



HAL
open science

Résonances pour des Guides d'Ondes Acoustiques Multistratifiés. Quelques Problèmes Inverses pour l'équation de la chaleur.

Olivier Poisson

► **To cite this version:**

Olivier Poisson. Résonances pour des Guides d'Ondes Acoustiques Multistratifiés. Quelques Problèmes Inverses pour l'équation de la chaleur.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Aix-Marseille Université, 2014. tel-01255506

HAL Id: tel-01255506

<https://hal.science/tel-01255506>

Submitted on 14 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Mémoire présenté par

Olivier Poisson

en vue d'obtenir

l'Habilitation à Diriger des Recherches

soutenu publiquement le **mardi 18 novembre 2014**

après avis des rapporteurs :

Mouez Dimassi	Professeur des Universités	Université de Bordeaux 1
David Dos Santos Ferreira	Professeur des Universités	Université de Lorraine
Luc Robbiano	Professeur des Universités	Université de Versailles

devant le jury composé de :

Assia Benabdallah	Professeur des Universités	Université d'Aix-Marseille
Franck Boyer	Professeur des Universités	Université d'Aix-Marseille
Mourad Choulli	Professeur des Universités	Université de Lorraine
Mouez Dimassi	Professeur des Universités	Université de Bordeaux 1
David Dos Santos Ferreira	Professeur des Universités	Université de Lorraine
Hiroshi Isozaki	Professeur des Universités	Université de Tsukuba, Japon
Gilles Lebeau	Professeur des Universités	Université de Nice
Jean-Pierre Puel	Professeur émérite	Université de Versailles
Luc Robbiano	Professeur des Universités	Université de Versailles

Table des matières

Partie I :

Résonances pour des Guides d'Ondes Acoustiques Multistratifiés	1
1. Introduction	2
2. Bande stratifiée non perturbée	5
3. Résolvante tronquée pour la bande multistratifiée	11
4. Comportement asymptotique en temps long	16
5. Comptage des valeurs propres	17
Perspectives	21

Partie II :

Quelques Problèmes Inverses pour l'équation de la chaleur	23
Introduction de la deuxième partie	25
Chapitre 1. Une Inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur	27
1. Introduction	27
2. Résultats Principaux	29
3. Preuve du résultat principal	31
4. Deux situations particulières	33
5. Remarque	34
Chapitre 2. Stabilité Höldérienne du Coefficient de diffusion	35
1. Introduction	35
2. Notations	39
3. Estimations de Carleman pour l'équation parabolique	40
4. Estimation de Carleman pour l'équation stationnaire d'ordre un	41
5. Preuve du résultat principal	45
6. Un problème inverse pour un système parabolique	47
7. Perspectives	48
Chapitre 3. Problème de Calderón parabolique	51
1. Introduction	51
2. Conductivité stationnaire	52
3. Idées de preuves	54
4. Conductivité instationnaire	55
5. Perspectives	58

Bibliographie	59
Publications de l'auteur	63
Compte-Rendu à l'Académie des Sciences	63
Articles parus dans des revues internationales avec comité de lecture	63

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Yves Dermenjian qui m'a fait l'amitié d'être mon tuteur pour cette habilitation et qui m'a bien aidé dans les démarches administratives de ce projet. Je le remercie au moins autant pour son apport scientifique et amical à l'équipe d'analyse appliquée du LATP dans laquelle je me suis inséré depuis que je suis arrivé à Marseille il y a bien longtemps, apport qui a permis entre lui, moi et quelques autres (ici ou ailleurs) une longue et fructueuse collaboration dans une ambiance sympathique.

Je voudrais manifester ma gratitude à Mouez Dimassi, David Dos Santos Ferreira et Luc Robbiano qui ont accepté de lire ce manuscrit en détails et d'écrire les rapports de pré-soutenance, ainsi qu'aux membres du jury qui me font l'honneur d'assister à la soutenance. Ayant déjà croisé presque tous d'entre eux, et ce avec plaisir, je voudrais exprimer encore ma reconnaissance et ma sympathie à Gilles Lebeau qui s'était intéressé aux travaux de ma thèse et avait déjà fait parti du jury à l'époque, à Jean-Pierre Puel avec qui j'ai eu des discussions fructueuses lors de ses passages à Marseille, à Hiroshi Isozaki dont la collaboration amicale et fructueuse m'a permis de découvrir des aspects passionnants des problèmes inverses ainsi que ceux du Japon.

J'ai une pensée amicale pour nombre de collègues ou de membres du personnel de l'AMU que je ne citerai pas tous, en particulier Assia qui m'a fait découvrir les joies du contrôle (mathématique) et qui, je l'espère, arrivera à l'heure, à Michel et Patricia avec qui j'ai découvert quelques plages du Pacifique et la gastronomie loin de la France, à Franck, du Jury, qui s'est occupé de quelques finances utiles, et que je retrouve souvent dans cette ambiance agréable et bon enfant à l'heure du café au 3eme étage du CMI (avec Guillemette -bla-bla-bla, Nicolas, Sylvie ...), Gérard, que je harcèle depuis de longues années avec mes macs et mon sun, Thierry, dont j'ai apprécié la gentillesse et la disponibilité pour discuter de quelques petits problèmes mathématiques assez mineurs.

Présentation

Ce mémoire présente la majeure partie de mes travaux de recherche depuis mon arrivée à l'Université de Provence, fin 1992. Ces travaux, détaillés ici, se composent de deux parties indépendantes. La partie II est divisée en trois chapitres qui peuvent être lus pratiquement indépendamment.

La première partie porte sur l'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans une bande multistratifiée. C'est un projet proposé par Y. Dermenjian quand je suis arrivé dans la "jeune équipe" à l'université de Provence. A ce moment-là des travaux, Y. Dermenjian et E. Croc avaient établi le principe d'absorption limite pour l'opérateur d'ondes acoustiques dans une bande multistratifiée constituée de trois régions homogènes. J'ai fourni alors des représentations numériques de quelques ondes appelées "modes propres généralisés". Plus tard, en collaboration avec Y. Dermenjian et Boris Vainberg, nous avons établi le prolongement méromorphe de la résolvante de l'opérateur de diffusion des ondes, avec ses conséquences. Puis j'ai publié un résultat sur la distribution des valeurs propres d'un tel opérateur.

Les sections 1, 2, 3, 4 se basent sur l'article [8]. J'y ai corrigé quelques erreurs sans conséquences, notamment la définition de $D(A)$ (noté H dans [8, (1.3)]). J'y ai aussi ajouté un petit complément en précisant le fait qu'en un seuil λ_0 , les résidus $R_1(\lambda_0 + i0)$ et $R_1(\lambda_0 - i0)$ coïncident, au contraire de $R_2(\lambda_0 + i0)$ et $R_2(\lambda_0 - i0)$, sauf exception comme le cas de la bande stratifiée non perturbée. J'ai repris les détails de certaines démonstrations de [8] qui me paraissent assez originales, et laissé ceux d'autres preuves plus classiques. La section 5 se base sur le résultat de l'article [13] qui présente un résultat assez peu usuel, ainsi qu'une partie de la démonstration, qui ne me semble pas très standard.

La deuxième partie porte sur une inégalité de Carleman et des problèmes inverses, pour la même équation parabolique. Elle est découpée en trois chapitres. L'arrivée dans notre équipe d'Assia Benabdallah et de Jérôme Le Rousseau au début des années 2000 a permis une très bonne animation scientifique ainsi qu'une fructueuse collaboration sur des sujets riches comme le contrôle des solutions d'équations de type parabolique avec coefficient de conductivité discontinu, ou des problèmes inverses associés à de telles équations, incluant la technique des inégalités de Carleman pour l'équation de la chaleur. J'ai publié en 2008 le résultat d'inégalité de Carleman multidimensionnel étendant les résultats du papier originel Dubova-Osses-Puel en 2002. Le résultat a cependant été complètement dépassé par une nette amélioration de J. Le Rousseau et L. Robbiano l'année suivante, basée sur une approche différente. Toujours en 2008, j'ai également publié le résultat de problème inverse basé sur la méthode inventée par Bukgheim et Klivanov. Pour une raison chronologique, la démonstration que j'y élabore utilise pour l'inégalité de Carleman la version "Dubova-Osses-Puel" et non la mienne, où les hypothèses, quoique plus faibles, sont plus longues à décrire, et où la démonstration est techniquement plus sophistiquée. Il est clair que c'est maintenant la version "Le Rousseau-Robbiano" qu'il faut considérer, la seule

à notre portée pour l'instant, même si son emploi n'est pas direct. Plus récemment, sous l'impulsion de Hiroshi Isozaki, j'ai étudié le problème de Caldéron pour l'équation de la chaleur, par des méthodes très différentes de celles pour les questions précédentes. C'est pourquoi les trois chapitres de cette partie sont liés mais j'ai fait en sorte qu'on puisse les lire indépendamment. Le chapitre 1 se base sur l'article [42], qui reprend les résultats de [28] en étendant les hypothèses sur le coefficient de conductivité. Les fonctions poids de Carleman sont construites à partir de fonctions spatiales $\beta_i(x)$, comme dans le système de notations de [28] ou de [42]. La relation entre les β (ou β_i) et la fonction spatiale φ du système de notations de [39] est explicitée. Le chapitre 2 se base sur l'article [43]. Pour l'inégalité de Carleman utilisée, c'est la fonction φ précédente qui est employée. Le chapitre 3 porte sur le problème de Calderón, version équation de la chaleur. Il s'agit de donner une méthode de reconstruction de l'interface où la conductivité est discontinue, connaissant la conductivité de fond ("background"). Y sont présentés deux résultats. Le premier concerne une conductivité indépendante du temps, et la méthode consiste à revenir au cas elliptique avec un potentiel dépendant d'un grand paramètre. Le deuxième se place dans le cadre difficile où la conductivité dépend du temps, la dimension d'espace étant un. La preuve du résultat principal utilise une méthode d'ansatz ainsi qu'une estimation d'énergie.

Partie I :

Résonances pour des Guides d'Ondes
Acoustiques Multistratifiés

1. Introduction

Nous considérons la propagation d'ondes dans la bande $\Omega = \mathbb{R} \times]0, h[$, $h > 0$, régie par l'équation des ondes

$$(1) \quad \partial_t^2 v - a(x, z) \nabla \cdot (b(x, z) \nabla v) = f, \quad (x, z) \in \Omega, \quad t > 0,$$

avec une condition initiale appropriée et les conditions au bord usuelles. Les résultats obtenus peuvent être adaptés au cas plus général où $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ avec ω ouvert borné non vide régulier de \mathbb{R}^{d-1} . Pour cela, il suffit seulement de supposer que x désigne un vecteur dans ω et de remplacer les problèmes de Sturm–Liouville par les équations elliptiques correspondantes dans ω . Les coefficients a et b dans (1) sont supposés être des fonctions mesurables bornées supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives :

$$0 < c_1 \leq a(x, z), b(x, z) \leq c_2 \quad \text{pour presque tout } (x, z) \in \Omega.$$

Dans le cas d'ondes acoustiques, v est la pression, b^{-1} la densité du milieu, a la compressibilité, \sqrt{ab} la vitesse de propagation des ondes dans la bande Ω . Dans le cas d'ondes élastiques, v est la déviation verticale, b la tension, a^{-1} la densité. Nous supposons que le milieu est multistratifié dans un voisinage de l'infini, i.e qu'il existe une constante l telle que $a(x, z) = a_-(z)$, $b(x, z) = b_-(z)$ si $x < -l$ et $a(x, z) = a_+(z)$, $b(x, z) = b_+(z)$ si $x > l$. Nous considérons (1) avec les conditions au bord suivantes :

$$(2) \quad \partial_z v|_{z=0} = v|_{z=h} = 0.$$

Tous les résultats restent valables pour d'autres conditions au bord pour lesquelles le problème est symétrique dans $L^2(\Omega, a^{-1})$, l'espace des fonctions dans Ω de carré intégrable, muni de la mesure $a^{-1}(x, z) dx dz$, i.e

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega, a^{-1})} = \langle a^{-1} u, v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Nous notons par A l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ pour l'équation stationnaire correspondant à (1) et (2) :

$$(3) \quad \begin{aligned} -a(x, z) \nabla \cdot (b(x, z) \nabla u) &= f, \quad (x, z) \in \Omega, \\ \partial_z u|_{z=0} &= u|_{z=h} = 0. \end{aligned}$$

Donc, $Au = -a \nabla \cdot (b \nabla u)$, de domaine $D(A) \subset L^2(\Omega, a^{-1})$ défini par

$$(4) \quad D(A) = \{u : u \in H^{1,0}(\Omega), \nabla \cdot (b(x, z) \nabla u) \in L^2(\Omega)\},$$

avec la norme

$$(5) \quad \|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot (b \nabla u)\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

où on a posé

$$H^{1,0}(\Omega) \equiv \{q \in H^1(\Omega); q|_{z=h} = 0\},$$

et $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev usuel. Si b est régulier alors $D(A)$ est inclus dans l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$. Sinon, les conditions au bord dans (3) sont à prendre au sens faible :

$$(6) \quad \int_{\Omega} a^{-1} Au \varphi \, dx dz = \int_{\Omega} b(x, z) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx dz$$

pour tout $\varphi \in H^{1,0}(\Omega)$.

Nous étudions les propriétés analytiques de la résolvante tronquée $\hat{R}(\lambda) = \chi R(\lambda)\chi$ de A . Ici $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$ est la résolvante de A et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ pour $|x| < l + 1$. Il est bien connu que pour des problèmes *extérieurs* elliptiques (avec bords compacts) la résolvante tronquée admet un prolongement méromorphe au-delà du spectre continu, et que les pôles de ce prolongement – les résonances – jouent un rôle important dans la théorie de la diffusion (voir [10, 14] et leurs références). Notre objectif est d'obtenir des résultats similaires pour le problème ci-dessus où le bord n'est pas compact. Comme conséquences nous obtenons trois résultats :

- 1) Les valeurs propres de A sont de multiplicité finie et ne peuvent s'accumuler qu'à l'infini.
- 2) Le principe d'absorption limite ("P.AL") en dehors des valeurs propres.
- 3) Le comportement en temps long des solutions du problème instationnaire.

Les résonances pour les problèmes extérieurs sont bien définies lorsque les coefficients de l'opérateur sont constants au voisinage de l'infini (ou bien même lorsque les coefficients tendent exponentiellement vers des constantes). En ce sens, l'hypothèse selon laquelle les coefficients de (3) sont indépendants de x dès que $|x| > l$ est très naturelle.

Dans [4, 11, 16], le prolongement analytique de la résolvante a été étudié pour l'opérateur $\tilde{A} = -\partial_x^2 - a(x, z)\partial_z^2$ avec le coefficient de ∂_x^2 constant. Dans ce cas, la résolvante pour l'opérateur libre (l'opérateur \tilde{A} avec $a = a(z)$) peut être construite par séparation des variables. Ce cadre est beaucoup plus simple que le nôtre. L'équation qui intervient usuellement dans les applications a la forme (1) avec le coefficient de ∂_x^2 non constant. Nous pouvons encore faire la séparation des variables pour trouver la résolvante, mais alors les modes propres de l'équation de Sturm–Liouville correspondante dans la section transverse de Ω dépendent du paramètre spectral λ (voir (13)). Ils ne sont pas orthogonaux quand λ est un nombre complexe. C'est pourquoi nous ne pouvons pas décomposer le domaine de l'opérateur en une somme directe infinie de sous-espaces orthogonaux, et ainsi étudier la résolvante dans chaque sous-espace *séparément*. En particulier, cela nous mène à quelques différences dans les propriétés analytiques des résolvantes des opérateurs A et \tilde{A} . Une autre difficulté est liée à la non régularité des coefficients a et b .

Considérons les problèmes de Sturm–Liouville suivants :

$$(7) \quad -a(z)\partial_z b_\pm \partial_z w = \lambda_j^\pm w, \quad \partial_z w|_{z=0} = w|_{z=h} = 0,$$

où λ_j^+ et λ_j^- , $j \geq 1$, sont numérotées par ordre croissant. (Comme on le verra par la suite, la séparation des variables mène à un problème de Sturm–Liouville différent, voir (13)). Les valeurs λ_j^\pm sont appelées seuils. Soit $\lambda_1 = \min \lambda_1^\pm$. Dans [5, 6, 7], le spectre et les fonctions propres généralisées de A ont été étudiées pour $a(x, z) \equiv 1$. En particulier, dans [7], il a été prouvé que le spectre absolument continu du spectre de A est égal à $[\lambda_1, +\infty[$, et que sa multiplicité change aux seuils λ_j^\pm . Il a été montré dans [5, 6, 7] que les valeurs propres de A ne peuvent approcher les seuils par la gauche¹.

1. en fait à l'époque j'avais trouvé et donné une preuve de ce résultat à mes collègues après avoir lu le préprint de leur article. Ils publièrent une autre preuve selon leur propre méthode.

Nous montrons que la résolvante tronquée

$$(8) \quad \hat{R}(\lambda) : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow D(A)$$

de l'opérateur A admet un prolongement méromorphe à travers le spectre continu de A dans une surface de Riemann à multiples feuillets de la variable spectrale λ . Nous étudions les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ dans le spectre continu de A et les singularités de $\hat{R}(\lambda)$ aux seuils. Ici, il faut commencer à expliquer ce que nous entendons par "description de $\hat{R}(\lambda)$ pour λ au voisinage d'un seuil". En effet, dans la surface de Riemann en question, nous verrons qu'il existe deux points particuliers $\lambda_0 \pm i0$ au-dessus de chaque valeur réelle λ_0 du spectre absolument continu de l'opérateur A , et que $\hat{R}(\lambda)$ possède des points de branchement du second ordre en ces points $\lambda_0 \pm i0$ lorsque λ_0 est un seuil. Nous prouvons que les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ dans le spectre continu de A et qui ne sont pas des seuils sont nécessairement du premier ordre et coïncident avec les valeurs propres de l'opérateur A . Les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ *ne peuvent pas s'accumuler aux seuils*, et, par conséquent, il y a un nombre fini de valeurs propres dans tout compact de \mathbb{R} . Nous montrons que l'opérateur $\hat{R}(\lambda)$ peut avoir des singularités aux seuils d'ordre au plus un, et que $\hat{R}(\lambda)$ a la forme suivante dans un voisinage de n'importe quel point $\lambda_0 \pm i0$, où $\lambda_0 \in \{\lambda_j^\pm\}$:

$$(9) \quad \hat{R}(\lambda) = \frac{R_1(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} + \frac{R_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}},$$

où les opérateurs $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ sont analytiques dans un voisinage de $\lambda_0 \pm i0$. Nous verrons que $R_1(\lambda_0 + i0)$ et $R_1(\lambda_0 - i0)$ sont égaux et coïncident avec l'opérateur de rang fini $-\chi P \chi$, où P est la projection orthogonale dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ sur l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_0 . La détermination de $R_2(\lambda_0 + i0)$ et $R_2(\lambda_0 - i0)$ est plus délicate. Ils sont *a priori* distincts, mais coïncident dans le cas de la bande stratifiée non perturbée (où l'on a nécessairement $R_1(\lambda_0) = 0$). Nous pouvons spécifier $R_2(\lambda_0 \pm i0)$ dans (9) si λ_0 n'est pas valeur propre - i.e, si $R_1(\lambda_0) = 0$. Pour cela, introduisons l'espace $D = D(\lambda_0)$ des fonctions u qui sont solutions de l'équation homogène $(A - \lambda_0)u = 0$ et de la forme :

$$(10) \quad u = C_+ \psi(x) w_+(z) + C_- \psi(-x) w_-(z) + \hat{u}(x, z), \quad \hat{u} \in D(A).$$

Ici, C_\pm sont des constantes, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x) = 0$ si $x < l$, $\psi(x) = 1$ si $x > l + 1$, et w_\pm sont les fonctions propres du problème (7) avec $\lambda_j^\pm = \lambda_0$. Si un seul seulement des problèmes (7) (avec le signe "plus" ou "moins") admet la valeur propre λ_0 , alors l'autre fonction w_+ ou w_- est supposée nulle. Ainsi, nous pouvons dire que $\hat{R}(\lambda)$ admet la singularité d'ordre $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ au seuil λ_0 si et seulement si λ_0 est valeur propre de A . Si λ_0 n'est pas valeur propre de A alors $R_1(\lambda_0) = 0$ et on a

$$Im R_2(\lambda_0 \pm i0) = \{\chi u : u \in D(\lambda_0)\}.$$

Nous en déduisons que $\hat{R}(\lambda)$ est borné dans un voisinage du seuil λ_0 si et seulement si λ_0 n'est pas valeur propre de A et l'espace $D(\lambda_0)$ est réduit à $\{0\}$.

Une fois le prolongement méromorphe de la résolvante établi, les conséquences standard s'ensuivent. En particulier, le principe d'absorption limite s'obtient comme conséquence triviale de cette propriété de la résolvante. En

fait, la formule (9) montre que le principe d'absorption limite est valable pour tout $\lambda_0 \in [\lambda_1, \infty[$, excepté aux valeurs propres de A et aux seuils pour lesquels $D(\lambda_0) \neq \{0\}$. Nous obtenons le comportement asymptotique en temps long des solutions de l'équation des ondes instationnaire (1), (2) pour une donnée initiale à support compact. Nous montrons que l'énergie de la perturbation initiale tend vers l'infini dans le cas de la bande stratifiée non perturbée (c'est-à-dire quand les coefficients a et b ne dépendent que de z), et qu'elle peut rester dans une région bornée pour une bande localement perturbée. Prenons la donnée initiale dans (1) nulle et le terme de droite de l'équation (la force extérieure) de la forme $f = e^{-i\omega t}h(x)$ où h est à support compact. Soit S l'ensemble des seuils qui ne sont pas valeurs propres de A et pour lesquels $D(\lambda_0) \neq \{0\}$. Pour un tel seuil λ_0 , l'opérateur $R_2(\lambda_0 \pm i0)$ dans la formule (9) n'est pas nul. Supposons d'abord que ω^2 (le carré de la fréquence de la force extérieure) n'est pas valeur propre et n'appartient pas à S . Nous prouvons dans ce cas que la solution du problème se comporte pour t grand comme combinaison linéaire d'ondes dont les fréquences sont ω ou des racines carrées de valeurs propres de A . En particulier, le principe d'amplitude limite est valable si A ne possède aucune valeur propre. Sinon, le principe d'amplitude limite est valable en un sens plus faible : il existe une limite pour $T^{-1} \int_0^T v(t, x, z) e^{i\omega t} dt$ quand $T \rightarrow +\infty$. Si ω^2 coïncide avec une des valeurs propres de A alors l'amplitude de la solution croît linéairement avec le temps. Si $\omega^2 \in S$ alors l'amplitude de la solution croît comme \sqrt{t} . Ces questions ont été étudiées dans le cas plus simple où la bande n'est pas stratifiée et les coefficients de l'équation sont constants dans un voisinage de l'infini (voir [16]). L'existence et la complétude des opérateurs d'ondes peuvent se déduire immédiatement des asymptotiques en temps long des solutions de l'équation des ondes (voir, par exemple, [14], où c'est fait pour des problèmes extérieurs), mais ces propriétés des opérateurs d'ondes sont connues dans des situations plus générales (voir [3, 15] et leurs références).

Enfin, par une technique assez différente, nous prouvons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 ([13]). *Pour $r > 0$, le nombre $\mathcal{N}(r)$ des valeurs propres dans l'intervalle $[0, r]$ est majoré par $C(1 + r^{\frac{3}{2}})$ pour une constante $C > 0$.*

2. Bande stratifiée non perturbée

2.1. Seuils.

Dans cette section nous étudions les propriétés analytiques de la résolvante tronquée pour le problème (3) quand les coefficients $a = a(z)$, $b = b(z)$ ne dépendent pas de x . Dans ce cas nous notons l'opérateur A par A_0 , et nous conservons la notation $D(A_0)$ pour le domaine de A_0 . L'équation $(A_0 - \lambda)u = f$ s'écrit

$$(11) \quad \begin{aligned} -a(z)\nabla(b(z)\nabla u) - \lambda u &= f, \quad \text{dans }]0, h[, \\ \partial_z u|_{z=0} &= u|_{z=h} = 0, \end{aligned}$$

et les seuils $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ sont les valeurs propres du problème de Sturm–Liouville suivant

$$(12) \quad -a(z)\partial_z b(z)\partial_z u_j = \lambda_j u_j, \quad \partial_z u_j|_{z=0} = u_j|_{z=h} = 0.$$

Les vecteurs propres u_j associés aux λ_j forment une base orthonormale dans $L^2([0, h], a^{-1})$.

2.2. Courbes de dispersion.

Pour étudier (11) en y considérant λ comme variable, il est pratique de diviser l'équation par $a(z)b(z)$ puis de séparer les variables. Cela mène au problème de Sturm–Liouville suivant, dépendant du paramètre λ :

$$(13) \quad \left(-\frac{1}{b(z)}\partial_z b(z)\partial_z - \frac{1}{a(z)b(z)}\lambda \right) v_j = \mu_j v_j, \quad \partial_z v_j|_{z=0} = v_j|_{z=h} = 0.$$

Ici $\mu_j = \mu_j(\lambda)$, $v_j = v_j(\lambda)$ et les conditions au bord sont à comprendre au sens faible, similairement à (6). Soit $L^2(I, b)$ l'espace L^2 sur l'intervalle $I = (0, h)$ avec le poids $b(z)$, c'est-à-dire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(I, b)} = \int_0^h b(z)u(z)\bar{v}(z)dz.$$

L'opérateur dans le terme de gauche de (13) est auto-adjoint sur $L^2(I, b)$ si λ est réel. C'est pourquoi, pour λ réel, le système de vecteurs propres $\{v_j\}$ forme une base orthogonale dans $L^2(I, b)$. Nous choisissons v_j réel pour λ réel et unitaire dans $L^2(I, b)$. Comme le problème de Sturm–Liouville (13) dépend analytiquement de λ , les fonctions v_j (en tant qu'élément de $L^2(I, b)$) et μ_j sont analytiques selon λ dans un voisinage de l'axe réel (dans le cas multi-dimensionnel, cela découle du théorème de Rellich ou de la théorie de T. Kato). Les fonctions $\mu_j = \mu_j(\lambda)$ ne peuvent avoir des racines complexes (non réelles), car sinon le problème (12) admettrait des valeurs propres complexes (coincidunt avec les racines complexes des $\mu_j(\lambda)$).

