plein de tartiflettes -et de Flanby- pour Cédric et plein de Chartreuse pour Dom...
Plein de joie et de chaleur pour Benoît. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a permis de réaliser et notamment pour nos discussions mathématiques.
Plein d'harmonie aussi pour Yann et Leticia, avec qui j'ai découvert de nombreux horizons différents.
Plein de bonheur enfin pour Nicolas.

Je remercie également tous celles et ceux qui même Incognito m'ont permis de me revitaliser tous les mercredis soirs.

Je ne peux oublier de remercier pour toutes cas heures arrachées à la nuit noire de mes nuits blanches, égaré dans les limbes arcanes et nébuleuses des mathématiques, Radiohead, Pink Floyd, Massive Attack, King Crimson, Magma, etc...

Je remercie enfin tous-tes celles et ceux qui me reconnaîtront et que j'ai honteusement oubliés-es...

Table des matières

1 Historique et présentation du problème **7**
1.1 Historique et références 7
1.2 Présentation de la thèse 8
1.3 Rappels sur les corps ordonnés 11
1.4 Exemple de désingularisation 14

2 Etude de classes quasi-analytiques **21**
2.1 Préliminaires 21
2.2 Stabilité 26
2.3 Matrices 32
2.4 Désingularisation C^∞ 36
2.5 Transformation des termes 46

3 Conséquences modèle-théoriques **53**
3.1 Construction de plongements 53
3.2 Clôture existentielle 55

4 Conclusion **59**

Chapitre 1

Historique et présentation du problème

1.1 Historique et références

La preuve de l'élimination des quantificateurs dans les corps réels clos [T], permit de montrer que leur théorie est o-minimale. Depuis ce résultat, de nombreuses autres classes de fonctions réelles ont été étudiées par le biais de la théorie des modèles ; le problème est de considérer $(\mathbb{R}, +, ., <)$ muni d'un certain ensemble de fonctions E et d'analyser la théorie complète de $\mathbb{R}$ dans le langage ainsi obtenu.
Les résultats de **modèle-complétude**, d'**élimination des quantificateurs** et d'**o-minimalité** de cette théorie permettent de comprendre la géométrie de E. Pour une introduction aux théories o-minimales, on pourra consulter, par exemple, [C] ou [vdD1].

Une direction prise ces dernières années est de choisir pour E un ensemble d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un certain pavé ouvert ou fermé. Ainsi, en 1986, Van Den Dries a montré l'o-minimalité des fonctions **analytiques restreintes** [vdD2], c'est-à-dire quand E est constitué par les fonctions analytiques sur un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et nulles en dehors. Cette démonstration repose à la fois sur le **théorème de Gabrielov** [G] et le **théorème de préparation de Weierstrass** [B].
En 1988, Denef et Van Den Dries ont montré que cette même classe de fonctions admet l'élimination des quantificateurs, en ajoutant la fonction inverse au langage. [DvdD]
Rolin, Speissegger et Wilkie démontrèrent en 2003 l'o-minimalité quand E est l'une des classes **quasi-analytiques** de Denjoy-Carlman.[RSW]

Dans le prolongement de ces études, il est naturel de se demander si l'o-minimalité et l'élimination des quantificateurs sont préservées dans des classes quasi-analytiques

E **plus générales ou plus fines**. C'est le sujet de cette thèse.

Une des méthodes les plus utilisées pour étudier l'o-minimalité est celle des théorèmes de préparation. Ces théorèmes permettent localement d'écrire un fonction sous la forme d'un produit de fonctions plus "sympathiques". Le premier de ces types de théorème est celui de Weierstrass. (On ne le rappelle que dans le cas qui nous intéresse ; pour plus de détails, on pourra consulter, par exemple, [B])

Théorème 1.1.1 (Théorème de Weierstrass) . *Soit $f \in \mathbb{R}[[X_1, ..., X_{n+1}]]$ une série formelle sur $\mathbb{R}$; on suppose que la série réduite de f par rapport à la variable X_{n+1} n'est pas nulle et note d son ordre réduit. Il existe un unique couple $(u, P) \in \mathbb{R}[[X_1, ..., X_{n+1}]] \times \mathbb{R}[X_1, ..., X_{n+1}]$ tel que u est inversible, P est un polynôme distingué de degré d et*

$$f = u.P$$

On réduit ainsi une série formelle à un polynôme.

Speissegger et Van Den Dries ont ainsi établi des résultats généraux de préparations dans certaines structures o-minimales [vdDS], de même que Rolin et Lion [LR]. Daniel Miller a d'ailleurs obtenu des résultats [Mi] très proches de ceux présentés dans cette thèse, mais dans des **systèmes de Weierstrass**, c'est-à-dire des classes vérifiant d'une certaine façon le théorème de préparation de Weierstrass. Dans la thèse, on démontrera aussi un résultat de ce type (cf partie 2.5)

Toutes les classes de fonctions évoquées jusqu'ici sont **polynômialement bornées**, autrement dit bornées par un polynôme au voisinage de $+\infty$. On ne s'intéressera dans la thèse qu'à des classes E telles que l'ensemble des applications définissables à partir de E est polynômialement borné.

1.2 Présentation de la thèse

$\mathcal{F}$ désigne un ensemble de fonctions restreintes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire d'applications nulles en dehors de pavés qu'on choisit ici **compacts** ; et $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ désigne le langage des anneaux ordonnés contenant un symbole de fonction $X^{\frac{1}{p}}$, pour les puissances $\frac{1}{p}$-ième ($p \in \mathbb{Z}^*$) et un symbole de fonction pour tout fonction de $\mathcal{F}$. On interprète dans $\mathbb{R}$ le symbole $X^{\frac{1}{p}}$ par l'application $X^{\frac{1}{p}}$ usuelle rendue totale en prolongeant par 0 si nécessaire. Ainsi, par exemple, $0^{-1} = \frac{1}{0} = 0$. Les classes quasi-analytiques E qui sont l'objet de cette thèse, sont de la forme $E = \overline{\mathcal{F}}$ où $\overline{\mathcal{F}}$ est le plus petit ensemble de fonctions restreintes, C^∞ sur des pavés compacts, qui contient $\mathcal{F}$ et vérifie les conditions suivantes :

- $\overline{\mathcal{F}}$ contient les indicatrices des pavés compacts (et donc toutes les fonctions constantes de $\mathbb{R}$)

- clôture par "germes" de fonctions implicites en 0, c'est-à-dire que si $f \in \overline{\mathcal{F}}$ est C^∞ autour de 0, $f(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial X_i^n}(0) \neq 0$, on ajoute à $\overline{\mathcal{F}}$ le "germe" de la fonction implicite définie par f en 0

- clôture par "division C^∞", c'est-à-dire que si $f \in \overline{\mathcal{F}}$ et $f = X_i.g$ sur un voisinage de 0 avec g C^∞ sur ce voisinage, on ajoute à $\overline{\mathcal{F}}$ le "germe" de g en 0

On ne s'intéresse qu'aux cas où $\overline{\mathcal{F}}$ est **quasi-analytique**, au sens que toutes les fonctions non nulles de $\overline{\mathcal{F}}$, C^∞ sur un voisinage de 0 sont de multiplicité finie en 0.

On pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{F}}}$. Soit T l'ensemble des formules universelles de $\mathcal{L}$ qui expriment :

- le $\mathcal{L}$-diagramme simple de $\mathbb{R}$;

- la théorie universelle des anneaux ordonnés ;

- la définition des racines p-ième et de l'inverse ;

- la définition de f, pour chaque $f \in \overline{\mathcal{F}}$;

- le fait que f est bornée.

T est ainsi une théorie **universelle** du premier ordre. On notera $\mathcal{L}^{\infty,n}$ les applications définies par des termes n-aires de $\mathcal{L}$ et qui sont C^∞ autour de 0.

Le but de la thèse est d'obtenir que :

1) **la théorie T considérée est équivalente à la théorie complète de $\mathbb{R}$ (muni de $\mathcal{F}$)**

2) **la théorie T est modèle-complète.**

Par (1), on obtient une axiomatisation universelle de la théorie complète de $\mathbb{R}$ au moyen de fonctions de Skolem fournies par $\mathcal{L}$. Le fait que T est à la fois universelle et modèle-complète implique, de plus, que T admet l'élimination des quantificateurs et qu'elle est o-minimale. (c.f partie 3.2)

Remarque :
a) Dans tous les cas, l'o-minimalité entraîne l'existence de fonctions de Skolem définissables ainsi que l'existence d'une axiomatisation universelle et modèle-complète à l'aide de ces fonctions. Mais il est intéressant d'avoir en plus, comme ici, une description simple d'une telle axiomatisation.

b) On obtient aussi que T admet la décomposition cellulaire C^∞

Comme c'est souvent le cas, le problème central est de **désingulariser** localement les courbes obtenues à partir des termes du langage. Grâce à la translation, on se placera toujours au voisinage de 0. Ainsi si t est un terme n-aire, on doit savoir comment se comportent autour de 0, les solutions de l'équation

$$t(x_1, ..., x_n) = 0$$

On espère trouver pour cette équation un nombre fini de branches paramétrées, définissables dans le langage. Cette situation se produisant de toute façon dans une structure o-minimale, elle est nécessaire pour avancer. Pour arriver à cela, on passe par une transformation de t, qui correspond à un théorème de préparation. L'idée dans le cas $n = 2$ et la difficulté pour passer aux cas $n \geq 3$ sont expliquées dans la partie 1.4.
Le parti pris de la thèse est :

1) de travailler uniquement avec T afin d'obtenir que T est équivalent à la théorie complète de $\mathbb{R}$.

2) de se placer dans un modèle **non-standard** de T, $\mathcal{M}$, afin de ramener les problèmes d'études locales à des études en des points infinitésimaux

3) de trouver les **"bons" points infinitésimaux** (c.f partie 2.2) : étant donnés n infinitésimaux de $\mathcal{M}$, on veut trouver $p \leq n$ infinitésimaux $\overline{\mathcal{F}}$-indépendants et qui engendrent au moyen de termes C^∞ les n premiers. Ceci est intéressant en soi mais, de plus, on sait qu'on doit arriver un tel résultat. Comme on veut des transformations C^∞, on constate que les p éléments doivent engendrer aussi une section de leur $\overline{\mathcal{F}}$-clôture (le cas $n = 1$ est, par exemple, immédiat).

La démonstration se déroule suivant ce schéma.

1) on commence tout d'abord par donner sous le nom de **famille stable**, une définition précise de ces "bons" infinitésimaux ; ces familles sont $\overline{\mathcal{F}}$-indépendantes et engendrent une section de leur $\overline{\mathcal{F}}$-clôture

2) on définit la notion de **matrice**, qui exprime la transformation des familles stables (ou candidates à l'être) par des fonctions C^∞ du langage, lesquelles appliquent en même temps cette transformation aux voisinages autour de ces familles

3) on s'occupe dans un premier temps uniquement des termes de $\mathcal{L}^{\infty,n}$; grâce aux familles stables, on arrive à un théorème de préparation.

4) on revient ensuite aux termes généraux, l'étude ici n'étant plus locale mais globale ; grâce à l'étude des termes C^∞, par récurrence, on transforme aussi les termes quelconques en termes plus "sympathiques"

5) on démontre que quelque soit une suite finie d'éléments de $\mathcal{M}$, modéle de T, il existe $p \leq n$ infinitésimaux qui forment une famille stable et engendrent les éléments initiaux au moyen de termes qui sont C^∞ si les élements de départ sont limités et qui sont dans $\mathcal{L}^{\infty,p} \cup \{\frac{1}{X}\}$ sinon ; on peut ainsi uniquement travailler avec les familles stables dans les 2 dernières parties :

6) pour chaque modèle $\mathcal{M}$ de T, on construit un plongement de $\mathcal{M}$ dans une ultrapuissance de $\mathbb{R}$

7) on démontre enfin que la clôture existentielle de $\mathcal{M}$ dans cette ultrapuissance est encore $\mathcal{M}$

1.3 Rappels sur les corps ordonnés

Dans la suite, on suppose que K est un corps ordonné, C est un sous-corps de K et G un sous-groupe de $(K_+^*, .)$. De plus, si L est un corps ordonné, on notera $rcl(L)$ la clôture réelle de L.

Définition 1.3.1 . *On définit les ensembles suivants :*

1*) l'ensemble des* **limités**

$$O_C = \{x \in K; \exists a \in C_+^* \quad |x| \leq a\}$$

2*) l'ensemble des* **infinitésimaux**

$$o_C = \{x \in K; \forall a \in C_+^* \quad |x| \leq a\}$$

O_C est un anneau local dont l'idéal maximal est o_C ; de plus, les idéaux de O_C sont convexes. On pose $O_C^* = O_C \setminus o_C$.

Définition 1.3.2 . *C est* **résiduel** *dans K si*

$$\forall x \in O_C \quad \exists a \in C \quad x - a \in o_C$$

Pour $x \in O_C$, l'élément a est unique ; on peut ainsi définir une application appelée **partie standard** et notée **std**. On a ainsi

$$std : O_C \to C$$

et $x - std(x) \in o_C$.
Dans ce cas, le quotient de O_C par o_C est égal à C.

Remarque : $\mathbb{R}$ est toujours résiduel dans ses extensions.

Définition 1.3.3 . *G est une* **échelle** *sur C si*

$$G \cap O_C^* = \{1\}$$

Définition 1.3.4 . *G est une* **section** *de K sur C si G est une échelle et si*

$$\forall x \in K^* \quad \exists r \in G \quad \frac{x}{r} \in O_C^*$$

Pour $x \in K^*$, l'élément r est unique ; on peut ainsi définir une application appelée **valuation** et notée **val**. On a ainsi

$$val : K^* \to G$$

et $\frac{x}{val(x)} \in O_C^*$.

On donne quelques propriétés immédiates de la partie standard et de la valuation.

Proposition 1.3.5 (Propriétés de la partie standard) .

1*)* $\forall (x,y) \in O_C^2 \quad std(x-y) = std(x) - std(y)$

2*)* $\forall (x,y) \in O_C^2 \quad std(x.y) = std(x).std(y)$

3*)* $\forall (x,y) \in O_C^2 \quad (x \leq y \Rightarrow std(x) \leq std(y))$

Proposition 1.3.6 (Propriétés de la valuation) .

1*)* $\forall (x,y) \in K^* \times K^* \quad val(x-y) \leq max(val(x), val(y))$ *; de plus, si* $val(x) < val(y)$, $val(x+y) = val(y)$

2*)* $\forall (x,y) \in K^* \times K^* \quad val(x.y) = val(x).val(y)$

3*)* $\forall (x,y) \in K^* \times K^* \quad (x \leq y \Rightarrow val(x) \leq val(y))$

Lemme 1.3.7 . *Soit $\epsilon \in o_C^*$ et $P \in C[X]$; on note a la plus petite puissance de P dont le coefficient est non nul. Ainsi il existe $u \in C_+^*$ tel que*

$$|P(\epsilon)| \geq u.|\epsilon|^a$$

Proposition 1.3.8 . *Si K est réel clos, $O_C = O_{rclC}$.*

Théorème 1.3.9 . *Si K est* **réel-clos**, *il existe D, un sous-corps réel-clos de K tel que :*

1*)* $C \subset D$

2*)* $O_C = O_D$

3*)* *D est résiduel dans K*

Proposition 1.3.10 . *Si K est réel-clos et C est résiduel dans K, C est réel-clos.*

Théorème 1.3.11 . *Si K est* **réel-clos** *et C est résiduel dans K, il existe S, un sous-groupe divisible de $(K_+^*, .)$ tel que :*

1*)* $G \subset S$

3*)* S *est une section de* K *sur* C

Proposition 1.3.12 . *On suppose que C est résiduel dans K et que G est une section de K sur C ; soit $x \in K^*$, il existe un unique couple de suites $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tel que $a_n \in C$ et $r_n \in G$, pour $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = \sum_{i=1}^{i=n} a_n.r_n + \mu.r_n$$

avec $\mu \in o_C$. De plus, (r_n) est décroissante.

Exemple 1 **:** On pose $K = C(X)$. K est un corps ordonné pour l'ordre $<$ tel que, pour toute suite positive de C, (a_n),

$$a_0 < a_1.X < a_2.X^2 ... < a_n.X^n$$

On a

$$O_C = \{F \in K(X); ord(F) \leq 0\}$$

et

$$o_C = \{F \in K(X); ord(F) < 0\}$$

D'après le théorème de décomposition des fractions rationnelles, C est résiduel dans $K(X)$; de plus le groupe des monômes, $\{X^k; k \in \mathbb{Z}\}$ est une section de K sur C. La proposition revient donc à la formule de Taylor à l'infini.

Exemple 2 **:** Soit C un corps o-minimal dans un langage $\mathcal{L}$ qui contient le langage des corps. On note K le quotient des applications définissables sur C en $+\infty$. Si ϕ est une application définissable, on note $\tilde{\phi}$, l'image de ϕ par ce quotient. On sait que dans une structure o-minimale, toute application définissable a une limite finie ou infinie, à l'infini. On a

$$O_C = \{\tilde{\phi} \in K; lim_{x\to+\infty}\phi(x) \in C\}$$

et

$$o_C = \{\tilde{\phi} \in K; lim_{x\to+\infty}\phi(x) = 0\}$$

Proposition 1.3.13 . *C est résiduel dans K.*

Comme C est un corps o-minimal, C est réel-clos. Si on pose X l'image de l'identité par le quotient, $\{X^q; q \in \mathbb{Q}\}$ est une échelle de K ; ainsi il existe un section S de K sur C, contenant cette échelle. L'intérêt de K est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.3.14 . *K est une $\mathcal{L}$-structure et C est une sous-structure élémentaire de K.*

1.4 Exemple de désingularisation

Présentation du problème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ analytique sur un voisinage U de 0. On suppose que $f(0) = 0$, que f est non-nulle sur U et que f s'annule sur tout voisinage de 0, ailleurs qu'en 0, c'est-à-dire
$\forall r > 0 \;\; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \;\; |x| < r \wedge |y| < r \wedge f(x, y) = 0$. On veut résoudre localement autour de 0 l'équation

$$f(x, y) = 0$$

La manière classique de résoudre ce problème est décrite dans [DPT] ; ci-dessous nous le résolvons en utilisant une méthode qui introduit celle de la thèse.

Dans la suite, on peut supposer sans restreindre la généralité du problème que f s'annule sur tout voisinage strictement positif de 0, c'est-a-dire sur les ouverts de la forme $\prod_{i=1}^{n}]0, a_i[$ avec $a_i > 0$.

Notations :

- $\mathcal{A}_n$ sera l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ analytiques sur un voisinage de 0 et $\mathcal{A}_{n,0}$ sera le sous-ensemble de $\mathcal{A}_n$ des applications qui s'annulent en 0. De plus, on pose $\mathcal{A}_n^* = \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n,0}$ et $\mathcal{A}_{n,0}^* = \mathcal{A}_{n,0} \setminus \{0\}$.

