



**HAL**  
open science

# Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques

D.M. Tran

► **To cite this version:**

D.M. Tran. Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON (INSA); UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1, 2015. tel-01247949

**HAL Id: tel-01247949**

**<https://hal.science/tel-01247949>**

Submitted on 23 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° Identificateur: HDR 2015 008

Année 2015

# HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon  
et l'Université Claude Bernard Lyon I

## Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques

Spécialité : Mécanique

Par

**TRAN Duc Minh**

Soutenue le 25 Novembre 2015 devant la Commission d'examen

---

Mme. Thouraya Nouri Baranger	MCF-HDR, Université Claude Bernard Lyon I	Examinatrice
M. Georges Jacquet-Richardet	Professeur, INSA Lyon	Examineur
M. Daniel Nélias	Professeur, INSA Lyon	Examineur
M. Roger Ohayon	Professeur Emérite, CNAM Paris	Examineur
M. Morvan Ouisse	Professeur, FEMTO-ST, ENSMM Besançon	Rapporteur
M. Pascal Swider	Professeur, IMFT, Université Toulouse III	Rapporteur
M. Fabrice Thouverez	Professeur, Ecole Centrale Lyon	Rapporteur

---



# RÉSUMÉ

## Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques

La simulation numérique du comportement dynamique des structures ou des systèmes couplés aéroélastiques complexes conduit à des systèmes d'équations de très grande taille dont la résolution est très coûteuse. Il est donc indispensable de construire des modèles d'ordre réduit qui, au prix d'une diminution acceptable de la précision, permettent d'obtenir à moindre coût des simulations de ces systèmes. Cette réduction de modèle est obtenue par une projection du système d'équations initial sur une base de projection, incluant ainsi les méthodes de sous-structuration ou de synthèse modale, ainsi que la réduction par symétrie cyclique. On présente ici un ensemble de méthodes ayant recours aux techniques de réduction ou de projection. La première partie regroupe quelques travaux sur les fréquences et modes propres: la méthode de Lanczos par bloc pour calculer les fréquences et les modes propres de structures amorties, une méthode de sous-structuration pour déterminer leur sensibilité et leur réanalyse, et finalement un critère pour suivre leur évolution dans le cas des structures dépendant d'un paramètre. La deuxième partie est consacrée aux méthodes de synthèse modale, incluant les méthodes classiques, avec interface fixe, libre ou mixte, les méthodes utilisant les modes d'interface ou les modes d'interface partiels, ainsi que leur combinaison avec la réduction par symétrie cyclique. La troisième partie concerne les structures multi-étages comme les assemblages de disques aubagés dont chaque étage possède une symétrie cyclique mais pas la structure complète. Une méthode de réduction par symétrie cyclique multi-étages est développée avec une nouvelle sélection des indices de déphasage pour chaque étage dans chaque système réduit. Elle peut être utilisée seule ou combinée avec la synthèse modale. La quatrième partie concerne le couplage fluide-structure dans les turbomachines. La structure, un disque aubagé possédant une symétrie cyclique, est soumise à des forces aérodynamiques exercées par le fluide et qui dépendent des déplacements de la structure. La projection de l'équation de la structure sur ses modes propres complexes fournit un système réduit couplé dans lequel les forces aérodynamiques généralisées sont obtenues à partir des mouvements harmoniques des modes. Deux méthodes de résolution et une méthode de lissage multi-paramètres sont proposées afin d'obtenir les solutions du système couplé pour un grand nombre de valeurs des paramètres.

**Mots clés :** réduction de modèle, fréquence et mode propre, sensibilité, synthèse modale, symétrie cyclique, structure multi-étages, couplage fluide-structure, aéroélasticité.

# ABSTRACT

## Model reduction in dynamics of structures and aeroelastic coupled systems

The numerical simulation of the dynamic behaviour of complex structures or aeroelastic coupled systems leads to systems of equations with very large size whose solution is very costly. It is thus essential to build reduced order models which allow to perform the simulations of these systems at a lesser cost and with an acceptable loss of accuracy. This model reduction is obtained by a projection of the initial system of equations on a projection basis, including therefore substructuring or component mode synthesis methods, as well as the cyclic symmetry reduction. We present here a set of methods using reduction or projection techniques. In the first part, we put together some works related to the eigen frequencies and modes: the block Lanczos method to compute the frequencies and modes of damped structures, a substructuring method to determine their sensitivity and their reanalysis, and finally a criterion to follow-up their evolution for structures depending on a parameter. The second part is devoted to component mode synthesis methods which include the classical methods, with fixed, free or hybrid interface, the methods using interface modes or partial interface modes, as well as their combination with cyclic symmetry reduction. The third part is concerned with multi-stage structures such as bladed-disk assemblies whose each stage has a cyclic symmetry but not the whole structure. A multi-stage cyclic symmetry reduction method has been developed with a new selection of phase indexes for each stage in each reduced system. It can be used alone or combined with component mode synthesis. The fourth part is concerned with the fluid-structure coupling in turbomachinery. The structure, a bladed disk having a cyclic symmetry, is subject to the aerodynamic forces applied by the fluid and which depend on the displacements of the structure. The projection of the equation of the structure on their complex eigen modes provides a reduced coupled system in which the generalized aerodynamic forces are obtained from the harmonic motions of the modes. Two solution methods and a multi-parameter modeling method are proposed to obtain the solutions of the coupled system for a large number of values of the parameters.

**Keywords:** model reduction, eigen frequency and mode, sensitivity, component mode synthesis, cyclic symmetry, multi-stage structure, fluid-structure coupling, aeroelasticity.

*A mes parents.*

## **REMERCIEMENTS**

Tout d'abord, j'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Michel Lalanne, mon ancien professeur et directeur de thèse à l'INSA de Lyon, pour m'avoir initié à la recherche.

Je remercie l'INSA de Lyon, l'Université Claude Bernard Lyon I, l'Ecole Doctorale MEGA et le LaMCoS d'avoir accepté ma candidature en tant que chercheur de l'ONERA, et en particulier Monsieur le Professeur Georges Jacquet-Richardet, mon référent INSA, pour son aide précieuse tout le long de la procédure pour préparer l'Habilitation à Diriger des Recherches et pour l'accueil des membres du jury et des invités.

Je remercie les membres du jury, Messieurs les Professeurs Morvan Ouisse, Pascal Swider et Fabrice Thouverez, pour avoir accepté la charge de rapporter ce travail, Madame Thouraya Nouri Baranger et Messieurs les Professeurs Daniel Nélias, Georges Jacquet-Richardet et Roger Ohayon, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail, et en particulier Monsieur le Professeur Pascal Swider pour avoir accepté la présidence du jury.

Je remercie Messieurs Jean-Pierre Grisval et Nicolas Piet-Lahanier, directeur et directeur adjoint du département DADS de l'ONERA, pour avoir encouragé et soutenu ma démarche pour obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches.

Je remercie mes anciens doctorants, Antoine Placzek et Fritz Adrian Lülff, qui ont réalisé de remarquables travaux de thèse.

Je remercie Madame Zahia Achoui du LaMCoS et Madame Nadine Pouffier du département DADS, pour leur aide sur la logistique.

Je remercie mes collègues qui investissent mon bureau à l'heure du café de midi, Jean-Luc Akian, Sylvie Dequand, Shigehisa Naka, Antoine Placzek, Fabrice Poirion, Eric Savin, Jean-Sébastien Schotté, Truong Văn Khiêm et bien d'autres, avec lesquels j'ai partagé une bonne ambiance de détente autour des discussions sur tout et n'importe quoi, et pour certains, des moments de méditation sur la beauté d'un poème chinois de l'époque Tang. Je remercie en particulier Jean-Sébastien Schotté pour avoir relu le manuscrit de ce mémoire.

Et en dernier mais non des moindres, je remercie Thi Minh, Claire, Hai, Quoc Anh, Ngo, Yên & Tu, Phuoc & Nga, Long & Lan, Quang & Phuong, Vân & Luân, Nga & Ti, et d'autres amis à Lyon, Paris et ailleurs, pour leur soutien dévoué et pour leur participation à la soutenance d'une manière ou d'une autre.

Enfin, je dédie ce travail à ma famille et à tous mes amis.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>CURRICULUM VITAE</b>	<b>vii</b>
<b>I ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES</b>	<b>1</b>
I.1 Synthèse des travaux de recherche réalisés . . . . .	1
I.2 Encadrement de thèses de doctorat . . . . .	7
I.3 Organisation de ce mémoire . . . . .	8
I.4 Liste des publications . . . . .	9
<b>II TRAVAUX SUR LES FRÉQUENCES ET MODES PROPRES</b>	<b>13</b>
II.1 Méthode de Lanczos de recherche de fréquences et modes propres . . . . .	13
II.1.1 Introduction . . . . .	13
II.1.2 Système généralisé aux valeurs propres pour les structures amorties . . . . .	13
II.1.3 Méthode de Lanczos par bloc . . . . .	15
II.1.4 Résultats - Conclusions . . . . .	18
II.2 Sensibilité et réanalyse des fréquences et des modes propres . . . . .	18
II.2.1 Introduction . . . . .	18
II.2.2 Calcul des sensibilités des modes propres . . . . .	19
II.2.2.1 Dérivées des solutions propres . . . . .	19
II.2.2.2 Décomposition en sous-structures . . . . .	20
II.2.2.3 Systèmes réduits des sous-structures . . . . .	20
II.2.2.4 Assemblage des sous-structures – Résolution . . . . .	22
II.2.3 Réanalyse des fréquences et des modes propres . . . . .	22
II.2.4 Résultats - Conclusions . . . . .	23
II.3 Suivi des fréquences et des modes propres . . . . .	24
II.3.1 Introduction . . . . .	24
II.3.2 Méthode directe et méthode modale . . . . .	25
II.3.2.1 Méthode directe . . . . .	25
II.3.2.2 Méthode modale . . . . .	25
II.3.3 Phénomènes de base dans le suivi des fréquences et modes . . . . .	26
II.3.4 Critère pour le suivi des fréquences et modes . . . . .	27
II.3.5 Méthode de perturbation . . . . .	27
II.3.6 Résultats - Conclusions . . . . .	29
<b>III MÉTHODES DE SYNTHÈSE MODALE</b>	<b>30</b>
III.1 Introduction . . . . .	30
III.2 Description et modes des sous-structures . . . . .	31
III.2.1 Description des sous-structures, systèmes réduits, assemblage . . . . .	31
III.2.2 Modes propres et modes statiques des sous-structures . . . . .	32
III.2.2.1 Modes propres . . . . .	32
III.2.2.2 Modes de liaison . . . . .	33
III.2.2.3 Modes d'attache . . . . .	33
III.2.2.4 Matrice de flexibilité et de flexibilité résiduelle . . . . .	33
III.2.2.5 Modes d'attache résiduels . . . . .	34
III.2.2.6 Modes d'attache et d'attache résiduels pour les sous-structures libres avec interface libre . . . . .	34
III.3 Méthodes de synthèse modale classiques . . . . .	35
III.3.1 Méthode utilisant les modes d'attache . . . . .	35
III.3.1.1 Méthode avec interface mixte (HA) . . . . .	35
III.3.1.2 Méthode avec interface fixe (CB) . . . . .	35
III.3.1.3 Méthode avec interface libre (FA) . . . . .	36

III.3.2	Méthodes utilisant les modes d'attache résiduels . . . . .	36
III.3.2.1	Méthode avec interface mixte (HR) . . . . .	36
III.3.2.2	Méthode avec interface libre (FR) . . . . .	36
III.3.2.3	Remarques . . . . .	36
III.4	Méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface . . . . .	37
III.4.1	Modes d'interface . . . . .	37
III.4.2	Méthode avec interface fixe utilisant les modes d'interface (CBI) . . . . .	38
III.4.3	Méthodes avec interface libre et mixte utilisant les modes d'interface (FAI, HAI, FRI, HRI) . . . . .	38
III.5	Méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface partiels . . . . .	39
III.6	Cas des structures avec symétrie cyclique . . . . .	41
III.7	Méthodes de synthèse modale avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) . . . . .	42
III.8	Résultats - Conclusions . . . . .	44
<b>IV</b>	<b>STRUCTURES MULTI-ÉTAGES AVEC SYMÉTRIE CYCLIQUE</b>	<b>45</b>
IV.1	Introduction . . . . .	45
IV.2	Réduction par symétrie cyclique pour les structures multi-étages . . . . .	46
IV.2.1	Description du problème . . . . .	46
IV.2.2	Réduction par symétrie cyclique pour une disque aubagé isolé . . . . .	46
IV.2.3	Couplage des disques aubagés par des structures inter-disques . . . . .	48
IV.2.4	Couplage des disques aubagés par des équations de liaison . . . . .	49
IV.2.5	Système couplé multi-étages complet . . . . .	49
IV.2.6	Réduction par symétrie cyclique multi-étages (MSCS) . . . . .	50
IV.3	Réduction de modèles par synthèse modale (CMS) . . . . .	52
IV.3.1	Modèles réduits des secteurs . . . . .	54
IV.3.1.1	Modèles réduits en coordonnées physiques . . . . .	54
IV.3.1.2	Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes . . . . .	54
IV.3.2	Modèles réduits des disques aubagés . . . . .	55
IV.3.2.1	Modèles réduits en coordonnées physiques . . . . .	55
IV.3.2.2	Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes . . . . .	56
IV.3.3	Modèles réduits de la structure multi-étages . . . . .	56
IV.3.3.1	Modèles réduits en coordonnées physiques . . . . .	56
IV.3.3.2	Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes . . . . .	57
IV.4	Résultats - Conclusions . . . . .	57
<b>V</b>	<b>MÉTHODES DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE DANS LES TURBOMACHINES</b>	<b>59</b>
V.1	Introduction . . . . .	59
V.2	Système réduit couplé fluide-structure . . . . .	60
V.2.1	Réduction par symétrie cyclique . . . . .	60
V.2.2	Fréquences et modes de la structure non amortie dans le vide . . . . .	62
V.2.3	Système réduit couplé par projection modale . . . . .	62
V.2.4	Forces aérodynamiques généralisées . . . . .	63
V.3	Solution du système réduit couplé . . . . .	64
V.3.1	Méthode du double balayage . . . . .	64
V.3.2	Méthode de lissage par fractions rationnelles . . . . .	65
V.4	Lissage multi-paramètres du système réduit couplé . . . . .	66
V.4.1	Lissage multi-paramètres par fonctions splines multi-variables des FAG . . . . .	66
V.4.2	Système réduit couplé avec lissage multi-paramètres par fractions rationnelles . . . . .	67
V.5	Résultats - Conclusions . . . . .	69
<b>VI</b>	<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>70</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE</b>	<b>71</b>
	<b>ANNEXE: ARTICLES</b>	<b>81</b>



## AVERTISSEMENT

Les références numériques [...] renvoient à la liste des publications résultant de mes activités de recherche, Chapitre I, page 9.

Les références bibliographiques (Auteur, année) renvoient à la bibliographie générale située à la fin du mémoire, page 71.

## ABRÉVIATIONS

<b>APR</b>	: A Priori Reduction
<b>CB</b>	: Craig-Bampton
<b>CMS</b>	: Component Mode Synthesis
<b>CSBC</b>	: Cyclic Symmetry Boundary Conditions
<b>CVT</b>	: Centroidal Voronoi Tessellation
<b>DDL</b>	: Degré De Liberté
<b>FAG</b>	: Forces Aérodynamiques Généralisées
<b>LELSM</b>	: Local Equivalent Linear Stiffness Method
<b>LNM</b>	: Linear Normal Modes
<b>LSPG</b>	: Least Square Petrov-Garlerkin
<b>MSCS</b>	: Multi-Stage Cyclic Symmetry
<b>NNM</b>	: Nonlinear Normal Modes
<b>PGD</b>	: Proper Generalized Decomposition
<b>POD</b>	: Proper Orthogonal Decomposition
<b>SOD</b>	: Smooth Orthogonal Decomposition

# CURRICULUM VITAE

## TRAN Duc-Minh

né le 14 Août 1957 à Phan Thiet (Vietnam), nationalité française, célibataire, sans enfant.

Langues: Vietnamien (langue maternelle), Français, Anglais, Chinois. Notions: Japonais, Coréen, Allemand.

Situation professionnelle actuelle: ingénieur de recherche spécialiste 1 à ONERA.

### *Adresse professionnelle:*

ONERA, The French Aerospace Lab  
Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures (DADS/MSDS)  
B.P. 72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon Cedex  
Tel: 01 46 73 46 32, Fax: 01 46 73 41 43  
Email: tran@onera.fr, Web: www.onera.fr

### *Adresse personnelle:*

50 rue du Disque  
Apt. 4PA/14  
75013 Paris  
Tel: 01 45 85 51 11, 06 51 99 11 68  
Email: ducminht@gmail.com

## Formation

- 1979** Diplôme d'Ingénieur en Mécanique de Développement et DEA de Mécanique, INSA de Lyon.
- 1981** Docteur Ingénieur en Mécanique, INSA de Lyon, thèse intitulée "Étude du comportement dynamique des rotors flexibles", sous la direction du Professeur Michel LALANNE.
- 1990 - 1997** Formations complémentaires par correspondance, Université Pierre-et-Marie-Curie Paris VI: Licence de Mathématiques (1990), Maîtrise de Mathématiques Pures (1993), Maîtrise de Mathématiques Appliquées (1994), DEA de Mathématiques Pures (1997).

## Expériences professionnelles

- 1/1982 - 2/1988** **FRAMASOFT (FRAMATOME), Chalon sur Saône et Paris La Défense.**  
Ingénieur de recherche et développement des méthodes numériques en dynamique des structures dans le code de calcul par éléments-finis SYSTUS: méthodes de calcul des fréquences et modes propres et de synthèse modale.
- 3/1988 - 2/1990** **Agence Spatiale Européenne (ESA/ESTEC), Noordwijk, Pays Bas.**  
Ingénieur à la Section Études Mathématiques: Étude sur la dynamique des systèmes de corps flexibles poly-articulés dans le cadre du logiciel ESA-MIDAS.
- 3/1990 - présent** **ONERA, The French Aerospace Lab, Châtillon.**  
Ingénieur de recherche au Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures (DADS), Unité de Recherche Modélisation et Simulation en Dynamique des Structures (MSDS).  
Thématique de recherche: dynamique des structures et aéroélasticité des turbomachines  
– équations de Kane pour la formulation des équations du mouvement;  
– méthodes de synthèse modale (sous-structuration dynamique);  
– calcul de sensibilité, réanalyse et suivi des modes propres;  
– couplage fluide-structure dans les turbomachines: couplage aéroélastique, stabilité, lissage multi-paramètres;  
– réduction de modèle: symétrie cyclique, multi-étages, POD, structure non linéaire.

## Collaborations extérieures

- Participation aux Programmes de Recherche Concertée RENATA, DYNA et AEROVISTA (ONERA, SNECMA, TURBOMECA et des laboratoires de recherches).
- Participation au projet Européen ADTURB II (Aeroelastic Design of Turbine Blades, 16 partenaires).
- Collaboration en tant qu'encadrant de doctorants avec le Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) au CNAM Paris.

## Encadrement de stages de fin d'études, DEA et DESS

- 1998** C. ELOY, stage de DESS de Mathématiques Appliquées, Université Paris VI : “ Mise en œuvre de l’algorithme de Lanczos pour la recherche des fréquences et modes propres de systèmes dynamiques ”.
- 1999** O. CAPERAN, stage de fin d’études d’ingénieur, Institut Supérieur de Mécanique et de Construction Mécanique, Saint-Ouen : “ Etudes et mise en œuvre des méthodes de perturbations des modes propres dans le cas des fréquences multiples ”.
- 2001** E. CAPIEZ-LERNOUT, stage de fin d’études d’ingénieur et de DEA Dynamique des Structures et des Systèmes Couplés, École Nationale des Ponts et Chaussées, Champs-sur-Marne : “ Étude du problème de suivi de fréquences et modes propres des systèmes dynamiques évolutifs ”.

## Encadrement de thèses de doctorat

- 2006 - 2009** A. PLACZEK (encadrement à 70 %), doctorant au CNAM Paris, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) et à l’ONERA/DADS Châtillon.  
- Sujet de thèse: “ Construction de modèles d’ordre réduit aérodynamiques non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l’aéroélasticité ”.  
- Directeur de thèse: Professeur Roger OHAYON (CNAM).  
- Date et lieu de soutenance: 16 Décembre 2009, CNAM Paris.
- 2010 - 2013** F.A. LÜLF (encadrement à 70 %), doctorant au CNAM Paris, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) et à l’ONERA/DADS Châtillon.  
- Sujet de thèse: “ Une méthode intégrée pour la réponse transitoire des modèles d’ordre réduit de structures en dynamique non-linéaire géométrique ”.  
- Directeur de thèse: Professeur Roger OHAYON (CNAM).  
- Date et lieu de soutenance: 5 Décembre 2013, ONERA Châtillon.

## Participation aux jurys de thèse

- 2000** R. NAMAR, Thèse de Doctorat de l’Université Paris VI, dirigée par Frédéric Bourquin, “ Méthodes de synthèse modale pour le calcul des vibrations des structures ”.
- 2009** A. PLACZEK, Thèse de Doctorat du CNAM Paris, dirigée par Roger Ohayon, “ Construction de modèles d’ordre réduit aérodynamiques non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l’aéroélasticité ”.
- 2013** F.A. LÜLF, Thèse de Doctorat du CNAM Paris, dirigée par Roger Ohayon, “ Une méthode intégrée pour la réponse transitoire des modèles d’ordre réduit de structures en dynamique non-linéaire géométrique ”.

## Participation aux séminaires

- 1997** Séminaire du Groupe Décomposition de Domaine, Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil, LCPC, Champs-sur-Marne. Titre de l’exposé : “ Une revue des méthodes de synthèse modale ”.
- 2002** Séminaire ONERA/DDSS–CNAM/LMSSC, ONERA, Châtillon. Titre de l’exposé : “ Méthode de couplage fluide-structure dans le domaine fréquentiel pour les turbomachines ”.
- 2008** Séminaire ONERA/DADS–CNAM/LMSSC, ONERA, Châtillon. Titre de l’exposé : “ Méthodes de synthèse modale utilisant les modes d’interface partiels ”.

# ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

## I.1. Synthèse des travaux de recherche réalisés

Depuis ma thèse de Docteur Ingénieur sur l'étude du comportement dynamique des rotors flexibles (Lalanne & Ferraris, 1998) <sup>1</sup>, mes activités de recherche concernent le domaine de la dynamique des structures, des systèmes poly-articulés et des systèmes couplés fluide-structure. Les principaux thèmes étudiés sont :

1. Étude des équations de Kane et des systèmes de corps flexibles poly-articulés <sup>2</sup> ;
2. Méthodes de Lanczos de recherche de fréquences et modes propres <sup>3</sup> ;
3. Méthodes de calcul des sensibilités, de réanalyse et de suivi des modes propres <sup>4</sup> ;
4. Méthodes de synthèse modale (sous-structuration dynamique) <sup>5</sup> ;
5. Méthodes de couplage fluide-structure dans les turbomachines <sup>6</sup> ;
6. Méthodes de réduction de modèle de structures multi-étages avec symétrie cyclique <sup>7</sup>.

D'autre part, j'ai encadré des thèses sur la réduction de modèle du domaine fluide <sup>8</sup> et des structures non linéaires <sup>9</sup>.

Dans la plupart des cas, il s'agit de développer des méthodes de résolution pour répondre à un type de problème donné en essayant d'améliorer la performance ou la précision, comme pour le calcul des fréquences et modes propres, de la réponse forcée, des sensibilités et des modifications de modes propres ou des solutions aux problèmes couplés fluide-structure. La formulation des équations constitutives du problème est aussi abordée dans l'étude des équations de Kane et des systèmes de corps poly-articulés. Ces travaux donnent lieu à la mise en œuvre de logiciels de calcul et des tests de validation sur des applications numériques.

Une technique largement utilisée dans les méthodes développées est la réduction du problème initial par la technique de Rayleigh-Ritz qui consiste à projeter le système d'équations du mouvement sur une base de projection. Les vecteurs de cette base de projection, nommés ici par le terme générique de vecteurs de Ritz, sont par exemple les vecteurs de Lanczos, les modes propres et les modes statiques de sous-structures ou les modes d'interface dans la synthèse modale, ou les modes propres de la structure pour le couplage fluide-structure. L'aspect mathématique de cette technique de réduction de modèle comme l'étude de convergence en fonction du nombre de vecteurs de Ritz retenus et l'estimation des erreurs de troncation n'est pas abordé dans ces travaux. On se contentera d'utiliser, de proposer et de valider des critères empiriques tels que celui de Rubin pour sélectionner les vecteurs de Ritz intervenant dans la base de projection.

Une autre technique pour réduire le volume de calcul consiste à décomposer la structure en sous-structures. Ces dernières sont représentées soit par des vecteurs de Ritz, ce qui revient à la technique de projection, soit par leurs modèles éléments-finis. Les propriétés de symétrie sont également exploitées, éventuellement en combinaison avec d'autres techniques comme la sous-structuration et la synthèse modale, comme la réduction par symétrie cyclique pour les disques aubagés, mono- ou multi-étages, ce qui revient aussi à une méthode de projection. Le problème du désaccordage dans lequel la symétrie cyclique est légèrement brisée est également étudié. Un aperçu de ces travaux est présenté ci-après.

### Étude du comportement dynamique des rotors flexibles (thèse de Docteur Ingénieur)

Il s'agit de l'étude des vibrations des rotors symétriques à paliers dissymétriques en mouvement de flexion [1; 2]. On propose des méthodes de calcul qui permettent de déterminer les fréquences et modes propres de

---

<sup>1</sup>Publications [1; 2]

<sup>2</sup>Publications [3; 16; 17; 46; 47; 48]

<sup>3</sup>Publications [5; 42; 43; 44; 55]

<sup>4</sup>Publications [6; 21; 22; 23; 24; 34; 51; 57]

<sup>5</sup>Publications [4; 7; 11; 18; 19; 20; 25; 26; 31; 33; 35; 38; 45; 49; 50; 59; 61; 62]

<sup>6</sup>Publications [8; 10; 27; 28; 29; 30; 32; 56; 57; 58; 60]

<sup>7</sup>Publications [14; 63; 64; 66]

<sup>8</sup>Publications [9; 12; 36; 37; 39]

<sup>9</sup>Publications [13; 15; 40; 41; 65; 67; 68; 69]

rotors en fonction de la vitesse de rotation, ainsi que la réponse aux excitations telles que les effets de balourd et de pesanteur. Dans un premier temps, on établit les équations du mouvement de rotors dans un repère absolu. Les rotors sont supposés constitués par un ou plusieurs arbres concentriques, des disques rigides et des paliers. Les arbres sont modélisés par des éléments finis de poutre en flexion, tandis que les disques sont représentés par des masses et des inerties ponctuelles et des effets gyroscopiques, et les paliers par des raideurs et des amortissements éventuellement non symétriques. Le principe est de calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'élément et d'appliquer ensuite les équations de Lagrange. On aboutit à un système différentiel classique en dynamique des structures dans lequel les matrices de rigidité et d'amortissement sont non symétriques à cause des paliers, tandis que la matrice de gyroscopie est anti-symétrique et dépend de la vitesse de rotation. Deux méthodes de résolution particulièrement adaptées à ce système ont été développées. Dans la première méthode de type pseudo-modal, on projette le système différentiel sur les quelques premiers modes propres du rotor non amorti et à l'arrêt. Dans la deuxième méthode, on calcule directement les fréquences et les modes propres gauches et droits du système différentiel initial par une méthode d'itérations simultanées et on projette le système différentiel sur ces modes. Dans les deux cas, le calcul de la réponse est effectué à partir du système réduit.

### Étude des équations de Kane et des systèmes de corps flexibles poly-articulés

Il s'agit dans un premier temps d'établir, à partir du principe de d'Alembert, les équations de Kane (1961) qui constituent une alternative aux équations de Lagrange et au formalisme vectoriel de Newton-Euler pour formuler les équations du mouvement des systèmes holonomes ou non-holonomes (Tran, 1991). Les équations de Kane sans multiplicateur permettent d'éliminer automatiquement les forces de liaison non-actives, même pour les systèmes non-holonomes, ce qui n'est pas le cas des équations de Lagrange. Les équations de Kane sont bien adaptées pour formuler correctement les équations linéarisées du mouvement, notamment pour l'étude dynamique des corps poly-articulés.

On étudie ensuite les équations du mouvement des systèmes de corps flexibles poly-articulés (Hooker & Margulies, 1965; Bodley et al., 1978; Singh et al., 1985) [16; 48]. Le système est composé de corps rigides ou flexibles reliés par des articulations à six degrés de liberté dont certains sont fixes ou soumis à des mouvements imposés. Le système peut avoir une configuration ouverte (en arborescence) ou fermée (en boucle). Il est soumis à des liaisons holonomes ou non-holonomes de type simple et est sujet à de grandes rotations et translations dans le repère inertiel, avec de petits mouvements élastiques dans les repères liés aux corps. Pour les corps flexibles, les déplacements élastiques, supposés petits comparés aux dimensions du corps, sont exprimés comme combinaison linéaire des vecteurs de Ritz qui sont usuellement des modes propres encastrés en un point de référence.

Deux formalismes sont utilisés pour établir les équations du mouvement du système :

- les équations de Lagrange avec multiplicateurs, établies à partir des énergies cinétiques et potentielles et de la fonction de dissipation. Les coordonnées généralisées sont des variables absolues dans le repère inertiel et les coordonnées modales.

- les équations de Kane avec multiplicateurs, établies à partir des forces inertielles, des forces actives et des forces de liaison généralisées. Les coordonnées généralisées sont des variables relatives au niveau des articulations et les coordonnées modales.

Dans les deux cas, on aboutit à un système différentio-algébrique qui est résolu soit par une méthode de substitution, soit en utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) ou la décomposition QR. Les schémas d'intégration numérique sont de type Runge-Kutta ou Adams.

Des simulations numériques ont été effectuées sur un modèle simple de bras manipulateur [46] et sur le déploiement des appendices d'un satellite [47].

### Méthodes de Lanczos de recherche de fréquences et modes propres

Il s'agit de développer la méthode Lanczos par bloc (Lanczos, 1950; Nour-Omid, 1985) pour calculer les fréquences et modes propres des structures amorties dont les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement sont symétriques (Tran, 1995). Le système d'équations du mouvement libre de la structure est transformé en

un système symétrique généralisé aux valeurs propres  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$  dont la taille est doublée. On est alors amené à calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice non symétrique  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  mais auto-adjointe par rapport à la forme bilinéaire associée à  $\mathbf{B}$ .

L'algorithme de Lanczos par bloc permet de construire à chaque itération une matrice (ou bloc) de  $l$  vecteurs de Lanczos (si  $l = 1$ , on obtient l'algorithme de Lanczos à un vecteur). Le nombre d'itérations est soit déterminé par un test de convergence, soit fixé à l'avance par des règles empiriques. Les vecteurs de Lanczos ainsi construits sont théoriquement orthogonaux, cependant il est indispensable de compenser la perte d'orthogonalité due aux erreurs de calcul par des stratégies de réorthogonalisation. En projetant la matrice  $\mathbf{D}$  sur les vecteurs de Lanczos, on obtient la matrice de taille réduite  $\mathbf{T}$  qui est tridiagonale par bloc et non symétrique. Les valeurs propres complexes de  $\mathbf{T}$  sont les valeurs propres approchées de plus grands modules de  $\mathbf{D}$  tandis que les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  permettent de reconstituer les modes propres de la structure.

La méthode de Lanczos généralisée par bloc est bien adaptée au calcul des fréquences et modes multiples, la taille  $l$  des blocs devant être au moins égale au plus grand degré de multiplicité des fréquences recherchées. Elle permet aussi d'extraire rapidement les fréquences autour d'une valeur donnée. Elle est plus rapide que la méthode d'itérations sur un sous-espace mais moins performante que la méthode de Lanczos classique.

### Méthodes de calcul des sensibilités, de réanalyse et de suivi des modes propres

Il s'agit de calculer les dérivées des modes propres par rapport aux paramètres de conception, de modélisation ou de fonctionnement [6; 22]. Les matrices de rigidité et de masse sont symétriques et les fréquences propres sont supposées distinctes. Si le calcul des dérivées des fréquences propres ne pose aucun problème, il n'en est pas de même pour les modes propres, car on est amené à résoudre plusieurs systèmes linéaires avec des matrices singulières. Les méthodes classiques sont la méthode directe (Nelson, 1976) qui est coûteuse, la méthode modale (Fox & Kapoor, 1968) qui n'est pas très précise, et les méthodes modales modifiées (Wang, 1991) qui sont des versions améliorées de la méthode modale. On propose une méthode mixte combinant la méthode directe et la méthode modale, qui s'applique aux structures localement perturbées et dans laquelle la structure est décomposée en sous-structures (Tran, 1996). Pour les sous-structures situées assez loin des perturbations, on utilise une représentation modale : les dérivées des modes propres sont exprimées comme des combinaisons linéaires des premiers modes propres de la structure, restreints à ces sous-structures. Pour les autres sous-structures, on utilise une représentation éléments-finis comme dans la méthode directe mais seuls les degrés de liberté de liaison aux frontières avec les sous-structures de type modal sont exprimés en fonction des modes propres. L'assemblage des sous-structures se fait à l'aide des coordonnées modales. On aboutit à des systèmes linéaires couplés dont les inconnues sont les coordonnées modales et les degrés de liberté internes des sous-structures de type direct. Pour ces dernières, on peut également effectuer une condensation statique aux degrés de liberté de frontières avant l'assemblage, ce qui réduit fortement la taille du système couplé. Le même principe est ensuite utilisé pour réanalyser les fréquences et modes propres des structures localement perturbées. Pour les sous-structures situées assez loin de la zone perturbée, on exprime les modes propres perturbés dans une base tronquée de modes propres non perturbés. Pour les autres sous-structures, on garde les matrices éléments-finis de rigidité et de masse perturbées, seuls les déplacements de liaison aux frontières avec les sous-structures de type modal sont exprimés en fonction des modes propres. Ici, on n'effectue pas de condensation statique (Guyan, 1965) car cette dernière induit une approximation supplémentaire. Dans les deux cas, la méthode mixte est une amélioration de la méthode modale, avec la possibilité d'isoler les perturbations dans des sous-structures utilisant une représentation élément finis afin d'augmenter la précision. Elle est comparée avec les méthodes directe, modale et modale modifiée, ainsi qu'avec les méthodes de synthèse modale. Ses résultats sont comparables à ceux de la méthode directe et sont meilleurs que ceux de la méthode modale.

Le problème de suivi de fréquences et modes propres concerne les systèmes dynamiques évolutifs qui dépendent continuellement d'un paramètre (Leissa, 1974; Perkins & Mote, 1986; Morand & Ohayon, 1995). Lorsque deux courbes d'évolution de fréquences propres en fonction du paramètre s'approchent, on peut conclure à première vue qu'il y a intersection des courbes ou "croisement des fréquences". Cependant, une analyse plus fine autour du point d'intersection présumé révèle que pour la plupart des systèmes réels, les deux courbes effectuent des "virages" et se repoussent afin d'éviter de se croiser : c'est le phénomène d'"interaction modale", ou "curve veering". Le croisement des fréquences, qui se traduit par une dégénérescence des fréquences, mais

pas des modes propres, n'est possible que lorsqu'il n'y pas de couplage entre les modes. Pour un système couplé réel, il existe toujours un couplage même très faible entre les modes. L'interaction modale se produit lorsque ce couplage est conservatif. Dans ce cas, il ne peut y avoir de fréquences multiples, les courbes d'évolution des fréquences effectuent des virages, qui sont d'autant plus abrupts que le couplage est faible, pour éviter de se croiser. Un couplage non-conservatif donne lieu à une "coalescence des fréquences" où les deux courbes s'attirent, se rejoignent, puis se séparent de nouveau, et qui est caractérisée par une zone d'instabilité aux extrémités de laquelle on a à la fois une dégénérescence des fréquences et des modes propres. Ces différents phénomènes sont mis en évidence en utilisant la méthode de projection modale avec une approximation à deux modes. On propose ensuite un critère de reclassement des fréquences et modes afin de suivre l'évolution de chaque mode et de détecter précisément et automatiquement ces phénomènes (Tran, 2006).

### Méthodes de synthèse modale

La modélisation par éléments-finis des structures complexes modernes, comme les disques aubagés dans les étages de turbomachines, conduit à des systèmes de très grande taille qui peuvent atteindre plusieurs millions de degrés de liberté. Malgré les progrès réalisés sur les moyens informatiques, la résolution de tels systèmes reste très coûteuse en temps de calcul, surtout lorsque le nombre de simulations à effectuer est important à cause du nombre élevé de paramètres de conception et de fonctionnement à prendre en compte et à faire évoluer. Il est donc indispensable de construire des modèles d'ordre réduit de ces systèmes, qui au prix d'une diminution acceptable de la précision, permettent d'obtenir à moindre coût des simulations du comportement dynamique de ces structures. Par exemple, lorsque la structure possède une parfaite symétrie cyclique, hypothèse usuellement adoptée au premier abord pour les disques aubagés dits "accordés", on peut réduire les calculs sur un seul secteur répétitif de référence, sans perdre de précision (Thomas, 1979; Valid & Ohayon, 1985). Cependant, lorsqu'une telle propriété de symétrie n'est plus valable, comme dans le cas des disques aubagés "désaccordés" dont les secteurs répétitifs sont légèrement différents les uns des autres à cause des imperfections induites lors de la fabrication et des modifications volontairement apportées à la structure, d'autres méthodes de réduction de modèle comme la synthèse modale s'avèrent nécessaires.

Les méthodes de synthèse modale permettent d'effectuer l'analyse dynamique des structures par une décomposition en sous-structures (Hurty, 1960; Craig & Bampton, 1968; Benfield & Hrudá, 1971; MacNeal, 1971; Rubin, 1975). On propose dans un premier temps des méthodes de synthèse modale avec interface mixte [4; 19; 20] dans lesquelles l'interface entre une sous-structure et les sous-structures adjacentes est partitionnée en interface fixe et interface libre. Les déplacements physiques de la sous-structures sont exprimés comme une combinaison linéaire des premiers modes propres avec interface mixte, des modes de liaison et des modes d'attache. En projetant l'équation d'équilibre de la sous-structure sur les vecteurs de Ritz, on obtient un système réduit de la sous-structure dont les inconnues sont les coordonnées modales et les déplacements d'interface. Une variante de la méthode avec interface mixte consiste à utiliser les modes d'attache résiduels à la place des modes d'attache dans l'expression des déplacements de la sous-structure. Les méthodes de synthèse modale avec interface mixte incluent comme cas particuliers les méthodes avec interface fixe ou libre.

Pour la plupart des méthodes de synthèse modale classiques, le couplage des sous-structures est effectué par l'intermédiaire des déplacements d'interface. La taille du système couplé peut cependant être importante à cause du grand nombre de degrés de liberté à l'interface. Afin de réduire le nombre de coordonnées d'interface et par conséquent la taille du système couplé, les méthodes de synthèse modale avec modes d'interface ont été développées en premier lieu pour la méthode avec interface fixe (Craig & Chang, 1977b; Bourquin, 1992). Cette méthode a été ensuite étendue aux méthodes avec interfaces libres et mixtes [7; 25; 26]. Dans ces méthodes, les modes statiques sont remplacés par les modes d'interface qui sont les premiers modes propres obtenus par condensation de Guyan de la structure complète sur les interfaces entre les sous-structures. Les déplacements d'interface dans les méthodes classiques sont remplacés par les coordonnées généralisées associées aux modes d'interface, qui sont communes à toutes les sous-structures et qui servent à l'assemblage de ces dernières.

Bien que les méthodes de synthèse modale avec modes d'interface produisent des systèmes réduits couplés de taille très petite, un inconvénient de ces méthodes est que toutes les coordonnées physiques sont éliminées du modèle réduit. La présence, dans le modèle réduit, des coordonnées physiques d'une partie de l'interface

est cependant souhaitable et parfois nécessaire, soit parce que ces coordonnées peuvent apporter des informations utiles à l'utilisateur, soit parce que l'on souhaite intervenir directement sur ces coordonnées lors de la résolution du modèle réduit, par exemple pour imposer des mouvements prescrits ou pour prendre en compte des non linéarités locales de type contact, frottement ou jeu. De nouvelles méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface partiels [11; 38] ont été développées dans le but de pallier cet inconvénient, puisqu'elles permettent à la fois de réduire le nombre de coordonnées d'interface et de conserver certaines coordonnées physiques dans le modèle réduit. Pour cela, un second niveau de synthèse modale est appliqué au système réduit obtenu par une condensation de Guyan de la structure complète sur les coordonnées d'interface. Ces dernières sont partitionnées en deux parties regroupant respectivement les coordonnées d'interface à éliminer ou à conserver dans le système réduit couplé. Les modes d'interface partiels sont les premiers modes propres du système réduit de Guyan, éventuellement encastré sur quelques coordonnées d'interface à conserver. Comme dans les méthodes de synthèse modale classique, les modes d'interface partiels sont complétés par des modes statiques du système réduit de Guyan, et les coordonnées généralisées associées à ces modes statiques sont justement les coordonnées d'interface à conserver. Ces nouvelles méthodes sont une généralisation des méthodes de synthèse modale classiques et des méthodes utilisant les modes d'interface, ces dernières correspondant aux cas particuliers où toutes les coordonnées physiques d'interface sont respectivement conservées ou éliminées.

Plusieurs méthodes de synthèse modale ont été mises en œuvre, incluant les méthodes classiques (Tran, 1992), les méthodes utilisant les modes d'interface (Tran, 2001) et les méthodes utilisant les modes d'interface partiels (Tran, 2009b), en combinant les trois types d'interface (fixe, libre et mixte), aussi bien pour les modes de sous-structures que pour les modes d'interface partiels. Dans le cas des structures avec symétrie cyclique, les méthodes de synthèse modale sont combinées avec les propriétés de symétrie cyclique afin de modéliser uniquement un secteur répétitif de référence de la structure. Les conditions aux limites de symétrie cyclique sont appliquées en deux étapes, d'abord sur le système réduit de Guyan lors du calcul des modes d'interface ou d'interface partiels, puis sur le système réduit couplé lors de la résolution de ce dernier.

Les méthodes de synthèse modale utilisant la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD, Proper Orthogonal Decomposition) [62] ont été développées, dans lesquelles les modes POD sont utilisés à la place des modes propres de sous-structures dans la base de projection. Les clichés des sous-structures, à partir desquels les modes POD des sous-structures sont obtenus, sont soit calculés sur chaque sous-structure ou soit extraits des clichés de la structure complète. Les modes POD sont ensuite homogénéisés de manière à ce qu'ils soient nuls à l'interface comme pour les modes propres dans les méthodes de synthèse modale. Combinée avec la synthèse modale, la POD fournit des résultats de précision comparable à celle des méthodes de synthèse modale sans la POD, cependant elle est moins pratique car le choix des modes POD est plus délicat à effectuer que celui des modes propres de sous-structures.

Toutes les méthodes de synthèse modale développées ont été appliquées sur des exemples de disques aubagés sur lesquels on effectue les calculs des fréquences et des modes propres ainsi que des réponses fréquentielles et temporelles, avec prise en compte des non-linéarités locales (Tran, 2009a). Les résultats obtenus par les méthodes de synthèse modale dans les deux cas, accordés et désaccordés, sont en très bonne concordance avec les résultats de référence obtenus en utilisant la symétrie cyclique ou en effectuant les calculs sur la structure complète. Des recommandations ont été formulées concernant le choix des méthodes et des modes de la base de projection.

### **Méthodes de couplage fluide-structure dans les turbomachines**

Ce travail concerne l'analyse dynamique du système couplé fluide-structure dans les turbomachines [8; 10; 27; 28; 29; 30; 32; 56; 57; 58; 60]. La structure, qui consiste en un disque aubagé en rotation, est soumise à des forces aérodynamiques exercées par le fluide, ces forces dépendent elles-mêmes des déplacements de la structure et sont supposées linéaires en fonction de ces déplacements. On suppose que la structure possède des propriétés de symétrie cyclique, ce qui permet de réduire les calculs à un seul secteur répétitif de référence. Il suffit alors de résoudre l'équation du mouvement du secteur de référence en coordonnées d'ondes tournantes dans laquelle sont pris en compte les effets de rotation et sur laquelle sont appliquées les conditions aux limites de symétrie cyclique. Pour chaque indice de déphasage, on calcule les modes propres complexes du secteur de



référence de la structure dans le vide en négligeant les matrices d'amortissement et de gyroscopie. La projection de l'équation du mouvement du secteur de référence sur les modes complexes fournit un système réduit couplé.

Les forces aérodynamiques instationnaires sont générées par les déplacements de la structure. Contrairement au couplage direct (Jacquet-Richardet & Rieutord, 1998; Dugeai, 2005, 2008), on utilise ici un couplage indirect où les forces aérodynamiques exercées sur le secteur de référence s'expriment comme une combinaison linéaire de celles obtenues en utilisant les modes propres comme base de déplacements. La projection de ces forces sur les modes propres fournit une matrice de coefficients aérodynamiques complexes dont le produit avec le vecteur des coordonnées modales représente les forces aérodynamiques généralisées. En pratique, ces dernières sont calculées avec un logiciel d'aérodynamique (Dugeai et al., 2000) à partir des modes propres sur lesquels on impose des mouvements harmoniques à un certain nombre de fréquences d'excitation. Dans le domaine fréquentiel, les matrices supplémentaires provenant des forces aérodynamiques sont ajoutées aux matrices généralisées du système réduit de la structure, ce qui conduit à un problème aux valeurs propres non linéaire (équation de flottement) dont les matrices dépendent des valeurs propres inconnues. La résolution de l'équation de flottement est réalisée en utilisant soit la méthode du double balayage (ou méthode  $p - k$ ) (Dat & Meurzec, 1969), soit la méthode de lissage des forces aérodynamiques généralisées par fractions rationnelles de Karpel (1982) puis par une méthode itérative de résolution basée sur la recherche des points fixes d'une fonction (Tran et al., 2003). On obtient alors les diagrammes de flottement qui permettent de suivre l'évolution des valeurs propres en fonction de la vitesse ou du débit du fluide en infini amont et de déterminer si le système couplé est stable ou non en examinant l'amortissement de chaque mode aéroélastique. Dans le domaine temporel, la méthode de lissage par fractions rationnelles de Karpel est utilisée pour obtenir une approximation des forces aérodynamiques généralisées à l'aide des variables d'état auxiliaires. Le système réduit couplé est alors résolu en utilisant un schéma d'intégration temporelle de Newmark.

Afin de détecter les zones d'instabilité, les calculs aérodynamiques et de couplage doivent être effectués en plusieurs points du diagramme de fonctionnement de la turbomachine, en faisant varier des paramètres comme la vitesse de rotation, la contre-pression, le débit etc. Ceci conduit à un nombre important de calculs aérodynamiques qui constituent la partie la plus coûteuse en temps de calcul pour obtenir les solutions du problème couplé. Afin de réduire le nombre de calculs aérodynamiques, une méthode de lissage multi-paramètres des forces aérodynamiques généralisées a été proposée. Cette méthode de lissage multi-paramètres mono-variable, déjà appliquée au cas des avions (Poirion, 1996), utilise un premier lissage par fonctions splines sur le paramètre choisi, par exemple la vitesse de rotation, puis un second lissage par fractions rationnelles de Karpel sur les fréquences réduites. On obtient une expression des forces aérodynamiques généralisées et un système couplé qui dépendent explicitement du paramètre, aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel, ce qui permet d'effectuer des calculs de couplage pour une valeur quelconque du paramètre.

On propose ensuite une amélioration de la méthode de lissage multi-paramètres des forces aérodynamiques généralisées afin de réduire davantage le nombre de calculs aérodynamiques (Tran, 2009c). Pour cela, la technique d'interpolation par fonctions splines multi-variables est utilisée. Cette méthode permet de faire varier simultanément plusieurs paramètres et d'effectuer le calcul de couplage aéroélastique pour des valeurs quelconques des paramètres, sans calculs aérodynamiques supplémentaires. Elle permet également d'extrapoler les forces aérodynamiques généralisées et d'effectuer le calcul de couplage pour les valeurs des paramètres situées en dehors des intervalles définis par les valeurs initiales, ce qui facilite la détection des zones d'instabilité qui se trouvent souvent à la périphérie des zones stables.

La méthode de couplage et de lissage multi-paramètres a été appliquée à un exemple de compresseur, en choisissant la vitesse de rotation et le déphasage inter-aube comme paramètres. Les résultats obtenus par la résolution du système couplé aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel sont en bonne concordance avec les résultats de référence obtenus aux points initiaux et aux points de vérification où les forces aérodynamiques généralisées ont été calculées. L'approche point-par-point, qui consiste à utiliser les forces aérodynamiques généralisées obtenues par le lissage spline comme données du calcul de couplage, fournit également de très bons résultats. Dans les deux approches, la possibilité d'extrapolation permet de prédire des zones d'instabilité situées en dehors du domaine de fonctionnement et dans lesquelles les calculs aérodynamiques n'ont pas abouti.

## Modèles réduits de structures multi-étages avec symétrie cyclique

Cette étude [14; 63; 64; 66] concerne la construction de modèles réduits des assemblages de disques aubagés composés de plusieurs étages, chaque étage est constitué d'un disque aubagé possédant une symétrie cyclique. L'approche mono-étage qui consiste à étudier séparément les étages en exploitant la symétrie cyclique n'est plus valable à cause du couplage entre les disques (Bladh et al., 2003). Afin de prendre en compte le couplage inter-disque, l'approche multi-étages, qui consiste à étudier la structure multi-étages complète, doit être utilisée. Cependant la modélisation de la structure complète ou même d'un disque complet conduit à des systèmes d'équations de très grande taille, ce qui augmente drastiquement les temps de calcul. Des approches pour obtenir des modèles réduits des rotors multi-étages ont été proposées (Song et al., 2005; Sinha, 2008).