Dans le cas λ réel, le principe de min-max implique :

$$-\kappa_2 < \frac{\partial \mu_j}{\partial \lambda} < -\kappa_1 < 0, \quad \text{où} \quad \kappa_1 = \min \frac{1}{a(z)b(z)}, \quad \kappa_2 = \max \frac{1}{a(z)b(z)}.$$

Donc chaque fonction $\mu_j = \mu_j(\lambda)$ admet exactement une seule racine réelle, et il existe une bijection naturelle entre l'ensemble $\{\lambda_j\}$ des seuils et l'ensemble des racines des $\mu_j(\lambda)$ (comparer (12) et (13)). On a $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et des inégalités correspondantes pour les racines des fonctions $\mu_j = \mu_j(\lambda)$, provenant de (13) et de $\mu_1(\lambda) < \mu_2(\lambda) < \dots$ pour λ réel. On peut donc dire que $\mu_j(\lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda_j$. En particulier, si λ coïncide avec un seuil λ_j , alors $v_j(\lambda) = u_j$.

La figure suivante 2.2 donne une idée du graphe des $\mu_j(\lambda)$ pour λ réel.

2.3. Représentation de la résolvante dans $\mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$.

Des estimations classiques sur l'équation (11) montrent que le spectre de A_0 est contenu dans $[\lambda_1, +\infty[$, et donc que la résolvante $R_0(\lambda)$ est analytique en $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$. Pour déterminer un prolongement analytique au-delà de $\mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$, nous résolvons (11), pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$, par une méthode qui fournit une expression pratique de u en fonction de λ .

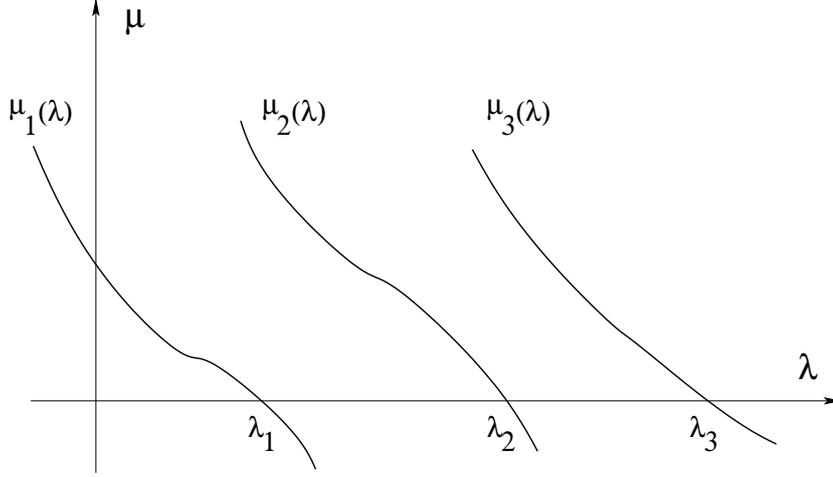


Fig. 2.2

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrairement. Divisons (11) par $a(z)b(z)$:

$$(14) \quad \left[-\partial_x^2 - \frac{1}{b(z)} \partial_z b(z) \partial_z - \frac{\lambda}{a(z)b(z)} \right] u = \frac{f}{a(z)b(z)}, \quad \partial_z u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0.$$

Soit $H_{1,\lambda}$ le sous-espace suivant de $L^2(\Omega)$:

$$H_{1,\lambda} = \left\{ v : v = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x, \lambda) v_j(z, \lambda), \alpha_j(\cdot, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad \lambda \in U_n,$$

où U_n est le domaine maximal de \mathbb{C} pour lequel les fonctions $\{\mu_j(\cdot), v_j(z, \cdot), 1 \leq j \leq n\}$ sont analytiques. Soit $P_{1,\lambda} : L^2(\Omega) \rightarrow H_{1,\lambda}$ l'opérateur défini par la formule

$$P_{1,\lambda} g = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x, \lambda) v_j(z, \lambda), \quad \alpha_j = \int_0^h b(z) g(x, z) v_j(z, \lambda) dz, \quad \lambda \in U_n.$$

Soulignons que c'est v_j , et non \bar{v}_j , qui est utilisé dans la dernière intégrale, en dépit du fait que v_j est à valeurs complexes pour λ complexe. Nous avons

$$(15) \quad \int_0^h b(z) v_k(z, \lambda) v_j(\lambda, z) dz = \delta_{jk}, \quad \lambda \in U_n, \quad 1 \leq k, j \leq n,$$

puisque la relation est vraie pour λ réel et que le membre de gauche est analytique en λ . De (15) il suit que $P_{1,\lambda}$ est une projection. Cependant, la projection $P_{1,\lambda}$ n'est orthogonale dans $L^2(\Omega, b)$ que si λ est réel, et $P_{1,\lambda}$ est le prolongement analytique de cette projection orthogonale pour $\lambda \in U_n$.

Soit $P_{2,\lambda} = I - P_{1,\lambda}$, et soit

$$H_{2,\lambda} = P_{2,\lambda} L^2(\Omega), \quad \lambda \in U_n.$$

Puisque $H_{1,\lambda}$ et $H_{2,\lambda}$ sont invariants pour l'opérateur du membre de gauche dans (14), nous pouvons écrire la solution $u = R_0(\lambda)f$ de (11) comme la somme $u = u_1 + u_2$, avec $u_s = P_{s,\lambda} u \in H_{s,\lambda}$, $s = 1, 2$, où chaque composante u_s satisfait

$$(16) \quad \left[-\partial_x^2 - \frac{1}{b(z)} \partial_z b(z) \partial_z - \frac{\lambda}{a(z)b(z)} \right] u_s = g_s, \quad \partial_z u_s|_{z=0} = u_s|_{z=h} = 0,$$

avec $g_s = P_{s,\lambda} \frac{f}{a(z)b(z)}$, $s = 1, 2$.

D'une part, puisque u_1 et g_1 sont dans l'espace $H_{1,\lambda}$ de dimension finie n , la résolution de (16) pour $s = 1$ mène rapidement à

$$(17) \quad u_1 = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\mu_j(\lambda)}|x-y|}}{2\sqrt{\mu_j(\lambda)}} f_j(y, \lambda) dy v_j(z, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$$

avec

$$(18) \quad f_j(x, \lambda) = \int_0^h a^{-1}(z) f(x, z) v_j(z, \lambda) dz.$$

D'autre part, on montre de façon classique (voir [8]) que l'équation (16) avec $s = 2$ admet une unique solution $u_2 \in H_{2,\lambda}$ pour tout $\lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[$, avec

$$\|u_2\|_{D(A_0)} + \|\partial_x u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_z b(z) \partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\lambda) \|g_2\|_{L^2(\Omega)}, \quad \lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[.$$

En posant $R_n(\lambda)f = R_0(\lambda) \left[abP_{2,\lambda} \frac{f}{ab} \right]$, nous définissons l'opérateur $R_n(\lambda) : f \rightarrow u_2$, qui satisfait donc l'estimation

$$(19) \quad \|\partial_x R_n(\lambda)f\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_z b(z) \partial_z R_n(\lambda)f\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\lambda) \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[.$$

Soit l'opérateur

$$B_\lambda = \left[abP_{2,\lambda} \frac{1}{ab} (A_0 - \lambda) \right] + P_{1,\lambda} : D(A_0) \rightarrow L^2(\Omega, a^{-1}), \quad \lambda \in U_n.$$

Il coïncide avec $A_0 - \lambda$ sur l'espace $H_{2,\lambda}$ et avec l'opérateur identité sur $H_{1,\lambda}$. Il est borné et dépend analytiquement de $\lambda \in U_n$. La formule

$$R_n(\lambda)f = B_\lambda^{-1} \left[abP_{2,\lambda} \frac{f}{ab} \right]$$

montre alors que l'opérateur $R_n(\lambda)$ est analytique en $\lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[$.

La résolvante

$$R_0(\lambda) = (A_0 - \lambda)^{-1} : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow D(A_0), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$$

admet donc la représentation suivante :

$$(20) \quad R_0(\lambda)f = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\mu_j(\lambda)}|x-y|}}{2\sqrt{\mu_j(\lambda)}} f_j(y, \lambda) dy v_j(z, \lambda) + R_n(\lambda)f,$$

où n est arbitraire, $\sqrt{\mu_j(\lambda)}$ est défini par la condition $\sqrt{\mu_j(\lambda)} > 0$ pour $\lambda < \lambda_j$, et $R_n(\lambda)$ dépend analytiquement de λ quand $\lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[$, avec l'estimation (19) satisfaite. De la représentation (20) il suit immédiatement le

THÉORÈME 2.1. *Le spectre de A_0 est absolument continu, coïncide avec $[\lambda_1, \infty[$, et a la multiplicité $2j$ sur $]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$.*

Dans le cas $a(z) = 1$, ce résultat se trouve dans [6, 7].

2.4. Prolongement méromorphe de la résolvante tronquée.

Pour $f_j = f_j(\lambda)$ défini à partir de $f \in L^2(\Omega)$ dans (18), posons

$$\begin{aligned} S_j(\lambda)f(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \frac{\sinh \sqrt{\mu_j(\lambda)}|x-y|}{2\sqrt{\mu_j(\lambda)}} \chi(y) f_j(y, \lambda) dy \cdot v_j(z, \lambda), \\ T_j(\lambda)f(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \frac{\cosh(\sqrt{\mu_j(\lambda)}|x-y|)}{2\sqrt{\mu_j(\lambda)}/(\lambda_j - \lambda)} \chi(y) f_j(y, \lambda) dy \cdot v_j(z, \lambda), \\ Q_n(\lambda) &= \chi R_n(\lambda) \chi - \sum_{j=1}^n S_j(\lambda), \end{aligned}$$

La résolvante tronquée $\hat{R}_0(\lambda) = \chi R_0(\lambda) \chi$ s'écrit donc

$$(21) \quad \hat{R}_0(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_j - \lambda}} T_j(\lambda) + Q_n(\lambda), \quad \lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[,$$

où $\sqrt{\lambda_j - \lambda} > 0$ pour $\lambda < \lambda_j$. Les opérateurs T_j et Q_n dépendent analytiquement de λ dans $U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[$, et $\frac{d^s}{d\lambda^s} T_j(\lambda)$, $s \geq 0$, sont des opérateurs de rang fini quand $\lambda = \lambda_j$.

Soit M_n la surface de Riemann de la fonction

$$f_n = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j - \lambda}, \quad \lambda \in U_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[,$$

où $\sqrt{\xi} > 0$ quand $\xi > 0$ (M_n admet la coupure $[\lambda_{n+1}, \infty[$). La représentation (21) montre que, pour tout $n \geq 1$, $\hat{R}_0(\lambda)$ admet un prolongement analytique dans M_n . Le prolongement analytique n'a pas de pôles, a des points de branchement en $\lambda = \lambda_j$.

REMARQUE 2.1. *L'opérateur $T_j(\lambda)$ est réel si λ est réel, puisque, dans ce cas, $\overline{T_j(\lambda)f} = T_j(\lambda)\bar{f}$. Il en résulte que l'opérateur $R_2(\lambda_0 + i0)$ défini dans (9) est égal à son conjugué $R_2(\lambda_0 - i0)$, et est réel.*

2.5. Principe d'absorption limite.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ à support compact². Pour tout $\lambda_0 \in [\lambda_1, \infty[$, il s'agit de voir si les limites de $R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f$ existent (et en quel sens?) quand $\varepsilon \searrow 0$, et si oui, caractériser ces limites, notées alors, respectivement, de $R_0(\lambda_0 \pm i0)f$. Posons

$$(22) \quad \alpha_j = \alpha_j(\lambda_0) = i \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + i0} \sqrt{\mu_j(\lambda)}.$$

De la partie 2.2, il suit que

$$(23) \quad \alpha_j > 0 \quad \text{si} \quad \lambda_j < \lambda_0, \quad \alpha_j = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_j = \lambda_0.$$

Posons $W(\lambda_0)$, l'espace des fonctions $u = u(x, z)$ telles que

$$(24) \quad u = \sum_{j: \lambda_j \leq \lambda_0} \psi(|x|)(C'_j + C''_j \text{sign} x) e^{i\alpha_j |x|} v_j(z, \lambda_0) + \hat{u},$$

2. le cas plus général $f \in L^{2,s}(\Omega)$ peut se traiter comme dans [6, 7].

où $\hat{u} \in D(A_0)$, $\partial_x \hat{u} \in H^1(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x) = 0$ quand $|x| < 1$, $\psi(x) = 1$ quand $|x| > 2$, et $C'_j = 0$ si $\lambda_j = \lambda_0$. Soit

$$\overline{W}(\lambda_0) = \{\bar{u} : u \in W(\lambda_0)\}.$$

Notons que la relation $u \in D(A_0)$ (voir (4), (5) pour la définition de $D(A)$) implique que $\chi u \in D(A_0)$ pour toute fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| < l$. Par définition, une suite u_n converge vers u dans $D(A_0)_{loc}$ quand lorsque $\chi u_n \rightarrow \chi u$ dans $D(A_0)$ pour toute fonction χ de ce genre.

P.A.L. en dehors des seuils. Soit une valeur (fixée) λ_0 réelle, en dehors des seuils : $\lambda_0 \notin \{\lambda_j\}$. On peut considérer l'égalité (20) dans $D(A_0)_{loc}$ et y faire la limite quand $\lambda \rightarrow \lambda_0 \pm i0$. Ceci conduit immédiatement au fait que les fonctions de la forme

$$(25) \quad u = R_0(\lambda_0 + i0)f, \quad \text{ou} \quad \bar{u} = R_0(\lambda_0 - i0)f.$$

sont solutions de

$$(26) \quad (A_0 - \lambda_0)v = f, \quad (x, z) \in \Omega,$$

et qu'elles appartiennent respectivement à $W(\lambda_0)$, $\overline{W}(\lambda_0)$. La solution de (26) dans $W(\lambda_0)$ est unique. (L'unicité de la solution dans $\overline{W}(\lambda_0)$ s'en déduit). Ceci permet de caractériser complètement la limite dans (25).

Preuve (brève) de l'unicité. Soit $u \in W(\lambda_0)$, écrit sous la forme (24), et solution de l'équation homogène (26). En multipliant (26) par \bar{u} , puis en utilisant la formule de Green dans un cylindre fini $\Omega_L = \Omega \cap \{(x, z) : |x| < L\}$, où $L > 2$, il vient une relation du type

$$\sum_{j:\lambda_j < \lambda_0} 4i\alpha_j(|C'_j|^2 + |C''_j|^2) + w_1(L) + w_2(L) = 0,$$

où $w_1(\cdot) \in L^1(2, \infty)$ et $w_2(\cdot) \in L^2(2, \infty)$. Donc

$$\sum_{j:\lambda_j < \lambda_0} \alpha_j(|C'_j|^2 + |C''_j|^2) = 0,$$

ce qui, avec (23), montre que $C'_j = C''_j = 0$. C'est pourquoi $u \in D(A_0)$ et $\partial_x u \in H^1(\Omega)$. Ensuite, en appliquant la transformée de Fourier selon $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $(A_0 - \lambda_0)u = 0$, on obtient, pour presque tout μ , variable duale de x ,

$$-a(z)\partial_z(b\partial_z w) + a(z)b(z)\mu^2 w - \lambda_0 w = 0, \quad \partial_z w|_{z=0} = w|_{z=h} = 0,$$

où $w(\mu, z)$ est la transformée de Fourier de $u = u(x, z)$. Comme le problème ci-dessus ne possède de solution non triviale que si $w = Cv_j$ et $\mu^2 = -\mu_j(\lambda_0)$, pour un j , il en résulte $w(\mu, \cdot) = 0$, p.p μ . D'où l'unicité des solutions de (26).

P.A.L. en un seuil. Considérons maintenant le cas où λ est un seuil : $\lambda_0 = \lambda_{j_0}$. Posons

$$\gamma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^h a^{-1}(z)f(x, z)u_{j_0}(z)dzdx.$$

Encore une fois il n'est pas difficile de vérifier que les limites suivantes existent dans $D(A_0)_{loc}$:

$$(27) \quad \begin{aligned} u &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + i0} \left[R_0(\lambda)f - \frac{\gamma(f)}{2\sqrt{\mu_{j_0}(\lambda)}} u_{j_0}(z) \right], \\ \bar{u} &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - i0} \left[R_0(\lambda)f - \frac{\gamma(f)}{2\sqrt{\mu_{j_0}(\lambda)}} u_{j_0}(z) \right]. \end{aligned}$$

De plus, elles sont solutions de (26) et satisfont :

$$(28) \quad u + \frac{1}{2}\gamma(f)|x|\psi(|x|)u_{j_0}(z) \in W(\lambda_0), \quad \bar{u} + \frac{1}{2}\gamma(f)|x|\psi(|x|)u_{j_0}(z) \in \overline{W}(\lambda_0).$$

L'unicité de u (respect., \bar{u}) comme solution de l'équation (26) et de la première (respect., deuxième) condition de (28), permet de caractériser complètement la limite dans (27). La preuve de l'unicité se fait avec les mêmes arguments que dans le cas λ_0 non seuil.

REMARQUE 2.2. 1) Si $\gamma(f) \neq 0$, alors $R_0(\lambda_0 \pm i0)f$ n'existent pas dans $D(A_0)_{loc}$.

2) Si $\gamma(f) = 0$, alors (26) admet une solution unique dans $W(\lambda_0)$ et dans $\overline{W}(\lambda_0)$, et les solutions $u \in W(\lambda_0)$, $\bar{u} \in \overline{W}(\lambda_0)$ sont déterminées par (25).

3. Résolvante tronquée pour la bande multistratifiée

Dans cette section nous établissons l'existence du prolongement analytique (méromorphe) de la résolvante tronquée pour l'opérateur A qui correspond au problème (3), dans lequel les coefficients dépendent de (x, z) pour $|x| < l$ et seulement de z quand $|x| > l$.

3.1. Quelques notations.

Rappelons deux définitions et une propriété importantes.

DÉFINITION 3.1. La fonction d'opérateurs $F(\lambda)$ est dite famille d'opérateurs de Fredholm si 1) les opérateurs $F(\lambda)$ sont de Fredholm en tout point d'analyticité; 2) Si $\lambda = \lambda_0$ est un pôle de $F(\lambda)$, alors le coefficient d'ordre zéro de $(\lambda - \lambda_0)$ dans la série de Laurent est de Fredholm.

DÉFINITION 3.2. - Famille finiment méromorphe d'opérateurs de type Fredholm - Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et soit U un domaine du plan complexe. Une fonction d'opérateurs $F(\lambda) : H_1 \rightarrow H_2$, $\lambda \in U$, est dite famille finiment méromorphe d'opérateurs si 1) $F(\lambda)$ dépend méromorphiquement de λ au sens de la norme d'opérateurs; 2) pour tout pôle $\lambda = \lambda_0 \in U$ les coefficients d'ordre strictement négatif de $(\lambda - \lambda_0)$ dans le développement de $F(\lambda)$ en série de Laurent sont des opérateurs de rang fini. Si $F(\lambda)$ admet des points de branchement d'ordre fini, alors elle est dite finiment méromorphe si elle est finiment méromorphe en dehors des points de branchement et si elle est finiment méromorphe selon la variable $z = (\lambda - \lambda_0)^{1/n}$ dans un voisinage d'un point de branchement λ_0 d'ordre n .

THÉORÈME 3.1. (voir [1]). Soit $F(\lambda)$ une famille finiment méromorphe d'opérateurs de type Fredholm dans un domaine $U \subset \mathbb{C}$, et soit l'opérateur

$F(\lambda_0)$ inversible en un point $\lambda_0 \in U$. Alors $F^{-1}(\lambda) : H_2 \rightarrow H_1$, $\lambda \in U$, est une famille finiment méromorphe d'opérateurs de type Fredholm.

L'équation $(A - \lambda)u = f$ prend la forme

$$(29) \quad \begin{aligned} -a(x, z)\nabla \cdot (b(x, z)\nabla u) - \lambda u &= f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_z u|_{z=0} = u|_{z=h} &= 0, \end{aligned}$$

où $a = a_{\pm}(z)$, $b = b_{\pm}(z)$ quand $\pm x > l$. Les seuils λ_j^{\pm} sont les valeurs propres du problème (12) avec $a_{\pm}(z)$, $b_{\pm}(z)$ à la place de $a(z)$, $b(z)$. Notons par A_{\pm} les opérateurs A_0 introduits dans la section précédente, qui correspondent au problème non perturbé (11) avec les coefficients $a_{\pm}(z)$, $b_{\pm}(z)$. Ces opérateurs A_{\pm} sont appelés "libres". Les résolvantes $(A_{\pm} - \lambda)^{-1}$ de ces opérateurs seront notées par $R_{\pm}(\lambda)$ et les résolvantes tronquées par $\hat{R}_{\pm}(\lambda)$. Nous posons

$$\lambda_j = \min(\lambda_j^+, \lambda_j^-).$$

3.2. Surface de Riemann pour la résolvante.

Soit V_n le domaine maximal sur lequel les fonctions $\{\mu_j^{\pm}(\cdot), v_j^{\pm}(z, \cdot), 1 \leq j \leq n\}$, sont analytiques (voir partie 2.2). Nous notons par P_n la surface de Riemann de la fonction

$$g_n = \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{\lambda_j^+ - \lambda} + \sqrt{\lambda_j^- - \lambda} \right), \quad \lambda \in V_n \setminus [\lambda_{n+1}, \infty[,$$

où $\sqrt{\lambda_j - \lambda} > 0$ quand $\lambda_j > \lambda$ (P_n admet la coupure $[\lambda_{n+1}, \infty[$). Soit $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[$, et $0 < \arg(\lambda - \lambda_1) < 2\pi$ sur \mathbb{C}' . La frontière $\partial\mathbb{C}'$ de \mathbb{C}' consiste en deux copies du demi-axe $[\lambda_1, \infty[$ sur lequel $\arg(\lambda - \lambda_1) = 0$, et $\arg(\lambda - \lambda_1) = 2\pi$, respectivement. Ainsi, chaque réel $\lambda > \lambda_1$ possède deux copies, $\lambda + i0$ et $\lambda + i0 = \lambda - i0$, sur $\partial\mathbb{C}'$. Ces deux points sont l'un au-dessus de l'autre dans P_n . Il existe encore d'autres points dans P_n au-dessus de λ , mais ces points n'ont pas d'intérêt particulier. On a, pour un seuil λ_k^{\pm} donné et un point $\lambda \in \partial\mathbb{C}'$, la détermination $\sqrt{\lambda_k^{\pm} - \lambda} = -i\sqrt{|\lambda - \lambda_k^{\pm}|}$ si $\lambda_k^{\pm} < \lambda$ et $\arg \lambda = 0$, et $\sqrt{\lambda_k^{\pm} - \lambda} = i\sqrt{|\lambda - \lambda_k^{\pm}|}$ si $\lambda_k^{\pm} < \lambda$ et $\arg \lambda = 2\pi$. Cela s'écrit aussi, pour λ réel et $\lambda_k^{\pm} < \lambda$, par

$$\sqrt{\lambda_k^{\pm} - \lambda - i0} = -i\sqrt{|\lambda - \lambda_k^{\pm}|}, \quad \sqrt{\lambda_k^{\pm} - \lambda + i0} = i\sqrt{|\lambda - \lambda_k^{\pm}|}.$$

3.3. Expression de la résolvante de l'opérateur A .

Par des arguments variationnels standard on montre que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème (29) admet une solution faible unique, u , qui satisfait l'estimation

$$(30) \quad \|u\|_{D(A_0)} \leq c(\lambda)\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad c(\lambda) > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[.$$

Comme l'opérateur $(A - \lambda) : D(A) \rightarrow L^2(\Omega, a^{-1})$ est borné et dépend analytiquement de λ , il vient donc que l'opérateur $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$ dépend analytiquement de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$.

Pour obtenir une expression utile de $R(\lambda)$, en commençant par $\lambda \in \mathbb{C}'$, nous résolvons (29) en changeant d'inconnue, i.e, précisément, en posant $u =$

$P(\lambda)g$, où $g \in L^2(\Omega, a^{-1})$ et $P(\lambda)$ est l'opérateur suivant ("parametrix") :

$$(31) \quad P(\lambda) = \psi_1 R_+(\lambda) \varphi_1 + \psi_2 R_-(\lambda) \varphi_2 + \psi_3 R(\sigma) \varphi_3 : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow D(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}',$$

où $\sigma < 0$ est choisi ultérieurement, $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_x)$, $\varphi_1(x) = 1$ quand $x > l + 2/3$, $\varphi_1(x) = 0$ quand $x < l + 1/3$, $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_x)$, $\psi_1(x) = 1$ quand $x > l + 1/3$, $\psi_1(x) = 0$ quand $x < l$, $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x)$, $\psi_2(x) = \psi_1(-x)$, $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi_3 \in C^\infty(\mathbb{R}_x)$, $\psi_3(x) = 1$ quand $|x| < l + 2/3$, $\psi_3(x) = 0$ quand $|x| > l + 1$. Nous obtenons alors l'équation :

$$(32) \quad (A_+ - \lambda) \psi_1 R_+(\lambda) \varphi_1 g = K_1(\lambda)g + K_2(\lambda)g + \varphi_1 g,$$

où

$$\begin{aligned} K_1(\lambda)g &= -a_+(z) b_+(z) (\partial_x^2 \psi_1) R_+(\lambda) \varphi_1 g, \\ K_2(\lambda)g &= -2a_+(z) b_+(z) (\partial_x \psi_1) (\partial_x R_+(\lambda) \varphi_1 g). \end{aligned}$$

Un point crucial est de voir que $K_1(\lambda)$ et $K_2(\lambda)$ sont des opérateurs compacts dans $L^2(\Omega, a^{-1})$, et qu'ils dépendent analytiquement de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1^+, \infty[$, ceci d'après le théorème 2.1. Similairement, nous avons

$$(A - \lambda) \psi_2 R_-(\lambda) \varphi_2 g = K_{34}(\lambda)g + \varphi_2 g,$$

où $K_{34}(\lambda)$ est compact, analytique en $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1^-, \infty[$ dans $L^2(\Omega, a^{-1})$, et

$$(A - \lambda) \psi_3 R(\sigma) \varphi_3 g = K_{56}g + \varphi_3 g,$$

où l'opérateur K_{56} est indépendant de λ et est compact dans $L^2(\Omega, a^{-1})$.

