Trois problèmes autour du ressaut hydraulique circulaire

Alexis Duchesne

▶ **To cite this version:**

Alexis Duchesne. Trois problèmes autour du ressaut hydraulique circulaire. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Denis Diderot (Paris 7) - Sorbonne Paris Cité, 2014. Français. NNT : . tel-01240881

HAL Id: tel-01240881
https://hal.science/tel-01240881

Submitted on 9 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)- SORBONNE PARIS CITÉ
U.F.R. DE PHYSIQUE

École Doctorale 564 : Physique en Île de France
Laboratoire Matière et Systèmes complexes

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Spécialité : **PHYSIQUE**

présentée par

Alexis DUCHESNE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Sujet de la thèse :

Trois problèmes autour du ressaut hydraulique circulaire

Thèse dirigée par

Laurent LIMAT

Soutenue le 10 Décembre 2014 devant le jury composé de :

Tomas BOHR	Rapporteur
Elise LORENCEAU	Rapporteur
Médéric ARGENTINA	Examinateur
François CHARRU	Examinateur
Etienne ROLLEY	Examinateur
Laurent LIMAT	Directeur de thèse
Luc LEBON	Co-directeur de thèse
Christophe PIRAT	Invité

Table des matières

Remerciements **9**

Introduction **13**

I Préambule : une introduction au ressaut hydraulique **15**
I.1 Le ressaut hydraulique . . . 15
I.2 Ressaut dans un canal, relation de passage et nombre de Froude . . . 16
I.2.1 Ressaut dans un canal . . . 16
I.2.2 Relation de passage . . . 17
I.2.3 Nombre de Froude . . . 18
I.3 Le ressaut hydraulique circulaire . . . 19
I.4 De l'évier aux étoiles . . . 21
I.5 Ressaut circulaire, vortex et polygones . . . 23
I.5.1 Structure du ressaut circulaire . . . 23
I.5.2 Vers le facettage . . . 25
I.5.3 Généralisations à d'autres configurations d'écoulements axisymétriques . . . 26
I.6 Autres ruptures (forcées) de symétrie . . . 27
I.6.1 Rupture de symétrie par texturation du substrat . . . 27
I.6.2 Importance du substrat : effet du mouillage . . . 29
I.6.3 Brisure de symétrie par modification de la géométrie . . . 31
I.7 Ressaut circulaire et non mouillage . . . 31
I.8 Questions traitées dans le présent mémoire . . . 33

A Le ressaut circulaire hydraulique : Sélection du rayon du "mur" **35**

II Revue bibliographique **37**
II.1 Le modèle du fluide parfait . . . 38
II.1.1 La zone interne . . . 38
II.1.2 Le choc . . . 38
II.2 La théorie de Watson pour le ressaut circulaire visqueux et son amélioration par Bush *et al.* . . . 39
II.2.1 Profil auto-similaire . . . 40
II.2.2 Raccordement et estimation des longueurs . . . 42
II.2.3 Condition au niveau du choc . . . 43
II.2.4 Influence de la tension de surface . . . 44

II.2.5 Ressaut circulaire et Hélium superfluide . . . 49
II.2.6 Conclusion sur la théorie de Watson . . . 51
II.3 La théorie de Bohr . . . 52
II.3.1 Équation de la couche limite . . . 52
II.3.2 Profil auto-similaire pour u . . . 53
II.3.3 Profil avec un paramètre de forme . . . 55
II.3.4 Approximation analytique des solutions de (II.66) . . . 56
II.3.5 Conclusion sur la théorie de Bohr . . . 59
II.4 Modèles alternatifs . . . 60
II.4.1 Approche de Godwin . . . 60
II.4.2 Approche de Higuera . . . 60
II.4.3 Travaux de Rao et Arakeri . . . 63
II.4.4 Modèle de Brechet et Néda . . . 65
II.4.5 Calculs de Kasimov . . . 66
II.4.6 Travaux de Rojas, Argentina, Cerda et Tirapegui . . . 68
II.4.7 Approche de Dasgupta et Govindarajan . . . 73
II.5 Conclusion de la revue bibliographique . . . 75

III Description de l'expérience et premiers résultats 77
III.1 Montage . . . 77
III.1.1 Dispositif d'alimentation . . . 77
III.1.2 Injecteur et plaque : la géométrie de l'expérience . . . 79
III.2 Liquides utilisés . . . 79
III.2.1 Huiles silicones . . . 79
III.2.2 Mélanges eau-glycérol . . . 80
III.3 Visualisation . . . 81
III.4 Mesure des hauteurs . . . 82
III.4.1 Le profondimètre ou comparateur de puits . . . 83
III.4.2 Éstimation directe de la hauteur . . . 83
III.5 Les limites du dispositif ou le ressaut peu circulaire . . . 84
III.6 Premières mesures ou l'échec des lois d'échelles simples . . . 86

IV Vers une nouvelle théorie, ou une exploration en partant du bord 91
IV.1 Objectif et idée de départ . . . 91
IV.2 Profil extérieur . . . 92
IV.2.1 Modélisation en terme de lubrification et validation expérimentale . . . 92
IV.2.2 Note sur la hauteur en bord de plaque . . . 94
IV.2.3 Hauteur extérieure après le choc . . . 96
IV.2.4 Conclusion . . . 97
IV.3 Raccordement au choc . . . 98
IV.4 Conséquence pour $R(Q)$ . . . 100
IV.5 Effets de la géométrie . . . 102
IV.5.1 Nombre de Froude . . . 102
IV.5.2 Conséquence pour $R(Q)$ . . . 105
IV.6 Conclusion . . . 106

V Quelques questions laissées ouvertes par notre approche. 109
V.1 Introduction . . . 109
V.2 Tentative numérique à la Bohr *et al.* . . . 109
V.2.1 Profil externe . . . 110
V.2.2 Prédiction du rayon du ressaut . . . 111
V.3 Tentative d'une construction à la Watson . . . 112
V.4 Éssais d'exploration de l'écoulement interne . . . 114
V.5 Cohérence entre condition de choc et écoulement dans la zone interne . . . 114
V.6 Conclusion . . . 117

VI Perspectives et Conclusion 119
VI.1 Au delà des frontières . . . 119
VI.1.1 Et avec des bords ? . . . 119
VI.1.2 Le cas super-hydrophobe . . . 120
VI.2 Conclusion du Chapitre . . . 121

B Le ressaut incliné 125

VII État de l'art et dispositif expérimental 127
VII.1 Et si on incline notre ressaut ? . . . 127
VII.1.1 Beaucoup de questions... et peu de réponses. . . . 127
VII.1.2 Les précurseurs . . . 131
VII.1.3 Conclusion . . . 135
VII.2 Description de l'expérience . . . 136
VII.2.1 Dispositif expérimental . . . 136
VII.2.2 Liquides et substrats utilisés . . . 136
VII.2.3 Visualisation . . . 137
VII.2.4 Traitement d'image . . . 138
VII.2.5 Longueurs étudiées . . . 140

VIII Ressaut sur plan incliné en mouillage total 143
VIII.1 Premiers résultats en mouillage total . . . 143
VIII.1.1 Forme du ressaut . . . 143
VIII.1.2 Bourrelet macroscopique et ligne de contact effective . . . 146
VIII.1.3 Les lois rayon-débit . . . 147
VIII.1.4 Ecoulement dans le ressaut . . . 151
VIII.2 Un premier modèle en mouillage total . . . 152
VIII.2.1 Calcul de R_{top} . . . 153
VIII.2.2 Calcul de R_{width} . . . 160
VIII.2.3 Conclusion . . . 162

IX Ressaut sur plan incliné en mouillage partiel 165
IX.1 Premiers résultats en mouillage partiel . . . 165
IX.1.1 Forme du ressaut . . . 165
IX.1.2 Hystérèse et angle de contact . . . 168
IX.1.3 Dépendance du rayon du ressaut . . . 170

IX.2 Modèle en mouillage partiel . . . 174
IX.2.1 Calcul de R_{width} . . . 175
IX.2.2 Calcul de R_{top} . . . 177
IX.3 Conclusion . . . 179

X Ressaut sur un plan incliné super hydrophobe 181
X.1 Influence de l'injecteur . . . 181
X.1.1 Injecteur de 4mm de diamètre . . . 181
X.1.2 Injecteur de 3mm de diamètre . . . 183
X.2 Modèle . . . 185
X.2.1 Condition de choc . . . 185
X.3 Conclusion sur le cas super hydrophobe . . . 187

XI Conclusion 189

C Gouttes dans un ressaut 191

XII Etat de l'art et dispositif expérimental 193
XII.1 Non coalescence et dynamique : une goutte en lévitation dans un ressaut hydraulique 193
XII.1.1 De la goutte volante à la goutte "quantique". . . . 193
XII.1.2 Gouttes dans un ressaut hydraulique : état de l'art . . . 194
XII.2 Dispositif expérimental . . . 201
XII.2.1 Montage . . . 201
XII.2.2 Stabilité du dispositif . . . 201
XII.2.3 Visualisation . . . 203
XII.2.4 Fabrication des gouttes . . . 204

XIII Orbite d'une goutte dans un ressaut 207
XIII.1 Premières observations expérimentales . . . 207
XIII.2 Un premier modèle . . . 210
XIII.2.1 Les équations . . . 210
XIII.2.2 Stabilité des solutions . . . 211
XIII.2.3 Vitesse du liquide sur la paroi du ressaut . . . 212
XIII.2.4 Etat orbital de la goutte . . . 213
XIII.2.5 Conclusion sur le modèle . . . 215
XIII.3 Conclusion . . . 218

XIV Rotation propre d'une goutte 219
XIV.1 Observations et mesures . . . 219
XIV.2 Modèle et ses améliorations . . . 221
XIV.2.1 Modèle gyroscopique de base . . . 221
XIV.2.2 Déformation de la goutte et dissipation visqueuse . . . 222
XIV.2.3 Déformation du ressaut . . . 223
XIV.2.4 Conclusion . . . 225

XV Perspectives et conclusion 227
XV.1 Gouttes d'autres liquides . . . 227

XV.1.1 Effet de la viscosité . . . 227
XV.1.2 Effet de la tension superficielle . . . 229
XV.2 Plusieurs gouttes dans un ressaut . . . 229
XV.3 Conclusion . . . 231

D Deux expériences nouvelles en perspective 235

XVI Deux expériences nouvelles en perspective 237
XVI.1 Goutte en non coalescence dans un cône . . . 237
XVI.1.1 Impact d'un jet sur un cylindre creusé en forme de cône . . . 237
XVI.1.2 Goutte en non coalescence . . . 238
XVI.2 Impact dans une cavité . . . 240

Conclusion 243

Annexes 247
A Mesure de la viscosité : viscosimètre à capillaire . . . 249
B Quelques rappels sur le mouillage . . . 250
B.1 Définition : mouillage et ligne de contact . . . 250
B.2 Paramètre d'étalement S : mouillage total et mouillage partiel . . . 250
B.3 Angle de contact d'équilibre : loi de Young-Dupré . . . 250
B.4 Hystérésis de mouillage . . . 251
C Substrat super hydrophobe : la recette . . . 253

Bibliographie 261

Remerciements

Ne nous leurrons pas, les lignes que j'écris ici c'est-à-dire celles de la section dédiée aux remerciements constituent la partie du manuscrit qui sera la plus lue et la plus commentée... Oui, je t'ai démasqué toi le lecteur compulsif de remerciements ! Mais enfin, puisque tu as ouvert cette thèse uniquement pour ça poursuit donc ta lecture...

Dans cet exercice un peu impudique le plus dur est sans doute de n'oublier personne. Si par hasard ma mémoire me jouait un vilain tour et que j'omettais de citer quelqu'un qui m'a aidé durant cette thèse je m'en excuse par avance.

J'ai découvert le laboratoire MSC lors d'un stage de L3. J'ai alors été encadré par Adrian Daerr et Laurent Limat pour faire du méandrage sur un plan incliné. Et ce stage fut un fiasco ! Néanmoins c'est au cours de ce stage en regardant les manipes de mes voisins de paillasse (qui marchaient, elles !) que j'ai découvert la physique des liquides pratiquée à la mode 777 : des expériences simples et visuelles que l'on peut toucher et que l'on peut bricoler et des modèles collés aux manipes permettant la première compréhension des phénomènes observés. L'étudiant de licence que j'étais alors (et qui n'avait jamais fait d'hydro) fut conquis et se décida à faire une thèse sur ce type de physique. Je souhaite donc remercier Laurent à la fois pour avoir été mon directeur de thèse mais également pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe et m'avoir fait découvrir (un peu) cette Physique des Liquides.

Bien sûr je tiens également à remercier Laurent pour de nombreuses autres choses comme le fait de m'avoir toujours fait confiance et d'avoir toujours cru en moi. Il a toujours su être présent aux moments clés [1]. Mais Laurent n'est pas seulement un "papa de thèse" formidable c'est aussi un excellent directeur qui avec une extrême bienveillance à toujours su m'apporter les remarques, conseils et pistes bibliographiques dont j'avais besoin pour avancer scientifiquement et pour communiquer tant à l'écrit qu'à l'oral. Il a également réussi à me faire passer du côté obscur de la force en m'encourageant à me lancer dans la modélisation de mes expériences. Grâce à lui j'ai beaucoup appris sur la recherche et sur la science en général.

Je voudrais également remercier mon co-directeur de thèse, Luc Lebon, pour la grande liberté qu'il m'a laissé dans mon travail et l'aide qu'il m'a apporté dans la rédaction des articles et du manuscrit.

Merci également à Elise Lorenceau et Tomas Bohr d'avoir accepté de rapporter cette thèse (un peu volumineuse, j'en conviens et en français qui plus est) et je m'excuse de leur avoir imposé un délai si bref. Je remercie également Médéric Argentina, Etienne Rolley, François Charru qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury, merci pour l'attention et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour les discussions et suggestions qui me rassurent car il paraît qu'une bonne thèse est une thèse qui soulève plus de questions qu'elle n'en résoud.

Au cours de ma thèse j'ai pu bien sûr pu nouer des collaborations avec d'autres membres de l'équipe et au delà...

1. Comme, par exemple, ce samedi soir de correction de rapport de stage entre une et trois heures du matin où il a scanné les pages sur son téléphone une par une pour pouvoir me les envoyer le plus rapidement possible

Merci évidemment à Adrian Daerr de m'avoir fait rentrer dans la maison en L3, pour m'avoir alors fourni plein de conseils qui ont été déterminants par la suite (mais es-tu vraiment sûr qu'un méandre n'a pas de volonté propre et qu'il faut toujours tourner le bouton de la manip au maximum "pour voir" ?). Je te remercie de m'avoir donné ce goût prononcé pour le Norcan que l'on aime autant que l'on déteste la clé alène qui permet de le visser et qui a une fâcheuse tendance à disparaître. Merci également pour ta parfaite maîtrise d'Image J et pour tes plug ins maison qui m'ont été vitaux au cours de cette thèse.

Je remercie aussi mon "très grand frère de thèse" Philippe Brunet qui a apporté la recette du substrat superhydrophobe en 777. Merci également pour les discussions scientifiques qui m'ont fait comprendre ce qu'était vraiment un chercheur expérimentateur. Merci également de m'avoir donné quelques "trucs" pour "interagir au mieux" avec ton ancien directeur de thèse. Toutefois permet moi de garder un peu de rancoeur contre ton aspirateur infernal et contre les figures de Chladni sur une surface superhydrophobe.

Merci à Christophe Pirat qui grâce à ses passages éclairs depuis Lyon m'a permis d'améliorer considérablement le dispositif expérimental sur les gouttes, a convaincu définitivement Laurent d'acheter une table optique, m'a motivé et stimulé pour ce travail sur les gouttes dans un ressaut et me laisse avec une myriade d'idées que je n'ai pas eu le temps de réaliser et qu'il appartiendra à mon successeur sur la manip de mettre en oeuvre. J'ai été ravi qu'il puisse faire partie de mon Jury et je l'en remercie.

Merci également à Andrew Belmonte pour son avalanche d'idées plus ou moins facilement réalisables et si je n'ai jamais réussi à observer un ressaut inversé à deux liquides, je lui dois l'expérience du jet impactant dans une cavité qui partira avec moi à Liège.

Cette thèse n'aurait surement pas eu la même saveur sans l'ambiance de notre thesarium, alias "La 777". Ce lieu à la fois synonyme de discussions scientifiques animées et particulièrement productives, de fous rires, de détente, de gastronomie plus ou moins raffinée, de barbecues en terrasse et de cafés élaborés a été pour moi une source d'inspiration, de motivation et de stimulation. Je remercie donc ceux qui en furent et ceux qui en sont les membres. Donc pêle-mêle merci à Antonin (une sorte de modèle pour le jeune padawan que j'étais), Giuseppe (le footballeur à l'accent enchanteur), Julien M (notre troll bienveillant qui a pour principal défaut de penser toujours aux autres avant de penser à lui, merci énormément pour ton soutien, la 777 et moi te devons beaucoup), Alexis (le biologiste gremlins qui doit être nourri (et nourrir les autres) avant midi), Jean Baptiste (le ninja mangeur de raisin), Maxime (l'homme aux innombrables manipes mais également mon acolyte lors de longues nocturnes musicales), Tommy (le basketteur au grand coeur), Nicolas C (l'escaladeur voyageur), Nicolas J (qui m'a fait découvrir les chèvres neurasthéniques et appris beaucoup de chose sur les beffrois anglais), Paul (frère de thèse et de lolcats à la ville et metteur en scène sur les planches), Stéphanie (militante de la science pour toutes et tous, merci de m'avoir fait tant réfléchir sur ces questions), Tadashi (le samouraï du labo), Henri (la science sans compromis, d'ailleurs ce manuscrit lui doit beaucoup, merci pour tes précieux conseils), Matthieu (la force tranquille de la théorie et de la moutarde), Stéphane (pâtes au pesto et physique sont les deux mamelles de la 777, merci pour ta disponibilité et pour nos discussions), Chi Tuong (la terreur des étudiants, le nazi du café, le fossoyeur de l'ouïe : un gant de fer pour une main de velours), Julien D (mi-homme mi-cheveux mais entièrement gentil et génial), Menghua et Marc (qui assurent tout les deux le renouveau de la tribu).

Mais au labo il n'y a pas qu'une salle remplie de thésards et de post doc, il y a aussi d'autres thésards et des permanents avec qui j'ai pu interagir pour travailler ou simplement pour papoter merci donc à Iris, Mickael, Michel, Christophe, Bérangère, Nicolas, François, Cyprien, Laurent, Gaëlle, Simon, Timothée, Kelly, Clément, Nathalie, Pauline, Sébastien, Vicard, Sham, David, Tanguy, Kevin,

Olivier, Lorraine, Fanny, Mathieu, Camille, Rémy, Laurie et bien sûr Chihô.

Parfois le labo se peuple de petites bêtes appelées les stagiaires, ces petites bêtes sont souvent sympathiques et savent se faire leur place, ils nous aident parfois considérablement à faire avancer nos projets. Je voudrais donc remercier les stagiaires que j'ai pu encadrer : Julien, Rémy, Jacques et Martyna ainsi que tout les stagiaires issus de la Science Académie. Merci également aux stagiaires des autres avec qui j'ai pu interagir je pense en particulier à Maxime, Baptiste, Charles... et ceux dont j'ai oublié le prénom...

Durant ces trois années, il m'est également arrivé de sortir du labo pour enseigner la physique à des étudiants de l'IUT Paris Jussieu, merci donc à Kristine Jurski pour la confiance qu'elle m'a accordée, à Alain Ponton pour l'aide et la confiance qu'il m'a apportée et enfin à Johan Hérault pour les trucs et astuces des TPs de Machines thermiques et pour nos discussions...

Merci également à ceux qui ont rendu cette thèse possible : je pense bien évidemment à tous ces personnels techniques qui permettent, au quotidien, à la science de se faire. Il y a bien sûr les gens des ateliers qui m'ont toujours accueilli avec le sourire (même quand c'était uuurgent) et qui ont toujours répondu merveilleusement (et rapidement) à mes besoins pas toujours bien formulés : merci à Laurent, Stéfano et Alex. Merci également à Matthieu qui sait si bien donner une réalité à des idées de montage un peu fumeuses. Je remercie également Arnaud l'as de l'électronique qui, grâce à moi, connait par coeur l'électronique d'une pompe à engrenage pleine d'huile silicone... miam. Merci encore à David pour ses idées de système optique et pour ses conseils de lecture. Je souhaite également remercier Booboo pour ses judicieux conseils en chimie (bonne retraite !) et Pierre qui m'a permis de ne pas trop faire de bêtises avec les produits chimiques. Merci aussi à l'équipe "informatique", Jean et Wilfrid. Merci également à Nadine, à Carole et à Lucie et Sarah qui se sont si bien chargées de l'administratif même si je ne ramenais jamais les bons papiers. Merci enfin à tous les invisibles : femmes et hommes de ménage, techniciens du bâtiment, pompiers, receptionnistes sans qui le travail en laboratoire ne serait tout simplement pas possible... Enfin merci aux veilleurs de nuit (en particulier à un qui se reconnaîtra) pour leur amabilité et leur gentillesse même après minuit.

Pour finir je souhaite remercier mes amis et ma famille pour m'avoir permis de penser et de faire autre chose pendant mes années de thèse (et ça c'est quand même important). Merci aussi, enfin et surtout à Gaëlle bien sûr pour sa relecture attentive et implacable du manuscrit (mes fautes d'orthographe ont tremblé) mais essentiellement pour tout ce qui ne s'écrit pas et ne se dit pas mais qui fait que j'étais content de rentrer chez nous.

J'espère que tu es comblé, ô toi le lecteur compulsif de remerciements, maintenant tu peux en profiter pour lire quelques pages de ce manuscrit et découvrir que le ressaut circulaire est un chouette phénomène...

Introduction

Le ressaut hydraulique circulaire formé par l'impact d'un jet sur un plan horizontal est un phénomène dont nous avons tous fait l'expérience (en particulier en faisant la vaisselle). Lorsqu'un jet liquide vertical impacte une plaque plane horizontale il se forme un "mur liquide" circulaire au fond de votre évier, entourant le jet impactant. On appelle ce mur liquide ressaut hydraulique circulaire. Mais le plus simple pour comprendre de quoi nous parlons est encore une photographie (Fig. 1).

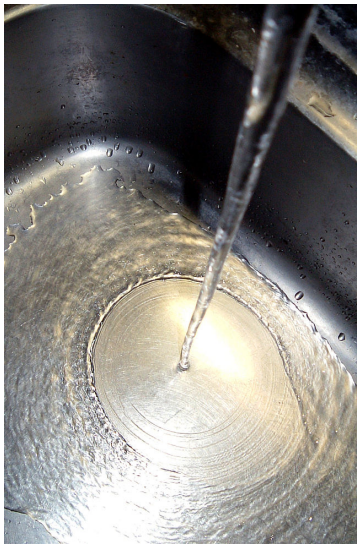


FIGURE 1 – *Ressaut hydraulique circulaire obtenu par l'impact d'un jet liquide sur un plan horizontal. On observe une zone de faible épaisseur et de forte vitesse près de l'impact puis une zone de forte épaisseur et de faible vitesse après un "mur" liquide. Photographie : Wikipédia*

Ce phénomène de choc est si visuel et si riche en terme de physique qu'il est devenu l'un des indémodables de l'enseignement de l'hydrodynamique : on le trouve dans tous les cursus universitaires de physique, dans tous les ouvrages de référence d'hydrodynamique et dans un grand nombre de publications destinées à la vulgarisation scientifique.

Le ressaut hydraulique circulaire est également un phénomène physique présent dans l'industrie. Un moyen de refroidir une surface est de l'impacter par un jet liquide froid. La structure du ressaut hydraulique revêt donc une importance capitale dans la maîtrise du refroidissement et du séchage d'une surface [96, 3, 72]. On trouve aussi des jets impactants dans des applications comme le nettoyage de surface et les tests d'enduisages.

Connaissant ce contexte il semble presque absurde d'écrire une thèse sur un sujet si "académique" et l'on peut douter de l'utilité d'une étude sur un phénomène si "classique" et considéré comme bien

compris par une bonne partie de la communauté scientifique.

C'est d'ailleurs aussi ce que nous pensions lorsqu'a débuté cette thèse. L'idée était alors d'étudier la non coalescence de gouttes dans le ressaut hydraulique : nous considérions donc le ressaut un peu comme un théâtre connu. Pourtant nous nous sommes aperçus à la lecture des publications existantes que le sujet était loin d'être clos. Par exemple il n'existe pas à ce jour de loi analytique donnant précisément la position du ressaut en fonction du débit, des paramètres physiques du liquide et de la géométrie du dispositif.

Si le ressaut circulaire sur un plan horizontal est loin d'être entièrement compris, il est aussi apparu que les brisures de symétrie qui surviennent lorsque l'on incline le plan et l'injecteur n'ont fait l'objet que de peu d'études. Cette question est pourtant d'un grand intérêt théorique (structure du choc dans un champ extérieur) en physique non linéaire et également d'un grand intérêt pratique.

Ce n'est donc pas un mais trois problèmes autour du ressaut circulaire que nous allons traiter dans le présent mémoire. Chacun de ces sujets est introduit au début de la partie qui s'y rapporte par un état de l'art. Afin d'offrir plus de liberté au lecteur, les parties sont écrites, autant que possible, de façon à pouvoir être abordées séparément. Un préambule introduit brièvement les concepts fondamentaux, certains résultats classiques ou originaux relatifs aux ressauts hydrauliques. Ce préambule a donc pour but de fournir à la fois des résultats utiles pour les trois parties indépendantes composant ce mémoire mais aussi un éclairage original sur les travaux développés dans chacune de ces parties.

La première partie abordera le cas du ressaut hydraulique circulaire classique. Nous y traiterons de la sélection du rayon du ressaut via une approche nouvelle basée sur l'étude du nombre de Froude en sortie de ressaut. Nous aboutirons alors à une loi analytique simple permettant de lier rayon de ressaut et différents paramètres physiques et géométriques.

La seconde partie traitera de la brisure de symétrie du ressaut mentionnée ci-dessus : le ressaut formé par un jet perpendiculaire à un plan incliné. Nous y développerons une étude expérimentale ainsi que des pistes théoriques permettant d'interpréter nos résultats.

La troisième partie aura pour objet une situation originale liée au ressaut : la dynamique d'une goutte en non-coalescence roulant dans le ressaut hydraulique.

Enfin nous évoquerons rapidement deux idées originales d'expériences prometteuses qui n'ont pu être développées plus avant dans le présent mémoire mais qui sont susceptibles d'apporter un autre regard sur nos résultats.

Chapitre I

Préambule : une introduction au ressaut hydraulique

Lorsqu'un jet liquide vertical impacte une plaque plane horizontale il va se former un "mur liquide" circulaire entourant le jet impactant. On appelle ce mur liquide ressaut hydraulique circulaire. Ce ressaut hydraulique sépare deux zones distinctes : une zone de faible épaisseur et de grande vitesse située près du jet (et donc en amont du choc) et une zone de plus grande épaisseur et de plus faible vitesse située en aval du ressaut.