- $\mathcal{L}$ sera le langage total de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que les sous-parties de $\mathbb{R}^n$ sont définissables dans ce langage

- on considère $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-extension **élémentaire** de $\mathbb{R}$ et **saturée** pour tout ensemble de formules de cardinal au plus celui de $\mathcal{L}$. Si s est un symbole de $\mathcal{L}$, on note $\tilde{s}$ l'interprétation de s dans $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ est donc un corps réel-clos et $\mathbb{R}$ est résiduel dans $\mathcal{M}$. De plus, on sait qu'il existe une section de $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{R}$. On applique à $\mathcal{M}$ les notions introduites précédemment en posant $o_{\mathbb{R}} = o$, $O_{\mathbb{R}} = O$; on note donc val, la valuation ainsi définie.
On introduit tout d'abord la définition et le résultat classiques suivants. La proposition 1.4.2 est un **théorème de préparation**. On note X la première variable et Y la deuxième.

Définition 1.4.1 . *Soit $f \in A_2$; f possède un* **ordre** *si il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(0) \neq 0$$

Si f possède un ordre, on notera $ord(f)$, le plus petit entier vérifiant la propriété ci-dessus.

Proposition 1.4.2 . *Soit $f \in \mathcal{A}_2$; il existe $g \in \mathcal{A}_2$, possédant un ordre et $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$f = X^n.g$$

localement autour de 0.

On introduit maintenant deux propositions modèle-théoriques dont on va se servir par la suite. La première est très liée à l'axiome d'Idéalisation de l'analyse non-standard de Nelson [DR].

Proposition 1.4.3 . *Soit σ une application de $\mathcal{M}^n$ dans l'ensemble des formules sur $\mathcal{L}$ à n variables libres. On suppose que*

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}^n \quad \mathcal{M} \models \sigma(x_1, ..., x_n)[x_1, ..., x_n]$$

alors il existe $F_1, ..., F_p$, p formules de $\mathcal{I}m(\sigma)$ telles que

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ ... \ \forall x_n \quad (F_1[x_1, ..., x_n] \vee ... \vee F_p[x_1, ..., x_n])$$

Preuve : on considère le n-type $p = \{\neg\sigma(a_1, ..., a_n); (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{M}^n\}$. Si p était réalisé dans $\mathcal{M}$, il existerait $(c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}^n$ tel que $\mathcal{M} \models \neg\sigma(c_1, ..., c_n)[c_1, ..., c_n]$. Or ceci est impossible par définition de σ. Donc p n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$; ainsi p n'est pas finiment réalisé dans $\mathcal{M}$, par saturation de $\mathcal{M}$. De ce fait, il existe $F_1, ..., F_p$, p formules de $\mathcal{I}m(\sigma)$ telles que $\{F_1, ..., F_p\}$ n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$. Ceci permet de conclure.
$\square_{proposition}$

Proposition 1.4.4 . *$\phi \in \mathcal{A}_{2,0}$ s'annule sur tout voisinage strictement positif de* 0 *si et seulement si*

$$\exists (\epsilon, \delta) \in o_+^* \times o_+^* \quad \tilde{\phi}(\epsilon, \delta) = 0$$

Preuve : Supposons que ϕ s'annule sur tout voisinage strictement positif de 0 alors

$$\mathbb{R} \models \forall r > 0 \ \ \exists x \ \ \exists y \ \ (x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x < r) \wedge (y < r) \wedge (\phi(x, y) = 0)$$

ainsi $\mathcal{M}$ satisfait la même formule donc comme $\mathcal{M}$ possède un élément infinitésimal, on peut prendre $r \in o_+^*$, ce qui conclut.

Supposons qu'il existe $(\epsilon, \delta) \in o_+^* \times o_+^*$ tel que $\tilde{\phi}(\epsilon, \delta) = 0$; alors pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \epsilon < r$ et $0 < \delta < r$ d'où :

$$\mathcal{M} \models \exists x \ \ \exists y \ \ (x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x < r) \wedge (y < r) \wedge (\phi(x, y) = 0)$$

ainsi $\mathbb{R}$ satisfait la même formule, ce qui conclut.
$\square_{proposition}$

On peut maintenant énoncer la résolution du problème posé au début de ce sous-chapitre.

Théorème 1.4.5 . *Soit $f \in \mathcal{A}_{2,0}^*$ telle que f s'annule sur tout voisinage strictement positif de 0 ; alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}$ applications $\theta_1, ..., \theta_p$ de $\mathcal{A}_{1,0}$ et $n \in \mathbb{N}$, tels que*

$$\forall (x,y) \in]0,r]^2 \ \ (f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists t \in [0, r^{\frac{1}{n}}] \ \ (x = t^n \wedge (y = \theta_1(t) \vee ... \vee y = \theta_p(t)))$$

On va avoir besoin des lemmes suivants pour prouver le théorème.

Lemme 1.4.6 . *Soient $f \in \mathcal{A}_{2,0}^*$ d'ordre $d > 1$ et $(\epsilon, \delta) \in o_+^* \times o_+^*$ tel que $f(\epsilon, \delta) = 0$;*

1) soit il existe $h \in \mathcal{A}_{2,0}^*$ d'ordre strictement inférieur à d, $(b,n,m) \in \mathbb{N}^3$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $(t,\mu) \in o_+^*$ tels que

$$f(X^n, \phi(X^n) + a.X^m + X^m.Y) = X^b.h(X,Y)$$

sur un voisinage de 0, avec

$$\epsilon = t^n$$

et

$$\delta = \phi(t^n) + a.t^m + \mu.t^m$$

2) soit il existe $t \in o_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathcal{A}_1$ telle que $\delta = \theta(t)$ et $\epsilon = t^n$.

Preuve :

Partie 1

Comme f est d'ordre d, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application ϕ, analytique sur un voisinage de 0 et qui s'annule en 0 telle que

$$\frac{\partial^{d-1} f}{\partial Y^{d-1}}(X, \phi(X)) = 0$$

sur ce voisinage. (Pour montrer que l'application est analytique, on peut par exemple utiliser les fonctions holomorphes.)
On pose $\delta = \phi(\epsilon) \pm \mu$, de façon à ce que μ soit positif. Ainsi $\mu \in o$. On suppose dans la suite, sans restreindre la généralité, que $\delta = \phi(\epsilon) + \mu$. Si $\mu = 0$, on conclut ; sinon, d'après la formule de Taylor, on a

$$f(\epsilon,\delta) = 0 = f(\epsilon,\phi(\epsilon)) + \mu.\frac{\partial f}{\partial Y}(\epsilon,\phi(\epsilon)) + \frac{\mu^2}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(\epsilon,\phi(\epsilon)) + ... + \frac{\mu^d}{d!}.\frac{\partial^d f}{\partial Y^d}(\epsilon,\phi(\epsilon)) + \mu^d.\zeta$$

avec $\zeta \in o$. Ainsi il existe $i < d$ tel que

$$val(\frac{\mu^d}{d!}.\frac{\partial^d f}{\partial Y^d}(\epsilon,\phi(\epsilon))) = val(\frac{\mu^i}{i!}.\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(\epsilon,\phi(\epsilon)))$$

Or, d'une part,

$$val(\frac{\partial^d f}{\partial Y^d}(\epsilon, \phi(\epsilon))) = 1$$

donc

$$val(\frac{\mu^d}{d!}.\frac{\partial^d f}{\partial Y^d}(\epsilon, \phi(\epsilon))) = val(\mu^d)$$

D'autre part, grâce à la proposition 1.4.2, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$val(\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(\epsilon, \phi(\epsilon))) = val(\epsilon^p)$$

Partie 2

De ce fait, il existe $t \in o_+^*$ et $\alpha \in O_+^*$ tels que

$$\epsilon = t^n$$

et

$$\mu = \alpha.t^m$$

Comme $\alpha \in O_+^*$, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\kappa \in o_+$ tels que $\alpha = a \pm \kappa$. (Dans la suite, on peut supposer que $\alpha = a + \kappa$.) Si $\kappa = 0$, on conclut ; sinon on pose

$$g(X, Y) = f(X^n, \phi(X^n) + a.X^m + Y.X^m)$$

Ainsi $g \in \mathcal{A}_{2,0}$ et $g(t, \kappa) = f(\epsilon, \delta) = 0$. D'après la proposition 1.4.2, il existe $h \in \mathcal{A}_2$, qui possède un ordre et $b \in \mathbb{N}$ tels que $g(X, Y) = X^b.h(X, Y)$; on pose $ord(h) = c$.

Partie 3

On a les deux égalités suivantes :

$$val(\frac{\partial^d g}{\partial Y^d}(t, \kappa)) = val(t^b).val(\frac{\partial^d h}{\partial Y^d}(t, \kappa)) = val(t^{m.d}).val(\frac{\partial^d f}{\partial Y^d}(t^n, \phi(t^n)+a.t^m+\kappa.t^m)))$$

et

$$val(\frac{\partial^c g}{\partial Y^c}(t, \kappa)) = val(t^b).val(\frac{\partial^c h}{\partial Y^c}(t, \kappa)) = val(t^{m.c}).val(\frac{\partial^c f}{\partial Y^c}(t^n, \phi(t^n)+a.t^m+\kappa.t^m))$$

Comme $ord(f) = d$, on tire de la première égalité $val(t^{m.d}) \leq val(t^b)$; comme $ord(h) = c$, on tire de la seconde égalité, $val(t^b) \leq val(t^{m.c})$. De ce fait,

$$m.c \leq b \leq m.d$$

Si $c < d$, on conclut ; sinon on a $m.c = b = m.d$. On se place dans ce cas. On va montrer, à la fin de la partie 5, que cette situation est impossible.

Partie 4

On pose

$$v = max_{0\leq i\leq d} val(\frac{t^{m.i}}{i!}.\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(t^n, \phi(t^n)))$$

et

$$e = max\{i \leq d; v = val(\frac{t^{m.i}}{i!}.\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(t^n, \phi(t^n)))\}$$

Montrons que $v = val(t)^{m.d}$.

Si $v > val(t)^{m.d}$, alors $e < d$. De plus, grâce à la formule de Taylor, on a

$$val(t^{m.d}).val(\frac{\partial^c h}{\partial Y^c}(t,\kappa)) = val(t^{m.e}).val(\frac{\partial^e f}{\partial Y^e}(t^n, \phi(t^n) + \alpha.t^m))$$

$$= \sum_{i=0}^{i=d-e} \alpha^i.\frac{t^{m.(e+i)}}{i!}.\frac{\partial^{e+i} f}{\partial Y^{e+i}}(t^n, \phi(t^n)) + t^{m.d}.\lambda$$

avec $\lambda \in o$.
On divise par v les égalités.

$$\frac{val(t^{m.d}).val(\frac{\partial^c h}{\partial Y^c}(t,\kappa))}{v} \in o$$

et

$$\sum_{i=0}^{i=d-e} \alpha^i.\frac{\frac{t^{m.(e+i)}}{i!}.\frac{\partial^{e+i} f}{\partial Y^{e+i}}(t^n, \phi(t^n))}{v} + \frac{t^{m.d}}{v}.\lambda \in O^*$$

Cette situation étant impossible, $v = val(t)^{m.d}$.

Partie 5

On considère les polynômes $P \in \mathcal{M}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^{i=d} X^i.\frac{t^{m.i}}{i!}.\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(t^n, \phi(t^n))$$

et

$$Q = \sum_{i=0}^{i=d} \frac{X^i}{i!}.std(\frac{t^{m.i}.\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}(t^n, \phi(t^n))}{t^{m.d}})$$

Comme $f(\epsilon, \delta) = 0 = P(\alpha) + t^{m.d}.\gamma$, avec $\gamma \in o$, $Q(a) = 0$.
De plus, Q est un polynôme non nul dont le coefficient de degré $d-1$ est nul. Comme $a \neq 0$, a **n'est pas une racine d'ordre d de Q**. Il existe donc $r < d$ tel que $Q^{(r)}(a) \neq 0$. Ceci signifie que h est d'ordre inférieur ou égal à r, ce qui est impossible.

$\square_{lemme}$

On en déduit le résultat suivant.

Lemme 1.4.7 *. Soient $f \in \mathcal{A}^*_{2,0}$ et $(\epsilon, \delta) \in o^*_+ \times o^*_+$ tel que $f(\epsilon, \delta) = 0$; il existe $n \in \mathbb{N}$, $t \in o^*_+$ et θ une application analytique sur un voisinage de 0 tels que*

$$\epsilon = t^n$$

et

$$\delta = \theta(t)$$

Preuve :

1) D'après la proposition 1.4.2, $f(X,Y) = X^b.h(X,Y)$, avec $b \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathcal{A}$. Comme $f(\epsilon, \delta) = 0$, $h(\epsilon, \delta) = 0$.

2) Si $ord(h) = 1$, il existe par le théorème des fonctions implicites, une application θ, analytique sur un voisinage de 0, telle que $\delta = \theta(\epsilon)$. On peut ainsi conclure.

3) Sinon, on utilise le lemme 1.4.6 ; ainsi soit on peut directement conclure, soit on se ramène à l'annulation d'une application h_1 telle que $ord(h_1) < ord(h)$.

4) En itérant ceci suffisamment de fois, on se retrouve dans la situation soit du 2, soit du début du 3. On peut dès lors conclure dans le cas général.
$\square_{lemme}$

Revenons au théorème :

Preuve - On considère l'application σ de $\mathcal{M}^2$ dans l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules à 2 variables telle que :

1) si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$,

$$\sigma(x,y) = (X \leq 0) \vee (Y \leq 0)$$

2) si $x > 0$ et $y > 0$ mais $x \notin o$ ou $y \notin o$,

$$\sigma(x,y) = (X \geq sup\{a \in \mathbb{R}; a \leq x\}) \vee (Y \geq sup\{a \in \mathbb{R}; a \leq y\})$$

3) si $(x,y) \in o^*_+ \times o^*_+$ et $f(x,y) \neq 0$,

$$\sigma(x,y) = f(X,Y) \neq 0$$

4) si $(x,y) \in o^*_+ \times o^*_+$ et $f(x,y) = 0$,

$$\sigma(x,y) = \exists T \quad (X = T^n) \wedge (Y = \theta(T))$$

avec n et θ les objets trouvés dans le lemme 1.4.7.

On se trouve dans les conditions d'applications de la proposition 1.4.3. On en déduit qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}$ applications de $\mathcal{A}_{1,0}$, $\theta_1, ..., \theta_p$ et $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\forall (x,y) \in [0,r]^2 \ \ (f(x,y) = 0 \Rightarrow \exists t \in [0, r^{\frac{1}{n}}] \ \ (x = t^n \wedge (y = \theta_1(t) \vee ... \vee y = \theta_p(t)))$$

On s'intéresse maintenant à l'implication inverse. Soit $(x,y) \in o_+^* \times o_+^*$, tel que $f(x,y) = 0$; il existe $t \in o_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $i \leq p$ tels que $x = t^n$ et $y = \theta_i(t)$. Ainsi $f(t^n, \theta_i(t)) = 0$; comme f est analytique, ceci implique que $f(X^n, \theta_i(X^n))$ est localement nulle.

Grâce à ceci, on peut conclure.
$\square_{theoreme}$

Dans la démonstration ci-dessus, les arguments sont classiques. Le chapitre 2 utilisera des idées proches ; mais d'une part il doit le faire avec des fonctions quasi-analytiques qui ne sont pas forcément analytiques. D'autre part, lorsqu'on considère des applications à 3 variables, on ne peut plus utiliser la proposition 1.4.2. C'est cette difficulté qui amène à introduire les familles stables.

Chapitre 2

Etude de classes quasi-analytiques

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 . *On appellera* **basique**, *un pavé compact de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* 0 *appartient à son intérieur. On dira qu'une application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est* **définie** *par une fonction* g *sur un pavé basique* P *si elle vaut* g *sur* P *et* 0 *en dehors. Par extension,* f *est définie sur* P *si elle vaut* 0 *en dehors.*

Définition 2.1.2 . *Soit* $\mathcal{F}$ *un ensemble d'applications de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$*, chacune définie sur un pavé basique et* C^∞ *sur ce même pavé ; on considère* $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ *le langage des anneaux ordonnés contenant un symbole de fonction* $X^{\frac{1}{p}}$*, pour les puissances* $\frac{1}{p}$*-ième* ($p \in \mathbb{Z}^*$) *et un symbole de fonction pour tout fonction de* $\mathcal{F}$*. On interprète dans* $\mathbb{R}$ *le symbole* $X^{\frac{1}{p}}$ *par l'application* $X^{\frac{1}{p}}$ *usuelle rendue totale en prolongeant par* 0 *si nécessaire. Ainsi, par exemple,* $0^{-1} = \frac{1}{0} = 0$.
Soit $\overline{\mathcal{F}}$ *le plus petit ensemble de fonctions* C^∞ *sur des pavés basiques, qui contient* $\mathcal{F}$ *et vérifie les conditions suivantes ; on suppose que* f *et* g *sont des interprétations dans* $\mathbb{R}$ *de termes de* $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{F}}}$*, telles que* f *est d'arité* n *et* h *est d'arité* $n+1$

1*)* $\mathbb{R} \subset \overline{\mathcal{F}}$ *et les indicatrices des pavés basiques appartiennent à* $\overline{\mathcal{F}}$.

2*)* **Définition implicite** C^∞ *: si* h *est* C^∞ *sur un pavé basique* P *et si* $h(0) = 0 \neq \frac{\partial h}{\partial X_{n+1}}(0)$ *alors l'application définie par* ϕ *sur le pavé basique* D *est dans* $\overline{\mathcal{F}}$*, chaque fois que* $h(X_1, ..., X_n, \phi(X_1, ..., X_n)) = 0$ *sur* D *et que* $\frac{\partial h}{\partial X_{n+1}} \neq 0$ *sur* $D \times [-a, a]$ *pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3*)* **Division** C^∞ *: si* f *est* C^∞ *sur un pavé basique* P *alors l'application définie par* g *sur le pavé basique* Q *est dans* $\overline{\mathcal{F}}$*, chaque fois que* g *est* C^∞ *sur* $Q \subset P$ *et* $f = X_i.g$ *sur* Q ($1 \leq i \leq n$).

Remarque 2.1.3 .
1*) Par le théorème des fonctions implicites, il existe toujours* ϕ *et* D *comme dans la condition* 2 *ci-dessus et* ϕ *est unique sur* D*.*

2*) En revanche* D *n'est pas unique ; mais plutôt que de faire le choix arbitraire d'un seul pavé* D*, nous appliquons* 2 *pour tous les couples* ϕ *et* D *possibles. Cependant on peut montrer que l'ensemble* $\overline{\mathcal{F}}$ *qui en résulte est le même que si un seul* D *était choisi.*

3*) Il en va de même pour* 3*.*

4*) La clôture de* $\mathcal{F}$ *est contenue dans sa clôture définissable, avec* $\mathbb{R}$ *comme paramètres. C'est immédiat pour les assertions* 1 *et* 2*. Pour* 3*, il suffit de voir que* g *peut être définie ainsi : soit* $(x_1, ..., x_n) \in Q$*, si* $x_i \neq 0$*,* $g(x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1,...,x_n)}{x_i}$ *; sinon* $g(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1, ..., 0, ..., x_n)$*.*

Définition 2.1.4 *. En utilisant les notations précédemment données, on dira que* $\overline{\mathcal{F}}$ *est* **quasi-analytique** *si toutes les fonctions non nulles de* $\overline{\mathcal{F}}$ *sont de multiplicité finie en* 0*.*

On considère ainsi dans la suite une famille $\overline{\mathcal{F}}$ quasi-analytique et on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{F}}}$.
$\mathbb{R}$ est donc une $\mathcal{L}$-structure ; on note $T_{\mathbb{R}}$ sa théorie.