Ceci prouve que g satisfait l'équation

$$(33) \quad (A - \lambda)P(\lambda)g = g + T(\lambda)g, \quad g \in L^2(\Omega, a^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus [\lambda_1, \infty[,$$

où l'opérateur $T(\lambda)$ est compact dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ et dépend analytiquement de $\lambda \in \mathbb{C}'$. Comme les constantes $c(\lambda)$ dans (30) tendent vers zéro quand λ est réel et tend vers $-\infty$, on a donc $\|T(\sigma)\| < 1$ pour un bon choix de $\sigma < 0$. En appliquant le théorème 3.1, il s'ensuit que la famille d'opérateurs $(I + T(\lambda))^{-1}$ est finiment méromorphe dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ quand $\lambda \in \mathbb{C}'$. De (33) nous tirons l'expression

$$(34) \quad R(\lambda) = P(\lambda)(I + T(\lambda))^{-1} : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow D(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}',$$

qui montre que $R(\lambda)$ est une famille finiment méromorphe d'opérateurs quand $\lambda \in \mathbb{C}'$.

3.4. Prolongement méromorphe de la résolvante tronquée. Nous avons donc obtenu la formule

$$(35) \quad \hat{R}(\lambda) = \chi R(\lambda) \chi = \chi P(\lambda)(I + T(\lambda))^{-1} \chi, \quad \lambda \in \mathbb{C}',$$

que nous allons étendre à λ dans la surface de Riemann P_n . Posons

$$\begin{aligned} \hat{P}(\lambda) &= \chi P(\lambda) \chi : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow D(A), \\ \hat{T}(\lambda) &= \chi T(\lambda) \chi : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow L^2(\Omega, a^{-1}), \end{aligned}$$

qui sont des opérateurs finiment méromorphes sur P_n , $n \geq 1$. Pour le voir par exemple pour $\hat{P}(\lambda)$, il suffit d'écrire, grâce à (31),

$$(36) \quad \hat{P}(\lambda) = \psi_1 \hat{R}_+(\lambda) \varphi_1 + \psi_2 \hat{R}_-(\lambda) \varphi_2 + \psi_3 \hat{R}(\sigma) \varphi_3.$$

Comme $\hat{R}(\lambda)$ diffère de $\hat{P}(\lambda)(I + \hat{T}(\lambda))^{-1}$, il faut travailler encore un peu pour avoir le prolongement souhaité. Posons donc $\hat{K}(\lambda) = \chi_1 T(\lambda) \chi_1$, où χ_1 est une nouvelle fonction de troncature, comme χ , i.e, $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ telle que $\chi_1(x) = 1$ quand $|x| < l + 1$, et telle que, en plus, avec $|\chi_1| \leq 1$ et $\chi_1(x) = 0$ quand $|x| > l + 2$. La relation (35) peut s'écrire alors sous la forme suivante, plus exploitable,

$$(37) \quad \hat{R}(\lambda) = \hat{P}(\lambda) - \hat{P}(\lambda)(I + \hat{K}(\lambda))^{-1}\hat{T}(\lambda).$$

Les opérateurs $I + \hat{K}(\lambda)$ forment une famille de type Fredholm et finiment méromorphe sur P_n , et $I + \hat{K}(\sigma)$ est inversible pour un $\sigma < 0$ bien choisi. En utilisant le théorème 3.1, on peut presque conclure que $(I + \hat{K}(\lambda))^{-1}$ est une famille finiment méromorphe sur P_n , à ceci près que ce théorème ne s'applique que dans un domaine U de \mathbb{C} . Comme un voisinage assez petit d'un point $\lambda_0 \in P_n$ qui n'est pas au-dessus d'un seuil est une copie d'un ouvert de \mathbb{C} (car ne possède qu'un feuillet), le théorème s'applique. Au voisinage d'un point $\lambda_0 \in P_n$ qui est au-dessus d'un seuil λ_j^\pm , nous changeons de variable en considérant à la place de λ la variable $\xi = \sqrt{\lambda_j^\pm - \lambda} \in \mathbb{C}$, avec $|\xi^2| < \varepsilon$ assez petit, pour lequel les opérateurs $\hat{R}_\pm(\lambda) = \chi(A_\pm - \lambda)^{-1}\chi$, et donc aussi $\hat{K}(\lambda) = \hat{K}(\lambda(\xi))$, sont univoques (ou : "uniformes") comme fonctions de ξ , avec un pôle d'ordre un en $\xi = 0$ et sans point de branchement (selon la variable ξ). Ceci règle le détail final pour prouver que $(I + \hat{K}(\lambda))^{-1}$, puis donc $\hat{R}(\lambda)$, admet un prolongement finiment méromorphe dans P_n .

Une première conséquence du résultat de prolongement méromorphe de $\hat{R}(\lambda)$ est que l'ensemble des pôles de $\hat{R}(\lambda)$ est discret, c'est-à-dire que le nombre de pôles de $\hat{R}(\lambda)$ dans tout compact de P_n est fini. La formule (37) prouve aussi que les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ sont indépendants de la fonction de troncature χ .

3.5. Précisions sur la résolvante tronquée au voisinage des seuils.

Pour tout seuil $\lambda_0 \in \{\lambda_j^\pm\}$, il existe donc un voisinage $U \subset P_n$ dans lequel

$$(38) \quad \hat{R}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-m} \left(R_1(\lambda) - \sqrt{\lambda_0 - \lambda} R_2(\lambda) \right),$$

où les opérateurs $R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ sont analytiques dans U , $\partial_\lambda^k R_1(\lambda_0)$ et $\partial_\lambda^k R_2(\lambda_0)$ sont de rangs finis quand $k < n$, et m , R_1 , R_2 dépendent de λ_0 et du feuillet de P_n considéré.

En particulier, (38) est valable au voisinage de $\lambda_0 \pm i0 \in \partial\mathbb{C}'$. Comme, en plus, $\|R(\lambda)\| \leq 1/|\Im m\lambda|$ quand $\lambda \in \mathbb{C}'$, il vient que les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ sur $\partial\mathbb{C}'$ sont simples et que $m \leq 1$ dans (38) quand $\lambda \in \mathbb{C}'$. Ceci prouve à la fois la formule (9) et la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. (Voir [8]). *Les pôles de $\hat{R}(\lambda)$ sur $\partial\mathbb{C}'$ sont simples et ne peuvent s'accumuler qu'en l'infini.*

Pour préciser les opérateurs R_1 , R_2 de la formule (9), nous considérons la mesure spectrale $dE(\lambda)$ (à valeurs projecteurs) qui correspond à l'opérateur

A , c'est-à-dire

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)f, \quad f \in L^2(\Omega, a^{-1}),$$

et

$$h(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)dE(\lambda)f,$$

pour toute fonction h borélienne sur \mathbb{R} , et tout $f \in D(h(A))$. Soit $d\hat{E}(\lambda) = \chi dE(\lambda)\chi$ la mesure spectrale tronquée. La formule de Stone implique directement

$$(39) \quad \int_{\Delta} d\hat{E}(\lambda)f = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Delta} (\hat{R}(\lambda+i\varepsilon) - \hat{R}(\lambda-i\varepsilon))fd\lambda, \quad f \in L^2(\Omega, a^{-1}),$$

pour tout intervalle Δ de l'axe réel tel que $\hat{R}(\lambda)$ soit régulier aux extrémités de Δ . Ceci, avec la formule (9), permet de démontrer le

THÉORÈME 3.2. (Voir [8]). *L'opérateur $\hat{R}(\lambda)$ admet un pôle en $\lambda = \lambda_0 \pm i0 \in \partial\mathbb{C}'$ si et seulement si λ_0 est valeur propre de A . Le résidu $R_1(\lambda_0 \pm i0)$ de $\hat{R}(\lambda)$ en $\lambda_0 \pm i0$ est l'opérateur de rang fini $-\chi P\chi$, où P est la projection orthogonale dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ sur l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_0 . En particulier, $R_1(\lambda_0 \pm i0) =: R_1(\lambda_0)$ est univoque.*

COROLLAIRE 3.1. (Voir [8]). *De la proposition 3.1 et du théorème 3.2 il suit que l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur A est discret, et que ces valeurs propres $\lambda = \mu_n$, $n = 1, \dots$, sont de multiplicité finie, et ne peuvent s'accumuler qu'en $+\infty$.*

Nous pouvons donc représenter la mesure spectrale $dE(\lambda)$ sous la forme

$$dE(\lambda) = \sum_n P_n \delta_{\mu_n} + dE_c(\lambda),$$

où P_n est la projection orthogonale dans $L^2(\Omega, a^{-1})$ sur l'espace propre de A associé à la valeur propre μ_n , et $dE_c(\lambda)$ est la partie continue de $dE(\lambda)$.

Pour spécifier l'opérateur $R_2(\lambda_0 \pm i0)$, nous prouvons dans [8] le

THÉORÈME 3.3. (Voir [8]). *Soit λ_0 un seuil qui n'est pas valeur propre de A . Alors l'image de $R_2(\lambda_0 \pm i0)$ est $\chi D(\lambda_0)$.*

(L'espace $D(\lambda_0)$ a été défini dans l'introduction, voir (10)).

REMARQUE 3.1. *De la relation classique*

$$\hat{R}(\lambda) = \overline{\hat{R}(\bar{\lambda})}, \quad \lambda \in \mathbb{C}',$$

on déduit que l'opérateur R_2 de la formule (9) satisfait

$$R_2(\lambda + i0) = \overline{R_2(\lambda - i0)}, \quad \lambda > \lambda_1.$$

COROLLAIRE 3.2. (Voir [8]). *1) $\hat{R}(\lambda)$ est borné dans un voisinage d'un seuil λ_0 si et seulement si λ_0 n'est pas valeur propre de A et l'espace $D(\lambda_0)$ est réduit à $\{0\}$.*

2) Soit λ_0 un seuil qui n'est pas valeur propre de A . L'image de $R_2(\lambda_0 \pm i0)$ est de dimension deux au plus. Elle est de dimension un au plus si λ_0 est dans $\{\lambda_j^+\} \setminus \{\lambda_j^-\}$ ou dans $\{\lambda_j^-\} \setminus \{\lambda_j^+\}$.

La formule de Stone et l'analyse de la résolvante tronquée mènent directement à la

PROPOSITION 3.2. (Voir [8]). *La mesure tronquée $\chi dE_c(\lambda)\chi$ est absolument continue et a la forme*

$$(40) \quad \chi dE_c(\lambda)\chi = e(\lambda)d\lambda, \quad e(\lambda) : L^2(\Omega, a^{-1}) \rightarrow L^2(\Omega, a^{-1}),$$

où $e(\lambda)$ est un opérateur analytique en $\lambda \in [\lambda_1, \infty[$ avec des points de branchement du second ordre aux seuils $\{\lambda_j^\pm\}$.

Pour chaque seuil $\lambda_0 \in \{\lambda_j^\pm\}$, il existe un segment $\Delta = \{\lambda; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ de l'axe réel et quatre opérateurs réels, $e_R, e_I, B_R(\lambda), B_I(\lambda)$, les deux derniers étant analytiques dans Δ , tels que

$$e(\lambda) = \begin{cases} \frac{e_I}{\pi\sqrt{\lambda_0-\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda_0-\lambda}}{\pi} B_I(\lambda), & \lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0, \\ \frac{e_R}{\pi\sqrt{\lambda-\lambda_0}} + \frac{\sqrt{\lambda-\lambda_0}}{\pi} B_R(\lambda), & \lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

4. Comportement asymptotique en temps long

Le lien entre les singularités de la résolvante tronquée et l'existence de certaines solutions de l'équation $(A - \lambda)u = 0$ mène à la description détaillée des propriétés de régularité de la mesure spectrale de l'opérateur A , qui sont la base de l'analyse du comportement en temps long des solutions du problème :

$$(41) \quad \partial_t^2 v - a(x, z)\nabla \cdot (b(x, z)\nabla v) = 0, \quad (x, z) \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(42) \quad \partial_z v|_{z=0} = v|_{z=h} = 0; \quad v|_{t=0} = 0, \quad \partial_t v|_{t=0} = f,$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est à support compact. L'analyse précédente de la mesure spectrale permet d'obtenir la formule asymptotique suivante :

$$(43) \quad v = \sum_n \frac{\sin \sqrt{\mu_n} t}{\sqrt{\mu_n}} P_n f + w,$$

où, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$,

$$(44) \quad \|\chi w\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi \partial_t w\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi \sqrt{A} w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

La preuve de (43) dans [8] exploite la proposition 3.2 et la formule classique

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) f.$$

Enfin, nous nous intéressons au comportement asymptotique en temps de solution v du problème :

$$(45) \quad \begin{aligned} \partial_t^2 v - a(x, z)\nabla \cdot (b(x, z)\nabla v) &= f(x)e^{-i\omega t}, \quad (x, z) \in \Omega, \quad t > 0, \\ \partial_z v|_{z=0} = v|_{z=h} &= 0; \quad v|_{t=0} = \partial_t v|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

où ω est un réel non nul, $f \in L^2(\Omega)$ est à support compact.

Désignons par S l'ensemble des seuils λ_0 qui ne sont pas valeurs propres de A et pour lesquels l'espace $D(\lambda_0)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et, par conséquent, pour lesquels l'opérateur $R_2(\lambda_0 \pm i0)$ n'est pas nul (voir le théorème 3.3).

Nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. (Voir [8]). 1) Si ω^2 n'est ni valeur propre de A , ni dans S , alors

$$v = e^{-i\omega t}u(x) - \sum_n \frac{1}{\mu_n - \omega^2} \left(\cos \sqrt{\mu_n}t - \frac{i\omega}{\sqrt{\mu_n}} \sin \sqrt{\mu_n}t \right) P_n f + w,$$

où $u(x)$ est la limite de $R(\lambda)f$ dans $D(A)_{loc}$ quand $\lambda \rightarrow \omega^2 + i0$ si $\omega > 0$ ou quand $\lambda \rightarrow \omega^2 - i0$ si $\omega < 0$, et

$$l(w) := \|\chi w\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi \partial_t w\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi \sqrt{A}w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

2) Si ω^2 est une valeur propre μ_n , alors

$$v = \frac{i}{2\omega} t e^{-i\omega t} P_n f(x) + w, \quad l(w) \leq C(1 + t^\gamma),$$

avec $\gamma = 1/2$ si μ est un seuil tel que $D(\omega^2) \neq \{0\}$, et $\gamma = 0$ sinon.

3) Si $\omega^2 \in S$, alors

$$v = \sqrt{\frac{t}{\pi|\omega|}} e^{-i\omega t} u(x) + w, \quad l(w) \leq C, \quad u \in D(\omega^2),$$

où $\chi u = (1 + i \operatorname{sign} \omega) R_2(\omega^2 + (\operatorname{sign} \omega)i0)f$, et R_2 et D sont définis dans (9), (10) (voir aussi le théorème 3.2, et la proposition 3.2).

Idée de Preuve. La solution v de (45) a la forme

$$(46) \quad v = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, t) dE(\lambda) f, \quad g = \frac{1}{\lambda - \omega^2} (e^{-i\omega t} - \cos \sqrt{\lambda}t + \frac{i\omega}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}t).$$

On exploite ensuite les relations (45) et la proposition 3.2.

5. Comptage des valeurs propres

Dans cette partie, la fonction $a(\cdot)$ de (1) ou (3) est prise constante, égale à un, mais ceci n'est pas une restriction pour les résultats qui suivent. Soit $\mathcal{N}(r)$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur A dans l'intervalle $[0, r]$, $r > 0$: $\mathcal{N}(r) = \#(\sigma_p(A) \cap [0, r])$ où $\sigma_p(A)$ désigne le spectre ponctuel de A . Le résultat d'analyticité de la résolvante tronquée de A a montré dans les sections précédentes que $\mathcal{N}(r) < \infty$ pour tout r . Des estimations de $\mathcal{N}(r)$ pour des problèmes similaires sont bien connues quand les fonctions $b_{\pm}(z)$ sont constantes :

$$(47) \quad \mathcal{N}(r) \leq Cr + O(r^{1/2}) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty,$$

et la valeur optimale de C est connue (voir [9]).

Démontrons (47), en reprenant directement une idée de Lax et Phillips (voir [10]) pour le cas d'ondes en milieu non borné, mais homogène. Pour simplifier, supposons $b_+ = b_- =: b_0$. La non-homogénéité des coefficients $b(x, z)$ se trouve donc dans l'ouvert $\mathcal{O} :=]-l, l[\times]0, h[$. Il est alors possible de caractériser les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur A en termes, respectivement, de racines d'équations non linéaires, et de vecteurs associés définis dans l'espace $H_{\mathcal{O}} = \{v \in H^1(\mathcal{O}) \mid v|_{z=h} = 0\}$. Pour cela, posons

$\gamma : v(x, z) \mapsto (v(-l, z), v(l, z))$, l'opérateur trace de $H_{\mathcal{O}}$ dans son image \tilde{H} ,

sous-espace fermé de $H^{\frac{1}{2}}(0, h) \oplus H^{\frac{1}{2}}(0, h)$ ³. Soit $\lambda > 0$, la forme quadratique $Q(\lambda)$ sur $H_{\mathcal{O}}$ définie par

$$(48) \quad Q(\lambda)u = \int_{\mathcal{O}} b(x, z) |\nabla u(x, z)|^2 dx dz + \langle W(\lambda) \gamma u, \gamma u \rangle_{\tilde{H}' \times \tilde{H}},$$

avec

$$(49) \quad W(\lambda)\varphi = \sum_{n: \lambda_n > \lambda} \sqrt{\mu_n(\lambda)} \varphi_n v_n, \quad \varphi_n \equiv \langle \varphi, v_n \rangle_{L^2(I, b_0)},$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}' \times \tilde{H}}$ désigne le produit de dualité dans $\tilde{H}' \times \tilde{H}$. Pour la définition de $(\mu_n(\lambda), v_n(\lambda))_{n \geq 1}$, voir le paragraphe 2.2. Chaque forme quadratique $Q(\lambda)$ détermine une forme bilinéaire $B(\lambda)$ sur $H_{\mathcal{O}}$ ainsi qu'un unique opérateur réel symétrique $G(\lambda)$ non borné sur $L^2(\mathcal{O})$, de domaine

$$D(G(\lambda)) = \{u \in H_{\mathcal{O}} \mid \exists C > 0, |B(\lambda)(u, v)| \leq C \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}, \forall v \in H_{\mathcal{O}}\},$$

tel que

$$\langle G(\lambda)u, v \rangle_{L^2(I)} = B(\lambda)(u, v), \quad \forall (u, v) \in D(G(\lambda)) \times H_{\mathcal{O}}.$$

L'opérateur auto-adjoint $G(\lambda)$ est à résolvante compacte, et son spectre est constitué d'une suite de réels croissante $(\zeta_j(\lambda))_{j \geq 1}$ tendant vers $+\infty$.

Notons maintenant que si λ est valeur propre de A , associée au vecteur propre $\phi \in D(A)$, alors la fonction $u = \phi|_{\mathcal{O}}$ est non identiquement nulle dans \mathcal{O} , et est vecteur propre de $G(\lambda)$ pour la valeur propre λ . Donc nous avons la propriété suivante :

$$(50) \quad \lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \exists j, \zeta_j(\lambda) = \lambda.$$

Il faut noter, et c'est le point clé dans le cas déjà connu où b_0 ne dépend pas de z (c'est donc ici une constante positive non nulle), que les v_n sont ici indépendants de λ , et donc les φ_n dans (49) aussi. Par conséquent, nous voyons que si λ n'est pas un seuil, alors

$$(51) \quad \frac{d \langle W(\lambda) \gamma u, \gamma u \rangle}{d\lambda} = \sum_{n: \lambda_n > \lambda} \frac{d\sqrt{\mu_n(\lambda)}}{d\lambda} |(\gamma u)_n|^2 \leq 0,$$

Donc $Q'(\lambda) \leq 0$, pour tout λ non seuil. Comme, en plus, la famille de formes quadratiques $Q(\lambda) : H_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $\lambda > 0$, il en résulte qu'elle est décroissante sur $]0, \infty]$. Comme la famille $Q(\lambda)$ est analytique dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_n\}_n$ et décroissante dans $]0, \infty[$, les courbes $\zeta_j(\lambda)$ sont continues sur $]0, \infty[$, analytiques en $\lambda \notin \{\lambda_n\}_n$, et décroissantes. Comme les $\zeta_j(\lambda)$ sont décroissants, si $\zeta_j(\lambda) = \lambda$ pour un couple (j, λ) , alors $\zeta_k(\lambda') \neq \lambda'$ pour tout $\lambda' < \lambda$ et tout $k \geq j$. Soit la forme quadratique \tilde{Q} définie par

$$\tilde{Q}(u) = b_{\mathcal{O}, \min} \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2 dx dz, \quad u \in H_{\mathcal{O}},$$

et soit l'opérateur réel auto-adjoint \tilde{G} non borné sur $L^2(\mathcal{O})$, défini comme $G(\lambda)$ en remplaçant $Q(\lambda)$ par \tilde{Q} . Les valeurs propres $\tilde{\zeta}_1 \leq \tilde{\zeta}_2 \leq \dots \leq \tilde{\zeta}_j \rightarrow$

3. \tilde{H} est strictement dans $H^{\frac{1}{2}}(0, h) \oplus H^{\frac{1}{2}}(0, h)$, à cause de la condition formelle $v(\pm l, h) = 0$.

$+\infty$ de \tilde{G} sont indépendantes de λ . Il est connu que

$$\#\{j : \tilde{\zeta}_j \leq b_{\mathcal{O}, \min} r\} \leq \frac{l}{4} r + C \max(l, 1) \sqrt{r}, \quad \forall r \geq 1.$$

De la minoration triviale $Q(\lambda) \geq \tilde{Q}$, il vient $\zeta_j(\lambda) \geq \tilde{\zeta}_j$ pour tout j , d'où l'estimation (47). Ce résultat vient donc de l'application *directe* de la méthode de Lax et Phillips⁴.

Revenons au cas général avec stratifications $b_{\pm}(z)$ pour $|x| > l$. En modifiant la preuve ci-dessus, nous allons démontrer le

THÉORÈME 5.1. (Voir [13]). Il existe $C > 0$ indépendant de l tel que

$$(52) \quad \mathcal{N}(r) \leq C^* r^{3/2} + C \max(l, 1) r, \quad \forall r \geq 1,$$

avec $C^* = C_+^* + C_-^*$, $C_{\pm}^* = \frac{l R_b^{\pm}}{8 b_{\mathcal{O}, \min} \sqrt{b_{\pm, m}}}$, et

$$(53) \quad \begin{aligned} b_{\mathcal{O}, \min} &= \inf \operatorname{ess}_{\mathcal{O}} b(\cdot), \\ R_b^{\pm} &: \text{plus petit entier} \geq \sqrt{2} (b_{\pm, M} / b_{\pm, m})^2, \\ b_{\pm, M} &= \sup \operatorname{ess}_{]0, h[} b_{\pm}(\cdot), \\ b_{\pm, m} &= \inf \operatorname{ess}_{]0, h[} b_{\pm}(\cdot). \end{aligned}$$

Le résultat est encore valable avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann homogènes en $z = 0, h$, à la place des conditions au bord (2).

Donnons les grandes lignes de la preuve, sans calculs superflus. Supposons pour simplifier que $b_+(z) = b_-(z) =: b_0(z)$. Soit, pour $N \geq 1$, $\lambda \in]\lambda_N, \lambda_{N+1}[$, l'opérateur auto-adjoint $G(\lambda)$ défini similairement à $G(\lambda)$, en remplaçant la forme quadratique $Q(\lambda)$ par

$$(54) \quad \begin{aligned} Q_N(\lambda)u &= \int_{\mathcal{O}} b(x, z) |\nabla u(x, z)|^2 dx dz \\ &+ \langle W(\lambda) \gamma u, \gamma u \rangle_{\tilde{H}' \times \tilde{H}} + t(\lambda) \langle V(\lambda) \gamma u | \gamma u \rangle_{L^2(I, b_0)}, \quad u \in H_{\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

avec $t(\cdot)$ une fonction réelle, pour l'instant arbitraire, mais au moins analytique par morceaux, et

$$V(\lambda) \varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n(\lambda) v_n(\lambda, \cdot).$$

Ici W ⁵ est encore défini par (49), à la différence près que les φ_n et v_n dépendent de λ . En particulier, la propriété (51) tombe à l'eau, et donc, il n'y a plus de raison que G'_N soit négatif avec le choix $t(\cdot) = 0$.

Notons par la suite réelle croissante $(\zeta_{N, j}(\lambda))_{j \geq 1}$ tendant vers $+\infty$ les éléments du spectre de G_N . Ces $\zeta_{N, j}(\lambda)$ dépendent analytiquement (par morceaux) de $\lambda \in]\lambda_N, \lambda_{N+1}[$. Notons à nouveau que si λ est valeur propre de A , associée au vecteur propre $\phi \in D(A)$, alors la fonction $u = \phi|_{\mathcal{O}}$ est non identiquement nulle dans \mathcal{O} , satisfait $\gamma u_n(\lambda) = 0$ pour tout $n \leq N$, et donc $V(\lambda) \gamma u = 0$, et par suite, u est vecteur propre de $G_N(\lambda)$ pour la valeur propre λ . Donc la propriété (50) est conservée, avec ζ_j remplacé par $\zeta_{N, j}$.