Lorsqu'on observe les modes propres des structures multi-étages obtenus par le calcul du système complet, certains de ces modes sont similaires aux modes propres des disques isolés, avec notamment l'apparition de diamètres nodaux dont les nombres correspondent aux indices de déphasage du cas de la symétrie cyclique mono-étage. A partir de ces observations, l'idée d'étendre la réduction par symétrie cyclique aux structures multi-étages a été développée en premier lieu par Laxalde et al. (2007; 2007; 2007) qui imposent des équations de liaison linéaires inter-disques, puis reprise par Sternchüss et al. (2007; 2008; 2009) qui introduisent des structures inter-disques, et ensuite utilisée dans d'autres travaux qui tiennent compte du désaccordage (Laxalde & Pierre, 2011) ou des incertitudes (Segui Vasquez, 2013). Dans cette approche, le système couplé d'équations du mouvement de la structure multi-étages, incluant les équations des structures inter-disques et les équations de liaison, est exprimé en fonction des coordonnées d'ondes tournantes des disques, et les conditions aux limites de symétrie cyclique sont appliquées simultanément à tous les disques et à tous les indices de déphasage. La réduction par symétrie cyclique multi-étages (MSCS, Multi-Stage Cyclic Symmetry) consiste alors à résoudre le système couplé en sélectionnant seulement quelques indices de déphasage pour chaque disque. Ceci conduit à plusieurs systèmes réduits qui sont des approximations du système couplé complet.

D'autre part, les méthodes de synthèse modale telles que la méthode classique avec interface fixe de Craig & Bampton (1968) sont des techniques bien connues pour obtenir des modèles réduits d'une structure par une décomposition de cette dernière en sous-structures (Tran, 2001, 2009*b,a*). Pour les disques aubagés multi-étages, Sternchüss et al. (2007; 2008; 2009) ont combiné la réduction MSCS et les modèles réduits des secteurs de référence obtenus par synthèse modale. D'Souza et al. (2012; 2012) ont également étudié des disques aubagés multi-étages en combinant les approches dans (Song et al., 2005; Lim et al., 2007).

Le but de cette étude (Tran, 2014) est de construire des modèles réduits des disques aubagés multi-étages en utilisant la réduction MSCS développée par Laxalde (2007) et Sternchüss (2009) avec une nouvelle sélection des indices de déphasage et/ou les différentes méthodes de synthèse modale développées dans (Tran, 2001, 2009*b*). Les méthodes de synthèse modale sont utilisées pour obtenir des modèles réduits des secteurs de référence ou des disques aubagés complets. Les modèles réduits de la structure multi-étages complète sont ensuite obtenus soit en appliquant la réduction MSCS sur les modèles réduits des secteurs de référence, soit en assemblant directement les modèles réduits des disques aubagés. Les méthodes de réduction de modèle développées sont appliquées sur un exemple de trois disques aubagés. On montre que deux méthodes de réduction de modèle sont particulièrement performantes, qui sont les méthodes de synthèse modale avec des modes d'interface sans la réduction MSCS, et les méthodes de synthèse modale avec coordonnées d'ondes tournantes combinées avec la réduction MSCS.

## I.2. Encadrement de thèses de doctorat

### Modèles réduits du domaine fluide pour le couplage fluide-structure

Afin de diminuer le coût des calculs aérodynamiques dans l'étude des systèmes couplés aéroélastiques, un travail de thèse (Placzek, 2009) [9; 12; 36; 37; 39] a été mené à l'ONERA pour développer des modèles réduits aérodynamiques. Parmi les multiples méthodes de réduction développées par le passé, la projection de Galerkin sur une base de vecteurs issus de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) d'un ensemble de réponses du système s'est imposée en mécanique des fluides. Après avoir établi un certain nombre de propriétés de la méthode, le principe de construction d'un modèle d'ordre réduit reposant sur l'utilisation des modes POD a été rappelé puis appliqué à un système dynamique linéaire pour lequel plusieurs formu-

lations ont été développées puis comparées pour tenir compte de conditions aux limites spécifiques (Placzek et al., 2008). La procédure a ensuite été mise en œuvre afin de construire le modèle d'ordre réduit d'un fluide compressible visqueux gouverné par les équations de Navier-Stokes. Un premier modèle réduit développé pour un domaine de frontières fixes a été corrigé au moyen de diverses techniques puis validé sur l'exemple d'un profil NACA0012 positionné de manière à provoquer l'apparition d'une allée instationnaire de Von Karman dans le sillage [37]. Dans un second temps, le modèle d'ordre réduit a été étendu au cas d'un domaine mobile en faisant l'hypothèse d'un mouvement de corps rigide (Placzek et al., 2011). Ainsi, la formulation adoptée permet de se ramener à un domaine fixe afin d'éviter le problème de définition des modes POD. Ce second modèle réduit est alors appliqué à la reproduction de l'écoulement transsonique autour d'un profil NACA0064 animé d'un mouvement d'oscillation harmonique autour d'une position d'équilibre. Plutôt que de calculer explicitement les coefficients du modèle d'ordre réduit à partir de leurs expressions analytiques, une identification des termes a été pratiquée afin, d'une part, d'améliorer la précision des résultats et, d'autre part, de diminuer considérablement le temps de calcul pour la construction du modèle réduit.

### Modèles réduits de structures non linéaires

L'objectif de cette étude qui a fait l'objet d'une thèse à l'ONERA (Lülf, 2013) [13; 40; 41; 65; 67; 68; 69] est de construire des modèles réduits de structures comportant des non-linéarités géométriques de grands déplacements par la méthode de réduction de modèle par projection, qui est une des plus connues et des plus utilisées. La méthode de réduction par projection consiste à exprimer les déplacements physiques de la structure discrétisée au moyen d'une base de projection, et de projeter l'équation du mouvement de la structure sur cette base. Elle conduit à un système réduit qui conserve la même structure que le système complet et qui se prête donc aux mêmes méthodes de résolution.

La première partie de cette étude (Lülf et al., 2012, 2013b) est consacrée à la comparaison de différentes bases de projection pour les structures non-linéaires. Les bases de projection sont testées sur un exemple simple de masses et de ressorts. Les non-linéarités sont ponctuelles ou réparties et les excitations extérieures sont harmoniques ou impulsionnelles, ce qui donne en tout quatre configurations en fonction du type de non-linéarité et d'excitation. La construction des bases de projection dépend de ces configurations, certaines bases de projection dites "a posteriori", comme les bases POD (Proper Orthogonal Decomposition), SOD (Smooth Orthogonal Decomposition) et CVT (Centroidal Voronoi Tessellation), nécessitent la connaissance de la solution, même partielle, du système complet, contrairement aux bases de projection dites "a priori", comme les bases LNM (Linear Normal Mode), APR (A Priori Reduction), LELSM (Local Equivalent Linear Stiffness Method) ou les vecteurs de Ritz dépendant d'un chargement. Les bases de projection sont évaluées sous deux critères, leur précision et leur robustesse. Cette étude a permis de montrer qu'aucune base de projection n'est entièrement satisfaisante pour restituer de façon précise la réponse de la structure pour les différents types de sollicitations extérieures, ni assez robuste face aux changements de ces dernières. Cependant, deux bases de projection se montrent assez homogènes, qui sont la base des modes LNM et la base des modes POD.

La deuxième partie de cette étude (Lülf et al., 2013a, 2015) propose une méthode intégrée qui met en œuvre trois approches permettant d'obtenir des réponses transitoires précises, rapides et paramétrables des modèles réduits de structures non linéaires: la formulation polynomiale des forces non linéaires (Rizzi & Muravyov, 2001; Muravyov & Rizzi, 2003) pour l'autonomie et la rapidité, la mise à jour et l'augmentation de la base de projection pour la précision et finalement l'interpolation des bases de projection (Amsallem & Farhat, 2008; Amsallem et al., 2009) pour adapter les modèles réduits au changement des paramètres.

### I.3. Organisation de ce mémoire

Ce mémoire décrit parmi les travaux présentés ci-dessus ceux qui sont liés aux méthodes réduction de modèle et plus généralement aux méthodes de projection.

Le deuxième chapitre regroupe quelques travaux sur les fréquences et modes propres: méthode de Lanczos, sensibilités, réanalyse et suivi des fréquences et des modes propres.

Le troisième chapitre concerne les méthodes de synthèse modale.

Le quatrième chapitre concerne les structures multi-étages avec symétrie cyclique.

Le cinquième chapitre traite les méthodes de couplage fluide-structure dans les turbomachines.

Enfin, le sixième chapitre présente les conclusions et les perspectives.

L'annexe contient les publications [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 34; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15].

Les applications numériques ne sont décrites que succinctement, une description plus détaillée peut être trouvée dans les publications jointes en annexe.

Les travaux publiés dans [2; 3] concernant la dynamique des rotors et les équations de Kane, ainsi que les travaux de thèse de Placzek (2009) [9; 12] et Lülff (2013) [13; 15] sur les modèles réduits du domaine fluide et des structures non linéaires, ne sont pas décrits dans ce mémoire, cependant les publications correspondant figurent dans l'annexe.

## I.4. Liste des publications

### Mémoire de thèse (1)

- [1] TRAN, D.-M., “Étude du comportement dynamique des rotors flexibles,” Thèse de Docteur Ingénieur, INSA de Lyon, 1981.

### Articles publiés dans des revues nationales et européennes à comité de lecture (5)

- [2] LALANNE, M. & QUÉAU, J.P. & TRAN, D.-M., “Dynamique des rotors : vitesses critiques, instabilités,” *Mécanique-Matériaux-Electricité*, n° 386–387, Février–Mars 1982, p. 105–113.
- [3] TRAN, D.-M., “Une présentation de la méthode de Kane pour la formulation des équations du mouvement,” *La Recherche Aérospatiale*, n° 3, Mai-Juin 1991, p. 1–21.
- [4] TRAN, D.-M., “Méthodes de synthèse modale mixtes,” *Revue Européenne des Éléments Finis*, **1**(2), 1992, p. 137–179.
- [5] TRAN, D.-M., “Méthode de Lanczos par bloc appliquée aux problèmes de vibrations des structures amorties,” *Revue Européenne des Éléments Finis*, **4**(1), 1995, p. 33–54.
- [6] TRAN, D.-M., “Méthode de sous-structuration pour l'analyse de sensibilité et la réactualisation des modes propres des structures localement perturbées,” *Revue Européenne des Éléments Finis*, **5**(1), 1996, p. 75–99.

### Articles publiés dans des revues internationales à comité de lecture (9)

- [7] TRAN, D.-M., “Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry,” *Computers & Structures*, **79**(2), 2001, p. 209–222. DOI: 10.1016/S0045-7949(00)00121-8. IF (Impact Factor): 2.178.
- [8] TRAN, D.-M. & LABASTE, C. & LIAUZUN, C., “Methods of fluid-structure coupling in frequency and time domains using linearized aerodynamics for turbomachinery,” *Journal of Fluids and Structures*, **17**(8), 2003, p. 1161–1180. DOI: 10.1016/S0889-9746(03)00068-9. IF: 2.229.
- [9] PLACZEK, A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Hybrid Proper Orthogonal Decomposition Formulation for Linear Structural Dynamics,” *Journal of Sound and Vibration*, **318**(4-5), 2008, p. 943–964. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.05.015. IF: 1.857.
- [10] TRAN, D.-M., “Multi-parameter aerodynamic modeling for aeroelastic coupling in turbomachinery,” *Journal of Fluids and Structures*, **25**(3), 2009, p. 519–534. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2008.09.001. IF: 2.229.
- [11] TRAN, D.-M., “Component mode synthesis methods using partial interface modes. Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry,” *Computers & Structures*, **87**(17-18), 2009, p. 1141–1153. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.04.009. IF: 2.178.
- [12] PLACZEK, A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “A nonlinear POD-Galerkin reduced-order model for compressible flows taking into account rigid body motions,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **200**(49-52), 2011, p. 3497–3514. DOI: 10.1016/j.cma.2011.08.017. IF: 2.626.

- [13] LÜLF, F. A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems: A comparative study,” *Journal of Sound and Vibration* **332**(15), 2013, p. 3897–3921. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.02.014. IF: 1.857.
- [14] TRAN, D.-M., “Reduced models of multi-stage cyclic structures using cyclic symmetry reduction and component mode synthesis,” *Journal of Sound and Vibration* **333**(21), 2014, p. 5443–5463. DOI: 10.1016/j.jsv.2014.06.004. IF: 1.857.
- [15] LÜLF, F. A. & TRAN, D.-M. & MATTHIES, H. G. & OHAYON, R., “An integrated method for the transient solution of reduced order models of geometrically nonlinear structures,” *Computational Mechanics*, **55**(2), 2015, p. 327–344. DOI: 10.1007/s00466-014-1103-4. IF: 2.044.

### Communications dans des congrès avec comité de lecture et acte (26)

- [16] TRAN, D.-M., “Equations of motion of multibody systems in the ESA-MIDAS software,” *Proceedings of the International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing*, ESTEC, Noordwijk, Pays Bas, 24-26 Avril 1991, ESA SP-321, p. 871–876.
- [17] TRAN, D.-M., “Équations dynamiques de Kane et applications aux systèmes multicorps,” *Résumé des communications du 10ème Congrès Français de Mécanique*, Paris, 2-6 Sept. 1991, Tome 4, p. 221–224.
- [18] TRAN, D.-M., “Hybrid methods of component mode synthesis using attachment modes or residual attachment modes,” *Proceedings of the 2nd ESA Workshop on Modal Representation of Flexible Structures by Continuum Methods*, ESTEC, Noordwijk, Pays Bas, 3-5 Juin 1992, ESA WPP-034, p. 153–163.
- [19] TRAN, D.-M., “Méthodes de synthèse modale mixtes,” *Actes du Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 11-14 Mai 1993, Editions Hermès, p. 874–883.
- [20] TRAN, D.-M., “Hybrid methods of component mode synthesis,” *Actes du Forum International Aéroélasticité et Dynamique des Structures 1993*, Strasbourg, 24-26 Mai 1993, Vol. 2, p. 911–925.
- [21] TRAN, D.-M., “Sensibilité et réactualisation des modes propres par sous-structuration,” *Actes du Deuxième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 16-19 Mai 1995, Ed. Hermès, p. 705–710.
- [22] TRAN, D.-M., “Substructuring and modal synthesis for eigenmode sensitivity and reanalysis,” *Proceedings of the International Congress on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures. Non-linear, Damped and Non-deterministic Cases*, Lyon, France, 5-6 October 1995, ed. Louis Jézéquel, A. A. Balkema, 1997, p. 97–108.
- [23] TRAN, D.-M., “Hybrid method for eigen sensitivity and reanalysis of locally perturbed structures by substructuring,” *Proceedings of the ESA Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing*, Noordwijk, Pays Bas, 27-29 Mars 1996, ESA SP-386, p. 1327–1334.
- [24] TRAN, D.-M., “Substructure method for eigen sensitivity analysis of locally perturbed structures,” *Proceedings of the ESA International Workshop on Advanced Mathematical Methods in the Dynamics of Flexible Bodies*, ESTEC, Noordwijk, Pays Bas, 3-5 Juin 1996, ESA WPP-113, Jan. 1998, p. 339–347.
- [25] TRAN, D.-M., “Méthodes de synthèse modale utilisant les modes d’interface” *Actes du Quatrième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 18-21 Mai 1999.
- [26] TRAN, D.-M., “A comparison of component mode synthesis methods for cyclic structures” *Proceedings of the 2000 ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition : Dynamics, Acoustics and Simulations*, DE-Vol. 108, DSC-Vol. 68, p. 23–30, Orlando, Florida, USA, 5-10 Nov. 2000.
- [27] TRAN, D.-M. & LABASTE, C. & LIAUZUN, C., “Method of fluid-structure coupling in frequency domain for turbomachineries”, *Proceedings of The Eighth International Congress on Sound and Vibration*, Hong Kong, Chine, 2-6 Juillet 2001, p. 571–578.
- [28] LIAUZUN, C. & TRAN, D.-M., “Method of fluid structure coupling in time domain using linearized aerodynamics for turbomachineries,” *Proceedings of the 2002 ASME International Engineering Congress and Exposition*, Vol. 3, New Orleans, Louisiana, USA, 17-22 Nov. 2002.
- [29] TRAN, D.-M. & LIAUZUN, C., “Frequency and time domain fluid-structure coupling methods for turbomachineries,” *Proceedings of the 10th International Symposium On Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines ISUAAAT*, ed. Kenneth C. Hall, Robert E. Kielb, Jeffrey P. Thomas, Springer, 2006, p. 397–408. Duke University, Durham, USA, 7-11 Sept. 2003.

- [30] TRAN, D.-M. & POIRION, F. & LIAUZUN, C., “Method of Fluid-Structure Coupling for Turbomachinery with Multi-Parameter Modeling of Generalized Aerodynamic Forces,” *Proceedings of the Sixth World Congress on Computational Mechanics WCCM VI & APCOM’04*, Beijing, Chine, 5-10 Sept. 2004.
- [31] DUVAUCHELLE, F. & TRAN, D.-M., “Reduced order models of rotating mistuned bladed disk assemblies using component mode synthesis methods with interface modes,” *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2004*, Leuven, Belgique, 20-22 Sept. 2004.
- [32] TRAN, D.-M. & POIRION, F. & LIAUZUN, C., “Multi-Parameter Aerodynamic Modeling for Fluid-Structure Coupling in Turbomachinery,” *Proceedings of the Seventh International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics for Internal Flows ISAI7*, Tokyo, Japon, 11-15 Sept. 2005, Vol. 1, p. 83-88.
- [33] DUVAUCHELLE, F. & TRAN, D.-M., “Rotating mistuned bladed disk assembly dynamic response prediction using component mode synthesis methods with interface modes,” *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 2005, 20th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Long Beach, CA, USA, 24-28 Sept. 2005.
- [34] TRAN, D.-M., “Frequency and mode follow-up for evolutive structures,” *Proceedings of the Second International Conference on Dynamics, Vibration and Control (ICDVC-2006)*, Beijing, Chine, 23-26 Août 2006.
- [35] TRAN, D.-M., “Partial interface modes in component mode synthesis,” *WCCM8-ECCOMAS 2008*, Venise, Italie, 30 Juin - 5 Juillet 2008.
- [36] PLACZEK, A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Evaluation of an hybrid POD formulation for responses under prescribed displacements,” *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2008*, Leuven, Belgique, 15-17 Sept. 2008.
- [37] PLACZEK, A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Nonlinear POD-based models for aeroelastic compressible flows,” *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD 2009*, Seattle, USA, 21-25 Juin 2009.
- [38] TRAN, D.-M., “Component mode synthesis method using partial interface modes. Application to tuned and mistuned bladed disk with local non-linearity,” *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 2009, 22th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, San Diego, USA, 30 Août-2 Sept. 2009.
- [39] PLACZEK, A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Reduced order model identification by the POD for a rigidly moving structure in a nonlinear compressible flow,” *IV European Congress on Computational Mechanics (ECCM-ECCOMAS 2010)*, Paris, France, 16-21 Mai 2010.
- [40] LÜLF, F.A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Comparison of some reduction bases approaches for nonlinear structural dynamic systems under different excitations,” *VI European Congress on Computational Methods (ECCM, ECCOMAS 2012)*, Vienna, Austria, 10-14 Septembre 2012.
- [41] LÜLF, F.A. & TRAN, D.-M. & OHAYON, R., “Approaches for the construction of an autonomous reduced model of a non-linear structure for transient dynamic solution,” *Actes du 11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2013)*, Giens, Var, France, 13-17 Mai 2013.

#### Rapports d'études scientifiques et techniques (28)

- [42] TRAN, D.-M., “Système Titus : Introduction de la méthode d'itérations sur un sous-espace de recherche de valeurs propres et vecteurs propres,” Framatome, 1982.
- [43] TRAN, D.-M., “Système Titus : Introduction de l'élimination de Guyan dans la méthode sous-espace Lanczos de recherche de valeurs propres et vecteurs propres,” Framatome, 1983.
- [44] TRAN, D.-M., “SYSTUS : Introduction de la méthode sous-espace Lanczos par bloc pour les problèmes aux valeurs propres symétriques généralisés. Application aux structures amorties” Framatome, 1986.
- [45] TRAN, D.-M., “Les méthodes de synthèse modale dans SYSTUS,” Framasoft, 1988.
- [46] TRAN, D.-M., “Simulation of the HERA kinematics/dynamics by use of the ESA-MIDAS software,” EWP-1557, ESA/ESTEC, 1989.

- [47] TRAN, D.-M., "Simulation of the radial boom deployment of ISEE-B with the ESA-MIDAS software," EWP-1566, ESA/ESTEC, 1990.
- [48] TRAN, D.-M., "Equations of motion of multibody systems in the ESA-MIDAS software," ESA STR-232, ESA/ESTEC, Juillet 1990.
- [49] TRAN, D.-M., "Effets locaux et globaux en dynamique des structures : Multi-sous-structuration," RT 46/4242 RY 012 R, ONERA, Mars 1992.
- [50] TRAN, D.-M., "Multi-sous-structuration dynamique : méthodes utilisant des modes à interfaces libres et méthodes mixtes (modes libres et encastrés)," RT 48/4242 RY 020 R, ONERA, Octobre 1993.
- [51] TRAN, D.-M., "Développement de méthodes de calcul des perturbations de la base modale d'une structure induites par des perturbations des matrices de rigidité et de masse," RT 14/3313 RN 043 R, ONERA, Novembre 1994.
- [52] TRAN, D.-M. & PIET-LAHANIER, N., "Réponse transitoire de structures viscoélastiques. Implantation dans le logiciel Astral du CNES/DLA," RT 26/3596 RY 031 R, ONERA, Octobre 1995.
- [53] TRAN, D.-M. & PIET-LAHANIER, N., "Rayonnement de plaque finie immergée : prise en compte de non linéarités acoustiques," RT 29/3596 RY 056 R, ONERA, Octobre 1996.
- [54] TRAN, D.-M. & PIET-LAHANIER, N., "Rayonnement de plaque finie immergée avec prise en compte de non linéarités acoustiques : application numérique," RTI 31/3596 RN 001 R, ONERA, Avril 1997.
- [55] TRAN, D.-M. & DESANTI, A. & ELOY, C., "Mise en oeuvre de la méthode de Lanczos de recherche de fréquences et modes propres," RTI 18/2894 DDSS/N, ONERA, Octobre 1998.
- [56] TRAN, D.-M. & ROYER, C., "Couplage fréquentiel dans le logiciel AEROMECA," RT 62/1621 DDSS/Y, ONERA, Janvier 1999.
- [57] TRAN, D.-M., "RENATA, Phase 2, Action C1. Étude des problèmes de résonance acoustique et de suivi de modes," RT 7/01564 DDSS, ONERA, Octobre 2000.
- [58] TRAN, D.-M. & LIAUZUN, C., "RENATA, Phases 3 et 4, Action C1. Méthodologie de couplage faible – Logiciel AEROMECA," RT 8/05515 DDSS, ONERA, Octobre 2003.
- [59] TRAN, D.-M., "Méthodes de synthèse modale avec des modes d'interface partiels. Modèles réduits des systèmes disque-aubes désaccordés," RT 1/08841 DDSS, ONERA, Février 2005.
- [60] TRAN, D.-M., "DYNA: Lissage multi-paramètre multi-variable des forces aérodynamiques généralisées dans le champs compresseur pour le couplage aéroélastique," RT 6/09689 DDSS, ONERA, Décembre 2006.
- [61] TRAN, D.-M., "Component mode synthesis methods with partial interface modes. Application to the model reduction of a tuned and mistuned bladed disk," RT 1/12328 DDSS, ONERA, Novembre 2007.
- [62] TRAN, D.-M., "Model reduction using component mode synthesis methods and proper orthogonal decomposition. Application to tuned and mistuned bladed disks," RT 1/13796 DADS, ONERA, Décembre 2008.
- [63] TRAN, D.-M., "Extension of cyclic symmetry reduction to multi-stage bladed disks," RT 1/14845 DADS, ONERA, Janvier 2010.
- [64] TRAN, D.-M., "Reduced models of multi-stage bladed disk assemblies using cyclic symmetry and component modes synthesis," RT 1/16567 DADS, ONERA, Mars 2011.
- [65] TRAN, D.-M. & LÜLF, F.A., "Common reduced bases for non-linear structural dynamic systems: a comparative study," RT 1/18203 DADS, ONERA, Décembre 2011.
- [66] TRAN, D.-M., "Reduced models of multi-stage bladed disks using cyclic symmetry and component mode synthesis," RT 1/19721 DADS, ONERA, Décembre 2012.
- [67] TRAN, D.-M., "Modèles réduits autonomes des structures non linéaires," RT 1/21169 DADS, ONERA, Février 2014.
- [68] TRAN, D.-M., "PRC AEROVISTA Action M2.1 : Modèles réduits par projection de structures non linéaires en présence de grands déplacements," RT 1/16508 DADS, ONERA, Juin 2014.
- [69] TRAN, D.-M., "Modèles réduits autonomes des structures non linéaires en rotation," RT 1/22410 DADS, ONERA, Janvier 2015.

## Chapitre II

# TRAVAUX SUR LES FRÉQUENCES ET MODES PROPRES

### II.1. Méthode de Lanczos de recherche de fréquences et modes propres

#### II.1.1. Introduction

La méthode de Lanczos (1950) classique à un vecteur permet initialement de générer de façon itérative des vecteurs orthogonaux et de transformer une matrice  $\mathbf{A}$  symétrique en une matrice tridiagonale symétrique  $\mathbf{T}$  de même dimension et ayant les mêmes valeurs propres que  $\mathbf{A}$ . Elle a été délaissée dans un premier temps au profit des méthodes de Givens et de Householder à cause de la dégradation de l'orthogonalité entre les vecteurs de Lanczos au cours des itérations. Les travaux de Paige (1971, 1972, 1976) ont cependant montré qu'une tridiagonalisation partielle de  $\mathbf{A}$  avec les premiers vecteurs de Lanczos conduit à une matrice tridiagonale symétrique de dimension réduite dont les valeurs propres convergent rapidement vers les plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Cette méthode de Lanczos classique à un vecteur a été utilisée par plusieurs auteurs (Newman & Pipano, 1973; Nour-Omid et al., 1983; Weingarten et al., 1983; Chang, 1986) pour calculer les premières fréquences et modes propres de structures non amorties, ce qui revient, moyennant une décomposition de Cholesky de la matrice de rigidité après un éventuel décalage, à déterminer les plus grandes valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique. La version par bloc de la méthode de Lanczos classique a été développée (Golub & Undergood, 1977) pour calculer les fréquences multiples.

La méthode de Lanczos a été ensuite appliquée aux systèmes généralisés aux valeurs propres  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$  où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices symétriques et  $\mathbf{B}$  est positive. Cette méthode de Lanczos généralisée a été présentée dans les versions à un vecteur (Nour-Omid, 1984; Matthies, 1985) et par bloc (Nour-Omid, 1985; Matthies, 1985). Ces travaux utilisent le fait que  $\mathbf{B}$  est positive et remplace le produit scalaire canonique par le produit scalaire associé à  $\mathbf{B}$ . Carnoy et Gérardin (1985) ont présenté une version à un vecteur qui s'applique au cas où  $\mathbf{B}$  est non positive, ce qui conduit une matrice tridiagonale non symétrique avec des valeurs propres complexes. Notons que la méthode de Lanczos a été également appliquée aux matrices anti-symétriques (Bauchau, 1986) ou non-symétriques (Gérardin, 1979) et au calcul de la réponse (Nour-Omid, 1984; Crawley, 1988; Chen & Taylor, 1989).

Dans ce travail, on propose une méthode de Lanczos par bloc pour les systèmes généralisés aux valeurs propres dans lesquels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont symétriques mais pas nécessairement définies positives. Cette méthode est appliquée au calcul des fréquences et modes complexes des structures amorties dont les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement sont symétriques. Elle permet notamment d'extraire des fréquences multiples avec toutes leurs multiplicités, ce qui n'est pas toujours le cas de la méthode de Lanczos à un vecteur. Elle s'applique également aux structures non amorties et en particulier pour calculer les fréquences autour d'une valeur fixée.

#### II.1.2. Système généralisé aux valeurs propres pour les structures amorties

On considère le système aux valeurs propres associé au mouvement libre d'une structure amortie :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + r\mathbf{C}\mathbf{x} + r^2\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité, symétrique et positive,  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement, symétrique, et  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse, symétrique et positive.

Le système (1) peut encore s'écrire sous forme d'un système de dimension double :

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + r\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ r\mathbf{x} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$



On introduit le décalage  $\alpha \in \mathbb{R}$  et le facteur d'échelle  $s \in \mathbb{R}_+^*$  en posant :

$$\lambda = -\frac{s}{r - \alpha}. \quad (4)$$

Le système (2) devient :

$$\mathbf{A}' \mathbf{y} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}' \mathbf{y} \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \alpha \mathbf{C} & \alpha \mathbf{M} \\ \alpha \mathbf{M} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (6)$$

et

$$\mathbf{B}' = s \mathbf{B}. \quad (7)$$

Le décalage  $\alpha$  est choisi de façon que la matrice

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{C} + \alpha^2 \mathbf{M} \quad (8)$$

soit inversible ( $\alpha = 0$  si  $\mathbf{K}$  est inversible) tandis que le facteur d'échelle  $s$  sert à équilibrer les ordres de grandeur des termes de  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$ .

Les matrices  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  sont symétriques, cependant aucune d'elles n'est définie positive. On ne peut donc pas appliquer la méthode de Lanczos classique qui nécessite la décomposition de Cholesky de l'une des deux matrices.

En supposant dans un premier temps que  $\mathbf{A}'$  est inversible, on écrit Eq. (5) sous forme :

$$\mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{B}' = s \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^{-1} (\mathbf{C} + \alpha \mathbf{M}) & \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{M} \\ -\mathbf{K}'^{-1} \mathbf{K} & \alpha \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

L'expression de  $\mathbf{D}$  montre que seule  $\mathbf{K}'$  doit être inversible tandis que  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  peuvent être singulières. En effet, même si  $\mathbf{A}'$  n'est pas inversible, on peut toujours aboutir au système (9), avec  $\mathbf{D}$  défini par Eq. (10), en partant directement de Eq. (1). On a en tous cas :

$$\mathbf{A}' \mathbf{D} = \mathbf{B}', \quad (11)$$

ce qui entraîne,  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  étant symétriques :

$$\mathbf{B}' \mathbf{D} = {}^t \mathbf{D} \mathbf{B}'. \quad (12)$$

On considère la forme bilinéaire symétrique  $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $\mathbf{B}'$  :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t \mathbf{u} \mathbf{B}' \mathbf{v}. \quad (13)$$

On définit la "norme" associée à  $b$  :

$$\|\mathbf{u}\|_b = \sqrt{|b(\mathbf{u}, \mathbf{u})|} = \sqrt{|{}^t \mathbf{u} \mathbf{B}' \mathbf{u}|}. \quad (14)$$

De Eq. (12), on déduit que  $\mathbf{D}$  est auto-adjointe par rapport à  $b$ . Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , on a :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{D} \mathbf{v}) = b(\mathbf{D} \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (15)$$

Cette propriété de  $\mathbf{D}$  permet d'appliquer l'algorithme de Lanczos au système non symétrique (9), à condition de remplacer le produit scalaire  ${}^t \mathbf{u} \mathbf{v}$  par  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et la norme euclidienne  $\|\mathbf{u}\|$  par  $\|\mathbf{u}\|_b$ . Dans ce qui suit, l'orthogonalité entre deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  se rapporte donc à  $b$  :  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ .

### II.1.3. Méthode de Lanczos par bloc

La méthode de Lanczos généralisée à un vecteur permet de résoudre le système non symétrique (9), cependant les valeurs propres multiples ne sont pas fournies avec toutes leurs multiplicités. Ceci est remédié avec la méthode de Lanczos généralisée par bloc. Soit  $l$  un entier fixé,  $l \geq 1$ , appelé taille des blocs et qui est supérieur ou égal au plus grand degré de multiplicité attendu des fréquences recherchées. Le cas  $l = 1$  correspond à la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur.

La méthode de Lanczos généralisée par bloc permet de générer  $m$  blocs de Lanczos  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  qui sont des matrices de dimension  $2n \times l$ ,  $n$  étant la dimension du système (1), et qui vérifient les relations d'orthonormalité :

$$\begin{cases} {}^t\mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_j = \mathbf{0} & \text{si } i \neq j, \\ {}^t\mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_i = \mathbf{E}_i \end{cases} \quad (16)$$

où  $\mathbf{E}_i$  est une matrice diagonale de dimension  $l$  avec les termes diagonaux égaux à 1 ou  $-1$ .

Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice formée par  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m], \quad (17)$$

et

$$\mathbf{E} = {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}' \mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_m). \quad (18)$$

En reportant dans Eq. (9) le changement de variable :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{z} \quad (19)$$

puis en prémultipliant Eq. (9) par  $\mathbf{E} {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}'$ , on obtient un système réduit de dimension  $ml$  :

$$\mathbf{T} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z} \quad (20)$$

avec

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{Q}. \quad (21)$$

$\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale par blocs, non symétrique :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{S}_1 & & & \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{H}_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_{m-1} & \\ & & & \mathbf{R}_m & \mathbf{H}_m \end{bmatrix}. \quad (22)$$

$\mathbf{H}_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  et  $\mathbf{S}_i$  sont des matrices carrées de dimension  $l$ , avec  $\mathbf{R}_i$  triangulaire supérieure et  $\mathbf{S}_i$  triangulaire inférieure.  $\mathbf{T}$  est en fait une matrice "bande" de demi-largeur de bande  $l + 1$ .

Les valeurs propres  $\lambda$ , réelles et complexes, de  $\mathbf{T}$  sont déterminées par une transformation sous forme de Hessenberg puis en utilisant la méthode du QR (Smith & et al., 1976). Ce sont des approximations des valeurs propres de plus grands modules de  $\mathbf{D}$ . Les valeurs propres et les vecteurs propres complexes sont deux à deux complexes conjugués. Les valeurs propres de Eq. (1) sont déduites de  $\lambda$  par Eq. (4) :

$$r = \alpha - \frac{s}{\lambda} \quad (23)$$

et les vecteurs propres  $\mathbf{x}$  de Eq. (1) sont obtenus en utilisant Eqs. (19) et (3). Les pulsations propres sont les parties imaginaires positives de  $r$ .

Les blocs de Lanczos  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  sont générés en utilisant l'algorithme suivant. On part d'un bloc  $\mathbf{P}_0$  :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D} \mathbf{W} \quad (24)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de dimension  $2n \times l$  générée aléatoirement.

A chaque itération  $i = 1, \dots, m$ , on effectue :

$$1) \text{ Décomposition QR de } \mathbf{P}_{i-1} \text{ en } \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i \quad (25)$$

$$2) \mathbf{E}_i = {}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_i \quad (26)$$

$$3) \mathbf{S}_{i-1} = \mathbf{E}_{i-1} {}^t \mathbf{R}_i \mathbf{E}_i \quad (\text{avec } \mathbf{S}_0 = \mathbf{0}) \quad (27)$$

$$4) \mathbf{P}'_i = \mathbf{D} \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{S}_{i-1} \quad (\text{avec } \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}) \quad (28)$$

$$5) \mathbf{H}_i = \mathbf{E}_i {}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{P}'_i \quad (29)$$

$$6) \mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i - \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i \quad (30)$$

On a la relation :

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{D} \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i. \quad (31)$$

La décomposition QR de  $\mathbf{P}_{i-1}$  consiste à trouver une matrice  $\mathbf{Q}_i$  dont les vecteurs colonnes sont orthonormés et une matrice carrée triangulaire supérieure  $\mathbf{R}_i$  telles que  $\mathbf{P}_{i-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$ . Cette décomposition est réalisée en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt adapté à la forme bilinéaire  $b$ .

De la même façon que pour la méthode à un vecteur, on démontre par récurrence que chaque bloc  $\mathbf{Q}_i$  est orthogonal aux blocs précédents  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}$  et que la matrice  $\mathbf{T}$  définie par Eq. (22) et dont les sous-matrices  $\mathbf{H}_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  et  $\mathbf{S}_i$  sont celles fournies par l'algorithme vérifie bien Eq. (21).

A cause de la dégradation de l'orthogonalité au cours des itérations, il est indispensable de réorthogonaliser explicitement les blocs des Lanczos ainsi que les vecteurs dans chaque bloc. Cette réorthogonalisation est effectuée à deux niveaux. Le premier, proposé par Matthies (1985), consiste à réorthogonaliser systématiquement deux fois le bloc  $\mathbf{P}_i$  aux blocs  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_i$ , avant la décomposition QR. Ceci est réalisé en ajoutant dans l'algorithme une étape supplémentaire 6') après l'étape 6) :

$$6') \quad \mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{Q}_j (\mathbf{E}_j {}^t \mathbf{Q}_j \mathbf{B}' \mathbf{P}_i^{k-1}) \quad \text{avec } \mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i \text{ et } k = 1, 2 \quad (32)$$

après laquelle  $\mathbf{P}_i^2$  devient le nouveau bloc  $\mathbf{P}_i$ .

Le deuxième niveau consiste à réorthogonaliser itérativement chaque bloc  $\mathbf{Q}_i$  aux blocs précédents  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}$ . Ceci est réalisé en ajoutant une étape supplémentaire 1') après l'étape 1) :

$$1') \quad \mathbf{Q}_i^k = \mathbf{Q}_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{Q}_j (\mathbf{E}_j {}^t \mathbf{Q}_j \mathbf{B}' \mathbf{Q}_i^{k-1}) \quad \text{avec } \mathbf{Q}_i^0 = \mathbf{Q}_i \text{ et } k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

On itère sur  $k$  jusqu'à ce qu'on obtienne une matrice  $\mathbf{Q}_i^k$  dont les vecteurs colonnes sont numériquement orthogonaux à tous les vecteurs composant les blocs  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}$ . Après orthogonalisation et normalisation des vecteurs de  $\mathbf{Q}_i^k$ , ce dernier devient le nouveau bloc  $\mathbf{Q}_i$  et on continue l'algorithme.

Le nombre  $m$  des blocs de Lanczos est déterminé soit en calculant les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  à chaque itération puis en testant la convergence sur celles de plus grandes modules, soit en utilisant la formule empirique :

$$m = \max \left( 2 \left[ \frac{2p}{l} \right] + 2, 2 \left[ \frac{6}{l} \right] + 2 \right) \quad (34)$$

où  $p$  est le nombre de fréquences propres recherchées et  $[\cdot]$  est la partie entière.

On remarque que les matrices de dimension double  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{D}$  n'interviennent que dans les produits du type  $\mathbf{B}' \mathbf{u}$  et  $\mathbf{D} \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u} = {}^t [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$  est un vecteur de dimension  $2n$ . En effet, on a :

$$\mathbf{B}' \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s(\mathbf{C} \mathbf{u}_1 + \mathbf{M} \mathbf{u}_2) \\ s \mathbf{M} \mathbf{u}_1 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

et

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2) \\ \alpha\mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2) - s\mathbf{u}_1 \end{array} \right\}. \quad (36)$$

L'opération  $\mathbf{D}\mathbf{u}$  ne nécessite donc qu'une seule résolution d'un système linéaire de dimension  $n$  :  $\mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2)$ . On n'a en fait pas besoin de former explicitement  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{D}$ .

### Cas des structures non amorties

L'équation du mouvement libre d'une structure non amortie s'écrit :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (37)$$

On introduit le décalage  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et le facteur d'échelle  $s \in \mathbb{R}_+^*$  en posant :

$$\lambda = \frac{s}{\omega^2 + \alpha}. \quad (38)$$

Le système (37) devient :

$$\mathbf{K}'\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{M}'\mathbf{x} \quad (39)$$

où  $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \alpha\mathbf{M}$  est définie positive et en particulier inversible et  $\mathbf{M}' = s\mathbf{M}$  est positive.

On écrit Eq. (39) sous la forme :

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (40)$$

avec  $\mathbf{D} = \mathbf{K}'^{-1}\mathbf{M}'$  vérifiant :  $\mathbf{M}'\mathbf{D} = {}^t\mathbf{D}\mathbf{M}'$ .

On peut donc appliquer l'algorithme de Lanczos généralisé par bloc en remplaçant  $\mathbf{A}'$  par  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{B}'$  par  $\mathbf{M}'$ . On a en particulier :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}\mathbf{M}'\mathbf{v}. \quad (41)$$

Comme  $\mathbf{M}'$  est positive, il en résulte que  $b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) > 0$ ,  $\mathbf{E}$  défini par Eq. (18) est la matrice d'identité. La matrice  $\mathbf{T}$  définie par Eq. (21) est symétrique et ses valeurs propres  $\lambda$  sont réelles.

D'autre part,  $\mathbf{K}'$  n'a pas besoin d'être positive car on n'effectue pas de décomposition de Cholesky. On peut donc introduire un décalage  $\alpha$  négatif. En particulier, si l'on veut calculer les pulsations propres autour d'une valeur fixée  $\omega_0$  et non plus les plus petites, on prend alors :

$$\alpha = -\omega_0^2. \quad (42)$$

L'algorithme de Lanczos fournit des approximations des valeurs propres :

$$\lambda = \frac{s}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (43)$$

de plus grandes valeurs absolues de Eq. (40), ce qui correspondent à des pulsations propres  $\omega$  les plus proches de  $\omega_0$ .

Comme les valeurs propres sont réelles, le nombre  $m$  des blocs de Lanczos donné par Eq. (34) doit être divisé par 2.

### II.1.4. Résultats - Conclusions

Trois applications numériques ont été traitées dans (Tran, 1995, *cf.* Annexe) :

- un système de masses et ressorts avec amortissement proportionnel. Les fréquences complexes sont comparées aux solutions analytiques.

- un rotor composé d'un arbre, d'un disque et des paliers, avec amortissement symétrique quelconque (Tran, 1981). Les fréquences doubles et complexes de ce système sont comparées à celles fournies par une méthode d'itérations simultanées qui a été développée pour les matrices non symétriques (Borri & Mantegazza, 1977).

- une plaque rectangulaire en flexion dont on cherche les fréquences autour d'une valeur donnée. On compare le temps de calcul à celui de la méthode d'itérations sur un sous-espace (Bathe & Wilson, 1976).

Les résultats obtenus sur les exemples traités concordent avec des résultats théoriques ou ceux provenant d'autres méthodes. On note que la méthode de Lanczos est plus rapide que la méthode d'itérations sur un sous-espace.

On a donc présenté une méthode de Lanczos généralisée par bloc qui permet de calculer les fréquences et modes propres de structures amorties avec des matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  symétriques. Cette méthode est particulièrement adaptée pour le calcul des fréquences multiples. Cependant, en cas d'absence de ces dernières, il vaut mieux d'utiliser la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur qui est plus performante. Pour les structures non amorties, cette méthode permet également de calculer les fréquences autour d'une valeur fixée. Cependant, pour déterminer les premières fréquences et s'il n'y pas de fréquence multiple, on préférera la méthode de Lanczos classique à un vecteur.

## II.2. Sensibilité et réanalyse des fréquences et des modes propres

### II.2.1. Introduction

La première partie de ce travail concerne le calcul des sensibilités (dérivées premières) des modes propres d'une structure non amortie par rapport aux paramètres de conception, de modélisation ou de fonctionnement. Ces dérivées sont notamment utilisées dans les problèmes de recalage, d'identification et d'optimisation des structures. On suppose que les matrices de rigidité et de masse sont symétriques et que les fréquences propres sont distinctes. Si le calcul des dérivées des valeurs propres ne pose aucun problème (Wittrick, 1962), il n'en est pas de même pour les modes propres, car on est amené à résoudre des systèmes linéaires avec des matrices singulières. La méthode modale proposée en premier lieu par Fox et Kapoor (1968) ne donne pas de résultats satisfaisants, à moins qu'un nombre important de modes propres soit pris en compte dans l'approximation des solutions. La méthode directe proposée par Nelson (1976) fournit les solutions exactes des dérivées des modes propres au prix de la résolution de plusieurs systèmes linéaires de grande taille, avec différentes matrices et différents seconds membres. La méthode modale modifiée proposée par Wang (1991) apporte des améliorations à la méthode modale en introduisant la contribution statique des modes propres résiduels. Ces méthodes ont été comparées dans (Sutter et al., 1988; Wang, 1991; Liu, Chen, Yu & Zhao, 1994; Liu, Chen & Zhao, 1994). Le cas des matrices non symétriques a été traité dans (Rogers, 1970; Garg, 1973; Plaut & Huseyin, 1973; Rudisill, 1974; Nelson, 1976; Akgün, 1994) et celui des fréquences multiples dans (Ojalvo, 1988; Mills-Curran, 1988; Lim et al., 1989; Juang et al., 1989; Dailey, 1989; Mills-Curran, 1990; Bernard & Bronowicki, 1994). Des synthèses ont été présentées dans (Adelman & Haftka, 1986; Murthy & Haftka, 1988).

On propose dans ce travail une méthode mixte combinant la méthode directe et la méthode modale, qui s'applique aux structures localement perturbées et dans laquelle la structure est décomposée en sous-structures. Pour les sous-structures situées assez loin des perturbations, on utilise une représentation modale : les dérivées des modes propres sont exprimées comme des combinaisons linéaires des premiers modes propres de la structure, restreints à ces sous-structures. Pour les autres sous-structures, on utilise une représentation éléments finis comme dans la méthode directe, seuls les degrés de liberté de liaison aux frontières avec les sous-structures de type modal sont exprimés en fonction des modes propres. L'assemblage des sous-structures se fait à l'aide des coordonnées modales. On aboutit à des systèmes linéaires couplés dont les inconnues sont les coordonnées modales et les degrés de liberté internes des sous-structures de type direct. Pour ces dernières, on peut également effectuer une condensation statique aux degrés de liberté de frontières avant l'assemblage, ce qui réduit fortement la taille du système couplé.

Dans la deuxième partie, on utilise le même principe que précédemment pour réanalyser les solutions propres des structures localement perturbées.

## II.2.2. Calcul des sensibilités des modes propres

### II.2.2.1. Dérivées des solutions propres

On considère l'ensemble des solutions propres  $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , du problème des vibrations libres d'une structure non amortie :

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_i - \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (44)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont les matrices symétriques de rigidité et de masse.

On suppose que les valeurs propres  $\lambda_i$  sont toutes distinctes. Les modes propres normés par rapport à la matrice de masse et vérifient les relations d'orthogonalité :

$${}^t \mathbf{x}_i \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}. \quad (45)$$

Les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  dépendent de  $p$  paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ . Les dérivées partielles  $\mathbf{K}_{,j} = \partial \mathbf{K} / \partial \alpha_j$  et  $\mathbf{M}_{,j} = \partial \mathbf{M} / \partial \alpha_j$  étant supposées connues, on propose de déterminer les dérivées  $\lambda_{i,j}$  et  $\mathbf{x}_{i,j}$  des solutions propres  $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$  (l'indice  $,j$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $\alpha_j$ ).

En dérivant Eq. (44) par rapport à  $\alpha_j$ , on obtient :

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{f}_{i,j} \quad (46)$$

avec

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}, \quad (47)$$

$$\mathbf{f}_{i,j} = \lambda_{i,j} \mathbf{M} \mathbf{x}_i - (\mathbf{K}_{,j} - \lambda_i \mathbf{M}_{,j}) \mathbf{x}_i. \quad (48)$$

Les dérivées des valeurs propres ne dépendent que de  $\mathbf{K}_{,j}$ ,  $\mathbf{M}_{,j}$  et de la solution propre  $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$  :

$$\lambda_{i,j} = {}^t \mathbf{x}_i (\mathbf{K}_{,j} - \lambda_i \mathbf{M}_{,j}) \mathbf{x}_i. \quad (49)$$

Le calcul de  $\mathbf{x}_{i,j}$  consiste à résoudre le système linéaire (46) dans lequel la matrice  $\mathbf{A}_i$  est singulière. Comme  $\mathbf{A}_i$  est symétrique et que son noyau est engendré par le seul vecteur propre  $\mathbf{x}_i$ , la relation  ${}^t \mathbf{x}_i \mathbf{f}_{i,j} = 0$  assure l'existence d'une solution pour le système (46) (alternative de Fredholm) (Strang, 1980). Les solutions générales de Eq. (46) s'écrivent sous la forme  $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{y}_{i,j} + c \mathbf{x}_i$  où  $\mathbf{y}_{i,j}$  est une solution particulière de Eq. (46) et  $c$  est une constante.

D'autre part, en dérivant Eq. (45) par rapport à  $\alpha_j$ , on a :

$$2 {}^t \mathbf{x}_i \mathbf{M} \mathbf{x}_{i,j} + {}^t \mathbf{x}_i \mathbf{M}_{,j} \mathbf{x}_i = 0. \quad (50)$$

Cette dernière relation permet d'obtenir une solution de Eq. (46) qui soit compatible avec la norme choisie pour  $\mathbf{x}_i$ , ici la norme Eq. (45).

Le calcul de  $\mathbf{x}_{i,j}$  peut être effectué par les méthodes directe, modale et modale modifiée (Tran, 1996). On présente ici la méthode mixte directe-modale par une décomposition en sous-structures.

### II.2.2.2. Décomposition en sous-structures

On suppose que la structure est localement perturbée, c'est à dire que  $\mathbf{K}_j$  et  $\mathbf{M}_j$  sont nulles en dehors des régions limitées de la structure. Pour simplifier, on décompose la structure  $S$  en deux sous-structures  $S^1$  et  $S^2$ , de sorte que la zone perturbée soit située à l'intérieur de  $S^1$  et assez loin de la frontière  $L$  entre les deux sous-structures (Fig. II.1).  $S^1$  sera de type direct et  $S^2$  de type modal. L'extension au cas de plusieurs sous-structures ne pose aucune difficulté (Tran, 1996).

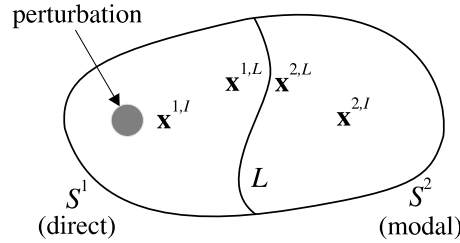


Figure II.1 : Décomposition en deux sous-structures

Pour chaque sous-structure  $S^k$ , le vecteur  $\mathbf{x}^k$  des  $n^k$  degrés de liberté est partitionné de façon symbolique en :  $\mathbf{x}^k = {}^t[\mathbf{x}^{k,I}, \mathbf{x}^{k,L}]$  où  $\mathbf{x}^{k,I}$  est le vecteur des degrés de liberté internes et  $\mathbf{x}^{k,L}$  le vecteur des degrés de liberté de liaison sur la frontière  $L$ . On note par  $\mathbf{P}^{k,I}$  et  $\mathbf{P}^{k,L}$  les matrices de restriction de  $\mathbf{x}^k$  à  $\mathbf{x}^{k,I}$  et  $\mathbf{x}^{k,L}$  respectivement :  $\mathbf{x}^{k,I} = \mathbf{P}^{k,I} \mathbf{x}^k$ ,  $\mathbf{x}^{k,L} = \mathbf{P}^{k,L} \mathbf{x}^k$ .