Cet objet bien que très quotidien a de quoi surprendre : pourquoi la pente du mur est-elle si abrupte, d'où vient ce choc et pour quelle raison se produit-il à ce rayon particulier ? Trouve-t-on dans la nature d'autres phénomènes comparables à ce "ressaut hydraulique" ?

I.1 Le ressaut hydraulique

Du point de vue des ondes de surfaces (voir section I.2.3), on peut définir le ressaut hydraulique comme la transition brutale entre un écoulement super critique à grande vitesse et faible épaisseur et un écoulement sous critique de faible vitesse et grande épaisseur (voir Fig. I.1).

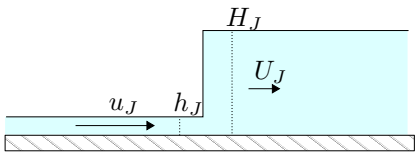


FIGURE *I.1 – Schéma représentant un ressaut hydraulique c'est-à-dire la transition brutale d'un écoulement défini par une faible épaisseur h_J et une forte vitesse u_J vers un écoulement de forte épaisseur H_J et de faible vitesse U_J.*

Même avant l'invention de l'évier et du robinet il était déjà possible d'observer ce phénomène. En particulier, on peut observer un mascaret ou un ressaut hydraulique en se promenant le long des rivières ou des fleuves. Le mascaret est un phénomène provoqué par l'onde de la marée montante se caractérisant par une vague, plus ou moins haute, qui remonte le cours du fleuve et dont la puissance varie en fonction de la hauteur de la marée, du débit du fleuve et de la topographie. Ce phénomène naturel, parfois mortel a pu être observé sur la Seine avant la régulation de son écoulement et peut

encore l'être sur la Dordogne ou la Sélune (voir Fig. I.2). Il s'agit du plus célèbre exemple de ressaut hydraulique à l'échelle macroscopique. Le mascaret est en fait un ressaut mobile, mais on peut aussi observer un ressaut hydraulique stationnaire lors d'un lâcher d'eau au cours de l'activité d'un barrage, à la sortie d'une chute d'eau ou encore dans un déversoir (voir Fig. I.2).

FIGURE *I.2 – Photographies de divers ressauts hydrauliques. (a) et (b) Photographies de ressaut hydraulique dans les fleuve Sélune (a) et Dordogne (b). Le ressaut se propage de la gauche vers la droite. (c) Ressaut hydraulique en sortie de barrage (Photo extraite de Wikipédia). (d) Photographie d'un ressaut hydraulique dans le déversoir de Chinchilla. Ces photographies à l'exception de la sortie de barrage sont extraites de la référence [19]*

On peut enfin trouver des équivalents du ressaut hydraulique à de bien plus petites échelles comme cela a été montré récemment par Cohen *et al.* [22] qui font état d'un ressaut "capillaire" dans les mousses (voir Fig. I.3).

I.2 Ressaut dans un canal, relation de passage et nombre de Froude

I.2.1 Ressaut dans un canal

Le phénomène du ressaut hydraulique dans un canal a été largement étudié par le passé, le plus souvent pour d'assez grandes échelles. On pense par exemple à Bidone [7] qui voyait dans le ressaut hydraulique un moyen de surélever le liquide afin de faciliter l'irrigation. Il fut le premier à observer et à décrire le ressaut hydraulique dans un cas à deux dimensions. On peut également penser à Darcy et Bazin qui réalisèrent des expériences peu connues autour du ressaut [27].

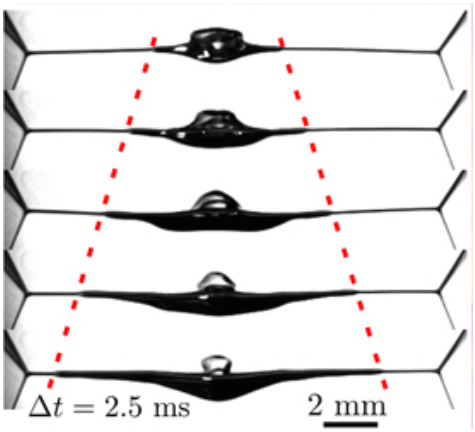


FIGURE *I.3 – Séquence d'images de la répartition de liquide faisant suite à la perturbation d'un bord de Plateau par apport d'une goutte de liquide. Deux ressauts "capillaro-inertiels" se propagent à vitesse constante de part et d'autre de la goutte. Les images sont extraites de [22].*

Depuis, de très nombreux auteurs ont continué à travailler sur cette question du ressaut hydraulique dans un canal [19], en faisant varier les conditions : un canal s'élargissant [100, 112], un canal incliné [32, 38, 6] ou en plaçant un obstacle dans le canal pour forcer la position du ressaut [51] etc. Des études ont aussi été menées en faisant varier les conditions de l'écoulement : laminaire [56] ou turbulent [1] [77] ce qui a parfois pour effet d'entraîner des bulles d'air dans le ressaut [20, 18]. Ce domaine de recherche apparaît comme particulièrement actif aux vues des très nombreuses publications sur le sujet. Cela est probablement dû aux multiples applications que revêt ce phénomène qui touche à la fois à des problématiques concrètes comme les barrages hydroélectriques et à des études fondamentales sur les écoulements géophysiques.

I.2.2 Relation de passage

Toutefois, l'un des travaux ayant le plus marqué les recherches sur le ressaut hydraulique reste l'étude réalisée par l'hydraulicien Jean Baptiste Bélanger [5]. Bélanger y écrit en particulier pour la première fois les relations de conservation de la quantité de mouvement et du débit au niveau du choc (voir Fig. I.4) ce qui permet d'aboutir à :

$$\frac{1}{2}gH_J^2 + H_J U_J^2 = \frac{1}{2}gh_J^2 + h_J u_J^2, \qquad h_J u_J = H_J U_J, \tag{I.1}$$

ce qui donne :

$$\frac{H_J}{h_J} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\frac{u_J^2}{gh_J}} - 1\right), \tag{I.2}$$

avec u_J, h_J, U_J et H_J respectivement les vitesses et hauteurs avant et après le choc (voir Fig. I.1).

Cette relation de passage est déterminante. En effet c'est elle qui fixe la position du choc, lorsque les profils de hauteurs avant et après sont connus. A ce jour cette relation de passage est toujours utilisée en l'état bien que parfois corrigée par un terme de tension de surface et des préfacteurs permettant de tenir compte des profils des écoulements avant et après le choc.

1. Bien que la plupart du temps on se trouve en régime turbulent dans le cas d'un ressaut hydraulique dans un canal.

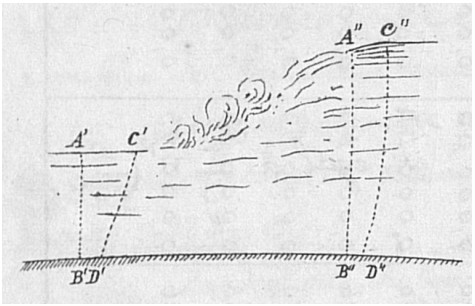


FIGURE *I.4 – Schéma d'un ressaut hydraulique utilisé par Bélanger pour illustrer sa description du phénomène de ressaut dans [5]. Collections patrimoniales des Ponts.*

I.2.3 Nombre de Froude

Une façon d'interpréter le phénomène de ressaut, qu'il soit dans un évier ou dans un fleuve, est de considérer la compétition entre vitesse d'écoulement du liquide et vitesse des ondes gravitaires : dans la zone amont le liquide se déplace plus vite que les ondes gravitaires, il les entraine donc. Dans la zone aval, les ondes gravitaires se déplacent plus vite que le liquide, elles sont donc susceptibles de remonter le courant. Il y a donc accumulation en un point ce qui forme un "mur liquide" : le ressaut hydraulique. Pour mesurer la compétition entre ondes gravitaires et vitesses du liquide on utilise un nombre sans dimension, le "nombre de Froude", du nom de l'hydrodynamicien anglais William Froude qui le définit ainsi :

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} \tag{I.3}$$

Où v est la vitesse du liquide, g l'accélération de pesanteur, h la hauteur de liquide et $\sqrt{gh}$ étant par conséquent la vitesse des ondes gravitaires de surface.

La relation de passage (I.2) fait donc naturellement apparaître ce nombre de Froude :

$$\frac{H_J}{h_J} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_i^2}-1\right), \tag{I.4}$$

où Fr_i est le nombre de Froude en amont du ressaut ou nombre de Froude interne. Cette relation de passage couplée à la conservation du débit permet aussi de lier les nombres de Froude amont et aval :

$$\frac{Fr_i}{Fr_e} = \frac{2^{2/3}}{\left(\sqrt{1+8Fr_i^2}-1\right)^{3/2}}, \tag{I.5}$$

où $Fr_i = \frac{u_J}{\sqrt{gh_J}}$ et $Fr_e = \frac{U_J}{\sqrt{gH_J}}$ avec u_J, h_J, U_J et H_J respectivement les vitesses et hauteur avant et après le choc.

On aura ainsi $Fr_i > 1$ en amont, on parle alors d'écoulement supercritique et $Fr_e < 1$ en aval, on parle alors d'écoulement sous-critique. S'il est aisé de définir le nombre de Froude dans le cas d'un ressaut fluvial (la vitesse moyenne du liquide étant similaire à la vitesse de surface et les ondes capillaires étant évidemment négligeables) cela est plus ambigu (et peut être moins pertinent) dans le cas du ressaut d'évier qui lui est centimétrique voir millimétrique (les ondes capillaires y sont donc bien présentes) et où la structure de l'écoulement est tout sauf simple...

I.3 Le ressaut hydraulique circulaire

Or, c'est justement le ressaut hydraulique circulaire (ou ressaut d'évier) qui va nous intéresser dans ce mémoire. Lorsqu'un jet liquide vertical impacte perpendiculairement une plaque horizontale, il est défléchi et s'écoule radialement le long de la plaque sous forme d'un film mince. [2] Ce film mince de vitesse moyenne élevée s'épaissit ensuite brutalement, on observe alors un mur liquide ou saut : le ressaut hydraulique circulaire. Le film liquide épais va ensuite s'écouler radialement jusqu'aux bords de la plaque. Une illustration de ce phénomène est présentée en Fig. I.5.

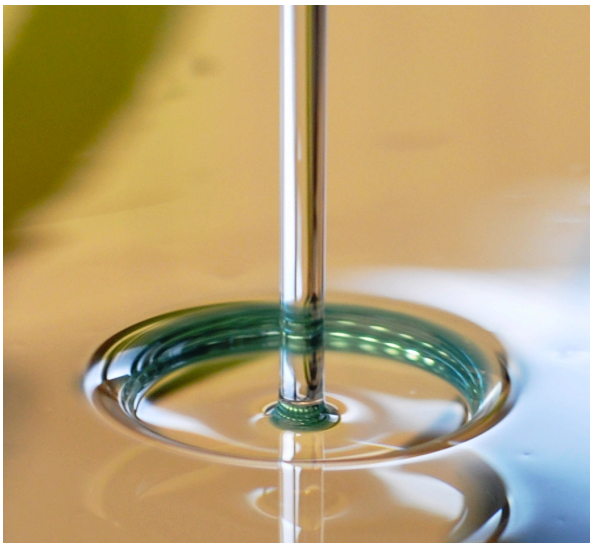


FIGURE *I.5 – Un jet liquide (huile silicone de viscosité* 20 cS*) impacte perpendiculairement une surface horizontale. On observe un ressaut circulaire hydraulique. Une zone centrale de faible épaisseur et de forte vitesse ($Fr_i > 1$) est séparée par le ressaut de la zone externe où la hauteur de liquide est importante et la vitesse faible ($Fr_e < 1$).*

Cela fait maintenant plus de cinq siècles que ce phénomène intrigue : Léonard de Vinci, notait dans l'un de ses nombreux carnets d'observations (où l'on trouvait également de nombreux croquis comme ceux présentés en Fig. I.6) : *l'eau qui tombe en ligne perpendiculaire par un tuyau arrondi sur un lieu plan, tracera une onde circulaire autour de l'endroit percuté ; à l'intérieur de ce cercle, l'eau se mouvra très rapidement et s'étalera en une couche fort mince autour du point frappé, puis finira par heurter la vague qu'elle a produite qui cherche à retourner au lieu de la percussion.* [31]

Les premières expériences contrôlées sur le ressaut circulaire hydraulique sont, elles, dues à Felix Savart [102, 103]. Lors de ces études de nappes et cloches liquides formées par l'impact d'un jet perpendiculaire sur un plan horizontal, il se place parfois à faible débit, la structure qu'il observe alors est celle d'un ressaut hydraulique circulaire. Il s'est donc attaché à la décrire et à la reproduire dans son Mémoire (voir Fig. I.7).

On doit à Lord Rayleigh en 1914 [94] l'une des premières publications rapprochant le cas du ressaut hydraulique dans un canal et celui du ressaut circulaire stationnaire que l'on peut observer lors de l'impact d'un jet. Dans ce travail, qui reprend la condition de choc proposée par Bélanger, il est

2. Au niveau de l'impact du jet on observe aussi une zone de stagnation.

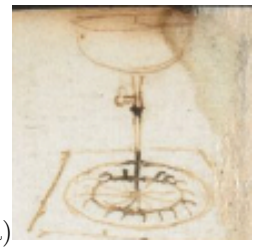
(a)  (b) (c)

FIGURE *I.6 – Croquis issus des carnets de Léonard de Vinci dans la partie "Percussion de l'eau tombant sur divers objets". On y retrouve les premières observations concernant le ressaut circulaire hydraulique. On remarquera en particulier l'intuition de de Vinci proposant trois expériences différentes : (a) le ressaut hydraulique sur une surface plane sans bords (ou mur de confinement), (b) l'interaction de plusieurs jets et l'interaction des ressauts qui en découlent et (c) le ressaut hydraulique sur une surface plane mais avec un bord. On retrouvera ces croquis dans les carnets [31] dont les originaux sont conservés à la British Library.*

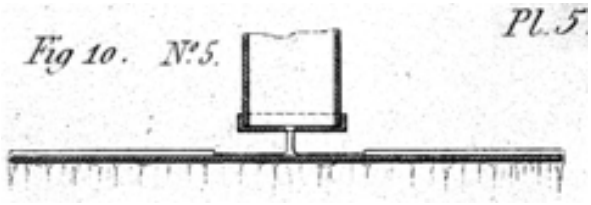


FIGURE *I.7 – Vue de côté d'un ressaut hydraulique circulaire reportée par Savart dans [102].*

également fait état de la dissipation d'énergie qui a lieu lors du choc : même pour un liquide inviscide, comme celui considéré jusqu'à présent, l'énergie n'est pas conservée de part et d'autre du choc. On doit donc à Rayleigh l'application des théories, déjà bien établies dans le cas d'un ressaut dans un canal, au cas du ressaut circulaire, même s'il ne les a pas traitées lui-même.

Ces travaux en inviscide sont suffisants pour prédire la position du choc en connaissant les hauteurs amont et aval comme cela est expliqué dans l'article de Watson [114]. Cette théorie sera développée plus loin mais on peut dorénavant dévoiler qu'elle donne une très mauvaise prédiction de la position du ressaut. L'approximation d'un fluide inviscide est beaucoup trop forte même pour traiter le cas usuel où la viscosité n'est jamais négligeable.

C'est Tani [108] qui tentera la première modélisation du ressaut "visqueux". En effet, une couche limite visqueuse se développe après l'impact du jet et envahit rapidement toute l'épaisseur de liquide dans la zone interne. Cette couche limite a pour effet de ralentir grandement le liquide, modifiant ainsi son épaisseur. Cette prise en compte de la composante visqueuse du liquide permet ensuite l'une des théories les plus abouties du ressaut circulaire : l'approche développée par Watson [114]. L'originalité de cette théorie est de découper la zone interne (avant le choc) en quatre parties distinctes (le choc, le développement de la couche limite, la transition vers un profil auto-similaire une fois que la couche limite a envahi l'épaisseur du liquide et enfin le profil auto-similaire)[3]. Le ressaut circulaire n'a depuis cessé d'intriguer la communauté scientifique donnant lieu à des études expérimentales [26, 76, 9, 10, 52, 42, 43, 13, 14, 99], de nombreuses simulations numériques [56, 117, 82] et des études théoriques [45, 11, 8, 49, 56, 57, 90, 12, 13, 113, 14, 93, 63, 28, 97, 98, 79]. Parmi celles-ci il convient toutefois de distinguer l'étude menée par Bohr *et al.* qui utilise les équations de couche limite et aboutit à une loi d'échelle simple, donnant cette position du ressaut en fonction des principaux ingrédients

3. Cette théorie est développée dans les pages qui suivent.

physiques du ressaut : la viscosité, le débit et la gravité [4].

I.4 De l'évier aux étoiles

Le ressaut circulaire est également vu comme un outil analogique d'analyse d'autres objets physiques. En particulier la transition entre zone supercritique et souscritique permet de modéliser de nombreux phénomènes à commencer par le passage d'une zone supersonique à une zone subsonique. Le ressaut hydraulique est ainsi analogue à l'onde de choc qui se forme près d'un avion supersonique et qui correspond au passage de la vitesse de l'air v d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à celle du son c. L'analogue du nombre de Froude est ici le nombre de Mach $Ma = v/c$. D'ailleurs en plongeant la pointe d'une aiguille dans la zone de faible épaisseur (et donc de forte vitesse) de la nappe liquide on observe, derrière l'obstacle la formation d'un sillage en forme de "V" caractéristique (voir Fig. I.8) ; l'angle de ce "V" dépend du nombre de Froude, comme les écoulements compressibles dépendent du nombre de Mach. [5]

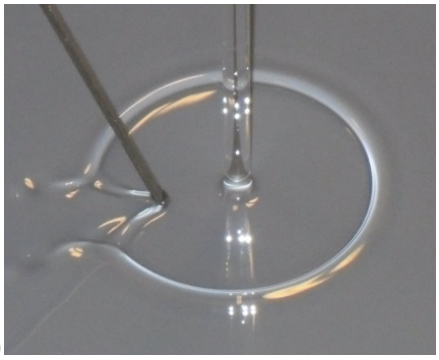
(a)  (b)

FIGURE *I.8 – (a) Ressaut circulaire hydraulique. On observe une ride en "V" ouvert vers l'extérieur ou cône de Mach. Cela correspond à un effet d'onde de choc, analogue au "bang" supersonique d'un avion. Photographie : Jannes et al. [60].(b) Photographie d'un avion de chasse en vol supersonique. La condensation de l'eau forme des nuages qui servent de marqueurs des zones en dépression. Le nuage triangulaire principal représente le cône de Mach le plus important, formé à partir du bord d'attaque de l'aile. Photographie : Charles Mc Cain, Flick.*

On peut aller encore plus loin avec un ressaut hydraulique. L'astrophysique nous propose des applications de ce phénomène à des échelles un million de fois plus grandes que notre évier. Foglizzo *et al.* proposent d'interpréter en terme hydrodynamique l'accrétion de neutrons entraînant la formation d'une étoile à neutrons couplée à une supernova [44] [6]. Pour modéliser expérimentalement un tel

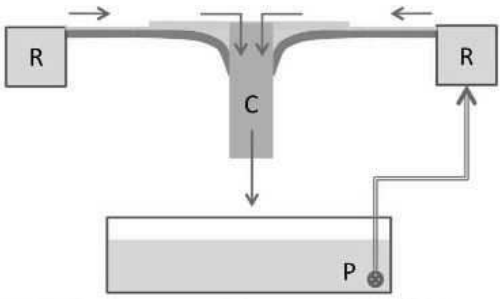
4. Nous développerons plus loin ce modèle. Nous détaillerons également l'apport théorique de la plupart des études citées ici en tachant d'en faire ressortir les grandes lignes.

5. Comme dans le cas du nombre de Mach où l'on observe une zone transsonique complexe pour $0,94 < Ma < 1,2$, la valeur du nombre de Froude n'est jamais de 1 au niveau du choc. Fr passe de $Fr > 1$ à $Fr < 1$ brutalement puisqu'il n'est pas possible de définir Fr au niveau du choc. L'écoulement du liquide devenant vertical, il n'est alors plus comparable de façon simple à la célérité des ondes de surface...

6. Pour mémoire, une étoile à neutrons est un astre principalement composé de neutrons maintenus ensemble par les forces de gravitation. De tels objets sont le résidu compact issu de l'effondrement gravitationnel du cœur d'une étoile massive quand celle-ci a épuisé son combustible nucléaire. Cet effondrement s'accompagne d'une explosion des couches externes de l'étoile, qui sont complètement disloquées et rendues au milieu interstellaire, phénomène appelé supernova.

phénomène à notre échelle Foglizzo *et al.* propose un dispositif ingénieux : un "ressaut circulaire inversé". Dans une géométrie cylindrique, une nappe de liquide de faible épaisseur est injectée par les côtés sur une surface de forme hyperbolique $H_{grav}(r) \propto -\frac{1}{r}$, un ressaut se forme ensuite et l'écoulement vers le tube d'évacuation central se fait ensuite en régime sous-critique [7]. La forme hyperbolique est analogue au potentiel de gravité dû au coeur dense de la proto étoile à neutron. La hauteur de liquide est reliée à la densité d'un gaz compressible (ici un gaz de neutrons) et le ressaut hydraulique figure le choc d'accrétion de l'étoile à neutrons. Une illustration de l'expérience est proposée en Fig. I.9. Une fois encore, le nombre de Froude dans cette géométrie permet l'analogie avec le nombre de Mach. Les résultats de Foglizzo *et al.* montrent que sous certaines conditions une instabilité se développe et brise la symétrie et cela de manière analogue à ce qui se passe pour une étoile à neutrons.

(a)



(b)

FIGURE *I.9 – (a) Comme dans le cas du ressaut hydraulique classique, l'expérience de Foglizzo et al. est centrée sur le ressaut hydraulique. L'eau est injectée par les bords à l'aide d'un réservoir annulaire d'injection (R) le long d'un potentiel hyperbolique de hauteur et évacuée par un cylindre vertical (C) dont le mur figure la surface de l'étoile à neutron. Une pompe (P) distribue l'eau récupérée dans le réservoir. (b) La photographie illustre le caractère axisymétrique et stationnaire de l'injection d'eau dans une configuration stable. On observe dans la zone externe le film mince de forte vitesse puis le ressaut hydraulique et enfin la couche épaisse. Schéma et photographie extraits de Foglizzo et al. [44].*

Un autre phénomène en cosmologie dont le ressaut circulaire est un système modèle est le "trou blanc" soit un trou noir regardé en inversant le temps ; on parlera plutôt de retournement temporel. En effet, il existe une analogie mathématique entre la propagation de champs dans un espace-temps en relativité générale et les ondes gravitaires à la surface d'un liquide en mouvement. En particulier les émissions stimulées de radiation thermique d'un trou blanc peuvent être mises en lien avec les ondes de surface que l'on peut observer en amont d'un obstacle placé dans un écoulement rapide [115]. Le parallèle entre ressaut et trou blanc a été proposé par plusieurs groupes : Volovik [110], Ray *et al.* [93] et Jannes *et al.* [60]. Pour Volovik, dans la partie interne du ressaut la vitesse du liquide dépasse la célérité des ondes gravito-capillaires (ripplons). Ces ripplons sont donc considérés comme relativistes puisque advectés par le liquide et ne pouvant se propager dans cette zone interne. La même métrique [8] peut donc être utilisée pour décrire à la fois le trou blanc et la propagation de ces ripplons. Cette approche théorique est ensuite reprise et développée par Ray *et al.* qui étudient les ondes stationnaires et propagatives dans les zones internes et externes du ressaut circulaire hydraulique. Jannes *et al.* cherchent à apporter des preuves expérimentales sur ce lien entre ressaut circulaire et trou blanc (appelé aussi fontaine gravitationnelle) en mesurant l'angle du cône de Mach créé en plongeant une aiguille

7. Il s'agit donc de l'expérience inverse du jet impactant : un film liquide à forte vitesse est injecté par les bords d'une plaque, donne naissance à un ressaut hydraulique et s'évacue par un tube centrale.

8. Painlevé-Gullsrand à 2+1 dimension

dans la zone interne du ressaut (il s'agit du fameux "V" décrit plus haut et illustré par la Fig. I.8). Ils se proposent en outre de démontrer théoriquement le caractère "superluminal" de la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires puisque la vitesse des ondes est bien inférieure à celle du liquide.

I.5 Ressaut circulaire, vortex et polygones

I.5.1 Structure du ressaut circulaire

D'un point de vue hydrodynamique, le ressaut circulaire est un exemple remarquable de la complexité que peut revêtir la sélection de forme d'un écoulement à surface libre. En particulier la structure propre du ressaut soulève des questions fondamentales : le choc est accompagné par un décollement de la couche limite qui se développe dans la zone interne. Ce décollement peut s'accompagner de phénomènes de recirculations qui peuvent donner lieu à des brisures de symétries susceptibles d'être généralisées à d'autres situations physiques comme nous le verrons plus loin.

Historiquement cette question de la structure est née de la volonté de fixer des murs au bout de la plaque sur laquelle on fait impacter le liquide, ainsi qu'illustré sur la Fig. I.10. L'idée était simple : si la hauteur du mur H_{mur} est suffisante on peut considérer que la hauteur du mur correspond à peu près à la hauteur de liquide juste après le ressaut H_J. Cela permettait de fixer une des variables dans l'équation du choc de Bélanger (I.1) et donc de simplifier la résolution du problème. Il est alors apparu que ces murs de confinement pouvaient avoir une influence énorme, changeant la structure même de l'écoulement après le choc et en particulier donnant naissance à des vortex de recirculation. L'apparition de ces vortex et les différents modes de recirculation permettent de définir plusieurs types de ressauts.