On notera T la théorie exprimant :

1) les propriétés de $\overline{\mathcal{F}}$ énoncées dans la définition 2.1.2. On a donc une formule universelle pour chaque énoncé de 2 et 3 dans la définition 2.1.2. Nous appellerons les formules, axiomes de définition implicite et axiomes de division C^∞.

2) la définition des puissances $\frac{1}{p}$-ième pour $p \in \mathbb{Z}^*$, en précisant qu'on pose $0^{-1} = \frac{1}{0} = 0$ et $x^{\frac{1}{p}} = 0$ pour p pair et x négatif.

3) le fait que chaque fonction de $\overline{\mathcal{F}}$ est bornée en valeur absolue (puisque continue sur un pavé compact et nulle en dehors).

4) le diagramme simple de $\mathbb{R}$ pour $\mathcal{L}$

5) les axiomes universels d'anneaux ordonnés

T est ainsi une théorie universelle et $T \subset T_{\mathbb{R}}$. De plus, $\mathbb{R}$ se plonge canoniquement dans tout modèle de T. On démontrera à la fin que $T \vdash T_{\mathbb{R}}$.

Remarque 2.1.5 *. Pour commencer,* T *démontre toutes les identités* $t = 0$*, où* $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$*, qui sont dans* $T_{\mathbb{R}}$*, par l'axiome de division triviale* $t = X_1.0$*.*

$\mathcal{L}^n$ désignera l'ensemble des applications déinies par des termes d'arités n. $\mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ (respectivement $\mathcal{L}^{\infty,n}$) sera l'ensemble des applications définies par des termes d'arité n, C^∞ sur le pavé basique P (respectivement C^∞ sur un certain voisinage de 0). $\mathcal{L}_0^{\infty,n}(P)$ (respectivement $\mathcal{L}_0^{\infty,n}$) sera le sous-ensemble de $\mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ (respectivement $\mathcal{L}^{\infty,n}$) des fonctions qui s'annulent en 0.

On peut remarquer que le langage ne contient pas de symbole pour les dérivées partielles ; on va montrer maintenant qu'en fait il existe des applications de $\mathcal{L}$ qui jouent ce role.

Proposition 2.1.6 . *Soit $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ et Q un pavé basique inclus dans l'intérieur de P, l'application h définie par $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ sur Q $(1 \leq i \leq n)$ appartient à $\mathcal{L}^{\infty,n}(Q)$.*

On va avoir besoin d'une définition et d'un lemme pour démontrer cette proposition.

Définition 2.1.7 . *Soit $E = (t_i)_{i\in I}$ un ensemble de termes de $\mathcal{L}^{\infty,n}$; on appelle* **support** *de E, noté supp(E), l'ensemble*

$$\{(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n; \exists i \in I \quad \frac{\partial^{j_1+...+j_n} t_i}{\partial X_1^{j_1} ... \partial X_n^{j_n}}(0) \neq 0\}$$

Soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$, on appelle support de t, noté supp(t), le support de l'ensemble $\{t\}$.

Lemme 2.1.8 . *Soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ tel que la première coordonnée des éléments de supp(t) n'est jamais nulle alors il existe $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ telle que $t = X_1.f$ sur P.*

Preuve : On a :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in P \ t(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{dt}{du}(0, u.x_2, ..., u.x_n)du + \int_0^1 \frac{dt}{du}(u.x_1, x_2, ..., x_n)du$$

on considère l'application $s(X_2, ..., X_n) = t(0, X_2, ..., X_n)$; par définition de t, on sait que toutes les dérivées partielles de s sont nulles en 0 ; en utilisant la multiplicité finie de t, on obtient que s est nulle sur toute la projection de P. Ainsi, on a :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in P \ t(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{dt}{du}(u.x_1, x_2, ..., x_n)du = x_1. \int_0^1 \frac{\partial t}{\partial X_1}(u.x_1, x_2, ..., x_n)du$$

On pose ainsi $f(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{\partial t}{\partial X_1}(u.x_1, x_2, ..., x_n)du$ sur P et 0 en dehors de P

$\square_{lemme}$

Preuve de la proposition 2.1.6 : Soit $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ et Q un pavé basique inclus dans l'intérieur de P. On pose

$$g(X_1, ..., X_{n+1}) = f(X_1, ..., X_i + X_{n+1}, ..., X_n) - f(X_1, ..., X_n)$$

Comme Q est dans l'intérieur de P, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in Q$ et pour tout $y \in [-a, a]$, $(x_1, ..., x_i + y, ..., x_n) \in P$; ainsi $g \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(Q \times [-a, a])$. D'après le lemme 2.1.8, $g = X_{n+1}.\phi$ sur $Q \times [-a, a]$ avec $\phi \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(Q \times [-a, a])$. Or

$$\phi(X_1, ..., X_n, 0) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_1, ..., X_n)$$

sur Q. On pose ainsi $h(X_1, ..., X_n) = \phi(X_1, ..., X_n, 0)$.
$\square_{proposition}$

Notation 2.1.9 . *Soit $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$; comme $\overline{\mathcal{F}}$ n'est pas clos par dérivation partielle et qu'il y a un problème d'existence au bord de P, on convient que $\frac{\partial^{i_1+...+i_n} f}{X_1^{i_1}...X_n^{i_n}}$ désignera l'application qui vaut $\frac{\partial^{i_1+...+i_n} f}{X_1^{i_1}...X_n^{i_n}}$ sur $\frac{P}{2}$ (c'est-à-dire le pavé dont toutes les coordonnées sont divisées par 2) et non sur P, et 0 en dehors.*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T, $o_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ représentera l'ensemble des infinitésimaux de $\mathcal{M}$ par rapport à $\mathbb{R}$ et $O_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, l'ensemble des limités. Si $x \in O$, on appelera **partie standard** de x, noté $std(x)$ l'unique réel tel que $x - std(x) \in o_{\mathcal{M}}$.
Dans la suite, jusqu'à la fin du chapitre 2, on fixe un modèle quelconque $\mathcal{M}$ et on travaille uniquement dedans ; on notera ainsi o pour $o_{\mathcal{M}}$ et O pour $O_{\mathcal{M}}$. De plus, si $t \in \mathcal{L}$, on notera encore t l'interprétation de ce terme dans $\mathcal{M}$. Enfin, on utilisera comme topologie pour $\mathcal{M}$, la topologie classique de l'ordre.

On va relier les dérivées partielles définies ci-dessus aux dérivées partielles de $\mathcal{M}$.

Proposition 2.1.10 . *Soit $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}^n \cap \frac{P}{2}$, f est dérivable par rapport à X_i en $(x_1, ..., x_n)$* **dans** $\mathcal{M}$ *et cette dérivée partielle coïncide avec l'interprétation du terme $\frac{\partial f}{\partial X_i}$.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}^n \cap \frac{P}{2}$. En utilisant les notations de la preuve de la proposition 2.1.6, on a grâce aux axiomes de division C^∞ de la théorie T que

$$\mathcal{M} \models \forall (u_1, ..., u_n, u_{n+1}) \in \frac{P}{2} \times [-a, a] \quad g(u_1, ..., u_{n+1}) = u_{n+1}.\phi(u_1, ..., u_{n+1})$$

De plus, pour les mêmes raisons,

$$\mathcal{M} \models \forall (u_1, ..., u_n, u_{n+1}) \in \frac{P}{2} \times [-a, a] \quad \phi(u_1, ..., u_{n+1}) = \phi(u_1, ..., u_n, 0) + u_{n+1}.\theta(u_1, ..., u_{n+1})$$

avec $\theta \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(\frac{P}{2} \times [-a,a])$.
Or grâce aux axiomes 3 de T, il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathcal{M} \models \forall (u_1,...,u_{n+1}) \in \frac{P}{2} \times [-a,a] \quad -b \leq \theta(u_1,...,u_{n+1}) \leq b$$

Ainsi on a bien que dans $\mathcal{M}$

$$lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n)-f(x_1,...,x_n)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1,...,x_n) + h.\theta(u_1,...,u_n,h) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1,...,x_n)$$

$\square_{proposition}$

Corollaire 2.1.11 . *Soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$, pour tout $(x_1,...,x_n,\epsilon_1,...,\epsilon_n) \in o^{2n}$*

$$t(x_1+\epsilon_1,...,x_n+\epsilon_n) = t(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i . \frac{\partial t}{\partial X_i}(x_1,...,x_n) + \mu.max_{1\leq i\leq n}(|\epsilon_i|)$$

avec $\mu \in o$

Corollaire 2.1.12 . *Soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$, t est C^∞ sur P* **dans** *$\mathcal{M}$.*

Remarque 2.1.13 . *La théorie T ne comporte pas d'axiome exprimant la multiplicité finie des termes C^∞ non nuls du langage ; en fait, ces énoncés sont des théorèmes de T par le biais de la "division C^∞" qui permet d'obtenir toutes les formules de Taylor.*

Définition 2.1.14 . *La valuation sur $\mathcal{M}$ utilisée par la suite sera la valuation naturelle* **croissante** *et sera notée val ; si $(x,y) \in o^2$, $val(x) = val(y)$ si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathcal{M}_+^* \quad a.|x| \leq |y| \leq b.|x|$*

Définition 2.1.15 . *Soit $(x_1,...,x_n) \in o^n$, cette famille est* **indépendante** *si pour tout $(q_1,...,q_n) \in \mathbb{Q}^n$ non nul, le produit $x_1^{q_1}.....x_n^{q_n}$ est infiniment petit ou infiniment grand.*
Dans le cas contraire, la famille est dite **liée**.

Définition 2.1.16 . *Un infiniment petit y est* **lié** *à une famille $\{x_1,...,x_n\}$ si il existe un uplet $(q_1,...,q_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que y et $x_1^{q_1}.....x_n^{q_n}$ ont même valuation.*

Définition 2.1.17 . *Soient $(x_1,...,x_n)$ et $(a_1,...,a_p)$ des uplets de o ; $\overline{a} \preceq \overline{x}$ s'il existe n fonctions $\phi_1,...,\phi_n$ de $\mathcal{L}_0^{\infty,p}$ et p termes $t_1,...,t_p$ de $\mathcal{L}^n$ tels que :*
1) $\forall\ 1 \leq i \leq n \quad x_i = \phi_i(a_1,...,a_p)$

2) $\forall\ 1 \leq j \leq p \quad a_j = t_j(x_1,...,x_n)$

Définition 2.1.18 . *Soient $(x_1,...,x_n)$ et $(a_1,...,a_p)$ des uplets de o ; $\overline{a} \preceq^P \overline{x}$ si :*
1) $\forall\ 1 \leq i \leq n \quad x_i = a_1^{m_{i,1}}.a_2^{m_{i,2}}...a_p^{m_{i,p}}$ *avec* $m_{i,l} \in \mathbb{N}$

2) $\forall\ 1 \leq j \leq p \quad a_j = x_1^{k_{j,1}}...,x_n^{k_{i,p}}$ *avec* $k_{j,l} \in \mathbb{Q}$

On a ainsi que $\preceq^P$ implique $\preceq$. De plus, ces deux relations sont **réflexives** et **transitives**.

2.2 Stabilité

Définition 2.2.1 *(Stabilité). Soit $(x_1, ..., x_n)$ un n-uplet de o_+^*, ce uplet est* **stable** *si $t(x_1, ..., x_n)$ est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$, pour tout terme t,* **non localement nul dans $\mathcal{M}$ en** *$(x_1, ..., x_n)$ et tel que $t(x_1, ..., x_n) \in o$.*

On a quelques propriétés immédiates qui découlent de la définition de la stabilité et de la multiplicité finie.

Proposition 2.2.2 *. Soient $(a_1, ..., a_n)$ et $(x_1, ..., x_n)$ deux familles stables telles que $(a_1, ..., a_n) \preceq (x_1, ..., x_n)$ alors :*

1) x_i est lié à $\{a_1, ..., a_n\}$ et a_i est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$, pour $1 \leq i \leq n$.

2) si $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ et si $t(x_1, ..., x_n) = 0$ alors t est nulle sur P.

3) toute permutation de $(x_1, ..., x_n)$ conserve la stabilité.

4) si $(x_1, ..., x_{n+1})$ est stable et si x_{n+1} est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$, $(x_1, ..., x_n)$ est stable.

Preuve : On va montrer les assertions 1 et 2. Comme $(a_1, ..., a_n) \preceq (x_1, ..., x_n)$, il existe $\phi_1, ..., \phi_n$ dans $\mathcal{L}^{\infty,p}$ et $t_1, ..., t_p$ dans $\mathcal{L}^n$ tels que $x_i = \phi_i(a_1, ..., a_p)$ et $a_i = t_i(x_1, ..., x_n)$.

Dans le cas 1, comme $(a_1, ..., a_n)$ est stable, $t_i(a_1, ..., a_p)$ est soit nul, soit lié à $\{a_1, ..., a_p\}$; or $x_i \neq 0$ donc x_i est lié à $\{a_1, ..., a_p\}$. De la même façon, a_i est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$.

Dans le cas 2, si $t(x_1, ..., x_n) = 0$ alors t est localement nul dans $\mathcal{M}$ autour de $(x_1, ..., x_n)$. Ainsi, d'après le corollaire 2.1.11, $t(x_1, ..., x_n) = t(0) + \delta = 0$ avec $\delta \in o$. Donc $t(0) = 0$. De plus, toujours grâce à ce corollaire, pour $\epsilon \in o$,

$$t(x_1, ..., x_i + \epsilon, ..., x_n) = t(x_1, ..., x_n) + \epsilon . \frac{\partial t}{\partial X_i}(x_1, ..., x_n) + \mu.\epsilon$$

Ainsi pour ϵ suffisamment petit, $\epsilon . \frac{\partial t}{\partial X_i}(x_1, ..., x_n) + \mu.\epsilon = 0$, ce qui entraîne que $\frac{\partial t}{\partial X_i}(0) = 0$. On itère cet argument afin d'obtenir que toutes les dérivées partielles de t sont nulles en 0. Par quasi-analycité, t est donc localement nulle dans $\mathbb{R}$; on sait maintenant que t est donc nulle sur tout le domaine réel où elle est C^∞ et quasi-analytique ; ainsi t est nul sur P dans $\mathcal{M}$ par la remarque 2.1.5. $\square_{proposition}$

Proposition 2.2.3 *. Soit $(x_1, ..., x_n)$ un uplet stable ; soient s et t deux termes, A et B deux ouverts de $\mathcal{M}$ tels que :*

1) $(x_1, ..., x_n) \in A$

2) $s(x_1, ..., x_n) \in o$ *et* x_n *est lié à* $\{x_1, ..., x_{n-1}, s(x_1, ..., x_n)\}$.

3) s *est continu sur* A *et* t *est continu sur* B

4) $\forall (u_1, ..., u_n) \in A \;\; (u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n)) \in B$ *et*
$\forall (v_1, ..., v_n) \in B \;\; (v_1, ..., v_{n-1}, t(v_1, ..., v_n)) \in A$

5) $\forall (u_1, ..., u_n) \in A \;\; t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n)) = u_n$ *et*
$\forall (v_1, ..., v_n) \in B \;\; s(v_1, ..., v_{n-1}, t(v_1, ..., v_n)) = v_n$

alors $(x_1, ..., x_{n-1}, s(x_1, ..., x_n))$ *est stable.*

Preuve : On pose $X = s(\overline{x})$. Soit $f \in \mathcal{L}^n$, on pose $g(Z_1, ..., Z_n) = f(Z_1, ..., Z_{n-1}, s(Z_1, ..., Z_n))$. g est ainsi un terme de $\mathcal{L}^n$ et $f(x_1, ..., x_{n-1}, X) = g(\overline{x})$. De ce fait, soit on a que g n'est pas localement nul en $\overline{x}$; ceci implique que $f(x_1, ..., x_{n-1}, X)$ est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$ et donc à $\{x_1, ..., X\}$, grâce à l'hypothèse 2. Soit g est localement nul en $\overline{x}$. On va montrer que ceci implique que f est localement nul en $(x_1, ..., x_{n-1}, X)$, ce qui conclura.
Dans ce cas, il existe un ouvert $U \subset \mathcal{M}^n$ tel que $(x_1, ..., x_n) \in U$ et g est nul sur U. On pose $\varphi : B \to \mathcal{M}^n$ telle que $\varphi(v_1, ..., v_n) = (v_1, ..., v_{n-1}, t(v_1, ..., v_n))$ et $V = \varphi^{-1}(U) \cap B$. Or U et B sont des ouverts, φ est continue sur B ; donc V est un ouvert de $\mathcal{M}^n$. De plus, par définition de X et grâce aux hypothèses 1, 4 et 5, $(x_1, ..., x_{n-1}, X) \in V$. Soit maintenant $(a_1, ..., a_n) \in V$, $g(a_1, ..., a_{n-1}, t(a_1, ..., a_n)) = 0$. Or par l'hypothèse 5,

$$f(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_{n-1}, s(a_1, ..., a_{n-1}, t(a_1, ..., a_n)))$$

D'où $f(a_1, ..., a_n) = g(a_1, ..., a_{n-1}, t(a_1, ..., a_n)) = 0$.
$\square_{proposition}$

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.4 . *Soit* $(x_1, ..., x_n)$ *un uplet stable,*

1) *si* $\prod_{j=1}^{j=n} x_j^{q_j} \in o$ *avec* $q_j \in \mathbb{Q}$ *et* $q_n \neq 0$, $(x_1, ..., x_{n-1}, \prod_{j=1}^{j=n} x_j^{q_j})$ *est stable*

2) *on suppose que* x_n *est lié à* $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ *et que* $f \in \mathcal{L}_0^{\infty,n}$ *est telle que* $\frac{\partial f}{\partial X_n}(0) \neq 0$. *On pose* $v = \pm f(x_1, ..., x_n)$, *de façon à ce que* v *soit positif;* $(x_1, ..., x_{n-1}, v)$ *est stable*

Preuve : On vérifie dans les cas 1 et 2 que les conditions de la proposition 2.2.3 sont satisfaites.
1) On pose, par exemple, $A = B = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}^n; (x_1 > 0) \wedge ... \wedge (x_n > 0)\}$, $s(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{j=n} x_j^{q_j}$ et $t(x_1, ..., x_n) = (\frac{x_n}{\prod_{j=1}^{j=n-1} x_j^{q_j}})^{\frac{1}{q_n}}$

2) On suppose que $f(x_1, ..., x_n) > 0$. Dans ce cas, on sait qu'il existe une fonction $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ telle que localement autour de 0 dans $\mathbb{R}$,

$$f(X_1, ..., X_{n-1}, t(X_1, ..., X_n)) - X_n = 0$$

On pose ainsi, par exemple, $A = B = o$, $s = f$. Le seul point délicat est de montrer que pour $(u_1, ..., u_n) \in o^n$, $t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n)) = u_n$. On sait que

$$f(u_1, ..., u_{n-1}, t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n))) = s(u_1, ..., u_n) = f(u_1, ..., u_n)$$

Comme $t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n)) \in o$, $t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n)) = u_n + \epsilon$ avec $\epsilon \in o$. Ainsi, par Taylor, on a

$$f(u_1, ..., u_{n-1}, t(u_1, ..., u_{n-1}, s(u_1, ..., u_n))) - f(u_1, ..., u_n) = \epsilon.\lambda$$

avec $\lambda \in O^*$. De ce fait $\epsilon = 0$.
$\square_{corollaire}$

Proposition 2.2.5 . *Soient $(x_1, ..., x_n, y)$ et $(a_1, ..., a_n)$ deux familles stables telles que $(a_1, ..., a_n) \preceq (x_1, ..., x_n)$; $(a_1, ..., a_n, y)$ est stable.*

