



HAL
open science

Simulation d'écoulements pariétaux génériques à bas nombre de Mach pour l'amélioration du refroidissement des chambres de combustion aéronautiques

Simon Delmas

► **To cite this version:**

Simon Delmas. Simulation d'écoulements pariétaux génériques à bas nombre de Mach pour l'amélioration du refroidissement des chambres de combustion aéronautiques. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Pau et des pays de l'Adour, 2015. Français. NNT : . tel-01256238

HAL Id: tel-01256238

<https://hal.science/tel-01256238>

Submitted on 14 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET LEURS APPLICATIONS

Par Simon Delmas

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mécanique des Fluides

Simulation numérique directe d'un jet en écoulement transverse à bas nombre de Mach en vue de l'amélioration du refroidissement par effusion des chambres de combustion aéronautiques

Directeur de thèse : Pascal Bruel

Co - directeur de thèse : Vincent Perrier

Soutenance prévue le 16 Décembre 2015

Devant la commission d'examen formée de :

M. BONNETON, Philippe	Université de Bordeaux I - CNRS (Directeur de Recherche)	Examineur
M. BRUEL, Pascal	Université de PAU et des Pays de de l'Adour CNRS (Chargé de Recherche)	Examineur
M. BUFFAT, Marc	Université Claude Bernard Lyon I (Professeur)	Examineur
M. NICOUD, Franck	Université de Montpellier (Professeur)	Rapporteur
M. PERRIER, Vincent	INRIA Bordeaux Sud-Ouest (Chargé de Recherche)	Examineur
M. SABELNIKOV, Vladimir	ONERA, Palaiseau (Directeur de Recherche)	Rapporteur
Mme. VIGNAL, Marie-Hélène	Université Paul Sabatier (Maître de conférences)	Examineur

À mes parents et à Lili.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse aux jets en écoulement transverse dans une configuration générique de celle du refroidissement par effusion de chambres de combustion aéronautiques. L'amélioration des modèles de paroi avec transfert de masse passe par une meilleure connaissance de l'interaction entre les jets et l'écoulement principal. Nous avons donc réalisé la simulation numérique directe d'un jet issu d'un perçage incliné avec ou sans giration, pour des écoulements isothermes, turbulents et à bas nombre de Mach, dans un contexte compressible. Pour cela nous avons travaillé avec la bibliothèque AEROSOL d'éléments finis continus et discontinus sur maillage hybride. En particulier nous nous sommes intéressés à la stabilité des flux numériques pour le compressible instationnaire associés à la méthode de Galerkin discontinue lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. Nous avons pu mettre en évidence des comportements instables lors de l'utilisation de discrétisation temporelle explicite que nous avons corrigés en proposant un nouveau flux. Dans un deuxième temps, nous avons effectué les développements nécessaires à la réalisation des calculs. Nous nous sommes en particulier intéressés à la génération d'un champ de vitesse turbulent synthétique par la méthode SEM (Synthetic Eddy Method) que nous avons implantée dans AEROSOL et validée. Grâce aux outils de post-traitement développés, nous avons conduit l'analyse de nos résultats. Dans le cas sans giration, les comparaisons avec les résultats expérimentaux et les résultats de simulations RANS que nous avons obtenus en parallèle sur la configuration du banc d'essai MAVERIC sont encourageants. La structure moyenne d'ensemble du jet est notamment correctement reproduite. En ce qui concerne la cas avec giration, le comportement attendu de déflexion successive du jet dans les deux plans caractéristiques (plan d'injection et plan de l'écoulement transverse) est bien reproduit et illustre tout le potentiel prévisionnel de la librairie de calcul que nous avons contribué à développer.

Mots clefs : Mécanique des fluides et aéronautique, Calcul scientifique, Simulation numérique directe (DNS), Jet en écoulement transverse, Écoulement à bas nombre de Mach, Méthode de Galerkin discontinue.

Abstract

This work is made in the context of the wall cooling of combustion chambers with the effusion cooling method. More precisely, jets in cross flow are considered. Improvement of wall models with mass transfer require indeed a better knowledge of the interaction of the jet and the main flow. Therefore the direct numerical simulation of a jet issuing from an inclined hole with or without gyration, for isothermal turbulent flow at low Mach number, in a compressible context is carried out. To achieve this, the high order finite elements library AeroSol is used on hybrid grid with the discontinuous Galerkin method. First, the stability of numerical flux for the unsteady compressible flow associated with the discontinuous Galerkin method in the zero Mach number limit is studied. A study of the classical Riemann solvers pointed out a general instability in the unsteady low Mach context with explicit time discretization. This was fixed by developing a new flux. Then numerical tools were developed for achieving the computations. A particular focus was made on the development of a synthetic turbulent velocity field by using the Synthetic Eddy Method. This method was implemented in Aerosol, and validated. Postprocessing tools have also been developed. For the computations, two cases have been considered: one without gyration, and another one with gyration. For the case without gyration, results have been compared with both experimental data (obtained with the Maveric test bench) and RANS simulations. Results obtained are very encouraging, especially, the mean flow obtained with the three methods (RANS, Experiments, and DNS) are matching well. In the case with gyration, the expected behavior of successive deflection of the jet in both planes (injection plane and transverse plane of the flow) is reproduced and proves all the potential of the AeroSol library.

Keywords : Fluid mechanics and aeronautics, Scientific computing, Direct numerical simulation (DNS), Jet in crossflow, Low Mach number flow, Discontinuous Galerkin method.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Pascal Bruel et Vincent Perrier, mes directeurs de thèse, pour la confiance qu'ils m'ont accordé au cours de ces trois années. Je vous remercie pour votre disponibilité, pour votre rigueur, pour la pertinence de vos interventions, pour m'avoir appris énormément dans vos spécialités respectives et dans beaucoup d'autres domaines, profiter de l'étendue de vos connaissances a été une chance.

Je souhaite également remercier Franck Nicoud et Vladimir Sabelnikov d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail, ainsi que les membres du jury Marc Buffat, Marie-Hélène Vignal et particulièrement Philippe Bonneton qui m'a accordé sa confiance pour l'après thèse.

Je remercie le conseil général des Pyrénées Atlantiques ainsi que le programme européen IMPACT-AE d'avoir financé ce travail.

C'est avec un grand plaisir que je remercie tout les membres de l'équipes Cagire qui ont fait de mon séjour une période agréable, Yann Moguen pour sa sympathie et tous les éclairages qu'il m'a apporté sur la problématique du bas Mach, Rémi Manceau qui a bien voulu répondre à mes question sur les écoulements turbulents et me laisser gagner durant nos partie d'échec, Maxime Mogé, Hamza Belkhayat, Benjamin Lux et Jonathan Jung pour tous les bons moments passés ensemble au travail et en dehors.

Je remercie aussi tous les membres de l'équipe Inria Magique3D pour leur accueil et tous les services rendus, et plus particulièrement Lionel Boillot pour toutes nos discussions, ainsi que toutes les personnes du LMAP que j'ai côtoyé.

Enfin mes pensées vont à mes proches, tout d'abord mes parents qui m'ont poussé à faire des études et qui ont rendu cela possible grâce à leur soutien, à mes "poulets" de la troupe de Bordeaux et de l'équipe des week-ends de Mai qui ont toujours répondu présent pour décompresser en fin de semaine, et pour finir à ma Lili.

Table des matières

Table des matières	xi
Table des figures	xv
Liste des tableaux	xxi
Liste des symboles	xxiii
Contexte de la thèse	1
Fonctionnement d'une turbine	2
Le refroidissement par effusion	3
Organisation du mémoire	5
I Phénoménologie	7
1 Modèle général d'écoulement	9
1.1 Le modèle général d'écoulement	9
1.1.1 Hypothèses	9
1.1.2 Formulation	11
1.1.3 Adimensionnement	12
1.2 Les équations d'Euler	14
1.2.1 Formulation	14
1.2.2 Adimensionnement	15
1.2.3 Formulation en variables primitives et caractéristiques	15
1.3 Comportements à bas nombre de Mach	17
1.3.1 Développement asymptotique en échelle de temps convective	17
1.3.2 Développement asymptotique en échelle de temps convective et acoustique	18
1.4 Introduction aux écoulements turbulents	21
1.4.1 Traits distinctifs	21
1.4.1.1 L'apparition du chaos	21
1.4.1.2 La coexistence d'échelles spatiales très différentes	22
1.4.2 Représentation des écoulements turbulents	23
1.4.2.1 L'approche statistique physique	23
1.4.2.2 L'approche statistique spectrale	24
1.4.3 Modélisation de la turbulence	26

1.4.3.1	La simulation numérique directe	27
1.4.3.2	La modélisation RANS	27
1.4.3.3	La simulation aux grandes échelles	28
2	Introduction au jet transverse	31
2.1	Caractéristiques géométriques	32
2.2	Jet cisailé par un écoulement	34
2.2.1	L'écoulement secondaire	35
2.2.2	L'écoulement à l'intérieur des perçages	36
2.2.3	Le jet transverse	37
2.2.3.1	Écoulement moyen	37
2.2.3.2	Aspects instationnaires	40
2.2.4	Influence de la giration	42
2.3	Simulation numérique directe	43
II	Outils utilisés	45
3	Outils utilisés	47
3.1	Le banc d'essai MAVERIC	47
3.1.1	Métrologie	49
3.1.2	Source d'erreur et incertitudes	53
3.2	Code SATURNE	55
3.2.1	Discrétisation temporelle	55
3.2.2	Modèles de turbulence	56
3.2.2.1	Modèles du premier ordre	56
3.2.2.2	Modèles du second ordre	57
3.2.2.3	Prise en compte des parois	58
III	Outils développés	61
4	Méthode numérique	63
4.1	La méthode Galerkin discontinue	64
4.1.1	Formulation variationnelle pour un système hyperbolique non linéaire	65
4.1.2	Formulation variationnelle pour le Laplacien	68
4.1.2.1	La méthode Bassi et Rebay	69
4.1.2.2	Le schéma BR2	72
4.1.3	Formulation DG pour les équations de Navier-Stokes	72
4.2	Flux numérique	74
4.2.1	Schéma de Godunov	74
4.2.2	Le solveur approché de Roe	75
4.3	Schéma de discrétisation temporel	76
4.3.1	Méthode explicite	76
4.3.2	Méthode implicite	78
4.4	Conditions aux limites	79
4.4.1	Conditions aux limites subsoniques	80

4.4.1.1	Entrée subsonique	81
4.4.1.2	Sortie subsonique	81
4.4.1.3	Décomposition du flux numérique	82
4.4.1.4	Expérience numérique	83
4.4.2	Génération synthétique de turbulence	84
4.4.2.1	Description de la méthode	85
4.4.2.2	Définition des moments cibles	89
4.5	Conclusion	95
5	Construction d'un schéma bas Mach instationnaire	97
5.1	Écoulements bas Mach stationnaires	99
5.1.1	Présentation du cas test	100
5.1.2	Expérience numérique	102
5.1.3	Comportement du schéma de Roe semi-discret	103
5.1.4	Les schémas compressibles bas Mach	106
5.1.5	Le cas particulier des maillages triangulaires	109
5.1.6	L'influence de la montée en ordre	110
5.2	Écoulements bas Mach instationnaires	113
5.2.1	Présentation du cas test	113
5.2.2	Comportement des flux numériques pour l'instationnaire	114
5.2.3	Flux numériques avec termes inertiels	115
5.3	Construction d'un nouveau flux numérique	117
5.3.1	Développement asymptotique à deux échelles des équations semi-discrétisées	117
5.3.1.1	Le schéma de Roe	117
5.3.1.2	Le flux LMRoe de Rieper	121
5.3.2	Analyse de stabilité du système d'ondes en formulation du premier ordre	122
5.3.2.1	Discrétisation par la méthode Galerkin discontinue	122
5.3.2.2	La méthode de Runge-Kutta	124
5.3.2.3	Analyse de von-Neumann	124
5.3.2.4	Résultats	127
5.3.3	Un schéma stable et convergent pour le système d'ondes	128
5.3.4	Un nouveau flux numérique pour les écoulements compressibles instationnaires bas Mach	132
5.3.4.1	Application aux équations d'Euler	132
5.3.4.2	Résultats numériques	135
5.4	Conclusion partielle	137
IV	Étude numérique	139
6	Expériences numériques	141
6.1	Écoulement de Poiseuille circulaire	141
6.1.1	Configuration en deux dimensions	141
6.1.2	Configuration en trois dimensions	144
6.2	Vortex de Taylor-Green	145

6.2.1	Initialisation	146
6.2.2	Résultats	146
6.3	Simulations numériques directes de jet en écoulement transverse	148
6.3.1	Caractéristiques de l'écoulement	148
6.3.2	Échelles de turbulence	150
6.3.3	Configuration sans giration	151
6.3.3.1	Dimensionnement du maillage	152
6.3.3.2	Conditions aux limites	154
6.3.3.3	Réalisation du calcul	154
6.3.3.4	Résultats	159
6.3.4	Configuration avec giration	185
6.3.4.1	Dimensionnement du maillage	185
6.3.4.2	Conditions aux limites	187
6.3.4.3	Réalisation du calcul	188
6.3.4.4	Résultats	190
6.4	Conclusion	193
	Conclusion et perspectives	195
	Bibliographie	196
	A Article paru dans Journal of Computational Physics	207

Table des figures

1	Coupe d'une chambre de combustion annulaire à flux inversée. Tirée de [86]	2
2	Différentes approches du refroidissement pariétal. Tirée de Gustafsson [41]	4
3	Vue d'une paroi de chambre de combustion avec perforations	5
1.1	Exemple de signal instantané de vitesse axiale enregistré sur l'axe du canal supérieur de MAVERIC en régime turbulent	22
1.2	Fonction d'autocorrélation et échelles de Taylor associées, tirée de [21]	25
1.3	Spectre d'énergie turbulente	27
1.4	Spectre d'énergie d'un écoulement turbulent. La modélisation LES consiste à ne résoudre explicitement que les échelles les plus énergétiques et à modéliser les échelles dissipatives (zone rayée). Tirée de [70]	29
2.1	Vue des perforations d'une chambre de combustion annulaire	32
2.2	Configuration générique expérimentale	33
2.3	Description de la géométrie de nos configurations d'études	34
2.4	Profil de vitesse moyenne verticale adimensionnée côté aspiration dans l'axe de la veine tiré de [99]. La distance à la plaque est (de haut en bas) : $y = 0, 0.25d, 0.5d, 1d, 2d$	35
2.5	Schéma de l'écoulement côté aspiration tiré de [67]	36
2.6	Amplitude de vitesse moyenne à l'intérieur du perçage tiré de [16]	37
2.7	Schéma du jet transverse d'après [103]	38
2.8	Profil normal de vitesse moyenne longitudinale en aval de la perforation tiré de [81]. Comparaison de résultats PIV et de simulations numériques RANS	40
2.9	Représentation d'un jet transverse pour de faibles rapports de vitesses R et identification des structures cohérentes de vorticité. Tirée de [35].	41
2.10	Influence de l'angle de giration tirée de [126]. Vecteur vitesse en aval du perçage pour $\alpha = 30^\circ$. � gauche $\beta = 0^\circ$ et à droite $\beta = 45^\circ$	43
3.1	banc d'essai MAVERIC avec la plaque à un trou employée : au premier plan la tête LDV (noire) et la caméra PIV.	48
3.2	LDV : principe de base . (Tiré de Nguyen [91])	50
3.3	PIV : principe de base.	51
3.4	Positions des trois fenêtres PIV utiliser pour mesurer le champ de vitesse du jet représenté ici par un foret de 5 mm de diamètre inséré dans le trou.	52
3.5	Image résultant de la réunion des trois fenêtres PIV illustrant l'extension spatiale totale de la zone de mesure par PIV pour le jet représenté par un foret de 5 mm de diamètre inséré dans le trou de la plaque.	52

4.1	Position des ondes dans les conditions aux limites en entrée et sortie du domaine de calcul.	80
4.2	Propagation d'un vortex à travers une sortie subsonique à l'ordre un	84
4.3	Propagation d'un vortex à travers une sortie subsonique à l'ordre deux . . .	84
4.4	Illustration du principe de la SEM tirée de [28]	86
4.5	Profils normaux à la paroi de vitesse moyenne et tension de Reynolds dans les veines supérieure et inférieure, mesurées expérimentalement par LDV sur le banc d'essais MAVERIC	90
4.6	Comparaison des profils de vitesse et de la première composante du tenseur de Reynolds pour le canal supérieur entre résultats de simulation RANS et résultats expérimentaux obtenus par LDV sur MAVERIC	91
4.7	Comparaison des profils de vitesse et de la première composante du tenseur de Reynolds pour le canal inférieur	92
4.8	Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds obtenues par calcul RANS pour le canal supérieur	92
4.9	Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds obtenues par calcul RANS pour le canal inférieur	92
4.10	Convergence des statistiques du signal généré avec la méthode SEM [47] . .	93
4.11	Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds du champ de vitesse généré pour le canal supérieur	94
4.12	Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds du champ de vitesse généré pour le canal inférieur	94
4.13	Isolignes de vitesse pour le champ instantané à deux instants différents ($\ \mathbf{U}\ \in [0; 1.1]\text{m/s}$)	95
5.1	Définition du cas test 2D	100
5.2	Champ de pression incompressible autour d'un cylindre 2d	101
5.3	Champs de variation de pression obtenus avec le schéma de Roe et une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-6 \cdot 10^{-6}; 6 \cdot 10^{-6}]$	102
5.4	Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe modifié avec le correctif proposé par Rieper [107] avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2 \cdot 10^{-6}; 7 \cdot 10^{-7}]$	109
5.5	Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage triangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-1.6 \cdot 10^{-6}; 5.8 \cdot 10^{-7}]$	111
5.6	Erreur L^2 sur la pression par rapport à la solution incompressible en fonction du nombre de Mach à l'ordre 1	111
5.7	Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe pour différents ordre de discrétisation spatiale sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible.	112
5.8	Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de base bas Mach avec les solveurs de Roe et LMRoe à l'ordre 1 pour plusieurs CFL	114

5.9	Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de base bas Mach avec les solveurs de Roe et LMRoe à l'ordre 2	115
5.10	Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de référence bas Mach avec le flux AUSM+ [63] et un algorithme de type correction de pression. Tirée de [84].	116
5.11	Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de référence bas Mach avec le flux AUSM-IT [84] et un algorithme de type correction de pression. Tirée de [84].	116
5.12	Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le flux de Roe. Les valeurs propres de $\Delta t \mathbf{L}$ à l'ordre 1 et 2 pour une $CFL = 0.333$ sont contenues dans la région de stabilité $\ \mathbf{H}\ \leq 1$	129
5.13	Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le flux LMRoe. Les valeurs propres de $\Delta t \mathbf{L}$ à l'ordre 2 pour une CFL de 0.333 ne sont pas contenues dans la région de stabilité $\ \mathbf{H}\ \leq 1$	129
5.14	Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le nouveau flux. Les valeurs propres de $\Delta t \mathbf{L}$ à l'ordre 2 pour une CFL de 0.333 sont contenues dans la région de stabilité $\ \mathbf{H}\ \leq 1$	131
5.15	Equation d'onde du premier ordre. Convergence des différents schémas pour une discrétisation spatiale du second ordre	132
5.16	Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le nouveau flux avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire à $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2.5 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 10^{-7}]$	135
5.17	Erreur L^2 sur la pression par rapport à la solution incompressible en fonction du nombre de Mach à l'ordre 1	136
5.18	Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le nouveau flux avec une discrétisation spatiale d'ordre 2 sur maillage quadrangulaire à $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2 \cdot 10^{-6}; 5.95 \cdot 10^{-7}]$	136
5.19	Propagation d'une onde acoustique à l'ordre 2. $M = 10^{-3}$, $c = 343.12\text{m/s}$, $t = 2, 5 \cdot 10^{-4}\text{s}$	137
6.1	Configuration du cas test de l'écoulement de Poiseuille circulaire	142
6.2	Configuration du cas test de l'écoulement de Poiseuille circulaire en trois dimensions	144
6.3	Comparaison des résultats du vortex de Taylor-Green avec ceux de Chapelier et al. [20]. À gauche l'énergie cinétique turbulente et à droite l'ensrophie.	147
6.4	Iso-valeurs de vorticité selon la composante z dans la boîte à $t = 3.175\text{s}$	148
6.5	Schéma de la configuration étudiée	149
6.6	Fonction d'autocorrélation temporelle du signal de la composante axiale de la vitesse mesurée sur l'axe du canal supérieur par LDV.	151
6.7	Dimensions du domaine de calcul pour le cas sans giration.	153
6.8	Maillage du domaine de calcul pour la cas sans giration	154
6.9	Les différentes frontières du domaine de calcul pour la cas sans giration.	155
6.10	Exemple de partitionnement de maillage sur 1024 cœurs de calculs. Réalisé sur le calculateur Turing de l'Idriss	156
6.11	Exemple d'iso-surfaces de la norme de la vitesse instantanée du jet durant la phase d'initialisation ($\ \mathbf{u}\ \in [0.0 : 3.0]\text{m/s}$)	157

6.12	Exemple d'iso-surfaces de la norme de la vitesse instantanée du jet à l'ordre trois ($\ \mathbf{u}\ \in [0 : 12.6]\text{m/s}$). À gauche sans turbulence synthétique et à droite avec. Le dégradé de couleur représente la norme de la vitesse en dehors du jet pour permettre la visualisation des fluctuations injectées.	158
6.13	Positionnement des sondes dans le domaine de calcul pour le cas sans giration. À gauche la position des sondes dans le plan normal à la paroi passant par le trou et à droite l'intersection des lignes de courant du jet et de l'écoulement principal.	159
6.14	Positions des sondes utilisées pour vérifier la convergence des statistiques et convergence des moments d'ordre élevé	160
6.15	Profils axiaux de la vitesse longitudinale moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances de la paroi. La ligne continue repère la position du centre du perçage	162
6.16	Profils axiaux de la vitesse normal moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances de la paroi. La ligne continue repère la position du centre du perçage	162
6.17	Profils normaux de la vitesse axiale moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances du perçage. Les distances au perçage sont adimensionnées par D	163
6.18	Coupe horizontale du perçage en entrée de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.	163
6.19	Coupe horizontale du perçage au milieu de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.	164
6.20	Coupe horizontale du perçage en sortie de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.	164
6.21	Comparaison des trajectoires du jet au sens du maximum des vitesses. En ligne continue, le résultat du modèle analytique de Margason [72]	165
6.22	Profils de vitesse axiale moyenne (U_x) dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV. . .	167
6.23	Profils de vitesse verticale moyenne (U_z) dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV	168
6.24	Profils de la composante R_{xx} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux	169
6.25	Profils de la composante R_{zz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux	170
6.26	Profils de la composante R_{xz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux .	171
6.27	Profils axiaux de vitesse longitudinale moyenne (U_x) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.	172
6.28	Profils axiaux de la première composante du tenseur de Reynolds (R_{xx}) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre deux.	173

6.29	Profils axiaux de vitesse verticale moyenne (U_z) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.	174
6.30	Profils axiaux de la composante R_{zz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.	175
6.31	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans la zone au dessus du perçage. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	177
6.32	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans la zone au dessus du perçage. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	178
6.33	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	179
6.34	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	180
6.35	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde sous le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	181
6.36	Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde sous le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.	182
6.37	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section de sortie du trou.	183
6.38	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près du bord d'attaque de la section de sortie du trou.	183
6.39	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section à mi-hauteur du trou.	184
6.40	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près de la paroi amont à mi-hauteur du trou.	184
6.41	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section d'entrée du trou.	184
6.42	DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près du bord d'attaque de la section d'entrée du trou.	184
6.43	Illustration des différents maillages pour les simulation RANS. De gauche à droite du plus fin au plus grossier	185
6.44	Lignes de courant du jet pour trois résolutions différentes	186
6.45	Dimension du domaine de calcul pour la cas avec giration	187
6.46	Maillage du domaine de calcul pour la cas sans giration	188

6.47	Conditions aux limites du domaine de calcul pour la cas sans giration . . .	189
6.48	Iso-surfaces de la norme de la vitesse du jet à l'ordre trois ($\ \mathbf{u}\ \in [0 : 12.9]\text{m/s}$). À gauche sans turbulence synthétique et à droite avec. Le dégradé de couleur représente la norme de la vitesse en dehors du jet pour permettre la visualisation des fluctuations injectées.	189
6.49	Positionnement des sondes dans le domaine de calcul pour le cas avec giration. À gauche la position des sondes et à droite l'intersection des lignes de courant de l'écoulement.	190
6.50	Positions des sondes utilisées pour vérifier la convergence des statistiques et convergence des moments d'ordre élevé	192

Liste des tableaux

2.1	Expressions analytiques des trajectoires des jets définies comme le lieu du maximum de la composante de la vitesse dans le sens de l'écoulement transverse.	39
2.2	Expressions analytiques des trajectoires des jets définies comme le lieu du maximum de fraction massique injectée.	39
2.3	Simulations numériques directes de jet transverse	44
3.1	Principaux paramètres d'acquisition et de traitement des données LDV et PIV.	54
4.1	CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v dans le cas linéaire. \star indique un schéma L_2 -instable	78
4.2	Dimensions du maillage de la veine pour le calcul RANS avec SATURNE	89
4.3	Paramètres utilisés pour la génération du champ de vitesse turbulent synthétique	93
5.1	CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la diffusion induite par le schéma de Roe	127
5.2	CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la matrice de diffusion induite par le schéma LMRoe.	128
5.3	CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la nouvelle matrice de diffusion.	131
6.1	Paramètres physiques du cas test écoulement de Poiseuille 2D	143
6.2	Ordres de convergence sur le cas test du Poiseuille en deux dimensions. Tiré de [12]	144
6.3	Ordre de convergence sur le cas test du Poiseuille en trois dimensions. Tiré de [12]	145
6.4	Propriétés physiques de l'air à 300K	149
6.5	Variables caractéristiques des écoulements	150
6.6	Dimensions du domaine de calcul pour le cas sans giration	152
6.7	Résolution du maillage dans le cas sans giration	153
6.8	Résolution des différents maillages pour les calculs RANS	185
6.9	Dimension du domaine de calcul avec giration	186
6.10	Résolution du maillage dans le cas avec giration	187

Liste des symboles

α	L'angle d'inclinaison entre l'axe du trou et la paroi
β	L'angle d'inclinaison latérale du trou (angle de giration)
λ	La conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
\hat{M}	Le nombre de Mach de référence
μ	La viscosité dynamique ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)
ρ	La masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
$\overline{\tau}$	Le tenseur des contraintes visqueuses
\mathbf{u}	La vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
c	La vitesse du son ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
c_p	Capacités thermiques à pression constante ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)
c_v	Capacités thermiques à volume constant ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)
D	Le grand diamètre de la section de sortie du trou
d	Le diamètre du perçage
E	L'énergie total ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$)
Fr	Le nombre de Froude
H	L'enthalpie total ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$)
J	Le rapport de quantités de mouvement défini par $J = \rho_j \mathbf{U}_j^2 / \rho_{\text{up}} \mathbf{U}_{\text{up}}^2$
M	Le nombre de Mach
p	La pression (Pa)

Pe	Le nombre de Péclet
Pr	Le nombre de Prandtl
q	La production de chaleur volumique ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits
R	Le taux de soufflage défini par $R = \mathbf{U}_j / \mathbf{U}_{\text{up}}$
Re	Le nombre de Reynolds
T	La température (K)
t	Le temps (s)

Contexte de la thèse

L'objectif de ce travail, essentiellement numérique mais avec une composante expérimentale, a été de développer une stratégie d'ensemble conduisant in fine à la réalisation effective de simulations numériques directes d'un jet injecté pariétalement (avec et sans giration) dans un écoulement transverse turbulent. Il s'est inscrit dans le cadre du projet européen IMPACT-AE, dont l'objectif est d'améliorer les méthodologies de dimensionnement des chambres de combustion afin notamment de les rendre moins polluantes. En effet, motivés par un besoin de construire des moteurs toujours plus performants, en terme d'efficacité énergétique et de préservation de l'environnement, les motoristes tendent à augmenter les niveaux de pression et de température au sein des chambres de combustion. Cela soumet donc les parois à de très fortes contraintes thermiques supérieures à ce que les matériaux actuels peuvent supporter et susceptibles d'entraîner leur destruction sans protection adaptée. Afin de préserver les capacités mécaniques de la chambre et d'assurer une durée de vie importante à ce composant crucial, il convient donc de le protéger thermiquement. Pour cela, les industriels ont couramment recours à une technique de refroidissement dite par effusion, utilisée depuis de nombreuses années et qui a déjà fait la preuve de son efficacité.

Cependant, le besoin de réaliser des moteurs toujours plus propres en terme d'émission de polluants tout en préservant leurs performances, passe par une maîtrise accrue des quantités d'air allouées au refroidissement. En effet, le contrôle de la distribution spatiale du rapport de mélange de l'air et du carburant étant l'un des éléments clef pour le développement des futures chambres de combustion, l'impact de l'air de refroidissement sur la richesse locale doit être correctement estimé au cours de la phase de conception. De plus, les systèmes de combustion actuels sont connus pour favoriser le couplage de type thermo-acoustique au sein de la chambre. Ce phénomène a pour conséquence de déstabiliser les processus de combustion ce qui donne lieu à de fortes oscillations de pression au sein de la chambre. La dynamique des écoulements pariétaux peut alors se retrouver affectée et le refroidissement compromis.

Le dimensionnement des chambres de combustion étant un processus complexe, il fait aujourd'hui largement appel à la simulation numérique. Un des problèmes est alors de

prendre en compte l'injection pariétale dans les calculs. En effet, la capacité de calcul actuelle ne permet pas la réalisation de simulations de chambres à l'échelle du jet sans avoir recours à une étape préalable de modélisation, forcément source d'erreur ou de limitation intrinsèquement liées aux hypothèses d'élaboration associées. Dans ce cadre, les industriels ont notamment recours à des modèles de conditions aux limites, en particulier au niveau des parois perforées qui sont loin de donner entière satisfaction. Dans un souci d'amélioration de ces modèles, on cherche à mieux comprendre le refroidissement par effusion. Pour cela on s'intéresse de près aux écoulements pariétaux et en particulier au flux d'air qui pénètre dans la chambre transversalement à l'écoulement principal. L'emploi de la simulation numérique directe dans un cadre de calculs hautes performances est l'un des moyens de mieux appréhender la phénoménologie concernée. Ce travail a pour objectif de développer un outil numérique permettant à terme de mieux caractériser la dynamique des jets en écoulement transverse dans les conditions du refroidissement par effusion des parois de chambres de combustion aéronautiques.

Fonctionnement d'une turbine

Pour mieux comprendre le rôle et l'impact du refroidissement par effusion, commençons par rappeler le fonctionnement d'une turbine à gaz ou turbomoteur comme celle présentée figure 1. Son rôle est de générer de la puissance mécanique en utilisant une partie de

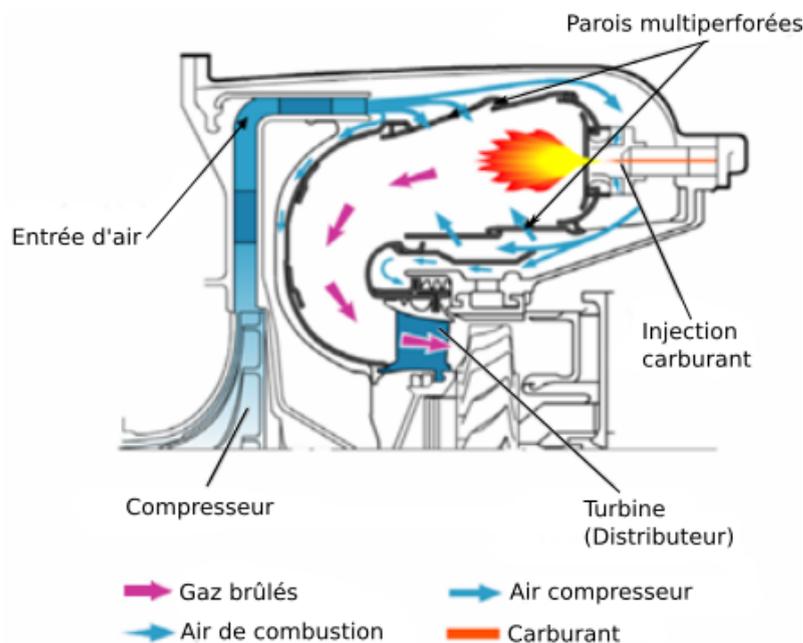


FIGURE 1 – Coupe d'une chambre de combustion annulaire à flux inversée. Tirée de [86]

l'énergie thermique dégagée par la combustion entre l'air et le kérosène. L'air capté par l'entrée d'air passe par une série d'étages de compression avant d'être injecté avec le kérosène dans la chambre de combustion où les réactions chimiques ont lieu à pression constante. Les gaz brûlés sont ensuite détendus à travers une série d'étages de turbine qui entraînent le ou les compresseurs et dont l'une va fournir l'énergie mécanique nécessaire à l'entraînement du rotor. L'une des zones clés de cet ensemble est la chambre de combustion, lieu de la production d'énergie et de phénomènes chimiques, thermiques et dynamiques complexes qui rendent la conception de cette pièce particulièrement délicate. En particulier, les flux de chaleur intenses et donc les niveaux de température générés par la combustion sont supérieurs à ceux que les matériaux actuels peuvent endurer. En plus des risques de détérioration ou de destruction, il est indispensable que les parois conservent leurs propriétés mécaniques en présence de ces fortes températures. On assure donc leur protection par l'injection pariétale d'air frais provenant des étages de compression. Cependant, en raison des problématiques de pollution et de performance, les injecteurs actuels fonctionnent en régime pauvre et consomment une grande quantité de l'air disponible. La définition d'une technique de refroidissement à la fois efficace et peu consommatrice d'air est donc un problème fondamental, dont les enjeux sont la durée de vie de la chambre et les performances du moteur.

Le refroidissement par effusion

Afin d'assurer le refroidissement pariétal, plusieurs solutions ont été envisagées. La plus efficace étant celle qui permet d'obtenir la température de paroi désirée en utilisant la plus petite quantité d'air possible. La figure 2 représente de façon schématique quatre systèmes de refroidissement :

- a) Refroidissement par film injecté à travers une double peau,
- b) Refroidissement par impact et film,
- c) Refroidissement par multiperforation,
- d) Refroidissement par injection à travers un milieu poreux.

Le refroidissement par film injecté à travers une double peau présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre. Mais l'air de refroidissement est injecté localement et, à l'aval de cette injection, il se réchauffe rapidement ce qui entraîne une diminution de la protection thermique. Pour conserver un refroidissement efficace tout au long de la paroi, l'injection d'air à travers une paroi poreuse est alors envisagée. Bien que plus intéressante *a priori*, ce

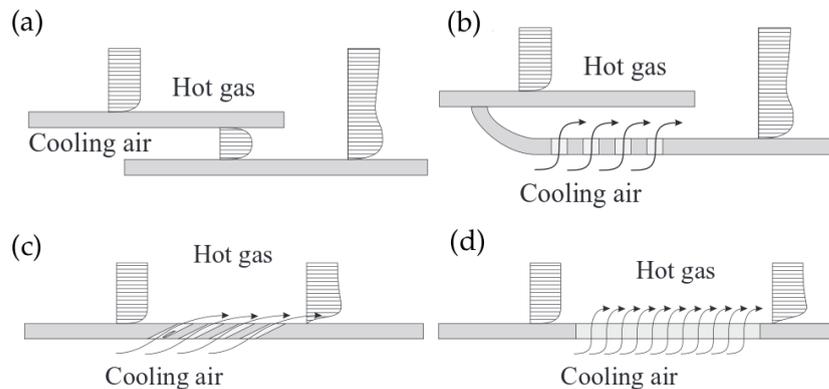


FIGURE 2 – Différentes approches du refroidissement pariétal. Tirée de Gustafsson [41]

type d'injection possède deux défauts majeurs : les parois poreuses présentent une faible résistance mécanique et les pores, de petite taille, peuvent facilement être obstrués par les produits issus de la combustion. Pour pallier à ces faiblesses, la technique d'injection par multiperforation (figure 3), offre un compromis intéressant. Cette technique consiste à injecter de l'air dans la chambre de combustion à travers de petits orifices de quelques dixièmes de millimètres de diamètre. Ainsi, un refroidissement performant est assuré tout le long de la paroi tout en conservant une résistance mécanique satisfaisante et en limitant l'obstruction des orifices. Les micro-jets associés aux microperforations interagissent pour former un film d'air frais. La protection thermique est alors assurée par trois processus complémentaires : un refroidissement par convection sur le côté froid de la paroi perforée, un refroidissement par convection forcée à l'intérieur des orifices d'injection et un refroidissement par film sur la surface chaude de la paroi, dans la zone multipercée et en aval de celle-ci. Notons que le film refroidit également l'écoulement principal en se mélangeant peu à peu à celui-ci, mécanisme qui est favorisé par les forts taux de turbulence rencontrés dans les chambres de combustion. L'injection de quantité de mouvement à travers la paroi a un effet significatif sur la dynamique de l'écoulement et peut également entraîner une modification de la position de la flamme. Notons enfin que les parois multiperforées agissent notablement sur l'acoustique de la chambre de combustion.

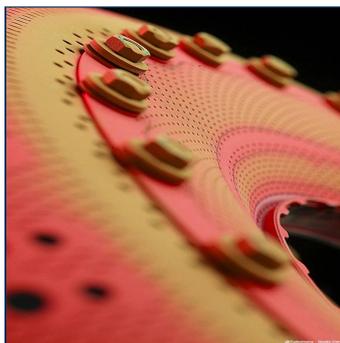


FIGURE 3 – Vue d’une paroi de chambre de combustion avec perforations

Organisation du mémoire

Dans la première partie, nous présenterons au chapitre 1 les équations utilisées pour la modélisation des écoulements de fluide, ainsi que leur comportement dans la configuration que nous souhaitons étudier. Nous ferons ensuite au chapitre 2 une étude bibliographique sur les jets en écoulement transverse, en nous intéressant en particulier au cas du refroidissement par effusion.

Les outils utilisés dans cette étude comme le banc d’essai MAVERIC et la code de calcul RANS SATURNE seront brièvement présentés dans la seconde partie (chapitre 3).

La troisième partie est consacrée à la bibliothèque éléments finis AEROSOL et aux développements que nous y avons effectué. Nous détaillerons au chapitre 4 la méthode numérique utilisée pour la réalisation des simulations, de la discrétisation des équations aux traitements des conditions limites. Ensuite, au chapitre 5, nous présentons un travail sur les flux numériques pour le bas Mach *instationnaire*. En effet cet aspect des écoulements est très peu étudié, en particulier lorsque l’on considère une discrétisation spatiale d’ordre élevé. En particulier nous montrerons que les flux numériques développés pour les écoulements bas Mach stationnaires ne sont pas adaptés aux calculs acoustiques dans les écoulements bas Mach instationnaires.

Enfin, la dernière partie de ce mémoire est consacrée à l’exposé des résultats obtenus par expériences numériques avec AEROSOL (chapitre 6). Nous validerons le code de calcul sur des cas académiques, puis nous présenterons les résultats d’analyse préliminaire des simulations définies dans la cadre du projet européen IMPACT-AE.

Première partie

Phénoménologie

Chapitre 1

Modèle général d'écoulement

S'intéresser au refroidissement par effusion, c'est s'intéresser à l'écoulement d'un fluide visqueux. La solution de ce type de mouvement est à chercher à partir de la résolution des équations de la mécanique des fluides établies pour un milieu continu : les équations de Navier-Stokes. Ce système d'équations aux dérivées partielles non linéaire est de type convection-diffusion. Il possède une partie hyperbolique et une partie elliptique, et est apte à décrire l'évolution des fluides newtoniens en régime d'écoulement laminaire ou turbulent.

La configuration que l'on cherche à étudier est celle d'un écoulement turbulent, nous tenterons donc de donner une définition de ce type de phénomène. De plus nous verrons que le fait que l'écoulement soit à faible nombre de Mach induit une singularité dans les équations [88] et nous en étudierons les conséquences. Nous commencerons par présenter les équations de Navier-Stokes dans leur forme générale. Ensuite, après les avoir adimensionnées, nous traiterons les phénomènes liés à la turbulence et au bas nombre de Mach. Enfin, nous présenterons les équations d'Euler compressibles, simplification des équations de Navier-Stokes, qui décrivent les phénomènes purement convectifs pour un fluide non visqueux et qui seront à la base de nos études sur les flux numériques.

1.1 Le modèle général d'écoulement

1.1.1 Hypothèses

Les équations de Navier-Stokes, appelées aussi modèle général d'écoulement compressible, sont applicables aux milieux continus et traduisent plusieurs hypothèses pour le fluide :

La conservation de la masse

La conservation de la masse exprime que chaque constituant contenu dans un volume de contrôle est conservé lorsque l'on suit ce volume dans son mouvement. Elle se traduit par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

Avec :

- t le temps (s)
- ρ la masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- \mathbf{u} la vitesse eulérienne ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

La conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement est la traduction du principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume de fluide. Elle s'écrit dans l'espace sous la forme d'un système :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

Où :

- p est la pression (Pa)
- \mathbf{f} la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide ($\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$)
- $\bar{\bar{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide Newtonien il est obtenu à partir du taux de déformation et s'écrit :

$$\bar{\bar{\tau}} = (2\mu + 3\lambda) \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \left(\frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right)$$

Où en considérant l'hypothèse de Stokes pour un fluide newtonien $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$:

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

avec μ la viscosité dynamique ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)

La conservation de l'énergie

Les variations de pression ou les frottements visqueux provoquent des variations d'énergie interne et de température qui influent le mouvement. Par application du premier principe de la thermodynamique, on obtient la loi de conservation suivante :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho q \quad (1.3)$$

Avec :

- E l'énergie total définie par : $E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$ ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$)
- H l'enthalpie total donnée par : $H = e + \frac{p}{\rho}$ ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$)
- T la température (K)
- λ la conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) qui permet de relier le flux de chaleur reçu par le fluide par convection ou conduction au gradient de température en considérant la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \nabla T$$

- q la production de chaleur volumique due au rayonnement ou à l'effet joule ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$)

1.1.2 Formulation

Au final, et compte tenu des hypothèses énoncées, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{G} \quad (1.4b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{u}) = \mathbf{Q} \quad (1.4c)$$

$$\mathbf{G} = \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \mathbf{f} \quad (1.4d)$$

$$\mathbf{Q} = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho q \quad (1.4e)$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (1.4f)$$

Ce système est à six équations et sept inconnues. Afin de le fermer, on se donne une loi d'état, ici la loi d'état des gaz parfaits, qui permet d'exprimer la pression :

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2) \quad (1.5)$$

Dans ce cas, on a les relations thermodynamiques suivantes :

$$p = \rho RT \quad (1.6)$$

$$e = c_v T \quad (1.7)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.8)$$

Avec la constante des gaz parfaits $R = c_p - c_v$, où c_p et c_v sont respectivement les capacités thermiques à pression et volume constant.

1.1.3 Adimensionnement

L'adimensionnement des équations de Navier-Stokes va faire apparaître des paramètres de similitude sans dimension qui permettent de caractériser l'écoulement, comme le nombre de Mach ou de Reynolds. Cela est notamment indispensable lorsque la reproduction expérimentale d'un phénomène nécessite un changement d'échelle. Dans ce chapitre, cela va aussi nous permettre de mettre en lumière le comportement des équations lorsque ces paramètres atteignent des valeurs critiques.

On adimensionne les équations de Naviers-Stokes comme présenté dans Müller [88] en utilisant des grandeurs de référence. Typiquement, on prendra une longueur caractéristique de l'écoulement considéré, et les valeurs constantes des grandeurs à l'infini. On note par l'indice ∞ les valeurs de référence et par $*$ les variables adimensionnées. Soit :

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, p^* = \frac{p}{p_\infty}, \mathbf{u}^* = \frac{u}{u_\infty}, T^* = \frac{T}{T_\infty}, \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_\infty}, x^* = \frac{x}{L_\infty}, t^* = \frac{t}{t_\infty} = \frac{t}{L_\infty/u_\infty}, \\ e^* &= \frac{e}{p_\infty/\rho_\infty}, E^* = \frac{E}{p_\infty/\rho_\infty}, H^* = \frac{H}{p_\infty/\rho_\infty} \end{aligned}$$

Les dérivées en espace et en temps deviennent :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{1}{t_\infty} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t^*}, \quad \nabla(\cdot) = \frac{1}{L_\infty} \nabla^*(\cdot)$$

En introduisant ces variable dans le système (1.4) on obtient :

Équation de conservation de la masse

$$\frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_\infty \mathbf{u}_\infty}{l_\infty} \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1.9a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{t_\infty \mathbf{u}_\infty}{l_\infty} \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1.9b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1.9c)$$

Cette équation ne dépend d'aucun paramètre de similitude.

Équation de conservation de la quantité de mouvement

De la même manière on obtient pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho^* \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u}^*) = -\frac{1}{\hat{M}^2} \nabla^* p^* + \mathbf{G}^* \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{G}^* = \frac{1}{Re_\infty} \nabla^* \cdot \bar{\bar{\tau}}^* + \frac{1}{Fr_\infty} \rho^* \mathbf{f}^* \quad (1.10b)$$

Avec :

- $\hat{M} = \sqrt{\gamma} M_\infty$ avec le nombre de Mach de référence défini par $M_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}}$.
- Re_∞ le nombre de Reynolds défini par $Re_\infty = \frac{U_\infty L_\infty}{\nu_\infty}$ et qui représente le rapport entre les forces volumiques d'inertie et les forces volumiques visqueuses.
- Fr_∞ le nombre de Froude défini par $Fr_\infty = \frac{U_\infty^2}{L_\infty g}$ et qui exprime l'importance relative de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle gravitationnelle.

Équation de conservation de l'énergie

Pour l'équation de conservation de l'énergie on a :

$$\frac{\partial \rho^* E^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* H^* \mathbf{u}^*) = \mathbf{Q}^* \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{Q}^* = \frac{M_\infty^2}{Re_\infty} \nabla^* \cdot (\bar{\bar{\tau}}^* \cdot \mathbf{u}^*) + \frac{M_\infty^2}{Fr_\infty^2} \rho^* \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{u}^* + \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Pe_\infty} \nabla^* \cdot (\lambda_{rf}^* \nabla^* T_{rf}^*) + \rho q \quad (1.11b)$$

On retrouve en plus des nombres sans dimension précédents :

- Pr_∞ le nombre de Prandtl défini par $\frac{\mu_\infty c_p}{\lambda_\infty}$ qui donne le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique.

- Pe_∞ le nombre de Péclet qui est égal à $Re_\infty Pr_\infty$ et représente le rapport du transfert par convection sur le transfert par conduction.

Pour finir, on adimensionne l'équation d'état (1.5)

$$p^* = (\gamma - 1)\rho^*(E^* - \frac{\hat{M}^2}{2}\mathbf{u}^{*2}) \quad (1.12)$$

Afin d'alléger les notations, on considérera par la suite, sauf précision, que les variables sont adimensionnées et on omettra le symbole $*$.

Les paramètres de similitudes issus de ce développement sont utilisés lorsque l'on cherche à caractériser un écoulement. C'est notamment le cas lorsque l'on s'intéresse à la turbulence, ou à la limite compressible du système.

1.2 Les équations d'Euler

Lorsque l'on néglige la viscosité, la conduction thermique, les sources de chaleur et les efforts volumiques, les équations de Navier-Stokes se réduisent à un système hyperbolique connu sous le nom de système des équations d'Euler. Dans la suite de ce manuscrit, dès lors que nous nous intéresserons au comportement des flux numériques pour des écoulements à bas nombre de Mach (chapitre 5), nous considérerons uniquement ce système, dans la mesure où, comme nous le verrons ce sont les termes hyperboliques qui interviennent dans la propagation d'ondes acoustiques et qui vont nous permettre de faire apparaître une singularité dans le système compressible lorsque le nombre de Mach tend vers 0.

1.2.1 Formulation

Les équations d'Euler s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.13a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (1.13b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{u}) = 0 \quad (1.13c)$$

Avec les mêmes notations que dans (1.4). De même que pour les équations de Navier-Stokes, on ferme le système avec une équation d'état, par exemple l'équation (1.5).

1.2.2 Adimensionnement

Afin d'adimensionner les équations d'Euler on choisit des échelles de référence pour le temps, la longueur, et toutes les variables indépendantes du problème. Ainsi on a :

$$t^* = \frac{t}{t_\infty}, \quad l^* = \frac{l}{l_\infty},$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{p_\infty}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{u}{u_\infty},$$

Les dérivées en espace et en temps deviennent :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{1}{t_\infty} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t^*}, \quad \nabla(\cdot) = \frac{1}{l_\infty} \nabla^*(\cdot)$$

Ainsi les équations d'Euler deviennent :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho^* \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u}^*) + \frac{1}{\hat{M}^2} \nabla p^* = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \rho^* E^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* H^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1.16)$$

1.2.3 Formulation en variables primitives et caractéristiques

Pour conclure cette section, nous remarquerons que le système (1.13) s'écrit sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.17)$$

avec \mathbf{q} le vecteur d'état des variables conservatives donné en une dimension par :

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho E)^T \quad (1.18)$$

et \mathbf{F} , le vecteur de flux convectif donné par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

En considérant la matrice jacobienne du flux \mathbf{A} , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (1.20)$$

Ce système peut également s'écrire en variables primitives ou variables physiques $\mathbf{w} = (\rho, u, p)^T$, soit en dimension un :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

La matrice \mathbf{A} est diagonalisable et ses valeurs propres sont données par :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

Où c est la vitesse du son, définie pour un gaz parfait par :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (1.22)$$

Le système (1.21) peut donc s'écrire sous la forme d'un jeu d'équations découplées si il est exprimé en variables caractéristiques. Soit la matrice de projection \mathbf{P} composée des vecteurs propres de \mathbf{A} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & \frac{c}{\rho} \\ c^2 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

En définissant Λ la diagonalisation de \mathbf{A} et $\mathcal{L} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{w}$ on peut écrire :

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1} \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.24)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \Lambda \nabla \cdot \mathcal{L} = 0 \quad (1.25)$$

Ce système d'équations découplées est connu sous le nom de système caractéristique. Il traduit l'évolution des ondes du système qui se déplace respectivement à $(u - c, u, u + c)$.

En développant chaque équations de ce système, on obtiens les équations caractéristiques :

$$dp - \rho c du = 0, \quad \text{sur} \quad dx/dt = \lambda_1 = u - c \quad (1.26a)$$

$$dp - c^2 d\rho = 0, \quad \text{sur} \quad dx/dt = \lambda_2 = u \quad (1.26b)$$

$$dp + \rho c du = 0, \quad \text{sur} \quad dx/dt = \lambda_3 = u + c \quad (1.26c)$$

Ces relations sont valables le long des directions caractéristiques. Nous nous en servons notamment pour la définition des conditions aux limites de notre méthode numérique (chapitre 4).

1.3 Comportements à bas nombre de Mach

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à des écoulements à faible nombre de Mach, c'est à dire dont la vitesse est faible devant celle du son (1.22). On s'attardera donc ici à comprendre le comportement des équations présentées précédemment dans ce cas. Pour cela, une technique mathématique classique est l'analyse asymptotique [40, 88]. Ce type de développement permet de mettre en évidence le comportement du système lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. Il est notamment à la base de l'écriture de modèles simplifiés, comme le modèle Mach zéro ou le modèle incompressible [54]. Les variables du système sont développées sur des fonctions de jauge en utilisant le nombre de Mach comme petit paramètre. Cela permet d'en faire apparaître les comportements caractéristiques qui sont détaillés par la suite.

1.3.1 Développement asymptotique en échelle de temps convective

On s'intéresse dans un premier temps au traitement de l'information convective, c'est à dire advectée à la vitesse du fluide. Pour cela on introduit un développement à l'échelle de temps correspondante. Les fonctions d'échelles sont les puissances du nombre de Mach. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\rho(x, t, \hat{M}) &= \sum_{n=0}^N \hat{M}^n \rho^{(n)}(x, t) + o(\hat{M}^N) \\ \mathbf{u}(x, t, \hat{M}) &= \sum_{n=0}^N \hat{M}^n \mathbf{u}^{(n)}(x, t) + o(\hat{M}^N) \\ p(x, t, \hat{M}) &= \sum_{n=0}^N \hat{M}^n p^{(n)}(x, t) + o(\hat{M}^N)\end{aligned}$$

En introduisant ces développements dans les équations de Navier-Stokes (1.4) et en se limitant aux trois premiers ordres et en réorganisant en fonction des puissances de \hat{M} on obtient :

1. Équation de conservation de la quantité de mouvement à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}^2}$:

$$\nabla p^{(0)} = 0 \tag{1.27}$$

2. Équation de conservation de la quantité de mouvement à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}}$:

$$\nabla p^{(1)} = 0 \tag{1.28}$$

3. Le système à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0 \quad (1.29a)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)}) = -\nabla p^{(2)} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}^{(0)} + \frac{1}{Fr} \rho^{(0)} \mathbf{f} \quad (1.29b)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} E^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} H^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = \frac{\gamma \nabla \cdot (\lambda^{(0)} \nabla T^{(0)})}{(\gamma - 1) Pe} + \rho^{(0)} q^{(0)} \quad (1.29c)$$

$$p^{(0)} = (\gamma - 1) \rho^{(0)} e^{(0)} \quad (1.29d)$$

On déduit de ce développement que les variables $p^{(0)}$ et $p^{(1)}$ sont uniformes en espace. Leur variation temporelle éventuelle est pilotée par les conditions de bord. La pression ne fluctue donc spatialement qu'à l'ordre 2.

$$p(x, t) = p^{(0)}(t) + \hat{M} p^{(1)}(t) + \hat{M}^2 p^{(2)}(x, t) \quad (1.30)$$

On notera que la complexité des équations de Navier-Stokes a conduit au développement de modèles simplifiés pour l'étude des écoulements à faible nombre de Mach, comme le modèle Mach Zero [68], qui est donné par les équations (1.29). Ce modèle permet de prendre en compte les fluctuations de température tout en excluant l'information acoustique, supprimant du même coup la disparité entre les vitesses dans l'écoulement. Cependant, dans le contexte d'étude des écoulements pariétaux, cette information peut jouer un rôle sur l'écoulement [34]. Aussi même si nous ne considérerons pas les effets de l'acoustique sur l'écoulement dans ce manuscrit, nous nous placerons dans un contexte compressible pour le développement des outils numériques. Il convient alors de comprendre les effets de l'acoustique sur l'écoulement. Pour cela, on va séparer l'information en fonction des vitesses de propagation en considérant un développement asymptotique à deux échelles de nos équations.

1.3.2 Développement asymptotique en échelle de temps convective et acoustique

Afin de différencier l'information convective de l'information acoustique, on considère une seconde échelle de temps dans le développement asymptotique : $\tau = t/\hat{M}$. Celle-ci est caractéristique du temps de propagation de l'information acoustique. On reproduit alors l'analyse pratiquée par [88]. Pour des raisons de simplicité, on se limite ici aux équations d'Euler, et on développe alors les variables du système (1.13) comme suit :

$$\psi(x, t, \tau, \hat{M}) = \sum_{n=0}^N \hat{M}^n \psi^{(n)}(x, t, \tau) + O(\hat{M}^{N+1}) \quad (1.31)$$

La dérivée temporelle à x et \hat{M} constant devient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\hat{M}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.32)$$

En introduisant les factorisations :

$$(\rho \mathbf{u})^{(0)} = \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}, \quad (\rho \mathbf{u})^{(1)} = \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{u}^{(0)}, \quad (\rho \mathbf{u})^{(2)} = \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(2)} + \rho^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} + \rho^{(2)} \mathbf{u}^{(0)}$$

Ou encore :

$$(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{(0)} = \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)}, \quad (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{(1)} = \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(0)} + \rho^{(1)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)}$$

Et en se limitant à l'ordre 2, on obtient le système suivant :

Équation de conservation de la masse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{M}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^{(0)} + \hat{M} \rho^{(1)} + \hat{M}^2 \rho^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(0)} + \hat{M} \rho^{(1)} + \hat{M}^2 \rho^{(2)}) \\ + \nabla \cdot \left((\rho \mathbf{u})^{(0)} + \hat{M} (\rho \mathbf{u})^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho \mathbf{u})^{(2)} \right) + O(\hat{M}^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{M}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left((\rho \mathbf{u})^{(0)} + \hat{M} (\rho \mathbf{u})^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho \mathbf{u})^{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left((\rho \mathbf{u})^{(0)} + \hat{M} (\rho \mathbf{u})^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho \mathbf{u})^{(2)} \right) \\ + \nabla \cdot \left((\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{(0)} + \hat{M} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{(2)} \right) \\ + \frac{1}{\hat{M}^2} \nabla \cdot \left(p^{(0)} + \hat{M} p^{(1)} + \hat{M}^2 p^{(2)} \right) + O(\hat{M}^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{M}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left((\rho E)^{(0)} + \hat{M} (\rho E)^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho E)^{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left((\rho E)^{(0)} + \hat{M} (\rho E)^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho E)^{(2)} \right) \\ + \nabla \cdot \left((\rho H \mathbf{u})^{(0)} + \hat{M} (\rho H \mathbf{u})^{(1)} + \hat{M}^2 (\rho H \mathbf{u})^{(2)} \right) + O(\hat{M}^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Puis en ordonnant les termes en fonction du nombre de Mach :

- Équation de la quantité de mouvement à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}^2}$:

$$\nabla p^{(0)} = 0 \quad (1.36)$$

- Système à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}}$:

$$\partial_\tau \rho^{(0)} = 0 \quad (1.37)$$

$$\partial_\tau (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = -\nabla p^{(1)} \quad (1.38)$$

$$\partial_\tau (\rho^{(0)} e^{(0)}) = 0 \quad (1.39)$$

- Système à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)} \mathbf{u}^{(0)} + \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)}) + \nabla p^{(2)} = 0 \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)} e^{(0)} + \rho^{(0)} e^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho^{(0)} e^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} e^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} + p^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0 \quad (1.42)$$

- Et l'équation d'état à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}^2}$ et $\frac{1}{\hat{M}}$:

$$p^{(0)} = (\gamma - 1) \rho^{(0)} e^{(0)} \quad (1.43)$$

$$p^{(1)} = (\gamma - 1) (\rho^{(1)} e^{(0)} + \rho^{(0)} e^{(1)}) \quad (1.44)$$

Si on regarde l'équation (1.36) on en déduit :

$$p^{(0)}(x, t, \tau) = p^{(0)}(t, \tau) \quad (1.45)$$

On déduit aussi de (1.39) et de l'équation d'état à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}^2}$ (1.43) :

$$\partial_\tau (\rho^{(0)} e^{(0)}) = \partial_\tau \frac{p^{(0)}(x, t, \tau)}{\gamma - 1} = 0 \quad (1.46)$$

Au final on peut écrire que la pression d'ordre 0 ne dépend que du temps convectif :

$$p^{(0)}(x, t, \tau) = p^{(0)}(t) \quad (1.47)$$

Compte-tenu de ce résultat, l'équation de l'énergie (1.42) devient :

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{dp^{(0)}}{dt} + p^{(0)} \nabla \cdot (\mathbf{u}^{(0)}) = 0 \quad (1.48)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} + p^{(0)} \nabla \cdot (\mathbf{u}^{(0)}) = -\frac{dp^{(0)}}{dt} \quad (1.49)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{\gamma} \nabla \cdot (c^{(0)2} \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = -\frac{dp^{(0)}}{dt} \quad (1.50)$$

Le terme en $\frac{dp^{(0)}}{dt}$ étant constant à l'échelle de temps acoustique, si l'on considère les équations (1.38) et (1.50) on a alors un système d'onde du premier ordre en temps acoustique, reliant l'ordre un de la pression et l'ordre zéro de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{\gamma} \nabla \cdot \left((c^{(0)})^2 \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \right) = -\frac{dp^{(0)}}{dt} \\ \frac{\partial \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau} + \nabla p^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

1.4 Introduction aux écoulements turbulent

La plupart des écoulements qui nous entourent sont turbulents, c'est en particulier le cas pour les écoulements pariétaux, sujets de cette étude. Pourtant, la compréhension de ce phénomène reste un défi. À la fin du XIX^e siècle, Osborne Reynolds [105] en étudiant des écoulements en conduite, met en évidence l'apparition de turbulences en fonction du nombre qui porte son nom. Pour de faibles valeurs, l'écoulement est laminaire, alors qu'il devient turbulent quand le rapport entre les forces convectives et dissipatives augmente. Nous présenterons dans la suite, les principales caractéristiques de ce type d'écoulement, puis nous évoquerons les différents formalismes mathématiques qui permettent d'appréhender cette phénoménologie complexe.

1.4.1 Traits distinctifs

Lorsque l'on s'intéresse à la turbulence, on peut observer plusieurs caractères propres à ce type d'écoulements, en particulier ceux qui sont évoqués ci-après.

1.4.1.1 L'apparition du chaos

Lorsque le régime d'écoulement devient turbulent, il apparaît ce qui est décrit comme une agitation par Chassaing [21] et qui se traduit par un chaos apparent. L'analyse d'un signal enregistrant un paramètre Φ de l'écoulement au cours du temps ne permet pas, à première vue, d'en extraire une séquence répétitive figure 1.1. Ce comportement aléatoire de la turbulence ne permet pas de décrire le mouvement de façon déterministe comme cela est fait habituellement en mécanique des milieux continus. L'approche généralement utilisée en turbulence est alors de considérer les variables du système comme des variables aléatoires. Il faut alors avoir recours à un autre formalisme mathématique.

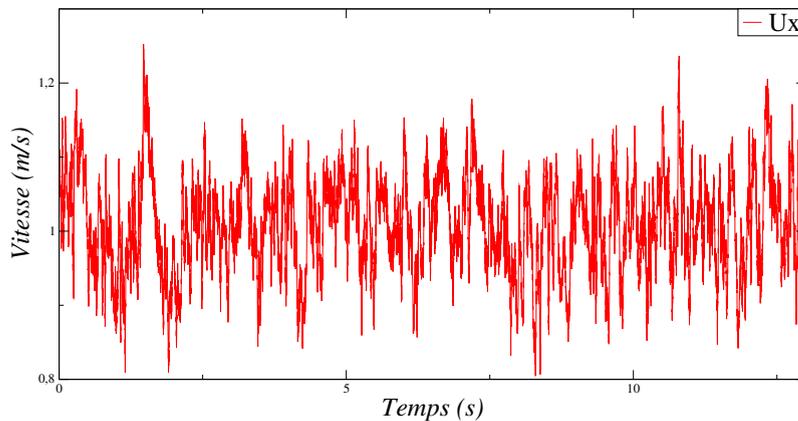


FIGURE 1.1 – Exemple de signal instantané de vitesse axiale enregistré sur l'axe du canal supérieur de MAVERIC en régime turbulent

1.4.1.2 La coexistence d'échelles spatiales très différentes

L'observation d'un écoulement turbulent laisse apercevoir un enchevêtrement de structures cohérentes, tourbillonnaires, fortement instationnaires et de tailles très différentes. La disparité entre les échelles de ces structures est l'un des points clef de la turbulence. En effet, les observations de Reynolds [105] montrent que les mécanismes de l'écoulement s'organisent comme suit. Les grandes échelles détiennent la plus grande partie de l'énergie, provenant de l'écoulement moyen et produisent la turbulence. Cette énergie est alors transmise de proche en proche comme décrit par Kolmogorov [56] vers les petites échelles où elle est dissipée en chaleur par le frottement visqueux, dès lors que la dissipation n'est plus négligeable devant les forces inertielles. Il est à noter que l'écart entre les grandes et petites échelles augmente avec le nombre de Reynolds turbulent $R_\Lambda = \frac{u'\Lambda}{\nu}$, leur rapport variant en $R_\Lambda^{3/4}$ [21]. Concrètement, il est possible d'estimer les échelles de grandeurs caractéristiques afin de mieux comprendre les phénomènes en jeu. On définit généralement trois échelles :

- La macro échelle de Taylor Λ , qui renseigne de façon grossière sur la distance au delà de laquelle deux signaux sont totalement décorrélés.
- La micro échelle de Taylor λ , qui indique, la taille des structures au-dessus de laquelle la dissipation visqueuse peut être négligée.
- L'échelle de Kolmogorov η , qui définit la taille des structures dissipatives.

Avec, dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, les rapports suivants [21, p. 293] :

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{30}R_\Lambda^{-1/2} \quad \frac{\eta}{\Lambda} = R_\Lambda^{-3/4} \quad \frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{15}}R_\Lambda^{-1/4} \quad (1.52)$$

Les écoulements turbulents que nous étudierons étant des écoulement avec paroi, les hypothèses permettant d'appliquer ces relations ne seront pas respectées. Toutefois, on pourra s'y référer afin d'obtenir une estimation des échelles caractéristiques.

1.4.2 Représentation des écoulements turbulents

La description déterministe de la mécanique n'étant pas applicable à la turbulence du fait de son caractère aléatoire et chaotique. On considère alors les variables du système comme des variables aléatoires en utilisant des formalismes mathématiques adaptés. On distingue deux approches. L'approche statistique physique où l'on décompose les variables en une quantité moyenne et une quantité fluctuante et l'approche statistique spectrale où l'on associe par transformée de Fourier d'autres fonctions aléatoires opérant sur un autre espace. On décrit ici succinctement ces deux formalismes qui seront employés par la suite afin de décrire les écoulements étudiés dans ce manuscrit.

1.4.2.1 L'approche statistique physique

L'approche statistique physique, consiste à décomposer les variables du système en une partie déterministe moyenne, et une partie aléatoire fluctuante :

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$$

$\bar{\Phi}$ représente la moyenne d'ensemble ou moyenne statistique :

$$\bar{\Phi} = \int_{\mathbb{R}} \xi f_{\Phi}(\xi) d\xi \quad (1.53)$$

Avec f_{Φ} la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire Φ :

$$\text{Prob}(a \leq \Phi \leq b) = \int_a^b f_{\Phi}(\xi) d\xi \quad (1.54)$$

La partie fluctuante Φ' représente le mouvement turbulent et par construction, $\overline{\Phi'} = 0$. Pour plus de simplicité dans le développement, considérons les équations de Navier-Stokes incompressible sous l'hypothèse de divergence nulle de la vitesse :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.55a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.55b)$$

Avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique ($m.s^{-1}$). Puis décomposons les variables de ce système :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) & \text{avec} & \quad \overline{\mathbf{u}'} = 0 \\ p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t) & \text{avec} & \quad \overline{p'} = 0 \end{aligned}$$

En injectant cette décomposition dans les équations et en appliquant l'opérateur de moyenne à chaque termes on obtient l'équation de Reynolds ou équation RANS pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes* :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.56a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (1.56b)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \quad (1.56c)$$

Il est important de noter que tous les termes du système (1.55a) sont linéaires à l'exception du terme d'advection. Le système d'évolution des quantités moyennes est donc identique au système classique à l'exception du terme en $\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ issu de l'advection. Ce terme peut s'interpréter comme des contraintes et de ce fait est dénommé "contraintes de turbulence" ou "tensions de Reynolds". Cette corrélation double est aussi une variable supplémentaire du système qu'il convient d'exprimer, cependant il n'existe pas d'expression générale pour ce terme qui peut alors être estimé à l'aide de modèles. La définition de ces fermetures est d'ailleurs un sujet de recherche majeur notamment pour les applications industrielles.

1.4.2.2 L'approche statistique spectrale

L'approche précédente permet de renseigner sur les échelles caractéristique de turbulence au seins de l'écoulement ainsi que sur les mécanisme de dissipation. Cependant elle ne permet pas d'expliquer le transfert d'énergie entre les différentes structures. L'analyse des corrélations entre deux points de l'espace ou du temps ainsi que l'analyse des signaux turbulent dans l'espace de Fourier nous renseigne alors sur les échelles de l'écoulement et ses propriétés énergétiques.

On définit la fonction d'autocorrélation temporelle de la vitesse en un point de l'espace $\mathbf{u}(t)$ entre deux instants t_1 et t_2 par :

$$R(t_1, t_2) = \overline{\mathbf{u}(t_1)\mathbf{u}(t_2)} \quad (1.57)$$

Si l'on considère un processus statistiquement stationnaire, cette fonction ne dépend pas des instants t_1 et t_2 mais uniquement de leurs différence $\tau = t_2 - t_1$. La fonction d'autocorrélation

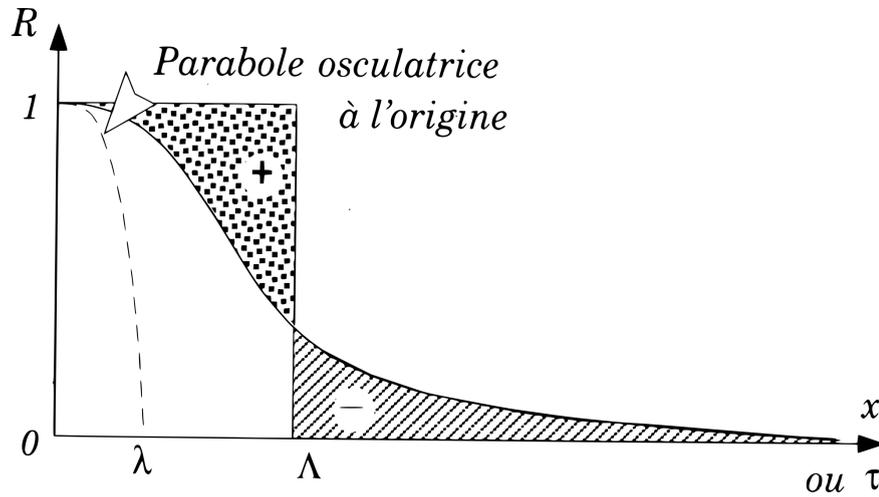


FIGURE 1.2 – Fonction d'autocorrélation et échelles de Taylor associées, tirée de [21]

peut alors s'écrire :

$$R(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)} \quad (1.58)$$

Ou sous sa forme normalisée :

$$R(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u(t)^2}} \quad (1.59)$$

La forme caractéristique de cette fonction est donnée à la figure 1.2. À $\tau = 0$, le signal est parfaitement corrélé avec lui-même puis l'autocorrélation décroît à mesure que l'écart temporelle augmente, jusqu'à être totalement décorrélé. Les vitesses fluctuantes étant corrélées au sein d'une structure cohérente turbulente, cette mesure nous donne une estimation de la taille des plus gros tourbillons dans l'écoulement. On peut alors définir l'échelle intégrale de turbulence aussi appelée macro-échelle spatiale au sens de Taylor par :

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_0^\infty R(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (1.60)$$

Le comportement à l'origine de cette fonction (1.59) peut aussi fournir une échelle pour les petites structures. En effet Chassaing [21] donne la relation :

$$\left(\frac{\partial^2 R(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=0} = -\frac{2}{\lambda^2(\mathbf{x})} \quad (1.61)$$

De sorte que λ , la micro échelles de Taylor est donnée par l'intersection avec l'axe des abscisses de la parabole osculatrice à l'origine de la fonction. (figure 1.2).

Considérons maintenant la définition plus générale :

$$R_{ij}(\tau) = \overline{u_i(t)u_j(t+\tau)} \quad (1.62)$$

Où les u_i et u_j sont les composantes du vecteur vitesse. Si l'on considère la transformée de Fourier de cette fonction, avec $i^2 = -1$:

$$E_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.63)$$

Et la transformée inverse :

$$R_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (1.64)$$

On remarque que :

$$\overline{u_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\omega) d\omega \quad (1.65)$$

Et que l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ peut être obtenue par :

$$k = \int_0^{\infty} E_{ij}(\omega) d\omega \quad (1.66)$$

$E_{ij}(\omega)$ alors représente la répartition de l'énergie cinétique en fonction de la fréquence ω et est appelé spectre d'énergie en fréquence. Il est intéressant de remarquer que le raisonnement présenté pour des corrélations temporelles peut s'effectuer de la même manière avec des corrélations spatiales à un temps donné. On obtient alors un spectre en nombre d'onde κ . En turbulence homogène, on peut dériver une équation de la dynamique pour ce spectre en considérant la transformée de Fourier des termes de l'équation (1.56c).

$$\partial_t E(\kappa) + \partial_\kappa \Gamma(\kappa) = P(\kappa) - 2\nu\kappa^2 E(\kappa) \quad (1.67)$$

On pourra se référer à [28] pour plus de détail. Le terme $\Gamma(\kappa)$ est un terme qui traduit les échanges d'énergie spectrale des plus petits nombres d'onde vers les plus grands, et $P(\kappa)$ exprime la production d'énergie turbulente au nombre d'onde κ . En turbulence isotrope ce terme disparaît avec les petits nombres d'onde, de telle sorte que la production a principalement lieu aux grande échelles. Enfin, le dernier terme exprime le taux de dissipation turbulente. L'allure générale du spectre est donnée figure 1.3.

1.4.3 Modélisation de la turbulence

Nous terminerons cette section sur la turbulence par des considérations numériques. Lorsque l'on s'intéresse à la simulation d'écoulements turbulents, on distingue en général trois types d'approches, plus ou moins précises, mais aussi plus ou moins coûteuse en temps de calcul.

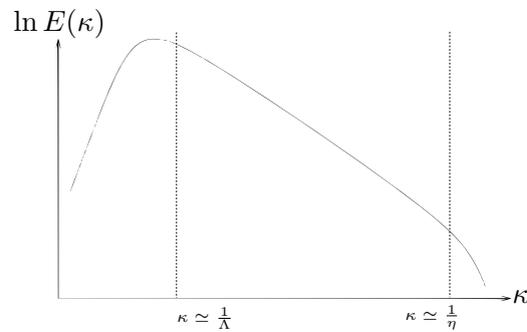


FIGURE 1.3 – Spectre d'énergie turbulente

1.4.3.1 La simulation numérique directe

Les mécanismes de la turbulence font intervenir une multitude d'échelles de fluctuations spatiales et temporelles dans l'écoulement. L'approche la plus directe consiste alors à résoudre toutes ces échelles en considérant une résolution spatiale de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov. Cette méthode aboutit à des maillages extrêmement fins, ou à l'utilisation de méthode de discrétisation d'ordre élevées très coûteuse en temps de calcul. En pratique, ce type de simulation est utilisé uniquement sur des cas simples, à des nombres de Reynolds pas trop élevés. En effet, le rapport entre les grandes et les petites échelles varie en $Re^{3/4}$ (1.52). En trois dimension, le nombre de degrés de liberté nécessaire est alors proportionnel à $Re^{9/4}$. Dans cette thèse, c'est cette approche que nous considérons. Cela est rendu possible par l'utilisation d'un code massivement parallèle et la simulation d'écoulements turbulents à un nombre de Reynolds relativement faible. En revanche, les problématiques industrielles sont souvent beaucoup plus complexes et dans des configurations où le nombre de Reynolds est très élevé (automobile, éolienne), on a alors recours à une modélisation de la turbulence afin de s'affranchir de la résolution des plus petites échelles de fluctuations. C'est le cas des deux approches suivantes.

1.4.3.2 La modélisation RANS

La modélisation RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) vise à caractériser les moments statistiques de l'écoulement. C'est une approche très utilisée dans l'industrie. D'une part, car elle est très mature, on recense en effet des travaux depuis presque un demi-siècle [96]. D'autre part, car elle est très économe en coût de calcul, car elle considère les équations de transport des moments statistiques, en particulier celles pour la vitesse moyenne (1.56) ou pour le éléments du tenseur de Reynolds. Cette description statistique de l'écoulement ne rend pas bien compte des aspects locaux et instantanés induits par les structures turbulentes

cohérentes. Les effets des fluctuations turbulentes sont modélisés par des termes de fermeture. L'expression de ces fermetures constitue l'essentiel de la problématique de cette approche. En effet, à cause de la non linéarité dans les équations de Navier-Stokes (1.55a), si l'on se donne des moments statistiques pour inconnues primaires, le système formé par leurs équations de transport possède d'autres inconnues secondaires, qui sont des corrélations statistiques que l'on ne peut pas calculer directement à partir des inconnues primaires. Par exemple, si l'on considère les équations de transport de la vitesse moyenne :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 0 \quad (1.68a)$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}_j \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \mathbf{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} - \frac{\partial \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j}}{\partial \mathbf{x}_j} \quad (1.68b)$$

On a alors un système de quatre équations et dix inconnues :

$$\overline{p}, \quad \overline{\mathbf{u}}_i, \quad \overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j}$$

Si l'on cherche alors à résoudre les équations de transport pour les termes $\overline{\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j}$, on fait apparaître six équations supplémentaires, mais aussi trente quatre nouvelles inconnues et ainsi de suite. Il est alors nécessaire de se donner un jeu d'équations avec des modèles de fermeture pour fermer le système. C'est tout l'enjeu de la modélisation RANS. On cherche à représenter le plus fidèlement possible les corrélations inconnues en fonction des moments qui figurent parmi les variables primaires du système. On dit alors que l'on a une fermeture à l'ordre n , si les termes à exprimer sont les moments centrés de la vitesse à l'ordre n . En pratique, la plupart des modèles RANS sont à l'ordre un ou deux, de sorte que l'on ferme soit les tensions de Reynolds, soit les termes qui apparaissent dans leurs équations de transport.

1.4.3.3 La simulation aux grandes échelles

La simulation aux grandes échelles, ou LES (large-eddy simulation), constitue une alternative aux deux approches précédentes en proposant un compromis en terme de coût de calcul et d'hypothèses de modélisation. Le principe de cette méthode est de résoudre explicitement, comme en DNS, les mouvements aux grandes échelles et de modéliser l'effet des plus petites. Ceci permet de diminuer la résolution spatiale nécessaire à la simulation. Pour cela, on introduit un filtrage des quantités physiques de façon à ce que seules les échelles les plus énergétiques soient résolues. Formulé dans l'espace spectral, l'objectif est de calculer la dynamique des structures correspondant à des nombres d'onde $\kappa \leq \kappa_c$ tout en modélisant les effets des mouvements tels que $\kappa \geq \kappa_c$ figure 1.4. κ_c est appelé le nombre d'onde de coupure et définit la séparation entre les échelles résolues et modélisées.

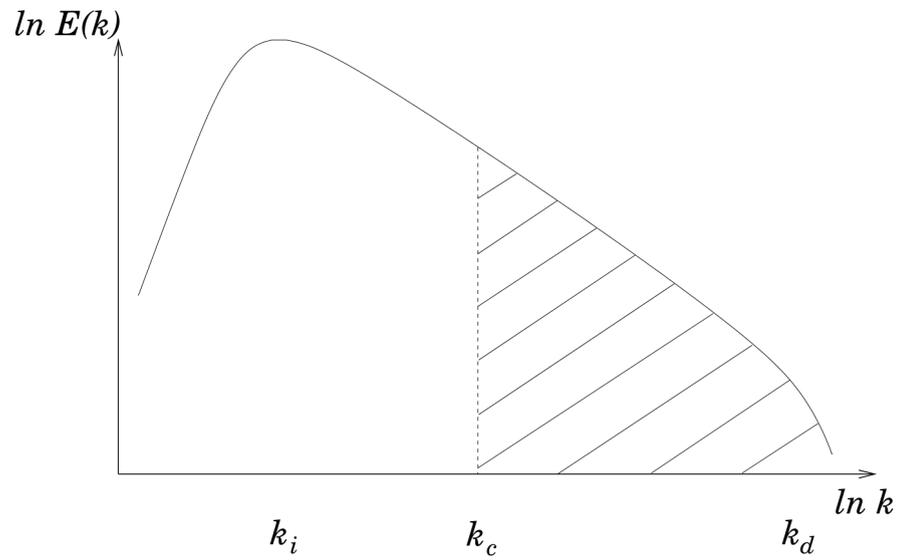


FIGURE 1.4 – Spectre d'énergie d'un écoulement turbulent. La modélisation LES consiste à ne résoudre explicitement que les échelles les plus énergétiques et à modéliser les échelles dissipatives (zone rayée). Tirée de [70]

Les avantages par rapport aux méthodes RANS sont la prise en compte de l'instationnarité et le rôle moins crucial du modèle utilisé. La LES reste cependant plus coûteuse et ne permet plus la réduction du domaine de calcul par considération de symétrie sur l'écoulement moyen. Enfin, leur paramétrisation pour les écoulements pariétaux est très délicate.

Chapitre 2

Introduction au jet transverse

Une technique massivement utilisée en industrie pour le refroidissement des parois de chambres de combustion est le refroidissement par effusion. Cette technique consiste à injecter de l'air frais provenant du compresseur à l'intérieur de la chambre, le long de la paroi par l'intermédiaire de petits trous répartis sur sa surface. L'ensemble des jets issus de ces perforations va créer une couche d'air pariétal, qui va isoler le matériau des gaz chauds et ainsi le protéger (figure 2.1). Ce système trouve sa popularité dans les avantages qu'il apporte en terme d'efficacité. En particulier, son effet protecteur est renforcé par le refroidissement par convection qui se produit lors du passage de l'air dans les perforations. De plus, cette injection discrète permet de mieux contrôler la répartition de l'air dans la chambre ainsi que son interaction avec la combustion. Le processus de mélange avec les gaz brûlés, et donc l'efficacité de la méthode, sont conditionnés par la trajectoire des jets. Celle-ci dépendant de plusieurs facteurs, comme la géométrie du perçage ou de la différence de pression de part et d'autre de la paroi.

Expérimentalement, la caractérisation de ce type d'écoulement passe par l'étude d'une configuration générique, composée de deux canaux séparés par une plaque perforée [16, 34, 81]. L'une des veines représentant l'écoulement des gaz chauds, appelé écoulement principal, l'autre les gaz froids à l'extérieur de la chambre dit écoulement secondaire. La petite taille des perforations rendant difficile les mesures expérimentales par vélocimétrie laser Doppler (LDV) ou par vélocimétrie par imagerie de particules (PIV), on a recours à un passage à l'échelle supérieure en conservant certains paramètres de similitude comme le nombre de Reynolds (chapitre 1). Afin de réaliser ce type de mesure, le banc d'essais MAVERIC a été développé à l'Université de Pau et des pays de l'Adour dans le cadre des travaux [16, 34, 86]. Ce dispositif sera présenté au chapitre 3.

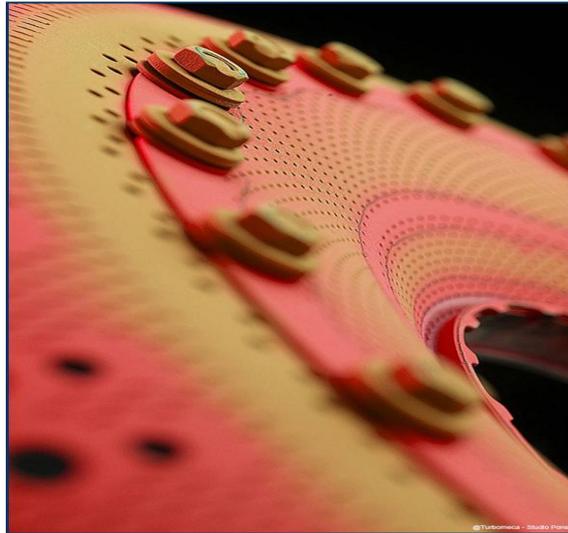


FIGURE 2.1 – Vue des perforations d’une chambre de combustion annulaire

Numériquement, l’étude des écoulements pariétaux permet de compléter l’étude expérimentale, en donnant accès en tous points du maillage à l’ensemble des variables du système. On peut alors connaître l’intégralité des composantes des variables vectorielles ou caractériser l’écoulement dans des zones difficiles d’accès comme dans le perçage. Concernant l’étude des jets en écoulement transverse, ces simulations ont notamment permis d’illustrer le rôle des structures tourbillonnaires dans l’interaction entre le jet et l’écoulement principal [103].

L’objectif de ce chapitre est de préciser les caractéristiques d’un écoulement issu de l’injection d’air à travers une paroi d’un jet transverse unique dans un écoulement turbulent. Elle se décompose en deux parties. La première aura pour but de déterminer les propriétés d’un tel écoulement et les mécanismes physiques mis en jeu. Nous porterons une attention particulière à caractériser les différentes structures du jet lorsqu’il pénètre dans l’écoulement transverse. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux problématiques liées à la modélisation de cette configuration, notamment en faisant l’état de l’art des différentes simulations effectuées par le passé sur des jets en "crossflow". On notera, comme le fait remarquer Michel [80] que la plupart des travaux sur ce sujet ont pour application le refroidissement des aubes de turbines et non celui des chambres de combustion. Les écoulements considérés sont alors beaucoup plus rapides. Toutefois nous n’écarterons pas ces études qui permettent de caractériser les écoulements dans cette configuration.