Le système aux valeurs propres (44) associé aux vibrations libres de la structure  $S$  s'écrit pour la sous-structure  $S^k$  isolée :

$$\mathbf{K}^k \mathbf{x}_i^k - \lambda_i \mathbf{M}^k \mathbf{x}_i^k = -{}^t\mathbf{P}^{k,L} \mathbf{r}_i^k \quad (k = 1, 2) \quad (51)$$

où  $\mathbf{K}^k$  et  $\mathbf{M}^k$  sont les matrices de rigidité et de masse de  $S^k$ ,  $\mathbf{x}_i^k$  est la restriction de  $\mathbf{x}_i$  à  $S^k$  et  $\mathbf{r}_i^k$  sont les réactions exercées par  $S^k$  sur la frontière ( $-\mathbf{r}_i^k$  représente l'action de l'autre sous-structure sur  $S^k$ ).

En dérivant Eq. (51) par rapport au paramètre  $\alpha_j$ , on obtient :

$$\mathbf{A}_i^k \mathbf{x}_{i,j}^k = \mathbf{f}_{ij}^k - {}^t\mathbf{P}^{k,L} \mathbf{r}_{i,j}^k \quad (k = 1, 2) \quad (52)$$

avec  $\mathbf{A}_i^k = \mathbf{K}^k - \lambda_i \mathbf{M}^k$  et  $\mathbf{f}_{ij}^k = \lambda_{i,j} \mathbf{M}^k \mathbf{x}_i^k - (\mathbf{K}_{i,j}^k - \lambda_i \mathbf{M}_{i,j}^k) \mathbf{x}_i^k$ .

D'autre part, les équations de continuité des déplacements de liaison et les équations d'équilibre des forces de réaction ainsi que leurs dérivées s'écrivent :

$$\mathbf{x}_i^{1,L} = \mathbf{x}_i^{2,L}, \quad \mathbf{r}_i^1 + \mathbf{r}_i^2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{i,j}^{1,L} = \mathbf{x}_{i,j}^{2,L}, \quad \mathbf{r}_{i,j}^1 + \mathbf{r}_{i,j}^2 = \mathbf{0}. \quad (53)$$

### II.2.2.3. Systèmes réduits des sous-structures

On exprime  $\mathbf{x}_{i,j}^2$  comme une combinaison linéaire des  $m$  modes propres de  $S$  restreints à  $S^2$  :

$$\mathbf{x}_{i,j}^2 = \sum_{l=1}^m \eta_l \mathbf{x}_l^2 = \mathbf{X}^2 \boldsymbol{\eta}. \quad (54)$$

En substituant Eq. (54) dans Eq. (52) et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{X}^2$ , on obtient le système réduit :

$$[{}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{A}_i^2 \mathbf{X}^2] \boldsymbol{\eta} = {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{f}_{ij}^2 - {}^t\mathbf{X}^{2,L} \mathbf{r}_{i,j}^2 \quad (55)$$

où  $\mathbf{X}^{2,L} = \mathbf{P}^{2,L} \mathbf{X}^2$  est la restriction de  $\mathbf{X}^2$  aux degrés de liberté de liaison.

Pour la sous-structure  $S^1$ , le système (52) s'écrit, en partitionnant  $\mathbf{A}_i^1$  et  $\mathbf{f}_{ij}^1$  suivant les degrés de liberté internes et les degrés de liberté de liaison :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{1,II} & \mathbf{A}_i^{1,IL} \\ \mathbf{A}_i^{1,LI} & \mathbf{A}_i^{1,LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \mathbf{x}_{i,j}^{1,L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{ij}^{1,I} \\ \mathbf{f}_{ij}^{1,L} - \mathbf{r}_{i,j}^1 \end{Bmatrix}. \quad (56)$$

Supposons dans un premier temps que la sous-matrice  $\mathbf{A}_i^{1,II}$  soit inversible. On effectue alors une “condensation statique” de Eq. (56) sur la frontière, bien que Eq. (56) ne soit pas un système statique. Cette condensation consiste en une élimination de Gauss partielle sur la matrice  $\mathbf{A}_i^1$  et sur le second membre  $\mathbf{f}_{ij}^1$  du système linéaire (56) et n’introduit pour le moment aucune approximation sur  $S^1$ . Son intérêt est qu’elle permet, d’une part d’exprimer le système réduit de  $S^1$  uniquement en termes des coordonnées modales, ce qui facilitera l’assemblage, et d’autre part d’économiser en temps de calcul lorsque plusieurs perturbations sont à considérer (même  $\mathbf{A}_i^1$  avec différentes  $\mathbf{f}_{ij}^1$ ). De la première équation de Eq. (56), on a :

$$\mathbf{x}_{i,j}^{1,I} = [\mathbf{A}_i^{1,II}]^{-1} (\mathbf{f}_{ij}^{1,I} - \mathbf{A}_i^{1,IL} \mathbf{x}_{i,j}^{1,L}). \quad (57)$$

En reportant Eq. (57) dans la deuxième équation de Eq. (56), on obtient le système condensé :

$$\bar{\mathbf{A}}_i^{1,LL} \mathbf{x}_{i,j}^{1,L} = \bar{\mathbf{f}}_{ij}^{1,L} - \mathbf{r}_{i,j}^1 \quad (58)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}_i^{1,LL}$  et  $\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{1,L}$  sont la matrice et les forces condensées :

$$\bar{\mathbf{A}}_i^{1,LL} = \mathbf{A}_i^{1,LL} - \mathbf{A}_i^{1,LI} [\mathbf{A}_i^{1,II}]^{-1} \mathbf{A}_i^{1,IL} \quad (59)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{1,L} = \mathbf{f}_{ij}^{1,L} - \mathbf{A}_i^{1,LI} [\mathbf{A}_i^{1,II}]^{-1} \mathbf{f}_{ij}^{1,I}. \quad (60)$$

En pratique, la condensation statique est réalisée en calculant deux types de déformées “statiques”, en utilisant  $\mathbf{A}_i^1$  et  $\mathbf{f}_{ij}^1$  : les modes statiques de liaison (déplacements unitaires imposés aux degrés de liberté de liaison aux frontières) et les modes de déformations statiques à frontières fixes (Imbert, 1984).

La continuité des degrés de liberté de liaison donne, d’après Eqs. (54) et (53) :

$$\mathbf{x}_{i,j}^{1,L} = \mathbf{x}_{i,j}^{2,L} = \mathbf{X}^{2,L} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}^{1,L} \boldsymbol{\eta}. \quad (61)$$

En reportant Eq. (61) dans le système condensé (58) et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{X}^{1,L}$ , on obtient le système réduit de  $S^1$  :

$$[{}^t\mathbf{X}^{1,L} \bar{\mathbf{A}}_i^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L}] \boldsymbol{\eta} = {}^t\mathbf{X}^{1,L} \bar{\mathbf{f}}_{ij}^{1,L} - {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{r}_{i,j}^1. \quad (62)$$

Dans le cas où la sous-matrice  $\mathbf{A}_i^{1,II}$  n’est pas inversible, on ne peut pas effectuer la condensation statique. En utilisant Eq. (61), on a :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \mathbf{x}_{i,j}^{1,L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix}. \quad (63)$$

En reportant Eq. (63) dans Eq. (56) et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{T}$ , on obtient le système réduit de  $S^1$ , sans condensation statique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{1,II} & \mathbf{A}_i^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{A}_i^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{A}_i^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{ij}^{1,I} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} (\mathbf{f}_{ij}^{1,L} - \mathbf{r}_{i,j}^1) \end{Bmatrix}. \quad (64)$$

Remarques :

– Il est plus avantageux d’effectuer le même type de réduction que Eq. (64) sur les matrices  $\mathbf{K}^1$  et  $\mathbf{M}^1$ , puis calculer la matrice réduite du premier membre de Eq. (64) par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1,II} & \mathbf{K}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1,II} & \mathbf{M}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Cette remarque est également valable pour le système réduit (55).

– Si  $\mathbf{A}_i^{1,II}$  est inversible, on peut également calculer d’abord le système réduit (64), puis effectuer la condensation statique sur ce dernier, ce qui conduit au système réduit (62).



### II.2.2.4. Assemblage des sous-structures – Résolution

En additionnant Eqs. (62) et (55) et compte tenu de Eq. (53), on obtient le système couplé :

$$[{}^t\mathbf{X}^{1,L} \bar{\mathbf{A}}_i^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{A}_i^2 \mathbf{X}^2] \boldsymbol{\eta} = {}^t\mathbf{X}^{1,L} \bar{\mathbf{f}}_{ij}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{f}_{ij}^2. \quad (66)$$

Si le système réduit sans condensation statique (64) est utilisé pour  $S^1$ , le système couplé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{1,II} & \mathbf{A}_i^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{A}_i^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{A}_i^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{A}_i^2 \mathbf{X}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{ij}^{1,I} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{f}_{ij}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{f}_{ij}^2 \end{Bmatrix}. \quad (67)$$

La résolution du système linéaire couplé (66) ou (67) fournit les coordonnées modales  $\boldsymbol{\eta}$  et éventuellement les degrés de liberté internes  $\mathbf{x}_{i,j}^{1,I}$  de  $S^1$ . Lors de la résolution de Eq. (66) ou de Eq. (67), on impose la condition  $\eta_i = 0$ , ce qui revient à enlever le mode  $\mathbf{x}_i$  de l'approximation (54), car ce mode sera de toute façon pris en compte dans la solution générale de Eq. (46).

En utilisant Eqs. (54), (61) et (57), on obtient une solution particulière  $\mathbf{y}_{i,j}$  de Eq. (46) :

$$\mathbf{y}_{i,j} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}^{1,I} \\ \mathbf{X}^2 \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix}. \quad (68)$$

La solution générale s'écrit :  $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{y}_{i,j} + c \mathbf{x}_i$ . La constante  $c$  est déterminée en substituant la solution générale dans Eq. (50) et en utilisant Eq. (45) :

$$c = -\frac{1}{2} {}^t\mathbf{x}_i \mathbf{M}_{,j} \mathbf{x}_i - {}^t\mathbf{x}_i \mathbf{M} \mathbf{y}_{i,j}. \quad (69)$$

### II.2.3. Réanalyse des fréquences et des modes propres

On suppose que les  $m$  premières solutions propres  $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$  de la structure non perturbée soient connues. On propose de déterminer les premiers  $m'$  solutions propres  $(\lambda'_i, \mathbf{x}'_i)$ , avec  $m' \leq m$ , du système perturbé :

$$\mathbf{K}' \mathbf{x}' - \lambda' \mathbf{M}' \mathbf{x}' = \mathbf{0} \quad (70)$$

où  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{M}'$  sont les matrices de rigidité et de masse de la structure perturbée.

Les solutions propres du système perturbé peuvent être obtenues en utilisant la méthode directe, la méthode modale (Tran, 1996), les méthodes de synthèse modale (Tran, 1992, 2001, 2009b, cf. Chapitre III) ou les méthodes de perturbation (Courant & Hilbert, 1953, cf. Section II.3).

Pour les structures localement perturbées, on propose une méthode mixte combinant la méthode directe et la méthode modale par une décomposition en sous-structures, comme pour la calcul des dérivées des modes propres. Pour simplifier, on décompose la structure en deux sous-structures  $S^1$  et  $S^2$ , la zone perturbée se trouvant dans  $S^1$  et assez loin de la frontière  $L$  avec  $S^2$  (Fig. II.1). Les matrices de rigidité et de masse de  $S^2$  sont donc inchangées.

Le système aux valeurs propres (70) s'écrit pour la sous-structure  $S^k$  isolée :

$$\mathbf{K}'^k \mathbf{x}'^k - \lambda' \mathbf{M}'^k \mathbf{x}'^k = -{}^t\mathbf{P}^{k,L} \mathbf{r}^k \quad (k = 1, 2). \quad (71)$$

Sur  $S^2$ , on utilise la méthode modale. On exprime  $\mathbf{x}'^2$  comme une combinaison linéaire des  $m$  modes propres non perturbés restreints à  $S^2$  :

$$\mathbf{x}'^2 = \sum_{l=1}^m \eta_l \mathbf{x}_l^2 = \mathbf{X}^2 \boldsymbol{\eta}. \quad (72)$$

En substituant Eq. (72) dans Eq. (71) et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{X}^2$ , on obtient le système réduit de  $S^2$  :

$$[{}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{K}'^2 \mathbf{X}^2] \boldsymbol{\eta} - \lambda' [{}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{M}'^2 \mathbf{X}^2] \boldsymbol{\eta} = -{}^t\mathbf{X}^{2,L} \mathbf{r}^2. \quad (73)$$

Pour la sous-structure  $S^1$ , en partitionnant  $\mathbf{x}^1$  suivant les degrés de liberté internes  $\mathbf{x}^{1,I}$  et les degrés de liberté de liaison  $\mathbf{x}^{1,L}$ , le système (71) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1,II} & \mathbf{K}^{1,IL} \\ \mathbf{K}^{1,LI} & \mathbf{K}^{1,LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \mathbf{x}^{1,L} \end{Bmatrix} - \lambda' \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1,II} & \mathbf{M}^{1,IL} \\ \mathbf{M}^{1,LI} & \mathbf{M}^{1,LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \mathbf{x}^{1,L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r}^1 \end{Bmatrix}. \quad (74)$$

La continuité des déplacements de liaison donne :

$$\mathbf{x}^{1,L} = \mathbf{x}^{2,L} = \mathbf{X}^{2,L} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}^{1,L} \boldsymbol{\eta} \quad (75)$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \mathbf{x}^{1,L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix}. \quad (76)$$

En substituant Eq. (76) dans Eq. (74) et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{T}$ , on obtient le système réduit de  $S^1$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1,II} & \mathbf{K}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} - \lambda' \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1,II} & \mathbf{M}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -{}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{r}^1 \end{Bmatrix}. \quad (77)$$

En additionnant Eq. (73) à la deuxième équation de Eq. (77) et compte tenu de l'équilibre des réactions à la frontière,  $\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^2 = \mathbf{0}$ , on obtient le système couplé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1,II} & \mathbf{K}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{K}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{K}^{2,LL} \mathbf{X}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} - \lambda' \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1,II} & \mathbf{M}^{1,IL} \mathbf{X}^{1,L} \\ {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LI} & {}^t\mathbf{X}^{1,L} \mathbf{M}^{1,LL} \mathbf{X}^{1,L} + {}^t\mathbf{X}^2 \mathbf{M}^{2,LL} \mathbf{X}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{1,I} \\ \boldsymbol{\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (78)$$

La généralisation à plusieurs sous-structures ne pose aucun problème. Les inconnues du système couplé sont les coordonnées modales  $\boldsymbol{\eta}$ , communes à toutes les sous-structures de type modal, les degrés de liberté internes des sous-structures de type direct et les degrés de liberté de liaison aux frontières entre ces dernières. La résolution du système couplé (78) fournit les valeurs propres  $\lambda'$  et les modes propres généralisés. Les modes propres perturbés restreints aux sous-structures de type modal sont déduits des coordonnées modales en utilisant Eq. (72).

On n'effectue pas ici la condensation statique sur les sous-structures de type direct car, contrairement au calcul des dérivées des modes propres où l'on a à résoudre des systèmes linéaires, cette condensation consiste en une élimination de Guyan sur un système aux valeurs propres et introduit des erreurs supplémentaires.

#### II.2.4. Résultats - Conclusions

Deux applications numériques ont été traitées dans (Tran, 1996, cf. Annexe) : un système de masses et ressorts et un treillis. La méthode mixte directe-modale proposée est comparée avec la méthode directe et la méthode modale dans les calculs de sensibilités, et également avec les méthodes de synthèse modale avec interface fixe, libre et hybride dans la réanalyse des fréquences et modes.

Les résultats obtenus sur ces exemples indiquent que la méthode mixte directe-modale converge plus rapidement que la méthode modale. Même avec peu de modes propres pris en compte, cette méthode fournit des résultats en très bonne concordance avec ceux de la méthode directe. Les résultats sont d'autant plus précis que les sous-structures de type modal sont loin des zones perturbées, mais ceci augmente la taille du système assemblé et le temps de calcul. Il faut donc un compromis entre la dimension des sous-structures de type direct,

la précision et le temps de calcul. La méthode modale modifiée et les méthodes de synthèse modale, en utilisant par exemple le critère de Rubin pour la sélection des modes, sont également précises et efficaces.

La méthode mixte proposée peut être considérée comme une amélioration de la méthode modale, avec la possibilité d'isoler les perturbations dans des sous-structures de type direct afin d'augmenter la précision. Comme pour d'autres méthodes de sous-structuration en général, l'efficacité de cette méthode dépend du contexte et de la manière d'utilisation. Elle est en particulier destinée au cas où l'on doit effectuer de nombreux calculs répétitifs sur une même structure, chacun d'eux faisant intervenir une perturbation sur une région de la structure, comme par exemple lorsqu'on cherche à localiser les parties à modifier dans une structure pour les besoins de recalage des modèles éléments-finis ou d'optimisation structurale. Au lieu de refaire tous les calculs pour chaque perturbation comme dans la méthode directe ou de se contenter de la méthode modale qui est rapide mais peu précise, cette méthode offre une approche intermédiaire. La démarche pratique consiste à utiliser la représentation modale de la structure non perturbée, qui est calculée une fois pour toute indépendamment des perturbations, et de remplacer, pour chaque perturbation, la contribution des sous-structures concernées par leur représentation éléments-finis. Notons que dans les deux cas limites où toutes les sous-structures sont de type direct (resp. modal), on retrouve précisément la méthode directe (resp. modale).

## II.3. Suivi des fréquences et des modes propres

### II.3.1. Introduction

Ce travail concerne le problème du suivi numérique des fréquences et des modes propres d'une structure évolutive dont les matrices constitutives dépendent continuellement d'un paramètre. Lorsque deux courbes d'évolution des fréquences en fonction du paramètre s'approchent, on peut conclure à première vue qu'il y a intersection des courbes ou "croisement des fréquences". Cependant, une analyse plus fine de la "zone de transition" autour du point d'intersection présumé révèle que le croisement des fréquences, qui est caractérisé par la dégénérescence (ou multiplicité) des fréquences, ne se produit que rarement, notamment lorsque la structure possède des symétries. Physiquement, ce phénomène implique que les deux modes sont totalement découplés, et que les deux fréquences évoluent de manière indépendante. Cependant, un couplage même très faible entre les modes conduit aux phénomènes suivants, qui se produisent généralement sur les structures réelles :

- l'"interaction modale" ou "curve veering", où les courbes s'évitent en se repoussant;
- la "coalescence des fréquences", où les deux courbes se rejoignent dans un intervalle d'instabilité, puis se séparent.

Leissa (1974) a observé le phénomène d'interaction modale sur les fréquences propres d'une membrane rectangulaire dont le paramètre est le rapport des côtés et pensait que ce phénomène est causé par la discrétisation d'un système continu. Perkins et Mote (1986) ont cependant présenté une solution propre exacte où l'interaction modale a lieu et ont fourni des critères pour prédire les croisements, les interactions et d'autres comportements en utilisant une technique de perturbation. Le phénomène d'interaction modale a été rapporté par Crandall et Yeh (1989) dans les machines tournantes en suivant l'évolution des fréquences en fonction de la vitesse de rotation, tandis que Jei et Lee (1992) l'ont vérifié sur un système continu de type rotor-palier.

En utilisant une approximation à un mode puis à deux modes ainsi qu'une interprétation géométrique par la théorie de la représentation linéaire des groupes, Morand (1976) a mis en évidence le croisement de fréquences et l'interaction modale et a expliqué que le croisement, qui doit s'accompagner d'une augmentation de la multiplicité d'une fréquence propre, résulte d'un changement brusque de symétrie du système pour une certaine valeur du paramètre. Morand et Ohayon (1995) ont montré que l'interaction modale est due au couplage entre les modes et s'accompagne d'un changement continu des modes propres.

Pierre et al. (Wei & Pierre, 1988; Pierre & Murthy, 1992; Kruse & Pierre, 1997) ont étudié l'interaction modale due au désaccordage dans les structures à symétries cycliques de type disque-aubes en relation avec le couplage structural ou aérodynamique, et ont montré que plus le couplage est faible, plus les virages sont abrupts. La relation entre l'interaction modale et la localisation des modes a été montrée par Pierre (1988), Natsiavas Natsiavas (1993) et Happawana et al. (1993).

Behnke (1996) a présenté une preuve numériquement rigoureuse de l'interaction modale dans un problème aux valeurs propres pour les équations différentielles issues d'un exemple d'aubes en rotation. L'interaction

modale et la coalescence des fréquences ont été démontrées par Afolabi et al. (1993; 1994) en utilisant la théorie des courbes algébriques et la théorie des catastrophes, aussi bien pour un couplage conservatif que non conservatif entre les modes. La question de la stabilité d'un système aéroélastique liée au problème de suivi de modes est aussi discutée.

Quand on suit numériquement l'évolution des fréquences et des modes propres d'un système évolutive en fonction d'un paramètre, il est très difficile en pratique de prédire de manière précise ces trois phénomènes, en particulier lorsque le couplage est très petit et que les courbes peuvent s'approcher de très près sans se croiser. Si les fréquences sont simplement classées dans l'ordre croissant, le croisement ne sera jamais détecté. Une mauvaise interprétation peut être préjudiciable, en particulier lorsqu'une interaction modale, qui a un comportement stable et sans danger, est prédite à la place d'une coalescence, qui représente un comportement instable et dangereux pour la structure.

Plusieurs méthodes pour mettre à jour les fréquences et modes après une modification de la structure sont revues, à savoir la méthode directe, la méthode modale et la méthode de perturbation. Les trois phénomènes sont revisités en utilisant la méthode modale, et un critère de reclassement des fréquences et des modes est proposé afin de suivre individuellement l'évolution de chaque fréquence et mode et par conséquent de prédire ces phénomènes.

### II.3.2. Méthode directe et méthode modale

#### II.3.2.1. Méthode directe

On considère le problème aux valeurs propres associé au mouvement libre d'une structure:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x}. \quad (79)$$

où les matrices de rigidité et de masse  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(p)$  et  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(p)$  dépendent d'un paramètre  $p$ . Ces matrices sont réelles et peuvent être non symétriques.

Le système aux valeurs propres (79) est en fait aussi valable pour les structures amorties avec une matrice d'amortissement  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(p)$ , il suffit dans ce cas de remplacer  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{x}$  dans Eq. (79) par:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ -\lambda \mathbf{x} \end{Bmatrix}. \quad (80)$$

Le problème est de suivre l'évolution des valeurs propres (fréquences et amortissements) de Eq. (79) en fonction du paramètre  $p$  et de détecter lequel des trois phénomènes va se produire. Pour cela, on peut utiliser la méthode directe qui consiste à résoudre Eq. (79) pour chaque valeur du paramètre. Cependant, cette méthode directe est coûteuse lorsque la taille du système et le nombre de valeurs du paramètre sont importants. En plus elle ne permet pas une détection automatique des phénomènes et un critère de suivi des fréquences et modes est toujours nécessaire.

La méthode modale est moins coûteuse, et en plus elle donne un bon aperçu des trois phénomènes.

#### II.3.2.2. Méthode modale

Supposons que pour une valeur  $p = p^0$  du paramètre, les matrices  $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}(p^0)$  et  $\mathbf{M}^0 = \mathbf{M}(p^0)$  sont réelles, symétriques et que les  $m$  premières solutions propres  $(\lambda_1^0, \mathbf{x}_1^0), \dots, (\lambda_m^0, \mathbf{x}_m^0)$  de Eq. (79) ont été calculées et normalisées par rapport à la matrice de masse:

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{x}_i^0 = \lambda_i^0 \mathbf{M}^0 \mathbf{x}_i^0, \quad {}^t \mathbf{x}_i^0 \mathbf{M}^0 \mathbf{x}_j^0 = \delta_{ij}, \quad {}^t \mathbf{x}_i^0 \mathbf{K}^0 \mathbf{x}_j^0 = \lambda_i^0 \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m). \quad (81)$$

Le vecteur propre  $\mathbf{x}$  de Eq. (79) est exprimé comme une combinaison linéaire de  $\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_m^0$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}^0 \mathbf{q} \quad (82)$$

avec  $\mathbf{X}^0 = [\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_m^0]$  et  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_m]$ . En projetant Eq. (79) sur  $\mathbf{X}^0$ , on obtient un système réduit:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{q} = \lambda \mathbf{M}_r \mathbf{q} \quad (83)$$

avec  $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_r(p) = {}^t\mathbf{X}^0 \mathbf{K}(p) \mathbf{X}^0$  et  $\mathbf{M}_r = \mathbf{M}_r(p) = {}^t\mathbf{X}^0 \mathbf{M}(p) \mathbf{X}^0$ . La résolution du système réduit (83) fournit des solutions approchées de Eq. (79) et elle n'est pas coûteuse même pour un grand nombre de valeurs du paramètre. Cependant, un critère de suivi des fréquences et modes est toujours nécessaire.

### II.3.3. Phénomènes de base dans le suivi des fréquences et modes

Les trois phénomènes de croisement des fréquences, d'interaction modale et de coalescence des fréquences peuvent être mis en évidence en utilisant la méthode modale (Morand, 1976; Morand & Ohayon, 1995). Par exemple dans une approximation à deux modes, c.-à-d.  $\mathbf{X}^0 = [\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0]$  dans Eq. (82), et en supposant que les valeurs propres  $\lambda_1^0$  et  $\lambda_2^0$  sont distinctes et que la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est constante, le système réduit (83) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} k_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

avec  $k_i = {}^t\mathbf{x}_i^0 \mathbf{K} \mathbf{x}_i^0$ ,  $\beta_1 = {}^t\mathbf{x}_1^0 \mathbf{K} \mathbf{x}_2^0$  et  $\beta_2 = {}^t\mathbf{x}_2^0 \mathbf{K} \mathbf{x}_1^0$ .

Les termes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent le couplage entre les modes qui est un facteur déterminant dans l'occurrence des trois phénomènes (Afolabi & Mehmed, 1994; Afolabi & Pidaparti, 1994):

– Le croisement des fréquences se produit lorsque  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (pas de couplage entre modes). Les solutions de Eq. (79) sont  $\lambda_1^* = k_1$ ,  $\lambda_2^* = k_2$ ,  $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_1^0$ ,  $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_2^0$ . Les vecteurs propres sont orthogonaux et ne changent pas durant l'évolution, tandis que les deux valeurs propres évoluent de manière indépendante. Le croisement des fréquences se produit pour la valeur  $p^*$  telle que  $\lambda_1^*(p^*) = \lambda_2^*(p^*)$ : on est en présence d'une dégénérescence des valeurs propres mais pas des modes propres, car  $\mathbf{x}_1^*(p^*) \neq \mathbf{x}_2^*(p^*)$ . Le même résultat est obtenu dans l'approximation à un mode, c.-à-d. lorsque seulement  $\mathbf{x}_1^0$  ou  $\mathbf{x}_2^0$  est retenu dans la projection Eq. (82).

– L'interaction modale se produit lorsque  $\beta_1 \beta_2 > 0$  (couplage conservatif). Il a été montré que la dégénérescence des valeurs propres ne peut pas se produire dans le cas générale. Les valeurs propres sont simples, réelles et positives. Contrairement au croisement des fréquences, les vecteurs propres changent durant l'évolution mais restent orthogonaux. Si le couplage est petit, le premier vecteur propre  $\mathbf{x}_1$  change continument de  $\mathbf{x}_1^*$  à  $\mathbf{x}_2^*$ , et inversement, le deuxième vecteur propre  $\mathbf{x}_2$  de  $\mathbf{x}_2^*$  à  $\mathbf{x}_1^*$ . Les deux vecteurs  $\mathbf{x}_1^*$  et  $\mathbf{x}_2^*$  contribuent pleinement à  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  au voisinage de  $p = p^*$ . Plus le couplage est petit, plus le virage est abrupt et plus les courbes sont proches.

– La coalescence des fréquences se produit lorsque  $\beta_1 \beta_2 < 0$  (couplage non conservatif). Pour les valeurs de  $p$  dans un intervalle d'instabilité, les valeurs propres et les vecteurs propres sont complexes conjugués, ce qui conduit à des fréquences doubles et des amortissements de signes opposés, le système est par conséquent instable. Aux extrémités de l'intervalle d'instabilité, les valeurs propres sont doubles, réelles et positives, on a à la fois une dégénérescence des valeurs propres et des vecteurs propres. Sinon, les valeurs propres sont simples, réelles et positives. A l'instar de l'interaction modale, le premier vecteur propre  $\mathbf{x}_1$  change de  $\mathbf{x}_1^*$  à  $\mathbf{x}_2^*$ , et inversement pour  $\mathbf{x}_2$ , pendant l'évolution, mais ils ne sont plus orthogonaux. Plus le couplage est petit, plus l'intervalle d'instabilité est étroit.

Le couplage peut être causé par exemple par l'asymétrie (couplage entre la flexion et la torsion d'une poutre dû à l'asymétrie de la section), la perte de symétrie (couplage entre les indices de déphasage d'une structure avec symétrie cyclique dû au désaccordage), ou les forces gyroscopiques (antisymétriques) ou aéroélastiques (non symétriques).

Fig. II.2 montre un exemple de l'évolution des fréquences et des modes pour les trois cas avec les données suivantes:  $k_1 = p$ ,  $k_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (croisement des fréquences);  $k_1 = p + 0.05$ ,  $k_2 = 1.05$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = -0.05$  (interaction modale); et  $k_1 = p + 0.05$ ,  $k_2 = 1.05$ ,  $\beta_1 = -\beta_2 = -0.05$  (coalescence des fréquences).

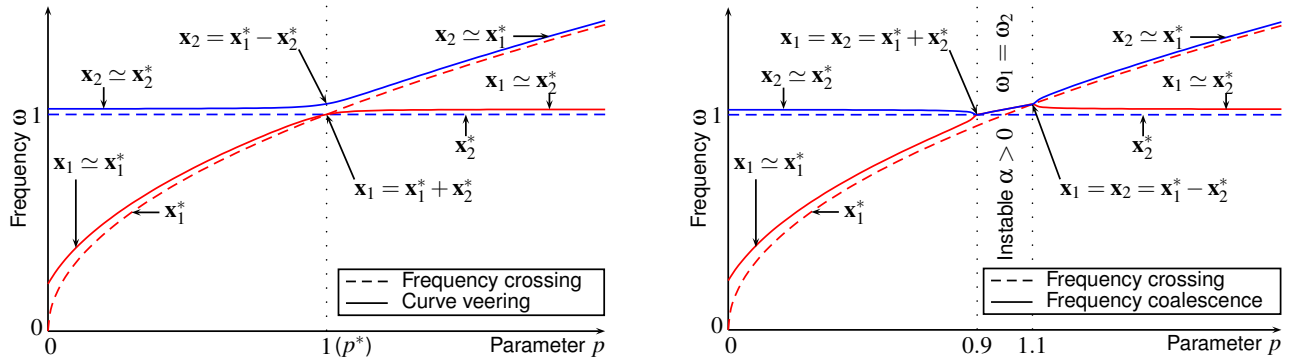


Figure II.2 : Croisement des fréquences, interaction modale et coalescence des fréquences

### II.3.4. Critère pour le suivi des fréquences et modes

Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ , on considère le produit scalaire  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\mathbf{x}} \mathbf{y}$  et la norme  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ .

Supposons que l'on veut suivre l'évolution d'une solution propre particulière  $(\lambda(p), \mathbf{x}(p))$  en fonction du paramètre  $p$  et que cette solution propre a été obtenue pour  $p = p_i$ :  $(\lambda(p_i), \mathbf{x}(p_i))$ . Les solutions propres  $(\lambda_1(p_{i+1}), \mathbf{y}_1(p_{i+1})), \dots, (\lambda_n(p_{i+1}), \mathbf{y}_n(p_{i+1}))$  ayant été calculées pour  $p = p_{i+1}$ , le problème est de déterminer laquelle de ces solutions doit être choisie comme  $(\lambda(p_{i+1}), \mathbf{x}(p_{i+1}))$  pour être mise sur la courbe d'évolution de  $(\lambda(p), \mathbf{x}(p))$ .

Les vecteurs propres  $\mathbf{x}(p_i)$  et  $\mathbf{y}_j(p_{i+1})$  ayant été normés à la norme unitaire, c.-à-d.  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}_j\| = 1$ , on définit les sous-espaces propres  $M$  et  $N_j$  associés respectivement à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}_j$  et qui sont supposés de dimension 1. Les sphères unités de  $M$  et  $N_j$  sont  $S_M = \{\mu \mathbf{x}, \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1\}$  et  $S_{N_j} = \{\eta \mathbf{y}_j, \eta \in \mathbb{C}, |\eta| = 1\}$ .

La distance entre les sous-espaces  $M$  et  $N_j$  est définie par (Kato, 1966) :

$$\hat{d}(M, N_j) = \max [d(M, N_j), d(N_j, M)] \quad \text{avec} \quad (85)$$

$$d(M, N_j) = \sup_{\mathbf{u} \in S_M} \text{dist}(\mathbf{u}, S_{N_j}) \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{u}, S_{N_j}) = \inf_{\mathbf{v} \in S_{N_j}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (86)$$

Pour un vecteur fixé  $\mathbf{u} = \mu \mathbf{x} \in S_M$  et en utilisant  $\mu = e^{i\theta_\mu}$ ,  $\eta = e^{i\theta_\eta}$  et  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle| e^{i\theta_j}$ , on a :

$$\begin{aligned} [d(\mathbf{u}, S_{N_j})]^2 &= \inf_{\eta \in \mathbb{C}, |\eta|=1} \|\mu \mathbf{x} - \eta \mathbf{y}_j\|^2 = \inf_{\eta \in \mathbb{C}, |\eta|=1} [|\mu|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + |\eta|^2 \|\mathbf{y}_j\|^2 - 2 \Re(\langle \mu \mathbf{x}, \eta \mathbf{y}_j \rangle)] \\ &= \inf_{\eta \in \mathbb{C}, |\eta|=1} [2 - 2 \Re(\langle \mu \mathbf{x}, \eta \mathbf{y}_j \rangle)] = 2 - 2 \max_{\eta \in \mathbb{C}, |\eta|=1} \Re(\langle \mu \mathbf{x}, \eta \mathbf{y}_j \rangle) \\ &= 2 - 2 \max_{\theta_\eta \in \mathbb{R}} \Re(e^{i(\theta_j + \theta_\eta - \theta_\mu)} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle|) = 2 - 2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle| \max_{\theta_\eta \in \mathbb{R}} \Re(e^{i(\theta_j + \theta_\eta - \theta_\mu)}) \\ &= 2 - 2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle|. \end{aligned} \quad (87)$$

Comme  $d(\mathbf{u}, S_{N_j})$  ne dépend pas de  $\mathbf{u}$  et par symétrie, on a :

$$[\hat{d}(M, N_j)]^2 = [d(M, N_j)]^2 = [d(N_j, M)]^2 = 2 - 2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle|. \quad (88)$$

La solution propre  $(\lambda_j(p_{i+1}), \mathbf{y}_j(p_{i+1}))$  qui minimise la distance  $\hat{d}(M, N_j)$ , c.-à-d. qui maximise  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle|$ , sera sélectionnée comme  $(\lambda(p_{i+1}), \mathbf{x}(p_{i+1}))$  et sera mise sur la courbe d'évolution de  $(\lambda(p), \mathbf{x}(p))$ . Une fois qu'une solution propre a été sélectionnée, elle sera supprimée et le suivi des autres solutions propres peut être continué. En utilisant ce critère, on peut suivre individuellement l'évolution de chaque fréquence, amortissement et mode.

### II.3.5. Méthode de perturbation

Une méthode alternative pour mettre à jour les fréquences et modes d'une structure évolutive est la méthode de perturbation dont la version initiale de Courant et Hilbert (1953) est présentée ici.

Supposons que les  $m$  premières solutions propres  $(\lambda_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\lambda_m, \mathbf{x}_m)$  de Eq. (79) ont été calculées pour une valeur  $p$  du paramètre ainsi que les solutions propres  $(\lambda_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\lambda_m, \mathbf{y}_m)$  du système transposé :

$${}^t \mathbf{K} \mathbf{y} = \lambda {}^t \mathbf{M} \mathbf{y}. \quad (89)$$

Eqs. (79) et (89) ont les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres sont normalisés tels que :

$${}^t \mathbf{y}_i \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \quad {}^t \mathbf{y}_i \mathbf{K} \mathbf{x}_j = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (90)$$

Soit  $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$ , c.-à-d.  $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m_i-1}$ . On définit :

$$S_i = \{i, i+1, \dots, i+m_i-1\}, \quad \mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+m_i-1}], \quad \mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}, \dots, \mathbf{y}_{i+m_i-1}]. \quad (91)$$

On veut déterminer les solutions propres  $(\lambda'_1, \mathbf{x}'_1), \dots, (\lambda'_m, \mathbf{x}'_m)$  du système perturbé (79) pour la valeur  $p + \Delta p$  du paramètre :

$$\mathbf{K}' \mathbf{x}' = \lambda' \mathbf{M}' \mathbf{x}', \quad (92)$$

avec  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(p + \Delta p) = \mathbf{K}(p) + \Delta \mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}(p + \Delta p) = \mathbf{M}(p) + \Delta \mathbf{M}$ .

La méthode de perturbation consiste à développer les solutions de Eq. (92) en une série limitée :

$$\lambda'_i = \lambda_i + \Delta \lambda_i + \Delta^2 \lambda_i + \dots \quad (i = 1, \dots, m), \quad (93)$$

$$\mathbf{x}'_i = \tilde{\mathbf{x}}_i + \Delta \mathbf{x}_i + \Delta^2 \mathbf{x}_i + \dots \quad (i = 1, \dots, m) \quad (94)$$

où  $\Delta \lambda_i$ ,  $\Delta \mathbf{x}_i$ ,  $\Delta^2 \lambda_i$  et  $\Delta^2 \mathbf{x}_i$  sont les perturbations du premier et second ordre des valeurs propres et vecteurs propres, et  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{a}_i$  ( $\mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^{m_i}$ ) est un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  à déterminer (si  $m_i > 1$ ).

En reportant Eqs. (93) et (94) dans Eq. (92) et en isolant les termes du premier et second ordre, on obtient :

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta \mathbf{x}_i + (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_i - \Delta \lambda_i \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}, \quad (95)$$

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta^2 \mathbf{x}_i + (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \Delta \mathbf{x}_i - \Delta \lambda_i \mathbf{M} \Delta \mathbf{x}_i - \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i - \Delta^2 \lambda_i \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}. \quad (96)$$

### Perturbations du premier ordre des valeurs propres

Ce sont les  $m_i$  valeurs propres  $\Delta \lambda_k$  ( $k \in S_i$ ) du système :

$$[{}^t \mathbf{Y}_i (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \mathbf{X}_i] \mathbf{a}_k = \Delta \lambda_k \mathbf{a}_k \quad (k \in S_i). \quad (97)$$

Si  $m_i > 1$ , les vecteurs inconnus  $\mathbf{a}_i$  pour déterminer les vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  dans Eq. (94) sont les  $m_i$  vecteurs propres  $\mathbf{a}_k$  ( $k \in S_i$ ) de Eq. (97). On considère aussi les vecteurs propres  $\mathbf{b}_k$  ( $k \in S_i$ ) du système transposé :

$$[{}^t \mathbf{X}_i ({}^t \Delta \mathbf{K} - \lambda_i {}^t \Delta \mathbf{M}) \mathbf{Y}_i] \mathbf{b}_k = \Delta \lambda_k \mathbf{b}_k \quad (k \in S_i). \quad (98)$$

En normalisant  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_k$  tels que  ${}^t \mathbf{b}_j \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$  pour  $j, k \in S_i$ , les nouveaux vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{X}_i \mathbf{a}_k$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{Y}_i \mathbf{b}_k$  de Eqs. (79) et (89) vérifient les relations d'orthogonalité suivantes, la dernière relation n'est pas vérifiée par  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{y}_k$  :

$${}^t \tilde{\mathbf{y}}_j \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_k = \delta_{jk}, \quad {}^t \tilde{\mathbf{y}}_j \mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}_k = \lambda_j \delta_{jk} \quad \text{et} \quad {}^t \tilde{\mathbf{y}}_j (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_k = \Delta \lambda_j \delta_{jk} \quad (j, k \in S_i). \quad (99)$$

Si  $\lambda_i$  est une valeur propre isolée, c.-à-d.  $m_i = 1$ , alors :  $\Delta \lambda_i = {}^t \mathbf{y}_i (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \mathbf{x}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i$  and  $\tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_i$ .

### Hypothèse

On suppose dorénavant que les valeurs propres  $\Delta \lambda_k$  ( $k \in S_i$ ) sont toutes distinctes. Les vecteurs propres  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_k$  ( $k \in S_i$ ) associés à  $\Delta \lambda_k$  sont donc déterminés de façon unique (à la normalisation près), et de même que les vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_k$ .

**Perturbations du premier ordre des vecteurs propres**

Elles sont exprimés comme une combinaison linéaire des nouveaux vecteurs propres non perturbés  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_m$  :

$$\Delta \mathbf{x}_k = \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} \tilde{\mathbf{x}}_l \quad (k \in S_i). \quad (100)$$

Pour  $k \in S_i$  fixé, les coefficients  $\alpha_{kl}$  sont successivement déterminés pour  $l \notin S_i, l = k$  et  $l \in S_i \setminus \{k\}$  :

$$\alpha_{kl} = \frac{{}^t \tilde{\mathbf{y}}_l (\Delta \mathbf{K} - \lambda_k \Delta \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_k}{\lambda_k - \lambda_l} \quad (\text{pour } k \in S_i \text{ et } l \notin S_i), \quad (101)$$

$$\alpha_{kk} = 0 \quad (\text{pour } k \in S_i, \text{ avec la normalisation } {}^t \tilde{\mathbf{y}}_k \mathbf{M} \mathbf{x}'_k = 1), \quad (102)$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{\Delta \lambda_k - \Delta \lambda_l} \left[ \sum_{j \notin S_i} \alpha_{kj} {}^t \tilde{\mathbf{y}}_l (\Delta \mathbf{K} - \lambda_k \Delta \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_j - \Delta \lambda_k {}^t \tilde{\mathbf{y}}_l \Delta \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_k \right] \quad (\text{pour } m_i > 1, k \in S_i \text{ et } l \in S_i \setminus \{k\}) \quad (103)$$

Les coefficients  $\alpha_{kj}$  pour  $j \notin S_i$  dans Eq. (103) sont déjà calculés dans Eq. (101).

**Perturbations du second ordre des valeurs propres**

Elles sont obtenues par:

$$\Delta^2 \lambda_k = \sum_{j \notin S_i} \alpha_{kj} {}^t \tilde{\mathbf{y}}_k (\Delta \mathbf{K} - \lambda_k \Delta \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_j - \Delta \lambda_k {}^t \tilde{\mathbf{y}}_k \Delta \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_k \quad (\text{pour } k \in S_i). \quad (104)$$

D'après Eqs. (101) et (103), cette méthode de perturbation s'échoue si les valeurs propres  $\lambda_i$  ou leurs perturbations du premier ordre  $\Delta \lambda_k$  ( $k \in S_i$ ) sont très proches sans être confondues (haute densité modale), car les coefficients  $\alpha_{kl}$  et les perturbations des vecteurs propres  $\Delta \mathbf{x}_k$  seront trop importants pour être considérés comme des perturbations du premier ordre. Des techniques de perturbation améliorées pour les valeurs propres proches sont proposées par Liu (2001).

Dans la méthode de perturbation, le suivi des fréquences et modes s'effectue de manière naturelle, et le critère de suivi est seulement nécessaire si les valeurs propres  $\lambda_i$  sont multiples ( $m_i > 1$ ).

**II.3.6. Résultats - Conclusions**

Le critère proposé pour le suivi des fréquences et modes propres des structures évolutives et les trois méthodes pour calculer les fréquences et modes en fonction d'un paramètre ont été comparés sur trois exemples numériques (Tran, 2006, cf. Annexe):

- un disque aubagé avec symétrie cyclique, sur lequel une perturbation de la matrice de rigidité qui dépend d'un paramètre et qui détruit totalement ou partiellement la symétrie cyclique est introduite;
- un rotor dont le paramètre est la vitesse de rotation et dont les paliers comportent des termes de couplage en raideur.

En utilisant le critère de suivi, ces trois méthodes détectent correctement les phénomènes de croisement des fréquences, d'interaction modale et de coalescence des fréquences. La méthode modale et la méthode de perturbation fournissent des résultats qui concordent avec ceux de la méthode directe. La méthode modale est légèrement plus précise mais aussi bien plus pratiquement à l'utilisation que la méthode de perturbation. D'autres méthodes comme la méthode de perturbation améliorée, la méthode hybride directe-modale ou les méthodes de synthèse modale peuvent être aussi utilisées.



# MÉTHODES DE SYNTHÈSE MODALE

### III.1. Introduction

Les méthodes de synthèse modale consistent à effectuer l'analyse dynamique des structures par une décomposition en sous-structures. Les sous-structures sont représentées par des vecteurs de Ritz qui incluent les modes propres, les modes de corps rigide, les modes statiques, les modes d'interface etc. Les équations de mouvement des sous-structures sont ensuite projetées sur les bases de projection formées par les vecteurs de Ritz pour obtenir les systèmes réduits des sous-structures. Le couplage des systèmes réduits des sous-structures fournit alors le système réduit couplé, ou modèle réduit, de la structure complète avec lequel on effectue l'analyse modale ou des réponses à des sollicitations.

La première méthode de synthèse modale a été présentée par Hurty (1960). L'idée de décomposer une structure en sous-structures a été aussi utilisée par Gladwell (1964) dans sa méthode des branches. Plusieurs méthodes de synthèse modale ont été développées depuis, toutes ces méthodes utilisent les modes propres des sous-structures. En fonction des conditions aux limites appliquées à l'interface des sous-structures lors du calcul de ces modes propres, les méthodes de synthèse modale peuvent être classées en quatre groupes : méthodes avec interface fixe (Hurty, 1960, 1965; Craig & Bampton, 1968; Hintz, 1975; Craig, 1985), méthodes avec interface libre (Bamford, 1967; Goldman, 1969; Hou, 1969; MacNeal, 1971; Rubin, 1975; Hintz, 1975; Craig & Chang, 1977a; Craig, 1985; Herting, 1985; Martinez et al., 1985; Bucher, 1986), méthodes avec interface mixte (MacNeal, 1971; Craig & Chang, 1977a; Farvacque et al., 1984; Tran, 1992, 1993), méthodes avec interface chargée (Benfield & Hruda, 1971). Les variantes dans chaque groupe se diffèrent essentiellement sur le choix des vecteurs de Ritz complémentaires et de la procédure de couplage des sous-structures.

Plusieurs explications, améliorations et variantes ont été proposées (Kuhar & Stahle, 1974; Kubomura, 1982; Curnier, 1983; Jézéquel, 1985; Flasner, 1986; Jézéquel & Tchere, 1991; Leung, 1991; Engels, 1992; Suarez & Singh, 1992; Admire et al., 1994; Farhat & Gérardin, 1994; Thonon, Gérardin, Cardonna & Farhat, 1995; Thonon, Gérardin, Cardonna & Jetteur, 1995; Ohayon et al., 1997; Qiu et al., 1997; Shyu et al., 1997; Humar & Soucy, 1998; Rixen et al., 1998; Tournour et al., 2001; Liu & Ewins, 2002; Rixen, 2004; Besset & Jézéquel, 2008), et les méthodes de synthèse modale ont été largement utilisées sur un grand nombre d'applications (Henry, 1980; Berlioz & Ferraris, 1986; Crandall & Yeh, 1986; Spanos & Tsuha, 1991; Wang & Kirkhope, 1994b,a, 1995; Takewaki, 1998; Bladh et al., 2001a,b, 2002; Zou et al., 2002; Choi et al., 2003; Capiez-Lernout, 2004; Ohayon, 2004; Corus et al., 2006; Davidsson & Sandberg, 2006; Li & Dowell, 2006; Masson et al., 2006; Shanmugam & Padmanabhan, 2006; Batailly et al., 2007; Ganine et al., 2008; Mignolet & Soize, 2008; Yan et al., 2008; Schotté & Ohayon, 2009). Les méthodes de synthèse modale ont été décrites dans plusieurs ouvrages (Meirovitch, 1980; Imbert, 1984; Morand & Ohayon, 1995; Bathe, 1996; Gérardin & Rixen, 1997), et des revues ont été présentées dans (Craig, 1985; de Klerk et al., 2008).

Dans les méthodes de synthèse modale classiques, les modes propres de sous-structures sont complétés par des vecteurs de Ritz issus des déformées statiques usuellement appelées modes statiques, comme les modes de liaison, les modes d'attache, les modes d'attache résiduels etc. Les coordonnées généralisées associées aux modes statiques sont dans la plupart des cas les déplacements à l'interface entre les sous-structures. Ceci conduit à des systèmes réduits couplés de grande taille à cause du nombre important de degrés de liberté (DDL) à l'interface. Afin de réduire le nombre de DDL d'interface, la méthode de synthèse modale avec les modes d'interface a été développée en premier lieu pour la méthode avec interface fixe (Craig & Chang, 1977b; Bourquin, 1992; Bourquin & D'Hennezel, 1992; Aoyama & Yagawa, 2001), puis étendue aux méthodes de synthèse modale avec interface libre ou mixte (Tran, 2001). Dans ces méthodes, les modes statiques sont remplacés par les modes d'interface, aussi appelés modes de jonction ou modes propres de l'opérateur Poincaré-Steklov, qui sont les quelques premiers modes propres de la structure complète après une condensation de Guyan (1965) à l'interface entre les sous-structures. Les DDL d'interface associés aux modes statiques sont alors remplacés par quelques coordonnées généralisées associées aux modes d'interface. D'autres méthodes pour réduire le nombre de DDL d'interface sont aussi proposées dans (Craig & Chang, 1977b; Bouhaddi & Lombard, 2000; Hassis, 2000; Aoyama & Yagawa, 2001).