Preuve : Par hypothèse, on a $x_i = \phi_i(a_1, ..., a_n)$ et $a_i = u_i(x_1, ..., x_n)$ avec $\phi_i \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ et $u_i \in \mathcal{L}^n$. Soit $t \in \mathcal{L}^{n+1}$, on pose

$$s(X_1, ..., X_n, Y) = t(u_1(X_1, ..., X_n), ..., u_n(X_1, ..., X_n), Y)$$

Soit s n'est pas localement nul en $(x_1, ..., x_n, y)$ et dans ce cas, $s(x_1, ..., x_n, y)$ est lié à $\{x_1, ..., x_n, y\}$; ainsi $t(a_1, ..., a_n, y)$ est lié à $\{a_1, ..., a_n, y\}$. Soit s est localement nul en $(x_1, ..., x_n)$; dans ce cas, montrons que t est localement nul en $(a_1, ..., a_n, y)$. Par définition, il existe un ouvert U tel que s est nul sur U et $(x_1, ..., x_n, y) \in U$. On pose $\sigma : o^{n+1} \to \mathcal{M}^{n+1}$ telle que $\sigma(A_1, ..., A_n, Y) = (\phi_1(A_1, ..., A_n), ..., \phi_n(A_1, ..., A_n), Y)$. On note $V = \sigma^{-1}(U)$. Ainsi $(a_1, ..., a_n, y) \in V$. De plus, on sait que pour tout $i \leq n$, $u_i(\phi_1(a_1, ..., a_n), ..., \phi_n(a_1, ..., a_n)) = a_i$ donc il existe un ouvert $V_i \subset \mathcal{M}^n$ tel que

$$\forall (A_1, ..., A_n) \in V_i \quad u_i(\phi_1(A_1, ..., A_n), ..., \phi_n(A_1, ..., A_n)) = A_i$$

et $(a_1, ..., a_n) \in V_i$. On pose $W = V \cap \bigcap_{i=1}^{i=n} V_i \times o$. Ainsi $(a_1, ..., a_n, y) \in W$. Soit $(A_1, ..., A_n, Y) \in W$,

$$t(A_1, ..., A_n, Y) =$$

$$t(u_1(\phi_1(A_1, ..., A_n), ..., \phi_n(A_1, ..., A_n)), ..., u_n(\phi_1(A_1, ..., A_n), ..., \phi_n(A_1, ..., A_n)), Y)$$

$$= s \circ \sigma(A_1, ..., A_n, Y)$$

Or $\sigma(A_1, ..., A_n, Y) \in U$ donc t est nul sur W.
$\square_{proposition}$

Lemme 2.2.6 *.Soient $t \in \mathcal{L}_0^{\infty,n+1}(P)$ et $(x_1,...,x_n)$ une famille stable ; on suppose qu'il existe $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $s_i \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$ tels que*

$$\frac{\partial^i t}{\partial X_{n+1}^i}(x_1,x_2,...,x_n,0) = x_1^{a_1}...x_n^{a_n}.s_i(x_1,...,x_n)$$

alors il existe $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(P)$ telle que $t = X_1^{a_1}...X_n^{a_n}.f$ sur P, avec $\frac{\partial^i f}{\partial X_{n+1}^i} = s_i$.

Preuve : On constate tout d'abord que si

$$\frac{\partial^i t}{\partial X_{n+1}^i}(x_1,x_2,...,x_n,0) = x_1^{a_1}...x_n^{a_n}.s_i(x_1,...,x_n)$$

grâce à la stabilité,

$$\frac{\partial^i t}{\partial X_{n+1}^i}(X_1,X_2,...,X_n,0) = X_1^{a_1}...X_n^{a_n}.s_i(X_1,...,X_n)$$

pour $(X_1,...,X_n,0) \in P$. Ainsi en appliquant le lemme 2.1.8 $a_1 + ... + a_n$ fois, on obtient le lemme.
$\square_{lemme}$

Quelques explications.

Les familles stables peuvent être vues comme des endroits où *il ne se passe rien*. Comme localement (dans un modèle $\mathcal{M}$) autour des familles stables, *il ne se passe rien* non plus, on est en présence de zones *neutres* de $\mathcal{M}$ qui vont rester *neutres* quelques soient les transformations par des termes de $\mathcal{L}$ qu'on fera subir à $\mathcal{M}$.
Par exemple, on peut considérer un terme $t \in \mathcal{L}^{\infty,3}$; on représente graphiquement, dans o^2, l'ensemble où t s'annule dans o (on ne s'intéresse qu'on côté positif) ; il est clair qu'on ne sait pas à l'avance que l'ensemble d'annulation de t est de cette forme (on ne le saura qu'à la fin...), il s'agit juste d'un exemple. On représente aussi une famille stable (x,y) de $\mathcal{M}$.

On voit que la famille stable n'est déjà pas sur les branches d'annulation de t : la proposition 2.2.2 assure cela dans le cas général. De plus, on *voit* graphiquement la zone *neutre* qui contient (x, y).
Déformons cette courbe par une transformation de $\mathcal{L}$, l'application qui à (X, Y) associe $(\phi(X, Y), \psi(X, Y))$ avec ϕ et ψ deux termes C^∞ autour de 0. On obtient, par exemple, le graphique suivant.

La zone *neutre* de départ est toujours clairement repérable : c'est la zone connexe qui contient le point et qui est délimitée par les branches. On peut ainsi appliquer autant de transformations que l'on veut ; les règles du jeu maintenant vont être :

$\diamond$ à chaque étape de transformation, on doit pouvoir revenir en arrière ; ce retour doit être C^∞. On va introduire pour ce faire la notion de matrice : les transformations dont on parle sont en fait des sortes de *matrices de passages*, comme en algèbre linéaire.

$\diamond$ à la fin, on veut arriver à une situation *sympathique*. Voilà en fait ce vers quoi on veut tendre.

On a complètement désingularisé la zone *neutre* qui nous intéressait : on a redressé les branches d'annulation qui bordait cette zone, jusqu'à les envoyer sur les axes. On ne s'occupe pas de ce qui est arrivé à la troisième branche.Cette situation correspond au théorème de préparation 2.4.9.
La famille stable (x, y) a donc agi comme une sorte de *fil d'Ariane* pour ne pas perdre la zone *neutre* de départ.

On a utilisé le terme *algèbre linéaire* par rapport aux matrices ; la comparaison ne s'arrête pas là. Les familles stables peuvent aussi être vues comme une sorte de *base* de o^n : les familles stables sont plus que *libres* (proposition 2.2.2) et surtout génératrices (théorème 2.5.13).
Il est toujours intéressant de trouver dans des structures des notions d'indépendance et de génération ; par exemple, on a la notion d'indépendance dans la stabilité modèle-théorique ([P], entre autres). On peut aussi définir la *transcendance* modèle-théorique dans un corps :

$(x_1, ..., x_n)$ est transcendant si les seules focntions définissables qui s'annulent en $(x_1, ..., x_n)$ sont localement nulles

Dans les corps valués, on a aussi la notion d'indépendance pour la valuation.
En fait, ces deux dernières notions ne sont pas suffisantes. C'est pourquoi on introduit les familles stables.
Il faut remarquer que la stabilité englobe les notions d'indépendance présentées.
On peut démontrer que les familles stables sont transcendantes. On montrera aussi (corollaire 2.5.10) que toute famille indépendante est stable et même (proposition 2.5.11) que si $(x_1, ..., x_n)$ est stable et y est indépendant de $(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n, y)$ est encore indépendant.
Cependant, il faut noter que les familles stables ne sont pas des matroïdes ([Wh]), contrairement à ce qu'on attend généralement des familles indépendantes.

2.3 Matrices

Supposons $(a_1, ..., a_p) \preceq (x_1, ..., x_n)$; il existe donc $\sigma_1, ..., \sigma_n$ dans $\mathcal{L}^{\infty,p}$ et $t_1, ..., t_p$ dans $\mathcal{L}^n$ tels que $x_i = \sigma_i(a_1, ..., a_p)$ et $a_i = t_i(x_1, ..., x_n)$. Nous souhaitons appeler **matrice** le n-uplet $M = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$, écrire $(x_1, ..., x_n) = M(a_1, ..., a_n)$ et $(a_1, ..., a_p) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$ et nous inspirer des notations matricielles pour la transformation $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ qui envoie le point $(a_1, ..., a_p)$ sur $(x_1, ..., x_n)$. La suite va préciser ceci.

Définition 2.3.1 . *On appelle* **matrice** *de dimension $n \in \mathbb{N}$ (ou n-matrice), un n-uplet de termes de $\mathcal{L}_0^{\infty,n}$ et on note $\mathcal{M}_n$, l'ensemble de celles-ci.*

Remarque 2.3.2 . *Dans la suite, on considèrera que si $f \in \mathcal{L}^{\infty,p}$ avec $p \leq n$ alors $f \in \mathcal{L}^{\infty,n}$; les $n - p$ variables restantes sont donc "muettes".*

Définition 2.3.3 *On fixe $(x_1, ..., x_n) \in o^n$.*

1*) Soit $M = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ une n-matrice, M est* **de rang** *p ($p \leq n$) en $(x_1, ..., x_n)$, si il existe p termes $u_1, ..., u_p$ de $\mathcal{L}^n$ tels que $u_i(x_1, ..., x_n) \in o$ et*

$$x_i = \sigma_i(u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_p(x_1, ..., x_n))$$

On note M^{-1} le p-uplet $(u_1, ..., u_p)$, de sorte que $M^{-1}(x_1, ..., x_n) \preceq (x_1, ..., x_n)$.

M^{-1} n'est pas forcément unique, mais M^{-1} sera toujours supposé être spécifié quand on travaillera avec M.

Si M est de rang n, M est **inversible**.

$\mathcal{G}_{n,p}(x_1, ..., x_n)$ désignera l'ensemble des n-matrices de rang p et $\mathcal{G}_n(x_1, ..., x_n)$ l'ensemble des matrices inversibles.

2*) Soit M une n-matrice, M est* **ouverte** *en $(x_1, ..., x_n)$ si M est inversible en $(x_1, ..., x_n)$ et l'image d'un voisinage de $M^{-1}(x_1, ..., x_n)$ est un voisinage de $(x_1, ..., x_n)$.*

On note $\mathcal{O}_n(x_1, ..., x_n)$ l'ensembles des matrices ouvertes en $(x_1, ..., x_n)$.

3*) On suppose dans la suite que $(x_1, ..., x_n)$ est stable ; on appelle* **matrice stable** *en $(x_1, ..., x_n)$ de dimension n, une n-matrice M inversible en $(x_1, ..., x_n)$ telle que $M^{-1}(x_1, ..., x_n)$ est stable. On note $\mathcal{S}_n(x_1, ..., x_n)$ l'ensemble correspondant.*

On a ainsi la notation suivante.

Notation 2.3.4 . *Soit $M = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ une n-matrice*

1) si M est de rang p, $(a_1,...,a_p) \preceq_M (x_1,...,x_n)$ si $(x_1,...,x_n) = M(a_1,...,a_p)$ et $(a_1,...,a_p) = M^{-1}(x_1,...,x_n)$.
Par analogie on introduit la notation $\preceq_M^P$.

On introduit maintenant, grâce aux matrices ouvertes, ce qui sera amenée à être une "extension" de la stabilité et ensuite le type de matrices correspondant.

Définition 2.3.5 . *Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille stable et $y \in o_+^*$, y est* **fortement lié** *à $(x_1,...,x_n)$ si : $y \neq \phi(a_1,...,a_n,\mu)$ pour toute famille stable $(a_1,...,a_n) \preceq_M (x_1,...,x_n)$ avec M ouverte en $(x_1,...,x_n)$, pour tout infinitésimal positif μ indépendant de $\{x_1,...,x_n\}$ ou nul, et enfin pour tout $\phi \in \mathcal{L}_0^{\infty,n+1}$.*

En particulier, si y est fortement lié à $(x_1,...,x_n)$, y est lié à cette famille : sinon on a une contradiction en prenant $y = \mu$ dans la définition ci-dessus.

Définition 2.3.6 . *Soit $(x_1,...,x_n,y) \in o^{n+1}$, avec $(x_1,...,x_n)$ stable et y fortement lié à $(x_1,...,x_n)$, on appelle matrice* **pseudo-stable** *en $(x_1,...,x_n,y)$ de dimension n, une $(n+1)$-matrice inversible $M = (\sigma_1,...,\sigma_n,\sigma)$ en $(x_1,...,x_n,y)$, telle que :*

- $\sigma_1,...,\sigma_n$ sont indépendantes de la dernière variable (seules les n premières variables sont effectives)

- la n-matrice $N = (\sigma_1,...,\sigma_n)$ est stable et ouverte en $(x_1,...,x_n)$

- si $M^{-1} = (u_1,...,u_n,u)$, $u_1,...,u_n$ ne dépendent pas non plus de la dernière variable et $(u_1,...,u_n) = N^{-1}$

On note $\mathcal{P}_n(x_1,...,x_n,y)$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque 2.3.7 . *En reprenant les notations de la définition ci-dessus, si $(x_1,...,x_n)$ est stable et y est fortement lié à $(x_1,...,x_n)$, $u(x_1,...,x_n,y)$ est fortement lié à $(u_1(x_1,...,x_n),...,u_n(x_1,...,x_n))$. Ainsi si a_1,...,a_n et y sont dans o_+^* et si $(a_1,...,a_n,\epsilon) \preceq_M (x_1,...,x_n,y)$ avec M pseudo-stable, ϵ est fortement lié à $(a_1,...,a_n)$.*

Notation 2.3.8 . *Si $\sigma \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$, $M \oplus \sigma$ désigne la $n+1$-matrice $(\sigma_1,...,\sigma_n,\sigma)$.*

Toutes les matrices de $\mathcal{P}_n(x_1,...,x_n,y)$, pour $(x_1,...,x_n)$ stables et y fortement lié à $(x_1,...,x_n)$ peuvent s'écrire canoniquement sous cette forme.

Définition 2.3.9 . *On dira qu'une n-matrice M est* **positive** *si il existe un ensemble U de $\mathcal{M}$ de la forme $\prod_{i=1}^{i=n}]0,a_i[$ ($a_i \in \mathbb{R}$) tel que M est C^∞ sur $U \cap \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ et*

$$\forall (b_1,...,b_n) \in U \quad M(b_1,...,b_n) > 0$$

Notation 2.3.10 . *Si M et N sont deux n-matrices MN sera la composition canonique de M par N ; si $t \in \mathcal{L}^n$, tM sera la composition de t par M.*

On donne quelques propriétés des matrices.

Proposition 2.3.11 . *Soit* $(x_1, .., x_n, y) \in o^{n+1}$.

- Si $M \in \mathcal{G}_n(x_1, ..., x_n)$ *(respectivement* $\mathcal{O}_n(x_1, ..., x_n)$*) et* $N \in \mathcal{G}_n(M^{-1}(x_1, ..., x_n))$ *(respectivement* $\mathcal{O}_n(M^{-1}(x_1, ..., x_n))$*), alors* $MN \in \mathcal{G}_n(x_1, ..., x_n)$ *(respectivement* $\mathcal{O}_n(x_1, ..., x_n)$*) et* $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

- Supposons que $(\overline{x})$ *est stable, alors si* $M \in \mathcal{S}_n(\overline{x})$ *et* $N \in \mathcal{S}_n(M^{-1}(\overline{x}))$, $MN \in \mathcal{S}_n(\overline{x})$

- Supposons que y *est fortement lié à* $(\overline{x})$*, alors si* $M \in \mathcal{P}_n(\overline{x}, y)$ *et si* $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(\overline{x}, y))$, $MN \in \mathcal{P}_n(\overline{x}, y)$

- Si M *et* N *sont deux n-matrices positives,* MN *est encore positive.*

Proposition 2.3.12 . *Soient* M *une matrice ouverte en* $(x_1, ..., x_n)$*,* $y \in o$ *et* $\sigma \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ *tel que*

1*) soit* $\frac{\partial \sigma}{\partial X_{n+1}}(0) \neq 0$

2*) soit* σ *est polynômiale,* $M \oplus \sigma$ *est inversible en* $(x_1, ..., x_n, y)$ *et*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_{n+1}}((M \oplus \sigma)^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \neq 0$$

alors $M \oplus \sigma$ *est ouverte en* $(x_1, ..., x_n, y)$.

On donne tout d'abord une caractérisation de "M est ouverte". On considère pour cela une ultrapuissance $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$; on note $\tilde{o}$ l'ensemble des infinitésimaux de $\tilde{\mathcal{M}}$ par rapport à $\mathcal{M}$. On montre facilement :

Lemme 2.3.13 . *Soient* M *une n-matrice inversible et* $(x_1, ..., x_n) \in o^n$*, on pose* $M^{-1}(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n)$ *;* M *est ouverte en* $(x_1, ..., x_n)$ *si et seulement*

$\forall(\delta_1, ..., \delta_n) \in \tilde{o}^n \ \exists(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \tilde{o}^n \ \ M(a_1+\epsilon_1, ..., a_n+\epsilon_n) = (x_1, ..., x_n)+(\delta_1, ..., \delta_n)$

On peut revenir sur la proposition.