2.1 Caractéristiques géométriques

La configuration étudiée dans ce manuscrit est celle de deux canaux horizontaux séparés par une paroi perforée comme présenté sur la figure 2.2. Afin de caractériser les écoulements

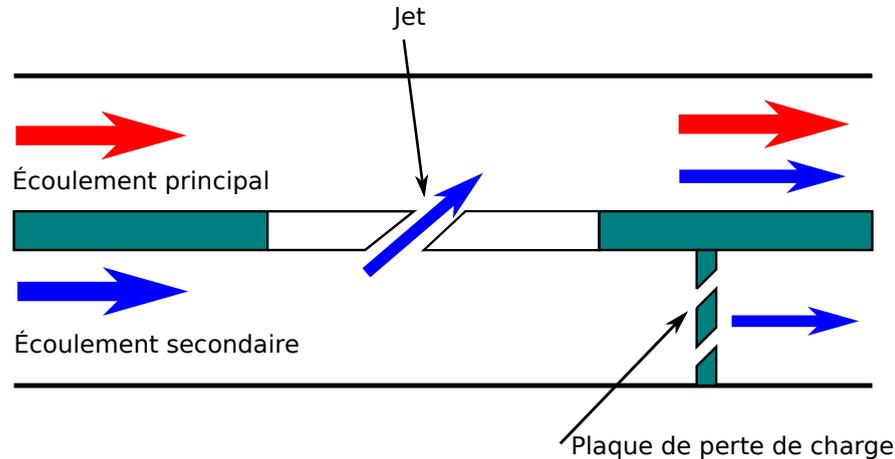


FIGURE 2.2 – Configuration générique expérimentale

issus d'un jet transverse, nous nous intéressons à l'étude de configurations avec perçage unique. Si les méthodes actuelles de perçage pour le refroidissement par effusion donnent lieu à des géométries de type convergentes divergentes, notre étude se limitera à une géométrie simple cylindrique, inclinée par rapport à la paroi, avec ou sans giration par rapport à l'écoulement principal. De plus, nous considérerons uniquement des écoulements isothermes. Les caractéristiques de ces configurations sont définies au travers des paramètres suivants :

Les paramètres dimensionnés

- La vitesse caractéristique de l'écoulement dans le canal supérieur, sur l'axe $\mathbf{U}_{\text{up, axis}}$, ainsi que moyennée sur la hauteur du canal $\mathbf{U}_{\text{up, bulk}}$.
- La vitesse caractéristique de l'écoulement dans le canal inférieur, sur l'axe $\mathbf{U}_{\text{lo, axis}}$, ainsi que moyennée sur la hauteur du canal $\mathbf{U}_{\text{lo, bulk}}$.
- Les caractéristiques de la turbulence au sein de ces écoulements (Tensions de Reynolds, spectre d'énergie, ...).
- La vitesse débitante $\mathbf{U}_{j, \text{bulk}}$, et maximale $\mathbf{U}_{j, \text{max}}$ du jet.
- Les caractéristiques de la turbulence au sein du jet.

L'écoulement considéré étant isotherme, les variations de masse volumique entre l'écoulement inférieur et supérieur sont uniquement dues aux effets de compressibilité. Pour la définition des paramètres sans dimension on considérera alors une unique masse volumique $\rho = \rho_j = \rho_\infty$.

Les paramètres sans dimension

- Le taux de soufflage R défini par $R = \mathbf{U}_{j, \text{bulk}} / \mathbf{U}_{\text{up, bulk}}$
- Le rapport de quantités de mouvement J défini par $J = \rho \mathbf{U}_{j, \text{bulk}}^2 / \rho \mathbf{U}_{\text{up, bulk}}^2$
- Les différents nombres de Reynolds liés à l'écoulement principal et au jet.

Les paramètres géométriques

- La ou les dimensions caractéristiques de la section de passage du trou. Le perçage étant cylindrique, on choisira le diamètre D
- L'angle d'inclinaison α entre l'axe du trou et la paroi
- L'angle β d'inclinaison latérale du trou (angle de giration)
- La longueur du trou
- L'épaisseur de la plaque.

Les paramètres géométriques sont présentés figure 2.3.

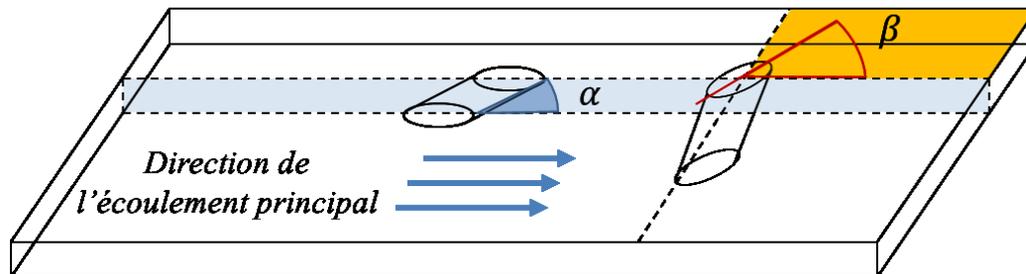


FIGURE 2.3 – Description de la géométrie de nos configurations d'études

2.2 Jet cisailé par un écoulement

On s'intéresse à la structure d'un jet qui subit l'influence d'un écoulement traversier turbulent. Cette configuration est représentative de ce qui se passe au niveau des parois de chambre de combustion refroidies par effusion. Most [86] ou Michel [80] ont montré que l'interaction entre plusieurs jets sur la paroi modifiait considérablement le comportement de l'écoulement. Cependant notre étude se limitera au jet unique. Il est conditionné par plusieurs facteurs :

- L'écoulement à l'extérieur de la chambre, dans la zone aspirée (canal du bas).
- La géométrie de la perforation.
- L'écoulement dans la chambre de combustion (canal du haut).

2.2.1 L'écoulement secondaire

Les études portant sur les écoulements à l'extérieur des chambres de combustion sont plutôt rares. Dans de nombreux cas, l'air dans le trou est directement injecté dans celui-ci ou provient d'un plénum [1, 89]. Peet [99] montre les profils de vitesse normaux du côté aspiration et met en évidence une distribution non-symétrique par rapport à l'axe du perçage comme on peut le voir sur la figure 2.4. En revanche ces simulations sont réalisées pour une configuration où l'air nourrissant le perçage provient d'un écoulement au repos et non d'un canal. Les études dans une configuration où l'air extérieur circule dans un

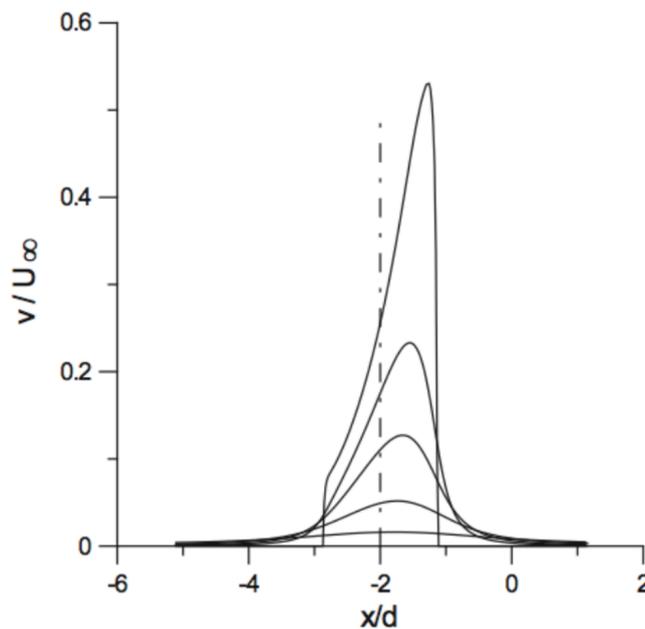


FIGURE 2.4 – Profil de vitesse moyenne verticale adimensionnée côté aspiration dans l'axe de la veine tiré de [99]. La distance à la plaque est (de haut en bas) : $y = 0, 0.25d, 0.5d, 1d, 2d$.

canal sont peu communes. On trouvera une étude sur les écoulements côté aspiration dans les travaux de MacManus and Eaton [67] où il est constaté que la couche limite diminue en amont du perçage du fait de l'aspiration, voir figure 2.5. Au niveau de ce dernier se crée une région de forte vitesse dirigée vers le trou. Cela a pour conséquence la création de tourbillons contrarotatifs en aval du trou, dont le nombre et la forme dépendent de la vitesse de l'écoulement. Dans tous les cas, ces tourbillons sont entraînés en aval de la zone d'aspiration par l'écoulement.

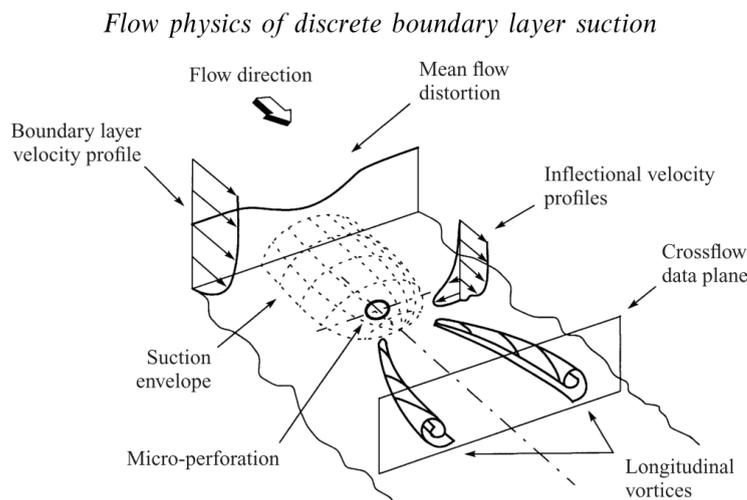


FIGURE 2.5 – Schéma de l'écoulement côté aspiration tiré de [67]

2.2.2 L'écoulement à l'intérieur des perçages

Alors que beaucoup d'études expérimentales et numériques considèrent l'écoulement dans le perçage comme un simple écoulement de tube turbulent établi, Most [86] montre qu'il existe une dissymétrie dans l'écoulement moyen. Si on considère un perçage incliné comme c'est le cas dans notre configuration, l'écoulement à l'intérieur de ce dernier est caractérisé par un décollement du fait du gradient de pression de part et d'autre de la paroi. On retrouve deux régions dans le plan longitudinal du perçage. Une première, à haute vitesse la long de la paroi amont du trou, parfois appelée zone de jet et une deuxième à basse vitesse le long de la paroi avale. Cette asymétrie se traduit par une diminution de la section effective de passage dans le perçage et ce dernier étant trop petit pour permettre une ré-homogénéisation de l'écoulement, on observe une asymétrie des profils de vitesse dans le plan de sortie du trou [100]. Un autre point important à prendre en compte lorsque l'on cherche à caractériser l'écoulement dans le perçage est sa géométrie. Most [86] met en évidence l'influence de la conicité sur les profils en sortie de trou, notamment concernant les trajectoires moyennes. Enfin, l'inclinaison des perçages semble être à l'origine de la formation de deux tourbillons contrarotatifs [62, 78]. Ce phénomène de recirculation s'explique par le fait qu'après la zone de faible quantité de mouvement, le jet cherche à recoller à la paroi avale. Il y a donc un transfert depuis la zone de jet vers celle à basse vitesse ce qui crée ces tourbillons. On rajoutera aussi que l'écoulement à l'extérieur du perçage conditionne directement l'écoulement dans le perçage comme cela est montré dans [18] où il est constaté qu'un changement de direction de l'écoulement extérieur provoque un affaiblissement des tourbillons contrarotatifs.

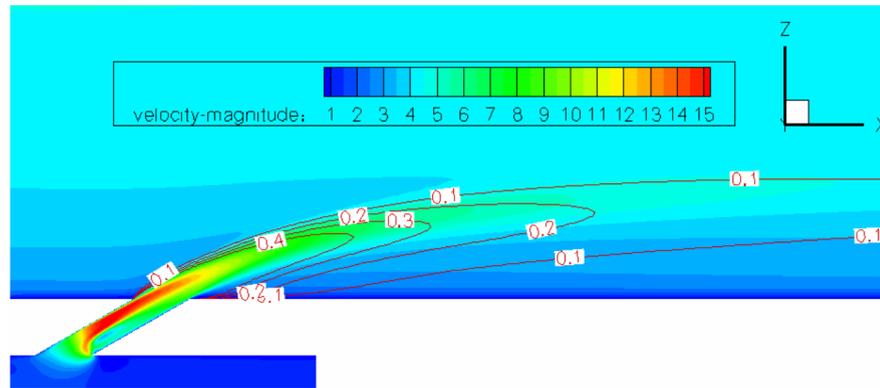


FIGURE 2.6 – Amplitude de vitesse moyenne à l'intérieur du perçage tiré de [16]

2.2.3 Le jet transverse

La forme du jet transverse (ou jet en "crossflow") est conditionnée par son interaction avec l'écoulement principal. De nombreuses études expérimentales se sont intéressées à ce sujet. On citera le travail de synthèse de Margason [73] ou Karagozian [51] qui font la revue des travaux effectués dans ce domaine. La plupart des études mettent l'accent sur le comportement du champ de vitesse et de la vorticité, ainsi que sur les trajectoires du jet. La dynamique des jets transverses est caractérisée par l'interaction complexe d'une série de vortex. La caractérisation de ces structures a fait l'objet de nombreuses études, à la fois expérimentales et numériques. Nous présentons en suivant une revue bibliographique sur les aspects moyens et instationnaires du jet transverse.

2.2.3.1  coulement moyen

L'étude de l'écoulement moyen du jet apporte des informations sur sa structure et sa trajectoire ainsi que sur son influence sur l'écoulement principal. Une multitude de travaux expérimentaux, analytiques ou numériques ont permis de le décrire et de caractériser ces paramètres. On en présente un aperçu en suivant.

Structure d'ensemble

La forme du jet cisailé est conditionnée par son interaction avec l'écoulement principal. Andreopoulos and Rodi [4] pour une incidence normale d'injection, et Bergeles et al. [13] dans le cas d'un jet incliné ont montré qu'il existe deux régimes principaux d'écoulement. Le premier régime correspond à de faibles valeurs du taux de soufflage pour lesquelles le jet ne parvient pas à décoller de la paroi et reste alors attaché à cette dernière. Le second

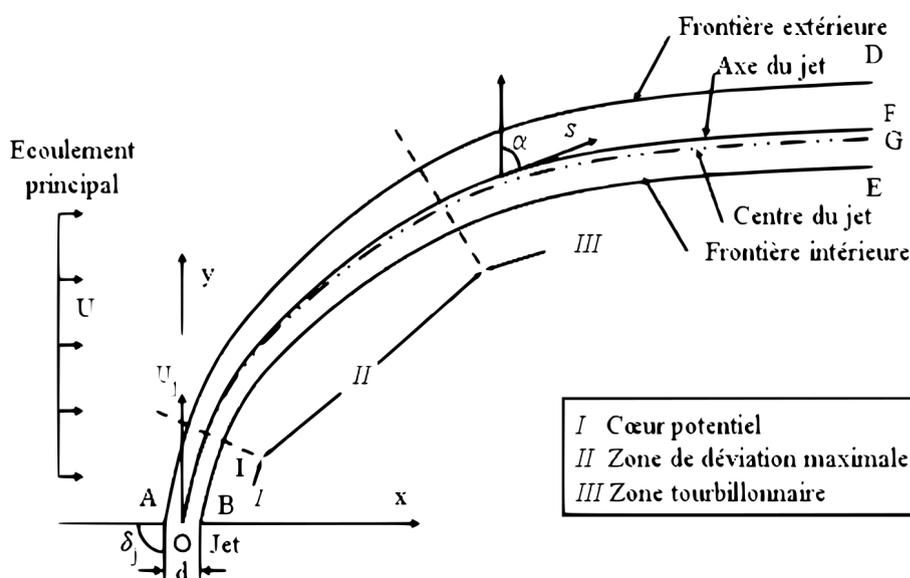


FIGURE 2.7 – Schéma du jet transverse d'après [103]

régime apparaît dès lors que l'on augmente suffisamment le taux de soufflage. Le jet devient alors suffisamment énergétique pour pénétrer au sein même de l'écoulement et donc se détacher de la paroi pour éventuellement y recoller plus loin en aval. Une représentation de la structure d'ensemble dans ce second cas est donnée figure 2.7 [103] dans le cas d'un jet sans rotation sortant perpendiculairement à la paroi ($\alpha = 90^\circ$). L'évolution du mouvement moyen selon l'abscisse curviligne s permet de distinguer trois régions :

- Une zone de cœur potentiel (I), où la vitesse du jet reste proche de la vitesse d'injection.
- Une région de déflexion maximale (II). Sous l'effet de l'écoulement transverse, la trajectoire du jet se courbe. La position de cette zone et l'importance de la courbure sont liés au taux de soufflage R . Plus celui-ci est important, plus le jet sera rabattu.
- Une zone tourbillonnaire (III), située dans le champ lointain, au sein de laquelle se développent des vortex.

Les courbes (BE) et (AD) représentent les frontières du jet. Elles sont souvent définies en fonction des concentrations du jet. Cependant, étant donné que nous ne considérerons pas ce type de paramètre dans notre étude, nous les définirons approximativement comme l'intersection des lignes de courant issues du perçage et de l'écoulement principal.

La courbe (OG) est définie comme le lieu des vitesses maximales. Elle est souvent utilisée pour définir la trajectoire du jet. Sa détermination a fait l'objet de plusieurs études qui ont abouti à des modèles analytiques de prédiction, en fonction de paramètres comme le taux de soufflage.

Modèles de trajectoires

Dans le cas d'un jet sortant perpendiculairement à la paroi, ils sont exprimés sous la forme :

$$\frac{y}{Rd} = AR^B \left(\frac{x}{d}\right)^C \quad (2.1)$$

Où A, B et C sont des constantes déterminées expérimentalement ou numériquement, en fonction de la géométrie du perçage. R le taux de soufflage et y le lieu du maximum des vitesses dans le jet. Le tableau 2.1 tiré de [34] présente les principaux modèles.

Auteurs	Domaine de validité	Équation de la trajectoire
Patrick [97]	$6 \leq R \leq 50$	$\frac{y}{d} = R^{0.85} \left(\frac{x}{d}\right)^{0.34}$
Margason [72]	$2 \leq R \leq 10$	$\frac{y}{Rd} = 0.25R^{-2} \left(\frac{x}{d}\right)^3$
Kamonati and Greber [50]	$3.87 \leq R \leq 7.75$	$\frac{y}{d} = 0.89R^{0.94} \left(\frac{x}{d}\right)^{0.36}$
Fearn and Weston [33]	$3 \leq R \leq 10$	$\frac{y}{d} = 0.975R^{0.9085} \left(\frac{x}{d}\right)^{3.385}$

TABLE 2.1 – Expressions analytiques des trajectoires des jets définies comme le lieu du maximum de la composante de la vitesse dans le sens de l'écoulement transverse.

On recense aussi des études concernant la configuration où le jet est incliné par rapport à la paroi. Dans ce cas les trajectoires sont exprimées sous la forme générique :

$$\frac{x}{d} = F \left(\frac{1}{J}\right)^n \left(\frac{y}{d}\right)^m + \left(\frac{y}{d}\right) G \cot(\alpha) \quad (2.2)$$

Avec α l'angle d'inclinaison, J le rapport dans quantité de mouvement et F, G, n et m des paramètres à déterminer. Margason [73] a regroupé les différents modèles existants dans la littérature. ils sont présentés dans le tableau 2.2 tiré de [34].

Auteurs	F	n	m	g
Ivanov [45]	1	1.3	3	1
Margason [73]	$\frac{1}{4 \sin^2(\alpha)}$	1	3	1
Shandorov [114]	1	1	2.55	$1 + \frac{1}{J}$

TABLE 2.2 – Expressions analytiques des trajectoires des jets définies comme le lieu du maximum de fraction massique injectée.

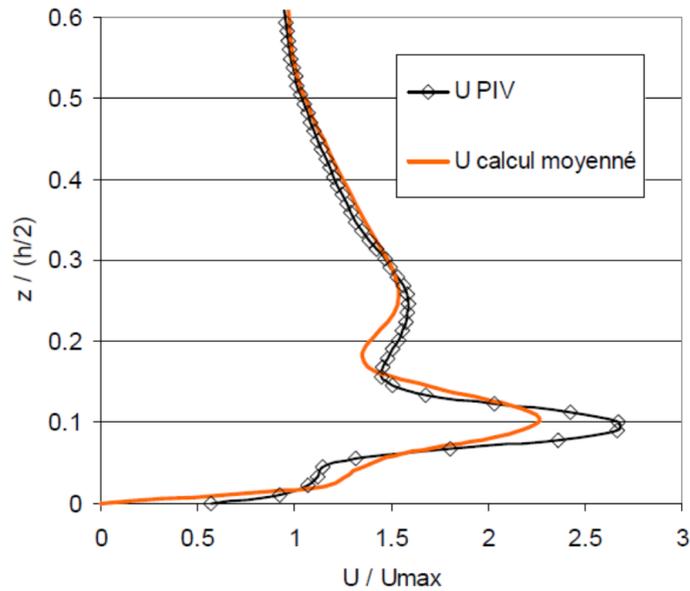


FIGURE 2.8 – Profil normal de vitesse moyenne longitudinale en aval de la perforation tiré de [81]. Comparaison de résultats PIV et de simulations numériques RANS

Interaction avec l'écoulement principale

La dynamique de l'écoulement côté injection a été bien décrite dans les thèses de Miron [81], Mendez [77], Most [86] et Michel [80]. Ces études donnent notamment une description des profils pariétaux de vitesse moyenne du côté injection. On présente figure 2.8 un résultat tiré de [81]. On observe sur ces profils un maximum de vitesse correspondant au passage du jet qui correspond à la phénoménologie typique du profil pariétal de vitesse moyenne du côté injection. La valeur du pic de vitesse et sa position dépendent du taux de soufflage et de l'angle d'inclinaison du trou.

De même, on peut observer un point d'inflexion du profil de vitesse longitudinale situé autour de $\frac{z}{(h/2)} = 0.05$. Ce phénomène a été expliqué par Yavuzkurt et al. [124] de la façon suivante : pour un taux de soufflage suffisamment fort, le jet peut être vu comme un obstacle. Dans la région immédiatement en aval du jet, se crée alors une forte dépression qui attire l'écoulement principal de part et d'autre du jet. Ainsi, dans cette zone, la composante de la vitesse longitudinale est diminuée.

2.2.3.2 Aspects instationnaires

L'interaction entre le jet transverse et l'écoulement principal génère des instabilités tri-dimensionnelles qui sont à l'origine de la création de plusieurs vortex qui ont pu être

identifiés expérimentalement ou numériquement [1, 35, 89]. Une présentation détaillée de ces différentes structures, tirée de [35] est présentée figure 2.9 On en distingue quatre types :

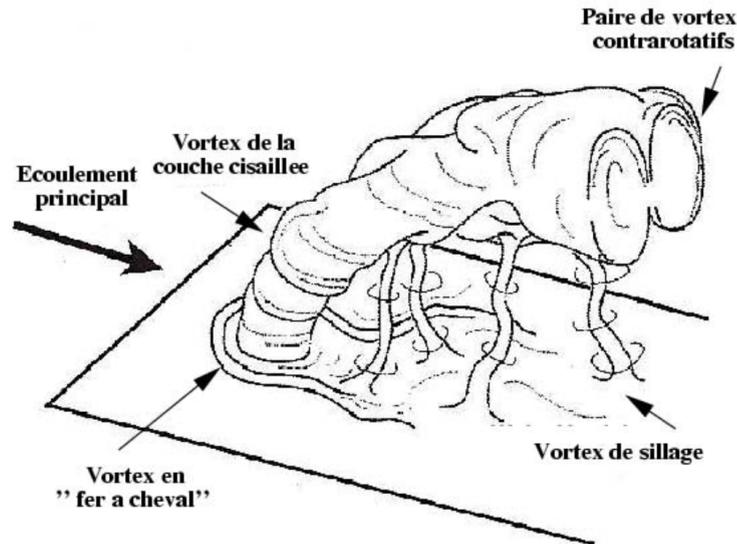


FIGURE 2.9 – Représentation d'un jet transverse pour de faibles rapports de vitesses R et identification des structures cohérentes de vorticité. Tirée de [35].

1. Le tourbillon en fer à cheval (horseshoe vortex) qui prend forme en amont du bord d'attaque du trou et qui se développe le long de la paroi, parall mement à celle-ci et enserrant le jet à la manière d'un fer à cheval. Il est crée par le décollement de la couche limite par l'effet de la rencontre de l'écoulement principal avec le jet. La vorticité dans cette structure voit sa composante principale pivoter de l'amont vers l'aval pour se retrouver dans le sens de l'écoulement.
2. Les tourbillons en anneaux associés aux instabilités de Kelvin-Helmholtz, qui se développent comme dans le cas d'un jet libre, autour de la surface du jet. Du fait du rabattement du jet par l'écoulement principal, ces anneaux sont progressivement déformés ou repliés en se déplaçant vers l'aval.
3. Les tourbillons de sillages dont la composante de vorticité principale est normale à la paroi, et qui font penser aux structures tourbillonnaires que l'on peut rencontrer derrière un obstacle solide au sein de l'allée tourbillonnaire de von Karman. Cependant Fric and Roshko [35] identifient des propriétés spécifiques de ces tourbillons, en particulier leur dépendance au rapport de vitesse R et à l'angle d'inclinaison α . Le mécanisme de formation de ces structures est encore mal connu, on sait cependant qu'elles sont essentiellement composées de fluide de l'écoulement principal.

4. La paire de tourbillons contrarotatifs, qui se développent dans le jet, jusqu'à occuper progressivement toute la section dans la zone lointaine. Leur taille est de même ordre de grandeur que le diamètre de trou, et la trajectoire des centres tourbillonnaires se situe légèrement en dessous de la trajectoire moyenne du jet. Leur mécanisme de formation est encore sujet à discussion. D'un côté ces structures pourraient trouver leur origine dans l'action de l'écoulement transverse sur le bord d'attaque du jet qui formerait les vortex par repliement de jet sur lui même. Puis la courbure du jet entraînerait l'alignement de l'axe de vortacité principal de ces structures dans la direction parallèle à la paroi. De l'autre côté, les résultats plus récents de simulation numérique instationnaire semble indiquer que ces tourbillons trouvent leur origine dans la zone de sortie du trou en raison de la différence de vitesse et de pression entre le bord d'attaque et le bord de fuite du perçage (section 2.2.2). Ainsi plusieurs auteurs défendent l'idée que ces vortex contrarotatifs ne trouvent pas leur origine dans la couche de cisaillement [8, 76, 89]. Cependant de récentes études [79, 125] ont montré que le pincement des bords latéraux du jet près de la section de sortie conduirait à la formation de structures tourbillonnaires, appelées "hanging vortices", ou vortex suspendus. Cette vortacité dirigée normalement à la paroi a pu être observée expérimentalement [79]. On notera enfin que la paire de vortex contrarotatifs joue un rôle significatif dans le processus de mélange entre le jet et l'écoulement principal dans le champ lointain. Les larges niveaux de vortacité contribuent à l'entraînement de l'air environnant à l'intérieur du jet et à l'amélioration du mélange.

2.2.4 Influence de la giration

Les études d'une configuration avec giration sont rares. On pourra citer le travail de Zhang and Collins [126] qui ont étudié l'influence de l'angle β à l'aide de calculs RANS. Ils montrent en particulier que la giration a un impact significatif sur la génération des tourbillons contrarotatifs. En effet il est observé que les deux vortex ne sont plus symétriques mais de taille et d'intensité différentes, de sorte que le plus important, du côté aval de l'orifice, englobe le tourbillon le plus faible jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un.

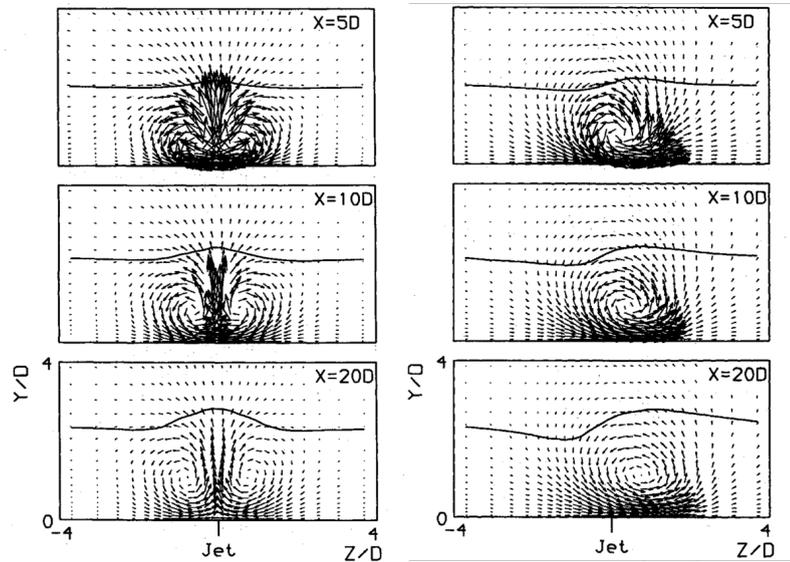


FIGURE 2.10 – Influence de l’angle de giration tirée de [126]. Vecteur vitesse en aval du perçage pour $\alpha = 30^\circ$. À gauche $\beta = 0^\circ$ et à droite $\beta = 45^\circ$

2.3 Simulation numérique directe

Il existe à ma connaissance peu d’études de jet par simulation numérique directe. La première expérience de ce type semble due à Muppidi and Mahesh [89] qui considère un jet perpendiculaire à l’écoulement principal, issu d’une conduite circulaire. Cette configuration ne correspond pas tout à fait à ce que l’on peut rencontrer pour le refroidissement par effusion, les perçages étant dans ce cas inclinés afin de plaquer le plus possible le jet à la paroi. De plus cette étude ne considère pas d’écoulement secondaire. De même, Muldoon and Acharya [87] ne considèrent ni l’écoulement secondaire ni de conduite pour le développement du jet. Un champ de vitesse turbulent et pulsé est injecté directement au niveau de la section de sortie du jet. Dans ces deux cas, l’écoulement principal est stationnaire et injecté trop près du jet pour permettre le développement de la turbulence dans le canal. Enfin, on citera la récente étude de Wu et al. [123] qui ne considèrent pas non plus la conduite du jet, cependant l’écoulement principal y est turbulent et non isotherme. Le jet est injecté directement en sortie de trou et ce dernier est stationnaire. Les différents paramètres de ces études sont résumés tableau 2.3 Il n’existe pas à notre connaissance de simulation numérique directe d’un jet transverse dans une configuration représentative du refroidissement par effusion. En particulier s’agissant de la prise en compte de l’écoulement secondaire, du perçage, de son inclinaison par rapport à la paroi et de sa giration.

	Muppidi and Mahesh [89]	Muldoon and Acharya [87]	Wu et al. [123]
Reynolds principale	Laminaire	Laminaire	3333
Reynolds du jet	5000	5000	Laminaire
Taux de soufflage	5.7	6	1/6
Conduite	Oui	Non	Non
Δx^+	6.762	*	10
Δy^+	1.802	*	5
Δz^+	0.0042 ~ 8.447	*	0.7 ~ 7

TABLE 2.3 – Simulations numériques directes de jet transverse

Deuxième partie

Outils utilisés

Chapitre 3

Outils utilisés

3.1 Le banc d'essai MAVERIC

Nous avons obtenu les données expérimentales utilisées dans ce travail en employant le banc d'essai MAVERIC (Maquette pour la Validation et l'Expérimentation sur le Refroidissement pariétal par Injection Contrôlée) [17] et sa métrologie. Développé au LMAP dans le cadre des travaux de thèse de Most (version V1 du banc) [86], Florenciano [34] et du programme européen KIAI (version V2 du banc), ce banc est constitué de deux canaux superposés d'une longueur de 2.5 m, chacun de section rectangulaire identique de 400 mm de large par 120 mm de hauteur. Vient ensuite la section d'essai proprement dite, en plexiglas, qui reçoit une plaque perforée disposée horizontalement à choisir parmi un jeu de neuf plaques disponibles qui diffèrent par leur motif de perçage (1 seul trou, une seule rangée de trous ou 12 rangées de trous) et/ou la forme intérieure des trous (cylindrique ou conique convergente ou divergente). Les deux écoulements d'air incidents sont générés par deux compresseurs centrifuges entraînés par des moteurs électriques de 1 kW contrôlés en fréquence de rotation par deux régulateurs Siemens Micro-Master MC420. Afin de générer la différence de pression entre les deux écoulements à l'origine du mouvement au sein de la ou des perforations, une plaque de perte de charge est insérée dans l'écoulement du canal inférieur au niveau de la fin de la section d'essai. Cette plaque est percée de 90 trous circulaires de 13 mm de diamètre répartis uniformément et correspondant à une porosité globale maximale de 25%. Pour notre configuration, une partie de ces trous est aveuglée abaissant la porosité effective à 13.9 %. Dans cette dernière configuration, il est possible de créer une différence de pression allant de 10 à 140 Pa. En pratique cependant, Florenciano [34] a montré qu'il ne fallait pas dépasser un différentiel de pression de 60 Pa sous peine de voir apparaître une vibration à 22 Hz dépassant le seuil des 80 dB et possédant une signature visible sur le spectre des fluctuations du champ de vitesse. La figure 3.1 présente une vue d'ensemble

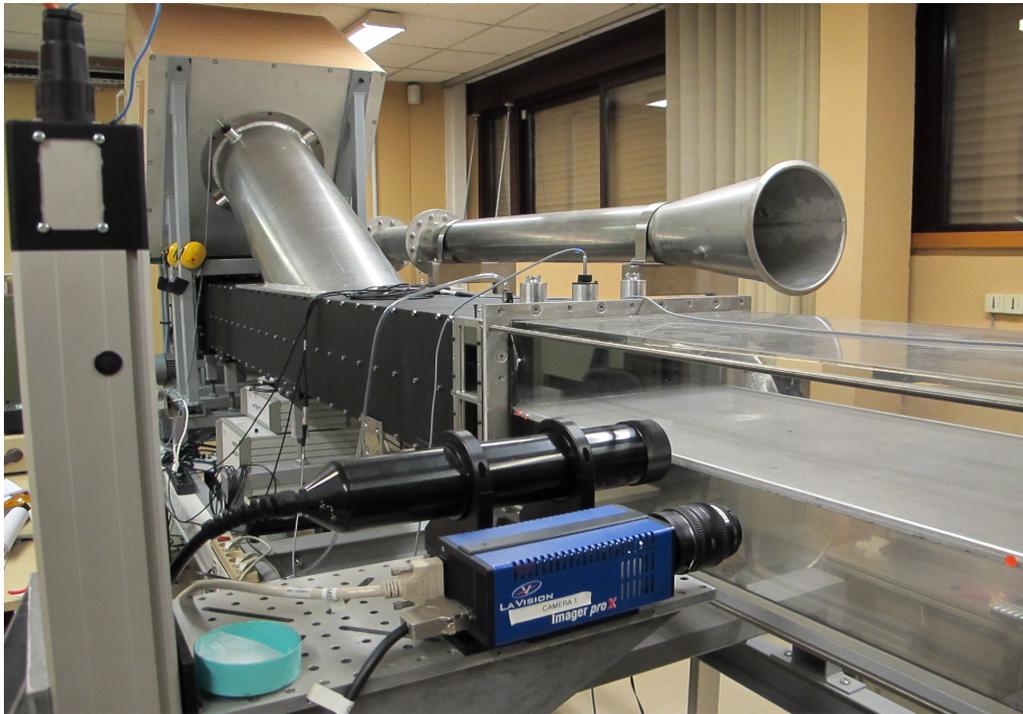


FIGURE 3.1 – banc d'essai MAVERIC avec la plaque à un trou employée : au premier plan la tête LDV (noire) et la caméra PIV.

des veines d'alimentation et d'essai de MAVERIC où l'on distingue la plaque employée dans notre étude qui est percée d'un seul trou cylindrique de 5 mm de diamètre incliné à 30 degrés par rapport au plan horizontal $Oxy(z=0)$. Nous avons employé ce banc d'essai dans la configuration V2 décrite par Florenciano [34] avec les quelques modifications mineures suivantes :

1. L'ajout de deux vis de calage sur la veine d'essai en plexiglas de manière à mieux verrouiller latéralement la plaque perforée dans les glissières de la veine.
2. Le remplacement de la lentille terminale de la tête d'émission du système LDV de 250 mm par une de 500 mm permettant d'éloigner latéralement la tête LDV de la veine en plexiglas afin de faciliter les interventions éventuelles sur la veine lors des mesures.
3. Le remplacement sur la caméra PIV de l'objectif de focale 50 mm par un objectif macro d'une focale de 105 mm permettant une amélioration significative des mesures de la vitesse moyenne avec une résolution des images qui passe de 15 pixels par mm à 40 pixels par mm.

3.1.1 Métrologie

Nous avons employé les deux techniques disponibles sur le banc pour caractériser le champ de vitesse : la vélocimétrie Doppler laser à une composante (LDV-1C) et la vélocimétrie par imagerie de particules à deux composantes (PIV-2C). Ce sont des techniques classiques dont nous ne rappellerons ici que le principes de base. Ces deux méthodes permettent de mesurer la vitesse de particules liquides ou solides injectées dans l'écoulement. Pour MAVERIC , cette injection s'effectue au niveau des entrées d'air des compresseurs. La taille des particules détermine la manière dont elles suivent les fluctuations du champ des vitesses du fluide porteur. Celle-ci doit être choisie suffisamment petite pour permettre un suivi des fluctuations de vitesse jusqu'à une fréquence suffisamment élevée pour que l'on puisse raisonnablement estimer que la vitesse de la particule correspond à celle qu'aurait le fluide porteur au même endroit et au même instant. Pratiquement, sur le banc MAVERIC , c'est un aérosol de di-ethyl-hexyl-sebacate (de formule $C_{26}H_{50}O_4$) qui est injecté dans l'écoulement. Le diamètre caractéristique des gouttelettes est de l'ordre de 1 micron (données constructeur du nébuliseur employé). Ces deux techniques diffèrent cependant considérablement dans leur principe comme nous allons le voir ci-dessous.

- **Système LDV** : Comme l'illustre la figure 3.2, la LDV-1C permet de mesurer la vitesse en un point correspondant au croisement sous un angle θ de deux faisceaux laser de longueur d'onde λ . La cohérence de phase entre ces deux faisceaux conduit à l'obtention de franges d'interférence au niveau du volume de contrôle. Une particule passant alors dans ce volume de contrôle va diffuser la lumière avec une fréquence f_D de modulation de l'amplitude de l'intensité lumineuse diffusée, directement liée à la composante normale au réseau de franges de la vitesse de croisement par la simple relation $U = d_f \cdot f_D$ où $d_f = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}$ désigne la distance séparant deux franges d'interférence consécutives . Une analyse de Fourier en temps réel du signal collecté permet alors de remonter à la fréquence de modulation et donc à la valeur de cette composante instantanée de la vitesse (l'ambiguïté de signe étant levée par un défilement des franges créé par une cellule opto-acoustique de Bragg décalant en fréquence l'un des deux faisceaux). L'intérêt de la LDV est qu'elle permet un suivi en fréquence des fluctuations de la vitesse (jusqu'à environ 1 kHz en pratique sur MAVERIC). Son inconvénient est qu'elle est ponctuelle et impose donc de déplacer le volume de contrôle de point en point pour mailler le domaine d'intérêt. Il n'est donc pas possible de visualiser les structure spatiales instantanées du champ de vitesse.
- **Système PIV** : le principe de base est simple. On illumine l'écoulement à deux instants très rapprochés t_0 et $t_0 + \Delta t$ avec une nappe laser d'une épaisseur caractéristique d'environ 1 mm au niveau de la zone d'intérêt choisie. Une caméra CCD synchronisée

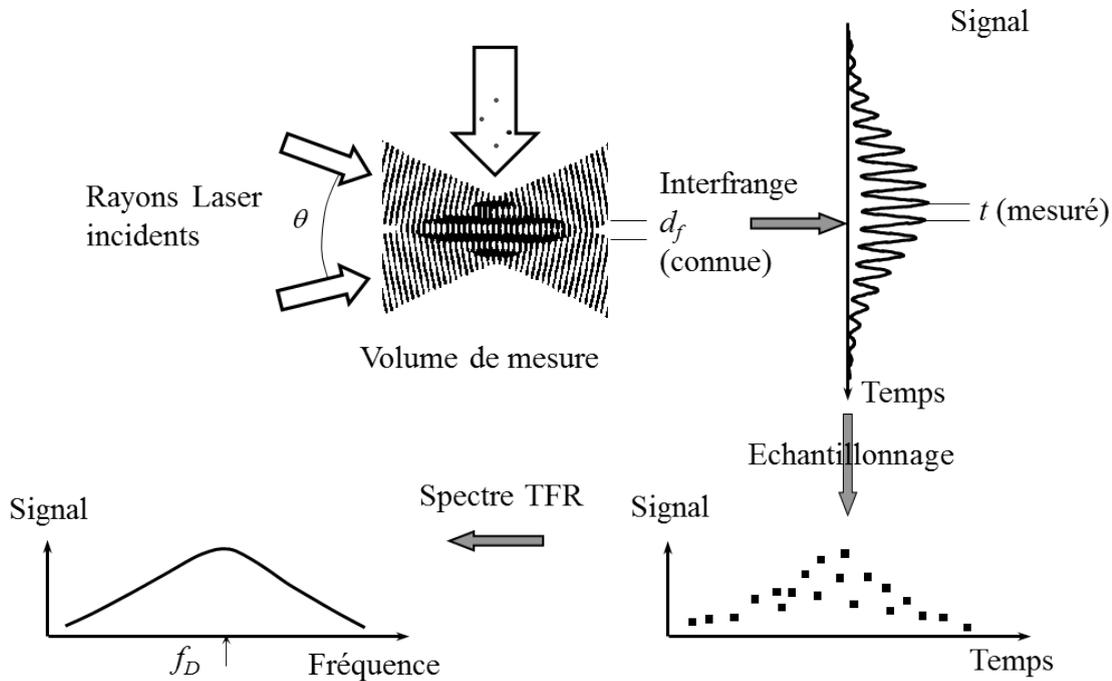


FIGURE 3.2 – LDV : principe de base . (Tiré de Nguyen [91])

avec le laser et placée perpendiculairement au plan de la nappe enregistre alors sur deux trames l'image de diffusion des particules éclairées par la nappe laser. On prend un nombre suffisant d'enregistrements qui vont être post-traités en temps différé. Le principe de ce traitement consiste à identifier d'une trame sur l'autre les mêmes groupes de particules par l'intermédiaire d'une opération d'intercorrélacion entre les deux champs d'intensité lumineuse. On découpe ainsi la trame 1 en une succession de fenêtres d'interrogacion que l'on déplace ensuite sur la trame 2 de manière à rechercher les pics de corrélation d'intensité lumineuse. La localisation de ce dernier sur la trame 2 donne la position à $t_0 + \Delta t$ des particules contenues dans la fenêtre d'interrogacion choisie de la trame 1, à t_0 donc. Le déplacement en pixels peut ainsi être obtenu.

Ayant déterminé la correspondance (pixel \leftrightarrow m) par une étape préalable de calibration et connaissant l'intervalle de temps Δt choisi sur la base d'un déplacement d'environ quatre à cinq pixels pour la vitesse caractéristique de l'écoulement, on obtient alors la vitesse de déplacement du groupe de particules appartenant à la fenêtre choisie. Cette vitesse n'est donc pas une vitesse ponctuelle mais correspond à une moyenne spatiale sur la fenêtre d'interrogacion de la vitesse instantanée. En répétant l'opération par déplacement de la fenêtre d'interrogacion sur la trame 1, on reconstitue ainsi dans le plan image, le champ de vitesse quasi-instantanée (quasi car moyennée sur Δt) sur un maillage de points dont la densité dépend du choix de la taille finale des

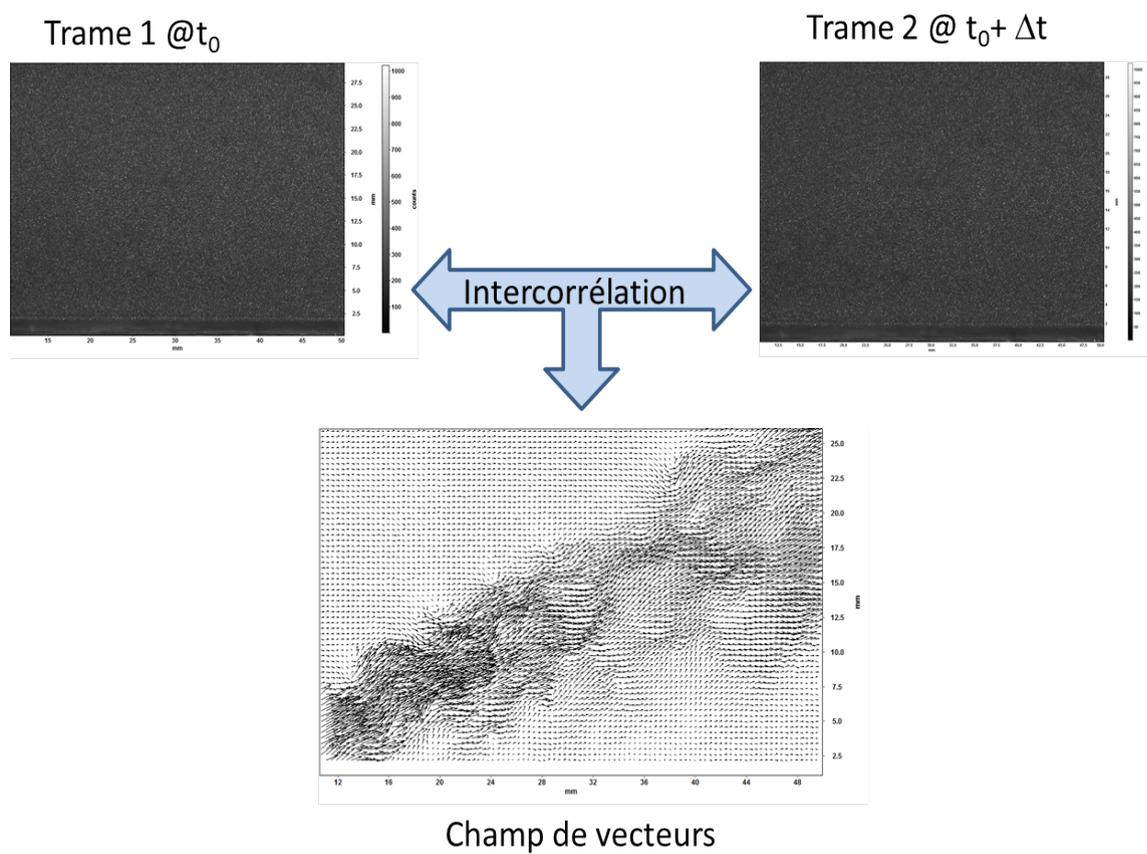


FIGURE 3.3 – PIV : principe de base.

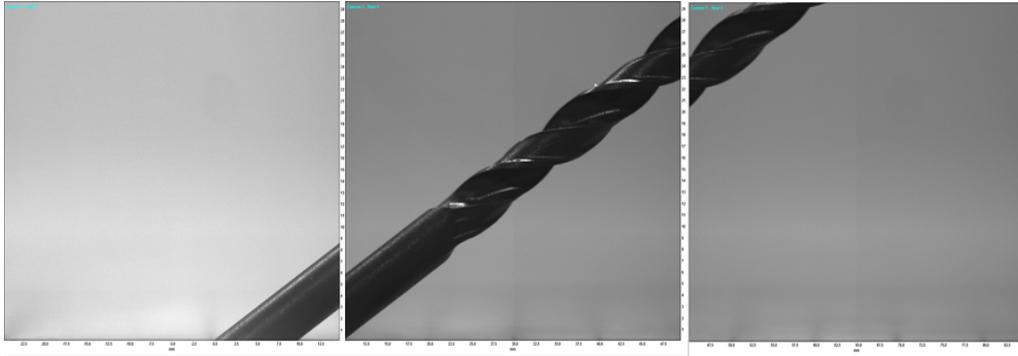


FIGURE 3.4 – Positions des trois fenêtres PIV utiliser pour mesurer le champ de vitesse du jet représenté ici par un foret de 5 mm de diamètre inséré dans le trou.

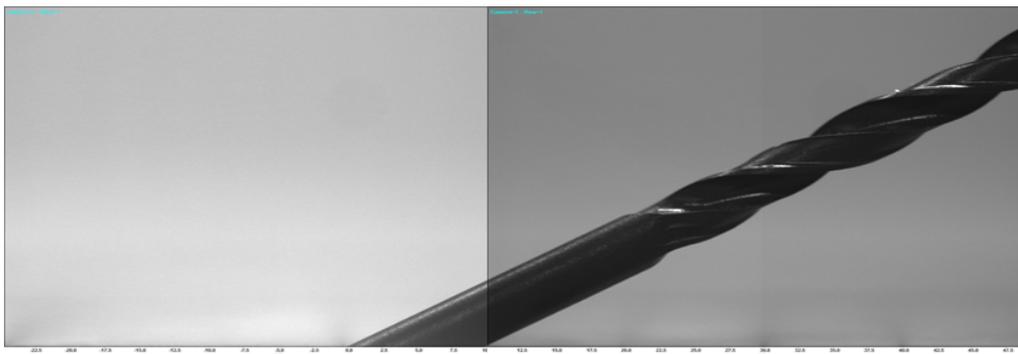


FIGURE 3.5 – Image résultant de la réunion des trois fenêtres PIV illustrant l'extension spatiale totale de la zone de mesure par PIV pour le jet représenté par un foret de 5 mm de diamètre inséré dans le trou de la plaque.

fenêtres d'interrogation ainsi que de leur éventuel recouvrement. Le champ de vitesse de l'écoulement dans le plan médian du jet a ainsi été mesuré par PIV-2C sur une région rectangulaire d'une longueur totale de 110 mm et d'une hauteur de 30 mm.

Ceci a été réalisé en déplaçant dans le même plan médian $Oxz(y=0)$ en trois abscisses espacées de 35 mm selon l'axe Ox une fenêtre d'observation de $40\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ avec un recouvrement de 5 mm entre les positions 1 et 2 d'une part et les positions 2 et 3 d'autre part. Ceci est illustré sur la figure 3.4 où trois images d'un foret d'un diamètre de 5 mm inséré dans le trou de la plaque censé représenter le jet fluide (rigide!) obtenues en chacune des trois positions sont présentées.

Comme le montre la figure 3.5, la réunion de ces trois images effectuées en superposant les zones de recouvrement permet de reconstituer précisément l'image globale du foret et donc du jet factice. Ceci est possible grâce à la grande précision des systèmes de déplacement supportant la caméra.

3.1.2 Source d'erreur et incertitudes

Les principales sources d'erreur associées à l'emploi de ce banc et de sa métrologie sont :

1. Les fluctuations de débit des écoulements d'alimentation : la régulation en fréquence des moteurs permet de réduire celles-ci à environ 1g/s sur chacune des deux alimentations en air (soit environ 1.7 cm/s en vitesse débitante sur la section de passage des canaux d'alimentation) comme l'atteste un débitmètre massique de contrôle installé sur l'entrée d'air de l'écoulement supérieur.
2. L'écart d'alignement entre les axes aérodynamiques de l'écoulement et les axes des tables de déplacement : l'alignement des axes est réglé grâce à un télémètre laser. L'angle de divergence maximal correspondant est estimé à 0.3 degré.
3. Les erreurs de biais en LDV liées à la sur-représentation des particules de vitesse élevée : la méthode dite "échantillonne et maintient" ([32], [59]) est employée pour corriger cet effet lors du calcul de la vitesse moyenne et de ses fluctuations.
4. Les vecteurs absurdes en PIV qui sont détectés et éliminés par l'algorithme de type filtre médian du logiciel de PIV employé.
5. La taille finie de l'ensemble des échantillons collectés : en nous basant sur les résultats de l'étude de Florenciano [34] afin d'avoir des données bien convergées statistiquement, nous avons sélectionné un nombre d'échantillons de 16384 pour les mesures LDV et de 2400 pour les mesures PIV. Dans ce dernier cas, nous ne considérerons cependant que les deux composantes moyennes de la vitesse et pas les tensions de Reynolds. En effet, ainsi que l'a noté par exemple Albugues ([3]), l'estimation des tensions de Reynolds par PIV est problématique et les tests comparatifs préliminaires que nous avons nous-mêmes effectués entre résultats de PIV et LDV aux mêmes points de mesure nous ont montré que si les valeurs obtenues pour la composante moyenne axiale de la vitesse étaient en bon accord (de l'ordre de quelques pour cents d'écart), ce n'était pas du tout le cas pour les fluctuations rms associées qui étaient en général fortement sous-estimées par la PIV.
6. Les erreurs systématiques dues à la précision des équipements employés, soit : 0.5% de la lecture + $1\text{Pa} = 1.3\text{ Pa}$ pour une différence de pression cible de 60 Pa pour le capteur mesurant la pression statique pariétal différentielle et 0.02 mm pour la précision des tables de déplacement.

Pour conclure sur les outils métrologiques employés, Le tableau ci-dessous regroupe les principales informations liées aux conditions d'acquisition et de traitement des données de vitesse LDV et PIV.

	LDV-1C	PIV-2C
Longueur d'onde (nm)	514	532
Distance focale (mm)	500	105 (caméra)
Dimension de la zone visualisée	Mesure ponctuelle dans le plan médian Oxz (y=0) 28 sondes dans le jets et profils normaux 25 mm en amont du trou	3 fenêtres de 40 mm x 30 mm
Taille de la fenêtre finale d'interrogation	n/a	0.39 mm x 0.39 mm
Fréquence d'acquisition (Hz)	de 80 à 1200	15
Nombre d'échantillons collectés par point (LDV) ou position (PIV)	16384 valeurs	2400 images (2 trames chacune, avec un intervalle de temps entre trame de 20 μs)
Traitement du signal (LDV) ou des images brutes (PIV)	Filtrage passe-bande, échantillonnage des burst, transformée de Fourier	Soustraction du bruit de fond, filtrage passe-haut, normalisation de l'intensité
Caractéristiques du traitement d'image	n/a	Multi-passes avec taille décroissante de (96 pixels x 96 pixels , 2 passes et recouvrement de 50 %) à (16 pixels x 16 pixels, 6 passes et recouvrement 0 %)
Statistiques	<ul style="list-style-type: none"> • $\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^{16383} U_x(t_i) \Delta t_i}{\sum_{i=1}^{16383} \Delta t_i}$ • $\sqrt{U'^2_x} = \frac{\sum_{i=1}^{16383} (U_x(t_i) - \bar{U}_x)^2 \Delta t_i}{\sum_{i=1}^{16383} \Delta t_i}$ <p>Δt_i intervalle de temps entre l'arrivée dans le volume de mesure de la particule $i + 1$ et de la particule précédente i</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\bar{U}_x = \frac{1}{2400} \sum_{k=1}^{2400} U_x(t_k)$ • $\bar{U}_z = \frac{1}{2400} \sum_{k=1}^{2400} U_z(t_k)$

TABLE 3.1 – Principaux paramètres d'acquisition et de traitement des données LDV et PIV.

3.2 Code SATURNE

Le logiciel SATURNE est un code développé par EDF depuis 2001 qui permet la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles [5]. Il se base sur une méthode de volumes finis sur maillages structurés et non structurés et un algorithme SIMPLEC de type prédiction correction pour la discrétisation temporelle. Il permet le calcul d'écoulements turbulents par modélisation RANS. Plusieurs modèles de ce type y sont implémentés.

Dans cette section nous présenterons brièvement la méthode numérique avant d'aborder les modèles de turbulences et en particulier le modèle EB-RSM de Manceau [69] que nous utiliserons pour la réalisation d'expériences numériques.

3.2.1 Discrétisation temporelle

Pour la discrétisation temporelle, SATURNE utilise un algorithme de type prédiction correction SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Corrected). Cette méthode se déroule en trois étapes distinctes : la prédiction de la vitesse par l'équation de la quantité de mouvement, la résolution d'une équation de Poisson pour la pression et enfin la mise à jour de la vitesse par le bon incrément de pression. Si l'on note ϕ^n la valeur de la variable ϕ à l'instant t^n et $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, ces étapes s'expriment comme suit.

Étape de prédiction

La première étape consiste à donner une prédiction de la vitesse en résolvant l'équation de quantité de mouvement (1.55a). Pour plus de simplicité on néglige ici les termes de viscosité et on note $\mathbf{Q}^n = (\rho\mathbf{u})^n$ le moment. Les variables obtenues à l'issue de cette étape sont dénotés ϕ^* . Au final on écrit :

$$\frac{\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^* \otimes \mathbf{Q}^n) = -\nabla p^n \quad (3.1a)$$

$$p^* = p^n \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{Q}^*}{\rho^*} = \frac{\mathbf{Q}^*}{\rho^n} \quad (3.1c)$$

Étape de correction

La seconde étape consiste à corriger l'estimation de la vitesse en prenant en compte les variations de pression. Au cours de celle ci on néglige les termes de convection et on considère

l'équation de continuité dans (1.55a). Le système devient :

$$\mathbf{Q}^{**} - \mathbf{Q}^* = -\Delta t \nabla(p^{**} - p^*) \quad (3.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}^{**} = 0 \quad (3.2b)$$

En pratique ce système est résolu en considérant la divergence de (3.2a). En utilisant la relation (3.2b) on a alors l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot (\Delta t \nabla(p^{**} - p^*)) = \nabla \cdot \mathbf{Q}^* \quad (3.3)$$

Une fois ces étapes réalisées, on peut résoudre les équations de transport d'autres variables scalaires comme la température ainsi que les équations des modèles turbulents. On actualise ensuite les variables :

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{**} \quad (3.4a)$$

$$p^{n+1} = p^{**} \quad (3.4b)$$

3.2.2 Modèles de turbulence

Comme nous l'avons évoqué au chapitre 1 la simulation numérique d'écoulement turbulent est un processus très coûteux en temps de calcul. Pour s'alléger de cette contrainte on peut alors considérer l'approche RANS qui consiste à résoudre les équations de transport des moments statistiques de l'écoulement. Cependant, du fait de la non linéarité des équations de Navier-Stokes, ces équations de transport font apparaître des termes qui ne peuvent s'exprimer en fonction des variables primaires du système. C'est là qu'intervient la modélisation RANS dont le rôle est de donner une expression de ces termes. Dans le code Saturne sont implémentés plusieurs de ces modèles. Dans cette section, nous décrirons leurs principes, puis nous aborderons plus en détail le modèle EB-RSM de Manceau [69] que nous avons utilisé pour réaliser des calculs numériques.

3.2.2.1 Modèles du premier ordre

Lorsque l'on considère une fermeture du premier ordre, on modélise directement les tensions de Reynolds. La plupart des modèles de ce genre se basent sur la notion de viscosité turbulente ν_t introduite par Boussinesq. En s'inspirant des modèles de fluide Newtonien celui-ci propose que les contraintes turbulentes soient proportionnelles aux tenseurs des

taux de déformation moyens via ce coefficient :

$$m\overline{\mathbf{u}'_i\mathbf{u}'_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = -2\nu_t\overline{\mathbf{S}_{ij}} \quad (3.5)$$

Où $k = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}'_i^2}$ est appelée énergie cinétique turbulente (J) par analogie à l'énergie cinétique. ν_t s'exprime en m^2/s par analogie à la viscosité cinématique. L'expression des fermetures revient dans ce cas à exprimer cette viscosité. On citera en exemple le modèle $k - \epsilon$ à deux équations de transport [58] qui utilise l'hypothèse de viscosité turbulente avec :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.6)$$

Où ϵ est la dissipation turbulente, terme qui traduit la perte d'énergie cinétique turbulente et C_μ un coefficient constant déterminé expérimentalement :

$$C_\mu = 0.09 \quad (3.7)$$

Les termes k et ϵ sont déterminés en résolvant les équations de transport associés qui ne seront pas présentées ici.

D'après cet exemple, on voit qu'avec un modèle de fermeture RANS au premier ordre, on peut accéder au champ moyen statistiquement. Grâce aux équations supplémentaires qui sont résolues pour k et ϵ , on dispose aussi d'une approximation de la répartition spatiale de l'énergie cinétique turbulente. La répartition détaillée de cette énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds est quant à elle régie par l'hypothèse de viscosité turbulente à proprement parler. Sous l'hypothèse de Boussinesq (3.5) par exemple, le tenseur d'anisotropie \mathbf{b} définit par :

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}}{2k} \quad (3.8)$$

qui, comme son nom l'indique, mesure l'anisotropie du tenseur de Reynolds, est supposé aligné avec le tenseur des taux de déformation moyens. Cette hypothèse est forte. Elle est souvent mise en défaut y compris dans des configurations relativement simples. Par exemple, pour un écoulement turbulent de canal, seule la composante $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ du gradient moyen est non nulle. Par suite l'hypothèse de viscosité turbulente (3.5) conduit à $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$, résultat en forte contradiction avec la réalité physique de ce type d'écoulement.

3.2.2.2 Modèles du second ordre

Dans les modèles de turbulence au second ordre, on ne modélise pas directement le tenseur de Reynolds, mais les équations de transport de ses composantes. Ils font alors intervenir

dans le cas le plus général, six équations pour les corrélations double $\overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}$ plus une équation de transport d'une grandeur donnant accès à une échelle de longueur ou de temps, en général le taux de dissipation ϵ [21]. Ces équations font intervenir de nouvelles corrélations statistiques inconnues qu'il faut aussi modéliser. On a vu que dans les modèles au premier ordre, l'anisotropie de la turbulence était contrainte par l'hypothèse de viscosité turbulente. Ce n'est plus le cas pour une fermeture au second ordre, de sorte que ce niveau de fermeture est a priori mieux à même de représenter l'anisotropie de la turbulence. Comme le fait remarquer Michel [80], les écoulements en présence de jets pariétaux génèrent des structures sur une large bande spectrale et imposent l'utilisation de modèles plus complexes prenant en compte l'aspect anisotrope de la turbulence. Les modèles du second ordre sont donc tout à fait désignés pour ce type de simulation.

3.2.2.3 Prise en compte des parois

Les équations de Reynolds fermées par un modèle au premier ou au second ordre, il reste à imposer des conditions au bord pour les variables du système. Cependant, en pratique, beaucoup de modèles de turbulence ne sont pas assez riches physiquement pour être intégrés jusqu'à la paroi. En effet les hypothèses utilisées pour la formulation des fermetures ne sont souvent plus valable dans cette zone où les phénomènes physiques sont influencés par la présence d'une frontière solide.

Il existe alors deux grandes approches pour gérer ce type de condition aux limites. La première consiste à utiliser une loi de paroi dans la région proche de celle-ci. En effet les expériences d'écoulements turbulents sur des géométries simples, comme un écoulement en canal, montrent que jusqu'à une certaine distance de la paroi la turbulence est en équilibre local, c'est à dire que la production et la dissipation se compensent. Il est alors possible de dériver analytiquement un profil pour la composante axial de la vitesse moyenne \mathbf{U} en fonction de la distance à la paroi y . Si l'on adimensionne ces variable par la vitesse de frottement u_τ et la viscosité ν cette loi s'exprime par :

$$\mathbf{U}^+ = \frac{1}{C_\kappa} \ln y^+ + C \quad (3.9)$$

Avec C_κ la constante de Kármán et $C \simeq 5.5$ Ce comportement universel est utilisé pour élaborer des lois de paroi. Ces formules analytiques permettent de fixer les conditions au bord, en fonction de la distance à la paroi du premier point de calcul. On note que l'on peut aussi dériver ce type de loi pour le tenseur de Reynolds ou la dissipation [21]. En admettant ce comportement universel de l'écoulement turbulent en proche paroi, on peut utiliser ces lois pour toutes géométries, mais un soin particulier doit être apporté à la construction

du maillage, pour que les premiers points de calcul au bord se situent dans le domaine de validité des lois de parois.

La deuxième approche est de considérer des hypothèses différentes pour l'élaboration de modèles spécifiques, dits bas Reynolds ou de proche paroi. Une revue de modèles au second ordre bas-Reynolds ou de proche paroi est disponible dans Manceau [71]. L'auteur fait remarquer que ces modèles proposent souvent des corrections des modèles haut Reynolds sans remettre en cause leurs hypothèses de bases. Par opposition Manceau [69] propose un modèle du second ordre basé sur les travaux de Durbin [30]. Une équation elliptique sur un coefficient α qui traduit l'influence de la paroi sur l'écoulement est introduite. Ce coefficient permet de passer continûment d'un modèle bas Reynolds en proche paroi à un modèle classique. C'est ce modèle que nous utiliserons pour nos simulations RANS.

Troisième partie

Outils développés

Chapitre 4

Méthode numérique

À l'exception du code Saturne cité précédemment, tous les calculs dans ce travail ont été réalisés avec la bibliothèque AEROSOL [75]. Dans ce chapitre, nous expliciterons la méthode numérique utilisée, qui a servi de base à cette étude et qui nous a permis de réaliser la majorité des calculs présentés dans ce manuscrit.

AEROSOL

La bibliothèque AEROSOL est un code en développement d'éléments finis d'ordre élevé à la fois continu et discontinu. Elle fournit une implémentation de la méthode de Galerkin continue et discontinue ainsi que des schémas à distribution de résidu sur maillage hybride, avec des mailles triangulaires et quadrangulaires en deux dimensions et des tétraèdres, hexaèdres, prismes et pyramides en trois dimensions. Les maillages courbes sont également pris en compte. Elle s'utilise pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides comme les équations d'Euler ou de Navier-Stokes présentées au chapitre 1. Son développement est orienté par le problème du calcul sur architecture massivement parallèles.

Notre utilisation de la bibliothèque se concentre sur la méthode Galerkin discontinue avec discrétisation temporelle explicite. Les modèles physiques utilisés sont ceux présentés au chapitre 1. Nous présentons ici les détails de la méthode, en commençant par présenter la discrétisation par élément finis de Galerkin discontinu. Nous verrons dans un second temps quel schéma de discrétisation temporel est utilisé. Enfin, nous terminerons par une section sur les conditions aux limites utilisées dans la bibliothèque, notamment lorsqu'il s'agit de calculer un écoulement turbulent.

4.1 La méthode Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue a été introduite par Reed and Hill [104] en 1973 pour la résolution d'une équation de transport de neutrons. Depuis, sa popularité n'a cessé de croître comme en témoigne le nombre de publications à son sujet ces dernières années. Elle présente de nombreux avantages, notamment :

- Elle est adaptée à la montée en ordre. Comme les éléments finis continus, elle permet de monter en ordre facilement. Par opposition, les méthodes volumes finis qui considèrent une solution constante par élément, se limitent à l'ordre un. Les méthodes MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws), ENO (Essentially Non-Oscillatory) [44] ou WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [65] permettent de monter en ordre plus élevé, mais agrandissent le support du calcul proportionnellement à l'ordre. C'est à dire qu'il est nécessaire de connaître l'état des mailles voisines, mais aussi des voisines des voisines pour pouvoir calculer une solution. Cela rend compliqué l'implémentation de ces méthodes sur maillage non-structuré.
- Elle possède un stencil compact et ce quel que soit l'ordre d'approximation. Cela simplifie grandement les problèmes de parallélisation, notamment à l'ordre élevé. Il est aussi possible d'obtenir des schémas d'ordre élevé compacts avec des méthodes différences finies spectrale [60]. Cependant ces méthodes ne sont pas adaptés aux maillages non structurés.
- Elle est adaptée aux maillages non structurés et par extension, aux géométries complexes. Tout comme les méthodes volumes finis, elle permet de travailler avec tout type de maille. Ce qui rend possible l'utilisation de maillages hybrides.
- Elle permet la p-adaptivité, c'est à dire l'augmentation locale de l'ordre d'approximation sur une cellule. Il n'est donc pas nécessaire de modifier le maillage pour augmenter la précision dans une zone d'intérêt.
- Elle est naturellement L^2 stable pour les problèmes hyperboliques linéaires. En effet, de la même manière que pour les schémas volumes finis, le caractère discontinu permet un mécanisme de décentrement naturel garantissant la stabilité.

Concernant la théorie, plusieurs estimations de l'erreur ont été apportées. Dans le cas hyperbolique, on citera une première estimation par Lesaint and Raviart [61]. Johnson and Pitkäranta [49] ont étendu cette estimation en prouvant une convergence L_2 en $O(h^{p+\frac{1}{2}})$ dans le cas le plus général, confirmé numériquement par Peterson [101]. Richter [106] a aussi montré que, sous certaines conditions sur le maillage, on peut obtenir une convergence

optimale en $O(h^{p+1})$. L'application de la méthode à un système hyperbolique non linéaire est présentée section 4.1.1. La discrétisation des opérateurs du second ordre trouve ses origines dans les travaux de Arnold [7] et fera l'objet de la section 4.1.2. Enfin nous terminerons par une présentation de la discrétisation des équations de Navier-Stokes section 4.1.3.

4.1.1 Formulation variationnelle pour un système hyperbolique non linéaire

On se propose ici de détailler la formulation de la méthode de Galerkin discontinue pour un problème hyperbolique non linéaire, les équations d'Euler. Ce système peut s'écrire sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) = 0 \quad (4.1)$$

Avec \mathbf{q} le vecteur d'état des variables conservatives donné en deux dimensions par :

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T \quad (4.2)$$

Et $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_c(\mathbf{f}_c, \mathbf{g}_c)$, le vecteur de flux convectif associé aux fonctions :

$$\mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

On munit ce système d'une condition initiale et aux limites. Commençons par définir la formulation variationnelle de (4.1). En dimension d , on multiplie le système par une fonction test v de $[H^1(\Omega)]^{d+2}$ et on intègre par partie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^d le terme de plus haut degré. Si \mathbf{q} est une fonction régulière, on obtient la formulation suivante :

$$\forall v \in [H^1(\Omega)]^{d+2} \quad \int_{\Omega} [\partial_t \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q})] v \, d\Omega = 0 \quad (4.4a)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} v \partial_t \mathbf{q} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad (4.4b)$$

On considère un maillage \mathcal{M}_h d'élément Ω_e de Ω tels que :

$$\Omega = \cup_{e \in \mathcal{M}_h} \Omega_e$$

La méthode de Galerkin discontinue consiste à utiliser comme espace d'approximation, des fonctions polynomiales par morceaux sur chaque élément Ω_e . On considère donc l'espace

élément fini :

$$V_h^k = \left\{ v \in [L^2(\Omega_e)]^{d+2}, \quad v|_e \in [P^k(\Omega_e)]^{d+2}, \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{M}_h \right\}$$

Où $P^k(\Omega_e)$ désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus k définies dans l'élément Ω_e pris dans l'ensemble des mailles \mathcal{M}_h . On notera que cette base dépend du type d'élément considéré. Et, afin de pouvoir imposer des conditions aux limites sur le bord du domaine Ω , on décompose l'ensemble des interfaces Σ^d de \mathcal{M}_h en une partie interne et de bord, notées respectivement Σ^i et Γ tel que $\Sigma^i \cup \Gamma = \Sigma^d$. En supposant \mathbf{q} régulière, on écrit la formulation variationnelle sur un élément :

$$\forall v_h \in V_h^k \quad \int_{\Omega_e} [\partial_t \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q})] v_h \, d\Omega = 0 \quad (4.5a)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q} \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q})) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \nabla v_h \, d\Omega \quad (4.5b)$$

Puis on somme sur les éléments de \mathcal{M}_h :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h^k \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q} \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla v_h \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \, d\Omega \\ + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial\Omega_e} v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

À l'interface $\sigma \in \Sigma^i$ entre deux éléments, on introduit $\varphi^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n})$ et $\varphi^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n})$ et on définit l'opérateur de saut :

$$[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^- \quad (4.7)$$

On définit aussi l'opérateur de moyenne à l'interface :

$$\{\{\varphi\}\} = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) \quad (4.8)$$

En rassemblant les intégrales d'une même face interne, et en remarquant que les normales sortantes sur une interface commune entre deux éléments sont de signes opposés on peut alors ré-écrire l'équation (4.6) sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h^k \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q} \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla v_h \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \, d\Omega \\ + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} [[v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}]] \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En utilisant la relation :

$$\llbracket v_h \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \{ \{ v_h \} \} \llbracket \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket + \{ \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \} \} \llbracket v_h \rrbracket \quad (4.10)$$

et en remarquant que par continuité de \mathbf{q} le saut de du flux est nul à l'interface $\llbracket \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0$. L'équation (4.9) devient :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h^k \quad & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q} \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla v_h \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \, d\Omega \\ & + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket v_h \rrbracket \{ \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \} \} \, d\sigma + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

La formulation Galerkin discontinue de (4.1) revient alors à chercher \mathbf{q}_h une approximation de \mathbf{q} dans V_h^k tel que :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h^k \quad & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q}_h \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla v_h \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_h) \, d\Omega \\ & + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket v_h \rrbracket \{ \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}_h) \cdot \mathbf{n} \} \} \, d\sigma + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} v_h \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_h) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pour stabiliser le schéma on procède alors comme en volumes finis. Le terme $\{ \{ \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_h) \cdot \mathbf{n} \} \}$ est remplacé par un flux numérique $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n})$ qui dépend des états \mathbf{q}_h^- et \mathbf{q}_h^+ à l'interface entre deux éléments voisins et de la normale sortante \mathbf{n} . Ce flux satisfait les relations de consistance suivantes :

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{n}) = \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) = -\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^+, \mathbf{q}_h^-, -\mathbf{n}) \quad (4.13)$$

En pratique, on utilise des flux numériques de type solveur de Riemann qui seront présentés section 4.2.

Le système devient :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h^k \quad & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} v_h \partial_t \mathbf{q}_h \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla v_h \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_h) \, d\Omega \\ & + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket v_h \rrbracket \mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) \, d\sigma + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} v_h^- \mathbf{h}_b(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^b, \mathbf{n}) \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Avec $\mathbf{h}_b(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^b, \mathbf{n})$ le flux de bord dépendant de l'état interne \mathbf{q}_h^- , de l'état au bord \mathbf{q}_h^b , et de la manière dont on impose les conditions aux limites.

Nous terminerons cette sous-section par des considérations technique. En pratique lorsque l'on implémente la méthode de Galerkin discontinue, on définit pour chaque élément

$\Omega_e \in \mathcal{M}_h$ une base polynomiale $\varphi^e \in P^k(\Omega_e)$ sur laquelle on projette \mathbf{q}_h :

$$\mathbf{q}_h^e(x, y, t) = \sum_{l=1}^{k+1} \mathbf{q}_l^e(t) \varphi_l^e(x, y) \quad (4.15)$$

Où les \mathbf{q}_l sont appelés degrés de libertés de la solution. En substituant v_h par une fonction de base de φ_j^e l'équation (4.14) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \sum_{l=1}^{k+1} \partial_t \mathbf{q}_l^e \varphi_j^e \varphi_l^e d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_j^e \cdot \mathbf{F}_c \left(\sum_{l=1}^{k+1} \mathbf{q}_l^e \varphi_l^e \right) d\Omega \\ & + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket \varphi_j^e \rrbracket \mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) d\sigma + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} \varphi_j^{e+} \mathbf{h}_b(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^b, \mathbf{n}) d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

On a alors un système de taille nombre de degrés de liberté fois nombre de variables. De plus, en choisissant bien les fonctions de base φ_l , il est possible d'obtenir certaines propriétés intéressantes pour le système. En prenant une base orthogonale par exemple, la matrice de masse de coefficient $\int_{\Omega_e} \varphi_j^e \varphi_l^e$ sera diagonale et donc facile à inverser.

4.1.2 Formulation variationnelle pour le Laplacien

Notre système d'intérêt, les équations de Navier-Stokes font intervenir un terme elliptique supplémentaire. Or l'espace d'approximation considéré étant discontinu, il convient de définir des flux pour les opérateurs du second ordre. Arnold [7] propose dans ce cas de rajouter un terme de pénalisation dans la formulation variationnelle pour le Laplacien. Plusieurs méthodes de ce type ont été développées. Nous présentons ici l'approche de Bassi and Rebay [10] appliquée au cas du Laplacien pour plus de simplicité. Cette méthode mixte transforme le système du second ordre en un système du premier ordre en introduisant une nouvelle équation pour l'opérateur concerné. Elle présente l'avantage d'être facilement applicable aux systèmes contrairement aux méthodes de pénalisation classiques où il est nécessaire de définir un terme de pénalisation pour chaque équations [6]. Considérons le problème du second ordre :

$$\nabla^2 q = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.17)$$

À laquelle on adjoint des conditions aux limites de Dirichlet et Neumann :

$$q = q^b \text{ sur } \Gamma^d \in \partial\Omega, \quad \partial_n q = \mathbf{z}^b \text{ sur } \Gamma^n \in \partial\Omega, \quad \Gamma^d \cup \Gamma^n = \partial\Omega \quad (4.18)$$

4.1.2.1 La méthode Bassi et Rebay

L'idée de la méthode est d'exprimer le gradient de \mathbf{q} comme une inconnue supplémentaire du système : $\nabla q = \mathbf{z}$. On obtient alors une formulation mixte présentée ci-dessous :

$$\mathbf{z} = \nabla q, \quad q = q^b \quad \text{sur} \quad \Gamma^d \quad (4.19a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z}^b \quad \text{sur} \quad \Gamma^n \quad (4.19b)$$

On considère deux fonctions test arbitraires \mathbf{g} et h dans $[H^1(\Omega)]^d$ et $H^1(\Omega)$. Étant donné que l'on s'est ramené à des opérateurs du premier ordre, on reprend la formulation présentée section 4.1.1, et on obtient le système suivant :

$$\forall \mathbf{g} \in [H^1(\Omega)]^d, \quad \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} \, d\Omega = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} q^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (4.20a)$$

$$\forall h \in H^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \nabla h \cdot \mathbf{z} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} h \mathbf{z}^* \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad (4.20b)$$

Avec :

$$q^* = \begin{cases} q^b & \text{sur} \quad \Gamma^d \\ q & \text{sur} \quad \Gamma^n \end{cases}$$

$$\mathbf{z}^* = \begin{cases} \mathbf{z} & \text{sur} \quad \Gamma^d \\ \mathbf{z}^n & \text{sur} \quad \Gamma^n \end{cases}$$

Considérons maintenant les espaces de fonctions test :

$$H_h^k = \left\{ h \in L^2(\Omega) : h|_e \in P^k(\Omega_e) \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{M}_h \right\}$$

$$\mathbf{G}_h^k = \left\{ \mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^d : \mathbf{g}|_e \in [P^k(\Omega_e)]^d \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{M}_h \right\}$$

Où $P^k(\Omega_e)$ est l'espace des polynômes de degré au plus k de l'élément Ω_e et d la dimension de l'espace. La formulation Galerkin discontinue revient alors à chercher $q_h \in H_h^k$ et $\mathbf{z}_h \in \mathbf{G}_h^k$ tel que :

$$\forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{z}_h \, d\Omega = - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{g}_h q_h \, d\Omega + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial\Omega_e} q_h \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (4.21a)$$

$$\forall h_h \in H_h^k, \quad - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla h_h \cdot \mathbf{z}_h \, d\Omega + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial\Omega_e} h_h \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad (4.21b)$$

Comme pour le cas hyperbolique pur, les terme q_h de (4.21a) et $\mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n}$ de (4.21b) sont évalués en introduisant les flux numériques \widehat{q}_h et $\widehat{\mathbf{z}}_h$ respectivement. En considérant l'opérateur de saut introduit précédemment et en différenciant les interfaces internes et de bord on obtient

la formulation :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{z}_h d\Omega = & - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{g}_h q_h d\Omega + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket \mathbf{g}_h \rrbracket \widehat{q}_h d\sigma \\ & + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} q_h^* \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\forall h_h \in H_h^k, \quad - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla h_h \cdot \mathbf{z}_h d\Omega + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} \llbracket h_h \rrbracket \cdot \widehat{\mathbf{z}}_h d\sigma + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} h_h \mathbf{z}_h^* \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (4.22b)$$

Pour définir les flux \widehat{q}_h et $\widehat{\mathbf{z}}_h$ Bassi and Rebay [10] proposent d'utiliser un schéma centré :

$$\begin{aligned} \widehat{q}_h &= \{ \{ q_h \} \} \\ \widehat{\mathbf{z}}_h &= \{ \{ \mathbf{z}_h \} \} \end{aligned}$$

Aussi, en considérant la relation :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} q_h \nabla \cdot \mathbf{g}_h + \mathbf{g}_h \nabla q_h d\Omega = & \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} (\{ \{ q_h \} \} \llbracket \mathbf{g}_h \rrbracket + \{ \{ \mathbf{g}_h \} \} \cdot \llbracket q_h \rrbracket) d\sigma \\ & + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} q_h \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (4.23)$$

On peut réécrire (4.22a) de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{z}_h d\Omega = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \nabla q_h d\Omega + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Sigma_e^d} \{ \{ \mathbf{g}_h \} \} \cdot \llbracket q_h \rrbracket^0 d\sigma \quad (4.24)$$

Avec $\Sigma^d = \Sigma^i \cup \Gamma^d$ et $\llbracket q_h \rrbracket^0$ l'opérateur de saut étendu à la frontière, qui permet de prendre en compte la condition de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \llbracket q_h \rrbracket^0 &= (q_h - q_h^b) \cdot \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma^d \\ &= \llbracket q_h \rrbracket = q_h^+ \cdot \mathbf{n}^+ + q_h^- \cdot \mathbf{n}^- && \text{sur } \Sigma^i \end{aligned}$$

Finalement on obtient la formulation BR1 pour Bassi et Rebay suivante :

$$\forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{z}_h \, d\Omega = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \nabla q_h \, d\Omega + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Sigma_e^d} \{ \mathbf{g}_h \} \cdot [q_h]^0 \, d\sigma \quad (4.25a)$$

$$\forall h_h \in H_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla h_h \cdot \mathbf{z}_h \, d\Omega = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Sigma_e^d} [h_h] \cdot \widehat{\mathbf{z}}_h \, d\sigma + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Gamma_e^n} h_h \mathbf{z}_h^* \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (4.25b)$$

On peut faire plusieurs remarques sur ce schéma. Premièrement, il n'est pas à support compact. Cela peut être mis en évidence par l'introduction d'un opérateur de relèvement :

$$\forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{R}_h(q_h) \, d\Omega = - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Sigma_e^d} \{ \mathbf{g}_h \} \cdot q_h \, d\sigma \quad (4.26)$$

L'équation (4.25a) devient :

$$\forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_h \cdot (\mathbf{z}_h - \nabla q_h - \mathbf{R}_h([q_h]^0)) \, d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

Cette relation étant vérifiée pour tout $\mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k$ on a la relation :

$$\mathbf{z}_h = \nabla q_h + \mathbf{R}_h([q_h]^0) \quad (4.28)$$

Et :

$$\widehat{\mathbf{z}}_h = \{ \nabla q_h \} + \{ \mathbf{R}_h([q_h]^0) \} \quad (4.29)$$

On remarque alors que le gradient de q_h est la somme du gradient dans l'élément et de la contribution des sauts aux interfaces. Si on remplace dans (4.25b) :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{g}_h \in \mathbf{G}_h^k, \quad & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla h_h \cdot (\nabla q_h + \mathbf{R}_h([q_h]^0)) \, d\Omega \\ & = \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Sigma_e^d} [h_h] \cdot \{ \nabla q_h + \mathbf{R}_h([q_h]^0) \} \, d\sigma \\ & + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Gamma_e^n} h_h \mathbf{z}_h^* \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le premier terme du membre de droite implique de connaître les valeurs sur les mailles voisines des voisins d'où la non compacité. Une autre remarque concernant ce schéma est qu'il n'est pas stable pour le problème (4.17) [6]. On va alors chercher à modifier le schéma pour résoudre ces problèmes.

4.1.2.2 Le schéma BR2

Afin de rendre le schéma précédent compact Bassi et al. [11], ont redéfini l'opérateur de relèvement pour le rendre compact. Pour cela, ils considèrent un opérateur de relèvement local \mathbf{r}_h^σ , défini pour chaque interface $\sigma \in \Sigma^d$:

$$\int_{\Omega_h^\sigma} \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{r}_h^\sigma(\llbracket q_h \rrbracket^0) d\Omega = - \sum_{\sigma \in \Sigma_e^d} \int_{\sigma} \{ \mathbf{g}_h \} \cdot \llbracket q_h \rrbracket^0 d\sigma \quad (4.31)$$

Où Ω_h^σ est l'union des éléments partageant l'interface σ . L'opérateur \mathbf{r}_h^σ est donc la contribution en σ à l'opérateur \mathbf{R}_h :

$$\mathbf{R}_h(\llbracket q_h \rrbracket^0) = \sum_{\sigma \in \Sigma^d} \mathbf{r}_h^\sigma(\llbracket q_h \rrbracket^0) \quad (4.32)$$

En remplaçant dans le système (4.25) on obtient :

$$\mathbf{z}_h = \nabla q_h + \mathbf{R}_h(\llbracket q_h \rrbracket^0) \quad (4.33a)$$

$$\forall h_h \in H_h^k, \quad \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla h_h \cdot (\nabla q_h + \mathbf{R}_h(\llbracket q_h \rrbracket^0)) d\Omega = \sum_{\sigma \in \Sigma_e^d} \int_{\sigma} \llbracket h_h \rrbracket \cdot \{ \nabla q_h + \mathbf{r}_h^\sigma(\llbracket q_h \rrbracket^0) \} d\sigma + \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Gamma_e^n} h_h \mathbf{z}_h^* \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.33b)$$

On a bien un schéma compact référencé dans la littérature sous l'acronyme BR2. En revanche, ce dernier n'est pas stable [6]. Il est nécessaire d'introduire un facteur de pénalisation pour le calcul du gradient [11] :

$$\mathbf{z}_h = \nabla q_h + \eta \mathbf{R}_h(\llbracket q_h \rrbracket^0) \quad (4.34)$$

Arnold et al. [6] montrent que dans le cas du schéma BR2, il est suffisant d'avoir

$$\eta \geq f \quad (4.35)$$

Où f est le nombre de faces de l'élément.