4. C'est pourquoi il n'a pas été considéré comme nouveau dans [13]

5. qui est $-T_R$ de [13]

Soit $0 = \kappa_0 < \kappa_1 \dots < \kappa_k \rightarrow +\infty$ une suite strictement croissante contenant tous les seuils λ_n . Posons $J_{k,N} =]\kappa_k, \kappa_{k+1}] \cap [\lambda_N, \lambda_{N+1}]$. En choisissant la fonction

$$t(\lambda) = \sqrt{2b_{\pm,M}(\lambda_{N+1} - \lambda_N)} \frac{\kappa_{k+1} - \kappa_k}{\lambda - \kappa_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{2}C_\rho}(\lambda_{N+1} - \lambda_N)}, \quad \lambda \in J_{k,N},$$

où $C_\rho = (b_{\pm,M}/b_{\pm,m})^2$, de façon que

$$\lambda - \kappa_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{2}C_\rho}(\lambda_{N+1} - \lambda_N) > 0, \quad \forall \lambda \in J_{k,N},$$

c'est-à-dire, de façon que

$$(55) \quad \frac{1}{\sqrt{2}C_\rho}(\lambda_{N+1} - \lambda_N) > \kappa_{k+1} - \kappa_k,$$

alors, bien sûr $Q_N = Q_{N,k}$ dépend du choix de l'intervalle $J_{k,N}$, mais la condition de décroissance est remplie localement :

$$\frac{dQ_{N,k}(\lambda)}{d\lambda} \leq 0, \quad \forall \lambda \in J_{k,N}.$$

Ceci permet de comparer le nombre $\mathcal{N}_A(J_{k,N}) = \#(\sigma_p(A) \cap J_{k,N})$ avec les valeurs propres $\tilde{\zeta}_j$ de l'opérateur \tilde{G} . L'estimation cherchée est acquise lorsqu'on s'aperçoit que la condition (55) est satisfaite si l'on découpe chaque intervalle $[\lambda_N, \lambda_{N+1}]$ en R_{b_\pm} segments (nombre indépendant de N) pour construire les κ_k .

Perspectives

Il y a des questions (difficiles) qui se posent après les résultats qui viennent d'être développés.

- Préciser le domaine maximal U_n défini en section 2. Il faudrait pouvoir donner une condition explicite, comme par exemple $|\Im m\lambda| \leq e^{-C\Re\lambda}$, suffisante pour que $\lambda \in U_n$. En particulier, $\cap_n U_n$ est-il un ouvert contenant \mathbb{R} ?
- Pour préciser le comportement en temps "intermédiaire", ni court, ni long, des solutions du problème (41), il faut, dans des études similaires, préciser les résonances λ en dehors des valeurs propres, et qui peuvent s'approcher de l'axe réel, asymptotiquement quand $\Re\lambda \rightarrow +\infty$.
- Si l'hypothèse selon laquelle les coefficients de (3) sont indépendants de x dès que $|x| > l$ est affaiblie et remplacée par exemple par l'hypothèse que les coefficients tendent exponentiellement vers des fonctions indépendantes de x à l'infini, alors les difficultés techniques nouvelles qui surgissent ne me paraissent pas surmontables automatiquement. Sans doute on peut arriver à un énoncé similaire de prolongement méromorphe de la résolvante. Mais les résultats du comptage des valeurs propres se généralisent-ils ? Ceci ne me paraît pas clair.
- Qu'en est-il du cas du système de l'élasticité par exemple ? On s'attend bien sûr à l'existence d'un prolongement méromorphe de la résolvante. Mais le comptage des valeurs propres reste encore nettement plus compliqué. En fait, l'étude des seuils n'est pas simple non plus, car les courbes de dispersion ne sont pas monotones (Cf. [2] par exemple).

Le traitement infligé à notre opérateur A peut-il être étendu à d'autres opérateurs ? Ainsi, le cas d'un milieu périodique, modèle de l'optique pour les micro et nano-technologies, plus général que notre milieu stratifié, est actuellement très étudié. Voir notamment [17]. Nous pouvons donc considérer l'équation (1) avec des fonctions $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, non pas indépendantes de x pour $|x| > L$, mais périodiques en x pour $|x| > L$, ainsi que des conditions au bord périodiques du genre

$$v|_{z=0} = e^{i\beta} v|_{z=h}, \quad \partial_z v|_{z=0} = e^{i\beta} \partial_z v|_{z=h},$$

pour un paramètre β réel, à la place de (2).

Partie II :

Quelques Problèmes Inverses pour
l'équation de la chaleur

Introduction de la deuxième partie

Cette deuxième partie se compose de trois chapitres qui peuvent se lire indépendamment. Dans chaque partie, nous considérons le domaine Ω borné assez régulier de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de bord noté $\Gamma = \partial\Omega$, et le paramètre temps $T > 0$, puis l'équation de la chaleur suivante (que l'on remplacera en fin de chapitre 2 par un système parabolique couplé 1D) :

$$(1) \quad \partial_t u - \operatorname{div}(c\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega_T :=]0, T[\times \Omega,$$

avec une condition au bord de type Dirichlet :

$$(2) \quad u = h \quad \text{sur } \Gamma_T :=]0, T[\times \Gamma,$$

et avec la condition initiale

$$(3) \quad u(0, x) = u^0(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Le plus souvent, $u^0 \in L^2(\Omega)$, bien qu'il soit possible de prendre un espace plus grand que $L^2(\Omega)$.

Le coefficient de diffusion est une fonction $c(t, x)$, et mesurable dans Ω_T , régulière selon la variable temporelle t . Il satisfait la condition (usuelle) :

$$(4) \quad \exists C > 0, \quad C \leq c(t, x) \leq 1/C < \infty, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

Dans au moins les deux premiers chapitres, c est indépendant du temps t .

Nous considérons dans cette partie II deux types de problèmes inverses dans lesquels les fonctions c et u^0 sont inconnues. Le problème qui nous intéresse consiste à déterminer c , puis éventuellement u^0 , à partir d'un type particulier de données. Par l'expression vague "déterminer c ", nous pouvons signifier une partie des trois points du programme suivant :

- Montrer l'unicité de c dans une certaine classe de coefficients.
- Montrer en plus de l'unicité, de la stabilité, pour une certaine métrique dans la classe de c .
- Donner un procédé de (re)construction de la solution (unique) c , adéquat pour l'élaboration d'un code numérique.

Les données de tels problèmes peuvent être distinguées en "input" - fonctions que nous imposons dans les équations - et en "output" - fonctions qui proviennent de mesures.

Dans le premier type de problème inverse, nous nous bornons pour le cas de la dimension $n \geq 2$ aux deux premiers points du programme de détermination c , et effectuons les trois pour le cas $n = 1$ (système parabolique couplé 1D). De plus, les données sont en nombre fini sur le bord latéral Γ_T du cylindre Ω_T ainsi que sur une section $\{\theta\} \times \Omega$ pour un temps donné $\theta \in]0, T[$ et la fonction c est supposée indépendante du temps. Nous donnons une

estimation de $\|c - \tilde{c}\|_{L^2(\omega)}$, où \tilde{c} désigne une autre conductivité, qui sera pour nous connue. Il s'agit donc d'un résultat de stabilité *local*, qui est le principal objet du chapitre 2 de cette partie.

Il a été montré dans l'article très cité de Bukgheim et Klivanov (Cf. [23]) qu'un outil essentiel pour traiter le premier type de problème inverse est une inégalité de Carleman *globale* sur u , en supposant connus soit $u|_\gamma$ pour un ouvert (relatif) $\gamma \subset \Gamma$ soit $u|_\omega$ pour un ouvert $\omega \subset \Omega$. Une inégalité de Carleman globale pour l'équation parabolique est démontrée dans [30], pour le cas d'un coefficient $c(\cdot)$ régulier. Lorsque $c(\cdot)$ est seulement régulier par morceaux Ω_j , et sous certaines conditions sur la géométrie de ces Ω_j ainsi que sur le signe du saut de c à travers $\partial\Omega_j$, un résultat analogue est obtenu dans [28]. En partant d'hypothèses plus larges sur c que celles dans [28], nous prouvons qu'il est possible de prolonger leur inégalité de Carleman. C'est l'objet du chapitre 1.

Dans le second type de problème inverse que nous traitons, et qui est l'objet du chapitre 3, les données sont en nombre infini, mais sur le bord latéral seul : c'est le problème de Calderón pour l'équation parabolique. Nous nous bornons au troisième point du programme de détermination c : chercher un outil théorique pour reconstruire, au moins en partie, la fonction inconnue $c(t, x)$. Nous la supposons de la forme $c = c_0 + (c_1 - c_0)\chi_D$ où $c_0(x)$ est régulière et connue "(background)", l'ensemble D inconnu, appelé inclusion, ne touche pas le bord latéral Γ_T et est un ouvert relatif de $[0, T] \times \Omega$, la fonction $c_1(x)$ est régulière et inconnue dans D , et satisfait $c_1(x) \neq c_0(x)$ pour (t, x) sur le bord latéral de D . Nous considérons les deux cas : le premier, le plus simple, où D est supposé cylindrique de la forme $[0, T] \times D_0$ pour un ouvert D_0 de Ω : la conductivité c est alors une fonction indépendante du temps et l'inclusion est stationnaire. Dans le second, la section $D_t = D \cap \{t\}$ dépend (régulièrement) de t : l'inclusion est mouvante. Nous nous limitons alors au cas $c_0 = 1$, $c_1 = k^2$ avec le nombre inconnu $k > 0$, $k \neq 1$.

Notation. Dans la suite, $D(L)$ désigne le domaine de l'opérateur $\mathcal{L} = \partial_t - \operatorname{div}(c\nabla \cdot)$, à savoir,

$$D(L) := \{u : u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \mathcal{L}u \in L^2(\Omega_T)\}.$$

Nous écrivons Lu à la place de $\mathcal{L}u$ si $u \in D(L)$.

Une Inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur

1. Introduction

Dans tout ce chapitre, nous supposons la dimension spatiale $n \geq 2$, les ensembles Ω et Γ de classe C^2 , et considérons les équations (1), (2), (3) dans le cas où la donnée au bord est nulle, i.e, $h = 0$. Le but (atteint en chapitre 2) est d'obtenir une estimation de Carleman globale sur la solution u de l'équation de la chaleur, avec u^0 inconnu, mais en supposant $u|_{\omega_T}$ connu, où $\omega_T = (0, T) \times \omega$, ω étant un ouvert non vide donné dans Ω . Nous reprenons la plupart des hypothèses suivantes de [28] sur le coefficient de diffusion $c(\cdot)$, où deux situations exclusives sont considérées ("cas 1" et "cas 2").

La fonction c est régulière par morceaux dans Ω . Plus précisément, l'ouvert Ω admet une partition en deux ouverts non vides de classe C^2 , Ω_1 et $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$, tels que $c_j \equiv c|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega_j})$, $j = 1, 2$. L'interface $S = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ est de classe C^2 . L'ouvert ω satisfait :

HYPOTHÈSE 1.1. *Chaque composante connexe de Ω_1 contient une partie de ω .*

Il y a les deux situations différentes suivantes.

— **Cas 1** : $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ (voir Fig. 1) ;

— **Cas 2** : $\Omega_2 \subset\subset \Omega$ (voir Fig. 2).

Notons par \mathbf{n} la normale unitaire sur S sortante de Ω_2 et entrante dans Ω_1 , aussi bien que la normale unitaire sur Γ sortante de Ω . Formellement, le saut d'une quantité q sur S est défini par $[q] := q_1 - q_2 \equiv (q|_{\Omega_1})|_S - (q|_{\Omega_2})|_S$.

HYPOTHÈSE 1.2. *Pour le cas 1. Il existe un champ de vecteur $\zeta : \overline{\Omega_2} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\zeta \in C^1(\overline{\Omega_2})$, tel que*

$$\begin{aligned} \zeta(x) \cdot \mathbf{n}(x) &< \mathbf{0} & \forall x \in \Gamma, \\ \zeta(x) \cdot \mathbf{n}(x) &> \mathbf{0} & \forall x \in S, \\ \zeta(x) &\neq \mathbf{0} & \forall x \in \overline{\Omega_2}. \end{aligned}$$

Soient les caractéristiques associées à ζ ,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \zeta(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

avec $x^0 \in \Gamma$. Il existe $T_1 > 0$ et, pour tout $x^0 \in \Gamma$, un temps $t_1(x^0) < T_1$ tel que la solution $x(t)$ de (5) satisfait

$$x(t) \in \Omega_2 \text{ pour } 0 < t < t_1(x^0), \text{ et } x(t_1(x^0)) \in S.$$

Voir [28, page 624].

HYPOTHÈSE 1.3. *Pour le cas 2. Il existe un ouvert non vide $\mathcal{O} \subset\subset \Omega_2$, de normal unitaire sortante \mathbf{n} , ainsi qu'un champ de vecteur $\zeta : \overline{\Omega_2} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_2})$, tels que*

$$\begin{aligned} \zeta(x) \cdot \mathbf{n}(x) &> \mathbf{0} & \forall x \in S, \\ \zeta(x) \cdot \mathbf{n}(x) &> \mathbf{0} & \forall x \in \partial\mathcal{O}, \\ \zeta(x) &\neq \mathbf{0} & \forall x \in \overline{\Omega_2} \setminus \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Soient les caractéristiques associées à ζ :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\zeta(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

avec $x^0 \in S$, il existe $T_2 > 0$ et, pour tout $x^0 \in S$, un temps $t_2(x_0) < T_2$ tels que toute solution $x(t)$ de (6) satisfait :

$$x(t) \in \Omega_2 \setminus \mathcal{O} \text{ pour } 0 < t < t_2(x_0), \text{ et } x(t_2(x_0)) \in \partial\mathcal{O}.$$

Voir la figure 2 ou [28, page 625].

Remarquer que S est partitionné en $S = S^+ \cup S^- \cup S^0$ avec

$$S^\pm := \{x \in S; \pm[c](x) > 0\}, \quad S^0 = \{x \in S; [c](x) = 0\}.$$

Notre hypothèse originale vis-à-vis de [28, page 625], qui suppose $S^+ = \emptyset$, i.e. $(c|_{\Omega_1})|_S \leq (c|_{\Omega_2})|_S$, est :

HYPOTHÈSE 1.4. (Voir [42]). *L'ensemble S^+ peut être étendu en une variété S' de classe C^2 qui est l'interface entre deux ouverts Ω'_1 et $\Omega'_2 \subset \Omega$, avec $\Omega'_2 \subset \Omega_1$, $\Omega_2 \subset \Omega'_1$, et chaque composant connexe de $\Omega'_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega'_2}$ contient une partie de ω . Voir les figures 1 et 2.*

REMARQUE 1.1. *Si $S^+ = \emptyset$ alors l'hypothèse 1.4 est satisfaite pour le cas 1 avec $S' = \emptyset$ et $\Omega'_2 = \emptyset$, et pour le cas 2 avec $S' = \Gamma$, $\Omega'_2 = \emptyset$.*

Notons par ∇' la dérivée tangentielle sur S et posons

$$S^{00} := \overline{S^+} \cap \overline{S^-} \subset S^0.$$

Nous avons besoin de l'hypothèse technique suivante.

HYPOTHÈSE 1.5. (Voir [42]). *Il existe un voisinage $V \subset S$ de S^{00} et une fonction $h_0 \in \mathcal{C}^2(V)$ tels que $(\nabla' h_0(x) \neq 0, \forall x \in V)$ et $(\pm h_0(x) > 0, \forall x \in V \cap S^\pm)$.*

Elle est équivalente à supposer que S^{00} est une sous-variété de dimension $(n-2)$ de S , qui sépare $S^- \cap V = h_0^{-1}(\mathbb{R}^{-*})$ et $S^+ \cap V = h_0^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$. Elle est vérifiée si la fonction (au moins de classe C^2) $[c(\cdot)]$ satisfait $\nabla'[c(x)] \neq 0$ pour tout $x \in S^{00}$, puisque nous pouvons alors prendre $h_0(x) = [c(x)]$.

REMARQUE 1.2. *Si $S^+ = \emptyset$ alors $S^{00} = \emptyset$ et l'hypothèse 1.5 est vérifiée. Cependant il peut arriver que les ensembles S^+ , S^- , soient non vides, mais que S^{00} soit vide. Dans une telle situation nous avons $\nabla'[c] = 0$ sur $S^0 = \partial S^+ \cup \partial S^-$.*

REMARQUE 1.3. *Dans l'hypothèse 1.5 la fonction h_0 peut être étendue en une fonction $\tilde{h}_0 \in \mathcal{C}^2(W)$, où W est un certain voisinage de S^{00} dans Ω tel que le champ de vecteurs $\nabla' h_0 \in (\mathcal{C}^1(V))^{n-1}$ s'étend en un champ $\nabla \tilde{h}_0 \in$*

$(\mathcal{C}^1(W))^n$ avec $\nabla \tilde{h}_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in W$. L'ensemble $\tilde{h}_0^{-1}(\{0\}) \subset W$ sépare W en deux parties $W^+ = \tilde{h}_0^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ et $W^- = \tilde{h}_0^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$. Donc, si S' est un prolongement \mathcal{C}^2 de S^+ , alors $S' \cap W^+ = S^+ \cap W = S^+ \cap V$, $S \cap W^- = S^- \cap W = S^- \cap V$, $\tilde{h}_0(x) < 0$ pour tout $x \in (S' \setminus \overline{S^+}) \cap W$ et $\tilde{h}_0(x) > 0$ pour tout $x \in S^+ \cap W$.
En plus, nous pouvons réduire V et W suffisamment, de façon que $|\tilde{h}_0| \leq \frac{1}{2}$ dans W .

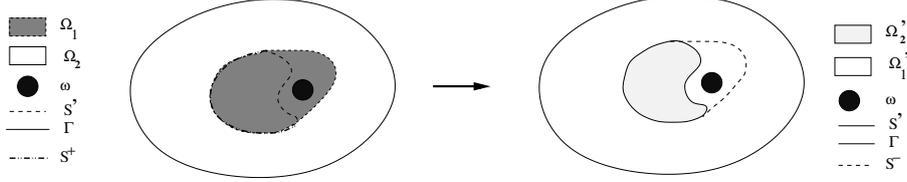


FIGURE 1. Cas 1 : les hypothèses 1.2, 1.1 et 1.4 sont vérifiées.
La flèche signifie que nous étendons S^+ à S' .

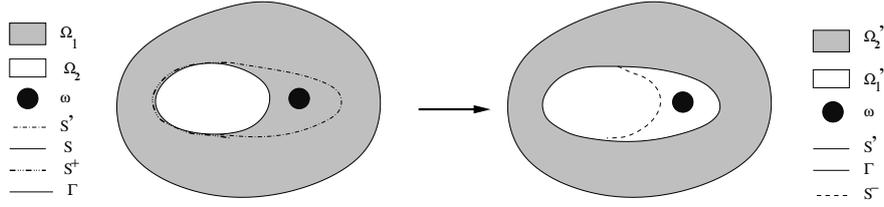


FIGURE 2. Cas 2 : les hypothèses 1.3, 1.1 et 1.4 sont vérifiées.
La flèche signifie que nous étendons S^+ à S' .

2. Résultats Principaux

2.1. Fonctions poids de Carleman.

Nous construisons dans cette section nos fonctions poids de Carleman particulières.

LEMME 2.1. (Voir [42]). *Supposons le cas 1. Sous les hypothèses 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, il existe des fonctions $\beta_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, satisfaisant les propriétés suivantes.*

- (i) $\beta_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $\beta_i^k \equiv \beta_i|_{\Omega_k} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_k})$, $k = 1, 2$; $\text{div}(c\nabla\beta_i) \in L^\infty(\Omega)$.
(Donc, les conditions de transmissions sur S , i.e, $[\beta_i] = 0$ et $[c\partial_{\mathbf{n}}\beta_i] = 0$, sont vérifiées).
- (ii) $\beta_i(x) > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.
- (iii) Il existe $r > 0$ tel que $|\nabla\beta_i| \geq r$ dans $\Omega \setminus \omega$, $i = 1, 2$.
- (iv) $\partial_{\mathbf{n}}\beta_i(x) < 0$ pour tout $x \in \Gamma$, $i = 1, 2$.
- (v) $\beta_1 = \beta_2$ sur S^{00} , $\beta_1(x) > \beta_2(x)$ pour tout $x \in S^-$, $\beta_2(x) > \beta_1(x)$ pour tout $x \in S^+$.
- (vi) Pour $x \in S$, soit la matrice symétrique $\mathcal{M}(x) := \sum_{i=1,2} \mathcal{M}_i(x)$ de taille $n + 1$, avec

$$(7) \quad \mathcal{M}_i := \begin{pmatrix} -\rho\mu_i & \vec{u}_i & |\vec{u}_i|^2 - \rho(\mu_i)^2 \\ {}^t\vec{u}_i & -\mu_i I_{n-1} & {}^t 0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ |\vec{u}_i|^2 - \rho(\mu_i)^2 & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 2\mu_i\{|\vec{u}_i|^2 - \rho(\mu_i)^2\} \end{pmatrix},$$

$\mu_i := c\partial_{\mathbf{n}}\beta_i$, $\vec{u}_i := \nabla'\beta_i$, $\rho(x) := (c_1(x)c_2(x))^{-1}$ et I_{n-1} désigne la matrice unitaire de taille $n-1$.

Alors, il existe $C > 0$ indépendant de $x \in S$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(x) &\leq 0 \text{ dans } S^-, \mathcal{M}_2(x) \geq 0 \text{ dans } S^+, \mathcal{M} = 0 \text{ dans } V, \\ |\mathcal{M}| &\leq -C\mathcal{M}_1 \text{ dans } S^- \text{ et } |\mathcal{M}| \leq C\mathcal{M}_2 \text{ dans } S^+. \end{aligned}$$

LEMME 2.2. (Voir [42]). Supposons le cas 2. Sous les hypothèses 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, il existe des fonctions $\beta_i \in C^0(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$ que vérifient les propriétés (i), (ii), (iv), (v), (vi) du lemme 2.1. La fonction β_2 satisfait (iii) du lemme 2.1 et β_1 satisfait en plus :

$$(iii)' \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } |\nabla\beta_1| \geq r \text{ dans } \Omega \setminus (\omega \cup B),$$

où B est une boule ouverte telle que $B \subset\subset \mathcal{O}$. De plus, β_1 et β_2 satisfont

$$(vii) \beta_2 \geq 2\beta_1 \text{ dans } B.$$

REMARQUE 2.1. 1) Les β_i seront constantes sur Γ , $i = 1, 2$.

2) Les μ_i satisferont : $\mu_2 = -\rho^{-\frac{1}{2}}|\vec{u}_2| < 0$ dans $S^+ \cap V$, $\mu_1 = \rho^{-\frac{1}{2}}|\vec{u}_1| > 0$ dans $S^- \cap V$, $\mu_2 < -\rho^{-\frac{1}{2}}|\vec{u}_2|$ dans $S^+ \setminus V$ et $\mu_1 > \rho^{-\frac{1}{2}}|\vec{u}_1|$ dans $S^- \setminus V$.

3) Un petit calcul montre que si $\mp\mu_i \geq \rho^{-1/2}|\vec{u}_i|$, alors on a :

$$\pm\mathcal{M}_i \geq C(\rho(\mu_i)^2 - |\vec{u}_i|^2) \geq C'|\mathcal{M}|, \quad C, C' > 0.$$

Cette condition est satisfaite en particulier si $\vec{u}_i = 0_{\mathbb{R}^{n-1}}$ et $\mp\mu_i > 0$.

Les lemmes 2.1 et 2.2 se prouvent en suivant la démarche dans [28]. Voir [42] pour les détails.

2.2. Inégalités de Carleman globales.

Posons $\bar{\beta} := \frac{5}{4} \max_{i=1,2} \max_{\bar{\Omega}} \beta_i$. Nous pouvons supposer :

$$(8) \quad \max_{i=1,2} \max_{\bar{\Omega}} \beta_i(x) < \bar{\beta} < 2 \min_{i=1,2} \min_{\bar{\Omega}} \beta_i(x),$$

puisque, sinon, nous remplaçons β_i par $\beta_i + 4\bar{\beta}$ puis $\bar{\beta}$ par $6\bar{\beta}$.

Posons

$$\begin{aligned} \phi_i(t, x) &:= \frac{e^{\lambda\beta_i(x)}}{t(T-t)}, \\ \zeta_i(t, x) &:= \frac{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta_i(x)}}{t(T-t)}, \\ \Pi_j &:= s^j \eta^j(t) \left(e^{-2s\zeta_1(t,x)} + e^{-2s\zeta_2(t,x)} \right), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.2. Pour que les notations de ce chapitre correspondent à celles du chapitre 2, il faut poser

$$\varphi_i(x) := e^{\lambda\beta_i(x)} - e^{\lambda\bar{\beta}}, \quad \eta(t) := \frac{T^2}{T(t-T)},$$

ce qui donne les relations

$$s\zeta_i(t, x) = -\tilde{s}\eta(t)\varphi_i(x), \quad \Pi_j := \tilde{s}^j \eta^j(t) \left(e^{2\tilde{s}\eta(t)\varphi_1(x)} + e^{2\tilde{s}\eta(t)\varphi_2(x)} \right),$$

où $\tilde{s} = s/T^2$.

En vue de présenter le résultat principal de ce chapitre d'une façon commune aux cas 1 et 2, nous posons $B = \mathcal{O} = \emptyset$ pour le cas 1. (Les ensembles B et \mathcal{O} apparaissent pour le cas 2 dans le lemme 2.2.)

THÉORÈME 2.1. (Voir [42]). *Supposons les conditions du lemme 2.1 pour le cas 1 (respectivement, du lemme 2.2 pour le cas 2) satisfaites.*

Alors, il existe $\lambda_2(\Omega, \omega, c) > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_2$, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de $\Omega, \omega, \mathcal{O}, \lambda$ et c , et il existe $s_1(\lambda) > 0$, tels que l'on ait

$$(9) \quad \int_Q \{ \Pi_{-1} |\partial_t u|^2 + \Pi_{-1} |\operatorname{div}(c \nabla u)|^2 + \Pi_3 |u|^2 + \Pi_1 |\nabla u|^2 \} \\ \leq C \left(\int_{\omega_T} \Pi_3 |u|^2 + \int_Q \Pi_0 |Lu|^2 \right),$$

pour tout $u \in D(L)$ et tout $s \geq s_1$. De plus, s_1 est de la forme $s_1 = \sigma_1(T^2 + T)$, où $\sigma_1 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\Omega, \omega, \mathcal{O}, c$ et λ .

3. Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous démontrons le théorème 2.1. Nous nous restreignons au cas 1, en donnant les grandes lignes seulement. Pour les détails ou le cas 2, voir [42].

Commençons par restreindre les solutions u à l'ensemble suivant (voir aussi [28]) :

$$(10) \quad Z_0 := \{ u : u|_{\Omega_j} \in C^2([0, T] \times \overline{\Omega_j}), j = 1, 2, [u] = 0, [c \partial_{\mathbf{n}} u] = 0, u = 0 \text{ sur } \Gamma_T \}.$$

Le traitement du cas général $u \in D(L)$ se fait ensuite comme dans [43, & 6.1]. Soit donc $u \in Z_0$ et $f := Lu \in L^2(\Omega_T)$. Posons $\psi_i := e^{-s \zeta_i} u$, $i = 1, 2$. En suivant la méthode dans [30] ou [28], nous tirons de (1) la relation

$$(11) \quad M_1 \psi_i + M_2 \psi_i = f_{i,s},$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} M_1 \psi_i &:= \operatorname{div}(c(x) \nabla \psi_i) + s^2 \lambda^2 \phi_i^2 |\nabla \beta_i|^2 c(x) \psi_i + s \partial_t \zeta_i \psi_i, \\ M_2 \psi_i &:= \partial_t \psi_i - 2s \lambda \phi_i c(x) \nabla \beta_i \cdot \nabla \psi_i - 2s \lambda^2 \phi_i c(x) |\nabla \beta_i|^2 \psi_i, \\ f_{i,s} &:= e^{-s \zeta_i} f + s \lambda \phi_i \operatorname{div}(c(x) \nabla \beta_i) \psi_i - 2s \lambda^2 \phi_i c(x) |\nabla \beta_i|^2 \psi_i. \end{aligned}$$

Cette relation (11) implique

$$(12) \quad \|M_1 \psi_i\|_2^2 + \|M_2 \psi_i\|_2^2 + 2(M_1 \psi_i, M_2 \psi_i) = \|f_{i,s}\|_2^2,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T)$. Calculons le produit scalaire du membre de gauche de (12), avec les indices i omis par soucis de simplification. En posant $S_T = (0, T) \times S$ et $Q' = \Omega_T \setminus S_T$, nous obtenons la relation

$$(13) \quad (M_1 \psi, M_2 \psi) = \sum_{k=1, l=1}^3 I_{kl},$$

avec

- $I_{11} := \int_{Q'} \operatorname{div}(c(x)\nabla\psi)\partial_t\psi,$
- $I_{12} := -2s\lambda \int_{Q'} \varphi \operatorname{div}(c(x)\nabla\psi)c(x)\nabla\beta \cdot \nabla\psi,$
- $I_{13} = \text{etc...}$

Des intégrations par parties, comme dans [28], mènent à la formule

$$(M_1\psi_i, M_2\psi_i) = J_i + K_i + H_i,$$

où les J_i sont des intégrales sur Q' , le K_i des intégrales sur S_T , les H_i des intégrales sur Σ . Le traitement de J_i et H_i se fait comme dans [28], d'où il ressort la positivité des sommes $J_1 + J_2$ et $H_1 + H_2$ pour λ et (puis) s assez grands, avec une minoration de $J_1 + J_2$, et donc de $\sum_{i=1,2}(M_1\psi_i, M_2\psi_i)$, pourvu que le terme $K := K_1 + K_2$ soit positif, ce qui mène directement à (9). Il reste donc à montrer la positivité de K , et la preuve sera achevée. En utilisant les relations $\psi_i := e^{-s\zeta_i}u$ et $\nabla\psi_i = e^{-s\zeta_i}\nabla u + s\lambda\phi_i\nabla\beta_i u$, nous avons les formules quadratiques suivantes, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} K_i := & \int_{S_T} e^{-2s\zeta_i} (Q_{nn}^i |c\partial_{\mathbf{n}}u|^2 + 2Q_{n\tau}^i \cdot \nabla'u(c\partial_{\mathbf{n}}u) + Q_{\tau\tau}^i |\nabla'u|^2 \\ & + 2(Q_{00}^i + X_{00}^i)|u|^2 + 2(Q_{n0}^i + X_{n0}^i)(c\partial_{\mathbf{n}}u)u), \end{aligned}$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} Q_{nn}^i &:= s\lambda\phi_i[\partial_{\mathbf{n}}\beta_i], & Q_{n\tau}^i &:= s\lambda\phi_i[c\nabla'\beta_i], \\ Q_{\tau\tau}^i &:= -s\lambda\phi_i[c^2\partial_{\mathbf{n}}\beta_i], & Q_{00}^i &:= s^3\lambda^3\phi_i^3[c^2\partial_{\mathbf{n}}\beta_i|\nabla\beta_i|^2], \\ Q_{n0}^i &:= s^2\lambda^2\phi_i^2[c|\nabla\beta_i|^2], \\ X_{00}^i &:= s^{-1}\phi_i^{-1}Q_{00}^i, & X_{n0}^i &:= s^{-1}\phi_i^{-1}Q_{n0}^i. \end{aligned}$$

Posons

$$R^i := \begin{pmatrix} Q_{nn}^i & Q_{n\tau}^i & Q_{n0}^i \\ Q_{n\tau}^i & Q_{\tau\tau}^i I_{n-1} & t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ Q_{n0}^i & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 2Q_{00}^i \end{pmatrix}, \quad X^i := \begin{pmatrix} 0 & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & X_{n0}^i \\ t0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 0_{n-1} & t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ X_{n0}^i & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 2X_{00}^i \end{pmatrix},$$

et $R'_i := e^{-2s\zeta_i}R^i$, $X'_i := e^{-2s\zeta_i}X^i$, $R' := R'_1 + R'_2$, $X' := X'_1 + X'_2$, $P := R' + X'$. Prouvons que, pour s assez grand, la matrice $P(x)$ est positive pour tout $x \in S$. Ceci impliquera la positivité de K et terminera la preuve. Nous avons $R_i = [c]s\lambda\phi_i L^i \mathcal{M}_i L^i$ et $X_i = [c]\lambda L^i \mathcal{Y}_i L^i$, avec les matrices L^i diagonales strictement positives de taille $(n+1)$, d'éléments diagonaux $L_{jj}^i = 1$, $j \leq n$, et $L_{n+1,n+1}^i = s\lambda\phi_i$ et la matrice \mathcal{Y}_i ne dépend ni de s ni de λ . Donc P s'annule sur S^0 , puisque $[c]y$ est nul.

Considérons le cas $x \in V \cap S^+$. Puisque les coefficients $X_{n0}^i, Q_{00}^i, X_{00}^i$ s'annulent dans ce cas, de la remarque 2.1 nous tirons que la matrice $X'(x)$ s'annule. Puisque $[c(x)] \geq 0$, $\mathcal{M}_2(x) \geq 0$ et $\mathcal{M}_1(x) = -\mathcal{M}_2(x) \leq 0$, nous obtenons donc $R_2(x) \geq 0$ et $R_1(x) \leq 0$. De $\beta_2(x) \geq \beta_1(x)$ nous obtenons $\phi_2(x) \geq \phi_1(x)$, $\zeta_2(x) \leq \zeta_1(x)$, $e^{-2s\zeta_2(x)} \geq e^{-2s\zeta_1(x)}$ et $L^2(x) \geq L^1(x)$. D'où $R'_2(x) \geq -R'_1(x)$, $R'(x) \geq 0$, et $P(x) \geq 0$.

Similairement, nous obtenons $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in V \cap S^-$.

Considérons le cas $x \in S^+ \setminus V$. Puisque la distance entre $S^+ \setminus V$ et S^{00}

est strictement positive et que $\beta_2(x) > \beta_1(x)$, il existe donc $r > 0$, indépendant de λ , s et de x , tel que $\beta_2(x) \geq \beta_1(x) + r$. D'où la minoration $-\zeta_2(x) \geq -\zeta_1(x) + r$, qui implique $R' \geq e^{-2s\zeta_2}(R_2 - e^{-2rs}|R_1|)$. Puisque $|\mathcal{M}_1(x)| \leq C\mathcal{M}_2(x)$, alors $|R_1(x)| \leq CR_2(x)$. D'où $R' \geq e^{-2s\zeta_2}R_2(1 - Ce^{-2rs})$. Maintenant, notons que X_i est une perturbation de R_2 , d'ordre au moins $s^{-1}\phi_i^{-1}$, i.e, nous avons $|X_i(x)| \leq C's^{-1}R_2(x)$, $i = 1, 2$. D'où $P \geq e^{-2s\zeta_2}R_2(1 - Ce^{-2rs} - 2C's^{-1})$, qui est positif pour s suffisamment grand.

Similairement, nous obtenons $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in S^- \setminus V$.

Ceci termine la preuve.

4. Deux situations particulières

Il peut être intéressant pour le traitement du problème inverse (voir chapitre 2 ultérieur) de n'avoir à traiter qu'une seule fonction β (ou ce qui correspond, la fonction φ), à la place des deux β_1, β_2 , car ceci permet de diminuer le nombre d'observations.

Nous considérons le cas 1.

LEMME 4.1. (Voir [42]). Supposons $S^- = \emptyset$, et que $S^+ = S \setminus S^0$ satisfait l'hypothèse 1.4. Alors il existe une fonction $\beta \in C^0(\overline{\Omega})$ qui satisfait les propriétés suivantes.

- (1) $\beta^k \equiv \beta|_{\Omega_k} \in C^2(\overline{\Omega_k})$, $k = 1, 2$;
- (2) $[\beta] = 0$ et $[c\partial_{\mathbf{n}}\beta] = 0$.
- (3) $\beta(x) > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.
- (4) Il existe $r > 0$ tel que $|\nabla'\beta| \geq r$ dans $\Omega \setminus \omega$.
- (5) β est constante sur Γ et $\partial_{\mathbf{n}}\beta(x) < 0$ pour tout $x \in \Gamma$.
- (6) Il existe $r > 0$ tel la matrice

$$\mathcal{M}(x) := \begin{pmatrix} -\rho c\partial_{\mathbf{n}}\beta & \nabla'\beta & |\nabla'\beta|^2 - \rho(c\partial_{\mathbf{n}}\beta)^2 \\ {}^t\nabla'\beta & -(c\partial_{\mathbf{n}}\beta)I_{n-1} & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ |\nabla'\beta|^2 - \rho(c\partial_{\mathbf{n}}\beta)^2 & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 2c\partial_{\mathbf{n}}\beta\{|\nabla'\beta|^2 - \rho(c\partial_{\mathbf{n}}\beta)^2\} \end{pmatrix},$$

satisfait $\mathcal{M}(x) \geq r > 0$ sur S^+ .

Une preuve de ce lemme se trouve dans [42].

REMARQUE 4.1. La fonction β est construite indépendamment du fait que $[c] = 0$ dans $S \setminus S^+$.

Nous obtenons directement le

COROLLAIRE 4.1. (Voir [42]). En modifiant les fonctions poids comme suit,

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &:= \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, & \zeta(t, x) &:= \frac{e^{\lambda\bar{\beta}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \\ \Pi_j &:= s^j t^{-j} (T-t)^{-j} e^{-2s\zeta}, & j &\in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

(et aussi, en suivant la remarque 2.2, en posant $\varphi(x) := e^{\lambda\beta(x)} - e^{\lambda\bar{\beta}}$), alors le théorème 2.1 tient encore pour le cas 1 avec $S^- = \emptyset$.

Toujours dans le cas 1, supposons maintenant les ensembles S^- et S^+ non vides, mais S^{00} vide. Donc la distance $d(S^-, S^+)$ est non nulle. Il est alors possible, quitte à modifier la fonction β du lemme 4.1, d'obtenir la même conclusion du corollaire 4.1.

REMARQUE 4.2. *Pour le cas 2, si S^- est vide ou si, plus généralement, S^{00} est vide, alors nous sommes ramenés dans la première ou la seconde situations particulières de la section 4 (mais correspondant au cas 2). Donc, nous pouvons encore prouver le théorème 2.1 (cas 2) en introduisant une seule fonction β . Ceci donne un corollaire similaire au corollaire 4.1 (pour le cas 2).*

5. Remarque

Le résultat de l'article [39] ultérieur rend quelque peu obsolètes nos résultats du chapitre 1, ainsi que la méthode, puisque toutes les contraintes sur la fonction c , tant sur le signe du saut de c à travers une interface que sur la géométrie de Ω et des interfaces que nous imposons, y sont levées, à l'exception de la régularité C^2 . En effet, les auteurs de [39] ont montré qu'il ne faut pas traiter dans les formes quadratiques K_i les trois quantités $c\partial_{\mathbf{n}}u$, $\nabla'u$, u sur l'interface S comme indépendantes.

Stabilité Höldérienne du Coefficient de diffusion

1. Introduction

Nous considérons principalement dans ce chapitre le cas $n \geq 2$, l'équation de la chaleur homogène (1) avec que les conditions au bord (2) et initiale (3), à savoir,

$$(14) \quad \begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(c \nabla u) & = 0 \text{ dans } \Omega_T :=]0, T[\times \Omega, \\ u(0, x) & = u^0(x) \text{ dans } \Omega, \\ u(t, x) & = h(t, x) \text{ sur } \Gamma_T :=]0, T[\times \Gamma. \end{cases}$$

Le cas d'un système parabolique couplé pour $n = 1$ sera abordé en fin de chapitre.

Le coefficient de diffusion est ici une fonction $c(x)$ indépendante du temps t , et mesurable dans Ω . Il est connu (voir [41]) que si c satisfait la condition (4), alors, pour tout $u^0 \in L^2(\Omega)$ et tout h suffisamment régulier sur Γ_T , le problème (1) + (2) + (3) admet une unique solution $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, et que nous notons $u = U(h, u^0; c)$. Si, en plus, $f \in L^2(\Omega_T)$ et $h = 0$, alors u appartient au domaine $D(L)$ de l'opérateur $\mathcal{L} = \partial_t - \operatorname{div}(c \nabla \cdot)$. Voir [40, Théorèmes 1.1, 4.1 et Remarque 4.3; Chap. 3] et [41] pour des preuves complètes.

Durant une expérimentation, nous sommes censés ne pouvoir agir à l'aide de capteurs que sur une partie γ du bord. Soit donc γ , un ouvert relatif du bord Γ , et non vide. Les données sont :

- (1) Input - La fonction h , à support dans γ . Nous dirons aussi : "contrôle au bord (sur γ)".
- (2) Output - La mesure de $u = U(h, u^0; c)$ dans Ω entier à un instant θ (connu), avec $0 < t_0 < \theta < T$.
- (3) Output - La mesure du flux sortant ($c \partial_{\mathbf{n}} u$) sur γ , pendant un intervalle de temps $[t_0, T]$ (connu), où \mathbf{n} désigne la normale unitaire sur Γ , sortante.

L'explication du paramètre $t_0 > 0$ est que nous n'avons pas la possibilité d'agir sur les diverses quantités avant ce temps t_0 . Ainsi, dans les équations (14), nous supposons que la condition sur le bord est homogène pendant le laps de temps $[0, t_0]$. Mais, pour la démonstration du théorème principal 1.1, il n'est pas restrictif de se ramener au cas $t_0 = 0$.

La condition au bord est aussi homogène sur $\Gamma \setminus \gamma$ pour tout $t \in [0, T]$. Nous avons donc $u(t, x) = h(t, x) = 0$, pour $(t, x) \in \Gamma_{0, t_0} \cup (\Gamma \setminus \gamma)_{0, T}$, avec la convention de notation que $g_{a, b}$ désigne l'ensemble $(a, b) \times g$ lorsque (a, b) est un intervalle de temps et g un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$.

Suivant une stratégie déjà élaborée dans [45], notre problème inverse consiste à sélectionner des données en nombre fini, $h_l \in C^\infty(\Gamma_T)$, $l \in [[1, l_n]]$ pour un

l_n à déterminer aussi, pour que les solutions $u = U(h_l, u^0; c)$ à l'instant θ , $u(\theta, \cdot)|_\Omega$, $1 \leq l \leq l_n$, ainsi que les mesures des dérivées normales des solutions sur la partie γ du bord, $(\partial_{\mathbf{n}}u)|_{\gamma_T}$, permettent de déterminer le coefficient de diffusion c inconnu. Rappelons que les termes non homogènes h_l sont appelés couramment "inputs" de l'équation (14) et les termes $(\partial_{\mathbf{n}}u)|_{\gamma_T}$ et $u_l(\theta, \cdot)|_\Omega$ les "outputs". Si $l_n = 1$, il n'y a qu'une expérimentation suffisante pour le résultat. Si $l_n > 1$, la stratégie nécessite au moins deux expérimentations successives dans le temps. Au bout de la première ($t = T$), la solution $u = u_1$ de (14) avec l'input $h = h_1$ prend une certaine valeur inconnue $u_1(T)$ qui sert de condition initiale pour la deuxième expérimentation, pour laquelle h , $t \in [0, T]$, u^0 dans (14) sont respectivement remplacés par h_2 , $t+T \in [T, 2T]$, $u_1(T)$. Et ainsi de suite pour effectuer les l_n expérimentations. Ceci justifie encore dans le modèle le fait que l'on considère u^0 comme inconnu. En fait, on peut raccourcir le temps réel d'expérimentation $l_n \cdot T$ car, l'équation étant parabolique, les résultats qualitatifs (unicité) ou quantitatifs (stabilité) ultérieurs tiennent encore (avec une constante différente pour la stabilité, car dépendant de T) si T est remplacé par un temps plus court, arbitrairement (mais il faut changer aussi t_0 et θ).

Nous allons montrer l'unicité *locale* et la stabilité *locale* de c dans la classe $\mathcal{E}(R)$ suivante. La nuance de "locale" est une restriction qui va aussi être précisée. Soit $\mathcal{E} \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $c(x)$ qui satisfont les conditions suivantes :

- (i) Les inégalités (4) sont vraies avec $C = R$.
- (ii) La fonction c est régulière par morceaux (réguliers) dans Ω . De plus, les conditions géométriques, ainsi que la condition de saut sur $c(\cdot)$ du chapitre 1 sont remplies¹.

Nous posons Ω_j^c , $j = 1, 2$, les deux morceaux ouverts, et notons par c_j la restriction $c|_{\Omega_j^c}$, que l'on s'étend à \mathbb{R}^n en fonction C^∞ . Rappelons que l'interface $\overline{\Omega_1^c} \cap \overline{\Omega_2^c}$, notée ici S^c , est connexe et ne touche pas Γ . Ainsi, S^c , qui dépend évidemment de c , contient l'ensemble des points de discontinuité de c dans $\overline{\Omega}$. La détermination de c implique donc celle de S^c ! Nous supposons que c'est l'ouvert Ω_1^c qui ne touche pas Γ : Ω_1^c est appelé *l'inclusion*.

La difficulté du choix des inputs oblige à considérer un problème inverse *local*. Nous nous donnons donc d'abord une conductivité de référence $\tilde{c} \in \mathcal{E}$, ce qui permet un (bon) choix des h_l . Ces inputs dépendent malheureusement de \tilde{c} . Pour d'autres types de problèmes inverses (avec équation de la chaleur, ou même, équation des ondes), comme dans les articles de référence [23], [19], les inputs sont bons s'ils satisfont des conditions simples et générales (du type $h > 0$, par exemple), et, par conséquent, les résultats n'y sont pas locaux.

Notre objectif principal est de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. (Voir [43]). **Stabilité** - Soient $\tilde{u}^0 \in L^2(\Omega)$ et $\tilde{c} \in \mathcal{E}$. Alors il existe $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\gamma_{t_0, T})$ tels que pour tout $c \in \mathcal{E}$, tout $u_0 \in L^2(\Omega)$,

1. les auteurs de [39] ont prouvé qu'elles sont superflues, au moins pour obtenir des inégalités de Carleman. Voir la Remarque en fin de chapitre 1.

il existe $C > 0$ tel que

$$(15) \quad \|c - \tilde{c}\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 \leq C \left(\|c - \tilde{c}\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{l=1}^2 \|\partial_{\mathbf{n}}(u_l - \tilde{u}_l)\|_{H^1(t_0, T; L^2(\gamma))}^2 + \|(u_l - \tilde{u}_l)(\theta, \cdot)\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \right),$$

où on a posé $u_l = U(h_l, u^0, c)$, $\tilde{u}_l = U(h_l, \tilde{u}^0, \tilde{c})$.

COROLLAIRE 1.1. (Voir [43]). **Unicité Locale** - Soient $\tilde{u}^0 \in L^2(\Omega)$ et $\tilde{c} \in \mathcal{E}$. Alors il existe $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\gamma_{t_0, T})$, tels que, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, tout $c \in \mathcal{E}$ tel que $c|_\omega = \tilde{c}|_\omega$, si $u_l = \tilde{u}_l$ sur $\gamma_{t_0, T}$ et si $u_l(\theta, \cdot) = \tilde{u}_l(\theta, \cdot)$ dans Ω , $l = 1, 2$, alors $c = \tilde{c}$.

REMARQUE 1.1. Il est possible d'écrire une version améliorée de ce corollaire avec h_1, h_2, C , indépendants de c, u^0, \tilde{u}^0 , pourvu que ceux-ci aient des normes contrôlées. Voir la remarque 6.1 ultérieure. Une fois l'estimation de $c - \tilde{c}$ acquise, il est alors possible d'estimer $\tilde{u}^0 - u^0$. Voir l'article [22] à ce sujet.

REMARQUE 1.2. Les hypothèses de régularité C^∞ peuvent être affaiblies, en supposant les variétés S^c et Γ de classe $C^{2n'+2}$, et les $c_j \in C^{2n'+1}(\overline{\Omega_j^c})$, où $n' = [n/4] + 1$. Voir [43] pour les précisions.

REMARQUE 1.3. Il existe d'autres voies pour déterminer la ou les interfaces, qui ne nécessitent pas de mesure au temps θ , notamment celle des $u_l(\theta, \cdot)$. Voir le chapitre 3 à ce sujet.

La preuve du théorème 1.1 suit une idée de A.L. Bukhgeim et M.V. Klibanov (voir [23]) pour résoudre un problème inverse d'inconnue le potentiel $q(x)$ pour l'équation parabolique

$$(16) \quad \partial_t u - \Delta u + qu = 0, \quad \text{dans } \Omega_T.$$

La méthode dans [23] est basée sur une inégalité de Carleman, avec donnée dans $L^2(\Omega_T)$, correspondant à un terme non homogène dans le membre de droite de (16). Elle est reprise dans l'article [22], qui s'intéresse à un problème très similaire au nôtre, avec la difficulté de la discontinuité du coefficient de diffusion. Les auteurs de [22] utilisent l'inégalité de Carleman, avec donnée dans $L^2(\Omega_T)$, établie dans [28]. Pour plus de simplicité, la fonction poids de Carleman utilisée dans la preuve du théorème 1.1 est aussi celle de l'article [28], même si nous avons une version améliorée (mais sophistiquée) de l'inégalité de Carleman dans le chapitre 1, où la contrainte sur le saut de la fonction c à travers S^c a été allégée. Nous utiliserons donc l'estimation (9) avec les hypothèses de [28], bien que les conditions géométriques et celle sur le saut de c à travers S^c peuvent y être levées, comme prouvé dans [39]. Cependant, les auteurs de [39] utilisent une fonction poids (spatial) $\beta(x)$ moins pratique ici que celle de [28], car elle ne satisfait pas la condition suivante :

$$(17) \quad \operatorname{div}(c \nabla \beta) \in L^\infty(\Omega).$$

que nous utilisons pour prouver le théorème 4.1.

Il y a des différences fondamentales dans nos hypothèses et notre preuve, comparées à celles de [22]. Dans [22], et contrairement à nous, il est supposé que :

— L'interface S^c de la conductivité inconnue c est fixe donc connue, i.e, $S^c = S^{\tilde{c}}$.

— Le saut de c à travers S^c est constant, i.e, indépendant de x .

Pour lever ces conditions, nous utilisons les deux outils suivants.

- Une inégalité de Carleman avec donnée de la forme $\operatorname{div}_x f \in L^2(H^{-1})$ (voir (29) dans le théorème 3.2), espace² qui est le dual de $L^2(H_0^1)$. Ici, f est une fonction vectorielle dans $(L^2(\Omega_T))^n$. Pour une telle inégalité, la fonction poids de Carleman est inchangée, i.e, c'est celle du cas avec donnée dans $L^2(\Omega_T)$ (voir (26) dans la proposition 3.1).

- Nous devons résoudre le problème suivant : déterminer l'unicité et la stabilité L^2 de $c \in \mathcal{E}$ solution de l'équation "linéaire" du premier ordre

$$(18) \quad -\operatorname{div}(c\nabla u) = f, \quad \text{dans } \Omega,$$

avec données $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Il s'agit d'estimer $\|c - \tilde{c}\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de $u - \tilde{u}$, $f - \tilde{f}$, où \tilde{c} est une solution donnée de (18) en y remplaçant (u, f) par (\tilde{u}, \tilde{f}) . Il faut remarquer que si c dépend linéairement de f , il n'en est pas de même selon u . Contrairement au cas de l'équation (16), où le potentiel q s'obtient algébriquement sous la forme

$$q(x) = - \left(\frac{\partial_t u - \Delta u}{u} \right) \Big|_{t=\theta},$$

pour établir l'estimation de $c - \tilde{c}$, nous aurons besoin d'utiliser une inégalité de Carleman avec fonction poids qui, en plus (pour bien faire), doit coïncider avec celle du problème parabolique prise au temps $t = \theta$. Nous ferons donc une hypothèse de type suivant sur la fonction $u(x)$ de l'équation (18) :

$$|\nabla \varphi \cdot \nabla u| \geq \delta > 0, \quad \text{dans } \Omega,$$

où $\varphi(x)$ provient de la construction de la fonction poids de Carleman. Cette condition est à comparer avec celle de [22, Assumption 2.1], à savoir, dans notre système de notations,

$$|\Delta_x u| \geq \delta > 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus S^c.$$

La fonction φ employée satisfait la condition utile

$$(19) \quad \operatorname{div}(c\nabla \varphi) \in L^\infty(\Omega),$$

qui est équivalente à (17), puisque les fonctions φ et β sont reliées par

$$(20) \quad \varphi(x) = \exp(\lambda\bar{\beta}) - \exp(\lambda\beta(x)).$$

Voir aussi la remarque 3.1.