Bien que les méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface produisent des systèmes réduits couplés de taille très petite, un inconvénient de ces méthodes est que tous les DDL d'interface sont éliminés du système réduit. La présence des DDL d'interface dans le système réduit est cependant souhaitable et parfois nécessaire, soit parce que ces DDL peuvent fournir rapidement des informations utiles, soit parce que l'on a besoin d'intervenir directement sur ces DDL lors de la résolution du système réduit, par exemple pour imposer des mouvements prescrits ou pour prendre en compte des non linéarités locales de type contact, frottement ou jeu. De nouvelles méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface partiels ont été développées pour pallier cet inconvénient (Tran, 2009b,a). Elles permettent à la fois une réduction importante du nombre de DDL d'interface comme dans les méthodes avec les modes d'interface, et la conservation de quelques DDL d'interface dans le système réduit, comme dans les méthodes classiques. Pour cela, au lieu de calculer les modes d'interface, ces derniers sont approchés en appliquant un second niveau de synthèse modale au système réduit issu de la condensation de Guyan de la structure complète à l'interface entre les sous-structures. Les DDL du système réduit de Guyan sont partitionnés en deux ensembles regroupant respectivement les DDL d'interface à éliminer et ceux à conserver dans le système réduit couplé, les premiers étant considérés comme les DDL internes et les seconds comme les DDL d'interface dans le second niveau de synthèse modale. Les modes d'interface partiels sont les premiers modes propres du système réduit de Guyan, éventuellement encastrés sur quelques DDL d'interface à conserver, ceci dépend de la méthode de synthèse modale choisie, c.-à-d. avec interface fixe, libre ou mixte, pour le système réduit de Guyan. Ils sont complétés par des modes statiques du système réduit de Guyan, et ensemble ils remplacent les modes d'interface ou les modes statiques des méthodes classiques. Les méthodes classiques et les méthodes avec modes d'interface sont des cas particuliers où tous les DDL d'interface sont conservés ou éliminés. L'approche proposée est similaire à la méthode de réduction de Ritz décrite dans (Craig & Chang, 1977b). Les vecteurs de Ritz n'y sont cependant pas spécifiés et sont obtenus à partir des fonctions analytiques dans un exemple. Les méthodes de synthèse modale multi-niveaux ou récursives ont été également utilisées (Bennighof & Lehoucq, 2004), mais leur but est de décomposer les sous-structures en de plus petites sous-structures et ainsi de suite, et non pas d'obtenir une base de projection des sous-structures comme dans l'approche proposée.

Pour les structures possédant la symétrie cyclique (Thomas, 1979; Valid & Ohayon, 1985), la réduction des calculs à un seul secteur répétitif de référence permet de diminuer les temps de calcul. La combinaison des propriétés de symétrie cyclique avec les méthodes de synthèse modale, qui a été utilisée en premier lieu par Henry (1980) avec la méthode de Craig & Bampton (1968), est généralisée ici avec d'autres méthodes (Tran, 2001, 2009b). L'utilisation de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD, Proper Orthogonal Decomposition) dans les méthodes de synthèse modale est également développée, le principe est de remplacer les modes propres de sous-structures par les modes POD dans la base de projection. Les clichés des sous-structures, à partir desquels les modes POD des sous-structures sont obtenus, sont soit calculés sur chaque sous-structure isolée, soit extraits des clichés de la structure complète.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : après avoir décrit les sous-structures et ses modes dans la section 2, les méthodes de synthèse modale classiques avec les différents types d'interface sont présentées dans la section 3. Les sections 4 et 5 concernent les méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface et les modes d'interface partiels. La combinaison de la synthèse modale avec la symétrie cyclique et la POD est présentée dans les sections 6 et 7.

## III.2. Description et modes des sous-structures

### III.2.1. Description des sous-structures, systèmes réduits, assemblage

On considère une structure  $S$  décomposée en  $n_s$  sous-structures  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n_s$ ) qui ne se recouvrent pas. On note par  $L^S$  la partie de  $S$  constituée par la frontière entre les sous-structures et par  $L_j$  la frontière entre  $S_j$  et les sous-structures adjacentes.  $L^S$  et  $L_j$  seront appelés les interfaces de  $S$  et  $S_j$ .

Pour chaque sous-structure, l'interface  $L_j$  partitionnée en l'interface fixe  $L_c$  et l'interface libre  $L_a$ . Ainsi,  $L_j$  peut être fixe ( $L_a = \emptyset$  et  $L_c = L_j$ ), libre ( $L_c = \emptyset$  et  $L_a = L_j$ ) or mixte ( $L_c \neq \emptyset$ ,  $L_a \neq \emptyset$ ,  $L_j = L_c \cup L_a$ ), on suppose dans le dernier cas que  $S_j$  est lié ou statiquement stable lorsque  $L_c$  est fixe. Le choix de  $L_c$  et  $L_a$  peut être différent d'une sous-structure à l'autre.

L'interface  $L^S$  est partitionnée en  $L_k^S$  et  $L_e^S$  comprenant respectivement les DDL d'interface à conserver et à éliminer dans le système réduit. Le nombre de DDL de  $L_k^S$  est très petit comparé à celui de  $L_e^S$ .

Les vecteurs des déplacements de  $S$ ,  $L^S$ ,  $L_e^S$ ,  $L_k^S$ ,  $S_j$ ,  $L_j$ ,  $L_c$  et  $L_a$  sont respectivement  $\mathbf{x}^S$ ,  $\mathbf{x}_L^S$ ,  $\mathbf{x}_{L_e}^S$ ,  $\mathbf{x}_{L_k}^S$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_L$ ,  $\mathbf{x}_{L_c}$  et  $\mathbf{x}_{L_a}$ . On définit les matrices booléennes  $\mathbf{P}_{S_j}^S$  qui restreignent  $\mathbf{x}^S$  à  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{P}_{L_j}^L$  et  $\mathbf{P}_{L_k}^L$  qui restreignent  $\mathbf{x}_L^S$  à  $\mathbf{x}_L$  et  $\mathbf{x}_{L_k}^S$ ; et  $\mathbf{P}_L$ ,  $\mathbf{P}_c$  et  $\mathbf{P}_a$  qui restreignent  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{x}_L$ ,  $\mathbf{x}_{L_c}$  et  $\mathbf{x}_{L_a}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{S_j}^S \mathbf{x}^S, \quad \mathbf{x}_L = \mathbf{P}_{L_j}^L \mathbf{x}_L^S = \mathbf{P}_L \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_{L_k}^S = \mathbf{P}_{L_k}^L \mathbf{x}_L^S, \quad \mathbf{x}_{L_c} = \mathbf{P}_c \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_{L_a} = \mathbf{P}_a \mathbf{x}. \quad (1)$$

On définit les indices supérieurs à gauche suivants:

$${}^a(\cdot) = \mathbf{P}_a(\cdot), \quad {}^c(\cdot) = \mathbf{P}_c(\cdot), \quad {}^j(\cdot) = \mathbf{P}_{L_j}^L(\cdot), \quad {}^k(\cdot) = \mathbf{P}_{L_k}^L(\cdot), \quad (2)$$

et  ${}^t(\cdot)$  représente la transposée d'un vecteur ou d'une matrice.

L'équation d'équilibre de la sous-structure  $S_j$  isolée s'écrit:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_e - {}^t\mathbf{P}_L \mathbf{f}_L. \quad (3)$$

$\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse de  $S_j$ ,  $\mathbf{f}_e$  sont les forces extérieures,  $\mathbf{f}_L$  sont les réactions exercées par  $S_j$  sur  $L_j$ .

Les méthodes de synthèse modale consistent à exprimer les déplacements de la sous-structure  $S_j$  comme une combinaison linéaire des vecteurs de Ritz d'une base de projection  $\mathbf{Q}$ , c.-à-d.  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{q}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées généralisées. En projetant l'équation d'équilibre (3) sur la base de projection  $\mathbf{Q}$ , on obtient le système réduit de la sous-structure:

$${}^t\mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{q} + {}^t\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} + {}^t\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}} = {}^t\mathbf{Q}\mathbf{f}_e - {}^t\mathbf{Q}{}^t\mathbf{P}_L \mathbf{f}_L. \quad (4)$$

Le couplage des sous-structures est assez simple, il est réalisé en utilisant la continuité des déplacements à l'interface et l'équilibre des réactions à l'interface et permettent de coupler plusieurs sous-structures sur une même interface. Par exemple, si les sous-structures  $S_1, S_2, \dots, S_k$  sont connectées par une même interface, ces relations s'écrivent:

$$\mathbf{x}_L^{S_1} = \mathbf{x}_L^{S_2} = \dots = \mathbf{x}_L^{S_k}, \quad \mathbf{f}_L^{S_1} + \mathbf{f}_L^{S_2} + \dots + \mathbf{f}_L^{S_k} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

La procédure de couplage correspond à la formulation primale décrite dans (de Klerk et al., 2008) qui consiste à assembler les matrices réduites des sous-structures pour former les matrices réduites de la structure complète, de façon similaire à l'assemblage des matrices élémentaires dans la méthode des éléments-finis. Dans les matrices réduites assemblées, les matrices réduites des sous-structures sont couplées à travers les coordonnées généralisées qui sont communes à au moins deux sous-structures, comme les déplacements d'interface ou les coordonnées généralisées associées aux modes d'interface ou d'interface partiels.

## III.2.2. Modes propres et modes statiques des sous-structures

### III.2.2.1. Modes propres

Les modes propres avec interface mixte  $\Phi$  sont les  $m_k$  premiers modes propres de la sous-structure  $S_j$  avec comme conditions aux limites les DDL de  $L_c$  fixés:

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega^2 - {}^t\mathbf{P}_c \mathbf{R}_m \quad \text{avec} \quad {}^c\Phi = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{M}_G \Omega^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_G = {}^t\Phi \mathbf{K} \Phi \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_G = {}^t\Phi \mathbf{M} \Phi, \quad (7)$$

où  $\mathbf{R}_m$  sont les réactions modales,  $\mathbf{K}_G$  et  $\mathbf{M}_G$  sont les matrices de rigidité et de masse généralisées.

Pour les sous-structures avec interface fixe ou libre,  $\Phi$  sont donc les modes propres avec interface fixe ou libre. Dans le dernier cas, on précisera si  $\Phi$  incluent ou non les modes de corps rigide.

### III.2.2.2. Modes de liaison

Les modes de liaison  $\Psi_c$  sont les  $n_c$  déformées statiques de la sous-structure  $S_j$  obtenues en imposant successivement un déplacement unitaire à un DDL de  $L_c$  tandis que les autres DDL de  $L_c$  sont fixés :

$$\mathbf{K} \Psi_c = - {}^t\mathbf{P}_c \mathbf{R}_c \quad \text{avec} \quad {}^c\Psi_c = \mathbf{I}, \quad (8)$$

où  $\mathbf{R}_c$  sont les réactions statiques.

On définit également les  $n_L$  modes de liaison  $\Psi_C$  obtenus en imposant les déplacements unitaires à l'interface  $L_j$  :

$$\mathbf{K} \Psi_C = - {}^t\mathbf{P}_L \mathbf{R}_C \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_L \Psi_C = \mathbf{I}. \quad (9)$$

Pour les sous-structures avec interface mixte,  $\Psi_C$  est partitionné en deux ensembles,  $\Psi_{Cc}$  et  $\Psi_{Ca}$ , correspondant respectivement aux déplacements unitaires imposés aux interfaces  $L_c$  et  $L_a$ . En partitionnant la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  de  $S_j$  suivant des DDL d'interface  $\mathbf{x}_{Lc}$ ,  $\mathbf{x}_{La}$  et les DDL internes, on peut facilement montrer que :

$$\Psi_c = \Psi_{Cc} + \Psi_{Ca} {}^a\Psi_c. \quad (10)$$

Pour les sous-structures avec interface fixe (Craig & Bampton, 1968), on a  $\Psi_C = \Psi_c$ .

### III.2.2.3. Modes d'attache

Les modes d'attache  $\Psi_a$  sont les  $n_a$  déformées statiques de la sous-structure  $S_j$  obtenues en appliquant successivement l'opposée d'une force unitaire sur un DDL de  $L_a$  tandis que les DDL de  $L_c$  sont fixés :

$$\mathbf{K} \Psi_a = - {}^t\mathbf{P}_a - {}^t\mathbf{P}_c \mathbf{R}_a \quad \text{avec} \quad {}^c\Psi_a = \mathbf{0}, \quad (11)$$

où  $\mathbf{R}_a$  sont les réactions statiques.

Comme les forces unitaires ne sont appliquées qu'à l'interface  $L_a$ , les modes d'attache  $\Psi_a$  peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de  $\Psi_{Ca}$  :

$$\Psi_a = \Psi_{Ca} {}^a\Psi_a, \quad \text{d'où} \quad \Psi_{Ca} = \Psi_a {}^a\Psi_a^{-1}. \quad (12)$$

En reportant Eq. (12) dans Eq. (10), on obtient:

$$\Psi_{Cc} = \Psi_c - \Psi_a {}^a\Psi_a^{-1} {}^a\Psi_c \quad (13)$$

d'où

$$\Psi_C = [\Psi_{Cc}, \Psi_{Ca}] = [\Psi_c - \Psi_a {}^a\Psi_a^{-1} {}^a\Psi_c, \Psi_a {}^a\Psi_a^{-1}]. \quad (14)$$

### III.2.2.4. Matrice de flexibilité et de flexibilité résiduelle

La sous-structure étant statiquement stable lorsque les DDL d'interface  $\mathbf{x}_{Lc}$  sont fixés, la sous-matrice  $\bar{\mathbf{K}}$  de  $\mathbf{K}$  restreinte aux DDL  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_{La}$  est inversible. On définit la matrice de flexibilité statique :  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , où les sous-matrices nulles correspondent aux DDL  $\mathbf{x}_{Lc}$ .  $\mathbf{Z}$  peut être développée en termes de tous les modes propres de la sous-structure  $S_j$  (avec  $\mathbf{x}_{Lc}$  fixés) :

$$\mathbf{Z} = \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t\Phi + \Phi_{\text{res}} \mathbf{K}_{\text{Gres}}^{-1} {}^t\Phi_{\text{res}}, \quad (15)$$

où  $\Phi_{\text{res}}$  sont les modes propres résiduels et  $\mathbf{K}_{\text{Gres}}$  est la matrice de rigidité généralisée correspondante.

On définit la matrice de flexibilité résiduelle  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{G} = \Phi_{\text{res}} \mathbf{K}_{\text{Gres}}^{-1} {}^t\Phi_{\text{res}} = \mathbf{Z} - \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t\Phi. \quad (16)$$

### III.2.2.5. Modes d'attache résiduels

Les modes d'attache  $\Psi_a$  peuvent s'écrire :

$$\Psi_a = -\mathbf{Z}^t \mathbf{P}_a. \quad (17)$$

Les modes d'attache résiduels  $\Psi_{ar}$  sont les modes d'attache  $\Psi_a$  auxquels on supprime la contribution des modes propres retenus dans  $\Phi$  pour ne garder que celle des modes propres résiduels  $\Phi_{res}$ , ce qui revient à remplacer  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{G}$  dans l'expression (16) de  $\Psi_a$ . On a :

$$\Psi_{ar} = -\mathbf{G}^t \mathbf{P}_a = \Psi_a + \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t \Phi \quad \text{avec} \quad {}^c \Psi_{ar} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

### III.2.2.6. Modes d'attache et d'attache résiduels pour les sous-structures libres avec interface libre

Pour les sous-structures libres, c.-à-d. possédant des modes de corps rigide, on a supposé dans la méthode avec interface mixte qu'il y a suffisamment de DDL d'interface fixe  $L_c$  pour que la sous-structure soit statiquement stable lorsque ces DDL sont fixés, de manière qu'on puisse calculer les modes d'attache et les modes d'attache résiduels. Les méthodes avec interface libre ( $L_c = \emptyset$ ) ne sont donc pas applicables aux sous-structures libres car la matrice  $\mathbf{K}$  étant singulière, les modes d'attache ne peuvent être calculés avec Eq. (11). Cet inconvénient est levé en utilisant les modes d'attache et les modes d'attache résiduels pour les sous-structures libres introduits par Hintz (1975).

Soit  $\Psi_r$  les  $n_r$  modes de corps rigide de la sous-structure  $S_j$ , on a :

$$\mathbf{K} \Psi_r = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad {}^t \Psi_r \mathbf{M} \Phi = \mathbf{0}, \quad (19)$$

où  $\Phi$  sont les  $m_k$  premiers modes propres élastiques de  $S_j$  avec interface libre. La matrice  ${}^t \Psi_r \mathbf{M} \Psi_r$  n'est pas nécessairement diagonale si  $\Psi_r$  sont obtenus par une résolution statique.

On choisit  $n_r$  DDL  $\mathbf{x}_r$  de  $\mathbf{x}$  qui assurent l'équilibre isostatique de  $S_j$  et soit  $\mathbf{P}_r$  la matrice de restriction de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{x}_r$  :  $\mathbf{x}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{x}$ .

En imposant temporairement les conditions aux limites  $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}$ , on résout le problème statique :

$$\mathbf{K} \hat{\Psi}_a = -\mathbf{A}^t \mathbf{P}_a \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_r \hat{\Psi}_a = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{M} \Psi_r ({}^t \Psi_r \mathbf{M} \Psi_r)^{-1} {}^t \Psi_r. \quad (20)$$

On note qu'il n'y pas de réaction statique aux DDL  $\mathbf{x}_r$  lors du calcul de  $\hat{\Psi}_a$ , car la sous-structure est soumise à un système de forces en équilibre composé d'une part des forces unitaires appliquées aux liaisons libres, et d'autre part des forces inertielles associées aux accélérations de corps rigide créées par les forces unitaires.

Les modes d'attache pour les sous-structures libres  $\Psi_a$  sont obtenus en orthogonalisant, relativement à  $\mathbf{M}$ ,  $\hat{\Psi}_a$  par rapport à  $\Psi_r$  (Hintz, 1975) :

$$\Psi_a = {}^t \mathbf{A} \hat{\Psi}_a \quad \text{de manière que} \quad {}^t \Psi_a \mathbf{M} \Psi_r = \mathbf{0}. \quad (21)$$

La sous-matrice  $\bar{\mathbf{K}}$  de  $\mathbf{K}$  restreinte au complémentaire de  $\mathbf{x}_r$  dans  $\mathbf{x}$  étant inversible, on considère la matrice de flexibilité isostatique :  $\mathbf{Z}_{iso} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , où les sous-matrices nulles correspondent aux DDL  $\mathbf{x}_r$ , ainsi que la matrice de pseudo-flexibilité (Imbert, 1984) :

$$\mathbf{Z} = {}^t \mathbf{A} \mathbf{Z}_{iso} \mathbf{A}. \quad (22)$$

$\mathbf{Z}$  peut être développée en termes de tous les modes propres élastiques de  $S_j$  (avec interface libre) :

$$\mathbf{Z} = \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t \Phi + \Phi_{res} \mathbf{K}_{Gres}^{-1} {}^t \Phi_{res}, \quad (23)$$

où  $\Phi_{res}$  sont les modes propres résiduels et  $\mathbf{K}_{Gres}$  est la matrice de rigidité généralisée associée. Les modes d'attache peuvent alors s'écrire :

$$\Psi_a = -\mathbf{Z}^t \mathbf{P}_a. \quad (24)$$

On définit alors la matrice de flexibilité résiduelle  $\mathbf{G}$  ainsi que les modes d'attache résiduels  $\Psi_{ar}$  de la même façon que dans Eqs. (16) et (18) :

$$\mathbf{G} = \Phi_{res} \mathbf{K}_{Gres}^{-1} {}^t \Phi_{res} = \mathbf{Z} - \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t \Phi, \quad (25)$$

$$\Psi_{ar} = -\mathbf{G}^t \mathbf{P}_a = \Psi_a + \Phi \mathbf{K}_G^{-1} {}^t \Phi. \quad (26)$$

### III.3. Méthodes de synthèse modale classiques

#### III.3.1. Méthode utilisant les modes d'attache

##### III.3.1.1. Méthode avec interface mixte (HA)

Les déplacements physiques de la sous-structure sont exprimés comme combinaison linéaire des modes propres avec interface mixte, des modes de liaison et les modes d'attache :

$$\mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\mu} + \Psi_c \boldsymbol{\xi}_c + \Psi_a \boldsymbol{\xi}_a \quad (27)$$

où  $\boldsymbol{\mu}$  sont les coordonnées généralisées modales,  $\boldsymbol{\xi}_c$  et  $\boldsymbol{\xi}_a$  sont les coordonnées généralisées associées aux modes statiques.

En prémultipliant (27) par  $\mathbf{P}_c$ , et comme  ${}^c\Phi = \mathbf{0}$ ,  ${}^c\Psi_c = \mathbf{I}$  et  ${}^c\Psi_a = \mathbf{0}$ , on obtient :

$$\mathbf{x}_{Lc} = \boldsymbol{\xi}_c. \quad (28)$$

En prémultipliant (27) par  $\mathbf{P}_a$ , on obtient :

$$\boldsymbol{\xi}_a = {}^a\Psi_a^{-1} (\mathbf{x}_{La} - {}^a\Phi \boldsymbol{\mu} - {}^a\Psi_c \mathbf{x}_{Lc}). \quad (29)$$

En reportant Eqs. (28) et (29) dans Eq. (27), on obtient :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi'_c \mathbf{x}_{Lc} + \Psi'_a \mathbf{x}_{La}, \quad (30)$$

avec

$$\Psi'_a = \Psi_a {}^a\Psi_a^{-1}, \quad \Psi'_c = \Psi_c - \Psi'_a {}^a\Psi_c, \quad \Phi' = \Phi - \Psi'_a {}^a\Phi. \quad (31)$$

$\Psi'_a$  sont les modes d'attache normalisés,  $\Psi'_c$  et  $\Phi'$  sont les modes de liaison et les modes propres homogénéisés. Ils vérifient:

$${}^a\Psi'_a = \mathbf{I}, \quad {}^c\Psi'_a = \mathbf{0}, \quad {}^a\Psi'_c = \mathbf{0}, \quad {}^c\Psi'_c = \mathbf{I}, \quad {}^a\Phi' = \mathbf{0}, \quad {}^c\Phi' = \mathbf{0}. \quad (32)$$

D'après Eq. (14), on a :

$$\Psi_C = [\Psi'_c, \Psi'_a]. \quad (33)$$

Eq. (30) devient alors :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \mathbf{x}_L. \quad (34)$$

Le système réduit Eq. (4) est obtenu en projetant Eq. (3) sur la base de projection  $\mathbf{Q} = [\Phi', \Psi_C]$ , les inconnus sont les coordonnées modales  $\boldsymbol{\mu}$  et les déplacements d'interface  $\mathbf{x}_L$ , et le couplage des sous-structures est réalisé à travers  $\mathbf{x}_L$ .

Eq. (30) inclue comme cas particuliers les méthodes avec interface fixe (Craig & Bampton, 1968) et interface libre (Hintz, 1975; Tran, 1993).

##### III.3.1.2. Méthode avec interface fixe (CB)

Les déplacements physiques sont exprimés comme combinaison linéaire des modes propres avec interface fixe ( $\Phi' = \Phi$ ) et des modes de liaison :

$$\mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \mathbf{x}_L. \quad (35)$$

### III.3.1.3. Méthode avec interface libre (FA)

Les déplacements physiques sont exprimés comme combinaison linéaire des modes propres avec interface libre, incluant les modes de corps rigide pour les sous-structures libres, et des modes d'attache :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi'_a \mathbf{x}_L. \quad (36)$$

Pour les sous-structures liées, comme  $\Psi'_a = \Psi_C$  d'après Eq. (33), Eq. (36) s'écrit également:

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \mathbf{x}_L. \quad (37)$$

Bien que Eq. (37) n'est plus valable pour les sous-structures libres, elle représente néanmoins une variante à Eq. (36). Notons que la méthode de Herting (1985) utilise Eq. (37) avec  $\Phi' = \Phi - \Psi_C {}^a \Phi$ .

## III.3.2. Méthodes utilisant les modes d'attache résiduels

### III.3.2.1. Méthode avec interface mixte (HR)

Les déplacements physiques de la sous-structure sont exprimés comme combinaison linéaire des modes propres avec interface mixte, des modes de liaison et les modes d'attache résiduels :

$$\mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\mu} + \Psi_c \boldsymbol{\xi}_c + \Psi_{ar} \boldsymbol{\xi}_a. \quad (38)$$

En procédant comme dans Eqs. (28) et (29), Eq. (38) devient :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi'_c \mathbf{x}_{Lc} + \Psi'_{ar} \mathbf{x}_{La}, \quad (39)$$

avec

$$\Psi'_{ar} = \Psi_{ar} {}^a \Psi_{ar}^{-1}, \quad \Psi'_c = \Psi_c - \Psi'_{ar} {}^a \Psi_c, \quad \Phi' = \Phi - \Psi'_{ar} {}^a \Phi. \quad (40)$$

$\Psi'_{ar}$  sont les modes d'attache résiduels normalisés,  $\Psi'_c$  et  $\Phi'$  sont les modes de liaison et les modes propres homogénéisés. Ils vérifient les relations similaires à celles dans Eq. (32).

### III.3.2.2. Méthode avec interface libre (FR)

Les déplacements physiques sont exprimés comme combinaison linéaire des modes propres avec interface libre, incluant les modes de corps rigide pour les sous-structures libres, et des modes d'attache résiduels (Rubin, 1975) :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi'_{ar} \mathbf{x}_L. \quad (41)$$

### III.3.2.3. Remarques

1) Les méthodes avec interface mixte et libre de MacNeal (1971) sont les variantes des méthodes utilisant les modes d'attache résiduels dans lesquelles ces derniers sont négligés dans la projection de la matrice de masse.

2) Comme les deux ensembles de vecteurs  $[\Phi, \Psi_a]$  et  $[\Phi, \Psi_{ar}]$  engendrent le même sous-espace, la contribution redondante de  $\Phi$  dans  $\Psi_a$  étant simplement éliminée dans  $\Psi_{ar}$ , les méthodes utilisant les modes d'attache résiduels doivent donner les mêmes résultats que celles utilisant les modes d'attache. Cependant,  $\Psi_a$  est plus simple à calculer que  $\Psi_{ar}$ , et l'inversion de  ${}^a \Psi_{ar}$  pour obtenir  $\Psi'_{ar}$  dans Eq. (40) peut être sujet à des problèmes numériques lorsque le nombre de modes propres retenus dans  $\Phi$  est important.

3) La relation Eq. (33),  $\Psi_C = [\Psi'_c, \Psi'_{ar}]$ , n'est plus valable avec les modes d'attache résiduels pour les sous-structures avec interface mixte, et de même la relation  $\Psi_C = \Psi'_{ar}$  n'est pas valable pour les sous-structures avec interface libre. Par conséquent, les expressions (34) et (37) ne sont pas valables avec les modes d'attache résiduels, cependant elles constituent des variantes des méthodes utilisant les modes d'attache résiduels dans lesquelles les vecteurs de Ritz associés aux DDL d'interface sont remplacés par les modes de liaison de la méthode CB. Les résultats numériques montrent que ces variantes sont aussi précises que Eqs. (39) et (41).

### III.4. Méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface

On considère l'expression suivante des déplacements de la sous-structure  $S_j$  qui s'applique aux méthodes classiques avec les trois types d'interface (CB, FA et HA) :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \mathbf{x}_L. \quad (42)$$

Pour les sous-structures libres de la méthode avec interface libre (FA) et pour les méthodes utilisant les modes d'attache résiduels (FR et HR), Eq. (42) représente les variantes dans lesquelles les vecteurs de Ritz associés aux DDL d'interface sont remplacés par les modes de liaison  $\Psi_C$  de la méthode CB.

Afin de réduire de nombre de DDL d'interface dans le système réduit de ces méthodes, on doit effectuer une troncation des modes de liaison  $\Psi_C$ , ce qui pose le problème du choix des modes à éliminer, car chaque mode est associé à un DDL d'interface et ces derniers sont tous nécessaires pour le couplage des sous-structures. Les modes d'interface fournissent une représentation équivalente des modes de liaison dont la troncation est beaucoup plus facile à obtenir.

#### III.4.1. Modes d'interface

On note par  $\Psi_C^S$  les  $n_L^S$  modes de liaison globaux de la structure  $S$  obtenus en imposant les déplacements unitaires sur les DDL de l'interface  $L^S$  de  $S$ . Ce sont également les extensions à  $S$  des modes de liaison  $\Psi_C$  des sous-structures en complétant par zéros sur les autres sous-structures car ces dernières ne sont pas déformées par les déplacements unitaires imposés. Réciproquement, les modes de de liaison  $\Psi_C$  sont les restrictions des modes de liaison globaux  $\Psi_C^S$  sur les sous-structures.

Les modes d'interface sont obtenus en effectuant une condensation de Guyan de la structure complète  $S$  sur l'interface  $L^S$ , c.-à-d. en exprimant les déplacements de  $S$  par :

$$\mathbf{x}^S = \Psi_C^S \mathbf{x}_L^S. \quad (43)$$

En projetant l'équation du mouvement libre de  $S$  sur  $\Psi_C^S$ , on obtient le système réduit de Guyan :

$$\mathbf{K}_L^S \mathbf{X}_L^S = \mathbf{M}_L^S \mathbf{X}_L^S \Omega_L^2, \quad (44)$$

avec  $\mathbf{K}_L^S = {}^t\Psi_C^S \mathbf{K}^S \Psi_C^S$  et  $\mathbf{M}_L^S = {}^t\Psi_C^S \mathbf{M}^S \Psi_C^S$ ,  $\mathbf{K}^S$  et  $\mathbf{M}^S$  étant les matrices de rigidité et de masse de  $S$ .

Les modes d'interface sont les modes propres  $\mathbf{X}_L^S$  du système réduit de Guyan Eq. (44). Les modes d'interface globaux  $\Phi_L^S$  de la structure sont les modes propres approchés de  $S$  obtenus par une expansion à  $S$  de  $\mathbf{X}_L^S$  à l'aide de Eq. (43), tandis que les modes d'interface  $\Phi_L$  de la sous-structure  $S_j$  sont les restrictions de  $\Phi_L^S$  à  $S_j$  :

$$\Phi_L^S = \Psi_C^S \mathbf{X}_L^S \quad \text{et} \quad \Phi_L = \mathbf{P}_{S_j}^S \Phi_L^S = \Psi_C^j \mathbf{X}_L^S, \quad (45)$$

où  ${}^j(\ ) = \mathbf{P}_{L_j}^L(\ )$  désigne la restriction de l'interface  $L^S$  de  $S$  à l'interface  $L_j$  de  $S_j$ , Eq. (2).

En pratique les modes d'interface sont calculés en projetant les matrices de rigidité et de masse de  $S_j$  sur  $\Psi_C$  et en assemblant les matrices réduites qui en résultent pour obtenir le système réduit Eq. (44), comme dans la méthode CB mais sans les modes propres  $\Phi$ .

Comme les modes d'interface globaux sont les modes propres approchés de  $S$  qui sont exprimés comme des combinaisons linéaires de  $\Psi_C^S$ , d'après Eq. (45), il est clair que l'ensemble de tous les modes d'interface globaux, incluant ceux retenus et non retenus dans  $\Phi_L^S$ , engendrent le même sous-espace que  $\Psi_C^S$ , car ce sont deux familles linéairement indépendantes avec le même nombre de vecteurs. On peut donc obtenir une troncation de l'espace engendré par  $\Psi_C^S$  en faisant une troncation de  $\Phi_L^S$  en utilisant une critère sur les fréquences, c.-à-d. en ne gardant dans  $\Phi_L^S$  que les quelques premiers vecteurs propres de Eq. (44) qui correspondent aux plus petites fréquences.



### III.4.2. Méthode avec interface fixe utilisant les modes d'interface (CBI)

Dans le méthode classique avec interface fixe (CB), les déplacements de la structure complète  $S$  sont exprimés par :

$$\mathbf{x}^S = \Phi^S \boldsymbol{\mu}^S + \Psi_C^S \mathbf{x}_L^S, \quad (46)$$

où  $\Phi^S$  sont les extensions à  $S$  des modes propres avec interface fixe  $\Phi$  en complétant par des zéros sur les autres sous-structures. Le système réduit couplé est obtenu soit en assemblant les systèmes réduits des sous-structures, soit en projetant l'équation d'équilibre de  $S$  sur les vecteurs de Ritz  $[\Phi^S, \Psi_C^S]$ .

Comme  $\Psi_C^S$  engendre le même sous-espace que l'ensemble de tous les modes d'interface, une formulation strictement équivalente est obtenue en remplaçant  $\Psi_C^S$  par ces derniers dans Eq. (46).

La méthode avec interface fixe utilisant les modes d'interface (CBI) (Craig & Chang, 1977b; Bourquin, 1992; Tran, 2001) consiste à remplacer les modes de liaison par les premiers modes d'interface. Au niveau de la structure  $S$ , Eq. (46) devient:

$$\mathbf{x}^S = \Phi^S \boldsymbol{\mu}^S + \Phi_L^S \boldsymbol{\mu}_L, \quad (47)$$

où  $\boldsymbol{\mu}_L$  sont les coordonnées généralisées associées avec les modes d'interface. Les coordonnées d'interface  $\boldsymbol{\mu}_L$  ne sont pas associées à une sous-structure ou une interface particulière, elles sont au contraire communes à toutes les sous-structures et serviront pour le couplage des sous-structures. Le système réduit couplé est obtenu en projetant l'équation d'équilibre de  $S$  sur la base de projection  $\mathbf{Q}^S = [\Phi^S, \Phi_L^S]$ . La taille du système réduit est beaucoup plus petite que dans la méthode classique car les déplacements d'interface  $\mathbf{x}_L^S$  sont remplacés par un petit nombre de coordonnées d'interface  $\boldsymbol{\mu}_L$ .

En prenant la restriction de Eq. (47) aux sous-structures, ce qui revient à remplacer les modes de liaison  $\Psi_C$  dans Eq. (35) par les modes d'interface  $\Phi_L$ , les déplacements physiques de  $S_j$  sont exprimés comme une combinaison linéaire des modes propres avec interface fixe  $\Phi$  et les modes d'interface  $\Phi_L$  :

$$\mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\mu} + \Phi_L \boldsymbol{\mu}_L, \quad (48)$$

avec les mêmes coordonnées d'interface  $\boldsymbol{\mu}_L$  pour toutes les sous-structures. Le système réduit Eq. (4) de  $S_j$  est obtenu en projetant Eq. (3) sur les vecteur de Ritz  $\mathbf{Q} = [\Phi, \Phi_L]$ . Le couplage des sous-structure est réalisé à l'aide de  $\boldsymbol{\mu}_L$ .

### III.4.3. Méthodes avec interface libre et mixte utilisant les modes d'interface (FAI, HAI, FRI, HRI)

Pour les méthodes avec interface libre et mixte, Eq. (42) s'écrit au niveau de la structure complète  $S$ :

$$\mathbf{x}^S = \Phi^{S'} \boldsymbol{\mu}^S + \Psi_C^S \mathbf{x}_L^S, \quad (49)$$

où les modes propres homogénéisés globaux  $\Phi^{S'}$  sont les extensions à  $S$  des modes propres homogénéisés  $\Phi'$  des sous-structures en complétant par des zéros sur les autres sous-structures, de la même manière que pour  $\Phi^S$ .

La méthode avec interface libre et mixte utilisant les modes d'interface (FAI, HAI, FRI, HRI) (Tran, 2001) consiste à remplacer les modes de liaison par les premiers modes d'interface. Au niveau de la structure  $S$ , Eq. (49) devient:

$$\mathbf{x}^S = \Phi^{S'} \boldsymbol{\mu}^S + \Phi_L^S \boldsymbol{\mu}_L, \quad (50)$$

En prenant la restriction de Eq. (50) aux sous-structures, ce qui revient à remplacer les modes de liaison  $\Psi_C$  dans Eq. (42) par les modes d'interface  $\Phi_L$ , les déplacements physiques de  $S_j$  sont exprimés comme une combinaison linéaire des modes propres homogénéisés  $\Phi'$  et les modes d'interface  $\Phi_L$  :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Phi_L \boldsymbol{\mu}_L. \quad (51)$$

Le couplage des sous-structures est réalisé de la même manière que pour la méthode avec interface fixe CBI. En fait, Eqs. (50) et (51) s'appliquent aux trois types d'interface et incluent Eqs. (47) et (48) comme des cas particuliers.

Les méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface sont moins précises que les méthodes classiques, sauf si tous les modes d'interface de Eq. (44) sont conservés dans Eq. (51). Cependant, un petit nombre de modes d'interface suffit pour obtenir une bonne précision comparé aux méthodes classiques.

Les sous-structures ne sont plus indépendantes comme dans la méthode classique, car les modes d'interface dépendent de la structure complète, la modification d'une sous-structure entrainera le recalcul des modes d'interface, des bases de projection et des systèmes réduits de toutes les sous-structures.

### III.5. Méthodes de synthèse modale avec les modes d'interface partiels

Dans les méthodes de synthèse modale classiques, Eq. (42), ou les méthodes avec modes d'interface, Eq. (51), la totalité des déplacements d'interface  $\mathbf{x}_L^S$  sont soit conservés soit éliminés dans le système réduit. Si l'on souhaite conserver les déplacements de l'interface  $L_k^S$  et éliminer ceux de l'interface  $L_e^S$ , l'idée est de remplacer les modes d'interface par d'autres familles de vecteurs de Ritz dont certaines des coordonnées généralisées associées sont justement les déplacements  $\mathbf{x}_{L_k}^S$  de  $L_k^S$ . Pour cela, on considère le système réduit de Guyan Eq. (44) comme l'équation du mouvement libre d'une structure dont les DDL sont les déplacements  $\mathbf{x}_L^S$  de  $L^S$ . On peut alors appliquer encore une fois un deuxième niveau de synthèse modale à Eq. (44) en considérant  $L_e^S$  comme des DDL intérieurs et  $L_k^S$  comme des DDL d'interface. Les modes d'interface partiels sont les modes propres de Eq. (44) qui sont encastrés sur une partie de l'interface conservée  $L_k^S$ , en fonction de la méthode de synthèse modale choisie, c.-à-d. avec interface fixe, libre ou mixte. Ces modes sont complétés par des modes statiques de Eq. (44) associés à  $L_k^S$ , ces deux ensembles sont ensuite étendus à la structure complète en utilisant Eq. (43) puis restreints à chaque sous-structure afin de constituer la base de projection des déplacements de la sous-structure. On présente ici les modes d'interface partiels fixes (Tran, 2009a), obtenus en appliquant la méthode de synthèse modale avec interface fixe (CB) à Eq. (44). Les modes d'interface partiels libres ou mixtes, obtenus en appliquant les méthodes de synthèse modale avec interface libre (FA) ou mixte (HA) à Eq. (44), sont décrits dans (Tran, 2009b, cf. Annexe).

Les modes d'interface partiels fixes  $\mathbf{X}_P^S$  sont les modes propres du système réduit de Guyan Eq. (44) qui sont encastrés à  $L_k^S$ :

$$\mathbf{K}_L^S \mathbf{X}_P^S = \mathbf{M}_L^S \mathbf{X}_P^S \Omega_P^2 + \mathbf{R}_P \quad \text{avec} \quad {}^k \mathbf{X}_P^S = \mathbf{0}. \quad (52)$$

Ils sont complétés par les modes de liaison  $\mathbf{X}_{ck}^S$  associés à  $L_k^S$  du système réduit de Guyan Eq. (44):

$$\mathbf{K}_L^S \mathbf{X}_{ck}^S = \mathbf{R}_{ck} \quad \text{avec} \quad {}^k \mathbf{X}_{ck}^S = \mathbf{I}. \quad (53)$$

$\mathbf{R}_P$  et  $\mathbf{R}_{ck}$  sont des réactions dues aux conditions aux limites imposées et  ${}^k(\cdot) = \mathbf{P}_{L_k}^L(\cdot)$  désigne la restriction de l'interface  $L^S$  à l'interface conservée  $L_k^S$ , Eq. (2).

Les modes d'interface  $\mathbf{X}_L^S$  de Eq. (44) sont exprimés comme des combinaisons linéaires de  $\mathbf{X}_P^S$  et  $\mathbf{X}_{ck}^S$  de la même manière que dans Eq. (35):

$$\mathbf{X}_L^S = \mathbf{X}_P^S \mathbf{B} + \mathbf{X}_{ck}^S {}^k \mathbf{X}_L^S. \quad (54)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice des coordonnées modales.

Les modes d'interface partiels globaux  $\Phi_P^S$  de la structure  $S$  sont les modes propres approchés de  $S$  obtenus par une expansion à  $S$  de  $\mathbf{X}_P^S$  à l'aide de Eq. (43). Les modes d'interface partiels  $\Phi_P$  de la sous-structure  $S_j$  sont les restrictions de  $\Phi_P^S$  à  $S_j$ , ils peuvent être aussi obtenus par une expansion de  ${}^j \mathbf{X}_P^S$  à  $S_j$  en utilisant  $\Psi_C$ :

$$\Phi_P^S = \Psi_C^S \mathbf{X}_P^S \quad \text{et} \quad \Phi_P = \mathbf{P}_{S_j}^S \Phi_P^S = \Psi_C {}^j \mathbf{X}_P^S. \quad (55)$$

Les modes de liaison  $\Psi_{ck}^S$  de  $S$  et  $\Psi_{ck}$  de  $S_j$  sont obtenus à partir de  $\mathbf{X}_{ck}^S$  de la même manière:

$$\Psi_{ck}^S = \Psi_C^S \mathbf{X}_{ck}^S \quad \text{et} \quad \Psi_{ck} = \mathbf{P}_{S_j}^S \Psi_{ck}^S = \Psi_C {}^j \mathbf{X}_{ck}^S. \quad (56)$$

Comme la condensation statique de Guyan n'induit aucune erreur sur les solutions statiques lorsque les sollicitations sont appliquées à l'interface, les modes de liaison globaux  $\Psi_{ck}^S$  sont identiques à ceux obtenus directement sur la structure  $S$  en imposant successivement un déplacement unitaire à un DDL de  $L_k^S$ , tandis que les autres DDL de  $L_k^S$  sont fixes et ceux de  $L_e^S$  sont libres. On a ainsi  ${}^k\Psi_{ck}^S = \mathbf{I}$ .

En pratique, les matrices réduites du système Eq. (44) sont formées de la même manière que pour les modes d'interface. Les systèmes réduits Eqs. (52-53) sont résolus pour obtenir les premiers vecteurs propres  $\mathbf{X}_P^S$  et les modes de liaison  $\mathbf{X}_{ck}^S$ . Les modes d'interface partiels  $\Phi_P$  et les modes de liaison  $\Psi_{ck}$  sont ensuite obtenus par une expansion de  ${}^j\mathbf{X}_P^S$  et  ${}^j\mathbf{X}_{ck}^S$  à  $S_j$  en utilisant  $\Psi_C$ , Eqs. (55-56).

D'après Eqs. (45) et (54-56), les modes d'interface  $\Phi_L^S$  et  $\Phi_L$  de  $S$  et  $S_j$  deviennent :

$$\Phi_L^S = \Phi_P^S \mathbf{B} + \Psi_{ck}^S {}^k\mathbf{X}_L^S \quad \text{et} \quad \Phi_L = \Phi_P \mathbf{B} + \Psi_{ck} {}^k\mathbf{X}_L^S. \quad (57)$$

En substituant Eq. (57) dans Eq. (50), on obtient les méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface partiels (CBP, FAP et HAP) qui consistent à remplacer les modes de liaison dans les méthodes classiques (CB, FA, HA) ou les modes d'interface dans les méthodes CBI, FAI et HAI par les modes d'interface partiels et les modes de liaison associés avec l'interface conservé  $L_k^S$  :

$$\mathbf{x}^S = \Phi^{S'} \boldsymbol{\mu}^S + \Phi_P^S \boldsymbol{\mu}_P + \Psi_{ck}^S \mathbf{x}_{Lk}^S, \quad (58)$$

où  $\boldsymbol{\mu}_P = \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}_L$  sont les coordonnées généralisées associées avec les modes d'interface partiels. Il est clair que les coordonnées généralisées associées avec les modes de liaison sont les déplacements des DDL d'interface conservés  $\mathbf{x}_{Lk}^S$ , car  ${}^k\Phi_P^S = \mathbf{0}$ ,  ${}^k\Phi_P^S = \mathbf{0}$  et  ${}^k\Psi_{ck}^S = \mathbf{I}$ .

En prenant la restriction de Eq. (58) aux sous-structures, ce qui revient à remplacer les modes d'interface  $\Phi_L$  dans Eq. (51) par leur expression Eq. (57), les déplacements physiques de  $S_j$  sont exprimés comme une combinaison linéaire des modes propres homogénéisés  $\Phi'$ , les modes d'interface partiels  $\Phi_P$  et les modes de liaison  $\Psi_{ck}$  :

$$\mathbf{x} = \Phi' \boldsymbol{\mu} + \Phi_P \boldsymbol{\mu}_P + \Psi_{ck} \mathbf{x}_{Lk}^S, \quad (59)$$

avec les mêmes coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\mu}_P$  et les mêmes déplacements  $\mathbf{x}_{Lk}^S$  pour toutes les sous-structures. Le système réduits de  $S_j$  est obtenu en projetant l'équation du mouvement de  $S_j$  sur les vecteurs de Ritz  $\mathbf{Q} = [\Phi', \Phi_P, \Psi_{ck}]$ . Le couplage des sous-structures est réalisé à l'aide des coordonnées d'interface  $\boldsymbol{\mu}_P$  et les déplacements des DDL d'interface conservés  $\mathbf{x}_{Lk}^S$ .

### Remarques

1) Tous les DDL  $\mathbf{x}_{Lk}^S$  de l'interface conservée  $L_k^S$ , et pas uniquement ceux appartenant à  $S_j$ , interviennent dans l'expression Eq. (59) des déplacements de la sous-structure  $S_j$ , même lorsque  $S_j$  ne contient aucun DDL de  $L_k^S$ . Comme les modes de liaison  $\Psi_{ck}^S$  et  $\Psi_{ck}$  résultent des déformations de la structure complète  $S$  soumise à des déplacements unitaires imposés sur  $L_{ck}^S$ , une sous-structure  $S_j$  peut être déformée même si le déplacement unitaire n'est pas imposé sur ses interfaces. Seulement pour les sous-structures  $S_j$  dont tous les DDL d'interface sont conservés dans le système réduit, c.-à-d.  $L_j \subset L_k^S$ , les vecteurs dans  $\Psi_{ck}$  qui correspondent aux déplacements unitaires imposés à  $L_j$  sont précisément les modes de liaison  $\Psi_C$  of  $S_j$ , tandis que les autres vecteurs dans  $\Psi_{ck}$  ainsi que la restriction  $\Phi_P$  des modes d'interface partiels globaux  $\Phi_P^S$  à  $S_j$  sont nuls, et par conséquent Eq. (59) équivaut à Eq. (42) des méthodes classiques pour ces sous-structures.

2) Les méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface partiels sont les généralisations des méthodes classiques et des méthodes utilisant les modes d'interface. En effet, si tous les DDL d'interface sont éliminés dans le système réduit, c.-à-d.  $L_k^S = \emptyset$  et  $L_e^S = L^S$ , on obtient les méthodes utilisant les modes d'interface, Eq. (51). A l'inverse, si tous les DDL d'interface sont conservés dans le système réduit, c.-à-d.  $L_k^S = L^S$  et  $L_e^S = \emptyset$ , on obtient les méthodes classiques, Eq. (42).

3) Si tous les modes d'interface ou tous les modes d'interface partiels du système réduit de Guyan Eq. (44) sont retenus dans  $\mathbf{X}_L^S$  et  $\mathbf{X}_P^S$ , c.-à-d. qu'il n'y a pas de troncation sur ces ensembles, les méthodes utilisant les modes d'interface et les modes d'interface partiels doivent donner les mêmes résultats que les méthodes classiques. Dans le cas contraire, elles sont moins précises que les méthodes classiques. Avec le même nombre

de modes retenus, les modes d'interface partiels donnent de meilleurs résultats que les modes d'interface car les modes de liaison du système réduit de Guyan représentent une correction statique à la troncation des modes d'interface. Un critère similaire à celui de Rubin (1975) est proposé pour sélectionner les modes d'interface et d'interface partiels.

4) Contrairement à la condensation de Guyan où le choix des DDL maîtres et esclaves est effectué sans un critère clair, le choix des DDL d'interface conservés  $L_k^S$  dépend seulement du besoin de l'utilisateur à les garder dans le système réduit. Les méthodes utilisant les modes d'interface partiels doivent être considérées comme une amélioration des méthodes utilisant les modes d'interface qui permettent non seulement de réduire la taille des systèmes réduits mais aussi de garder quelques DDL d'interface dans ces derniers. De même, contrairement à la condensation de Guyan où le nombre de DDL maîtres doit être assez important pour obtenir de bons résultats, la présence d'un petit nombre de DDL d'interface dans le système réduit suffit pour améliorer la précision et la convergence des résultats comparé à ceux des méthodes utilisant les modes d'interface, avec seulement un petit coût de calcul supplémentaire, comme c'est montré dans les applications numériques. Par conséquent, même lorsqu'on n'a pas besoin des DDL d'interface dans le système réduit, il vaut mieux d'en conserver quelques uns et utiliser les modes d'interface partiels au lieu des modes d'interface.

### III.6. Cas des structures avec symétrie cyclique

Une structure avec symétrie cyclique est composée de  $N$  secteurs identiques  $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$ , qui sont obtenus par  $N - 1$  rotations répétées d'angle  $\alpha = 2\pi/N$  rd d'un secteur de référence  $S_0$ . Ce dernier a une frontière à droite  $L_r$  et une frontière à gauche  $L_l$  avec les secteurs adjacents. En utilisant les propriétés de symétrie cyclique (Thomas, 1979; Valid & Ohayon, 1985, cf. Chapitre IV), on modélise uniquement le secteur de référence  $S_0$ , sur lequel on résout  $N$  systèmes indépendants d'équations du mouvement en fonction des coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}^{S_0,n}$  pour les  $N$  indices de déphasage  $n = 0, \dots, N - 1$  (ou angles de déphasage  $\alpha_n = n\alpha$ ), avec les seconds membres appropriés et en appliquant les conditions aux limites de symétrie cyclique :

$$\mathbf{x}_{L_l}^{S_0,n} = \mathbf{x}_{L_r}^{S_0,n} e^{i\alpha_n}. \quad (60)$$

Afin de réduire la taille du système d'équations de  $S_0$ , la méthode de synthèse modale classique CB a été utilisée par Henry (1980). Cette section décrit la combinaison des méthodes de synthèse modale utilisant les modes d'interface partiels avec les propriétés de symétrie cyclique, cependant elle est aussi valable pour les méthodes classiques et les méthodes utilisant les modes d'interface.