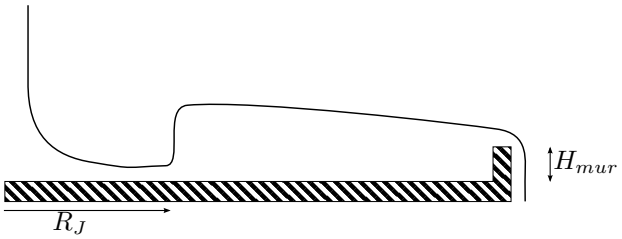


FIGURE *I.10 – Schéma d'un ressaut hydraulique vu de côté. On se propose de rajouter un mur de confinement de hauteur H_{mur} en bord de plaque et d'observer son influence sur R_J ainsi que sur la structure même de l'écoulement.*

Ces différents types de ressaut ont d'abord été observés par Craik *et al.* [26] puis Liu *et al.* [76]. Nous nous proposons ici de répertorier les structures observées jusqu'à présent. [9]

Le ressaut de type I (voir Fig. I.11) est considéré comme le ressaut circulaire classique, il est obtenu avec des murs de faibles hauteurs, voire pas de mur du tout [108] comme c'est le cas dans notre dispositif expérimental. Il se caractérise par un écoulement radial à l'exception d'une zone de recirculation simple juste en aval du ressaut. Il est à noter que cette zone de recirculation peut être

9. La nomenclature type I, II est due à Ellegaard *et al.* [9] et la distinction entre type IIa et IIb est, elle, due à Liu *et al.* .

extrêmement faible, en particulier en l'absence de mur de confinement. [10]. Le type IIa se caractérise lui par un vortex (ou bulle de séparation) similaire au précédent mais de plus grand rayon et surtout par un deuxième vortex ayant pour effet de renverser le sens de la vitesse de surface au niveau du mur liquide (voir Fig. I.11). Lorsque la hauteur extérieure augmente davantage, le ressaut se transforme en type IIb caractérisé par une structure en "double ressaut". (voir Fig. I.11). Le ressaut devient ensuite irrégulier et instationnaire. On peut aussi observer un entrainement d'air à la base du ressaut qui sera responsable de perturbations supplémentaires...

En résumé, lorsque l'on augmente la hauteur du mur extérieur, tout autre paramètre laissé fixe, on observe successivement : un ressaut de type I puis un ressaut de type IIa, un ressaut de type IIb et enfin un ressaut instable.

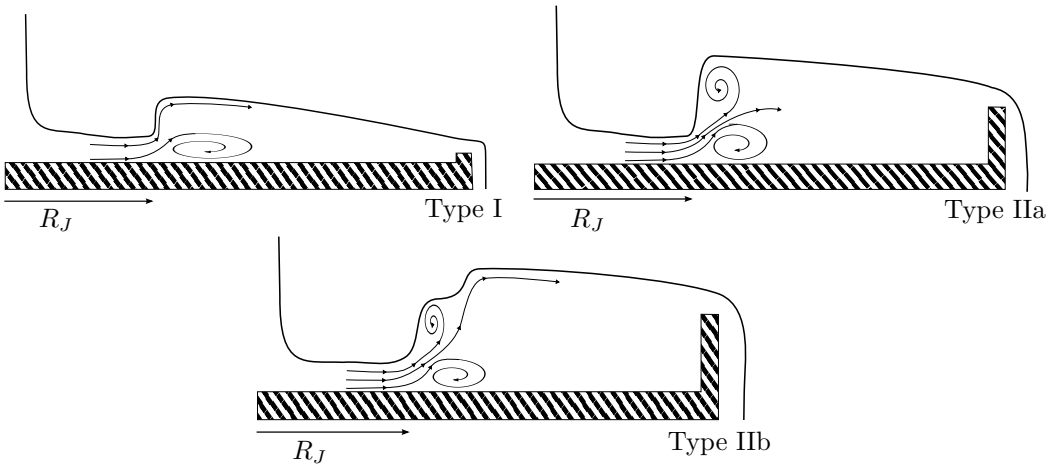


FIGURE *I.11 – Lorsque l'on augmente progressivement la hauteur extérieure H_{mur} on observe des changements successifs dans la structure même de l'écoulement du ressaut circulaire laminaire. Pour H_{mur} faible on a un ressaut de type I (faible zone de recirculation après le choc). On augmente H_{mur} et l'on transite alors brutalement vers un ressaut de type IIa (apparition d'un deuxième vortex en surface du mur liquide : le sens de la vitesse de surface du mur est alors opposé à celui de l'écoulement général). Pour H_{mur} élevé on observe un ressaut de type IIb (similaire au précédent mais avec un double ressaut).*

Il est difficile d'aller au-delà de cette vision très qualitative : les paramètres intervenant dans les transitions entre différents types sont en effet extrêmement nombreux : viscosité, débit, tension de surface, hauteur du mur, rayon de la plaque, rayon de la buse... Si bien qu'il n'existe pas à ce jour de diagramme de phase vraiment complet. On peut toutefois citer le travail de Bush *et al.* qui a déjà fortement débroussaillé l'influence des différents paramètres expérimentaux dans la référence [14] sans toutefois aboutir à un tel diagramme de phase. Il faut aussi noter que les passages entre différents types de ressaut sont des phénomènes hystérétiques, il reste donc encore nombre de choses à apprendre sur ce sujet.

10. Malgré tous nos efforts nous ne sommes pas parvenus à visualiser cette zone de recirculation simplement avec notre dispositif expérimental (ce qui laisse même l'hypothèse ouverte d'un éventuel type 0 sans aucune recirculation)

I.5.2 Vers le facettage

Une importante observation faite par Ellegaard *et al.* est que le ressaut hydraulique de type II (et seulement celui-là) peut se déstabiliser pour adopter une forme polygonale stable et stationnaire. Un ressaut polygonal a au moins trois côtés mais on peut atteindre des polygones d'une dizaine de côtés (voir Fig. I.12). Une fois encore rappelons que l'exploration de l'espace des phases n'a jusqu'à présent pas été faite de manière complète, il n'y a donc pas actuellement de limite au nombre de côtés possibles pour un ressaut ![11] Pour obtenir de tels ressauts polygonaux, il est utile de suivre quelques recommandations : le débit du liquide doit être modéré pour éviter de se placer dans un régime turbulent ou instable, le liquide doit avoir une tension de surface importante (on utilise typiquement des mélanges eau-glycérol de viscosités variables et de tension de surface voisine de 65 mN/m). Cet effet de la tension de surface semble critique : l'ajout d'une à deux gouttes de surfactant (par exemple un liquide vaisselle commercial) à un ressaut pentagonal stable et stationnaire suffit à supprimer l'instabilité polygonale et à retrouver une forme circulaire [14].

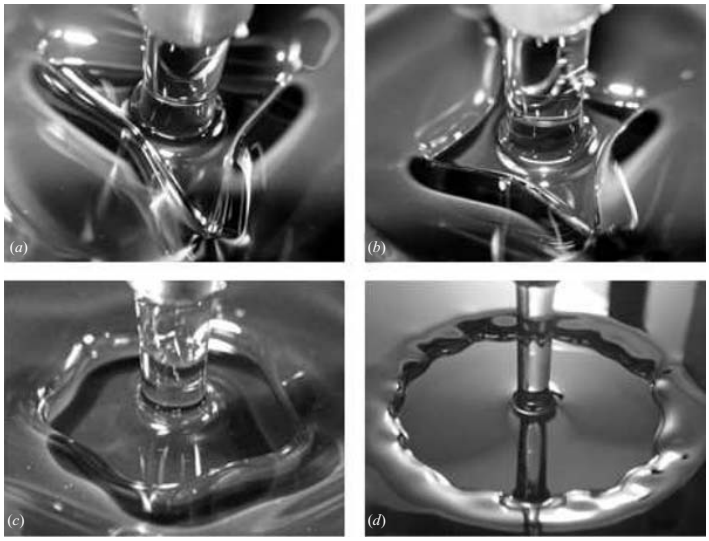


FIGURE *I.12 – Plusieurs formes de ressaut observées en régime polygonal : (a) triangle, (b) carré, (c) pentagone , (d) polygone à n côtés. Il est à noter que cette déstabilisation en ressaut polygonal ne peut être obtenue que pour des ressaut de type II. Photographies tirées de Bush et al. [14].*

Bush *et al.* montre qu'en modifiant la taille de la buse on pouvait obtenir un autre type de facettage que celui exhibé pour la première fois par Ellegaard *et al.* [42, 43] et pressenti pour la première fois par Craik *et al.* qui y fait référence dans son étude [26]. Il appelle ce nouveau régime "clover" (ou trèfle en français) il se caractérise par de nouvelles structures présentées en Fig. I.13 incluant un ressaut "ovale", un ressaut "oeil de chat", un ressaut "noeud papillon", un ressaut "papillon" ou encore des ressauts "trèfle" à trois, quatre (ou même davantage) feuilles [12]. Ces ressauts se caractérisent, comme on peut le constater visuellement, par une structure de type IIb.

Certaines de ces formes montrent des effets instationnaires se caractérisant, par exemple, par un

11. A notre connaissance, la publication la plus complète sur ce sujet est encore celle de Bush *et al.* [14].
12. Bien sûr les ressauts trèfles à 4 feuilles portent bonheur...

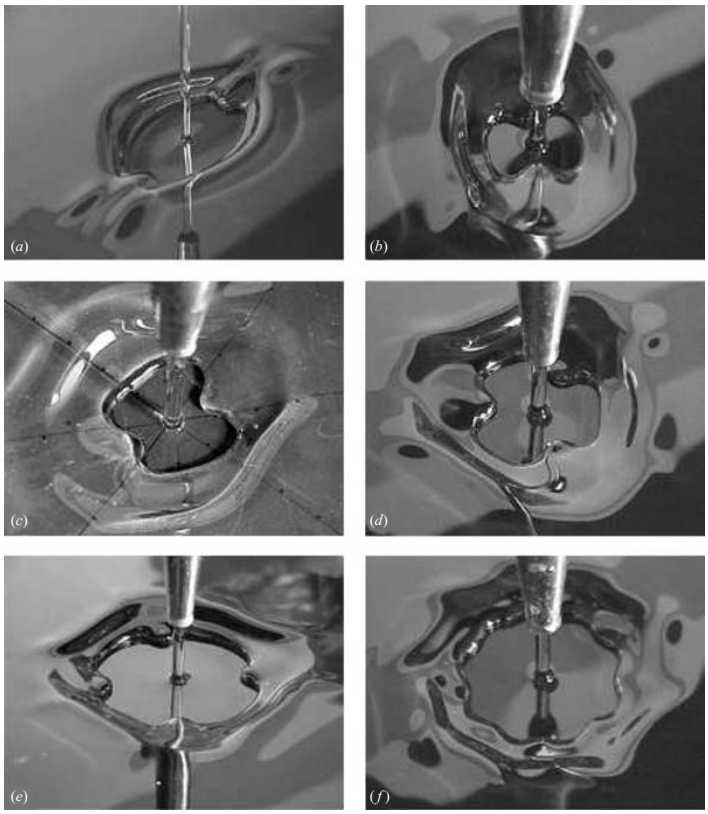


FIGURE *I.13 – Formes de ressaut observées dans le régime trèfle : (a) oeil de chat, (b) noeud papillon, (c) papillon, (d) trèfle à trois feuilles, (e) trèfle à quatre feuilles, (f) trèfle octogonal. On peut remarquer sur ces photos la structure typique "double ressaut" caractéristique des ressauts de type IIb. Photographies tirées de Bush et al. [14].*

mouvement de rotation de l'ensemble de la structure du ressaut. L'écoulement qui engendre le ressaut polygonal est décrit par Ellegaard *et al.* [43] et peut être observé à l'aide de microbulles en suspension dans l'écoulement (voir Fig. I.14). De manière évidente l'écoulement cesse d'être radial lorsqu'il atteint le ressaut. Le fluide est partiellement redirigé le long du front du ressaut par le vortex (voir Fig. I.11) et est donc "canalisé" vers les coins du ressaut, où en résulte des jets radiaux "sortant" de ces coins.

Pour clore ce sujet rappelons qu'une modélisation théorique de ce phénomène a été proposée par Martens *et al.* [79]. Ce modèle repose sur la conservation de la masse, l'équilibre des forces radiales entre la pression hydrostatique et les contraintes visqueuses à la surface du vortex, mais aussi avec un terme de tension de surface à travers la pression qu'elle induit. Ce modèle peut être linéarisé autour de l'état circulaire. Un modèle simplifié mais soluble analytiquement peut en être ensuite extrait et il permet de conclure à l'existence de formes polygonales. Il conclut aussi à la sélection du nombre de côtés par une instabilité similaire à Rayleigh-Plateau.

I.5.3 Généralisations à d'autres configurations d'écoulements axisymétriques

Une récente étude menée par Labousse *et al.* tend à montrer que les mécanismes qui conduisent à la déstabilisation en ressaut polygonal peuvent être généralisés à d'autres situations expérimentales [70].

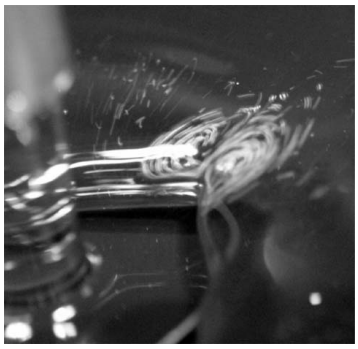


FIGURE *I.14 – On peut voir sur cette image la trainée laissée par les microbulles en suspension dans l'écoulement au voisinage d'un coin de ressaut hydraulique polygonal. La vitesse d'obturation était de 1/100 s ; l'image montre donc clairement la grande vitesse de l'écoulement. On notera les zones de recirculation visibles au niveau du ressaut et les tourbillons jouxtant les coins. Photographie de Bush et al. extraite de [14].*

Il en est ainsi pour la déstabilisation d'un tore liquide maintenu en lévitation par l'effet Leidenfrost en un tore polygonal (voir Fig. I.15) [83]. Ce sont également les mêmes mécanismes qui conduisent à la déstabilisation du "bump" hydraulique en bump polygonal [69].

Un bump hydraulique est obtenu par un jet plongeant dans un bain du même liquide : au delà d'un débit seuil on peut observer une déplétion de la surface au voisinage du jet. C'est cette déplétion, illustrée en Fig. I.15, qui est appelée bump hydraulique. L'écoulement se caractérise par un vortex circulaire sous la surface. Ce vortex est circulaire à de faibles débits mais peu aussi se déstabiliser en une forme polygonale.

Cette étude théorique montre que deux mécanismes d'instabilité sont impliqués dans la déstabilisation d'un vortex toroïdal (d'un tore circulaire à un tore polygonal) : la tension de surface (typiquement une instabilité de type Rayleigh-Plateau) et l'inertie du fluide. Une analyse de stabilité permet de prédire le nombre de côtés du polygone ainsi formé et de quantifier le rôle de chacun des deux mécanismes. Ces résultats théoriques offrent un accord excellent avec les observations expérimentales.

I.6 Autres ruptures (forcées) de symétrie

Il est possible d'observer d'autres types de ruptures de symétries du ressaut celles-ci forcées et non plus spontanées, dans d'autres configurations expérimentales. Dressaire *et al.* [36, 37] ont par exemple montré qu'une modification du substrat permettait d'obtenir des ressauts polygonaux via des mécanismes différents de ceux présentés précédemment. Il est aussi possible de briser la symétrie du ressaut en inclinant le jet liquide par rapport à l'horizontal.

I.6.1 Rupture de symétrie par texturation du substrat

Dans la plupart des situations, les particularités du substrat peuvent a priori être négligées. Le liquide inondant totalement la surface impactée, le seul effet du substrat réside dans la condition de non glissement du fluide au contact de la plaque. Pourtant Dressaire *et al.* se sont intéressés à l'impact d'un jet vertical sur une plaque horizontale micro texturée permettant de modifier cette condition de non glissement d'un point de vue macroscopique [36, 37].

Dressaire *et al.* a étudié l'écoulement induit par l'impact d'un jet sur un motif régulier de micro

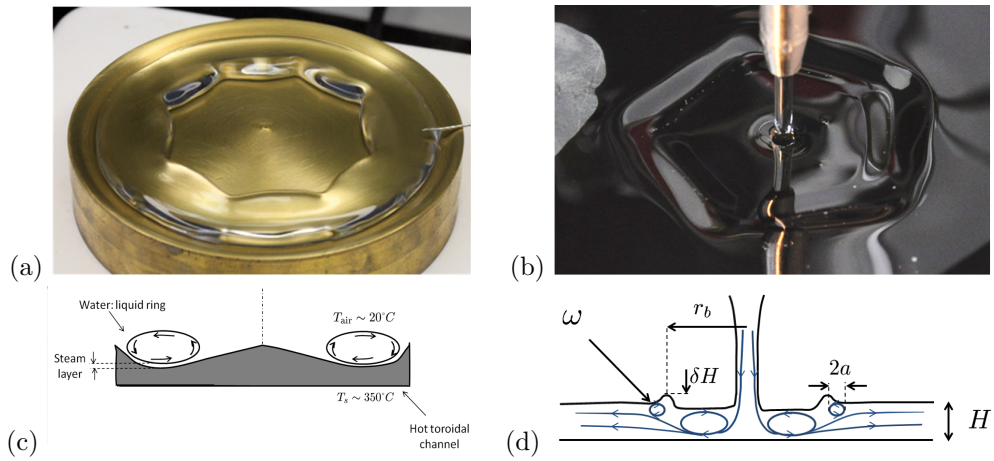


FIGURE *I.15 – (a) Photographie d'un tore en lévitation sur son propre film de vapeur. L'écoulement en vortex toroïdal se déstabilise avec formation d'un polygone sur le bord intérieur [83]. (c) Schéma en vue de côté de l'expérience. Un vortex à surface libre est maintenu par un support très chaud incurvé. Photographie de Perrard et al. extraite de [83]. (b) Photographie d'un bump hydraulique polygonal obtenu par un jet plongeant radialement dans un bain du même liquide [69]. (d) Schéma de l'expérience. Ici aussi on peut observer un vortex près de la surface. Photographie de Labousse et al. extraite de [69].*

piliers dont la taille est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche mince du ressaut ($\sim$ quelques centaines de microns). Cette équipe a montré que l'organisation des micro piliers avait une influence sur la taille et sur la forme du ressaut hydraulique formé dans une telle situation. En fonction du motif d'organisation des micro piliers on peut observer de manière stable un ressaut circulaire ou un ressaut polygonal. Ces résultats sont illustrés dans la Fig. I.16.

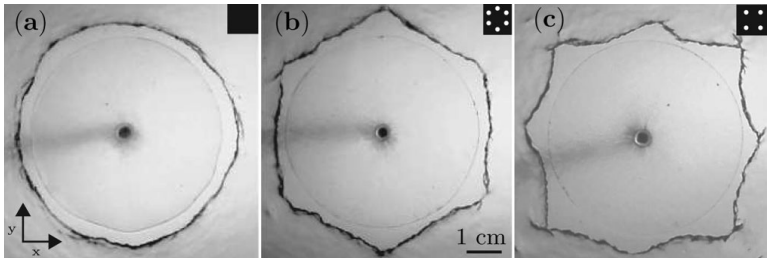


FIGURE *I.16 – Illustration de l'influence du motif d'arrangement des micro piliers sur le ressaut hydraulique formé par l'impact d'un jet d'eau : (a) sur une surface lisse, (b) sur un motif hexagonal et (c) sur un motif carré. Photographies de Dressaire et al. extraites de [36].*

Ces résultats peuvent être aisément interprétés :
(i) La diminution du rayon moyen du ressaut s'explique simplement par le fait que les piliers induisent une perte de charge et donc une diminution du débit. On peut en effet considérer l'écoulement au travers des micro piliers comme un écoulement dans un poreux et ainsi utiliser les lois de Darcy pour décrire la perte de charge au travers de ces micro piliers.
(ii) La formation de ressauts polygonaux se comprend aussi aisément : les micro pilier sont responsables d'une longueur de glissement effective et cette longueur de glissement l_0 dépendra de l'angle que forme la vitesse par rapport aux motifs de micro piliers. Si le liquide "rencontre" beaucoup de micro piliers

sur sa route il ralentira davantage et donc le ressaut se formera plus tôt que le liquide ayant une orientation où il rencontre moins de micro piliers. On comprend ainsi pourquoi l'écart au cas circulaire est fortement dépendant de l'écart entre les piliers pour un même motif... (voir Fig. I.17)

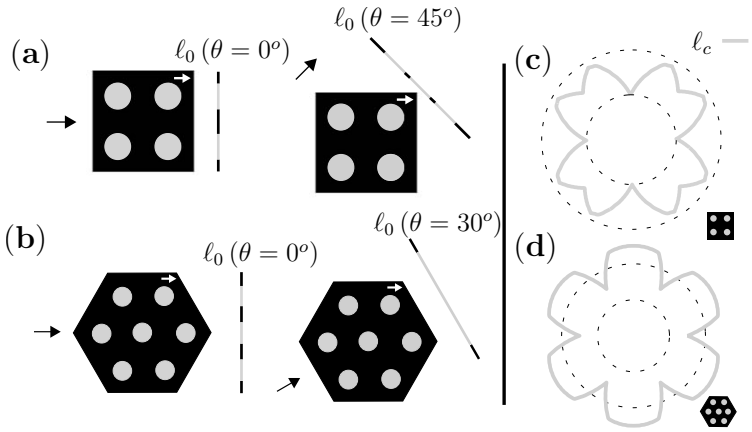


FIGURE *I.17* – *La longueur de glissement effective est supposée proportionnelle à $l_0(\theta)$, défini comme la fraction ouverte de la surface que rencontre l'écoulement pour une cellule du motif (carré (a) ou hexagonal (b)). La cellule unité d'un motif est ici représentée dans le plan et définie par le haut de ses piliers. θ est défini comme l'angle entre la direction de l'écoulement (indiqué par la flèche noir) et l'axe principal du motif (flèche blanche). $l_c(\theta)$ est défini, lui, comme la projection du sommet circulaire des piliers sur la direction perpendiculaire à l'écoulement, c'est-à-dire la somme des longueurs de segment gris de (a) et (b). Autrement dit $l_c(\theta)$ est la mesure de l'"encombrement géométrique" pour un angle θ. La longueur effective de glissement est donc supposée proportionnelle à $l_0(\theta) = 2D - l_c(\theta)$ où D est la longueur d'une maille du motif. La dépendance angulaire de $l_c(\theta)$ est représentée pour un motif carré (c) et hexagonal (d). Photographies de Dressaire et al. extraites de [37].*

Ces effets peuvent bien sûr être quantifiés et ajoutés à la théorie de Watson [114]. Les comparaisons entre la théorie et les expériences semblent être en excellent accord dans les deux références [36, 37] .

I.6.2 Importance du substrat : effet du mouillage

On peut également obtenir des brisures de symétrie du ressaut en utilisant des substrats texturés sans que le liquide ne pénètre les texturations comme ont pu le montrer Maynes *et al.* [80] qui utilisent des substrats texturés rainurés en situation de quasi non mouillage. [13]

Toutefois les travaux de Maynes *et al.* [80] présentent aussi un intérêt majeur dans la perte de l'axisymétrie de l'écoulement en zone externe. Il ne s'agit pas a priori d'une brisure de symétrie du choc même si les effets observés sur la couche externe sont susceptibles de jouer sur le choc.

13. Les surfaces texturées qu'ils utilisent sont fortement anisotropes : il s'agit d'une succession de murs parallèles micrométriques (comme si le matériau avait été griffé...). Ces murs sont espacés d'une distance grande devant la largeur du mur. Le ressaut hydraulique adopte une forme elliptique, l'axe principal étant parallèle à la direction des nervures. Cela s'interprète aisément grâce aux travaux de Dressaire *et al.* décrits dans la section précédente : il n'y aura pas dans ce cas de perte de charge car le liquide ne pénètre pas entre les piliers (à cause de la super hydrophobicité) par contre la longueur de glissement effective dépendra bien de l'angle de l'écoulement par rapport au motif et conditionnera bien la forme observée pour le ressaut.

Le travail de Maynes *et al.* se concentre sur l'impact de jet sur des surfaces hydrophobes isotropes (ou texturées, super hydrophobes et anisotropes [80]). Les angles de contact entre le liquide et la plaque sont ici si élevés (à partir de 117°) que le liquide ne peut recouvrir entièrement la plaque. On observe alors de profondes brisures de symétrie dans la zone externe : une flaque par laquelle s'écoule le liquide (voir Fig. I.18 (a)). Dans certaines situations on aboutira même à la disparition du ressaut remplacé alors par un front d'atomisation où le liquide est évacué en gouttes. (voir Fig. I.18 (b)).

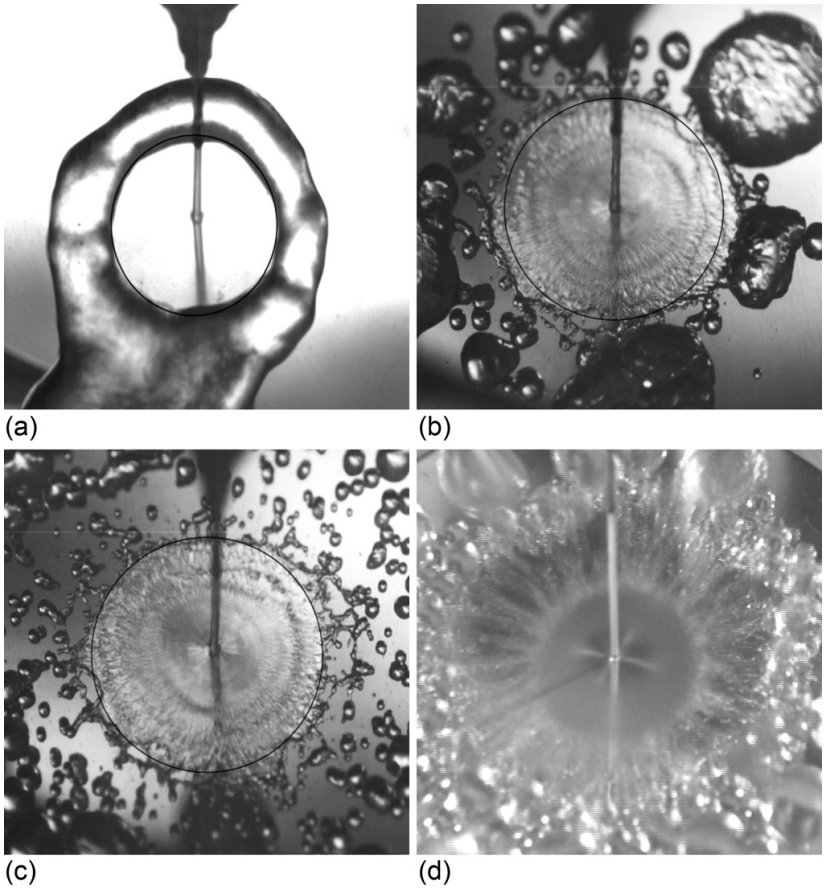


FIGURE *I.18 – Photographies de jets impactants une surface hydrophobe (117°). La vitesse d'ouverture de l'appareil est 1/5000 s excepté pour la photo (d) où la vitesse d'ouverture est de 1/30 s et permet l'observation de la dynamique loin de la zone d'impact. (a)* $We = 700$ *: présence d'un ressaut hydraulique, le liquide s'évacue via une flaque. (b)* $We = 1300$ *: le ressaut hydraulique disparaît et l'on observe la fragmentation de la nappe de liquide en grosses gouttes. (c) et (d)* $We = 1900$ *: la fragmentation se fait en gouttes plus petites. Un cercle noir est superposé à toutes ces photos (sauf(d)) pour bien montrer le caractère circulaire de la transition. Photo : Maynes et al. Voir ref [80].*

Il apparaît ici que le bon paramètre de contrôle n'est plus le débit comme dans les cas précédents mais bien le nombre de Weber We du jet défini comme $We = \rho U^2 \phi / \gamma$ où ρ est la masse volumique du liquide (ici de l'eau), U est la vitesse du liquide en sortie de buse, ϕ le diamètre de la buse et γ la tension de surface du liquide. En effet, pour un même débit, on peut observer aussi bien l'un ou l'autre des régimes détaillés ci-dessous (zone externe sous forme de flaque ou fragmentée) en faisant varier le diamètre de la buse. Pour résumer on observe en augmentant le Weber :

(i) Pour des tout petits We, on observe un ressaut hydraulique "standard" mais l'évacuation du liquide se fait par une flaque localisée autour du ressaut malgré le soin apporté au réglage de l'horizontalité. Comme cela peut se voir sur la Fig. I.18 (a), on observe que cette brisure de symétrie ne semble pas avoir d'influence au niveau du ressaut en lui même.
(ii) Au delà d'un We critique : on observe la disparition du ressaut au profit d'un front de fragmentation de la couche mince de liquide en grosses gouttes (les gouttes expulsées coalescent immédiatement en grosses gouttes). (Fig. I.18 (b))
(iii) Si l'on augmente encore We la couche mince se fragmente en gouttes de plus en plus petites. (Fig. I.18 (c))

On peut expliquer ce phénomène simplement : ce cas de fragmentation est analogue à celui d'une nappe de Savart [101, 102, 21] : il existe une compétition entre l'inertie qui cherche à étendre la nappe et la tension de surface qui s'oppose à cette extension. On peut donc, à partir de ces deux quantités, construire le nombre adimensionné pertinent qui n'est autre que le nombre de Weber local. On peut s'attendre à ce que la limite nappe liquide/atomisation advienne à un nombre de Weber local critique que l'on peut même supposer égal à 1. Cette hypothèse est testée et semble assez concluante : malgré un gros écart entre les différentes valeurs (entre 0,7 et 1,6), il n'y a pas clairement de tendance.