Notons par (P1) notre problème inverse. Des difficultés techniques pour résoudre (P1) proviennent de ce que les observations sur l'intervalle de temps (t_0, T) sont localisées sur la partie γ du bord. Il est plus facile de résoudre d'abord deux problèmes similaires (P2), (P3), avec la modification que les données au bord sont remplacées par des données distribuées. Soit donc un ouvert non vide fixé ω de Ω . Comme on peut réduire ω au besoin, la seule hypothèse utile est que ω ne touche ni Γ ni S^c . (P2) correspond au cas où

2. les notations d'espaces sont précisées en section 2

$\bar{\omega} \subset \Omega_2^{\tilde{c}}$, (P3) correspond au cas où $\bar{\omega} \subset \Omega_1^{\tilde{c}}$.

Considérons les équations suivantes :

$$(21) \quad \begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(c \nabla u) &= H \chi_\omega \text{ dans } \Omega_T, \\ u(0, x) &= u^0(x) \text{ dans } \Omega, \\ u(t, x) &= 0 \text{ sur } \Gamma_T, \end{cases}$$

où χ_ω désigne la fonction indicatrice de ω et $H(t, x)$ le terme source (ou input), fonction dans $L^2(\Omega_T)$. Nous fixons $H(t, x) = 0$ pour $t \in [0, t_0]$ ou pour $x \notin \omega$. Il est connu qu'il existe une unique solution $u \in L^2(H_0^1)$ de (21), notée $U(H, u^0; c)$, que $u \in C^0([0, T]; H_0^1)$ et que si H est suffisamment régulier (ce qui sera notre cas), alors $u \in C^r([t_0, T]; D(A^k(c)))$ pour tous $r, k \in \mathbb{N}$. En ce qui concerne les problèmes inverses associés, les résultats à établir sont les suivants, où $L = 2$ pour (P2) et $L = 1$ pour (P3).

THÉORÈME 1.2. (Voir [43]). **(Stabilité)** - Soient $\tilde{u}^0 \in L^2(\Omega)$ et $\tilde{c} \in \mathcal{E}$. Alors il existe $H_l \in C_0^\infty(\omega_{t_0, T})$, $1 \leq l \leq L$, tels que pour tout $c \in \mathcal{E}$, tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que

$$(22) \quad \begin{aligned} \|c - \tilde{c}\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 &\leq C \left(\|c - \tilde{c}\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1,2} \|\partial_t^k (u_l - \tilde{u}_l)\|_{L^2(\omega_{t_0, T})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(u_l - \tilde{u}_l)(\theta, \cdot)\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où on a posé $u_l = U(H_l, u^0; c)$, $\tilde{u}_l = U(H_l, \tilde{u}^0; \tilde{c})$, $\omega_{t_0, t_1} = (t_0, t_1) \times \omega$.

La suite du texte concerne la preuve du théorème 1.1. Nous posons quelques notations, puis nous établissons les deux problèmes inverses successifs (P2) et (P3), similaires à notre principal problème inverse, appelé (P1). Ceux-ci sont intermédiaires et plus simples, de difficulté croissante, i.e, en langage simpliste, (P3) \Rightarrow (P2) \Rightarrow (P1). Les résultats correspondants de (P2) et (P3) peuvent être vus aussi indépendamment.

Nous commençons donc par nous occuper de (P3), en prouvant le théorème 1.2 dans le cas $\omega \subset \Omega_1^c$, $L = 1$.

2. Notations

Nous prenons les conventions d'écriture $H^r = H^r(\Omega)$, $H^r(H^s) = H^r(0, T; H^s(\Omega))$, $r, s \in \mathbb{R}$, et $H^0 = L^2$. De même avec $H_0^1(\Omega)$ à la place de $H^1(\Omega)$. Si k est un réel positif, V un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie dans $V' \supset V$, nous écrivons $f|_V \in C^k(\mathbb{R}^n)$ si $f|_V$ peut être prolongée à tout \mathbb{R}^n comme une fonction de classe C^k .

L'opérateur formel de la chaleur défini par une conductivité c s'écrit

$$\mathcal{L}(c)q = \partial_t q + \mathcal{A}(c)q,$$

avec $\mathcal{A}(c) := -\operatorname{div}(c \nabla \cdot)$ l'opérateur spatial formel. L'adjoint formel de $\mathcal{L}(c)$ est $\mathcal{L}^*(c) := -\partial_t - \operatorname{div}(c \nabla \cdot)$. Nous définissons l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega; dx)$ par $A(c)p := \mathcal{A}(c)p$ avec domaine $D(A(c)) := \{p \in H_0^1(\Omega), \mathcal{A}(c)p \in L^2(\Omega)\}$. Nous posons aussi

$$\begin{aligned} D(L(c)) &:= \{q : q \in L^2(H_0^1), \mathcal{L}(c)q \in L^2(\Omega_T)\} \\ D(L^*(c)) &:= \{q : q \in L^2(H_0^1), \mathcal{L}^*(c)q \in L^2(\Omega_T)\}. \end{aligned}$$

Par $L(c)$ (respectivement, $L^*(c)$) nous désignons l'opérateur $\mathcal{L}(c)$ (respectivement, $\mathcal{L}^*(c)$) avec domaine $D(L(c))$ (respectivement, $D(L^*(c))$).

L'interface globale de c est notée S^c ou S s'il n'y a pas ambiguïté. Il existe un champ de vecteur dans $C^\infty(S)$, noté \mathbf{n} , qui est unitaire normal. Le vecteur unitaire normal sur Γ et sortant de Ω est noté aussi \mathbf{n} . Etant donnée une fonction spatiale q régulière par morceaux avec discontinuités éventuelles seulement sur S nous posons $q^\pm(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} q(x \pm \varepsilon \mathbf{n})$, $x \in S$, $[q] := q^- - q^+$. Si, en plus, q est continue à travers S alors $\partial_\tau q$ désigne le champ de dérivées partielles tangentielles de q sur S .

Si $K \subset \bar{\Omega}$, le cylindre $(t_0, t_1) \times K \subset \bar{\Omega}_T$ est noté K_{t_0, t_1} .

3. Estimations de Carleman pour l'équation parabolique

Soit $c \in \mathcal{E}$. Considérons l'équation de la chaleur non homogène,

$$(23) \quad \partial_t q - \operatorname{div}(c \nabla q) = f \text{ dans } \Omega_T,$$

ou son équation adjointe

$$(24) \quad -\partial_t q - \operatorname{div}(c \nabla q) = f \text{ dans } \Omega_T,$$

avec, pour chaque équation, les conditions au bord :

$$(25) \quad q = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \quad q(t_{init}, \cdot) \in L^2(\Omega),$$

où $t_{init} = 0$ pour (23) et $t_{init} = T$ pour (24).

Comme nous allons d'abord démontrer (P3), nous considérons $c \in \mathcal{E}$, l'ouvert ω dans Ω_1^c , et l'espace Z_0 défini en chapitre 1 par (10). D'après [28, Lemmes 3.1, 3.2 et Théorèmes 3.3, 3.4], nous avons la

PROPOSITION 3.1. 1) Pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega}_j^c)$, $j = 1, 2$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $\varphi \leq -C < 0$ dans $\bar{\Omega}$;
- (2) φ est constante sur S^c .
- (3) φ est constante sur Γ , et $\partial_{\mathbf{n}} \varphi \leq -C < 0$ sur Γ .
- (4) $[c \partial_{\mathbf{n}} \varphi] = 0$ sur S^c .
- (5) $|\nabla \varphi| \geq \lambda |\varphi| > 0$ dans $\bar{\Omega} \setminus (\omega \cup S^c)$.

2) Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_1$, il existe des réels $C > 0$, $s_0 > 0$, tels que, pour tous $s > s_0$, $f \in C^0(\bar{\Omega}_T)$ et tout $q \in Z_0$ solution de (23) ou de (24), nous avons

$$(26) \quad \int_{\Omega_T} \left(\Pi_{-1} |\partial_t q|^2 + \Pi_{-1} |A(c)q|^2 + \Pi_1 |\nabla q|^2 + \Pi_3 |q|^2 \right) \leq C \left(\int_{\omega_T} \Pi_3 |q|^2 + \int_{\Omega_T} \Pi_0 |f|^2 \right),$$

avec les définitions

$$(27) \quad \Pi_r(t, x; s) := s^r \eta^r(t) e^{2s\eta(t)\varphi(x)}, \quad s \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R},$$

$$(28) \quad \eta(t) = \frac{T^2}{t(T-t)} e^{\frac{T-2\theta}{\theta(T-\theta)} t},$$

et où la fonction φ satisfait le point 1) avec cette valeur $\lambda > \lambda_1$ fixée.

REMARQUE 3.1. 1) La fonction φ satisfait la relation (20), où la fonction $\beta(x)$, la constante $\bar{\beta}$, et le paramètre λ sont ceux dans [28].
 2) Elle satisfait la même propriété (17) que la fonction β .
 3) Si $\theta = T/2$ alors $\eta(t) = \frac{T^2}{t(T-t)}$. Dans le cas général nous avons une exponentielle en facteur dans la formule de η pour assurer que η atteigne son minimum en $t = \theta$, avec stricte convexité.

La proposition 3.1 tient sous l'hypothèse $q \in Z_0$. Elle s'étend au cas général $q \in D(L(c))$ pour l'équation (23). Le cas $q \in D(L^*(c))$ pour l'équation (24) est similaire. Pour plus de précisions, voir [43]. Nous avons donc le

THÉORÈME 3.1. (Voir [43]). L'estimation (26) reste valable pour tout $q \in D(L(c))$ (respect., $q \in D(L^*(c))$) solution de (23) (respect., de (24)), avec une condition initiale comme celle dans (25).

REMARQUE 3.2. Dans ce théorème 3.1, la condition initiale dans (25) est généralisable et peut être remplacée par la condition $q(t_{init}, \cdot) \in D(A^r(c))$ pour un $r \in \mathbb{R}^-$.

Nous déduisons de (26) l'estimation de Carleman suivante, avec donnée $f \notin L^2(\Omega_T)$.

THÉORÈME 3.2. (Voir [43]). Supposons que dans (23) (respectivement, dans (24)) la fonction f n'appartenant pas nécessairement à $L^2(\Omega_T)$ s'écrit

$$f = f_0 + \operatorname{div}_x \mathbf{f},$$

avec $(f_0, \mathbf{f}) \in L^2(\Omega_T) \times (L^2(\Omega_T))^n$. Alors il existe $C > 0$, $s_0 > 0$ tels que pour tous $s > s_0$ et q satisfaisant (23) (respectivement, (24)) nous avons

$$(29) \quad \int_{\Omega_T} \Pi_3 |q|^2 \leq C \left(\int_{\omega_T} \Pi_3 |q|^2 + \int_{\Omega_T} \Pi_0 |f_0|^2 + \Pi_2 |\mathbf{f}|^2 \right).$$

La preuve de (29) utilise le théorème 3.1, et est standard. Elle était connue lorsque c et φ sont des fonctions régulières, et s'adapte directement à notre cas. Pour plus de détails, voir [43].

4. Estimation de Carleman pour l'équation stationnaire d'ordre un

Considérons l'équation différentielle (18), d'inconnue la fonction $c \in \mathcal{E}$, où $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, et cherchons la stabilité de c en fonction de f et de u . Soit $\tilde{c} \in \mathcal{E}$ une solution de référence de (18), avec (u, f, c) remplacé par (\tilde{u}, \tilde{f}) , i.e.,

$$(30) \quad -\operatorname{div}(\tilde{c} \nabla \tilde{u}) = \tilde{f}, \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous utilisons les notations de la section 2 : Ω est partitionné par les $\Omega_k = \Omega_k^c$ et l'interface $S := S^c$, (respectivement, par les $\tilde{\Omega}_k = \Omega_k^{\tilde{c}}$ et l'interface $\tilde{S} := S^{\tilde{c}}$), $k = 1, 2$.

Soient les poids $\pi_r(x; s) = \Pi_r(\theta, x; s)$, où Π_r est défini par (27), $\theta \in (0, T)$ est fixé, le paramètre s et la fonction spatiale φ est celle de la proposition 3.1 ou du théorème 3.1, mais avec c remplacé par \tilde{c} . Donc, les fonctions φ ,

π_r dépendent de \tilde{c} , mais non de c .

Nous ferons les deux hypothèses suivantes. La première concerne u (ou \tilde{u}), la deuxième le couple (c, u) (ou (\tilde{c}, \tilde{u})).

(HS1) : $\exists \delta > 0$, $|\nabla \varphi \cdot \nabla u| \geq \delta > 0$ p.p dans $\Omega \setminus \omega$.

(HS2) : $u|_{\Omega_k} \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2$.

Dans le cas où (HS2) est satisfaite par (c, u) , nous posons

$$M_c(u) = \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^n \|\partial_j^k u|_{\Omega \setminus S}\|_{L^\infty(\Omega \setminus S)}.$$

Posons $\xi = c - \tilde{c}$, $\Omega_{jk} := \Omega_j \cap \tilde{\Omega}_k$, $\Omega^* := \cup_{j,k} \Omega_{jk}$.

Le théorème suivant donne l'estimation de ξ .

LEMME 4.1. *Soient $R, R' > 0$, $\tilde{c} \in \mathcal{E}$, $c \in \mathcal{E}(R)$, $f, \tilde{f} \in L^2_R(\Omega)$, $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant (18) et (30). Supposons que \tilde{u} satisfait (HS1), que (c, u) et (\tilde{c}, \tilde{u}) satisfont (HS2), avec $M_c(u), M_{\tilde{c}}(\tilde{u}) \leq R'$. Alors il existe $s_0 > 0$ tel que, pour tout $s \geq s_0$,*

$$(31) \quad \int_{\Omega \setminus \omega} \pi_3 |\xi|^2 \leq C_1 \left(\int_{\Omega} \pi_1 |f - \tilde{f}|^2 + \int_{\omega} \pi_2 |\xi|^2 \right) + C_2(s) \left(\|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(u - \tilde{u})\|_{H^2(\Omega^*)}^2 \right).$$

De plus, les constantes C_1, C_2 et le paramètre s_0 dépendent de R, R', \tilde{c} , et δ , mais pas de c, u, f .

REMARQUE 4.1. 1) La constante C_1 **ne dépend pas** de s .

2) Cette estimation n'est pas Lipschitz mais Hölder $\frac{1}{2}$. En dimension $n = 1$, il est possible de l'améliorer nettement. Voir la fin du chapitre, ou [25].

Une estimation de ce type, sans le mauvais terme $\|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}$, se trouve dans [34, Lemme 3.2], quand les coefficients sont réguliers : elle est obtenue par comparaison entre les termes dominants provenant d'un produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, dx)$. Dans notre cas, la non régularité de c ou \tilde{c} provoque deux difficultés. Premièrement, les intégrations par parties nécessitent une théorie plus sophistiquée que celle de la formule de Gauss-Green. Nous utiliserons donc la formule de De Giorgi-Federer (voir, par exemple, [46, paragraphe 5.8]). A ma connaissance, cette technique n'avait pas été utilisée pour résoudre des problèmes comme le nôtre. Deuxièmement, les intégrales sur S et \tilde{S} qui interviennent doivent être exprimées en termes de $u - \tilde{u}$. Ceci ne peut être effectué avec des produits scalaires dans $L^2(\Omega, dx)$. En effet, nous allons utiliser la propriété :

$$(32) \quad \tilde{c} \nabla \varphi \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n,$$

qui est une conséquence de (19) (avec \tilde{c} à la place de c), et le fait que φ est constante sur \tilde{S} (voir proposition 3.1). C'est pourquoi ces produits sont effectués dans $L^2(\Omega, \tilde{c}(x)dx)$. La conséquence en est que l'estimation (31) n'est pas lipschitzienne (voir le terme $\|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}$). L'origine précise de cette perte se tient dans les intégrales de bord sur $(S \setminus S')$ et sur $(S' \setminus S)$. En dimension un, une estimation meilleure s'obtient (Cf. [25]).

Preuve- (du théorème). Nous utilisons les notations de la section 2 : Ω est partitionné par les $\Omega_k = \Omega_k^c$, ainsi que par les $\tilde{\Omega}_k = \Omega_k^{\tilde{c}}$, $k = 1, 2$. Nous posons $\tilde{S} := S^{\tilde{c}}$. Comme Γ' n'est pas forcément lipschitzienne, la formule de Gauss–Green dans Ω^* doit être remplacée par celle de De Giorgi–Federer, qui s'utilise comme suit. Soient $E_{\pm} := \{x \in S \cap \tilde{S}; \mathbf{n}(x) = \pm \tilde{\mathbf{n}}(x)\}$, $E := E_- \cup E_+$, et q un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n , défini pour $x \in \bar{\Omega}$, et tel que $q_{jk} \equiv q|_{\Omega_{jk}} \in C^1(\bar{\Omega}_{jk})$. Posons

$$S^* = (\tilde{S} \setminus S) \cup (S \setminus \tilde{S}) \cup E, \quad \Gamma^* \equiv \partial^* \Omega^* = \Gamma \cup S^*,$$

et soit \mathbf{n}^* le vecteur normal unitaire sur Γ^* , et déterminé par $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$ sur $S \cup \Gamma$, $\mathbf{n}^* = \tilde{\mathbf{n}}$ sur $\tilde{S} \setminus E$. Alors on a

$$(33) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega^*} \operatorname{div} q \\ &= \int_{\partial \Omega} q \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\tilde{S} \setminus S} [q]^{\sim} \cdot \tilde{\mathbf{n}} d\sigma + \int_{S \setminus \tilde{S}} [q] \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_E [q] \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &=: \int_{\Gamma^*} [q]^* \cdot \mathbf{n}^* d\sigma, \end{aligned}$$

où $[q]^*$ désigne le saut de la quantité q à travers Γ^* , i.e, $[q]^* = [q]$ sur $S \setminus E$, $[q]^* = [q]^{\sim}$ sur $\tilde{S} \setminus E$, $[q]^* = q$ sur Γ , est indéterminé sur $S \cap \tilde{S} \setminus E$, lequel est $d\sigma$ -négligeable. Remarquer que $\int_E [q] \cdot \mathbf{n} = \int_E [q]^{\sim} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$, puisque $[q]^{\sim} = \pm [q]$ sur E_{\pm} .

Dans la suite, une quantité q_s désigne $\exp(s'\varphi(x))q$, avec $s' = s\eta(\theta)$, $s > 0$, et la fonction η est définie dans (28).

Posons

$$\begin{aligned} \mu &:= -\operatorname{div}(c_s \nabla(u - \tilde{u})) + s' c_s \nabla \varphi \nabla(u - \tilde{u}), \\ R_1 &:= s' \xi_s \nabla \varphi \nabla \tilde{u}, \quad R_2 := -\nabla \xi_s \nabla \tilde{u} - \xi_s \Delta \tilde{u} + \mu, \end{aligned}$$

puis

$$(34) \quad I := \int_{\Omega^*} (R_1(x) + R_2(x))^2 \tilde{c}(x) dx.$$

De (18), (30), nous tirons directement la relation

$$(35) \quad R_1 + R_2 = f_s - \tilde{f}_s \text{ dans } \Omega^*.$$

De (34), (35), nous tirons l'estimation

$$I \leq C(\tilde{c}) \|f_s - \tilde{f}_s\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Puisque $(R_1 + R_2)^2 \geq R_1^2 + 2R_1R_2$, nous obtenons la minoration

$$(36) \quad I \geq s'^2 I_1 + s'(I_2 + I_3),$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Omega^*} \xi_s^2 |\nabla \varphi \nabla \tilde{u}|^2 \tilde{c}, \\ I_2 &:= - \int_{\Omega^*} (\nabla \xi_s^2 \cdot \nabla \tilde{u}) (\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}), \\ I_3 &:= 2 \int_{\Omega^*} (-\xi_s^2 \tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) \Delta \tilde{u} + 2 \int_{\Omega^*} \xi_s \tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u} \mu \equiv I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

Grâce à (HS1) pour \tilde{u} , nous avons

$$(37) \quad I_1 \geq C(\tilde{c}, \delta) \int_{\Omega \setminus \omega} \xi_s^2, \quad C(\tilde{c}, \delta) > 0.$$

Grâce à (32), une intégration par parties sur I_2 est possible - formule (33) -, et produit

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{21} + X_1, \quad \text{avec} \\ I_{21} &:= \int_{\Omega^*} \xi_s^2 \operatorname{div}((\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) \nabla \tilde{u}), \\ X_1 &:= - \int_{\Gamma^*} [\xi_s^2 (\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) \partial_{\mathbf{n}^*} \tilde{u}]^* \equiv - \int_{\Gamma^*} [\phi]^*. \end{aligned}$$

De (32), (HS2) pour (c, u) , et de l'inégalité de Schwarz, nous tirons

$$(38) \quad |I_{31}| + |I_{21}| \leq C(\tilde{c}, R') \|\xi_s\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De l'inégalité de Minkovski, et en remarquant que

$$\|\mu\|_{L^2(\Omega^*)} \leq C(R, \tilde{c}, s) \|u - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega^*)},$$

nous tirons

$$(39) \quad |I_{32}| \leq C(\tilde{c}, R') \|\xi_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(R, \tilde{c}, s) \|u - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega^*)}^2.$$

La difficulté réelle est d'estimer X_1 . Il s'agit d'y faire apparaître le terme $u - \tilde{u}$. Rappelons que sur \tilde{S} , φ est constante, et donc, en chaque point $x \in \tilde{S} \setminus E$, nous avons $\mathbf{n}^*(x) = \tilde{\mathbf{n}}(x)$, $\nabla \varphi(x) = (\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \varphi) \tilde{\mathbf{n}}(x)$, puis

$$\phi = \tilde{c} \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \varphi (c_s^2 - 2c_s \tilde{c}_s + \tilde{c}_s^2) (\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u})^2.$$

Remarquons que, sur S^* , nous avons

$$[\tilde{c}_s^2 (\partial_{\mathbf{n}^*} \tilde{u})^2]^* = [\tilde{c}_s \partial_{\mathbf{n}^*} \tilde{u}]^* = [c_s^2 (\partial_{\mathbf{n}^*} u)^2]^* = [c_s \partial_{\mathbf{n}^*} u]^* = 0.$$

Nous obtenons donc sur $S^* \cap \tilde{S}$:

$$\begin{aligned} [\phi]^* &= (\tilde{c} \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \varphi) \left(- [c_s^2 ((\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u)^2 - (\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u})^2)]^\sim + 2(\tilde{c}_s \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u}) [c_s \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} (u - \tilde{u})]^\sim \right) \\ &= -(\tilde{c} \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \varphi) [-c_s^2 (\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} (u - \tilde{u}))^2 - 2c_s \xi_s \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u} \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} (u - \tilde{u})]^\sim, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} (40) \quad |[\phi]^*| &\leq C(\tilde{c}, R, s) \left(|\partial_{\mathbf{n}^*} (u - \tilde{u})|_\infty^2 + |\partial_{\mathbf{n}^*} (u - \tilde{u})|_\infty \right) \\ &\leq C(\tilde{c}, R, R', s) |\partial_{\mathbf{n}^*} (u - \tilde{u})|_\infty, \quad \text{sur } \tilde{S} \setminus S. \end{aligned}$$

Sur $S^* \setminus \tilde{S}$, nous avons

$$\begin{aligned} [\phi] &= (\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u} [\xi_s^2] = (\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{u} ([c_s^2] - 2\tilde{c}_s [c_s]) \\ &= (\tilde{c} \nabla \varphi \nabla \tilde{u}) [(-c_s^2 + 2\tilde{c}_s c_s) \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} (u - \tilde{u})] + [c_s^2 \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u]. \end{aligned}$$

Le problème tient dans le dernier terme $[c_s^2 \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u]$. Remarquons la formule

$$c_s^2 = (c_{1,s} + c_{2,s}) c_s - c_{1,s} c_{2,s} \quad \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \setminus S.$$

Alors, sur $S \setminus \tilde{S}$, nous avons :

$$[c_s^2 \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u] = [(c_{1,s} + c_{2,s}) c_s \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u] - [c_{1,s} c_{2,s} \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} u] = c_{1,s} c_{2,s} [\partial_{\tilde{\mathbf{n}}} (u - \tilde{u})].$$

Donc (40) tient aussi sur sur $S^* \cap S$.

Sur Γ , puisque $\partial_{\mathbf{n}}\varphi < 0$, nous avons donc

$$(41) \quad [\phi] = \xi_s^2 \tilde{c} \partial_{\mathbf{n}} \varphi (\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u})^2 \leq 0.$$

De (40), (41), nous déduisons :

$$(42) \quad X_1 \geq -C(\tilde{c}, R, R', s) \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad C(\tilde{c}, R, R', s) \geq 0.$$

De (38), (39), (42), nous tirons

$$(43) \quad \begin{aligned} I_2 + I_3 &\geq -C_1(\tilde{c}, R') \|\xi_s\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_2(\tilde{c}, R, R', s) \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad - C_3(R, \tilde{c}, s) \|u - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega^*)}^2, \end{aligned}$$

où $C_1 \geq 0$. De (36), (37), (43), nous tirons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \omega} \xi_s^2 &\leq C_1(\tilde{c}, R', \delta) s^{-1} \int_{\Omega} \xi_s^2 + C_2(\tilde{c}, \delta) s^{-2} \int_{\Omega} |f_s - \tilde{f}_s|^2 \\ &\quad + C_3(R, R', s, \delta) \left(\|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega^*)}^2 \right). \end{aligned}$$

Donc si $s_0 = s_0(\tilde{c}, R', \delta) \geq C_1(\tilde{c}, R', \delta)$, alors, pour tout $s > s_0$, nous obtenons l'estimation (31). \square

5. Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous démontrons le théorème 1.2 en trois étapes.