4.1.3 Formulation DG pour les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes font intervenir les deux opérateurs présentés aux section 4.1.1 et section 4.1.2 :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_c(\mathbf{q}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}) \quad (4.36)$$

Les termes convectifs sont identiques à ceux des équation d'Euler et ne diffèrent pas de ce qui à été présenté section 4.1.1. La partie diffusive qui caractérise les phénomènes induits par le

comportement visqueux du fluide introduite le flux $\nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}) = (\mathbf{f}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}), \mathbf{g}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}))$ qui s'écrit :

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}) = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \gamma/P_r e_x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_v(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}) = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ 2\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \left[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] + \gamma/P_r e_y \end{pmatrix},$$

Pour plus de détail sur ces équations on se référera au chapitre 1. Comme précédemment, on introduit un maillage \mathcal{M}_h d'élément Ω_e de Ω tels que :

$$\Omega = \cup_{e \in \mathcal{M}_h} \Omega_e$$

On appelle Σ^i l'ensemble des interfaces internes et par Γ le bord de Ω . Puis on considère pour chaque élément Ω_e de \mathcal{M}_h un espace de fonctions polynomiales $P^k(\Omega_e)$ de degré au plus k et l'espace des fonctions :

$$\mathbf{V}_h^k = \{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^{d+2} : \mathbf{v}_h|_e \in [P^k(\Omega_e)]^{d+2} \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{M}_h \} \quad (4.37)$$

Le schéma BR2 pour les équations de Navier-Stokes consiste à chercher $\mathbf{q}_h \in \mathbf{V}_h^k$ tel que pour toute fonction test $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \mathbf{v}_h \mathbf{q}_h \, d\Omega - \sum_{\Omega_e \in \mathcal{M}_h} \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{v}_h \cdot [\mathbf{F}_c(\mathbf{q}_h) - \mathbf{F}_v(\mathbf{q}_h, \nabla \mathbf{q}_h + \mathbf{R}_h([\mathbf{q}_h]^0))] \, d\Omega \\ & + \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} [[\mathbf{v}_h]] \cdot \mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) \, d\sigma \\ & - \sum_{\sigma \in \Sigma^i} \int_{\sigma} [[\mathbf{v}_h]] \cdot \{ \mathbf{F}_v(\mathbf{q}_h, \nabla \mathbf{q}_h + \eta_e \mathbf{r}_h([\mathbf{q}_h]^0)) \} \, d\sigma \\ & + \sum_{\sigma \in \Gamma} \int_{\sigma} \mathbf{v}_h \left[\mathbf{h}_b(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^b, \mathbf{n}) - \mathbf{F}_v(\mathbf{q}_h, \nabla \mathbf{q}_h + \eta_e \mathbf{r}_h([\mathbf{q}_h]^0))_b \right] \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.2 Flux numérique

Le caractère discontinu de la discrétisation spatiale présentée ci-dessus implique la définition d'un flux numérique pour le calcul des intégrales aux interfaces. Ce flux doit permettre de définir de manière unique ces intégrales et de respecter les conditions de consistance [119] :

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{n}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) = -\mathbf{h}(\mathbf{q}_h^+, \mathbf{q}_h^-, -\mathbf{n}) \quad (4.39)$$

Bassi et al. [11] proposent un schéma stable avec un flux centré pour les termes diffusifs. En revanche, pour le terme convectif l'analyse de la stabilité dans le cas linéaire montre que ce schéma est inconditionnellement instable [119, p. 167]. Courant et al. [27] par exemple, proposent alors de décentrer le flux selon les caractéristiques du système. Ce type de schéma est référencé sous le nom générique de schéma décentré. Dans le cas d'un système hyperbolique non linéaire comme les équations d'Euler, on utilise des flux numériques de type solveurs de Riemann approchés. Dans cette section, nous expliquerons le concept des schéma de Godunov, puis nous présenterons le solveur approché de Roe.

4.2.1 Schéma de Godunov

La méthode introduite par Godunov [36] consiste à résoudre un problème de Riemann, c'est à dire un problème de Cauchy pour une solution constante par morceaux, en présence d'une discontinuité. Ce problème est donc particulièrement adapté à l'expression des flux à l'interface entre deux cellules en volumes finis ou en Galerkin discontinu. Le flux numérique s'écrit alors :

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) = \mathbf{F}_c(\text{RP}(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}), \mathbf{n}) \quad (4.40)$$

Où $\text{RP}(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n})$ désigne la solution du problème de Riemann. Cependant, l'évaluation de ce flux, et donc de la solution de ce problème est nécessaire pour chaque interface, à chaque pas de temps. La résolution exacte faisant appel à des méthodes itératives coûteuses en temps de calcul, on préférera l'utilisation de solveurs approchés. On peut alors procéder de deux manières. Soit calculer une approximation de l'état à l'interface et y évaluer le flux physique [118]. Soit chercher directement une approximation du flux numérique. C'est cette deuxième approche que nous avons privilégiée dans ce travail. Nous présenterons en suivant un de ces solveurs.

4.2.2 Le solveur approché de Roe

Il existe une multitude d'approximation possibles pour le flux numérique. On pourra trouver un travail de synthèse sur ces schémas dans le livre de Toro [119]. Nous nous contenterons de présenter le solveur de Roe que nous utiliserons dans la suite de nos travaux. Ce solveur introduit en 1981 [110] est très référencé dans la littérature ce qui représente un avantage lorsque l'on cherche à en étudier les propriétés comme nous le ferons au chapitre 5. On introduit la matrice jacobienne du flux :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.41)$$

Le système (4.1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \nabla \mathbf{q} = 0 \quad (4.42)$$

L'idée de Roe consiste à remplacer la jacobienne $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ par une matrice uniforme, dépendante des états de gauche et de droite :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^+, \mathbf{q}^-) \quad (4.43)$$

Celle-ci doit satisfaire trois conditions :

- Afin de préserver le caractère hyperbolique du système, $\tilde{\mathbf{A}}$ doit être à valeurs propres réelles et diagonalisable.
- Elle doit être consistante avec la jacobienne :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})$$

- Elle doit assurer la conservation dans les discontinuités :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}^+) - \mathbf{F}(\mathbf{q}^-) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-)$$

La construction de cette matrice peut s'avérer compliqué, cependant dans le cas des équations d'Euler, Roe [110] propose une manière simple de calculer $\tilde{\mathbf{A}}$ en introduisant un vecteur paramétrique \mathbf{Q} qui permette à la fois d'exprimer l'état $\mathbf{q}(\mathbf{Q})$ et le flux $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$. La moyenne de ce vecteur entre les états \mathbf{q}^+ et \mathbf{q}^- va alors nous permettre de construire un état moyen $\tilde{\mathbf{q}}$ appelé état de Roe. On notera qu'une version simplifiée de ce schéma est publiée par Roe and Pike [109], où les auteurs considèrent une loi de conservation linéarisée autour d'un état de référence. C'est cette dernière version que nous utiliserons pour nos développements au

chapitre 5. Il s'écrit comme suit :

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{q}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{q}^-)}{2} \cdot \mathbf{n} + |\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{n})| \Delta \mathbf{q} \quad (4.44)$$

Où $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-$. Le terme $|\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{n})| \Delta \mathbf{q}$ peut se développer sous la forme :

$$|\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{n})| \Delta \mathbf{q} = \sum_k^{d+2} \alpha_k(\Delta \mathbf{q}) |\lambda_k(\tilde{\mathbf{q}})| \mathbf{R}_k(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.45)$$

Avec λ et \mathbf{R} les valeurs propres et vecteurs propres respectivement et α l'amplitude du saut $\Delta \mathbf{q}$ à l'interface.

4.3 Schéma de discrétisation temporel

Un fois discrétisés en espace en associant la méthode de Galerkin discontinue et un flux numérique comme ceux présentés ci-dessus, les systèmes (4.1) et (4.36) se ramènent à un problème au dérivées ordinaires que l'on peut formuler :

$$\partial_t \mathbf{q} = \mathbf{L}(\mathbf{q}) \quad (4.46)$$

Où \mathbf{L} est l'opérateur de discrétisation spatiale. On peut alors considérer deux méthodes de résolution.

4.3.1 Méthode explicite

Dans le cas des méthodes explicites, l'opérateur de discrétisation spatiale est évalué au temps n ce qui nous donne un système de la forme :

$$\frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^n}{\delta t} = \mathbf{L}(\mathbf{q}_h^n) \quad (4.47)$$

Afin de conserver l'ordre de la discrétisation spatiale, on utilise des méthodes de résolution d'ordre élevé, multi-étapes, à un pas, les méthodes de Runge-Kutta. Elles se formulent comme suit :

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{p}^{(i)} \quad (4.48)$$

Avec $\forall i = 1, \dots, s$:

$$\begin{aligned} t^{(i)} &= t^n + c_i \delta t \\ q^{(i)} &= q^n + \delta t \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p^{(k)} \\ p^{(i)} &= \mathbf{L}(t^{(i)}, q^{(i)}) \end{aligned}$$

Avec $\delta t = t_{n+1} - t_n$ le pas de temps et \mathbf{q}^n les valeurs de \mathbf{q} à l'instant t_n . Les a_{ij} , b_i et c_j sont des coefficients donnés par le tableau de Butcher :

c_1	a_{11}			
c_2	a_{21}	a_{22}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Avec la condition de consistance :

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} = c_i, \quad \forall i = 2, \dots, s \tag{4.49}$$

Afin de garantir la stabilité au sens des variations totales :

$$TV(\mathbf{q}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{q}^n) \tag{4.50}$$

Où les variations totales s'expriment par exemple en volumes finis à une dimension par :

$$TV(\mathbf{q}^n) = \sum_j |\mathbf{q}_{j+1}^n - \mathbf{q}_j^n| \tag{4.51}$$

Shu and Osher [115] étendent cette formulation, soit :

$$\mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{q}^n \tag{4.52a}$$

$$\mathbf{q}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{i,k} \mathbf{q}^{(k)} + \delta t \beta_{i,k} \mathbf{L}(\mathbf{q}^{(k)}) \right), \quad \alpha_{i,k} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{4.52b}$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^{(m)} \tag{4.52c}$$

Avec la condition de consistance $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{i,k} = 1$. Cette formulation permet de décomposer le schéma en une somme d'étape d'ordre 1 de type Euler explicite. Si cette étape est fortement

k	0	1	2	3
v = 1	1.000	★	★	★
v = 2	1.000	0.333	★	★
v = 3	1.256	0.409	0.209	0.130
v = 4	1.392	0.464	0.235	0.145

TABLE 4.1 – CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v dans le cas linéaire. ★ indique un schéma L_2 -instable

stable au sens de (4.50) alors on peut montrer que sous une certaine condition CFL¹, c'est à dire :

$$\lambda_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad (4.53)$$

Où λ_{max} est la plus grande valeur propre de \mathbf{L} , le schéma (4.52) est aussi fortement stable. Gottlieb et al. [37] étendent ce résultat pour n'importe quelle norme. C'est à dire que, si pour une norme arbitraire $\|\cdot\|$:

$$\|\mathbf{q}^n + \delta t \mathbf{L}(\mathbf{q}_h^n)\| \leq \|\mathbf{q}^n\| \quad (4.54)$$

Alors sous une certaine condition CFL, le schéma est stable pour cette norme. L'utilisation de cette méthode dans le cadre d'une discrétisation spatiale de type Galerkin discontinue a fait l'objet de plusieurs travaux. On citera notamment les différentes contributions de Cockburn et al [22, 24, 25]. Dans le cas linéaire, il y est notamment étudié par une analyse de stabilité de von Neumann, les conditions CFL en fonction de l'ordre de discrétisation spatiale et temporelle. Ces résultats sont rappelés pour la norme L_2 dans le tableau 4.1. Finalement, on pourra retenir que pour une discrétisation Galerkin discontinue d'approximation polynomiale de degré k et une méthode de Runge-Kutta d'ordre $k + 1$, on a la condition de stabilité [25] :

$$CFL_{L_2} = \frac{1}{2k + 1} \quad (4.55)$$

4.3.2 Méthode implicite

Une autre approche possible est de considérer une discrétisation implicite. l'opérateur de discrétisation spatiale est évalué au temps $n + 1$ ce qui donne un système de la forme :

$$\frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^n}{\delta t} = \mathbf{L}(\mathbf{q}_h^{n+1}) \quad (4.56)$$

¹CFL : Courant, Friedrichs, Lewy

L'analyse de la stabilité au sens de von Neumann montre qu'elle offre une région de stabilité plus grande que les méthodes explicites. Dans le cas d'un problème stationnaire, cette méthode permet cependant d'atteindre la convergence très rapidement. Lorsque l'on s'intéresse à des écoulements à bas nombre de Mach, elle peut permettre de s'affranchir des conditions de stabilité des schémas explicites, qui nous le verrons au chapitre 5, sont très restrictives dans ce cas. Cependant, cette approche nécessite de résoudre un système linéaire. Cette opération s'avère à la fois difficile à implémenter, et coûteux en temps de calcul. Son optimisation dans un contexte parallèle est une tâche complexe qui est toujours en cours de réalisation dans la bibliothèque AEROSOL. Ainsi nous ne considérerons pas cette approche dans nos travaux.

4.4 Conditions aux limites

Lorsque que l'on cherche une solution numérique pour le système (4.1) ou (4.36) on se ramène à un domaine fini. Il faut alors définir des conditions sur les bords de ce domaine. Idéalement, la prescription de telles conditions doit permettre de retranscrire les phénomènes physique sur les bords tout en prévenant les réflexions d'ondes sortantes. Cependant ce problème est délicat, d'une part la connaissance de la solution aux limites est bien souvent inaccessible. On a alors recours à des hypothèses réductrices, comme par exemple considérer un état statique très éloigné du domaine [102, 117]. D'autre part, l'imposition de l'état considéré doit permettre de conserver les propriétés de précision et de stabilité du schéma numérique. En général, en volumes finis, et par extension, avec la méthode de Galerkin discontinue, les conditions limites sont imposées faiblement, c'est à dire par l'intermédiaire d'un flux au bord. Il convient alors de choisir les variables à imposer et la nature du flux de façon adaptée à chaque type de conditions aux limites. En particulier, on cherchera à prévenir toute réflexion non physique qui pourrait venir perturber la solution.

Une autre problématique qui concerne notre cas d'étude présenté au chapitre 2 est que nous considérons des écoulements turbulent. En effet, le développement de la turbulence depuis un écoulement laminaire est un processus très long dans le cas d'une turbulence de canal. Afin de limiter la taille de nos domaines de calcul, on cherchera donc à reproduire synthétiquement un écoulement turbulent afin d'imposer un signal instationnaire en entrée.

Cette section se présente en deux parties. Premièrement, nous présenterons la méthode utilisée dans la bibliothèque pour imposer un état au bord du domaine, dans le cas où l'écoulement est subsonique. Puis dans un second temps nous présenterons la méthode de génération d'un état instationnaire pour nos calculs d'écoulements turbulents.

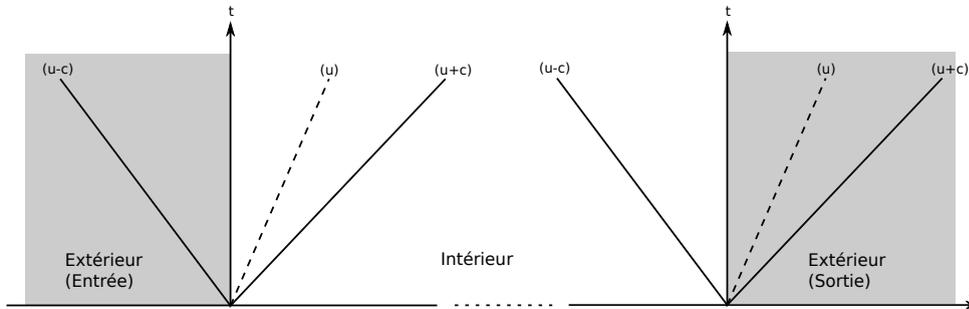


FIGURE 4.1 – Position des ondes dans les conditions aux limites en entrée et sortie du domaine de calcul.

4.4.1 Conditions aux limites subsoniques

Dans la cas d'un écoulement subsonique, le traitement des conditions aux limites du domaine est délicat. En effet si l'on considère les ondes propagées par les termes convectifs hyperboliques (1.25) on constate que l'on a simultanément des ondes entrantes et sortantes du domaine comme on peut le voir sur la figure 4.1. La condition aux limites doit alors permettre aux ondes sortantes de sortir librement, mais doit aussi permettre d'imposer convenablement les ondes entrantes, le tout en évitant au maximum les réflexions non physiques. Pour cela, il est nécessaire de se donner un état à l'extérieur du domaine. Cependant l'état réel est la plupart du temps inaccessible. La définition des conditions aux limites consiste alors à :

- Définir pour un type de condition donné le nombre de variables à imposer pour que le problème soit bien posé.
- Choisir les variables les plus pertinentes à imposer.
- Définir les valeurs de ces variables à l'extérieur du domaine de calcul.

De multiples travaux s'intéressent à la première de ces questions. Olinger and Sundström [94] considèrent les équations d'Euler linéarisées et montrent que le nombre de conditions aux limites nécessaire doit être égal au nombre de caractéristiques entrantes dans le domaine. Ils étendent aussi leurs travaux au équations de Navier-Stokes. Pour ce dernier cas on se référera aussi à Dutt [31] ou Poinot and Lele [102]

4.4.1.1 Entrée subsonique

Dans le cas d'une entrée subsonique, il est nécessaire de spécifier quatre conditions aux limites pour les équations d'Euler, et cinq pour Navier-Stokes [31, 94]. En règle générale, on spécifie le vecteur vitesse (trois composantes) ainsi que la masse volumique ou la température [102, 111]. Pour les équations de Navier-Stokes, une condition supplémentaire est nécessaire si l'on cherche à imposer la masse volumique. Oliger and Sundström [94] proposent alors d'imposer une condition sur la composante normale du tenseur des contraintes. Concernant la définition des valeurs de ces variables, Rudy and Strikwerda [111] testent différentes approches :

- Toutes les variables sont définies comme les variables de référence à l'infini, on impose alors un état complet.
- La masse volumique ou la température est extrapolée depuis l'état à l'intérieur du domaine.
- La pression est extrapolée en utilisant l'équation de la caractéristique sortante du système linéarisé.

Les résultats de leur test montrent que l'imposition de toutes les variables en entrée permet de converger le plus rapidement vers un état stationnaire. C'est donc cette approche que nous utiliserons dans nos calculs. On notera cependant que cette méthode génère du bruit en entrée, en particulier lorsque la condition aux limites est instationnaire. Poinso and Lele [102] proposent une méthode plus complète qui permet de limiter les réflexions parasites en résolvant un système basé sur les caractéristiques. Cette approche qui permet d'imposer les conditions aux limites fortement n'est cependant pas considérée dans cette étude pour éviter d'avoir à résoudre un système au bord.

4.4.1.2 Sortie subsonique

Dans le cas d'une sortie subsonique, une seule onde entre dans le domaine. Il convient alors de définir une variable aux limites dans le cas des équations d'Euler, en générale la pression [94, 102]. Pour les équations de Navier-Stokes Dutt [31] montre qu'il est nécessaire de considérer trois conditions supplémentaires sur les composantes tangentielles du tenseur des contraintes et sur le flux de chaleur. Pour la définition de l'état au bord, on se réfère encore aux travaux de Rudy and Strikwerda [111]. Ils considèrent de nouveau trois cas :

- La pression est constante et égale à la valeur de référence prise à l'infini.

- Une condition dite non réfléchissante où la pression est obtenue en considérant l'équation $\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(p - p_\infty) = 0$ [112].
- Spécification de toutes les variables.

Les résultats de ces auteurs montrent que la vitesse de convergence vers un état stationnaire est du même ordre de grandeur pour les deux premières conditions. Cependant la première condition est susceptible de réfléchir des ondes non physiques dans le domaine. Leur condition non réfléchissante permet de d'atténuer le phénomène tout en assurant la convergence vers la pression de référence. La troisième condition conduit à un problème mal posé et n'est pas utilisable.

Nous avons donc un ensemble de méthodes permettant d'imposer les conditions aux limites fortement. Cependant notre méthode numérique implique que ces conditions soient imposées faiblement à l'aide d'un flux. Celui que nous employons est détaillé en suivant.

4.4.1.3 Décomposition du flux numérique

Comme nous l'avons vu au chapitre 1 la matrice de notre système peut être diagonalisée, par exemple en une dimension :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\Lambda\mathbf{K}^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{u} - c & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} + c \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Steger and Warming [116] proposent alors de décomposer le flux numérique en une partie positive et une partie négative telles que :

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{u} = \mathbf{K}\Lambda^+ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}, \quad \mathbf{F}^- = \mathbf{A}^- \mathbf{u} = \mathbf{K}\Lambda^- \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} \quad (4.58)$$

Où $\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$ et Λ^+ (resp. Λ^-) contient les valeurs propres positives (resp. négatives) :

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} + c \end{pmatrix}, \quad \Lambda^- = \begin{pmatrix} \mathbf{u} - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Le flux au bord entre l'état interne \mathbf{q}_i et l'état au bord \mathbf{q}_b peut s'écrire alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_b) = \mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_i + \mathbf{A}^-(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_b \quad (4.60a)$$

$$= \mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_i + \mathbf{A}^-(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_b + \mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_b - \mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_b \quad (4.60b)$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{q}_b) + \mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\Delta\mathbf{q} \quad (4.60c)$$

Avec $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_b$.

De cette manière, le flux est décentré à droite pour le terme $\mathbf{A}^+(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_i$ et décentré à gauche pour le terme $\mathbf{A}^-(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}_b$.

4.4.1.4 Expérience numérique

Pour nos travaux nous avons choisi, pour des raisons de simplicité de définir un état complet en entrée, et une imposition de la pression en sortie. Les conditions aux limites sont imposées faiblement avec le flux de Steger and Warming [116]. Ces conditions aux limites ont été testées sur un cas simple de sortie d'un vortex en deux dimensions dans un écoulement isentropique. On définit un domaine carré, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ et un état de référence :

$$\begin{pmatrix} \rho_\infty \\ u_\infty \\ v_\infty \\ p_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit le vortex par les perturbations en vitesse et en température suivantes :

$$(\delta u, \delta v) = \left(\frac{\beta}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} (-(y - y_0), (x - x_0)) \right) \quad (4.61)$$

$$\delta T = -\frac{(\gamma - 1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \quad (4.62)$$

Où (x_0, y_0) est la position du centre du vortex, $r^2 = (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2$, β est l'amplitude et $\gamma = 1.4$.

On présente les résultats de ces expériences au premier ordre figure 4.2 et au second ordre figure 4.3. On constate que la condition de sortie subsonique utilisée est réfléchissante. Cependant elle est jugée satisfaisante au vu de l'amplitude importante du vortex et car elle permet d'imposer les conditions aux limites en restant stable. Dans le cadre de la méthode de Galerkin discontinu, Touloupoulos and Ekaterinaris [120] propose des conditions aux limites non réfléchissantes, basées sur les travaux de Poinot and Lele [102]. Cependant leur implémentation est complexe et nous n'avons pas pu les tester dans le cadre de ce travail.

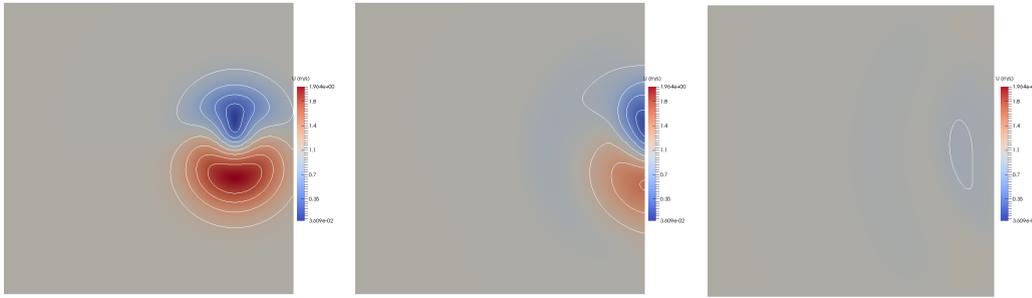


FIGURE 4.2 – Propagation d’un vortex à travers une sortie subsonique à l’ordre un

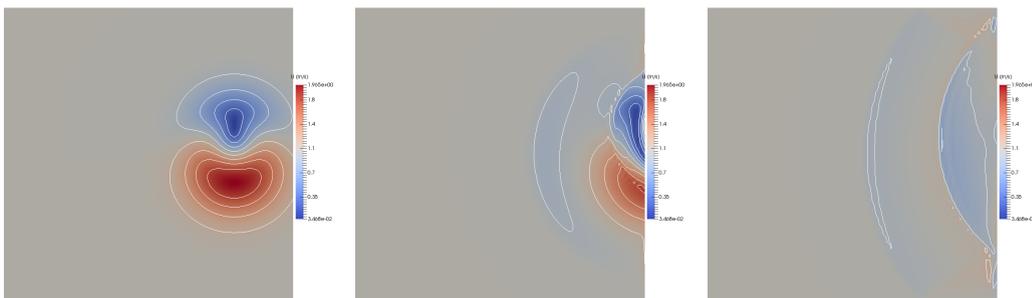


FIGURE 4.3 – Propagation d’un vortex à travers une sortie subsonique à l’ordre deux

4.4.2 Génération synthétique de turbulence

La simulation numérique directe d’un écoulement turbulent étant un processus très coûteux en temps de calcul (chapitre 1), on cherche à diminuer au maximum les limites du domaine. Dans le cas d’un calcul avec parois, la transition depuis un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent est un processus trop long pour être réalisé sur un domaine raisonnable d’un point de vue de la taille de calcul. On cherche alors à générer un écoulement instationnaire turbulent compressible de manière réaliste afin de l’utiliser en condition d’entrée du domaine sans avoir à payer le prix du développement de la turbulence. Il existe plusieurs méthodes pour cela.

Une première approche consiste à utiliser des données auxiliaires, qui peuvent être obtenues soit par mesures expérimentales [74] ou par l’intermédiaire d’un calcul précurseur [85]. Les données sont stockées pour chaque pas de temps puis injectées au cours de la simulation.

Une autre méthode consiste à recycler l’écoulement. Contrairement au cas précédent, aucune donnée amont n’est utilisée. Les conditions d’entrées sont définies à partir de la même simulation, par exemple en utilisant un plan de recyclage ou l’on récupère les données à injecter en entré. On s’affranchit alors de la nécessité d’avoir un domaine suffisamment grand pour établir la turbulence. En revanche cette méthode n’est applicable qu’à des géométries

simples comme un écoulement sur une plaque plane [66]. Dans le cas de la configuration d'un jet transverse présentée chapitre 2, l'influence du jet nous obligerait à rallonger le domaine en amont afin de créer une zone de recyclage qui ne soit pas perturbée par celui-ci.

Enfin une troisième approche consiste à générer synthétiquement les fluctuations turbulentes à partir des propriétés statistiques de l'écoulement que l'on cherche à imposer [48, 66]. Cette approche présente l'avantage d'être peu coûteuse en temps de calcul en comparaison avec un calcul précurseur tout en permettant de définir un signal de vitesse pour chaque degré de liberté des faces d'entrée du domaine. Enfin, elle est indépendante du calcul principal et n'est donc pas influencée par les différents phénomènes présents dans l'écoulement. C'est donc cette méthode que nous avons retenue pour la génération du champs turbulent. Dans cette section nous commencerons par expliquer le fonctionnement de la méthode introduite par Jarrin [48]. Dans un second temps nous expliquerons comment définir les moments de l'écoulement que l'on cherche à reproduire. Enfin nous présenterons les signaux obtenus avec cette méthode.

4.4.2.1 Description de la méthode

Lorsque l'on cherche à générer synthétiquement des fluctuations turbulentes, celles-ci ne peuvent pas être définies au hasard, mais doivent être les plus proches possible de celles de l'écoulement que l'on cherche à simuler. En effet un signal aléatoire trop éloigné d'une solution des équations de Navier-Stokes serait rapidement dissipé. Trouvant leur racines dans la volonté de réaliser des simulations hybride RANS/LES [48, 52, 57], les méthodes de génération synthétique cherchent à recréer un champ de vitesse ayant les mêmes propriétés statistiques que celles obtenus par un calcul RANS. En particulier, on cherche à retrouver les mêmes moments d'ordre faible, c'est à dire la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds. Pour arriver à ce résultat une approche générale consiste à se baser sur la décomposition introduite par Lund et al. [66] :

$$\mathbf{u}_i = \overline{\mathbf{u}_i^{in}} + a_{ij}^{in} \mathbf{X}_j \quad (4.63)$$

Où $\overline{\mathbf{u}_i^{in}}$ est la vitesse moyenne, et $\mathbf{a}_{ij}^{in}(\mathbf{x})$ est la factorisation de Cholesky du tenseur de Reynolds :

$$Re = AA^T \quad (4.64)$$

où A est une matrice triangulaire inférieure. Où $\overline{\mathbf{u}_i^{in}}$ et $\mathbf{a}_{ij}^{in}(\mathbf{x})$ sont définis comme des paramètres d'entrée. La modélisation porte alors sur les variables aléatoires \mathbf{X}_j . Si elles sont indépendantes, centrées et réduites, le champ généré possède les moments que l'on cherche à imposer. Cependant, si l'on se contente de tirer aléatoirement les \mathbf{X}_j , il se peut que les fluctuations générées ne soient pas turbulentes ou que l'écoulement relaminarise [48]. Les

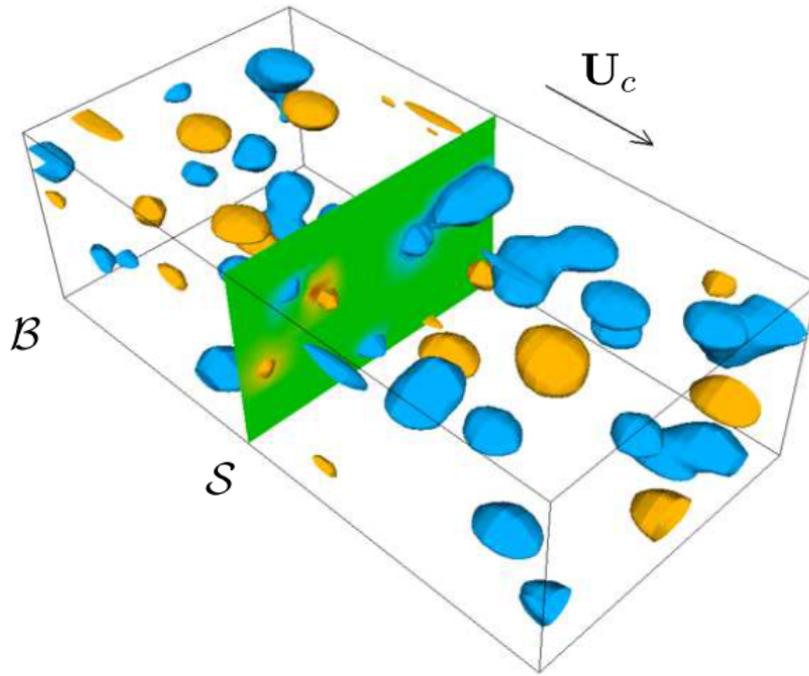


FIGURE 4.4 – Illustration du principe de la SEM tirée de [28]

\mathbf{x}_j doivent alors reproduire des corrélations en deux points et en temps acceptables. Pour cela, Jarrin [48] introduit une méthode qui repose sur une description phénoménologique de la turbulence comme la superposition de structures cohérentes. Ces structures sont caractérisées par leur taille, leur forme, leur position et leur signe de contribution au champs fluctuant. La superposition d'un grand nombre de structures permet alors de reconstruire un spectre continu d'énergie turbulente.

En pratique, on définit une boîte \mathcal{B} en amont de l'entrée \mathcal{S} du domaine de calcul. Cette boîte est remplie aléatoirement de structures qui sont advectées à la vitesse débitante de l'écoulement \mathbf{U} . Ces structures imitent les structures cohérentes d'un écoulement turbulent mais sont définies à l'aide de fonctions de forme simples. On peut alors définir en chaque point de l'entrée \mathcal{S} du domaine un signal de vitesse défini comme la somme de la vitesse moyenne de l'écoulement $\overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})}^{in}$ et d'une variable aléatoire fonction de la contribution des N structures présentes dans la boîte :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})}^{in} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_{ij}^{in}(\mathbf{x}) \varepsilon_j^k f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (4.65)$$

Où ε_j^k et $f_{\sigma(\mathbf{x})}$ sont respectivement le signe et l'amplitude de la contribution de la structure k . En définissant \mathbf{x}^k comme une variable aléatoire de probabilité uniforme dans \mathcal{B} , ε_j^k des variables aléatoires centrées réduites indépendantes et $f_{\sigma(\mathbf{x})}$ normée par $\|f_{\sigma(\mathbf{x})}\|^2 = |\mathcal{B}|$,

Jarrin [48] montre que les \mathbf{X}_i définis par :

$$\mathbf{X}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{K=1}^N \varepsilon_j^k f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (4.66)$$

forment une famille de variables centrées dont la matrice de covariance est l'identité. Finalement, grâce à ces propriétés, on obtient un champ turbulent de vitesse moyenne $\overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})}^{in}$:

$$\overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})} = \overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})}^{in} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{K=1}^N \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_j^k f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \overline{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})}^{in} \quad (4.67)$$

Et de moment du second ordre :

$$\overline{\mathbf{u}_i' \mathbf{u}_j'} = \mathbf{a}_{im}^{in} \mathbf{a}_{jm}^{in} = \mathbf{R}_{ij}^{in} \quad (4.68)$$

À ce stade il reste alors à définir la taille et les fonctions de forme des structures. La fonction f_{σ} est tensorielle :

$$f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \sqrt{\frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3}} f\left(\frac{x - x^k}{\sigma}\right) f\left(\frac{y - y^k}{\sigma}\right) f\left(\frac{z - z^k}{\sigma}\right) \quad (4.69)$$

Et à support compact :

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 = \int_{[-1;1]} f^2 = 1 \quad (4.70)$$

Il existe dans la littérature plusieurs propositions pour le choix de cette fonction de forme. Jarrin [48] propose simplement la fonction chapeau :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - |x|) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.71)$$

Pamiès et al. [95] proposent des fonctions qui permettent de définir des structures ayant des formes similaires à celles observées dans le cas d'un écoulement sur plaque plane. La forme des structures varie alors en fonction de la distance à la paroi. Cependant cette approche modifie la répartition des ε_j^k dans (4.65). Ces variables perdant leur caractère aléatoire, le champs de vitesse turbulent généré par cette méthode ne possède pas les moments d'ordre deux que l'on cherche à obtenir. Étant donné que l'on veut raccourcir au maximum notre domaine de calcul, nous avons opté pour les fonctions de forme proposées par Jarrin [48] qui permettent d'obtenir les mêmes moments statistiques d'ordre un et deux que l'écoulement réel en entrée du domaine de calcul.

Enfin, il reste à définir deux paramètres :

- Le nombre N de structures est évalué en considérant l'expression du coefficient d'aplatissement des fluctuations :

$$F_{\mathbf{u}_i} = \frac{\overline{\mathbf{u}_i'^4}}{\overline{\mathbf{u}_i'^2}^2} = 3 + \frac{1}{N} \left(A \frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3} + B \right) \quad (4.72)$$

Avec A et B deux constantes proches de l'unité qui dépendent du tenseur de Reynolds. Une turbulence de canal développé présente des valeurs d'aplatissement proches de la valeur normale 3. En choisissant N suffisamment grand devant le rapport entre le volume de la boîte et le volume d'une structure $\frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3}$, on se rapproche de ce cas. De plus, l'étude de Jarrin montre qu'au delà de :

$$N \geq 0.5 \max_{x \in \mathcal{B}} \frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3(x)} \quad (4.73)$$

Ce paramètre n'a plus d'influence.

- Les échelles caractéristiques σ des structures, qui sont déterminées à partir des paramètres d'entrée, à savoir les moment d'ordre un et deux de l'écoulement par la relation proposée par Jarrin et al. [47] :

$$\sigma = \max \left(\min \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\kappa \delta \right), \Delta \right) \quad (4.74)$$

Où $C_\kappa = 0.41$ est la constante de Kármán, δ l'épaisseur de la couche limite de l'écoulement, k l'énergie turbulente et ε la dissipation turbulente. Le paramètre $\Delta = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ nous assure que la taille des structures est supérieur à la taille des mailles et donc qu'elles sont bien prises en compte par la discrétisation.

Une fois ces paramètres déterminés, l'algorithme consiste à advecter les structures à la vitesse débitante :

$$\mathbf{x}^k(t + \Delta t) = \mathbf{x}^k(t) + \mathbf{U} \Delta t \quad (4.75)$$

Lorsque la structure sort du domaine \mathcal{B} , elle est retirée aléatoirement dans la boîte suffisamment loin de la sortie pour ne pas induire de discontinuité dans le champ généré. En pratique, pour une utilisation dans AEROSOL, ce champ est généré en amont puis stocké afin d'être lu au cours de la simulation. Cette technique qui requiert beaucoup d'espace de stockage, présente l'avantage de préserver l'équilibre des taches lors d'un calcul parallèle et d'éviter des communications trop fréquentes. En effet, les processeurs traitant des éléments possédant des faces sur lesquelles on voudrait appliquer ce type de condition d'entrée, seraient chargés d'un calcul supplémentaire et obligés de communiquer entre eux la position

	x	y	z
Longueur	70δ	0.5δ	0.5δ
Nombre de cellules	87	32	45
Δx_{\min}	0.048δ	0.0022δ	0.00063δ
Δx_{\max}	3.379δ	0.0475δ	0.046δ

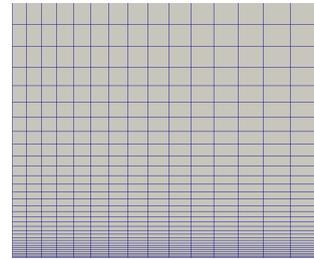


TABLE 4.2 – Dimensions du maillage de la veine pour le calcul RANS avec SATURNE

des structures. La lecture d'un fichier étant une opération rapide est indépendante, nous avons opté pour cette stratégie.

4.4.2.2 Définition des moments cibles

La méthode de génération synthétique présentée prend en paramètre d'entrée les moments d'ordre un et deux de l'écoulement. Grâce au banc d'essai MAVERIC présenté chapitre 3, il nous est possible de mesurer par LDV la vitesse instantanée axiale de l'écoulement dans les deux canaux. Nous avons donc réalisé des acquisitions qui nous ont permis de mesurer cette vitesse en une série de points le long d'une droite perpendiculaire à la paroi en amont du perçage. La position amont est choisie en cohérence avec l'entrée du domaine de nos simulations (chapitre 6). À partir de ces données, on calcule la composante R_{xx} du tenseur de Reynolds. Les résultats obtenus sont présentés figure 4.5.

Ces données ne fournissent cependant aucune information dans la direction transverse. De plus, les acquisitions proches de la paroi sont perturbées par des réflexions lumineuses sur la plaque. Nous avons donc cherché à les reconstruire et à les compléter par l'intermédiaire d'un calcul RANS de canal turbulent réalisé à l'aide du code SATURNE . On considère pour cela le maillage d'une veine suffisamment longue pour permettre le développement de la turbulence. Les dimensions du maillage d'un quart du canal sont présentées tableau 4.2 adimensionnées par la demi-hauteur de la veine δ . L'écoulement moyen dans un canal étant symétrique par rapport au plan parallèle aux parois et passant par l'axe, on applique des conditions de symétrie dans les directions y et z . On considère une condition de paroi non glissante sur les bords latéraux du domaine et une condition de sortie libre à l'extrémité droite. Les simulations sont réalisées avec le modèle de fermeture EB-RSM de Manceau [69]. Il faut donc imposer en entrée du domaine la vitesse débitante, les tensions de Reynolds, ainsi que la dissipation turbulente. La vitesse débitante U_{bulk} est estimée en moyennant sur la demi-hauteur δ les valeurs expérimentales de vitesse axiale. Les vitesses moyennes dans les direction y et z sont nulles. Les valeurs des tensions de Reynolds et de la dissipation

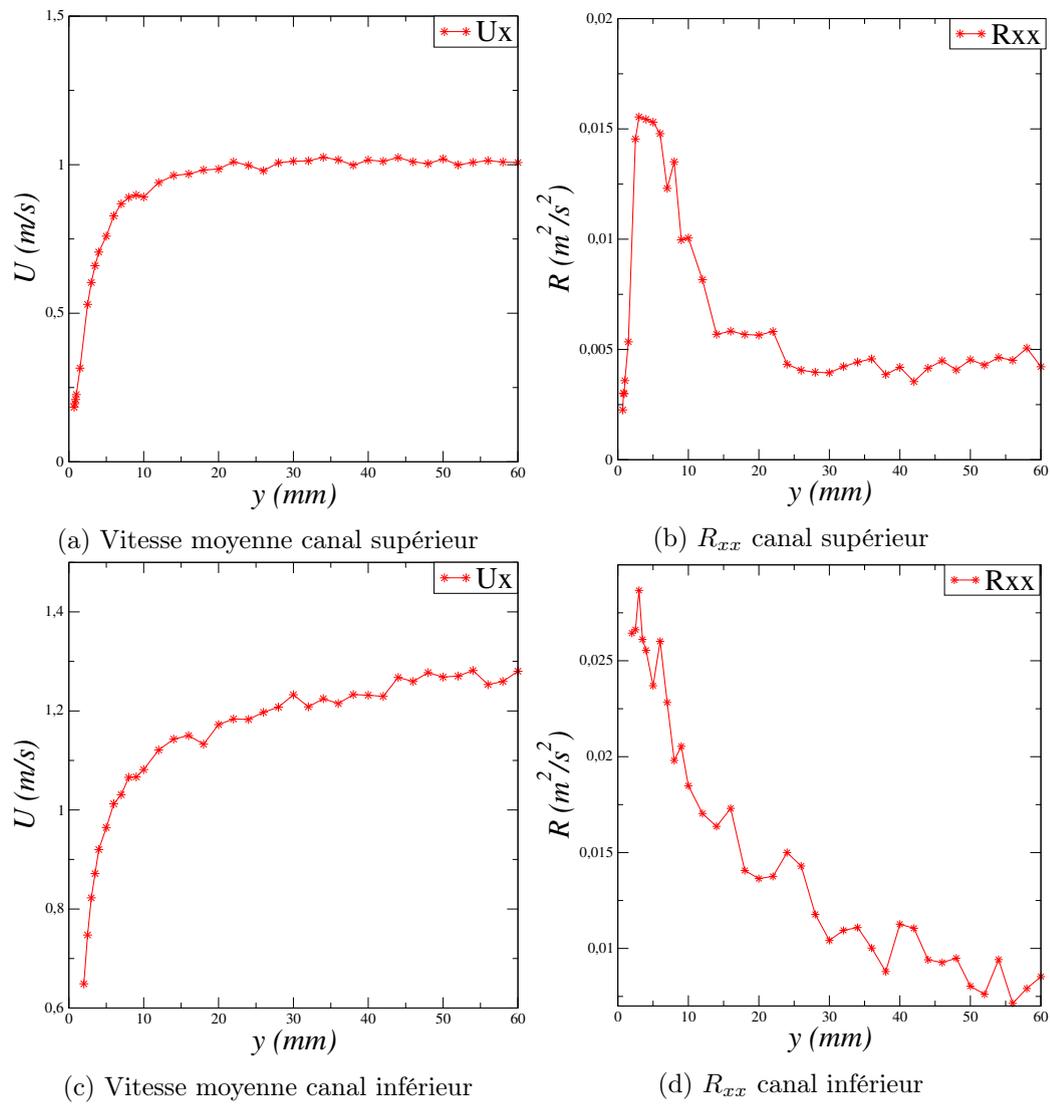


FIGURE 4.5 – Profils normaux à la paroi de vitesse moyenne et tension de Reynolds dans les veines supérieure et inférieure, mesurées expérimentalement par LDV sur le banc d'essais MAVERIC .

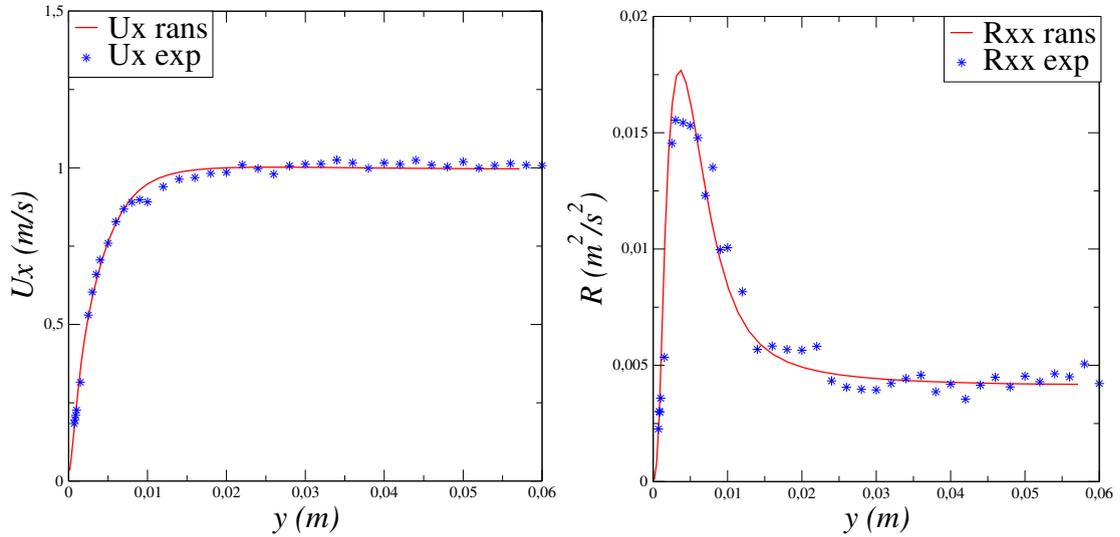


FIGURE 4.6 – Comparaison des profils de vitesse et de la première composante du tenseur de Reynolds pour le canal supérieur entre résultats de simulation RANS et résultats expérimentaux obtenus par LDV sur MAVERIC

turbulente ne nous étant pas accessibles, on fait une estimation avec les formules empirique :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon(y) = \frac{u_\tau^3}{C_\kappa y} \quad (4.76)$$

On fixe la valeur de ε à $y = 17 \frac{u_\tau}{\nu}$ et on considère la trace du tenseur de Reynolds :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}k \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

La première expérience réalisée ne reproduit en aucune abscisse du maillage les profils des moments expérimentaux. On réalise alors plusieurs simulations en faisant varier le niveau d'énergie turbulente k , puis on recherche la position dans la veine qui reproduit le mieux ces données. Pour cela, on considère trois critères :

- La correspondance du profil de vitesse axiale moyenne.
- Le niveau d'énergie turbulente sur l'axe du canal.
- La position du pic d'énergie par rapport à la paroi.

Les comparaisons entre les données expérimentales et les simulations pour les deux canaux sont données figure 4.6 et figure 4.7. Finalement on obtient les données suivantes présentées figure 4.8 et figure 4.9.

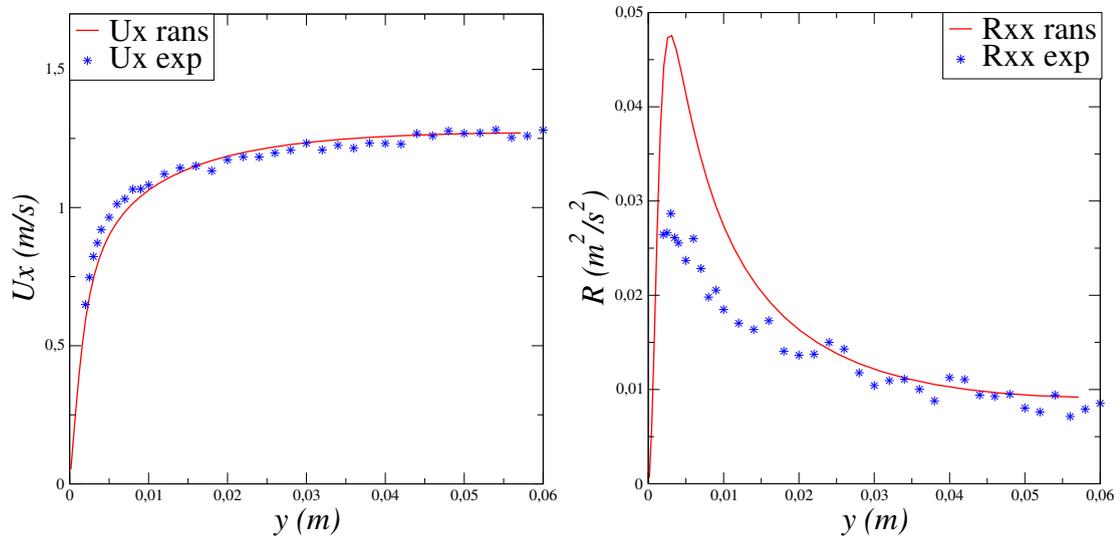


FIGURE 4.7 – Comparaison des profils de vitesse et de la première composante du tenseur de Reynolds pour le canal inférieur

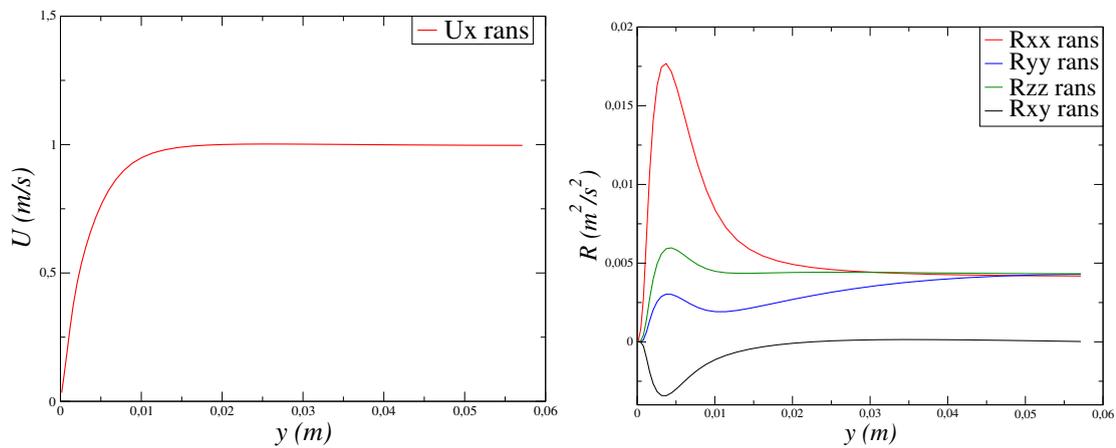


FIGURE 4.8 – Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds obtenues par calcul RANS pour le canal supérieur

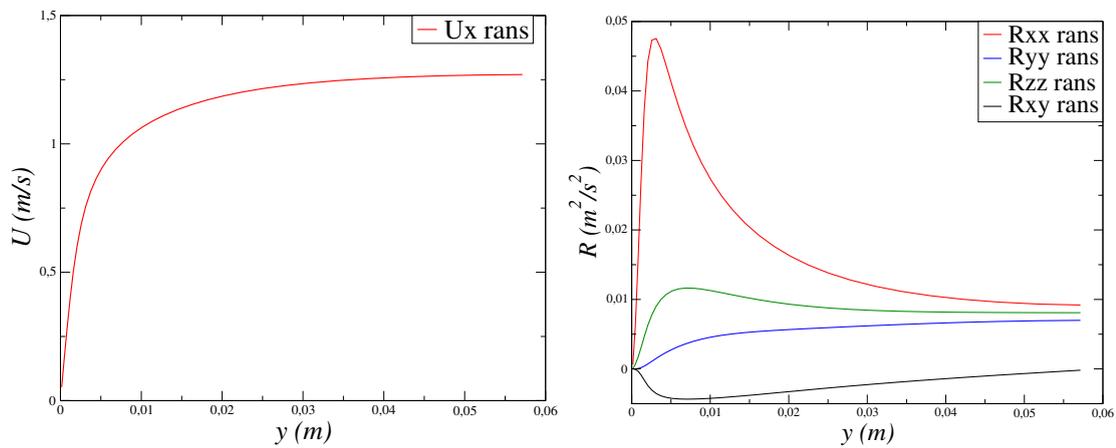


FIGURE 4.9 – Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds obtenues par calcul RANS pour le canal inférieur

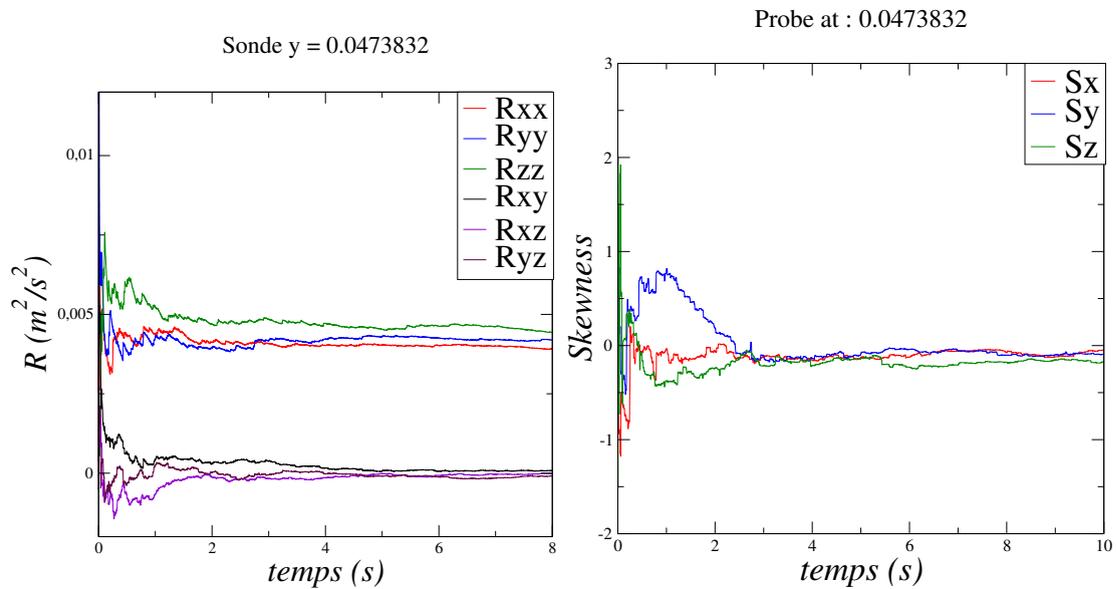


FIGURE 4.10 – Convergence des statistiques du signal généré avec la méthode SEM [47]

Ces profils sont donnés en paramètres d'entrée à notre code de génération de turbulence synthétique. Les paramètres utilisés sont présentés tableau 4.3.

	Canal supérieur	Canal inférieur
Taille de la boîte	0.04m × 0.04m × 0.05m	0.02m × 0.02m × 0.03m
Nombre de structure	2500	2500
Taille moyenne	0.005m	0.005m

TABLE 4.3 – Paramètres utilisés pour la génération du champ de vitesse turbulent synthétique

On génère alors un champ de vitesse turbulent synthétique. On présente figure 4.10 la convergence des moments du signal vers les cibles au point le plus éloigné de la paroi. On constate que les moments convergent bien vers les valeurs cibles en un peu plus de deux secondes de temps physique. Les profils de vitesse moyenne et des principales composantes des tenseurs de Reynolds sont présentées figure 4.11 et figure 4.12. Ainsi le signal généré possède bien les mêmes propriétés statistiques que l'écoulement réel.

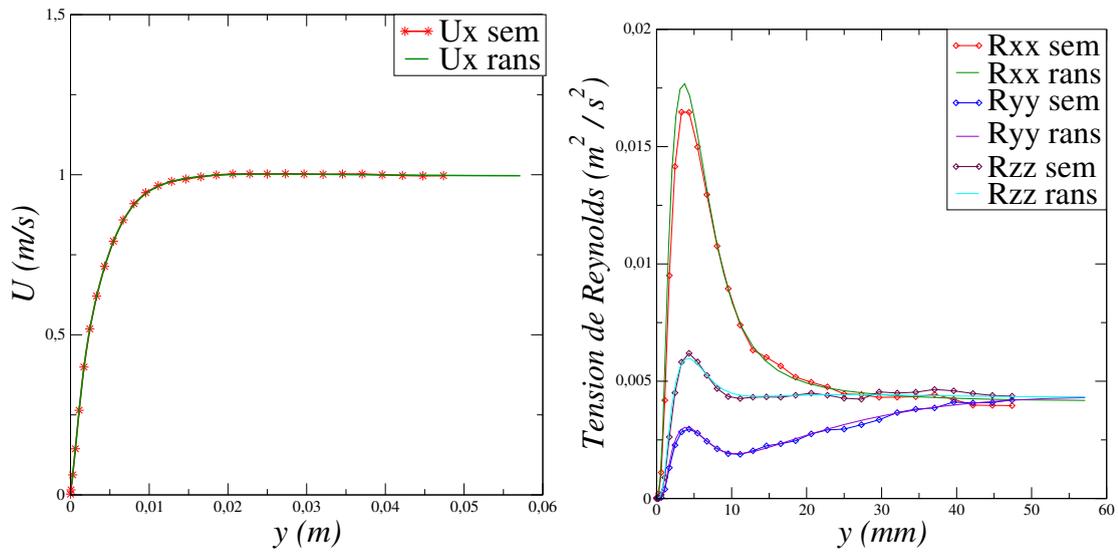


FIGURE 4.11 – Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds du champ de vitesse généré pour le canal supérieur

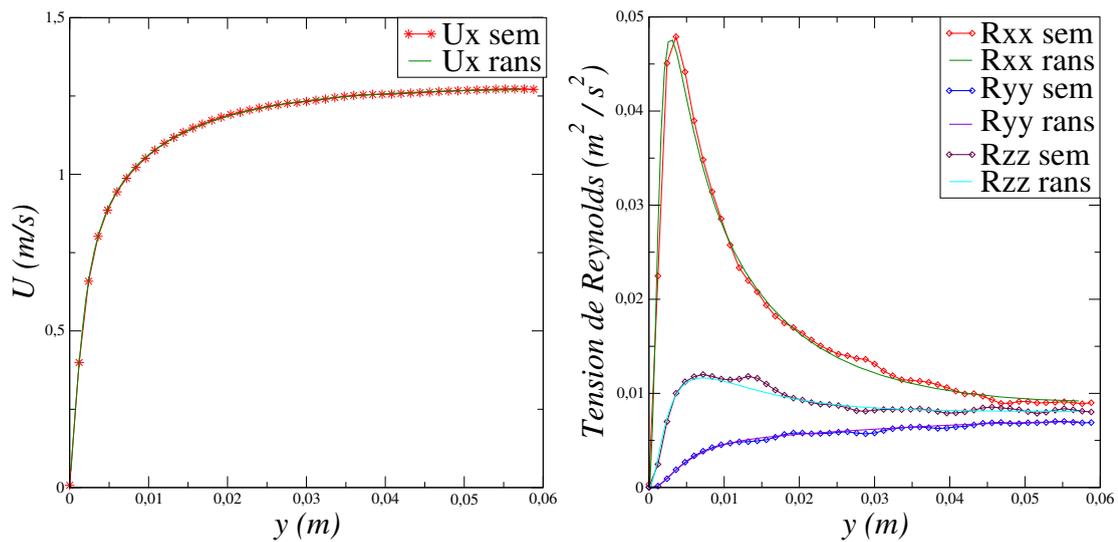


FIGURE 4.12 – Vitesse moyenne et composantes du tenseur de Reynolds du champ de vitesse généré pour le canal inférieur

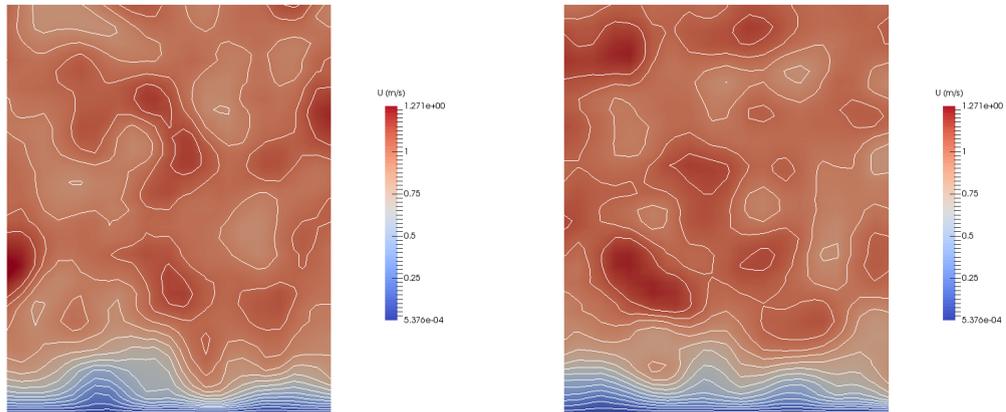


FIGURE 4.13 – Isolignes de vitesse pour le champ instantané à deux instants différents ($\|\mathbf{U}\| \in [0; 1.1]$ m/s)

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode numérique que nous utiliserons pour la réalisation de nos expériences. En particulier nous avons décrit la méthode de Galerkin discontinue pour la discrétisation spatiale de nos équations et les schémas en temps explicite SPP. Nous avons ensuite abordé le problème des conditions aux limites et défini celles que nous utiliserons dans nos simulations. Enfin nous avons présenté une méthode de génération synthétique de turbulence et nous avons généré un champ de vitesse reproduisant les moments d'ordre un et deux de l'écoulement réel que nous étudierons au chapitre 6. Nous terminons ce chapitre en précisant que tout les développements fait dans la bibliothèque AEROSOL sont réalisés dans un cadre massivement parallèle, avec les difficultés d'implémentation qui y sont liées.

Chapitre 5

Construction d'un schéma bas Mach instationnaire

La définition d'un flux numérique décentré pour l'hyperbolique comme ceux présentés au chapitre 4 est un défi car ils doivent répondre à une multitude de conditions, qui varient selon le cas d'application. En effet en plus de la nécessité d'avoir des schémas peu gourmands en temps de calcul et dans la mesure du possible simples à implémenter, ces derniers doivent vérifier une condition d'entropie dans les discontinuités. Ce n'est par exemple pas le cas pour le schéma de Roe introduit section 4.2 [43]. D'autres problèmes numériques connus, comme le carbuncle [98], ou comme nous allons le voir, le calcul d'une solution pour un écoulement bas Mach [40, 55, 113, 122], nécessitent d'élaborer des modifications spécifiques pour ces flux.

Pour traiter les régimes d'écoulement bas Mach, il existe deux stratégies. D'une part, l'approche initiée par Harlow and Amsden [42], dans les années 70, qui consiste à étendre un solveur incompressible vers les écoulements compressibles. Ces solveurs sont référencés sous le nom générique de solveur pression (ou « pressure-based solver »). Il ont donné lieu à plusieurs méthodes. On citera l'algorithme SIMPLE de [96] qui est notamment utilisé dans le code SATURNE . Ils sont encore largement étudiés [83, 84, 90].

L'autre approche possible est d'étendre les solveurs compressibles, habituellement utilisés pour le calcul d'écoulements supersoniques vers le bas Mach. Initié par Turkel [122], elle consiste à multiplier les équations d'Euler par une matrice de préconditionnement, ce qui modifie les vitesses d'ondes du système et ramène les temps de propagation de l'information convective et acoustique à un même ordre de grandeur quand le nombre de Mach diminue. Cette méthode de préconditionnement a été reprise par plusieurs auteurs, notamment dans le cas des écoulements visqueux par Choi and Merkle [23].

Ce préconditionnement s'utilise dans deux cas :

- D'une part, cela améliore la vitesse de convergence des schémas vers un état stationnaire. Si l'on considère une discrétisation temporelle explicite comme celle présentée chapitre 4, on constate que l'évolution en temps est limitée par une condition de CFL :

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad \forall \lambda \quad (5.1)$$

Où les λ sont les valeurs propres du système. Dans le cas des équations d'Euler en deux dimensions, elles sont données dans chaque direction \mathbf{n} par $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c)$. Lorsque la vitesse du son devient grande devant la vitesse de l'écoulement on a :

$$|\mathbf{u} \pm c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad (5.2a)$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{u}| \frac{|\mathbf{u} \pm c|}{|\mathbf{u}|} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad (5.2b)$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{u}| \left| 1 \pm \frac{1}{M} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq CFL \quad (5.2c)$$

À maillage fixé, le choix du pas de temps est conditionné par le rapport entre les vitesses d'ondes et donc le nombre de Mach. Le préconditionnement permet alors de s'affranchir de cette limitation. Cependant la méthode proposée par Turkel modifie les termes temporels du système. Cela affecte la consistance en temps de la méthode numérique et de ce fait, cela n'est pas utilisable dans le cas d'un écoulement instationnaire.

- D'autre part, Guillard and Viozat [40] ont montré que la solution des solveurs compressibles ne converge pas vers la solution incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers zéro, par opposition à ce qui est observé dans le cas continu (Chapitre 1). Ils proposent alors une méthode de préconditionnement qui permet de modifier les termes de décentrement du flux de Roe, afin de réduire correctement la dissipation pour assurer la convergence en Mach. De plus, cette modification n'affectant que la partie spatiale du système, la méthode reste consistante en temps.

Suite à l'analyse de Guillard and Viozat [40], plusieurs études ont alors proposé de modifier les termes diffusifs des flux numériques pour obtenir des solveurs adaptés pour les écoulements à bas nombre de Mach. On peut citer [29, 107] ou [93] pour une application à la méthode de Galerkin discontinue. Cependant les applications concernent toujours le cas stationnaire.

Le cas instationnaire est bien moins souvent considéré. On trouve dans [83] ou [84] des études sur la capacité des flux numériques à propager correctement de l'information acoustique à bas nombre de Mach. En particulier il est montré que les schémas classiques comme celui proposé dans [63], ne permettent pas de conserver correctement l'énergie acoustique à l'ordre

deux. Cependant ces études sont réalisées sur la base d'un algorithme de correction de pression [90] et ne s'étendent pas à la méthode que nous utilisons, en particulier à cause de l'algorithme de discrétisation temporelle semi-implicite. Ainsi, il n'existe à ma connaissance, aucune étude de stabilité pour les flux numériques bas Mach pour une discrétisation spatiale de Galerkin discontinue en instationnaire.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au comportement des flux numériques sur des écoulement bas Mach compressibles. Compte tenu des observations faites au chapitre 1, nous considérerons ici uniquement les équations d'Euler. Dans un premier temps, notre attention se portera sur l'étude des écoulements stationnaires. Une étude bibliographique des différents travaux concernant ce cas sera présentée. Dans un deuxième temps, nous étudierons le comportement de ces mêmes schémas dans la cas instationnaire, en particulier leur stabilité L^2 lors de la montée en ordre avec la méthode de Galerkin discontinue. Nous tirerons des conclusions de cette étude en formulant un nouveau schéma qui soit stable en explicite à la fois dans le cas stationnaire et instationnaire et ce pour tout ordre de discrétisation spatiale.

5.1 Écoulements bas Mach stationnaires

Plusieurs expériences montrent que les flux numériques de type schémas de Godunov ne convergent pas vers la solution incompressible quand le nombre de Mach tends vers zéro [29, 40, 107] par opposition à ce que nous avons rappelé chapitre 1 dans le cas continu. La première explication de ce phénomène est due à Guillard and Viozat [40] qui ont remarqué que l'ordre de grandeur des fluctuations de pression n'est pas correct lorsque l'on utilise le flux de Roe. En particulier, il est montré dans [39] que ce mauvais comportement est dû, dans les équations discrétisées, au saut de vitesses à l'interface entre deux cellules. Dans la continuité de cette analyse, Dellacherie [29] propose une modification générique pour les schémas de Godunov qui consiste à supprimer ce terme de saut dans les termes de décentrement du flux numérique. Rieber [107] propose une modification similaire pour le schéma de Roe, qui présente l'avantage d'être simple à implémenter tout en préservant certaines propriétés dissipatives du schéma. Enfin, en parallèle, Rieber and Bader [108] montrent en deux dimensions que l'amplitude du terme de saut de vitesse à l'interface dépend de la géométrie de la cellule. La pression fluctue aux bons ordres de grandeur sur des maillages triangulaires structurés. Ce résultat est étendu par Guillard [38] de manière plus simple pour des maillages non structurés triangulaires en deux dimensions ou tétraédriques en trois dimensions.

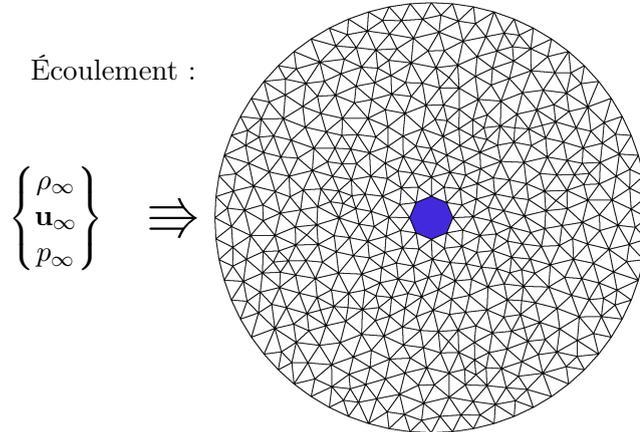


FIGURE 5.1 – Définition du cas test 2D

Dans cette section, nous proposons de tester le comportement de la méthode de Galerkin discontinue, en explicite, avec le schéma de Roe, sur le calcul d'écoulements stationnaires bas Mach. Dans un premier temps, nous effectuerons une expérience numérique pour faire apparaître le mauvais comportement rapporté dans la littérature. Nous détaillerons ensuite l'analyse de Guillard and Viozat [40] pour expliquer ce comportement et nous présenterons les différentes méthodes de corrections de ce phénomène. Dans un second temps nous étudierons l'influence de la montée en ordre sur le comportement de ce même schéma.

5.1.1 Présentation du cas test

Afin d'étudier le comportement bas Mach des schémas compressibles classiques, nous avons sélectionné le cas test d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre en deux dimensions. Ce cas présente l'avantage de posséder une solution analytique pour l'incompressible, ce qui nous permettra d'évaluer numériquement la convergence de la solution lorsque le nombre de Mach diminue. Il est défini comme sur la figure 5.1. La solution incompressible est donnée par :

Proposition 1. Si l'on considère un fluide incompressible, non visqueux et irrotationnel, la vitesse d'un écoulement horizontal de norme U autour d'un cylindre de rayon R est donnée en coordonnées polaires par :

$$\mathbf{V}_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta) \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{V}_\theta = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta) \quad (5.3b)$$

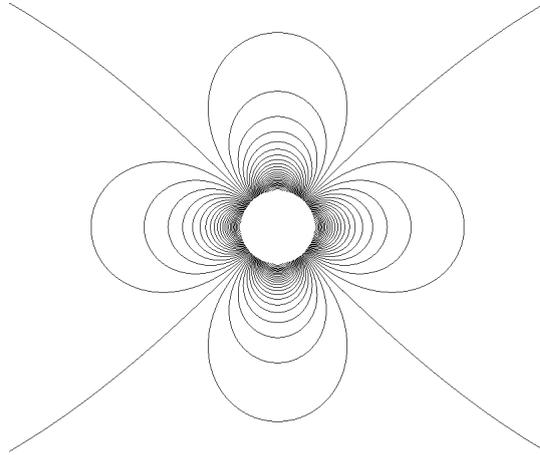


FIGURE 5.2 – Champ de pression incompressible autour d'un cylindre 2d

La pression se déduit de la vitesse et de la pression à l'infini p_∞ par application de la loi de Bernoulli :

$$p = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}_x^2 - \mathbf{u}_y^2) + p_\infty \quad (5.4)$$

Démonstration. Compte tenu du caractère irrotationnel de l'écoulement, la vitesse dérive d'un champ potentiel ϕ tel que : $\mathbf{u} = \nabla\phi$. De plus, l'hypothèse d'incompressibilité au sens de la divergence nulle impose : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. On a donc l'équation de Laplace :

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (5.5)$$

qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (5.6)$$

Si l'on considère maintenant la condition aux limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur les bords du cylindre, et en notant U la norme de la vitesse de référence prise à l'infini, la solution de cette équation est donnée par [46] :

$$\phi(r, \theta) = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta) \quad (5.7)$$

On en déduit alors l'expression de la vitesse. □

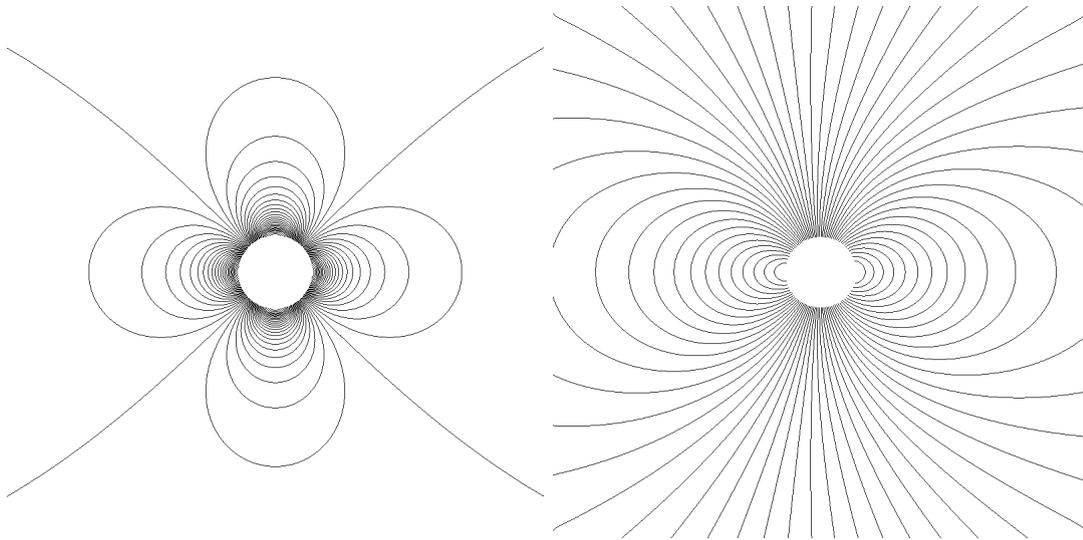


FIGURE 5.3 – Champs de variation de pression obtenus avec le schéma de Roe et une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-6 \cdot 10^{-6}; 6 \cdot 10^{-6}]$

5.1.2 Expérience numérique

Pour la réalisation de nos expériences, on considère un domaine circulaire de rayon $R_d = 5.0\text{m}$ avec en son centre un cylindre de dimension $R = 0.5\text{m}$. Le domaine est découpé en considérant un maillage de 100 degrés de liberté dans la direction radiale et 300 pour la circonférence. On prendra comme pression de référence $p_\infty = 1.0$ et comme masse volumique $\rho_\infty = 1.0$. La vitesse est ensuite calculée en fonction du nombre de Mach que l'on cherche à obtenir :

$$U_\infty = c_\infty M_\infty = \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}} M_\infty \quad (5.8)$$

Nous nous intéressons maintenant au comportement de notre méthode numérique pour la résolution des équations d'Euler sur le cas présenté. Le premier test est effectué sur maillage quadrangulaire avec le flux de Roe. Les conditions aux limites utilisées sont les conditions d'entrée et de sortie subsonique présentées chapitre 4. Les résultats obtenus sont montrés figure 5.3. On y présente les variations de pression par rapport à la pression de référence à l'infini :

$$\tilde{p} = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \quad (5.9)$$

On constate que la forme du champs de pression donnée par le solveur diffère de la solution incompressible. Nous allons expliquer pourquoi en détaillant le développement de [40].

5.1.3 Comportement du schéma de Roe semi-discret

Nous nous intéressons au comportement des méthodes numériques d'ordre 1 pour la simulation d'écoulements compressibles bas Mach. Pour cela nous allons présenter une analyse asymptotique des équations d'Euler semi-discrétisées à l'aide du schéma de Roe [110].

Guillard and Viozat [40] réalisent un développement asymptotique des équations d'Euler semi-discrétisées en espace avec le flux numérique de Roe. En développant les variables du système en fonction des puissances du nombre de Mach :

$$\psi(x, t, \hat{M}) = \sum_{n=0}^N \hat{M}^n \psi^{(n)}(x, t) + O(\hat{M}^{N+1}) \quad (5.10)$$

Ils en déduisent que :

Proposition 2. Les équations d'Euler en deux dimension semi-discrétisées avec le schéma de Roe sur une grille régulière cartésienne \mathcal{M}_h de taille de maille δ admettent des fluctuations de pression à l'ordre 1 :

$$p(x, t) = p^{(0)}(t) + \hat{M} p^{(1)}(x, t) \quad (5.11)$$

Démonstration. Si l'on considère une cellule $i \in \mathcal{M}_h$, et en définissant l'ensemble des cellules voisines de i par $\nu(i)$ on peut écrire :

$$\delta^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_i + \sum_{j \in \nu(i)} \delta \mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{n}_{ij}) = 0 \quad (5.12)$$

Avec \mathbf{H} , le flux numérique, ici celui de Roe :

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{q}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_j)}{2} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} |\mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}, \mathbf{n}_{ij})| \Delta_{ij} \mathbf{q} \quad (5.13)$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\Delta_{ij}(\cdot) = (\cdot)_i - (\cdot)_j \quad U_{ij} = u_{ij}(\mathbf{n}_x)_{ij} + v_{ij}(\mathbf{n}_y)_{ij} \quad V_{ij} = -u_{ij}(\mathbf{n}_y)_{ij} + v_{ij}(\mathbf{n}_x)_{ij}$$

avec $(\cdot)_{ij}$ désignant les variables moyennes de Roe et \mathbf{n}_{ij} la normale sortante de i vers j . D'après [40], le développement des équations d'Euler semi-discrétisées à l'ordre 1 s'écrit :

$$\delta \frac{\partial}{\partial t} \rho_i + \frac{1}{2} \sum \rho_j u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} U + \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}} = 0 \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial}{\partial t} \rho_i u_i + \frac{1}{2} \sum \rho_j u_j u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + p_j (\mathbf{n}_x)_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) u_{ij} + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} u_{ij} \Delta_{ij} U \\ - \rho_{ij} |U_{ij}| (\mathbf{n}_y)_{ij} \Delta_{ij} V + \frac{(U n_x + u)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} (x)_{ij} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.14b)$$

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial}{\partial t} \rho_i v_i + \frac{1}{2} \sum \rho_j v_j u_j \cdot i_j + p_j (y)_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) v_{ij} + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} v_{ij} \Delta_{ij} U \\ - \rho_{ij} |U_{ij}| (\mathbf{n}_x)_{ij} \Delta_{ij} V + \frac{(U n_y + v)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} (\mathbf{n}_y)_{ij} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.14c)$$

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial}{\partial t} \rho_i e_i + \frac{1}{2} \sum (\rho_j e_j + p_j) u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) \left(\frac{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{2} \right) + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} h_{ij} \Delta_{ij} U \\ + \rho_{ij} |U_{ij}| V_{ij} \Delta_{ij} V + \frac{(h + U^2)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} U_{ij} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.14d)$$

On définit $\mathbf{n}_{ij}^\perp = (-\mathbf{n}_y)_{ij}, (\mathbf{n}_x)_{ij}$ et on adimensionne ces équations comme pour le système continu :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}} + \\ \delta \frac{d}{dt} \rho_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) + \\ \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{M}^2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j \mathbf{n}_{ij} + \\ \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U \mathbf{n} + u)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U + \\ \delta \frac{d}{dt} \rho_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_j u_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) u_{ij} - \rho_{ij} |U_{ij}| \mathbf{n}_{ij}^\perp \Delta_{ij} V + \\ \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} u_{ij} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.15b)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{h_{ij} p}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \\
& \delta \frac{d}{dt} \rho_i e_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} (\rho_j e_j + p_j) u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + \\
& \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{U_{ij}^2}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} U_{ij} \Delta_{ij} U + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} h_{ij} \Delta_{ij} U + \\
& \frac{\hat{M}^2}{2} \sum_{j \in \nu(i)} |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) \left(\frac{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{2} \right) + \rho_{ij} |U_{ij}| V_{ij} \Delta_{ij} V = 0
\end{aligned} \tag{5.15c}$$

Enfin les équations sont développées asymptotiquement en puissance du nombre de Mach avec la notation :

$$(\cdot) = (\cdot)^{(0)} + \hat{M}(\cdot)^{(1)} + \hat{M}^2(\cdot)^{(2)} + O(\hat{M}^3)$$

Comme pour le cas continu, les termes sont réunis en fonction de leurs ordres. En notant respectivement N, S, E, O les cellules voisines supérieures, inférieures, gauche et droite de la cellule considérée, et en ordonnant les équations en fonction des puissances du nombre de Mach, on a :

1. Équation du moment à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}^2}$:

$$\sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(0)} \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad \text{soit : } p_N^{(0)} - p_S^{(0)} = 0, \quad p_E^{(0)} - p_O^{(0)} = 0 \tag{5.16}$$

2. Système semi-discret à l'ordre $\frac{1}{\hat{M}}$:

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\Delta_{ij} p^{(0)}}{c_{ij}^{(0)}} = 0 \tag{5.17a}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U^{(0)} \mathbf{n} + u^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} + \rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U^{(0)} + p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} = 0 \tag{5.17b}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{h_{ij}^{(0)} p}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \tag{5.17c}$$

D'après le lemme (3.1) de [40], ces résultats impliquent :

$$p_j^{(0)} = cte \quad \forall j \tag{5.18}$$

On retrouve le comportement du système continu. En revanche, l'équation (5.17b) devient :

$$\sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U^{(0)} + p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.19)$$

La pression d'ordre 1 n'est pas constante en espace. La pression admet donc des fluctuations à cet ordre :

$$p(x, t) = p^{(0)}(t) + \hat{M} p^{(1)}(x, t) \quad (5.20)$$

□

L'amplitude de ces fluctuations est alors plus importante que dans le cas continu où elles sont de l'ordre de \hat{M}^2 (1.30). Ce résultat explique l'écart observé entre de la solution numérique et la solution incompressible (figure 5.3). Ce problème étant identifié, Guillard et Viozat dans un premier temps, puis d'autres auteurs [29, 107], ont proposé des modifications pour retrouver les bonnes amplitudes de fluctuations de pression à bas Mach. Nous allons maintenant les présenter.

5.1.4 Les schémas compressibles bas Mach

Le schéma Guillard et Viozat

Le premier correctif a été proposé par Guillard and Viozat [40], qui ont développé une méthode basée sur un pré-conditionnement de la matrice de dissipation du système, inspiré par les travaux de Turkel [122]. Le flux est ainsi transformé en :

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{q}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_j)}{2} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{P}(\mathbf{q}_{ij})^{-1} |\mathbf{P}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}, \mathbf{n}_{ij})| \Delta_{ij} \mathbf{q} \quad (5.21)$$

Avec \mathbf{P} la matrice de préconditionnement proposée par Turkel, qui s'écrit en variables primitives :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Avec β un petit paramètre fonction du nombre de Mach dont l'expression pourra être trouvée dans [122]. Ce traitement a pour effet de modifier les valeurs propres de la matrice de dissipation. De manière analogue à ce qui a été vu pour le schéma de Roe non préconditionné, Guillard et Viozat ont développé asymptotiquement ce nouveau système. Il en ressort que plusieurs termes des équations de quantité de mouvement et d'énergie changent d'échelle,

en particulier le terme en $\Delta_{ij}U^{(0)}$ de l'équation (5.19). On obtient alors pour la quantité de mouvement à l'ordre $1/\hat{M}$ (5.17b) :

$$\sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(0)} \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.23)$$

On retrouve le même comportement que pour le cas discret, à savoir, des fluctuations de pression à l'ordre 2 :

$$p(x, t) = p^{(0)}(t) + \hat{M}^2 p^{(2)}(x, t) \quad (5.24)$$

Nous ne présenterons pas de résultats numériques obtenus avec ce schéma, car associé à une discrétisation temporelle explicite, Dellacherie [29] montre qu'il est restreint par une condition CFL en \hat{M}^2 :

$$\Delta t \leq \frac{\hat{M}^2 \Delta x}{c} \quad (5.25)$$

À bas nombre de Mach, le pas de temps devient donc trop restrictif pour réaliser en pratique une simulation explicite en temps avec ce flux.