Le secteur de référence  $S_0$  peut être décomposé ou non en sous-structures. L'interface  $L^{S_0}$  de  $S_0$  est composé des frontières  $L_r, L_l$  ainsi que des interfaces entre les sous-structures composant  $S_0$ .  $L^{S_0}$  est alors partitionnée en  $L_k$ , l'interface à conserver dans le système réduit, et  $L_e$ , l'interface à éliminer. On définit la frontière conservée à droite  $L_{rk} = L_r \cap L_k$ , la frontière conservée à gauche  $L_{lk} = L_l \cap L_k$ , la frontière éliminée à droite  $L_{re} = L_r \cap L_e$  et la frontière éliminée à gauche  $L_{le} = L_l \cap L_e$ . Les frontières  $L_{rk}$  et  $L_{lk}$  doivent correspondre aux mêmes DDL sur  $L_r$  et  $L_l$ , et de même pour  $L_{re}$  et  $L_{le}$ .

On calcule en premier lieu les modes propres  $\Phi$  et les modes statiques ainsi que les modes de liaison  $\Psi_C$  des sous-structures composant  $S_0$ , sans les conditions aux limites de symétrie cyclique.

Le système réduit de Guyan Eq. (44) de  $S_0$  est alors formé en projetant les matrices de rigidité et de masse des sous-structures sur leurs modes de liaison  $\Psi_C$  et en assemblant les matrices réduites, ou de manière équivalente, en projetant les matrices  $\mathbf{K}^{S_0}$  et  $\mathbf{M}^{S_0}$  de  $S_0$  sur ses modes de liaison  $\Psi_C^{S_0}$  :

$$\mathbf{K}_L^{S_0} \mathbf{X}_L^{S_0} = \mathbf{M}_L^{S_0} \mathbf{X}_L^{S_0} \Omega^2, \quad (61)$$

avec  $\mathbf{K}_L^{S_0} = {}^t\Psi_C^{S_0} \mathbf{K}^{S_0} \Psi_C^{S_0}$  et  $\mathbf{M}_L^{S_0} = {}^t\Psi_C^{S_0} \mathbf{M}^{S_0} \Psi_C^{S_0}$ .

En utilisant Eqs. (52-53), on calcule les modes d'interface partiels  $\mathbf{X}_p^{S_0,n}$  et les modes de liaison  $\mathbf{X}_{ck}^{S_0,n}$  du système réduit de Guyan Eq. (61). Comme ce sont les modes de la structure complète, les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (60) sont imposées, mais seulement sur les frontières éliminées à droite et à gauche  $L_{re}$  et  $L_{le}$  à ce stade, comme si les secteurs ne soient reliés que par ces frontières :

$$\mathbf{x}_{L_{le}}^{S_0,n} = \mathbf{x}_{L_{re}}^{S_0,n} e^{i\alpha_n}. \quad (62)$$

Les modes d'interface partiels  $\Phi_P^n$  et les modes de liaison  $\Psi_{ck}^n$  des sous-structures composant  $S_0$  sont alors déduits de  $\mathbf{X}_P^{S_0,n}$  et  $\mathbf{X}_{ck}^{S_0,n}$  en utilisant Eqs. (55-56) :

$$\Phi_P^n = \Psi_C^j \mathbf{X}_P^{S_0,n} \quad \text{et} \quad \Psi_{ck}^n = \Psi_C^j \mathbf{X}_{ck}^{S_0,n}. \quad (63)$$

D'après Eq. (59), les déplacements des sous-structures composant  $S_0$  sont exprimés en fonction des coordonnées d'ondes tournantes par :

$$\mathbf{x}^n = \Phi' \boldsymbol{\mu}^n + \Phi_P^n \boldsymbol{\mu}_P^{S_0,n} + \Psi_{ck}^n \mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n} \quad (64)$$

où  $\Phi'$  sont les modes propres homogénéisés qui ne dépendent pas de  $n$ ,  $\boldsymbol{\mu}^n$  et  $\boldsymbol{\mu}_P^{S_0,n}$  sont les coordonnées généralisées complexes,  $\mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n}$  sont les déplacements complexes de l'interface conservée  $L_k$  de  $S_0$ . On remarque que  $\boldsymbol{\mu}^n$  sont associées à une seule sous-structure, alors que  $\boldsymbol{\mu}_P^{S_0,n}$  et  $\mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n}$  sont communs à toutes les sous-structures composant  $S_0$ .

Les déplacements  $\mathbf{x}^{S_0,n}$  de  $S_0$  qui résultent de l'expression Eq. (64) des déplacements des sous-structures vérifient les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (62) sur les frontières éliminées à droite et à gauche  $L_{re}$  et  $L_{le}$ , car  $\Phi_{|L_{re}}^{S_0} = \Phi_{|L_{le}}^{S_0} = \mathbf{0}$ , et  $\Phi_P^{S_0,n}$  et  $\Psi_{ck}^{S_0,n}$  vérifiaient déjà Eq. (62).

Les systèmes réduits des sous-structures sont obtenus en projetant les équations d'équilibre des sous-structures sur la base de projection  $\mathbf{Q}^n = [\Phi, \Phi_P^n, \Psi_{ck}^n]$ . Le couplage des systèmes réduits des sous-structures à l'aide des coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\mu}_P^{S_0,n}$  et des déplacements de l'interface conservée  $\mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n}$  fournit le système réduit de  $S_0$  dont les inconnues sont  $\mathbf{q}^{S_0,n} = {}^t[\boldsymbol{\mu}^{S_0,n}, \boldsymbol{\mu}_P^{S_0,n}, \mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n}]$ , où  $\boldsymbol{\mu}^{S_0,n}$  contient les coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\mu}^n$  de toutes les sous-structures composant  $S_0$ . Le système couplé est alors résolu en imposant les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (60) sur les frontières conservées à droite et à gauche  $L_{rk}$  et  $L_{lk}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_R^{S_0,n} \mathbf{q}^{S_0,n} + \mathbf{C}_R^{S_0,n} \dot{\mathbf{q}}^{S_0,n} + \mathbf{M}_R^{S_0,n} \ddot{\mathbf{q}}^{S_0,n} = \mathbf{f}_R^{S_0,n} + \mathbf{f}_{LR}^{S_0,n}, \\ \mathbf{x}_{Lk}^{S_0,n} = \mathbf{x}_{Lrk}^{S_0,n} e^{i\alpha_n}. \end{cases} \quad (65)$$

Les solutions de Eqs. (65-66) fournissent les coordonnées généralisées  $\mathbf{q}^{S_0,n}$  à partir desquelles les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}^n$  des sous-structures et  $\mathbf{x}^{S_0,n}$  de  $S_0$  sont déduites en utilisant Eq. (64). Les déplacements physiques de chaque secteurs  $S_j$  sont obtenus en faisant la sommation sur  $\mathbf{x}^{S_0,n}$  :  $\mathbf{x}^{S_j} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}^{S_0,n} e^{ij\alpha_n}$ .

On remarque que les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (60) sont imposées en deux étapes, en premier lieu sur les frontières éliminées à droite et à gauche  $L_{re}$  et  $L_{le}$  dans Eq. (61) lors du calcul des modes d'interface partiels et les modes de liaison du système réduit de Guyan, et en second lieu sur les frontières conservées à droite et à gauche  $L_{rk}$  et  $L_{lk}$  dans Eq. (66) lors de la résolution du système réduit Eq. (65) de  $S_0$ .

Dans deux cas particuliers cependant, les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (60) sont imposées qu'une seule fois sur la totalité des frontières  $L_r$  et  $L_l$  : (i) lors de la résolution du système réduit Eq. (65) dans les méthodes classiques où  $L_e = \emptyset$ , car il n'y a pas de DDL d'interface éliminés, donc pas de modes d'interface ou de modes d'interface partiels; et (ii) lors de la résolution du système réduit de Guyan Eq. (61) dans les méthodes utilisant les modes d'interface où  $L_k = \emptyset$ , car il n'y a pas de DDL d'interface physiques conservés dans Eq. (65).

### III.7. Méthodes de synthèse modale avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

On présente une utilisation de la POD dans le cadre de la synthèse modale, une description plus détaillée des différentes formulations POD peut être trouvée dans (Placzek et al., 2008, cf. Annexe).

Soit  $n_j$  le nombre de DDL de  $S_j$ , on considère une matrice  $n_j \times n_U$  des  $n_U$  clichés  $\mathbf{U}$  de  $S_j$  dont chaque colonne représente un cliché. Les clichés sont des vecteurs de déplacements de  $S_j$  qui peuvent être par exemple la réponse transitoire à  $n_U$  instants ou la réponse fréquentielle à  $n_U$  fréquences d'excitation. Les clichés des sous-structures peuvent être soit calculés séparément sur chaque sous-structure (POD-S), soient extraits des clichés obtenus sur la structure complète (POD-W).

Les modes POD (POM, Proper Orthogonal Modes)  $\Phi_{\text{pod}}$  sont définis comme les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} \Phi_{\text{pod}} = \Phi_{\text{pod}} \mathbf{D}_{\text{pod}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \mathbf{U} {}^t\mathbf{U}, \quad (67)$$

où  $\mathbf{D}_{\text{pod}}$  est la matrice diagonale des valeurs propres POD (POV, Proper Orthogonal Values) non nulles. Comme  $\mathbf{R}$  est symétrique et positive, les POV sont réelles et positives. Avec une normalisation appropriée,  $\Phi_{\text{pod}}$  est orthogonale :  ${}^t\Phi_{\text{pod}} \Phi_{\text{pod}} = \mathbf{I}$ . La méthode directe qui consiste à calculer les POM à partir de Eq. (67) est seulement utilisée si la taille  $n_j$  de  $\mathbf{R}$  est petite.

On considère la décomposition aux valeurs singulières (SVD) (Strang, 1980) de  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{S} {}^t\mathbf{W} \quad \text{avec} \quad {}^t\mathbf{V} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad {}^t\mathbf{W} \mathbf{W} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_r = \text{diag}(s_1, \dots, s_r). \quad (68)$$

$\mathbf{V}$  est une matrice orthogonale  $n_j \times n_j$ ,  $\mathbf{W}$  est une matrice orthogonale  $n_U \times n_U$  et  $\mathbf{S}$  est une matrice  $n_j \times n_U$ ,  $s_1, \dots, s_r$  sont les valeurs singulières de  $\mathbf{U}$  et  $r$  est le rang de  $\mathbf{U}$  avec  $r \leq \min(n_j, n_U)$ . A cause de la forme particulière de  $\mathbf{S}$  et en notant  $\mathbf{V}_r$  et  $\mathbf{W}_r$  les  $r$  premières colonnes de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  respectivement, Eq. (68) s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_r \mathbf{S}_r {}^t\mathbf{W}_r \quad \text{avec} \quad {}^t\mathbf{V}_r \mathbf{V}_r = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad {}^t\mathbf{W}_r \mathbf{W}_r = \mathbf{I}. \quad (69)$$

En substituant Eq. (69) dans l'expression  $\mathbf{R} \mathbf{V}_r = \mathbf{U} {}^t\mathbf{U} \mathbf{V}_r$ , on obtient une variante, appelée la méthode SVD, pour calculer les POM :

$$\mathbf{R} \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r \mathbf{S}_r^2 \Rightarrow \Phi_{\text{pod}} = \mathbf{V}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{pod}} = \mathbf{S}_r^2. \quad (70)$$

En substituant Eq. (69) dans  ${}^t\mathbf{U} \mathbf{U} \mathbf{W}_r$  et en exprimant  $\mathbf{V}_r$  en termes de  $\mathbf{U}$ , on a :

$$({}^t\mathbf{U} \mathbf{U}) \mathbf{W}_r = \mathbf{W}_r \mathbf{S}_r^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_r = \mathbf{U} \mathbf{W}_r \mathbf{S}_r^{-1}. \quad (71)$$

Eq. (71) constitue une deuxième variante, appelée la méthode des clichés (Sirovich, 1987), pour calculer les POM en les exprimant comme combinaisons linéaires des clichés dont les coefficients associés sont les vecteurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}'$  :

$$\mathbf{R}' \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{D}_{\text{pod}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}' = {}^t\mathbf{U} \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{pod}} = \mathbf{U} \mathbf{X}. \quad (72)$$

La post-multiplication de  $\Phi_{\text{pod}}$  par  $\mathbf{S}_r^{-1}$  comme dans Eq. (71) est simplement une normalisation. Eq. (72) est souvent utilisée pour calculer les POM dans le cas des systèmes discrétisés par éléments-finis car la taille  $n_U$  de  $\mathbf{R}'$  est généralement plus petite que la taille  $n_j$  de  $\mathbf{R}$ .

Seul un petit nombre de POM associés aux plus grandes POV est retenu pour former la base de projection.

Les méthodes de synthèse modale classiques utilisant la POD consistent ici à remplacer les modes propres des sous-structures par les POM dans l'expression des déplacements des sous-structures, c.-à-d. à remplacer  $\Phi'$  par  $\Phi_{\text{pod}}$  dans Eq. (42):

$$\mathbf{x} = \Phi_{\text{pod}} \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \boldsymbol{\xi}. \quad (73)$$

Les coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\xi}$  dans Eq. (73) ne sont pas les déplacements d'interface  $\mathbf{x}_L$  comme dans Eq. (42), car les vecteurs  $\Phi_{\text{pod}}$  ne sont pas nécessairement nuls à l'interface comme  $\Phi'$  ( $\mathbf{P}_L \Phi' = \mathbf{0}$ ). Comme  $\mathbf{P}_L \Psi_C = \mathbf{I}$ , la restriction de Eq. (73) à l'interface  $L_j$  de  $S_j$  conduit à :

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_L - \mathbf{P}_L \Phi_{\text{pod}} \boldsymbol{\mu}. \quad (74)$$

En substituant Eq. (74) dans Eq. (73), on obtient la méthode de synthèse modale classique utilisant la POD, sans distinction du type d'interface, dans laquelle les déplacements de  $S_j$  sont exprimés par :

$$\mathbf{x} = \Phi'_{\text{pod}} \boldsymbol{\mu} + \Psi_C \mathbf{x}_L, \quad (75)$$

où  $\Phi'_{\text{pod}} = \Phi_{\text{pod}} - \Psi_C \mathbf{P}_L \Phi_{\text{pod}}$  sont les POM homogénéisés qui vérifient  $\mathbf{P}_L \Phi'_{\text{pod}} = \mathbf{0}$ .

Les modes d'interface ou les modes d'interface partiels peuvent remplacer  $\Psi_C$  dans Eq. (75), on obtient alors les méthodes de synthèse modale utilisant la POD et les modes d'interface ou les modes d'interface partiels. Les expressions des déplacements de  $S_j$  sont similaires à Eqs. (51) et (59) :

$$\mathbf{x} = \Phi'_{\text{pod}} \boldsymbol{\mu} + \Phi_L \boldsymbol{\mu}_L, \quad (76)$$

$$\mathbf{x} = \Phi'_{\text{pod}} \boldsymbol{\mu} + \Phi_P \boldsymbol{\mu}_P + \Psi_{ck} \mathbf{x}_{Lk}^S. \quad (77)$$

La procédure de couplage des sous-structures, ainsi que la combinaison avec les propriétés de symétrie cyclique, sont exactement les mêmes que pour les méthodes de synthèse modale sans la POD.

### III.8. Résultats - Conclusions

Plusieurs méthodes de synthèse modale ont été développées, à savoir les méthodes classiques, les méthodes utilisant les modes d'interface et les méthodes utilisant les modes d'interface partiels, avec les trois types de d'interface, fixe, libre et mixte. Elles ont été également combinées avec les propriétés de symétrie cyclique ainsi que la POD. Ces méthodes ont été testées sur des exemples simples de plaques et de disques aubagés accordés et désaccordés (Tran, 1992, 2001, 2009b, cf. Annexe). Leurs résultats sont en très bonne concordance avec ceux résultant du calcul des structures complètes. Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- les méthodes classiques avec interface libre sont les plus précises, cependant les méthodes avec interface fixe sont faciles à mettre en œuvre et fonctionnent bien sur un grand nombre d'applications.

- si le nombre de DDL d'interface est trop important et doit être réduit, les méthodes utilisant les modes d'interface partiels sont recommandées. Même lorsqu'on n'a pas de besoin de DDL physiques dans le système réduit couplé, il vaut mieux d'en garder quelques uns et utiliser les modes d'interface partiels plutôt que les modes d'interface, car les premiers sont bien meilleurs concernant la précision et la convergence des résultats. Un petit nombre de DDL d'interface conservés et la sélection des modes dérivée du critère de Rubin suffisent d'obtenir de très bons résultats.

- pour les structures désaccordées, l'utilisation des modes accordés n'est pas recommandée, car cela détériore significativement les résultats. L'utilisation des modes désaccordés fournit de bien meilleurs résultats avec seulement un petit coût de calcul supplémentaire.

- bien que l'utilisation la POD est un peu plus précise que la projection modale dans le cas de la structure complète, elle n'apporte pas d'amélioration par rapport aux méthodes de synthèse modale sans la POD. En plus, le choix des modes POD est plus délicat à effectuer que celui des modes propres de sous-structures, car un nombre élevé de modes POD peut conduire à des systèmes réduits mal conditionnés. Les modes POD-W obtenus à partir des clichés extraits de ceux de la structure complète donnent des résultats un peu meilleurs que ceux obtenus à partir des clichés calculés sur les sous-structures (POD-S).

# STRUCTURES MULTI-ÉTAGES AVEC SYMÉTRIE CYCLIQUE

## IV.1. Introduction

Ce travail concerne la construction des modèles réduits des assemblages de disques aubagés dans les turbomachines qui sont souvent composés de plusieurs étages. Chaque étage consiste en un disque aubagé qui possède une symétrie cyclique, c'est-à-dire chaque disque est composé de secteurs répétitifs identiques, cependant le nombre de secteurs n'est pas le même pour tous les disques.

L'approche mono-étage consiste à étudier les étages indépendamment les uns des autres. Grâce aux propriétés de symétrie cyclique (Thomas, 1979; Valid & Ohayon, 1985), on modélise un seul secteur de référence dont l'équation du mouvement exprimée en coordonnées d'ondes tournantes est résolue pour tous les indices de déphasage en appliquant les conditions aux limites de symétrie cyclique aux frontières avec les secteurs adjacents. Les propriétés de symétrie cyclique peuvent également être utilisées pour construire des modèles réduits des structures désaccordées où de petites différences existent entre les secteurs (Bladh et al., 2001a; Castanier & Pierre, 2006; Lim et al., 2007; Mbaye et al., 2010; Vargiu et al., 2011).

L'approche mono-étage est valable seulement lorsqu'il n'y a pas de couplage entre les étages. Cependant Bladh et al. (2003) a montré que les disques aubagés ne se comportent pas de la même manière lorsqu'ils sont couplés à cause de l'interaction entre leurs mouvements et par conséquent, on ne peut plus les étudier de façon indépendante. Afin de prendre en compte le couplage entre les disques, on doit utiliser l'approche multi-étages qui consiste à étudier la structure multi-étages complète et dans laquelle tous les disques aubagés doivent être intégralement modélisés et non seulement leurs secteurs de référence, car la structure multi-étages complète ne possède pas la symétrie cyclique. La modélisation de la structure multi-étages complète, ou même d'un disque aubagé complet, conduit à des systèmes d'équations du mouvement de très grandes tailles qui augmentent considérablement le temps de calcul. Des approches pour obtenir des modèles réduits des structures multi-étages ont été proposées par Song et al. (2005) et Sinha (2008).

Etant donné que certains modes propres de la structure multi-étages et ceux des disques aubagés isolés sont similaires, en particulier avec l'apparition de diamètres nodaux dont les nombres correspondent aux indices de déphasage dans la réduction par symétrie cyclique mono-étage, la réduction par symétrie cyclique multi-étages (MSCS, Multi-Stage Cyclic Symmetry) a été introduite en premier lieu par Laxalde et al. (Laxalde, Thouverez & Lombard, 2007; Laxalde, Lombard & Thouverez, 2007; Laxalde, 2007) qui imposent des relations de liaison linéaires pour le couplage inter-disque. Elle a été ensuite reprise par Sternchüss et al. (Sternchüss & Balmès, 2007; Sternchüss et al., 2008; Sternchüss, 2009; Sternchüss et al., 2009) qui introduisent des structures inter-disques, puis utilisée dans d'autres travaux qui tiennent compte du désaccordage (Laxalde & Pierre, 2011) ou des incertitudes (Segui Vasquez, 2013). Dans cette approche, le système couplé complet d'équations du mouvement de la structure multi-étages, incluant les équations des structures inter-disques et des équations de liaison, est exprimé en fonction des coordonnées d'ondes tournantes des disques aubagés, et les conditions aux limites de symétrie cyclique doivent être appliquées simultanément pour tous les disques aubagés et pour tous les indices de déphasage. La réduction MSCS consiste alors à résoudre le système couplé simultanément pour tous les disques, mais en sélectionnant seulement un ou quelques indices de déphasage pour chaque disque aubagé. Ceci conduit à des systèmes réduits qui sont des approximations du système couplé complet de la structure multi-étages, contrairement à la réduction par symétrie cyclique mono-étage où il n'y a pas d'approximation.

D'un autre côté, les méthodes de synthèse modale (CMS, Component Mode Synthesis) comme la méthode classique avec interface fixe de Craig & Bampton (1968) sont des méthodes bien connues pour construire des modèles réduits d'une structure en décomposant celle-ci en sous-structures et en assemblant les modèles réduits des sous-structures. Plusieurs méthodes CMS sont décrites dans (Tran, 2001, 2009b,a) et sont revues dans (de Klerk et al., 2008). Concernant les structures multi-étages, Sternchüss et al. (Sternchüss & Balmès, 2007; Sternchüss et al., 2008; Sternchüss, 2009; Sternchüss et al., 2009) combinent la réduction MSCS et les modèles réduits des secteurs obtenus par les méthodes CMS. D'Souza et al. (D'Souza & Epureanu, 2012; D'Souza et al., 2012) ont étudié des structures multi-étages désaccordées en combinant les approches de Lim



et al. (2007) et de Song et al. (2005).

Le but de cette étude est de construire des modèles réduits des disques aubagés multi-étages en utilisant la réduction MSCS développée dans (Laxalde, 2007; Sternchüss, 2009; Sternchüss et al., 2009) avec une nouvelle sélection des indices de déphasage et/ou les différentes méthodes CMS développées dans (Tran, 2001, 2009b). Le désaccordage n'est pas pris en compte dans ce travail. Les méthodes CMS sont utilisées pour obtenir des modèles réduits des secteurs de référence ou des disques aubagés complets, dans ce dernier cas la symétrie cyclique peut être utilisée pour calculer les bases de projection, ainsi seuls les secteurs de référence ont besoin d'être modélisés. Les modèles réduits de la structure multi-étages complète sont alors obtenus soit en appliquant la réduction MSCS sur les modèles réduits des secteurs de référence, soit en assemblant les modèles réduits des disques aubagés. On montre que deux méthodes de réduction sont particulièrement efficaces, la première est la méthode CMS avec les modes d'interface appliquées aux disques aubagés complets sans utiliser la réduction MSCS, la deuxième est la méthode CMS avec les coordonnées d'ondes tournantes appliquées sur les secteurs de référence et combinées avec la réduction MSCS.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante: dans la section 2 on présente la formulation de la réduction MSCS avec les différentes sélections de indices de déphasage présentées dans (Laxalde, 2007; Sternchüss, 2009), ainsi que la nouvelle sélection proposée dans cette étude; dans la section 3, on présente les différentes stratégies CMS pour obtenir les modèles réduits des secteurs de référence, des disques aubagés et finalement de la structure multi-étages complète, sans et avec la réduction MSCS.

## IV.2. Réduction par symétrie cyclique pour les structures multi-étages

### IV.2.1. Description du problème

On considère une structure multi-étages, comme un assemblage de  $n_{BD}$  disques aubagés  $BD^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{BD}$  reliés entre eux (Figure 1). Chaque disque aubagé  $BD^i$  possède une parfaite symétrie cyclique, c.-à-d. il est composé de  $N^i$  secteur géométriquement et physiquement identiques  $S_k^i$ ,  $k = 0, \dots, N^i - 1$ , obtenus par  $N^i - 1$  rotations répétées d'angle  $\beta_i = 2\pi/N^i$  du secteur de référence  $S_0^i$  pour former un système circulaire. On définit les frontières à droite et à gauche  $L_1^{i,k}$  et  $L_r^{i,k}$  de  $S_k^i$  avec les secteurs adjacents  $S_{k+1}^i$  et  $S_{k-1}^i$  (avec  $S_{-1}^i = S_{N^i-1}^i$  et  $S_{N^i}^i = S_0^i$ ), ainsi que les interfaces amont et aval  $L_u^i$  et  $L_d^i$  de  $S_k^i$  avec les disques aubagés adjacents  $BD^{i-1}$  et  $BD^{i+1}$  (avec  $L_u^{1,k} = \emptyset$  et  $L_d^{n_{BD},k} = \emptyset$ ), et aussi les interfaces amont et aval de  $BD^i$ ,  $L_u^i = \cup_{k=0}^{N^i-1} L_u^{i,k}$  et  $L_d^i = \cup_{k=0}^{N^i-1} L_d^{i,k}$ .

La connection entre les disques aubagés  $BD^i$  et  $BD^{i+1}$  est réalisée de deux manières qui peuvent co-exister dans une structure multi-étages (Figure 1b):

– soit au travers d'une structure inter-disques  $ID^i$  (par exemple entre  $BD^1$  et  $BD^2$  dans la figure 1): on définit les interfaces amont et aval de  $ID^i$  avec  $S_k^i$  et  $S_{k+1}^i$ ,  $L_{ID,u}^{i,k} = ID^i \cap S_k^i$  et  $L_{ID,d}^{i,k} = ID^i \cap S_{k+1}^i$ , et aussi les interfaces amont et aval de  $ID^i$ ,  $L_{ID,u}^i = \cup_{k=0}^{N^i-1} L_{ID,u}^{i,k}$  et  $L_{ID,d}^i = \cup_{k=0}^{N^i-1} L_{ID,d}^{i,k}$ . On a:  $L_{ID,u}^{i,k} = L_d^{i+1,k}$ ,  $L_{ID,d}^{i,k} = L_u^{i+1,k}$ ,  $L_{ID,u}^i = L_d^i$  et  $L_{ID,d}^i = L_u^{i+1}$ . On supposera plus tard la continuité des déplacements physiques d'une part de  $L_{ID,u}^i$  et  $L_d^i$ , et d'autre part de  $L_{ID,d}^i$  et  $L_u^{i+1}$ . L'inter-disque  $ID^i$  peut avoir la symétrie cyclique comme dans la figure 1, mais ceci n'est pas exigé.

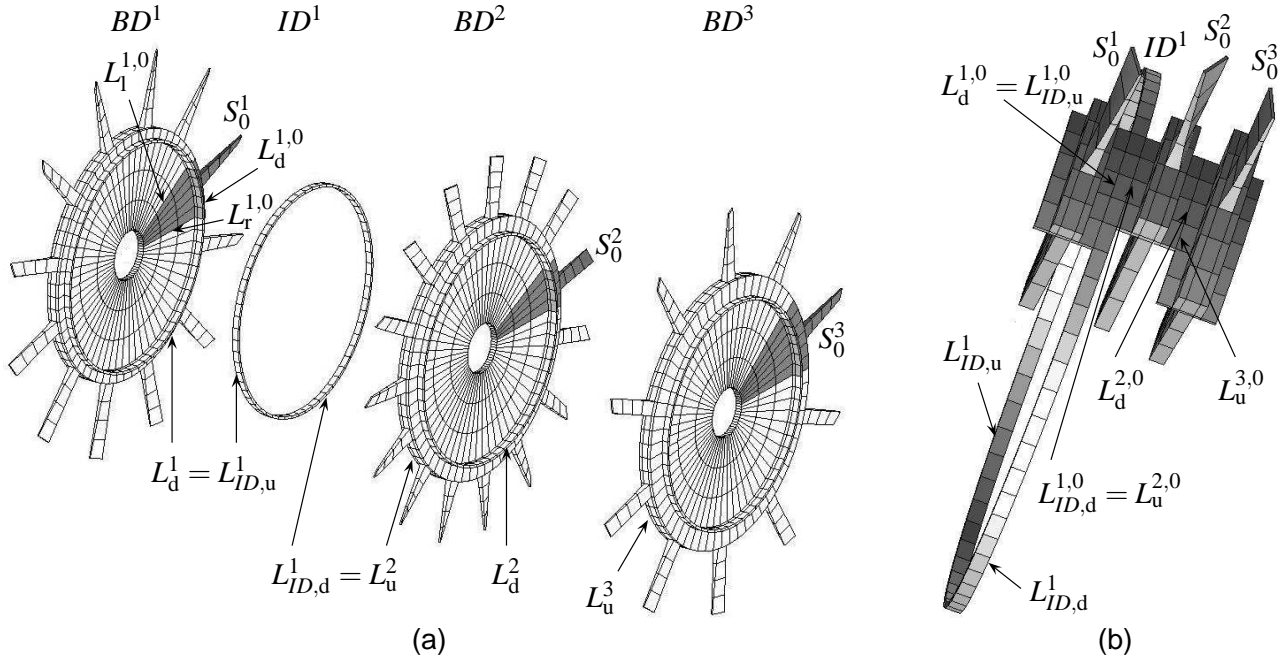
– soit par une connection directe (par exemple entre  $BD^2$  et  $BD^3$  dans la figure 1): les déplacements des interfaces  $L_d^i$  et  $L_u^{i+1}$  sont alors reliés par des équations de liaison linéaires.

### IV.2.2. Réduction par symétrie cyclique pour une disque aubagé isolé

Après avoir discrétisé les disques aubagés et en supposant que le maillage de tous les secteurs sont identiques, l'équation d'équilibre d'un secteur  $S_k^i$  isolé s'écrit:

$$\mathbf{K}^i \mathbf{x}^{i,k} + \mathbf{C}^i \dot{\mathbf{x}}^{i,k} + \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{x}}^{i,k} = \mathbf{f}^{i,k} + \mathbf{r}^{i,k}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{K}^i$ ,  $\mathbf{C}^i$  et  $\mathbf{M}^i$  sont respectivement les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse de  $S_0^i$ , qui sont identiques pour tous les secteurs  $S_k^i$ ,  $\mathbf{f}^{i,k}$  est la force externe exercée sur  $S_k^i$  et  $\mathbf{r}^{i,k}$  est la réaction d'interface appliquée sur  $S_k^i$  aux frontières  $L_1^{i,k}$  et  $L_r^{i,k}$ .



**Figure IV.1:** a) Disques aubagés, inter-disques, secteurs de référence et interfaces de la structure multi-étages. b) Connection entre les disques aubagés aux secteurs de référence

Le vecteur des déplacements physiques du secteur  $S_k^i$  s'écrit (Tran et al., 2003):

$$\mathbf{x}^{i,k} = \sum_{n=0}^{N^i-1} \mathbf{x}_n^i e^{ikn\beta_i}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{x}_n^i$  est le vecteur des coordonnées d'ondes tournantes du secteur  $S_0^i$  associé à l'indice de déphasage  $n = 0, \dots, N^i - 1$ . L'index de déphasage  $n$ , aussi appelé coefficient harmonique de Fourier et nombre de diamètres nodaux, est associé avec l'angle de déphasage  $n\beta_i$  qui permet d'exprimer les coordonnées d'ondes tournantes de chaque secteur  $S_k^i$  en fonction de celles du secteur adjacent, et par conséquent en fonction de  $\mathbf{x}_n^i$  du secteur  $S_0^i$ :  $\mathbf{x}_n^{i,k} = \mathbf{x}_n^{i,k-1} e^{in\beta_i} = \mathbf{x}_n^i e^{ikn\beta_i}$ . Les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_n^i$  vérifient alors les conditions aux limites de symétrie cyclique (CSBC, Cyclic Symmetry Boundary Conditions) sur les frontières à gauche et à droite:

$$\mathbf{x}_{n,1}^i = \mathbf{x}_{n,r}^i e^{in\beta_i}. \quad (3)$$

L'équation d'équilibre Eq. (1) s'écrit pour tous les secteurs:

$$\mathbf{K}_{BD}^i \mathbf{x}_{BD}^i + \mathbf{C}_{BD}^i \dot{\mathbf{x}}_{BD}^i + \mathbf{M}_{BD}^i \ddot{\mathbf{x}}_{BD}^i = \mathbf{f}_{BD}^i + \mathbf{r}_{BD}^i, \quad (4)$$

avec  $\mathbf{K}_{BD}^i = \mathbf{I}_{N^i} \otimes \mathbf{K}^i$ ,  $\mathbf{C}_{BD}^i = \mathbf{I}_{N^i} \otimes \mathbf{C}^i$ ,  $\mathbf{M}_{BD}^i = \mathbf{I}_{N^i} \otimes \mathbf{M}^i$ ,  $\mathbf{x}_{BD}^i = {}^t[\mathbf{x}^{i,0}, \dots, \mathbf{x}^{i,N^i-1}]$ ,  $\mathbf{f}_{BD}^i = {}^t[\mathbf{f}^{i,0}, \dots, \mathbf{f}^{i,N^i-1}]$ ,  $\mathbf{r}_{BD}^i = {}^t[\mathbf{r}^{i,0}, \dots, \mathbf{r}^{i,N^i-1}]$ ,  $\mathbf{I}_n$  est la matrice d'identité  $n \times n$ , et  $\otimes$  est le produit de Kronecker de deux matrices défini par  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij} \mathbf{B}]$ , où  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ . Les équations (4) pour les différents secteurs  $S_k^i$  sont couplées en écrivant la continuité des déplacements d'interface et l'équilibre des réactions d'interface.

Eq. (2) s'écrit pour le secteur  $S_k^i$  puis pour tous les secteurs:

$$\mathbf{x}^{i,k} = (\mathbf{e}_k^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}) \mathbf{x}_\Sigma^i, \quad \mathbf{x}_{BD}^i = (\mathbf{E}^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}) \mathbf{x}_\Sigma^i, \quad (5)$$

où  $\mathbf{e}_k^i = [e^{ik0\beta_i}, \dots, e^{ik(N^i-1)\beta_i}]$ ,  $\mathbf{E}^i = [\mathbf{e}_0^i, \dots, \mathbf{e}_{N^i-1}^i] = {}^t\mathbf{E}^i$ ,  $m^i$  est le nombre de DDL de  $S_0^i$ , et

$$\mathbf{x}_\Sigma^i = {}^t[\mathbf{x}_0^i, \dots, \mathbf{x}_n^i, \dots, \mathbf{x}_{N^i-1}^i] \quad (6)$$

est le vecteur contenant les coordonnées d'ondes tournantes de  $S_0^i$  pour tous les indices de déphasage.

En utilisant l'orthogonalité de  $\mathbf{e}_k^i$  et la symétrie de  $\mathbf{E}^i$  et  $\bar{\mathbf{E}}^i$  et en projetant Eq. (4) sur  $\mathbf{E}^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}$ , c.-à-d. en substituant  $\mathbf{x}_{BD}^i$  de Eq. (5) dans Eq. (4) et en prémultipliant par  ${}^t\bar{\mathbf{E}}^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}$ , on obtient l'équation du mouvement de  $BD^i$  en fonction des coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_\Sigma^i$  pour tous les indices de déphasage:

$$N^i \mathbf{K}_{BD}^i \mathbf{x}_\Sigma^i + N^i \mathbf{C}_{BD}^i \dot{\mathbf{x}}_\Sigma^i + N^i \mathbf{M}_{BD}^i \ddot{\mathbf{x}}_\Sigma^i = ({}^t\bar{\mathbf{E}}^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}) (\mathbf{f}_{BD}^i + \mathbf{r}_{BD}^i). \quad (7)$$

Bien que le terme  $N^i$  dans le premier membre est usuellement simplifié pour les disques aubagés isolés, il doit être gardé afin d'effectuer le couplage des disques aubagés dans les structures multi-étages, sinon l'équilibre des réactions d'interface entre les disques aubagés ne sera pas vérifié. Pour un disque aubagé isolé, Eq. (7) fournit  $N^i$  systèmes réduits d'équations découplées en termes des coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_n^i$  du secteur de référence  $S_0^i$ , pour  $n = 0, \dots, N^i - 1$ :

$$\mathbf{K}^i \mathbf{x}_n^i + \mathbf{C}^i \dot{\mathbf{x}}_n^i + \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{x}}_n^i = \mathbf{f}_n^i + \mathbf{r}_n^i, \quad (8)$$

avec

$$\mathbf{f}_n^i = \frac{1}{N^i} ({}^t\bar{\mathbf{e}}_k^i \otimes \mathbf{I}_{m^i}) \mathbf{f}_{BD}^i = \frac{1}{N^i} \sum_{k=0}^{N^i-1} e^{-ikn\beta_i} \mathbf{f}^{i,k}. \quad (9)$$

Eqs. (8) et (9) doivent être complétées par les CSBC Eq. (3), ensemble elles représentent la réduction par symétrie cyclique de Eq. (4). Les réactions d'interface  $\mathbf{r}_n^i$  n'intervient pas dans la résolution de Eq. (8), elles sont seulement présentes à cause des CSBC.

Les CSBC Eq. (3) incluent déjà les conditions aux limites sur  $\mathbf{x}^{i,k}$  qui expriment la continuité des déplacements physiques aux frontières  $L_1^i$  et  $L_r^i$ . En effet, de Eqs. (2) et (3) on a:

$$\mathbf{x}_r^{i,k+1} = \sum_{n=0}^{N^i-1} e^{i(k+1)n\beta_i} \mathbf{x}_{n,r}^i = \sum_{n=0}^{N^i-1} e^{ikn\beta_i} e^{in\beta_i} \mathbf{x}_{n,r}^i = \sum_{n=0}^{N^i-1} e^{ikn\beta_i} \mathbf{x}_{n,1}^i = \mathbf{x}_1^{i,k}. \quad (10)$$

Il est évident que l'indice de déphasage  $n$  dans Eqs. (3), (8) et (9) est défini avec modulo  $N^i$ , c.-à-d. il est équivalent de résoudre ces équations pour  $n \in \{0, \dots, N^i - 1\}$  et pour tout  $n_k = n + kN^i$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Si  $\mathbf{x}_n^i = \bar{\mathbf{x}}_{-n}^i$ , Eqs. (3), (8) et (9) sont résolues seulement pour  $N_{1/2}^i + 1$  indices de déphasage  $n = 0, \dots, N_{1/2}^i$ , où  $N_{1/2}^i = N^i/2$  si  $N^i$  est pair et  $N_{1/2}^i = (N^i - 1)/2$  si  $N^i$  est impair. Par exemple, dans le calcul des fréquences et modes de structures non amorties, les fréquences et les modes sont réels pour  $n = 0$  et pour  $n = N^i/2$  si  $N^i$  est pair. Sinon, les fréquences correspondant à  $n$  et  $N^i - n$  sont réelles et égales, tandis que les modes sont complexes conjugués. Ceci conduit à des modes doubles réels en coordonnées physiques ayant le même nombre de diamètres nodaux, ces modes sont obtenus par une rotation d'angle  $\pi/(2n)$  d'un mode à l'autre avec une normalisation appropriée (Tran et al., 2003).

### IV.2.3. Couplage des disques aubagés par des structures inter-disques

Le couplage des disques aubagés en utilisant des structures inter-disques a été proposé dans (Sternchüss & Balmès, 2007; Sternchüss et al., 2008; Sternchüss, 2009). La structure inter-disques peut avoir une symétrie cyclique ou non, la seule condition est que les maillages de la structure inter-disques et des disques aubagés adjacents soient compatibles, de manière qu'on puisse écrire la continuité des déplacements physiques à leurs interfaces.

En supposant qu'aucune force externe est appliquée à l'inter-disques  $ID^i$ , l'équation d'équilibre de ce dernier s'écrit après discrétisation:

$$\mathbf{K}_{ID}^i \mathbf{x}_{ID}^i + \mathbf{C}_{ID}^i \dot{\mathbf{x}}_{ID}^i + \mathbf{M}_{ID}^i \ddot{\mathbf{x}}_{ID}^i = \mathbf{r}_{ID}^i. \quad (11)$$

Les déplacements physiques de  $ID^i$  sont partitionnés en:

$$\mathbf{x}_{ID}^i = {}^t[\mathbf{x}_{ID,u}^i, \mathbf{x}_{ID,d}^i, \mathbf{x}_{ID,o}^i], \quad (12)$$

où  $\mathbf{x}_{ID,u}^i$ ,  $\mathbf{x}_{ID,d}^i$  et  $\mathbf{x}_{ID,o}^i$  sont respectivement les déplacements de  $L_{ID,u}^i$ ,  $L_{ID,d}^i$  et des autres DDL de  $ID^i$ . L'interdisques  $ID^i$  peut ne pas avoir d'autres DDL que ceux sur  $L_{ID,u}^i$  et  $L_{ID,d}^i$  comme c'est montré dans la Figure 1, dans ce cas  $\mathbf{x}_{ID,o}^i$  n'existe simplement pas.

L'équation du mouvement Eq. (11) de  $ID^i$  est alors transformée en utilisant des coordonnées d'ondes tournantes (Tran, 2014):

$$\mathbf{K}_{ID,\Sigma}^i \mathbf{x}_{ID,\Sigma}^i + \mathbf{C}_{ID,\Sigma}^i \dot{\mathbf{x}}_{ID,\Sigma}^i + \mathbf{M}_{ID,\Sigma}^i \ddot{\mathbf{x}}_{ID,\Sigma}^i = \mathbf{r}_{ID,\Sigma}^i, \quad (13)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}_{ID,\Sigma}^i = {}^t[\mathbf{x}_{\Sigma}^i, \mathbf{x}_{\Sigma}^{i+1}, \mathbf{x}_{ID,o}^i]$  contient les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_{\Sigma}^i$  de  $S_0^i$  et  $\mathbf{x}_{\Sigma}^{i+1}$  de  $S_0^{i+1}$  pour tous les indices de déphasage de  $BD^i$  et  $BD^{i+1}$ , tandis que  $\mathbf{x}_{ID,o}^i$  sont toujours les déplacements physiques des DDL de  $ID^i$  autres que ceux de  $L_{ID,u}^i$  et  $L_{ID,d}^i$  et ne sont associés à aucun indice de déphasage.

Les matrices  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}^i$ , où  $\mathbf{A}$  représente  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{M}$ , sont par conséquent partitionnées de la manière suivante:

$$\mathbf{A}_{ID,\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,uu} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,ud} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,uo} \\ \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,du} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,dd} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,do} \\ \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,ou} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,od} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{i,oo} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

#### IV.2.4. Couplage des disques aubagés par des équations de liaison

Le couplage direct entre les disques aubagés  $BD^i$  et  $BD^{i+1}$  sans utiliser une structure inter-disques est proposé en premier lieu dans (Laxalde, Thouverez & Lombard, 2007; Laxalde, Lombard & Thouverez, 2007; Laxalde, 2007) et est aussi utilisé dans (Sternchüss & Balmès, 2007; Sternchüss et al., 2008; Sternchüss, 2009). On suppose que les déplacements physiques de l'interface aval  $L_d^i$  de  $BD^i$  et de l'interface amont  $L_u^{i+1}$  de  $BD^{i+1}$  sont reliés par des équations de liaison linéaires:

$$\mathbf{x}_{BD,u}^{i+1} = \mathbf{B}^i \mathbf{x}_{BD,d}^i \quad (15)$$

qui sont transformées en utilisant des coordonnées d'ondes tournantes (Tran, 2014):

$$\mathbf{x}_{\Sigma,u}^{i+1} = \mathbf{B}_{\Sigma}^i \mathbf{x}_{\Sigma,d}^i, \quad (16)$$

où  $\mathbf{x}_{\Sigma,d}^i$  est la restriction de  $\mathbf{x}_{\Sigma}^i$  à l'interface aval  $L_d^{i,0}$  de  $S_0^i$  et  $\mathbf{x}_{\Sigma,u}^{i+1}$  est la restriction de  $\mathbf{x}_{\Sigma}^{i+1}$  à l'interface amont  $L_u^{i+1,0}$  of  $S_0^{i+1}$ , pour tous les indices de déphasage de  $BD^i$  et  $BD^{i+1}$ .

Les équations de liaison (16) seront utilisées par exemple pour éliminer  $\mathbf{x}_{\Sigma,u}^{i+1}$  dans le système couplé de la structure multi-étages.

#### IV.2.5. Système couplé multi-étages complet

Le système couplé multi-étages complet en coordonnées physiques est fourni par le modèle éléments-finis de la structure multi-étages complète. Il peut aussi être obtenu en assemblant les matrices des disques aubagés dans Eq. (4), celles des inter-disques dans Eq. (11) et en utilisant les équations de liaison (15) pour un couplage direct entre des disques aubagés.

En coordonnées d'ondes tournantes, on suppose dans un premier temps que les  $n_{BD}$  disques aubagés  $BD^1, \dots, BD^{n_{BD}}$  sont reliés par  $n_{BD} - 1$  inter-disques  $ID^1, \dots, ID^{n_{BD}-1}$ . De Eqs. (7) de (13), le système couplé de la structure multi-étages s'écrit:

$$\mathbf{K}_{MS,\Sigma} \mathbf{x}_{MS,\Sigma} + \mathbf{C}_{MS,\Sigma} \dot{\mathbf{x}}_{MS,\Sigma} + \mathbf{M}_{MS,\Sigma} \ddot{\mathbf{x}}_{MS,\Sigma} = \mathbf{f}_{MS,\Sigma} \quad (17)$$

avec

$$\mathbf{x}_{MS,\Sigma} = {}^t[\mathbf{x}_{\Sigma}^1, \dots, \mathbf{x}_{\Sigma}^{n_{BD}}, \mathbf{x}_{ID,o}^1, \dots, \mathbf{x}_{ID,o}^{n_{BD}-1}], \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_{MS,\Sigma} = {}^t[\{(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{m^1}) (\mathbf{f}_{BD}^1 + \mathbf{r}_{BD}^1)\}, \dots, \{(\mathbf{E}^{n_{BD}} \otimes \mathbf{I}_{m^{n_{BD}}}) (\mathbf{f}_{BD}^{n_{BD}} + \mathbf{r}_{BD}^{n_{BD}})\}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}. \quad (19)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_{MS,\Sigma}$  dans Eq. (17), où  $\mathbf{A}$  représente  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  or  $\mathbf{M}$ , sont la somme des contributions des disques aubagés et celles des inter-disques:

$$\mathbf{A}_{MS,\Sigma} = \mathbf{A}_{BD,\Sigma} + \mathbf{A}_{ID,\Sigma}. \quad (20)$$

Les contributions des disques aubagés sont obtenues en assemblant les matrices diagonales par bloc  $\mathbf{A}_{BD}^i$  données par Eq. (7):

$$\mathbf{A}_{BD,\Sigma} = \left[ \begin{array}{ccc|c} N^1 \mathbf{A}_{BD}^1 & & & \mathbf{0} \\ & N^2 \mathbf{A}_{BD}^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & N^{n_{BD}} \mathbf{A}_{BD}^{n_{BD}} \\ \hline & & & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (21)$$

Les contributions des inter-disques sont obtenues en assemblant les matrices  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}^i$  données par Eq. (14):

$$\mathbf{A}_{ID,\Sigma} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,uu} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,ud} & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,uo} & & \\ \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,du} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,dd} + \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,uu} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,ud} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,do} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,uo} & \\ & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,du} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,dd} + \mathbf{A}_{\Sigma}^{3,uu} & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,do} & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,ud} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,uo} \\ & & & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,du} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,do} \\ \hline \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,ou} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,od} & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{1,oo} & & \\ & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,ou} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{3,od} & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{2,oo} & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,ou} & \mathbf{A}_{\Sigma}^{n_{BD}-1,oo} \end{array} \right]. \quad (22)$$

Bien entendu, en rappelant de Eq. (6) que le vecteur  $\mathbf{x}_{\Sigma}^i$  correspondant au disque aubagé  $BD^i$  dans  $\mathbf{x}_{MS,\Sigma}$  contient les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_n^i$  du secteur de référence  $S_0^i$  pour tous les indices de déphasage  $n = 0, \dots, N^i - 1$ , le système couplé Eq. (17) doit être complété par les CSBC Eq. (3). Les réactions  $\mathbf{r}_{BD}^i$  dans Eq. (19) sont seulement présentes à cause des CSBC. Aussi à cause de l'équilibre des réactions à l'interface entre les disques aubagés et les inter-disques, ces réactions n'apparaissent plus dans le système couplé car elles s'annulent entre elles.

Dans Eq. (17), les indices de déphasage d'un même disque aubagé sont couplés car les matrices  $\mathbf{A}_{\Sigma}^{i,uu}$  et  $\mathbf{A}_{\Sigma}^{i,dd}$  ne sont pas diagonales par bloc comme  $\mathbf{A}_{BD}^i$ . Les indices de déphasage des disques aubagés adjacents sont couplés par les matrices  $\mathbf{A}_{\Sigma}^{i,ud}$  et  $\mathbf{A}_{\Sigma}^{i,du}$ . Le couplage entre les indices de déphasage est également dû aux DDL  $\mathbf{x}_{ID,o}^i$  des inter-disques.

S'il y a un couplage direct entre des disques aubagés, par exemple entre  $BD^i$  et  $BD^{i+1}$ , on a simplement besoin d'enlever de Eq. (22) la contribution de l'inter-disque  $ID^i$ , c.-à-d. toutes les sous-matrices qui composent  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}^i$  dans Eq. (14), mais la forme de  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}$  et les coordonnées dans  $\mathbf{x}_{MS,\Sigma}$  restent inchangées. Les équations de liaison (16) sont alors utilisées dans la résolution du système couplé (17), par exemple pour éliminer les coordonnées dépendantes  $\mathbf{x}_{\Sigma,u}^{i+1}$  de  $\mathbf{x}_{MS,\Sigma}$  pour ne garder que les coordonnées indépendantes  $\mathbf{x}_{\Sigma,d}^i$ .