I.6.3 Brisure de symétrie par modification de la géométrie

Il est possible d'observer des ruptures de symétries en brisant la géométrie du systèmes. Il est par exemple possible d'incliner le jet impactant comme cela a été fait récemment [64, 65, 66, 68, 109]. On observe alors des formes variées de ressauts hydrauliques. On peut en particulier distinguer le cas où le ressaut est ovoïde et le cas où le ressaut présente un ou plusieurs "coins". Des exemples de ces différents types de ressaut dus à un jet incliné sont présentés sur la Fig. I.19. [14]

On peut aussi briser la symétrie d'un ressaut en faisant impacter un jet sur une plaque horizontale en mouvement [50, 67, 105]. [15]

Un dernier moyen de briser la symétrie est d'incliner le substrat par rapport à l'horizontale [16]. Cette situation n'a pour ainsi dire pas été explorée excepté dans le cas limite d'un jet impactant un plan vertical en situation de mouillage partiel [116, 111]. Nous nous attacherons donc à fournir dans ce mémoire une première exploration expérimentale et quelques pistes théoriques sur ce sujet.

I.7 Ressaut circulaire et non mouillage

Le ressaut circulaire hydraulique peut aussi être le terrain d'expériences de non mouillage. Sreenivas *et al.* [107] relatent en effet la non coalescence d'une goutte de liquide dans un ressaut circulaire hydraulique d'eau : la goutte se retrouve piégée contre la paroi liquide du ressaut et séparée du bain liquide par un film d'air entraîné en permanence par l'écoulement liquide du ressaut hydraulique (voir schéma Fig. I.20).

Pirat *et al.* ont par ailleurs montré que dans le cas d'un ressaut quasi circulaire (incliné d'environ 1°) la goutte se mettait spontanément en mouvement et oscillait au sein du ressaut hydraulique [86].

14. Nous reviendrons plus en détail sur ce sujet dans l'introduction de la Partie II.
15. Nous reviendrons sur cette situation finalement assez méconnue dans l'introduction de la Partie II.
16. Le plus simple est de conserver un jet perpendiculaire à la plaque mais il est aussi possible d'incliner le jet.

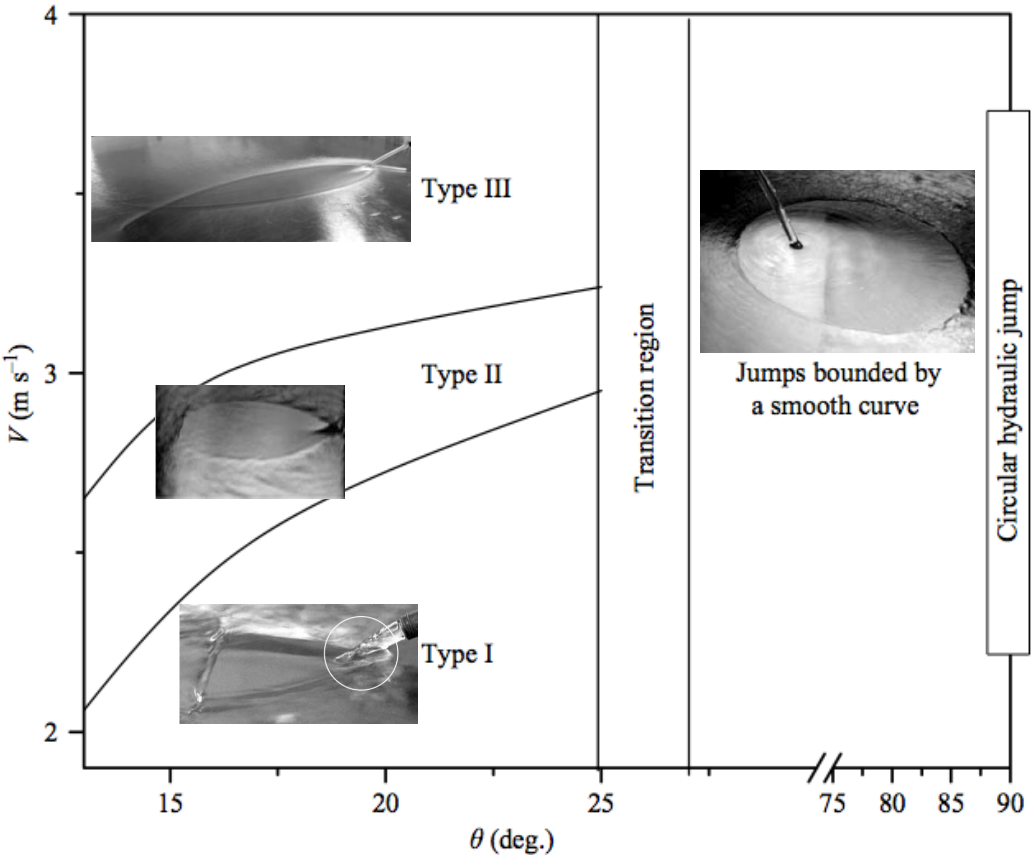


FIGURE *I.19 – Lorsque l'on impacte une surface horizontale à l'aide d'un jet liquide on observe différentes structures possibles pour le choc. Dans une très large gamme, on constate un ressaut ovoïde mais pour de fortes inclinaisons on peut observer la formation de "coins liquides" dont le nombre et la forme varient en fonction du débit et de l'inclinaison du jet. On retrouvera ces photographies et le diagramme de phase dans la référence [64].*

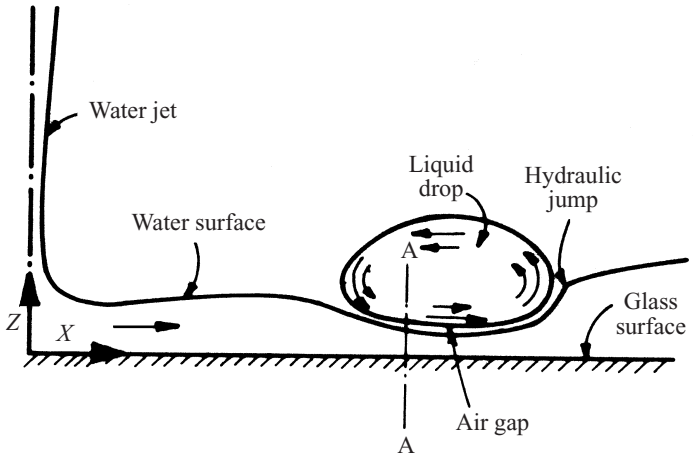


FIGURE *I.20 – Schéma de coupe représentant une goutte en lévitation dans un ressaut hydraulique circulaire. Ce schéma est extrait de la référence [107].*

Nous sommes donc dans un cas nouveau de dynamique d'une goutte en situation de non mouillage. [17]. Nous allons dans le présent mémoire nous intéresser à la situation inédite d'une goutte dans un ressaut circulaire hydraulique parfaitement horizontal. Nous verrons ainsi une grande richesse de dynamiques pour cette goutte en lévitation sur un film d'air.

Cette situation de non mouillage s'inscrit dans une étude plus globale consistant à étudier la dynamique des gouttes en situation de lévitation. Pour obtenir une situation où la goutte est séparée du substrat (liquide ou gazeux) la technique la plus simple consiste à faire chauffer le substrat et obtenir un film de vapeur émanant de la goutte, on parle alors de caléfaction [73]. On peut également obtenir un film d'air en faisant rebondir la goutte sur le substrat [88, 47]. On peut enfin "tricher" en se mettant en situation de quasi lévitation en utilisant un substrat super-hydrophobe basé à la fois sur une texturation et une forte hydrophobie du matériau utilisé ou en recouvrant la goutte d'une poudre hydrophobe qui séparera la goutte du substrat.

Les dynamiques de ces gouttes lévitantes sont radicalement différentes de celles observées en situation classique. Ainsi une goutte en lévitation descendra une pente 100 à 1000 fois plus vite que la même goutte sur un substrat classique [78, 1, 92]. Dans le même ordre d'idée, les gouttes en lévitation peuvent rebondir avec une élasticité remarquable [24] ce qui peut conduire à des effets surprenants : des gouttes d'huiles sur un bain d'huile vibré ne coalescant jamais. Les interactions entre les ondes de surface qu'elles produisent et leurs rebonds conduisent à de nouvelles dynamiques comme une dualité onde-particule [25, 39, 85]. Nous reviendrons davantage sur ces phénomènes dans la Partie III.

Le ressaut hydraulique nous donne donc l'occasion d'observer un tel système onde-particule (la goutte créant un sillage) cependant la goutte n'est pas ici "sautante" mais roulante ce qui offre de nouvelles perspectives.

I.8 Questions traitées dans le présent mémoire

Nous traiterons donc dans ce mémoire de trois questions sur le ressaut hydraulique :

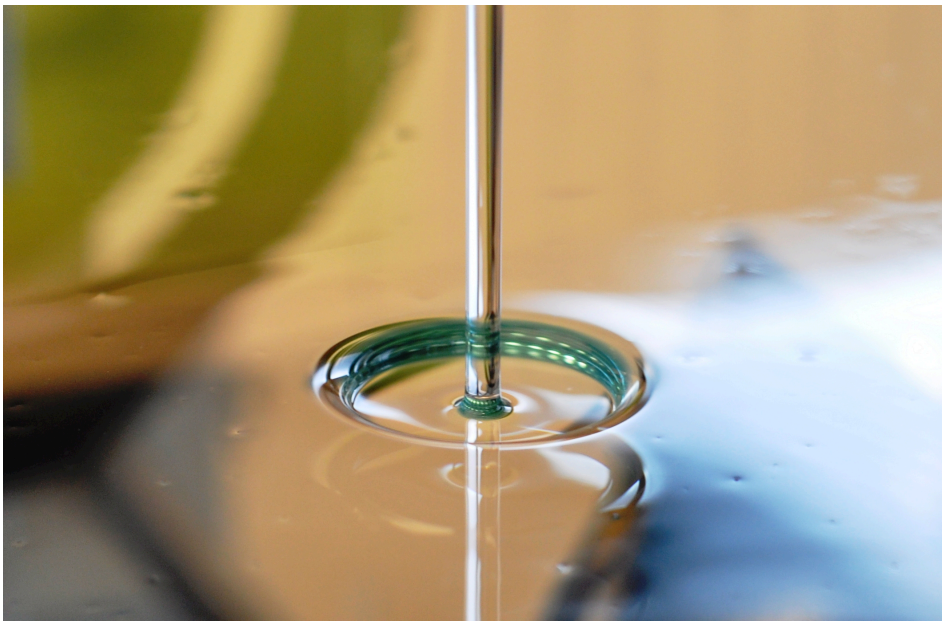
La première partie traitera du ressaut circulaire hydraulique. A travers une étude bibliographique approfondie nous identifierons l'un des points faibles des théories existantes à savoir la modélisation de la zone externe du ressaut. Nous présenterons alors nos travaux expérimentaux et théoriques permettant la description de cette zone externe. Nous verrons que cette étude nous a conduit à mesurer le nombre de Froude en sortie de ressaut. Ce nombre de Froude a une influence sur la sélection du ressaut hydraulique que nous explorerons expérimentalement.

Dans la deuxième partie nous nous intéresserons à la situation d'un jet impactant perpendiculairement un plan incliné. En étudiant cette situation de brisure de symétrie du choc forcée nous fournirons une exploration expérimentale ainsi que des éléments théoriques pour interpréter nos différentes observations. Nous nous placerons dans différentes situations de mouillage : total, partiel et quasi nul.

Et enfin dans une troisième partie nous aborderons la question de la dynamique d'une goutte en situation de non coalescence dans un ressaut. Nous observerons que la goutte est susceptible d'adopter plusieurs dynamiques que nous décrirons et essaierons de modéliser simplement. Nous essaierons également de travailler sur la rotation propre de la goutte et de proposer un modèle. Enfin nous aborderons des situations plus "exotiques"...

Une dernière (et courte) partie sera consacrée aux expériences que nous n'avons pas eu le temps de développer mais qui s'annoncent prometteuses...

17. Nous reviendrons dans l'introduction de la partie III davantage sur ces deux articles.



Première partie

Le ressaut circulaire hydraulique : Sélection du rayon du “mur”

Chapitre II

Revue bibliographique

L'un des enjeux de l'étude du ressaut circulaire a été d'obtenir une prédiction du rayon de ressaut en fonction de paramètres physiques (débit du jet Q, viscosité cinématique du liquide ν, densité du liquide ρ, gravité g, tension de surface du liquide γ...). En particulier les études expérimentales regorgent de courbes $R_J = f(Q)$ où R_J est le rayon du ressaut [1]. Un exemple de ces courbes que nous avons obtenu sur le dispositif expérimental décrit plus loin est montré en Fig. II.1. Comme on peut le voir, à mesure que le débit croît le rayon du ressaut augmente. La dépendance de R_J en viscosité apparaît aussi dans tous les modèles proposés après le modèle inviscide et a été largement explorée expérimentalement.

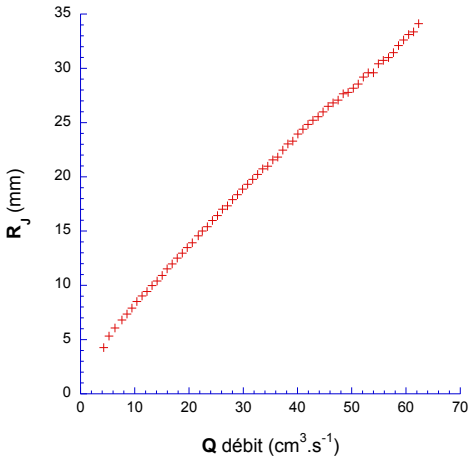


FIGURE *II.1 – Rayon du ressaut R_J en fonction du débit Q pour une huile silicone de* 20 *cS.*

Nous présenterons donc ici les modèles principaux traitant de la sélection du rayon du ressaut.

1. Le paramètre de contrôle Q est en effet l'un des plus faciles à faire varier.

II.1 Le modèle du fluide parfait

Le modèle du fluide parfait [2] est le calcul du rayon de ressaut le plus élémentaire : il nous permettra de mettre en place le formalisme nécessaire aux autres théories. Un schéma de principe du ressaut est disponible en Fig. II.2 et introduit quelques unes des notations indispensables pour la suite.

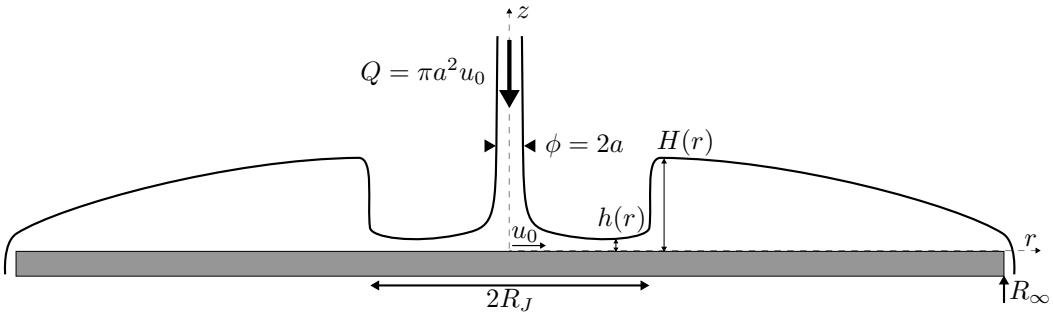


FIGURE *II.2 – Illustration schématique du ressaut hydraulique : un jet de liquide de rayon a et de vitesse u_0 impacte une plaque horizontale de rayon R_∞. On observe la formation d'un ressaut hydraulique en R_J. Les hauteurs de liquide dans les zones internes et externes sont notées respectivement $h(r)$ et $H(r)$.*

II.1.1 La zone interne

On appelle r la distance au centre du jet, z la coordonnée sur l'axe du jet, $u(r,z)$ la vitesse radiale du liquide, $h(r)$ la hauteur du liquide. En utilisant l'hypothèse de fluide parfait on a $u(r,z) \approx u(r)$.

L'énergie est conservée au niveau de l'impact du jet donc $u(r=0) = u_0 = \frac{Q}{\pi a^2}$ avec les notations de la Fig. II.2. En appliquant la loi de Bernouilli sur la surface libre on obtient :

$$\frac{u(r)^2}{2} + gh(r) = \text{constante}, \tag{II.1}$$

où g est l'accélération due à la gravité. La hauteur de liquide variant très peu en zone centrale ($h \ll \frac{u^2}{g}$) on en déduit :

$$u(r,z) \approx u(r) = u_0, \tag{II.2}$$

en zone centrale. La conservation du débit $Q = \pi a^2 u_0$ (où a est le rayon du jet) au niveau du jet et $Q = 2\pi r u(r) h(r)$ conduit à

$$h(r) = \frac{a^2}{2r}. \tag{II.3}$$

II.1.2 Le choc

On appelle R_J le rayon du ressaut, H_J la hauteur de liquide après le choc, $h_J = h(R_J)$ la hauteur de liquide avant le choc, U_J la vitesse après le choc et $u_J = u(R_J)$ la vitesse avant le choc (voir Fig. II.3). La théorie du choc de Bélanger considérant un choc d'épaisseur infinitésimale (la friction étant alors négligée) s'écrit en deux équations :
(i) la conservation de la masse :

$$u_J h_J = U_J H_J = \frac{Q}{2\pi R_J}, \tag{II.4}$$

2. Ce modèle a été développé sous cette forme dans [114]. L'auteur est, à notre connaissance, le premier a avoir publié cette approche.

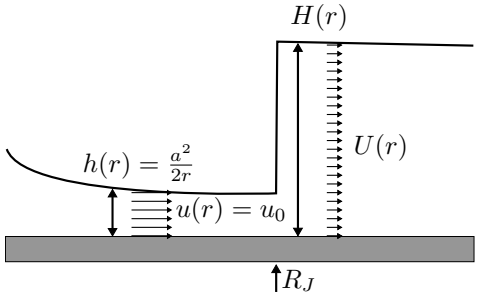


FIGURE *II.3* – *Schéma illustrant la théorie du fluide parfait au niveau du choc.*

et (ii) la conservation de l'impulsion :

$$g\frac{h_J^2}{2} + h_J u_J^2 = g\frac{H_J^2}{2} + H_J U_J^2. \tag{II.5}$$

La combinaison de (II.4) et (II.5) nous donne :

$$\frac{1}{2}g(H_J^2 - h_J^2) = \left(\frac{Q}{2\pi R_J}\right)^2 \left(\frac{1}{h_J} - \frac{1}{H_J}\right). \tag{II.6}$$

Pour $h_J \ll H_J$ on obtient donc en combinant (II.3) et (II.6) :

$$R_J \approx \frac{Q^2}{\pi^2 g H_J^2 a^2}. \tag{II.7}$$

Une meilleure approximation consiste à ne négliger que $h_J^2 \ll H_J^2$, on obtient alors :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} \approx \frac{1}{\pi^2}. \tag{II.8}$$

Pour fixer les idées nous avons comparé la relation II.8 avec des valeurs expérimentales (voir Fig. II.4) obtenues avec le montage décrit plus loin. L'hypothèse de fluide parfait semble donc bien trop restrictive : R_J est largement surestimé et les variations de sa valeur en fonction du débit sont mal décrites. On notera aussi que la relation II.8 nécessite de connaître H_J pour prédire une relation entre R_J et Q.

II.2 La théorie de Watson pour le ressaut circulaire visqueux et son amélioration par Bush *et al.*

La viscosité apparaît donc comme absolument fondamentale dans le ressaut hydraulique. En effet il y a croissance d'une couche limite visqueuse qui envahit rapidement l'épaisseur du film liquide avec la distance au point d'impact. On peut donc distinguer quatre zones d'écoulement distinctes dans la zone interne.

(i) Pour r de l'ordre de grandeur du rayon du jet $r \sim (a)$. La vitesse du liquide passe rapidement de 0 au point de stagnation à u_0, la couche limite a une épaisseur δ typique de $\delta \sim (\nu a/u_0)^{\frac{1}{2}}$

(ii) Pour r plus grand (de l'ordre de quelques a). La couche limite commence à se développer mais on a toujours $\delta \ll h$ l'épaisseur du film liquide. Le liquide en dehors de la couche limite a une vitesse

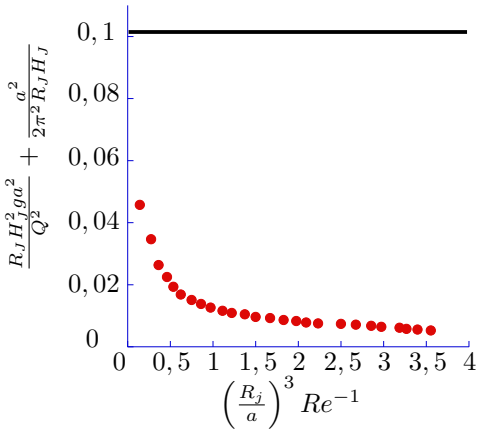


FIGURE *II.4 – Test de la relation (II.8). Le liquide utilisé ici est une huile silicone de 20 cS. En outre le rayon du jet vaut a = 1,6 mm et les valeurs de H_J, R_J et Q sont mesurées expérimentalement. On a tracé ici le premier membre de (II.8) en fonction de $\left(\frac{R_J}{a}\right)^3 Re^{-1}$ où Re est le nombre de Reynolds du jet défini comme $Re = \frac{Q}{\nu a}$ avec ν la viscosité cinématique. En effet ce paramètre apparaîtra naturellement dans la théorie de Watson. La théorie de fluide parfait (II.8) correspond à la ligne noire continue.*

constante u_0. L'écoulement dans la couche limite adopte alors un profil de type Blasius (profil de vitesse obtenu dans une couche limite, le long d'une plaque plane placée dans un écoulement uniforme parallèle à son plan).

(iii) Lorsque la couche limite a entièrement envahi l'épaisseur du film liquide h, un profil auto-similaire[3] se met en place. Cette zone (iii) correspond au changement d'un profil de type Blasius vers un profil auto-similaire à mesure que r croît.

(iv) Après une longueur l d'établissement dont nous détaillerons l'estimation plus loin, le profil auto-similaire est entièrement établi. Cette zone correspond à la dernière zone avant le choc où le profil auto-similaire est valable.

La théorie de Watson se concentre exclusivement sur la zone interne. Les variables de la zone externe sont considérées comme des paramètres imposés qui servent de variables d'entrée pour résoudre les équations du choc (conservation de la masse et de l'impulsion).

II.2.1 Profil auto-similaire

Watson se place dans les approximations de la couche limite visqueuse pour un fluide incompressible. On a donc, dans la zone (iv) lorsque $r > l$:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \tag{II.9}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{II.10}$$

avec les conditions aux limites usuelles

$$u = w = 0 \text{ en } z = 0, \tag{II.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ en } z = h(r), \tag{II.12}$$

3. Profil invariant par dilatation selon z et par translation selon r.

avec r, z les coordonnées cylindriques et u, w les composantes de la vitesse correspondantes. Le gradient de pression selon r a été ignoré, on considère en effet que les variations de $h(r)$ sont négligeables [4].

La conservation du débit s'écrit :

$$2\pi r \int_0^{h(r)} u \mathrm{d}z = Q. \tag{II.13}$$

Une fois ces équations constitutives posées, la recherche d'une solution auto-similaire (invariante par dilatation selon z et par translation selon r) se fait en supposant la forme :

$$u = u_s(r) f(\eta), \text{ avec } \eta = z/h(r), \tag{II.14}$$

où $u_s(r)$ correspond à la vitesse à la surface libre. Les équations (II.11), (II.12) et (II.13) s'écrivent donc :

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0, \tag{II.15}$$

$$2\pi r u_s(r) h \int_0^1 f(\eta) \mathrm{d}\eta = Q. \tag{II.16}$$

On en déduit que $r u_s h$ est constant, ce qui couplé à (II.9) conduit à

$$w = u_s h' \eta f(\eta). \tag{II.17}$$

En injectant (II.17) dans (II.9) pour faire apparaître le terme de gauche de (II.10) on obtient :

$$\nu f''(\eta) = h^2 u_s' f^2(\eta). \tag{II.18}$$

De cette équation on déduit que le produit $h^2 u_s'$ est constant. Puisque $f''(\eta) \leq 0$ (en effet la contrainte visqueuse est la plus importante en bord de plaque pour $z = 0$) on peut introduire la constante c tel que :

$$h^2 u_s' = -\frac{3}{2} c^2 \nu. \tag{II.19}$$

L'utilisation des conditions aux limites (II.15) permet d'estimer la valeur de c (après calculs on trouve $c = 1,402$) mais aussi d'obtenir la relation (II.20) à partir de (II.16) :

$$r u_s h = 3\sqrt{3} c^2 \frac{Q}{4\pi^2}. \tag{II.20}$$

Cette nouvelle écriture de la conservation du débit couplée à (II.19) permet d'estimer $u_s(r)$ et $h(r)$:

$$u_s(r) = \frac{27 c^3}{8\pi^4} \frac{Q^2}{\nu(r^3 + l^3)}, \tag{II.21}$$

$$h(r) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\nu(r^3 + l^3)}{Qr}, \tag{II.22}$$

où l est une longueur permettant le raccord avec la zone (iii). En effet, c'est cette longueur qui "porte" tout ce qui se déroule en amont du rayon r_0, rayon où le profil auto-similaire est pleinement établi. Pour $r \gg l$, elle devient donc négligeable : on "oublie" alors les effets de l'injecteur, du développement de la couche limite... [5]

Les conditions aux limites (II.15) couplées à (II.18) permettent de connaître le profil de vitesse de la solution auto-similaire. Cette solution peut être exprimée à l'aide d'une fonction Jacobienne elliptique de module $sin 75°$ (notée ici cn) :

$$f(\eta) = \sqrt{3} + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{1 + cn(3^{\frac{1}{4}} c(1 - \eta))}. \tag{II.23}$$

4. Plus exactement : la pression est approximativement partout la pression atmosphérique, les termes capillaires et gravitaires restant négligeable.