Le correctif de Dellacherie

Plus récemment, Dellacherie [29] a remarqué qu'il suffisait de supprimer les termes en $p^{(1)}$ à l'ordre $1/\hat{M}$ de l'équation de quantité de mouvement (5.15b) pour arriver à un résultat similaire. Il propose une modification du schéma original qui s'écrit très simplement :

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{n}_{ij})^{mod} = \mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{n}_{ij}) + (\theta_{ij} - 1) \frac{\rho_{ij} c_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}] \mathbf{n}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Où $\theta_{ij} = \theta_{ij}(\hat{M}) = \min(\hat{M}, 1)$. Cela revient à ajouter le terme adimensionné

$$\frac{(\theta_{ij} - 1)}{2\hat{M}} \rho_{ij} c_{ij} [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}] \mathbf{n}_{ij} \quad (5.27)$$

aux équations de quantité de mouvement (5.15b). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\hat{M}^2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j \mathbf{n}_{ij} + \\
& \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U\mathbf{n} + u)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \theta_{ij} \rho_{ij} c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U + \\
& \delta \frac{d}{dt} \rho_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_j u_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) u_{ij} - \rho_{ij} |U_{ij}| \mathbf{n}_{ij}^\perp \Delta_{ij} V + \\
& \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} u_{ij} \Delta_{ij} U = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Lorsque le nombre de Mach diminue, le terme en $\theta_{ij} \rho_{ij} c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U$ disparaît. Ainsi à l'ordre $1/\hat{M}$, ce résultat se réduit à :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U^{(0)}\mathbf{n} + u^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \tag{5.29}$$

Or $\Delta_{ij} p^{(0)} = 0$ par réutilisation du lemme (3.1) de [40] et la pression d'ordre un n'admet pas de fluctuation en espace. On retrouve alors bien le comportement du système continu.

Le correctif de Rieper

Nous remarquerons enfin que Rieper [107] propose une modification légèrement différente de ce qui est proposé par Dellacherie, en remplaçant le saut de vitesse à l'interface :

$$\Delta \mathbf{U}_{ij} \Rightarrow \min(\hat{M}_{ij}, 1) \Delta \mathbf{U}_{ij} \tag{5.30}$$

Ceci a pour effet de faire changer d'ordre les termes en $\Delta \mathbf{U}$ dans le développement asymptotique. On retrouve les mêmes propriétés sur l'ordre des fluctuations de pression (5.24). De plus, l'expérience numérique montre que l'on retrouve bien la forme de la solution incompressible quand le nombre de Mach diminue figure 5.4. Selon [107] cette approche a en plus l'avantage de conserver une partie du décentrement dans l'équation du moment. Ceci à pour effet de dissiper le problème connu sous le nom de découplage en damier. En effet, l'analyse faite par Dellacherie [29] en considérant les équations d'Euler linéarisées montre que l'énergie présente dans ces modes est donnée par :

$$E = |u|^2(t=0) e^{\left(-\frac{8\nu_u t}{\Delta x^2} \right)} \tag{5.31}$$

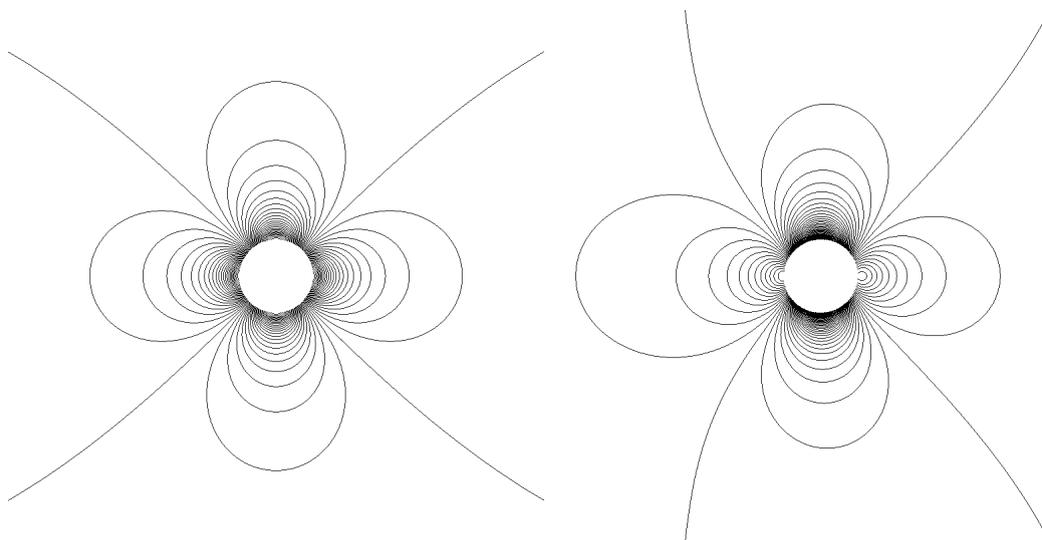


FIGURE 5.4 – Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe modifié avec le correctif proposé par Rieper [107] avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2 \cdot 10^{-6}; 7 \cdot 10^{-7}]$

Avec ν_u le coefficient de dissipation numérique donné dans [29] et [107] pour les schémas suivants :

$$\nu_u = \begin{cases} \frac{c\Delta x}{2\hat{M}} & \text{Roe [110] et Guillard \& Viozat [29]} \\ \frac{c\Delta x}{2} & \text{Roe Rieper [107]} \\ 0 & \text{Roe Dellacherie [29]} \end{cases} \quad (5.32)$$

Rieper avance alors que son schéma dissipe les modes en damier contrairement au schéma de Dellacherie. Nous n'avons cependant pas pu observer ce comportement car ce phénomène ne se produit pas sur notre cas test, et ce quel que soit le schéma utilisé.

5.1.5 Le cas particulier des maillages triangulaires

Les résultats précédents ont été obtenus sur des maillages quadrangulaires. Cependant il existe un cas particulier pour lequel les solveurs compressibles donnent de bons résultats à bas Mach. En effet il est montré par Rieper and Bader [108] puis de manière plus générale et plus simple par Guillard [38] que l'ordre des fluctuations de pression est toujours correct si le maillage considéré est triangulaire ou tétraédrique. Plus précisément :

Proposition 3. La convergence de la solution incompressible vers la solution compressible est assurée si le nombre de voisins d'une cellule est égal au nombre de degrés de liberté dans la cellule.

Démonstration. En effet si l'on considère les termes à l'ordre 1 de l'équation (5.15a) :

$$\sum_{j \in \nu(i)} \frac{\Delta_{ij} p^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + \rho_j^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.33)$$

En soustrayant $\mathbf{u}^{(0)} \cdot \sum_{j \in \nu(i)} \mathbf{n}_{ij} = 0$ et $p^{(1)} \cdot \sum_{j \in \nu(i)} \mathbf{n}_{ij} = 0$ à (5.33) on obtient le système :

$$\sum_{j \in \nu(i)} \left(\Delta_{ij} p^{(1)} - \Delta_{ij} \mathbf{U}^{(0)} \right) = 0 \quad (5.34a)$$

$$\sum_{j \in \nu(i)} \left(\Delta_{ij} p^{(1)} - \Delta_{ij} \mathbf{U}^{(0)} \right) \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.34b)$$

En utilisant les lemmes (2.3) et (2.4) de [38] il est montré que sur un maillage triangulaire ou tétraédrique ce résultat implique :

$$\Delta_{ij} p^{(1)} = \Delta_{ij} \mathbf{U}^{(0)} = 0 \quad (5.35)$$

Et la pression d'ordre 1 est bien constante en espace :

$$p(x, t) = p^{(0)}(t) + \hat{M}^2 p^{(2)}(x, t) \quad (5.36)$$

□

C'est ce comportement particulier qui a inspiré la modification du schéma de Roe proposée par Rieper [107]. On présente figure 5.5 les résultats obtenus avec la bibliothèque AEROSOL sur le cas test du cylindre avec un maillage triangulaire et une discrétisation spatiale du premier ordre. On constate que l'on retrouve une forme correcte de la solution figure 5.5.

Pour résumer ces résultats, on présente figure 5.6 l'erreur L^2 sur la pression par rapport à la solution incompressible en fonction du nombre de Mach. On constate qu'à l'ordre 1 le schéma LMRoe de Rieper ou le schéma de Roe sur maillage triangulaire présente une meilleure convergence en Mach que le schéma de Roe.

5.1.6 L'influence de la montée en ordre

La méthode de Galerkin discontinu permettant de définir un ordre de discrétisation spatiale arbitraire (chapitre 4) nous avons voulu tester l'influence de la montée en ordre sur le cas test du cylindre avec le schéma de Roe. Les résultats obtenus sont présentés figure 5.7 pour un nombre de Mach de 10^{-3} et un nombre de degrés de liberté constant.

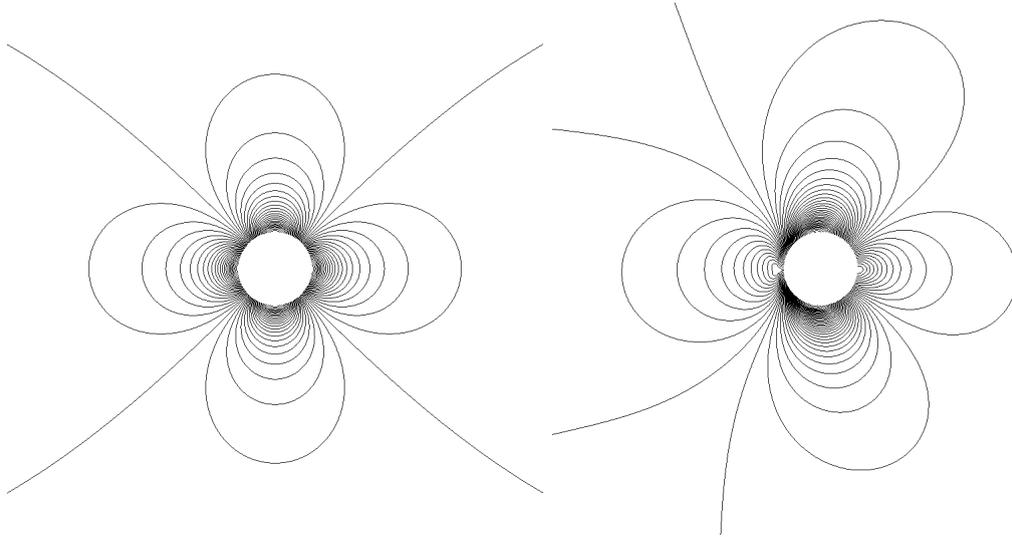


FIGURE 5.5 – Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage triangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-1.6 \cdot 10^{-6}; 5.8 \cdot 10^{-7}]$

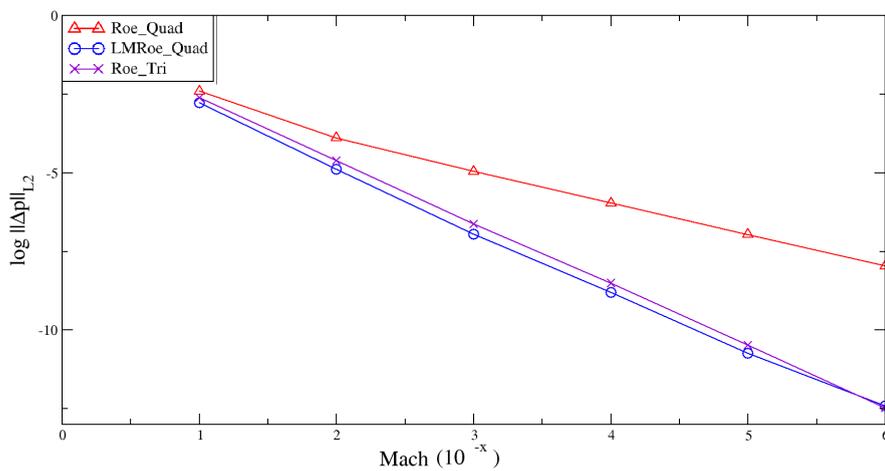


FIGURE 5.6 – Erreur L^2 sur la pression par rapport à la solution incompressible en fonction du nombre de Mach à l'ordre 1

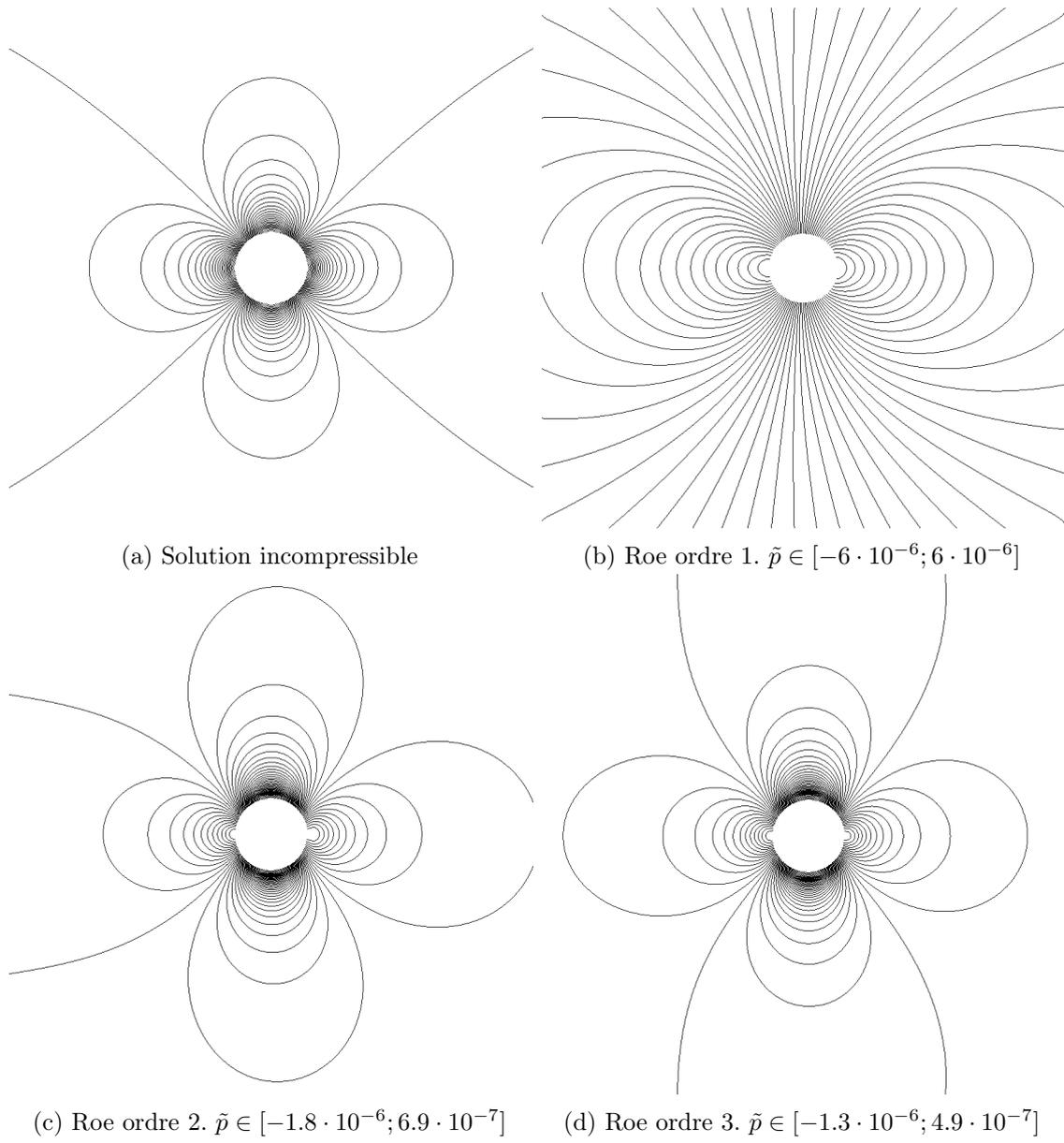


FIGURE 5.7 – Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le schéma de Roe pour différents ordre de discrétisation spatiale sur maillage quadrangulaire avec $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible.

On remarque que la solution tend à converger vers la solution incompressible quand l'ordre de la discrétisation augmente. Cependant, Nigro [92] montre que sur le cas test du profile NACA0012, la montée en ordre jusqu'à l'ordre 3 ne suffit pas à capturer une solution correcte. Nous avons donc voulu tester le schéma LMRoe lorsque l'on monte en ordre avec la méthode de Galerkin discontinue. Cependant ce solveur ne nous permet pas d'obtenir un résultat pour un ordre de discrétisation spatiale égale à deux. La méthode est alors instable, et ce, même pour des CFL dégradées par rapport à la théorie dans le cas linéaire de Cockburn and Shu [25]. Cette explosion du schéma intervient lors de la phase transitoire entre la solution initiale et la solution convergée. Or cette phase est instationnaire, notamment à cause de la propagation d'une onde se réfléchissant sur le cylindre. Dans la section suivante, nous porterons donc notre attention sur la capacité des schémas modifiés présentés ci-dessus à simuler un écoulement instationnaire et en particulier la propagation d'une onde acoustique.

5.2 Écoulements bas Mach instationnaires

Les résultats présentés dans la section précédente concernent le cas d'écoulement stationnaire. Cependant, les difficultés observées avec le flux numérique LMRoe à l'ordre 2, ainsi que notre sujet d'étude (chapitre 2) qui traite d'écoulements turbulents nous amène à nous questionner sur la robustesse de notre méthode numérique dans le cas instationnaire. De plus, dans la continuité des travaux de Florenciano [34], il est envisagé dans le futur de réaliser des simulations avec forçage acoustique avec AEROSOL. Pour ces raisons, nous avons voulu étudier le comportement des schémas présentés ci-dessus dans la situation où l'écoulement est perturbé par une onde acoustique. Il existe à ma connaissance très peu d'études sur le sujet. Dans le cas de l'utilisation de solveurs de pression [90], Moguen et al. [83] montre que le flux numérique proposé par Liou [64] ne permet pas de propager une onde instationnaire correctement. Dans le cas de l'utilisation de solveur densité il n'existe à ma connaissance aucun résultat à l'ordre élevé dans la littérature, en particulier avec la méthode de Galerkin discontinue.

5.2.1 Présentation du cas test

Afin de tester l'aptitude des flux numériques pour le bas Mach à propager correctement une information acoustique, on définit un cas test 1D de propagation d'une onde instationnaire imposée à gauche du domaine, sur un écoulement de référence bas Mach. Le domaine mesure un mètre de long et est divisé en 500 cellules. L'écoulement de référence est à Mach $9 \cdot 10^{-4}$

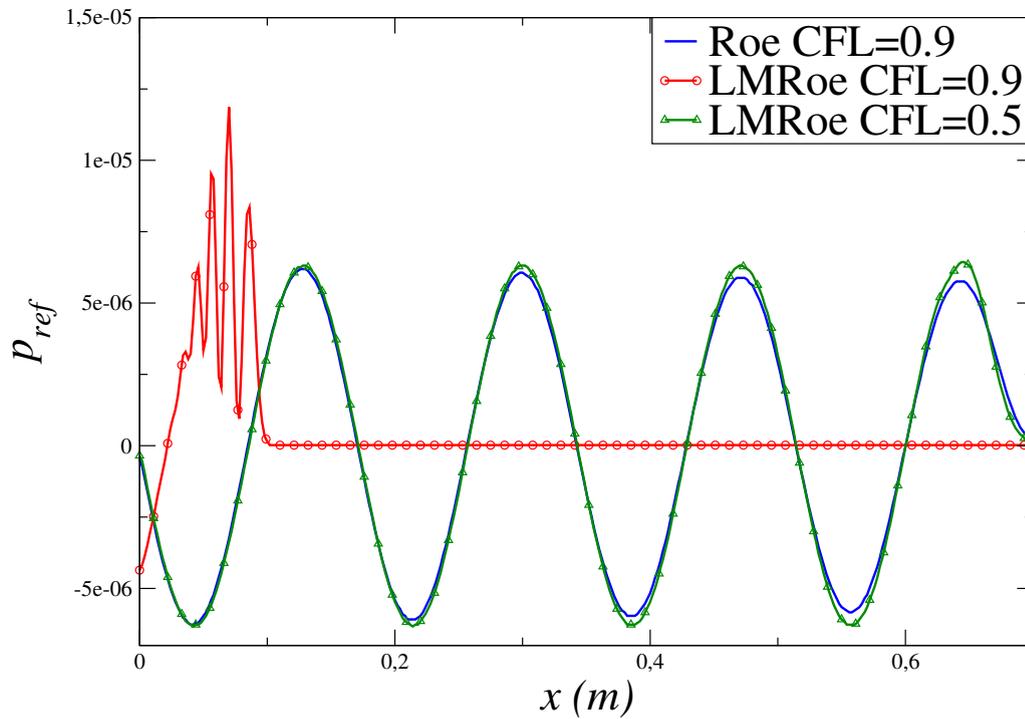


FIGURE 5.8 – Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de base bas Mach avec les solveurs de Roe et LMRoe à l'ordre 1 pour plusieurs CFL

avec les variables :

$$\rho_{\infty} = 1.2046 \text{ kg.m}^{-3}, \quad u_{\infty} = 0.30886 \text{ m.s}^{-1}, \quad p_{\infty} = 101\,300 \text{ Pa}$$

L'oscillation imposée à gauche est définie par :

$$u(t) = U [1 + A \sin(2\pi ft)] \quad (5.37)$$

Avec :

$$U = 0.30886 \text{ m.s}^{-1}, \quad A = 10^{-2}, \quad f = 2.10^3 \text{ Hz}$$

5.2.2 Comportement des flux numériques pour l'instationnaire

On présente figure 5.8 les résultats obtenus sur la cas test avec le flux numérique de Roe et LMRoe pour la pression de référence :

$$p_{ref} = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \quad (5.38)$$

On constate ici que si le solveur de Roe est stable pour une CFL de 0.9 comme on pouvait l'espérer au vu des résultats dans [25], le schéma LMRoe ne l'est pas. Il faut diviser le pas

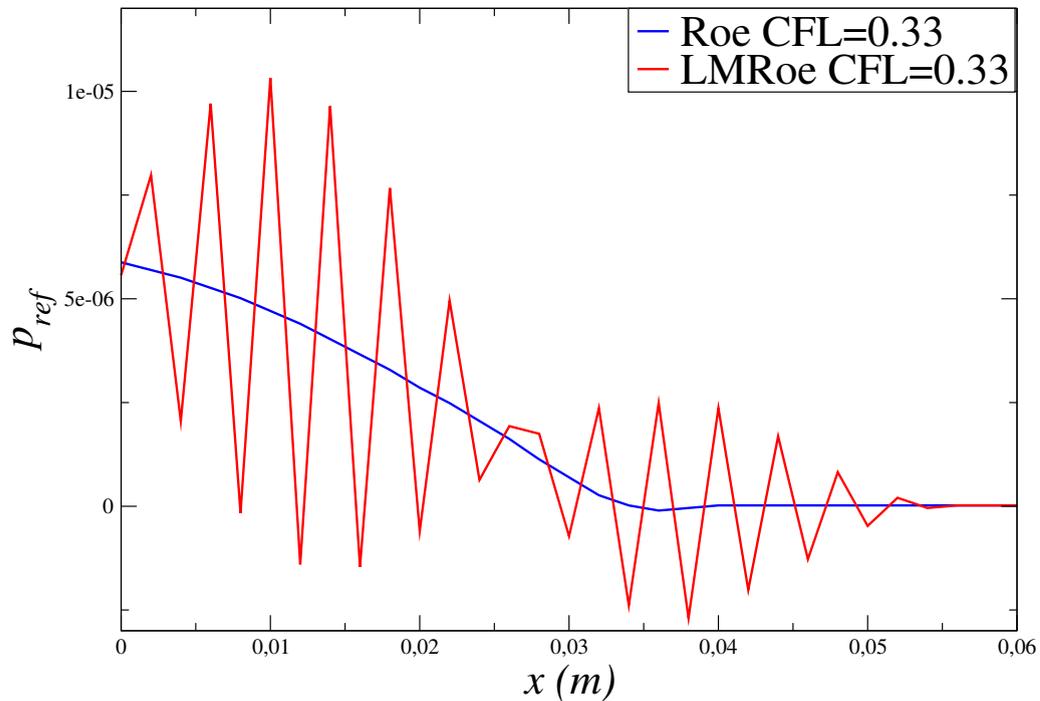


FIGURE 5.9 – Propagation d'une oscillation acoustique sur un écoulement de base bas Mach avec les solveurs de Roe et LMRoe à l'ordre 2

de temps par deux pour stabiliser le schéma. De plus, ce phénomène s'amplifie lorsque l'on monte en ordre figure 5.9. En effet à l'ordre 2 nous n'obtenons pas de résultat correct et ce même en divisant la CFL par deux.

5.2.3 Flux numériques avec termes inertiels

Au cours de cette étude sur le comportement des flux numériques pour le calcul d'écoulement bas Mach instationnaire, une parenthèse a été faite en considérant une méthode numérique de type correction de pression [82]. Moguen et al. [82] montrent en effet que dans ce contexte, les flux de type schémas de Godunov ne propagent pas correctement l'information acoustique.

Afin de corriger ce comportement il est alors envisagé de considérer les termes temporels des équations caractéristiques (1.25) lors de la dérivation du flux de Liou [63]. Les termes de décentrement en vitesse sont alors modifiés et dépendent de la dérivée temporelle de la vitesse [84]. Cette modification du flux permet l'obtention d'une solution correcte sur le cas test présenté. En particulier, il est montré dans Moguen et al. [84] que l'énergie acoustique est préservée au cours de la simulation. Notre contribution à ce travail a consisté à réaliser tous les calculs de type problème de Riemann bas Mach avec le flux numérique AUSM-IT, grâce à un code personnel. Cependant du fait de l'utilisation d'une méthode d'intégration temporelle semi-implicite et de la spécificité de ce type de schéma, nous n'avons pas pu étudier sa stabilité ni pu le tester dans la bibliothèque AEROSOL et donc dans un contexte

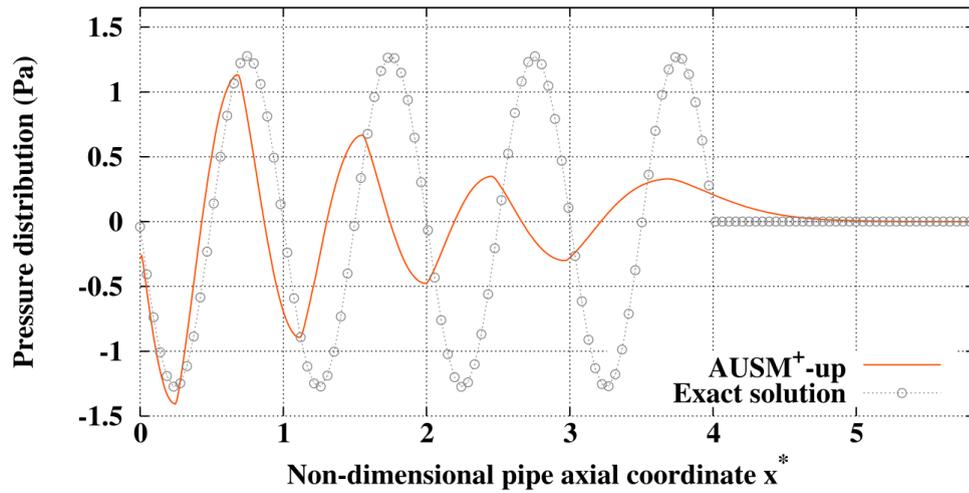


FIGURE 5.10 – Propagation d’une oscillation acoustique sur un écoulement de référence bas Mach avec le flux AUSM+ [63] et un algorithme de type correction de pression. Tirée de [84].

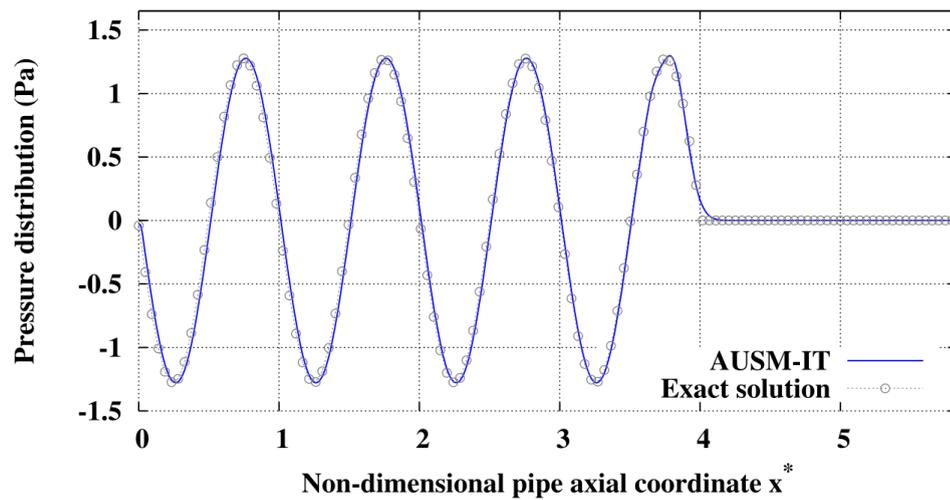


FIGURE 5.11 – Propagation d’une oscillation acoustique sur un écoulement de référence bas Mach avec le flux AUSM-IT [84] et un algorithme de type correction de pression. Tirée de [84].

Galerkin discontinu. Ce schéma ne sera donc plus considéré par la suite. Pour plus de détail le lecteur est renvoyé à l'annexe A.

5.3 Construction d'un nouveau flux numérique

Suite aux problèmes rencontrés à l'ordre 2 sur la cas test du cylindre section 5.1 et au constat section 5.2 de difficultés pour les flux numériques modifiés [29, 107] à propager de l'information acoustique dans l'écoulement, nous proposons dans cette section de développer un nouveau schéma. Notre objectif est d'obtenir un flux numérique compressible et précis à bas Mach, stable en explicite, à la fois pour les phénomènes stationnaires et instationnaires. Pour cela nous ferons dans un premier temps une analyse similaire à celle conduite dans [40] en considérant une échelle de temps supplémentaire, l'échelle de temps acoustique, pour obtenir une discrétisation du système d'ondes du premier ordre présenté au chapitre 1 (1.51). Nous travaillerons ensuite dans le cas simplifié de ce système linéaire afin d'étudier la stabilité des différents schémas présentés jusqu'à présent. Nous tirerons des conclusions de cette analyse pour proposer un nouveau schéma.

5.3.1 Développement asymptotique à deux échelles des équations semi-discrétisées

Pour rappel de ce qui à été présenté dans le cas continu, on considère en plus de l'échelle de temps convective, une seconde échelle de temps : $\tau = t/\hat{M}$ caractéristique du temps de propagation de l'information acoustique. La dérivée temporelle à x et \hat{M} constants devient :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{M}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Nous allons maintenant effectuer un développement asymptotique des équations d'Euler semi-discrétisées avec différents flux numériques.

5.3.1.1 Le schéma de Roe

On effectue un développement asymptotique à deux échelles des équations (5.15) :

L'équation de la quantité de mouvement (5.15b) à l'ordre \hat{M}^{-2} nous donne :

$$\sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad (5.39)$$

Le système complet à l'ordre \hat{M}^{-1} s'écrit quant à lui :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_i^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\Delta_{ij} p^{(0)}}{c_{ij}^{(0)}} = 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left(\frac{(U^{(0)} \mathbf{n} + \mathbf{u}^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} + \rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U^{(0)} \right) = 0 \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i e_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{h_{ij}^{(0)}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \quad (5.42)$$

Et à l'ordre \hat{M}^0 :

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_i^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_i^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ \frac{\Delta_{ij} p^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + \rho_j^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}^{(0)}| \left(\Delta_{ij} \rho^{(0)} - \frac{\Delta_{ij} p^{(0)}}{(c_{ij}^{(0)})^2} \right) \right\} = 0 \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} & \delta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(2)} \mathbf{n}_{ij} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ \frac{((U \mathbf{n} + \mathbf{u})_{ij} \Delta_{ij} p)^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + (\rho_{ij} c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U)^{(1)} + \rho_j^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ |U_{ij}^{(0)}| \left(\Delta_{ij} \rho^{(0)} - \frac{\Delta_{ij} p^{(0)}}{(c_{ij}^{(0)})^2} \right) \mathbf{u}_{ij}^{(0)} - \rho_{ij}^{(0)} |U_{ij}^{(0)}| \mathbf{n}_{ij}^\perp \Delta_{ij} V^{(0)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i e_i)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i e_i)^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ \frac{(h_{ij} \Delta_{ij} p)^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + (\rho_j^{(0)} e_j^{(0)} + p_j^{(0)}) \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right\} = 0 \quad (5.45)$$

L'équation d'état (1.12) se développe respectivement aux ordres \hat{M}^0 et \hat{M}^1 :

$$p_i^{(0)} = (\gamma - 1) (\rho_i e_i)^{(0)} \quad (5.46)$$

$$p_i^{(1)} = (\gamma - 1) (\rho_i e_i)^{(1)} \quad (5.47)$$

Proposition 4. Si la pression à l'ordre 0 est constante en espace aux bords et que sa valeur \bar{p}_0 à $\tau = 0$ soit uniforme, alors on montre que :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p^{(0)} = 0 \quad (5.48)$$

Démonstration. Remplaçons le terme en $(\rho_i e_i)^{(0)}$ dans l'équation de l'énergie à l'ordre \hat{M}^{-1} (5.42) en utilisant (5.46) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{h_{ij}^{(0)}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \quad (5.49)$$

On considère un maillage une dimension de N cellules de taille δ . On définit les termes :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{h_{i,i+1}^{(0)}}{c_{i,i+1}^{(0)}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \phi_{i-\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{h_{i,i-1}^{(0)}}{c_{i,i-1}^{(0)}} \geq 0 \quad (5.50)$$

On peut alors développer la somme dans (5.49) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} \frac{(p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)})}{\delta} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{(0)} \frac{(p_i^{(0)} - p_{i-1}^{(0)})}{\delta} \right) \quad (5.51)$$

On multiplie l'équation par $p_i^{(0)} - \bar{p}_0$ et on fait la somme sur l'ensemble des cellules :

$$\sum_{i=1}^N (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) \frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(0)} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) (p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)}) - \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{i-\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) (p_i^{(0)} - p_{i-1}^{(0)}) \quad (5.52)$$

On effectue alors un changement de variable pour la deuxième somme du membre de droite :

$$\sum_{i=1}^N (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) \frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(0)} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) (p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)}) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_{i+1}^{(0)} - \bar{p}_0) (p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)}) = 0 \quad (5.53)$$

$$= \frac{\phi_{N+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_N^{(0)} - \bar{p}_0) (p_{N+1}^{(0)} - p_N^{(0)}) - \frac{\phi_{1-\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_1^{(0)} - \bar{p}_0) (p_1^{(0)} - p_0^{(0)}) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)})^2 \quad (5.54)$$

En utilisant l'hypothèse $\nabla p^{(0)} = 0$ aux bords du domaine, l'équation (5.54) se réduit à :

$$\sum_{i=1}^N (p_i^{(0)} - \bar{p}_0) \frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(0)} = - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{(0)}}{2\delta} (p_{i+1}^{(0)} - p_i^{(0)})^2 \quad (5.55)$$

Par définition de $\phi^{(0)}$, le membre de droite est négatif. De plus on reconnaît dans le terme de gauche l'expression des variations en τ de la quantité $(p_i^{(0)} - \bar{p}_0)^2$. On en déduit que le terme $(p_i^{(0)} - \bar{p}_0)^2$ décroît au cours du temps acoustique. Or à $\tau = 0$, $(p_i^{(0)} - \bar{p}_0) = 0$. On a donc $\forall \tau, p_i^{(0)}(\tau) = \bar{p}_0$. \square

Proposition 5. En considérant la proposition 4 on peut écrire les équations de l'énergie à l'ordre \hat{M}^0 (5.45) et du moment à l'ordre \hat{M}^{-1} (5.41) sous la forme d'un système d'ondes semi-discret :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_i^{(1)} + \frac{\gamma c^{(0)2}}{\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\rho^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij}}{2} + \frac{c_{ij}^{(0)}}{2\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} p^{(1)} = -\frac{d}{dt} p^{(0)} \quad (5.56a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{\rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} U^{(0)} = 0 \quad (5.56b)$$

Démonstration. La proposition 4 nous donne $\frac{\partial}{\partial \tau} p^{(0)} = 0$, donc d'après (5.46) on a :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^{(0)} e^{(0)}) = 0 \quad (5.57)$$

L'équation (5.42) nous donne alors :

$$\Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \quad (5.58)$$

Et on déduit de (5.40) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho^{(0)} = 0 \quad (5.59)$$

Pour résumer on a :

$$p^{(0)}(x, t, \tau) = p^{(0)}(t), \quad \rho^{(0)}(x, t, \tau) = \rho^{(0)}(t) \quad (5.60)$$

En utilisant les relations :

$$h_{ij}^{(0)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{ij}^{(0)}}{\rho_{ij}^{(0)}} \quad (c_{ij}^{(0)})^2 = \frac{\gamma p_{ij}^{(0)}}{\rho_{ij}^{(0)}} \quad (5.61)$$

On réécrit le premier terme de la somme dans (5.45) :

$$\frac{(h_{ij} \Delta_{ij} p)^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} = \frac{h_{ij}^{(0)} \Delta_{ij} p^{(1)} + h_{ij}^{(1)} \Delta_{ij} p^{(0)}}{c_{ij}^{(0)}} = \frac{c_{ij}^{(0)}}{\gamma - 1} \Delta_{ij} p^{(1)} \quad (5.62)$$

Et en utilisant l'équation d'état, le second terme :

$$\rho_j^{(0)} e_j^{(0)} + p_j^{(0)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} c^{(0)2} \rho^{(0)} \quad (5.63)$$

L'équation sur l'énergie à l'ordre \hat{M}^0 devient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p^{(1)} + \frac{\gamma c^{(0)2}}{\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\rho^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij}}{2} + \frac{c_{ij}^{(0)}}{2\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} p^{(1)} = -\frac{d}{dt} p^{(0)} \quad (5.64)$$

Ensuite en utilisant $\Delta_{ij} p^{(0)} = 0$ on écrit les équations du moment à l'ordre \hat{M}^{-1} (5.41) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{\rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} U^{(0)} = 0 \quad (5.65a)$$

□

On retrouve alors un système équivalent à celui obtenu dans le cas continu (1.51). On remarque aussi que le décentrement dans ces équations semi-discrètes est une stabilisation classique pour les systèmes d'ondes du premier ordre [2]. Cette forme anti-diagonale du décentrement est notamment obtenue en considérant le schéma de Godunov exact. Cherchons maintenant à étudier les différences de comportement entre le schéma de Roe et le schéma LMRoe de Rieper Rieper [107].

5.3.1.2 Le flux LMRoe de Rieper

Le schéma proposé par Rieper, consiste à changer l'ordre du terme en ΔU . L'équation de l'énergie à l'ordre \hat{M}^0 (5.45) n'est pas affectée par ce changement. En revanche l'équation du moment à l'ordre \hat{M}^{-1} devient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U^{(0)} \mathbf{n} + \mathbf{u}^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} = 0 \quad (5.66)$$

Et le système (5.56) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p^{(1)} + \frac{\gamma c^{(0)2}}{\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\rho^{(0)} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij}}{2} + \frac{c_{ij}^{(0)}}{2\delta} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} p^{(1)} = -\frac{d}{dt} p^{(0)} \quad (5.67a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.67b)$$

On retrouve bien l'équation d'onde du premier ordre. Cependant, sur les équations du moment on a perdu le terme de dissipation en

$$\frac{\rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \Delta_{ij} U^{(0)} \quad (5.68)$$

La discrétisation est alors réduite à un terme centré. Nous allons chercher à comprendre les conséquences de la perte de ce terme. Pour cela, nous analyserons la stabilité L_2 de cette discrétisation du système d'onde avec une intégration temporelle explicite.

5.3.2 Analyse de stabilité du système d'ondes en formulation du premier ordre

En nous basant sur les travaux de Toulorge and Desmet [121] sur l'équation d'advection scalaire, nous allons réaliser une analyse de stabilité au sens de von Neumann du système d'onde en formulation du premier ordre en une dimension d'espace :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (5.69)$$

Nous utiliserons les discrétisations obtenues avec le schéma de Roe (5.56) et LMRoe (5.56) associées à la méthode de Galerkin discontinue et à une méthode d'intégration temporelle de type Runge-Kutta (4.52). Commençons par présenter la discrétisation spatiale du système.

5.3.2.1 Discrétisation par la méthode Galerkin discontinue

En reprenant l'équation (4.16) et en considérant un maillage \mathcal{M}_h de \mathbb{R} de cellules $\Omega_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ de taille δ , la formulation Galerkin discontinu à l'ordre p du problème (5.69) s'écrit sur une cellule :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \varphi_k^i \sum_{l=1}^{p+1} \partial_t \mathbf{q}_l^i \varphi_l^i dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x \varphi_k^i \mathbf{F} \left(\sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{q}_l^i \varphi_l^i \right) dx + \left[\varphi_k^i \sum_{l=1}^{p+1} \widehat{\mathbf{h}}_l \varphi_l^i \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0 \quad (5.70)$$

Avec $\widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{q}_h^+, \mathbf{q}_h^-, \mathbf{n})$ le flux numérique et \mathbf{q}^+ et \mathbf{q}^- , les valeurs de \mathbf{q}_h à l'interface entre deux cellules. En définissant les matrices de flux centré et de décentrement :

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c^2}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \frac{C_{11}}{2} & \frac{C_{12}}{2} \\ \frac{C_{21}}{2} & \frac{C_{22}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

Où C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} sont des coefficients à valeur réelle. Dans le cas de la discrétisation (5.56) par exemple on a :

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

Le flux numérique $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n})$ s'exprime alors de la manière la plus générale, ici en $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}_h^-, \mathbf{q}_h^+, \mathbf{n}) = \mathbf{M}_c \sum_{l=1}^{p+1} \left(\mathbf{q}_l^i \varphi_l^i(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathbf{q}_l^{i+1} \varphi_l^{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) \right) + \mathbf{M}_d \sum_{l=1}^{p+1} \left(\mathbf{q}_l^{i+1} \varphi_l^{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathbf{q}_l^i \varphi_l^i(x_{i+\frac{1}{2}}) \right) \quad (5.73)$$

On peut alors ré-écrire le système (5.70) sous forme matricielle :

$$\partial_t \mathbf{q}_l^i = (\mathbf{M}^i)^{-1} (\mathbf{K}^i \mathbf{q}_l^i - \mathbf{A}^i \mathbf{q}_l^{i+1} - \mathbf{B}^i \mathbf{q}_l^i - \mathbf{C}^i \mathbf{q}_l^{i-1}) \quad (5.74)$$

Où les matrices du système sont carrées, de taille $2(p+1)$ avec les coefficients des matrices pour chaque variables donnés par :

$$\mathbf{M}_{kl}^i = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \varphi_k^i \varphi_l^i dx$$

$$\mathbf{K}_{kl}^i = 2\mathbf{M}_c \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x \varphi_k^i \varphi_l^i dx$$

$$\mathbf{A}_{kl}^i = \mathbf{M}_d \varphi_k^i(x_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_l^{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$\mathbf{B}_{kl}^i = \mathbf{M}_c \left(\varphi_k^i(x_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_l^i(x_{i+\frac{1}{2}}) - \varphi_k^i(x_{i-\frac{1}{2}}) \varphi_l^i(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) - \mathbf{M}_d \left(\varphi_k^i(x_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_l^i(x_{i+\frac{1}{2}}) + \varphi_k^i(x_{i-\frac{1}{2}}) \varphi_l^i(x_{i-\frac{1}{2}}) \right)$$

$$\mathbf{C}_{kl}^i = \mathbf{M}_d \varphi_k^i(x_{i-\frac{1}{2}}) \varphi_l^{i-1}(x_{i-\frac{1}{2}})$$

L'équation semi-discrète (5.74) peut s'exprimer dans la forme plus générale suivante :

$$\frac{d\mathbf{q}_l^i}{dt} = \mathbf{L}(t, \mathbf{q}_l^i(t)) \quad (5.75)$$

Avec \mathbf{L} l'opérateur de discrétisation spatiale. On remarque aussi que si l'on choisit les φ définis par :

$$\varphi_k(x) = \widehat{\varphi}_k \left(\frac{x - i\delta}{\delta} \right) \quad (5.76)$$

Où $\widehat{\varphi}_k$ est une base éléments finis sur $[0, 1]$, les matrices de \mathbf{L} peuvent s'exprimer de la même manière pour chaque élément. On a alors :

$$\frac{d\mathbf{q}_l^i}{dt} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{q}_l^i - \mathbf{A} \mathbf{q}_l^{i+1} - \mathbf{B} \mathbf{q}_l^i - \mathbf{C} \mathbf{q}_l^{i-1}) \quad (5.77)$$

5.3.2.2 La méthode de Runge-Kutta

Considérons maintenant la discrétisation en temps du système (5.75), par la méthode de Runge-Kutta (section 4.3.1) :

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{p}^{(i)} \quad (5.78)$$

Avec $\forall i = 1, \dots, s$:

$$\begin{aligned} t^{(i)} &= t^n + c_i \Delta t \\ q^{(i)} &= q^n + \Delta t \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p^{(k)} \\ p^{(i)} &= \mathbf{L}(t^{(i)}, q^{(i)}) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un système linéaire :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{q} \quad (5.79)$$

Ces schémas peuvent s'écrire sous forme polynomiale [9] :

$$\mathbf{q}^{n+1} = R(\Delta t \mathbf{L}) \mathbf{q}^n = \sum_k^s \frac{(\Delta t \mathbf{L})^k}{k!} \quad (5.80)$$

Appliqué au système (5.75) on obtient alors le système discret suivant :

$$\mathbf{q}_{i,l}^{n+1} = R(\Delta t \mathbf{L}) \mathbf{q}_{i,l}^n \quad (5.81)$$

5.3.2.3 Analyse de von-Neumann

On se propose maintenant d'effectuer l'analyse de la stabilité L^2 du système discrétisé (5.81). Cette analyse repose sur la méthode de von-Neumann. On projette \mathbf{q}^{n+1} dans l'espace de Fourier, soit avec $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{q}^{n+1}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{q}^{n+1}(x) e^{-j\xi x} dx \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{q}_i^{n+1}(x) e^{-j\xi x} dx \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{q}_{i,l}^{n+1} \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \end{aligned} \quad (5.82)$$

En utilisant la relation (5.81) on écrit :

$$\widehat{\mathbf{q}^{n+1}}(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} R(\Delta t \mathbf{L}) \mathbf{q}_{i,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \quad (5.83)$$

$$\text{Avec } R(\Delta t \mathbf{L}) = \left(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{L} + \frac{(\Delta t \mathbf{L})^2}{2!} + \dots + \frac{(\Delta t \mathbf{L})^N}{N!} + O(\Delta t)^{N+1} \right)$$

Proposition 6. Si l'on considère uniquement le terme \mathbf{L} on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{L} \mathbf{q}_{i,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx = \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{A} e^{j\xi \delta} - \mathbf{B} - \mathbf{C} e^{-j\xi \delta}) \mathbf{q}_{i,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \end{aligned} \quad (5.84)$$

Démonstration. D'après (5.74) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{L} \mathbf{q}_{i,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx = \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{q}_{i,l}^n - \mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n - \mathbf{B} \mathbf{q}_{i,l}^n - \mathbf{C} \mathbf{q}_{i-1,l}^n) \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \end{aligned} \quad (5.85)$$

Considérons le premier terme en $\mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{i-\frac{1}{2}\delta}^{(i+\frac{1}{2})\delta} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n \varphi_j(x) e^{-j\xi x} dx \end{aligned} \quad (5.86)$$

On se ramène à l'élément de référence $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ par le changement de variable $\hat{x} = \frac{x - i\delta}{\delta}$:

$$\begin{aligned} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n \hat{\varphi}_j(\hat{x}) e^{-j\xi \delta(\hat{x}+i)} \delta d\hat{x} \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{i+1,l}^n e^{-j\xi \delta i} \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\varphi}_j(\hat{x}) e^{-j\xi \delta \hat{x}} \delta d\hat{x} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Soit en posant $i' = i + 1$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} \mathbf{q}_{i',l} e^{-j\xi\delta(i'-1)} \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\varphi}_j(\hat{x}) e^{-j\xi\delta\hat{x}} \delta d\hat{x} \\
&= \sum_{i' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} e^{j\xi\delta} \mathbf{q}_{i',l} e^{-j\xi\delta i'} \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\varphi}_j(\hat{x}) e^{-j\xi\delta\hat{x}} \delta d\hat{x}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Puis en revenant à l'élément i par changement de variable inverse :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{A} e^{j\xi\delta} \mathbf{q}_{i,l} \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \tag{5.89}$$

De la même manière, pour le terme en $\mathbf{C}; \mathbf{q}_{i-1,l}^n$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{C} \mathbf{q}_{i-1,l} \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{C} e^{-j\xi\delta} \mathbf{q}_{i,l} \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx
\end{aligned} \tag{5.90}$$

□

Le système (5.83) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{q}}^{n+1}(\xi) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^{p+1} R \left(\Delta t \left[\mathbf{A} e^{j\xi\delta} + \mathbf{B} + \mathbf{C} e^{-j\xi\delta} \right] \right) \mathbf{q}_{i,l}^n \varphi_l(x) e^{-j\xi x} dx \\
&= R \left(\Delta t \left[\mathbf{A} e^{j\xi\delta} + \mathbf{B} + \mathbf{C} e^{-j\xi\delta} \right] \right) \widehat{\mathbf{q}}^n(\xi) \\
&= \mathbf{H}(\xi) \widehat{\mathbf{q}}^n(\xi)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Avec \mathbf{H} la matrice d'amplification du système. La stabilité de ce schéma est alors déterminée par la condition :

$$\|\mathbf{H}\| \leq 1 \tag{5.92a}$$

$$\Leftrightarrow \|R(\Delta t \mathbf{L})\| \leq 1 \tag{5.92b}$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in S_p(\mathbf{L}), \quad \|R(\Delta t \cdot \lambda)\| \leq 1 \tag{5.92c}$$

Avec R le polynôme du schéma d'intégration temporelle et λ les valeurs propres de la matrice \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} e^{j\xi h} + \mathbf{B} + \mathbf{C} e^{-j\xi h} \tag{5.93}$$

On effectue alors la recherche de la condition de CFL maximum respectant la condition de stabilité L^2 (5.92). Cette recherche s'effectue numériquement par dichotomie.

5.3.2.4 Résultats

Dans cette section, nous appliquerons l'analyse présentée ci-dessus aux systèmes (5.56) et (5.67) discrétisés en temps avec un schéma explicite. Nous en déduisons des conditions CFL en fonction de l'ordre de discrétisation spatiale et temporelle.

Configuration schéma de Roe

Dans le cas du schéma de Roe, on considère le système (5.56). Pour plus de lisibilité, on effectue le changement de variable : $p^{(1)} \Rightarrow p$ et $\rho^{(0)}\mathbf{u}^{(0)} \Rightarrow \mathbf{u}$, et on obtient le système suivant :

$$\partial_\tau p + \frac{c^2}{2} \sum \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + \frac{c}{2} \sum \Delta_{ij} p = 0 \quad (5.94a)$$

$$\partial_\tau \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum p_j \mathbf{n}_{ij} + \frac{c}{2} \sum \Delta_{ij} \mathbf{u} = 0 \quad (5.94b)$$

Soient les matrices (5.71) tel que :

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c^2}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

Les conditions de CFL maximum respectant (5.92) sont présentées au tableau 5.1. On constate que l'on retrouve les mêmes conditions que pour l'équation d'advection scalaire obtenues par Cockburn and Shu [25]. Les profils des valeurs propres de la matrice d'amplification du système à l'ordre 1 et 2 pour les CFL correspondantes sont donnés sur la figure 5.12.

k	0	1	2	3
$v = 1$	1.000	*	*	*
$v = 2$	1.000	0.333	*	*
$v = 3$	1.256	0.409	0.209	0.130
$v = 4$	1.392	0.464	0.235	0.145

TABLE 5.1 – CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la diffusion induite par le schéma de Roe

Configuration schéma de LMRoe

Dans le cas du schéma de LMRoe de Rieper [107], on obtient le système suivant :

$$\partial_\tau p + \frac{c^2}{2} \sum \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + \frac{c}{2} \sum \Delta_{ij} p = 0 \quad (5.96a)$$

$$\partial_\tau \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum p_j \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.96b)$$

$$(5.96c)$$

Soient les matrices (5.71) telles que :

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c^2}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad M_d = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

Les conditions de CFL obtenues sont présentées tableau 5.2. On remarque que dans cette configuration, elles sont dégradées pour les schémas en temps d'ordre 1 et 2.

k	0	1	2	3
$v = 1$	0.500	*	*	*
$v = 2$	1.000	0.029	*	*
$v = 3$	1.256	0.419	0.212	0.131
$v = 4$	1.392	0.464	0.235	0.145

TABLE 5.2 – CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la matrice de diffusion induite par le schéma LMRoe.

Les résultats obtenus donnent une explication du comportement du schéma LMRoe à l'ordre 2 observé section 5.1 et section 5.2. En pratique, à l'ordre 2 en temps et en espace, la condition de CFL imposée, combinée à la restriction liée au bas Mach (5.2) rend inutilisable ce schéma. Il apparaît nécessaire de chercher un nouveau flux numérique qui corrige ces défauts.

5.3.3 Un schéma stable et convergent pour le système d'ondes

Nous cherchons donc un schéma stable et convergent pour la formulation du système des ondes dans sa formulation au premier ordre. Pour cela, nous allons chercher de nouveaux coefficients pour la matrice de dissipation du flux numérique (5.71) qui permettent d'obtenir une meilleure condition de CFL.

Le choix des coefficients est guidé par plusieurs facteurs. Premièrement, nous devons tenir compte des résultats présentés dans [29] qui nous imposent une dissipation nulle en vitesse

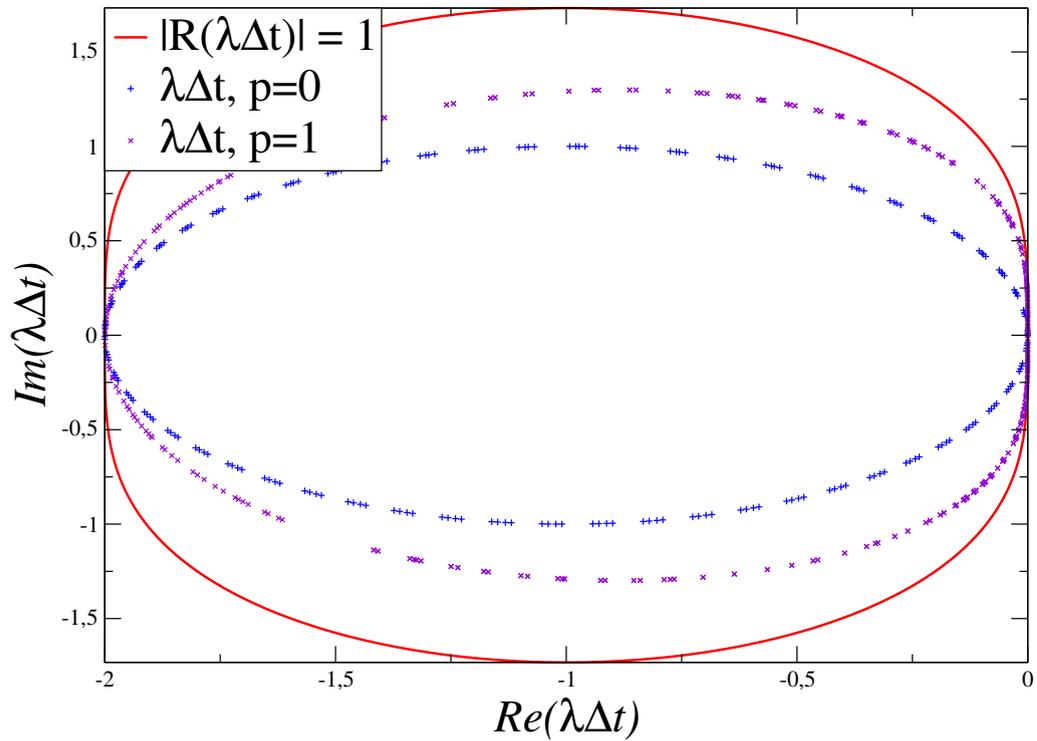


FIGURE 5.12 – Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le flux de Roe. Les valeurs propres de $\Delta t\mathbf{L}$ à l'ordre 1 et 2 pour une $CFL = 0.333$ sont contenues dans la région de stabilité $\|\mathbf{H}\| \leq 1$

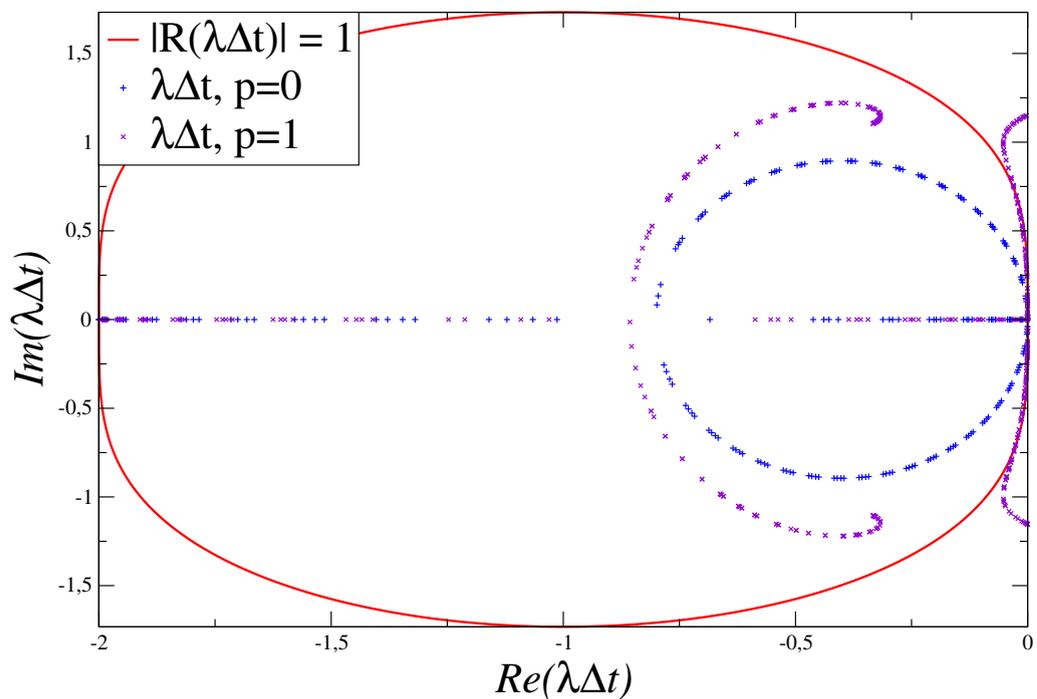


FIGURE 5.13 – Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le flux LMRoe. Les valeurs propres de $\Delta t\mathbf{L}$ à l'ordre 2 pour une CFL de 0.333 ne sont pas contenues dans la région de stabilité $\|\mathbf{H}\| \leq 1$

sur l'équation de la quantité de mouvement. Cela se traduit pour notre système d'ondes par $C_{11} = 0$. On cherche donc une matrice de décentrement de la forme :

$$\mathbf{M}_d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

Avec α , β et γ des coefficients à déterminer. De plus, on cherche à obtenir une matrice de diffusion positive afin d'avoir un flux dissipatif, et en se basant sur l'étude de Ainsworth et al. [2] on a choisi de considérer des coefficients sur l'anti-diagonale de signe opposé. Le polynôme caractéristique de la matrice est donné par :

$$P(X) = X^2 - \gamma X - \alpha\beta \quad (5.99)$$

Les valeurs propres de \mathbf{M}_d sont à valeurs réelles si et seulement si :

$$\Delta = (-\gamma)^2 + 4\alpha\beta \geq 0 \quad (5.100)$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 \geq -4\alpha\beta \quad (5.101)$$

$$(5.102)$$

α et β étant de signe opposé, en prenant α positif on a :

$$\alpha \geq 0 \quad (5.103)$$

$$\beta \leq 0 \quad (5.104)$$

$$\beta \geq -\frac{\gamma^2}{4\alpha} \quad (5.105)$$

Ensuite, on détermine numériquement les meilleurs coefficients en terme de stabilité. Les conditions CFL optimales sont obtenues avec :

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{c^2}{2} & c \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

Ce qui se traduit par la discrétisation suivante :

$$\partial_\tau \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum p_j \mathbf{n} + \frac{1}{2} \sum \Delta_{ij} p + \mathbf{0} = 0 \quad (5.107a)$$

$$\partial_\tau p + \frac{c^2}{2} \sum \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} + \frac{c}{2} \sum \Delta_{ij} p + -\frac{c^2}{2} \sum \Delta_{ij} \mathbf{u} = 0 \quad (5.107b)$$

Avec ces nouveaux coefficients on obtient les résultats présentés dans le tableau 5.3 et à la figure 5.14. On remarque que l'on retrouve exactement les mêmes conditions CFL que pour le flux de Roe. Ainsi, la CFL pour une discrétisation spatiale et temporelle d'ordre deux est

considérablement améliorée par rapport à celle pour le schéma LMRoe (tableau 5.2). Un

k	0	1	2	3
$v = 1$	1.000	*	*	*
$v = 2$	1.000	0.333	*	*
$v = 3$	1.256	0.409	0.209	0.130
$v = 4$	1.392	0.464	0.235	0.145

TABLE 5.3 – CFL pour des polynômes de degré k et des méthodes de Runge Kutta d'ordre v avec la nouvelle matrice de diffusion.

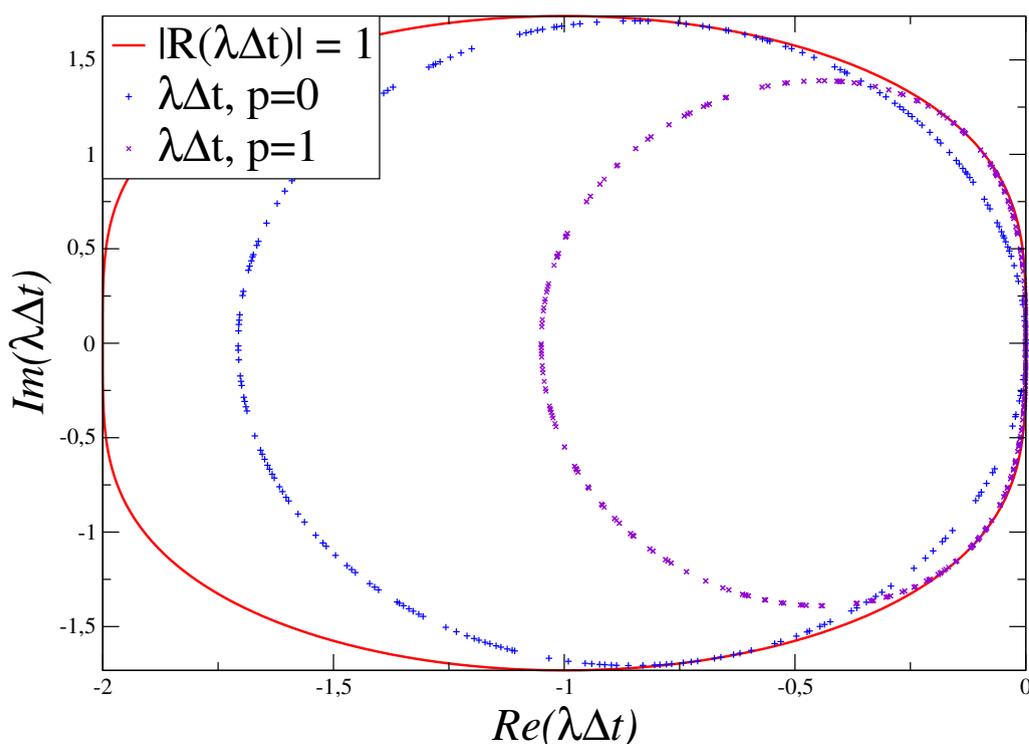


FIGURE 5.14 – Illustration de la condition de stabilité pour un schéma en temps RK2 et le nouveau flux. Les valeurs propres de $\Delta t\mathbf{L}$ à l'ordre 2 pour une CFL de 0.333 sont contenues dans la région de stabilité $\|\mathbf{H}\| \leq 1$

autre résultat intéressant est la comparaison des ordres de convergence de ces différents schémas. En effet une étude de convergence en maillage à l'ordre deux montre que :

Remarque. Contrairement au schéma de Roe et au schéma avec les nouveaux coefficients, le flux LMRoe ne présente pas un ordre de convergence optimal pour l'équation d'onde du premier ordre. Voir la figure 5.15.

Le nouveau terme de diffusion nous permet donc de retrouver des CFL proches des CFL optimales présentées dans [25] pour l'équation d'advection scalaire. De plus, on retrouve les bons ordres de convergence spatiale. Ce nouveau schéma est donc utilisable en pratique pour

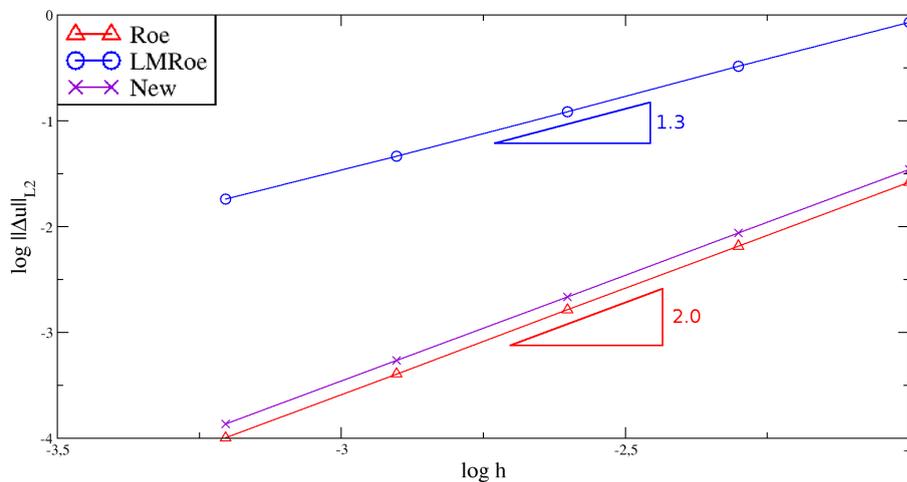


FIGURE 5.15 – Equation d'onde du premier ordre. Convergence des différents schémas pour une discrétisation spatiale du second ordre

réaliser des simulations numériques à l'ordre 2 avec la méthode de Galerkin discontinue. Il nous faut maintenant remonter aux équations d'Euler afin de déterminer un correctif pour les schémas de type Godunov qui permette les calculs bas Mach instationnaires.

5.3.4 Un nouveau flux numérique pour les écoulements compressibles instationnaires bas Mach

L'analyse précédente nous a permis de développer une nouvelle stabilisation pour l'équation des ondes du premier ordre, qui respecte la condition de terme en saut de vitesse nul pour l'équation sur la vitesse. Il convient maintenant de revenir au cas non linéaire des équations d'Euler. La méthode d'analyse utilisée n'étant plus valable dans ce cas, le bon comportement du schéma sera montré au travers d'expériences numériques.

5.3.4.1 Application aux équations d'Euler

On cherche maintenant à appliquer le correctif au système d'Euler. Pour cela, on va ajouter les termes dissipatifs définis précédemment aux équations semi-discrètes (5.15). On porte une attention particulière aux ordres auxquels sont ajoutés ces termes afin de retrouver notre système d'onde stabilisé dans le cas où l'on procéderait à un développement asymptotique à deux échelles.

Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse n'étant pas utilisée pour l'obtention du système d'onde du premier ordre (5.74), elle reste inchangée par rapport à (5.15) soit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}} + \\ & \delta \frac{d}{dt} \rho_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) + \\ & \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} U = 0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation (5.56b) est obtenue à partir de (5.41) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left(\frac{(U^{(0)} \mathbf{n} + \mathbf{u}^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} + \rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U^{(0)} \right) = 0 \quad (5.109)$$

Les différents travaux présentés dans [29, 40, 107] nous montrent qu'il est nécessaire de faire disparaître le terme en $\Delta_{ij} U^{(0)}$ afin d'assurer la convergence de la solution stationnaire compressible vers la solution incompressible quand le nombre de Mach tend vers zéro. De plus notre analyse sur le système linéaire (5.56) montre que dans ce cas, il faut ajouter un terme de décentrement en $\Delta_{ij} p^{(1)}$ afin d'améliorer la stabilité à l'ordre 2. Finalement (5.109) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i \mathbf{u}_i)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j^{(1)} \mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left(\frac{(U^{(0)} \mathbf{n} + \mathbf{u}^{(0)})_{ij}}{c_{ij}^{(0)}} \Delta_{ij} p^{(0)} + \cancel{\rho_{ij}^{(0)} c_{ij}^{(0)} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U^{(0)}} + \Delta_{ij} p^{(1)} \right) = 0 \quad (5.110)$$

Soit en remontant à l'équation de quantité de mouvement semi-discrète adimensionnée (5.15b) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\hat{M}^2} \sum_{j \in \nu(i)} p_j \mathbf{n}_{ij} + \Delta_{ij} p + \\
& \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{(U\mathbf{n} + u)_{ij}}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta_{ij} U + \\
& \delta \frac{d}{dt} \rho_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_j u_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) u_{ij} - \rho_{ij} |U_{ij}| \mathbf{n}_{ij}^\perp \Delta_{ij} V + \\
& \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} u_{ij} \Delta_{ij} U = 0
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Équation de conservation de l'énergie

L'équation (5.56a) est obtenue à partir de (5.45) :

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i e_i)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i e_i)^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ \frac{(h_{ij} \Delta_{ij} p)^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + (\rho_j^{(0)} e_j^{(0)} + p_j^{(0)}) \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right\} = 0 \tag{5.112}$$

L'ajout d'un terme de décentrement en $\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}$ la transforme en :

$$\begin{aligned}
& \delta \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_i e_i)^{(1)} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i e_i)^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \left\{ \frac{(h_{ij} \Delta_{ij} p)^{(1)}}{c_{ij}^{(0)}} + (\rho_j^{(0)} e_j^{(0)} + p_j^{(0)}) \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} (c_{ij}^{(0)})^2 \rho_{ij}^{(0)} \Delta_{ij} U^{(0)} = 0
\end{aligned} \tag{5.113}$$

Soit en remontant aux équations d'Euler semi-discrètes adimensionnées (5.15c) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\hat{M}} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{h_{ij} p}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \\
& \delta \frac{d}{dt} \rho_i e_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \nu(i)} (\rho_j e_j + p_j) u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} + c_{ij}^2 \rho_{ij} \Delta_{ij} U \\
& \frac{\hat{M}}{2} \sum_{j \in \nu(i)} \frac{U_{ij}^2}{c_{ij}} \Delta_{ij} p + \rho_{ij} c_{ij} U_{ij} \Delta_{ij} U + \rho_{ij} \frac{U_{ij}}{c_{ij}} h_{ij} \Delta_{ij} U + \\
& \frac{\hat{M}^2}{2} \sum_{j \in \nu(i)} |U_{ij}| \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta_{ij} p}{c_{ij}^2} \right) \left(\frac{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{2} \right) + \rho_{ij} |U_{ij}| V_{ij} \Delta_{ij} V = 0
\end{aligned} \tag{5.114}$$

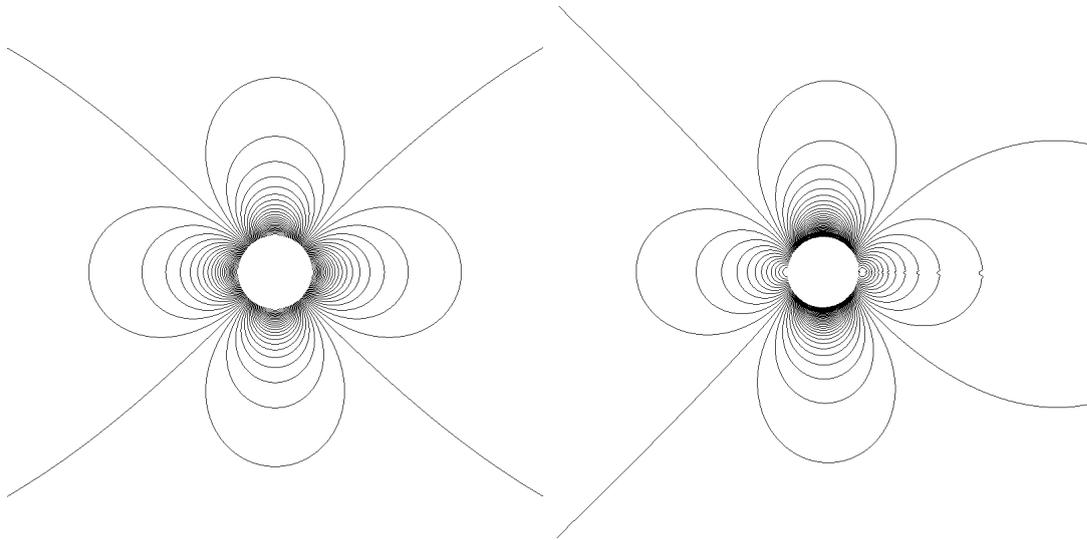


FIGURE 5.16 – Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le nouveau flux avec une discrétisation spatiale d'ordre 1 sur maillage quadrangulaire à $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2.5 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 10^{-7}]$

5.3.4.2 Résultats numériques

Afin de vérifier le comportement de notre schéma, nous avons de nouveau réalisé les cas test du cylindre 2D et de l'onde acoustique 1D. Dans le cas stationnaire, on retrouve à l'ordre 1 la forme de la solution incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers 0 (figure 5.16). De plus, la convergence en Mach est du même ordre que pour le schéma LMRoe figure 5.17. On observe cependant une légère différence pour des nombres de Mach inférieurs à 10^{-4} . Si l'on augmente l'ordre de discrétisation, le schéma reste stable et l'on obtient les résultats figure 5.18. Ce bon comportement est confirmé sur le cas test instationnaire où le schéma est stable figure 5.19. Toutefois, la CFL utilisée dans ce cas est inférieure à celle utilisée pour l'équation d'onde. En effet, en pratique, le schéma est stable pour une CFL de 0.2 au lieu de 0.333, ce qui est acceptable en comparaison avec les CFL requises avec le flux LMRoe.

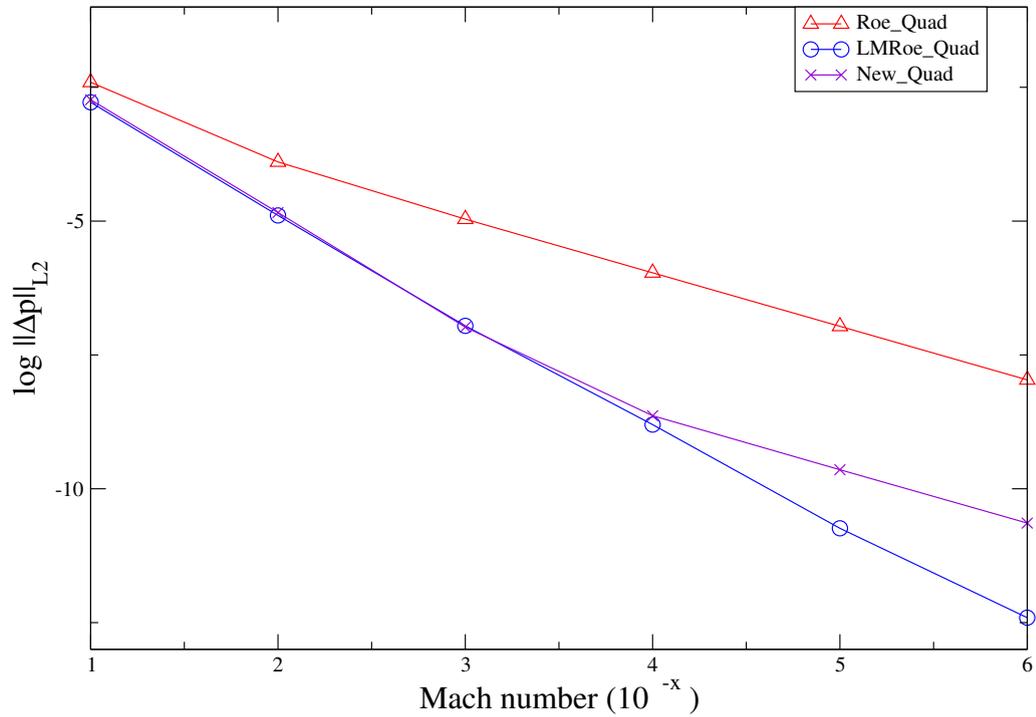


FIGURE 5.17 – Erreur L^2 sur la pression par rapport à la solution incompressible en fonction du nombre de Mach à l'ordre 1

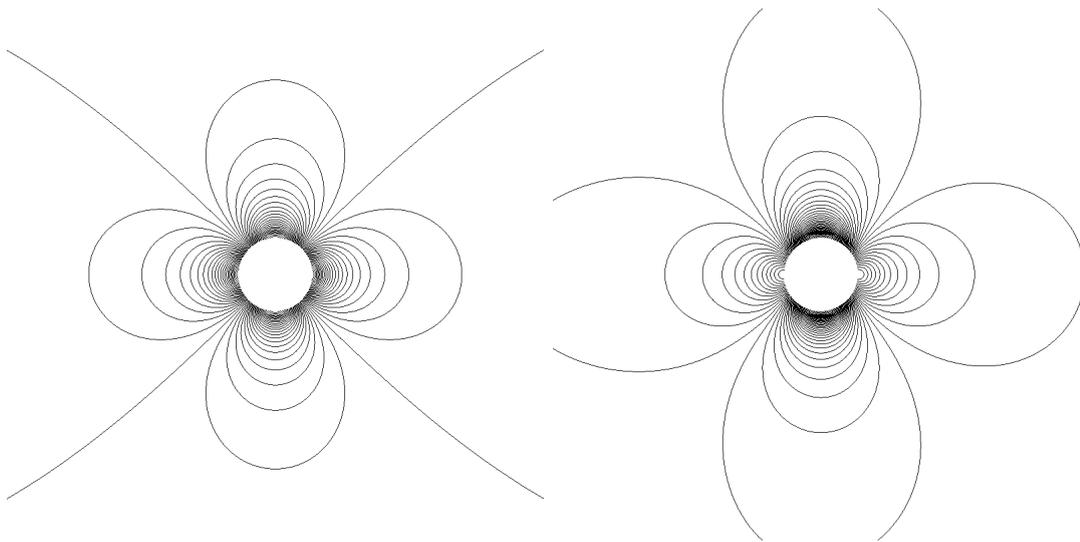


FIGURE 5.18 – Champs de variation de pression (5.9) obtenus avec le nouveau flux avec une discrétisation spatiale d'ordre 2 sur maillage quadrangulaire à $\hat{M} = 10^{-3}$, comparaison avec la solution incompressible (gauche). La figure de droite comprend cinquante iso-valeurs dans $[-2 \cdot 10^{-6}; 5.95 \cdot 10^{-7}]$

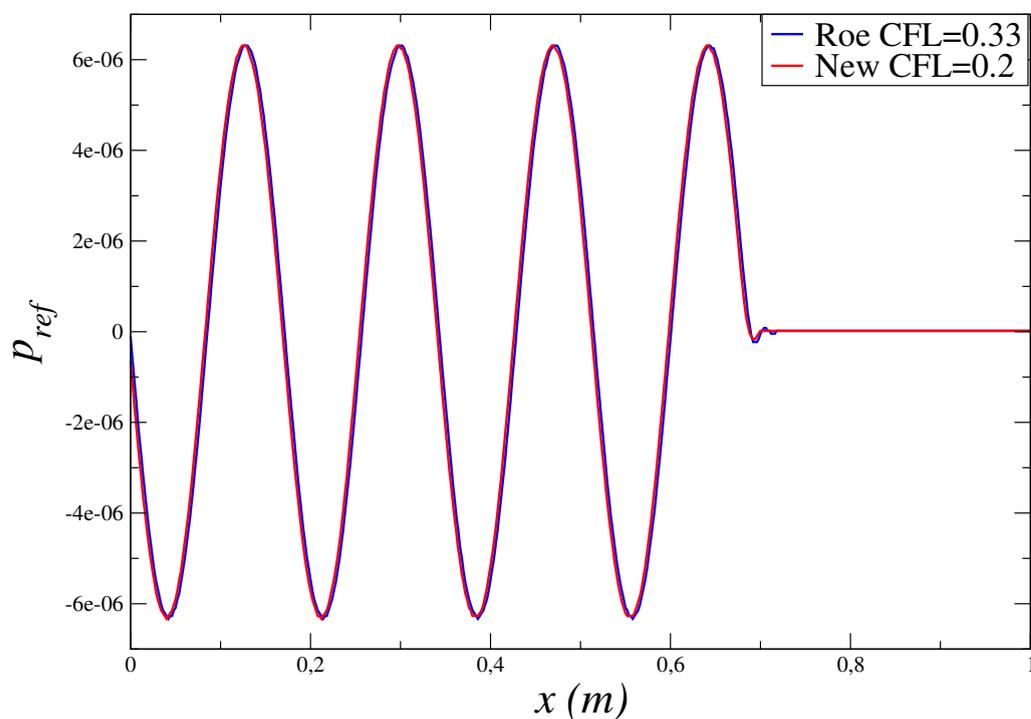


FIGURE 5.19 – Propagation d'une onde acoustique à l'ordre 2. $M = 10^{-3}$, $c = 343.12\text{m/s}$, $t = 2,5 \cdot 10^{-4}\text{s}$

5.4 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons rappelé que certains flux numériques pour les équations d'Euler échouent à calculer la solution lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. Dans un premier temps, en partant du travail de Guillard and Viozat [40], nous avons vu qu'une analyse asymptotique des équations semi-discrètes permet d'expliquer ce mauvais comportement dans le cas stationnaire. On constate en effet que les fluctuations de pression du système discret ne sont pas du même ordre de grandeur que celles des équation continues lorsque l'écoulement est à faible nombre de Mach. Nous avons alors présenté plusieurs modifications existantes, dont le principe est de modifier les termes de dissipation sur l'équation de quantité de mouvement afin de corriger ce problème.

Dans un second temps, nous avons testé ces flux numériques dans le cas instationnaire. Nous avons alors observé que ceux-ci ne sont pas stable aux mêmes CFL que les schémas non modifiés, et que leurs ordres de convergence sont inférieurs aux ordres optimaux. Pour étudier ce problème, nous nous sommes ramenés à un système d'ondes du premier ordre, obtenu en introduisant une nouvelle échelle de temps dans le développement asymptotique des équations d'Euler. En étudiant la stabilité L^2 des flux modifiés sur ce système par une analyse de type von-Neumann, nous avons pu expliquer les difficultés numériques rencontrées avec une discrétisation temporelle explicite. Nous proposons alors une nouvelle

modification des termes diffusifs qui stabilise le schéma pour le système d'ondes du premier ordre, tout en respectant les contraintes spécifiques au cas stationnaire. Le système à l'ordre zéro n'est pas discrétisé avec une pression centrée contrairement à ce qui est proposé dans [29, 107]. En remontant aux équations d'Euler, nous avons vérifié numériquement que nous obtenions également un flux numérique stable et précis à bas nombre de Mach à la fois pour des écoulements stationnaires et instationnaires en présence d'acoustique.

Quatrième partie

Étude numérique

Chapitre 6

Expériences numériques

La bibliothèque AEROSOL, présentée au chapitre 4, n'ayant jamais été utilisée pour la réalisation de simulations d'écoulements compressibles et visqueux, nous présentons donc deux tests de validation sur des cas académiques. Le premier cas est un écoulement de Poiseuille circulaire réalisé dans le cadre du stage de Belkhat [12]. Il permet de tester le comportement du code sur un écoulement laminaire ainsi que la prise en compte des géométries courbes. Le second cas est un vortex de Taylor-Green. Il permet de tester le comportement de la bibliothèque sur un écoulement turbulent.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la réalisation et à la présentation des résultats de deux simulations numériques directes de jet en écoulement transverse réalisées dans le cadre du projet européen IMPACT-AE. Les deux configurations étudiées, qui considèrent un jet cisailé isolé, avec ou sans giration en écoulement isotherme seront présentées section 3.