Etape 1. Soient $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $\tilde{c} \in \mathcal{E}$. Pour une donnée $H \in C_0^\infty(\omega_{t_0, T})$, nous notons par \tilde{u} l'unique solution $U(H, u^0, \tilde{c})$ de (21), et nous posons $\tilde{v} = \tilde{u}|_{t=\theta}$. Nous allons construire une donnée H ne dépendant que de \tilde{c} et $R = \|u^0\|_{L^2(\Omega)}$, telle que la fonction \tilde{v} satisfasse (HS1). Pour cela, nous avons besoin du lemme technique suivant.

LEMME 5.1. (Voir [43], lemme 3.1]). *Soit b une fonction continue dans $\overline{\Omega}$, nulle sur le bord Γ , et telle que $[\tilde{c} \partial_{\mathbf{n}} b]^\sim = 0$ et $b|_{\tilde{\Omega}_j} \in C^1(\overline{\tilde{\Omega}_j})$, $j = 1, 2$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m > n/4 + 1/2$, il existe une famille de fonctions $b^\varepsilon \in D(A(\tilde{c})^m)$, $\varepsilon > 0$, qui tend vers b pour la topologie forte de $W^{1, \infty}(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Dans l'énoncé du lemme 5.1, l'hypothèse de continuité sur b équivaut à la condition $[b]^\sim = 0$. Nous obtenons le résultat suivant de contrôle approché dans $W^{1, \infty}(\Omega)$ pour l'équation (21).

THÉORÈME 5.1. (Voir [43]). *Soit la fonction b comme dans le lemme ci-dessus. Il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un terme source régulier $H \in C_0^\infty(\omega_{t_0, T})$, tel que $\|\tilde{v} - b\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \leq \varepsilon$.*

C'est une conséquence directe du lemme 5.1 et des résultats connus suivants :

- Les injections (continues) de Sobolev $C^r(\overline{\tilde{\Omega}_j}) \subset H^{2m}(\tilde{\Omega}_j)$, pour tout $0 \leq r < 2m - \frac{n}{2}$.
- Les injections continues $D(A(\tilde{c})^m) \subset H^{2m}(\tilde{\Omega}_j)$, prouvées dans [22].

Considérons le cas spécial $b = \varphi$, fonction de la proposition 3.1, avec \tilde{c} à la place de c . Lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, nous obtenons

$$\nabla \tilde{v} \cdot \nabla \varphi \simeq |\nabla \varphi|^2 \geq C > 0, \quad \text{uniformément dans } \bar{\Omega} \setminus (\tilde{S} \cup \omega).$$

Donc \tilde{v} satisfait (HS1). Dans la suite, nous conservons cette fonction H .

Etape 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\tilde{u} = U(H, u^0, \tilde{c})$ appartient à $H^3(\varepsilon, T; D(A(\tilde{c})^r))$, pour tout $r > 0$. Donc, les $\partial_t^k \tilde{u}$, $0 \leq k \leq 2$ appartiennent à $L^\infty(\varepsilon, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. Soient $c \in \mathcal{E}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $u = U(H, u^0, c)$ appartient à $H^r(\varepsilon, T; D(A(c)^m))$, $r, m \geq 0$, et par conséquent, les $\partial_t^k u$, $0 \leq k \leq 2$ appartiennent à $L^\infty(\varepsilon, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. Comme nous pouvons considérer l'équation (21) partant de $t = t_0$, nous pouvons remplacer t_0 et ε par 0 et les oublier dans la suite de la preuve. Posons $v = u|_{t=\theta}$. Les conditions suivantes sont alors satisfaites :

- (H1) La fonction \tilde{v} satisfait (HS1).
- (H2) Les couples (\tilde{v}, \tilde{c}) (v, c) satisfont (HS2).
- (H3) Les fonctions $\partial_t^k \tilde{u}$ et $\partial_t^k u$ appartiennent à $L^\infty(W^{1,\infty})$, $0 \leq k \leq 2$.

Reprenons la méthode dans [23]. Posons $z = \partial_t u - \partial_t \tilde{u}$, $w = \partial_t z$, $\xi = c - \tilde{c}$. Il est facile de voir que z et w satisfont :

$$(44) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{c})z = \operatorname{div}(\xi \nabla \partial_t u) & \text{au sens faible dans } \Omega_T, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma_T, \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{c})w = \operatorname{div}(\xi \nabla \partial_t^2 u) & \text{au sens faible dans } \Omega_T, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_T. \end{cases}$$

Posons

$$B = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \pi_1 z^2(\theta, x) dx.$$

Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\theta} \partial_t (\Pi_1 z^2(t, x)) dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\theta} \partial_t \Pi_1 z^2 + \int_{\Omega_\theta} \Pi_1 z \partial_t z \equiv B_1 + B_2. \end{aligned}$$

L'inégalité de Carleman (29) du théorème 3.2 pour l'équation parabolique (44) implique, pour s assez grand,

$$s|B_1| \approx sB'_1 \equiv \int_{\Omega_\theta} \Pi_3 z^2 \leq C \left(\int_{\Omega_T} \Pi_2 |\partial_t \nabla u|^2 \xi^2 + \int_{\omega_T} \Pi_3 z^2 \right).$$

De la condition (H3) avec $k = 1$, et puisque d'après le troisième point de la remarque 3.1 nous avons $\Pi_2(t, x) \leq Cs\pi_1(x)$ pour tout $t \in [0, T]$, nous tirons alors

$$(46) \quad |B_1| \approx B'_1 \leq C(\tilde{c}, R) \left(\int_{\Omega} \pi_1 \xi^2 dx + s^{-1} \int_{\omega_T} \Pi_3 z^2 dx dt \right).$$

Pour obtenir une estimation pour B_2 , nous utilisons similairement l'inégalité de Carleman (29) pour l'équation parabolique (45) et la condition (H3) avec $k = 2$. Nous obtenons

$$(47) \quad |B_2| \leq |B'_1| + C(\tilde{c}, R) \left(\int_{\Omega} \pi_1 \xi^2 + s^{-3} \int_{\omega_T} \Pi_3 w^2 \right).$$

De (46), (47), nous tirons, pour s assez grand,

$$(48) \quad B \leq C_1(\tilde{c}, R) \int_{\Omega} \pi_1 \xi^2 + C_2(\tilde{c}, R, s) \int_{\omega_T} \Pi_3(z^2 + w^2).$$

Comme (H1) et (H2) sont satisfaites, le théorème 4.1 s'applique aux équations (18), (30), où l'on a posé

$$\begin{aligned} f &:= -\partial_t u|_{t=\theta} + H|_{t=\theta}, \\ \tilde{f} &:= -\partial_t \tilde{u}|_{t=\theta} + H|_{t=\theta}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Carleman (31), avec (u, \tilde{u}) remplacé par (v, \tilde{v}) , fournit alors la minoration suivante de B_1 :

$$(49) \quad \begin{aligned} B &\geq C_3^{-1}(\tilde{c}, R) \int_{\Omega} \pi_3 \xi^2 - \int_{\omega} \pi_2 \xi^2 \\ &\quad - C_4(\tilde{c}, R, s) \left(\|\nabla(v - \tilde{v})\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v - \tilde{v}\|_{H^2(\Omega^*)}^2 \right). \end{aligned}$$

De (48), (49), nous déduisons le résultat (22) dans le cas (P3).

Etape 3. Dans cette dernière étape, il s'agit de passer de (P3) à (P2), puis de (P2) à (P1). La seule différence entre (P3) et (P2) est que la fonction φ de (P2) ne satisfait pas la propriété (5) de la proposition 3.1. Considérons (P2), i.e, le cas $\omega \subset \tilde{\Omega}_2$. Dans [28], la fonction φ s'écrit alors

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

où $\varphi, \varphi_j, j = 1, 2$, satisfont les propriétés (1)-(4) de la proposition 3.1 avec c à la place de \tilde{c} . La propriété (5) y est remplacée par

(5') Il existe deux boules ouvertes séparées $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \subset \tilde{\Omega}_1$, et $\delta > 0$, tels que

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi_j| &\geq \lambda |\varphi_j| \geq C > 0 \quad \text{dans } \overline{\Omega} \setminus (\omega \cup \mathcal{O}_j \cup \tilde{S}), \\ \varphi_{3-j} &\geq \varphi_j + \delta \quad \text{dans } \mathcal{O}_j, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Nous appliquons les résultats de (P3) deux fois, en remplaçant successivement ω par $\omega \cup \mathcal{O}_1$, puis par $\omega \cup \mathcal{O}_2$, ce qui nécessite deux données correspondantes H_1, H_2 . Le résultat (22) pour (P2), i.e, dans le cas $L = 2$, s'ensuit. Le passage de (P2) à (P1) est assez standard : on commence par agrandir Ω dans une partie de γ , en un ouvert Ω' ; puis on fixe un ouvert $\omega \subset \Omega' \setminus \overline{\Omega}$, et on applique (P2), avec Ω' remplaçant Ω . Les détails sont dans [43].

6. Un problème inverse pour un système parabolique

Le problème inverse précédent est associé à un modèle biologique assez simpliste. Plus réaliste est de remplacer l'équation (1) par un système d'équations paraboliques avec plusieurs inconnues u_1, \dots, u_N , associées respectivement aux conductivités c_1, \dots, c_N , lesquelles peuvent présenter des discontinuités sur les interfaces (respectives) S_1, \dots, S_N . Nous présentons ici un résultat récent avec $N = 2$ en 1D, effectué en collaboration avec M. Cristofol, P. Gaitan, K Niinimäki (voir [25]).

Soit $\Omega =]0, 1[$, $T > 0$, et le système suivant de deux équations paraboliques :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \partial_x(c_1 \partial_x) u_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t u_2 - \partial_x(c_2 \partial_x) u_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + h & \text{dans } \Omega_T, \\ u_j(t, x) = 0 & \text{sur } \Gamma_T, j = 1, 2, \\ u_j(0, x) = u_{0,j}(x) & \text{dans } \Omega, j = 1, 2. \end{cases}$$

Nous supposons les conductivités c_j dans la classe \mathcal{E} des fonctions strictement positives et régulières par morceaux sur $\bar{\Omega} = [0, 1]$. Les coefficients de couplage $a_{j,k} \in L^\infty(\Omega_T)$, $1 \leq j, k \leq 2$ ne sont pas connus, mais nous supposons le couplage fort, i.e,

$$\mathbf{(C-1)} : \quad \exists \delta > 0, \quad |a_{21}| \geq \delta > 0 \text{ et } |a_{12}| \geq \delta > 0 \text{ dans } \omega.$$

Nous posons pour $R > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(R) &= \{ \xi \in \mathcal{E}; \|\xi\|_{\Omega \setminus S^\xi} \|_{W^{1,\infty}(\Omega \setminus S^\xi)} \leq R \}, \\ L_R^2 &= \{ f \in L^2(\Omega); \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq R \}, \end{aligned}$$

Nous nous fixons à nouveau un temps $\theta \in]0, T[$ pour effectuer dans Ω des mesures des solutions du système parabolique, ainsi qu'un intervalle de temps $[0, t_0] \subset [0, \theta[$ pendant lequel nous n'agissons pas sur le système.

Le résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 6.1. (Voir [25]). *Soit $R > 0$, $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathcal{E}^2$. Sous l'hypothèse **(C-1)** il existe alors $C > 0$, $h \in C_c^\infty((t_0, T) \times \omega)$ tels que, pour tout $\mathbf{c} \in \mathcal{E}(R)^2$, $\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0 \in (L_R^2)^2$, nous avons*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\sum_{k=1,2} \|\partial_t^k (u_2 - \tilde{u}_2)\|_{L^2(\omega_{t_0, T})} + \|\partial_t(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t=\theta}\|_{L^2(\omega)} \right. \\ (50) \quad &\left. + \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t=\theta}\|_{H^2(\omega)} + \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t=\theta}\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

REMARQUE 6.1. 1. Cette estimation de $\|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_{L^2(\Omega)}$ est de type Lipschitz, et pas seulement de type Holder $\frac{1}{2}$ comme c'était le cas dans les sections précédentes avec $n \geq 2$. L'amélioration vient de ce que nous ne traitons ici que le cas très particulier $n = 1$. De même, les espaces pour $(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t=\theta}$ sont de bons Sobolev, comparés à ceux du théorème 1.1.

2. Dans (50), le paramètre C ne dépend pas de $\tilde{\mathbf{u}}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{c}$. Il est possible d'exprimer les théorèmes 1.1 et 1.2 similairement.

3. Il n'y a plus dans le terme à droite de (50) la quantité $\|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\|_{L^2(\omega)}$, ce qui est une autre amélioration vis-à-vis de (15), et qui ne vient pas de la restriction à la dimension 1. Mais cela restreint les choix possibles pour l'input h .

7. Perspectives

Dans le cadre de l'équation parabolique avec coefficient de conductivité discontinu et en milieu isotrope, lorsque l'interface $S = \{x : x \in \bar{\Omega}; c \text{ est discontinue en } x\}$ rencontre le bord $\Gamma = \partial\Omega$, il a été montré dans [20], pour le cas où cette rencontre se fait orthogonalement, et en utilisant la méthode des intégrations par parties, qu'une inégalité de Carleman telle que (9) est valide. La conséquence pour le problème inverse (tel que nous l'avons détaillé en

chapitre 2) est directe. Lorsque l'interface rencontre Γ obliquement ou même tangentiellement, ou bien lorsque S présente une singularité du genre "coin" (en dimension $n = 2$), il n'y a pas (à la connaissance de l'auteur) d'inégalité de Carleman prouvée, ni même pressentie. Cette question est donc un vrai point d'interrogation. Dans une telle situation, et au regard du chapitre 2, peut-on se passer d'une inégalité de Carleman pour résoudre le problème inverse ?

Le problème inverse du chapitre 2 a été résolu grâce à l'inégalité de Carleman de l'article [28], où des conditions géométriques aussi lourdes qu'inutiles interviennent, ainsi qu'une condition superflue sur le signe du saut $[c]$ de la conductivité à travers l'interface. De ce point de vue, l'inégalité de Carleman du chapitre 1 n'est pas bien meilleure. Il faut donc refaire la preuve du problème inverse en utilisant l'inégalité de Carleman de [39]. Cependant, la fonction poids de Carleman de [39] ne satisfait pas (dans le cadre le plus général) la condition (32), ni même (19), que nous avons utilisées en section 4.

L'estimation de stabilité obtenue pour le système devrait pouvoir être adaptée au cas multidimensionnel, en utilisant aussi l'inégalité de Carleman de [39], à condition que l'union des interfaces des conductivités soit un ensemble assez régulier. Ceci ramène à la question précédente, de trouver une inégalité de Carleman avec interface singulière.

De plus, le cas de multiples équations ($N > 2$) ne peut se déduire directement du cas $N = 2$.

La question d'une inégalité de stabilité *globale* pour $c - \tilde{c}$ se pose : peut-on avoir une version du théorème (1.1) dans laquelle les inputs h_1, \dots, h_l ne dépendent pas (trop) de \tilde{c} ? Il est difficile de croire que oui car ces données choisies dépendent de \tilde{c} via la fonction poids de Carleman adaptée pour les singularités de \tilde{c} .

Problème de Calderón parabolique

1. Introduction

Dans le problème inverse du chapitre 2, nous avons supposé possible une mesure globale de la solution u dans Ω à un instant donné θ . Ceci n'est évidemment pas très réaliste, en tout cas pour un modèle biologique. Se priver d'une telle hypothèse mène à poser un problème inverse comme celui de Calderón (voir [24]), très repris en tomographie inverse : l'équation linéaire à traiter est stationnaire, i.e., la fonction u qui représente une température, ne dépend que de $x \in \Omega$ et satisfait $\operatorname{div}(c\nabla u) = 0$. Le problème inverse de Calderón peut se poser dans le cadre instationnaire à partir de l'équation parabolique $\partial_t u - \operatorname{div}(c\nabla u) = 0$ dans le cylindre $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$, où Ω est le domaine spatial, borné en général. Nous considérons dans ce chapitre deux situations : la première, où c ne dépend pas du temps, la deuxième, nettement, plus difficile, où $c = 1 + (k^2 - 1)\chi_D$ dépend du temps via l'ensemble $D = \cup_{0 \leq t \leq T} \{t\} \times D(t)$, où $D(t)$ modélise l'inclusion au temps t . Pour obtenir des informations sur la conductivité c , nous avons recours à une infinité de mesures de la température u sur une partie du bord, $\Gamma' \subset \Gamma = \partial\Omega$, ainsi que la donnée du flux ($c\partial_n u$) à travers Γ' . Malgré cela, la stabilité sur la conductivité c ou sur l'inclusion - démontrée en théorie ou estimée numériquement - n'est jamais meilleure que logarithmique. Voir par exemple [27] pour l'étude théorique de la stabilité de l'inclusion. En ce qui concerne une méthode de reconstruction d'une partie de l'inclusion indépendante du temps, les résultats numériques dans [33] sont mitigés, car s'il y a la situation, assez favorable, lorsque l'inclusion est proche du bord Γ , il y a celle, très défavorable, où l'inclusion est éloignée du bord. Dans ces deux cas-là, ou bien lorsque l'inclusion n'est pas une petite déformation d'un convexe, il n'y a pas de bonne méthode de reconstruction pour l'instant (à ma connaissance). La situation se complique beaucoup si nous supposons l'inclusion (et donc, la conductivité) dépendant aussi du temps, car elle fait échouer certaines estimations cruciales des solutions de l'équation parabolique. Pour reconstruire une inclusion convexe dépendant du temps, j'ai utilisé la vieille technique de l'ansatz, qui s'appuie sur une inégalité d'énergie assez classique. Cependant, le constat du résultat numérique oblige à revoir la méthode de reconstruction : voir [31]. De plus, la technique de l'ansatz devient vite très pesante lorsque le comportement des solutions u tend à se compliquer : penser à une onde plane diffractée qui se transmet ou se réfléchit de multiples fois à travers ou sur l'interface S , ou sur le bord Γ . Le cas d'une inclusion non convexe et mouvante reste donc à faire.

2. Conductivité stationnaire

Nous considérons les équations suivantes

$$(51) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (c(x)\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u = f & \text{on } \Gamma_T, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n avec un bord de régularité Lipschitz, la fonction $c(x)$ est de la forme $c(x) = c_0(x) + (c_1(x) - c_0(x))\chi_D$, où l'ouvert D ne touche pas Γ , n'est ni nécessairement connexe ni régulier. Nous supposons la fonctions c_0 régulière, et les fonctions $c, 1/c, c_0, 1/c_0, c_1, 1/c_1$ dans $L^\infty(\Omega)$, et le signe $c_1 - c_0$ constant dans D . Pour pouvoir distinguer D , nous faisons l'hypothèse suivante :

$$(A) \quad \inf_{x \in K} |c(x) - c_0(x)| > 0 \text{ pour tout compact } K \subset D.$$

Le cas où $c_1(x) = c_0(x)$, pour des valeurs $x \in \partial D$, est donc autorisé.

La solution unique de (51) est notée $u = U(f, u_0)$. Le principe pour la reconstruction de D est de construire des fonctions réelles (en 1D) ou complexes (en multidimensionnel) $\varphi_\lambda(x)$, avec un grand paramètre $\lambda > 0$, qui, d'une part, satisfont la relation

$$(52) \quad (-\nabla \cdot (c_0 \nabla) + \lambda) \varphi_\lambda(x) = 0, \quad \lambda \gg 1,$$

pour $x \in \Omega$ et même au-delà, en prolongeant la fonction c_0 régulièrement dans \mathbb{R}^n , avec $c_0(x) = 1$ pour $|x|$ assez grand, et, d'autre part, sont localisées au sens suivant. Pour la dimension $n = 1$, étant arbitrairement fixé un réel x_0 , nous demandons la propriété suivante :

(C(x_0)) Pour tout compact $K_- \subset (-\infty, x_0)$, et $K_+ \subset (x_0, \infty)$, il existe des constantes $C, \delta > 0$ telles que, pour tout $\lambda > C$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(x)| &\geq C e^{\delta\sqrt{\lambda}}, & |\varphi'_\lambda(x)| &\geq C e^{\delta\sqrt{\lambda}}, & \forall x \in K_-, \\ |\varphi_\lambda(x)| &\leq C e^{-\delta\sqrt{\lambda}}, & |\varphi'_\lambda(x)| &\leq C e^{-\delta\sqrt{\lambda}}, & \forall x \in K_+. \end{aligned}$$

Pour les dimensions supérieures, $n \geq 2$, nous introduisons les notations suivantes. Désignons par $\text{dist}(x_0, A)$, la distance entre un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, par $B(x_0, R)$ la boule ouverte $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < R\}$. Etant fixés x^* un point dans $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, une boule $B \subset \mathbb{R}^n$ centrée en un point x_0 , et dont le bord contient x^* , nous posons

$$a_B(\mathcal{O}) = \begin{cases} \sup_{x \in \mathcal{O}} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - x^*|^2} & \text{si } \mathcal{O} \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{si } \mathcal{O} = \emptyset. \end{cases}$$

Fixons un autre paramètre $\mu > 0$ assez petit (voir condition (55) ultérieure), nous demandons sur φ_λ les propriétés suivantes :

— Pour tous compacts $K_- \subset B, K_+ \subset \overline{B}^c$, il existe des constantes $C, \delta > 0$ telles que, pour tout $\lambda > C$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(x)| &\geq C e^{\delta\lambda}, & |\nabla_x \varphi_\lambda(x)| &\geq C e^{\delta\lambda}, & \forall x \in K_-, \\ |\varphi_\lambda(x)| &\leq C e^{-\delta\lambda}, & |\nabla_x \varphi_\lambda(x)| &\leq C e^{-\delta\lambda}, & \forall x \in K_+, \end{aligned}$$

— Pour tout $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$,

$$\sqrt{2\mu\lambda} \log \int_{\mathcal{O}} |\nabla \varphi_\lambda(x)|^2 dx \rightarrow a_B(\mathcal{O}) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty.$$

Comme nous avons besoin de répéter l'expérience - jeu d'inputs et d'outputs sur (une partie de) Γ_T - avec un grand paramètre $\lambda > 0$, nous supposons que la donnée initiale u_0 n'est pas connue mais satisfait l'estimation suivante :

(C- λ) *Il existe des constantes positives C_0, T_0 indépendantes de λ , avec $T_0 < T$ et telles que $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{\lambda T_0}$.*

Nous obtenons pour le cas $n = 1$ le

THÉORÈME 2.1. (Voir [33]). *Soit $n = 1$, $\Omega = (a, b)$, $D = (a_1, b_1)$ avec $a < a_1 < b_1 < b$. Supposons **(C- λ)** et fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrairement. Alors*

(1) *Il existe une fonction réelle $\varphi_\lambda(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, dépendant d'un grand paramètre $\lambda > 0$ et satisfaisant (52), **(C(x_0))**.*

(2) *Fixons $T_1 \in (T_0, T]$ arbitrairement, et soit*

$$\begin{aligned} h_\lambda(a) &= \varphi_\lambda(a), & h_\lambda(b) &= 0, \\ f_\lambda(t, x) &= e^{\lambda t} h_\lambda(x), & \text{pour } x &= a, b, \end{aligned}$$

$$I(\lambda) = e^{-\lambda T_1} (c_0(a) \partial_x U(f_\lambda, u_0))(T_1, a) h_\lambda(a) - c_0(a) \frac{dh_\lambda}{dx}(a) h_\lambda(a).$$

Alors, si $\pm(c - c_0) > 0$ dans D , nous avons $\pm I(\lambda) > 0$ pour λ assez grand, et

$$(53) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (2\sqrt{\lambda})^{-1} \log(|I(\lambda)|) = -y(a_1),$$

où $y(x)$ est défini par

$$(54) \quad y(x) = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{c_0(z)}}.$$

L'asymptotique dans (53) montre donc qu'on peut reconstruire $y(a_1)$ - ce qui revient à a_1 - à partir des mesures en $x = a$, soit $\Gamma' = \{a\}$.

Pour les dimensions supérieures, nous obtenons le

THÉORÈME 2.2. (Voir [33]). *Supposons $2 \leq n \leq 7$. Fixons une boule B de rayon $R > 0$, de centre x_0 , telle que son bord contienne le point $x^* \in \partial B \setminus \bar{\Omega}$. Alors :*

(1) *Il existe une fonction à valeurs complexes $\varphi_\lambda(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x^*\})$ dépendant de $\mu > 0$ et du grand paramètre $\lambda > 0$, satisfaisant (52) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 < |x - x^*| < 2\sqrt{\lambda}R$,*

(2) *Posons*

$$\frac{1}{\mu_B} = \begin{cases} \sqrt{2}a_B(\Omega) & \text{if } \Omega \subset B, \\ \sqrt{2} \left(a_B(\Omega) + \sup_{x \in \Omega \setminus B} \frac{|x - x_0|^2 - R^2}{|x - x^*|^2} \right) & \text{si } \Omega \not\subset B. \end{cases}$$

Supposons **(C- λ)** et que B satisfasse

$$(C-1a) \quad \emptyset \neq \bar{B} \cap \partial\Omega \subset \Gamma',$$

$$(C-1b) \quad B \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Fixons une constante positive $T_1 \in (T_0, T]$ et supposons que

$$(55) \quad 0 < \mu < \frac{(T_1 - T_0)\mu_B}{\frac{\sqrt{2}}{2}a_B(\Omega)\mu_B + 1}.$$

Posons

$$h_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x)|_{\Gamma'}, \quad f_\lambda(t, x) = e^{\lambda t} h_\lambda(x).$$

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ dans un voisinage de \overline{B} , $\chi = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma'$. (Si $\Gamma' = \Gamma$ nous posons $\chi = 1$). Posons

$$I(\lambda) = \int_{\Gamma'} c_0(x) \left(e^{-\lambda T_1} \partial_\nu U(f_\lambda, u_0)(\chi f_\lambda)(T_1, x) - \partial_\nu \varphi_\lambda(x) \right) \chi \overline{h_\lambda(x)} d\sigma(x),$$

$d\sigma(x)$ étant la mesure induite sur Γ . Sous la condition **(C- λ)** nous avons la conclusion suivante

- (1) Si $\pm(c - c_0) > 0$ dans D , nous avons $\pm I(\lambda) > 0$ pour λ assez grand.
- (2) Si $a_B(\{\chi \neq 0\} \cap D) \leq a_B(\{\chi \neq 1\})$ alors $I(\lambda)$ tend exponentiellement vers 0 quand $\lambda \rightarrow \infty$ et

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} (\sqrt{2\mu\lambda})^{-1} \log(|I(\lambda)|) \leq a_B(\{\chi \neq 1\}) < 0.$$

- (3) Si $a_B(\{\chi \neq 0\} \cap D) > a_B(\{\chi \neq 1\})$ alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\sqrt{2\mu\lambda})^{-1} \log(|I(\lambda)|) = a_B(D).$$

Par ce Théorème 2.2 nous pouvons voir si B touche ou non D . En effet, en corollaire de ceci, nous avons le

COROLLAIRE 2.1. (Voir [33]). (1) Si $R < \text{dist}(x_0, \partial D)$, alors $I(\lambda)$ tend exponentiellement vers 0 quand $\lambda \rightarrow \infty$.