5. Des éléments permettant l'estimation de cette longueur l seront développés plus loin.

II.2.2 Raccordement et estimation des longueurs

La première remarque que l'on peut faire est de constater que le profil auto-similaire est proche d'un profil de Blasius, une approximation satisfaisante peut donc être faite en supposant :

$$u = u_s(r) f(z/\delta), \tag{II.24}$$

où δ correspond à l'épaisseur de la couche limite et à h lorsque la couche limite a envahi toute l'épaisseur de la couche mince et où $u_s(r)$ et f sont les fonctions définies précédemment lors du calcul du profil auto-similaire. Cette approximation permet donc de supprimer la région (iii) qui correspond à la zone de transition entre le profil de Blasius et le profil auto-similaire.

Dans la région (ii) (la zone de croissance de la couche limite) on peut estimer que le profil de hauteur $h(r)$ est assez similaire à celui observé pour un fluide parfait (c'est-à-dire $h(r) \sim a^2/r$). En effet, la majeure partie de l'écoulement se fait à la vitesse u_0 dans cette zone. Cette zone se termine lorsque l'épaisseur de la couche limite δ devient comparable à h. C'est-à-dire lorsque $(\nu r/u_0)^{\frac{1}{2}} \sim a^2/r$. Cela arrive pour $r_0 \sim aRe^{\frac{1}{3}}$ où r_0 est le rayon où la couche limite a envahi toute l'épaisseur du film mince et $Re = Q/\nu a$ est le nombre de Reynolds défini au niveau du jet.

De manière plus quantitative : l'équation intégrale de la quantité de mouvement dans la région $r < r_0$ s'écrit

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \int_0^\delta (u_0 u - u^2) \mathrm{d}z = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}, \tag{II.25}$$

puisque $u = u_0$ pour $z > \delta$. En utilisant le fait que u est donné par la solution approximée (II.24) avec $u_s(r) = u_0$ l'équation précédente devient après intégration :

$$r^2\delta^2 = \frac{c^3\sqrt{3}}{\pi - c\sqrt{3}} \frac{\nu r^3}{u_0} + C, \tag{II.26}$$

où C est une constante. Afin que l'équation (II.26) reste valide lorsque $r \to 0$ une seule solution est physique : $C = 0$.[6] Donc pour r suffisamment grand (c'est-à-dire $r^3 \gg a^3$) dans la limite $r < r_0$:

$$\delta^2 = \frac{\pi\sqrt{3}c^3}{\pi - c\sqrt{3}} \frac{\nu r a^2}{Q}. \tag{II.27}$$

Comme r_0 est la valeur de r pour laquelle $\delta = h$ et $u_s(r) = u_0$ la formule II.20 se déclinera :

$$r_0 u_0 \delta(r_0) = 3\sqrt{3}c^2 \frac{Q}{4\pi^2}, \tag{II.28}$$

et donc

$$r_0 = 0,3155 aRe^{\frac{1}{3}}. \tag{II.29}$$

La valeur de l défini dans (II.21) et (II.22) peut maintenant être estimée simplement en utilisant le fait que $u_s(r_0) = u_0$, ce qui en appliquant (II.22) conduit à :

$$l = 0,567 aRe^{\frac{1}{3}}. \tag{II.30}$$

Par ailleurs il est à noter que l'application de la conservation du débit permet de proposer un profil d'épaisseur $h(r)$ pour $r < r_0$:

$$2\pi r \left(u_0 \delta \int_0^1 f(\eta) \mathrm{d}\eta + u_0(h - \delta)\right) = Q, \tag{II.31}$$

6. Bien sûr cette hypothèse est discutable puisque en $r = 0$ on est dans la zone (i), il y a donc un point de stagnation et donc un profil de vitesse différent de celui défini ci-dessus. Néanmoins, comme dit précédemment on a : $\delta^2 \sim \nu a/u_0$ au voisinage de a et donc $C \sim \nu a^3/u_0$ s'ensuit que C sera d'ordre a^3/r^3 vis-à-vis des autres termes de (II.26) et pourra être rapidement négligé.

ce qui conduit à

$$h(r) = \frac{a^2}{2r} + \left(1 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}c^2}\right)\delta(r). \tag{II.32}$$

On reconnaît bien dans le terme de gauche le terme provenant des équations du fluide parfait (II.3) auquel $h(r)$ se réduit quand la viscosité tend vers 0. Pour fixer les esprits, un schéma récapitulatif permet de visualiser $h(r)$, $\delta(r)$, r_0 et l en fonction de r (voir Fig. II.5). Afin de rester le plus général possible r est adimensionné par $aRe^{1/3}$ et h et δ sont adimensionnés par $aRe^{-1/3}$.

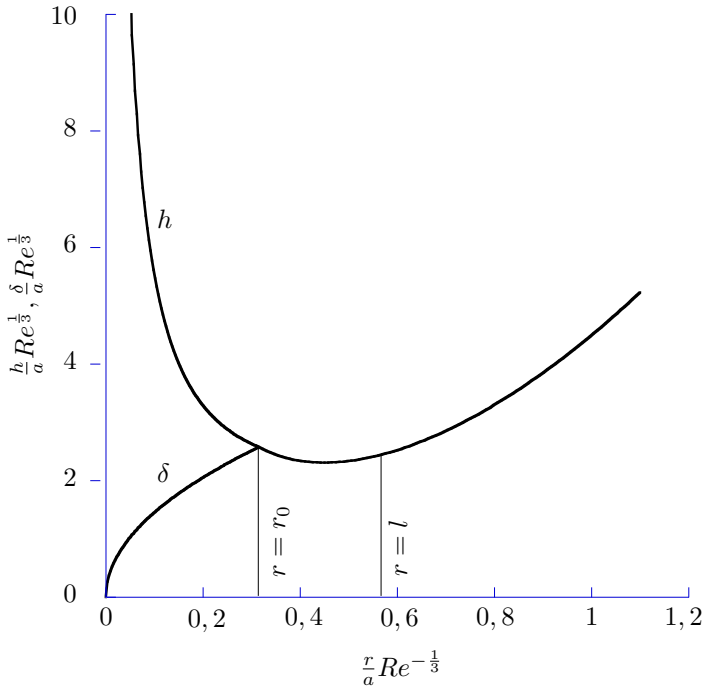


FIGURE *II.5 – Les épaisseurs du liquide h et de la couche limite δ dans la zone interne, obtenues grâce à (II.22), (II.32) et (II.27), sont adimensionnées par $aRe^{-1/3}$ et reportées en fonction de la distance r elle-même adimensionnée par $aRe^{1/3}$. Courbe obtenue d'après Watson [114]*

II.2.3 Condition au niveau du choc

La position du ressaut $r = R_J$ se détermine en écrivant la conservation de l'impulsion en R_J, c'est-à-dire l'extension de la formule (II.5) obtenue dans le cas simple du fluide parfait au cas d'un écoulement non uniforme. On suppose toujours un choc parfait sans épaisseur et donc sans friction :

$$g\frac{h_J^2}{2} + \int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z = g\frac{H_J^2}{2} + \int_0^{H_J} U_J^2 \mathrm{d}z, \tag{II.33}$$

avec H_J et $U_J(z)$ respectivement la hauteur et la vitesse du liquide juste après le choc. Comme dans le cas du fluide parfait Watson l'approximation $h_J^2 \ll H_J^2$ semble raisonnable. [7] Watson fait également l'hypothèse d'un profil bouchon en sortie de ressaut (i.e. $U_J(z) = U_J$ sur toute l'épaisseur). [8] L'équation

7. En effet dans nos expériences, l'épaisseur typique de la zone interne est d'environ 0, 5 mm et 3 mm pour l'épaisseur de la zone externe.

8. Cette hypothèse est par contre plus difficile à tester expérimentalement et entre en contradiction avec l'observation des zones de recirculation pour les ressauts de type I et II.

(II.3) se simplifie donc en :

$$g\frac{H_J^2}{2} + H_J U_J^2 = \int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z, \tag{II.34}$$

qui, par analogie avec (II.8) s'écrit :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} = \frac{2R_J a^2}{Q^2}\int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z. \tag{II.35}$$

Il faut alors distinguer deux cas pour l'intégration du deuxième terme. Si $R_J < r_0$, le terme doit être intégré entre 0 et δ (donné par (II.27)) en utilisant le profil auto-similaire avec $u(\delta) = u_0$ puis entre 0 et $h(r)$ avec un profil de vitesse de type bouchon ($u(z > \delta) = u_0$), ce qui donne après calcul :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} = 0,10132 - 0,1297\left(\frac{R_J}{a}\right)^{\frac{3}{2}} Re^{-\frac{1}{2}}. \tag{II.36}$$

Si, au contraire, on a $R_J > r_0$, l'intégration se fera en utilisant le profil auto-similaire et les équations (II.21) et (II.22). On obtiendra alors :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} = 0,01676\left(\left(\frac{R_J}{a}\right)^3 Re^{-1} + 0,1826\right)^{-1}. \tag{II.37}$$

Expérimentalement les résultats disponibles dans la littérature sont très souvent dans la gamme $R_J > r_0$. L'équation (II.37) est donc la plus utilisée en comparaison avec les expériences. [9]

La Fig. II.6 propose un test expérimental sur le même ensemble de points que la Fig. II.4. Ici encore ce sont des points réalisés avec notre dispositif qui sont proposés. Pour tracer ce graphique nous relevons à la fois R_J et H_J en fonction de Q. On utilise ici la loi (II.37). [10] Comme on peut le constater la théorie et les points expérimentaux sont en très bon accord même si l'on peut tout de même constater une légère déviation. Toutefois cette théorie nécessite la connaissance expérimentale de H_J, hauteur de fluide en sortie de ressaut qui est mesurée expérimentalement dans l'ensemble des vérifications de la théorie de Watson.

II.2.4 Influence de la tension de surface

La tension de surface est un paramètre physique peu étudié pour le ressaut hydraulique circulaire : elle n'est apparue dans la littérature, sous forme de paramètre expérimental, qu'en 1993 avec Liu *et al.* [76] et son influence n'a été quantifiée qu'en 2003 par Bush [13].

Cela s'explique par sa faible influence sur le rayon du ressaut pour peu qu'il soit centimétrique : ce paramètre n'a d'influence possible qu'à deux niveaux (voir Fig. II.7) :
(i) elle aura tendance à augmenter la courbure du ressaut afin de réduire la surface du mur liquide et donc de diminuer légèrement le rayon du ressaut. Cet effet devient vite négligeable face au flux de quantité de mouvement.
(ii) elle agira également sur la structure fine du ressaut au niveau du choc pour raccorder la zone interne et le mur liquide ainsi que le mur et la zone externe sans points anguleux sur le profil $h(r)$. Mais cela n'agit que marginalement sur la position du ressaut. Cependant on pourra constater que plus la tension de surface est élevée moins le mur liquide est "abrupt".

9. Ce sera également notre cas dans l'ensemble de ce mémoire.
10. Un test expérimental de ces lois avec la variation de nombreux paramètres sera montré un peu plus loin (voir Fig. II.9).

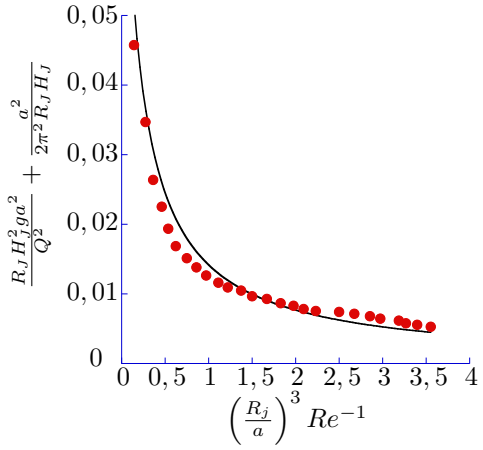


FIGURE *II.6 – Test de la théorie de Watson (équation (II.37)). Le liquide utilisé ici est une huile silicone de 20 cS. En outre on a a = 1,6 mm, les valeurs de H_J, R_J et Q sont mesurées expérimentalement par nos soins dans le dispositif décrit plus loin. Le premier membre des deux équations est écrit en fonction de $\left(\frac{R_J}{a}\right)^3 Re^{-1}$ où Re est le nombre de Reynolds du jet défini comme $Re = \frac{Q}{\nu a}$ avec ν la viscosité cinématique. La théorie de Watson (équation (II.37)) correspond à la ligne noire continue.*

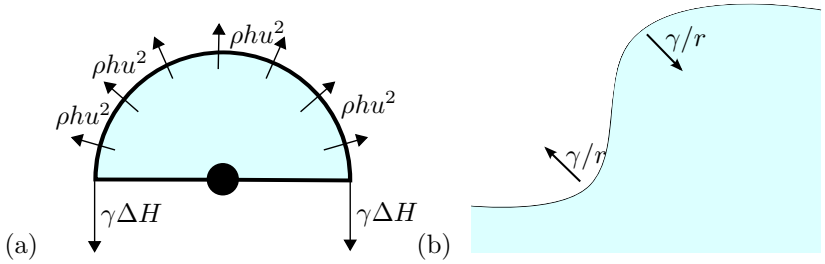


FIGURE *II.7 – Effet de la tension de surface sur le ressaut hydraulique circulaire. (a) La tension de surface tend à diminuer la surface du mur liquide et donc à diminuer légèrement le rayon du ressaut. Ici est représenté un demi-ressaut vu de haut : les effets inertiels auxquels s'opposent la pression hydrostatique tendent à augmenter le rayon du ressaut tandis que la tension de ligne $\gamma\Delta H$ tend à faire diminuer le rayon du ressaut. (b) La tension de surface modifie la structure fine du ressaut, rendant le mur moins "abrupt". r représente ici la courbure locale du ressaut.*

Dans les équations de Watson, la tension de surface peut être facilement prise en compte comme l'a démontré Bush *et al.* [13]. Dans leur approche Bush *et al.* modélisent la tension de surface à deux niveaux : au niveau du choc où la tension de surface joue sur la courbure (voir Fig. II.7) mais aussi au niveau du jet où la tension de surface (mais aussi la gravité) aura pour effet de modifier le rayon effectif du jet.

II.2.4.1 Influence de la tension de surface au niveau du ressaut

La force par unité de longueur du mur s'opposant à l'expansion du ressaut, résultant de la courbure du ressaut et due à la tension de surface s'écrit :

$$F_c = \int_S \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathrm{d}S, \tag{II.38}$$

avec γ la tension de surface, S la surface du mur du ressaut et $\mathbf{n}$ le vecteur unité normal à cette surface. Pour bien définir cette surface, il est important d'observer que le mur n'est pas parfaitement vertical, le ressaut a une certaine profondeur, on peut donc définir un rayon de "début de ressaut" R_1 et un rayon de "fin de ressaut" R_2. On peut donc aussi définir une pente ainsi qu'une longueur d'arc s. Un schéma où ces différentes notions sont rappelées est proposé en Fig. II.8 (bien entendu, les proportions ne sont pas respectées). En tenant compte de tout ces éléments, après une formulation mathématique appropriée, l'équation précédente se résume à $F_c = -2\pi\gamma(s - \Delta R)$ avec $\Delta R = R_2 - R_1$. [11]

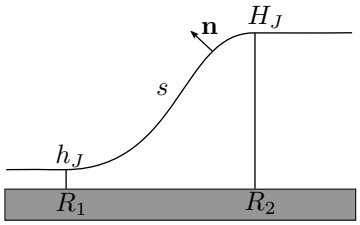


FIGURE *II.8 – Schéma de coupe du ressaut hydraulique. On peut définir un rayon de "début de ressaut" R_1 et un rayon de "fin de ressaut" R_2 ainsi qu'une longueur d'arc s. Le vecteur unité normal à la surface* $\mathbf{n}$ *est aussi représenté. Notons que ce schéma ne respecte pas les proportions.*

On peut, en accord avec les expériences, estimer que la différence ΔR est petite devant la différence de hauteur $\Delta H = H_J - h_J$, où h_J et H_J sont les hauteurs respectivement en entrée et en sortie de ressaut. Si bien que $F_c = -2\pi\gamma\Delta H$. L'inclusion de cette force (par unité de longueur) dans l'équation de conservation de l'impulsion (II.33) conduit à

$$g\frac{H_J^2 - h_J^2}{2} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\Delta H}{R_J} + H_J U_J^2 = \int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z, \tag{II.39}$$

avec ρ la masse volumique du liquide. Cette équation peut ensuite être mise sous la forme :

$$g\frac{H_J^2 - h_J^2}{2}\left(1 + \frac{2}{B_0}\right) + H_J U_J^2 = \int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z, \tag{II.40}$$

avec $B_0 = R_J g\rho(H_J + h_J)/\gamma$. On peut, comme dans le cas précédent, faire l'approximation $h_J^2 \ll H_J^2$ et, toujours comme dans le cas précédent, intégrer de manière différente suivant la position de R_J par rapport à r_0 (l'ensemble de la théorie précédente n'étant absolument pas modifié, les valeurs numériques restent les mêmes que vu précédemment). On aura donc pour $R_J < r_0$, en analogie avec (II.36) :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2}\left(1 + \frac{2}{B_0}\right) + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} = 0,10132 - 0,1297\left(\frac{R_J}{a}\right)^{\frac{3}{2}} Re^{-\frac{1}{2}}. \tag{II.41}$$

Si, au contraire, on a $R_J > r_0$ on obtiendra alors, en analogie avec (II.37) :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2}\left(1 + \frac{2}{B_0}\right) + \frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J} = 0,01676\left(\left(\frac{R_J}{a}\right)^3 Re^{-1} + 0,1826\right)^{-1}. \tag{II.42}$$

Il est bon de signaler que (II.41) et (II.42) diffèrent du modèle de Watson ((II.36) et (II.37)) uniquement par un terme en $2/B_0$. Ce terme a une influence essentiellement pour les ressauts de petits rayons. C'est-à-dire lorsque $2/B_0 \sim 1$ ce qui correspond à $R_J \sim \frac{2\gamma}{\rho g(H_J + h_J)} \sim 10^{-3}$ m pour de l'huile silicone. En ce qui concerne l'eau il faut multiplier cette valeur par à peu près 3 pour avoir une idée de l'importance de la tension de surface...

11. En l'absence de ressaut (i.e. absence de pente) on aura, bien sûr, $s = \Delta R$ et donc $F_c = 0$.

II.2.4.2 Influence de la tension de surface au niveau du jet impactant

La tension de surface (ainsi que la gravité) vont aussi avoir pour effet de diminuer le rayon effectif du jet avant l'impact a. On aura une vitesse au niveau de l'impact u_0 supérieure à celle en sortie de buse u_N, la gravité tendant à accélérer le liquide et la tension de surface à resserrer le rayon du jet et donc à augmenter la vitesse. Avec la conservation du débit $Q = \pi r_N^2 u_N = \pi a^2 u_0$, où r_N est le rayon de la buse, l'équation de Bernouilli conduit à

$$\frac{a}{r_N} = \left(1 + \frac{2gZ}{u_n^2} + \frac{2\gamma}{\rho u_n^2}\left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{a}\right)\right)^{-\frac{1}{4}}, \tag{II.43}$$

où Z est la distance entre l'injecteur et la plaque. Comme on peut le constater à partir de cette formule (et comme l'on peut s'y attendre intuitivement), à débit constant, plus la distance buse-plaque est importante plus le jet est modifié en sachant que pour une vitesse typique de 3 m.s^{-1} et une buse située à 4 cm de hauteur a ne sera modifié que de quelques pourcents par rapport à r_N. Par ailleurs, toujours à débit fixé, la taille de la buse r_N joue un rôle crucial : en effet plus la buse est grande plus u_N est faible et donc plus les effets de la gravité et de la tension de surface sont importants (en effet u_N^2 varie en r_N^{-4}). Et enfin, avec les autres paramètres fixés, plus le débit est important moins la gravité et la tension de surface auront d'effet sur ce rayon effectif a (si Q augmente u_N augmente linéairement). [12]

Bush *et al.* a testé l'influence de ces paramètres sur un large spectre de données, comparant ce jeu de données à (II.36) et (II.37) puis à (II.41) et (II.42) dans la Fig. II.9 en utilisant (II.43).

Comme on peut le voir, l'accord entre théorie et expérience reste bon et la tension de surface améliore nettement cet accord dans le cas particulier des petits rayons (qui se traduisent sur la courbe plutôt par des petits Re). L'erreur standard est diminuée de 15% à 10% sur l'ensemble du jeu de données.

II.2.4.3 La théorie de Watson en micro gravité ou lorsque la tension de surface devient nécessaire

Avedisian *et al.* [2] proposent de tester la théorie de Watson en situation de micro gravité et de la comparer aux mêmes mesures en gravité "normale". Les principaux résultats pour le ressaut hydraulique stationnaire mis en avant par leur étude sont :
(i) Un ressaut circulaire hydraulique stationnaire peut être obtenu en micro gravité (2.10^{-2} g). Dans ce cas le rayon du ressaut est plus important que celui d'un ressaut obtenu dans les mêmes conditions à gravité "normale".
(ii) La pente au niveau du choc diminue avec la gravité.

Plus quantitativement, la théorie de Watson ((II.36) et (II.37)) est testée sur les données obtenues expérimentalement. On peut voir ces résultats sur la Fig. II.10.

Comme on peut le constater les résultats obtenus en micro gravité (bleus sur la courbe) ne sont pas du tout en accord avec la théorie. L'idée principale pour interpréter ce mauvais accord entre théorie et expérience est que la tension de surface n'est absolument pas prise en compte [13]. Or si l'on diminue radicalement les effets de la gravité, les effets de la tension de surface doivent se montrer plus important (preuve en est que la pente diminue au niveau du choc).

12. Pour les données obtenues grâce à notre dispositif expérimental ces effets resteront néanmoins marginaux.
13. Rappelons que ce papier est publié en 2000 tandis que celui de Bush *et al.* sur l'influence de la tension de surface date de 2003.

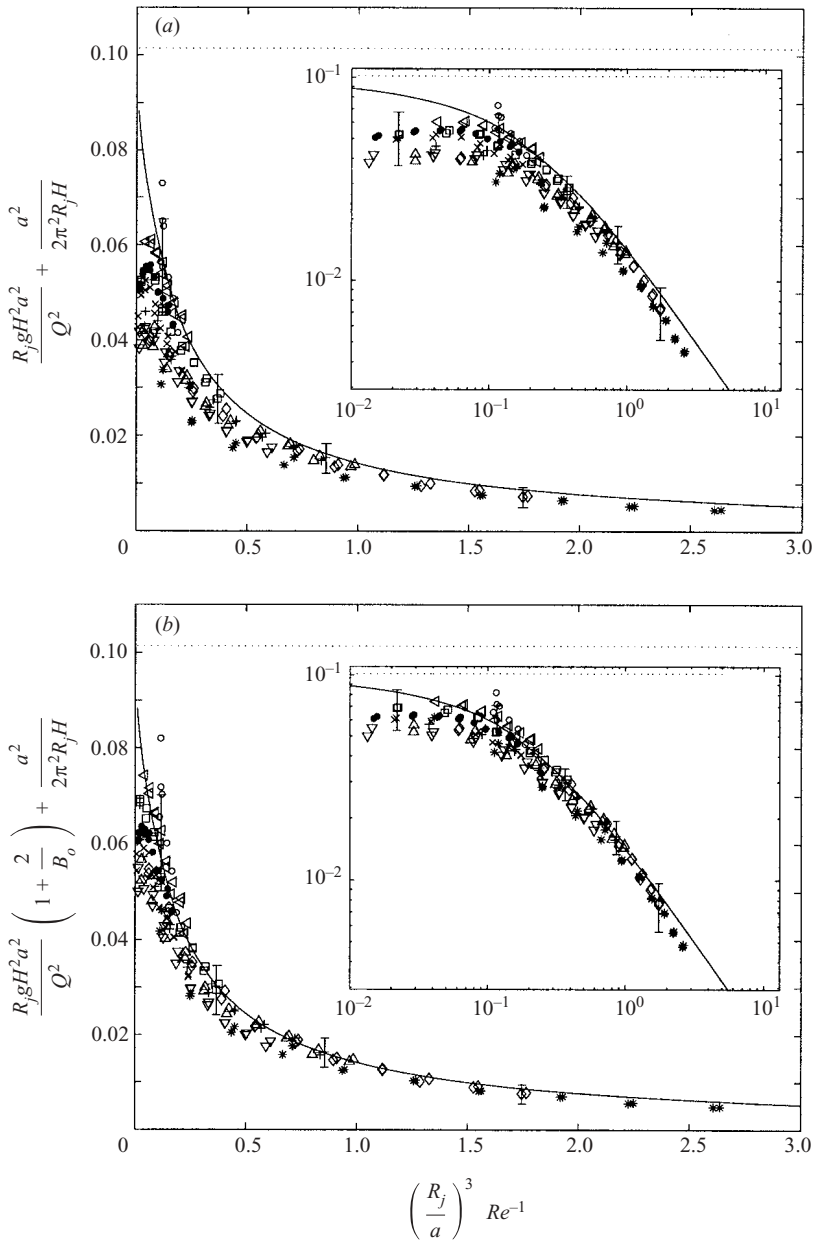


FIGURE *II.9 – Dépendance de R_J en fonction des différents paramètres du système. (a) La ligne continue représente les prédictions de la théorie de Watson (équations (II.36) et (II.37)). (b) La ligne continue représente la théorie de Watson modifiée par Bush et al. en ajoutant la tension de surface (équations (II.41) et (II.42)). Les inserts donnent la représentation log-log de ces courbes. La ligne pointillée présente sur chaque graphe rappelle la prédiction pour un fluide parfait (équation (II.8)). Le liquide utilisé est un mélange eau glycérol ($\gamma \sim 65-70$ mN/m, $\rho \sim 1,0-1,2$ g/cm^{-3}). Les viscosités sont échelonnées entre 1 et 21 cS. Les hauteurs extérieures sont échelonnées entre 2 mm et 1 cm et les buses ont un rayon r_N compris entre 0,15 cm et 0,5 cm. Pour davantage d'informations se reporter à [13].*

Plus quantitativement, avec le même formalisme que précédemment, on trouve dans le cas de la micro gravité ($2.10^{-2}g$) $B_0 \sim 10^{-1}$ et donc le terme en $2/B_0$ sera de l'ordre de 20 et donc très grand

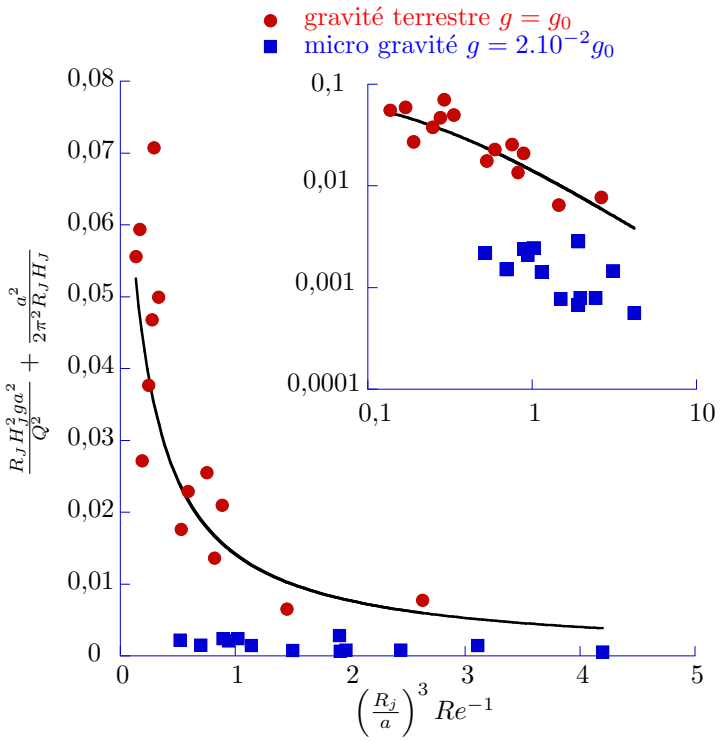


FIGURE *II.10 – Test de la théorie de Watson (équation (II.37)) dans un cas de microgravité. Les ronds rouges correspondent aux données obtenues avec le dispositif expérimental en gravité normale g_0 et les carrés bleus aux données obtenues en micro gravité ($g = 2.10^{-2} g_0$). La ligne noire continue correspond à la prédiction théorique. L'insert donne une représentation log-log de cette courbe. Le liquide utilisé est de l'eau ($\gamma \sim 70$ mN/m, $\rho \sim 1$ g/cm^3 et $\nu \sim 1$ cS). Les hauteurs extérieures varient entre 2 et 15 mm. Les diamètres des buses varient entre 1,22 et 3,83 mm. Pour davantage d'informations se reporter à [2].*

devant 1. Autrement dit la tension de surface sera prédominante devant la pression hydrostatique pour des ressauts de rayon $R_J \sim 5$ cm c'est-à-dire des rayons bien au-delà de ceux mesurés dans l'article. Dans ce cas de figure particulier, la théorie de Watson compare donc un terme négligeable en lieu et place de l'effet physique majeur... Malheureusement nous ne disposons pas des données brutes qui auraient permis de calculer le premier terme des équations (II.41) et (II.42) et donc de comparer ces résultats au modèle de Bush avec tension de surface.