6.1 Écoulement de Poiseuille circulaire

On considère dans cette section deux configurations d'un écoulement de Poiseuille circulaire. La première bi-dimensionnelle et la seconde tri-dimensionnelle. L'essentiel des résultats présentés en suivant sont issus des travaux de stage de Belkhat [12].

6.1.1 Configuration en deux dimensions

Dans cette configuration, Belkhat cherche à établir un champ de vitesse stationnaire orthoradial au sein d'une couronne comme présenté sur la figure 6.1. On prendra

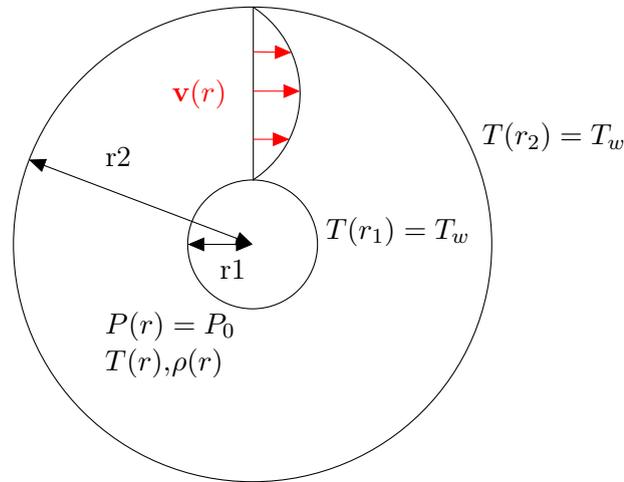


FIGURE 6.1 – Configuration du cas test de l'écoulement de Poiseuille circulaire

comme hypothèses une pression constante dans le domaine et une température imposée aux parois. Par rapport à l'hypothèse d'une masse volumique ρ constante, ce choix a l'avantage de découpler l'équation de quantité de mouvement avec l'équation d'énergie, ce qui permet, comme nous allons le voir, d'avoir un forçage indépendant de la température. En tenant compte de la condition de non glissement aux parois, on peut se proposer de chercher à établir une vitesse de la forme :

$$\mathbf{u} = v(r)\mathbf{e}_\theta = u_0(r - r_1)(r - r_2)\mathbf{e}_\theta \quad (6.1)$$

Compte tenu de la symétrie du problème, les quantités scalaires T et ρ ne dépendent que du rayon r . Le vecteur d'état solution correspondant est alors :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_0}{(\gamma-1)c_v T(r)} \\ -\rho(r)v(r)\sin(\theta) \\ \rho(r)v(r)\cos(\theta) \\ \rho(c_v T(r) + \frac{1}{2}v^2(r)) \end{pmatrix}$$

Paramètres	M	Re	Pr	ρ_{ref}	T_w	γ	cv
Valeurs	0.1	1	1	1 kg.m^{-3}	1 K	1.4	1

TABLE 6.1 – Paramètres physiques du cas test écoulement de Poiseuille 2D

En injectant cette solution dans les équations de Navier-Stokes, on calcule la force volumique permettant de forcer cet état [12] :

$$\begin{cases} f_r = -\frac{v^2}{r} \\ f_\theta = -\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] \end{cases} \quad (6.2)$$

Si l'on s'intéresse maintenant à l'équation de l'énergie, on déduit une équation différentielle portant sur la température :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{\kappa} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) \right] \quad (6.3)$$

Sous réserve d'avoir un coefficient de diffusion thermique non nul, un logiciel de calcul formel nous donne :

$$T(r) = \frac{\mu u_0^2}{\kappa} \left[-\frac{1}{16} r^4 + \frac{1}{2} r^2 r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1^2 r_2^2 (\log r)^2 \right] + k_2 \log(r) + k_1 \quad (6.4)$$

Où k_1 et k_2 sont des constantes d'intégration fixées par les conditions aux limites $T(r_1) = T(r_2) = T_w$

On initialise alors le calcul avec la solution exacte et on impose les conditions aux limites sur la température et sur la vitesse :

$$T(r_1) = T(r_2) = T_w$$

$$u(r_1) = u(r_2) = v(r_1) = v(r_2) = 0$$

Les paramètres de la simulation sont donnés tableau 6.1. Les résultats des simulations à l'ordre deux et à l'ordre trois sur des maillages triangulaires et quadrangulaires d'ordre élevé sont présentés tableau 6.2, tiré de Belkhayat [12]. L'ordre de convergence en fonction de l'erreur sur la vitesse est comparé suivant les différents cas. On remarque qu'à la condition d'avoir un maillage d'ordre suffisant, ces résultats sont aux ordres de convergence optimaux.

maillage	ordre 2	ordre 3
Quadrangles ordre 1	2.040	2.080
Quadrangles ordre 2	1.978	3.289
Triangles ordre 1	1.985	2.038
Triangles ordre 2	1.992	3.187

TABLE 6.2 – Ordres de convergence sur le cas test du Poiseuille en deux dimensions. Tiré de [12]

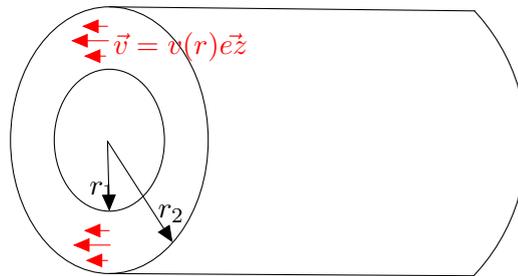


FIGURE 6.2 – Configuration du cas test de l'écoulement de Poiseuille circulaire en trois dimensions

6.1.2 Configuration en trois dimensions

Les résultats précédents ont été étendus à un cas en trois dimensions correspondant à un champ longitudinal dans un cylindre infini comme présenté sur la figure 6.2.

La solution est de la forme :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_0}{(\gamma-1)c_v T(r)} \\ 0 \\ 0 \\ \rho(r)v(r) \\ \rho(c_v T(r) + \frac{1}{2}v^2(r)) \end{pmatrix}$$

où :

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r}{r_1}\right) \left(1 - \frac{r}{r_2}\right)$$

De même que précédemment, l'expression de la force volumique nécessaire pour entretenir le mouvement est obtenue en injectant cette solution dans les équations de Navier-Stokes, on obtient :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu v_0}{\rho} \frac{(4r-r_1-r_2)}{(r_1 r_2 r)} \end{pmatrix}$$

Le champ de température est donné par :

$$T = -\frac{\mu v_0^2}{36r_1^2 r_2^2 \kappa} (9((r_1 + r_2)^2 + r^2)r^2 - 16(r_1 + r_2)r^3) + k_1 + k_2 \log(r)$$

Les constantes k_1 et k_2 étant choisies pour satisfaire les conditions aux limites. Comme pour les cas précédents, des conditions de températures imposées ont été retenues :

$$T(r_1) = T(r_2) = T_w$$

Belkhayat [12] obtient les résultats présentés tableau 6.3.

maillage	ordre 1	ordre 2	ordre 3
maillage d'ordre 1	0.7337	1.9888	2.1454
maillage d'ordre 2	0.6877	1.9758	3.1764

TABLE 6.3 – Ordre de convergence sur le cas test du Poiseuille en trois dimensions. Tiré de [12]

Les deux cas test présentés dans cette section illustrent la capacité de la bibliothèque à reproduire un écoulement visqueux laminaire. On relève aussi ici la nécessité d'utiliser des éléments dont la courbure est du même ordre que le degré d'approximation afin d'obtenir l'ordre de convergence optimal de la méthode.

6.2 Vortex de Taylor-Green

Le vortex de Taylor-Green est un cas test permettant d'étudier numériquement la production puis la décroissance de la turbulence dans un domaine cubique périodique. Ce test est particulièrement intéressant car il permet de s'affranchir du problème des conditions aux limites et considère une géométrie simple tout en faisant intervenir les mêmes phénomènes physiques que dans un écoulement turbulent. Ainsi, ce test est largement utilisé pour la validation de codes de calcul [19, 20]. L'écoulement initial transite vers un écoulement turbulent par étirement des vortex initiaux qui interagissent entre eux et conduisent à

l'apparition de petites structures au comportement chaotique. S'ensuit alors une phase de décroissance turbulente similaire à celle d'une turbulence homogène.

6.2.1 Initialisation

On considère pour le calcul un domaine périodique cubique $\Omega = [-\pi L, \pi L]^3$. L'écoulement est alors initialisé avec l'expression analytique [20] :

$$u(\mathbf{x}, 0) = V_0 \sin(x/L) \cos(y/L) \cos(z/L) \quad (6.5a)$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = -V_0 \cos(x/L) \sin(y/L) \cos(z/L) \quad (6.5b)$$

$$w(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (6.5c)$$

Brachet et al. [14] montrent en passant dans l'espace de Fourier que ce profil conduit à une injection d'énergie sur le mode sphérique $k_i = \frac{2}{L}$. Chapelier et al. [20] précisent que ce champ peut être étendu à un cadre compressible en initialisant le champ de pression avec :

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{16} \left(\cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2 \right) \quad (6.6)$$

qui satisfait l'équation de Poisson reliant la vitesse à la pression pour un écoulement incompressible (3.3). Enfin, on initialise la boîte avec une masse volumique constante $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0$. Par la suite on caractérisera les écoulements par leur nombre de Mach et leur nombre de Reynolds, définis au chapitre 1. Nous comparerons les résultats de nos expériences à ceux présentés dans [20]. Pour jauger de la qualité de leur solution, les auteurs utilisent deux critères que nous présentons :

- L'énergie cinétique turbulente moyenne : $E_k = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} d\Omega$.
- L'enstrophie moyenne définit par : $\xi = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \frac{\omega \cdot \omega}{2} d\Omega$. Où ω est la vorticité. Cette quantité est reliée au taux de dissipation [19].

6.2.2 Résultats

Le cas test sélectionné est la cas bas Reynolds de Chapelier et al. [20], avec un nombre de Reynolds de l'écoulement $Re = 500$ et un nombre de Mach de référence $M = 0.1$. On fait tourner le test pour différents degrés d'approximation à nombre de degré de liberté constant. Ainsi, le domaine est discrétisé en 96^3 degrés de libertés, soit 32768 éléments à l'ordre trois et 18824 à l'ordre quatre. Les résultats figure 6.3 présentent l'évolution de l'énergie cinétique turbulente et de l'enstrophie au cours du temps. Les résultats obtenus à

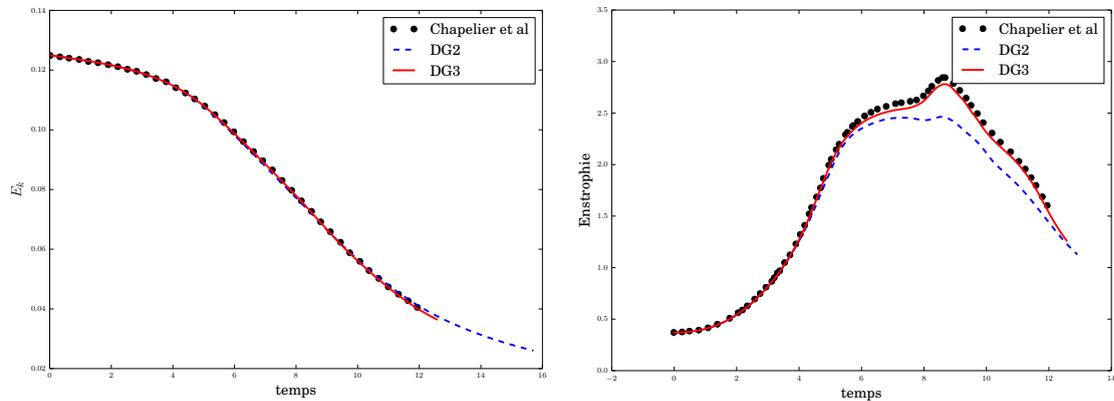


FIGURE 6.3 – Comparaison des résultats du vortex de Taylor-Green avec ceux de Chapelier et al. [20]. À gauche l'énergie cinétique turbulente et à droite l'enstrophie.

l'ordre trois et à l'ordre quatre (respectivement DG2 et DG3) sont comparés aux résultats dans [20]. Si l'on regarde l'énergie cinétique turbulente, les résultats sont identiques à la référence dans les deux cas. Concernant l'enstrophie, on constate qu'à l'ordre quatre la solution est bien reproduite, cependant à l'ordre trois, le pic est sous-estimé. Chapelier et al. [20] qui observent le même comportement, expliquent ce résultat par la moins bonne précision du calcul qui dissipe les petites échelles de l'écoulement qui sont responsables de la formation de ce pic.

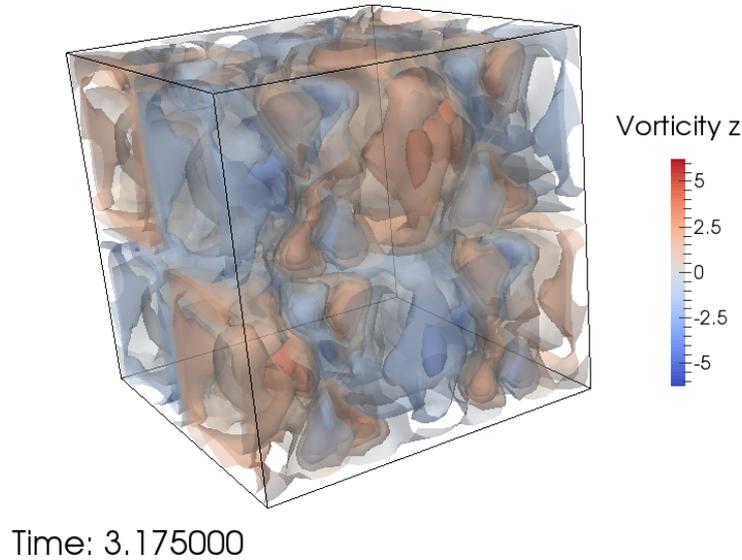


FIGURE 6.4 – Iso-valeurs de vorticité selon la composante z dans la boite à $t = 3.175s$

6.3 Simulations numériques directes de jet en écoulement transverse

Dans cette section, nous présentons les calculs par simulation numérique directe d'un jet en écoulement transverse avec et sans giration. Précisons d'emblée que seule une analyse préliminaire des résultats est présentée ici.

Nous commencerons par détailler les propriétés physiques de l'écoulement, ainsi que les géométries des domaines considérés. Après avoir expliqué le déroulement d'un calcul, les résultats préliminaires de ces simulations seront présentés et comparés aux données expérimentales que nous avons obtenus sur le banc MAVERIC (chapitre 3) dans le cas sans giration. Nous considérerons trois sous-sections. Premièrement, nous présenterons les caractéristiques des écoulements ainsi que les échelles des structures turbulentes afin de pouvoir dimensionner nos maillages. Nous présenterons ensuite les deux configurations étudiées, du choix de la résolution jusqu'aux exemples de résultats obtenus, en détaillant les différentes étapes du calcul.

6.3.1 Caractéristiques de l'écoulement

La configuration géométrique générique est celle présentée chapitre 2. On considère deux veines de demi-hauteur $\delta = 0.06m$ séparées par une plaque plane munie d'une perforation cylindrique de diamètre $\phi = 0.005m$, inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à la plaque, de

telle sorte que la section de sortie de ce trou est une ellipse de grand diamètre $D = 0.01\text{m}$. Pour notre étude, on considère deux configurations, l'une sans giration, c'est à dire que le perçage est aligné avec l'écoulement principal, et l'autre avec une giration de $\beta = 90^\circ$ de façon à ce que le jet sorte perpendiculairement à l'écoulement principal. On distingue

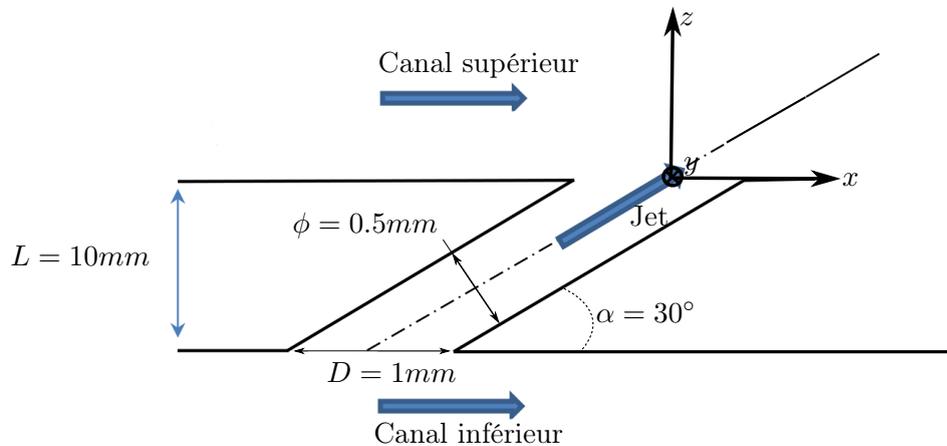


FIGURE 6.5 – Schéma de la configuration étudiée

particulièrement trois zones au sein de l'écoulement :

- L'écoulement secondaire dans le canal inférieur.
- L'écoulement du jet dans le perçage.
- L'écoulement principal dans le canal supérieur.

Le fluide utilisé est de l'air que l'on considère comme un gaz parfait, et l'écoulement est isotherme à $T_\infty = 300\text{K}$ et $p_\infty = 101\,325\text{Pa}$. Les propriétés physiques du fluide sont données tableau 6.4.

Variable	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique	ρ	1.177	kgm^{-3}
Viscosité dynamique	μ	$1.85 \cdot 10^{-5}$	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	$1.57 \cdot 10^{-5}$	m^2s^{-1}
Conductivité thermique	λ	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
Diffusivité thermique	a	$2.22 \cdot 10^{-5}$	m^2s^{-1}

TABLE 6.4 – Propriétés physiques de l'air à 300K

On donne aussi la chaleur massique à pression constante $c_p = 1006\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, ainsi que son rapport avec la chaleur massique à volume constant : $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$. On estime alors plusieurs grandeurs caractéristiques pour les trois écoulements considérés :

- On mesure expérimentalement les valeurs de vitesse à mi-hauteur sur l'axe dans les canaux, et on estime la vitesse maximale du jet en sortie du trou. Ces vitesses seront prises comme références pour le calcul des variables de similitude comme le nombre de Reynolds. On estime aussi pour les canaux la vitesse débitante.
- On déduit de ces vitesses les nombres de Reynolds des écoulements, basés sur la demi-hauteur des canaux et sur le rayon du perçage.
- On estime à partir des mesures expérimentales la vitesse de frottement à la paroi pour le canal supérieur. Pour le canal inférieur et pour le trou, on se base sur la relation empirique pour un écoulement de canal, soit $u_\tau \simeq \frac{u_{axe}}{20}$.
- On déduit des vitesses de frottement les nombres de Reynolds à la paroi Re_τ ainsi que l'ordonnée réduite $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$.

Les valeurs de ces grandeurs sont données tableau 6.5.

	Canal supérieur	Perçage	Canal inférieur
u_{axe}	$0.995ms^{-1}$	$10.5ms^{-1}$	$1.27ms^{-1}$
u_{bulk}	$0.943ms^{-1}$	★	$1.093ms^{-1}$
Re	3800	3350	4850
u_τ	$0.0531ms^{-1}$	$0.5ms^{-1}$	$0.0635ms^{-1}$
Re_τ	210	184	242
y_+	$3487y$	$3200y$	$4044y$
$y(y_+ = 1)$	$2.910^{-4}m$	$3.110^{-4}m$	$2.4710^{-4}m$

TABLE 6.5 – Variables caractéristiques des écoulements

Afin d'établir le jet, on crée un gradient de pression de $\Delta p = 60Pa$ entre le canal supérieur et le canal inférieur, identique à celui réalisé expérimentalement.

6.3.2 Échelles de turbulence

Compte-tenu de la nature turbulente de l'écoulement étudié, on cherche à estimer les échelles caractéristiques des structures qui le composent. Pour cela, on va estimer les macro et micro échelles de Taylor introduites au chapitre 1, en mesurant le signal de la vitesse axiale au centre du canal supérieur par LDV. On calcule alors la fonction d'autocorrélation temporelle de ce signal figure 6.6. En intégrant cette courbe numériquement, on obtient

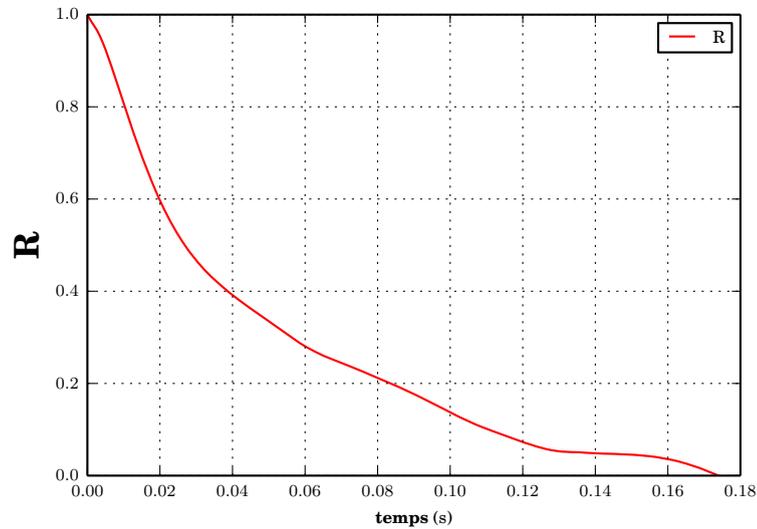


FIGURE 6.6 – Fonction d’autocorrélation temporelle du signal de la composante axiale de la vitesse mesurée sur l’axe du canal supérieur par LDV.

une estimation de l’échelle intégrale temporelle. En faisant une hypothèse de Taylor, on obtient alors l’échelle intégrale spatiale :

- $\Lambda \simeq 0.045m$

On évalue ensuite la micro échelle de Taylor et l’échelle de Kolmogorov en utilisant les relations (1.52) :

- $\lambda \simeq \Lambda \sqrt{15} Re^{-1/2} \simeq 0.0028m$
- $\eta \simeq \Lambda Re^{(-3/4)} \simeq 0.0001m$

6.3.3 Configuration sans giration

Dans cette configuration, l’inclinaison du perçage est alignée avec l’axe du canal ($\beta = 0$). Nous commencerons par donner les caractéristiques géométriques du maillage employé ainsi que les conditions aux limites retenues pour la simulation. Nous détaillerons ensuite les différentes étapes du calcul. Enfin, nous présenterons les résultats obtenus en les comparant aux données expérimentales lorsque cela est possible.

6.3.3.1 Dimensionnement du maillage

Connaissant les caractéristiques géométriques de notre domaine de calcul ainsi que les propriétés de l'écoulement, il convient de définir les dimensions du maillage ainsi que la taille des mailles afin de pouvoir capturer tous les phénomènes physiques en présence.

Géométrie

Nous cherchons dans un premier temps à définir les limites du domaine de simulation. Les calculs par simulation numérique directe étant très coûteux en temps de calcul (chapitre 1) on va chercher à réduire le maillage au maximum. Concernant la distance nécessaire à l'établissement d'un écoulement turbulent depuis une condition d'entrée laminaire nous avons vu au chapitre 4 que la génération synthétique d'un champ de vitesse turbulent nous permet de nous affranchir de cette contrainte. On positionne donc l'entrée du domaine $2.5D$ en amont du bord d'attaque du trou. Le maillage doit aussi être suffisamment grand pour permettre à l'écoulement issu du perçage de se développer sans être perturbé par les conditions aux limites. Afin d'estimer la taux d'épanouissement latéral du jet, nous avons analysé les résultats obtenus dans le cadre du programme KIAI par Bruel and Florenciano [15] sur MAVERIC . Finalement, les dimensions du maillage sont présentées tableau 6.6 et figure 6.7 adimensionnées par le grand diamètre de la section de sortie $D = 0.01m$.

	Canal supérieur	Canal inférieur
Longueur amont	$2.5D$	$1.5D$
Longueur aval	$13.5D$	$2.5D$
Largeur	$4D$	$2D$
Hauteur	$5D$	$3D$

TABLE 6.6 – Dimensions du domaine de calcul pour le cas sans giration

Résolution

Puisque nous réalisons des simulations numériques directes, nous devons veiller à ce que la discrétisation soit suffisamment fine pour capturer tous les phénomènes physiques en jeu, en particulier ceux liés à la turbulence. Pour définir la résolution nécessaire à la réalisation de cette simulation, nous nous appuyons sur la DNS incompressible de canal turbulent de Kim et al. [53] et les travaux en compressible de Coleman et al. [26]. Ces études considèrent en effet des écoulements à des nombres Reynolds très proches de celui de notre écoulement

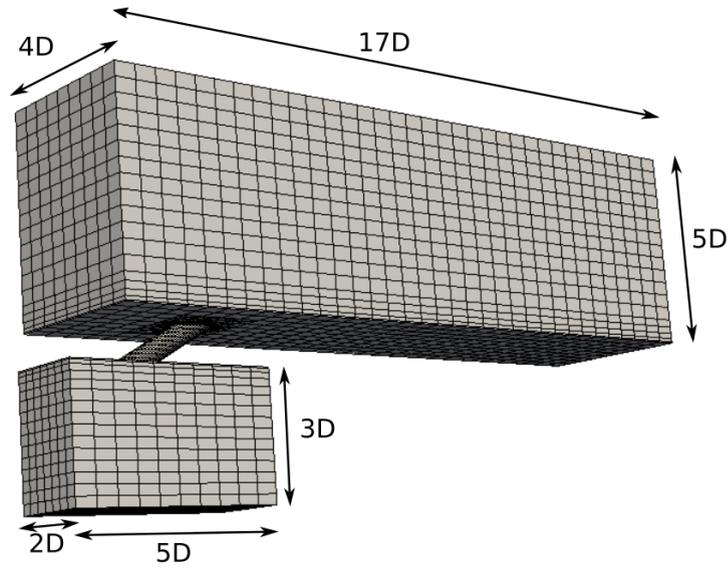


FIGURE 6.7 – Dimensions du domaine de calcul pour le cas sans giration.

principal ($Re = 3300$ contre $Re = 3000$). La distance caractéristique réduite entre deux degrés de liberté pour notre maillage, est donnée tableau 6.7 avec une comparaison aux travaux cités. On remarquera qu'afin de capturer les phénomènes en proche paroi, le maillage

	Kim et al. [53]	Coleman et al. [26]	Cas sans giration $DG = 2$
Δx^+	$12y^+$	$17y^+$	$5.6y^+$
Δy^+	$7y^+$	$10y^+$	$5y^+$
Progression en z	sinusoïdale	*	sinusoïdale
Δz^+	$0.05y^+ - 4.4y^+$	$0.1y^+ - 7y^+$	$0.33y^+ - 3.8y^+$

TABLE 6.7 – Résolution du maillage dans le cas sans giration

est raffiné sur l'épaisseur de la sous couche visqueuse ($21y^+$) en utilisant une progression sinusoïdale. On notera également que la résolution choisie est légèrement supérieure à l'échelle de Kolmogorov $\eta \simeq 2.9y^+$, cependant, selon [53] et [26], cela est suffisant pour capturer l'essentiel des phénomènes turbulents.

Les canaux supérieur et inférieur sont principalement maillés en structuré cartésien. Cela nous permet entre autre d'avoir une résolution homogène dans la zone de proche paroi afin de mieux y capter les différents phénomènes physiques. Afin de prendre en compte la géométrie cylindrique du perçage, celui ci est maillé en non-structuré à l'ordre deux. En entrée et en sortie du celui-ci, on définit alors deux zones de transition vers les canaux, d'épaisseur égale à celle de la couche limite, et composées de tétraèdres et de prismes. Pour finir, on obtient le maillage hybride présenté figure 6.8, composé d'environ 15000 éléments,

soit un peu plus de 400000 degrés de liberté à l'ordre trois. Le rayon du cercle inscrit dans la plus petite maille est estimé à $h = 4.358 * 10^{-6}m$.

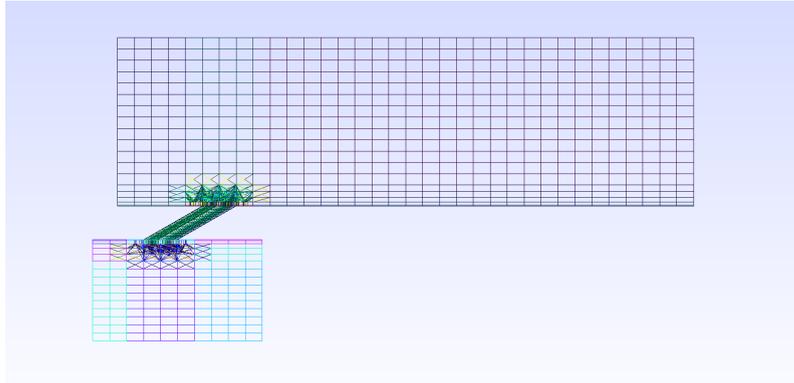


FIGURE 6.8 – Maillage du domaine de calcul pour la cas sans giration

6.3.3.2 Conditions aux limites

Pour définir les conditions aux limites du domaine, on distingue dix zones, présentées figure 6.9. Les conditions appliquées sont les suivantes :

- Zones 1 et 2. Ces zones correspondent aux parois de la plaque plane et du perçage. On y impose une condition de paroi non glissante adiabatique.
- Zones 3 et 7. Ce sont les entrées des canaux supérieur et inférieur. Suivant les étapes du calcul, on y impose des profils de vitesse paraboliques ou les champs turbulents synthétiques générés par la méthode SEM (chapitre 4).
- Zones 4, 5, 8 et 9. Sortie libre de domaine de calcul. On y impose la pression de référence p_∞ avec la condition de sortie subsonique présentée section 4.4.1.
- Zones 6 et 10. Conditions aux limites périodiques. Ce choix est rendu possible car ces limites sont suffisamment éloignées latéralement du domaine d'influence du jet.

6.3.3.3 Réalisation du calcul

Le calcul de cette configuration est effectué sur le calculateur massivement parallèle Turing de l'Idris qui est une machine avec une architecture IBM Blue Gene/Q. La simulation s'effectue sur 1024 cœurs de calcul en mémoire distribuée. Le temps physique est adimensionné par le temps convectif t_c qui est la durée nécessaire à une particule pour traverser le canal supérieur, de sorte que $t_c = \frac{L}{U_{ref}} = 0.17s$. Nos calculs étant réalisés en compressible, le pas

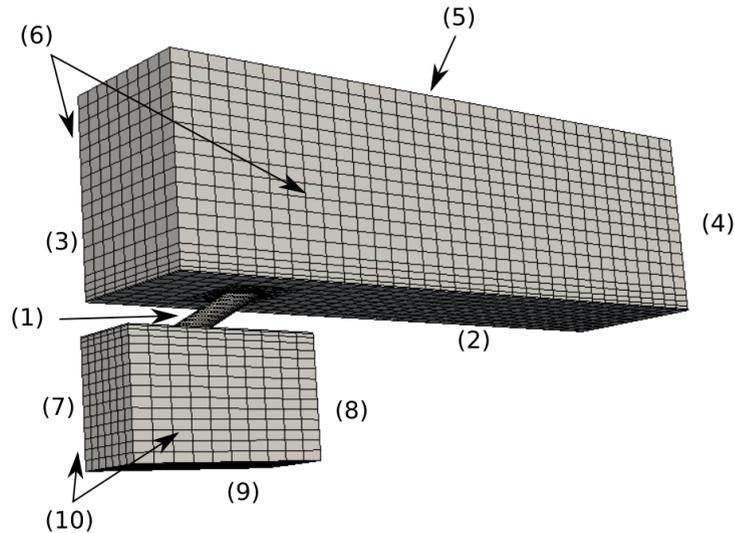


FIGURE 6.9 – Les différentes frontières du domaine de calcul pour la cas sans giration.

de temps utilisable pour le transport des termes convectifs est limité par la condition de stabilité, soit : (4.55) :

$$|\mathbf{u} + c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2k + 1} \quad (6.7)$$

Où k est le degré d'approximation polynomiale utilisé. Cette condition étant très restrictive, on considère ici que la stabilité L_2 est aussi assurée pour les termes diffusifs sous cette condition, ce qui est confirmé numériquement. Finalement, le pas de temps à l'ordre trois est de $\Delta t = 7.5 \cdot 10^{-8} s$. Avec ces paramètres, il faut environs 150000 heures de calcul pour réaliser un temps convectif de simulation sur Turing.

On réalise ensuite la simulation qui se décompose en plusieurs étapes présentées en suivant.

Partitionnement du maillage

La première étape consiste à lire le maillage et à le partitionner de manière à répartir la charge entre les différents processeurs. Cette étape est particulièrement gourmande en mémoire. Elle est donc réalisée sur 2048 cœurs afin d'augmenter la RAM disponible. Un exemple de maillage partitionné est présenté figure 6.10.

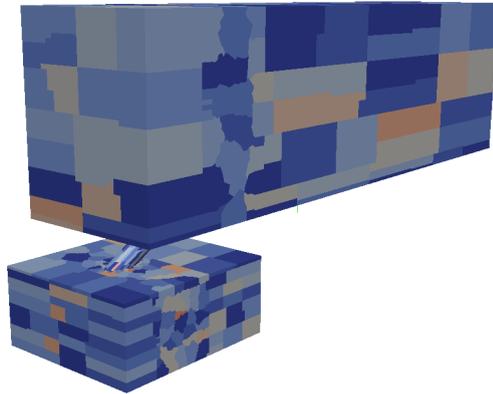


FIGURE 6.10 – Exemple de partitionnement de maillage sur 1024 cœurs de calculs. Réalisé sur le calculateur Turing de l’Idriss

Initialisation du calcul

Une fois le maillage partitionné, on initialise le calcul à l’ordre deux. On considère comme conditions initiales les profils moyens de vitesse obtenus par simulation RANS (chapitre 4) dans les canaux supérieur et inférieur ainsi qu’une vitesse nulle dans le trou. La vitesse dans les veines étant nulle à la paroi, il n’y a pas de discontinuité au niveau du perçage. La masse volumique est imposée de manière uniforme dans le domaine et égale à la masse volumique de référence donnée tableau 6.4. On définit aussi un gradient de pression de $\Delta p = 60 Pa$ entre les canaux supérieur et inférieur, qui varie linéairement dans le perçage et qui va mettre le jet en mouvement. On réalise alors un temps convectif t_c de simulation à l’ordre deux. Cette étape est réalisée à un ordre de discrétisation plus faible que le reste de la simulation afin d’évacuer à moindre coût tous les phénomènes transitoires. Au cours de celle-ci, le jet se met en mouvement, mais du fait de l’ordre employé, la méthode numérique est très dissipative et le jet suit alors une trajectoire très proche de la paroi, qui n’est évidemment pas conforme aux expérimentations comme on peut le constater figure 6.11.

Montée en ordre et injection de la turbulence

Une fois que les phénomènes transitoires sont évacués du domaine, on reprend la simulation en passant à l’ordre trois. La résolution spatiale est alors celle estimée tableau 6.7. On constate que grâce au schéma numérique qui est beaucoup moins dissipatif, le jet commence à se développer pleinement dans le canal comme on peut le voir sur la figure 6.12. On réalise de nouveau un temps convectif de simulation dans cette configuration puis on change les conditions d’entrée des canaux afin d’imposer les champs de vitesse turbulents générés grâce

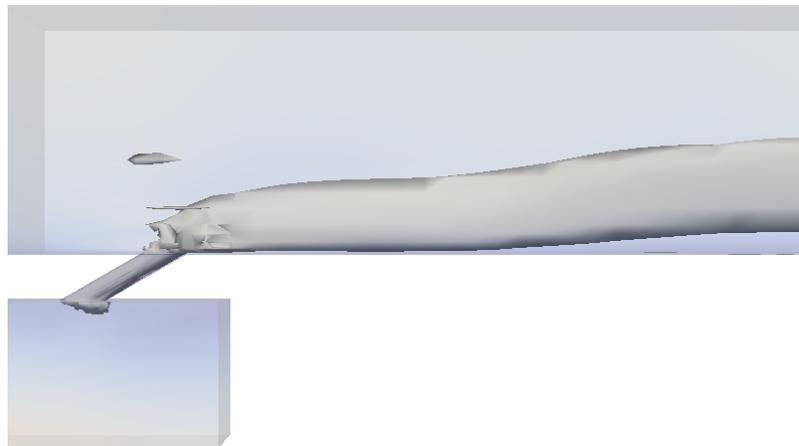


FIGURE 6.11 – Exemple d'iso-surfaces de la norme de la vitesse instantanée du jet durant la phase d'initialisation ($\|\mathbf{u}\| \in [0.0 : 3.0]\text{m/s}$)

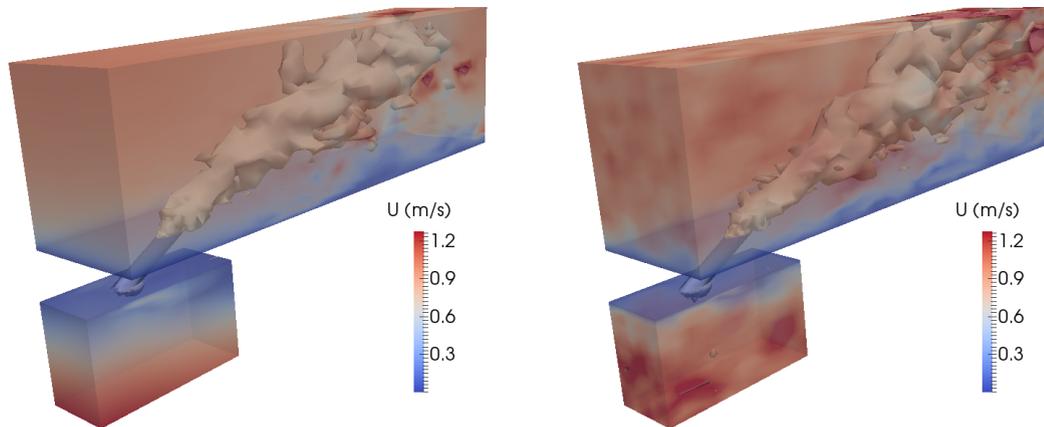


FIGURE 6.12 – Exemple d’iso-surfaces de la norme de la vitesse instantanée du jet à l’ordre trois ($\|\mathbf{u}\| \in [0 : 12.6]\text{m/s}$). À gauche sans turbulence synthétique et à droite avec. Le dégradé de couleur représente la norme de la vitesse en dehors du jet pour permettre la visualisation des fluctuations injectées.

à la SEM (chapitre 4). On laisse alors le calcul se poursuivre durant un temps convectif supplémentaire.

Collecte des statistiques

Afin de caractériser l’écoulement, on positionne des sondes dans le domaine de calcul où l’on pourra enregistrer toutes les variables de l’écoulement instantané. À la manière des traitements réalisés sur des signaux LDV, ces mesures nous permettront d’avoir un aperçu du spectre d’énergie ainsi que de la fonction de densité de probabilité des variables du système. La question qui se pose est celle du positionnement de ces sondes. Pour cela nous avons défini quatre zones d’intérêt qui sont :

- La zone interne du perçage, qui n’est pas accessible aux mesures expérimentales, présente un intérêt certain. De ce fait, nous avons positionné une série de sondes dans celui-ci dans le plan d’entrée, côté écoulement secondaire, dans le plan de sortie côté écoulement principal et dans le plan médian.
- La zone de maximum des vitesses. En nous basant sur le modèle analytique de trajectoire de Margason [72], et en comparant aux résultats préliminaires de l’écoulement moyenné sur un temps convectif, nous avons positionné une série de sondes sur la trajectoire du maximum des vitesses dans le jet.
- Les zones de cisaillement. Toujours en utilisant les résultats préliminaires, on tente de définir le lieu de l’intersection du jet avec l’écoulement principal. Pour cela, on

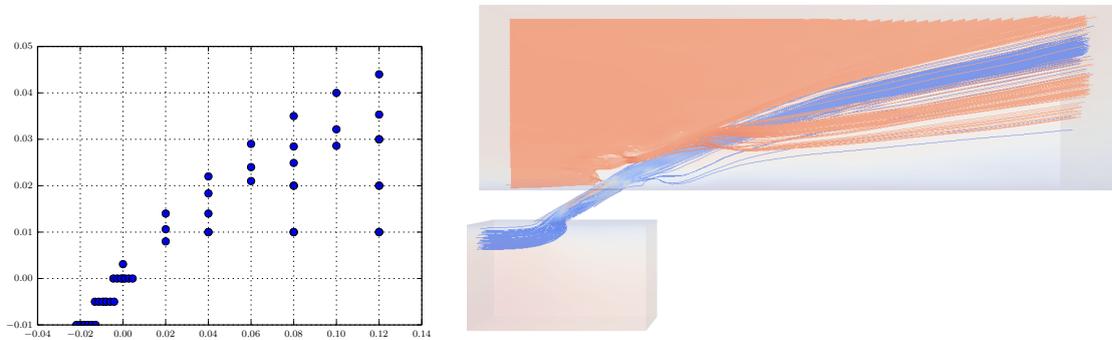


FIGURE 6.13 – Positionnement des sondes dans le domaine de calcul pour le cas sans giration. À gauche la position des sondes dans le plan normal à la paroi passant par le trou et à droite l’intersection des lignes de courant du jet et de l’écoulement principal.

cherche l’intersection des lignes de courants passant par le perçage avec celles issues de l’entrée du domaine (figure 6.13)

- La zone inférieure. On ajoute également des sondes dans la zone sous le jet.

La position des sondes dans le plan normal à la paroi passant par le trou est présentée figure 6.13. On définit ensuite la fréquence d’échantillonnage des statistiques. Nous avons choisi de faire des enregistrements tous les 1000 pas de temps ($\Delta t = 7.5 \cdot 10^{-8} s$), soit une fréquence d’échantillonnage de 13333Hz. Cela nous permet de suivre les fluctuations du signal jusqu’à une fréquence d’environ 6500Hz.

Une fois les sondes positionnées et la fréquence de prise de statistiques définie, on fait tourner la simulation durant sept temps convectifs ($7t_c = 1.2s$). Les résultats obtenus, et leur comparaison aux données expérimentales sont présentés à la section suivante.

6.3.3.4 Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus dans le cas sans giration. Les statistiques sont collectées durant sept temps convectifs ($7t_c = 1.2s$) avec une fréquence d’échantillonnage de $f = 13333\text{Hz}$. On commence avant toute chose par s’assurer que les statistiques sont suffisamment convergées. Pour cela, on regarde l’évolution temporelle des moments d’ordre supérieur au niveau des sondes positionnées dans le domaine de calcul. Les figures 6.14 montrent les positions des sondes sélectionnées ainsi que l’évolution des moments d’ordre trois et quatre. On constate que les valeurs de ces moments n’évoluent plus significativement. On considère alors que les statistiques sur les moments d’ordre inférieur sont convergées et qu’il est donc possible d’exploiter les résultats.

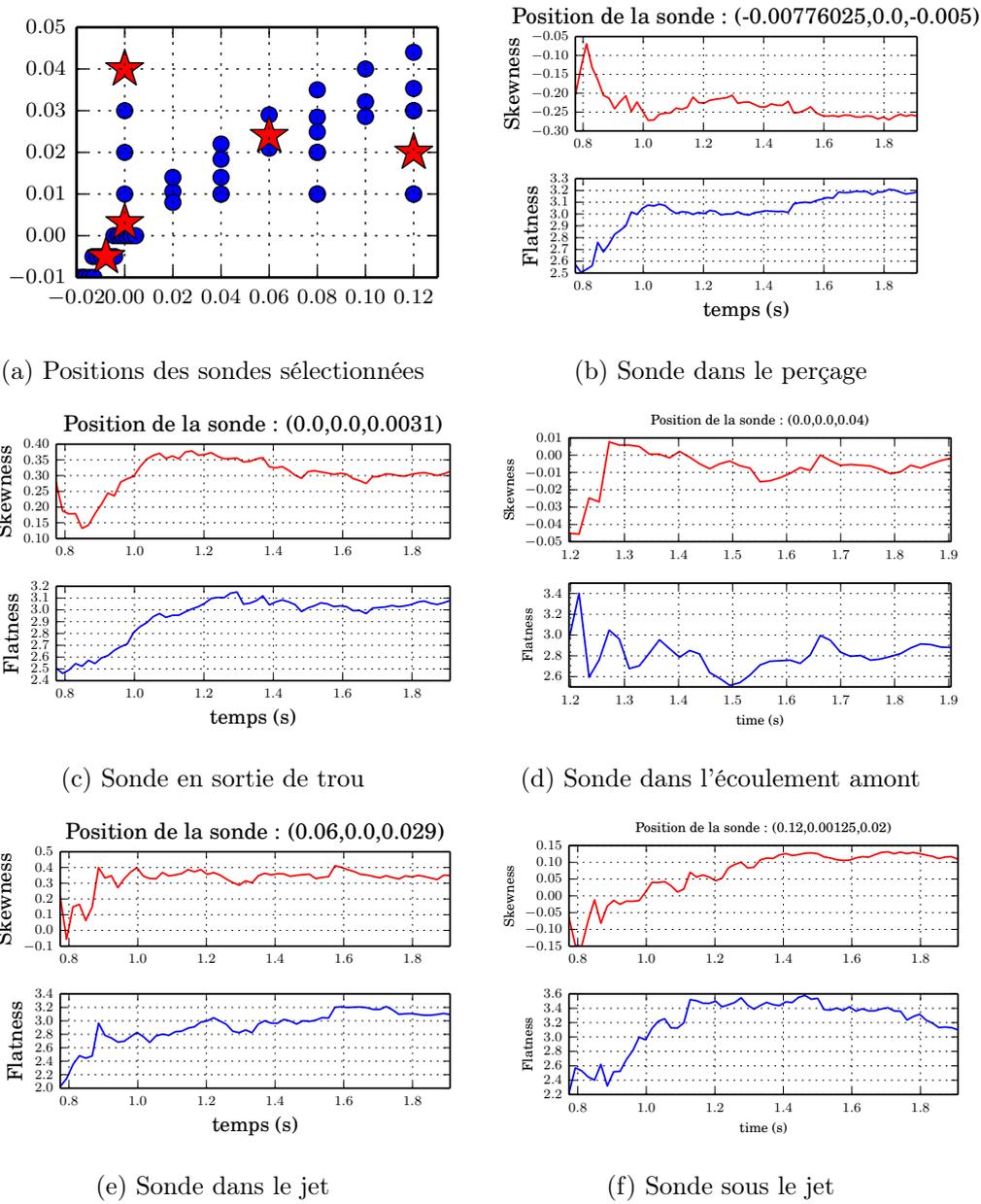


FIGURE 6.14 – Positions des sondes utilisées pour vérifier la convergence des statistiques et convergence des moments d'ordre élevé

L'attention du lecteur est attirée sur le fait que la visualisation de solution d'ordre élevé en éléments finis est compliquée. En effet, contrairement aux méthodes volumes finis d'ordre élevé par exemple, on peut définir un très grand nombre de degré de liberté par maille. La résolution du maillage n'est donc pas suffisante pour visualiser les résultats. Or les logiciels de post-traitement actuels se basent sur le maillage pour générer des visualisations. Ainsi dans la bibliothèque AEROSOL, les sorties de visualisation sont stockées aux nœuds des cellules et non aux degrés de libertés afin de permettre leur visualisation. On notera que certains logiciels comme GMSH permettent la visualisation à l'ordre trois, cependant les possibilités de post-traitement y sont limitées. De plus, ce type de visualisation demande un travail spécifique dans le code de calcul que nous n'avons pas eu le temps de réaliser. Ainsi, les visualisations des champs instantanés et moyens présentées ici sont dégradées à l'ordre deux, mais permettent cependant d'observer les tendances de l'écoulement. De plus les données collectées au niveau des sondes sont extraites à l'ordre effectif de la simulation. Enfin pour l'extraction de certains profils pour l'écoulement moyen, nous nous sommes servis d'une succession de sonde afin d'extraire la solution à l'ordre optimal le long de droites traversant le domaine.

Écoulement secondaire

La littérature décrit deux phénomènes côté aspiration (chapitre 2). D'une part la déformation du champ de vitesse par aspiration au niveau du perçage décrit par Peet [99], et d'autre part, la création de deux vortex en aval du trou. Si nos visualisations ne nous permettent pas d'affirmer ou infirmer la présence de ces vortex, on observe bien la perturbation des trois composantes de la vitesse dans la zone d'aspiration. En particulier, la vitesse axiale est accélérée au niveau du perçage puis ralentie en aval par aspiration comme on peut le voir sur la figure 6.15. La vitesse verticale est accélérée fortement au passage du trou et le champ de cette composante est alors dissymétrique par rapport à l'axe du perçage comme cela est observé par Peet [99] (figure 6.16). L'aspiration modifie également la composante transverse de la vitesse, en particulier de part et d'autre du trou ou elle est dirigée vers ce dernier. On présente sur la figure 6.17 les profils normaux de vitesse axiale moyenne sur l'axe de la veine à différentes distances du trou. On constate que le profil de vitesse moyen est impacté par l'aspiration avec une diminution de la vitesse en aval du perçage.

Écoulement dans le perçage

L'écoulement dans le perçage est connu pour être dissymétrique [86] et très inhomogène [78]. Nos visualisations, bien que grossières nous permettent d'identifier le comportement global

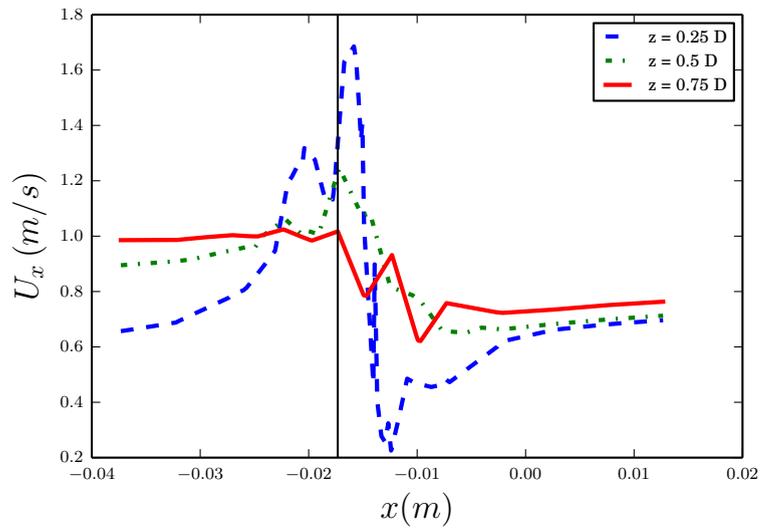


FIGURE 6.15 – Profils axiaux de la vitesse longitudinale moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances de la paroi. La ligne continue repère la position du centre du perçage

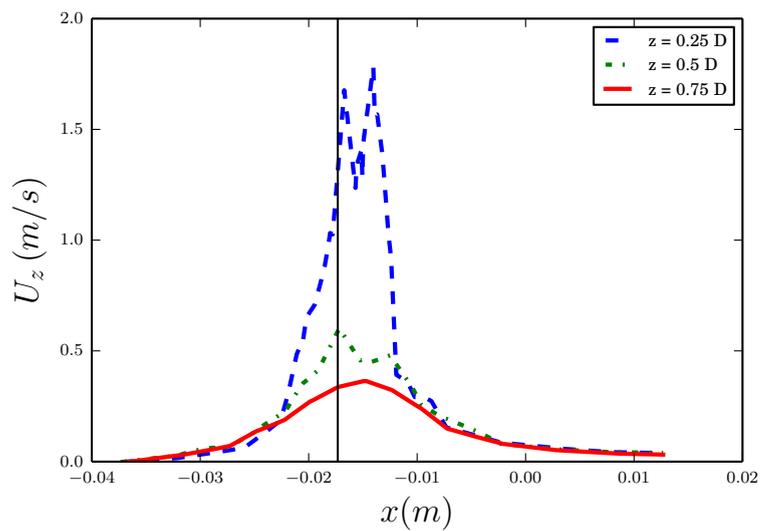


FIGURE 6.16 – Profils axiaux de la vitesse normal moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances de la paroi. La ligne continue repère la position du centre du perçage

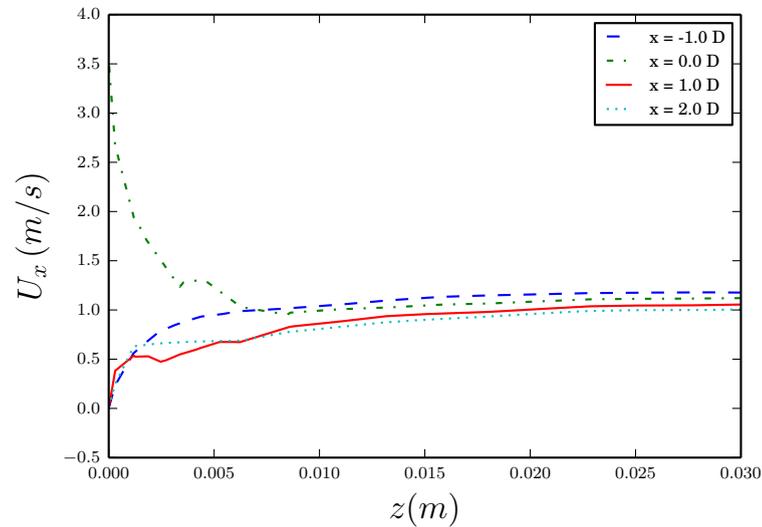


FIGURE 6.17 – Profils normaux de la vitesse axiale moyenne dans l'écoulement secondaire à différentes distances du perçage. Les distances au perçage sont adimensionnées par D

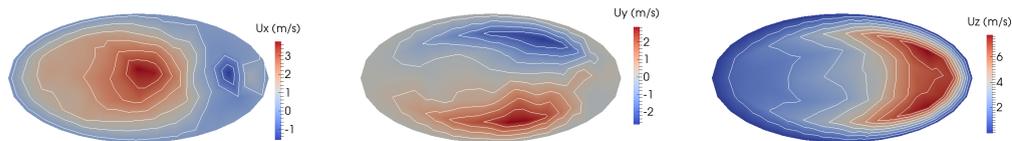


FIGURE 6.18 – Coupe horizontale du perçage en entrée de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.

de l'écoulement. On présente figure 6.18, figure 6.19 et figure 6.20 trois coupes horizontales du perçage en entrée, au milieu et en sortie de celui-ci. On retrouve en entrée (figure 6.18) les comportements observés dans l'écoulement secondaire, à savoir une accélération de la vitesse axiale dans la partie amont du trou et une décélération jusqu'à observer des vitesses négatives dans la partie aval du fait de l'aspiration. Un profil de vitesse verticale dissymétrique, avec une augmentation plus marquée dans la partie aval de la section. Et enfin la vitesse transverse est de signes opposés de part et d'autre du perçage ce qui traduit l'aspiration du fluide vers celui-ci.

Lorsque l'on remonte (figure 6.19), l'écoulement change de physionomie. Comme observé par Mendez and Nicoud [78], la paroi amont du trou bloque la trajectoire du jet qui se retrouve plaqué sur celle-ci. Cela se traduit par une forte composante de la vitesse axiale et verticale dans cette zone. On constate aussi que la forme du champs de vitesse axiale a tendance à épouser les bords du perçage ce qui est caractéristique de ce type d'écoulement.

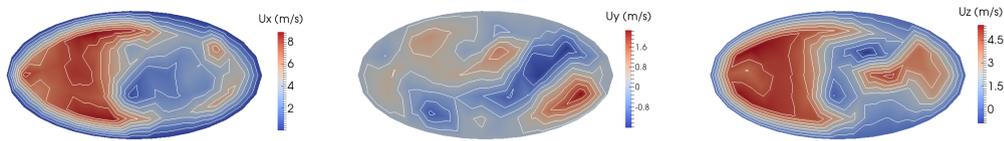


FIGURE 6.19 – Coupe horizontale du perçage au milieu de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.

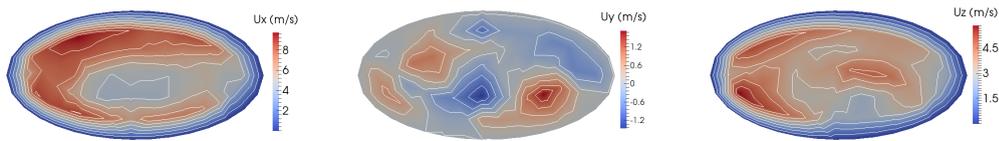


FIGURE 6.20 – Coupe horizontale du perçage en sortie de celui-ci. Visualisation des trois composantes de la vitesse.

Ce phénomène que l'on observe aussi sur le champ de vitesse verticale pourrait être à l'origine de la création des deux vortex contra-rotatifs dans cette configuration [78, 89]. Concernant la vitesse transverse, on observe la même distribution que Mendez and Nicoud [78] qui résulte du profil de cette composante en entrée du trou sous l'effet de l'aspiration. Ce mouvement engendre deux vortex dans la zone aval du perçage.

En sortie de trou (figure 6.20), on observe une répartition des vitesses similaire à celle au milieu. La vitesse verticale tend à s'homogénéiser dans la section, tandis que le profil des vitesses axiales épouse un peu plus les parois toujours dans la forme caractéristique observée dans [78]. On observe aussi une légère diminution de la vitesse transverse. On retrouve cependant les mêmes structures qu'au milieu du trou.

Écoulement transverse

Dans cette section, nous nous intéressons à l'écoulement principal, ainsi qu'à son interaction avec le jet. Une campagne de mesures expérimentales par PIV (chapitre 3) nous a permis de déterminer le champ de vitesse moyenne dans le plan perpendiculaire à la paroi passant par l'axe de la veine.

Concernant l'analyse des résultats, on commence par analyser la trajectoire du jet. Pour cela on considère la courbe passant par les maxima de vitesse axiale dans celui-ci. On compare

figure 6.21 les résultats de la DNS aux données expérimentales. On trace aussi la trajectoire théorique du modèle analytique de Margason [72]. On constate que les données numériques et expérimentales sont en très bonne concordance. Elles sont aussi en adéquation avec le modèle analytique.

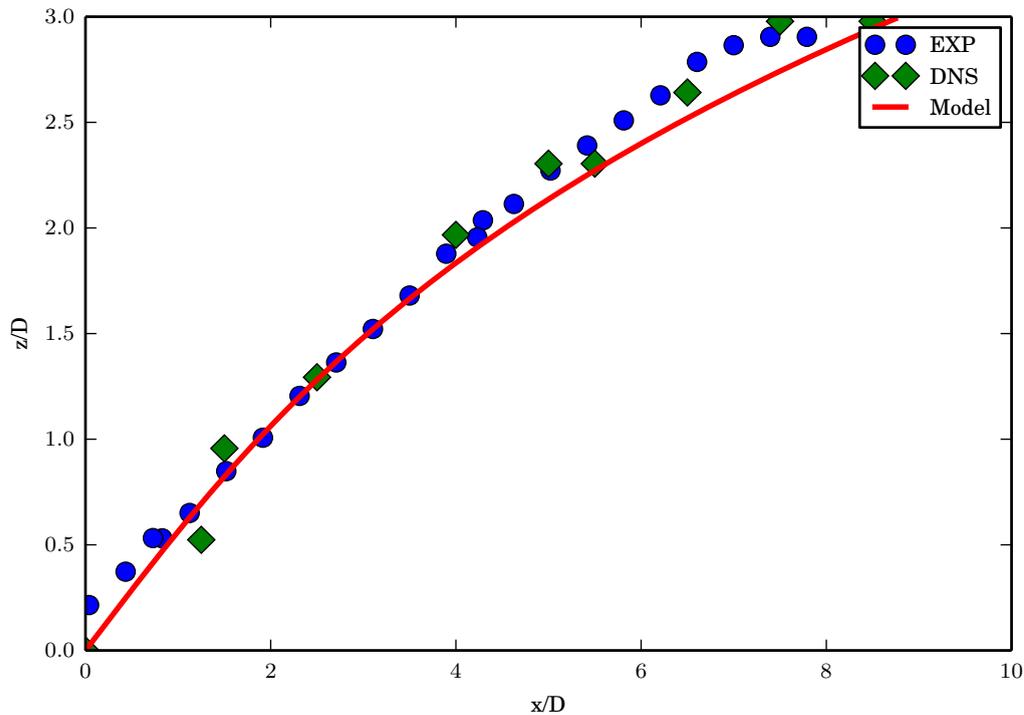


FIGURE 6.21 – Comparaison des trajectoires du jet au sens du maximum des vitesses. En ligne continue, le résultat du modèle analytique de Margason [72]

Écoulement moyen

On présente maintenant les comparaisons d'une série de profils de vitesse moyenne obtenus par calcul DNS et expérimentalement par PIV.

On commence par présenter les profils verticaux de vitesse axiale au niveau du perçage et en aval de celui-ci dans le plan médian. La distance z à la paroi est adimensionnée par la longueur du grand axe de l'ellipse de la section de sortie du trou $D = 0.01\text{m}$. On montre figure 6.22a et figure 6.22b l'extraction de ces profils à l'ordre deux grâce au logiciel de visualisation PARAVIEW et à l'ordre trois par succession de sondes dans le domaine. On constate dans le cas des visualisations d'ordre deux que les profils DNS sont cohérent avec ceux de l'expérience. En particulier la position des maxima de vitesse par rapport à la paroi et bien reproduite. Cependant les valeurs de vitesse ne sont pas bien visualisées. La

monté en ordre pour la visualisation améliore considérablement la cohérence avec les profils expérimentaux au niveau des amplitudes maximum dans le jet. Cependant on constate que la solution visualisée oscille au niveau des forts gradients. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que l'on cherche à approcher une solution raide avec une approximation lisse et moins résolue. Il est possible qu'un raffinement du maillage dans les zones de fort gradient corrige ce phénomène. Cependant, étant donné la durée des simulations et l'éventuel surcoût qu'engendrerait l'utilisation d'un maillage plus fin, nous n'avons pas été en mesure de le vérifier.

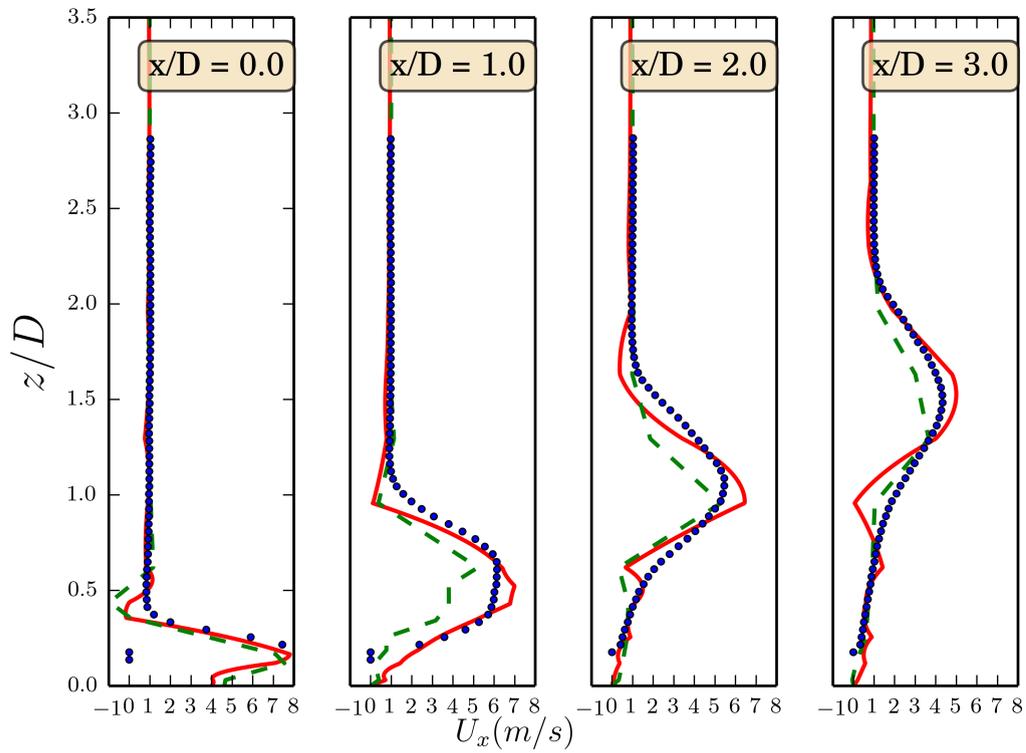
Concernant les profils de la composante verticale de la vitesse moyenne U_z présentés à la figure 6.23, les résultats sont aussi en bon accord avec les données expérimentales. Comme pour la vitesse axiale, les positions et les amplitudes des maxima sont bien reproduits.

On trace maintenant les profils axiaux des composantes de la vitesse à différentes distances de la paroi. On présente figure 6.27 les profils pour la composante axiale de la vitesse. On constate que la simulation reproduit assez bien les données expérimentales en ce qui concerne la position des maxima. L'amplitude de la vitesse semble bien reproduite. Concernant la phénoménologie, on constate que la vitesse maximum est enregistrée en sortie de trou. Elle diminue alors assez rapidement et perd la moitié de son intensité à environ deux grands diamètres au dessus de la paroi. Si l'on s'intéresse aux fluctuations axiales de vitesse présentées figure 6.28, on remarque que la composante R_{xx} du tenseur des contraintes visqueuse est faible en sortie de trou, puis augmente fortement jusqu'à un diamètre et demi de la paroi avant de décroître.

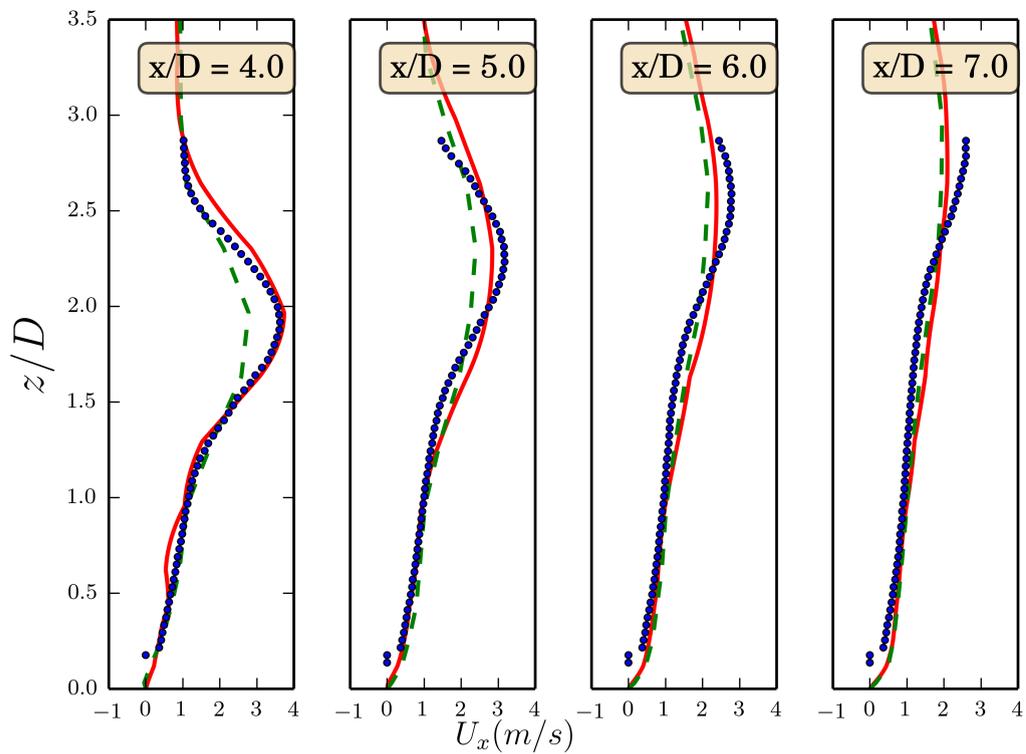
Pour l'évolution de la composante normale de la vitesse, on a là encore une bonne concordance entre la simulation et l'expérimentation. La trajectoire du jet est bien reproduite ainsi que l'amplitude de la vitesse. Comme pour la vitesse axiale, on constate que la forme des profils est similaire, avec une forte augmentation de vitesse au niveau du trou puis une décroissance d'autant plus lente en aval que l'on s'éloigne de la paroi. Concernant la composante R_{zz} du tenseur de Reynolds, on observe de faibles fluctuations au niveau de la paroi puis une augmentation continue jusqu'à deux diamètres au-dessus de celle-ci.

Écoulement instantané

Les résultats précédents concernent l'écoulement moyen. Cependant, l'un des atouts de la DNS par rapport à l'utilisation de modèles de turbulence, est d'avoir accès à la succession des états instantanés de l'écoulement. En utilisant les résultats au niveau des sondes positionnées dans le domaine de calcul et en les comparant à des mesures LDV en ces mêmes points sur

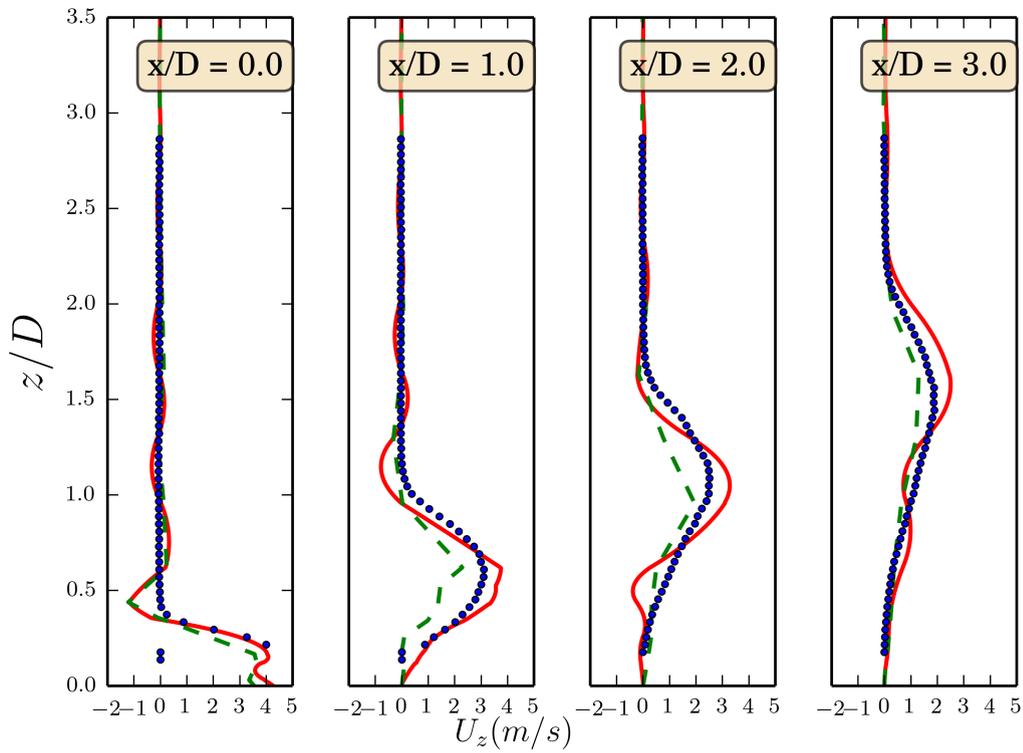


(a) Première partie

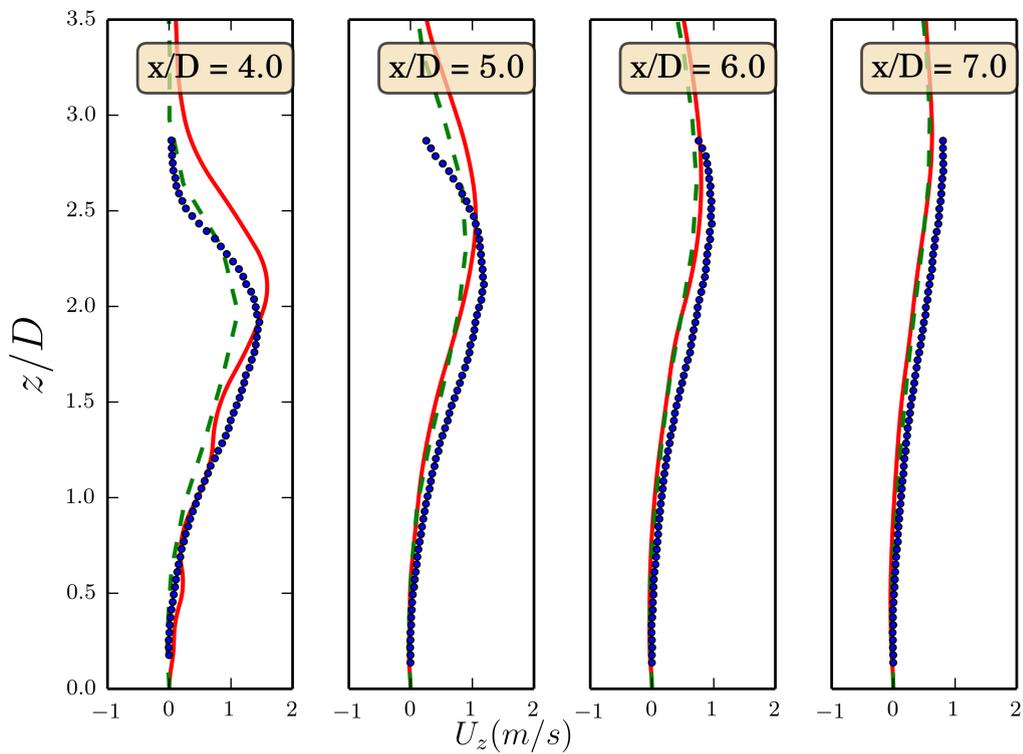


(b) Seconde partie

FIGURE 6.22 – Profils de vitesse axiale moyenne (U_x) dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.

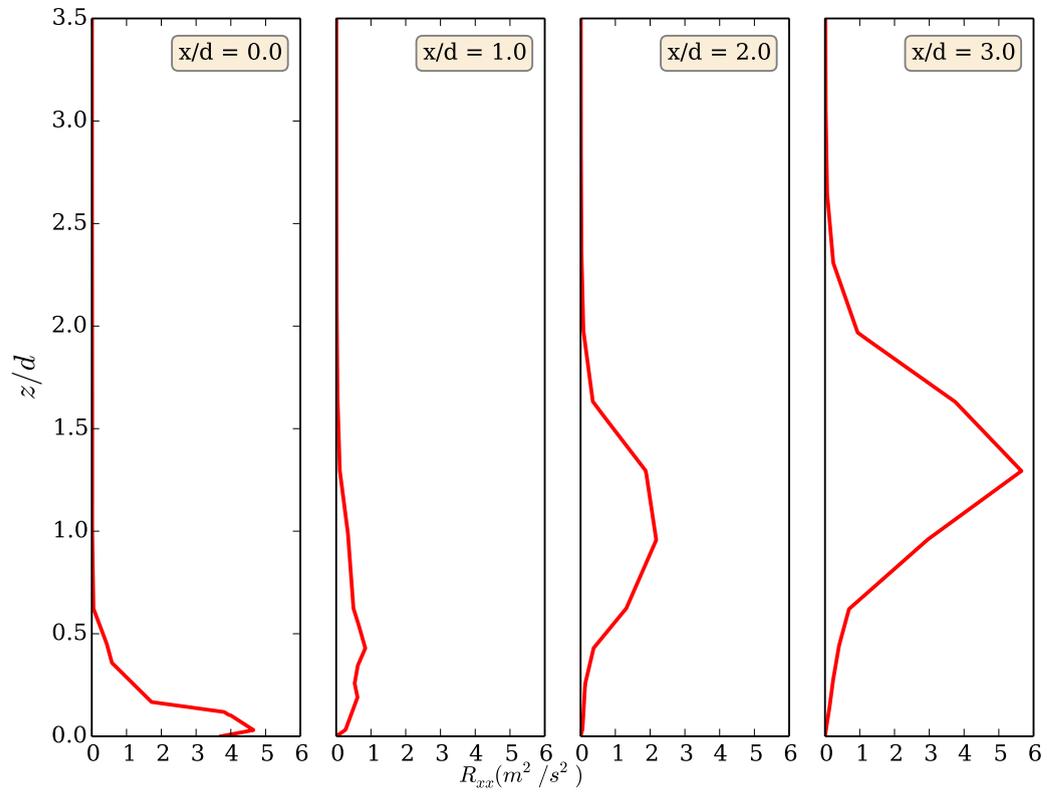


(a) Première partie

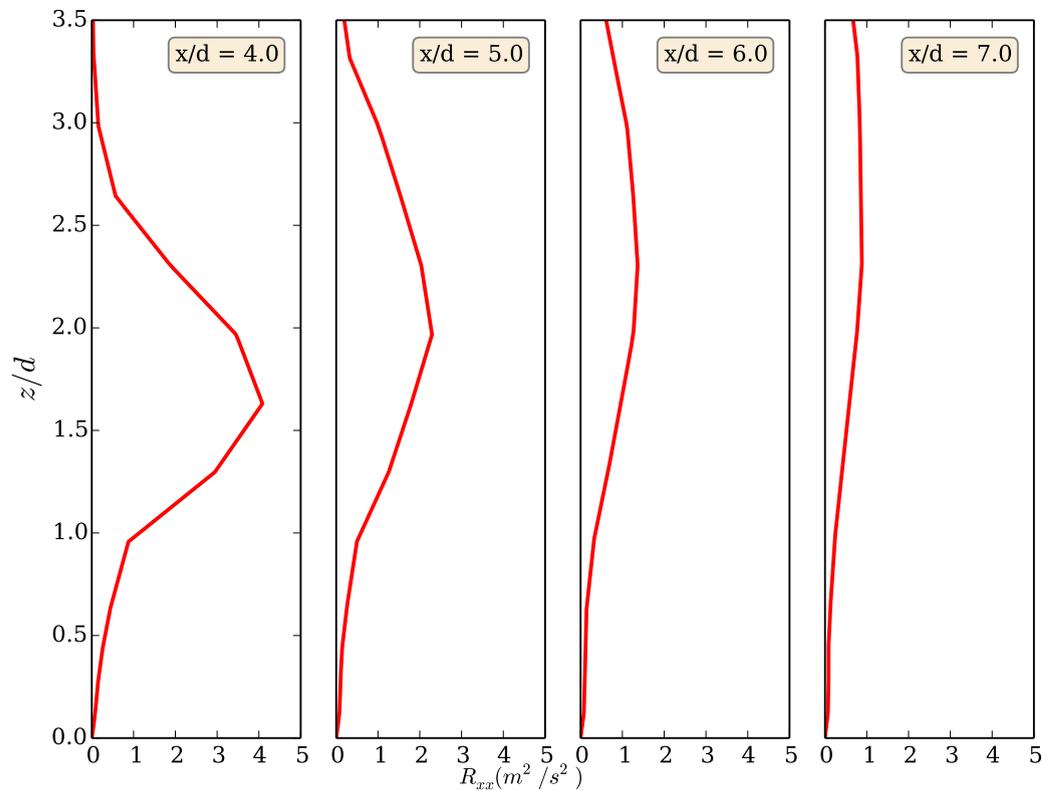


(b) Seconde partie

FIGURE 6.23 – Profils de vitesse verticale moyenne (U_z) dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV



(a) Première partie



(b) Seconde partie

FIGURE 6.24 – Profils de la composante R_{xx} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux

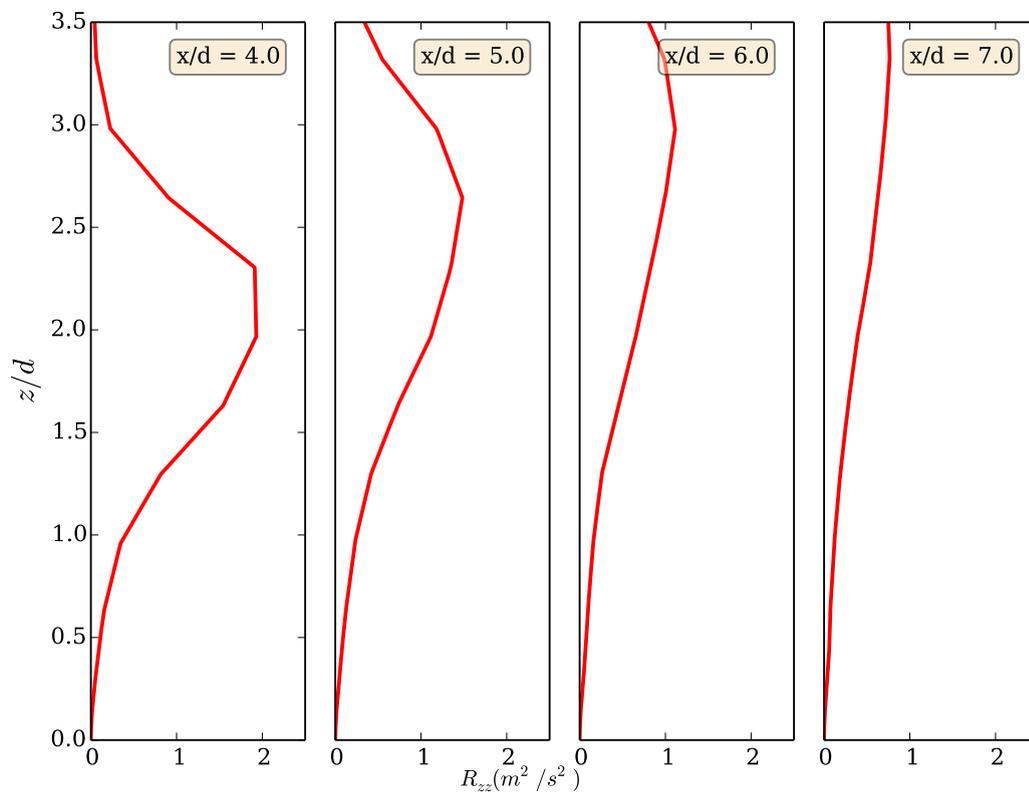
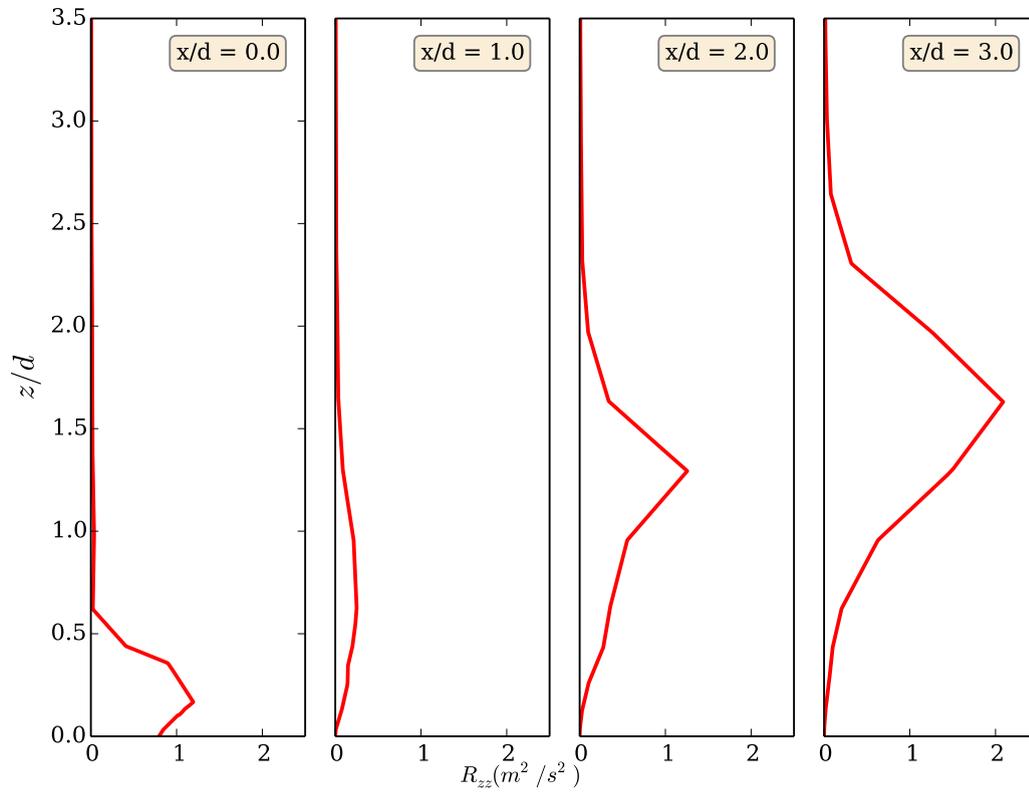
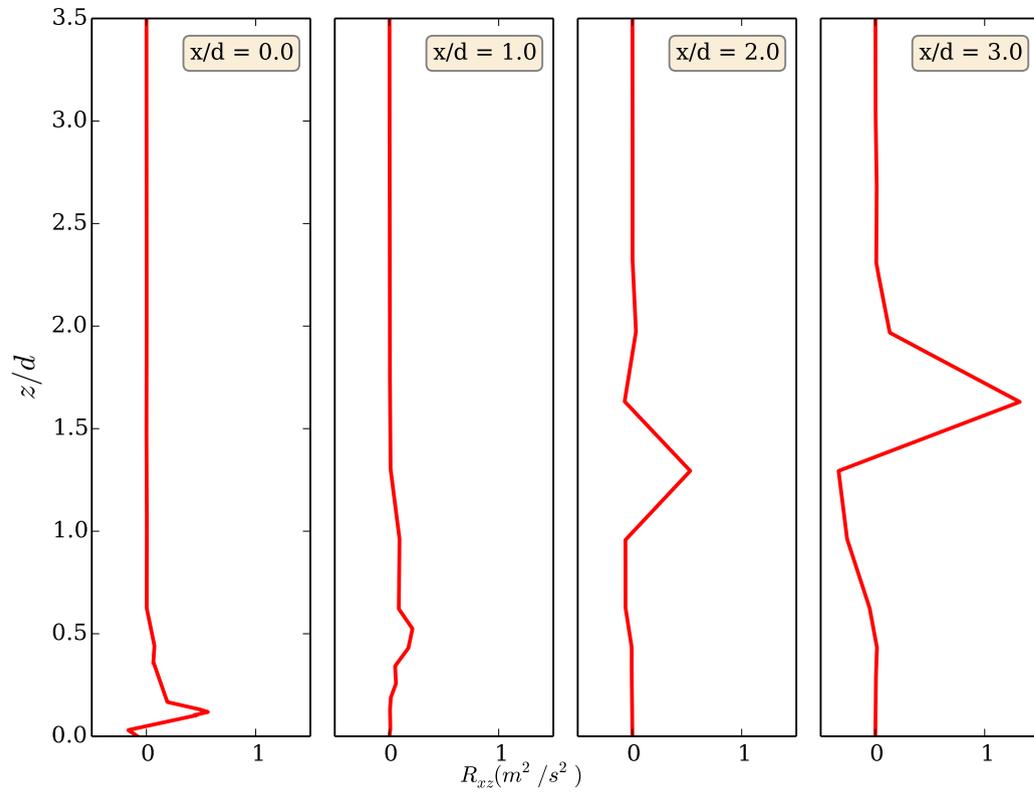
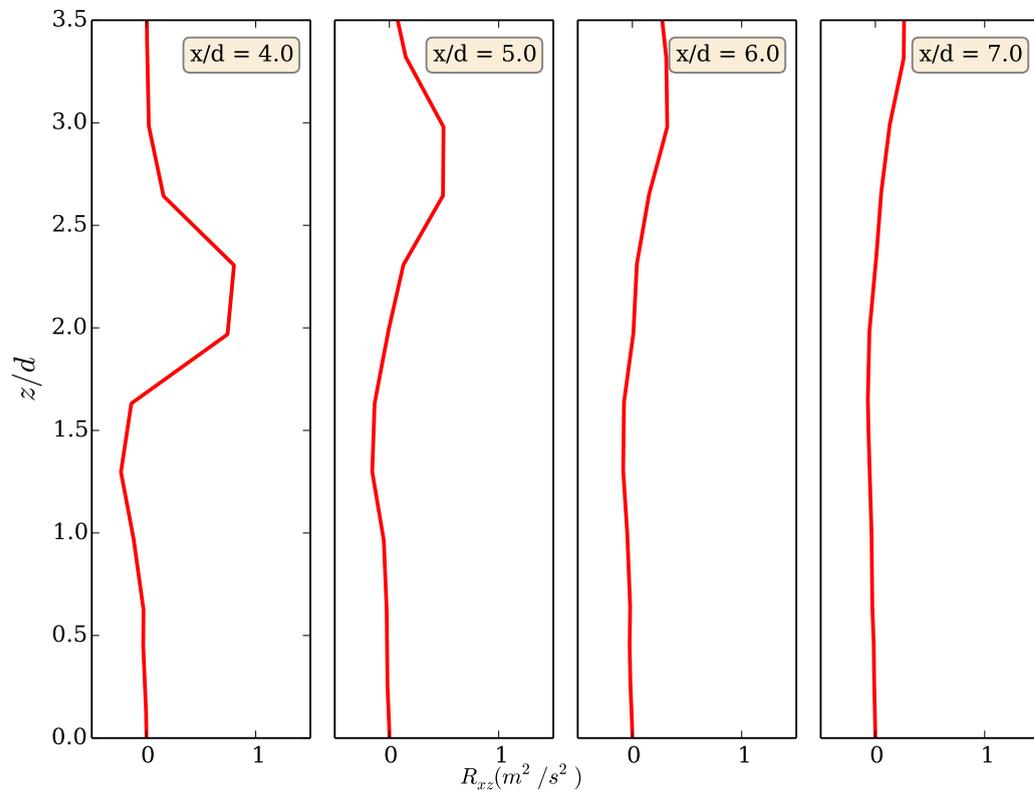


FIGURE 6.25 – Profils de la composante R_{zz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux



(a) Première partie



(b) Seconde partie

FIGURE 6.26 – Profils de la composante R_{xz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian à différentes distances en aval du perçage. DNS, visualisation d'ordre deux

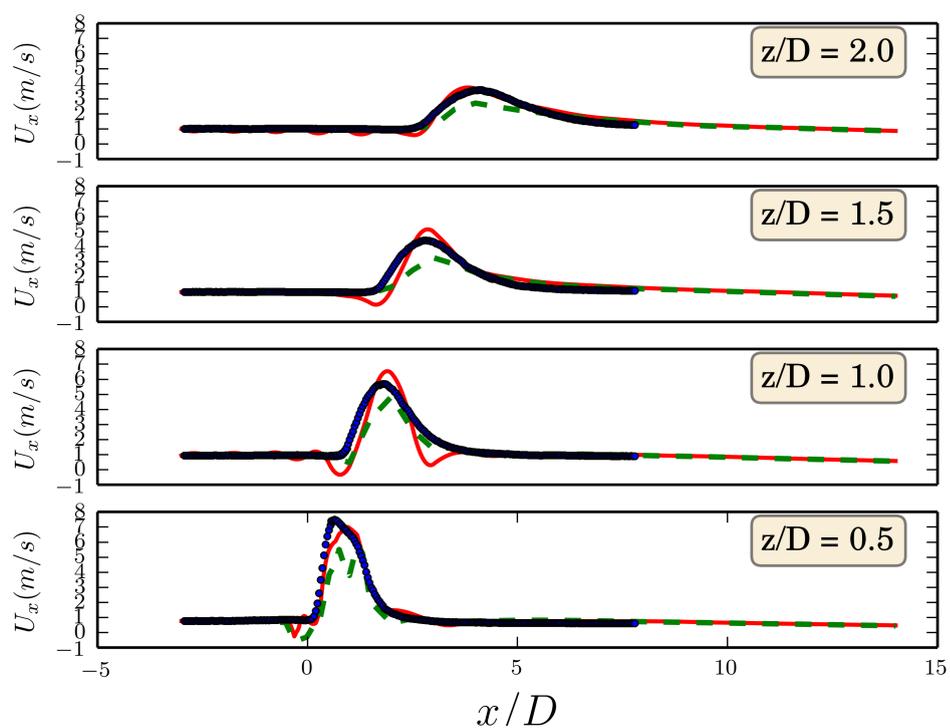


FIGURE 6.27 – Profils axiaux de vitesse longitudinale moyenne (U_x) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.