#### IV.2.6. Réduction par symétrie cyclique multi-étages (MSCS)

Pour les applications industrielles, le système couplé complet Eq. (17) n'est pas commode à résoudre, car sa taille est même plus grande que celle du système complet de la structure multi-étages en coordonnées

physiques, les noeuds aux frontières entre les secteurs étant dupliqués. Afin de réduire la taille de Eq. (17), une extension de la réduction par symétrie cyclique aux structures multi-étages a été proposée dans (Laxalde, Thouverez & Lombard, 2007; Laxalde, Lombard & Thouverez, 2007; Laxalde, 2007; Sternchüss & Balmès, 2007; Sternchüss et al., 2008; Sternchüss, 2009), qui consiste à considérer séparément chaque fois seulement quelques indices de déphasage de tous les disques aubagés, et non pas simultanément tous les indices de déphasage comme dans Eq. (17).

L'idée est d'extraire des systèmes couplés réduits de Eq. (17), chaque système réduit correspondant à un ou quelques indices de déphasage de chaque disque aubagé. Le choix des indices de déphasage doit néanmoins satisfaire les conditions suivantes:

- i) chaque système réduit doit contenir au moins un indice de déphasage pour chaque disque aubagé (c.-à-d. aucun disque aubagé ne peut être absent dans un système réduit);
- ii) les indices de déphasage de chaque système réduit doivent être les mêmes d'une certaine manière;
- iii) chaque indice de déphasage  $n = 0, \dots, N^i - 1$  du disque aubagé  $BD^i$  doit être présent dans un et un seul système réduit, de manière qu'il n'y a pas de manque ou de redondance des solutions;
- iv) si l'indice de déphasage  $n = 0, \dots, N_{1/2}^i$  est déjà présent dans un système réduit, l'indice de déphasage  $N^i - n$  peut ne pas être présent dans n'importe quel système réduit, dans ce cas la solution correspondant à  $N^i - n$  sera le complexe conjugué de celle correspondant à  $n$ . Cependant, les deux indices de déphasage peuvent être présents, et pas nécessairement dans un même système réduit.

Une fois que tous les systèmes réduits sont résolus, on obtient les solutions en coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{x}_n^i$  sur le secteur de référence  $S_0^i$  de tous les disques aubagés  $BD^i$  pour tous les indices de déphasage  $n$ . Ces solutions sont des solutions approchées de Eq. (17). Elles peuvent alors être recomposées en utilisant Eq. (2) pour obtenir des solutions en coordonnées physiques pour tous les secteurs de tous les disques aubagés.

Afin de considérer les différents choix des indices de déphasage, on définit quelques ensembles de nombres entiers:

- pour chaque disque aubagé  $BD^i$ :  $A^i = \{0, \dots, N^i - 1\}$ ,  $A_+^i = \{0, \dots, N_{1/2}^i\}$ ,  $A_-^i = \{0, N^i - 1, \dots, N^i - N_{1/2}^i\} = \{f^i(n), \text{ pour } n \in A_+^i\}$ , avec  $f^i(0) = 0$  et  $f^i(n) = N^i - n$  pour  $n = 1, \dots, N_{1/2}^i$ .
- $A^{\min} = \{0, \dots, N^{\min} - 1\}$ ,  $A_+^{\min} = \{0, \dots, N_{1/2}^{\min}\}$ ,  $A_-^{\min} = \{0, N^{\min} - 1, \dots, N^{\min} - N_{1/2}^{\min}\} = \{f^{\min}(n), \text{ pour } n \in A_+^{\min}\}$ , avec  $N^{\min} = \min(N^1, \dots, N^{n_{BD}})$ ,  $N_{1/2}^{\min} = \min(N_{1/2}^1, \dots, N_{1/2}^{n_{BD}})$ ,  $f^{\min}(0) = 0$  et  $f^{\min}(n) = N^{\min} - n$  pour  $n = 1, \dots, N_{1/2}^{\min}$ .
- pour  $j \in A_+^{\min}$ :  $B_{j+} = \{j + kN^{\min}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B_{j-} = \{N^{\min} - j + kN^{\min}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B_j = B_{j+} \cup B_{j-} = \{j + kN^{\min}, N^{\min} - j + kN^{\min}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$ . Tout élément redondant dans  $B_j$  est bien entendu compté seulement une fois.
- pour  $j \in A_+^{\min}$  et pour chaque disque aubagé  $BD^i$ :  $B_j^i = B_j \cap A^i = \{n \in B_j, \text{ tel que } 0 \leq n \leq N^i - 1\}$ .
- pour  $j \in A_+^{\min}$  et pour chaque disque aubagé  $BD^i$ :  $C_{j+}^i = B_j \cap A_+^i = \{n \in B_j, \text{ tel que } 0 \leq n \leq N_{1/2}^i\}$ ,  $C_{j-}^i = \{f^i(n), \text{ pour } n \in C_{j+}^i\}$ ,  $C_j^i = C_{j+}^i \cup C_{j-}^i = \{n, f^i(n), \text{ pour } n \in C_{j+}^i\}$ .

On peut faire quelques remarques sur ces ensembles:

- les ensembles  $B_j$  pour  $j \in A_+^{\min}$  forment une partition de  $\mathbb{N}$ .
- pour  $j \in A_+^{\min}$ , tous les nombres dans l'ensemble  $B_{j+}$  correspondent à un même indice de déphasage  $j$  du disque aubagé  $BD^i$  qui a un nombre minimal de secteurs, c.-à-d. tel que  $N^i = N^{\min}$ . On appellera ce disque aubagé particulier  $BD^{\min}$ . De la même manière, tous les nombres dans les ensembles  $B_{j-}$  correspondent à un même indice de déphasage  $f^{\min}(j)$  de  $BD^{\min}$ , et tous les nombres dans les ensembles  $B_j$  correspondent à un même couple d'indices de déphasage  $(j, f^{\min}(j))$  de  $BD^{\min}$ , tous deux correspondent à  $j$  diamètres nodaux sur  $BD^{\min}$ .

- pour tout disque aubagé  $BD^i$ ,  $B_j^i \neq \emptyset$ , et les ensembles  $B_j^i$  pour  $j \in A_+^{\min}$  forment une partition de  $A^i$ .
- pour tout disque aubagé  $BD^i$ ,  $C_{j+}^i \neq \emptyset$ ,  $C_{j-}^i \neq \emptyset$  et  $C_j^i \neq \emptyset$ . Pour  $j \in A_+^{\min}$ , les ensembles  $C_{j+}^i$  forment une partition de  $A_+^i$ , les ensembles  $C_{j-}^i$  forment une partition de  $A_-^i$  et les ensembles  $C_j^i$  forment une partition de  $A^i$ .

On peut maintenant considérer quelques choix possibles des indices de déphasage afin de construire des systèmes réduits, ils vérifient tous les conditions (i-iv):

- Sélection A: c'est une sélection triviale qui consiste à sélectionner l'ensemble  $A^i$  pour chaque disque

aubagé  $BD^i$ . Il y a un seul “système réduit” qui est en fait le système couplé complet Eq. (17). Les variantes  $A^+$  et  $A^-$  de la sélection A consistent à sélectionner respectivement les ensembles  $A_+^i$  et  $A_-^i$  pour chaque disque aubagé. Ces variantes ont aussi un seul système réduit dont la taille est à peu près la moitié de la taille de Eq. (17). Leurs solutions sont complexes conjuguées et ne sont pas les mêmes que celles fournies par la sélection A, à cause du couplage entre les indices de déphasage  $n$  et  $f^i(n)$ .

– Sélection B: cette sélection proposée dans (Laxalde, Lombard & Thouverez, 2007; Sternchüss, 2009) a  $N_{1/2}^{\min} + 1$  système réduit, chacun correspond à un nombre  $j \in A_+^{\min}$  et consiste à sélectionner tous les indices de déphasage dans l’ensemble  $B_j^i$  pour le disque aubagé  $BD^i$ . Cette sélection revient à imposer le couple d’indices de déphasage  $(j, f^{\min}(j))$  de  $BD^{\min}$  sur les autres disques aubagés, c.-à-d. à imposer le même nombre de diamètres nodaux à tous les disques aubagés dans chaque système réduit. Pour le disque aubagé  $BD^i$ , les indices de déphasage  $n$  et  $f^i(n)$  n’appartiennent pas nécessairement au même système réduit.

– Sélection C: cette nouvelle sélection a aussi  $N_{1/2}^{\min} + 1$  systèmes réduits, chacun correspond à un nombre  $j \in A_+^{\min}$  et consiste à sélectionner tous les indices de déphasage dans l’ensemble  $C_j^i$  pour le disque aubagé  $BD^i$ . Cette sélection impose les indices de déphasage  $n$  parmi le couple  $(j, f^{\min}(j))$  de  $BD^{\min}$  sur les autres disques aubagés  $BD^i$  avec la condition  $n \leq N_{1/2}^i$ , et aussi l’indice de déphasage  $f^i(n)$  dans le même système réduit. Cette sélection revient aussi à imposer dans chaque système réduit correspondant à  $j \in A_+^{\min}$  le même nombre  $j$  de diamètres nodaux de  $BD^{\min}$  à tous les autres disques aubagés, avec la garantie que le couple d’indices de déphasage  $(n, f^i(n))$  soient simultanément présents dans le même système réduit pour chaque disque aubagé  $BD^i$  et pour chaque indice de déphasage  $n$ . Comme la sélection A, la sélection C a aussi deux variantes  $C^+$  et  $C^-$  qui consistent à sélectionner respectivement l’ensemble  $C_{j+}^i$  et  $C_{j-}^i$  pour chaque système réduit correspondant à  $j \in A_+^{\min}$  et pour chaque disque aubagé  $BD^i$ . Ces variantes fournissent des solutions qui sont complexes conjuguées mais qui ne sont pas celles obtenues avec la sélection C, pour la même raison que dans la sélection A. La sélection  $C^+$  est proposée dans (Laxalde, 2007) et une version modifiée est présentée dans (Laxalde & Pierre, 2011) mais ce n’est pas non plus la sélection C.

Chaque système réduit dans les sélections B, C,  $C^+$  et  $C^-$  sera identifié par le nombre  $j \in A_+^{\min}$  auquel il correspond. Ce nombre  $j$  sera appelé l’index de déphasage du système réduit, et pour la sélection  $C^+$ , il est aussi le seul indice de déphasage associé au disque aubagé  $BD^{\min}$  dans ce système réduit.

Si les disques aubagés ne sont pas couplés entre eux, toutes les sélections reviennent à la réduction par symétrie cyclique mono-étage classique, qui consiste en  $\sum_i N^i$  systèmes réduits (pour les sélections A, B, C) ou  $\sum_i (N_{1/2}^i + 1)$  systèmes réduits (pour les variantes  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $C^+$ ,  $C^-$ ), chaque système réduit correspond à un indice de déphasage d’un disque aubagé, car il n’y a pas de couplage entre les disques aubagés et entre les indices de déphasage.

Le tableau 1 donne les ensembles et les sélections définis ci-dessus pour le cas de trois disques aubagés avec  $N^1 = 12$ ,  $N^2 = 15$  et  $N^3 = 10$ , qui correspond à l’application numérique traitée dans (Tran, 2014, cf. Annexe).

### IV.3. Réduction de modèles par synthèse modale (CMS)

Avant d’effectuer le couplage multi-étages, les modèles réduits des disques aubagés ou de leurs sous-structures comme les secteurs peuvent être obtenus en utilisant la CMS, indépendamment du fait que la réduction MSCS est utilisée ou non.

Seule la méthode CMS avec interface fixe de Craig & Bampton (1968) (CB) est présentée ici, cependant l’extension aux autres méthodes CMS comme les méthodes avec interface libre ou avec interface mixte (Tran, 2001, 2009b) est immédiate. Les deux méthodes avec interface fixe et avec interface libre sont utilisées dans l’application numérique traitée dans (Tran, 2014).

La méthode CB consiste à projeter l’équation d’équilibre d’une sous-structure sur une base de projection composée de modes propres  $\Phi$  de la sous-structure avec interface fixe et des modes de liaison  $\Psi$  obtenus en imposant un déplacement unitaire sur un des DDL d’interface, tandis que les autres DDL d’interface sont fixes. Pour obtenir le système réduit de la structure complète, les systèmes réduits des sous-structures sont assemblés au travers des déplacements d’interface en écrivant la continuité de ces derniers et l’équilibre des réactions d’interface.

**Tableau IV.1:** Ensembles et sélections dans la réduction MSCS pour le cas  $N^1 = 12$ ,  $N^2 = 15$  et  $N^3 = 10$ 

Ensembles	$BD^1 (i = 1)$	$BD^2 (i = 2)$	$BD^3 = BD^{\min} (i = 3)$	Sélection	Nombre total des indices de déphasage
$N^i$	12	15	$10 = N^{\min}$		
$N_{1/2}^i$	6	7	$5 = N_{1/2}^{\min}$		
<b>Sélection A et ses variantes <math>A^+</math> et <math>A^-</math></b>					
$A^i$	$\{0, 1, 2, \dots, 11\}$	$\{0, 1, 2, \dots, 14\}$	$\{0, 1, 2, \dots, 9\} = A^{\min}$	A	37
$A_+^i$	$\{0, 1, 2, \dots, 6\}$	$\{0, 1, 2, \dots, 7\}$	$\{0, 1, 2, \dots, 5\} = A_+^{\min}$	$A^+$	21
$A_-^i$	$\{0, 11, 10, \dots, 6\}$	$\{0, 14, 13, \dots, 8\}$	$\{0, 9, 8, \dots, 5\} = A_-^{\min}$	$A^-$	21
<b>Sélection B</b>					
Système réduit 1: indice de déphasage $j = 0$ , $B_j = \{10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{0, 10\}$	$\{0, 10\}$	$\{0\}$	B	5
Système réduit 2: indice de déphasage $j = 1$ , $B_j = \{1 + 10k, 9 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{1, 11, 9\}$	$\{1, 11, 9\}$	$\{1, 9\}$	B	8
Système réduit 3: indice de déphasage $j = 2$ , $B_j = \{2 + 10k, 8 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{2, 8\}$	$\{2, 12, 8\}$	$\{2, 8\}$	B	7
Système réduit 4: indice de déphasage $j = 3$ , $B_j = \{3 + 10k, 7 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{3, 7\}$	$\{3, 13, 7\}$	$\{3, 7\}$	B	7
Système réduit 5: indice de déphasage $j = 4$ , $B_j = \{4 + 10k, 6 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{4, 6\}$	$\{4, 14, 6\}$	$\{4, 6\}$	B	7
Système réduit 6: indice de déphasage $j = 5$ , $B_j = \{5 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$B_j^i$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	B	3
<b>Sélection C et ses variantes <math>C^+</math> et <math>C^-</math></b>					
Système réduit 1: indice de déphasage $j = 0$ , $B_j = \{10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$C^+$	3
$C_{j-}^i$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$C^-$	3
$C_j^i$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	C	3
Système réduit 2: indice de déphasage $j = 1$ , $B_j = \{1 + 10k, 9 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$C^+$	3
$C_{j-}^i$	$\{11\}$	$\{14\}$	$\{9\}$	$C^-$	3
$C_j^i$	$\{1, 11\}$	$\{1, 14\}$	$\{1, 9\}$	C	6
Système réduit 3: indice de déphasage $j = 2$ , $B_j = \{2 + 10k, 8 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$C^+$	3
$C_{j-}^i$	$\{10\}$	$\{13\}$	$\{8\}$	$C^-$	3
$C_j^i$	$\{2, 10\}$	$\{2, 13\}$	$\{2, 8\}$	C	6
Système réduit 4: indice de déphasage $j = 3$ , $B_j = \{3 + 10k, 7 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{3\}$	$\{3, 7\}$	$\{3\}$	$C^+$	4
$C_{j-}^i$	$\{9\}$	$\{12, 8\}$	$\{7\}$	$C^-$	4
$C_j^i$	$\{3, 9\}$	$\{3, 7, 8, 12\}$	$\{3, 7\}$	C	8
Système réduit 5: indice de déphasage $j = 4$ , $B_j = \{4 + 10k, 6 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6\}$	$\{4\}$	$C^+$	5
$C_{j-}^i$	$\{8, 6\}$	$\{11, 9\}$	$\{6\}$	$C^-$	5
$C_j^i$	$\{4, 6, 8\}$	$\{4, 6, 9, 11\}$	$\{4, 6\}$	C	9
Système réduit 6: indice de déphasage $j = 5$ , $B_j = \{5 + 10k, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$					
$C_{j+}^i$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$C^+$	3
$C_{j-}^i$	$\{7\}$	$\{10\}$	$\{5\}$	$C^-$	3
$C_j^i$	$\{5, 7\}$	$\{5, 10\}$	$\{5\}$	C	5



### IV.3.1. Modèles réduits des secteurs

#### IV.3.1.1. Modèles réduits en coordonnées physiques

Dans cette réduction (CB1), chaque secteur  $S_k^i$  de  $BD^i$  est considéré comme une sous-structure dont l'interface  $L^{i,k}$  est composée des frontières à gauche et à droite  $L_1^{i,k}$  et  $L_r^{i,k}$  ainsi que des interfaces amont et aval  $L_u^{i,k}$  et  $L_d^{i,k}$ . L'interface  $L^{i,k}$  et ses déplacements  $\mathbf{x}_L^{i,k}$  sont alors définis par:

$$L^{i,k} = L_1^{i,k} \cup L_r^{i,k} \cup L_u^{i,k} \cup L_d^{i,k} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_L^{i,k} = {}^t[\mathbf{x}_1^{i,k}, \mathbf{x}_r^{i,k}, \mathbf{x}_u^{i,k}, \mathbf{x}_d^{i,k}]. \quad (23)$$

Les déplacements physiques de  $S_k^i$  dans Eq. (1) s'écrivent:

$$\mathbf{x}^{i,k} = \Phi^{i,k} \boldsymbol{\mu}^{i,k} + \Psi^{i,k} \mathbf{x}_L^{i,k} = \mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{q}^{i,k}, \quad (24)$$

avec  $\mathbf{Q}^{i,k} = [\Phi^{i,k}, \Psi^{i,k}]$  et  $\mathbf{q}^{i,k} = {}^t[\boldsymbol{\mu}^{i,k}, \mathbf{x}_L^{i,k}]$ .

En reportant Eq. (24) dans Eq. (1), le système réduit de  $S_k^i$  s'écrit:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{i,k} \mathbf{q}^{i,k} + \tilde{\mathbf{C}}^{i,k} \dot{\mathbf{q}}^{i,k} + \tilde{\mathbf{M}}^{i,k} \ddot{\mathbf{q}}^{i,k} = \tilde{\mathbf{f}}^{i,k} + {}^t\mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{r}^{i,k}, \quad (25)$$

où les matrices et les forces externes réduites de  $S_k^i$  s'écrivent:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{i,k} = {}^t\mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{K}^i \mathbf{Q}^{i,k}, \quad \tilde{\mathbf{C}}^{i,k} = {}^t\mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{C}^i \mathbf{Q}^{i,k}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{i,k} = {}^t\mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{M}^i \mathbf{Q}^{i,k} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}^{i,k} = {}^t\mathbf{Q}^{i,k} \mathbf{f}^{i,k}. \quad (26)$$

A cause de la symétrie cyclique de  $BD^i$ ,  $\Phi^{i,k}$ ,  $\Psi^{i,k}$ ,  $\mathbf{Q}^{i,k}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}^{i,k}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^{i,k}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}^{i,k}$  sont identiques pour tous les secteurs  $S_k^i$ . Lorsque la réduction par symétrie cyclique est utilisée, seules matrices réduites du secteur de référence  $S_0^i$  sont nécessaires.

#### IV.3.1.2. Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes

Dans cette réduction (CB2) déjà présentée dans (Tran et al., 2003), seul le secteur de référence  $S_0^i$  de  $BD^i$  est considéré comme une sous-structure. L'interface  $L^i$  de la sous-structure est composé des interfaces amont et aval  $L_u^{i,0}$  et  $L_d^{i,0}$  de  $S_0^i$ . L'interface  $L^i$  et ses déplacements sont alors définis par:

$$L^i = L_u^{i,0} \cup L_d^{i,0} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_L^i = {}^t[\mathbf{x}_u^{i,0}, \mathbf{x}_d^{i,0}]. \quad (27)$$

On considère les DDL d'interface dans  $L^i$  qui appartiennent aussi aux frontières à gauche et à droite de  $S_0^i$ :

$$L_1^i = L^i \cap L_1^{i,0} \quad \text{et} \quad L_r^i = L^i \cap L_r^{i,0} \quad (28)$$

Si  $L_1^i \neq \emptyset$  ou  $L_r^i \neq \emptyset$ , ils doivent correspondre aux mêmes DDL respectivement sur  $L_1^{i,0}$  et  $L_r^{i,0}$ .

Pour les indices de déphasage  $n = 0, \dots, N^i - 1$ , les déplacements en coordonnées d'ondes tournantes de  $S_0^i$  dans Eq. (8) s'écrivent:

$$\mathbf{x}_n^i = \Phi_n^i \boldsymbol{\mu}_n^i + \Psi_n^i \mathbf{x}_{L_n}^i = \mathbf{Q}_n^i \mathbf{q}_n^i \quad (29)$$

avec  $\mathbf{Q}_n^i = [\Phi_n^i, \Psi_n^i]$  et  $\mathbf{q}_n^i = {}^t[\boldsymbol{\mu}_n^i, \mathbf{x}_{L_n}^i]$ .

Les modes propres complexes  $\Phi_n^i$  et les modes de liaison complexes  $\Psi_n^i$  de  $S_0^i$  en coordonnées d'ondes tournantes sont obtenus par:

$$\mathbf{K}^i \Phi_n^i = \mathbf{M}^i \Phi_n^i \Omega_n^2 + \mathbf{R}_{1n} \quad \text{avec} \quad \Phi_{n|L_1^{i,0} \setminus L_1^i}^i = \Phi_{n|L_r^{i,0} \setminus L_r^i}^i e^{in\beta_i} \quad \text{et} \quad \Phi_{n|L^i}^i = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}^i \Psi_n^i = \mathbf{R}_{2n} \quad \text{avec} \quad \Psi_{n|L_1^{i,0} \setminus L_1^i}^i = \Psi_{n|L_r^{i,0} \setminus L_r^i}^i e^{in\beta_i} \quad \text{et} \quad \Psi_{n|L^i}^i = \mathbf{I}, \quad (31)$$

où  $\mathbf{R}_{1n}$  et  $\mathbf{R}_{2n}$  sont les réactions modales et statiques dues aux conditions aux limites.

En reportant Eq. (29) dans Eq. (8), le système réduit de  $S_0^i$  s'écrit:

$$\tilde{\mathbf{K}}_n^i \mathbf{q}_n^i + \tilde{\mathbf{C}}_n^i \dot{\mathbf{q}}_n^i + \tilde{\mathbf{M}}_n^i \ddot{\mathbf{q}}_n^i = \tilde{\mathbf{f}}_n^i + {}^t\overline{\mathbf{Q}}_n^i \mathbf{r}_n^i. \quad (32)$$

où les matrices réduites et les forces externes réduits s'écrivent:

$$\tilde{\mathbf{K}}_n^i = {}^t\overline{\mathbf{Q}}_n^i \mathbf{K}^i \mathbf{Q}_n^i, \quad \tilde{\mathbf{C}}_n^i = {}^t\overline{\mathbf{Q}}_n^i \mathbf{C}^i \mathbf{Q}_n^i, \quad \tilde{\mathbf{M}}_n^i = {}^t\overline{\mathbf{Q}}_n^i \mathbf{M}^i \mathbf{Q}_n^i \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}_n^i = {}^t\overline{\mathbf{Q}}_n^i \mathbf{f}_n^i. \quad (33)$$

Les inconnues  $\mathbf{q}_n^i$  incluent bien entendu les déplacements d'interface  $\mathbf{x}_L^i$  de  $L^i$ . Lors de la résolution du système réduit Eq. (32), les CSBC Eq. (3) doivent être imposées aux déplacements de  $L_1^i$  et  $L_r^i$  qui sont présents dans  $\mathbf{x}_L^i$  et par conséquent dans  $\mathbf{q}_n^i$ :

$$\mathbf{q}_{n|L_1^i} = \mathbf{q}_{n|L_r^i} e^{in\beta_i}. \quad (34)$$

Au travers des modes  $\Phi_n^i$  et  $\Psi_n^i$ , les déplacements  $\mathbf{x}_n^i$  donnés dans Eq. (29) vérifiaient déjà les CSBC sur les autres DDL de  $L_1^{i,0}$  et  $L_r^{i,0}$  qui ne sont pas dans  $L^i$  (Remarque 1).

*Remarque 1:* Dans le calcul des modes  $\Phi_n^i$  et  $\Psi_n^i$  dans Eqs. (30) et (31), les CSBC Eq. (3) sont seulement imposées aux DDL des frontières à gauche et à droite  $L_1^{i,0}$  et  $L_r^{i,0}$  de  $S_0^i$  qui n'appartiennent pas à  $L_1^i$  et  $L_r^i$  c.-à-d. aux interfaces amont et aval  $L_u^{i,0}$  et  $L_d^{i,0}$ . Les CSBC n'étaient pas imposées à  $L_1^i$  et  $L_r^i$  car d'autres conditions aux limites liées aux méthodes CMS étaient imposées sur  $L^i$  et par conséquent sur  $L_1^i$  et  $L_r^i$  comme c'est indiqué dans les dernières parties de Eqs. (30) et (31). Ceci s'applique aussi pour les méthodes CMS avec interface libre ou mixte, bien que dans ces méthodes les conditions aux limites semblables à celles dans Eqs. (30) et (31) ne soient pas imposées ou seulement partiellement imposées à l'interface  $L^i$  de la sous-structure lors du calcul des modes propres et des modes statiques. Pour ces trois méthodes CMS, que ce soit avec interface fixe, libre ou mixte, les CSBC seront imposées plus tard sur  $L_1^i$  et  $L_r^i$  dans Eq. (34) lors de la résolution du système réduit.

*Remarque 2:* Si le dernier disque aubagé  $BD^{NB}$  est directement relié à  $BD^{NB-1}$  par des équations de liaison (15) et (16), l'interface amont de  $BD^{NB}$  sera substitué par l'interface aval de  $BD^{NB-1}$  dans le système couplé multi-étages Eq. (17), le système réduit Eq. (32) de  $BD^{NB}$  ne contient plus aucun déplacement physique d'interface lorsqu'il est introduit dans le système couplé. Par conséquent, les CSBC Eq. (34) seront imposées à tous les disques aubagés à l'exception de  $BD^{NB}$  lors de la résolution du système couplé multi-étages. Ceci peut causer des problèmes numériques comme l'inversion des matrices presque singulières, ou l'apparition des fréquences parasites indésirables. Pour remédier ce problème, il est conseillé de sélectionner dans l'interface  $L^{NB}$  non seulement les interfaces amont  $L_u^{NB,0}$  du secteur de référence  $S_0^{NB}$ , mais aussi au moins une couple de noeuds sur les frontières à gauche et à droite qui n'appartiennent pas à  $L_u^{NB,0}$ , de manière que les CSBC Eq. (34) seront toujours imposés à  $BD^{NB}$  sur ces noeuds lors de la résolution du système couplé multi-étages.

### IV.3.2. Modèles réduits des disques aubagés

#### IV.3.2.1. Modèles réduits en coordonnées physiques

Un modèle réduit en coordonnées physiques de  $BD^i$  peut bien entendu être obtenu en assemblant les modèles réduits en coordonnées physiques de tous les secteurs  $S_k^i$  donnés dans Eq. (25). Cependant les coordonnées de ce modèle réduit incluent les DDL des frontières à gauche et à droite  $L_1^{i,k}$  et  $L_r^{i,k}$  de tous les secteurs  $S_k^i$ . Comme ces DDL ne sont pas nécessaires pour l'assemblage des disques aubagés dans la structure multi-étages et augmentent la taille du système réduit, il est préférable de les éliminer du système réduit, à l'exception de ceux qui appartiennent aussi aux interfaces amont et aval. Dans ce but, on considère la réduction (CBD) dans laquelle chaque disque aubagé complet  $BD^i$  est une sous-structure dont l'interface  $L^i$  est composé des interfaces amont et aval  $L_u^i$  et  $L_d^i$  de  $BD^i$ . L'interface  $L^i$  et ses déplacements  $\mathbf{x}_{BD,L}^i$  sont alors définis par:

$$L^i = L_u^i \cup L_d^i = \cup_{k=0}^{N^i-1} L^{i,k} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{BD,L}^i = {}^t[\mathbf{x}_u^i, \mathbf{x}_d^i] = {}^t[\mathbf{x}_{BD,L}^{i,0}, \dots, \mathbf{x}_{BD,L}^{i,N^i-1}], \quad (35)$$

où  $L^{i,k} = L_u^{i,k} \cup L_d^{i,k}$  et  $\mathbf{x}_{BD,L}^{i,k} = {}^t[\mathbf{x}_u^{i,k}, \mathbf{x}_d^{i,k}]$  sont les restrictions de  $L^i$  et  $\mathbf{x}_{BD,L}^i$  au secteur  $S_k^i$ . Pour le premier disque aubagé  $BD^1$ ,  $L^1$  est seulement composé de l'interface aval  $L_d^1$ , et pour le dernier disque aubagé  $BD^{nBD}$ ,  $L^{nBD}$  est seulement composé de l'interface amont  $L_u^{nBD}$ .

Les déplacements physiques de  $BD^i$  dans Eq. (4) s'écrivent:

$$\mathbf{x}_{BD}^i = \Phi_{BD}^i \boldsymbol{\mu}_{BD}^i + \Psi_{BD}^i \mathbf{x}_{BD,L}^i = \mathbf{Q}_{BD}^i \mathbf{q}_{BD}^i, \quad (36)$$

avec  $\mathbf{Q}_{BD}^i = [\Phi_{BD}^i, \Psi_{BD}^i]$  et  $\mathbf{q}_{BD}^i = {}^t[\boldsymbol{\mu}_{BD}^i, \mathbf{x}_{BD,L}^i]$ . Les modes propres  $\Phi_{BD}^i$  et les modes de liaison  $\Psi_{BD}^i$  peuvent être calculés sur le secteur de référence  $S_0^i$  en utilisant la symétrie cyclique de  $BD^i$ , c.-à-d. à partir de  $\Phi_n^i$  et  $\Psi_n^i$  obtenues dans Eqs. (30) et (31) en imposant les CSBC Eq. (3) sur les DDL des frontières à gauche et à droite qui n'appartiennent pas à l'interface  $L^i$ .

En reportant Eq. (36) dans Eq. (4), le système réduit de  $BD^i$  s'écrit:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{BD}^i \mathbf{q}_{BD}^i + \tilde{\mathbf{C}}_{BD}^i \dot{\mathbf{q}}_{BD}^i + \tilde{\mathbf{M}}_{BD}^i \ddot{\mathbf{q}}_{BD}^i = \tilde{\mathbf{f}}_{BD}^i + {}^t\mathbf{Q}_{BD}^i \mathbf{r}_{BD}^i. \quad (37)$$

Les matrices et les forces externes réduites de  $BD^i$  s'écrivent:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{BD}^i = {}^t\mathbf{Q}_{BD}^i \mathbf{A}_{BD}^i \mathbf{Q}_{BD}^i = \sum_{k=0}^{N^i-1} {}^t\mathbf{Q}_{BD}^{i,k} \mathbf{A}^i \mathbf{Q}_{BD}^{i,k} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{BD}^i = {}^t\mathbf{Q}_{BD}^i \mathbf{f}_{BD}^i = \sum_{k=0}^{N^i-1} {}^t\mathbf{Q}_{BD}^{i,k} \mathbf{f}^{i,k}, \quad (38)$$

où  $\mathbf{A}$  représente  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{f}^{i,k}$  sont les matrices et les forces définies dans Eq. (1), et  $\mathbf{Q}_{BD}^{i,k} = [\Phi_{BD}^{i,k}, \Psi_{BD}^{i,k}]$  est la restriction de  $\mathbf{Q}_{BD}^i$  sur le secteur  $S_k^i$ .

### IV.3.2.2. Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes

Pour le disque aubagé  $BD^i$ , les modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes sont obtenus en imposant les CSBC Eq. (3) sur les systèmes réduits en coordonnées physiques Eq. (25) du secteur de référence  $S_0^i$  qui résultent de la réduction CB1, ou en imposant les CSBC Eq. (34) sur les systèmes réduits en coordonnées d'ondes tournantes Eq. (32) du secteur de référence  $S_0^i$  qui résultent de la réduction CB2.

## IV.3.3. Modèles réduits de la structure multi-étages

### IV.3.3.1. Modèles réduits en coordonnées physiques

Un modèle réduit en coordonnées physiques de la structure multi-étages est obtenu en assemblant les systèmes réduits des disques aubagés fournis par la réduction CBD dans Eq. (37), et le cas échéant, les systèmes complets des structures inter-disques donnés dans Eq. (11), et en écrivant la continuité des déplacements et l'équilibre des réactions aux interfaces  $L_u^i$  et  $L_q^i$ . Bien entendu, les systèmes des structures inter-disques peuvent également être réduits par les méthodes CMS.

Le modèle réduit de la structure multi-étages peut être réduit davantage si au lieu d'utiliser les méthodes CMS classiques comme la méthode CB, on utilise les méthodes CMS avec les modes d'interface ou les modes d'interface partiels (Tran, 2001, 2009b,a) qui éliminent tous ou une partie des coordonnées d'interface du système réduit. En effet, dans l'application numérique présentée dans (Tran, 2014, cf. Annexe), afin de comparer l'efficacité des réductions CMS et MSCS lorsqu'elles sont utilisées séparément, la méthode CB avec les modes d'interface (CBI) était appliquée à chaque disque aubagé  $BD^i$  dont les déplacements sont exprimés par:

$$\mathbf{x}_{BD}^i = \Phi_{BD}^i \boldsymbol{\mu}_{BD}^i + \Phi_{BD,L}^i \boldsymbol{\mu}_L, \quad (39)$$

où les modes propres  $\Phi_{BD}^i$  dans Eq. (36) sont inchangés, tandis que les modes de liaison  $\Psi_{BD}^i$  sont remplacés par quelques modes d'interface  $\Phi_{BD,L}^i$  qui résultent de la condensation de Guyan (1965) de la structure multi-étages complète sur les interfaces amont et aval. On remarque que les modes d'interface  $\Phi_{BD,L}^i$  sont simplement les modes propres du système réduit de la structure multi-étages qui résulte de la réduction CBD des disques aubagés, mais avec uniquement les modes de liaison  $\Psi_{BD}^i$  et sans aucun mode propre  $\Phi_{BD}^i$  dans Eq. (36). Par conséquent, toutes les remarques concernant la réduction CBD, en particulier celles sur l'utilisation de la symétrie cyclique des disques aubagés dans le calcul des modes de liaison, restent valables dans le calcul des modes d'interface. La même expression que Eq. (39) est aussi applicable aux déplacements des structures inter-disques. Le couplage des sous-structures est effectué au travers des coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\mu}_L$  qui

sont communes à toutes les sous-structures et qui remplacent les déplacements d'interface  $\mathbf{x}_{BD,L}^i$  des interfaces amont et aval, ce qui réduit considérablement la taille du système réduit couplé. Le système réduit couplé qui résulte de la réduction CBI ne contient aucun déplacement physique mais uniquement des coordonnées généralisées associées aux modes propres et aux modes d'interface. Cependant, comme la réduction MSCS n'est pas appliquée à ce système réduit, on considère ce dernier comme un système réduit en coordonnées physiques, en opposition aux coordonnées d'ondes tournantes.

### IV.3.3.2. Modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes

Les modèles réduits en coordonnées d'ondes tournantes sont obtenus en remplaçant les secteurs de référence  $S_0^i$  des disques aubagés  $BD^i$  par leurs modèles réduits obtenus par les méthodes CMS, avant d'appliquer la réduction MSCS.

Pour la réduction CB1 où Eq. (24) est utilisée pour obtenir le système réduit Eq. (25) des secteurs  $S_k^i$  de  $BD^i$  en coordonnées physiques, les matrices  $\mathbf{A}^i$  des secteurs de référence  $S_0^i$  qui composent les matrices diagonales par blocs  $\mathbf{A}_{BD}^i$  et  $\mathbf{A}_{BD,\Sigma}$  dans Eq. (21) doivent être remplacées par les matrices réduites correspondantes  $\tilde{\mathbf{K}}^{i,0}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^{i,0}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}^{i,0}$  définies dans Eq. (26), car ces matrices sont identiques pour tous les secteurs  $S_k^i$  de  $BD^i$ , c.-à-d. pour tous les indices de déphasage  $n$  de  $BD^i$  dans Eq. (17). De la même manière, les forces physiques  $\mathbf{f}^{i,k}$  appliquées sur  $S_k^i$  et qui composent les vecteurs  $\mathbf{f}_{BD}^i$  et  $\mathbf{f}_{MS,\Sigma}$  dans Eq. (19) doivent être remplacées par  $\tilde{\mathbf{f}}^{i,k}$ .

Pour la réduction CB2 où Eq. (29) est utilisée pour obtenir le système réduit Eq. (32) du secteur de référence  $S_0^i$  en coordonnées d'ondes tournantes, les matrices réduites sont différentes pour chaque indice de déphasage  $n$  de  $BD^i$  dans Eq. (17). Pour  $n = 0, \dots, N^i - 1$ , la matrice  $\mathbf{A}^i$  qui est au  $(n + 1)$ -ème bloc diagonal de  $\mathbf{A}_{BD}^i$ , c.-à-d. correspondant à l'indice de déphasage  $n$ , doit être remplacée par les matrices correspondantes  $\tilde{\mathbf{K}}_n^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_n^i$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_n^i$  définies dans Eq. (33). De la même manière, les forces en coordonnées d'ondes tournantes  $({}^t\bar{\mathbf{E}}^i \otimes \mathbf{I}_{mi}) \mathbf{f}_{BD}^i$  dans Eq. (19) doivent être remplacées par  $(N^i)^t \{ \tilde{\mathbf{f}}_0^i, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_n^i, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{N^i-1}^i \}$ .

On remarque que les réductions CB1 et CB2 affectent uniquement les matrices  $\mathbf{A}_{BD,\Sigma}$  des disques aubagés dans le système couplé complet de la structure multi-étages Eq. (17), mais pas les matrices  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}$  des inter-disques, ni la matrice  $\mathbf{B}_\Sigma^i$  dans l'équation de liaison Eq. (16), car les matrices  $\mathbf{A}_{ID,\Sigma}$  et  $\mathbf{B}_\Sigma^i$  concernent uniquement les DDL des interfaces amont et aval qui sont toujours présents dans le système réduit.

Les CSBC Eq. (3) ou Eq. (34) doivent être imposées aux DDL des frontières à gauche et à droite qui sont présents dans le système réduit de la structure multi-étages, sur la totalité de ces DDL lorsque la réduction CB1 est utilisée et sur une partie lorsque la réduction CB2 est utilisée. Et bien entendu lorsque la réduction MSCS est appliquée sur le système réduit de la structure multi-étages, on peut utiliser n'importe quelle sélection A, B, C ou leurs variantes décrites dans la précédente section.

## IV.4. Résultats - Conclusions

Les méthodes de réduction de modèle pour les structures cycliques multi-étages utilisant la réduction MSCS et/ou les méthodes CMS ont été développées et appliquées sur un exemple d'assemblage de trois disques aubagés présenté dans la figure 1 (Tran, 2014, cf. Annexe).

Afin d'extraire les systèmes réduits du système couplé complet dans la réduction MSCS, une nouvelle sélection des indices de déphasage associés à chaque disque aubagé est proposée et donne d'excellentes fréquences propres de la structure multi-étages, avec toutes les multiplicités correctes, ce qui n'est pas le cas d'autres sélections. Cependant l'utilisation de la réduction MSCS seule sans les méthodes CMS n'est pas recommandée à cause de son coût de calcul élevé.

Les méthodes CMS, utilisées seules ou combinées avec la réduction MSCS, fournissent des systèmes réduits avec le même niveau de précision que la réduction MSCS seule, mais avec des tailles beaucoup plus petites. Les méthodes CMS avec les modes d'interface appliquées sur les disques aubagés sans la réduction MSCS sont les plus efficaces avec les plus petites tailles des systèmes réduits et les plus courts temps de calcul pour la résolution des systèmes réduits. Les méthodes CMS utilisant les coordonnées d'ondes tournantes appliquées sur les secteurs de référence et combinées avec la réduction MSCS sont aussi efficaces et recommandées, en particulier lorsqu'on a besoin d'associer un indice de déphasage à chaque fréquence et mode propre de la structure multi-étages comme dans le cas de l'approche mono-étage, par exemple dans le calcul

des forces aérodynamiques induites par le mouvement du mode dans les applications d'aéroélasticité où la condition de symétrie cyclique peut être également appliquée au fluide.

A cause du coût de calcul élevé de la construction des modèles réduits comparés à celui de la résolution de modèle complet, les modèles réduits ne sont utiles et efficaces que pour les applications qui nécessitent un grand nombre de calcul répétitifs dus au changement des excitations externes et sans aucune modification de la structure, telles que l'étude paramétrique du comportement du modèle, les simulations du couplage fluide-structure, les processus d'optimisation et les applications de contrôle embarqué. Les modèles réduits peuvent ne pas être efficaces lorsque les paramètres de conception, de modélisation ou de fonctionnement de la structure changent fréquemment, ce qui nécessite la reconstruction fréquente des modèles réduits, à moins que les approches telles que les méthodes d'interpolation soient utilisées pour adapter les modèles réduits existants aux nouvelles valeurs des paramètres, plutôt que de construire de nouveaux modèles réduits.

# MÉTHODES DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE DANS LES TURBOMACHINES

## V.1. Introduction

Ce travail concerne l'analyse dynamique du système couplé fluide-structure dans les turbomachines. La structure consiste en un disque aubagé en rotation, soumis à des forces aérodynamiques instationnaires exercées par le fluide qui l'entoure. Ces forces sont elles-mêmes générées par les mouvements de la structure et sont supposées linéaires en terme des déplacements de la structure. La structure et le fluide sont supposés d'avoir une même parfaite symétrie cyclique, de manière que la réduction des calculs à un seul secteur répétitif de référence puisse être appliquée. Les propriétés des structures avec symétrie cyclique peuvent être obtenues à partir de la théorie de propagation d'ondes dans les structures périodiques (Brillouin, 1946; Mead, 1975; Orris & Petyt, 1974; Thomas, 1979; Wildheim, 1979), de la théorie des groupes finis (Miller, 1981; Valid & Ohayon, 1985), ou de la décomposition en séries de Fourier discrètes (Lalanne & Touratier, 1998; Bladh et al., 2001a). Elles ont été appliquées aux structures tournantes comme les rotors flexibles ou les disques aubagés (Gérardin & Kill, 1986; Mézière, 1994; Jacquet-Richardet et al., 1996) et ont été combinées avec d'autres méthodes de réduction de modèle comme la synthèse modale (Henry, 1980; Elhami et al., 1993; Tran, 2001, 2009b). Le cas des structures désaccordées n'est pas traité ici.

Les méthodes de couplage fluide-structure dans les turbomachines entre le modèle dynamique de la structure et le modèle aérodynamique instationnaire ont été revues dans (Crawley, 1988; Marshall & Imregun, 1996). Les équations du mouvement de la structure sont souvent projetées sur les modes propres de la structure, ces derniers servent également à calculer les forces aérodynamiques. Plusieurs types de modes ont été utilisés dans le cas de la symétrie cyclique pour représenter la structure et pour calculer les forces aérodynamiques : les modes en coordonnées d'ondes tournantes du secteur de référence (Jacquet-Richardet & Henry, 1994; Tran et al., 2003), les modes d'ondes stationnaires (Lalanne & Touratier, 1998; Lalanne et al., 1998), les modes du secteur de référence isolé (Jacquet-Richardet & Dal-Ferro, 1995), les modes du disque isolé et les modes des aubes (Berthillier et al., 1997, 1998) etc.

L'approche découplée souvent utilisée pour les turbomachines suppose qu'il n'y a pas de couplage aérodynamique entre les modes et que les forces aérodynamiques restent inchangées que la structure soit soumise ou non à ces dernières. Par conséquent, les forces aérodynamiques sont seulement calculées pour chaque mode dans le vide qui oscille à sa fréquence propre, puis elles sont introduites comme des scalaires constantes dans les équations modales découplées afin de déterminer l'amortissement aéroélastique et de déduire si chaque mode est stable ou non (Crawley, 1988). Les méthodes de couplage indirect proposées dans ce travail tiennent compte du couplage aérodynamique entre les modes et la dépendance des forces aérodynamiques du mouvement de la structure et en particulier des valeurs propres inconnues du système couplé, ce qui conduit, dans le cas de l'équation de flottement, à un système aux valeurs propres non linéaire qui nécessite des solutions itératives. Cependant, les forces aérodynamiques ne sont calculées qu'une seule fois avant la résolution du système couplé et le mouvement de la structure n'agit pas directement sur les forces aérodynamiques mais seulement par l'intermédiaire des modes, ceci grâce à aux hypothèses de linéarité des forces aérodynamiques et des mouvements harmoniques des modes. Ces hypothèses sont levées dans la méthode de couplage direct où l'équation du mouvement de la structure et les équations du fluide sont résolues alternativement pour chaque pas de temps, avec des données transférées d'un calcul à l'autre sous forme de conditions aux limites ou de chargements de pression (Jacquet-Richardet & Rieutord, 1998; Grisval & Liauzun, 1999, 2000; Sayma et al., 2000; Carstens et al., 2003; Gnesin et al., 2004; Dugeai, 2005, 2008). Des comparaisons entre les méthodes de couplage direct et indirect ont été effectuées dans (Tran et al., 2003; Moffatt & He, 2005). D'autres travaux relatifs au couplage aéroélastique dans les turbomachines proposent la construction des modèles d'ordre réduit du fluide (Willcox, 2000; Epureanu et al., 2000, 2001; Epureanu, 2003; Sarkar & Venkatraman, 2004; Attar & Dowell, 2005; Placzek, 2009), ce qui constitue une solution alternative pour réduire le coût des calculs aérodynamiques, ou la prise en compte du désaccordage des aubes (He et al., 2007, 2008).

Dans les méthodes de couplage proposées ici, la projection des forces aérodynamiques sur les modes fournit une matrice des coefficients aérodynamiques dont le produit avec les coordonnées modales représente les forces aérodynamiques généralisées (FAG). Dans le domaine fréquentiel, en introduisant les FAG dans le système réduit de la structure pour l'analyse de stabilité, on obtient un système aux valeurs propres non linéaire dont les matrices dépendent de la valeur propre inconnue. Cette équation de flottement est résolue soit par la méthode du double balayage, appelée aussi méthode  $p - k$  (Dat & Meurzec, 1969), ou par la méthode de lissage de Karpel basée sur une approximation par des fonctions rationnelles des FAG (Karpel, 1982; Roberts, 1991; Poirion, 1995; Tran et al., 2003). Dans le domaine temporel, la méthode de lissage de Karpel est également utilisée pour obtenir une approximation temporelle des FAG au moyen de variables d'états auxiliaires. Le système réduit couplé est alors résolu en utilisant le schéma d'intégration de Newmark (1959) (Bathe, 1996).

Afin de détecter les zones d'instabilité d'une turbomachine, les calculs aérodynamiques et de couplage aéroélastique doivent être effectués en plusieurs points de son diagramme de fonctionnement, en faisant varier les paramètres tels que le débit-masse, le rapport de pression, la vitesse de rotation etc. Par exemple, une méthode de couplage direct qui inclue l'angle de déphasage inter-aube comme partie intégrante de la solution a été proposée dans (Rzadkowski & Gnesin, 2007). Afin de minimiser le coût de calculs aérodynamiques, une méthode de lissage multi-paramètres des FAG a été développée. Cette méthode, déjà utilisée sur les avions (Poirion, 1996), utilise un premier lissage par fonctions splines (de Boor, 1992, 2001) sur le paramètre choisi, puis un lissage par fractions rationnelles de Karpel sur les fréquences réduites. La première version utilisant les fonctions splines mono-variable a été appliquée sur les aubes de turbomachines avec la vitesse de rotation comme unique paramètre. On propose ici une méthode de lissage multi-paramètres des FAG utilisant les fonctions splines multi-variables afin de réduire davantage le coût des calculs aérodynamiques (Tran, 2009c). Cette méthode permet de faire varier simultanément plusieurs paramètres et d'effectuer le calcul de couplage aéroélastique pour des valeurs quelconques des paramètres à partir des FAG calculées pour quelques valeurs initiales des paramètres. Elle permet à la fois l'interpolation et l'extrapolation des paramètres, ce qui facilite la détection des zones instables qui se trouvent en général à la périphérie des zones stables et dans lesquelles les calculs aérodynamiques auront du mal à converger.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la section 2 on présente le système réduit couplé fluide-structure basé sur la symétrie cyclique; deux méthodes de résolution du système couplé sont présentées dans la section 3; finalement la résolution du système couplé avec le lissage multi-paramètres multi-variables des FAG est présentée dans la section 4.

## V.2. Système réduit couplé fluide-structure

### V.2.1. Réduction par symétrie cyclique

Une structure avec symétrie cyclique est composée de  $N$  secteurs identiques  $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$  qui se referment sur eux mêmes pour former un système circulaire. La structure complète est obtenue par  $N - 1$  rotations successives d'angle  $\beta = 2\pi/N$  d'un secteur de référence  $S_0$ . Chaque secteur est limité par une frontière à gauche  $L_l$  et une frontière à droite  $L_r$  avec les secteurs adjacents. Le fluide entourant la structure est également supposé avoir la même symétrie cyclique, tandis que les forces extérieures appliquées sur la structure peuvent être réparties de façon quelconque sur les secteurs.

Les déplacements physiques à un instant  $t$  d'un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de la structure peuvent s'écrire, en utilisant une décomposition de Fourier :

$$u(r, \theta, z, t) = \Re \left\{ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p(r, z, t) e^{ip\theta} \right\}, \quad (1)$$

où  $\Re(z)$  est la partie réelle de  $z$  et  $i^2 = -1$ . En regroupant les termes, on obtient :

$$u(r, \theta, z, t) = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} u_{qN+n}(r, z, t) e^{i(qN+n)\theta} \right\} = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} u_n(r, \theta, z, t) \right\}, \quad (2)$$

où  $u_n(r, \theta, z, t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} u_{qN+n}(r, z, t) e^{i(qN+n)\theta}$  est la coordonnée d'ondes tournantes complexe associée à l'indice de déphasage  $n$ , pour  $n = 0, \dots, N-1$ .