(2) Si $R > \text{dist}(x_0, \partial D)$, alors $|I(\lambda)|$ tend exponentiellement vers ∞ .

(3) Si $R = \text{dist}(x_0, \partial D)$, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\sqrt{2\mu\lambda})^{-1} \log(|I(\lambda)|) = 0.$$

3. Idées de preuves

Le cas $n = 1$ n'est pas très difficile. L'équation (52) est transformée en

$$(56) \quad \phi''(y) - 2\sqrt{\lambda}\phi'(y) - Q(y)\phi(y) = Q(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

où $\phi(y) = c_0^{\frac{1}{4}}(x)e^{\sqrt{\lambda}y}\varphi_\lambda(x) - 1$, $y = y(x)$ est défini par (54), et $Q(y)$ est une fonction régulière et à support compact dans \mathbb{R} . L'équation (56) possède alors une unique solution ϕ régulière telle que $\phi, \phi' \in L^1(-\infty, A]$ pour tout $A > 0$. La conclusion suit pour $n = 1$.

Considérons le cas $n \geq 2$. Nous cherchons des solutions de (52) sous la forme

$$\varphi_\lambda(x) = |x - x^*|^{2-n} c_0(x)^{-1/2} (1 + \phi_\lambda(x)) e^{-\zeta \cdot y(x)},$$

où $y = y(x)$ est l'inversion définie par

$$y = y^* + 2R \frac{x - x^*}{|x - x^*|^2},$$

le vecteur complexe $\zeta \in \mathbf{C}^n$ est défini par

$$\zeta = \frac{\mu\lambda}{\sqrt{2}} (y^* + iy_\perp^*),$$

et $y^*, y_\perp^* \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs réels tels que

$$y^* = \frac{x^* - x_0}{|x^* - x_0|}, \quad y^* \cdot y_\perp^* = 0, \quad |y_\perp^*| = 1,$$

La fonction ϕ_λ est alors solution de

$$-\Delta\phi_\lambda + 2\zeta \cdot \nabla\phi_\lambda + q_\lambda\phi_\lambda = -q_\lambda,$$

où le potentiel $q_\lambda(y)$, bien que régulier dans $\mathbb{R}^n \setminus \{y^*\}$, croit linéairement selon λ . Pour se ramener au problème connu analogue dans l'article [?], nous posons la dilatation

$$Y = \sqrt{\lambda}(y - y^*), \quad \eta = (\sqrt{\lambda})^{-1}\zeta.$$

La fonction $\Phi(Y) = \phi(y)$ est alors solution de

$$-\Delta_Y\Phi + 2\eta \cdot \nabla_Y\Phi + Q_\lambda\Phi = -Q_\lambda,$$

où le nouveau potentiel $Q_\lambda(Y)$, bien que singulier en $Y = 0$ est borné selon λ . Ceci permet d'établir l'existence (et unicité) d'une solution $\phi_\lambda \in L^{2,\sigma}(|y - y^*| > 1/\sqrt{\lambda})$, pour tout $\sigma \in]-1, \min(0, \frac{6-n}{2})[$ ¹.

Le deuxième point essentiel est de ramener (51) à sa version elliptique, puisque c est indépendant de t et que la donnée au bord est f_λ de la forme $e^{\lambda t}h_\lambda(x)$. En effet, pour $t \geq T_1$, la solution $U(f_\lambda, u_0)(t, x)$ est suffisamment proche de la solution $V(h_\lambda)(x)$ de

$$(57) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (c(x)\nabla v) + \lambda v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = h_\lambda & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On peut alors utiliser la double inégalité suivante :

$$(58) \quad \frac{1}{C} \int_{\Omega} |c_1 - c_0| |\nabla\varphi_\lambda(x)|^2 dx \leq \left| \int_{\Gamma} \partial_\nu(V(h_\lambda) - \varphi_\lambda)(x)\varphi_\lambda(x) d\sigma(x) \right| \leq C \int_{\Omega} |c_1 - c_0| |\nabla\varphi_\lambda(x)|^2 dx,$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de λ . La fin de la preuve s'ensuit.

4. Conductivité instationnaire

Ici nous supposons c dépendant de t et sous la forme

$$c(t, x) = 1 + (k^2 - 1)\chi_D(t, x),$$

où $k > 0$, $k \neq 1$ est une constante, $D = \cup_{[0, T]} \{t\} \times D(t)$, $D(t)$ étant un ouvert de Ω et $t \mapsto D(t)$ est une fonction régulière. Nous nous limitons au cas 1D : $\Omega =]0, 1[$. Supposons donc $D(t) = (0, a(t))$ où $a(t) \in C^2([0, T])$ est telle que

$$0 < \inf_{0 < t < T} a(t) \leq \sup_{0 < t < T} a(t) < 1,$$

Le problème parabolique s'écrit

$$(59) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x (c(t, x)\partial_x u(t, x)) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u(t, 0) = f_0(t), \quad u(t, 1) = f_1(t) & \text{pour } 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Les mesures sont effectuées au point $x = 1$, mais nous traitons les deux cas suivants pour les inputs :

Case 1: $f_0 = 0$.

Case 2: $f_1 = 0$.

1. Ce qui explique la restriction $n < 8$.

Pour le cas 1, nous imposons donc $f_1(t)$ de la forme

$$f_1(t) = h_{\text{fw}}(t, 1; \lambda),$$

tandis que pour le 2eme cas, nous imposons

$$f_0(t) = h_{\text{fw}}(t, 0; \lambda),$$

où nous considérons les fonctions

$$h_{\text{fw}}(t, x; \lambda) = e^{\lambda t + \sqrt{\lambda}x}, \quad h_{\text{bw}}(t, x; \lambda) = e^{-\lambda t + \sqrt{\lambda}x},$$

qui sont solutions des équations de la chaleur en avant et en arrière, respectivement :

$$(\partial_t - \partial_x^2) h_{\text{fw}} = 0, \quad (\partial_t + \partial_x^2) h_{\text{bw}} = 0.$$

Comme à ma connaissance dans ce cadre personne n'a réussi à obtenir version de l'inégalité (58) pour le cas parabolique, une bonne méthode reste celle de l'ansatz. La forme particulière des données $f_j(t)$ est propice au calcul direct de la solution $u = U_j(u_0, \lambda)$ de (59), avec $j = 1, 2$ selon le cas traité, au moins au temps $t > 0$. En étudiant les ondes réfléchies et transmises par l'interface $x = a(t)$, nous pouvons écrire les solutions approchées de (59) assez simples qui suivent. Nous présentons par la suite le cas 1 seul. Le cas 2, similaire dans le traitement, nécessite un ansatz un peu plus compliqué. Nous posons

$$u^A(t, x; \lambda) = e^{\sqrt{\lambda}a} \begin{cases} \frac{2}{k+1} e^{(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})\dot{a})\frac{x-a}{k}} & \text{sur } (0, a(t)), \\ e^{\sqrt{\lambda}(x-a)} + \frac{1-k}{1+k} \{e^{(\sqrt{\lambda}+\dot{a})(a-x)} - e^{(\sqrt{\lambda}+\dot{a})(x+a-2)}\} & \text{sur } (a(t), 1), \end{cases}$$

où nous avons noté $a = a(t)$, $\dot{a} = \partial_t a(t)$. Pour montrer que u^A diffère peu de $U_1(u_0, \lambda)$, nous avons besoin de l'estimation d'énergie qui suit, assez standard, qu'il faut lire comme l'estimation de $\partial_x(u^A - U_1(u_0, \lambda))|_{\Gamma}$ en norme $L^1(\Gamma; \varphi_\lambda d\sigma(x))$. Posons

$$\begin{aligned} I_-(t) &= (0, a(t)), & I_+(t) &= (a(t), 1), \\ \mathcal{D}_\pm &= \{(t, x); 0 < t < T, x \in I_\pm(t)\}, \\ [f]_{a(t)} &= f(a(t) + 0) - f(a(t) - 0). \end{aligned}$$

Nous avons le

LEMME 4.1. (Voir [31]). Soit $U = U(t, x) \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ telle que

$$U(t)|_{I_\pm(t)} \in H^2(I_\pm(t)), \quad \partial_t(U(t)|_{I_\pm(t)}) \in L^2(I_\pm(t)), \quad 0 < t \leq T.$$

Supposons que U soit solution de l'équation

$$(60) \quad \partial_t U - \text{div}_x(c(t, \cdot) \nabla_x U) = F \quad \text{dans } L^2(\mathcal{D}_\pm),$$

et satisfait les relations

$$\begin{cases} U(t, a(t) + 0) = U(t, a(t) - 0) & \text{dans } L^2(0, T), \\ U(t, 0) = U(t, 1) = 0, & \text{dans } L^2(0, T), \end{cases}$$

où $F = F(t, x) \in L^2(\Omega_T)$.

Soit H une fonction continue et positive dans $\overline{\Omega_T}$, avec $H \in C^2(\overline{\mathcal{D}_+}) \cap C^2(\overline{\mathcal{D}_-})$, satisfaisant

$$[H]_{a(t)} = [c \partial_x H]_{a(t)} = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et supposons qu'il existe une constante réelle K telle que

$$-\partial_t H - \operatorname{div}_x(c(t, \cdot) \nabla_x H) \geq KH \quad \text{dans } \Omega_T.$$

Nous posons

$$E(U, H; t) = \int_0^1 |U(t, x)| H(t, x) dx.$$

Alors, nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} E(U, H; T) + \int_0^T e^{K(t-T)} |U'(t, 1)| H(t, 1) dt \\ \leq e^{-KT} E(U, H; 0) + \iint_{\Omega_T} e^{K(t-T)} |F(t, x)| H(t, x) dt dx \\ + \int_0^T e^{K(t-T)} |[c(t, x)U'(t, x)]_{a(t)}| H(t, a(t)) dt. \end{aligned}$$

Nous utilisons ce lemme avec $K = \nu\sqrt{\lambda}$, où $\nu < \sqrt{\lambda}$ est un réel tel que

$$\nu > \max\left(\frac{2}{T}, \max(2, |1-k|, \left|1 - \frac{1}{k}\right|) \sup_{0 < t < T} |\dot{a}(t)|\right).$$

La fonction H choisie est un ansatz de $e^{-\lambda t} v(t, x)$, où $v(t, \cdot)$ est la solution du problème elliptique (57) avec $\sqrt{\lambda}$ remplacé par $\sqrt{\lambda} - \nu$. Il résulte de l'expression de cet ansatz que $\partial_t H + \lambda H = O((\sqrt{\lambda} - \nu)\dot{a})H$, de sorte que H est aussi ansatz pour le problème parabolique adjoint :

$$\begin{cases} -\partial_t u^* - \nabla \cdot (c(x) \nabla u^*) - \sqrt{\lambda} \nu u^* \geq C(\sqrt{\lambda} - \nu) |\dot{a}| u^* & \text{dans } \Omega_T, \\ u^*(t, x) = e^{-\lambda t} h_{(\sqrt{\lambda} - \nu)^2}(x) & \text{sur } \Gamma_T. \end{cases}$$

Avec ceci et l'ansatz u^A plus haut, nous obtenons le

THÉORÈME 4.1. (Voir [31]). Soit le cas 1. Soit la fonction

$$I_{\text{ind}}(T; \lambda) = \int_0^T e^{\sqrt{\lambda} \nu t} h_{\text{bw}}(t, 1; \lambda) \partial_x (u(t, x; \lambda) - h_{\text{fw}}(t, x; \lambda)) \Big|_{x=1} dt.$$

Alors pour $\lambda \rightarrow \infty$ nous avons l'asymptotique

$$I_{\text{ind}}(T; \lambda) \simeq \frac{2(k-1)}{(k+1)(\nu + 2\dot{a}(T))} e^{\sqrt{\lambda} \nu T + 2\sqrt{\lambda} a(T) - \dot{a}(T)(1-a(T))}.$$

Les valeurs des $I_{\text{ind}}(t; \lambda)$, $t \in]0, T]$, sont obtenues par les mesures et permettent donc de déterminer $a(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, puisque la fonction a est continue sur $[0, T]$, puis la valeur de k .

Pour le cas 2, nous supposons que le paramètre ν satisfait

$$\nu > \max\left(\left(3 + \left|1 - \frac{1}{k}\right|\right)/T, \sup_{0 < t < T} |\dot{L}_1(t)|\right),$$

où nous avons posé $L_1(t) := (1 - \frac{1}{k})a(t)$. Nous obtenons le

THÉORÈME 4.2. (Voir [31]). Posons

$$\widetilde{I}_{\text{ind}}(T; \lambda) = \int_0^T e^{\sqrt{\lambda} \nu t} h_{\text{bw}}(t, 1; \lambda) \partial_x u(t, x; \lambda) \Big|_{x=1} dt.$$

Alors pour tout $\lambda \rightarrow \infty$, nous avons

$$(61) \quad \widetilde{I}_{\text{ind}}(\lambda; T) \simeq -\frac{4k}{k+1} \frac{1}{\nu + \dot{L}_1(T)} e^{\sqrt{\lambda} \nu T + \sqrt{\lambda} L_1(T) - \frac{1}{2} \dot{L}_1(T)(1-a(T))}.$$

REMARQUE 4.1. *Les symboles \simeq peuvent être précisés : l'erreur relative sur $I_{\text{ind}}(\lambda; T)$ et $\widetilde{I}_{\text{ind}}(\lambda; T)$ est un $O(\lambda^{-1})$.*

Les valeurs des $\widetilde{I}_{\text{ind}}(\lambda; t)$, $t \in]0, T]$, sont obtenues par les mesures et permettent donc de déterminer $L_1(t)$ ainsi que $\frac{4k}{k+1}e^{-\frac{1}{2}\dot{L}_1(t)(1-a(t))}$. Contrairement au cas 1, nous ne pouvons pas en déduire le couple $(k, a(\cdot))$ de façon univoque. Une petite étude élémentaire mène au

COROLLAIRE 4.1. *(Voir [31]). Pour toute donnée initiale $u_0(x) \in L^2(0, 1)$, nous pouvons déterminer les fonctions $L_1(t)$, $\xi(t) = \frac{1}{2}\dot{L}_1(t)L_1(t)$, et $F := \frac{k}{k+1}e^{\frac{k}{k-1}\xi(t)}$, $0 < t < T$, à partir des données du problème de Calderón parabolique du cas 2. De plus, le couple $(k, a(t))$ ne peut prendre qu'au plus deux valeurs.*

Remarque : des précisions sur k selon les valeurs de ξ et de F peuvent être apportées. Voir [31].

5. Perspectives

Les données imposées sur le bord du domaine ne sont pas réalistes, car croissent exponentiellement avec t . Cela nécessite de traiter réellement l'équation parabolique avec le noyau de la chaleur, et ne plus pouvoir revenir à l'équation elliptique : l'analyse devient plus ardue, comme c'était déjà visible dans les articles [29, 27, 26].

Pour l'inclusion non stationnaire, le cas multidimensionnel peut être traité similairement au cas 1D, avec la méthode de l'ansatz, à condition de supposer $D(t)$ régulier et strictement convexe. Voir [32]. Pour d'autres géométries, ou si $D(t)$ n'est pas régulier dans Ω , les méthodes actuelles de reconstruction ne s'adaptent pas.

Des projets de recherche analogues peuvent se placer dans le cadre similaire de travail où la conductivité est connue, vaut un, mais une partie inconnue du domaine Ω varie avec le temps, par exemple pour l'étude de la corrosion. Il s'agit de reconstruire cette partie du domaine ainsi que, éventuellement la condition au bord à cet endroit. Pour des résultats d'unicité, voir par exemple [37], des résultats de stabilité, voir [44], [18]. Pour une méthode de reconstruction par enveloppement ("enclosure method"), voir [36].

L'étude du problème de Calderón pour l'équation hyperbolique est en cours. De même que dans le cas parabolique, il est difficile de trouver un bon moyen assez général pour reconstruire l'inclusion si elle dépend du temps. La méthode de l'ansatz constitue alors encore un bon début.

Bibliographie

- [1] P. Blekher, *On operators depending meromorphically on a parameter*, Vestnik Moskovskogo Univ., **194** (5) : 30-36 (1969).
- [2] Tark Bouhennache, *Spectral Analysis of an isotropic stratified elastic strip and applications*, Osaka J. Math., **37** : 577-601 (2000).
- [3] A. Boutet de Monvel, D. Manda, *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*, J. Math. Anal. and Appl., **191** : 137-167 (1995).
- [4] M. Buslaeva, *Application of scattering theory to one problem of hydrodynamics*, Notes of Scientific Seminars of LOMI, Problems of quantum field theory and statistics : 57-75 (in russian) (1978).
- [5] E. Croc and Y. Dermenjian, *Analyse Spectrale d'une bande acoustique multistratifiée I : Principe d'absorption limite pour une stratification simple*, SIAM J. Math. Anal., **26** (4) : 880-924 (1995).
- [6] E. Croc and Y. Dermenjian, *Spectral analysis of a multistratified acoustic strip, part II : Asymptotic behaviour of acoustic waves in a stratified strip*, SIAM J. Math. Anal., **27** (6) : 1631-1652 (1996).
- [7] E. Croc and Y. Dermenjian, *Spectral Analysis of a Multistratified Acoustic Strip, part III : Distribution of Eigenvalues and Perturbative Method*, Technical Report J.E 180, Université de Provence, Marseille, n°6 (1995).
- [8] Y. Dermenjian and O. Poisson and B. Vainberg, *Resonances for Multistratified Acoustic Waveguides*, Applicable Analysis, **71** : 413-440 (1999).
- [9] D. S. Jones, *The eigenvalues of $\Delta u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains*, Proc. Cambridge Soc., **49** : 668-684 (1953).
- [10] P. Lax and R. Phillips, *Scattering theory*, Academic press, New-York (1967).
- [11] R. B. Melrose, *Geometric Scattering Theory (Stanford Lectures)* Cambridge Univ. Pr. (1995).
- [12] J.C. Nedelec and F. Starling, *Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time harmonic Maxwell's equations*, Technical Report C.M.A.P, Ecole Polytechnique, **179** (1988).
- [13] O. Poisson, *Bound on the Counting Function for the Eigenvalues of an Infinite Multistratified Acoustic Strip*, Math. Meth. Appl. Sci, **22** : 773-790 (1999).
- [14] B. Vainberg, *Scattering by periodically moving obstacles*, Math. USSR Sbornik, **73** : 289-304 (1992).
- [15] R. Weder, *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*, Springer-Verlag, N.-Y., Appl. Math. Sciences, **87** (1991).
- [16] P. Werner, *Resonance Phenomena in Local Perturbations of Parallel-plane Waveguides*, Math. Meth. in the Appl. Sci., **19** : 773-823 (1996).
- [17] S. Fliss and P. Joly, *Wave propagation in locally perturbed periodic media (case with absorption) : Numerical aspects*, Journal of Computational Physics, **231**(4) : 1244-1271 (2012).
- [18] V. Bacchelli, M. Di Cristo, E. Sincih, and S. Vessella, *A parabolic inverse problem with mixed boundary data. Stability estimates for the unknown boundary and impedance*, Trans. of the A.M.S., S 0002-9947(2014)05807-8, **366** (8) : 3965-3995 (2014).

- [19] L. Baudoin and J-P. Puel, *Uniqueness and Stability in an Inverse Problem for the Schrödinger Equation*, Inverse Problems, **18** : 1537-1554 (2002).
- [20] A. Benabdallah, Y. Dermenjian and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for stratified media*, J. Funct. Anal., 260 : 3645-3677 (2011).
- [21] A. Benabdallah, Y. Dermenjian and L. Thevenet, *Carleman Estimates for Some Non-Smooth Anisotropic Media*, Communications in Partial Differential Equations, 38 :10, 1763-1790 (2013), DOI : 10.1080/03605302.2013.804552.
- [22] A. Benabdallah, P. Gaitan and J. Le Rousseau, *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, **46** : 1849-1881 (2007).
- [23] A.L. Bukhgeim and M.V. Klivanov, *Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems*, Soviet Math. Dokl., **24** : 244-247 (1981).
- [24] A. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Rio de Janeiro, Editors W.H. Meyer and M.A. Raupp, Sociedade Brasileira de Matematica : 65-73 (1980).
- [25] M. Cristofol, P. Gaitan, K. Niimaki, O. Poisson, *Inverse problem for a coupled parabolic system with discontinuous conductivities : One-dimensional case*, Inverse Problems and Imaging, **7**(1) : 159-182 (2013).
- [26] Y. Daido, H. Kang and G. Nakamura, *A probe method for the inverse boundary value problem of non-stationary heat equations*, Inverse Problems, **23** : 1787-1800 (2007).
- [27] M. Di Cristo and S. Vessella, *Stable Determination of the Discontinuous Conductivity Coefficient of a Parabolic Equation*, arXiv :0904.0296 : 36 pages (2009).
- [28] A. Doubova, A. Osses and J.-P. Puel, *Exact Controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients*, ESAIM COCV, **8** : 621-661 (2002).
- [29] A. Elayyan and V. Isakov, *On uniqueness of the recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation*, SIAM. J. Math. Anal., **28** (1) : 49-59" (1997).
- [30] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Seoul National University, Korea (Lecture Notes), **34** (1996).
- [31] P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Inverse problems for a time-dependent singular heat conductivities - One-dimensional case*, SIAM J. Math. Analysis **45**(3) : 1675-1690 (2013).
- [32] P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Inverse problems for a time-dependent singular heat conductivities - Multi-dimensional case*, à paraître dans Communications in Partial Differential Equations (2014 ?).
- [33] P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Probing for inclusions in heat conductive bodies*, Inverse Problems and Imaging, **6** (3) : 423-446 (2012).
- [34] O.Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, *Carleman estimates for the non-stationary Lamé system and the application to an inverse problem*, ESAIM COCV, **11** : 1-56 (2005).
- [35] M.Ikehata, *Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case*, Applicable Analysis, **86** : 963-1005 (2007).
- [36] M. Ikehata and M. Kawashita, *The enclosure method for the heat equation*, Inverse Problems, **25** 075005 (2009).
- [37] H. Kawakami and M. Tsuchiya, *Uniqueness and shape identification of a time-varying domain and related parabolic equation on non-cylindrical domains*, Inverse Problems, **26** 125007 (2010).
- [38] N. Lerner and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for anisotropic elliptic operators with jumps at an interface*, Anal. PDE, à paraître, 46 pages.
- [39] J. Le Rousseau and L. Robbiano, *Local and Global Carleman estimates for parabolic operators with coefficients with jumps at interfaces*, Invent. Math. : 245-336 (2010).

- [40] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, **1**, Dunod, Paris (1968).
- [41] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, A.M.S., **44**, Springer-Verlag, New York (1984).
- [42] O. Poisson, *Carleman Estimates for the Heat equation with discontinuous diffusion coefficients*, *Applicable Analysis*, **87**, n°10–11 : 1129-1144 (2008).
- [43] O. Poisson, *Uniqueness and Hölder stability of discontinuous diffusion coefficients in three related inverse problems for the heat equation*, *Inverse Problems*, **24** : 32 pages (2008).
- [44] S. Vessella, *Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates*, doi :10.1088/0266-5611/24/2/023001, *Inverse Problems*, **24** (2) 023001 (2008).
- [45] M. Yamamoto and G. Yuan, *Lipschitz stability in the determination of principal parts of a parabolic equation*, *ESAIM : Control Opt and Calc. Var.*, **15**(03) : 525-554 (2009).
- [46] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo (1989).

Publications de l'auteur

Compte-Rendu à l'Académie des Sciences

O. Poisson, *Calcul des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle en dimension deux*, C.R.A.S., **315**(I) : 747-752 (1992).

Articles parus dans des revues internationales avec comité de lecture

- (1) Y. Dermenjian, O. Poisson and B. Vainberg, *Resonances for Multistratified Acoustic Waveguides*, *Applicable Analysis*, **71** : 413-440 (1999).
- (2) O. Poisson, *Bound on the Counting Function for the Eigenvalues of an Infinite Multistratified Acoustic Strip*, *Math. Meth. Appl. Sci*, **22** : 773-790 (1999).
- (3) O. Poisson, *Carleman Estimates for the Heat equation with discontinuous diffusion coefficients*, *Applicable Analysis*, **87**, n°10-11 : 1129-1144 (2008).
- (4) O. Poisson, *Uniqueness and Hölder stability of discontinuous diffusion coefficients in three related inverse problems for the heat equation*, *Inverse Problems* **24** : 32 pages (2008).
- (5) P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Probing for inclusions in heat conductive bodies*, *Inverse Problems and Imaging*, **6**(3) : 423 - 446 (2012).
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516771/fr/>
- (6) P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Inverse problems for a time-dependent singular heat conductivities - One-dimensional case*, *SIAM J. Math. Analysis* **45**(3) : 1675-1690 (2013).
- (7) M. Cristofol, P. Gaitan K. Niinimaki and O. Poisson *Inverse problem for a coupled parabolic system with discontinuous conductivities : One-dimensional case*, *Inverse Problems and Imaging*, **7**(1) : 159 - 182 (2013).
- (8) P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminen, *Inverse problems for a time-dependent singular heat conductivities - Multi-dimensional case*, à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations* (2014?).