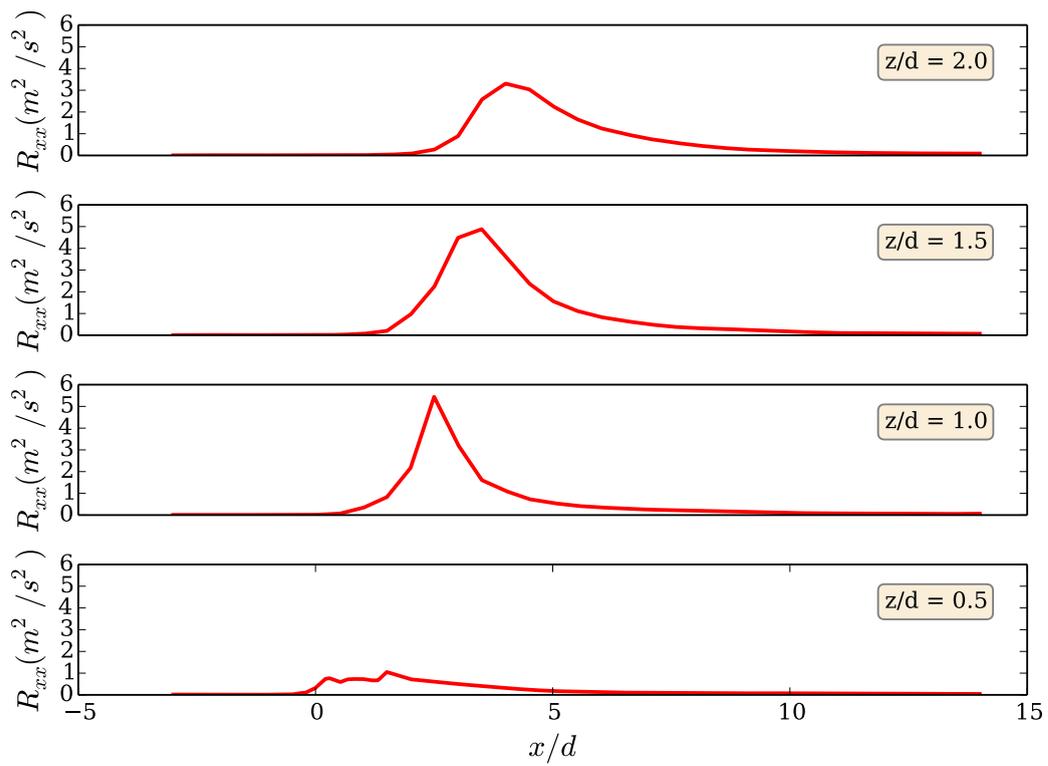


FIGURE 6.28 – Profils axiaux de la première composante du tenseur de Reynolds (R_{xx}) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre deux.

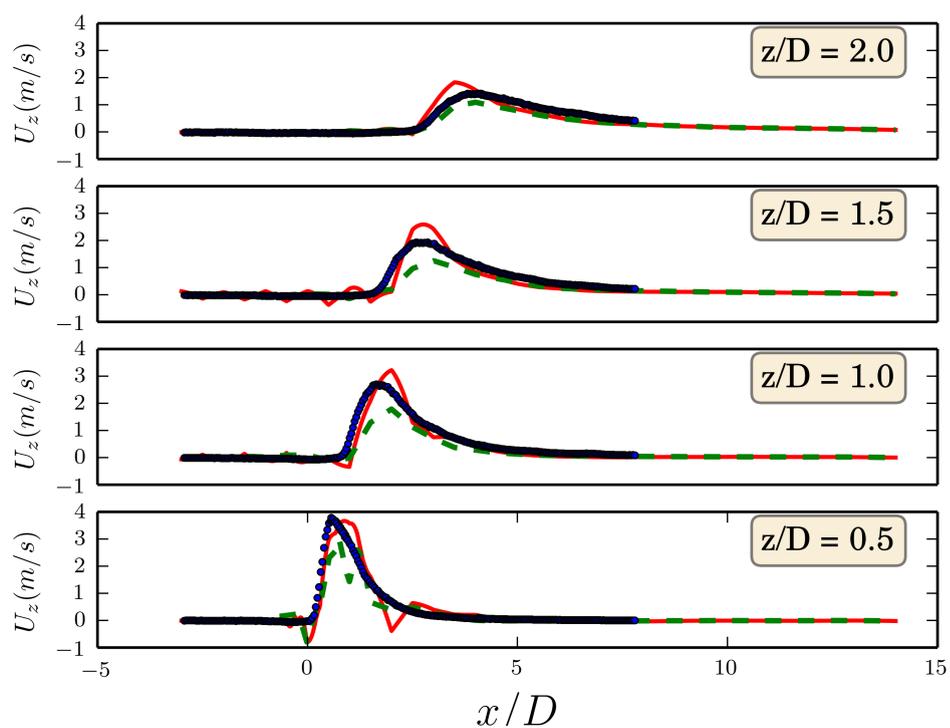


FIGURE 6.29 – Profils axiaux de vitesse verticale moyenne (U_z) dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.

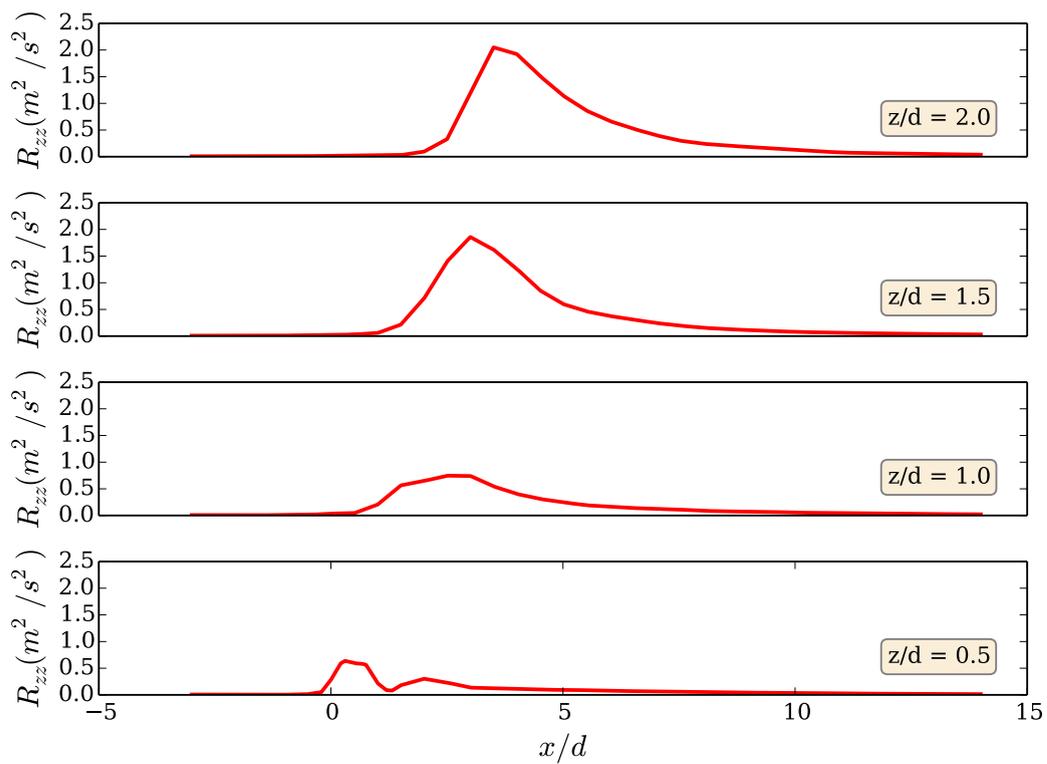


FIGURE 6.30 – Profils axiaux de la composante R_{zz} du tenseur de Reynolds dans le plan médian du jet à différentes distances de la paroi. Ligne continue : DNS, visualisation d'ordre trois. Pointillés : DNS, visualisation d'ordre deux. Points : Mesures PIV.

le banc d'essais MAVERIC nous sommes à même de réaliser des comparaisons au niveau spectral et statistique par comparaison directe des PDF et des spectres de vitesse.

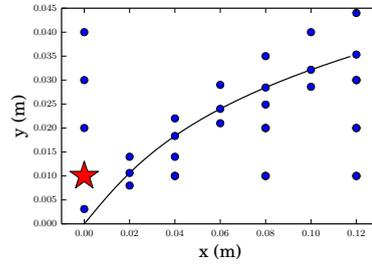
Nous remarquons que la fréquence d'échantillonnage de la mesure par LDV est conditionnée par le nombre de particules traversant le faisceau laser (chapitre 3) et est donc variable d'un point à l'autre de l'écoulement. En particulier, en proche paroi la vitesse du fluide étant faible, la fréquence est faible, de l'ordre de 80Hz. Lorsque l'on s'intéresse aux spectres d'énergie de ces signaux, on a alors accès à une plage de fréquence restreinte qui ne permet pas toujours d'observer la décroissance de l'énergie par dissipation turbulente. En revanche, les calculs DNS nous permettent d'échantillonner le signal à une fréquence beaucoup plus élevée et donc d'avoir accès à une gamme spectrale plus large.

On commence par considérer les propriétés de l'écoulement amont au niveau du perçage. Pour cela on visualise figures 6.31 et 6.32 les PDF et les spectres d'énergie des sondes positionnées dans cette région. Leurs positions sont repérées par l'étoile rouge sur les repères. Dans cette zone, l'écoulement principal est peu influencé par le jet. La comparaison des densités de probabilité de la vitesse axiale montre une très bonne concordance entre la DNS et les résultats expérimentaux. Les profils de densité spectrale d'énergie sont assez semblables et l'on constate une décroissance de la densité d'énergie au delà de valeurs de la fréquence comprises entre 10Hz et 50Hz suivant les sondes. Ainsi, il semble que l'écoulement généré par la méthode SEM [48] reproduise bien l'écoulement réel en amont du jet.

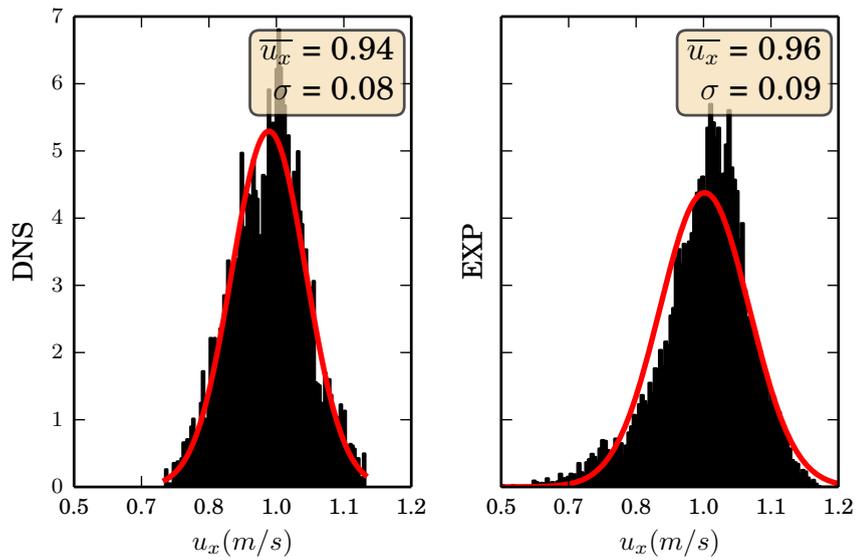
Si on s'intéresse aux signaux sur la trajectoire du maximum des vitesses du jet au sens de Margason [72], présentés figures 6.33 et 6.34, on s'aperçoit que les vitesses moyennes expérimentales et numériques ne s'accordent pas parfaitement même si les ordres de grandeur sont respectés. Cela peut s'expliquer par les fortes vitesses dans cette zone qui rendent très sensibles les résultats à la position de la sonde par rapport au jet. Une légère variation entre les résultats expérimentaux et numériques peut alors se traduire par une grande différence des résultats. On note cependant que les allures des fonctions de densité de probabilité sont globalement identiques. Concernant les densités spectrales d'énergie, on constate numériquement une dissipation au delà de 300Hz qui n'est pas observée expérimentalement du fait de la trop faible fréquence de passage des particules lors des mesures LDV.

Nous regardons maintenant les signaux enregistrés dans la zone sous le jet présentés figures 6.35 et 6.36. On observe que les vitesses moyennes sont bien reproduites dans cette zone et que les formes des fonctions de densité de probabilité sont globalement identiques. On note aussi une décroissance de la densité spectrale d'énergie au delà de 50Hz environ.

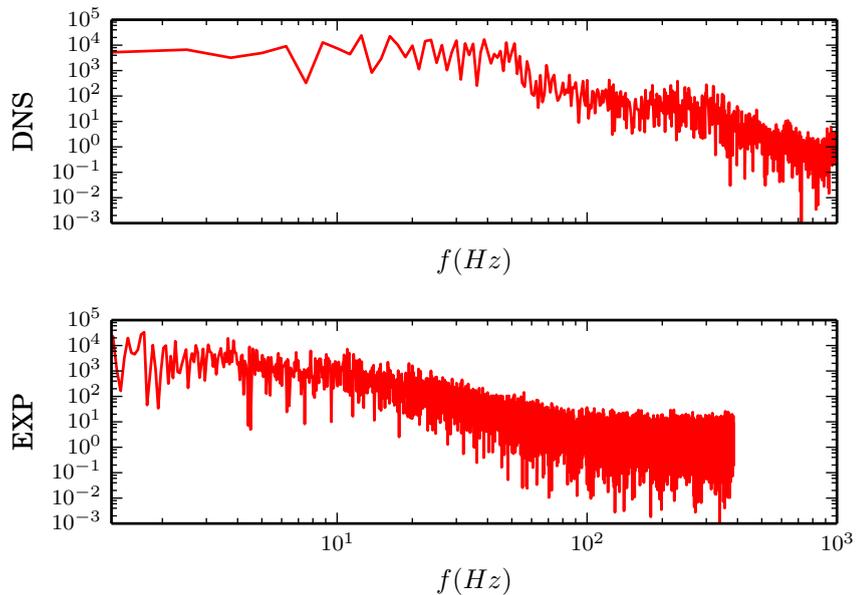
Nous terminerons cette section en présentant les résultats enregistrés dans le perçage (figures 6.37 à 6.42). Nous distinguons deux zones, la première le long de l'axe du perçage où les



(a) Position de la sonde

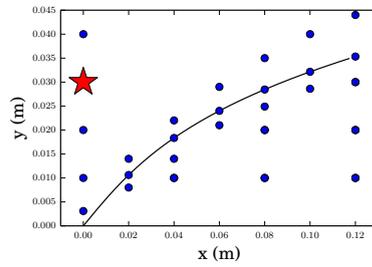


(b) Fonction de densité de probabilité

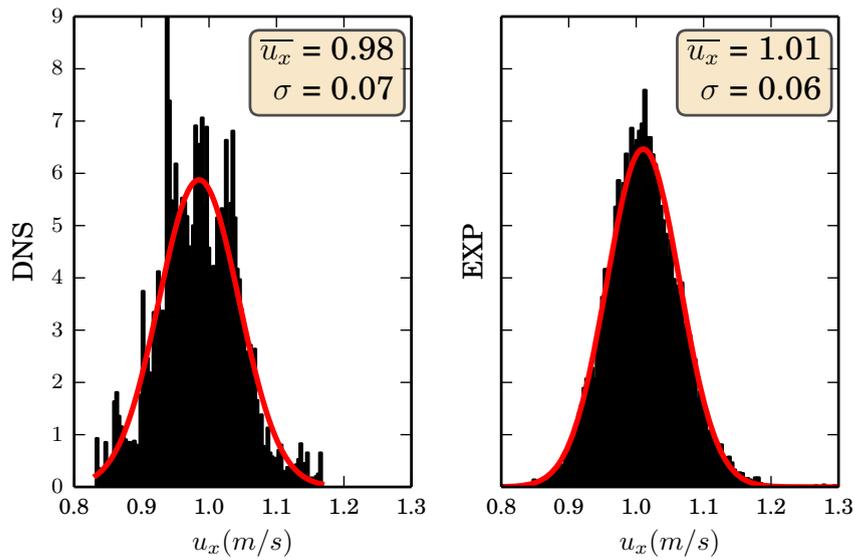


(c) Densité spectrale d'énergie

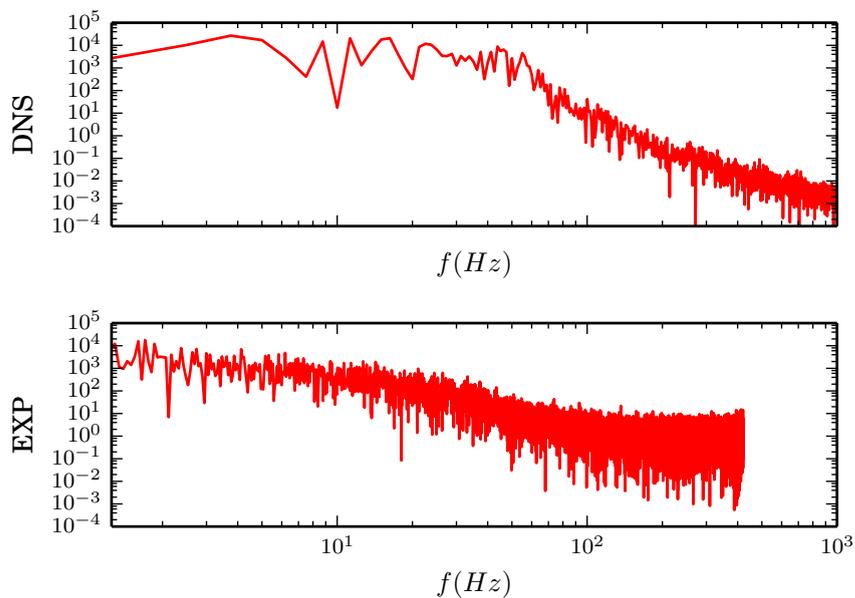
FIGURE 6.31 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans la zone au dessus du perçage. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.



(a) Position de la sonde

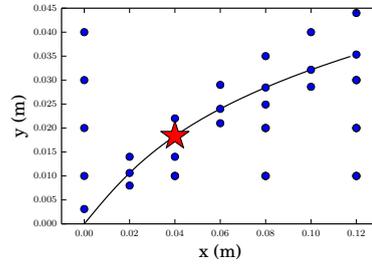


(b) Fonction de densité de probabilité

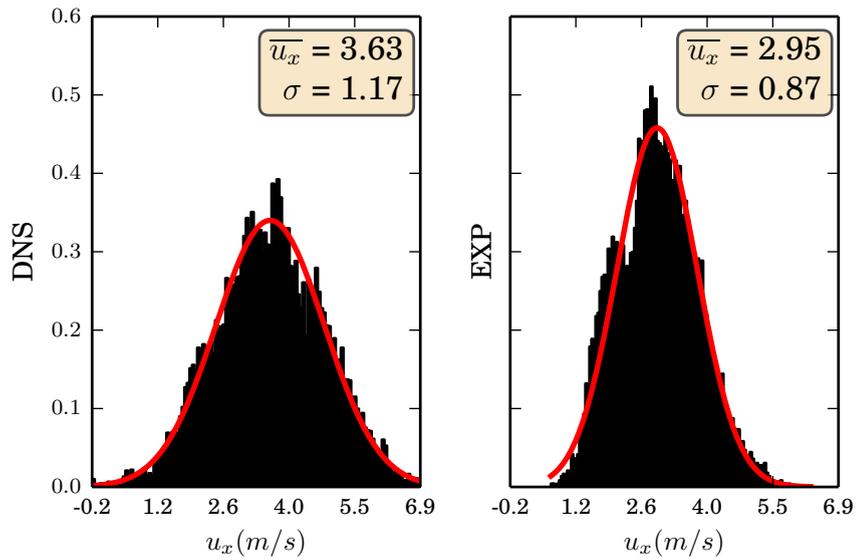


(c) Densité spectrale d'énergie

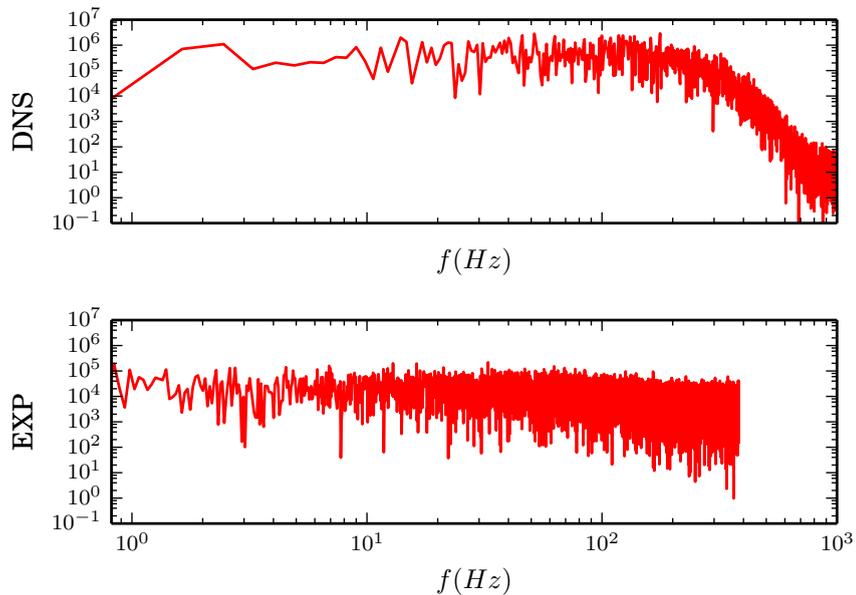
FIGURE 6.32 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans la zone au dessus du perçage. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.



(a) Position de la sonde

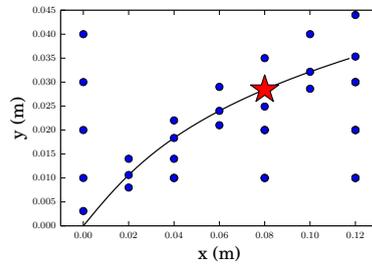


(b) Fonction de densité de probabilité

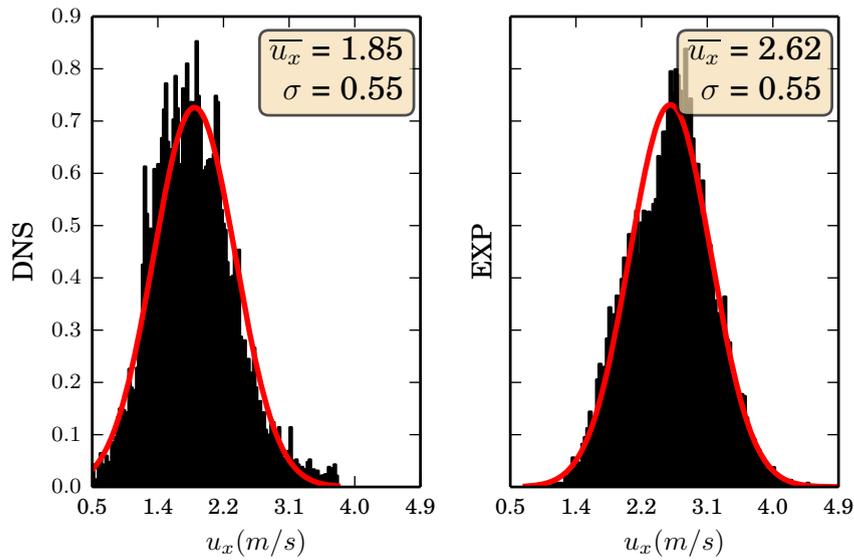


(c) Densité spectrale d'énergie

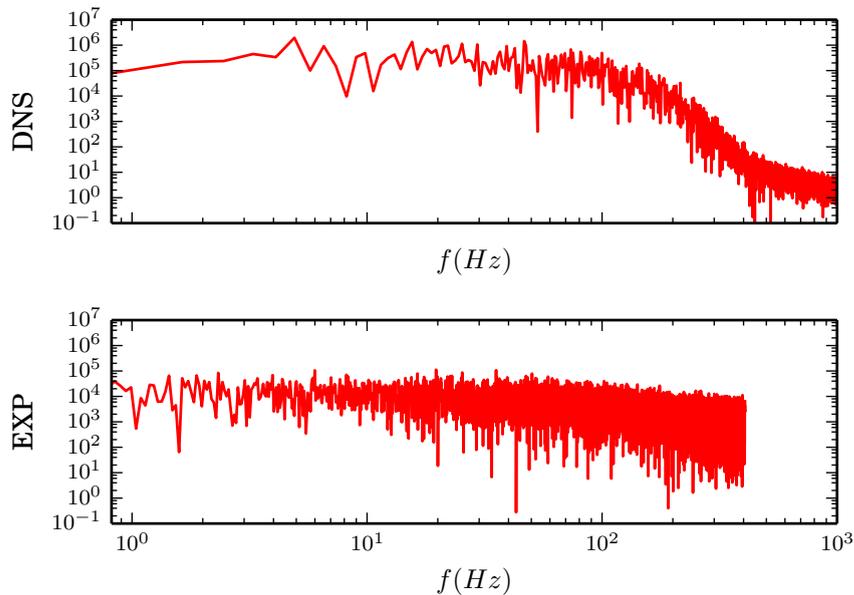
FIGURE 6.33 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.



(a) Position de la sonde

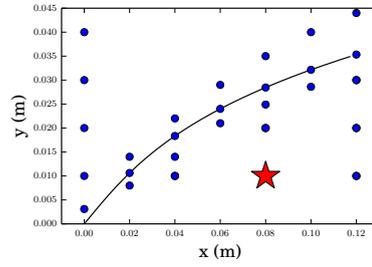


(b) Fonction de densité de probabilité

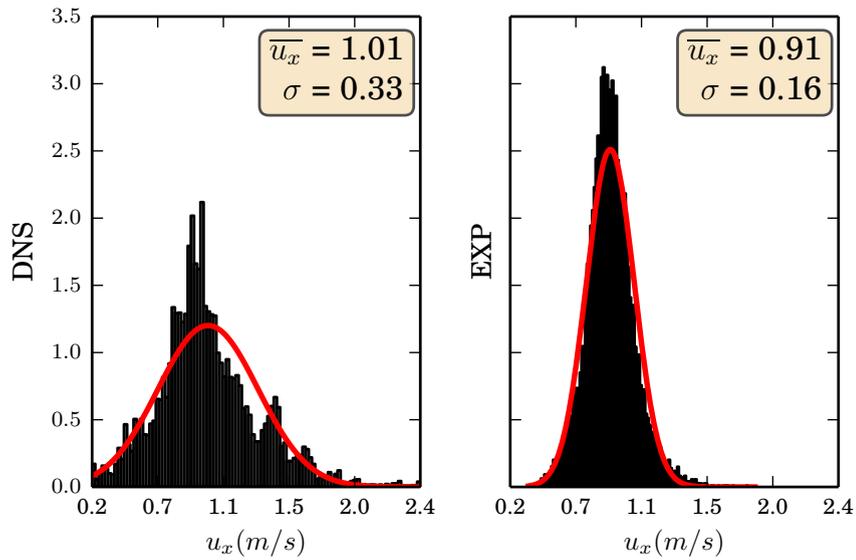


(c) Densité spectrale d'énergie

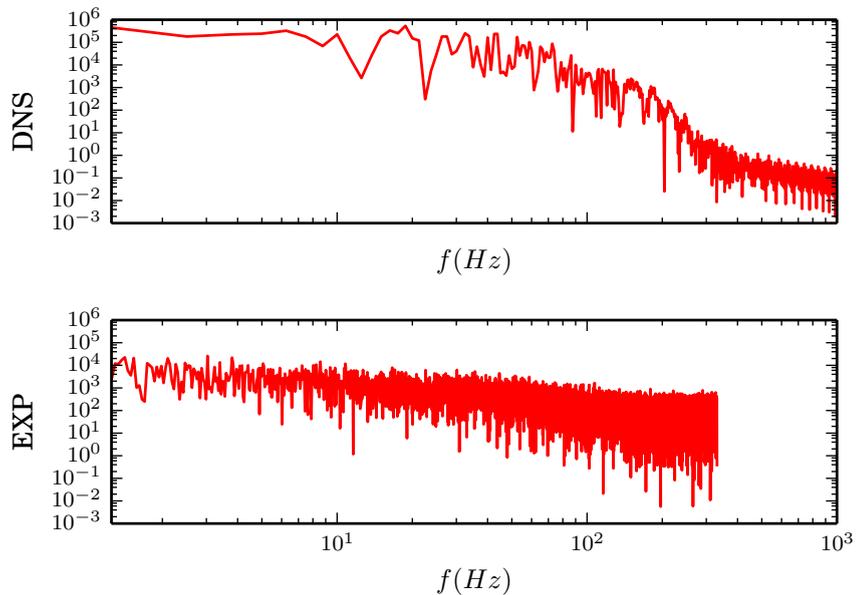
FIGURE 6.34 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde dans le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.



(a) Position de la sonde

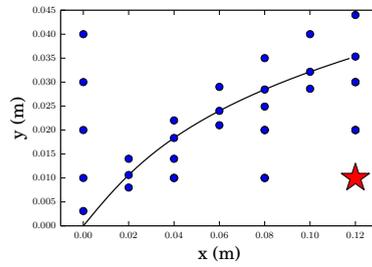


(b) Fonction de densité de probabilité

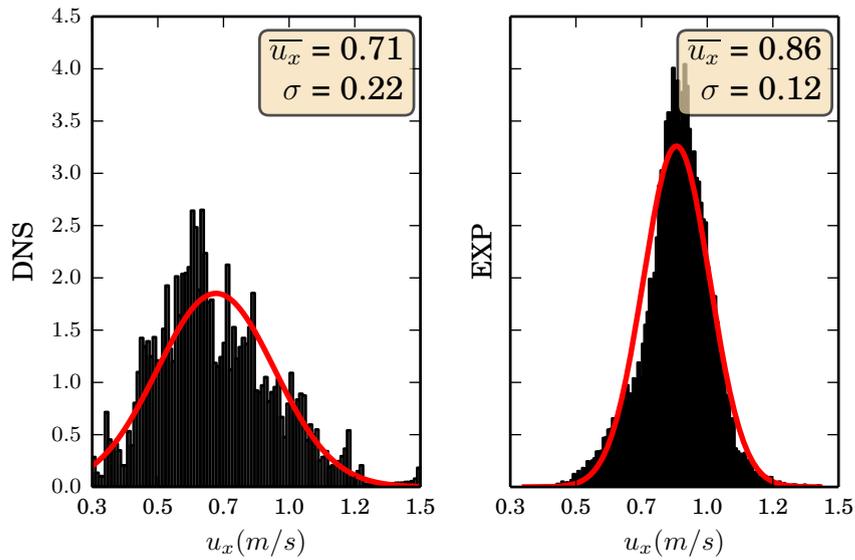


(c) Densité spectrale d'énergie

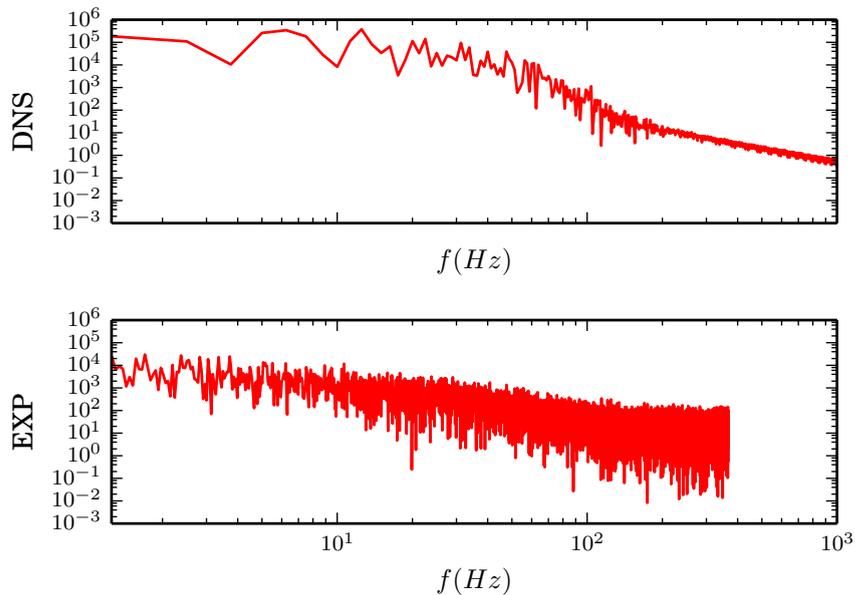
FIGURE 6.35 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde sous le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.



(a) Position de la sonde



(b) Fonction de densité de probabilité



(c) Densité spectrale d'énergie

FIGURE 6.36 – Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse pour une sonde sous le jet. Comparaison des valeurs expérimentales et numériques.

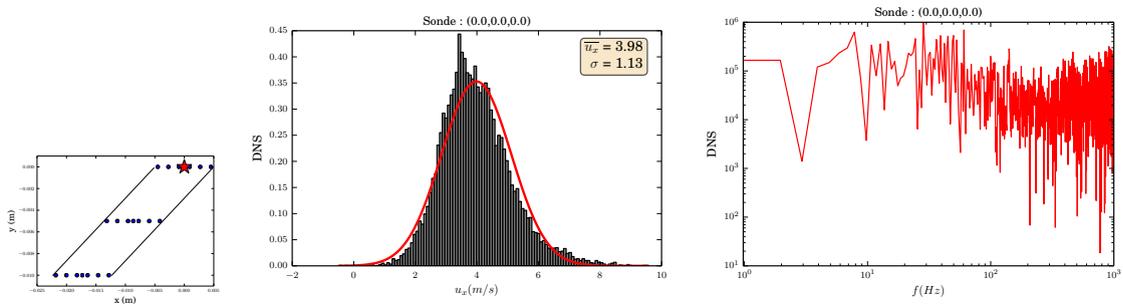


FIGURE 6.37 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d’énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section de sortie du trou.

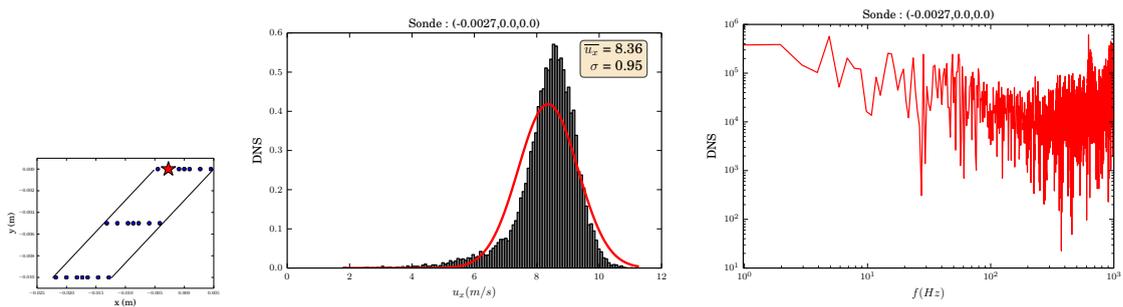


FIGURE 6.38 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d’énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près du bord d’attaque de la section de sortie du trou.

profils des fonctions de densité de probabilité sont gaussiens. Au niveau de la densité d’énergie turbulente, on constate une décroissance de l’énergie au delà de 60Hz puis une remontée à partir de 400Hz suivie d’un pic aux alentours de 700Hz. Dans la seconde zone qui correspond au lieu de maximum de vitesse du jet dans le trou, on obtient les mêmes allures de PDF. On observe tout de même un décentrement du profil de la fonction de probabilité en sortie de trou (figure 6.38). Concernant les spectres d’énergie, le constat est le même que pour les autres sondes du perçage, à savoir une décroissance de la densité spectrale d’énergie au delà de 60Hz puis une ré-augmentation avec un pic aux environs de 700Hz.

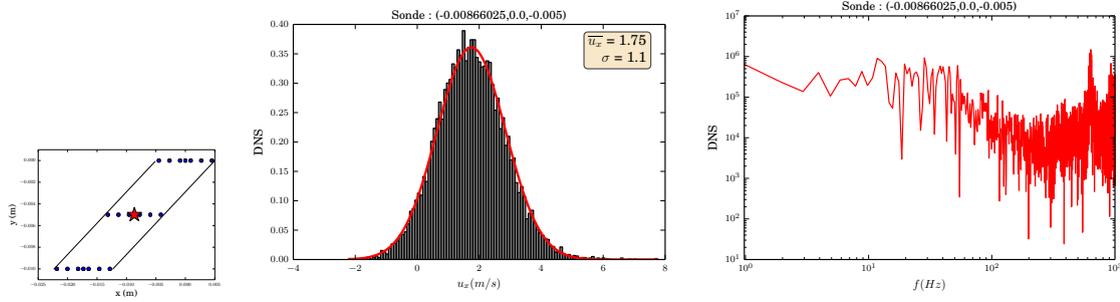


FIGURE 6.39 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section à mi-hauteur du trou.

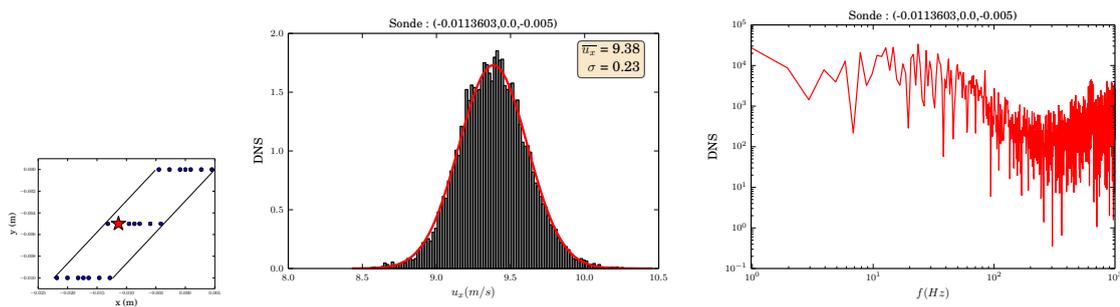


FIGURE 6.40 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près de la paroi amont à mi-hauteur du trou.

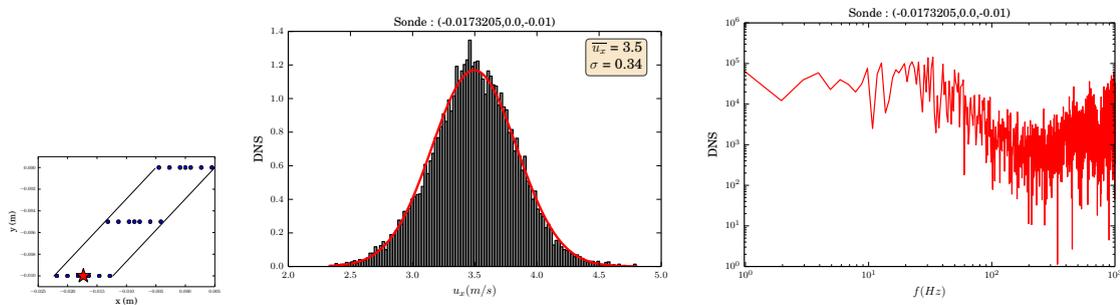


FIGURE 6.41 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues au centre de la section d'entrée du trou.

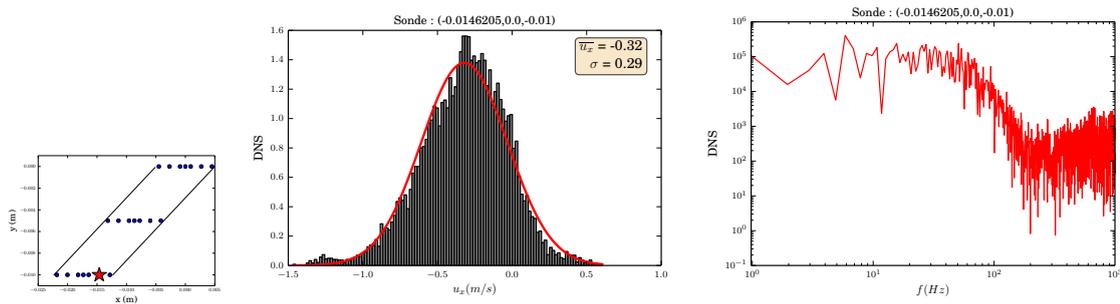


FIGURE 6.42 – DNS : Fonction de densité de probabilité et densité spectrale d'énergie de la composante axiale de la vitesse, obtenues près du bord d'attaque de la section d'entrée du trou.

6.3.4 Configuration avec giration

Le second cas est le cas avec giration de $\beta = 90^\circ$. Comme pour le cas précédent, nous présentons les caractéristiques géométriques du maillage ainsi que les conditions aux limites employées.

6.3.4.1 Dimensionnement du maillage

Les principaux changements proviennent d'une différence de la zone d'influence du jet, qui n'est plus centrée par rapport à l'axe de la veine. Certains des choix effectués dans le cas sans giration ne sont donc plus applicables ici. De plus, expérimentalement, on ne dispose pas de plaque perforée avec giration. Il nous faut donc imaginer une autre méthode pour le dimensionnement du domaine de calcul.

Géométrie

Ne pouvant définir les limites d'influence du jet expérimentalement, nous avons réalisé une série de simulations RANS de cette configuration avec le logiciel SATURNE . Les limites du domaine sont définies de manière itérative, jusqu'à être suffisamment grandes pour permettre au jet de se développer. Pour chaque géométrie, on réalise plusieurs simulations en raffinant le maillage. Les différentes résolutions considérées sont présentées tableau 6.8 en fonction du nombre de mailles. Les résultats obtenus sont présentés figure 6.44. On

	Maillage grossier	Maillage intermédiaire	Maillage fin
Nombre de mailles	10000	45000	140000

TABLE 6.8 – Résolution des différents maillages pour les calculs RANS

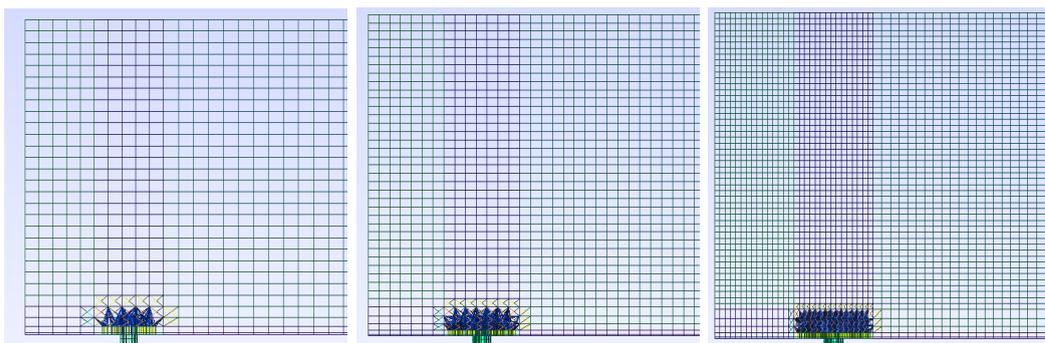
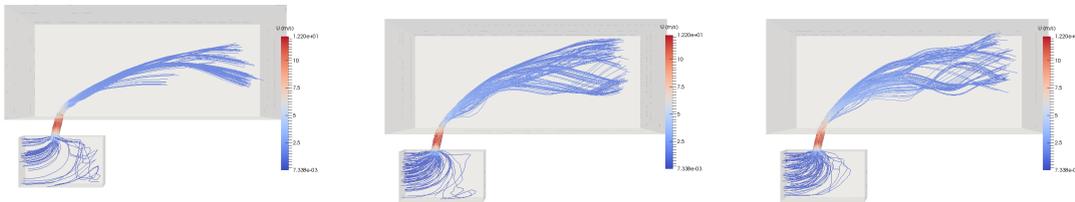


FIGURE 6.43 – Illustration des différents maillages pour les simulation RANS. De gauche à droite du plus fin au plus grossier



(a) Maillage grossier

(b) Maillage intermédiaire

(c) Maillage fin

FIGURE 6.44 – Lignes de courant du jet pour trois résolutions différentes

y représente les lignes de courants passant par le trou. Les dimensions retenues au bout du compte sont résumées tableau 6.9 et figure 6.45. On remarque que la distance entre

	Canal supérieur	Canal inférieur
Longeur amont	$2.5D$	$1.5D$
Longeur aval	$12.5D$	$2.5D$
Largeur à gauche	$2D$	$1D$
Largeur à droite	$8D$	$1D$
Hauteur	$7D$	$3D$

TABLE 6.9 – Dimension du domaine de calcul avec giration

l'entrée du canal supérieur et le bord d'attaque du trou ainsi que les dimensions du canal inférieur sont les mêmes que pour le cas sans giration. Cela est justifié par le fait que la nature de l'écoulement change peu dans ces zones.

Résolution

L'écoulement considéré possède les mêmes caractéristiques physiques et la même vitesse que dans le cas précédent. Ainsi la détermination de la résolution se fait de la même manière que pour le cas sans giration, en se basant sur les travaux [26, 53]. La résolution dans chaque direction est donnée tableau 6.10

Le maillage final, pour une discrétisation spatiale d'ordre trois, est présenté figure 6.46. Il est composé d'environ 30000 éléments, soit un peu plus de 800000 degrés de libertés à l'ordre trois. Le rayon du cercle inscrit dans la plus petite maille est, comme dans le cas sans giration, estimé à $h = 4.358 \cdot 10^{-6} \text{m}$.

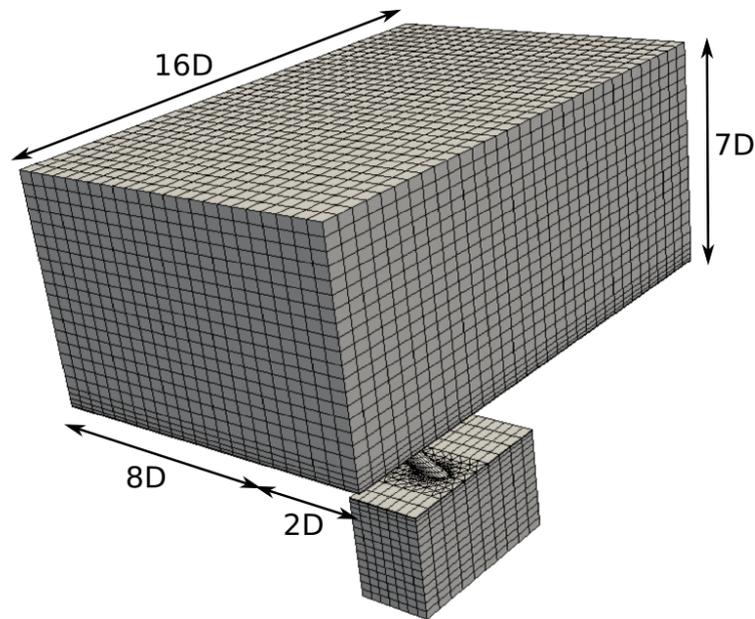


FIGURE 6.45 – Dimension du domaine de calcul pour la cas avec giration

	Kim et al. [53]	Coleman et al. [26]	Cas avec giration
Δx^+	$12y^+$	$17y^+$	$5.6y^+$
Δy^+	$7y^+$	$10y^+$	$4.5y^+$
Progression en z	sinusoïdale	*	sinusoïdale
Δz^+	$0.05y^+ - 4.4y^+$	$0.1y^+ - 7y^+$	$0.33y^+ - 3.9y^+$

TABLE 6.10 – Résolution du maillage dans le cas avec giration

6.3.4.2 Conditions aux limites

Pour définir les conditions aux limites du domaine, on distingue dix zones, présentées figure 6.47. Les conditions appliquées sont les suivantes :

- Zones 1 et 2. Ces zones correspondent aux parois de la plaque plane et du perçage. On impose donc une condition de paroi non glissante adiabatique.
- Zones 3 et 7. Ce sont les entrées des canaux supérieur et inférieur. Suivant les étapes du calcul, on y impose des profils de vitesse parabolique ou les champs turbulents synthétiques générés par la méthode SEM (chapitre 4).

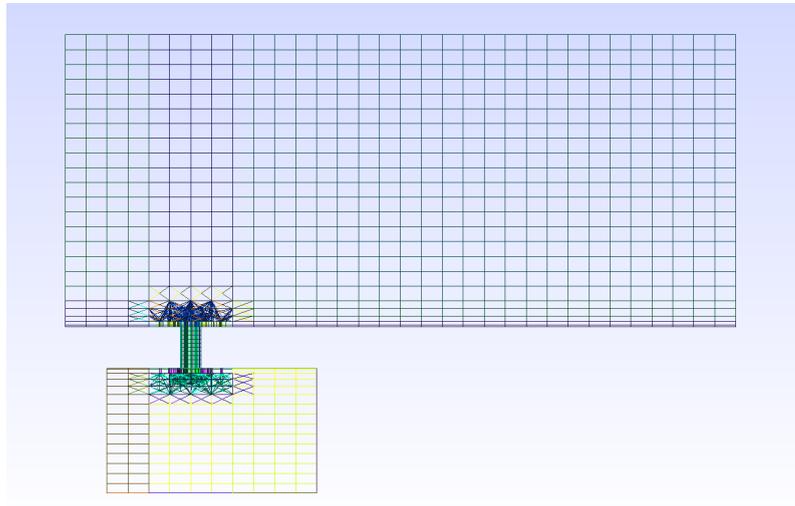


FIGURE 6.46 – Maillage du domaine de calcul pour le cas sans rotation

- Zones 4, 5, 8 et 9. Sortie libre de domaine de calcul. On y impose la pression de référence p_∞ avec la condition de sortie subsonique non réfléchissante présentée section 4.4.1.
- Zones 6 et 10. Conditions aux limites périodiques. En effet malgré la rotation du jet, les frontières du domaine sont suffisamment éloignées de celui-ci pour permettre ce type de conditions.

6.3.4.3 Réalisation du calcul

Le calcul de cette configuration est aussi effectué sur le ordinateur massivement parallèle Turing de l'Idris. Il s'effectue sur 1024 cœurs de calcul en mémoire distribuée. Le temps physique est adimensionné par le temps convectif $t_c = \frac{L}{U_{ref}} = 0.16s$. Et le pas de temps utilisé est le même que pour le cas précédent, à savoir $\Delta t = 7.5 \cdot 10^{-8}s$. On retrouve aussi les mêmes étapes du calcul, c'est à dire :

- Le partitionnement du maillage sur 1024 cœurs de calcul.
- L'initialisation à l'ordre deux sur un temps convectif pour permettre aux ondes transitoires d'évacuer le domaine. On utilise les mêmes profils de vitesse obtenus par calcul RANS (figure 4.11) et le même gradient de pression que dans le cas précédent.
- Reprise du calcul à l'ordre trois durant un temps convectif pour permettre au jet de se développer comme on peut le voir sur la figure 6.48.
- Injection du champ des champs de vitesse turbulents en entrée de domaine (figure 6.48) et calcul du champs moyen durant un temps convectif.

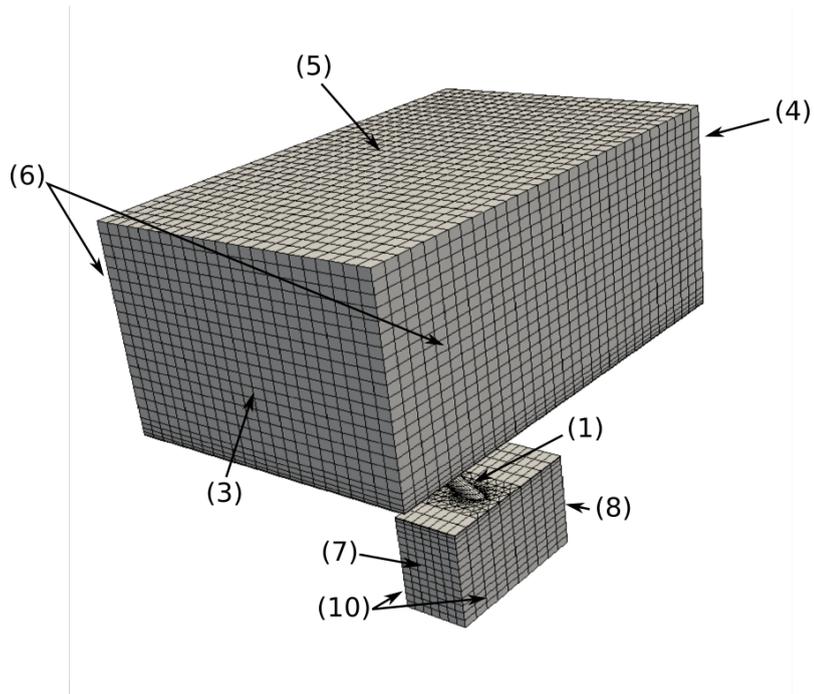


FIGURE 6.47 – Conditions aux limites du domaine de calcul pour la cas sans giration

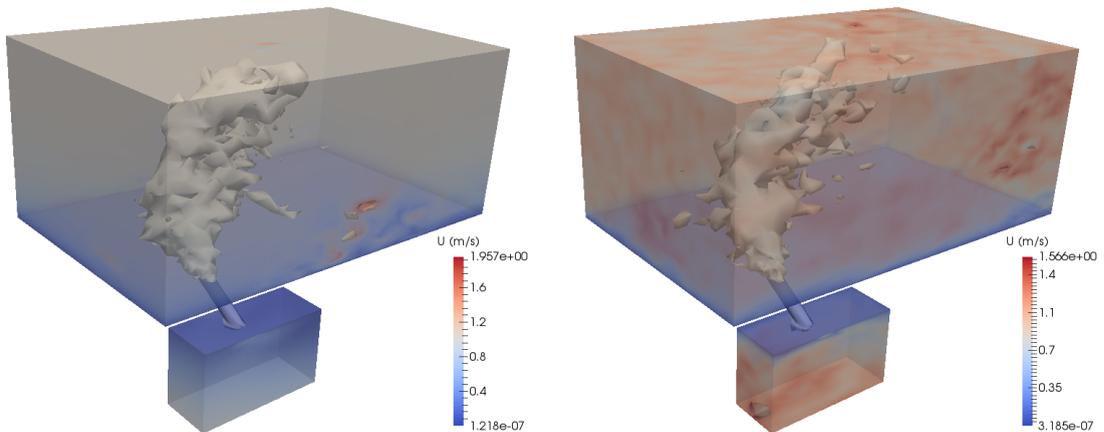


FIGURE 6.48 – Iso-surfaces de la norme de la vitesse du jet à l'ordre trois ($\|\mathbf{u}\| \in [0 : 12.9]\text{m/s}$). À gauche sans turbulence synthétique et à droite avec. Le dégradé de couleur représente la norme de la vitesse en dehors du jet pour permettre la visualisation des fluctuations injectées.

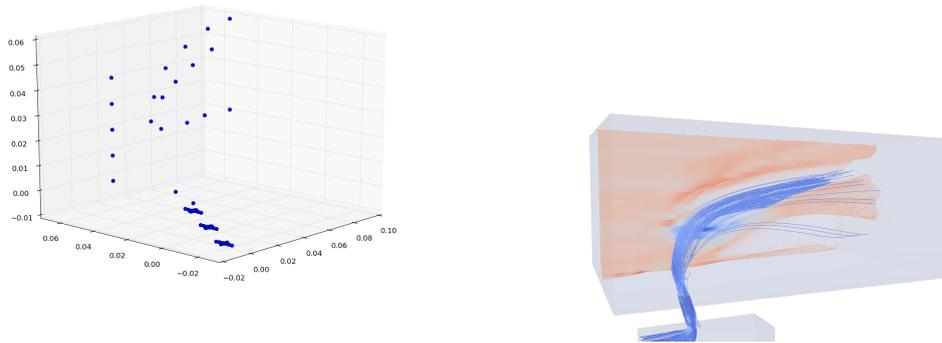


FIGURE 6.49 – Positionnement des sondes dans le domaine de calcul pour le cas avec giration. À gauche la position des sondes et à droite l'intersection des lignes de courant de l'écoulement.

Collecte des statistiques

On positionne alors des sondes dans le domaine de calcul en utilisant les résultats préliminaires sur le champ moyenné. On distingue comme dans le cas sans giration quatre zones.

- La zone du perçage, qui n'est pas accessible au mesure expérimentales.
- La zone de maximum des vitesses définie en utilisant les résultats préliminaires de l'écoulement moyenné sur un temps convectif.
- Les zones de contour. Toujours en utilisant les résultats préliminaires, on tente de définir le lieu de l'intersection du jet avec l'écoulement principale. Pour cela, on cherche l'intersection des lignes de courants passant par le perçage avec celles issues de l'entrée du domaine (figure 6.49)
- La zone inférieure.

La position des sondes dans le plan normal à la paroi passant par le trou est présenté figure 6.49. La fréquence d'échantillonnage est la même que pour le cas précédent, à savoir une prise d'échantillon toutes les 1000 itérations, soit $f = 13\,333\text{Hz}$. On laisse alors le calcul se dérouler.

6.3.4.4 Résultats

Le calcul sans giration étant plus long à réaliser du fait du nombre plus important de degrés de liberté, et ayant commencé plus tard, les statistiques de l'écoulement ne sont pas

convergées comme on peut le constater sur la figure 6.50. En effet, les moments d'ordre trois et quatre de la vitesse axial fluctuent toujours au cours du temps. Nous avons donc fait le choix de ne pas présenter ces résultats, qui feront l'objet d'une étude future.

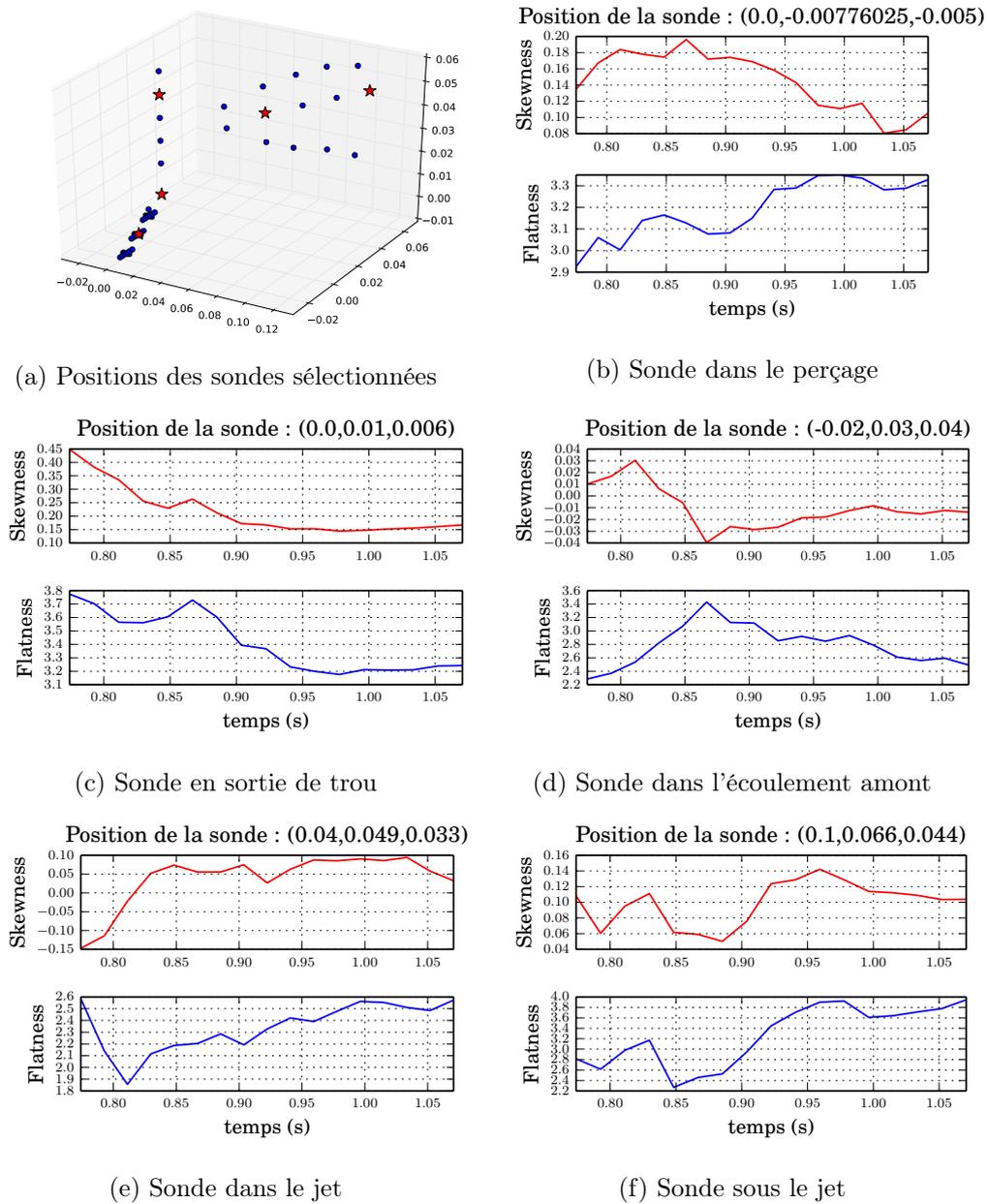


FIGURE 6.50 – Positions des sondes utilisées pour vérifier la convergence des statistiques et convergence des moments d'ordre élevé

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une série d'expériences numériques avec la bibliothèque AEROSOL. Après avoir validé le comportement de celle-ci sur des cas tests académiques d'écoulements visqueux, laminaires puis turbulents, nous avons réalisé deux simulations numériques directes d'un jet en écoulement transverse avec et sans giration. Les paramètres physiques et géométriques de ces calculs ont été introduits, puis nous avons présenté les résultats préliminaires obtenus. Dans le cas sans giration, les statistiques de l'écoulement étant suffisamment convergées, nous avons entrepris une première analyse de ces résultats. En revanche, dans le cas avec giration les calculs ne sont pas suffisamment avancés pour être exploitables. On notera que l'exploitation de ces résultats à l'ordre élevé est un problème complexe qui mérite investigation.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de la simulation numérique directe d'écoulements turbulents à faible nombre de Mach dans le cadre Navier-Stokes compressible. Le contexte applicatif est celui du refroidissement pariétal des parois des chambres de combustion de moteurs aéronautiques. L'écoulement générique associé est celui du jet incliné débouchant dans un écoulement transverse turbulent. Notre revue bibliographique a montré que, si en régime incompressible, un nombre croissant d'études DNS de jets en écoulement transverse apparaissent, ce n'est pas du tout le cas dès lors qu'un contexte compressible est retenu, *a fortiori* à bas nombre de Mach. La difficulté dans ce cas à discrétiser et résoudre à l'ordre élevé les équations de Navier Stokes compressible n'est certainement pas étranger à cet état de fait. Nous avons donc entrepris de développer et d'implanter dans la librairie d'éléments finis Galerkin discontinu AEROSOL tous les outils nécessaires à la réalisation de DNS en régime compressible à bas nombre de Mach avec intégration temporelle explicite. Cela nous a notamment conduit à 1) développer puis implémenter dans AEROSOL un schéma de flux convectif adapté à la simulation instationnaire à l'ordre 3, qui est celle employée pour établir les écoulements, 2) implanter dans AeroSol une stratégie de génération de turbulence synthétique, 3) réaliser des mesures de vitesses sur le banc d'essai Maveric de manière à fournir des points de comparaison avec les résultats de DNS et 4) réaliser la mise en données puis les simulations DNS d'un jet en écoulement transverse sans giration (identique à celui réalisé expérimentalement) et avec giration.

L'analyse préliminaire des résultats obtenus peut être qualifiée de très encourageante. Dans le cas sans giration, les comparaisons DNS-expérimentation, certes d'une ampleur limitée, ont cependant montré que notre DNS représentait correctement la structure de l'écoulement moyen dans le plan médian du jet. De plus, les propriétés statistiques de la composante longitudinale de la vitesse (PDF) se sont avérées très cohérentes entre DNS et mesures LDV et ce dans les différentes régions caractéristiques de l'écoulement. Soulignons ici qu'à notre connaissance, c'est l'une des toutes premières fois qu'une comparaison d'une telle nature est effectuées sur ce type d'écoulement entre DNS et expérience. Enfin, si nous avons

bien réalisé les simulations avec giration, les résultats obtenus n'étaient pas suffisamment convergés statistiquement pour pouvoir les analyser dans le cadre de ce travail. Les difficultés rencontrées au cours de ce travail serviront très certainement à nourrir l'activité de l'équipe dans les prochaines années. Il s'agit en particulier de :

1. L'intégration temporelle qui pourrait avantageusement être remplacée par une intégration implicite.
2. La visualisation d'ordre élevé qui pénalise l'exploitation des résultats.
3. Enfin, le calcul des configurations présentées avec des gradients de températures entre le canal du haut et le canal du bas représentatives du refroidissement par effusion.

Bibliographie

- [1] Sumanta Acharya. Large Eddy Simulations for Film Cooling Turbulence Modeling. Technical Report September, 1999.
- [2] M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz. Dispersive and Dissipative Properties of Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Second-Order Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3) :5–40, jan 2006.
- [3] L Albugues. *Analyse expérimentale et numérique d'un jet débouchant dans un écoulement transverse*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2005.
- [4] Jannis Andreopoulos and Wolfgang Rodi. Experimental investigation of jets in a crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 138 :93–127, 1984.
- [5] F Archambeau, N Mechtoua, and M Sakiz. A finite volume method for the computation of turbulent incompressible flows - industrial applications. *Int. J. Finite Volumes*, 1 :1–62, 2004.
- [6] Douglas Arnold, Franco Brezzi, Cockburn Bernardo, and Marini Donatella. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 39, 2002.
- [7] Douglas N Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4) :742–760, 1982.
- [8] Shervin Bagheri, Philipp Schlatter, Peter J Schmid, and Dan S Henningson. Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624 :33–44, 2009.
- [9] Michael Baldauf. Stability analysis for linear discretisations of the advection equation with Runge-Kutta time integration. *Journal of Computational Physics*, 227(13) : 6638–6659, 2008.
- [10] F Bassi and S Rebay. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 131(2) :267–279, mar 1997.

-
- [11] F Bassi, S Rebay, G Mariotti, S Pedinotti, and M Savini. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows. In *Proceedings of the 2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pages 99–109. Technologisch Instituut, Antwerpen, Belgium, 1997.
- [12] H Belkhat. Méthode de Galerkin Discontinue isoparamétrique pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Technical report, INRIA - Équipe CAGIRE, 2014.
- [13] G Bergeles, A D Gosman, and B E Launder. Near-field character of a jet discharged through a wall at 30 deg to a mainstream. *AIAA Journal*, 15(4) :499–504, 1977.
- [14] Marc E. Brachet, Daniel I. Meiron, Steven a. Orszag, B. G. Nickel, Rudolf H. Morf, and Uriel Frisch. Small-scale structure of the Taylor–Green vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 130 :411, 1983.
- [15] P Bruel and J Florenciano. Deliverable D.1.3.5 Report on the experimental velocity data base with acoustic forcing for multi-hole plate. KIAI Project. Technical report, 2013.
- [16] P Bruel and A Most. Numerical Assessment of Jet Trajectories Analysis in Film Cooling Systems. *AIAA*, pages 1–8, 2007.
- [17] P Bruel, J.-L. Florenciano, T Kousksou, and T Lederlin. A test facility for assessing simulations of jets in cross flow configurations. In *9th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, Thessaloniq, Grèce, 2012.
- [18] A L Brundage, M W Plesniak, and S Ramadhyani. Influence of coolant feed direction and hole length on film cooling jet velocity profiles. *ASME Paper 99-GT-035*, 1999.
- [19] J R Bull and A Jameson. Simulation of the Compressible Taylor Green Vortex using High-Order Flux Reconstruction Schemes. In *Theoretical Fluid Mechanics Conference*, pages 1–17, 2014.
- [20] J.-B. Chapelier, M. de la Llave Plata, F. Renac, and E. Lamballais. Evaluation of a high-order discontinuous Galerkin method for the DNS of turbulent flows. *Computers & Fluids*, 95 :210–226, may 2014.
- [21] P Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. 2000.
- [22] G Chavent and B Cockburn. The local projection P0P1 Discontinuous-Galerkin Finite Element Method For Scalar Conservation Laws, 1987.
- [23] Y.-H. Choi and C. L. Merkle. The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 1993.

- [24] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186) :411–411, 1989.
- [25] Bernardo Cockburn and Chi-wang Shu. Runge – Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*, 16 (3) :89, 2001.
- [26] GN Coleman, John Kim, and RD Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995.
- [27] R Courant, R Courant, E Isaacson, E Isaacson, M Rees, and M Rees. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5(3) :243–255, 1952.
- [28] Benoit de Laage De Meux. *B. Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale*. PhD thesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique-Poitiers, 2012.
- [29] Stéphane Dellacherie. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *Journal of Computational Physics*, 229(4) : 978–1016, feb 2010.
- [30] P. a. Durbin. Application of a near-wall turbulence model to boundary layers and heat transfer. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 14(4) :316–323, 1993.
- [31] P Dutt. Stable boundary conditions and difference schemes for Navier Stokes equations. *J. Numer. Anal.*, 25(2) :245–267, 1988.
- [32] R W Edwards. Report of the special panel on statistical particle bias problems in laser anemometry. *Journal of Fluids Engineering*, 109 :89–93, 1987.
- [33] Richard L Fearn and Robert P Weston. Induced velocity field of a jet in a crossflow. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 78 :26392, 1978.
- [34] J.L L Florenciano. *Etude de la répose d’un écoulement avec transfert pariétal de masse à un forçage acoustique*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l’Adour, 2013.
- [35] TF Fric and A Roshko. Vortical structure in the wake of a transverse jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994.

- [36] Sergeï Konstantinovich Godunov. *Difference method of numerical computations of discontinuous solutions in hydrodynamic equations*. US Army Foreign Science and Technology Center, 1983.
- [37] Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu, and Eitan Tadmor. Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods. *SIAM Review*, 43(1) :89–112, jan 2001.
- [38] H Guillard. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. IV : P0 approximation on triangular and tetrahedral cells. *Computers & Fluids*, 38(10) : 1969–1972, dec 2009.
- [39] H Guillard and A Murrone. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Computers & Fluids*, 33(4) :655–675, may 2004.
- [40] Herve Guillard and Cecile Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & Fluids*, 28(1) :63–86, jan 1999.
- [41] Bertil Gustafsson. Boundary conditions for time dependent problems with an artificial boundary. *Journal of Computational Physics*, 30 :333–351, 1979.
- [42] F Harlow and a. Amsden. A Numerical Fluid Dynamics Calculation for All Flow Speeds. *Journal of Computational Physics*, 8 :197–213, 1971.
- [43] a. Harten and J. M. Hyman. Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of computational Physics*, 269 :235–269, 1983.
- [44] Ami Harten, Bjorn Engquist, Stanley Osher, and Sukumar R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. III. *Journal of computational physics*, 303 :231–303, 1987.
- [45] Y V Ivanov. Equations for trajectories of jets with acute blast. *Sovetskoe Kotloturlostroenie*, 8, 1952.
- [46] William S Janna. 5.8 Internal Incompressible Viscous Flow. *The Handbook of Fluid Dynamics*, page 62, 1998.
- [47] N. Jarrin, R. Prosser, J.-C. Uribe, S. Benhamadouche, and D. Laurence. Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic Eddy Method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30(3) :435–442, 2009.
- [48] Nicolas Jarrin. *Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence*. PhD thesis, 2008.

- [49] C. Johnson and J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Mathematics of Computation*, 46(173) :1–1, 1986.
- [50] Y Kamonati and I Greber. Experiments on a Turbulent Jet in a Cross Flow. *AIAA Journal*, 10(11) :1425–1429, nov 1972.
- [51] Ann R. Karagozian. Transverse jets and their control. *Progress in Energy and Combustion Science*, 36(5) :531–553, 2010.
- [52] A. Keating, G. De Prisco, and U. Piomelli. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27(5) :777–788, 2006.
- [53] John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177, 1987.
- [54] Sergiu Klainerman and Andrew Majda. Compressible and incompressible fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35(5) :629–651, 1982.
- [55] R Klein. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I : One-Dimensional Flow. *Journal of Computational Physics*, 237, 1995.
- [56] a N Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk Sssr*, 30(1890) :301–305, 1941.
- [57] E. Labourasse and P. Sagaut. Reconstruction of Turbulent Fluctuations Using a Hybrid RANS/LES Approach. *Journal of Computational Physics*, 182(1) :301–336, 2002.
- [58] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2) :269–289, 1974.
- [59] D H Lee and H J Sung. Assessment of turbulent spectral bias in laser Doppler velocimetry. *Experiments in Fluids*, 16 :223–235, 1994.
- [60] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1) :16–42, 1992.
- [61] P. Lesaint and P.-a. Raviart. On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equation. *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 89–145, 1974.
- [62] J. H. Leylek and R. D. Zerkle. Discrete-Jet Film Cooling : A Comparison of Computational Results With Experiments. *Journal of Turbomachinery*, 116(July 1994) :358, 1994.

- [63] Meng Sing Liou. A Sequel to AUSM : AUSM+. *Journal of Computational Physics*, 129 :364–382, 1996.
- [64] Meng Sing Liou. A sequel to AUSM, Part II : AUSM+-up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, 214(1) :137–170, 2006.
- [65] Xu-Dong Liu, Stanley Osher, and Tony Chan. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, 115 :200–212, 1994.
- [66] T. S. Lund, X. Wu, and K. D. Squires. On the Generation of Turbulent Inflow Conditions for Boundary Layer Simulations. *Journal of Computational Physics*, 140 : 233–258, 1998.
- [67] D. G. MacManus and J. a. Eaton. Flow physics of discrete boundary layer suction – measurements and predictions. *Journal of Fluid Mechanics*, 417 :47–75, 2000.
- [68] Andrew Majda and James Sethian. The Derivation and Numerical Solution of the Equations for Zero Mach Number Combustion, 1985.
- [69] R Manceau. Recent progress in the development of the Elliptic Blending Reynolds-stress model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 51 :in press, 2014.
- [70] R Manceau and E Lamballais. Turbulence modelling : RANS, LES and hybrid methods. PREMER course, University of Buenos Aires, Argentina, 2007.
- [71] Rémi Manceau. *Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique*. PhD thesis, 1999.
- [72] Richard J Margason. *The path of a jet directed at large angles to a subsonic free stream*. National Aeronautics and Space Administration, 1968.
- [73] Richard J Margason. Fifty years of jet in cross flow research. In *In AGARD, Computational and Experimental Assessment of Jets in Cross Flow 41 p (SEE N94-28003 07-34)*, volume 1, 1993.
- [74] Yusuke Maruyama, Tetsuro Tamura, Yasuo Okuda, and Masamiki Ohashi. LES of turbulent boundary layer for inflow generation using stereo PIV measurement data. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 104-106 :379–388, 2012.
- [75] D Mbengoue, D Genet, C Lachat, and E Martin. Comparison of algorithm in Aerosol and Aghora for compressible flows. Technical report, 2013.
- [76] S. MEGERIAN, J. Davitian, L S de B Alves, A. R. KARAGOZIAN, L. S. de B. ALVES, and A. R. KARAGOZIAN. Transverse-jet shear-layer instabilities. Part 1. Experimental studies. *Journal of fluid Mechanics*, 593(October 2015) :93–129, 2007.

- [77] S Mendez. *Simulation numérique et modélisation de l'écoulement autour des parois multi-perforées*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2007.
- [78] S Mendez and F Nicoud. Large-eddy simulation of a bi-periodic turbulent flow with effusion. *Journal of Fluid Mechanics*, 598 :27–65, 2008.
- [79] Knud Erik Meyer, Dalibor Cavar, and Jakob Martin Pedersen. POD as tool for comparison of PIV and LES data. In *7th International Symposium on Particle Image Velocimetry*, 2007.
- [80] B Michel. *Caractérisation aérodynamique d'un écoulement avec injection pariétale de type dilution giratoire en vue de sa modélisation*. PhD thesis, ISAE, 2008.
- [81] P Miron. *Étude expérimentale des lois de parois et du film de refroidissement produit par une zone multiperforée sur une paroi plane*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2005.
- [82] Yann Moguen, Tarik Kousksou, Pascal Bruel, Jan Vierendeels, and Erik Dick. Pressure–velocity coupling allowing acoustic calculation in low Mach number flow. *Journal of Computational Physics*, 231(16) :5522–5541, jun 2012.
- [83] Yann Moguen, Erik Dick, Jan Vierendeels, and Pascal Bruel. Pressure–velocity coupling for unsteady low Mach number flow simulations : An improvement of the AUSM+-up scheme. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 246 : 136–143, jul 2013.
- [84] Yann Moguen, Simon Delmas, Vincent Perrier, Pascal Bruel, and Erik Dick. Godunov-type schemes with an inertia term for unsteady full Mach number range flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 281 :556–590, 2015.
- [85] F. Montomoli and S. Eastwood. Implementation of synthetic turbulence inlet for turbomachinery LES. *Computers & Fluids*, 46(1) :369–374, 2011.
- [86] A Most. *Étude numérique et expérimentale des écoulements pariétaux avec transfert de masse à travers une paroi multi-perforée*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2007.
- [87] Frank Muldoon and Sumanta Acharya. Direct Numerical Simulation of pulsed jets-in-crossflow. *Computers and Fluids*, 39(10) :1745–1773, 2010.
- [88] B Müller. Low Mach number asymptotics of the Navier-Stokes equations and numerical implications. 1999.