Les coordonnées d'ondes tournantes  $u_n$  du secteur  $S_k$ , pour  $k = 0, \dots, N-1$ , sont reliées à celles de secteur de référence  $S_0$  par la relation de symétrie cyclique :

$$u_n(r, \theta + k\beta, z, t) = u_n(r, \theta, z, t) e^{ik\sigma_n}, \quad (3)$$

où  $\sigma_n = n\beta$  est l'angle de déphasage associée à l'indice de déphasage  $n$ .

D'après Eq. (3), les coordonnées d'ondes tournantes des frontières à gauche et à droite de chaque secteur vérifient les conditions aux limites de symétrie cyclique :

$$u_n|_{L_l} = u_n|_{L_r} e^{i\sigma_n}. \quad (4)$$

En utilisant les propriétés de symétrie cyclique Eq. (3), l'équation du mouvement de la structure complète est réduite à  $N$  équations du mouvement du secteur de référence  $S_0$  en fonction des coordonnées d'ondes tournantes, avec les conditions aux limites et les seconds membres appropriés. Seul le secteur de référence  $S_0$  a besoin d'être modélisé. On obtient après une discrétisation par éléments finis les systèmes suivants dans lesquels les inconnues sont les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(S_0, t)$  du secteur de référence  $S_0$ , ceci pour les indices de déphasage  $n = 0, \dots, N-1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \mathbf{u}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{f}_{an}(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{f}_n + \mathbf{r}_n, \quad (5) \\ \mathbf{f}_{an} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_a(S_k) e^{-ik\sigma_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}(S_k) e^{-ik\sigma_n}, \quad (6) \\ \mathbf{u}_n|_{L_l} = \mathbf{u}_n|_{L_r} e^{i\sigma_n}. \quad (7) \end{array} \right.$$

$\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité du secteur  $S_0$ , incluant la raideur géométrique due aux contraintes initiales et la raideur supplémentaire d'assouplissement due à la rotation,  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement et d'effet gyroscopique et  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse.  $\mathbf{f}_a(S_k)$  est le vecteur des forces aérodynamiques instationnaires appliquées au secteur  $S_k$  qui sont supposées dépendre linéairement des déplacements et des vitesses de  $S_k$ .  $\mathbf{f}(S_k)$  est le vecteur des autres forces extérieures appliquées au secteur  $S_k$ , incluant les forces centrifuges causées par la rotation.  $\mathbf{r}_n$  est le vecteur des réactions d'interface appliquées aux frontières de  $S_0$ , ces réactions n'interviennent pas dans la résolution du système Eqs. (5-7) et sont seulement présentes à cause des conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (7). Ces dernières sont exprimées dans un système de coordonnées cylindriques.

Le vecteur des déplacements physiques, réels du secteur  $S_k$  sont obtenus à partir des coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{u}_n$  en utilisant Eqs. (2) et (3) :

$$\mathbf{u}(S_k, t) = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_n e^{ik\sigma_n} \right\}. \quad (8)$$

On remarque que comme les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{u}_m$  vérifient Eq. (3) avec l'angle de déphasage  $\sigma_m = m\beta$  et le fluide est supposé d'avoir la même symétrie cyclique, les forces aérodynamiques physiques  $\mathbf{f}_a(S_k, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m)$  induites par  $\mathbf{u}_m$  sur le secteur  $S_k$  vérifient :

$$\mathbf{f}_a(S_k, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) = \mathbf{f}_a(S_0, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) e^{ik\sigma_m}. \quad (9)$$

D'après Eqs. (6) et (9), les forces aérodynamiques physiques induites par  $\mathbf{u}_m$  sur les coordonnées d'ondes tournantes  $\mathbf{u}_n$  de  $S_0$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{f}_{an}(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_a(S_k, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) e^{-ik\sigma_n} = \mathbf{f}_a(S_0, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) \delta_{mn}, \quad (10)$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker. Ainsi les forces aérodynamiques  $\mathbf{f}_{an}$  appliquées sur les coordonnées  $\mathbf{u}_n$  dans Eq. (5) dépendent seulement de  $\mathbf{u}_n$  et non pas des autres coordonnées d'ondes tournantes, et elles sont égales aux forces aérodynamiques physiques  $\mathbf{f}_a(S_0, \mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n)$  induites par  $\mathbf{u}_n$  sur le secteur  $S_0$ . Cette propriété est aussi valable pour toutes les forces extérieures tournantes, c.-à-d. vérifiant Eq. (9), et en particulier lorsque les forces extérieures sont les mêmes pour tous les secteurs.



### V.2.2. Fréquences et modes de la structure non amortie dans le vide

Les fréquences et modes propres de la structure non amortie dans le vide sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres complexe suivant, pour chaque indice de déphasage  $n$  :

$$\begin{cases} \mathbf{K} \Phi_n - \mathbf{M} \Phi_n \Omega_n^{*2} = \mathbf{R}_{mn}, \\ \Phi_{n|L_l} = \Phi_{n|L_r} e^{i\sigma_n}, \end{cases} \quad (11)$$

où  $\Omega_n^* = \text{diag}(\omega_{n,1}^*, \dots, \omega_{n,m_n}^*)$  et  $\Phi_n = [\Phi_{n,1}, \dots, \Phi_{n,m_n}]$  sont les matrices des  $m_n$  premières fréquences réelles et des  $m_n$  premiers modes complexes pour l'indice de déphasage  $n$ , et  $\mathbf{R}_{mn}$  est le vecteur des réactions modales. Le système aux valeurs propres (11-12) est réel pour  $n = 0$  ou  $n = N/2$  (si  $N$  est pair). Pour  $0 < n < N/2$ , ce système est complexe et les modes propres correspondant aux indices de déphasage  $n$  et  $N - n$  sont complexes conjugués. On notera par  $-n$  l'indice de déphasage  $N - n$ . Par conséquent, on a besoin de résoudre le système (11-12) pour seulement  $N/2 + 1$  ou  $(N + 1)/2$  valeurs de  $n$ , selon que  $n$  soit pair ou impair. La structure a des modes doubles car les fréquences correspondant aux modes complexes conjugués pour les indices de déphasage  $n$  et  $-n$  sont les mêmes :

$$\Omega_{-n} = \Omega_n \quad \text{et} \quad \Phi_{-n} = \overline{\Phi_n} \quad \text{pour} \quad 0 < n < N/2. \quad (13)$$

Les modes propres réels, physiques  $\Phi_n^1$  de la structure au secteur  $S_k$  sont obtenus en ne gardant que les contributions des modes complexes  $\Phi_n$  et  $\Phi_{-n}$  dans Eq. (8) :

$$\Phi_n^1(S_k) = \Re(\Phi_n e^{ik\sigma_n} + \Phi_{-n} e^{ik\sigma_{-n}}) = 2 [\Re(\Phi_n) \cos k\sigma_n - \Im(\Phi_n) \sin k\sigma_n], \quad (14)$$

Pour  $0 < n < N/2$ , si les modes complexes sont normalisés tels que  ${}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{M} \Phi_n = \mathbf{I}$ , alors  $z \Phi_n$  est aussi un mode propre pour tout nombre complexe  $z$  vérifiant  $|z| = 1$ . En choisissant par exemple  $z = i$ , les deuxièmes modes réels, physiques  $\Phi_n^2(S_k)$  associés aux fréquences doubles sont obtenus en remplaçant  $\Phi_n$  par  $i \Phi_n$  dans Eq. (14). Ces modes sont déduits de  $\Phi_n^1$  par une rotation d'angle  $\pi/(2n)$ . Pour  $n = 0$  et  $n = N/2$ , les fréquences sont simples et les modes  $\Phi_n$  sont réels, d'où :  $\Phi_n^1(S_k) = \Phi_n^2(S_k) = 2 \Phi_n \cos k\sigma_n$ .

### V.2.3. Système réduit couplé par projection modale

Pour chaque indice de déphasage  $n$ , les coordonnées d'ondes tournantes sont exprimées comme une combinaison linéaire des modes complexes de la structure non amortie dans le vide :

$$\mathbf{u}_n = \Phi_n \mathbf{q}_n, \quad (15)$$

où  $\mathbf{q}_n(t)$  est le vecteur des  $m_n$  coordonnées généralisées modales complexes.

En introduisant Eq. (15) dans l'équation du mouvement Eq. (5) et en prémultipliant par  ${}^t\overline{\Phi_n}$ , on obtient le système réduit :

$$\mathbf{K}_{gn} \mathbf{q}_n + \mathbf{C}_{gn} \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{M}_{gn} \ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{f}_{agn}(\Phi_n \mathbf{q}_n, \Phi_n \dot{\mathbf{q}}_n) + \mathbf{f}_{gn}, \quad (16)$$

avec  $\mathbf{K}_{gn} = {}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{K} \Phi_n$ ,  $\mathbf{C}_{gn} = {}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{C} \Phi_n$ ,  $\mathbf{M}_{gn} = {}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{M} \Phi_n$ ,  $\mathbf{f}_{agn} = {}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{f}_{an}$  et  $\mathbf{f}_{gn} = {}^t\overline{\Phi_n} \mathbf{f}_n$ ;  $\mathbf{K}_{gn}$ ,  $\mathbf{C}_{gn}$  et  $\mathbf{M}_{gn}$  sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse généralisées ( $\mathbf{K}_{gn}$  et  $\mathbf{M}_{gn}$  sont réelles et diagonales),  $\mathbf{f}_{agn}$  et  $\mathbf{f}_{gn}$  sont les forces aérodynamiques et les forces externes généralisées complexes. Comme les modes  $\Phi_n$  vérifient déjà les conditions aux limites de symétrie cyclique Eq. (7), ces dernières sont déjà prises en compte dans Eq. (16) et par conséquent les réactions d'interface disparaissent. En général, l'équation (16) doit être résolue pour tous les indices de déphasage  $n = 0, \dots, N - 1$  car la relation  $\mathbf{u}_{-n} = \overline{\mathbf{u}_n}$  pour  $0 < n < N/2$  n'est plus valable, sauf si  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ .

Pour l'analyse de la stabilité aéroélastique, toutes les forces externes sont nulles sauf les forces aérodynamiques. On cherche les solutions sous la forme :

$$\mathbf{u}_n(t) = \tilde{\mathbf{u}}_n e^{pt} \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_n(t) = \tilde{\mathbf{q}}_n e^{pt} \quad \text{avec} \quad p = i\omega(1 + i\alpha), \quad (17)$$

où  $\omega$  est la fréquence aéroélastique inconnue ( $\omega > 0$ ) et  $\alpha$  est le facteur d'amortissement aéroélastique inconnu. Par linéarité, les forces aérodynamiques s'écrivent :

$$\mathbf{f}_{an}(\Phi_n \mathbf{q}_n, \Phi_n \dot{\mathbf{q}}_n) = \mathbf{F}_{an}(\Phi_n e^{pt}, \Phi_n p e^{pt}) \tilde{\mathbf{q}}_n = \tilde{\mathbf{F}}_{an}(\Phi_n, p) \tilde{\mathbf{q}}_n e^{pt}, \quad (18)$$

où  $\mathbf{F}_{an}(\Phi_n e^{pt}, \Phi_n p e^{pt})$  est la matrice dont la  $i$ -ème colonne est la force aérodynamique induite par le déplacement  $\Phi_{n,i} e^{pt}$ . Les forces aérodynamiques généralisées (FAG) s'écrivent :

$$\mathbf{f}_{agn}(\Phi_n \mathbf{q}_n, \Phi_n \dot{\mathbf{q}}_n) = {}^t \overline{\Phi_n} \tilde{\mathbf{F}}_{an}(\Phi_n, p) \tilde{\mathbf{q}}_n e^{pt} = \tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p) \tilde{\mathbf{q}}_n e^{pt}. \quad (19)$$

En reportant Eqs. (17) et (19) dans Eq. (16), on obtient l'équation de flottement :

$$[\mathbf{K}_{gn} + p \mathbf{C}_{gn} + p^2 \mathbf{M}_{gn} - \tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p)] \tilde{\mathbf{q}}_n = \mathbf{0}, \quad (20)$$

qui est un système aux valeurs propres non linéaire, complexe dans lequel la matrice des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p)$  dépendent des modes complexes  $\Phi_n$  et des valeurs propres complexes inconnues  $p$ . Une approximation de  $\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p)$  en fonction de  $p$  peut être obtenue par la méthode de lissage par fractions rationnelles de Karpel à partir des valeurs tabulées de  $\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p)$  calculées pour un certain nombre  $n_\omega$  de fréquences d'excitation, c.-à-d. pour  $p = i\omega_1, \dots, i\omega_{n_\omega}$ . Pour la réponse temporelle, la méthode de lissage de Karpel fournit également une expression temporelle des FAG à l'aide des variables d'état auxiliaires.

#### V.2.4. Forces aérodynamiques généralisées

Les forces aérodynamiques instationnaires sont calculées à partir d'une base de  $m_n$  modes réels  $\Psi$  du secteur de référence, pour une fréquence d'oscillation  $\omega$  et un angle de déphasage inter-aube  $\sigma_n$ . En exprimant les déplacements du secteur de référence comme une combinaison linéaire des modes  $\Psi$  et en supposant que le mouvement de la structure est harmonique avec un angle de déphasage constant entre deux secteurs adjacents, c.-à-d. :

$$\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{u}_n(S_0, t) = \Psi \tilde{\mathbf{q}}_n e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_n(S_k, t) = \Psi \tilde{\mathbf{q}}_n e^{i\omega t} e^{ik\sigma_n}, \quad (21)$$

les forces aérodynamiques généralisées (FAG) induites par les déplacements  $\mathbf{u}_n(t)$  s'écrivent, par linéarité :

$$\mathbf{f}_{agn}(\mathbf{u}_n(t), \dot{\mathbf{u}}_n(t)) = {}^t \Psi \mathbf{F}_{an}(\Psi, i\omega, t) \tilde{\mathbf{q}}_n = \mathbf{F}_{agn}(\Psi, i\omega, t) \tilde{\mathbf{q}}_n. \quad (22)$$

$\mathbf{F}_{an}(\Psi, i\omega, t)$  est la matrice dont la  $j$ -ème colonne est la force aérodynamique  $\mathbf{f}_{an}(\Psi_j, i\omega, t)$  générée par le mouvement harmonique du  $j$ -ème mode et  $\mathbf{F}_{agn}(\Psi, i\omega, t) = {}^t \Psi \mathbf{F}_{an}(\Psi, i\omega, t)$  est la matrice des coefficients aérodynamiques qui dépend du temps.

La force aérodynamique instationnaire générée au point  $M$  de la surface  $\Sigma$  de la structure s'écrit :

$$\vec{f}_{an}(M, \Psi_j, i\omega, t) = -[P_n(M, \Psi_j, i\omega, t) - P_s(M)] \vec{n}(M) d\Sigma \quad \text{pour } M \in \Sigma, \quad (23)$$

où  $P_n$  est la pression instationnaire,  $P_s$  est la pression stationnaire,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire extérieur normal à la surface  $\Sigma$  au point  $M$  et  $d\Sigma$  est une surface élémentaire de  $\Sigma$ . En projetant cette force aérodynamique instationnaire sur le déplacement  $\vec{\Psi}_i(M)$  du  $i$ -ème mode au point  $M$  et en intégrant sur la surface  $\Sigma$ , on obtient le terme  $(i, j)$  de la matrice des coefficients aérodynamiques  $\mathbf{F}_{agn}(\Psi, i\omega, t)$  :

$${}^t \Psi_i \mathbf{f}_{an}(\Psi_j, i\omega, t) = - \int_{M \in \Sigma} [P_n(M, \Psi_j, i\omega, t) - P_s(M)] \vec{n}(M) \cdot \vec{\Psi}_i(M) d\Sigma. \quad (24)$$

On introduit la matrice des coefficients aérodynamiques  $\mathbf{A}_n(\Psi, i\omega, t)$  obtenue à partir de l'intégrale dans Eq. (24) en remplaçant  $P_n$  et  $P_s$  par les coefficients de pression  $C_P = (P - P_\infty)/(0.5 \rho_\infty V_\infty^2)$  correspondants, où  $P_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $V_\infty$  sont la pression, la densité et la vitesse du fluide non perturbé à l'infini amont. En ne gardant que le terme du premier harmonique dans l'analyse de Fourier de  $\mathbf{F}_{agn}(\Psi, i\omega, t)$ , on obtient :

$$\mathbf{F}_{agn}(\Psi, i\omega, t) \simeq \tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Psi, i\omega) e^{i\omega t} = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \tilde{\mathbf{A}}_n(\Psi, i\omega) e^{i\omega t}. \quad (25)$$

Les forces aérodynamiques généralisées induites par les déplacements  $\mathbf{u}_n(t)$  deviennent :

$$\mathbf{f}_{agn}(\mathbf{u}_n(t), \dot{\mathbf{u}}_n(t)) \simeq \tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Psi, i\omega) \tilde{\mathbf{q}}_n e^{i\omega t} = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \tilde{\mathbf{A}}_n(\Psi, i\omega) \tilde{\mathbf{q}}_n e^{i\omega t}. \quad (26)$$

Les matrices des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Psi, i\omega)$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Psi, i\omega)$  de dimension  $(m_n \times m_n)$  sont complexes et non symétriques. En pratique, elles sont calculées (tabulées) pour  $n_\omega$  fréquences d'oscillation  $\omega_1, \dots, \omega_{n_\omega}$ .

En utilisant l'hypothèse de linéarité, les FAG générées par les modes complexes  $\Phi_n = \Phi'_n + i\Phi''_n$  dans Eq. (20) sont obtenues en utilisant la base des  $2m_n$  vecteurs réels  $\Psi = [\Phi'_n, \Phi''_n]$  (Tran et al., 2003).

### V.3. Solution du système réduit couplé

#### V.3.1. Méthode du double balayage

L'équation de flottement (20) s'écrit en utilisant la matrice des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p)$  définie par Eq. (26) :

$$[\mathbf{K}_{gn} + p \mathbf{C}_{gn} + p^2 \mathbf{M}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p)] \tilde{\mathbf{q}}_n = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Pour les mouvements définies par Eq. (17) dans le domaine fréquentiel,  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p)$  ne dépend que du quotient  $pc/V_\infty$  et peut donc s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p) = \tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, pc/V_\infty) = \tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, pc/V_\infty) + i \tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, pc/V_\infty), \quad (28)$$

où  $c$  est une longueur de référence, par exemple la longueur de la corde,  $\tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, pc/V_\infty)$  et  $\tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, pc/V_\infty)$  sont les parties réelles et imaginaires de  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, pc/V_\infty)$ . En reportant Eq. (28) dans Eq. (27), on obtient :

$$[\mathbf{K}_{gn}^*(pc/V_\infty) + p \mathbf{C}_{gn}^*(pc/V_\infty) + p^2 \mathbf{M}_{gn}] \tilde{\mathbf{q}}_n = \mathbf{0}, \quad (29)$$

avec  $\mathbf{K}_{gn}^*(\frac{pc}{V_\infty}) = \mathbf{K}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, \frac{pc}{V_\infty})$  et  $\mathbf{C}_{gn}^*(\frac{pc}{V_\infty}) = \mathbf{C}_{gn} + i \frac{1}{2} c \rho_\infty V_\infty \tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, \frac{pc}{V_\infty}) / (\frac{pc}{V_\infty})$ .

Si l'amortissement est faible, c.-à-d.  $|\alpha| \ll 1$ , on utilise les approximations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, pc/V_\infty) \simeq \tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, i\kappa) = \tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, i\kappa) + i \tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, i\kappa), \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{gn}^*(pc/V_\infty) \simeq \mathbf{K}_{gn}^*(i\kappa) = \mathbf{K}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, i\kappa), \quad (31)$$

$$\mathbf{C}_{gn}^*(pc/V_\infty) \simeq \mathbf{C}_{gn}^*(i\kappa) = \mathbf{C}_{gn} + \frac{1}{2} c \rho_\infty V_\infty \tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, i\kappa) / \kappa. \quad (32)$$

où  $\kappa = \omega c/V_\infty$  est la fréquence réduite. L'équation de flottement (29) est approchée par :

$$[\mathbf{K}_{gn}^*(i\kappa) + p \mathbf{C}_{gn}^*(i\kappa) + p^2 \mathbf{M}_{gn}] \tilde{\mathbf{q}}_n = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \kappa = \Im m(p) c/V_\infty, \quad (33)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme d'un système aux valeurs propres non linéaire de dimension  $2m_n$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{gn}^{-1} \mathbf{K}_{gn}^*(i\kappa) & -\mathbf{M}_{gn}^{-1} \mathbf{C}_{gn}^*(i\kappa) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}(i\kappa) \mathbf{x} = p \mathbf{x}. \quad (34)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_{gn}^*(i\kappa)$ ,  $\mathbf{C}_{gn}^*(i\kappa)$  et  $\mathbf{H}(i\kappa)$  sont réelles et dépendent de  $\tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, i\kappa)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, i\kappa)$  et  $V_\infty$ . Les matrices des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, i\kappa)$  et  $\tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, i\kappa)$  ont été tabulées pour  $n_\kappa$  valeurs croissantes des fréquences réduites  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_\kappa}$ . Les solutions  $(p, \mathbf{x})$  de Eq. (34) sont calculées pour  $n_V$  valeurs croissantes  $V_\infty^1, \dots, V_\infty^{n_V}$  de la vitesse du fluide et doivent vérifier  $\omega = \Im m(p) = \kappa V_\infty/c$ .

Pour chaque vitesse  $V_\infty^k$ , on résout les systèmes aux valeurs propres suivants, pour  $i = 1, \dots, 2m_n$  et  $j = 0, 1, 2, \dots$ , jusqu'à ce que la convergence sur  $\kappa$  soit atteinte :

$$\mathbf{H}(i\kappa_{i,j}) \mathbf{x}_{i,j+1} = p_{i,j+1} \mathbf{x}_{i,j+1} \quad \text{avec} \quad \kappa_{i,j} = \omega_{i,j} c/V_\infty^k = \Im m(p_{i,j}) c/V_\infty^k, \quad (35)$$

$(p_{i,j}, \mathbf{x}_{i,j})$  étant la  $i$ -ème solution propre obtenue à la  $j$ -ème itération et  $\mathbf{H}(i\kappa_{i,j})$  étant obtenue par interpolation de  $\tilde{\mathbf{A}}'_n(\Phi_n, i\kappa)$  et  $\tilde{\mathbf{A}}''_n(\Phi_n, i\kappa)/\kappa$  à partir des valeurs tabulées. Les fréquences de départ  $\omega_{i,0}$  sont obtenues par extrapolation des fréquences obtenues à  $V_\infty^{k-1}$  et  $V_\infty^{k-2}$  si  $k > 2$ . Pour la deuxième vitesse  $V_\infty^2$ ,  $\omega_{i,0}$  sont les fréquences obtenues à  $V_\infty^1$  et pour la première vitesse  $V_\infty^1$ ,  $\omega_{i,0}$  sont les fréquences de la structure dans le vide.

Ce procédé itératif revient à effectuer un double balayage, le premier sur la vitesse  $V_\infty$  et le second sur la fréquence réduite  $\kappa$ , et à rechercher, pour chaque vitesse  $V_\infty^k$ , les intersections de la droite  $\omega = (V_\infty^k/c)\kappa$  et des courbes d'évolution des fréquences en fonction de  $\kappa$ :  $\omega_i = \Im(p_i(\kappa))$ . Ces courbes sont obtenues en interpolant les parties imaginaires des valeurs propres de  $\mathbf{H}(i\kappa_1), \dots, \mathbf{H}(i\kappa_{n_\kappa})$ .

Cette méthode permet de déterminer toutes les valeurs propres qui sont nécessaires à l'analyse de stabilité. On obtient l'évolution des fréquences et des amortissements aéroélastiques en fonction de la vitesse ou du débit du fluide. Le flottement se produit si le facteur d'amortissement  $\alpha$  est négatif.

### V.3.2. Méthode de lissage par fractions rationnelles

La matrice des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, i\omega)$  a été calculée pour  $n_\kappa$  fréquences réduites  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_\kappa}$  avec l'hypothèse de mouvement harmonique. Pour des mouvements quelconques comme par exemple ceux définis par Eq. (17), il est nécessaire d'étendre les valeurs de la matrice des coefficients aérodynamiques dans un domaine du plan complexe contenant l'axe imaginaire, c.-à-d. de déterminer  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p)$  pour  $p = i\omega(1 + i\alpha)$  avec  $\alpha \neq 0$ .

La méthode de lissage de Karpel (1982) (Roberts, 1991; Poirion, 1995) consiste à modéliser les FAG en utilisant une approximation par fractions rationnelles et les variables d'état auxiliaires :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p) \simeq \mathbf{A}_{n0} + \frac{pc}{V_\infty} \mathbf{A}_{n1} + \frac{p^2 c^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{n2} + \frac{pc}{V_\infty} \mathbf{D}_n \left[ \frac{pc}{V_\infty} \mathbf{I} - \mathbf{R}_n \right]^{-1} \mathbf{E}_n. \quad (36)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_{n0}, \mathbf{A}_{n1}, \mathbf{A}_{n2}, \mathbf{D}_n, \mathbf{R}_n$  et  $\mathbf{E}_n$  sont réelles et de dimension  $(m_n \times m_n)$  pour  $\mathbf{A}_{n0}, \mathbf{A}_{n1}$  et  $\mathbf{A}_{n2}$ ,  $(m_n \times n_p)$  pour  $\mathbf{D}_n$ ,  $(n_p \times m_n)$  pour  $\mathbf{E}_n$  et  $\mathbf{R}_n = \text{diag}(r_1, \dots, r_{n_p})$ , où  $n_p$  est le degré du dénominateur ou le nombre de pôles et  $r_i < 0$  sont les pôles. Ces matrices sont obtenues en utilisant une méthode de minimisation par moindres carrés (Tran et al., 2003, cf. Annexe).

En utilisant Eq. (36), l'équation de flottement (27) peut s'écrire sous la forme d'un système aux valeurs propres de dimension  $2m_n$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{gn}^{*-1} [\mathbf{K}_{gn}^* + \mathbf{G}_n(p)] & -\mathbf{M}_{gn}^{*-1} \mathbf{C}_{gn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}(p) \mathbf{x} = p \mathbf{x}, \quad (37)$$

avec  $\mathbf{K}_{gn}^* = \mathbf{K}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \mathbf{A}_{n0}$ ,  $\mathbf{C}_{gn}^* = \mathbf{C}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty c V_\infty \mathbf{A}_{n1}$ ,  $\mathbf{M}_{gn}^* = \mathbf{M}_{gn} + \frac{1}{2} \rho_\infty c^2 \mathbf{A}_{n2}$  et  $\mathbf{G}_n(p) = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty p c \mathbf{D}_n [(pc/V_\infty) \mathbf{I} - \mathbf{R}_n]^{-1} \mathbf{E}_n$ .

Les matrices  $\mathbf{G}_n(p)$  et  $\mathbf{H}(p)$  sont complexes et dépendent de  $V_\infty$ . Les solutions propres  $(p, \mathbf{x})$  de Eq. (37) sont calculées pour  $n_V$  valeurs croissantes  $V_\infty^1, \dots, V_\infty^{n_V}$  de la vitesse. Ce problème aux valeurs propres non linéaire est résolu en utilisant un processus itératif basé sur la méthode des approximations successives de recherche d'un point fixe d'une fonction (Tran et al., 2003, cf. Annexe).

Pour obtenir l'approximation Eq. (36),  $n_p$  variables d'état auxiliaires  $\tilde{\mathbf{z}}_n$  ont été définies par :

$$\tilde{\mathbf{z}}_n = (pc/V_\infty) [(pc/V_\infty) \mathbf{I} - \mathbf{R}_n]^{-1} \mathbf{E}_n \tilde{\mathbf{q}}_n. \quad (38)$$

Ces variables auxiliaires vérifient dans le domaine fréquentiel :

$$p \tilde{\mathbf{z}}_n = (V_\infty/c) \mathbf{R}_n \tilde{\mathbf{z}}_n + p \mathbf{E}_n \tilde{\mathbf{q}}_n, \quad (39)$$

et sont solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre dans le domaine temporel :

$$\dot{\mathbf{z}}_n(t) = (V_\infty/c) \mathbf{R}_n \mathbf{z}_n(t) + \mathbf{E}_n \dot{\mathbf{q}}_n(t). \quad (40)$$

Les FAG s'écrivent alors dans les domaines fréquentiel et temporel :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p) \tilde{\mathbf{q}}_n = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \left( \mathbf{A}_{n0} + \frac{p c}{V_\infty} \mathbf{A}_{n1} + \frac{p^2 c^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{n2} \right) \tilde{\mathbf{q}}_n - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \mathbf{D}_n \tilde{\mathbf{z}}_n, \quad (41)$$

$$\mathbf{f}_{agn}(\Phi_n \mathbf{q}_n, \Phi_n \dot{\mathbf{q}}_n) = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \left( \mathbf{A}_{n0} \mathbf{q}_n + \frac{c}{V_\infty} \mathbf{A}_{n1} \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{c^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{n2} \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{D}_n \mathbf{z}_n \right). \quad (42)$$

En reportant Eq. (42) dans le système réduit couplé (16) et en combinant avec Eq. (40), on obtient un système d'équations différentielles linéaires du second ordre de dimension  $m_n + n_p$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gn}^* & \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \mathbf{D}_n \\ \mathbf{0} & (V_\infty/c) \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{z}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gn}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_n & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_n \\ \dot{\mathbf{z}}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{gn}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \ddot{\mathbf{z}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{gn} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (43)$$

où  $\mathbf{K}_{gn}^*$ ,  $\mathbf{C}_{gn}^*$  et  $\mathbf{M}_{gn}^*$  sont les mêmes matrices que dans Eq. (37). Ce système est résolu en utilisant le schéma d'intégration temporelle de Newmark.

#### V.4. Lissage multi-paramètres du système réduit couplé

##### V.4.1. Lissage multi-paramètres par fonctions splines multi-variables des FAG

On considère la matrice des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\Phi_n, p, x, y)$  associée à une base modale  $\Phi_n$  et qui dépend de la valeur propre complexe inconnue  $p$  ainsi que deux paramètres réels  $x$  et  $y$ . La généralisation au cas de plus de deux paramètres est immédiate.

Soient  $K = \{\kappa_1 < \dots < \kappa_{n_\kappa}\}$ ,  $T_x = \{x_1 < \dots < x_{n_x}\}$  et  $T_y = \{y_1 < \dots < y_{n_y}\}$  les fréquences réduites et les valeurs initiales des paramètres pour lesquelles les matrices des coefficients aérodynamiques ont été calculées (tabulées), soit au total  $n_\kappa \times n_x \times n_y$  matrices. Le nombre et les valeurs des fréquences réduites doivent être les mêmes pour tous les paramètres. Chaque couple de valeurs initiales  $(x_i, y_j) \in T_x \times T_y$  des paramètres sera appelé un point initial. Les matrices des coefficients aérodynamiques calculées avec la fréquence d'excitation  $\omega$  ou la fréquence réduite  $\kappa$  pour les points initiaux  $(x_i, y_j)$  sont notées par  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\omega, x_i, y_j)$  ou  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa, x_i, y_j)$  (le symbole  $\Phi_n$  est supprimé de l'expression de  $\tilde{\mathbf{A}}_n$  pour alléger les notations, bien que  $\Phi_n$  dépend aussi des paramètres).

On recherche une formule d'approximation (interpolation et extrapolation) suivant  $x$  et  $y$  qui soit définie simultanément pour toutes les fréquences réduites  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_\kappa}$ .

Pour chaque point initial  $(x_i, y_j)$ , on définit le vecteur complexe de dimension  $(m_n^2 n_\kappa \times 1)$ , formé par les colonnes des matrices  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x_i, y_j), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_\kappa}, x_i, y_j)$  :

$$\mathbf{a}_n(x_i, y_j) = {}^t[\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x_i, y_j)_{\bullet,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x_i, y_j)_{\bullet,m_n}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_\kappa}, x_i, y_j)_{\bullet,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_\kappa}, x_i, y_j)_{\bullet,m_n}] \quad (44)$$

où  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_j, x_i, y_j)_{\bullet,l}$  désigne la  $l$ -ème colonne de  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_j, x_i, y_j)$ .

La fonction vectorielle  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m_n^2 n_\kappa}$ ,  $(x, y) \mapsto \mathbf{a}_n(x, y)$ , qui a été obtenue pour les points initiaux  $(x_i, y_j) \in T_x \times T_y$ , peut être étendue à tout le domaine  $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$  par un lissage utilisant les fonctions splines bi-variables (de Boor, 1992, 2001) :

$$\mathbf{a}_n(x, y) = \sum_{s=1}^{n_y} \sum_{r=1}^{n_x} B_{rs}(x, y) \mathbf{b}_{r,s} \quad \text{pour } (x, y) \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}], \quad (45)$$

où  $(x, y)$  est un couple quelconque de valeurs calculées des paramètres et qui sera appelé un point de calcul, tandis que  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\min}$  et  $y_{\max}$  sont les valeurs calculées minimales et maximales des paramètres pour lesquelles le calcul de couplage sera effectué. Ces valeurs n'appartiennent pas nécessairement au domaine défini par les valeurs initiales. Les fonctions bi-variables réelles  $B_{rs}$  sont des produits de fonctions B-splines univariées qui sont associées aux séries de noeuds (knots)  $T'_x = \{x'_1 \leq \dots \leq x'_{n_x+k_x}\}$  et  $T'_y = \{y'_1 \leq \dots \leq y'_{n_y+k_y}\}$ , ces derniers ne dépendent que de l'ordre  $k_x$  et  $k_y$  des fonctions B-splines et des valeurs initiales  $T_x$  et  $T_y$ . Les noeuds  $x'_1, x'_{n_x+k_x}, y'_1$  et  $y'_{n_y+k_y}$  aux extrémités de  $T'_x$  et  $T'_y$ , avec multiplicité  $k_x$  et  $k_y$ , sont choisis de façon que  $x'_1 \leq \min(x_{\min}, x_1)$ ,

$x'_{n_x+k_x} \geq \max(x_{\max}, x_{n_x})$ ,  $y'_1 \leq \min(y_{\min}, y_1)$  et  $y'_{n_y+k_y} \geq \max(y_{\max}, y_{n_y})$ . Les vecteurs des coefficients splines complexes  $\mathbf{b}_{r,s}$  dépendent de  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $T'_x$ ,  $T'_y$  et des données tabulées  $\mathbf{a}_n(x_i, y_j)$  aux points initiaux.

Pour chaque point de calcul  $(x, y)$ , le vecteur  $\mathbf{a}_n(x, y)$  peut être remis sous la forme de  $n_{\kappa}$  matrices des coefficients aérodynamiques complexes  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x, y), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_{\kappa}}, x, y)$  de dimension  $(m_n \times m_n)$  en utilisant la transformant inverse de Eq. (44),  $\mathbf{a}_{n,j}$  étant le  $j$ -ème bloc de dimension  $(m_n \times 1)$  du vecteur  $\mathbf{a}_n(x, y)$  :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x, y) = [\mathbf{a}_{n,1}(x, y), \dots, \mathbf{a}_{n,m_n}(x, y)], \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_{\kappa}}, x, y) = [\mathbf{a}_{n,(n_{\kappa}-1)m_n+1}(x, y), \dots, \mathbf{a}_{n,n_{\kappa}m_n}(x, y)]. \quad (46)$$

#### V.4.2. Système réduit couplé avec lissage multi-paramètres par fractions rationnelles

Le système réduit couplé peut être résolu pour un point de calcul  $(x, y)$  quelconque en utilisant les matrices des coefficients aérodynamiques  $\tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_1, x, y), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(i\kappa_{n_{\kappa}}, x, y)$  obtenues par Eqs. (45) et (46) et en utilisant la méthode du double balayage ou la méthode de lissage par fractions rationnelles.

Concernant la deuxième méthode, cette approche point-par-point implique que le lissage par fractions rationnelles Eq. (36) doit être effectuée pour tous les points de calcul  $(x, y)$  dont le nombre peut être beaucoup plus important que celui des points initiaux. On propose ici une méthode utilisant à la fois le lissage par fonctions splines multi-variables et le lissage par fractions rationnelles dans laquelle ce dernier est effectué uniquement  $n_x \times n_y$  fois quelque soit le nombre de points de calcul. Cette méthode fournit en plus un système réduit couplé qui dépend explicitement des paramètres.

Pour cela, on note que les vecteurs des coefficients splines  $\mathbf{b}_{r,s}$  dans Eq. (45) sont analogues aux vecteurs  $\mathbf{a}_n(x_i, y_j)$  obtenus dans Eq. (44) à partir des matrices des coefficients aérodynamiques tabulées. En particulier, ces deux vecteurs coïncident si les fonctions splines d'ordre 2 sont utilisées ( $k_x = 2$  et  $k_y = 2$ ) et s'il n'y a pas d'extrapolation. On peut donc effectuer un lissage par fractions rationnelles sur les vecteurs  $\mathbf{b}_{r,s}$ , pour  $r = 1, \dots, n_x$  et  $s = 1, \dots, n_y$ . De manière similaire à Eq. (46), chaque vecteur  $\mathbf{b}_{r,s}$  est remis sous la forme de  $n_{\kappa}$  matrices des coefficients aérodynamiques complexes  $\mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_1), \dots, \mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_{n_{\kappa}})$  de dimension  $(m_n \times m_n)$  :

$$\mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_1) = [\mathbf{b}_{r,s,1}, \dots, \mathbf{b}_{r,s,m_n}] \quad \dots, \quad \mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_{n_{\kappa}}) = [\mathbf{b}_{r,s,(n_{\kappa}-1)m_n+1}, \dots, \mathbf{b}_{r,s,n_{\kappa}m_n}]. \quad (47)$$

A partir des matrices  $\mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_1), \dots, \mathbf{A}_{n,r,s}(i\kappa_{n_{\kappa}})$ , le lissage par fractions rationnelles Eq. (36) fournit des approximations des matrices  $\mathbf{A}_{n,r,s}(p)$ , pour  $r = 1, \dots, n_x$  et  $s = 1, \dots, n_y$  :

$$\mathbf{A}_{n,r,s}(p) \simeq \mathbf{A}_{n0,r,s} + \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{A}_{n1,r,s} + \frac{p^2 c^2}{V_{\infty}^2} \mathbf{A}_{n2,r,s} + \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{D}_{n,r,s} \left[ \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{I} - \mathbf{R}_{n,r,s} \right]^{-1} \mathbf{E}_{n,r,s} \quad (48)$$

où les matrices réelles  $\mathbf{A}_{n0,r,s}$ ,  $\mathbf{A}_{n1,r,s}$ ,  $\mathbf{A}_{n2,r,s}$ ,  $\mathbf{D}_{n,r,s}$ ,  $\mathbf{E}_{n,r,s}$  et  $\mathbf{R}_{n,r,s}$  sont similaires à celles de Eq. (36). On note que le nombre de pôles  $n_{p,r,s}$  peut être différent pour chaque couple  $(r, s)$ .

Eq. (45) peut alors être étendue aux matrices  $\mathbf{A}_{n,r,s}(p)$  pour obtenir une approximation par fonctions splines de la matrice des coefficients aérodynamiques dans le domaine fréquentiel pour tout valeur propre complexe  $p$  et tout point de calcul  $(x, y)$  :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(p, x, y) \simeq \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} B_{r,s}(x, y) \mathbf{A}_{n,r,s}(p) \quad \forall (x, y) \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]. \quad (49)$$

En reportant Eq. (48) dans Eq. (49), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(p, x, y) \simeq \mathbf{A}_{n0}(x, y) + \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{A}_{n1}(x, y) + \frac{p^2 c^2}{V_{\infty}^2} \mathbf{A}_{n2}(x, y) + \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} B_{r,s}(x, y) \left( \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{D}_{n,r,s} \left[ \frac{pc}{V_{\infty}} \mathbf{I} - \mathbf{R}_{n,r,s} \right]^{-1} \mathbf{E}_{n,r,s} \right), \quad (50)$$

$$\mathbf{A}_{n0}(x, y) = \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} B_{r,s}(x, y) \mathbf{A}_{n0,r,s}, \mathbf{A}_{n1}(x, y) = \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} B_{r,s}(x, y) \mathbf{A}_{n1,r,s}, \mathbf{A}_{n2}(x, y) = \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} B_{r,s}(x, y) \mathbf{A}_{n2,r,s},$$

En reportant Eq. (50) dans l'équation de flottement (27), on obtient un système aux valeurs propres non linéaire de dimension  $2m_n$  qui dépend explicitement des paramètres  $x$  et  $y$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{gn}^{*-1}(x, y) [\mathbf{K}_{gn}^*(x, y) + \mathbf{G}_n(p, x, y)] & -\mathbf{M}_{gn}^{*-1}(x, y) \mathbf{C}_{gn}^*(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_n \\ p \tilde{\mathbf{q}}_n \end{Bmatrix} \quad (51)$$

avec  $\mathbf{K}_{gn}^*(x, y) = \mathbf{K}_{gn}(x, y) + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \mathbf{A}_{n0}(x, y)$ ,  $\mathbf{C}_{gn}^*(x, y) = \mathbf{C}_{gn}(x, y) + \frac{1}{2} \rho_\infty c V_\infty \mathbf{A}_{n1}(x, y)$ ,  $\mathbf{M}_{gn}^*(x, y) = \mathbf{M}_{gn}(x, y) + \frac{1}{2} \rho_\infty c^2 \mathbf{A}_{n2}(x, y)$  et  $\mathbf{G}_n(p, x, y) = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty p c \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} \mathbf{B}_{r,s}(x, y) \mathbf{D}_{n,r,s} [(pc/V_\infty) \mathbf{I} - \mathbf{R}_{n,r,s}]^{-1} \mathbf{E}_{n,r,s}$ .

Le système aux valeurs propres Eq. (51) est résolu pour un point de calcul  $(x, y)$  quelconque de la même manière que pour Eq. (37). On obtient les fréquences et les amortissements aéroélastiques pour les différentes valeurs de la vitesse  $V_\infty$  du fluide, ce qui permet d'étudier la stabilité du système dans le domaine de fonctionnement, ceci sans avoir à effectuer des calculs aérodynamiques supplémentaires.

Pour obtenir l'approximation (48) de la matrice  $\mathbf{A}_{n,r,s}(p)$ ,  $n_{p,r,s}$  variables d'état auxiliaires  $\tilde{\mathbf{z}}_{n,r,s}$  ont été définies pour chaque couple  $(r, s) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$  par :

$$\tilde{\mathbf{z}}_{n,r,s} = \mathbf{B}_{r,s}(x, y) \frac{pc}{V_\infty} \left[ \frac{pc}{V_\infty} \mathbf{I} - \mathbf{R}_{n,r,s} \right]^{-1} \mathbf{E}_{n,r,s} \tilde{\mathbf{q}}_n. \quad (52)$$

Ces variables d'état auxiliaires vérifient dans le domaine fréquentiel :

$$p \tilde{\mathbf{z}}_{n,r,s} = (V_\infty/c) \mathbf{R}_{n,r,s} \tilde{\mathbf{z}}_{n,r,s} + p \mathbf{B}_{r,s}(x, y) \mathbf{E}_{n,r,s} \tilde{\mathbf{q}}_n, \quad (53)$$

et sont solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre dans le domaine temporel :

$$\dot{\mathbf{z}}_{n,r,s}(t) = (V_\infty/c) \mathbf{R}_{n,r,s} \mathbf{z}_{n,r,s}(t) + \mathbf{B}_{r,s}(x, y) \mathbf{E}_{n,r,s} \dot{\mathbf{q}}_n(t). \quad (54)$$

Les FAG s'écrivent alors dans les domaines fréquentiel et temporel :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{agn}(\Phi_n, p, x, y) \tilde{\mathbf{q}}_n = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \left( \left[ \mathbf{A}_{n0} + \frac{pc}{V_\infty} \mathbf{A}_{n1} + \frac{p^2 c^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{n2} \right] \tilde{\mathbf{q}}_n + \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} \mathbf{D}_{n,r,s} \tilde{\mathbf{z}}_{n,r,s} \right), \quad (55)$$

$$\mathbf{f}_{agn}(\Phi_n \mathbf{q}_n, \Phi_n \dot{\mathbf{q}}_n, x, y) = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \left( \mathbf{A}_{n0} \mathbf{q}_n(t) + \frac{c}{V_\infty} \mathbf{A}_{n1} \dot{\mathbf{q}}_n(t) + \frac{c^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{n2} \ddot{\mathbf{q}}_n(t) + \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} \mathbf{D}_{n,r,s} \mathbf{z}_{n,r,s}(t) \right). \quad (56)$$

En reportant Eq. (56) dans le système réduit couplé Eq. (16) et en combinant avec Eq. (54), on obtient un système d'équations différentielles linéaires du second ordre de dimension  $m_n + n_p$ , avec  $n_p = \sum_{r=1}^{n_x} \sum_{s=1}^{n_y} n_{p,r,s}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gn}^*(x, y) & \mathbf{D}'_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{z}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gn}^*(x, y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}'_n(x, y) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_n \\ \dot{\mathbf{z}}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{gn}^*(x, y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \ddot{\mathbf{z}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{gn} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

avec  $\mathbf{K}_{gn}^*(x, y)$ ,  $\mathbf{C}_{gn}^*(x, y)$  et  $\mathbf{M}_{gn}^*(x, y)$  définies comme dans Eq. (51), et

$$\mathbf{z}_n = {}^t[\mathbf{z}_{n,1,1}, \dots, \mathbf{z}_{n,1,n_y}, \mathbf{z}_{n,2,1}, \dots, \mathbf{z}_{n,2,n_y}, \dots, \mathbf{z}_{n,n_x,1}, \dots, \mathbf{z}_{n,n_x,n_y}],$$

$$\mathbf{D}'_n = (1/2) \rho_\infty V_\infty^2 [\mathbf{D}_{n,1,1}, \dots, \mathbf{D}_{n,1,n_y}, \mathbf{D}_{n,2,1}, \dots, \mathbf{D}_{n,2,n_y}, \dots, \mathbf{D}_{n,n_x,1}, \dots, \mathbf{D}_{n,n_x,n_y}],$$

$$\mathbf{R}'_n = (V_\infty/c) \text{diag}(\mathbf{R}_{n,1,1}, \dots, \mathbf{R}_{n,1,n_y}, \mathbf{R}_{n,2,1}, \dots, \mathbf{R}_{n,2,n_y}, \dots, \mathbf{R}_{n,n_x,1}, \dots, \mathbf{R}_{n,n_x,n_y}),$$

$$\mathbf{E}'_n(x, y) = {}^t[B_{1,1}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,1,1}, \dots, B_{1,n_y}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,1,n_y}, B_{2,1}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,2,1}, \dots,$$

$$B_{2,n_y}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,2,n_y}, \dots, B_{n_x,1}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,n_x,1}, \dots, B_{n_x,n_y}(x, y) {}^t\mathbf{E}_{n,n_x,n_y}].$$

Le système du second ordre Eq. (57) qui dépend explicitement des paramètres  $x$  et  $y$  est résolu en utilisant le schéma d'intégration temporelle de Newmark pour un point de calcul  $(x, y)$  quelconque.

A cause du dernier terme non linéaire dans le lissage par fractions rationnelles Eqs. (48) et (50), cette approche multi-paramètre n'est pas équivalente à l'approche point-par-point qui consiste à effectuer lissage par fractions rationnelles Eq. (36) pour chaque point de calcul.

## V.5. Résultats - Conclusions

Les méthodes de couplage indirect proposées ont été appliquées sur des exemples de compresseur (Tran et al., 2003; Tran, 2009c, cf. Annexe). Dans chaque exemple, l'équation de flottement est résolue par les méthodes du double balayage et de lissage par fractions rationnelles afin d'obtenir les fréquences et les amortissements aéroélastiques et de tracer le diagramme de flottement qui montre l'évolution de ces derniers en fonction de la vitesse ou du débit-masse du fluide. Les simulations temporelles du système couplé ont été également effectuées avec la méthode de lissage par fractions rationnelles, une analyse de Fourier des réponses obtenues permet ensuite de déduire les fréquences et les amortissements aéroélastiques. La méthode de lissage multi-paramètres est ensuite utilisée en faisant varier deux paramètres qui sont la vitesse de rotation et le déphasage inter-aube.

Les deux méthodes de résolution donnent des fréquences et des amortissements aéroélastiques similaires qui correspondent également ceux obtenus par les simulations temporelles et par la méthode de couplage direct. La méthode du double balayage est plus robuste mais elle est seulement applicable pour résoudre l'équation de flottement dans le domaine fréquentiel. La méthode de lissage par fractions rationnelles est applicable dans les deux domaines, mais son utilisation est plus délicate et requiert plus d'attention et de savoir-faire de l'utilisateur.

La méthode de lissage multi-paramètres permet de résoudre le système couplé dans les domaines fréquentiel et temporel aux points du diagramme de fonctionnement où les calculs aérodynamiques n'ont pas été effectués. Les résultats obtenus par la résolution du système couplé aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel sont en bonne concordance avec les résultats de référence obtenus aux points initiaux et aux points de vérification où les calculs aérodynamiques ont été effectués pour obtenir les FAG. L'approche point-par-point qui consiste à utiliser les FAG fournies par le lissage par fonctions splines et à effectuer lissage par fractions rationnelles pour chaque point de calcul donne aussi de très bons résultats. Avec la capacité d'effectuer l'extrapolation des FAG, les deux approches permettent de localiser les zones instables qui se trouvent à l'extérieur des zones stables dans le domaine de fonctionnement et sur lesquelles les calculs aérodynamiques ont échoué.



# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les travaux de recherche réalisés ont apporté une contribution significative et originale aux méthodes de réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques. Concernant les méthodes de synthèse modale, on a proposé une formulation unifiée qui englobe les méthodes de synthèse modale classiques et celles utilisant les modes d'interface et les modes d'interface partiels, ainsi que les trois types de conditions aux limites d'interface. La combinaison des différentes méthodes de synthèse modale avec les propriétés de symétrie cyclique est un deuxième point marquant de ces travaux. Les méthodes de réduction de modèle ont été étendues aux structures multi-étages avec symétrie cyclique et aux structures non linéaires. Le lissage multi-paramètres multi-variables et la réduction de modèle du domaine fluide permettent d'économiser les temps de calculs aérodynamiques dans les problèmes couplés aéroélastiques.