On retiendra donc de ce travail d'une part qu'il est possible d'obtenir un ressaut circulaire hydraulique en situation de micro gravité, ce qui n'a rien de trivial mais aussi que dans cette situation la tension de surface apparaît comme fondamentale.

II.2.5 Ressaut circulaire et Hélium superfluide

Lorsque l'on refroidit de l'hélium liquide en deçà d'une température de transition $T_\lambda = 2,17$ K on assiste à un changement de phase de l'hélium. On obtient alors de l'hélium superfluide. Ce liquide a entre autre la propriété d'être de viscosité nulle contrairement à l'hélium liquide à $T > T_\lambda$ qui possède une viscosité faible mais non nulle. L'idée développée par Rolley *et al.* [99] de créer un ressaut avec de l'hélium superfluide (et donc non visqueux) ouvre la perspective de tester la théorie du ressaut inviscide (présentée précédemment : voir section II.1). Rolley *et al.* ont donc conduit une expérience

où le liquide était refroidi progressivement de $T > T_\lambda$ à $T = 1,5$ K et il ne s'est rien passé d'évident à la transition de phase. Ce résultat peut paraître surprenant de prime abord, néanmoins c'est un fait bien connu de la communauté travaillant avec de l'hélium superfluide que l'hélium à $T < T_\lambda$ peut être considéré comme un mélange d'une composante "normale" et d'une composante superfluide où seule la composante superfluide possède une viscosité nulle. De plus même dans le cas d'un liquide uniquement superfluide, on voit apparaître une viscosité effective, pour des vitesses excédant une vitesse critique, qui correspond dans notre cas à 10 cm/s ce qui est précisément l'ordre de grandeur des vitesses au niveau du ressaut (et donc dans l'injecteur). Les auteurs supposent alors (en accord avec les approximations usuelles) que la viscosité effective de l'hélium superfluide s'écrit : $\nu_{eff} = \eta_n/\rho$ où η_n est la viscosité dynamique de la composante normale du liquide et ρ la masse volumique du liquide.

II.2.5.1 L'hélium un liquide unique pour tester la validité des lois de Bush-Watson dans une situation limite

Toutefois même si l'hélium superfluide possède une viscosité effective, cette expérience offre un cadre unique pour tester la théorie de Watson et la modification proposée par Bush *et al.* dans des conditions expérimentales limites de viscosité et de tension de surface. Le liquide utilisé est donc de l'hélium liquide (superfluide ou non) de température comprise entre 1,5 K et 4,2 K. Les rayons de ressaut sont compris entre 0,5 et 3,5 mm, la densité se situe aux alentour de 0.145 et la viscosité se situe deux ordres de grandeurs en dessous de celle de l'eau. Ajoutons à cela des tensions de surface comprises entre 0,09 et 0,33 mN/m suivant la température) et l'on obtient un banc d'essai aux valeurs extrêmes pour les théories existantes sur le ressaut.

Si les lois de Bohr *et al.* (que nous détaillerons plus tard) ne fournissent pas un bon accord avec l'expérience, les lois de Watson fournissent quant-à elles un accord tout à fait raisonnable. Nous avons donc reporté en Fig. II.11 (a) une figure de l'article de Rolley *et al.* [99] où sont représentées en symboles vides les données obtenues à partir des équations (II.36) et (II.37). Les triangles représentent les points obtenus pour $T > T_\lambda$ et les cercles les points obtenus pour $T < T_\lambda$. Comme on peut le voir, si l'écart obtenu est satisfaisant, il n'est pas parfait. Si l'on s'empare maintenant de la partie II.2.4 on se rend compte que l'on obtient pour B_0 des valeurs de l'ordre de 2. Il apparaît donc que la tension de surface n'est absolument pas négligeable et qu'elle joue même un rôle majeur. Les auteurs utilisent donc le modèle de Watson dans lequel on tient compte de la tension de surface via le terme ajouté par Bush *et al.* (équations (II.41) et (II.42)). Les points obtenus sont alors reportés sur la Fig. II.11 (a) par les symboles pleins. L'accord est comme on peut le voir bien meilleur.

On a donc pu prouver que le modèle de Watson amélioré par Bush *et al.* fournissait d'excellents résultats y compris dans ces conditions extrêmes.

Le calcul des points expérimentaux nécessitant de connaître H_J, Rolley *et al.* ont utilisé $H_J = H_\infty$ la hauteur de liquide en bord de plaque ici laissée libre de s'ajuster avec Q (H_∞ est notée d dans l'article). [14] Pour autant le dispositif expérimental de Rolley *et al.* permet aussi de faire augmenter H_∞ en remplissant la cuve. C'est ce qui est fait dans la Fig. II.11 (b). Sur cette figure on voit bien d'une part la robustesse de la théorie de Watson ainsi que la nécessité d'ajouter le terme de Bush prenant en compte les effets capillaires. [15]

14. Cela semble constituer une bonne approximation dans le cas d'un liquide avec une forte tension de surface (relativement aux autres paramètres) mais nous reviendrons plus amplement sur cette question importante plus loin...

15. L'article traite aussi de l'apparition de rides à la surface libre du liquide dans la zone interne lorsque T devient plus faible que T_λ. Les auteurs en tirent une technique de mesure de $h(r)$. Le lecteur curieux consultera donc la référence [99] pour en apprendre davantage sur le sujet.

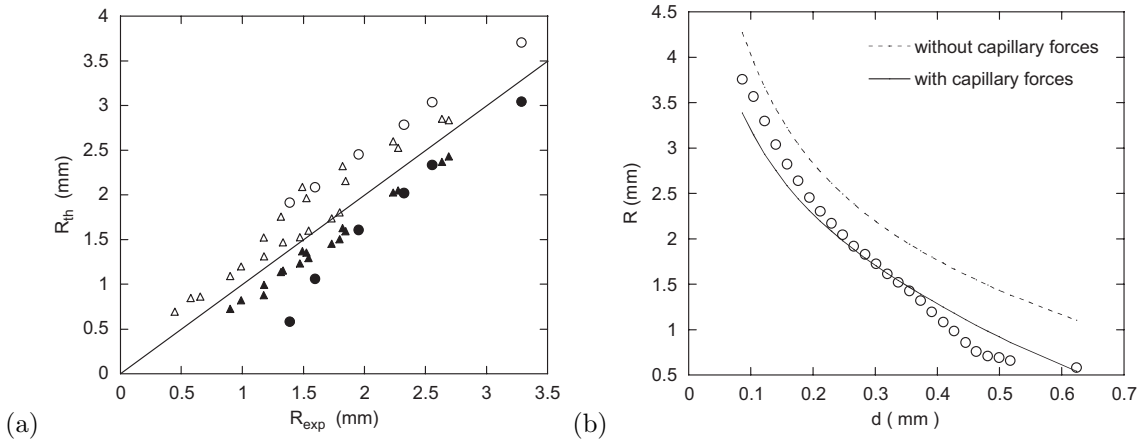


FIGURE *II.11* – *(a) Test des modèles de Watson (équations (II.36) et (II.37)) et Watson Bush (équations (II.41) et (II.42)) pour l'hélium liquide à 4 températures : trois températures (représentées par des triangles) où le liquide est "normal" (4,2* K *:* $\nu = 2,59\ 10^{-8}$ m^2/s, $\rho = 0.125$ g/cm^3, *0,09* mN/m *; 3* K *:* $\nu = 2,52\ 10^{-8}$ m^2/s, $\rho = 0.141$ g/cm^3, *0,2155* mN/m *; 2,45* K *:* $\nu = 2,14\ 10^{-8}$ m^2/s, $\rho = 0.145$ g/cm^3, *0,27 mN/m) et une température où le liquide est super fluide (représenté par des cercles) (1,5 K : viscosité effective* $\nu = 0,88\ 10^{-8}$ m^2/s, $\rho = 0,145$ g/cm^3, *0,332* mN/m*). Les symboles vides correspondent au modèle de Watson et les symboles pleins correspondent au modèle de Watson-Bush. Le rayon de la buse est de* $0,1$ *mm et le rayon de la plaque est* $R_\infty = 24$ *mm. (b) Variation du rayon du ressaut* R_J *en fonction de la hauteur de liquide en bord de plaque* $H_\infty = d$*. Le liquide est l'hélium superfluide (voir spécifications plus haut) et* $Q = 26,7$ mm^3/s*. En pointillé est représenté le modèle de Watson et en trait continu le modèle de Watson avec le terme proposé par Bush et al. Comme on le voit l'influence du terme capillaire est déterminante. Pour davantage d'informations se reporter à [99].*

II.2.6 Conclusion sur la théorie de Watson

En résumé, la théorie de Watson semble fournir une très bonne description de la zone interne, malgré un certain nombre d'approximations (en particulier une hauteur de liquide qui diverge quand r tend vers 0 au lieu de diverger en $r = a$ comme cela est visible expérimentalement). L'accord entre théorie et expérience semble tout à fait correct et l'apport de Bush *et al.* améliore encore cet accord. Pour autant, il subsiste un léger écart systématique de tendance comme on peut le voir par exemple en Fig. II.6.

Cette théorie porte en elle deux "défauts" : le premier est d'être assez peu lisible, par exemple elle n'offre pas de relation simple entre le rayon et le débit et il est assez difficile d'isoler les paramètres physiques clés pour en mesurer l'influence. Le deuxième est que cette théorie est très "descriptive" mais assez peu "prédictive", elle laisse en paramètre d'entrée la hauteur de liquide après le choc. Autrement dit expérimentalement parlant on a besoin de mesurer la hauteur de liquide après le choc H_J pour prédire le rayon du ressaut R_J. Elle appelle donc à construire des théories plus complexes permettant de prédire le champ de liquide extérieur afin de "boucler" le système. C'est ce que nous allons maintenant aborder.

II.3 La théorie de Bohr

La théorie de Bohr *et al.* [8, 10, 113] se place dans le cas où le rayon du ressaut est assez grand devant la "longueur d'entrée", distance du point d'impact à laquelle la couche limite a envahi l'épaisseur de liquide dans la zone interne (cette limite correspond à $r^3 \gg l^3$ dans la description de Watson). Dans ce cas on peut négliger l'influence de la zone inviscide et mixte (c'est-à-dire la zone de stagnation ainsi que la zone où croît la couche limite visqueuse c'est-à-dire les zones (i) et (ii) de la théorie de Watson) afin d'obtenir un modèle plus simple. Cette approche reprend un peu la description proposée par Tani [108] et s'en inspire largement. [16]

En outre Bohr *et al.* [8] prennent en compte le profil extérieur et montrent qu'une singularité advient pour les grands rayons. En identifiant la singularité comme étant le bord de la plaque ou le bord du mur de confinement, l'écoulement à l'extérieur peut être décrit de manière unique. Si l'on couple cet écoulement à l'écoulement interne et à un choc de type Bélanger, on peut résoudre entièrement le problème et prédire le rayon du ressaut.

Comme on le verra, on peut éventuellement remettre en cause cette modélisation du choc et obtenir une description plus fine afin d'éviter une singularité au niveau du ressaut.

II.3.1 Équation de la couche limite

On utilise ici les mêmes notations que dans la partie précédente c'est-à-dire r, z les coordonnées cylindriques et u, w les composantes de la vitesse correspondantes, ν la viscosité cinématique du liquide et g l'accélération due à la gravité. Les équations de la couche limite sont les mêmes que celles utilisées par Watson (équations (II.9) et (II.10)) avec les conditions aux limites usuelles (équations (II.11) et (II.12)). Néanmoins, dans son modèle, Bohr se propose d'ajouter le terme de gravité négligé jusque là. Les équations de la couche limite sont alors données par :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \tag{II.44}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{dh}{dr} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{II.45}$$

$$u = w = 0 \text{ en } z = 0, \tag{II.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ en } z = h(r). \tag{II.47}$$

On utilise aussi la conservation du débit (II.13) :

$$r\int_0^{h(r)} u\mathrm{d}z = q, \tag{II.48}$$

avec $q = Q/2\pi$. On adimensionne ensuite ces équations en écrivant que tous les termes sont du même ordre, ce qui mène au dimensionnement suivant [17] :

$$\begin{cases} u = \alpha\tilde{u}, & \alpha = q^{\frac{1}{8}}\nu^{\frac{2}{8}}g^{\frac{3}{8}}, \\ w = \beta\tilde{w}, & \beta = q^{-\frac{3}{4}}\nu^{\frac{3}{4}}g^{\frac{1}{4}}, \\ r = \omega\tilde{r}, & \omega = q^{\frac{5}{8}}\nu^{-\frac{3}{8}}g^{-\frac{1}{8}}, \\ z = \delta\tilde{z}, & \delta = q^{\frac{1}{4}}\nu^{\frac{1}{4}}g^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{II.49}$$

16. Cette approche est donc centrée sur la description de la couche limite, l'idée qui sous-tend ce travail est que les vortex présents dans les structures de type I et type II sont dus à des décollements de la couche limite.

17. Dans ce dimensionnement on trouve d'ors et déjà la loi d'échelle pour R_J à laquelle Bohr *et al.* aboutit.

En supprimant les tildes, les équations (II.44), (II.46), (II.47) et (II.48) restent inchangées tandis que l'équation (II.45) devient

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dh}{dr} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{II.50}$$

En définissant v comme la moyenne de u selon z (c'est-à-dire $v = h^{-1}\int_0^h u(r,z)\mathrm{d}z$) on obtient à partir de (II.48) :

$$vrh = 1. \tag{II.51}$$

Si l'on intègre la conservation de quantité de mouvement (II.50) selon z pour tout r en utilisant (II.44) et les conditions aux limites (II.46) on obtient :

$$\frac{1}{rh}\frac{d}{dr}\left(r\int_0^h u^2\mathrm{d}z\right) = -\frac{dh}{dr} - \frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial z}\,|_{z=0}\,. \tag{II.52}$$

Si l'on définit maintenant G comme

$$G = \frac{1}{h}\int_0^h (u/v)^2\mathrm{d}z, \tag{II.53}$$

on obtient

$$v\frac{d}{dr}(Gv) = -\frac{dh}{dr} - \frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial z}\,|_{z=0}\,. \tag{II.54}$$

Cette fonction G, et de manière plus générale cette écriture du problème, sont des éléments clés de la théorie de Bohr *et al.* G est un facteur de forme qui nous permet d'étudier la plupart des cas possibles : des plus simples (fonction auto-similaire parabolique) aux plus complexes. Cette équation décrit donc l'équilibre entre le terme convectif et les termes du gradient de pression hydrostatique et de la friction visqueuse.

II.3.2 Profil auto-similaire pour u

Le modèle le plus simple pour la fonction reste, comme dans le cas de Watson, le choix d'une fonction auto-similaire c'est-à-dire :

$$u(r,z) = v(r)f(\eta),$$

où $\eta = z/(h(r))$. On se propose d'utiliser pour f la solution en accord avec les conditions limites la plus simple possible (mathématiquement du moins) soit un profil parabolique $f(\eta) = 3\eta - \frac{3}{2}\eta^2$. En utilisant cette fonction l'équation (II.54) devient :

$$\frac{6}{5}v\frac{dv}{dr} = -\frac{dh}{dr} - 3\frac{v}{h^2}.$$

Un autre choix pour f n'aurait eu pour effet que de changer les coefficients. Qualitativement ce choix importe peu. En particulier, en utilisant les changements de variables appropriés on obtiendra :

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{dh}{dr} - \frac{v}{h^2}. \tag{II.55}$$

C'est donc l'équation que nous allons utiliser à partir de maintenant. [18]

L'équation (II.55) couplée à la conservation du débit (II.51) conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dr}(v - \frac{1}{v^2 r}) = \frac{1}{vr^2} - v^3 r^2. \tag{II.56}$$

18. On remarquera que cette équation est l'analogue de (II.19) de Watson dans laquelle on a ajouté le terme dû à la gravité (h'). Par ailleurs, il est bon de signaler que l'impact de ce terme dû à la gravité est très faible dans la zone interne.

Cette équation peut être réécrite sous forme de deux équations paramétriques :

$$\frac{dr}{ds} = v^3 r^2 - r \qquad \frac{dv}{ds} = v - v^5 r^4 \tag{II.57}$$

Un théorème dû à Hardy [53] montre qu'on ne peut pas trouver de solutions physiques à l'équation (II.56). En effet, il n'existe pas de comportement admissible de v (à savoir une valeur finie ou nulle pour v) pour $r \to +\infty$. Dans [8], Bohr essaye l'ansatz de solution $v = y/r$ autrement dit $y = 1/h$:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{y^3}{r} - r \qquad \frac{dy}{ds} = -y^5 + \frac{y^4}{r^2}. \tag{II.58}$$

On peut négliger les termes en $1/r$ et $1/r^2$ (car y croît moins vite que r puisque $y = vr$ et que v décroît) on aboutit à :

$$v = (1/r)[4ln(r_s/r)]^{-\frac{1}{4}}, \tag{II.59}$$

où r_s est le rayon pour lequel la vitesse diverge. Cette solution est donc valable pour le profil extérieur ("après" le ressaut). [19]

Les auteurs supposent alors que le lieu où la vitesse v va diverger (où tout du moins sa dérivée) correspond au bord de la plaque (ou au lieu du mur), on peut ainsi estimer que $r_s \approx R_\infty$ où R_∞ est le rayon de la plaque comme présenté plus haut en Fig. II.2. Le système peut maintenant être fermé : la donnée de r_s sélectionne un profil pour la hauteur extérieure ; la condition du choc de Bélanger (II.33) peut s'écrire (à l'aide de la conservation du débit) :

$$v_1 = \frac{1}{4rv_2}[1 + (1 + 8v_2^3 r)^{1/2}], \tag{II.60}$$

où v_1 et v_2 sont respectivement les vitesses avant et après le choc. La donnée d'un couple (r_0, v_0) permet en outre d'intégrer numériquement (II.56) dans la zone interne et donc d'obtenir numériquement la position R_J du choc.

Cette théorie est donc testée en intégrant numériquement à partir du couple (R_0, H_0) où $R_0 = 1$ cm et $H_0 = 0,05$ cm qui sont des données de la zone interne considérées comme typiques par les auteurs. R_s le rayon de la plaque est pris à 20 cm. Rappelons aussi que le profil de vitesse proposé est un profil de vitesse parabolique (type demi Poiseuille). Les résultats sont présentés en Fig. II.12.

Comme on peut le constater si l'accord qualitatif semble correct, l'accord quantitatif semble, lui, faire défaut. [20]

Par ailleurs, on peut observer sur la Fig. II.13 que le rayon du ressaut adimensionné r_J dépend très faiblement du rayon de la singularité r_s. On peut ainsi en conclure que pour $r_s \gg r_J$ (sans être non plus astronomique) on aura $r_J \approx 1$ et donc :

$$R_J \sim \omega \sim Q^{\frac{5}{8}} \nu^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}}, \tag{II.61}$$

avec un pré facteur à cette loi d'échelle dépendant uniquement du type de profil de l'écoulement. Cette loi d'échelle, si elle ne fournit pas un accord excellent avec les résultats expérimentaux (on a typiquement un exposant 3/4 au débit), constitue un résultat remarquable, car simple et analytique, compte tenu des nombreuses approximations nécessaires pour l'établir. [21]

19. Nous le verrons plus loin, ce type de solution décrit très bien l'expérience et peut être retrouvé très simplement en équilibrant frottements visqueux et pression hydrostatique pour un profil d'écoulement parabolique.

20. Par ailleurs on remarque une fois de plus que la distance buse-plaque ne semble pas avoir beaucoup d'importance (comme attendue par (II.41) et (II.42)).

21. Cette loi d'échelle, souvent appelée loi de Bohr, est actuellement la seule qui permette de prédire le rayon du ressaut sans calcul numérique et sans paramètre supplémentaire.

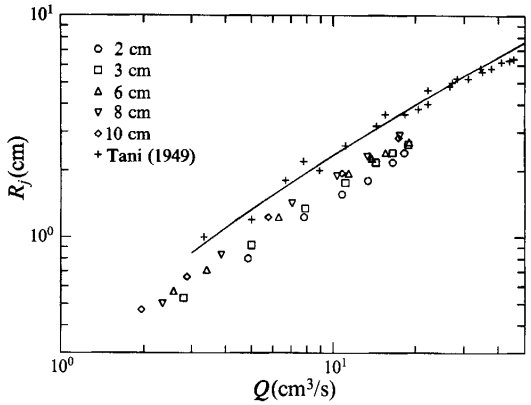


FIGURE *II.12 – Dépendance de R_J en fonction de Q. Le liquide utilisé est de l'eau pure dans le cas de Tani [108] et de l'eau contenant un peu de surfactant dans le cas de Dimon et al. (autres points). Le liquide est injecté par une buse de 8 mm de diamètre et pour différentes distances plaque-buse (entre 2 et 8 cm) sur une plaque de 40 cm de diamètre. La ligne continue correspond à la position du ressaut attendue théoriquement (obtenue numériquement). Pour davantage d'informations se reporter à [8] et [108].*

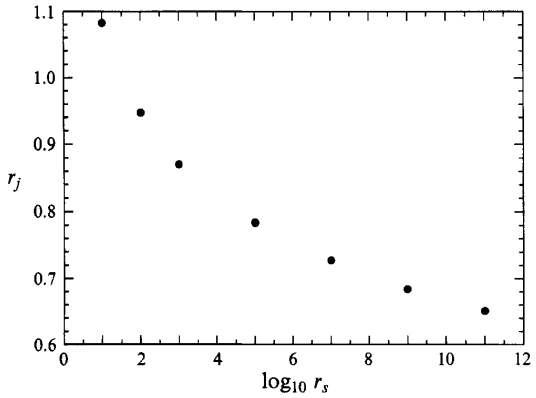


FIGURE *II.13 – Dépendance de r_J (rayon du ressaut adimensionné) en fonction de r_s. Comme on peut le constater la dépendance est faible... Pour davantage d'informations se reporter à [8].*

II.3.3 Profil avec un paramètre de forme

Comme on a pu le voir jusqu'à présent, l'hypothèse d'un profil similaire est très puissante, néanmoins elle montre certaines limites. En particulier une telle approche ne permet pas d'obtenir un profil d'écoulement comme observé expérimentalement : en effet avec un profil similaire il n'y a pas la possibilité de modéliser des recirculations comme on peut les observer dans un ressaut de type I (et à plus forte raison dans un ressaut de type II, voir Fig. I.11). Pour atteindre ce but il faut utiliser une fonction f plus souple. La manière la plus simple de modifier la modélisation consiste à ajouter un paramètre de forme $\lambda(r)$ dont dépendrait la fonction $f = f(\eta, \lambda(r))$ [22]. Cette approche est à rapprocher des techniques usuelles développées par Kármán et Pohlhausen pour décrire le développement des couches limites. On s'attend, par analogie avec ce type de modèle, à obtenir un décollement de couche limite en raison du gradient de pression hydrostatique adverse. Ce décollement est susceptible de modéliser la recirculation, au voisinage du ressaut. Ainsi pour améliorer le profil parabolique on

22. Pour mémoire la définition de f devient donc $u(r,z) = v(r)f(\eta, \lambda(r))$

propose :

$$u(r,z)/v(r) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3,$$

où a, b, c sont des fonctions de r. L'utilisation de la conservation de la masse (II.51) et des conditions aux limites (II.46) et (II.47) permet d'exprimer ces paramètres en fonction d'un seul (que l'on nommera λ), par exemple :

$$a = \lambda + 3, \qquad b = -(5\lambda + 3)/2, \qquad c = 4\lambda/3. \tag{II.62}$$

On en déduit :

$$G(\lambda) = 6/5 - \lambda/15 + \lambda^2/105. \tag{II.63}$$

Nous avons donc deux inconnues : $h(r)$ et $\lambda(r)$, deux équations sont donc nécessaires. Bien sûr on utilisera l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement (II.54). En suivant les méthodes de Kármán-Pohlhausen, on choisit comme deuxième équation l'équation (II.45) évaluée en $z = 0$:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,|_{z=0}\,. \tag{II.64}$$

Ces deux équations peuvent être exprimées en fonction de λ en utilisant (II.62) et (II.63) :

$$v\frac{dG(\lambda)v}{dr} = -\frac{dh}{dr} - v\frac{\lambda+3}{h^2}, \qquad \frac{dh}{dr} = -v\frac{5\lambda+3}{h^2}. \tag{II.65}$$

Puis l'on peut simplifier et éliminer v en utilisant la conservation du débit (II.51). On obtient ainsi, après calcul, un système de deux équations différentielles pour $h(r)$ et $\lambda(r)$:

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{5\lambda+3}{rh^3}, \qquad \frac{dG}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dr} = \frac{4r\lambda}{h} + G(\lambda)\frac{h^4 - (5\lambda+3)}{rh^4}. \tag{II.66}$$

Cette équation peut ensuite être résolue numériquement mais il est nécessaire d'imposer deux couples $(r_1, h(r_1))$ et $(r_2, h(r_2))$ (de préférence de part et d'autre du ressaut pour des raisons de stabilité de l'intégration numérique). Aucun autre paramètre ajustable n'est nécessaire pour déterminer $h(r)$ et $\lambda(r)$.