Preuve de la proposition 2.3.12 : On pose $M^{-1} = (u_1, ..., u_n)$ et $M^{-1}(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n)$. On sait que

$\forall(\delta_1, ..., \delta_n) \in \tilde{o}^n \ \exists(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \tilde{o}^n \ \ M(a_1+\epsilon_1, ..., a_n+\epsilon_n) = (x_1, ..., x_n)+(\delta_1, ..., \delta_n)$

Dans le cas où, $\frac{\partial \sigma}{\partial X_{n+1}}(0) \neq 0$, on considère $\theta(X_1, ..., X_{n+1}, Y) = \sigma(X_1, ..., X_{n+1})-$

Y. Ainsi $\sigma(X_1,...,X_n,\phi(X_1,...,X_n,Y))=Y$ dans un voisinage standard de 0. $(M\oplus\sigma)^{-1}=(u_1,...,u_n,\phi(u_1,...,u_n,.))$. De plus, soit $\delta_{n+1}\in\tilde{o}$, on pose

$$\epsilon_{n+1}=\phi(a_1+\epsilon_1,...,a_n+\epsilon_n,y+\delta)-\phi(a_1,...,a_n,y)$$

$\epsilon_{n+1}\in\tilde{o}$ et $\sigma(a_1+\epsilon_1,...,a_{n+1}+\epsilon_{n+1})=y+\delta$ avec $a_{n+1}=\phi(a_1,...,a_n,y)$

Dans le cas restant, on pose $(M\oplus\sigma)^{-1}(x_1,...,x_n,y)=(a_1,...,a_n,a_{n+1})$, $\frac{\partial\sigma}{\partial X_{n+1}}=f$ et $\alpha=f(a_1,...,a_{n+1})$. On considère $\delta_{n+1}\in\tilde{o}$ et on pose $\epsilon'_i=\frac{\epsilon_i}{\alpha^2}$. Soit $P\in\mathbb{R}[A_1,...,A_{n+1},E_1,...,E_n,X]$ tel que

$$P=\sigma(A_1+f(A_1,...,A_n)^2.E_1,...,A_n+f(A_1,...,A_n)^2.E_n,A_{n+1})-\sigma(A_1,...,A_{n+1})$$

$$+\sum_{i=1}^{i=ord(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial X_{n+1}}(A_1+f(A_1,...,A_n)^2.E_1,...,A_n+f(A_1,...,A_n)^2.E_n,A_{n+1}).\frac{1}{i!}.f(A_1,...,A_n)^i.X^i$$

On utilise $f(A_1,...,A_n)^2$ afin de "prolonger" de façon C^∞ σ au bord de son pavé de définition. Ainsi

$$P(a_1,...,a_{n+1},\epsilon'_1,...,\epsilon'_n,X)=\sigma(a_1+\epsilon_1,...,a_n+\epsilon_n,a_{n+1}+X)-\sigma(a_1,...,a_{n+1})$$

Il existe un polynôme $Q\in\mathbb{R}[A_1,...,A_{n+1},E_1,...,E_n,X]$ tel que $P=f^2.Q$; de plus $\frac{\partial Q}{\partial X}(0)\neq 0$. De ce fait, on a $\phi\in\mathcal{L}^{\infty,2n+2}$ telle que

$$Q(A_1,...,A_{n+1},E_1,...,E_n,\phi(A_1,...,A_{n+1},E_1,...,E_n,Y))=Y$$

sur un voisinage standard de 0. On pose $\epsilon_{n+1}=\phi(a_1,...,a_{n+1},\epsilon'_1,...,\epsilon'_n,\frac{\delta}{\alpha^2})$; on obtient ainsi le résultat escompté.
$\square_{proposition}$

Proposition 2.3.14 . *Soit M une n-matrice ouverte en $(x_1,...,x_n)$, toute permutation des applications composant M donne une matrice ouverte.*

Soient $(x_1,...,x_n)$ une famille stable et $(y,\epsilon)\in o_+^*\times o_+^*$, dans la suite, on utilisera uniquement les transformations suivantes, **à une permutation près**, pour passer de $(x_1,...,x_n,y)$ à $(x_1,...,x_n,\epsilon)$:

A) $y=\epsilon^i.x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$ avec $(i,i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^{n+1}$ et $i\neq 0$

B) $y=\sigma(x_1,...,x_n,\epsilon)$ avec $\sigma\in\mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tel que $\frac{\partial\sigma}{\partial X_{n+1}}(0)\neq 0$

C) $y=a.x_1^{i_1}...x_n^{i_n}+\epsilon.x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n$

Notons M la matrice de **passage** de $(x_1,...,x_n,y)$ à $(x_1,...,x_n,\epsilon)$, c'est-à-dire

$(x_1, ..., x_n, \epsilon) \preceq_M (x_1, ..., x_n, y)$.
Dans les trois cas, **A**, **B** et **C**, M est inversible, pseudo-stable et ouverte en $(x_1, ..., x_n, y)$ d'après la proposition 2.3.12. De plus, on a les règles suivantes :

1) $(x_1, ..., x_n, y)$ indépendante et transformation **A** $\rightarrow (x_1, ..., x_n, \epsilon)$ indépendante

2 $(x_1, ..., x_n, y)$ stable avec y lié à $(x_1, ..., x_n)$ et transformation **A**, **B** et **C** $\rightarrow (x_1, ..., x_n, \epsilon)$ stable

Ainsi les matrices considérées dans la suite ne seront que des produits de telles matrices ; on laissera souvent le soin de vérifier que les matrices sont suivant le cas ouvertes, stables, inversibles ou pseudo-stables et que les famille obtenues sont stables (en utilisant ce fait et les propositions 2.3.11, 2.3.12 ou 2.3.14).

Quelques explications

On introduit les éléments fortement liés pour les raisons suivantes. On va raisonner dans la suite, par récurrence sur le nombre d'éléments ; ainsi on considère $(x_1, ..., x_n)$ stable, c'est-à-dire sympathique, et on prend y un infinitésimal quelconque.

$\diamond$ Soit y peut s'exprimer grâce à une famille stable de taille $p \leq n + 1$

$\diamond$ Soit non.

Si on se trouve dans le premier cas, on peut continuer la récurrence ; par contre, dans le second cas, il faut travailler. Or le second cas correspond justement au cas où y est fortement lié.

La relation entre stabilité et fortement lié est donnée par la proposition 2.4.7 : si $(x_1, ..., x_n)$ est stable et y est lié à $(x_1, ..., x_n)$, y est fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$.
Il faut rapprocher cette proposition de la proposition 2.5.11 : si $(x_1, ..., x_n)$ est stable et y est indépendant de $(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n, y)$ est stable.
De ce fait, au final, on fera des raisonnements sur l'indépendance de y par rapport à la famille $(x_1, ..., x_n)$.

2.4 Désingularisation C^∞

Les résultats de la partie 2.4 sont **locaux**, c'est-à-dire que sauf mention contraire, on ne s'intéresse qu'aux germes de termes en 0.

Proposition 2.4.1 . *Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille d'infinitésimaux strictement positifs* **indépendants** *et $E = (t_i)_{i \in I}$ un ensemble de termes de $\mathcal{L}_0^{\infty,n}(P)$, non*

tous nuls ; il existe $(a_1, ..., a_n)$ *une famille indépendante telle que* $(a_1, ..., a_n) \preceq_M^P (x_1, ..., x_n)$ *avec* M *ouverte en* $(x_1, ..., x_n)$ *et*

$$\forall i \in I \quad t_i(x_1, ..., x_n) = a_1^{m_1} ... a_n^{m_n} . s_i(a_1, ..., a_n)$$

avec $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $s_i \in \mathcal{L}^{\infty,n}(Q)$ *(*Q *étant un pavé basique) et* $\exists k \in I \quad s_k(0) \neq 0$.

Preuve : On va utiliser une méthode proche du polygône de Newton. Comme la famille est indépendante, on sait que $\{x_1^{p_1} ... x_n^{p_n}\}$, $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}^n$, est antibien ordonné pour la valuation. Soit A une partie de $\mathbb{N}^n$, on pose $\mathcal{I}(A) = \{x_1^{j_1} ... x_n^{j_n}; (j_1, ..., j_n) \in A\}$. $\mathcal{I}(supp(E))$ possède un unique plus grand élément pour la valuation qui est aussi son plus grand élément pour l'ordre : on note cet élément $x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} = \mathfrak{M}$. On va raisonner en deux étapes.

Etape 1.

On va transformer une famille $\{x_1, ..., x_n, ..., x_m\}$ indépendante en une autre famille indépendante afin de changer un quotient

$$\frac{x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}}{x_{n+1}^{a_{n+1}} ... x_m^{a_m}} \in o$$

avec des puissances entières, en un simple produit.
Pour ce faire, on définit l'**ordre** de la fraction rationnelle $\frac{X_1^{a_1} ... X_n^{a_n}}{X_{n+1}^{a_{n+1}} ... X_m^{a_m}}$ comme étant la somme des a_i $(1 \leq i \leq m)$. Si le quotient considéré est déjà un produit simple, il n'y a rien à faire. Sinon on pose $\epsilon = \frac{x_1}{x_{n+1}}$ si ce quotient appartient à o, ou $\epsilon = \frac{x_{n+1}}{x_1}$ dans l' autre cas. Dans les deux cas, on remplace par ϵ, soit x_1 soit x_{n+1} suivant le cas considéré, dans le quotient de départ. Le nouveau quotient obtenu avec ϵ abaisse l'ordre. On a ainsi que la nouvelle famille $(\epsilon, x_2, ..., x_{n+1})$ ou $(x_1, ..., x_{n-1}, \epsilon)$ suivant les cas considéré, est indépendante et soit $(\epsilon, x_2, ..., x_{n+1}) \preceq_M^P (x_1, ..., x_n)$, soit $(x_1, ..., x_{n-1}, \epsilon) \preceq_M^P (x_1, ..., x_n)$, pour une matrice M qui est ouverte par le cas **A**.
Comme l'ordre est un entier, en recommençant cette opération suffisamment de fois : on arrive à la fin à un simple produit.

Etape 2.

On considère sur $\mathbb{N}^n$ l'ordre $\mathcal{R}$ suivant :

$$(k_1, ..., k_n)\mathcal{R}(k'_1, ..., k'_n) \leftrightarrow k_1 \leq k'_1 \wedge ... \wedge k_n \leq k'_n$$

On sait que tout ensemble de $\mathbb{N}^n$ possède un nombre fini d'éléments minimaux pour cette relation d'ordre. Il en va donc de même pour $supp(E)$. On note Min l'ensemble des éléments minimaux de $supp(E)$.
Grâce à l'étape 1, on transforme **tour à tour** les quotients $\frac{x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}{\mathfrak{M}}$ avec $(i_1, ..., i_n) \in$

Min, en de simples produits. On remarque pour ce faire que si $(u_1, ..., u_n) \preceq^P (v_1, ..., v_n)$, un produit de puissances entières de v_i reste un produit de puissances entières de u_i. Maintenant, une fois toutes les transformations sur Min réalisées, les quotients $\frac{x_1^{j_1}...x_n^{j_n}}{\mathfrak{M}}$ avec $(j_1, ..., j_n) \in supp(E)$ ont tous été changés en produits simples, car ils se décomposent en un produit de x_i et un quotient $\frac{x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}{\mathfrak{M}}$ avec $(i_1, ..., i_n) \in Min$.

On obtient ainsi une nouvelle famille $(u_1, ..., u_n) \preceq^P (x_1, ..., x_n)$ indépendante, telle que

$$\forall v \in \mathcal{I}(A) \quad v = \mathfrak{M}.u_1^{q_1}...u_n^{q_n}$$

avec $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{N}^n$

En appliquant le lemme 2.1.8 $a_1 + ... + a_n$ fois comme dans la preuve de 2.2.6, on obtient la proposition.
$\square_{proposition}$

Proposition 2.4.2 . *Soit $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ une famille* **stable** *telle que*

$$\frac{x_1^{p_1}...x_n^{p_n}}{y_1^{q_1}...y_m^{q_m}} \in o$$

$(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m) \in {\mathbb{Q}_+^*}^{n+m}$
il existe $(u_1, ..., u_{n+m})$, une famille stable telle que $(u_1, ..., u_{n+m}) \preceq_M^P (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ et

$$\frac{x_1^{p_1}...x_n^{p_n}}{y_1^{q_1}...y_m^{q_m}} = u_1^{r_1}...u_{n+m}^{r_{n+m}}$$

avec $(r_1, ..., r_{n+m}) \in \mathbb{N}^{n+m}$ et M ouverte en $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$.

Preuve : Soit $\mathcal{Q} = \frac{x_1^{p_1}...x_n^{p_n}}{y_1^{q_1}...y_m^{q_m}} \in o$, avec $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m) \in {\mathbb{Q}_+^*}^{n+m}$; on pose $p_i = \frac{a_i}{b_i}$ et $q_i = \frac{a_i'}{b_i'}$, les a_i, b_i, a_i', b_i' étant entiers non nuls. Le résultat à montrer est une version de l'étape 1 de la proposition précédente où "indépendant" est remplacé par "stable". C'est plus compliqué parce qu'il peut arriver ici que $\frac{x_i}{y_j} \in O^*$, autrement dit x_i et y_j ont même valuation. D'où l'étape 2 ci-dessous.

Etape 1.

On transforme tout d'abord ce quotient de puissances rationnelles en quotient de puissances entières. Pour ce faire, on commence par poser $v_1 = x_1^{\frac{1}{b_1}}$; on remplace ainsi x_1 par v_1. On a bien $(v_1, x_2, ..., x_n) \preceq^P (x_1, ..., x_n)$ et donc aussi, par 2.2.4, que $(v_1, x_2, ..., x_n)$ est stable. De plus, la puissance de v_1 dans le quotient est entière. On procède de la même façon pour remplacer un à un tous les x_i par v_i puis tous les y_i par w_i. De ce fait, on obtient à la fin une famille $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m) \preceq^P (x_1, ..., x_n)$, qui est stable et telle que

$$\mathcal{Q} = \frac{v_1^{a_1}...v_n^{a_n}}{w_1^{a_1'}...w_m^{a_m'}}$$

Le quotient est donc un quotient de puissances entières.

Etape 2.

On considére le cas particulier où tous les u_i et les w_i ont même valuation et où $a_1 = ... = a_n = a'_1 = ... = a'_m = \alpha$; on a que

$$\mathcal{Q} = (\frac{v_1...v_n}{w_1...w_m})^\alpha$$

On remplace un à un w_i par $w'_i = w_i^{\frac{1}{n.m}}$. On a ainsi que $(v_1, ..., v_n, w'_1, ..., w'_m) \preceq^P (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ et, par 2.2.4, que cette nouvelle famille est stable. Et

$$\mathcal{Q} = (\frac{v_1, ..., v_n}{{w'_1}^{m.n}...{w'_m}^{m.n}})^\alpha$$

On remplace maintenant tour à tour v_i par $v'_i = \frac{v_i}{{w'_1}^m...{w'_m}^m}$. Ainsi $(v'_1, ..., v'_n, w'_1, ..., w'_m) \preceq^P (x_1, ..., x_n, ..., y_1, ..., y_m)$ et, par 2.2.4, la famille $(v'_1, ..., v'_n, w'_1, ..., w'_m)$ est stable.
De plus

$$\mathcal{Q} = (v'_1...v'_n)^\alpha$$

On obtient ainsi la proposition dans ce cas particulier.

Etape 3.

On revient au cas général obtenu à la fin de l'étape 1 :

$$\mathcal{Q} = \frac{v_1^{a_1}...v_n^{a_n}}{w_1^{a'_1}...w_m^{a'_m}}$$

On va raisonner par récurrence à la fois : sur le nombre - inférieur à $m + n$ - d'éléments de la famille stable intervenant effectivement (avec un exposant a_i ou a'_i non nul) dans ce quotient ; et sur l'ordre $a_1 + ... + a_n + a'_1 + ... + a'_m$ de ce quotient.
En effet, on va utiliser deux modes de transformation :

1) si il existe v_i et w_j tels que v_i et w_j n'ont pas la même valuation, on procède comme dans l'étape 1 de la proposition précédente, ce qui permet d'abaisser l'ordre.

2) si il existe v_i et w_j tels que $v_i^{a_i}$ et $w_j^{a'_j}$ n'ont pas la même valuation, on pose d'abord $w_j = \nu_j^{a_i}$ et ensuite $v_i = \mu_i.\nu_j^{a'_j}$. Par 2.2.4, la nouvelle famille obtenue en remplaçant w_j par ν_j et v_i par μ_i est stable et $\preceq^P$ à $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m)$. De plus, en effectuant le remplacement dans le quotient, on constate que seul l'élément μ_i reste après simplifications. On a donc abaissé le nombre d'éléments utilisés dans le quotient (même si la famille conserve $m + n$ éléments).

Maintenant, si tous les v_i et les w_j ont même valuation et tous les $v_i^{a_i}$ et les $w_j^{a'_j}$ ont même valuation, on se trouve dans le cas de l'étape 2, ce qui conclut. De ce fait, en effectuant l'étape 3 plusieurs fois, soit on abaisse suffisamment le nombre d'éléments du quotient pour arriver à n'utiliser plus qu'un seul élément, et dans ce cas, la proposition est prouvée, soit on reste "bloqué" au niveau du nombre d'éléments employés et dans ce cas on abaisse l'ordre, jusqu'à conclure, comme dans la proposition précédente. Dans tous les cas, on arrive au résultat escompté.
$\square_{proposition}$

Proposition 2.4.3 . *Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille* **stable** *de $\mathcal{M}$ et $E = (t_i)_{i\in I}$ un ensemble de termes de $\mathcal{L}_0^{\infty,n}(P)$, non tous nuls (I peut être infini) ; il existe $(a_1, ..., a_n)$ une famille stable telle que $(a_1, ..., a_n) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$ avec M ouverte en $(x_1, ..., x_n)$ et*

$$\forall i \in I \quad t_i(x_1, ..., x_n) = a_1^{m_1}...a_n^{m_n}.s_i(a_1, ..., a_n)$$

avec $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $s_i \in \mathcal{L}^{\infty,n}(Q)$ avec Q basique et $\exists k \in I \quad s_k(0) \neq 0$.

Preuve. On va raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille stable $(x_1, ..., x_n)$. Si $n = 1$, la proposition est vraie par 2.4.1 appliqué à la famille indépendante $\{x_1\}$. Dans la suite on suppose qu'elle est vraie pour les rangs inférieurs ou égaux à n.

Définition 2.4.4 . *Soit $E = (t_i)_{i\in I}$ un ensemble de termes $(n+1)$-aires, C^∞ autour de 0 ; E possède un* **ordre** *s'il existe $i_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{\partial^n t_{i_0}}{\partial Y^n}(0) \neq 0$; on appellera* **ordre** *de E, qu'on notera $ord(E)$, le plus petit entier n pour lequel il existe $i_0 \in I$ vérifiant la propriété ci-dessus.*
En particulier, on dira que $t \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ possède un ordre si $\{t\}$ possède un ordre ; on notera $ord(t)$, l'ordre de $\{t\}$.

Les preuves des **trois** lemmes qui suivent vont utiliser l'hypothèse de récurrence en cours : que la proposition 2.4.3 est vraie pour toute famille stable à n éléments.

Lemme 2.4.5 . *Soient $(x_1, ..., x_n)$ une famille stable de $\mathcal{M}$ et $E = (t_i)_{i\in I}$ un ensemble de termes de $\mathcal{L}_0^{\infty,n+1}(P\times[u, v])$, non tous nuls ; il existe $(a_1, ..., a_n)$ une famille stable telle que $(a_1, ..., a_n) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$ avec M ouverte en $(x_1, ..., x_n)$ et*

$$\forall i \in I \quad t_i(x_1, ..., x_n, .) = a_1^{m_1}...a_n^{m_n}.s_i(a_1, ..., a_n, .)$$

sur $[u, v]$, avec $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^p$, $\forall i \in I \quad s_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(Q \times [u, v])$ avec Q basique, et tel qu'un des s_k possède un ordre.

Preuve : On sait qu'il existe $i \in I$ tel que t_i n'est pas nul donc, grâce à la multiplicité finie, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\partial^j t_i}{\partial X_{n+1}^j}(X_1, ..., X_n, 0)$ est non nul sur

P. On utilise alors l'hypothèse de récurrence de 2.4.3 pour n, appliquée à l'ensemble $\{\frac{\partial^j t_i}{\partial X_{n+1}^j}(X_1,...,X_n,0);(i,j)\in I\times\mathbb{N}\}$ et à la famille stable $(x_1,...,x_n)$. On obtient ainsi qu'il existe $(a_1,...,a_n)$ une famille stable telle que $(a_1,...,a_n)\preceq_M (x_1,....,x_n)$ avec M ouverte en $(x_1,...,x_n)$ et

$$\forall (i,j)\in I\times\mathbb{N}\quad \frac{\partial^j t_i}{\partial X_{n+1}^j}(x_1,...,x_n,0)=a_1^{m_1}...a_n^{m_n}.s_{i,j}(a_1,...,a_n)$$

avec $(m_1,...,m_n)\in\mathbb{N}^n$, $s_i\in\mathcal{L}^{\infty,n}(P')$ et $\exists k\in I\ \ s_k(0)\neq 0$.
On utilise ensuite le lemme 2.2.6 pour les fonctions $\frac{\partial^j t_i}{\partial X_{n+1}^j}(M\oplus 0)$.
$\square_{lemme}$

Remarque 2.4.6 . *La famille (t_i) est C^∞ sur le* **même** *pavé basique P ; dans les preuves de la proposition 2.4.3 et du lemme 2.4.8, on ne précisera pas les domaines de C-infinité des fonctions obtenues aux différents niveaux des démonstrations. Cependant, dans ces preuves le lecteur devra s'assurer que le nombre de transformations du pavé P initial est* **fini**, *ce qui permet d'affirmer que la famille finale est C^∞ sur un* **même** *pavé Q.*

On va avoir aussi besoin d'un lemme reliant la notion de stabilité, de liaison et de liaison forte.