Les travaux suivants sont en cours réalisation ou seront proposés dans le cadre de projets de recherche ou de futures thèses à l'ONERA. En particulier, une proposition de thèse sur la construction de modèles réduits de structures non linéaires sera soumise pour prendre la suite de la thèse de Lülfi (2013).

### Modèles réduits des structures non linéaires

En complément des travaux de thèse de Lülfi (2013) qui ont été réalisés avec MATLAB, la formulation polynomiale des forces non linéaires a été utilisée pour construire des modèles réduits de structures non linéaires complexes modélisées avec un code éléments-finis commercial, ici NASTRAN, et qui soient autonomes vis à vis de la formulation et du code éléments-finis une fois construits, avec la prise en compte des effets de rotation [67; 68; 69].

La précision et la performance de la formulation polynomiale des forces non linéaires peuvent être améliorées par des techniques comme l'extraction directement du code éléments finis des matrices tangentes projetées (Perez et al., 2014), l'utilisation de plusieurs bases de projection prédéterminées (Amsallem et al., 2012) ou l'ajout dans la base de projection des déformées statiques semblables à celles utilisées dans les méthodes de synthèse modale et qui sont obtenues par des calculs statiques non linéaires. La méthode de réduction par projection LSPG (Least Square Petrov-Garlerkin) couplée avec l'approximation par échantillonnage des forces non linéaires (Carlberg et al., 2011, 2013) permettent également d'augmenter la performance des modèles réduits.

La prise en compte des non linéarités de contact et de frottement est un sujet important déjà traité dans plusieurs travaux, comme par exemple (Petrov & Ewins, 2003; Laxalde, 2007; Petrov, 2011; Schwingshackl et al., 2012). Dans ces travaux, des modèles de frottement sont proposés et la solution des systèmes non linéaires est obtenue dans le domaine fréquentiel par la méthode de la balance harmonique.

La prise en compte du couplage aéroélastique est indispensable pour l'étude des turbomachines. Il s'agit d'utiliser les modèles réduits non linéaires autonomes de la structure pour le calcul des forces aéroélastiques et la résolution du système couplé fluide-structure.

D'autres méthodes de réduction de modèles comme la PGD (Proper Generalized Decomposition) (Chinesta et al., 2013) ou le calcul et l'utilisation des modes non linéaires (NNM, Nonlinear Normal Modes) (Pesheck et al., 2001; Kerschen et al., 2009; Peeters et al., 2009; Moussi, 2013) ainsi que les méthodes d'hyper-réduction (Ryckelynck, 2005; Ryckelynck et al., 2012) sont à considérer.

### Modèles réduits des structures multi-étages par symétrie cyclique et synthèse modale

Ces travaux permettront la prise en compte du désaccordage (Laxalde & Pierre, 2011; D'Souza et al., 2013), des non linéarités (D'Souza & Epureanu, 2012), des effets de rotation (Sternchüss, 2009; Balmes & Bucher, 2010), du couplage aéroélastique (D'Souza & Epureanu, 2012; D'Souza et al., 2013) ainsi que des maillages incompatibles (non coïncidents) des sous-structures (Rixen et al., 1998) dans la construction des modèles réduits des structures multi-étages par symétrie cyclique et synthèse modale.

## BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- ADELMAN, H. M. & HAFTKA, R. T. (1986), 'Sensitivity analysis of discrete structural systems', *AIAA Journal* **24**(5), 823–832.
- ADMIRE, J. R., TINKER, M. L. & IVEY, E. W. (1994), 'Residual flexibility test method for verification of constrained structural models', *AIAA Journal* **32**(1), 170–175.
- AFOLABI, D. (1993), 'The cusp catastrophe and the stability problem of helicopter ground resonance', *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A* **441**, 399–406.
- AFOLABI, D. & MEHMED, O. (1994), 'On curve veering and flutter of rotating blades', *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **116**, 702–708.
- AFOLABI, D. & PIDAPARTI, R. (1994), 'The frequency response of vibrating systems with non-conservative coupling', *AIAA Paper 94-2836*.
- AKGÜN, M. A. (1994), 'New family of modal methods for calculating eigenvector derivatives', *AIAA Journal* **32**(2), 379–386.
- AMSALLEM, D., CORTIAL, J., CARLBERG, K. & FARHAT, C. (2009), 'A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **80**, 1241–1258.
- AMSALLEM, D. & FARHAT, C. (2008), 'Interpolation method for the adaptation of reduced-order models to parameter changes and its application to aeroelasticity', *AIAA Journal* **46**, 1803–1813.
- AMSALLEM, D., ZAHR, M. J. & FARHAT, C. (2012), 'Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **92**(10), 891–916.
- AOYAMA, Y. & YAGAWA, G. (2001), 'Component mode synthesis for large-scale structural eigenanalysis', *Computers & Structures* **79**, 605–615.
- ATTAR, P. J. & DOWELL, E. H. (2005), 'A reduced order system ID approach to the modelling of nonlinear structural behavior in aeroelasticity', *Journal of Fluids and Structures* **21**(5-7), 532–542.
- BALMES, E. & BUCHER, I. (2010), Accounting for rotation in a multi-stage cyclo-symmetric model - a case study, in 'International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2010', Leuven.
- BAMFORD, R. M. (1967), A model combination program for dynamic analysis of structures, Tech. Memo. 33-290, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA.
- BATAILLY, A., LEGRAND, M., CARTRAUD, P., PIERRE, C. & LOMBARD, J.-P. (2007), Study of component mode synthesis methods in a rotor-stator interaction case, in 'Proceedings of the ASME IDETC/CIE 2007 Conference', Las Vegas, CA, USA.
- BATHE, K.-J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- BATHE, K. J. & WILSON, E. L. (1976), *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall.
- BAUCHAU, O. A. (1986), 'A solution of the eigenproblem for undamped gyroscopic systems with the Lanczos algorithm', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **23**, 1705–1713.
- BEHNKE, H. (1996), 'A numerically rigorous proof of curve veering in an eigenvalue problem for differential equations', *Journal for Analysis and its Applications* **15**(1), 181–200.
- BENFIELD, W. A. & HRUDA, R. F. (1971), 'Vibration analysis of structures by component mode substitution', *AIAA Journal* **9**(7), 1255–1261.
- BENNIGHOF, J. K. & LEHOUCQ, R. B. (2004), 'An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics', *SIAM Journal on Scientific Computing* **25**(6), 2084–2106.
- BERLIOZ, A. & FERRARIS, G. (1986), 'Utilisation de la sous-structuration en dynamique des rotors', *Matériaux Mécanique Electricité* (416), 30–33.
- BERNARD, M. L. & BRONOWICKI, A. J. (1994), 'Modal expansion method for eigensensitivity with repeated roots', *AIAA Journal* **32**(7), 1500–1506.
- BERTHILLIER, M., DHAINAUT, M., BURGAUD, F. & GARNIER, V. (1997), 'A numerical method for the prediction of bladed disk forced response', *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **119**, 404–410.
- BERTHILLIER, M., DUPONT, C., CHANEZ, P. & SAURAT, F. (1998), 'Réponse forcée aéroélastique des aubes de turbomachines', *Bulletin SFM, Revue Française de Mécanique* (4), 265–275.
- BESSET, S. & JÉZÉQUEL, L. (2008), 'Dynamic substructuring based on a double modal analysis', *Journal of Vibration and Acoustics* **130**(1), 011008.

- BLADH, R., CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2001a), 'Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks. Part I: Theoretical models', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **123**(1), 89–99.
- BLADH, R., CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2001b), 'Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks. Part II: Application', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **123**(1), 100–108.
- BLADH, R., CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2003), 'Effects of multistage coupling and disk flexibility on mistuned bladed disk dynamics', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **125**(1), 121–130.
- BLADH, R., PIERRE, C., CASTANIER, M. P. & KRUSE, M. J. (2002), 'Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **124**(2), 311–324.
- BODLEY, C. S., DEVERS, A. D., PARK, A. C. & FRISCH, H. P. (1978), A digital computer program for the dynamic interaction simulation of controls and structure (DISCOS) – Volume I, Technical Paper 1219, NASA.
- BORRI, M. & MANTEGAZZA, M. (1977), 'Efficient solution of quadratic eigenproblems arising in dynamic analysis of structures', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **12**, 19–31.
- BOUHADDI, N. & LOMBARD, J. P. (2000), 'Improved free-interface substructures representation method', *Computers & Structures* **77**, 269–283.
- BOURQUIN, F. (1992), 'Component mode synthesis and eigenvalues of second order operators: Discretization and algorithm', *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **26**(3), 385–423.
- BOURQUIN, F. & D'HENNEZEL, F. (1992), 'Intrinsic component mode synthesis and plate vibrations', *Computers & Structures* **44**(1/2), 315–324.
- BRILLOUIN, L. (1946), *Wave Propagation in Periodic Structures*, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, London.
- BUCHER, C. U. A. (1986), 'A modal synthesis method employing physical coordinates, free component modes, and residual flexibilities', *Computers & Structures* **22**(4), 559–564.
- CAPIEZ-LERNOUT, E. (2004), *Dynamique des Structures Tournantes à Symétrie Cyclique en Présence d'Incertitudes Aléatoires. Application au Désaccordage des Roues Aubagées*, PhD thesis, Université de Marne-La-Vallée, France.
- CARLBERG, K., BOU-MOSLEH, C. & FARHAT, C. (2011), 'Efficient non-linear model reduction via a Least-Squares Petrov-Galerkin projection and compressive tensor approximations', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **86**(2), 155–181.
- CARLBERG, K., FARHAT, C., CORTIAL, J. & AMSALLEM, D. (2013), 'The GNAT method for nonlinear model reduction: effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows', *Journal of Computational Physics* **242**, 623–647.
- CARNOY, E. & GÉRADIN, M. (1985), *On the practical use of the Lanczos algorithm in finite element applications to vibration and stability problems*, Kagstrom, B. and Rule A. ed., Matrix Pencil, Lecture Note in Mathematics, Springer-Verlag.
- CARSTENS, V., KEMME, R. & SCHMITT, S. (2003), 'Coupled simulation of flow-structure interaction in turbomachinery', *Aerospace Science and Technology* **7**, 298–306.
- CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2006), 'Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: Status and emerging directions', *Journal of Propulsion and Power* **22**(2), 384–396.
- CHANG, S. C. (1986), 'Lanczos algorithm with selective reorthogonalization for eigenvalue extraction in structural dynamic and stability analysis', *Computers & Structures* **23**(2), 121–128.
- CHEN, H. C. & TAYLOR, R. L. (1989), 'Using Lanczos vectors and ritz vectors for computing dynamic responses', *Engineering Computations* **6**, 151–157.
- CHINESTA, F., LEYGUE, A., BORDEU, F., AGUADO, J., CUETO, E., GONZALEZ, D., ALFARO, I., AMMAR, A. & HUERTA, A. (2013), 'PGD-based computational vademecum for efficient design, optimization and control', *Arch Comput Methods Eng* **20**, 31 – 59.
- CHOI, B.-K., LENTZ, J., MIGNOLET, M. P. & RIVAS-GUERRA, A. J. (2003), 'Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning: Formulation and assessment', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **125**, 131–140.
- CORUS, M., BALMÈS, E. & NICOLAS, O. (2006), 'Using model reduction and data expansion techniques to improve SDM', *Mechanical Systems and Signal Processing* **20**, 1067–1089.
- COURANT, R. & HILBERT, D. (1953), *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers Inc. New York.
- CRAIG, JR., R. R. (1985), A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis methods, in S. N. L. David R. Martinez & A. Keith Miller, ed., 'Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems', AMD Vol. 67, ASME, pp. 1–30.

- CRAIG, JR., R. R. & BAMPTON, M. C. C. (1968), 'Coupling of substructures for dynamic analyses', *AIAA Journal* **6**(7), 1313–1319.
- CRAIG, JR., R. R. & CHANG, C.-J. (1977a), On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis, in 'Proceedings of the AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Vol. B', AIAA Paper 77-405, pp. 89–99.
- CRAIG, JR., R. R. & CHANG, C.-J. (1977b), Substructure coupling for dynamic analysis and testing, NASA CR-2781.
- CRANDALL, S. H. & YEH, N. A. (1986), Component mode synthesis of multi-rotor systems, in I. Elishakoff & H. Irretier, eds, 'Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shell and their Applications', Euromech Colloquium 219th, Lectures Notes in Engineering Vol. 28, Springer-Verlag, pp. 44–55.
- CRANDALL, S. H. & YEH, N. A. (1989), 'Automatic generation of component modes for rotordynamic substructures', *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* **111**, 6–10.
- CRAWLEY, E. F. (1988), 'Aeroelastic formulation for tuned and mistuned rotors', *AGARD-AG-298* **2**, 19.1 – 19.24.
- CURNIER, A. (1983), 'On three modal synthesis variants', *Journal of Sound and Vibration* **90**(4), 527–540.
- DAILEY, R. L. (1989), 'Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues', *AIAA Journal* **27**(4), 486–491.
- DAT, R. & MEURZEC, J.-L. (1969), 'Sur les calculs de flottement par la méthode dite du "balayage en fréquence réduite"', *La Recherche Aéronautique* (133), 41–43.
- DAVIDSSON, P. & SANDBERG, G. (2006), 'A reduction method for structure-acoustic and poroelastic-acoustic problems using interface-dependent Lanczos vectors', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**, 1933–1945.
- DE BOOR, C. (1992), *Spline Toolbox For Use with Matlab, User's Guide*, The Math Works Inc.
- DE BOOR, C. (2001), *A Practical Guide to Spline – Revised Edition*, Vol. 27 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer.
- DE KLERK, D., RIXEN, D. J. & VOORMEEREN, S. N. (2008), 'General framework for dynamic substructuring: History, review, and classification of techniques', *AIAA Journal* **46**(5), 1169–1181.
- D'SOUZA, K. X. & EPUREANU, B. I. (2012), 'A statistical characterization of the effects of mistuning in multistage bladed disks', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **134**(1), 012503.1–8.
- D'SOUZA, K. X., JUNG, C. & EPUREANU, B. I. (2013), 'Analyzing mistuned multi-stage turbomachinery rotors with aerodynamic effects', *Journal of Fluid and Structures* **42**, 388–400.
- D'SOUZA, K. X., SAITO, A. & EPUREANU, B. I. (2012), 'Reduced-order modeling for nonlinear analysis of cracked mistuned multistage bladed-disk systems', *AIAA Journal* **50**(2), 304–312.
- DUGEAI, A. (2005), Aeroelastic developments in the elsA code and unsteady RANS applications, in 'Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics', Munich, Germany.
- DUGEAI, A. (2008), Nonlinear numerical aeroelasticity with the ONERA elsA solver, in 'NATO Specialists Meeting RTO-AVT-154 Advanced Methods in Aeroelasticity', Loen, Norway, pp. 12.1–12.17.
- DUGEAI, A., MADEC, A. & SENS, A. S. (2000), Numerical unsteady aerodynamics for turbomachinery aeroelasticity, in P. Ferrand & S. Aubert, eds, 'Proceedings of the 9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines ISUAAAT', Lyon, France, PUG, pp. 830–840.
- ELHAMI, A., LALLEMENT, G., MINOTTI, P. & COGNAN, S. (1993), 'Methods that combine finite group theory with component mode synthesis in the analysis of repetitive structures', *Computers & Structures* **48**(6), 975–982.
- ENGELS, R. C. (1992), 'Convergence improvement for component mode synthesis', *AIAA Journal* **30**(2), 490–495.
- EPUREANU, B. I. (2003), 'A parametric analysis of reduced order models of viscous flows in turbomachinery', *Journal of Fluids and Structures* **17**(7), 971–982.
- EPUREANU, B. I., DOWELL, E. H. & HALL, K. C. (2000), 'Reduced-order models of unsteady transonic viscous flows in turbomachinery', *Journal of Fluids and Structures* **14**(8), 1215–1234.
- EPUREANU, B. I., HALL, K. C. & DOWELL, E. H. (2001), 'Reduced-order models of unsteady viscous flows in turbomachinery using viscous-inviscid coupling', *Journal of Fluids and Structures* **15**(2), 255–273.
- FARHAT, C. & GÉRADIN, M. (1994), 'On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures', *Computers & Structures* **51**(5), 459–473.
- FARVACQUE, M., GANTENBEIN, F., GIBERT, R. J. & GUILBAUD, D. (1984), Formalisme du programme d'analyse dynamique par sous-structuration OSCAR développé dans le cadre du système CASTEM 2000, Rapport technique, C.E.A.
- FLASNER, H. (1986), 'An orthogonal decomposition approach to modal synthesis', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **23**, 471–493.
- FOX, R. L. & KAPOOR, M. P. (1968), 'Rates of change of eigenvalues and eigenvectors', *AIAA Journal* **6**(12), 2426–2429.

- GANINE, V., LEGRAND, M., PIERRE, C. & MICHALSKA, H. (2008), A reduction technique for mistuned bladed disks with superposition of large geometric mistuning and small model uncertainties, in 'Proceedings of the 12-th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery', ISROMAC 2008-20158, Honolulu, Hawaii, USA.
- GARG, S. (1973), 'Derivatives of eigensolutions for a general matrix', *AIAA Journal* **11**(8), 1191–1194.
- GÉRADIN, M. (1979), *Application of the biorthogonal Lanczos algorithm*, Energy Methods in Finite Element Analysis, Glowinski, R., Rodin, E. Y. and Zienkiewicz, O. C. ed, Wiley, pp. 335–348.
- GÉRADIN, M. & KILL, K. (1986), A three dimensional approach to dynamic analysis of rotating shaft disc flexible systems, in 'Proceedings of the 2nd International Conference on Rotordynamics IFToMM', Tokyo, pp. 87–93.
- GÉRADIN, M. & RIXEN, D. (1997), *Mechanical Vibrations: Theory and Applications to Structural Dynamics*, second edn, John Wiley & Sons.
- GLADWELL, G. M. L. (1964), 'Branch mode analysis of vibrating systems', *Journal of Sound and Vibration* **1**, 41–59.
- GNESIN, V. I., KOLODYAZHNAYA, L. V. & RZADKOWSKI, R. (2004), 'A numerical modelling of stator-rotor interaction in a turbine stage with oscillating blades', *Journal of Fluids and Structures* **19**(2), 1141–1153.
- GOLDMAN, R. L. (1969), 'Vibration analysis by dynamic partitioning', *AIAA Journal* **7**(6), 1152–1154.
- GOLUB, G. H. & UNDERGOOD, R. (1977), *The block Lanczos method for computing eigenvalues*, Mathematical Software III, Rice, J. ed, Academic Press, pp. 361–377.
- GRISVAL, J.-P. & LIAUZUN, C. (1999), 'Application of the finite element method to aeroelasticity', *Revue Européenne des Éléments Finis* **8**(5-6), 553–579.
- GRISVAL, J. P. & LIAUZUN, C. (2000), Unsteady viscous flow in turbomachinery cascade: A finite element approach, in 'Proceedings of the 8th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-8', Vol. 1, Hawaii, pp. 407–412.
- GUYAN, R. J. (1965), 'Reduction of stiffness and mass matrices', *AIAA Journal* **3**(2), 960–961.
- HAPPAWANA, G. S., BAJAJ, A. K. & NWOKAH, O. D. I. (1993), 'A singular perturbation analysis of eigenvalue veering and modal sensitivity in perturbed linear periodic systems', *Journal of Sound and Vibration* **160**, 225–242.
- HASSIS, H. (2000), 'Proposition of a new approach for the substructure method', *Journal of Sound and Vibration* **234**(4), 659–668.
- HENRY, R. (1980), 'Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires', *Journal de Mécanique Appliquée* **4**(1), 61–82.
- HERTING, D. N. (1985), 'A general purpose, multi-stage, component mode synthesis method', *Finite Elements in Analysis and Design* **1**(2), 153–164.
- HE, Z., EPUREANU, B. I. & PIERRE, C. (2007), 'Parametric study of the aeroelastic response of mistuned bladed disks', *Computers & Structures* **85**, 852–865.
- HE, Z., EPUREANU, B. I. & PIERRE, C. (2008), 'Convergence predictions for aeroelastic calculations of tuned and mistuned bladed disks', *Journal of Fluids and Structures* **24**, 732–749.
- HINTZ, R. M. (1975), 'Analytical methods in component modal synthesis', *AIAA Journal* **13**(8), 1007–1016.
- HOOKE, W. W. & MARGULIES, G. (1965), 'The dynamical attitude equations for an  $n$ -body satellite', *Journal of the Aeronautical Sciences* **XII**(4), 123–128.
- HOU, S. (1969), 'Review of modal synthesis techniques and a new approach', *Shock and Vibration Bulletin* (40, Part 4), 25–39.
- HUMAR, J. L. & SOUCY, Y. (1998), 'Hybrid component mode synthesis based on test derived data', *Computers & Structures* **67**, 503–515.
- HURTY, W. C. (1960), 'Vibrations of structural systems by component mode synthesis', *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* **86**(EM 4), 51–69.
- HURTY, W. C. (1965), 'Dynamic analysis of structural systems using component modes', *AIAA Journal* **3**(4), 678–685.
- IMBERT, J. F. (1984), *Analyse des Structures par Éléments Finis*, Deuxième édition, Cepaduès Editions.
- JACQUET-RICHARDET, G. & DAL-FERRO, C. (1995), 'Analyse du comportement dynamique des roues de turbomachines immergées', *Revue Européenne des Éléments Finis* **4**(4), 441–465.
- JACQUET-RICHARDET, G., FERRARIS, G. & RIEUTORD, P. (1996), 'Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies: a global cyclic symmetry approach', *Journal of Sound and Vibration* **191**(5), 901–915.
- JACQUET-RICHARDET, G. & HENRY, R. (1994), 'A modal aeroelastic finite element analysis method for advanced turbomachinery stages', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**, 4205–4217.

- JACQUET-RICHARDET, G. & RIEUTORD, P. (1998), 'A three-dimensional fluid-structure coupled analysis of rotating flexible assemblies of turbomachines', *Journal of Sound and Vibration* **209**(1), 61–76.
- JEI, Y.-G. & LEE, C.-W. (1992), 'Does curve veering occur in the eigenvalue problem of rotors', *ASME Journal of Vibration and Acoustics* **114**, 32–36.
- JÉZÉQUEL, L. (1985), 'A hybrid method of modal synthesis using vibrations tests', *Journal of Sound and Vibration* **100**(2), 191–210.
- JÉZÉQUEL, L. & TCHERE, S. T. (1991), 'A procedure for improving component mode representation in structural dynamics analysis', *Journal of Sound and Vibration* **144**(3).
- JUANG, J. N., GHAEMMAGHAMI, P. & LIM, K. B. (1989), 'Eigenvalue and eigenvector derivatives of a non defective matrix', *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **12**(4), 480–486.
- KANE, T. R. (1961), 'Dynamics of nonholonomic systems', *ASME Journal of Applied Mechanics* **28**(7), 574–578.
- KARPEL, M. (1982), 'Design for active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling', *AIAA Journal of Aircraft* **19**, 221–227.
- KATO, T. (1966), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag.
- KERSCHEN, G., PEETERS, M., GOLINVAL, J.-C. & VAKAKIS, A. F. (2009), 'Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist', *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**, 170–194.
- KRUSE, M. J. & PIERRE, C. (1997), An experimental investigation of vibration localization in bladed disks. Part I: Free response, in 'Proceedings of the ASME Gas Turbine Conference, Orlando, Florida', ASME Paper 97-GT-501.
- KUBOMURA, K. (1982), 'A theory of substructure modal synthesis', *Journal of Applied Mechanics* **49**, 903–909.
- KUHAR, E. J. & STAHL, C. V. (1974), 'Dynamic transformation method for modal synthesis', *AIAA Journal* **12**(5), 672–678.
- LALANNE, B. & TOURATIER, M. (1998), Linearized approach of fluid-structure vibrations in cyclic symmetric domains, in 'Proceedings of the 7th International Symposium on Rotating Machinery', Hawaii.
- LALANNE, B., TOURATIER, M. & DESMAISON, T. (1998), 'Formulation linéarisée des problèmes couplés de vibrations dans les turbomachines', *Bulletin SFM, Revue Française de Mécanique* (2), 81–88.
- LALANNE, M. & FERRARIS, G. (1998), *Rotordynamics Prediction in Engineering, 2nd Edition*, Wiley.
- LANCZOS, C. (1950), 'An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators', *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **45**, 255–282.
- LAXALDE, D. (2007), Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages, PhD thesis, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Lyon, France.
- LAXALDE, D., LOMBARD, J.-P. & THOUVEREZ, F. (2007), 'Dynamics of multistage bladed disks systems', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **129**(4), 1058–1064.
- LAXALDE, D. & PIERRE, C. (2011), 'Modelling and analysis of multi-stage systems of mistuned bladed disks', *Computers & Structures* **89**, 316–324.
- LAXALDE, D., THOUVEREZ, F. & LOMBARD, J.-P. (2007), 'Dynamical analysis of multistage cyclic structures', *Mechanics Research Communications* **34**, 379–384.
- LEISSA, A. W. (1974), 'On a curve veering aberration', *Journal of Applied Mathematics and Physics* **25**, 99–111.
- LEUNG, A. Y. T. (1991), 'Dynamic substructure response', *Journal of Sound and Vibration* **149**(1), 83–90.
- LI, A. & DOWELL, E. H. (2006), 'Modal reduction of mathematical models of biological molecules', *Journal of Computational Physics* **211**, 262–288.
- LIM, K. B., JUANG, J. N. & GHAEMMAGHAMI, P. (1989), 'Eigenvector derivatives of repeated eigenvalues using singular value decomposition', *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **12**(2), 282–283.
- LIM, S.-H., BLADH, R., CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2007), 'Compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration', *AIAA Journal* **45**(9), 2285–2298.
- LIU, W. & EWINS, D. J. (2002), 'Substructure synthesis via elastic media', *Journal of Sound and Vibration* **257**(2), 361–379.
- LIU, X. L. (2001), 'Accurate modal perturbation in non-self-adjoint eigenvalue problem', *Communications in Numerical Methods in Engineering* **17**, 715–725.
- LIU, Z.-S., CHEN, S.-H., YU, M. & ZHAO, Y.-Q. (1994), 'Contribution of the truncated modes to eigenvector derivatives', *AIAA Journal* **32**(7), 1551–1553.
- LIU, Z.-S., CHEN, S.-H. & ZHAO, Y.-Q. (1994), 'An accurate method for computing eigenvector derivatives for free-free structures', *Computers & Structures* **52**(6), 1135–1143.

- LÜLF, F. A. (2013), An integrated method for the transient solution of reduced order models of geometrically nonlinear structural dynamic systems, PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris.
- LÜLF, F. A., TRAN, D.-M., MATTHIES, H. G. & OHAYON, R. (2015), 'An integrated method for the transient solution of reduced order models of geometrically nonlinear structures', *Computational Mechanics* **55**, 327–344.
- LÜLF, F. A., TRAN, D.-M. & OHAYON., R. (2012), Comparison of some reduction bases approaches for non-linear structural dynamic systems under different excitations, in '6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering', ECCOMAS.
- LÜLF, F. A., TRAN, D.-M. & OHAYON, R. (2013a), Approaches for the construction of an autonomous reduced model of a non-linear structure for transient dynamic solution, in 'CSMA 2013 11e Colloque National en Calcul des Structures'.
- LÜLF, F. A., TRAN, D.-M. & OHAYON, R. (2013b), 'Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems: A comparative study', *Journal of Sound and Vibration* **332**, 3897–3921.
- MACNEAL, R. H. (1971), 'A hybrid method of component mode synthesis', *Computers & Structures* **1**(4), 581–601.
- MARSHALL, J. G. & IMREGUN, M. (1996), 'Review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications', *Journal of Fluids and Structures* **10**(3), 237–267.
- MARTINEZ, D. R., MILLER, A. K. & CARNE, T. G. (1985), Combined experimental/analytical modeling of shell/payload structures, in S. N. L. David R. Martinez & A. Keith Miller, ed., 'Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems', AMD Vol. 67, ASME, pp. 167–194.
- MASSON, G., AIT BRIK, B., COGAN, S. & BOUHADDI, N. (2006), 'Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization', *Journal of Sound and Vibration* **296**, 845–860.
- MATTHIES, H. G. (1985), 'A subspace Lanczos method for the generalized symmetric eigenproblem', *Computers & Structures* **21**(1-2), 319–325.
- MBAYE, M., SOIZE, C. & OUSTY, J.-P. (2010), 'A reduced-order model of detuned cyclic dynamical systems with geometric modifications using a basis of cyclic modes', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **132**, 112502.1–112502.9.
- MEAD, D. J. (1975), 'Wave propagation and natural modes in periodic systems : I – Mono-coupled systems. II – Multi-coupled systems with and without damping', *Journal of Sound and Vibration* **40**(1), 1–39.
- MEIROVITCH, L. (1980), *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands.
- MÉZIÈRE, L. (1994), 'Vibrations de structures à symétrie cyclique : Application au cas des turbomachines', *AGARD-CP-537* **1**, 37.1–37.9.
- MIGNOLET, M. P. & SOIZE, C. (2008), Nonparametric stochastic modeling of structures with uncertain boundary conditions and uncertain coupling between substructures, in 'Proceedings of the 49th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Material Conference', AIAA paper 2008-2291, Schaumburg (Chicago), IL, USA.
- MILLER, A. G. (1981), 'Application of group representation theory to symmetric structures', *Applied Mathematical Modelling* **5**, 290–294.
- MILLS-CURRAN, W. C. (1988), 'Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues', *AIAA Journal* **26**(7), 867–871.
- MILLS-CURRAN, W. C. (1990), 'Comment on "Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues"', *AIAA Journal* **28**(10), 1846.
- MOFFATT, S. & HE, L. (2005), 'On decoupled and fully-coupled methods for blade forced response prediction', *Journal of Fluids and Structures* **20**(2), 217–234.
- MORAND, H. (1976), 'Analyse dynamique de systèmes conservatifs évolutifs. Discussion des "croisements de modes"', *Association Technique Maritime et Aéronautique (ATMA)*, Paris .
- MORAND, H. & OHAYON, R. (1995), *Fluid-Structure Interactions*, Wiley.
- MOUSSI, E. H. (2013), Analyse de structures vibrantes dotées de non-linéarités localisées à jeu à l'aide des modes non-linéaires, PhD thesis, Université d'Aix-Marseille.
- MURAVYOV, A. & RIZZI, S. A. (2003), 'Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures', *Computers & Structures* **81**(15), 1513–1523.
- MURTHY, D. V. & HAFTKA, R. T. (1988), 'Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of a general complex matrix', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **26**(2), 293–311.
- NATSIAVAS, S. (1993), 'Mode localization and frequency veering in a non-conservative mechanical system with dissimilar components', *Journal of Sound and Vibration* **165**(1), 137–147.
- NELSON, R. B. (1976), 'Simplified calculation of eigenvector derivatives', *AIAA Journal* **14**(9), 1201–1205.

- NEWMAN, M. & PIPANO, P. (1973), Fast modal extract in NASTRAN via the FEER computer program, Technical Report TM-X-2893, NASA.
- NEWMARK, N. M. (1959), 'A method of computation for structural dynamics', *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division* **8**, 67–94.
- NOUR-OMID, B. (1984), 'Dynamic analysis of structures using Lanczos co-ordinates', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **12**, 565–577.
- NOUR-OMID, B. (1985), 'Bloc Lanczos method for dynamic analysis of structures', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **13**, 271–275.
- NOUR-OMID, B., PARLETT, B. N. & TAYLOR, R. L. (1983), 'Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 859–871.
- OHAYON, R. (2004), 'Reduced models for fluid-structure interaction problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **60**, 139–152.
- OHAYON, R., SAMPAIO, R. & SOIZE, C. (1997), 'Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition', *Journal of Applied Mechanics* **64**, 292–298.
- OJALVO, I. U. (1988), 'Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies', *AIAA Journal* **26**(3), 361–366.
- ORRIS, R. M. & PETYT, M. (1974), 'A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures', *Journal of Sound and Vibration* **33**(2), 223–236.
- PAIGE, C. C. (1971), The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrix, PhD thesis, London University.
- PAIGE, C. C. (1972), 'Computational variants of the Lanczos method for the eigenproblem', *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* **10**, 373–381.
- PAIGE, C. C. (1976), 'Error analysis of the Lanczos algorithm for tridiagonalizing a symmetric matrix', *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* **18**, 341–349.
- PEETERS, M., VIGUIÉ, R., SÉRANDOUR, G., KERSCHEN, G. & GOLINVAL, J.-C. (2009), 'Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques', *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**, 195–216.
- PEREZ, R., WANG, X. Q. & MIGNOLET, M. P. (2014), 'Nonintrusive structural dynamic reduced order modeling for large deformations: Enhancements for complex structures', *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **9**(3), 031008/1–031008/12.
- PERKINS, N. C. & MOTE, JR., C. D. (1986), 'Comments on curve veering in eigenvalue problems', *Journal of Sound and Vibration* **106**(3), 451–463.
- PESHECK, E., PIERRE, C. & SHAWS, W. (2001), 'Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes', *Mathematical and Computer Modelling* **33**(10–11), 1085–1097.
- PETROV, E. P. (2011), 'A high-accuracy model reduction for analysis of nonlinear vibrations in structures with contact interfaces', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **133**(10), 102503/1–102503/10.
- PETROV, E. P. & EWINS, D. J. (2003), 'Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks', *Journal of Turbomachinery* **125**(4), 364–371.
- PIERRE, C. (1988), 'Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures', *Journal of Sound and Vibration* **126**, 485–502.
- PIERRE, C. & MURTHY, D. V. (1992), 'Aeroelastic modal characteristics of mistuned blade assemblies: Mode localization and loss of eigenstructure', *AIAA Journal* **30**(10), 2483–2496.
- PLACZEK, A. (2009), Construction de modèles d'ordre réduit non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l'aéroélasticité, PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France.
- PLACZEK, A., TRAN, D.-M. & OHAYON, R. (2008), 'Hybrid proper orthogonal decomposition formulation for linear structural dynamics', *Journal of Sound and Vibration* **318**, 943–964.
- PLACZEK, A., TRAN, D.-M. & OHAYON, R. (2011), 'A nonlinear POD-Galerkin reduced-order model for compressible flows taking into account rigid body motions', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **200**(49–52), 3497–3514.
- PLAUT, R. H. & HUSEYIN, K. (1973), 'Derivatives of eigenvalues and eigenvectors in non-self-adjoint systems', *AIAA Journal* **11**(2), 250–251.
- POIRION, F. (1995), 'Modélisation temporelle des systèmes aéroélastiques. Application à l'étude des effets des retards', *La Recherche Aérospatiale* (2), 103–114.



- POIRION, F. (1996), 'Multi-Mach rational approximation to generalized aerodynamic forces', *AIAA Journal of Aircraft* **33**, 1199–1201.
- QIU, J.-B., YING, Z.-G. & WILLIAMS, F. W. (1997), 'Exact modal synthesis techniques using residual constraint modes', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 2475–2492.
- RIXEN, D., FARHAT, C. & GÉRADIN, M. (1998), 'A two-step, two-field hybrid method for the static and dynamic analysis of substructure problems with conforming and non-conforming interfaces', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **154**, 229–264.
- RIXEN, D. J. (2004), 'A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **168**, 383–391.
- RIZZI, S. A. & MURAVYOV, A. (2001), Improved equivalent linearization implementations using nonlinear stiffness evaluation, Technical report, NASA/TM-2001-210838.
- ROBERTS, R. P. (1991), The application of the minimum state method for approximating unsteady aerodynamics to an aircraft model, in 'Proceedings of the European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics', Aachen, Germany.
- ROGERS, L. C. (1970), 'Derivatives of eigenvalues and eigenvectors', *AIAA Journal* **8**(5), 943–944.
- RUBIN, S. (1975), 'Improved component-mode representation for structural dynamic analysis', *AIAA Journal* **13**(8), 995–1006.
- RUDISILL, C. S. (1974), 'Derivatives of eigenvalues and eigenvectors for a general matrix', *AIAA Journal* **12**(5), 721–722.
- RYCKELYNCK, D. (2005), 'A priori hyperreduction method: an adaptive approach', *Journal of Computational Physics* **202**, 346–366.
- RYCKELYNCK, D., VINCENT, F. & CANTOURNET, S. (2012), 'Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **225-228**, 28–43.
- RZADKOWSKI, R. & GNESIN, V. (2007), '3-D inviscid self-excited vibrations of a blade row in the last stage turbine', *Journal of Fluids and Structures* **23**(6), 858–873.
- SARKAR, S. & VENKATRAMAN, K. (2004), 'Model order reduction of unsteady flow past oscillating airfoil cascades', *Journal of Fluids and Structures* **19**(2), 239–247.
- SAYMA, A. I., VAHDATI, M. & IMREGUN, M. (2000), 'An integrated nonlinear approach for turbomachinery forced response prediction. Part I: Formulation', *Journal of Fluids and Structures* **14**, 87–101.
- SCHOTTÉ, J.-S. & OHAYON, R. (2009), 'Various modelling levels to represent internal liquid behaviour in the vibration analysis of complex structures', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198**, 1913–1925.
- SCHWINGSHACKL, C. W., PETROV, E. P. & EWINS, D. J. (2012), 'Effects of contact interface parameters on vibration of turbine bladed disks with underplatform dampers', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **134**(3), 561 – 571.
- SEGUI VASQUEZ, B. (2013), Modélisation dynamique des systèmes disque aubes multi-étages : Effets des incertitudes, PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, France.
- SHANMUGAM, A. & PADMANABHAN, C. (2006), 'A fixed-free interface component mode synthesis method for rotor-dynamics analysis', *Journal of Sound and Vibration* **297**, 664–679.
- SHYU, W.-H., MA, Z.-D. & HULBERT, G. M. (1997), 'A new component mode synthesis method: Quasi-static mode compensation', *Finite Elements in Analysis and Design* **24**, 271–281.
- SINGH, R. P., VANDERVOORT, R. J. & LIKINS, P. W. (1985), 'Dynamics of flexible bodies in tree topology. A computer-oriented approach', *Journal of Guidance* **8**(5), 584–590.
- SINHA, A. (2008), 'Reduced-order model of a mistuned multi-stage bladed rotor', *International Journal of Turbo and Jet Engines* **25**, 145–153.
- SIROVICH, L. (1987), 'Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts I-III', *Quarterly of Applied Mathematics* **XLV**, 561–590.
- SMITH, B. T. & et al. (1976), *Matrix eigensystem routines. Eispack guide. Second edition*, Lecture Note in Computer Science, Vol. 6, Springer-Verlag.
- SONG, S. H., CASTANIER, M. P. & PIERRE, C. (2005), Multi-stage modeling of turbine engine rotor vibration, in 'Proceedings of the IDETC/CIE 2005', ASME Paper DETC2005-85740, Long Beach, CA, USA.
- SPANOS, J. T. & TSUHA, W. S. (1991), 'Selection of component modes for flexible multibody simulation', *Journal of Guidance* **14**(2), 278–286.
- STERNCHÜSS, A. (2009), Multi-level Parametric Reduced Models of Rotating Bladed Disk Assemblies, PhD thesis, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris, France.

- STERNCHÜSS, A. & BALMÈS, E. (2007), Reduction of multistage rotor models using cyclic modeshapes, in 'Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo', ASME Paper GT2007-27974, Montreal, Canada.
- STERNCHÜSS, A., BALMÈS, E., JEAN, P. & LOMBARD, J.-P. (2008), Model reduction applied to multistage assemblies of bladed disks, in 'Proceedings of ISMA 2008 International Conference on Noise and Vibration Engineering', Leuven, Belgium.
- STERNCHÜSS, A., BALMÈS, E., JEAN, P. & LOMBARD, J.-P. (2009), 'Reduction of multistage disk models: Application to an industrial rotor', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **131**, 012502.1–012502.14.
- STRANG, G. (1980), *Linear Algebra and Its Application*, Second edition, Academic Press.
- SUAREZ, L. E. & SINGH, M. P. (1992), 'Improved fixed interface method for modal synthesis', *AIAA Journal* **30**, 2952–2958.
- SUTTER, T. R., CAMARDA, C. J., WALSH, J. L. & ADELMAN, H. M. (1988), 'Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives', *AIAA Journal* **26**(12), 1506–1511.
- TAKEWAKI, I. (1998), 'Inverse component-mode synthesis method for redesign of large structural systems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **166**, 201–209.
- THOMAS, D. L. (1979), 'Dynamics of rotationally periodic structures', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14**, 81–102.
- THONON, C., GÉRADIN, M., CARDONNA, A. & FARHAT, C. (1995), Unification of the impedance and component mode formulations in the assembling of flexible structures. Volume 1: Application to linear systems, Report VA-144, L.T.A.S., Université de Liège.
- THONON, C., GÉRADIN, M., CARDONNA, A. & JETTEUR, P. (1995), Unification of the impedance and component mode formulations in the assembling of flexible structures. Volume 2: Application to nonlinear systems, Report VA-166, L.T.A.S., Université de Liège.
- TOURNOUR, M. A., ATALLA, N., CHIELLO, O. & SGARD, F. (2001), 'Validation, performance, convergence and application of free interface component mode synthesis', *Computers & Structures* **79**, 1861–1876.
- TRAN, D.-M. (1981), Etude du comportement dynamique des rotors flexibles, Docteur Ingénieur thesis, INSA de Lyon, France.
- TRAN, D.-M. (1991), 'Une présentation de la méthode de Kane pour la formulation des équations du mouvement', *La Recherche Aéronautique* (3), 1–21.
- TRAN, D.-M. (1992), 'Méthodes de synthèse modale mixtes', *Revue Européenne des Éléments Finis* **1**(2), 137–179.
- TRAN, D.-M. (1993), Hybrid methods of component mode synthesis, in 'Actes du Forum International Aéroélasticité et Dynamique des Structures', AAAF, Strasbourg, pp. 911–925.
- TRAN, D.-M. (1995), 'Méthode de Lanczos par bloc appliquée aux problèmes de vibrations des structures amorties', *Revue Européenne des Éléments Finis* **4**(1), 33–54.
- TRAN, D.-M. (1996), 'Méthode de sous-structuration pour l'analyse de sensibilité et la réactualisation des modes propres des structures localement perturbées', *Revue Européenne des Éléments Finis* **5**(1), 75–99.
- TRAN, D.-M. (2001), 'Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry', *Computers & Structures* **79**(1), 209–222.
- TRAN, D.-M. (2006), Frequency and mode follow-up for evolutive structures, in 'Second International Conference on Dynamics, Vibration and Control (ICDVC-2006)', Beijing, China.
- TRAN, D.-M. (2009a), Component mode synthesis method using partial interface modes. Application to tuned and mistuned bladed disk with local non-linearity, in 'Proceedings of the IDETC/CIE 2009, 22th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise', ASME Paper DETC2009-87353, San Diego, CA, USA.
- TRAN, D.-M. (2009b), 'Component mode synthesis methods using partial interface modes: Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry', *Computers & Structures* **87**(17-18), 1141–1153.
- TRAN, D.-M. (2009c), 'Multi-parameter aerodynamic modeling for aeroelastic coupling in turbomachinery', *Journal of Fluids and Structures* **25**(3), 519–534.
- TRAN, D.-M. (2014), 'Reduced models of multi-stage cyclic structures using cyclic symmetry reduction and component mode synthesis', *Journal of Sound and Vibration* **333**(21), 5443 – 5463.
- TRAN, D.-M., LIAUZUN, C. & LABASTE, C. (2003), 'Methods of fluid-structure coupling in frequency and time domains using linearized aerodynamics for turbomachinery', *Journal of Fluids and Structures* **17**(8), 1161–1180.
- VALID, R. & OHAYON, R. (1985), 'Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques', *La Recherche Aéronautique* (4), 251–263.

- VARGIU, P., FIRRONE, C., ZUCCA, S. & GOLA, M. (2011), 'A reduced order model based on sector mistuning for the dynamic analysis of mistuned bladed disks', *International Journal of Mechanical Sciences* **53**, 639–646.
- WANG, B. P. (1991), 'Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics', *AIAA Journal* **29**(6), 1018–1020.
- WANG, W. & KIRKHOPE, J. (1994a), 'Component mode synthesis for damped rotor systems with hybrid interfaces', *Journal of Sound and Vibration* **177**(3), 393–410.
- WANG, W. & KIRKHOPE, J. (1994b), 'Component mode synthesis for multi-shaft rotors with flexible inter-shaft bearings', *Journal of Sound and Vibration* **173**(4), 537–555.
- WANG, W. & KIRKHOPE, J. (1995), 'Complex component mode synthesis for damped systems', *Journal of Sound and Vibration* **181**(5), 781–800.
- WEINGARTEN, V. I., RAMANATHAN, R. K. & CHEN, C. N. (1983), 'Lanczos eigenvalue algorithm for large structures on a minicomputer', *Computers & Structures* **16**(1-4), 253–257.
- WEI, S. T. & PIERRE, C. (1988), 'Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry. Part I: Free vibrations', *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* **110**(4), 429–438.
- WILDHEIM, S. J. (1979), 'Excitation of rotationally periodic structures', *ASME Journal of Applied Mechanics* **46**, 878–882.
- WILLCOX, K. (2000), *Reduced-Order Aerodynamic Models for Aeroelastic Control of Turbomachines*, PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA.
- WITTRICK, W. H. (1962), 'Rates of change of eigenvalues, with reference to buckling and vibration problems', *Journal the Royal Aeronautical Society* **66**, 590–591.
- YAN, Y. J., CUI, P. L. & HAO, H. N. (2008), 'Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk', *Journal of Sound and Vibration* **317**, 294–307.
- ZOU, C.-P., HUA, H.-X. & CHEN, D.-S. (2002), 'Modal synthesis method of lateral vibration analysis for rotor-bearing system', *Computers & Structures* **80**, 2537–2549.



## Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques

La simulation numérique du comportement dynamique des structures ou des systèmes couplés aéroélastiques complexes conduit à des systèmes d'équations de très grande taille dont la résolution est très coûteuse. Il est donc indispensable de construire des modèles d'ordre réduit qui, au prix d'une diminution acceptable de la précision, permettent d'obtenir à moindre coût des simulations de ces systèmes. Cette réduction de modèle est obtenue par une projection du système d'équations initial sur une base de projection, incluant ainsi les méthodes de sous-structuration ou de synthèse modale, ainsi que la réduction par symétrie cyclique. On présente ici un ensemble de méthodes ayant recours aux techniques de réduction ou de projection. La première partie regroupe quelques travaux sur les fréquences et modes propres: la méthode de Lanczos par bloc pour calculer les fréquences et les modes propres de structures amorties, une méthode de sous-structuration pour déterminer leur sensibilité et leur réanalyse, et finalement un critère pour suivre leur évolution dans le cas des structures dépendant d'un paramètre. La deuxième partie est consacrée aux méthodes de synthèse modale, incluant les méthodes classiques, avec interface fixe, libre ou mixte, les méthodes utilisant les modes d'interface ou les modes d'interface partiels, ainsi que leur combinaison avec la réduction par symétrie cyclique. La troisième partie concerne les structures multi-étages comme les assemblages de disques aubagés dont chaque étage possède une symétrie cyclique mais pas la structure complète. Une méthode de réduction par symétrie cyclique multi-étages est développée avec une nouvelle sélection des indices de déphasage pour chaque étage dans chaque système réduit. Elle peut être utilisée seule ou combinée avec la synthèse modale. La quatrième partie concerne le couplage fluide-structure dans les turbomachines. La structure, un disque aubagé possédant une symétrie cyclique, est soumise à des forces aérodynamiques exercées par le fluide et qui dépendent des déplacements de la structure. La projection de l'équation de la structure sur ses modes propres complexes fournit un système réduit couplé dans lequel les forces aérodynamiques généralisées sont obtenues à partir des mouvements harmoniques des modes. Deux méthodes de résolution et une méthode de lissage multi-paramètres sont proposées afin d'obtenir les solutions du système couplé pour un grand nombre de valeurs des paramètres

**Mots-clés :** RÉDUCTION DE MODÈLE ; FRÉQUENCE ET MODE PROPRE ; SENSIBILITE ; SYNTHÈSE MODALE ; SYMETRIE CYCLIQUE ; STRUCTURE MULTI-ÉTAGES ; COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE ; AEROELASTICITE

## Model reduction in dynamics of structures and aeroelastic coupled systems

The numerical simulation of the dynamic behaviour of complex structures or aeroelastic coupled systems leads to systems of equations with very large size whose solution is very costly. It is thus essential to build reduced order models which allow to perform the simulations of these systems at a lesser cost and with an acceptable lost of accuracy. This model reduction is obtained by a projection of the initial system of equations on a projection basis, including therefore substructuring or component mode synthesis methods, as well as the cyclic symmetry reduction. We present here a set of methods using reduction or projection techniques. In the first part, we put together some works related to the eigen frequencies and modes: the block Lanczos method to compute the frequencies and modes of damped structures, a substructuring method to determine their sensitivity and their reanalysis, and finally a criterion to follow-up their evolution for structures depending on a parameter. The second part is devoted to component mode synthesis methods which include the classical methods, with fixed, free or hybrid interface, the methods using interface modes or partial interface modes, as well as their combination with cyclic symmetry reduction. The third part is concerned with multi-stage structures such as bladed-disk assemblies whose each stage has a cyclic symmetry but not the whole structure. A multi-stage cyclic symmetry reduction method has been developed with a new selection of phase indexes for each stage in each reduced system. It can be used alone or combined with component mode synthesis. The fourth part is concerned with the fluid-structure coupling in turbomachinery. The structure, a bladed disk having a cyclic symmetry, is subject to the aerodynamic forces applied by the fluid and which depend on the displacements of the structure. The projection of the equation of the structure on their complex eigen modes provides a reduced coupled system in which the generalized aerodynamic forces are obtained from the harmonic motions of the modes. Two solution methods and a multi-parameter modeling method are proposed to obtain the solutions of the coupled system for a large number of values of the parameters.

**Keywords :** MODEL REDUCTION ; EIGEN FREQUENCY AND MODE ; SENSITIVITY ; COMPONENT MODE SYNTHESIS ; CYCLIC SYMMETRY ; MULTI-STAGE STRUCTURE ; FLUID-STRUCTURE COUPLING ; AEROELASTICITY