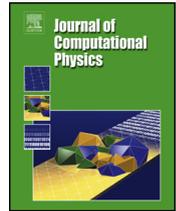
- [89] Suman Muppidi and Krishnan Mahesh. Direct Numerical Simulation of Turbulent Jets in Crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 574 :59—84, 2007.
- [90] Krista Nerinckx, Jan Vierendeels, and Erik Dick. Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm. *Journal of Computational Physics*, 206(2) :597–623, jul 2005.
- [91] D Nguyen. *Contribution expérimentale à l'étude des caractéristiques instationnaires des écoulements turbulents réactifs prémélangés stabilisés en val d'un élargissement brusque symétrique*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2003.
- [92] A Nigro. *Discontinuous Galerkin method for inviscid low Mach number flows*. PhD thesis, 2008.
- [93] A Nigro, C De Bartolo, R Hartmann, and F Bassi. Discontinuous Galerkin solution of preconditioned Euler equations for very low Mach number flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pages 449–467, 2010.
- [94] J Oliger and A Sundström. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35, 1978.
- [95] Mathieu Pamiès, Pierre Élie Weiss, Eric Garnier, Sébastien Deck, and Pierre Sagaut. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 21, 2009.
- [96] SV Patankar and DB Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass ...*, 1972.
- [97] Mi A Patrick. Experimental investigation of mixing and flow in a round turbulent jet injected perpendicularly into a main stream. *Journal of the Institute of Fuel*, 40 (320) :425, 1967.
- [98] K M Peery and S T Imlay. Blunt-body flow simulations. *AIAA*, 88(2904), 1988.
- [99] Yulia V Peet. *Film cooling from inclined cylindrical holes using large eddy simulations*. 2006.
- [100] Yulia V. Peet and Sanjiva K. Lele. Near Field of Film Cooling Jet Issued Into a Flat Plate Boundary Layer : LES Study. *Volume 4 : Heat Transfer, Parts A and B*, pages 409–418, 2008.
- [101] Todd E. Peterson. A Note on the Convergence of the Discontinuous Galerkin Method for a Scalar Hyperbolic Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1) : 133–140, 1991.

- [102] T. J. Poinso and Sanjiva K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101 :104–129, 1992.
- [103] C Prière. *Simulations aux grandes échelles : application au jet transverse*. PhD thesis, INP-Toulouse, 2005.
- [104] Wm H Reed and TR Hill. Triangularmesh methodsfor the neutrontransportequation. *Los Alamos Report LA-UR-73-479*, 1973.
- [105] O Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of . . .*, 1895.
- [106] Gerard R. Richter. An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method. *Mathematics of Computation*, 50(181) :75–75, 1988.
- [107] F Rieper. A low-Mach number fix for Roe’s approximate Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 230(13) :5263–5287, 2011.
- [108] F Rieper and G Bader. The influence of cell geometry on the accuracy of upwind schemes in the low mach number regime. *Journal of Computational Physics*, 228(8) : 2918–2933, may 2009.
- [109] P L Roe and J Pike. Efficient construction and utilization of approximate Riemann solution. In *6th International Symposium on Computing Methods in Applied Science and Engineering*, pages 499–518. North-Holland Publishing Co., 1984.
- [110] P.L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 135(2) :357–372, aug 1981.
- [111] D. H. Rudy and J. C. Strikwerda. Boundary conditions for subsonic compressible Navier-Stokes calculations. *Computers & Fluids*, 9 :327–338, 1981.
- [112] David H. Rudy and John C. Strikwerda. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. *Journal of Computational Physics*, 36 :55–70, 1980.
- [113] S Schochet. Fast singular limits of hyperbolic PDEs. *Journal of Differential Equations*, 1994.
- [114] G S Shandorov. Flow from a channel into stationary and moving media. *Zh. Tekh. Fiz*, 37 :1, 1957.

- [115] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. II. *Journal of Computational Physics*, 439471 : 439–471, 1989.
- [116] J.L Steger and R.F Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamics equations with application to finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40 :263–293, 1981.
- [117] Kevin W Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1) :1–24, 1987.
- [118] Eleuterio F. Toro. A Linearised Riemann Solver for Godunov-Type Methods, 1991.
- [119] Eleuterio F Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1999.
- [120] Ioannis Touloupoulos and John a. Ekaterinaris. Artificial boundary conditions for the numerical solution of the Euler equations by the discontinuous galerkin method. *Journal of Computational Physics*, 230(15) :5974–5995, 2011.
- [121] T. Toulorge and W. Desmet. Optimal Runge–Kutta schemes for discontinuous Galerkin space discretizations applied to wave propagation problems. *Journal of Computational Physics*, 231(4) :2067–2091, feb 2012.
- [122] E Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of computational physics*, 298, 1987.
- [123] Z Wu, D Laurence, and I Afgan. DNS of a Jet in Cross Flow with Passive Scalar Mixing. In *Turbulence, Heat and Mass Transfert 8*, pages 1–12, 2015.
- [124] S Yavuzkurt, R J Moffat, and W M Kays. Full-coverage film cooling. Part 1. Three-dimensional measurements of turbulence structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 101 (01) :129–158, 1980.
- [125] Lester L Yuan, Robert L Street, and Joel H Ferziger. Large-eddy simulations of a round jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 379 :71–104, 1999.
- [126] X Zhang and MW Collins. Flow and heat transfer in a turbulent boundary layer through skewed and pitched jets. *AIAA journal*, 31(9) :1590–1599, 1993.

Annexe A

Article paru dans Journal of
Computational Physics



Godunov-type schemes with an inertia term for unsteady full Mach number range flow calculations



Yann Moguen^{a,*}, Simon Delmas^a, Vincent Perrier^b, Pascal Bruel^c, Erik Dick^d

^a Université de Pau et des Pays de l'Adour LMAP UMR 5142 and Inria CAGIRE Team – Avenue de l'Université – 64 013 Pau, France

^b Inria CAGIRE Team, Université de Pau et des Pays de l'Adour LMAP UMR 5142 – Avenue de l'Université – 64 013 Pau, France

^c CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour LMAP UMR 5142 and Inria CAGIRE Team – Avenue de l'Université – 64 013 Pau, France

^d Ghent University – Department of Flow, Heat and Combustion Mechanics, Sint-Pietersnieuwstraat, 41 – 9 000 Gent, Belgium

ARTICLE INFO

Article history:

Received 8 March 2014

Received in revised form 13 September 2014

Accepted 18 October 2014

Available online 24 October 2014

Keywords:

All Mach number schemes

AUSM schemes

Godunov-type schemes

Low Mach number

Momentum interpolation

ABSTRACT

An inertia term is introduced in the AUSM⁺-up scheme. The resulting scheme, called AUSM-IT (IT for *Inertia Term*), is designed as an extension of the AUSM⁺-up scheme allowing for full Mach number range calculations of unsteady flows including acoustic features. In line with the continuous asymptotic analysis, the AUSM-IT scheme satisfies the conservation of the discrete linear acoustic energy at first order in the low Mach number limit. Its capability to properly handle low Mach number unsteady flows, that may include acoustic waves or discontinuities, is numerically illustrated. The approach for building the AUSM-IT scheme from the AUSM⁺-up scheme is applicable to any other Godunov-type scheme.

© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Convective and acoustic waves may propagate together in compressible flows, at time and space scales that may be very different, and with possible interactions. Design of numerical methods able to handle properly these phenomena remains a challenging task, even if viscous effects are neglected. With a co-located arrangement of the unknowns, accuracy and robustness of the numerical method depend on the way of interpolation on the cell or element faces. Two broad categories of methods can be identified, according to the equations they are derived from: (1) Methods solving a Riemann problem at each face by using characteristic equations (these methods are referred to as Godunov-type schemes in the present study); (2) Momentum interpolation methods, derived from the momentum equation. In our opinion, the relations between these two approaches merit investigation in order to improve their respective capabilities.

The difficulties arising at low Mach number when Godunov-type schemes are used have been widely studied, mainly for steady calculations (see e.g. [1–3,11]). Denoting by M_r a reference Mach number in the flow, it has been recognized that avoiding the checkerboard decoupling problem needs a $1/M_r^2$ -scaling of the pressure gradient term in the face velocity or the face mass flux. This $1/M_r^2$ -scaling implies that the thermodynamic and the acoustic pressures are constant in space at the convective scale, which conforms to the continuous asymptotic analysis, provided that suitable boundary conditions are adopted (see e.g. [3,6]). For AUSM-type schemes, it was shown by Dellacherie [1] that the $1/M_r^2$ -scaling is also necessary for avoiding spurious acoustic waves when starting from so-called well-prepared initial conditions. However, there

* Corresponding author. Tel.: +33 5 59 40 75 52.

E-mail address: yann.moguen@univ-pau.fr (Y. Moguen).

is experimental evidence that this property does not guarantee accurate calculation of acoustic propagation in low Mach number flows. In our earlier work [15], it was thus observed that for unsteady calculations of low Mach number flows, the presence of the time-step in the pressure–velocity coupling coefficient of the face velocity, as for momentum interpolation, is beneficial. Based on this observation, an improvement of the AUSM⁺-up scheme was then proposed in [14], by mimicking the pressure–velocity coupling of the momentum interpolation. However, we noted that the quality of the momentum interpolation, if properly defined for unsteady calculations in a Rhie–Chow-like manner (see [15–17]), was not reached for some tests at low Mach number. Improvement of predictions for unsteady low Mach number flows by the AUSM⁺-up scheme and the related SLAU scheme (Simple Low Dissipative AUSM) by introduction of Strouhal number dependence in the coefficient of the pressure dissipation term in the mass flux expression was also obtained by Sachdev et al. [19]. These authors demonstrated that the scaling of the coupling coefficient has to be quite different for steady low Mach number problems and for unsteady low Mach number problems. By changing the scaling, they proved significant improvement with the AUSM⁺-up scheme for unsteady low Mach number problems with hydrodynamic coupling between velocity and pressure (vortex propagation) and with acoustic coupling (propagation of a pressure oscillation and propagation of weak shocks and expansion fans). They also illustrated oscillatory behavior of the SLAU method for steady low Mach number flows. However, it remains unclear how to combine the different scaling factors and, for instance, to ensure that the correct steady scaling is obtained for the solution of a steady low Mach number problem calculated with an unsteady method. A similar remark holds for our own work [14]. A particular problem with the AUSM⁺-up method is that the damping by the pressure difference term in the mass flux expression which is appropriate for steady low Mach number flow is too high for propagation of smooth acoustic signals in unsteady low Mach number flows. On the other hand, as observed by Sachdev et al. [19], the dissipation is too low for propagation of acoustic discontinuities (low Mach number Riemann problems). So, it becomes very delicate to tune the pressure dissipation such that it functions properly for the different types of low Mach number flows. Too low pressure dissipation in the mass flux definition of the SLAU method for simulation of propagation of discontinuities in low Mach number flows was also remarked by Shima [20]. He proved that it is possible to eliminate oscillations by increasing the coefficient of the pressure dissipation term in the mass flux definition by a sensor for wiggles. Of course, the larger dissipation smears somewhat the discontinuities. The conclusion is that methods that rely on tuning of the coefficient of the pressure dissipation term in the mass flux definition in AUSM-type discretizations are very delicate and certainly have not reached maturity yet.

Observing that an inertia term is present in the face velocity expression by the momentum interpolation, and missing in the face velocity expression by the scheme proposed in [14], we propose in the present study to introduce this inertia term in the face velocity of Godunov-type schemes. The momentum interpolation is used as a guideline to accommodate this term. The resulting pressure–velocity coupling exhibits then the suitable $1/M_r^2$ -scaling for low Mach number steady calculations. In the unsteady case, the pressure–velocity coupling exhibits also the proper Mach number scaling and time-step dependence, identified in [14,15]. Moreover, the inertia term is introduced such that the steady state, if it exists, does not depend on the time-step.

As pointed out in [1,2], an asymptotic property providing insights for the design of Godunov-type schemes that remain accurate at low Mach number is the linear acoustic energy conservation in the low Mach number regime, which holds if periodic boundary conditions are adopted. This property is used in the present study as a guideline to assess the proper way of inertia term interpolation, as well as the proper way of pressure interpolation, in order to enforce the acoustic energy conservation at the discrete level.

The key point is that, if the acoustic component of the pressure is centrally interpolated in the low Mach number limit, the presence of the inertia term in the face velocity enforces acoustic energy conservation at the discrete level. More precisely, the $1/M_r$ -scaling of the numerical dissipation that arises from the spatial discretization of the linear acoustic wave equation, is thus counterbalanced. Conservation of acoustic energy is clearly a prerequisite for accurate calculation of unsteady low Mach number flows including acoustic features.

2. Foundation of Godunov-type schemes on characteristic equations

In this section, the Mach number scaling of the pressure gradient term in the face velocity expression of Godunov-type schemes is examined in the light of the characteristic equations from which these schemes are drawn.

Reference pressure p_r , density ρ_r and velocity v_r thought of as a convective quantity, are introduced. A reference Mach number is then defined as $M_r = v_r / \sqrt{p_r / \rho_r}$. Reference length l_r and duration t_r , thought of as a convective quantity, are also considered, as well as a reference Strouhal number, $St_r = (l_r / v_r) / t_r$. Notice that it is possible to choose the reference length l_r as $t_r \sqrt{p_r / \rho_r}$, which is an acoustic length. Then, the reference Strouhal and Mach numbers are related by $St_r = 1/M_r$. Here however, the possibility is left open for another choice of reference duration, so that we will work with the reference Strouhal number St_r . Associated with the Euler equations in dimensional form,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1a)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = 0, \quad (1b)$$

$$\partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{v}) = 0, \quad (1c)$$

$$E = e + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2, \quad (1d)$$

$$\rho H = \rho E + p, \quad (1e)$$

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1}, \quad (1f)$$

the dimensionless 1-D characteristic equations read as¹:

$$dv - \frac{1}{M_r} \frac{dp}{\rho c} = 0 \quad \text{on } St_r d_t x = v - \frac{c}{M_r}, \quad (2)$$

$$d\rho - \frac{1}{c^2} dp = 0 \quad \text{on } St_r d_t x = v,$$

$$dv + \frac{1}{M_r} \frac{dp}{\rho c} = 0 \quad \text{on } St_r d_t x = v + \frac{c}{M_r}. \quad (3)$$

A prototypical AUSM-type interpolation, which can be thought of as a common starting point for the different variants presented by Liou et al. [10–12], can be derived from the characteristic equations (2) and (3) as follows. From Eq. (3), where the inertia term is omitted,

$$\partial_x v^+ + \frac{1}{M_r \rho c} \partial_x p^+ = 0. \quad (4)$$

The superscript + indicates here the propagating direction. With $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, Eq. (4) is discretized on the control volume $[x_i, x_{i+1}]$ into

$$\frac{v_{i+1}^+ - v_i^+}{\Delta x} + \frac{1}{M_r(\rho c)_{i+1/2}} \frac{p_{i+1}^+ - p_i^+}{\Delta x} = 0,$$

from which we obtain

$$\frac{v_i^+ + v_{i+1}^+}{2} = v_i^+ - \frac{1}{2} \frac{1}{M_r(\rho c)_{i+1/2}} (p_{i+1}^+ - p_i^+).$$

Let

$$v_{i+1/2}^+ = \frac{v_i^+ + v_{i+1}^+}{2}.$$

Then,

$$v_{i+1/2}^+ = v_i^+ - \frac{1}{2} \frac{1}{M_r(\rho c)_{i+1/2}} (p_{i+1}^+ - p_i^+). \quad (5)$$

Similarly, setting

$$v_{i+1/2}^- = \frac{v_i^- + v_{i+1}^-}{2},$$

one has from Eq. (2), where the inertia term is omitted,

$$v_{i+1/2}^- = v_{i+1}^- - \frac{1}{2} \frac{1}{M_r(\rho c)_{i+1/2}} (p_{i+1}^- - p_i^-). \quad (6)$$

Then, setting

$$p_i = \frac{p_i^+ + p_i^-}{2}, \quad p_{i+1} = \frac{p_{i+1}^+ + p_{i+1}^-}{2}$$

and

$$v_{i+1/2} = \frac{v_{i+1/2}^+ + v_{i+1/2}^-}{2},$$

one obtains from Eqs. (5)–(6):

$$v_{i+1/2} = \frac{v_i^+ + v_{i+1}^-}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{M_r(\rho c)_{i+1/2}} (p_{i+1} - p_i). \quad (7)$$

¹ To ease the reading of the following derivations, we keep the same notations for dimensional and non-dimensional quantities.

In the derivation of the face velocity (7), inertia terms are omitted in the acoustic characteristic equations (2) and (3). As a consequence of this omission and of the acoustic origin of expression (7), the Mach number scaling of the pressure gradient term is $1/M_r$. Thus, the pressure gradient term can be thought of as an acoustic quantity that operates, in the low Mach number regime, at the large acoustic length scale solely. However, to fix the checkerboard decoupling at low Mach number, which is a problem that may appear at the small convective length scale if a co-located arrangement is used, the low Mach number scaling of the pressure gradient term should be $1/M_r^2$ at the small convective length scale. This is the reason of the introduction of a scaling function which belongs to $O(M_r)$, and modifies the $1/M_r$ -scaling of the pressure gradient term into the $1/M_r^2$ -scaling at low Mach number, as in [3,8,11,18,21] for example. However, we observe that the $1/M_r^2$ -scaling of the pressure gradient term in the face velocity expression is obvious from the momentum equation (1b). Following further this approach, the inertia term is introduced in the face velocity expression according to its relation to the pressure gradient term in the momentum equation (1b). This yields:

$$v_{i+1/2} = \frac{v_i + v_{i+1}}{2} - \frac{1}{2(\rho c)_{i+1/2} M_r^2} (p_{i+1} - p_i) - \frac{St_r \Delta x}{2c_{i+1/2} M_r} \partial_t v_{i+1/2}. \tag{8}$$

For the pressure at the face, the central interpolation is chosen in the low Mach number regime:

$$p_{i+1/2} = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}. \tag{9}$$

Arguments for the choice of the scheme by Eqs. (8)–(9) is the matter of the next section.

3. Role of inertia term in acoustic energy conservation at low Mach number

In this section, we concentrate on the benefits, at low Mach number, of the presence of an inertia term in the scheme expressed by Eqs. (8) and (9). The linear acoustic energy behavior obtained when this scheme is used, is examined through asymptotic expansions and modified equations.

3.1. Basics of two-scale low Mach number continuous asymptotics

The flow is considered in any dimension $d = 1, 2$ or 3 . In the low Mach number regime, a variable relevant to reveal the behavior of the flow at the large acoustic length scale is introduced as

$$\xi = M_r \mathbf{x}.$$

Then, we assume that the pressure can be expanded as

$$p(\mathbf{x}, t, M_r) = \sum_{n=0}^N M_r^n p^{(n)}(\mathbf{x}, \xi, t) + o(M_r^N), \quad N = 0, 1, 2,$$

with similar expansions for density ρ and velocity \mathbf{v} . After substitution of these expansions into the Euler equations (1) non-dimensionalized with the reference quantities introduced in Section 2, one obtains²:

$$St_r \partial_t \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi p^{(1)} = 0, \tag{10a}$$

$$St_r \partial_t p^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_\xi \cdot \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)} = 0. \tag{10b}$$

At the acoustic length scale, Eqs. (10a) and (10b) can be interpreted as momentum and energy equations, respectively. These equations constitute the first-order wave equation, as evidenced by deriving from them a non-linear equation for acoustic wave propagation,

$$\partial_{tt} p^{(1)} - \nabla \cdot (c_0^2 \nabla_\xi p^{(1)}) = 0,$$

where $c_0 = c_0(\xi, t) = \sqrt{\gamma p^{(0)}(t)/\rho^{(0)}(\xi)}$. Thus, considered at the acoustic length scale, $\widetilde{\mathbf{v}}^{(0)}$ and $p^{(1)}$ are identified as acoustic variables.

3.2. First-order modified equations at the acoustic scale

How the scheme by Eqs. (8) and (9) operates on the acoustic variables identified in Section 3.1 is studied in this section. Considering first the 1-D case, velocity $\widetilde{v}^{(0)}$ and pressure $p^{(1)}$ are inserted into Eq. (8), as

² $\widetilde{\cdot}$ denotes the large scale average, i.e. the average on $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}\| < 1/M_r\}$ as $M_r \rightarrow 0$. This average operation allows to separate features at the acoustic length scale from those at the convective length scale through the so-called sublinear growth lemma; see e.g. Klein [6] or Meister [13] for details.

$$\widetilde{v}_{i+1/2}^{(0)} = \frac{\widetilde{v}_i^{(0)} + \widetilde{v}_{i+1}^{(0)}}{2} - \frac{1}{2(\widetilde{\varrho}^{(0)}c^{(0)})_{i+1/2}M_r^2}(p_{i+1}^{(1)} - p_i^{(1)}) - \frac{St_r \Delta x}{2c_{i+1/2}^{(0)}M_r} \partial_t \widetilde{v}_{i+1/2}^{(0)}, \quad (11)$$

where it is supposed that $\Delta \xi = M_r \Delta x$, which means that the grid size Δx is of the order of the small convective length scale. From Eq. (9), central interpolation of the acoustic pressure is adopted:

$$p_{i+1/2}^{(1)} = \frac{p_i^{(1)} + p_{i+1}^{(1)}}{2}. \quad (12)$$

Suppose that $\widetilde{\varrho}^{(0)}$ and $c^{(0)}$ are constant in space. With the central interpolation (12), at the first order, the modified equation of Eq. (10a) on a Cartesian grid is identical to the original equation. If Δx is equal in each dimension, the same result is obtained for dimension d higher than 1. Similarly, with the obvious multi-dimensional extension of interpolation (11), the first-order modified equation of Eq. (10b) is obtained for dimension $d = 1, 2$ or 3 on a uniform Cartesian grid, as

$$St_r \partial_t p^{(1)} + \gamma p^{(0)} \nabla_{\xi} \cdot \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)} = \frac{c^{(0)} \Delta x}{2M_r} (\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\xi} p^{(1)} + \varrho^{(0)} St_r \partial_t \nabla_{\xi} \cdot \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)}). \quad (13)$$

With Eq. (10a), the right-hand side of Eq. (13) is zero, so that the first-order modified equations of Eqs. (10) are identical to the initial first-order wave equation. The role of the inertia term regarding this property is examined in the following section. Note that the coefficient $c^{(0)} \Delta x / (2M_r)$ in Eq. (13) is equivalent, in the asymptotic framework adopted here, to the numerical viscosity coefficient of Godunov-type schemes for the linear wave equation identified by Dellacherie [1].

3.3. Inertia term requirement for acoustic energy conservation

In this section, $\widetilde{\varrho}^{(0)}$ and $c^{(0)}$ are assumed to be constant in space and time. The linear acoustic energy on the unit torus $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^d$ ($d = 1, 2$ or 3) at low Mach number is

$$E_a = \int_{\mathbb{T}} \left[\frac{1}{2} \widetilde{\varrho}^{(0)} \|\widetilde{\mathbf{v}}^{(0)}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{(p^{(1)})^2}{\widetilde{\varrho}^{(0)}(c^{(0)})^2} \right].$$

Note that

$$d_t E_a = \widetilde{\varrho}^{(0)} \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)} \cdot \partial_t \widetilde{\mathbf{v}}^{(0)} + \frac{1}{\widetilde{\varrho}^{(0)}(c^{(0)})^2} \int_{\mathbb{T}} p^{(1)} \partial_t p^{(1)}. \quad (14)$$

Then, on the one hand, with Eqs. (10a) and (10b),

$$d_t E_a = 0. \quad (15)$$

On the other hand, with first-order modified equations (10a) and (13), Eq. (15) holds too, so that the conservation of acoustic energy for the initial continuous system of equations is retrieved at the first order.

Moreover, one obtains from Eq. (14) and from the first-order modified equations associated with Eqs. (10a)–(10b) that, without an inertia term, acoustic energy is dissipated with the following decrease rate:

$$d_t E_a = - \frac{\Delta x}{2 St_r \widetilde{\varrho}^{(0)} c^{(0)} M_r} \int_{\mathbb{T}} \|\nabla_{\xi} p^{(1)}\|^2 \leq 0.$$

Therefore, as included in Eq. (8), the inertia term compensates the acoustic energy dissipation at the acoustic length scale and at the first order. The conservation of acoustic energy at low Mach number, which is satisfied by the continuous system of Eqs. (10a)–(10b), is thus ensured at the discrete level.

Note that when third-order modified equations associated with Eqs. (10a)–(10b) are derived instead of first-order equations, one readily obtains:

$$d_t E_a = \frac{M_r (\Delta x)^3}{48 St_r \widetilde{\varrho}^{(0)} c^{(0)}} \int_{\mathbb{T}} (\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\xi} p^{(1)})^2.$$

Even if this quantity belongs to $O(M_r^2)$ if the Strouhal number is defined with an acoustic reference length (see Section 2), some risk, in particular for high-order computations, arises from its positivity. It is thus advisable to introduce some Mach number-dependent upwinding in the interpolation of the convective terms in Eq. (11). In the present study, this is carried out through the interface Mach number suggested by Liou [10], as presented in the next section.

4. The AUSM-IT scheme

In this section, we present a Godunov-type scheme with an inertia term, called the AUSM-IT scheme (IT for *Inertia Term*). It is designed such as to satisfy the following properties:

- (1) If the local Mach number exceeds unity, the AUSM⁺-up scheme by Liou [11] is retrieved; this allows to inherit from all the abilities of this well-established scheme in supersonic regime.³
- (2) When M_r goes to zero, the face velocity and face pressure tend to the expressions given in Eqs. (8) and (9); this allows to satisfy the property of acoustic energy conservation at the first order, presented in the previous section.

The AUSM-IT scheme is defined by the following face velocity and face pressure expressions.

- Face velocity:

$$v_{1/2} = c_{1/2} M_{1/2} - \frac{K_p}{\bar{\rho} c_{1/2} f_c(M_0)} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\} \Delta p - \frac{K_I}{c_{1/2} f_c(M_0)} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\} \Delta x \partial_t v_{1/2} \tag{16}$$

$$M_{1/2} = f_M^+(M_L) + f_M^-(M_R)$$

$$f_M^\pm(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m \pm |m|), & |m| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(m \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(m^2 - 1)^2, & |m| < 1 \end{cases}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}$$

$$f_c(M_0) = M_0(2 - M_0), \quad M_0^2 = \min\{1, \max\{\bar{M}^2, M_\infty^2\}\}$$

$$\bar{M}^2 = \frac{(V_n^+)^2 + (V_n^-)^2}{2c_{1/2}^2}$$

$$c_{1/2} = \min\{\tilde{c}_L, \tilde{c}_R\}, \quad \tilde{c}_L = (c^*)^2 / \max\{c^*, V_n^+\}, \quad \tilde{c}_R = (c^*)^2 / \max\{c^*, -V_n^-\}$$

$$(c^*)^2 = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} H$$

$$0 \leq K_p \leq 1, \quad 0 \leq K_I \leq 1, \quad \sigma \leq 1; \text{ typically: } K_p = K_I = 0.25, \sigma = 1$$

- Face pressure:

$$p_{1/2} = f_{p,\alpha}^+(M_L) p_L + f_{p,\alpha}^-(M_R) p_R \tag{17}$$

where

$$f_{p,\alpha}^\pm(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(m)), & |m| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(m \pm 1)^2(2 \mp m) \pm \alpha m(m^2 - 1)^2, & |m| < 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{3}{16} [-4 + 5(f_c(M_0))^2]$$

- Convected quantities: $\varrho, \varrho v, \varrho H$, upwinded as proposed for the AUSM⁺-up scheme by Liou [11], e.g.,

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_L, & \text{if } M_{1/2} - \frac{K_p}{\bar{\rho} c_{1/2}^2 f_c(M_0)} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\} \Delta p \geq 0 \\ \varrho_R, & \text{else} \end{cases}$$

Remark 1. In Eq. (16), the exact form of the term $\partial_t v_{i+1/2}$ depends on the time integration method and is not a specific feature of the AUSM-IT scheme.

Remark 2. The proposed AUSM-IT scheme is an extension of the AUSM⁺-up scheme such that the AUSM⁺-up scheme is retrieved when the face pressure is expressed with $K_v = 0$ and when the inertia term is excluded by taking $K_I = 0$ in Eq. (16).

³ The reader interested by a recent development of the AUSM⁺-up scheme to avoid difficulties related to the global cut-off problem is referred to Li and Gu [9].

Remark 3. Using the AUSM-IT scheme for steady computations is straightforward, since in this case the inertia term $\partial_t v_{1/2}$ in Eq. (16) vanishes. The scheme then reduces to the AUSM⁺-up scheme. Notice that the AUSM-IT scheme ensures time-step independence of the steady state. As shown in [15,16], this property is beneficial for steady as well as unsteady computations.

5. Numerical experiments

The presented test cases are chosen in order to illustrate the full Mach number range capability of the proposed AUSM-IT scheme. The tests allow to assess the role of the inertia term in the face velocity definition, and to compare the performance with other schemes: AUSM⁺ [10], AUSM⁺-up [11], SLAU [4,21], 'JCAM 2013' [14], and the momentum interpolation [15,16] (these schemes are described in Appendix A).

In all the test cases considered in the following, the fluid is air with specific heat ratio $\gamma = 1.4$.

Dissipation and dispersion errors are used to evaluate the quality of the solution when a reference solution is available. The methodology proposed by Takacs [22] (see also [15]) is employed. Say that q_e and q_c are exact and computed values of a quantity q under consideration. At a given time t , the mean square error can then be defined as

$$\mathcal{E}^2 = \frac{1}{N} \sum (q_e - q_c)^2, \quad (18)$$

where the sum extends over the N nodes of the grid. Further, denoting mean values and variances of the exact and computed quantities by \bar{q}_e , \bar{q}_c and σ_e^2 , σ_c^2 , the mean square error can be written as

$$\mathcal{E}^2 = \sigma_e^2 + \sigma_c^2 + (\bar{q}_e - \bar{q}_c)^2 - 2 \text{cov}(q_e, q_c),$$

where $\text{cov}(q_e, q_c)$ is the covariance of the two signals. With the correlation coefficient between the two signals,

$$R(q_e, q_c) = \frac{\text{cov}(q_e, q_c)}{\sigma_e \sigma_c},$$

the error (18) can further be written as

$$\mathcal{E}^2 = (\bar{q}_e - \bar{q}_c)^2 + (\sigma_e - \sigma_c)^2 + 2\sigma_e \sigma_c [1 - R(q_e, q_c)].$$

Non-dimensional measures of dissipation and dispersion errors may then be defined (see [15]) by

$$\mathcal{E}_{\text{dissipation}} = \frac{\sigma_c - \sigma_e}{\sigma_e}, \quad \mathcal{E}_{\text{dispersion}} = \sqrt{1 - R(q_e, q_c)}. \quad (19)$$

Another quantity of interest for assessing the accuracy of the acoustic waves calculations, is the total acoustic energy. Under the linear acoustics assumption, it is defined as

$$E_a = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \varrho_0 (\delta v)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\delta p)^2}{\varrho_0 c_0^2} \right], \quad (20)$$

where $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \varrho_0}$, $\delta p = p - p_0$ and $\delta v = v - v_0$. Here, ϱ_0 , v_0 and p_0 designate the constant density, velocity and pressure of the uniform 1-D background flow in which the acoustic waves propagate.

5.1. Low Mach number flows

5.1.1. Low Mach number Riemann problem with nearly incompressible initial conditions

A 1-D Riemann problem with initial conditions given in Table 1 is first considered. The reference Mach number M_r is about 10^{-2} . The computational domain is the interval $[0, 1]$ divided into 100 cells of equal length. The time integration is carried out by the first-order explicit forward Euler scheme. The discretization of the inertia term $\partial_t v_{1/2}$ in Eq. (16) is first-order backward Euler. The numerical method is first-order accurate in time and space. The convective CFL number is chosen as 0.009, so that the acoustic CFL number is about 0.9. Thus, fluctuations at the acoustic scale can be accurately calculated. At $t = 0$, the pressure jump between the right and left states is of order M_r^2 , the velocity jump is of order M_r and the density jump is zero, so that it belongs to $O(M_r^2)$ as $M_r \rightarrow 0$. With such initial conditions, which are often referred to as 'well-prepared' and correspond to a nearly incompressible flow [5], two rarefaction waves propagate in opposite directions as soon as $t > 0$ (see Guillard and Murrone [2]).

Table 1

Settings for the low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1.

ϱ_L (kg/m ³)	v_L (m/s)	p_L (Pa)	ϱ_R (kg/m ³)	v_R (m/s)	p_R (Pa)
25	0.200	10000.00	25	0.202	10000.85

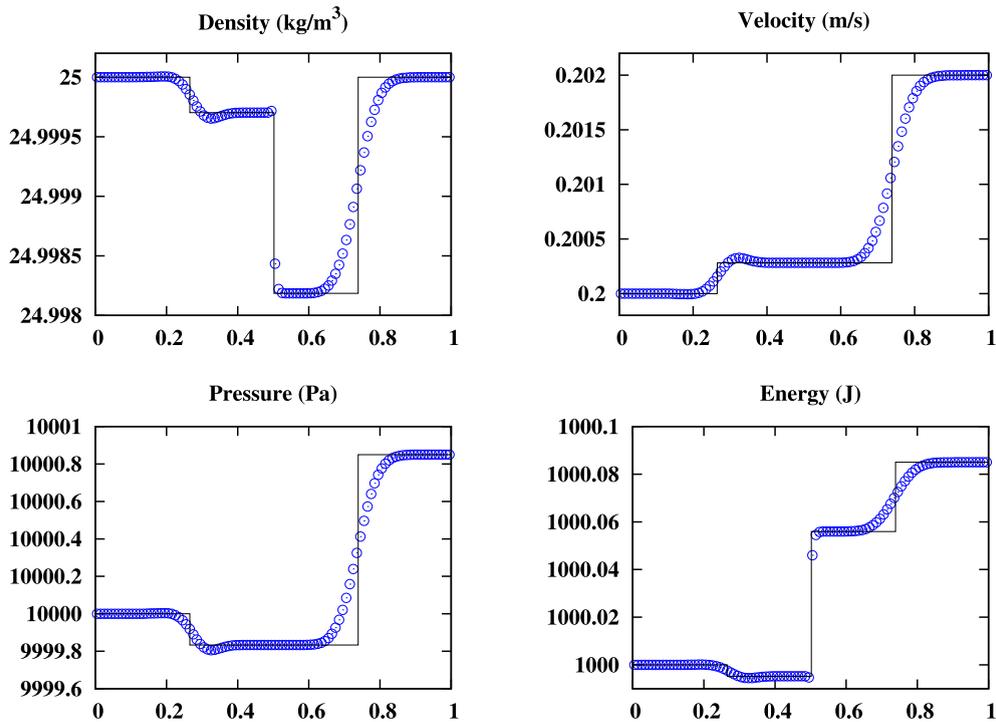


Fig. 1. Low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1. AUSM-IT scheme with $K_p = K_I = 0.25$ (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.01$ s.

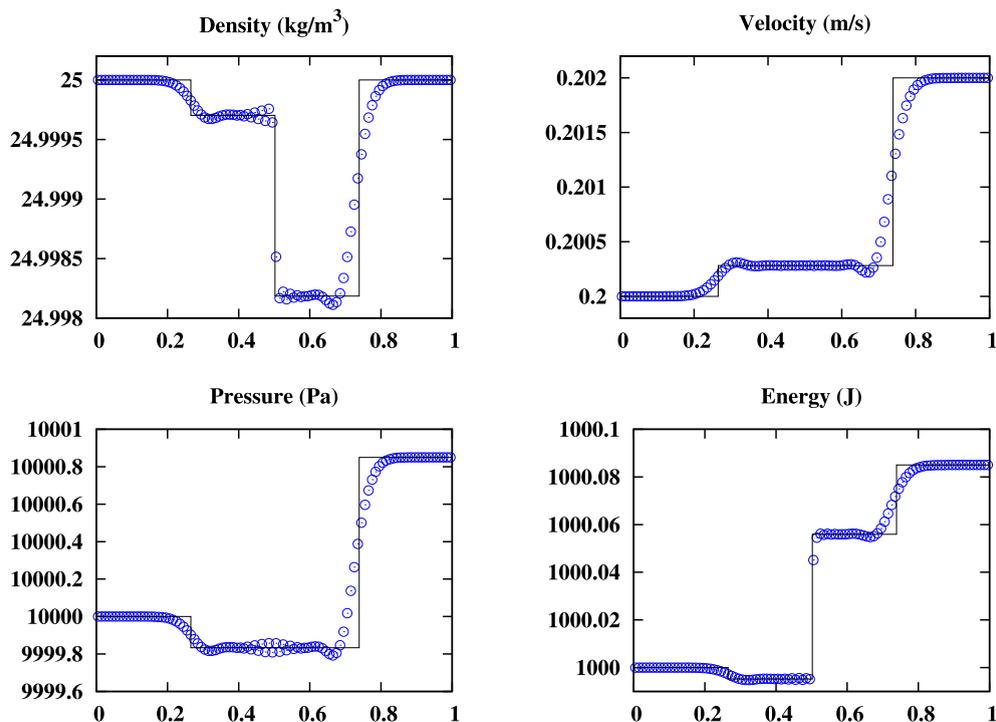


Fig. 2. Low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1. AUSM-IT scheme with $K_p = 0$ and $K_I = 0.25$ (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.01$ s.

To examine the role of the pressure gradient term in the face velocity expression when the inertia term is present, the AUSM-IT scheme is considered without pressure dissipation term ($K_p = 0$ and $K_I = 0.25$), and with $K_p = K_I = 0.25$. We set $M_\infty = 0.01$ (see Eq. (24) in Appendix A), noticing that the exact value of this parameter, if sufficiently small, does not influence significantly the results.

The results of density, velocity, pressure and energy for the AUSM-IT scheme with $K_p = K_I = 0.25$, compared to the exact solution, are shown in Fig. 1. The results for $K_p = 0$ and $K_I = 0.25$ are shown in Fig. 2. The results for the AUSM⁺ scheme ($K_p = 0, K_I = 0$) are shown in Fig. 3. It is suggested by Liou [11] that shock-tube-type problems in which the pressure

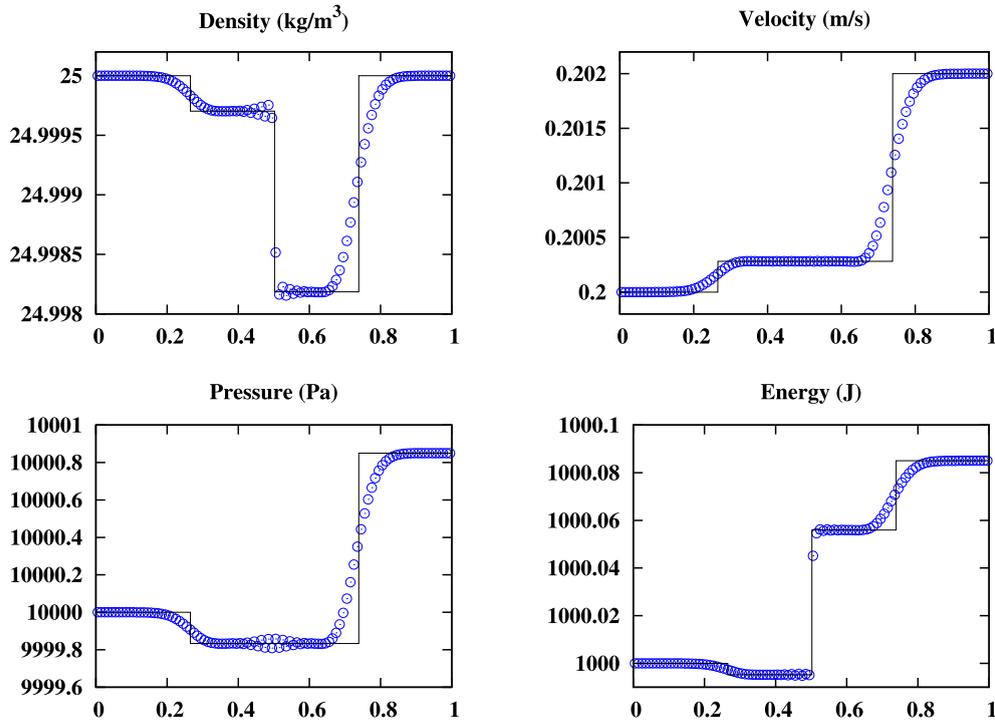


Fig. 3. Low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1. AUSM⁺ scheme (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.01$ s.

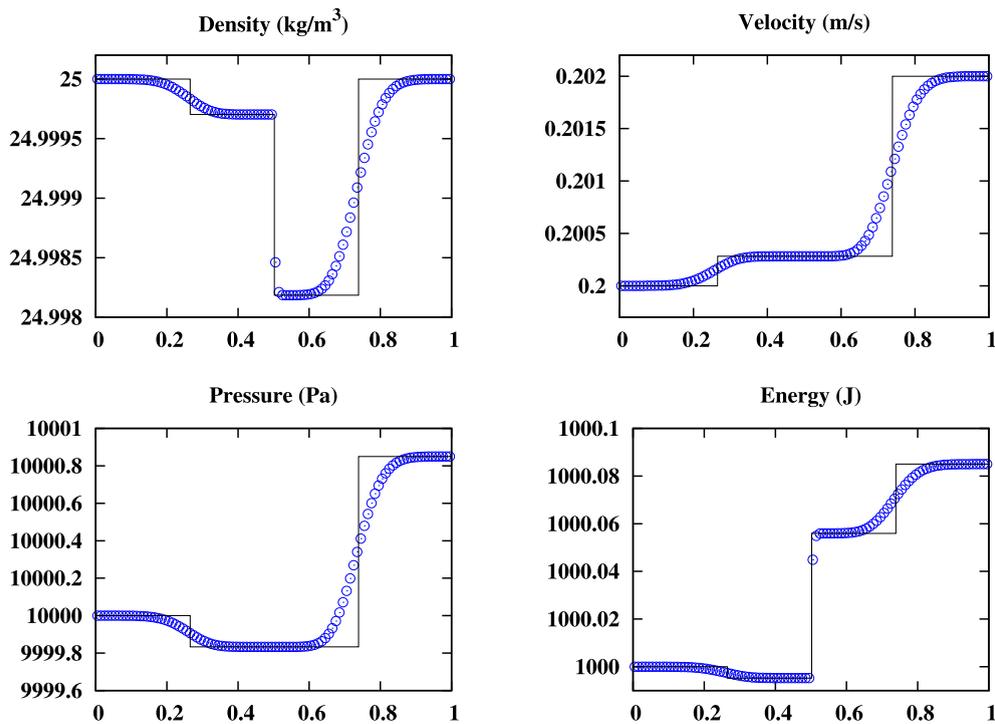


Fig. 4. Low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1. AUSM⁺-up scheme with $f_c = 1$ (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.01$ s.

distribution is not spatially uniform should be resolved with $f_c = 1$ when using the AUSM⁺-up scheme (see Eqs. (23) and (25) in Appendix A). For the Riemann problem under consideration, with nearly incompressible initial conditions, we observed that results by the AUSM⁺-up scheme with f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) and $f_c = 1$ are quasi-identical. Thus, only results by the latter choice are shown in Fig. 4.

Comparison of the figures reveals that the AUSM-IT scheme with $K_p = 0$ and $K_l = 0.25$, and the AUSM⁺ scheme produce nearly the same results. For $K_p = 0$, the quality of the AUSM-IT solution clearly deteriorates, since the solution exhibits oscillations near the discontinuities (see Fig. 2) that are absent when $K_p = 0.25$ (see Fig. 1). We conclude that, in all cases

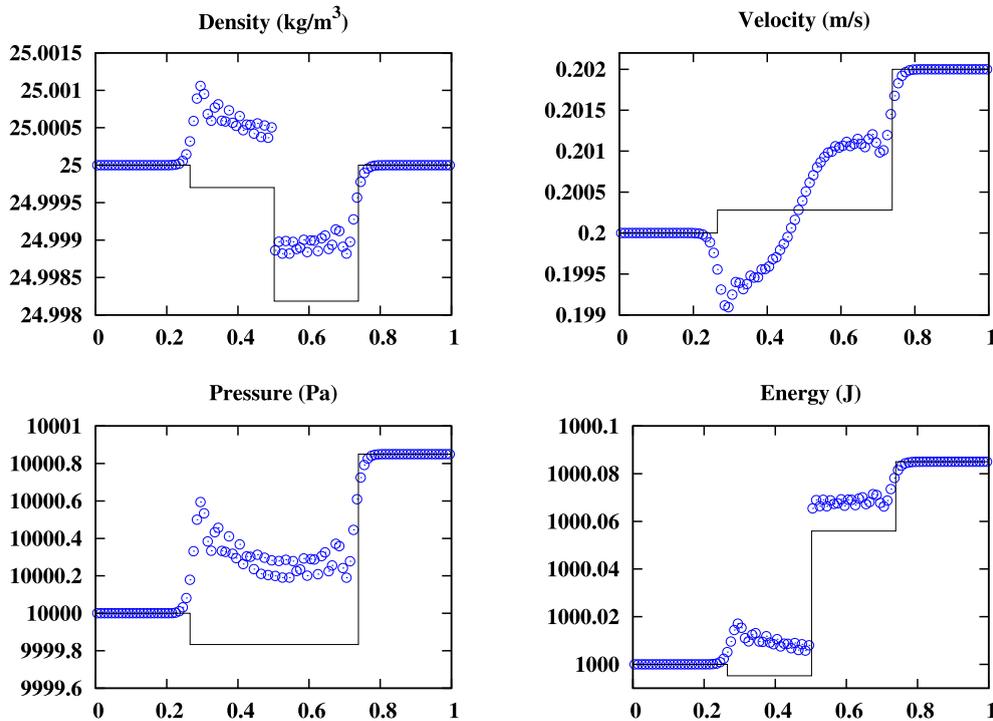


Fig. 5. Low Mach number Riemann problem of Section 5.1.1. Momentum interpolation (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.01$ s.

(inertia term present or not), it is beneficial to take $K_p = 0.25$, thus including the pressure gradient term into the face velocity expression.

The solution calculated by momentum interpolation, shown in Fig. 5, is of bad quality compared to the other schemes. The conclusion is that for Riemann problems at low Mach number, momentum interpolation may fail.

5.1.2. Downstream propagation of an acoustic wave forced at the boundary of a 1-D pipe

At the left side of a one-meter long pipe, the inlet velocity is specified to oscillate around a mean value V , as

$$v^\dagger(t) = V[1 + A \sin(2\pi ft)],$$

where $V = 0.30886$ m/s, $f = 2 \times 10^3$ Hz and $A = 10^{-2}$. A downstream propagating acoustic wave is thus generated and superimposed onto a mean flow with constant density 1.2046 kg/m³, velocity $V = 0.30886$ m/s and pressure $101\,300$ Pa. The amplitude A is sufficiently small so that an exact solution can be derived from linear acoustics.

The Mach number of the background flow is 10^{-3} . For the calculation of acoustic waves propagation in such a low Mach number flow, we showed in [14,15] that the pressure correction algorithm presented in Appendix B is well-suited. Therefore, this algorithm is used for the present test case. The convective CFL number is chosen as $CFL_v = 5 \times 10^{-4}$, the acoustic CFL number being thus approximately equal to 0.5. Acoustic waves can then be calculated with accuracy, on a uniform grid of 500 cells.

To allow for the assessment of the applicability and significance of the numerical results, non-dimensional length x^* and duration t^* are introduced. The reference length is defined as the wavelength of the acoustic wave generated at the left of the computational domain, and the reference duration is defined as the time needed for an acoustic wave to travel over the computational domain.

In Fig. 6(a) is shown the progressive degradation of the solution obtained at time $t^* = 0.7$ when the AUSM⁺-up scheme is used. The same observation holds for the SLAU scheme, to a lesser extent however (see Fig. 6(b)). In contrast, one observes in Fig. 7 that results by the 'JCAM 2013' scheme (Fig. 7(a)), the momentum interpolation (Fig. 7(b)) and the AUSM-IT scheme (Fig. 7(c)), with $K_p = K_I = 0.25$ and $\sigma = 1$, are in good agreement with the exact solution, and are quasi-identical.

The visible difference between the schemes for which pressure-velocity coupling is time-step dependent ('JCAM 2013', momentum interpolation and AUSM-IT) and the other schemes (AUSM⁺-up and SLAU) is confirmed by the dissipation and dispersion errors for the pressure field, shown in Figs. 8 and 9. Only the AUSM-IT scheme and the momentum interpolation give good results, which are very close to each other. In contrast, as already noted, results by the AUSM⁺-up scheme are of bad quality from the early stage of the calculation, both for dissipation and dispersion. The SLAU scheme produces results that mainly exhibit an important level of dissipation error, while the dispersion error remains at an acceptable level. This is also the case for the dispersion error obtained by the 'JCAM 2013' scheme. It is interesting to note in Fig. 8 that the dissipation error by the 'JCAM 2013' scheme follows the dissipation errors by the AUSM-IT scheme and by the momentum interpolation in the early stage of the calculation. The final level of the dissipation error by the 'JCAM 2013' scheme is almost two orders of magnitude lower than that of the SLAU scheme.

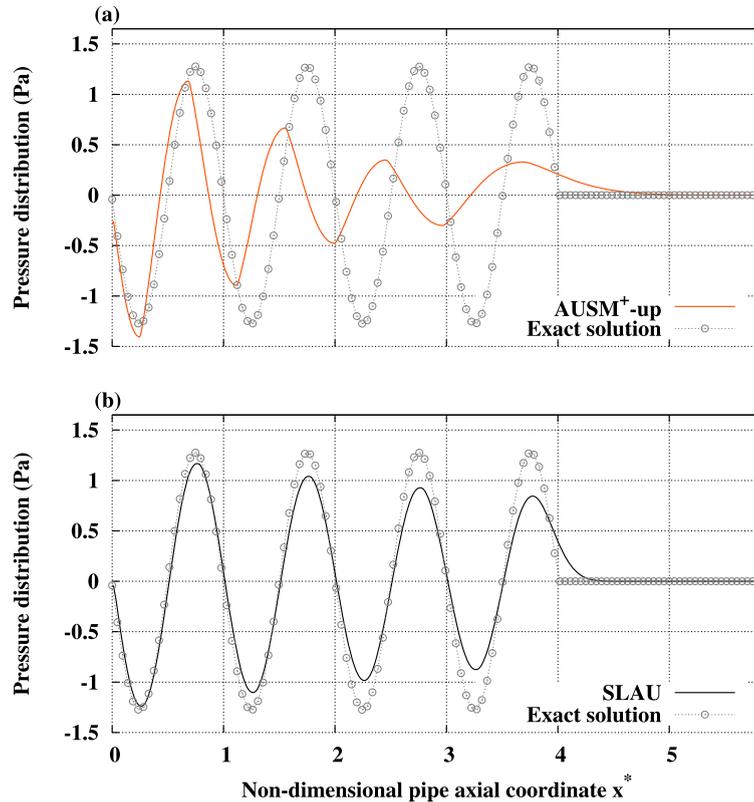


Fig. 6. Downstream propagation of a wave forced at the left boundary of a 1-D pipe, *cf.* Section 5.1.2. Pressure distribution at $t^* = 0.7$. Exact solution: linear acoustics.

The sensitivity of the total acoustic energy to the cell size of the grid is shown in Fig. 10. The convective CFL number, the frequency of the acoustic wave and the Mach number of the background flow are the same as in the previous calculations, and results are shown at $t^* = 0.7$ in order to avoid effects of wave reflection. In Fig. 10, the total acoustic energy is non-dimensionalized by its exact analytical value at $t^* = 0.7$. According to the theoretical considerations in Section 3.3, the presence of an inertia term allows to weaken the cell size dependence on the acoustic energy time evolution, in particular for the smallest values of the cell size. Indeed, this can be observed in Fig. 10 for the AUSM-IT and the momentum interpolation schemes. Note that both schemes give quasi-identical values of the total acoustic energy, which are distinctly higher than the values obtained with the other schemes.

5.1.3. One-dimensional acoustic pulse propagation

A downstream propagating Gaussian acoustic pulse in a five-meter long pipe is generated through a superimposition onto a mean flow, with constant density $\rho_0 = 1.2046 \text{ kg/m}^3$, velocity $v_0 = 0.030886 \text{ m/s}$ and pressure $p_0 = 101300 \text{ Pa}$, of a perturbation of pressure δp , density $\delta \rho = \delta p / c_0^2$, and velocity $\delta v = \delta p / (\rho_0 c_0)$, where $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$. At $t = 0$,

$$\delta p = 200 \exp\left[-\frac{(x - 0.2)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ (Pa)}, \quad \text{where } \sigma = 2 \times 10^{-2} \text{ m}. \quad (21)$$

In this test case, the Mach number of the background flow is 10^{-4} . The time-step is chosen so that the acoustic CFL number is about 5, which is allowed by the semi-implicit algorithm used, see Appendix B. The grid is uniform with 2500 cells.

The results are shown with a non-dimensional length x^+ , obtained by taking σ as reference length (see Eq. (21)), and a non-dimensional duration t^+ , with as reference the time needed for an acoustic wave to travel over the computational domain.

It is shown in Fig. 11 that the AUSM⁺-up scheme and the SLAU scheme do not reproduce correctly the propagation of the pulse.⁴ For both schemes, the level of dissipation is excessive. The location of the pulse is erroneous with the AUSM⁺-up

⁴ The small difference between the results shown in Fig. 11(a) and the results shown in Fig. 3 of our previous work [14], where the same test case is considered with the AUSM⁺-up scheme too, is due to the choice of the interpolation of the pressure corrections; see Eq. (31). In [14], interpolation polynomials are defined with the scaling function f_c of the AUSM⁺-up scheme proposed in [11]. Here (*cf.* Eq. (31)), interpolation polynomials of the AUSM⁺ scheme, without the scaling function f_c , are used for the pressure corrections. This results for the present test case in a smaller dissipation than in the computations shown in [14]. The modification of the definition of the interpolation polynomials also has as a consequence to reduce the dispersion error for the 'JCAM 2013' scheme (*cf.* Fig. 12(c)), if compared to results shown in Fig. 3 of [14].

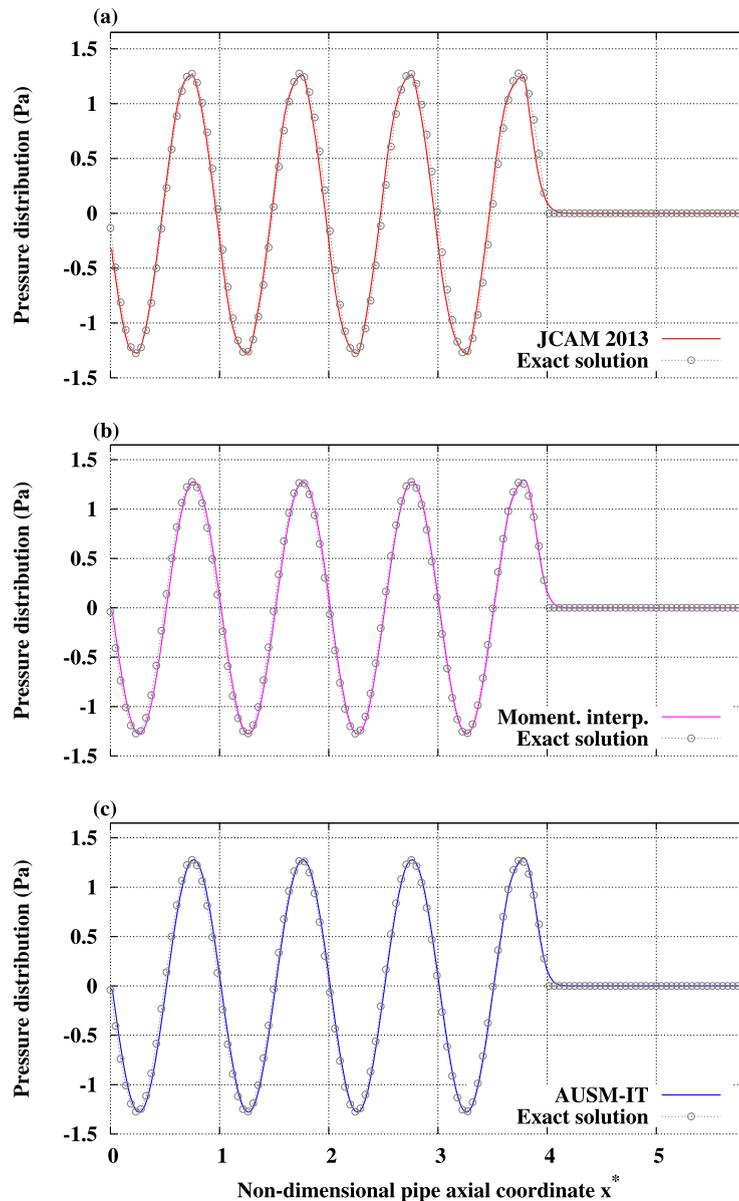


Fig. 7. Downstream propagation of a wave forced at the left boundary of a 1-D pipe, cf. Section 5.1.2. Pressure distribution at $t^* = 0.7$. Exact solution: linear acoustics.

scheme. It is much better with the SLAU scheme. The 'JCAM 2013' scheme, the momentum interpolation scheme and the AUSM-IT scheme (with $K_p = K_l = 0.25$ and $\sigma = 1$) reproduce the correct position of the pulse (see Fig. 12). The dispersion error of the momentum interpolation scheme and the AUSM-IT scheme is small.

The previous observations are confirmed by studying dissipation and dispersion errors for the pressure field. Two categories of schemes can be distinguished: In the first category (AUSM⁺-up and SLAU schemes), the time-step independence of the pressure–velocity coupling leads rapidly to unsatisfactory levels of dissipation and dispersion errors (not shown). In the second category ('JCAM 2013', momentum interpolation and AUSM-IT), the unsteadiness of the calculated waves is taken into account in the pressure–velocity coupling, thanks to the time-step in the pressure gradient coefficient of the face velocity expression. As shown in Figs. 13 and 14, this time-step dependence is necessary for obtaining accuracy, for both dissipation and dispersion features. Moreover, it is clear, in particular from Fig. 13, that, due to the presence of inertia term in the face velocity expression of the AUSM-IT and the momentum interpolation schemes, both schemes outperform the 'JCAM 2013' scheme, for which the true inertia term is not included.

The same conclusion holds by considering the time evolution of the total acoustic energy (see Eq. (20)). Presented in Fig. 15, the total acoustic energy is non-dimensionalized with its exact value at $t^+ = 0$. Note that results by the AUSM⁺-up and SLAU schemes are useless (not shown). In Fig. 15, the levels of total acoustic energy given by the 'JCAM 2013' scheme, the AUSM-IT scheme and the momentum interpolation, are identical in the early stage of the calculation. The calculated value is slightly lower than the exact value, which is constant and equal to 1. Among the three schemes under consideration, the conservation of the acoustic energy in the computational domain is best ensured by the momentum interpolation. With

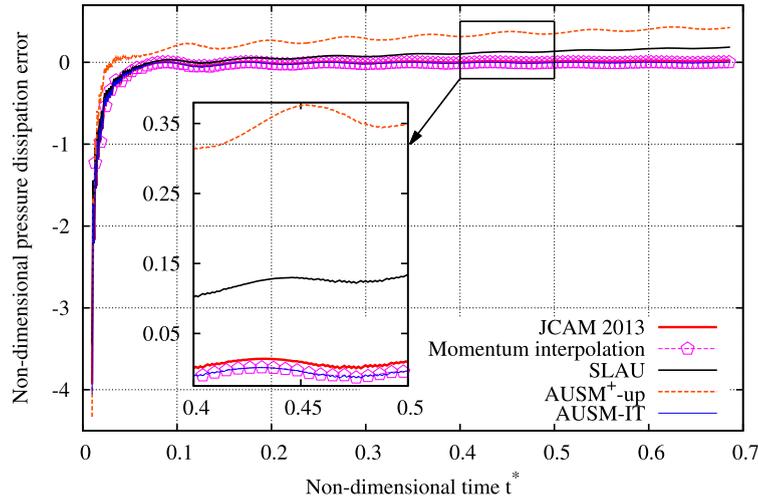


Fig. 8. Downstream propagation of a wave forced at the left boundary of a 1-D pipe, cf. Section 5.1.2. Non-dimensional time evolution of the non-dimensional dissipation error on pressure perturbation, cf. Eqs. (19).

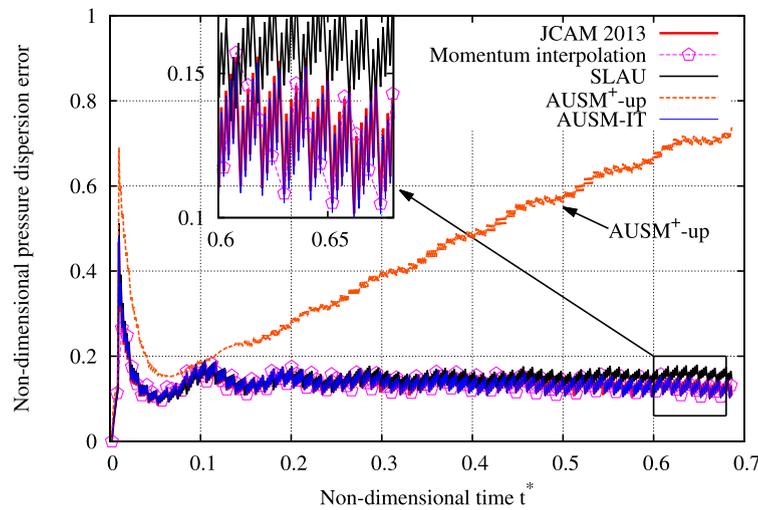


Fig. 9. Downstream propagation of a wave forced at the left boundary of a 1-D pipe, cf. Section 5.1.2. Non-dimensional time evolution of the non-dimensional dispersion error on pressure perturbation, cf. Eqs. (19). Results by the JCAM 2013 scheme and the AUSM-IT scheme almost coincide.

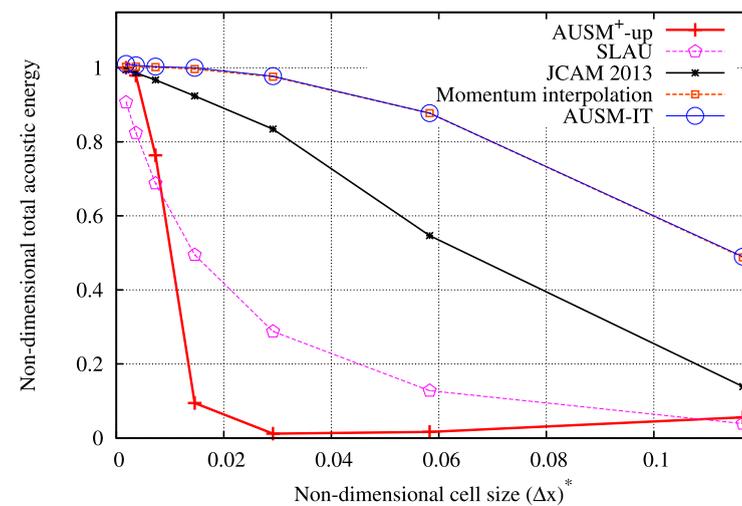


Fig. 10. Downstream propagation of a wave forced at the left boundary of a 1-D pipe, cf. Section 5.1.2. Non-dimensional total acoustic energy (cf. Eq. (20)) at $t^* = 0.7$ vs. non-dimensional cell size of the grid. Exact value of the non-dimensional total acoustic energy: 1.

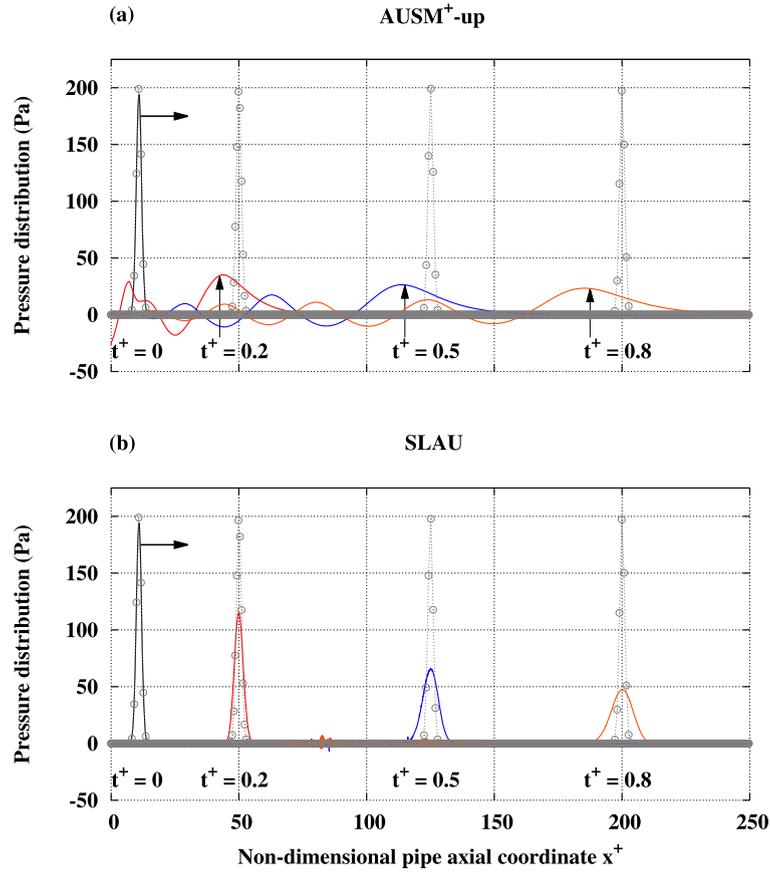


Fig. 11. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Pressure distribution at $t^+ = 0$, $t^+ = 0.2$, $t^+ = 0.5$ and $t^+ = 0.8$. Exact solution (linear acoustics): $- \circ -$.

the AUSM-IT scheme, the energy increases slightly (by less than 1%), and with the ‘JCAM 2013’ scheme, it decreases by about 18%.

The sensitivity of the total acoustic energy to the cell size of the grid is shown in Fig. 16. The convective CFL number, the frequencies of the acoustic waves and the Mach number of the background flow are the same as in the previous calculations. Results are shown at $t^+ = 0.8$ in order to avoid effects by wave reflection. The total acoustic energy is non-dimensionalized by its exact analytical value at $t^+ = 0$. As already observed in Section 5.1.2, the presence of an inertia term allows to weaken the cell size dependence of the acoustic energy time evolution. When the AUSM-IT scheme is used, the level of the total acoustic energy for the smallest values of $(\Delta x)^+$ in Fig. 16 is slightly higher than 1. The level of dissipation of the scheme does not guarantee exactly the conservation of the total acoustic energy. The level of dissipation of the AUSM-IT scheme is linked with the upwinding of the convective term $c_{1/2}M_{1/2}$ in the face velocity expression (16). This upwinding is a consequence of the choice of the AUSM⁺ polynomials in the definition of $M_{1/2}$, which were not designed to ensure the property of the total energy conservation. However, this property is approximately satisfied, which is quite satisfactory by comparison with the other schemes under consideration.

5.1.4. Two-dimensional acoustic pulse propagation

The computational domain is the square $[0, 1] \times [0, 1]$ (m^2), divided into 500×500 cells forming a regular Cartesian grid. With

$$\rho_0 = 1.2046 \text{ kg/m}^3, \quad u_0 = v_0 = 0.30886 \times 10^{-2} \text{ m/s}, \quad p_0 = 101\,300 \text{ Pa},$$

a Gaussian acoustic pulse is given at $t = 0$ by

$$\rho^0 = \rho_0 + (\delta\rho)^0, \quad u^0 = u_0, \quad v^0 = v_0, \quad p^0 = p_0 + (\delta p)^0,$$

where

$$(\delta p)^0 = 200 \exp\left[-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{(0.05)^2}\right] \text{ (Pa)},$$

$$(\delta\rho)^0 = (\delta p)^0 / c_0^2 \quad \text{and} \quad c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}. \tag{22}$$

The value of the mean flow Mach number is 9×10^{-6} . For $t > 0$, the speed of the acoustic wave generated by the initial pulse is the vector sum of the low Mach number mean flow velocity and the propagation sound speed in the radial direction (see Fig. 17).

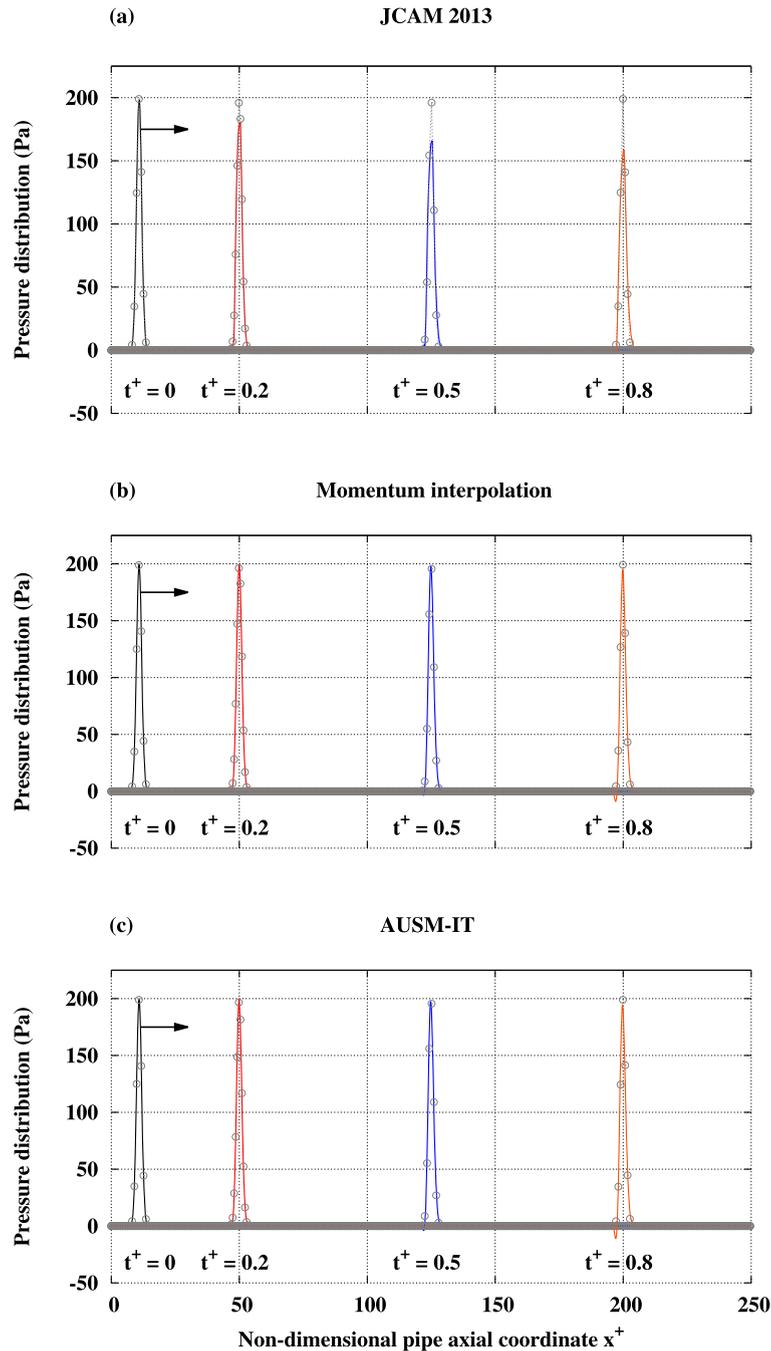


Fig. 12. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Pressure distribution at $t^+ = 0$, $t^+ = 0.2$, $t^+ = 0.5$ and $t^+ = 0.8$. Exact solution (linear acoustics): $- \circ -$.

The numerical method is the 2-D direct extension of the method detailed in Appendix B. The energy equation used in the correction step (see Eq. (30) for the 1-D case) results in a pentadiagonal system solved with an alternate direction procedure. The acoustic CFL number is 20. The AUSM-IT scheme is used with $K_p = K_l = 0.25$ and $\sigma = 1$.

At $t = 0.1$ ms, the maximum of the pressure forms a circle (see Fig. 18) whose radius is approximately 0.048 m (see Fig. 19). At $t = 1$ ms, the radius is approximately 0.358 m (see Figs. 20 and 21). The radial speed of the acoustic wave is thus around 344.44 m/s. This is close to the value calculated with the background flow values, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0} = 343.12$ m/s. As for the 1-D test of Gaussian pulse propagation considered in Section 5.1.3, results by the AUSM-IT scheme are quasi-identical to those by the momentum interpolation method (see Figs. 19 and 21).

5.2. Riemann problems with shock waves

In this section, the Godunov-type and momentum interpolation schemes are evaluated on a series of Riemann problems where shock waves occur. Moreover, the Mach number is not necessarily small compared to unity (*i.e.* of the order of 10^{-1}

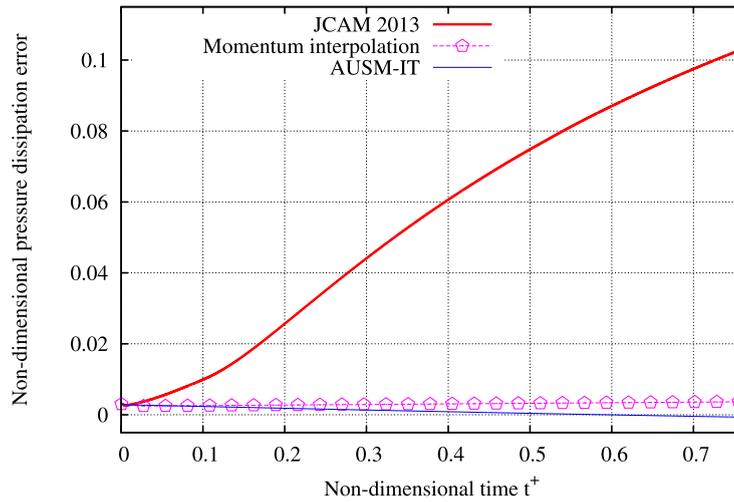


Fig. 13. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Non-dimensional time evolution of the non-dimensional dissipation error on pressure perturbation, cf. Eqs. (19).

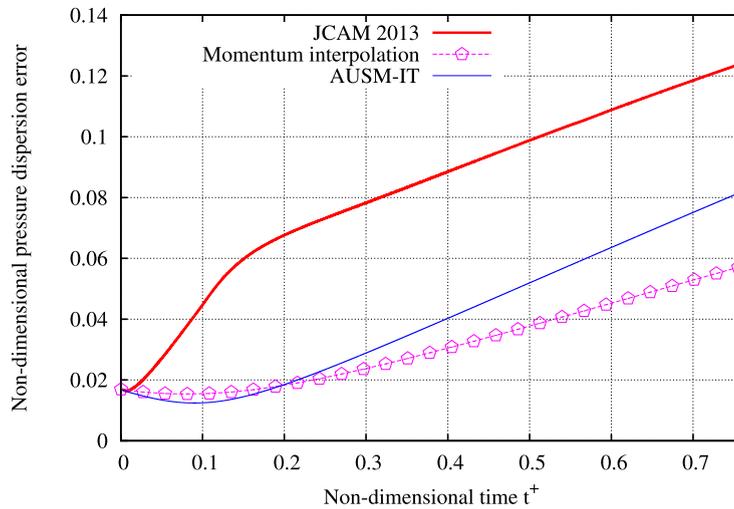


Fig. 14. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Non-dimensional time evolution of the non-dimensional dispersion error on pressure perturbation, cf. Eqs. (19).

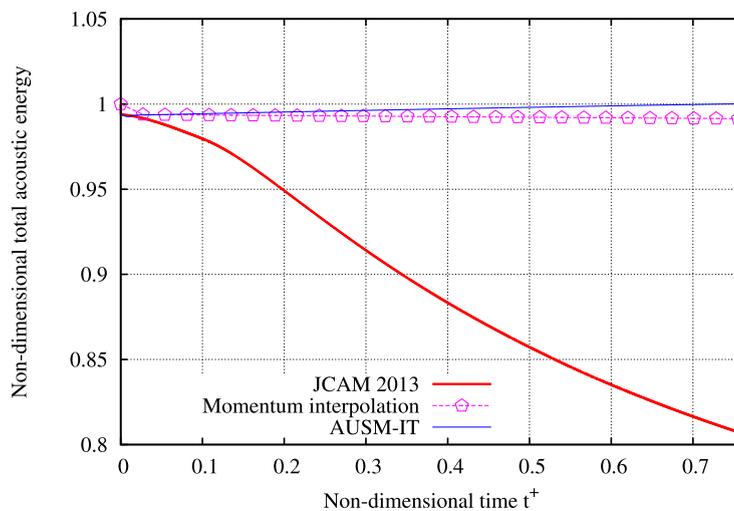


Fig. 15. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Non-dimensional time evolution of the non-dimensional total acoustic energy, cf. Eq. (20) (exact value of the non-dimensional total acoustic energy: 1).

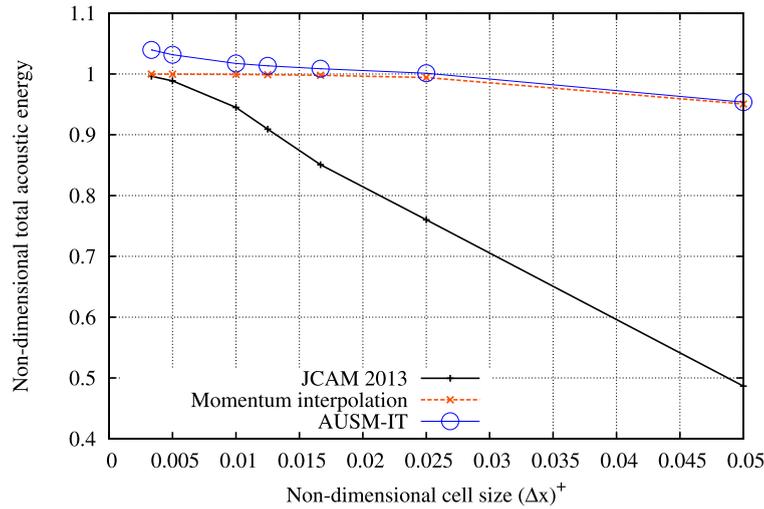


Fig. 16. Downstream propagation of an acoustic pulse in a five-meter long pipe, cf. Section 5.1.3. Non-dimensional total acoustic energy (cf. Eq. (20)) at $t^+ = 0.8$ vs. non-dimensional cell size of the grid (exact value of the non-dimensional total acoustic energy: 1).

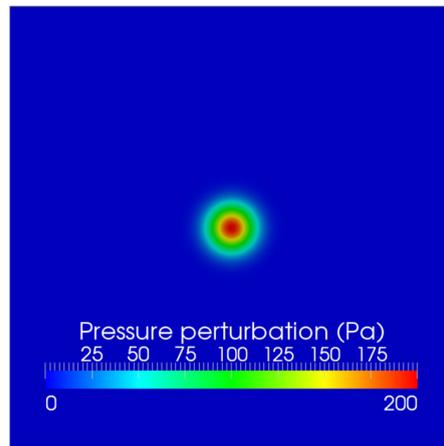


Fig. 17. Two-dimensional acoustic pulse propagation, cf. Section 5.1.4. Distribution of the pressure perturbation δp at $t = 0$ (cf. Eq. (22)).

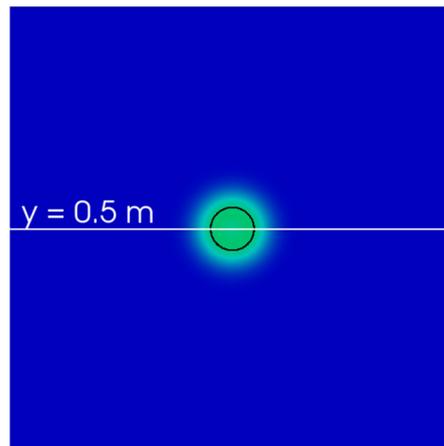


Fig. 18. Two-dimensional acoustic pulse propagation, cf. Section 5.1.4. Distribution of the pressure perturbation at $t = 0.1$ ms by the AUSM-IT scheme. The black circle indicates the maximum value of the pressure perturbation. The profile at $y = 0.5$ m (white line) is shown in Fig. 19.

or smaller), as it is in Section 5.1.1. The settings for the three tests considered are given in Table 2. The computational domain and its discretization are the same as in Section 5.1.1. The Euler explicit scheme is used, with the convective CFL number equal to 0.9. The numerical method is first-order accurate in time and space. As in Section 5.1.1, we set $M_\infty = 0.01$ for all the calculations presented in this section (see Appendix A), noticing as in Section 5.1.1 that the exact value of this parameter, if sufficiently small, does not influence significantly the results.

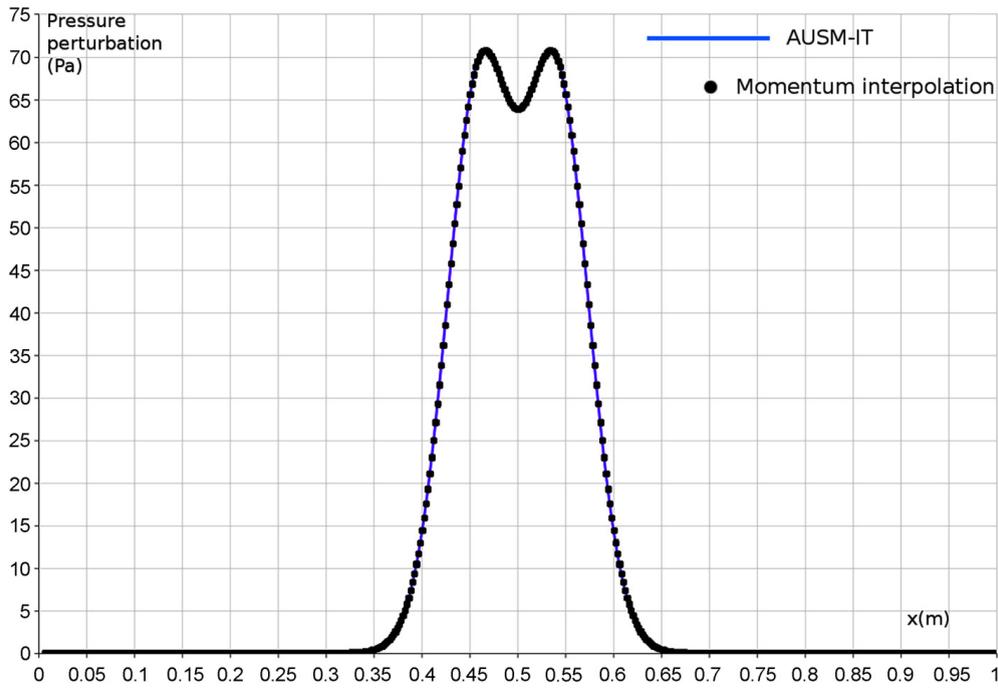


Fig. 19. Two-dimensional acoustic pulse propagation, cf. Section 5.1.4. Distribution of the pressure perturbation profiles at $t = 0.1$ ms for $y = 0.5$ m (white line in Fig. 18) by the AUSM-IT scheme (solid line) and the momentum interpolation method (●).

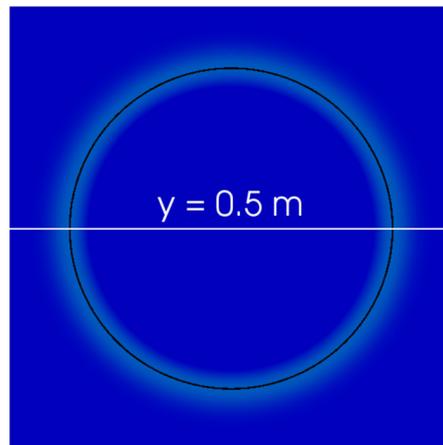


Fig. 20. Two-dimensional acoustic pulse propagation, cf. Section 5.1.4. Distribution of the pressure perturbation at $t = 1$ ms by the AUSM-IT scheme. The black circle indicates the maximum value of the pressure perturbation. The profile at $y = 0.5$ m (white line) is shown in Fig. 21.

Table 2
Settings for the Riemann problems of Section 5.2.

Test	ρ_L (kg/m ³)	v_L (m/s)	p_L (Pa)	ρ_R (kg/m ³)	v_R (m/s)	p_R (Pa)
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1
2	1	-19.59745	1000.0	1	-19.59745	0.01
3	0.445	0.698	3.528	0.5	0	0.571

Test 1 is the modified Sod problem proposed in [24], to assess the fulfillment of the entropy property. The solution consists of a right sonic shock wave, a right traveling contact wave, and a left sonic rarefaction wave. Also proposed in [24], Test 2 is used to assess the robustness of the scheme, and its ability to capture slowly moving contact discontinuities. The exact solution consists of a left rarefaction wave, a right-traveling shock wave and a stationary contact discontinuity. Note that the SLAU scheme and the momentum interpolation scheme fail (*i.e.* do not allow convergence to a solution) in this test. Test 3, proposed in [7] (see also [18]), allows primarily to assess the accuracy of the scheme. In Test 3, the flow remains subsonic. The solution contains a contact discontinuity and a weak shock that are close to each other, so that the contact discontinuity may be smeared by the flux scheme, in particular when it is first-order accurate, which is the case here.