Lemme 2.4.7 . *Soient $(x_1,...,x_n,y)$ une famille stable ; si y est lié à $(x_1,...,x_n)$, y est fortement lié à $(x_1,...,x_n)$.*

Preuve : Supposons que y est lié à $(x_1,...,x_n)$ mais n'est pas fortement lié à $(x_1,...,x_n)$: il existe une famille stable $(a_1,...,a_n)\preceq_M (x_1,...,x_n)$, μ indépendant de $(x_1,...,x_n)$ ou nul et $\phi\in\mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tels que $y=\phi(a_1,...,a_n,\mu)$. D'après 2.4.5, appliqué à $\{\phi\}$, on sait qu'il existe une famille stable $(b_1,...,b_n)\preceq(a_1,...,a_n)$ telle que

$$\phi(a_1,...,a_n,\mu)=b_1^{m_1}...b_n^{m_n}.s(b_1,...,b_n,\mu)$$

avec $s\in\mathcal{L}^{\infty,n+1}$, $(m_1,...,m_n)\in\mathbb{N}^n$ et $ord(s)=d$.
Ainsi, par Taylor d'ordre d appliqué à s

$$y=b_1^{m_1}...b_n^{m_n}.\sum_{i=0}^{i=d-1}\frac{\partial^i s}{\partial Y^i}(b_1,...,b_n,0).\frac{1}{i!}.\mu^i+\lambda.\mu^d$$

avec $\lambda\in O^*$. On pose $g(X_1,...,X_n,Y)=Y-X_1^{m_1}...X_n^{m_n}.s(X_1,...,X_n,0)$, $g(b_1,...,b_n,y)$ n'est pas lié à $(b_1,...,b_n)$ donc n'est pas lié à $(x_1,...,x_n,y)$. Or g n'est pas localement nul en $(b_1,...,b_n,y)$ donc $(b_1,...,b_n,y)$ n'est pas stable, ce qui implique que $(x_1,...,x_n,y)$ n'est pas stable.
$\square_{lemme}$

Lemme 2.4.8 . *Soient $E=(t_i)_{i\in I}$, un ensemble de termes de $\mathcal{L}_0^{\infty,n+1}(P)$ tel que $ord(E)=d\geq 1$, $(x_1,...,x_n)$ une famille stable et $y\in o$, tels qu'on se trouve*

dans un des deux cas suivants :

1*)* $(x_1, ..., x_n, y)$ *est stable et* y *est lié à* $(x_1, ..., x_n)$

2*)* I *est fini et* y *est fortement lié à* $(x_1, ..., x_n)$

alors il existe $M \in \mathcal{O}_n(x_1, ..., x_n, y)$*, stable dans le premier cas et pseudo-stable dans le deuxième, telle que* $(a_1, ..., a_n, \epsilon) \preceq_M (x_1, ..., x_n, y)$ *et*

$$\forall i \in I \quad t_i(x_1, ..., x_n, y) = a_1^{p_1} ... a_n^{p_n}.u_i(a_1, ..., a_n, \epsilon)$$

avec

$$ord(u_k(X_1, ..., X_n, Y)) < d$$

pour un certain $k \in I$ *et* $u_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(Q)$ $(Q \subset P)$*.*

Preuve :

Partie 1

Soit $j \in I$ tel que $ord(t_j) = d$; comme $\frac{\partial^d t_j}{\partial X_{n+1}^d}(0) \neq 0$, par les axiomes de définition implicite C^∞ de T, il existe une application $\phi \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ telle que $\frac{\partial^{d-1} t_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(X_1, ..., X_n, \phi(X_1, ..., X_n))$ est localement nul. On pose $\mu = y - \phi(x_1, ..., x_n)$ ou $\mu = \phi(x_1, ..., x_n) - y$, de façon à avoir $\mu \geq 0$. (Dans la suite on supposera, pour fixer les idées, que $y = \phi(x_1, ..., x_n) + \mu$) On remarque que

$$\frac{\partial^{d-1} t_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(x_1, ..., x_n, y) = \frac{\partial^{d-1} t_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(x_1, ..., x_n, \phi(x_1, ..., x_n)) + \mu.\frac{\partial^d t_j}{\partial X_{n+1}^d}(x_1, ..., x_n, \phi(x_1, ..., x_n)) + \mu.\zeta$$

avec $\zeta \in o$. Ainsi μ est de même valuation que $\frac{\partial^{d-1} t_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(x_1, ..., x_n, y)$

Comme $y = \phi(x_1, ..., x_n) + \mu$, que l'on soit dans le cas 1 ou 2, μ n'est pas nul et est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$.

Partie 2

Ainsi $\mu = \alpha.x_1^{q_1} ... x_n^{q_n}$ avec $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$ et $\alpha \in O^*$. D'après la proposition 2.4.2, il existe une famille stable $(u_1, ..., u_n) \preceq_N (x_1, ..., x_n)$ avec N ouverte en $(x_1, ..., x_n)$ telle que $\mu = \alpha.u_1^{p_1} ... u_n^{p_n}$, avec $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}^n$. On note a la partie standard de α et on pose $\epsilon = \mu - a.u_1^{p_1} ... u_n^{p_n}$ ou $\epsilon = a.u_1^{p_1} ... u_n^{p_n} - \mu$, de façon à avoir $\epsilon \geq 0$ (Dans la suite, on supposera que $\mu = a.u_1^{p_1} ... u_n^{p_n} - \epsilon$). ϵ est donc de valuation strictement inférieure à celle de μ; de plus, $\epsilon \neq 0$.
En effet, si $\epsilon = 0$ alors $y = \phi N(u_1, ..., u_n) + a.u_1^{p_1} ... u_n^{p_n}$, ce qui est impossible dans le cas 1 ou 2.

Partie 3

On pose pour $i \in I$,

$$s_i(X_1, ..., X_n, X_{n+1}) = t_i(N \oplus (\phi N + a.X_1^{p_1}...X_n^{p_n} + X_{n+1}))$$

De ce fait, pour $i \in I$ et $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^p s_i}{\partial X_{n+1}^p}(u_1, ..., u_n, \epsilon) = \frac{\partial^p t_i}{\partial X_{n+1}^p}(x_1, ..., x_n, y)$$

on a donc

$$\frac{\partial^{d-1} s_i}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, \epsilon) = \frac{\partial^{d-1} s_i}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, 0) + \epsilon.\lambda$$

avec $\lambda \in O$.

Comme $val(\epsilon) < val(\frac{\partial^{d-1} t_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(x_1, ..., x_n, y))$,

$$val(\frac{\partial^{d-1} s_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, \epsilon)) = val(\frac{\partial^{d-1} s_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, 0))$$

Comme $\epsilon \neq 0$, les termes $\frac{\partial^{d-1} s_i}{\partial X_{n+1}^{d-1}}$ ne sont pas tous nuls ; ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une famille stable $(v_1, ..., v_n) \preceq_S (u_1, ..., u_n)$, telle que

$$\forall i \in I \quad \frac{\partial^{d-1} s_i}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, 0) = v_1^{m_1}....v_n^{m_n}.g_i(v_1, ..., v_n)$$

avec $g_i \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ tel qu'un certain g_k ne s'annule pas en 0 et $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$. De ce fait,

$$val(v_1^{m_1}....v_n^{m_n}) \geq val(\frac{\partial^{d-1} s_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, 0)) \geq val(\frac{\partial^{d-1} s_j}{\partial X_{n+1}^{d-1}}(u_1, ..., u_n, \epsilon)) > val(\epsilon)$$

On a donc $\epsilon' = \frac{\epsilon}{v_1^{m_1}....v_n^{m_n}} \in o_+^*$ et on considère, pour $i \in I$

$$\sigma_i(X_1, ..., X_{n+1}) = s_i(S \oplus (X_{n+1}.X_1^{m_1}....X_n^{m_n}))$$

Ainsi pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^p \sigma_i}{\partial X_{n+1}^p}(v_1, ..., v_n, \epsilon') = (v_1^{m_1}....v_n^{m_n})^p.\frac{\partial^p s_i}{\partial X_{n+1}^p}(u_1, ..., u_n, \epsilon)$$

De plus :

$\star$ pour $p \geq d$,

$$\frac{\partial^p \sigma_i}{\partial X_{n+1}^p}(v_1, ..., v_n, 0) = (v_1^{m_1}....v_n^{m_n})^d.h_{i,p}(v_1, ..., v_n)$$

avec $h_{i,p} = (V_1^{m_1}...V_n^{m_n})^{p-d}.\frac{\partial^p s_i}{\partial X_{n+1}^p}(S \oplus Id)(V_1, ..., V_n, 0)$ où Id désigne l'identité pour la dernière variable.

$\star$ pour $p = d-1$, par le choix de v_1,...,v_n

$$\frac{\partial^p \sigma_i}{\partial X_{n+1}^p}(v_1, ..., v_n, 0) = (v_1^{m_1}....v_n^{m_n})^d.g_i(v_1, ..., v_n)$$

avec l'un des g_i non nul en 0.

Partie 4

On applique l'hypothèse de récurrence à l'ensemble de termes F suivant

$$\{\frac{\partial^p \sigma_i}{\partial X_{n+1}^p}(X_1, ..., X_n, 0); i \in I \wedge p < d-1\} \cup \{(X_1^{m_1}....X_n^{m_n})^d\}$$

et à la famille stable $(v_1, ..., v_n)$; il existe donc une famille stable $(w_1, ..., w_n) \preceq_T (v_1, ..., v_n)$ telle que, pour tout terme $t \in F$

$$t(v_1, ..., v_n) = w_1^{l_1}...w_n^{l_n}.\theta_t(w_1, ..., w_n)$$

avec $\theta_t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ tels qu'un certain θ_t ne s'annule pas en zéro et $(l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n$. On pose

$$\omega_i(X_1, ..., X_{n+1}) = \sigma_i(T \oplus Id)$$

On a ainsi que

$$\forall (i,p) \in I \times \mathbb{N} \quad \frac{\partial^p \omega_i}{\partial X_{n+1}^p}(w_1, ..., w_n, 0) = w_1^{l_1}...w_n^{l_n}.k_{i,p}(w_1, ..., w_n)$$

avec :

$\star$ pour $p \geq d$, $k_{i,p} = \theta_{(X_1^{m_1}....X_n^{m_n})^d}.h_{i,p}$.

$\star$ pour $p = d-1$, $k_{i,p} = \theta_{(X_1^{m_1}....X_n^{m_n})^d}.g_i$.

$\star$ pour $p \leq d-1$, $k_{i,p} = \theta_{\frac{\partial^p \sigma_i}{\partial X_{n+1}^p}(X_1,...,X_n,0)}$.

Il existe ainsi $i \in I$ et $p \leq d-1$ tels que $k_{i,p}(0) \neq 0$, ce qui permet d'affirmer, grâce au lemme 2.4.5 que $(\omega_i)_{i \in I}$ est d'ordre inférieur ou égal à $d-1$. $\square_{lemme}$

On peut maintenant revenir sur la démonstration de la proposition 2.4.3. L'hypothèse de récurrence sur n dit que 2.4.3 est vraie pour une famille stable $(x_1, ..., x_n)$; il reste à le montrer pour une famille stable $(x_1, ..., x_{n+1})$. La proposition 2.4.1 permet de l'affirmer si la famille considée est **indépendante**. On considère donc une famille stable $(x_1, ..., x_{n+1})$ qui n'est pas indépendante ; une

permutation de la famille permet de supposer que x_{n+1} est lié à $\{x_1, ..., x_n\}$. Et $(x_1, ..., x_n)$ est stable, par 2.2.2. On considère le processus suivant.

Processus

1) D'après le lemme 2.4.5, il existe une famille stable $(a_1, ..., a_n) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$ telle que

$$\forall i \in I \;\; t_i(x_1, ..., x_n, .) = a_1^{m_1} ... a_n^{m_n} . s_i(a_1, ..., a_n, .)$$

sur un intervalle $[u, v]$, avec $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}(Q \times [u, v])$ pour $i \in I$ et tel qu'un des s_i possède un ordre d. Si $d = 0$, la récurrence s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.

2) Comme x_{n+1} est lié à $(x_1, ..., x_n)$, il l'est à $(a_1, ..., a_n)$; d'après le lemme 2.4.7, x_{n+1} est alors fortement lié à $(a_1, ..., a_n)$; on peut appliquer le lemme 2.4.8. Il existe donc N stable et ouverte telle que $(b_1, ..., b_n, b_{n+1}) \preceq_N (a_1, ..., a_n, x_{n+1})$ et

$$\forall i \in I \;\; s_i(a_1, ..., a_n, x_{n+1}) = b_1^{p_1} ... b_n^{p_n} . u_i(b_1, ..., b_n, b_{n+1})$$

avec $ord((u_i)) < d$

3) En posant $N = (\sigma_1, ..., \sigma_n, \sigma)$, on a

$$\forall i \in I \;\; t_i(x_1, ..., x_n, y) = \sigma_1(b_1, ..., b_n)^{m_1} ... \sigma_n(b_1, ..., b_n)^{m_n} . b_1^{p_1} ... b_n^{p_n} . u_i(b_1, ..., b_n, b_{n+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à l'ensemble $\{\sigma_1(X_1, ..., X_n)^{m_1} ... \sigma_n(X_1, ..., X_n)^{m_n} . X_1^{p_1} ... X_n^{p_n}\}$ en $(b_1, ..., b_n)$, il existe une matrice S stable et ouverte telle que $(c_1, ..., c_n) \preceq_S (b_1, ..., b_n)$ et

$$\sigma_1(b_1, ..., b_n)^{m_1} ... \sigma_n(b_1, ..., b_n)^{m_n} . b_1^{p_1} ... b_n^{p_n} = c_1^{l_1} ... c_n^{l_n} . v(c_1, ..., c_n)$$

avec $v \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ tel que v ne s'annule pas en zéro. On pose $\sigma_i = v.u_i(S \oplus Id)$: on a ainsi $ord((\sigma_i)) < d$.

4) On sait que la famille d'arrivée $(c_1, ..., c_n, b_{n+1})$ est stable et que b_{n+1} est lié à $(c_1, ..., c_n)$. On peut donc reprendre le processus avec cette famille et les applications σ_i.

On réitère le processus autant de fois qu'il le faut pour obtenir à la fin un ordre nul.
$\square_{proposition}$

Corollaire 2.4.9 . *Soit $(t_i)_{1 \leq i \leq p}$ un ensemble fini de termes de $\mathcal{L}^{\infty,n+1}$, non tous nuls et soit y fortement lié à une famille stable $(x_1, ..., x_n)$ alors il existe M ouverte et pseudo-stable en $(x_1, ..., x_n, y)$ telle que $(a_1, ..., a_n) \preceq_M (x_1, ..., x_n, y)$ et pour tout $1 \leq i \leq p$*

$$t_i(x_1, ..., x_n, y) = a_1^{m_1} ... a_n^{m_n} . h_i(a_1, ..., a_n, \epsilon)$$

avec $h_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tels qu'un des h_i ne s'annule pas en 0 et $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$.

Remarque 2.4.10 . *La preuve de 2.4.3 établit en passant que les lemmes 2.4.5 et 2.4.7 sont vrais pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Quelques explications.

Comme d'habitude dans la désingularisation des fonctions, on utilise les idées d'Hensel. Soit t un terme C^∞ autour de 0, $n+1$-aire et $(x_1, ..., x_n, y)$ des infinitésimaux. On a par Taylor

$$t(x_1, ..., x_n, y) = t(x_1, ..., x_n, 0) + y.\frac{\partial t}{\partial Y}(x_1, ..., x_n, 0) + ...$$

On veut diviser par le plus *gros* des $\frac{\partial^i t}{\partial Y^i}(x_1, ..., x_n, 0)$ afin d'avoir une dérivée de t par rapport à Y non nulle en 0 et de pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites.
Malheureusement, on ne peut pas diviser comme on veut ; il faut donc arriver à trouver un diviseur commun à tous les $\frac{\partial^i t}{\partial Y^i}(x_1, ..., x_n, 0)$, c'est la proposition 2.4.3.
Ensuite, une fois la division effectuée, on utilise les idées classiques de récurrence sur l'ordre de t, c'est le lemme 2.4.8.

Comme pour l'instant on ne connaît pas le lien entre indépendance et stabilité, on est obligé de travailler parallèlement avec ces deux notions ; c'est pourquoi jusqu'à la proposition 2.5.11, on démontre, par des techniques un peu différentes, les mêmes propositions pour les familles indépendantes et les familles stables. Ainsi on a les correspondances suivantes :

Stabilité ——————- **Indépendance**

Proposition 2.4.3 ——————- Proposition 2.4.1

Proposition 2.5.7 ——————- Proposition 2.5.9

2.5 Transformation des termes

Proposition 2.5.1 . *Soient* $(t_1, t_2) \in \mathcal{L}^{\infty,n+1} \times \mathcal{L}^{\infty,n+1}$, *non nuls,* $(x_1, ..., x_n)$ *une famille stable et* $y \in o^*_+$, *fortement lié à* $(x_1, ..., x_n)$, *tels que* $\frac{t_1(x_1,...,x_n,y)}{t_2(x_1,...,x_n,y)} \in o$ *; alors il existe* $M \in \mathcal{P}_n(x_1, ..., x_n, y) \cap \mathcal{O}_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)$ *et* $\eta \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ *tels que* $t_1M(a_1, ..., a_n, \epsilon) = \eta(a_1, ..., a_n, \epsilon).t_2M(a_1, ..., a_n, \epsilon)$, *avec* $(a_1, ..., a_n) = M^{-1}(x_1, ..., x_n)$.