Cette intégration numérique permet d'observer un ressaut hydraulique (voir Fig. II.14) avec la présence d'une recirculation après le ressaut (voir les deux dernières figures de Fig. II.14) mais n'estime toujours pas la position du ressaut avec exactitude (on note une erreur de l'ordre de 10%). [23]

Lorsque l'on augmente la hauteur extérieure dans ce modèle on n'observe pas de transition d'un ressaut de type I vers un type II avec l'apparition d'un deuxième vortex en surface du choc (voir Fig. I.11) contrairement à ce que l'on observe expérimentalement. Le modèle numérique présenté échoue donc à capter cette transition. [24]

II.3.4 Approximation analytique des solutions de (II.66)

Bohr *et al.* se proposent d'approcher analytiquement les solutions de (II.66). Comme une seule solution analytique ne peut être construite pour l'ensemble du problème, les auteurs découpent le problème en trois zones : la zone interne (avant le choc : r et h petits), la zone externe (après le choc : r grand et v petit) et la zone du choc.

23. L'un des avantages de ce modèle est d'avoir des équations régulières, y compris au niveau du choc (on évite la "condition de choc").

24. Cet échec du modèle s'explique facilement par le modèle même, en effet un tel vortex a, de fait, une vitesse de surface négative. Or la vitesse de surface donnée par (II.62) ne peut être que positive comme détaillé dans [113]...

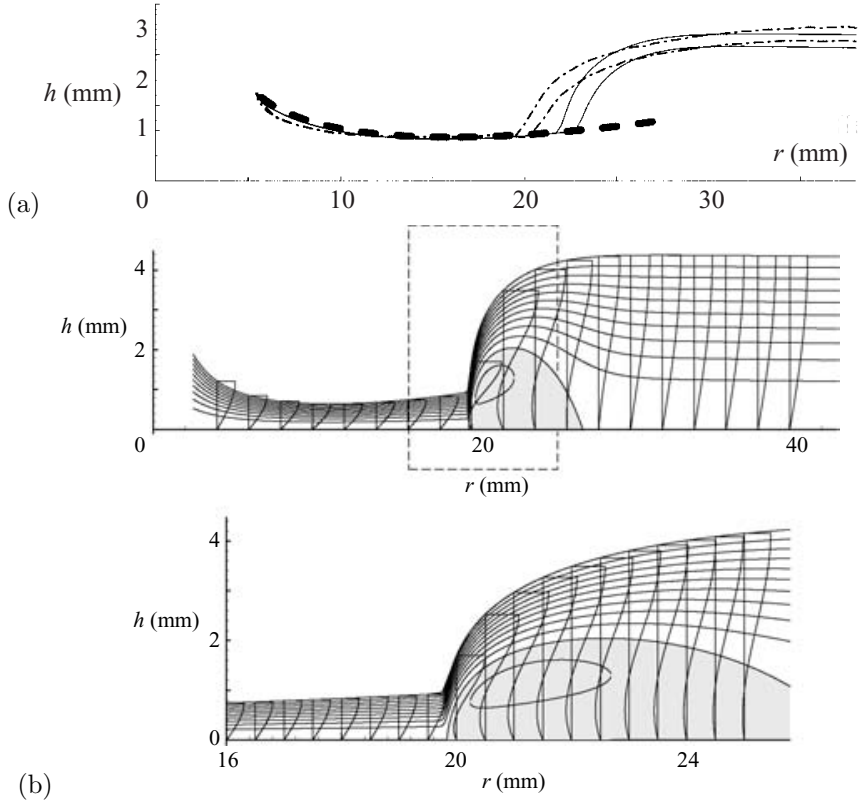


FIGURE *II.14* – *(a) Deux profils de hauteurs (ressauts de type I) obtenus expérimentalement (lignes fines pointillées) sont comparés aux solutions numériques (lignes continues) de (II.66). Les paramètres d'entrée sont deux points des profils expérimentaux (ici pris à* $r = 11.8$ *mm et* $r = 30$ *mm). Comme on peut le voir, l'accord est qualitativement correct mais demeure quantitativement faible. La ligne pointillée épaisse correspond à la solution analytique approchée dans la zone interne (i.e. l'équation (II.68)). Comme on le voit l'approximation semble correcte. (b) Visualisation des lignes de courants d'un ressaut de type I basé sur la résolution numérique des équations (II.66). La figure la plus haute correspond à un profil "global" tandis que la plus basse est grossie autour du choc. Les profils de vitesses espacés régulièrement sur l'axe horizontal correspondent à la composante horizontale* u*, cela explique pourquoi ils ne sont pas tangents aux lignes de courant. Les vitesses variant brutalement le long de l'axe, les valeurs de* u *sont toutes adimensionnées par* v *la vitesse moyenne à la position donnée. Comme on peut le constater, la recirculation après le ressaut est bien captée par le modèle. Pour davantage d'informations se reporter à [113].*

II.3.4.1 Zone interne (avant le choc)

Dans la zone interne on peut considérer que r est petit et que h est petit par rapport au cas de la zone externe. On appelle Θ un rayon typique et on le traite comme un paramètre petit en utilisant le changement de variable :

$$h = \Theta^{\alpha}\ \mathscr{H}, \qquad r = \Theta\ \mathscr{R}, \qquad v = \Theta^{-1-\alpha}\ \mathscr{V}. \tag{II.67}$$

La résolution des équations (II.66) impose $\alpha = 2$. Les solutions approchées pour la zone interne sont alors données par :

$$\begin{cases} \mathscr{H} = C_1/\mathscr{R} + 4\mathscr{R}^2/(5G(-3/5)), \\ \lambda = -3/5 + h^4/5 - 105r^2h^3/272, \end{cases} \tag{II.68}$$

où C_1 est une constante d'intégration [25]. On retrouve donc pour $\mathscr{H}$, aux coefficients près, une expression similaire à celle de $h(r)$ pour $r^3 \gg l^3$ obtenue dans le cadre de la théorie de Watson (voir (II.21)).

La solution (II.68) est testée dans la figure Fig. II.14 et est comparée à la situation expérimentale et à la solution obtenue par intégration numérique de (II.66). La solution analytique (II.68) semble donc tout à fait justifiée et confondue avec les points expérimentaux et la solution numérique.

On en déduit donc que l'ajout de la pression hydrostatique dans la zone interne proposé par Bohr *et al.* (par rapport aux équations de base de Watson) peut aisément être négligé au premier ordre dans la zone interne, mais également qu'un profil de vitesse auto-similaire est parfaitement adapté pour décrire cette zone interne.

II.3.4.2 Zone externe (après le choc)

Considérons maintenant les solutions de (II.66) pour les grands r. Une fois encore nous introduisons un rayon typique θ qui sera, cette fois, considéré comme un paramètre grand. En supposant, en plus, que la hauteur est d'ordre 1, le changement de variable s'écrit :

$$h = \mathscr{H}, \qquad r = \theta\, \mathscr{R}, \qquad v = \theta^{-1}\, \mathscr{V}. \tag{II.69}$$

Les solutions approchées des équations (II.66) pour la zone externe seront donc :

$$\begin{cases} \mathscr{H} = \left(12\ ln(\mathscr{R}_{end}/\mathscr{R})\right)^{1/4}, \\ \lambda = \frac{3}{10r^2}\left(\frac{3}{h^3} - h\right), \end{cases} \tag{II.70}$$

où $\mathscr{R}_{end}$ est une constante d'intégration représentant le rayon pour lequel la hauteur s'annule. [26] Cette solution asymptotique a exactement la même forme que celle proposée par Bohr *et al.* dans un article précédent et présentée plus haut (obtenue via l'équation (II.59)). [27]

II.3.4.3 Zone du choc : conservation de la quantité de mouvement.

Pour terminer cette étude on s'intéresse maintenant à la zone du ressaut proprement dit. Jusqu'à présent, dans les modèles analytiques, la condition de choc a toujours été de type Bélanger (II.33) c'est-à-dire d'épaisseur nulle et donc sans friction. On se propose ici de généraliser cette approche à une situation continue. Pour ce faire on utilise les équations (II.65) dans lesquelles on introduit un paramètre formel β dans le terme de gauche de la seconde équation :

$$v\frac{dG(\lambda)v}{dr} = -\frac{dh}{dr} - v\frac{\lambda+3}{h^2}, \qquad \beta\frac{dh}{dr} = -v\frac{5\lambda+3}{h^2}, \tag{II.71}$$

ainsi le paramètre β contrôle l'influence de la pression hydrostatique et le profil de vitesse. Bien sûr, le seul cas physique valable correspond à $\beta = 1$ et les équations se simplifient ensuite en (II.66). Néanmoins, ce cas de figure ne peut être résolu analytiquement. Les auteurs se proposent donc d'obtenir

25. C_1 peut être identifié comme valant 0,25 en comparant avec les expériences.
26. La difficulté avec cette écriture est que le rayon $\mathscr{R}_{end}$ ne peut être connu précisément car non physique.
27. Nous verrons plus loin que ce type de solution peut être retrouvé très simplement par un calcul de type "lubrification" en équilibrant frottements visqueux et pression hydrostatique pour un profil d'écoulement parabolique.

une solution approchée dans le cas où $\beta \to 0$ c'est-à-dire dans un cas où il y a peu d'influence de la pression hydrostatique sur le champ de vitesse. Bien entendu si on a strictement $\beta = 0$ on retrouve la condition de choc classique de Bélanger.

Si l'on nomme $r = r_0$ la position du choc et que l'on considère une région de petite taille β autour de ce choc, on peut faire le changement d'échelle $r = r_0 + \beta\mathscr{X}$. Après calcul on obtient à partir de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{h_c}{h_1}\right)^3}\right) = 2\left(-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{h_c}{h_2}\right)^3}\right)^{-1}. \tag{II.72}$$

avec h_1 défini comme la limite de h lorsque $\mathscr{X} \to -\infty$ (ce qui correspond, de fait, à la hauteur avant le choc) et h_2 défini comme la limite lorsque $\mathscr{X} \to +\infty$ (autrement dit la hauteur après le choc). h_c est défini comme $h_c = (G(-3/5)/r_0^2)^{1/3}$. Cette équation fournit donc une alternative raisonnable à la condition traditionnelle de choc.

En Fig. II.15 cette solution asymptotique est comparée au résultat de l'intégration numérique de (II.66). Pour ce faire, les hauteurs h_1 et h_2 sont considérées comme paramètres ajustables, elles permettent de déterminer r_0. Ensuite la donnée d'un point "à l'intérieur" du ressaut permet d'intégrer l'équation différentielle en h obtenu à partir de (II.71), les autres valeurs découlants du modèle. Comme on peut le constater le résultat est étonnamment bon, en particulier au niveau du choc on peut constater que l'hypothèse $\beta \to 0$ (au lieu de $\beta = 1$ dans le modèle numérique) ne perturbe pas trop le résultat. Il est à noter que les équations (II.71) suffisent à décrire la formation du vortex dans la région du choc.

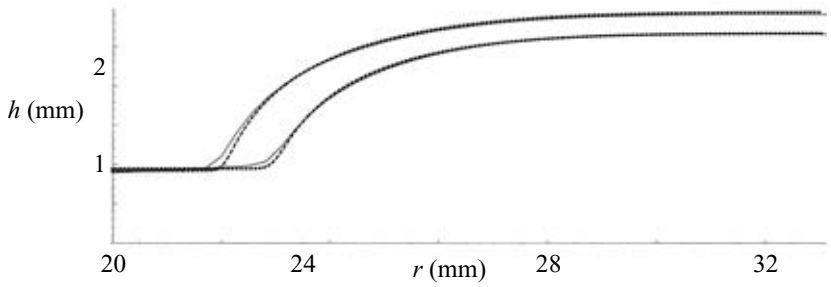


FIGURE *II.15 – Comparaison entre le modèle entièrement numérique (II.66) (les deux solutions déjà présentées en Fig. II.14 (haut)) en lignes solides et les solutions de l'équation asymptotique obtenue à partir de (II.71) (en lignes hachurées). Bien que dans la solution asymptotique on ait supposé $\beta \to 0$, la solution se compare très bien avec la solution entièrement numérique où $\beta = 1$. Pour davantage d'informations se reporter à [113].*

II.3.5 Conclusion sur la théorie de Bohr

Comme on a pu le voir, la théorie développée par Bohr *et al.* ne fournit pas de loi analytique simple permettant de prédire exactement le rayon du ressaut et nécessite systématiquement la connaissance de points expérimentaux du profil de hauteur pour permettre une intégration numérique des équations proposées. Pour autant, contrairement à la théorie de Watson, Bohr *et al.* propose un problème fermé avec une solution pour les profils intérieurs et extérieurs. En outre, il propose une loi d'échelle simple pour le rayon du ressaut qui permet d'anticiper de manière raisonnable l'influence du débit, de la viscosité (mais clairement pas de la gravité puisque si la gravité diminue, les effets de la tension

de surface deviennent importants). Par ailleurs un modèle numérique permet d'anticiper la présence d'une zone de recirculation après le ressaut.

Grâce à ces travaux, on peut vérifier la validité de certaines approximations couramment admises, en particulier il apparaît clairement que dans la zone interne la pression hydrostatique peut effectivement être négligée. En outre, les estimations proposées pour décrire le profil extérieur laissent présager qu'un modèle simple négligeant l'inertie peut être trouvé. Ceci sera utilisé dans notre propre description de la zone externe.

II.4 Modèles alternatifs

Dans cette partie nous présentons un certain nombre de modèles alternatifs ou complémentaires aux deux modèles précédents. Le lecteur pressé peut sans problème passer les quelques paragraphes suivants, les éléments théoriques nécessaires à la compréhensions du travail original présenté dans ce mémoire ayant été développés précédemment [28]. L'idée n'est pas de décrire de manière exhaustive les différentes théories mais de dégager en quelques paragraphes les principaux apports et les différentes approches développées par chacun. Ces différentes approches seront présentées de manière chronologique.

II.4.1 Approche de Godwin

Dans un article [49] contemporain du premier article de Bohr *et al.* , Godwin suppose que la position du ressaut peut être, en première approximation, déterminée par le rayon où la couche limite envahit entièrement l'épaisseur de liquide. C'est-à-dire lorsque l'épaisseur de la couche limite (donnée par $\delta \sim (\nu a/u_0)^{\frac{1}{2}}$ avec u_0 la vitesse moyenne du liquide en sortie de buse et a le rayon de la buse) atteint la hauteur de liquide attendue dans le cas d'un fluide parfait ($h = \frac{a^2}{2r}$). Si l'on suppose que R_J est donné par le rayon où la couche limite envahit l'épaisseur du film mince on aboutit aux lois d'échelles suivantes :

$$\begin{cases} R_J \sim Q^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}, \\ h_J \sim Q^{-\frac{1}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} a^{\frac{4}{3}}, \end{cases} \tag{II.73}$$

où h_J est la hauteur de liquide avant le choc et a le rayon de la buse. Godwin propose ensuite de calculer la valeur de H_J (la hauteur de liquide après le choc) en utilisant une condition de choc de type Bélanger (I.1).

Même si comme nous le verrons plus loin l'exposant de Q dans la loi de puissance de R_J ne correspond pas aux coefficients mesurés, cette approche a toutefois le mérite de proposer une loi d'échelle à partir d'un calcul simple incluant les éléments physiques du phénomène de ressaut.

II.4.2 Approche de Higuera

II.4.2.1 Ressaut à deux dimensions

Toujours dans la même période, Higuera réalise la première simulation numérique réussie du ressaut hydraulique [56]. Dans ce travail le ressaut hydraulique est stationnaire et en deux dimensions sur une plaque de dimensions finies. Higuera utilise donc les équations (II.44), (II.45), (II.46), (II.47) et (II.48) [29] couplées à une condition limite au bord de la paroi : le fait que l'accélération de la couche

28. On pourra toutefois se reporter à la conclusion de la revue bibliographique II.5
29. C'est-à-dire les équations proposées par Bohr pour modéliser la couche limite en coordonnées cartésiennes.

limite diverge au niveau du bord de la paroi. Higuera a aussi étudié l'influence de la tension de surface.

Ces simulations numériques, si elles ne sont pas comparables aux expériences (la première raison étant le fait que l'on se place dans une géométrie différente de celles existantes expérimentalement) apporte pour autant un certain nombre d'enseignements généraux.

(i) Une fois de plus on retrouve le fait que dans la zone interne la pression hydrostatique est négligeable et que la description de Watson semble tout à fait convenable.

(ii) Il n'y a pas besoin de théorie de choc (ondulatoire ou autre) pour faire apparaître un ressaut. [30]

(iii) On fait apparaître naturellement un ressaut de type I avec une zone de recirculation après le choc (dont la taille varie avec la tension de surface).

Par ailleurs il observe l'apparition soudaine d'un vortex à la surface du ressaut pour certaines conditions de débit et de pression hydrostatique. On ne peut bien sûr pas parler de ressaut de type II car il n'y a plus de vortex de recirculation au niveau de la surface solide [31]. Deux de ces solutions sont proposées en Fig. II.16.

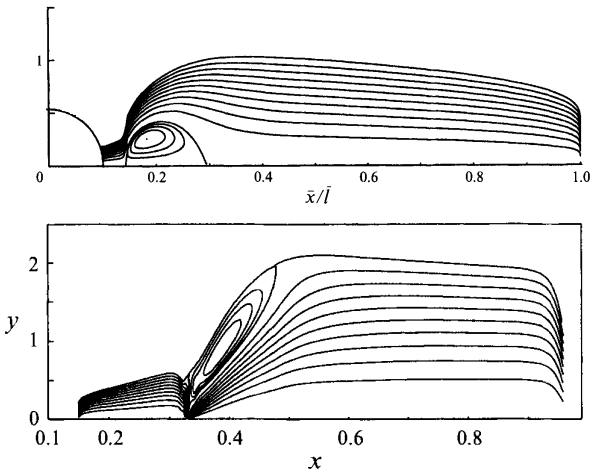


FIGURE *II.16 – Deux exemples de profils obtenus par simulation numérique. Le premier (en haut) sans tension de surface et le second (en bas) avec tension de surface. Comme on peut le voir le ressaut hydraulique apparaît spontanément. Par ailleurs dans le premier cas on observe spontanément l'apparition d'une zone de recirculation après le choc. Dans le second cas on observe une recirculation en surface qui approche le profil d'un ressaut de type II bien que la zone de recirculation au contact de la surface solide ait disparue. Pour davantage d'informations se reporter à [56].*

En outre, cet article s'attache à décrire en détail ce qu'il se passe à l'intérieur du choc. S'appuyant sur des articles de Smith *et al.* [45, 11] il détaille ainsi trois zones :

(i) Une zone de cisaillement en surface.

(ii) Une zone inviscide effective qui correspond au liquide ayant une vitesse négative en raison de la pression hydrostatique plus importante en aval.

(iii) Une sous couche limite visqueuse au contact de la surface solide (et donc logiquement de vitesse inverse au sens moyen du courant) qui est due aux effets visqueux sur la couche de recirculation plus haut (voir Fig. II.17).

30. Ce résultat fut ensuite montré plus tard par Bohr *et al.* . On obtient un ressaut sans condition de choc à partir de l'intégration de (II.66).

31. Cette solution peut bien sûr être due à des effets numériques car il s'agit rappelons-le de simulations.

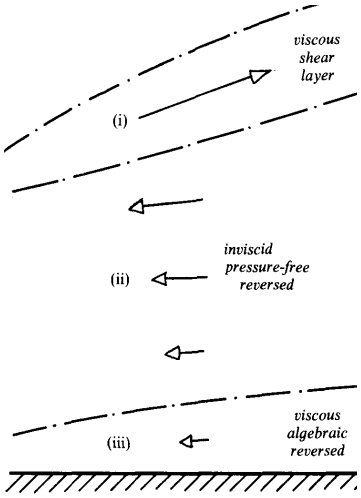


FIGURE *II.17 – Schéma emprunté à la référence [45]. Les trois zones sont ainsi représentées : zone de cisaillement (i), zone invicide de recirculation (ii) et couche limite visqueuse au niveau de la paroi (iii). Pour davantage d'informations se reporter à [56].*

II.4.2.2 Ressaut circulaire

C'est aussi à partir des travaux de Smith *et al.* [45, 11] que Higuera propose dans un article plus récent une description en ordre de grandeur du ressaut circulaire hydraulique [57].

(i) La zone interne peut être modélisée par la théorie de Watson.

(ii) Higuera se propose de décrire le profil extérieur par un équilibre entre pression hydrostatique et frottements visqueux qui donne :

$$H(r) = \left[H_\infty^4 + \frac{6}{\pi} \frac{\nu Q}{g} ln \left(\frac{R_\infty}{r} \right) \right]^{\frac{1}{4}}, \tag{II.74}$$

où R_∞ et H_∞ sont respectivement le rayon de la plaque et la hauteur de liquide au bord de la plaque.

(iii) Pour traiter le choc il s'intéresse à la structure fine (que nous avons développée plus haut et illustrée en Fig. II.17). Il modélise la zone de cisaillement comme un jet liquide (jaillissant d'une fente circulaire infiniment fine de rayon r proche de R_J et correspondant au début du ressaut) héritant de l'ensemble de la quantité de mouvement incidente. Il suppose un écoulement auto-similaire à ce jet purement visqueux qui, peu à peu, s'élargit proportionnellement à r [32]. Plus en aval l'épaisseur du jet va continuer à croître jusqu'à atteindre une épaisseur et une vélocité comparable à celles de la zone de recirculation (ii). Dans ces conditions, le jet va devenir sensible à la gravité et fermer la zone de recirculation. On peut facilement estimer la position (en ordre de grandeur) où le jet devient sensible à la gravité et ferme la zone de recirculation. On estime ainsi l'épaisseur du fluide H_2 et le rayon auquel cela se produit R_2 :

$$\begin{cases} H_2 = O\left(R_J^{-\frac{2}{3}} g^{-\frac{1}{3}} (Q/2\pi)^{\frac{2}{3}} \right), \\ R_2 = O\left(R_J^{-\frac{5}{3}} \nu^{-1} g^{-\frac{1}{3}} (Q/2\pi)^{\frac{5}{3}} \right), \end{cases} \tag{II.75}$$

où R_J est le rayon du ressaut.

Si l'on couple ce profil de hauteur (II.74) à l'équation sur la hauteur obtenue précédemment (II.75) en faisant une hypothèse de choc infiniment fin (c'est-à-dire que h_2 correspond à la hauteur juste

32. Ce type de jet (de type Bickley) est décrit dans l'ouvrage de Batchelor [4] aux pages 343-346.

après le choc en $r = R_J$), on aboutit à une loi d'échelle pour le rayon du ressaut hydraulique. L'auteur considère alors que $H_\infty^4 \gg \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R}\right)$. Il aboutit alors à la loi d'échelle :

$$Q \sim \sqrt{g} 2\pi R_J (H_\infty^4)^{3/8}. \tag{II.76}$$

Dans son article Higuera arrive à cette loi d'échelle en considérant que H_∞ est très grand devant l'autre terme du profil d'épaisseur. Nous verrons plus loin que cette approximation est très discutable mais que la loi d'échelle à laquelle on aboutit, à partir des équations écrites précédemment, en prenant en compte tous les termes du profil de hauteur est, elle, en excellent accord avec nos expériences.

II.4.3 Travaux de Rao et Arakeri

Dans leurs travaux Rao *et al.* [90] proposent une approche basée sur le calcul numérique d'intégrales pour modéliser le ressaut [33]. Ils se proposent de traiter le problème en reprenant les équations développées par Bohr *et al.* [8] :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \tag{II.77}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{dh}{dr} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{II.78}$$

couplées avec les conditions aux limites usuelles (non glissement aux parois, surface libre).

Suivant l'analyse de Watson [114] les auteurs considèrent six zones distinctes :

(a) Une zone de stagnation dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur du diamètre du jet a.

(b) Une zone où la couche limite se développe.

(c) Une zone où la couche limite a entièrement envahi l'épaisseur du film liquide.

(d) La zone juste avant le ressaut où les effets de la gravité sont importants et où un gradient de pression adverse est présent.

(e) La zone du ressaut hydraulique (incluant la zone de recirculation).

(f) La région aval.

Bien entendu, il arrive que certaines zones ne soient pas présentes (par exemple pour des petits ressauts on ne pourra pas observer de région (c)). Le traitement de chacune des zones est un peu fastidieux et peut s'avérer parfois difficile. Dans leur publication Rao *et al.* ne traitent en fait pas la zone (a) et traitent en commun les zones (c) et (d).

II.4.3.1 La zone (b)

On suppose que cette zone est suffisamment petite pour que les effets de la gravité puissent être négligés.

Dans cette zone (b), les auteurs proposent un profil de vitesse parabolique :

$$\frac{u}{u_s} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3, \tag{II.79}$$

33. Leur approche se veut généraliste : elle traite de trois cas : impact d'un jet sur une plaque horizontale, sur le sommet d'un cône et sur une sphère. Nous nous concentrerons uniquement sur le cas horizontal.

avec $\eta = z/h$. Les mêmes équations donnant les mêmes résultats, on arrive naturellement à un résultat similaire à celui obtenu par Watson pour cette zone :

$$\delta(x) = 4,736a \left(\frac{x\nu}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{II.80}$$

$$h(x) = \frac{\phi^2}{8x} + 0,375\delta(x), \tag{II.81}$$

avec ϕ le diamètre de l'injecteur.

Cette zone sera valable jusqu'à ce que $h(x) = \delta(x)$.