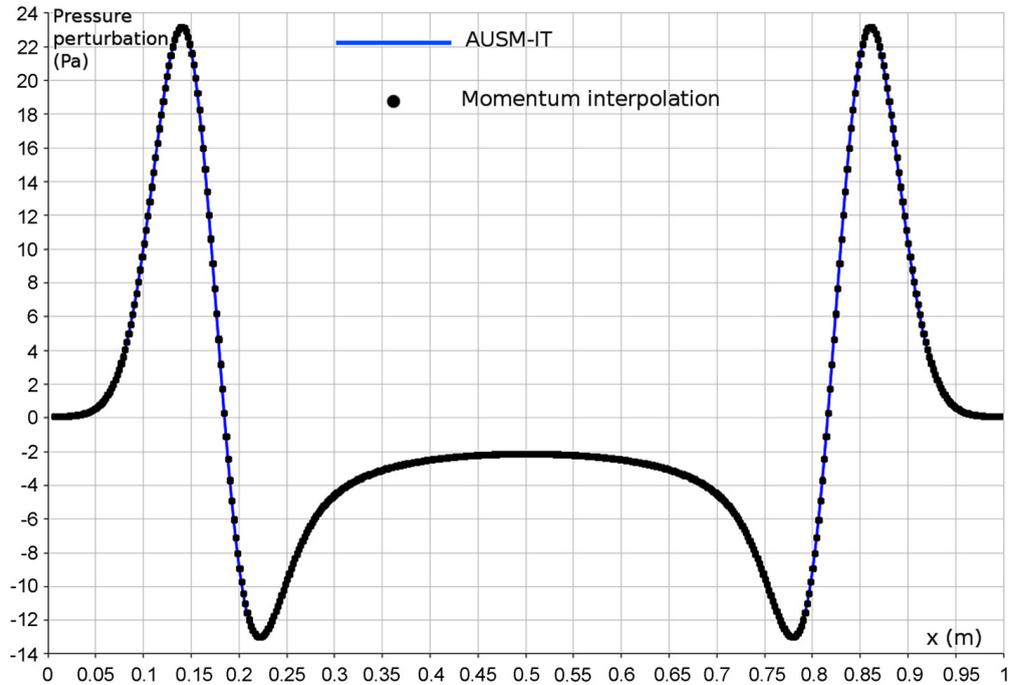


Fig. 21. Two-dimensional acoustic pulse propagation, cf. Section 5.1.4. Distribution of the pressure perturbation profiles at $t = 1$ ms for $y = 0.5$ m (white line in Fig. 20) by the AUSM-IT scheme (solid line) and the momentum interpolation method (\bullet).

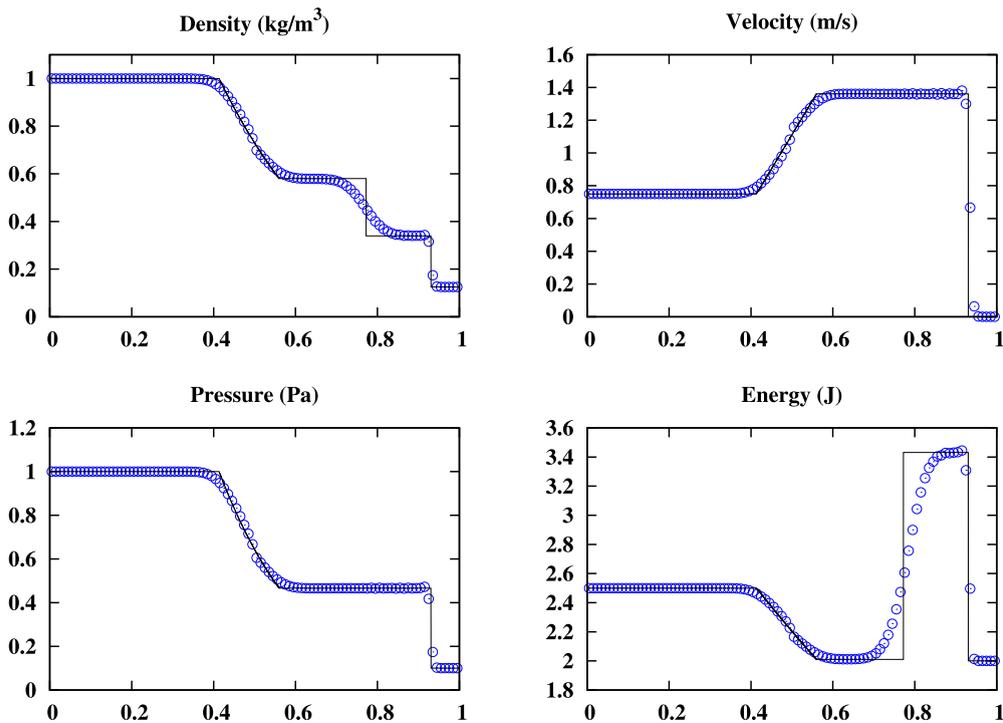


Fig. 22. Test 1 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = K_I = 0.25$ (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

We will focus the discussion of the results on the following key features: (1) shock resolution, in particular in presence of a close contact discontinuity; (2) capture of stationary contact discontinuity; (3) sonic glitch (see [23]).

In Figs. 22 to 28, for Test 1, where the right shock wave is sonic, the AUSM-type schemes give a good resolution of the shock, compared to the SLAU scheme (see Fig. 29) and the momentum interpolation (see Fig. 30). Observe that this latter leads to results of very bad quality, whatever the Riemann problem considered in the present section. Between the AUSM-type schemes, some differences can be observed in the quality of the shock representation. The AUSM⁺-up scheme (see Figs. 25–27) smears the shocks more than the other AUSM-type schemes. The AUSM-IT scheme slightly overestimates the maximum value of the velocity at the sonic point. However, the differences between results by AUSM-type schemes

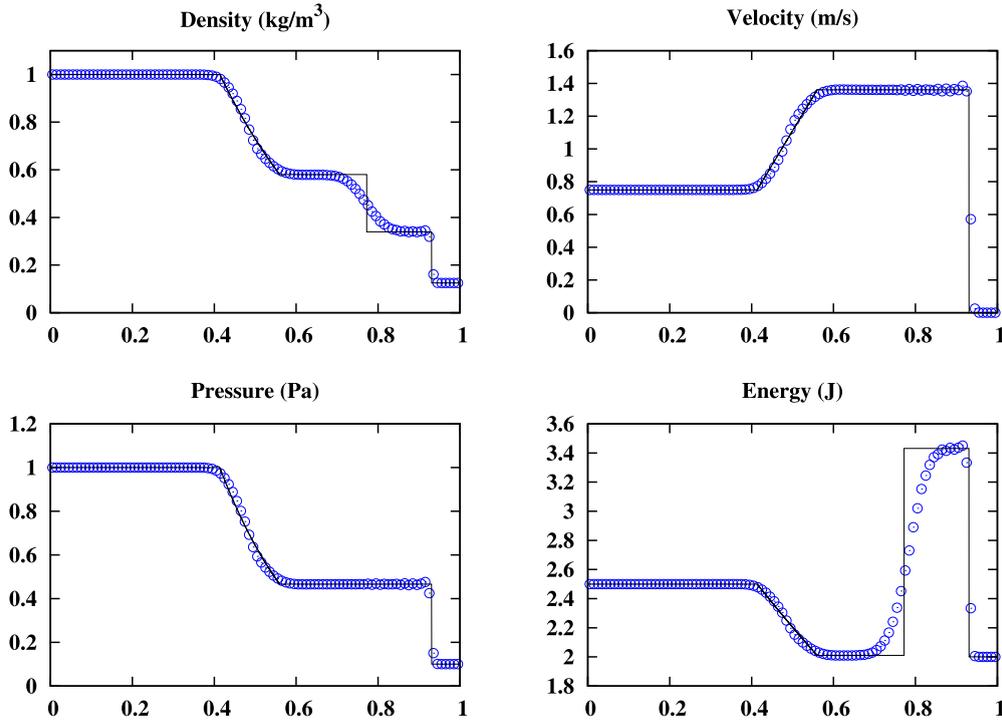


Fig. 23. Test 1 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = 0$ and $K_I = 0.25$ (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

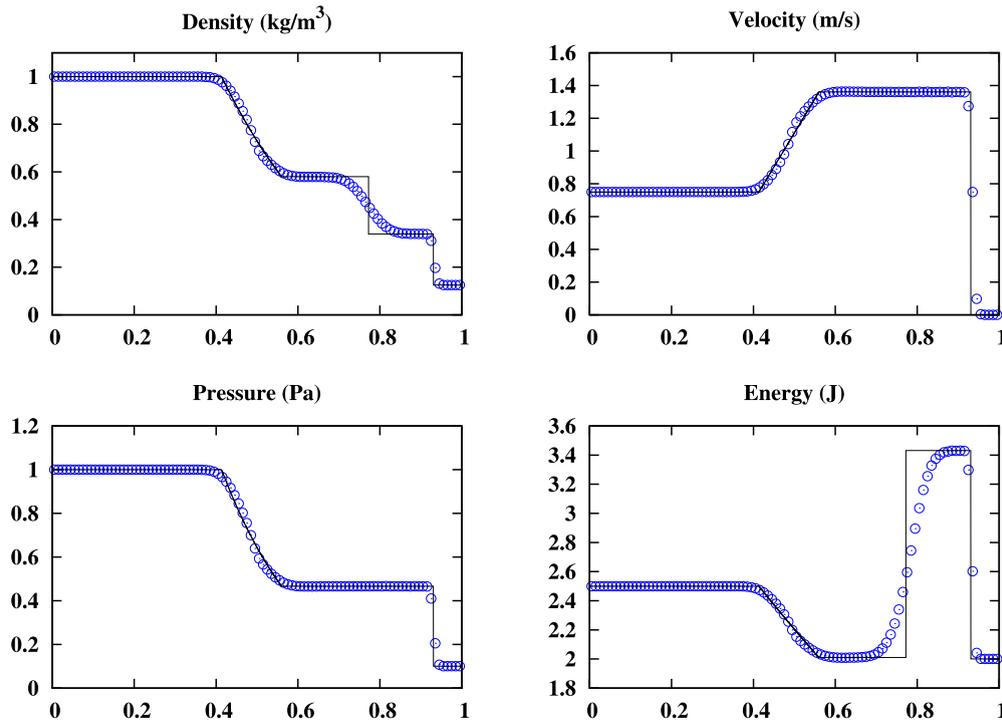


Fig. 24. Test 1 of Section 5.2. AUSM⁺ scheme (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

remain small, and we conclude that the presence of an inertia term does not alter the ability of AUSM-IT to properly capture sonic shocks.

A sonic glitch appears in the rarefaction fan of the solution calculated by the AUSM-IT scheme, the AUSM⁺-up scheme and the ‘JCAM 2013’ scheme (see Figs. 22, 25–28). Note that this occurs for $K_v = 0$ as well as for $K_v = 0.75$ with the AUSM⁺-up scheme. In contrast, only a very light glitch occurs with the AUSM⁺ scheme (see Fig. 24), using the interface sound speed of the AUSM⁺-up scheme (see Appendix A). We conclude that, when AUSM-type schemes are used, a sonic glitch may be formed in a sonic rarefaction fan if the pressure gradient term is present in the mass flux expression. Of course, the sonic glitch may be removed by including some numerical dissipation in the mass flux expression. Note however

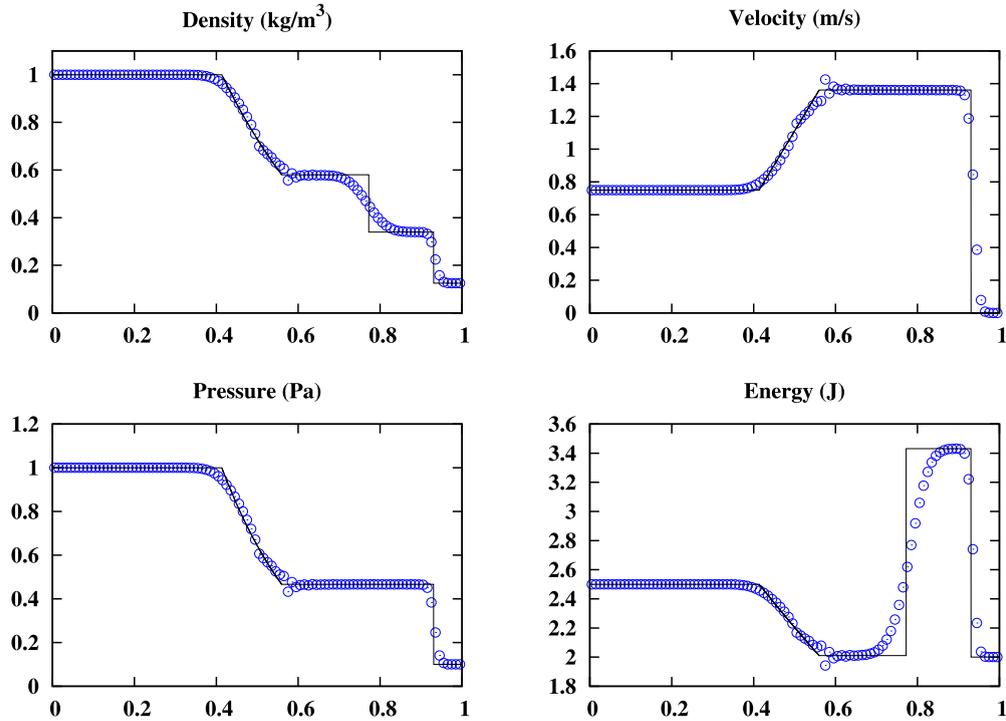


Fig. 25. Test 1 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0.75$ and f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

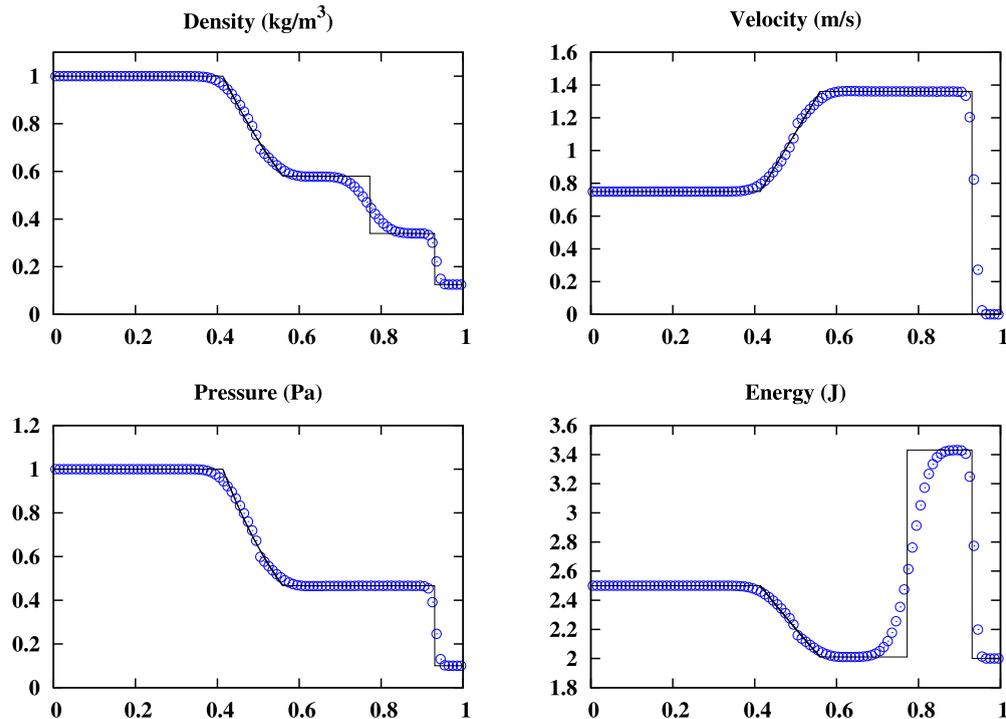


Fig. 26. Test 1 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0$ and f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

that no sonic glitch appears in Fig. 29, with the SLAU scheme, even if its mass flux expression contains a pressure gradient term (see Eq. (27)). This indicates that the sonic glitch does not always result from the presence of a pressure gradient term in the mass flux expression. Concerning the sonic glitch, we conclude that it is independent of the presence of an inertia term, as introduced in the AUSM-IT scheme.

For Test 2 (see Figs. 31–36), conclusions are that the AUSM-type schemes perform well, provided that some pressure dissipation is included in the mass flux expression ($K_p > 0$) and that no velocity diffusion is included in the face pressure

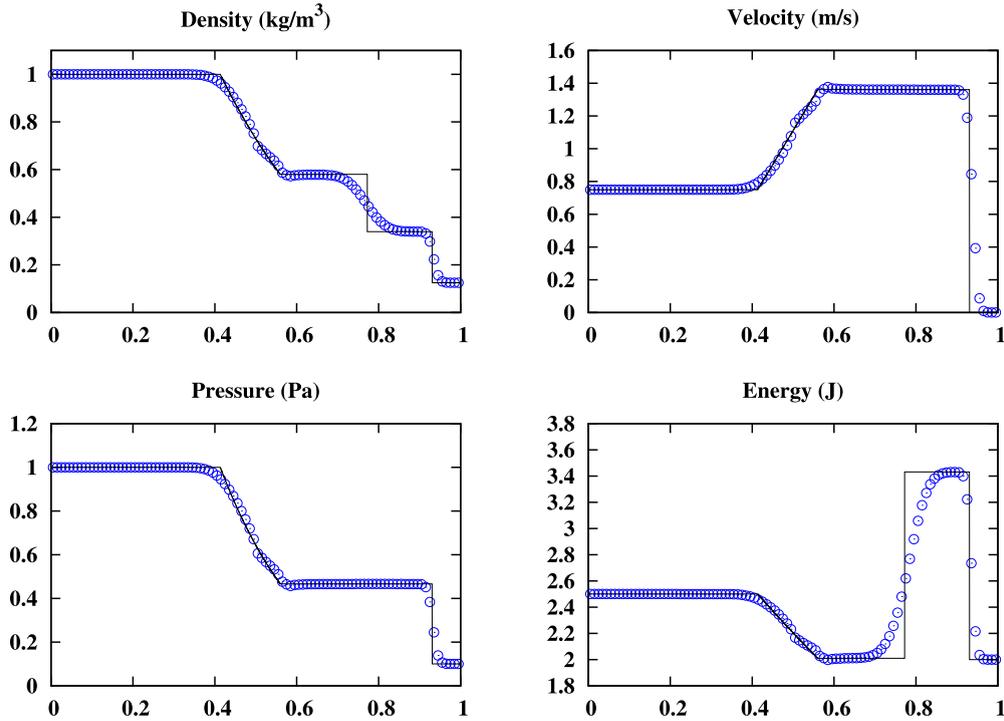


Fig. 27. Test 1 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0.75$ and $f_c = 1$ (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

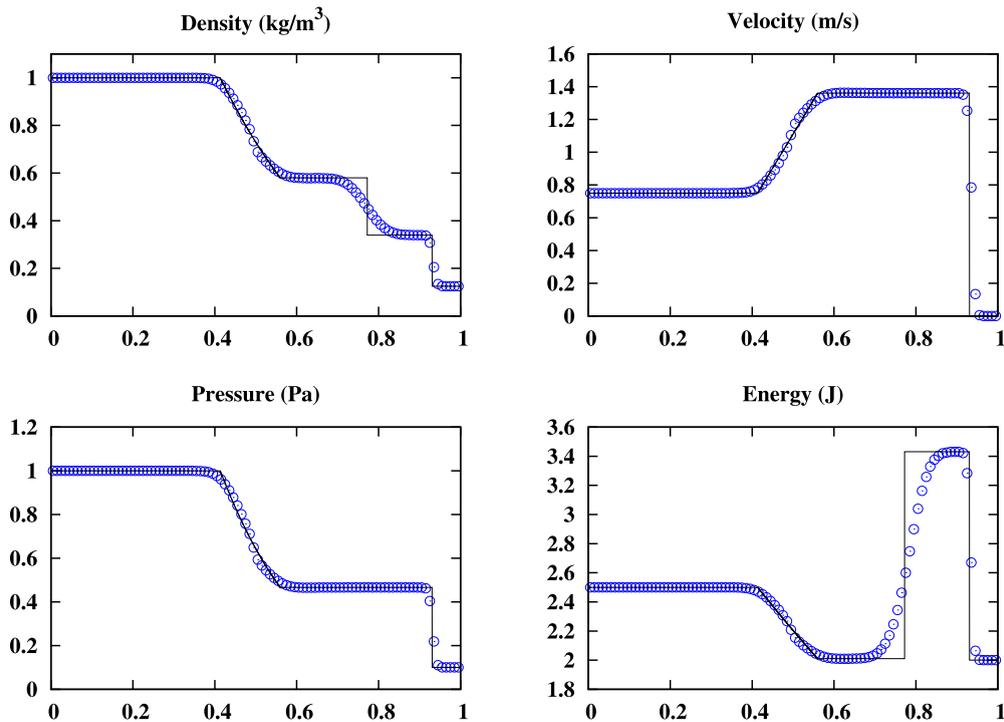


Fig. 28. Test 1 of Section 5.2. 'JCAM 2013' scheme (\circ) with $\beta = 1$ (see Eq. (26)) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

expression ($K_v = 0$ for AUSM⁺-up). For this test case, the standard AUSM⁺-up scheme ($K_p = 0.25$ and $K_v = 0.75$), the SLAU scheme and the momentum interpolation scheme fail.

For Test 3 (see Figs. 37–46), all schemes studied produce a solution. For the AUSM-type schemes, it is again necessary to add pressure dissipation to the mass flux ($K_p > 0$) and to remove velocity diffusion in the face pressure definition ($K_v = 0$ for AUSM⁺-up; compare Figs. 40–41 and Figs. 42–43). The presence of the inertia term in the mass flux definition of the AUSM-IT scheme is neutral for the quality of the solution. The quality of the AUSM-IT scheme is comparable to that of the AUSM⁺-up scheme with $K_v = 0$.

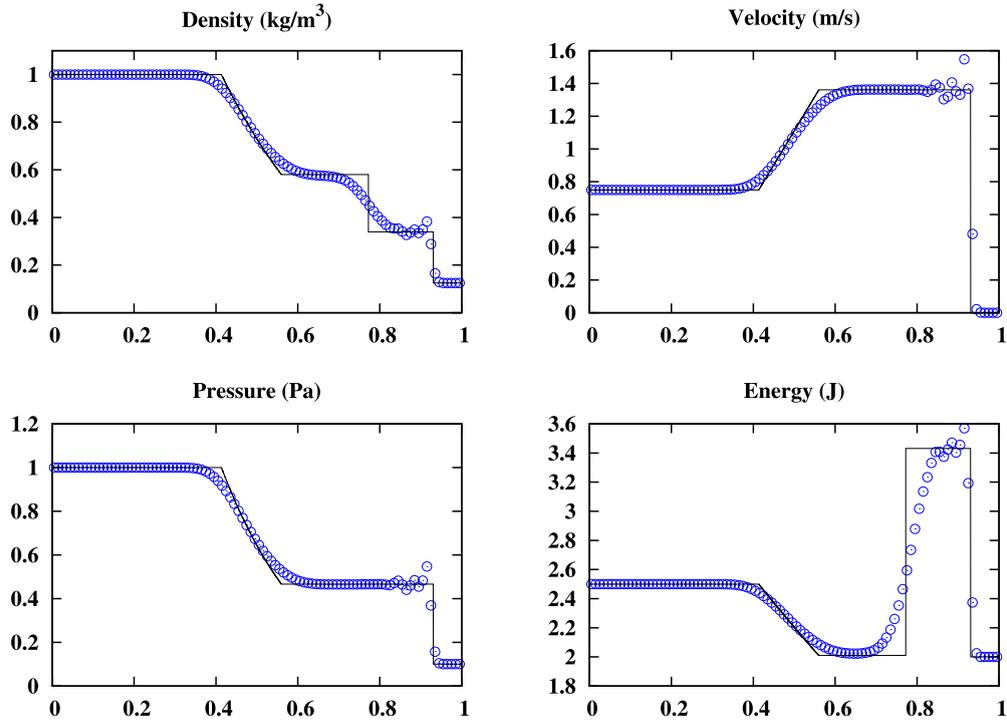


Fig. 29. Test 1 of Section 5.2. SLAU scheme (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

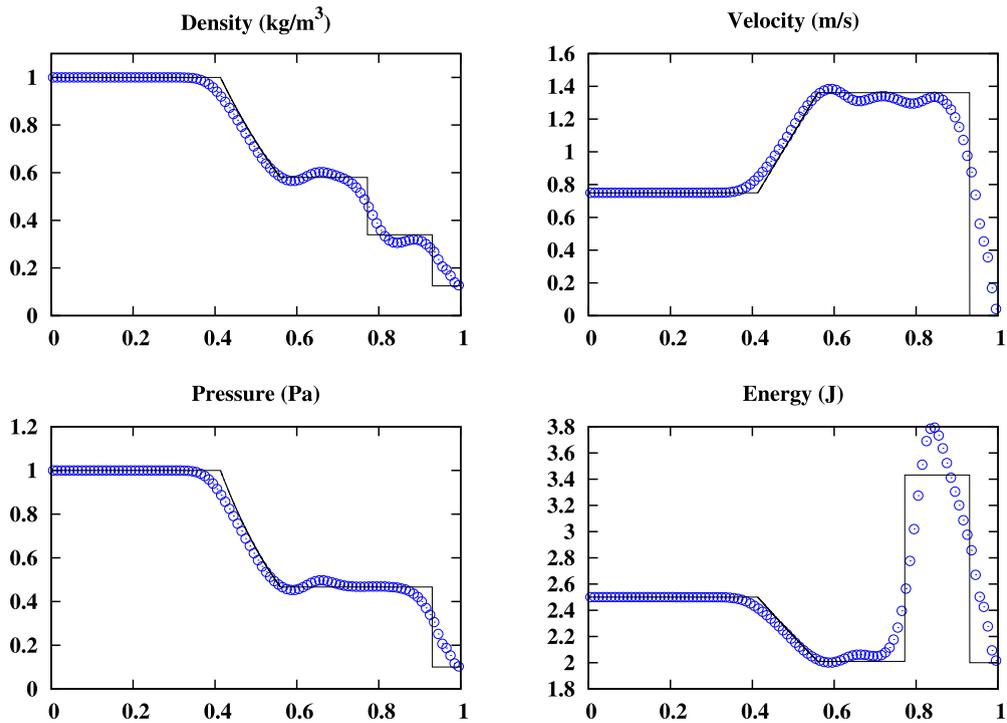


Fig. 30. Test 1 of Section 5.2. Momentum interpolation scheme (○) (see Eq. (29)) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.2$ s.

5.3. Conclusion concerning the choice of the parameters of the AUSM-IT scheme

From the previous numerical experiments the following typical values of the parameters are suggested:

$$\sigma = 1, \quad K_I = K_p = 0.25.$$

Moreover, no velocity diffusion is added in the face pressure ($K_v = 0$, referring to the AUSM⁺-up scheme, see Eq. (25)).

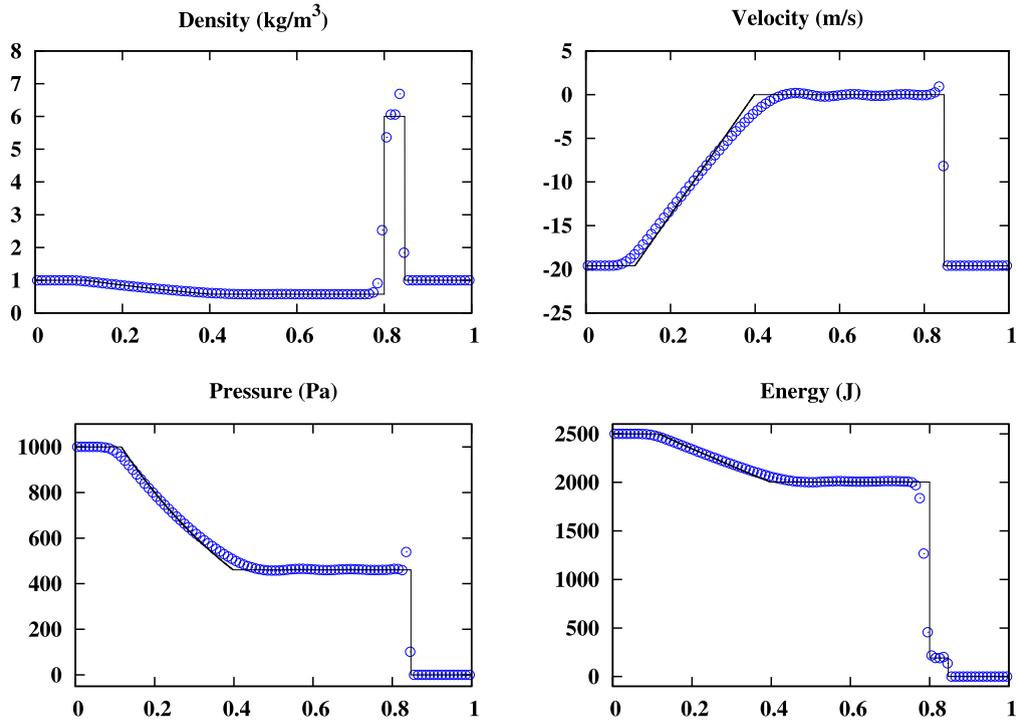


Fig. 31. Test 2 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = K_l = 0.25$ (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

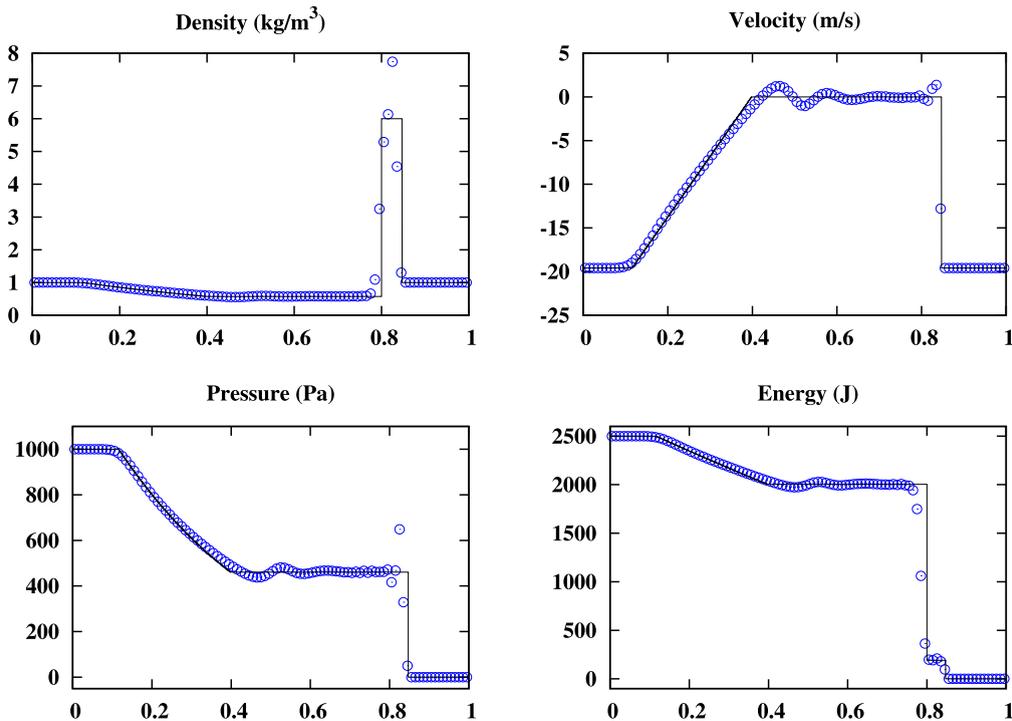


Fig. 32. Test 2 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = 0$ and $K_l = 0.25$ (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

6. Conclusion

The proposed approach essentially consists in the introduction of an inertia term in the face velocity expression. It was applied in the present study to the AUSM⁺-up scheme by Liou [11]. The resulting scheme, called AUSM-IT (IT for *Inertia Term*), allows full Mach number range calculations, since it is an extension of the AUSM⁺-up scheme which is retrieved when the local Mach number is larger than unity.

The high quality of the results obtained for acoustic waves in low Mach number flows is about the same as by momentum interpolation. The reason for this good performance is the way the inertia term is introduced in the Godunov-type

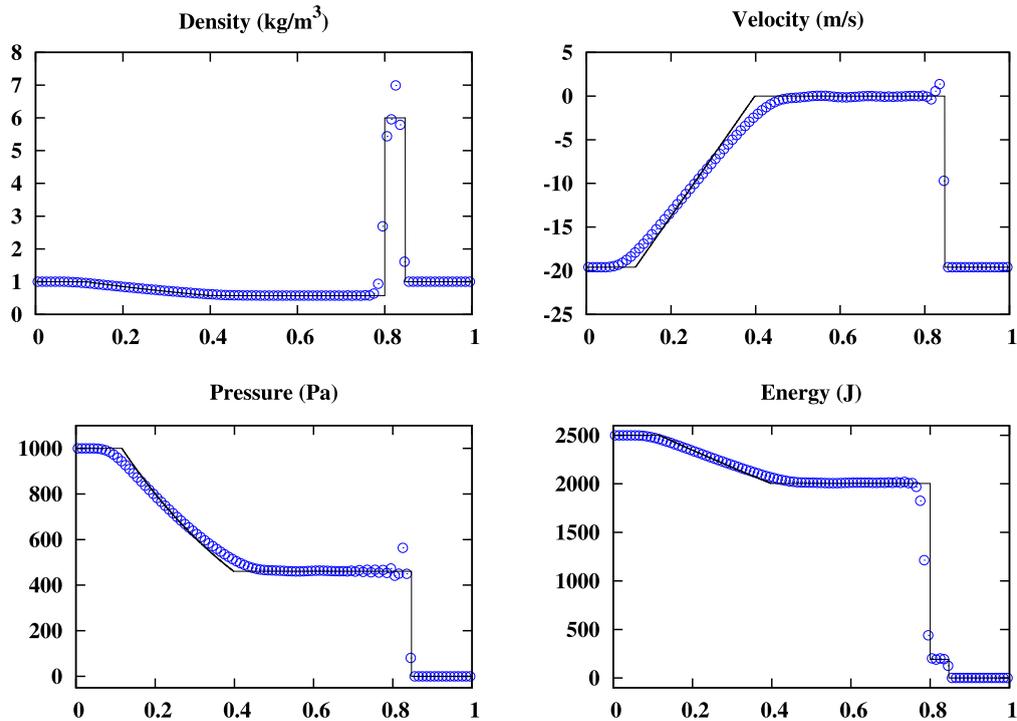


Fig. 33. Test 2 of Section 5.2. AUSM⁺ scheme (\circ) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

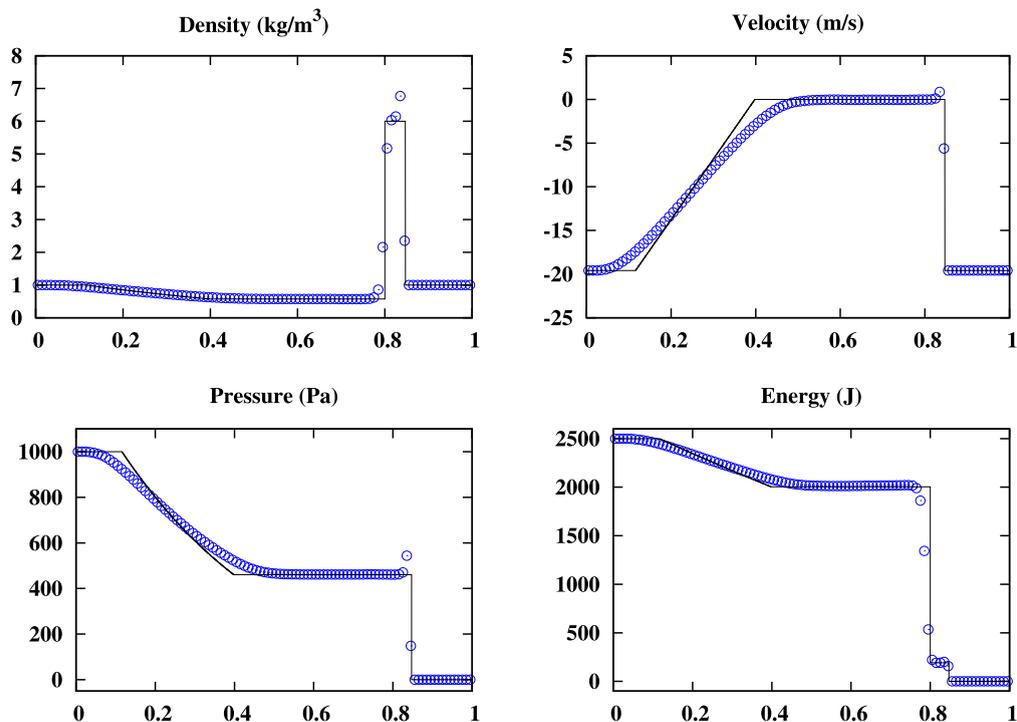


Fig. 34. Test 2 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0$ and f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

scheme. For periodic boundary conditions, it allows the conservation of the discrete linear acoustic energy in the low Mach number limit, at the first order. This is achieved if the way of interpolation of pressure tends to the central interpolation in the limit $M_r \rightarrow 0$. This acoustic energy conservation property at the discrete level conforms to the continuous asymptotic analysis. The superiority of the proposed Godunov-type scheme over the momentum interpolation technique for Riemann problems was numerically demonstrated.

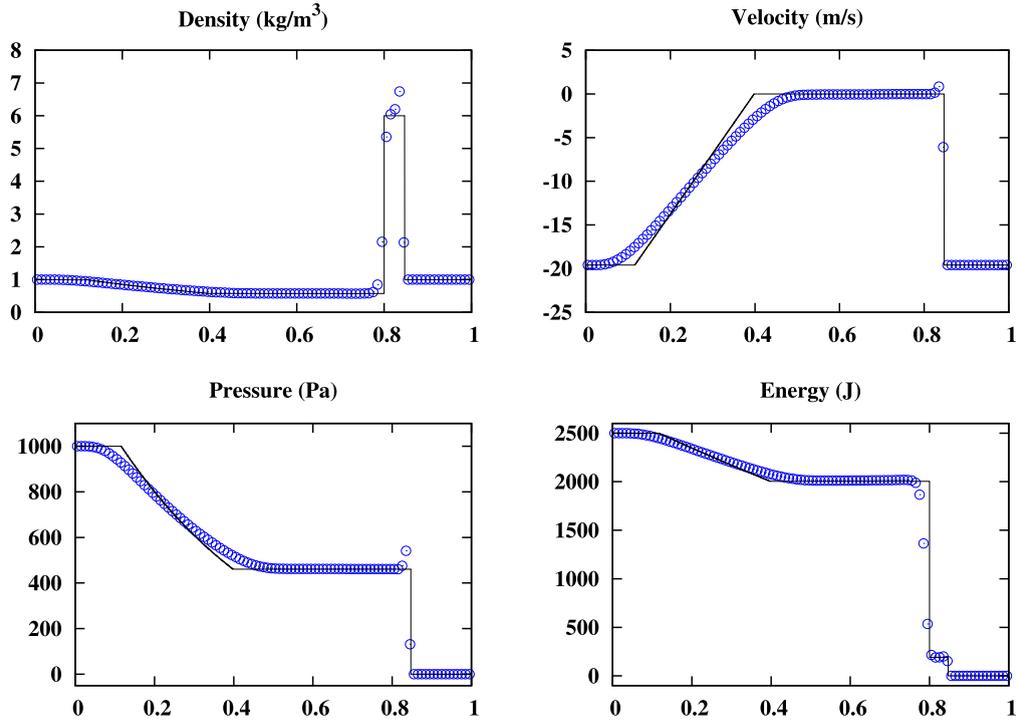


Fig. 35. Test 2 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0$ and $f_c = 1$ (○), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

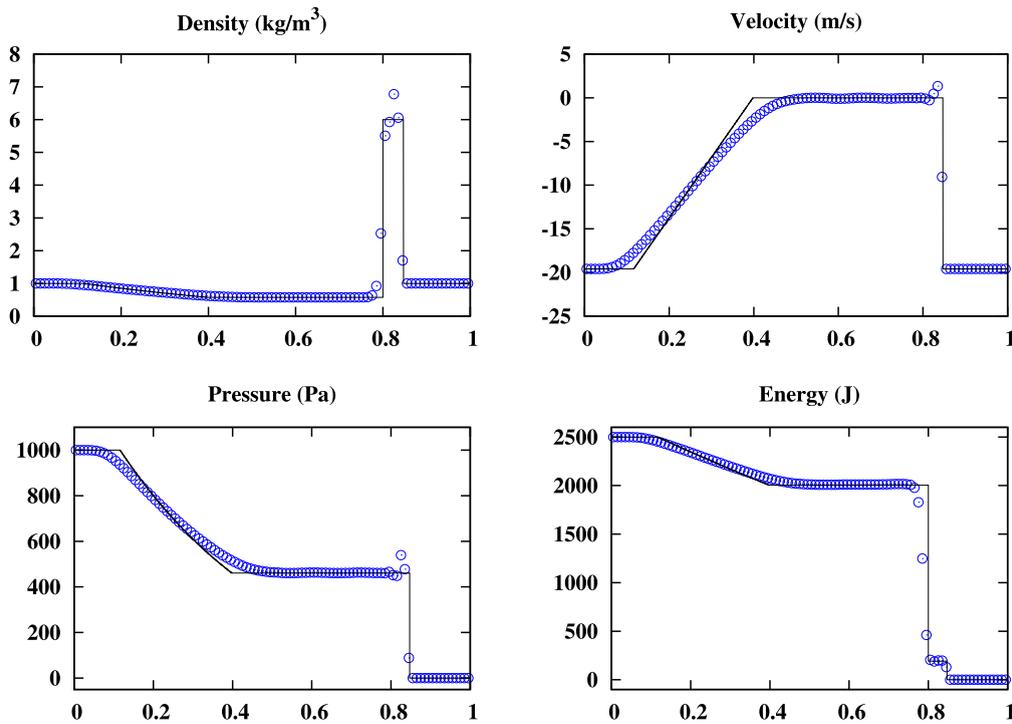


Fig. 36. Test 2 of Section 5.2. ‘JCAM 2013’ scheme (○) with $\beta = 1$ (see Eq. (26)) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.012$ s.

Taking into account an inertia term for velocity interpolation is applicable in principle to any Godunov-type scheme. Thus, the approach proposed in the present study to design the AUSM-IT scheme from the AUSM⁺-up scheme can be applied to any other Godunov-type scheme, in order to obtain full Mach number range high quality results.

Appendix A. AUSM⁺-up, AUSM⁺, ‘JCAM 2103’, SLAU and momentum interpolation

3-D version, except momentum interpolation, for sake of presentation.

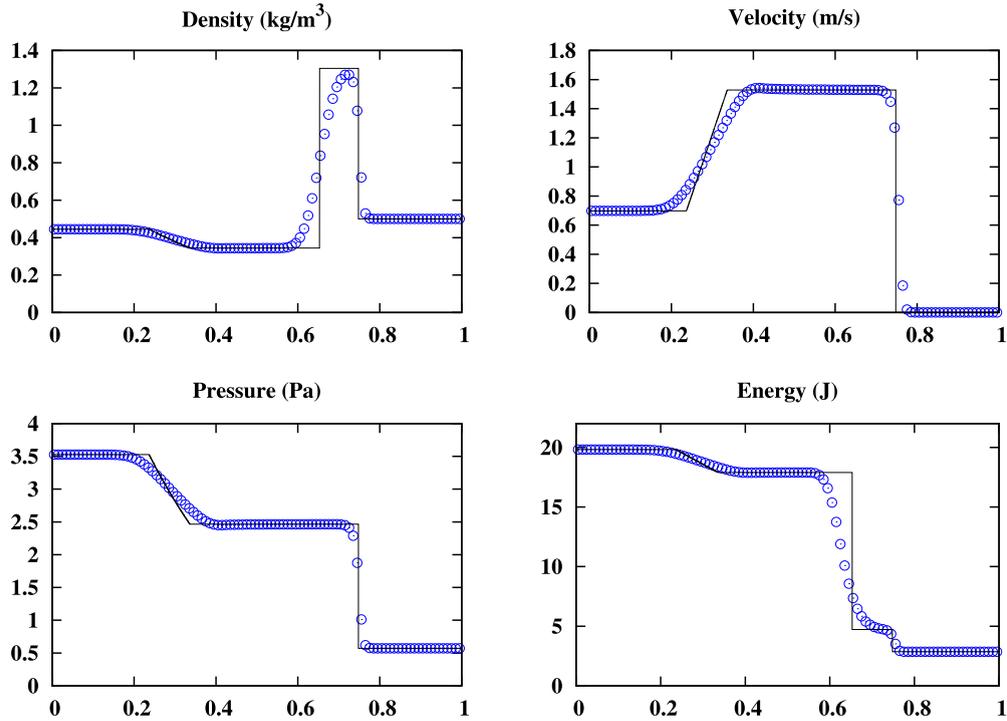


Fig. 37. Test 3 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = 0.25$ and $K_I = 0.25$ (o) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

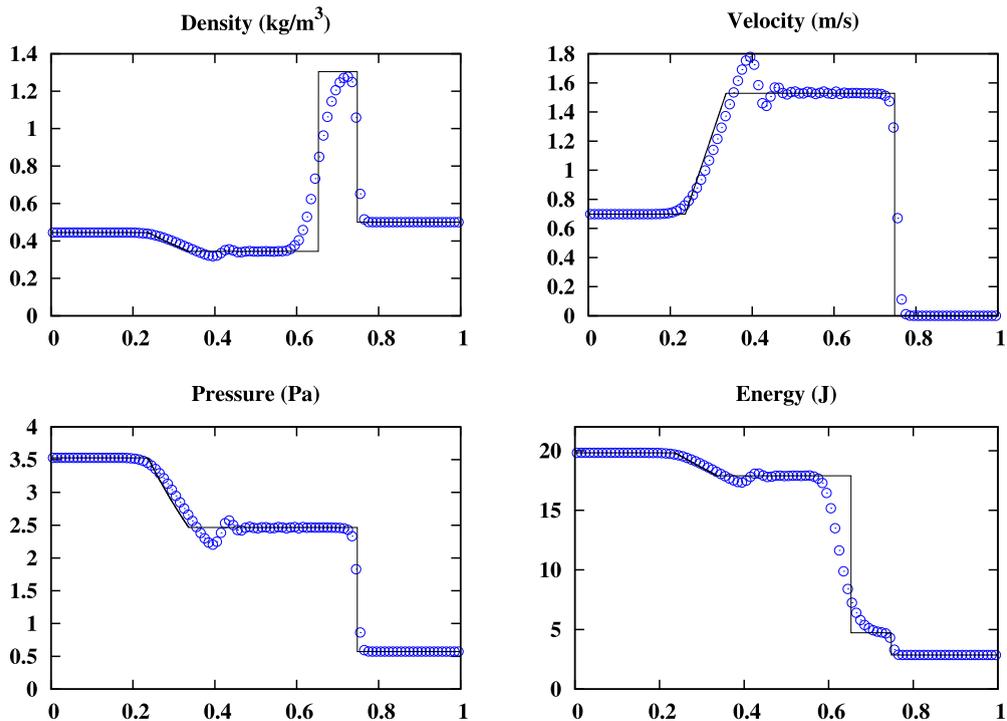


Fig. 38. Test 3 of Section 5.2. AUSM-IT scheme with $K_p = 0$ and $K_I = 0.25$ (o) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

Notations:

n : unit normal to the face

$$V_n^+ = V_L \cdot n, \quad V_n^- = V_R \cdot n, \quad M_L = \frac{V_n^+}{c_{1/2}}, \quad M_R = \frac{V_n^-}{c_{1/2}}$$

$$f_{p,\alpha}^\pm(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(m)), & |m| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(m \pm 1)^2(2 \mp m) \pm \alpha m(m^2 - 1)^2, & |m| < 1 \end{cases}$$

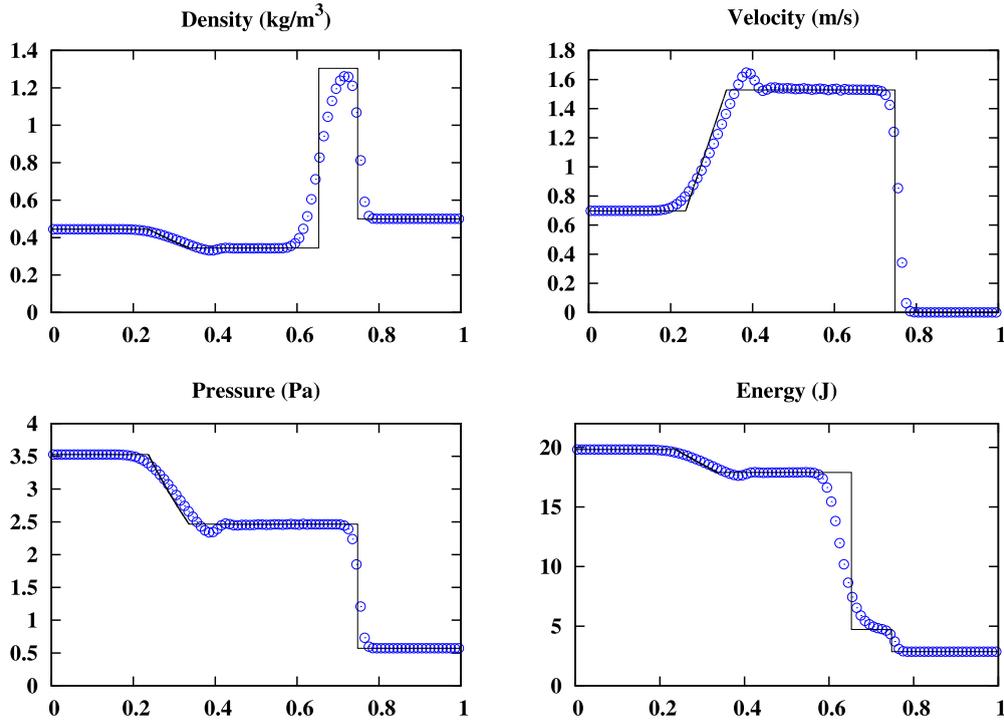


Fig. 39. Test 3 of Section 5.2. AUSM⁺ scheme (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

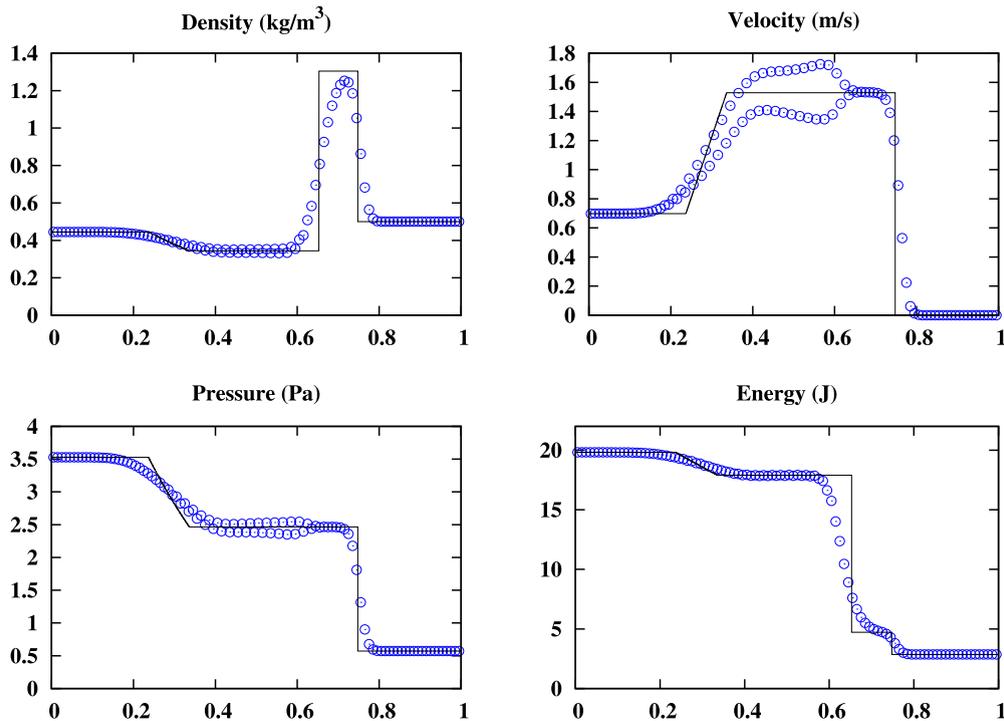


Fig. 40. Test 3 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0.75$ and f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) (○), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

A.1. AUSM⁺ [10], AUSM⁺-up [11] and ‘JCAM 2013’ [14]

The AUSM⁺-up scheme is first considered.

- Transporting face velocity:

$$v_{1/2}^T = c_{1/2} M_{1/2} - \frac{K_p}{\bar{Q} c_{1/2} f_c(M_0)} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\} (p_R - p_L) \tag{23}$$

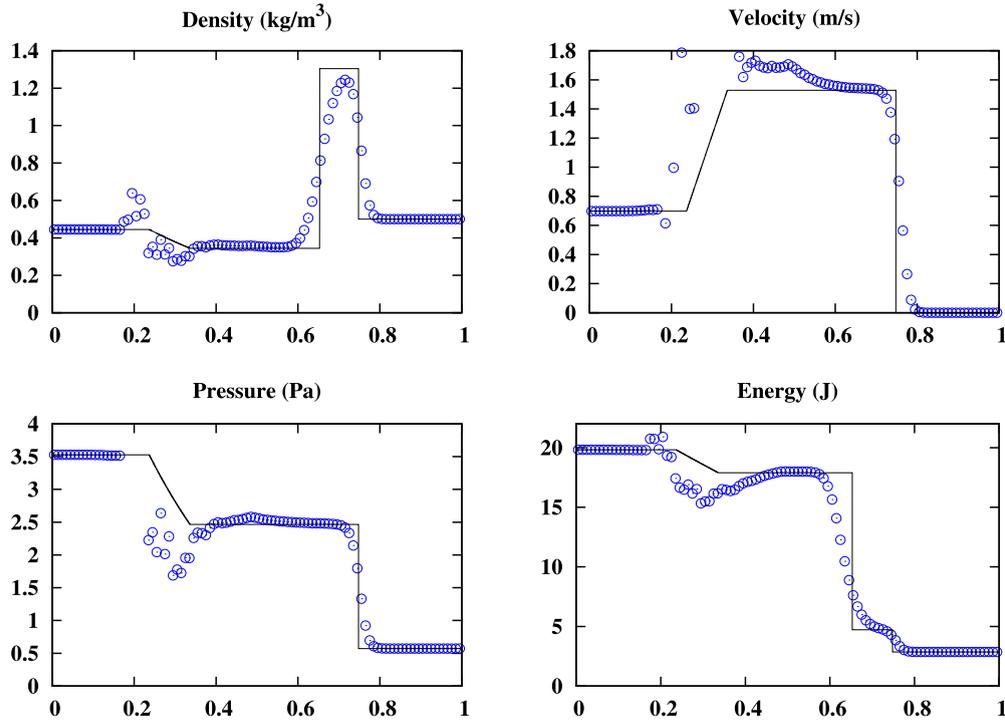


Fig. 41. Test 3 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0.75$ and $f_c = 1$ (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

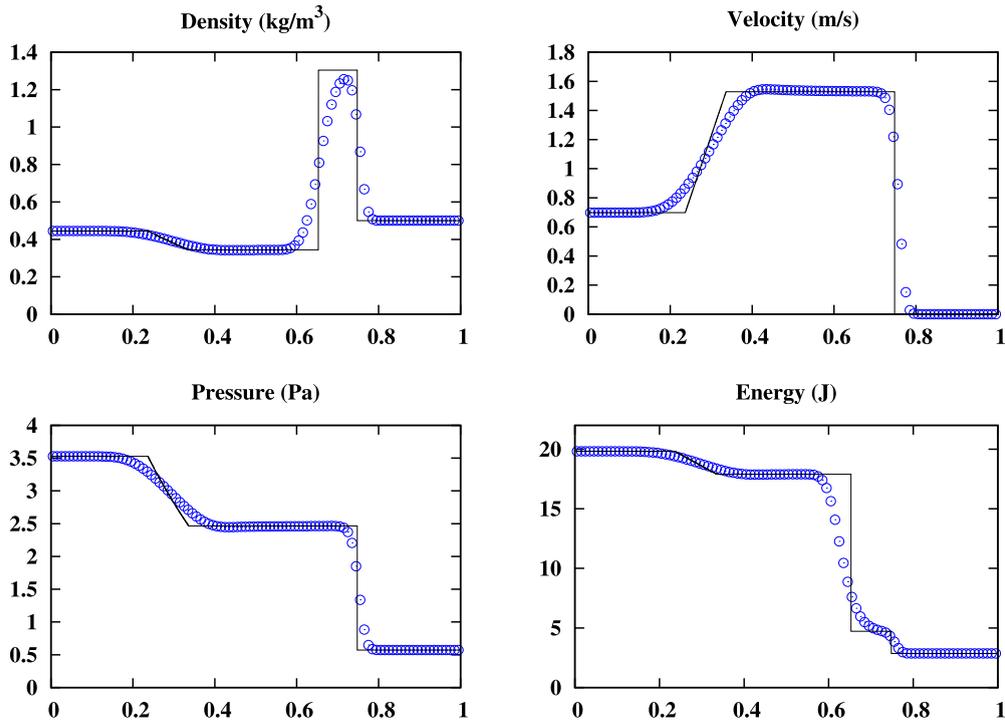


Fig. 42. Test 3 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0$ and f_c given by Eq. (24) (see Appendix A) (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

$$M_{1/2} = f_M^+(M_L) + f_M^-(M_R)$$

$$f_M^\pm(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m \pm |m|), & |m| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(m \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(m^2 - 1)^2, & |m| < 1 \end{cases}$$

$$\bar{Q} = \frac{Q_L + Q_R}{2}$$

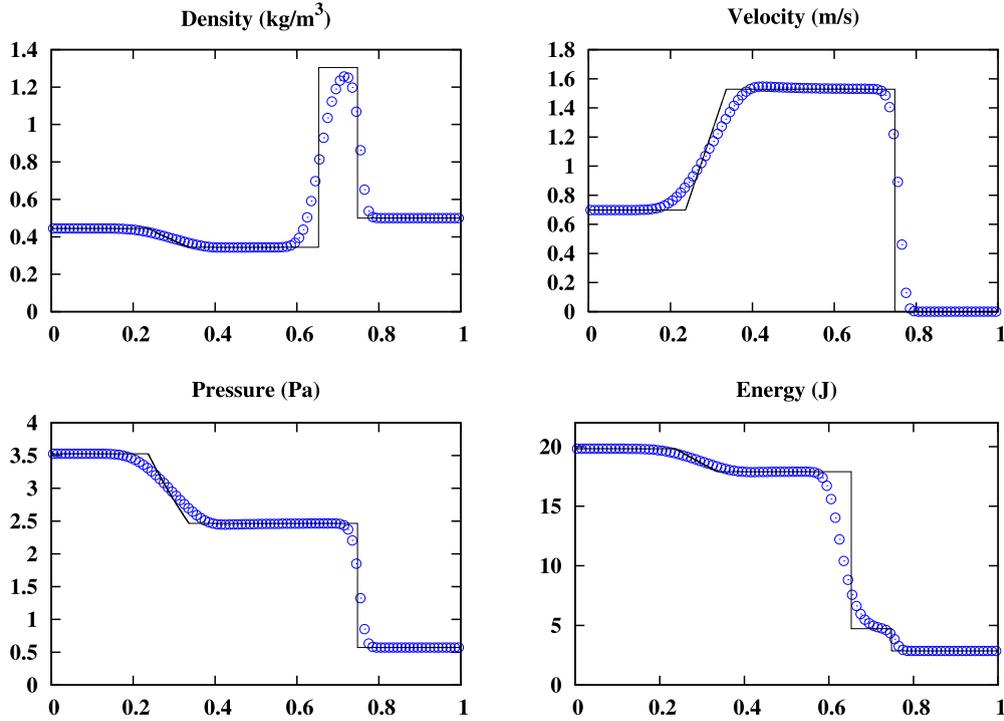


Fig. 43. Test 3 of Section 5.2. AUSM⁺-up scheme with $K_p = 0.25$, $K_v = 0$ and $f_c = 1$ (\circ), and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

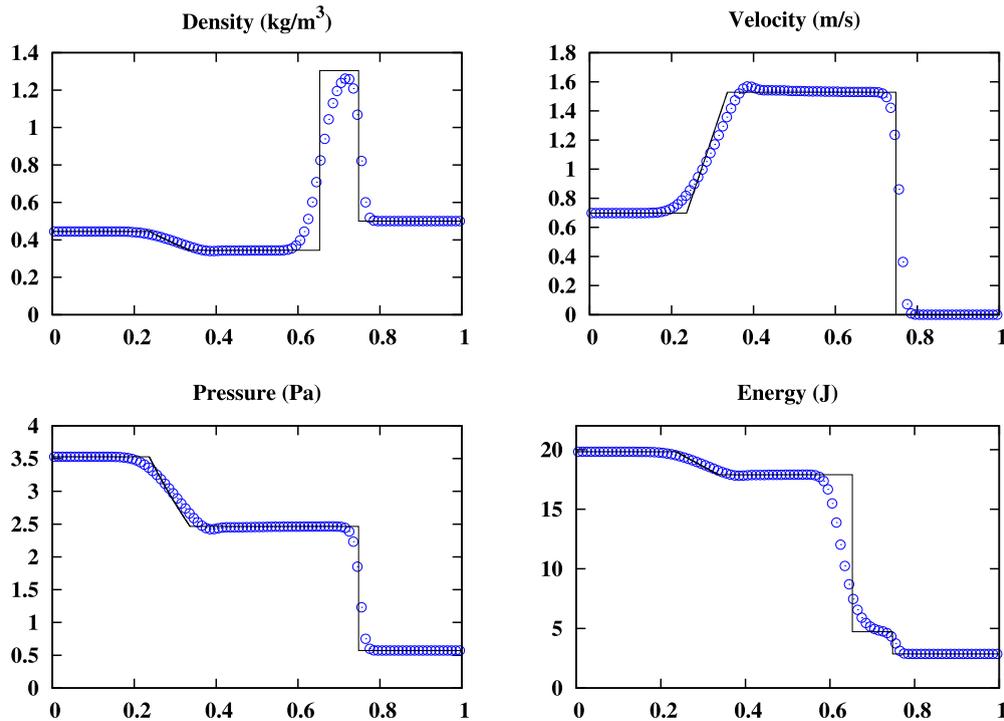


Fig. 44. Test 3 of Section 5.2. 'JCAM 2013' scheme (\circ) with $\beta = 1$ (see Eq. (26)) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

$$\begin{aligned}
 f_c(M_0) &= M_0(2 - M_0), & M_0^2 &= \min\{1, \max\{\bar{M}^2, M_\infty^2\}\} \\
 \bar{M}^2 &= \frac{(V_n^+)^2 + (V_n^-)^2}{2c_{1/2}^2} \\
 c_{1/2} &= \min\{\tilde{c}_L, \tilde{c}_R\}, & \tilde{c}_L &= (c^*)^2 / \max\{c^*, V_n^+\}, & \tilde{c}_R &= (c^*)^2 / \max\{c^*, -V_n^-\} \\
 (c^*)^2 &= \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} H
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

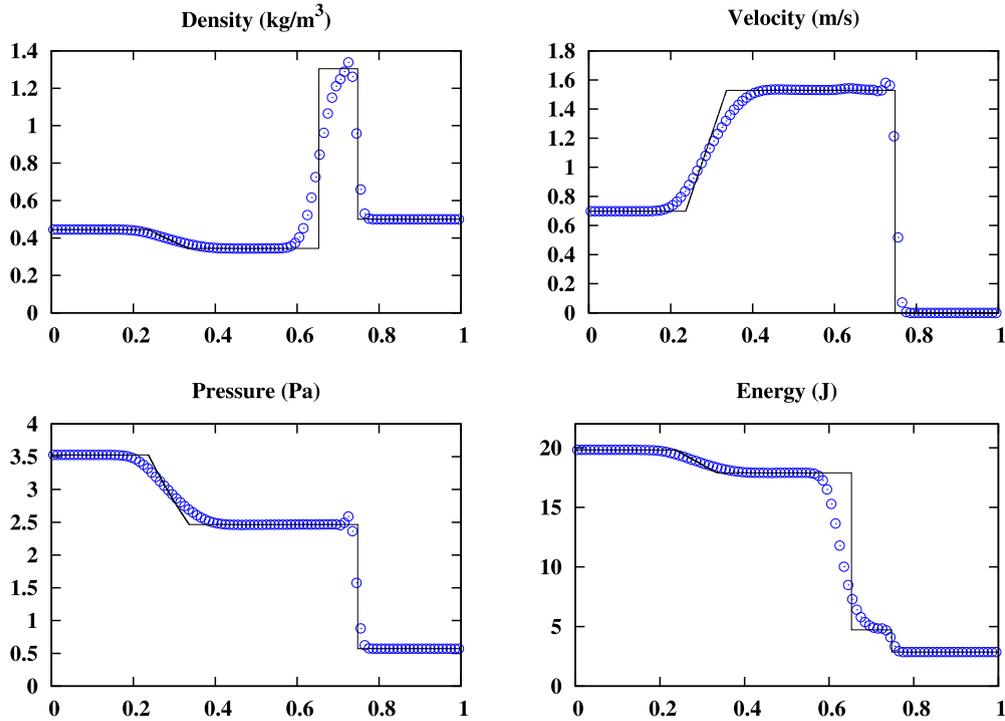


Fig. 45. Test 3 of Section 5.2. SLAU scheme (○) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

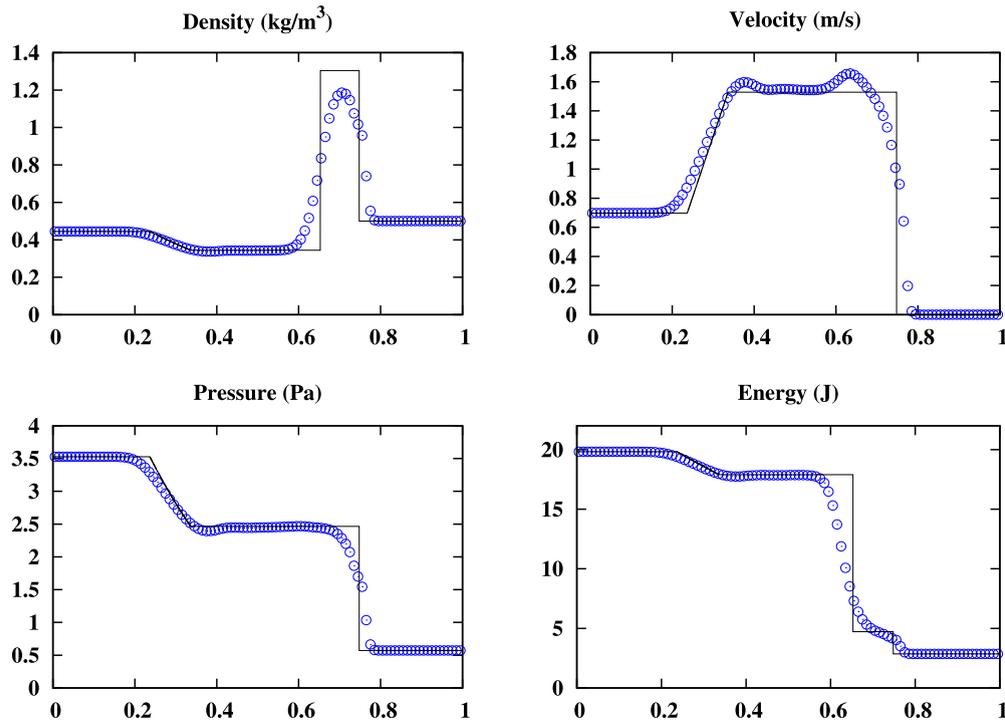


Fig. 46. Test 3 of Section 5.2. Momentum interpolation scheme (○) (see Eq. (29)) and exact (solid line) solutions at time $t = 0.1$ s.

$$0 \leq K_p \leq 1, \quad \sigma \leq 1; \quad \text{typically: } K_p = 0.25, \quad \sigma = 1$$

- Face pressure:

$$p_{1/2} = f_{p,\alpha}^+(M_L)p_L + f_{p,\alpha}^-(M_R)p_R - K_v f_{p,\alpha}^+(M_L) f_{p,\alpha}^-(M_R) (Q_L + Q_R) f_c(M_0) c_{1/2} (V_n^- - V_n^+) \tag{25}$$

where

$$f_{p,\alpha}^\pm(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(m)), & |m| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(m \pm 1)^2(2 \mp m) \pm \alpha m(m^2 - 1)^2, & |m| < 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{3}{16}[-4 + 5(f_c(M_0))^2], \quad 0 \leq K_v \leq 1; \quad \text{typically: } K_v = 0.75$$

- Convected quantities: upwinded
- The AUSM⁺ scheme is obtained from the AUSM⁺-up scheme by taking $K_p = 0$ in Eq. (23), and $K_v = 0$ along with $\alpha = 3/16$ in Eq. (25). Note that the interface speed of sound retained for AUSM⁺ is the same as the one for AUSM⁺-up, as it was suggested by Liou in [11] to address the problem of entropy preservation.
- ‘JCAM 2013’: The transporting face velocity is

$$v_{1/2}^T = c_{1/2} M_{1/2} - \frac{K_p}{\bar{\rho}[f_c(M_0)c_{1/2} + \frac{\beta}{\Delta t/\Delta x}]} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\}(p_R - p_L) \tag{26}$$

where $\beta \in O(1)$. The face pressure is identical to the one of the AUSM⁺ scheme.

A.2. SLAU [4,21]

- Mass flux:

$$(\rho v)_{1/2} = \frac{1}{2}[\rho_L(V_n^+ + |\bar{V}_n|^+) + \rho_R(V_n^- - |\bar{V}_n|^-)] - \frac{\chi(\hat{M}_{1/2})}{2c_{1/2}} \Delta p \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} |\bar{V}_n|^+ &= (1 - g)|\bar{V}_n| + g|V_n^+|, & |\bar{V}_n|^- &= (1 - g)|\bar{V}_n| + g|V_n^-| \\ |\bar{V}_n| &= \frac{\rho_L|V_n^+| + \rho_R|V_n^-|}{\rho_L + \rho_R} \\ g &= -\max\{\min\{M_L, 0\}, -1\} \min\{\max\{M_R, 0\}, 1\} \\ c_{1/2} &= \frac{c_L + c_R}{2} \\ \chi(M) &= (1 - M)^2, & \hat{M}_{1/2} &= \min\left\{1, \frac{1}{c_{1/2}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}}\right\} \end{aligned}$$

- Face pressure (‘SLAU 2’ version proposed in [4]):

$$\begin{aligned} p_{1/2} &= \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{f_{p,0}^+(M_L) - f_{p,0}^-(M_R)}{2}(p_L - p_R) \\ &+ \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}} (f_{p,0}^+(M_L) + f_{p,0}^-(M_R) - 1) \bar{\rho} c_{1/2} \end{aligned} \tag{28}$$

where $\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R)$

A.3. Momentum interpolation (MI) [15,16]

- Mass flux (1-D version and velocity is assumed to be positive):

$$(\rho v)_{i+1/2} = \frac{B_{i+1/2}}{A_{i+1/2}} - \frac{1}{A_{i+1/2}}(p_{i+1} - p_i) - \frac{\Delta x}{A_{i+1/2}} d_t(\rho v)_{i+1/2}. \tag{29}$$

In this expression,

$$\frac{B_{i+1/2}}{A_{i+1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_i}{A_i} + \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} \right)$$

where A_i and B_i are terms in the momentum equation of node i according to

$$B_i = A_i(\rho v)_i + p_{i+1/2} - p_{i-1/2} + \Delta x d_t(\rho v)_i$$

and

$$\frac{1}{A_{i+1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_i} + \frac{1}{A_{i+1}} \right).$$

There, $A_i = v_{i+1/2}$ and $A_{i+1} = v_{i+3/2}$, taken at the previous iteration or time-step and defined with the AUSM⁺ expression.

- Face pressure. In all the presented calculations with momentum interpolation, the face pressure is the one of the AUSM⁺ scheme:

$$p_{1/2} = f_{p,3/16}^+(M_L)p_L + f_{p,3/16}^-(M_R)p_R$$

Appendix B. Pressure correction algorithm [15]

To simplify the presentation, the flow is 1-D and the velocity is positive. Each time-step $n \rightarrow n + 1$ is decomposed into iterations denoted by the superscript k . At the first iteration of the time-step n , one has $k = n$. The superscripts $\star\star$, \star and \prime denote ‘pre-predicted’, predicted and corrected quantities of each iteration k . ψ denotes the slope limiter. Practically, no more than five iterations are allowed, and the so-called Bounded Central slope limiter was chosen in the unsteady low Mach number flow calculations. The ratio $\Delta t/\Delta x$ is denoted by τ .

B.1. ‘Pre-prediction’ step: construction of the common transporting velocity

- $q_i^{\star\star}$ from

$$\frac{1}{2\tau}(3q_i^{\star\star} - 4q_i^n + q_i^{n-1}) + \left[q_i^{\star\star} + \frac{1}{2}\psi_i(q^k)(q_i^k - q_{i-1}^k) \right] v_{i+1/2}^k - \left[q_{i-1}^{\star\star} + \frac{1}{2}\psi_{i-1}(q^k)(q_{i-1}^k - q_{i-2}^k) \right] v_{i-1/2}^k = 0$$

- $(Qv)_i^{\star\star} = q_i^{\star\star} v_i^k$, $(QE)_i^{\star\star} = \frac{p_i^k}{\gamma-1} + \frac{1}{2}q_i^{\star\star}(v_i^k)^2$
- Transporting face velocity:

$$v_{i+1/2}^T = \begin{cases} c_{i+1/2}^{\star\star} M_{i+1/2}^{\star\star} - \frac{K_p}{\bar{c}_{i+1/2}^{\star\star} f_c(M_0)} \max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\} \Delta p^k, & \text{AUSM}^+ \text{-up cf. (23)} \\ \frac{(Qv)_{i+1/2}^{\text{SLAU},\star\star}}{q_{i+1/2}^{\star\star}}, & Q_{i+1/2} = \frac{Q_L + Q_R}{2}, & \text{SLAU cf. (27)} \\ \frac{(Qv)_{i+1/2}^{\text{MI},\star\star}}{q_{i+1/2}^{\star\star}}, & Q_{i+1/2} = \frac{Q_L + Q_R}{2}, & \text{MI cf. (29)} \\ c_{i+1/2}^{\star\star} M_{i+1/2}^{\star\star} - \frac{\max\{1 - \sigma \bar{M}^2, 0\}}{c_{i+1/2}^{\star\star} f_c(M_0)} \left[K_p \frac{\Delta p^k}{\bar{c}^{\star\star}} + K_I \Delta x \left(\frac{3v_{i+1/2}^T - 4v_{i+1/2}^n + v_{i+1/2}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right], & \text{AUSM-IT cf. (16)} \end{cases}$$

B.2. Prediction step

- $p_i^{\star} = p_i^k$
- q_i^{\star} from

$$\frac{1}{2\tau}(3q_i^{\star} - 4q_i^n + q_i^{n-1}) + \left[q_i^{\star} + \frac{1}{2}\psi_i(q^k)(q_i^k - q_{i-1}^k) \right] v_{i+1/2}^T - \left[q_{i-1}^{\star} + \frac{1}{2}\psi_{i-1}(q^k)(q_{i-1}^k - q_{i-2}^k) \right] v_{i-1/2}^T = 0$$

- $(Qv)_i^{\star}$ from

$$\frac{1}{2\tau} \left[3(Qv)_i^{\star} - 4(Qv)_i^n + (Qv)_i^{n-1} \right] + \left[(Qv)_i^{\star} + \frac{1}{2}\psi_i((Qv)^k) [(Qv)_i^k - (Qv)_{i-1}^k] \right] v_{i+1/2}^T - \left[(Qv)_{i-1}^{\star} + \frac{1}{2}\psi_{i-1}((Qv)^k) [(Qv)_{i-1}^k - (Qv)_{i-2}^k] \right] v_{i-1/2}^T + p_{i+1/2}^k - p_{i-1/2}^k = 0$$

- $(QE)_i^{\star} = \frac{p_i^k}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \frac{[(Qv)_i^{\star}]^2}{q_i^{\star}}$, $(QH)_i^{\star} = (QE)_i^{\star} + p_i^k$

B.3. Correction step

- p_i^{\prime} from

$$\frac{1}{2\tau} \left[3(QE)_i^{k+1} - 4(QE)_i^n + (QE)_i^{n-1} \right] + (QvH)_{i+1/2}^{k+1} - (QvH)_{i-1/2}^{k+1} = 0 \quad (30)$$

where

$$(QvH)_{i+1/2}^{k+1} = (QH)_{i+1/2}^{\star} v_{i+1/2}^T + H_{i+1/2}^{\star} (Qv)_{i+1/2}^{\prime} + (QH)_{i+1/2}^{\prime} v_{i+1/2}^T$$

$(\varrho H)_{i+1/2}^*$, $H_{i+1/2}^*$: upwinded in second-order accurate form

$$\begin{aligned}
 (\varrho H)_{i+1/2}' &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_{i+1/2}' \\
 p_{i+1/2}' &= f_{p,3/16}^+(M_i^*) p_i' + f_{p,3/16}^-(M_{i+1}^*) p_{i+1}' \\
 (\varrho v)_{i+1/2}' &= (\varrho v)_{i+1/2, \text{Momentum}}' + (\varrho v)_{i+1/2, \text{Flux}}' \\
 (\varrho v)_{i+1/2, \text{Momentum}}' &= -\frac{2}{3} \tau (p_{i+1}' - p_i') \quad (\text{SIMPLE approximation}) \\
 (\varrho v)_{i+1/2, \text{Flux}}' &= -\kappa_{i+1/2} (p_{i+1}' - p_i') \\
 \kappa_{i+1/2} &= \begin{cases} \frac{K_p}{\varrho_{i+1/2}^* c_{i+1/2}^* f(M_0^*)} \max\{1 - (\bar{M}_{i+1/2}^*)^2 \sigma, 0\} \varrho_L^*, & \text{AUSM}^+ \text{-up cf. (23)} \\ \frac{\chi_{i+1/2}}{c_{i+1/2}}, & \text{SLAU cf. (27)} \\ 0, & \text{MI cf. (29) or AUSM-IT cf. (16)} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

• $(\varrho v)_i'$ from

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} (\varrho v)_i' &= -\tau \left[\left\{ (\varrho v)_i' + \frac{1}{2} \psi_i ((\varrho v)^k) [(\varrho v)_i' - (\varrho v)_{i-1}'] \right\} v_{i+1/2}^T \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ (\varrho v)_{i-1}' + \frac{1}{2} \psi_{i-1} ((\varrho v)^k) [(\varrho v)_{i-1}' - (\varrho v)_{i-2}'] \right\} v_{i-1/2}^T \right] \\
 &\quad - \tau (p_{i+1/2}' - p_{i-1/2}')
 \end{aligned}$$

B.4. Updates

• Cell quantities:

$$\begin{aligned}
 p_i^{k+1} &= p_i^k + p_i', \quad \varrho_i^{k+1} = \varrho_i^* \left(1 + \frac{p_i'}{p_i^k} \right), \quad (\varrho v)_i^{k+1} = (\varrho v)_i^* + (\varrho v)_i' \\
 (\varrho E)_i^{k+1} &= (\varrho E)_i^* + \frac{p_i'}{\gamma - 1}, \quad (\varrho H)_i^{k+1} = (\varrho E)_i^{k+1} + p_i^{k+1}
 \end{aligned}$$

• Cell-face quantities:

$$p_{i+1/2}^{k+1} = \begin{cases} f_{p,\alpha}^+(M_L^{k+1}) p_L^{k+1} + f_{p,\alpha}^-(M_R^{k+1}) p_R^{k+1} - K_v f_{p,\alpha}^+(M_L^{k+1}) f_{p,\alpha}^-(M_R^{k+1}) (\varrho_L^{k+1} + \varrho_R^{k+1}) f_c(M_0) \\ \quad \times c_{i+1/2}^{k+1} (v_R^{k+1} - v_L^{k+1}), & \text{AUSM}^+ \text{-up cf. (25)} \\ \frac{p_L^{k+1} + p_R^{k+1}}{2} + \frac{f_{p,0}^+(M_L^{k+1}) - f_{p,0}^-(M_R^{k+1})}{2} (p_L^{k+1} - p_R^{k+1}) + \sqrt{\frac{(v_L^{k+1})^2 + (v_R^{k+1})^2}{2}} \\ \quad \times (f_{p,0}^+(M_L^{k+1}) + f_{p,0}^-(M_R^{k+1}) - 1) \bar{\varrho}^{k+1} c_{i+1/2}^{k+1}, & \text{SLAU cf. (28)} \\ f_{p,\alpha}^+(M_L^{k+1}) p_L^{k+1} + f_{p,\alpha}^-(M_R^{k+1}) p_R^{k+1}, & \text{AUSM-IT cf. (17) or MI} \end{cases}$$

For any used numerical flux:

$$v_{i+1/2}^{k+1} = c_{i+1/2}^{k+1} M_{i+1/2}^{k+1}$$

with $c_{1/2}$ and $M_{1/2}$ defined in Appendix A. Note that this cell-face velocity is the AUSM⁺ cell-face velocity [10].

References

[1] S. Dellacherie, Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 978–1016.
 [2] H. Guillard, A. Murrone, On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit: II. Godunov type schemes, *Comput. Fluids* 33 (2004) 655–675.
 [3] H. Guillard, C. Viozat, On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit, *Comput. Fluids* 28 (1999) 63–86.
 [4] K. Kitamura, E. Shima, Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: a new pressure flux for AUSM-family schemes, *J. Comput. Phys.* 245 (2013) 62–83.
 [5] S. Klainerman, A. Majda, Compressible and incompressible fluids, *Commun. Pure Appl. Math.* 35 (1982) 629–651.

- [6] R. Klein, Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I: one-dimensional flow, *J. Comput. Phys.* 121 (1995) 213–237.
- [7] P.D. Lax, Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Commun. Pure Appl. Math.* 7 (1954) 159–193.
- [8] X.S. Li, C.W. Gu, An All-Speed Roe-type scheme and its asymptotic analysis of low Mach number behaviour, *J. Comput. Phys.* 227 (2008) 5144–5159.
- [9] X.S. Li, C.W. Gu, Mechanism of Roe-type schemes for all-speed flows and its application, *Comput. Fluids* 86 (2013) 56–70.
- [10] M.-S. Liou, A sequel to AUSM: AUSM⁺, *J. Comput. Phys.* 129 (1996) 364–382.
- [11] M.-S. Liou, A sequel to AUSM, part II: AUSM⁺-up for all speeds, *J. Comput. Phys.* 214 (2006) 137–170.
- [12] M.-S. Liou, C.J. Steffen, A new flux splitting scheme, *J. Comput. Phys.* 107 (1993) 23–39.
- [13] A. Meister, Asymptotic single and multiple scale expansions in the Low Mach number limit, *SIAM J. Appl. Math.* 60 (1) (1999) 256–271.
- [14] Y. Moguen, E. Dick, J. Vierendeels, P. Bruel, Pressure-velocity coupling for unsteady low Mach number flow simulations: an improvement of the AUSM⁺-up scheme, *J. Comput. Appl. Math.* 246 (2013) 136–143.
- [15] Y. Moguen, T. Kousksou, P. Bruel, J. Vierendeels, E. Dick, Pressure-velocity coupling allowing acoustic calculation in low Mach number flow, *J. Comput. Phys.* 231 (2012) 5522–5541.
- [16] A. Pascau, Cell face velocity alternatives in a structured colocated grid for the unsteady Navier–Stokes equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 65 (2011) 812–833.
- [17] C.M. Rhie, W.L. Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA J.* 21 (11) (1983) 1525–1532.
- [18] F. Rieper, A low-Mach number fix for Roe's approximate Riemann solver, *J. Comput. Phys.* 230 (2011) 5263–5287.
- [19] J. Sachdev, A. Hosangadi, V. Sankaran, Improved flux formulations for unsteady low Mach number flows, in: *AIAA Paper No. 2012-3067*, 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference, New Orleans, United States of America, June 25–28, 2012.
- [20] E. Shima, On the improvement of the all-speed flux scheme for very low Mach number flows, in: *AIAA Paper No. 2013-2696*, 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, San Diego, United States of America, June 24–27, 2013.
- [21] E. Shima, K. Kitamura, Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds, *AIAA J.* 49 (8) (2011) 1693–1709.
- [22] L.L. Takacs, A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors, *Mon. Weather Rev.* 113 (1985) 1050–1065.
- [23] H. Tang, On the sonic point glitch, *J. Comput. Phys.* 202 (2005) 507–532.
- [24] E. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics – A Practical Introduction*, third edition, Springer, 2009.