Preuve : On utilise le corollaire 2.4.9 ; ainsi il existe M ouverte et pseudo-stable en $(x_1, ..., x_n, y)$ telle que $(a_1, ..., a_n, \epsilon) \preceq_M (x_1, ..., x_n, y)$ et pour $i \in \{1, 2\}$

$$t_i(x_1, ..., x_n, y) = a_1^{m_1} ... a_n^{m_n} . h_i(a_1, ..., a_n, \epsilon)$$

avec $h_i \in \mathcal{L}^{\infty, n+1}$ tels qu'un des h_i ne s'annule pas en 0 et $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$. Si h_2 s'annule en 0, alors h_1 ne s'annule pas en 0 et ainsi $\frac{t_1(x_1,...,x_n,y)}{t_2(x_1,...,x_n,y)} \notin o$; de ce fait, h_2 ne s'annule pas en 0. On pose $\eta = \frac{h_1}{h_2}$.
$\square_{proposition}$

Lemme 2.5.2 . *Soient $t \in \mathcal{L}^{\infty, n+1}$, alors :*
1) si $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ est une famille indépendante, $t(x_1, ..., x_{n+1}) = 0 \rightarrow t = 0$

2) si $(x_1, ..., x_n)$ est stable et $y \in o_+^*$ indépendant de $\{x_1, ..., x_n\}$, $t(x_1, ..., x_n, y) = 0 \rightarrow t = 0$

3) si $(x_1, ..., x_n)$ est stable et $y \in o_+^*$ est fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$, $t(x_1, ..., x_n, y) = 0 \rightarrow t = 0$

Preuve : Les deux premières assertions sont immédiates : il suffit d'utiliser la formule de Taylor à tous les ordres ; l'assertion 3 est une conséquence du corollaire 2.4.9.
$\square_{lemme}$

Corollaire 2.5.3 . *Soit $(s, t) \in \mathcal{L}^{\infty, n+1} \times \mathcal{L}^{\infty, n+1}$; dans chacun des 3 cas du lemme 2.5.2, si $s(x_1, ..., x_n, y) = t(x_1, ..., x_n, y)$ alors s et t sont localement égaux.*

Définition 2.5.4 . *Soit $(s, t) \in \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^n$; $s \sim t$ si s et t sont égaux sur un voisinage de 0 de la forme $\prod_{1 \leq i \leq n}]0, a_i[$, avec $a_i \in \mathbb{R}_+^*$.*

Lemme 2.5.5 . *Soient $(f_1, ..., f_p) \in \mathcal{L}^{\infty, n+1}$, $(x_1, ..., x_n)$ une famille stable et $y \in o_+^*$, fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$, tels que $f_i(x_1, ..., x_n, y) > 0$; alors il existe M pseudo-stable et ouverte en $(x_1, ..., x_n, y)$ telle que $f_i M > 0$ sur un voisinage de 0 de la forme $\prod_{1 \leq i \leq n}]0, a_i[$, avec $a_i \in \mathbb{R}_+^*$.*

Preuve : On pose $f = f_1 ... f_p$; d'après le corollaire 2.4.9, il existe M pseudo-stable et ouverte en $(x_1, ..., x_n, y)$ telle que

$$fM(a_1, ..., a_n, \epsilon) = a_1^{p_1} ... a_n^{p_n} . h(a_1, ..., a_n, \epsilon)$$

avec $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}^n$ et $(a_1, ..., a_n, \epsilon) = M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)$. Cette relation est localement vraie, par le corollaire 2.5.3 ; elle entraîne que le produit $f_1 ... f_p$ est localement égal à une fonction strictement positive. Le lemme est ainsi démontré.
$\square_{lemme}$

Corollaire 2.5.6 . *Soient $M_1, ..., M_p$ des $n+1$-matrices, $(x_1, ..., x_n)$ une famille stable et $y \in o_+^*$, fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$, tels que $M_i(x_1, ..., x_n, y) > 0$; il existe N pseudo-stable et ouverte en $(x_1, ..., x_n, y)$ telle que $M_i N$ est positive.*

Proposition 2.5.7 . *Soit $t \in \mathcal{L}^{n+1}$; pour toute famille stable $(x_1, ..., x_n)$, pour tout $y \in o_+^*$ fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{P}_n(x_1, ..., x_n, y) \cap \mathcal{O}_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)$, si $t(x_1, ..., x_n, y) \in O$, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \cap \mathcal{O}_{n+1}(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y))$ et il existe $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tel que $tMN \sim f$; sinon il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \cap \mathcal{O}_{n+1}(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y))$ et il existe $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tel que $\frac{1}{tMN} \sim f$.*

Preuve : Pour chaque $t \in \mathcal{L}^n$, il existe un terme du langage dont t est l'interprétation ; on va ainsi raisonner sur la hauteur d'un quelconque des termes qui définissent t. On suppose dans la suite que $(x_1, ..., x_n, y)$ satisfait les conditions de la proposition et que la proposition vraie pour les termes de hauteur $h \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.5.8 . *Soient $t_1, ..., t_p$ p termes de hauteur h et M une matrice de $\mathcal{P}_n(x_1, ..., x_n, y)$, il existe une $(n+1)$-matrice $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \cap \mathcal{O}_{n+1}(M^{-1}(x_1, ..., x_n, y))$ telle qu'il existe p termes de $\mathcal{L}^{\infty,n+1}$, $f_1, ..., f_p$ tels que $t_iMN \sim f_i$ ou $\frac{1}{t_iMN} \sim f_i$, suivant si $t_i(x_1, ..., x_n, y) \in O$ ou non.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur p. Le lemme est immédiat pour $p = 1$. On considère donc $(p+1)$ termes, $t_1, ..., t_{p+1}$; pour $i \leq p+1$, s_i désigne t_iM ou $\frac{1}{t_iM}$ selon le cas considéré. On sait, par hypothèse de récurrence, qu'il existe N convenable telle que $s_iN \sim g_i$ avec $g_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ pour $i \leq p$. De plus,par la proposition 2.5.7, il existe P convenable telle que $s_{p+1}NP \sim g_{p+1}$, avec $g_{p+1} \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. On note I la matrice identité. D'après le corollaire 2.5.6, appliqué à I et P, il existe $Q \in \mathcal{P}_n(P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \cap \mathcal{O}_{n+1}(P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1, ..., x_n, y))$ telle que Q et PQ soient positives. Ainsi $s_iNPQ \sim g_iPQ$ et $s_{p+1}NPQ \sim g_{p+1}Q$, ce qui conclut.
$\square_{lemme}$

On peut revenir à la démonstration de la proposition. On a plusieurs cas à considérer, suivant le type de construction du terme.

Cas 1. $h = 0$ et $t \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$.

Comme M est C^∞, il suffit de poser $N = I$.

Cas 2. Les racines $\frac{1}{p}$-ième pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient t un terme de hauteur h et $M \in \mathcal{P}_n(x_1, ..., x_n, y) \cap \mathcal{O}_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)$; on va supposer, sans restreindre la généralité que $t(x_1, ..., x_n, y) \in O$, car les racines p-ième commutent avec l'inverse. On pose $tM = s$. On procède en 5 étapes.

1) On sait qu'il existe N convenable telle que $sN \sim f$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. Si f est nulle, le terme $t^{\frac{1}{p}}MN \sim 0$ et on conclut ; sinon, $f(N^{-1}M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)) \neq 0$. Si $t(x_1, ..., x_n, y) \notin o$, alors $f(0) \neq 0$. Ainsi soit $f(0) < 0$ et p est pair, donc $t^{\frac{1}{p}}MN \sim 0$, ce qui conclut, soit $f(0) > 0$ ou p est impair. Dans ce cas, comme

$f^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$, $t^{\frac{1}{p}}MN \sim f^{\frac{1}{p}}$, ce qui conclut. Dans la suite on considère les cas restants.

2) D'après le lemme 2.5.5, il existe P convenable telle que fP est de signe constant sur un voisinage strictement positif de 0.

3) En appliquant le corollaire 2.5.6 à I et P, il existe $Q \in \mathcal{P}_n(P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que Q et PQ sont positives. Ainsi $sNPQ \sim fPQ$; donc $sNPQ$ est de signe constant sur un voisinage strictement positif de 0.

On en déduit que si p est pair et $t(x_1,...,x_n,y) < 0$, $s^{\frac{1}{p}}NPQ \sim 0$, ce qui conclut. On se place maintenant dans les autres cas.

4) D'après le corollaire 2.4.9, il existe $R \in \mathcal{P}_n(Q^{-1}P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y)$ telle que $fPQR \equiv X_1^{q_1}...X_n^{q_n}.h(X_1,...,X_n,X_{n+1})$ avec $(q_1,...,q_n) \in \mathbb{N}^n$ et $h_1 \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ qui ne s'annule pas en 0 ; on pose $S = (\sigma_1,...,\sigma_{n+1})$ avec pour $1 \leq i \leq n$, $\sigma_i = X_i^{2.p}$ et $\sigma_{n+1} = X_{n+1}$. Ainsi $S \in \mathcal{P}_n(R^{-1}Q^{-1}P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$. De ce fait, il existe $g \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tel que $fPQRS = g^{2.p}$ car h_1 ne s'annule pas en 0.

5) Il existe dès lors $T \in \mathcal{P}_n(S^{-1}R^{-1}Q^{-1}P^{-1}N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que RST est positive ; ainsi $sNPQRST \sim g^{2.p}RST$, donc $t^{\frac{1}{p}}MNPQRST \sim g^2RST$, ce qui conclut.

Cas 3. L'application inverse.

Soit t un terme de hauteur h et $M \in \mathcal{P}_n(x_1,...,x_n,y)$; on pose $s = tM$. Si $t(x_1,...,x_n,y) \in O$, alors en raisonnant comme précédemment, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que soit $sN \sim 0$, soit $sN \sim f$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$, de signe constant sur les positifs. Dans le premier cas, $\frac{1}{sN} \sim 0$; autrement $\frac{1}{sN} \sim \frac{1}{f}$. Si $t(x_1,...,x_n,y) \notin O$, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $sN \sim \frac{1}{f}$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ et f de signe constant sur les positifs. Ainsi $\frac{1}{sN} \sim f$.

Cas 4. La somme.

Soient t_1 et t_2 deux termes de hauteur h et $M \in \mathcal{P}_n(x_1,...,x_n,y)$; on pose $s = (t_1 + t_2)M$. Si $t_1(x_1,...,x_n,y) \in O$ et $t_2(x_1,...,x_n,y) \in O$ alors il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $sN \sim f$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$.
Si $t_1(x_1,...,x_n,y) \in O$ et $t_2(x_1,...,x_n,y) \notin O$, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $t_1MN \sim f$ et $t_2MN \sim \frac{1}{g}$ avec $(f,g) \in \mathcal{L}^{\infty,n+1} \times \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ et g de signe constant sur les positifs. Ainsi $sN \sim \frac{f.g+1}{g}$; comme $g \in \mathcal{L}_0^{\infty,n+1}$, $\frac{g}{1+f.g} \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$, ce qui conclut.

Si $t_1(x_1,...,x_n,y) \notin O$ et $t_2(x_1,...,x_n,y) \notin O$, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $t_1MN \sim \frac{1}{f}$ et $t_2MN \sim \frac{1}{g}$ avec $(f,g) \in \mathcal{L}_0^{\infty,n+1}$ et de signe constant

sur les positifs. Ainsi $sN \sim \frac{f+g}{f.g}$. Soit il existe $P \in \mathcal{P}_n(N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $sNP \sim 0$, soit on utilise la proposition 2.5.1 pour conclure.

Cas 5. Le produit.

On raisonne de la même façon que pour la somme.

Cas 6. La composition par $g \in \mathcal{L}^{\infty,p}(P)$.

Soient $t_1,...,t_p$, p termes de hauteur h et $M \in \mathcal{P}_n(x_1,...,x_n,y)$. On pose $s_i = t_iM$. Si il existe $i_0 \leq p$ tel que $t_{i_0}(x_1,...,x_n,y)$ est en dehors de la projection de P sur la i_0-ième coordonnés, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y)$ telle que $s_{i_0}N$ reste en dehors sur un voisinage strictement positif de 0 ; ainsi il existe $R \in \mathcal{P}_n(N^{-1}M^{-1}(x_1,...,x_n,y))$ telle que $g(s_1NR,...,s_pNR) \sim 0$. Autrement, on sait qu'il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n,y)$ telle que $s_iN \sim f_i$ avec $f_i \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ et $f_i - f_i(0)$ de signe constant sur les positifs. De ce fait, on pose $\varphi = g(f_1(X_1^2,...,X_{n+1}^2),...,f_p(X_1^2,...,X_{n+1}^2))$; ainsi $\varphi \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. On obtient donc en posant $S = (X_1^2,...,X_{n+1}^2)$: $g(s_1NS,...,s_pNS) \sim \varphi$.
$\square_{proposition}$

Proposition 2.5.9 . *Soient $t \in \mathcal{L}^{n+1}$; alors pour toute famille* **indépendante** *$(x_1,...,x_n)$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{P}_n(x_1,...,x_n) \cap \mathcal{O}_{n+1}(x_1,...,x_n)$, il existe $N \in \mathcal{P}_n(M^{-1}(x_1,...,x_n)) \cap \mathcal{O}_{n+1}(M^{-1}(x_1,...,x_n))$ telle que si $t(x_1,...,x_n) \in O$, il existe $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$ tel que $tMN \sim f$, sinon $tMN \sim \frac{1}{f}$.*

Preuve : Il suffit de reprendre tous les raisonnements depuis le début de la partie 2.5 mais en utilisant la proposition 2.4.1 au lieu de la proposition 2.4.3.
$\square_{proposition}$

Corollaire 2.5.10 . *Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille indépendante ; alors $(x_1,...,x_n)$ est stable.*

Proposition 2.5.11 . *Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille stable et $y \in o_+^*$ indépendant de $\{x_1,...,x_n\}$; la famille $(x_1,...,x_n,y)$ reste stable.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille stable. La proposition est immédiate pour $n = 0$. De plus, grâce au corollaire précédent, on peut supposer qu'un des x_i est lié à $(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,y)$. De ce fait, grâce à l'hypothèse de récurrence et au lemme 2.4.7, x_i est fortement lié à $(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...x_n,y)$. On peut donc conclure à l'aide de la proposition 2.5.7 et du corollaire 2.4.9.
$\square_{lemme}$

Proposition 2.5.12 . *Soient $(x_1,...,x_n)$ une famille stable, $y \in o$, tel que y n'appartient pas à la structure engendrée par $(x_1,...,x_n)$ et $t \in \mathcal{L}^{n+1}$, tel que $t(x_1,...,x_n,y) \in o$; il existe une matrice M ouverte en $(x_1,...,x_n,y)$ telle que $tM \sim f$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$.*

Preuve : On peut supposer $y > 0$. Si y est fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$, la proposition est vraie grâce à la proposition 2.5.7. Sinon $y = \phi(a_1, ..., a_n, \epsilon)$ où $(a_1, ..., a_n) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$, avec M ouverte, $\phi \in \mathcal{L}^{\infty,n}$ et ϵ indépendant de $\{a_1, ..., a_n\}$ ou nul. Comme y n'appartient pas à la structure engendrée par $(x_1, ..., x_n)$, ϵ est **non nul**. Si $(a_1, ..., a_n, \epsilon)$ est une famille indépendante, la proposition est vraie grâce à la proposition 2.5.9. Sinon, comme $(a_1, ..., a_n)$ est stable, il existe a_i qui est fortement lié aux autres éléments. La proposition 2.5.7 permet de conclure.
$\square_{proposition}$

Théorème 2.5.13 . *Soit $(x_1, ..., x_n) \in o_+^* \times ... \times o_+^*$; il existe une famille stable $(a_1, ..., a_p)$ telle que $(a_1, ..., a_p) \preceq (x_1, ..., x_n)$ avec $p \leq n$.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. Le théorème est immédiat pour $n = 1$. Soit $(x_1, ..., x_n, y)$ des infinitésimaux strictement positifs ; par hypothèse de récurrence, il existe une famille stable $(a_1, ..., a_p) \preceq (x_1, ..., x_n)$ $(p \leq n)$. Si y n'est pas fortement lié à $(a_1, ..., a_p)$ alors il existe une famille stable $(b_1, ..., b_p) \preceq_M (a_1, ..., a_p)$ avec M ouverte et il existe $\epsilon \in o_+$ indépendant de $(b_1, ..., b_p)$ ou nul, tels que $y = \phi(b_1, ..., b_p, \epsilon)$ avec $\phi \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. Si $\epsilon = 0$, on conclut ; sinon comme $(b_1, ..., b_p, \epsilon)$ reste stable, on conclut aussi. On suppose maintenant que y est fortement lié à $(a_1, ..., a_p)$. Soit $t \in \mathcal{L}^{p+1}$, en utilisant la proposition 2.5.7 puis le corollaire 2.4.9, il existe $M \in \mathcal{P}_p(a_1, ..., a_p, y)$ et M ouverte telle que $tM \sim 0$ ou $tM(c_1, ..., c_p, \epsilon) = c_1^{m_1} ... c_p^{m_p}.h(c_1, ..., c_p, \epsilon)$ avec $(c_1, ..., c_p, \epsilon) \preceq_M (a_1, ..., a_p, y)$, $(m_1, ..., m_p) \in \mathbb{N}^p$ et $h \in \mathcal{L}^{\infty,p+1}$ qui ne s'annule pas en 0. Dans le premier cas, le terme t est localement nul en $(a_1, ..., a_p, y)$, car M est **ouverte** ; autrement, comme y est fortement lié à $(a_1, ..., a_p)$ et que $(c_1, ..., c_p) \preceq (a_1, ..., a_p)$, $t(a_1, ..., a_p, y)$ est lié à $\{a_1, ..., a_p\}$, par choix de M.
$\square_{theoreme}$

Corollaire 2.5.14 . *Soient $(x_1, ..., x_n)$ une famille stable, $y \in o$ et $t \in \mathcal{L}^{n+1}$ tel que t n'est pas localement nul en $(x_1, ..., x_n, y)$; si $t(x_1, ..., x_n, y) = 0$ alors y appartient à la structure engendrée par $(x_1, ..., x_n)$.*

Preuve : Supposons que y n'appartienne pas à la structure engendrée par $(x_1, ..., x_n)$; y est fortement lié à $(x_1, ..., x_n)$ sinon le terme serait localement nul en $(x_1, ..., x_n)$. Il existe ainsi une matrice $M \in P_n(x_1, ..., x_n, y)$ telle que $tM(c_1, ..., c_p, \epsilon) = c_1^{m_1} ... c_p^{m_p}.h(c_1, ..., c_p, \epsilon)$ avec $(c_1, ..., c_p, \epsilon) = M^{-1}(x_1, ..., x_n, y)$ et h qui ne s'annule pas en 0. Cette condition étant impossible, on conclut.
$\square_{proposition}$

Chapitre 3

Conséquences modèle-théoriques

3.1 Construction de plongements

Les trois faits suivants résultent aisément de l'o-minimalité et de l'élimination des quantificateurs dans les corps réels clos.

Fait 3.1.1 . *Soient A un corps réels clos et K et L deux corps ordonnés tels que A se plonge dans K par i et dans L par j ; soient X un ensemble, σ_1, une application de X dans K et σ_2, une application de X dans L tels que :*

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall P \in A[X_1, ..., X_n] \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in X^n \quad P(\sigma_1(x_1), ..., \sigma_1(x_n)) = 0$ (*respectivement* > 0) $\leftrightarrow P(\sigma_2(x_1), ..., \sigma_2(x_n)) = 0$ (*respectivement* > 0)

Il existe un plongement k du corps engendré par les $\sigma_1(x)$, $x \in X$, dans L tel que $k(\sigma_1(x)) = \sigma_2(x)$ et $k \circ i = j$.

Fait 3.1.2 . *Soient A un corps réels clos et B un corps ordonnés tel que A se plonge dans B par i ; il existe une ultrapuissance $\mathcal{A}$ de A telle que B se plonge dans $\mathcal{A}$ par j avec $j \circ i$ égal au plongement canonique de A dans $\mathcal{A}$.*

Fait 3.1.3 . *Soient A un corps réels clos et B et K deux corps ordonnés tels que A se plonge dans B par i et dans K par j ; il existe L un corps ordonné tel que B se plonge dans L par k et tel que K se plonge dans L par k', avec $k \circ i = k' \circ j$. De plus, en vertu du fait 2, on peut supposer que L est une ultrapuissance de A et que $k \circ i$ est le plongement canonique de A dans L.*

Proposition 3.1.4 . *Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T et J une famille stable de $\mathcal{M}$ de taille n, il existe, i_J, un plongement de* **corps** *de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}$, une ultrapuissance de $\mathbb{R}$, tel que i_J restreint à $\mathbb{R}$ est égal au plongement canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{R}$ et tel que :*

$$\forall t \in \mathcal{L}^{\infty,n} \quad i_J(t(x_1, ..., x_n)) = t(i_J(x_1), ..., i_J(x_n))$$

où le t du deuxième membre est l'interprétation canonique de t dans $\mathcal{R}$.

Preuve : On raisonne par récurence sur la taille de la famille J. Pour $n = 0$, l'initialisation est immédiate.
On considère ainsi une famille stable de taille $n+1$, que l'on ordonne et note $(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$, avec x_{n+1} le plus petit. On sait qu'il existe une famille stable $(a_1, ..., a_p)$ avec $p \leq n$ telle que $(a_1, ..., a_p) \preceq_M (x_1, ..., x_n)$. Par hypothèse de récurrence, on a construit $i_{(a_1,...,a_p)}$. Soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$; on a, grâce à Taylor :

$$\forall \ p \in \mathbb{N} \ \ |i_{a_1,...,a_n}(t(x_1, ..., x_{n+1})) - t(i_{a_1,...,a_p}(x_1), ..., i_{a_1,...,a_p}(x_{n+1}))| \leq x_{n+1}^p$$

Si $t(x_1, ..., x_{n+1}) > 0$ alors $t(x_1, ..., x_{n+1})$ est lié à $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$; de ce fait, $t(i_{x_1,...,x_n}(x_1), ..., i_{x_1,...,x_n}(x_n)) > 0$. Si maintenant, $t(x_1, ..., x_{n+1}) = 0$, t est localement nul dans $\mathbb{R}$ donc t est nul en $(i_{a_1,...,a_p}(x_1), ..., i_{a_1,...,a_p}(x_{n+1}))$. En appliquant le fait 3.1.1, suivi du fait 3.1.2 et 3.1.3, on peut conclure.
$\square_{proposition}$

Corollaire 3.1.5 *. Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T et $(x_1, ..., x_n)$ une famille d'infinitésimaux de $\mathcal{M}$; il existe $j_{x_1,...,x_n}$ un plongement de* **corps** *de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}$, et une ultrapuissance de $\mathbb{R}$ telle que j restreint à $\mathbb{R}$ est égal au plongement canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{R}$ et telle que :*

$$\forall t \in \mathcal{L}^{\infty,n} \ \ j_{x_1,...,x_n}(t(x_1, ..., x_n)) = t(j_{x_1,...,x_n}(x_1), ..., j_{x_1,...,x_n}(x_n))$$

Preuve : On suppose sans restreindre la généralité que tous les x_i sont non nuls. On sait qu'il existe une famille stable $(a_1, ..., a_p) \preceq (x_1, ..., x_n)$. Ainsi d'après la proposition précédente, on conclut en posant $j_{x_1,...,x_n} = i_{a_1,...,a_p}$.
$\square_{corollaire}$

Corollaire 3.1.6 *. Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T et $(x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}$, il existe $k_{x_1,...,x_n}$ un plongement de* **corps** *de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}$, et une ultrapuissance de $\mathbb{R}$ telle que $k_{x_1,...,x_n}$ restreint à $\mathbb{R}$ est égal au plongement canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{R}$ et telle que :*

$$\forall t \in \mathcal{L}^{\infty,n} \ \ k_{x_1,...,x_n}(t(x_1, ..., x_n)) = t(k_{x_1,...,x_n}(x_1), ..., k_{x_1,...,x_n}(x_n))$$

Preuve : Si un des x_i est infiniment grand, $k_{x_1,...,x_n}$ est égal à n'importe quel plongement de corps de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}$; car pour $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}$, $t(x_1, ..., x_n) = 0$.
Sinon on pose $x_i = a_i + u_i.\epsilon_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in \{-1, 1\}$, $\epsilon_i \in o_+$. On pose ainsi

$$k_{x_1,...,x_n} = j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}$$

(On utilise les $\sqrt{\epsilon_i}$ afin de pouvoir considérer la fonction s ci-dessous ; s permet de prolonger de façon C^∞ la fonction t au bord de son pavé de définition.)
En effet, soit $t \in \mathcal{L}^{\infty,n}(P)$, on a trois cas possibles. Si un des x_i est en dehors de P, il en va de même de $j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(x_i)$; donc on conclut dans ce cas. Si tous les a_i sont dans l'intérieur de P, on conclut aussi par définition de $j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}$.

Enfin si un des a_i est sur le bord de P et si tous les x_i sont dans P, on pose $s(X_1, ..., X_n) = t(a_1 + u_1.X_1^2, ..., a_n + u_n.X_n^2)$. Ainsi $s \in \mathcal{L}^{\infty,n}$; de plus

$$j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(t(x_1, ..., x_n)) = j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(s(\sqrt{\epsilon_1}, ..., \sqrt{\epsilon_n})) =$$

$$s(j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(\sqrt{\epsilon_1}), ..., j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(\sqrt{\epsilon_n})) = t(j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(x_1), ..., j_{\sqrt{\epsilon_1},...,\sqrt{\epsilon_n}}(x_n))$$

$\square_{corollaire}$

Proposition 3.1.7 . *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T, il existe un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans une ultrapuissance de $\mathbb{R}$ qui préserve les réels.*

Preuve : La proposition est immédiate d'après le corollaire précédent.
$\square_{proposition}$

3.2 Clôture existentielle

Dans la suite, on considère un modèle $\mathcal{M}$ de T qui se plonge dans les conditions de la proposition précédente dans une ultrapuissance $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$. On assimilera $\mathcal{M}$ et son image dans $\mathcal{R}$.

Proposition 3.2.1 . *Soient $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}^n \cap o^n$ et $y \in \mathcal{R} \cap o$. Soit $t \in \mathcal{L}^{n+1}$; si $t(\overline{x}, y) = 0$ (respectivement $t(\overline{x}, y) > 0$), il existe $(u, v) \in \mathcal{M}^2$ tel que pour tout $w \in \mathcal{R}$ compris entre u et v, $t(\overline{x}, w) = 0$ (respectivement $t(\overline{x}, w) > 0$).*

Preuve : Si y appartient à $\mathcal{M}$, on conclut ; ainsi dans la suite de la preuve, on suppose que $y \notin \mathcal{M}$. Il existe tout d'abord une famille stable de $\mathcal{R}$, $(a_1, ..., a_p)$ $(p \leq n)$, telle que $(a_1, ..., a_p) \leq (x_1, ..., x_n)$; ainsi il existe M une matrice telle que $(x_1, ..., x_n) = M(a_1, ..., a_p)$ et a_i appartient à $\mathcal{M}$. On pose $s(X_1, ..., X_p, Y) = t(M(X_1, ..., X_n), Y)$. On a deux cas à envisager.

Cas 1. $t(\overline{x}, y) = 0$.

Si s n'est pas localement nul en $(a_1, ..., a_p, y)$, y appartient à la structure engendrée par $(a_1, ..., a_p)$ donc appartient à $\mathcal{M}$, ce qui est exclu. Ainsi s est localement nul en $(a_1, ..., a_p, y)$; on considère donc U, le plus grand ouvert de $\mathcal{R}^{p+1}$ qui contient $(a_1, ..., a_p, y)$, sur lequel s est nul et tel que la trace de U sur la droite $(a_1, ..., a_p, Y)$ est convexe. On note X, la trace de U sur la droite $(a_1, ..., a_p, Y)$. On peut supposer que X est borné, sans restreindre la généralité. Comme X est définissable, X possède une borne supérieure v et inférieure u. On peut supposer aussi que u et v sont infinitésimaux sans restreindre la généralité. On ne va s'occuper que de u, le cas de v étant similaire. On va montrer que $u \in \mathcal{M}$. Supposons que $u \notin \mathcal{M}$. Alors il existe une matrice N, telle que $sN \sim f$ où $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. L'image de N contient ainsi un ouvert V tel que $(\alpha_0, u) \in V$;

or $U \cap V \neq \emptyset$. Ainsi f est nulle sur $f^{-1}(U \cap V)$ qui est un ouvert non vide. De ce fait f est localement nulle ce qui implique que s est nul sur V, ce qui est impossible.

Cas 2. $t(\overline{x}, y) > 0$.

On sait qu'il existe une matrice N telle que $sN \sim f$ avec $f \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. Ainsi il existe un ouvert contenant $(a_1, ..., a_p, y)$ tel que s est strictement positif sur cet ouvert. Comme précédemment, on considère U, le plus grand ouvert de $\mathcal{R}^{p+1}$ qui contient $(a_1, ..., a_p, y)$, sur lequel s est strictement positif et tel que la trace de U sur la droite $(a_1, ..., a_p, Y)$ est convexe. De la même manière, on se place dans le cas où U possède une borne inférieure u. Si $u \notin \mathcal{M}$, il existe une matrice P telle que $sP \sim g$ avec $g \in \mathcal{L}^{\infty,n+1}$. Par continuité de g, $s(a_1, ..., a_p, u)$ est nul ou strictement positif. Si $s(a_1, ..., a_p, u) = 0$, comme s ne peut pas être localement nul en $(a_1, ..., a_p,)$, $u \in \mathcal{M}$. Autrement si $s(a_1, ..., a_p, u) > 0$ comme précédemment, cette condition est incompatible avec l'hypothèse de maximalité de U.
$\square_{proposition}$

Corollaire 3.2.2 . *$\mathcal{M}$ est existentiellement clos dans la théorie T.*

Théorème 3.2.3 . *T est modèle-complète et T est équivalente à $T_{\mathbb{R}}$.*

Preuve : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T tels que $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N}$. Comme $\mathcal{N}$ se plonge dans une ultrapuissance $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ et comme $\mathcal{M}$ est existentiellement clos dans $\mathcal{R}$, il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ dans laquelle $\mathcal{N}$ se plonge ; de ce fait, T est modèle-complète. Pour ces raisons, T est équivalente à $T_{\mathbb{R}}$.
$\square_{theoreme}$

Corollaire 3.2.4 . *T admet l'élimination des quantificateurs, est o-minimale et toutes les fonctions définissables dans T sont polynômialement bornées.*

Preuve : On va utiliser pour ce faire la proposition suivante plus générale ; on pourra par exemple consulter [CK] ou [P] pour plus de détails.

Proposition 3.2.5 . *Soit T une théorie universelle et modèle-complète ; T admet l'élimination des quantificateurs.*

Preuve : On note $\mathcal{L}$ le langage de la théorie T et pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, ..., c_n\}$, où c_1,...,c_n sont n nouvelles constantes. Soit $\mathcal{M}$ un modéle de T et $(a_1, ..., a_n) \in M^n$; on note $< \overline{a} >$ la structure engendrée par $(a_1, ..., a_n)$ dans $\mathcal{M}$ et $D(\overline{a})$ l'ensemble des conséquences sans quantificateurs de $< \overline{a} >$, dans le langage $\mathcal{L}'$. $(< \overline{a} >, a_1, ..., a_n)$ est une $\mathcal{L}'$-structure ; de plus, comme T est universelle et modèle-complète, une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{N}$ satisfait $T \cup D(\overline{a})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models T$ et $< \overline{a} >$ se plonge dans $\mathcal{N}$.
Soit $F[X_1, ..., X_n]$ une formule de $\mathcal{L}$ telle que $(\mathcal{M}, a_1, ..., a_n) \models F[X_1, ..., X_n]$; (<

$\overline{a} >, a_1, ..., a_n) \models F(c_1, ..., c_n)$ et comme T est universelle et modéle-complète, tout modéle de $T \cup D(\overline{a})$ satisfait $F(c_1, ..., c_n)$. Ainsi $F(c_1, ..., c_n)$ est une conséquence de $T \cup D(\overline{a})$. Il existe donc une formule $\phi(c_1, ..., c_n)$ de $D(\overline{a})$ telle que $F(c_1, ..., c_n)$ est équivalente à $\phi(c_1, ..., c_n)$ pour la théorie T.
$\square_{proposition}$

De l'élimination des quantificateurs, on tire l'o-minimalité et la borne polynômiale sur les fonctions définissables grâce à la quasi-analycité.
$\square_{corollaire}$

Chapitre 4

Conclusion

Nous donnons des exemples de questions poséees par la thèse.

Les premières questions portent sur le caractère constructif des preuves de la thèse.
Question 1. *Peut-on restreindre les constantes utilisées dans la classe $\overline{\mathcal{F}}$, de façon à ne plus considérer $\mathbb{R}$ tout entier ?*

Comme on peut le constater, $\mathbb{R}$ entier est utilisé dans la construction de la classe $\overline{\mathcal{F}}$. L'utilité de $\mathbb{R}$ réside dans le fait que $\mathbb{R}$ est toujours résiduel dans ses extensions de corps ordonnés. Cet argument est important dans la partie 2.6.

Le problème est qu'ainsi, on ne peut pas parler de **récursivité**. Or la méthode de désingularisation donnée semble constructive et on aimerait pouvoir formaliser cette idée. Il faut donc pour cela restreindre les constantes de $\overline{\mathcal{F}}$. Le candidat naturel pour ce remplacement est la clôture existentielle du vide par $\mathcal{F}$ et les fonctions implicites. La question 1 est ainsi reliée à la suivante.
Question 2. *Quelle est la complexité du diagramme simple de la clôture du vide par $\mathcal{F}$ et les fonctions implicites.*

On est aussi amené à se demander si les arguments employés dans cette thèse sont généralisables à des classes de fonctions plus grosses.
Question 3. *Peut-on généraliser les résultats de la thèse (élimination des quantificateurs et o-minimalité) à des classes $\mathcal{F} \subset C^\infty(]0,1]^n)$?*

Les classes de fonctions de Puiseux sont o-minimales [M]. Nous essayons actuellement d'obtenir aussi des résultats d'élimination des quantificateurs dans ces classes.
On peut aussi poser la question suivante encore plus générale.
Question 4. *Peut-on étendre les résultats de la thèse à toutes les classes $\mathcal{F}$ telles que $\mathbb{R}_\mathcal{F}$ est o-minimale et polynômialement bornée ?*

Une réponse positive mettrait à pied d'oeuvre pour la question ouverte suivante.
Question 5. *Existe-il une classe de fonctions E telle que $\mathbb{R}_E$ est o-minimale et polynômialement bornée mais ne satisfaisant pas la décomposition en cellules C^∞ ?*

On sait déjà qu'il existe des classes de fonctions E telles que $\mathbb{R}_E$ est o-minimale et polynômialement bornée mais ne satisfait pas la décomposition en cellules analytiques [vdDRS].

Alors que cette thèse se limite à des cas polynômialement bornés, depuis la découverte de l'o-minimalité de l'exponentielle [W], énormément de travaux sur l'exponentielle réelle ont été lancés ([vdDMM] par exemple).
Question 6. *Peut-on étendre les méthodes quand on ajoute l'exponentielle à $\mathcal{F}$?*

Cette question est liée à la suivante.
Question 7. *Quels types de résultats peut-on avoir grâce aux méthodes de la thèse quand on ajoute l'exponentielle, la dérivée et la composition comme symboles au langage ?*

Ces deux interrogations sont en rapport avec des travaux sur les corps de transséries ([vdH], [MR],...). On espère obtenir dans le cadre des structures ordonnées des résultats analogues à ceux des théories différentielles classiques, dans le cadre des corps algébriquement clos.

Nous revenons maintenant sur des questions concernant directement la construction de $\overline{\mathcal{F}}$.
Question 8. *Comment construire de façon systématique $\mathcal{F}$ pour obtenir $\overline{\mathcal{F}}$ quasi-analytique ?*

On a tout d'abord le résultat suivant.

Lemme 4.0.6 . *Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions C^∞ définies sur des pavés basiques telle que la clôture de $\mathcal{F}$ par $\mathbb{R}$, somme, produit et fonctions implicites est quasi-analytiques ; alors $\overline{\mathcal{F}}$ est quasi-analytique.*

C'est-à-dire que rajouter la clôture par racines n-ièmes et par division exacte n'entraîne pas de dégénérescence de la classe.

On peut enfin se demander comment construire $\overline{\mathcal{F}}$ quasi-analytique à partir d'une transsérie donnée.

Question 9. *Soit $\varphi \in \mathbb{R}[\![\mathbb{R}]\!]$ et Σ l'ensemble des troncages de ϕ ; à quelles conditions peut-on trouver un ensemble de fonctions réelles $\mathcal{F}$ telle que $\mathbb{R}_\mathcal{F}$ est o-minimale et pour tout $\psi \in \Sigma$, il existe $f \in \mathcal{F}$ dont le quotient par les voisinages positifs de 0 correspond à ψ.*

Bibliographie

[**B**] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques : Algèbre commutative - chapitre 7,* Hermann, 1965.

[**C**] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry,* Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000.

[**CK**] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model theory,* North-Holland, 1990.

[**DvdD**] J. Denef, L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets,* Annals of Mathematics, 128, 79-138, 1988.

[**vdD1**] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures,* Cambridge University Press, 1998.

[**vdD2**] L. van den Dries, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem and some nondefinability results,* Bulletin of the American Mathematical Society, 15, 189-193, 1986.

[**vdDMM**] L. van den Dries, A. Macintyre et D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentation,* Annals of Mathematics, 140, 183-205, 1994.

[**vdDS**] L. van den Dries et P. Speissegger, *O-minimal preparation theorems,* 2003. A paraître dans "Proceedings of the Euro-Conference in Model Theory and Applications, Ravello, Italy, May 27-June 1, 2002".

[**DPT**] *Séminaire sur les Singularités des Surfaces, au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977,* édité par M. Demazure, H. C. Pinkham et B. Teissier, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1980.

[**DR**] F. Diener et G. Reeb, *Analyse non-standard,* Hermann, 1989.

[**G**] A. M. Gabrielov, *Projections of semi-analytic sets,* Functional Analysis and its Applications, 2, 282-291, 1968.

[**vdH**] J. van der Hoeven, *Asymptotique automatique, Thèse, Université Paris VII,* Paris, 1997.

[**LR**] J-M. Lion, J-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles,* Annales de l'Institut Fourier, 47, 859-884, 1997.

[**M**] C.Miller, *Expansions of the real field with power functions,* Annals of Pure Applied Logic, 68, 79-94, 1994.

[**Mi**] D. Miller, *A preparation theorem for Weierstrass systems, Thèse, University of Wisconsin,* Madison, 2003

[**MR**] M-H.Mourgues, J-P. Ressayre, *A transfinite version of Puiseux's theorem, with applications to real closed fields,* Logic Colloquium '90 (Helsinki 1990), Lecture Notes in Logic, 2, 250-258, Springer, Berlin, 1993.

[**P**] B. Poizat, *Cours de théorie des modèles,* Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985.

[**RSW**] J-P. Rolin, P. Speissegger et A. J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality,* Journal of the American Mathematical Society, 16, 751-777, 2003.

[**T**] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry,* Rand Corporation monograph, Berkeley et Los Angeles, 1951.

[**W**] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function,* Journal of the American Mathematical Society, 9, 1051-1094, 1996.

[**Wh**] N. White, *Theory of matroids,* Cambridge University Press, 1986