II.4.3.2 Les zones (c) et (d)

Dans cette zone on suppose à nouveau un profil parabolique avec des coefficients susceptibles de varier. Les conditions limites donnent alors :

$$a = 1,5 - \frac{b}{2}; \qquad c = -0,5 - \frac{b}{2}; \qquad b = \frac{g_z h(x)^2}{2\nu u_s(x)}\frac{dh}{dx} - \frac{g_x h(x)^2}{2\nu u_s(x)}. \tag{II.82}$$

Les auteurs estiment que les équations ne sont plus valables après le décollement de la couche limite (après le début du vortex). Ils ajoutent donc une condition qui permet de déterminer la position du décollement : $\frac{\partial u}{\partial z}\,|_{z=0} = 0$ c'est-à-dire une zone d'écoulement sans contrainte de cisaillement au niveau de la surface solide. Cela a pour effet de fixer les coefficients à ce x donné : a, b et c valent respectivement : 0, 3 et -2.

II.4.3.3 La zone externe (f)

Il apparaît que les conditions au bord de la plaque ont une influence sur l'écoulement dans le cas où l'on a une zone sous-critique (i.e. s'il y a un ressaut). Ici les auteurs supposent que le liquide s'écoule librement au bord de la plaque. En supposant que le bord de plaque correspond à un minimum d'énergie : $\frac{dE}{dh} = 0$, on peut déterminer H_∞ et ainsi boucler le problème.

II.4.3.4 Résultat de la modélisation

Les auteurs intègrent ensuite numériquement l'équation donnant b et les équations de conservation du débit ($Q = 2\pi r h u_s I_1$ avec $I_1 = \int_0^1 f \mathrm{d}\eta$) et de conservation du moment cinétique (II.78). Les résultats numériques sont ensuite comparés aux données expérimentales. Si l'accord dans la zone centrale (avant le ressaut) est tout à fait correct [34], on constate que les simulations numériques échouent à obtenir la position du ressaut mais surtout à décrire de manière convenable l'extérieur du ressaut (de l'aveu même des auteurs). [35]

L'enseignement que l'on peut tirer de cet article est la nécessité de décrire avec acuité la zone aval du ressaut et son profil d'épaisseur qui semble être un paramètre clé pour résoudre le problème. [36]

34. On ne s'en étonnera pas : il s'agit peu ou prou du modèle de Watson.

35. Des simulations ont aussi été réalisées dans le cas d'un cône et d'une sphère mais elles n'ont pas été comparées à des expériences.

36. Il n'aura pas échappé au lecteur attentif que l'approche développée dans cet article est très proche de celle développée postérieurement par Bohr *et al.* [113] (et détaillée précédemment dans le présent manuscrit). Les équations

II.4.4 Modèle de Brechet et Néda

Brechet *et al.* [12], dans cet article à destination des enseignants, étudient expérimentalement et théoriquement le ressaut hydraulique circulaire. Nous nous intéresserons ici à l'aspect théorique. Les auteurs proposent plusieurs descriptions simplifiées du ressaut hydraulique : le ressaut en fluide parfait, le modèle de Godwin (en y ajoutant éventuellement un profil de hauteur plus complexe dans la zone interne) et enfin l'approche présentée ici. Toutes ces approches (excepté le cas non visqueux) aboutissent à la même loi d'échelle simple : $R_J \propto Q^{\frac{1}{3}}\nu^{-1/3}$ qui correspond à la loi d'échelle proposée par Godwin (II.73). Le modèle que nous détaillons ici (propre à Bréchet *et al.*) a pour vertu de simplifier au maximum et de prendre en compte les différents éléments physiques qui conduisent à la loi d'échelle. Les auteurs considèrent, dans la zone interne, un profil de vitesse parabolique (demi poiseuille) pour des rayons où la couche limite a entièrement envahi l'épaisseur de liquide :

$$v(r) = u(r,h)\left(2\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right). \tag{II.83}$$

Si l'on couple cette équation à la conservation du débit ($Q = 2\pi r \int_0^h u(r,z)\mathrm{d}z$) on obtient :

$$v(r,z) = \frac{3Q}{4\pi r h^3}(2hz - z^2). \tag{II.84}$$

Afin de déterminer le profil de hauteur on étudie la conservation de l'énergie sur une petite portion $r+dr$ et $z+dz$. Si l'on néglige la pression hydrostatique et les effets de la tension de surface dans cette zone interne du ressaut, la dissipation d'énergie peut être exprimée comme la dissipation associée à la viscosité

$$d^2W_d = 2\pi\nu\rho r\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}r, \tag{II.85}$$

et la dissipation du flux d'énergie cinétique. Le flux d'énergie cinétique s'écrit pour un élément de volume :

$$dJ = \pi\rho r v(r,z)^2 v(r,z)\mathrm{d}z. \tag{II.86}$$

L'intégration de ces flux d'énergie par rapport à z et l'écriture de la conservation de l'énergie : $\frac{dJ}{dr} + \frac{dW_d}{dr} = 0$ conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{h}{r}\left(\frac{h'}{h} + \frac{1}{r}\right) = \frac{35\pi\nu}{9Q}. \tag{II.87}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$h(r) = \frac{35}{27}\frac{\pi\nu}{Q}r^2 + \frac{C}{r}, \tag{II.88}$$

où C est une constante d'intégration [37] [38]. Pour déterminer C les auteurs considèrent que le profil (II.88) commence lorsque la couche limite a entièrement envahi l'épaisseur du film liquide. On peut donc estimer que les fonctions $\delta(r)$ et $h(r)$ et leurs dérivées se raccordent en r_0. Si l'on suppose que

de départ sont les mêmes mais l'approche de Bohr est plus rigoureuse et conduit à de meilleurs résultats. En particulier Bohr ne traite pas les zones séparément ce qui permet de ne pas fixer de forme pour les coefficients a, b, et c. Cette plus grande fléxibilité amène de bien meilleurs résultats.

37. On remarquera que l'on retrouve bien une solution proche de celle proposée par Watson.

38. La constante C peut être déterminée en se ramenant au cas du fluide parfait vu précédemment car si $\nu = 0$ alors $h(r) = C/r$ ce qui correspond à l'équation (II.3) on aurait alors $C = a^2/2$. On peut aussi faire le choix de laisser cette constante libre et de la déterminer par ailleurs. C'est le choix que défendent les auteurs.

l'épaisseur de la couche limite vaut environ : $\delta(r) = \sqrt{\frac{\nu r}{u_0}} = \sqrt{\frac{\nu r \pi a^2}{Q}}$ on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \delta(r_0) = \sqrt{\frac{\nu r_0 \pi a^2}{Q}} = \frac{35}{27}\frac{\pi\nu}{Q} r_0^2 + \frac{C}{r_0} = h(r_0), \\ \frac{d\delta(r_0)}{dr} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu\pi a^2}{Q r_0}} = \frac{70}{27}\frac{\pi\nu}{Q} r_0 - \frac{C}{r_0^2} = \frac{dh(r_0)}{dr}. \end{cases} \tag{II.89}$$

Ce système d'équations aboutit à $C = \frac{27}{140}a^2$. Connaissant C nous connaissons maintenant le profil de l'écoulement. On se propose de rapprocher cet écoulement de celui qu'on observe dans un canal divergent. Sachant que dans un canal divergent des instabilités apparaissent naturellement pour un nombre de Reynolds critique ($Re_{max}(\theta)$ où θ est l'angle d'ouverture du canal), on peut supposer que c'est ce type d'instabilité qui détermine la position du ressaut. Dans le cas d'une ouverture de canal faible ($\theta \to 0$) $Re_{max} = K/\theta$, où K est une constante dépendante de la géométrie du canal, et donc le seuil d'apparition devient :

$$Re\theta = K.$$

Si l'on considère maintenant que l'apparition du ressaut se fait au niveau du seuil d'apparition et que le Re et θ s'écrive

$$\begin{cases} Re = \frac{h\int_0^h u(r,z)\mathrm{d}z}{\nu} = \frac{Q}{2\pi r\nu}, \\ \theta \approx tan\theta = \frac{dh}{dr} = \frac{70}{27}\frac{\pi\nu}{Q} r - \frac{C}{r^2}, \end{cases}$$

on arrive à :

$$\frac{35}{27} - \frac{27}{280\pi}\frac{a^2 Q}{R_J^3 \nu} = K. \tag{II.90}$$

En réunissant les constantes on aboutit logiquement à la loi d'échelle :

$$R_J \sim Q^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}. \tag{II.91}$$

On retrouve donc la même loi d'échelle que celle proposée par Godwin bien qu'obtenue avec une condition de choc différente (et plutôt discutable). [39]

Remarque : Brechet et Néda n'y ont pas pensé, mais si l'on impose comme condition de choc $Fr = 1$ pour l'écoulement dans la zone interne décrit par (II.88) on retrouve la loi d'échelle proposée par Bohr : $R_J \sim Q^{\frac{5}{8}} \nu^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}}$. Le préfacteur que l'on obtient alors n'est pas celui de Bohr *et al.* . De plus cette approche repose sur une hypothèse discutable puisqu'il n'existe pas de point pour lequel $Fr = 1$. Comme on l'a vu au cours de l'introduction (en particulier par l'équation (I.5)) un Froude égal à 1 est incompatible avec la présence d'un choc.

II.4.5 Calculs de Kasimov

L'approche proposée dans l'article de Kasimov [63] est inspirée des approches de Watson, Bush *et al.* et Bohr *et al.* , et basée sur les équations de Saint-Venant lorsque le profil de l'écoulement est établi ($r^3 \gg l^3$). L'originalité de son approche consiste à ajouter une fonction dans les équations qui

39. Attention toutefois la loi d'échelle que nous avons obtenu ici n'est pas celle écrite littéralement dans l'article de Brechet *et al.* En effet nous avons choisi d'écrire u_0 comme $u_0 = Q/\pi a^2$ (ce qui est parfaitement juste) tandis que les auteurs utilisent la définition $u_0 = \sqrt{2gd}$ où d est la hauteur entre la plaque et la buse autrement dit la vitesse découlant de l'énergie cinétique acquise par la chute libre du liquide. Il convient de dire que le dispositif expérimental des auteurs correspond à un bac se vidant sous l'effet de la gravité. Néanmoins en plus d'être moins généraliste cette définition de u_0 est en soi discutable puisqu'elle néglige entièrement la pression due à la colonne de liquide dans le bac au dessus de la buse.

permet de tenir compte du caractère fini de la plaque et ainsi obtenir une solution plus naturelle pour le profil extérieur. Cela donne pour les équations du problème :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \tag{II.92}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{dh}{dr} - gs_b + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{II.93}$$

$$u = w = 0 \text{ en } z = 0, \tag{II.94}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ en } z = h(r), \tag{II.95}$$

avec $s_b = db(r)/dr$, pente de la plaque où $b(r)$ décrit la topographie du fond [40]. Kasimov fait ensuite le postulat d'un profil parabolique de vitesse (un demi-Poiseuille) $u(r,z) = u_s(r)(2z/h - z^2/h^2)$ pour l'ensemble du problème (zone interne et externe). Après calculs et en utilisant la conservation du débit ($Q = 2\pi r \int_0^h u(r,z)\mathrm{d}z$) on arrive à l'équation différentielle déterminant le profil :

$$\frac{dh}{dr} = \left[\frac{3Q^2}{10\pi^2 g}\frac{1}{h^2 r^3} - \left(s_b + \frac{3Q\nu}{2\pi g}\frac{1}{h^3 r}\right)\right] \Big/ \left(1 - \frac{3Q^2}{10\pi^2 g}\frac{1}{h^3 r^2}\right). \tag{II.96}$$

Cette équation différentielle décrit le profil de hauteur (et donc le profil de l'écoulement) avant et après le choc. Seulement cette équation possède une singularité, elle doit donc être complétée par une condition de choc qui permette de raccorder les solutions obtenues de part et d'autre de cette singularité (c'est-à-dire les solutions des profils interne et externe). Kasimov propose donc d'utiliser la condition de choc proposée par Bush *et al.* [13] et présentée précédemment dans l'équation (II.39) [41] :

$$g\frac{H_J^2 - h_J^2}{2} + \frac{\gamma}{\rho}\zeta\frac{H_J - h_J}{R_J} = \int_0^{h_J} u_J^2 \mathrm{d}z - \int_0^{H_J} u_J^2 \mathrm{d}z, \tag{II.97}$$

où h_J et H_J sont respectivement les hauteurs avant et après le ressaut, R_J le rayon du ressaut, γ la tension de surface et ρ la densité de liquide. ζ correspond aux effets radiaux de la tension de surface c'est-à-dire aux effets de la tension de surface sur les courbures de la surface libre avant et après le mur (voir Fig. II.7 (ii)). D'après Bush *et al.* on a $\zeta = 1 + (s - \Delta R)/(H_J - h_J)$. Cette équation fournit donc une généralisation de la formule proposée par Bélanger (I.1) :

$$\frac{H_J}{h_J} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\zeta}{B}\right)\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8F_1^2}{(1 + 2\zeta/B)^2}}\right], \tag{II.98}$$

où $F_1^2 = 3Q^2/(10\pi^2 g R_J^2 h^3)$ est un nombre de Froude effectif défini juste en aval du ressaut et $B = \rho g h_J R_J/\gamma$. Il s'agit donc de la relation de passage dérivée de Bélanger où l'on tient compte de tous les effets de la tension de surface (y compris ceux dus à l'épaisseur de choc) et où l'on suppose des profils paraboliques en entrée et en sortie.

Ainsi, si l'on connaît un point dans la zone interne et un point dans la zone externe, on peut boucler le système en intégrant numériquement de part et d'autre l'équation (II.96) à partir de deux points du profil.

II.4.5.1 Détermination de deux points de profil de part et d'autre du choc

L'auteur suppose l'existence d'un point r_0 tel que r_0 soit le point où la couche limite envahit entièrement l'épaisseur de la zone interne. Il décide arbitrairement (et pour tout dire de manière un peu

40. Autrement dit pour un jet impactant verticalement un disque horizontal on aura $b(r)$ constant (et donc $s_b(r) = 0$) pour $r < R_\infty$ et une variation importante pour $r > R_\infty$.

41. Dans ce cas Kasimov tient compte des termes négligés précédemment par Bush *et al.* :$F_c = -2\pi\gamma(s - \Delta R)$, pour plus d'informations revoir la sous section II.2.4

cavalière) que $r_0 = 1,2a$, on a donc $h_0 = 3Q/(4\pi u_0 r_0)$.

Pour déterminer le profil extérieur il faut donc trouver un point connu. On se propose de le déterminer en analysant les points critiques de (II.96).

Mathématiquement l'ajout de s_b permet à l'équation différentielle (II.96) d'avoir plusieurs points critiques. En particulier, en plus du point critique spiral observé par Bohr *et al.* [8] au niveau du ressaut, il y a un autre point critique au niveau du bord de la plaque. On élimine ainsi le manque d'états asymptotiques constaté par Bohr *et al.*

Si l'on choisit maintenant une fonction s_b nulle jusqu'à $r = R_\infty$ le bord de la plaque et qui chute très brutalement pour $r > R_\infty$ [42] on obtient alors deux points critiques : r_{c1} qui est un point critique spiral et donc signature d'une discontinuité (on le remplace donc par la condition de choc) et $r_{c2} \approx R_\infty$ qui est un point critique selle et donc stable. On en déduit donc le point du profil extérieur $(r_{c2}; h(r_{c2})) = (R_\infty; \left(\frac{3}{10\pi^2}\right)^{1/3} Q^{2/3} g^{-1/3} R_\infty^{-2/3})$. Cela revient donc à démontrer mathématiquement l'hypothèse proposée par Bohr *et al.* de fixer la singularité en bord de plaque. En outre Kasimov propose une épaisseur de liquide non nulle en ce point (dans le cas de Bohr *et al.* on avait une épaisseur nulle au niveau de la singularité). Cela permet donc de s'approcher d'une situation plus "réelle" en bord de plaque.

II.4.5.2 Conclusion sur le modèle

Ainsi muni du point (r_0, h_0) et du point $(r_{c2}; h(r_{c2}))$ ainsi que de l'équation (II.96) et de la condition de choc (II.98), on peut maintenant intégrer des deux côtés du ressaut et obtenir R_J en trouvant l'unique racine de (II.98). Après calcul numérique Kasimov aboutit au fait que $R_J \sim Q^p$ sur une large gamme de débits avec p proche de 0.625 (i.e. les 5/8 proposés par Bohr *et al.*) dans les conditions testées et proches de celles dans lesquelles Bohr *et al.* ont testé leur théorie. Pour autant p varie faiblement avec le rayon de la plaque, la viscosité, la tension de surface... [43]

II.4.6 Travaux de Rojas, Argentina, Cerda et Tirapegui

L'approche de Rojas *et al.* repose sur un développement exhaustif du profil de vitesse débouchant ensuite sur une intégration numérique [97] ou sur des lois d'échelles obtenues à partir de développements perturbatifs [98] [44]. Les équations de bases sont les équations de Navier-Stokes incompressibles et stationnaires pour un écoulement radial :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, \tag{II.99}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right), \tag{II.100}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{II.101}$$

42. L'auteur propose la fonction $s_b(r) = -C_1[1 + tanh((r - R_\infty)/C_2)]$ avec C_1 et C_2 des constantes arbitraires : pour obtenir un profil approchant C_1 doit être choisi grand et C_2 petit

43. Nous avons aussi comparé les prédictions de h_{c2} avec des points expérimentaux de H_∞ que nous présenterons plus tard. Nous n'arrivons ni à un accord en terme de loi d'échelle ni en terme d'ordre de grandeur : on observe un facteur 4 sur l'ordre de grandeur et une loi en $Q^{2/3}$ au lieu d'une loi en $Q^{0,17}$ observée expérimentalement. Cela peut s'expliquer par la non prise en compte de la tension superficielle en bord de plaque.

44. Notons que ce développement du profil de vitesse permet de traiter de manière générale les situations physiques de "lubrification inertielle" comportant des films minces visqueux (on peut citer par exemple l'instabilité de Faraday) [97]

où Π correspond aux termes de pressions hydrostatiques mais aussi à la tension de surface (la tension de surface se traduit par un terme de pression $\gamma\kappa$ avec $\kappa = \nabla^2 h / \left(\sqrt{1+(\nabla h)^2}\right)^3$ la courbure moyenne de la surface). Les auteurs considèrent également la conservation du débit :

$$2\pi r \int_0^{h(r)} u \mathrm{d}z = Q. \tag{II.102}$$

Les auteurs utilisent une longueur caractéristique L pour adimensionner r. Dans le cas du ressaut circulaire ils choisissent logiquement $L = R_\infty$ le rayon de la plaque. Pour adimensionner z et h on doit aussi utiliser une hauteur caractéristique, et les auteurs proposent d'utiliser H_∞ la hauteur de liquide en bord de plaque. Pour adimensionner les vitesses u et w on utilisera respectivement ΩL et ΩH_∞ où Ω est la fréquence caractéristique d'injection d'énergie c'est-à-dire le temps caractéristique pour renouveler entièrement le liquide du système soit $\Omega^{-1} = V/Q$ où V est le volume total de liquide ; on considèrera donc $\Omega^{-1} = \pi R_\infty^2 H_\infty / Q$. On définit donc logiquement le nombre de Reynolds par $Re = \Omega H_\infty^2/\nu = Q H_\infty/(\pi \nu R_\infty^2)$ ainsi que le nombre de Froude global $F = \Omega^2 R_\infty^2 / g H_\infty = Q^2/(\pi^2 g H_\infty^3 R_\infty^2)$. On définit en outre $\epsilon = H_\infty / R_\infty$. On a bien entendu $\epsilon \ll 1$ de par la géométrie même du système et les auteurs développent donc les équations en fonction de ce paramètre.

On considère à partir d'ici les quantités adimensionnées du système pour lesquelles on gardera les mêmes notations que pour les quantités dimensionnées, pour des raisons de simplicité. Les équations (II.100) et (II.101) deviennent :

$$Re\left[u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{II.103}$$

$$\epsilon^2 Re\left[u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \epsilon^2\left(\epsilon^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \tag{II.104}$$

Pour développer les équations (II.103) et (II.104) il faut ajouter une approximation sur le nombre de Reynolds Re. En utilisant la définition de la couche limite $\delta = \sqrt{\nu/\Omega} = H_\infty\sqrt{1/Re}$ [45] et en supposant que l'épaisseur H_∞ est l'échelle de longueur la plus petite du système et donc que $H_\infty \ll \delta$ on en déduit $Re \ll 1$. [46]

Nous avons donc ainsi deux paramètres de développement : ϵ^2 et Re. Les auteurs se proposent de développer au premier ordre, c'est-à-dire en négligeant tous les termes d'ordre $O(\epsilon^4, \epsilon^2 Re, Re^2, ...)$ ou d'ordre supérieur. Ce développement couplé à la conservation des contraintes dans le sens normal nous permet alors d'aboutir à l'équation différentielle :

$$T_3\frac{d^3h}{dr^3} + T_2\frac{d^2h}{dr^2} + T_1\frac{dh}{dr} + T_0 = 0, \tag{II.105}$$

avec

$$T_0 = \frac{3}{2}r^2 - \frac{27Re}{70}h, \quad T_1 = r\left(\frac{Re}{F}h^3\left[r^2 + \frac{\epsilon^2}{B}\right] - \frac{\epsilon^2}{2}\left[\frac{24}{5}\frac{dh}{dr}r + \frac{27}{10}h\right] - \frac{27}{10}Re\right),$$
$$T_2 = r^2\epsilon^2\left(\frac{18}{5} - \frac{Re}{FB}h^2\right)h, \quad T_3 = -r^3\epsilon^2\frac{Re}{FB}h^3,$$

où $B = H_\infty^2/l_c^2$ est le nombre de Bond, défini grâce à $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ la longueur capillaire, qui indique l'importance relative de la tension de surface vis-à-vis de la gravité. Bien entendu l'équation (II.105)

45. Attention toutefois au fait que cette épaisseur de couche limite ainsi définie ne correspond à aucune réalité physique du système. En particulier, elle ne correspond pas aux épaisseurs de couche limite discutées auparavant.

46. Dans notre jeu de données nous obtenons des Re valant jusqu'à 0,3 avec la définition présentée ci-dessus. Cette approximation semble donc assez discutable...

ne peut être résolue analytiquement mais on peut obtenir une solution numérique.

Pour obtenir un profil de hauteur il faut cependant, une fois encore, ajouter des conditions aux limites supplémentaires en bout de plaque ($h(1) = 1$, $dh/dr(1) = d^2h/dr^2(1) = 0$).[47]

Le résultat de ces simulations est présenté en Fig. II.18. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux obtenus par Bohr *et al.* [9] et Hansen *et al.* [52]. Toutefois, pour comparer le rayon du ressaut avec des points expérimentaux, il faut donner une définition numérique précise du rayon du ressaut. L'auteur propose d'utiliser le rayon où la courbure est considérée comme étant positive dans la zone interne et négative dans la zone externe ce qui signifie $d^2h/dr^2 = 0$ à ce point.

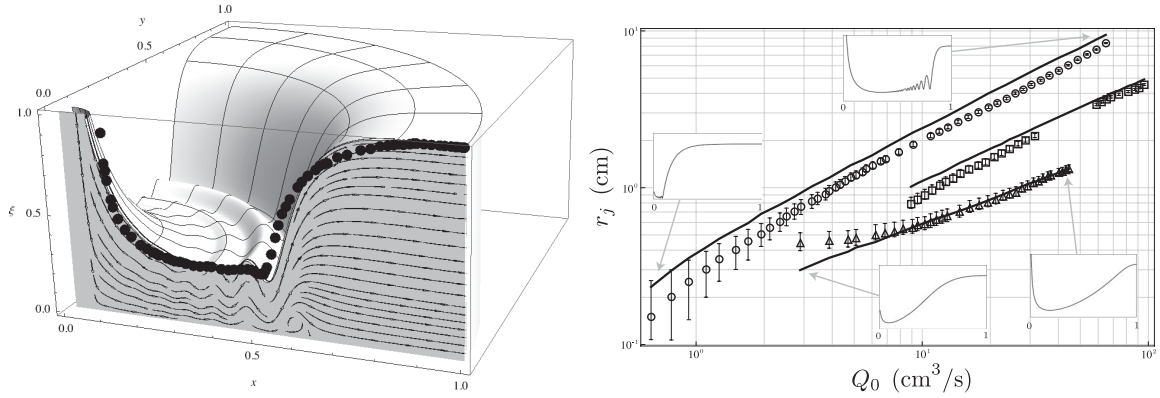


FIGURE *II.18* – *A gauche : vue en trois dimensions du ressaut circulaire hydraulique obtenue par intégration de l'équation (II.105)($\zeta = h$ et $x = r$). Dans le plan y=0 sont représentés par des points noirs les points expérimentaux d'un profil de hauteur issu de [9]. Le liquide utilisé est de l'éthylène-glycol ($\rho = 1,1.10^3$ kg/m^3, $\gamma = 4,5.10^{-2}$ N/m et $\nu = 7,6.10^{-6}$ m^2/s) et les paramètres expérimentaux sont $R_\infty = 3,8.10^{-2}$ m, $H_\infty = 2,76.10^{-3}$ m et $Q = 27.10^{-6}$ m^3/s. Ce qui donne $\epsilon = 7,2.10^{-2}$ et $Re = 2,2$. On constate que l'on retrouve bien numériquement la recirculation après le ressaut observée expérimentalement.*
A droite : Rayons du ressaut en fonction du débit pour trois liquides différents. Les courbes continues sont obtenues par intégration de l'équation (II.105), les points expérimentaux proviennent de [52]. Trois liquides sont utilisés : eau (représentée par les cercle)($\rho = 1.10^3$ kg/m^3, $\gamma = 7,4.10^{-2}$ N/m , $\nu = 1.10^{-6}$ m^2/s, $R_\infty = 2.10^{-1}$ m et $H_\infty = 1,5.10^{-3}$ m), huile (représentée par les triangles)($\nu = 15.10^{-6}$ m^2/s, $R_\infty = 1,7.10^{-1}$ m et $H_\infty = 1,5.10^{-3}$ m) et une huile plus visqueuse (représentée par les carrés)($\nu = 95.10^{-6}$ m^2/s, $R_\infty = 1,7.10^{-1}$ m et $H_\infty = 1,5.10^{-3}$ m). Inserts : les profils numériques de la surface libre sont représentés en coordonnées non dimensionnées pour différentes valeurs de débit et de viscosité.
Pour davantage d'informations se reporter à [97].

La figure de gauche propose un profil calculé à partir de l'équation (II.105) et comparé à un profil expérimental issu de [9] (les points noirs sur la figure). Comme on peut le constater l'accord est excellent. On peut en outre observer la présence d'une recirculation après le ressaut comme observé expérimentalement.

La figure de droite compare les données expérimentales de Hansen *et al.* [52] avec les résultats obtenus numériquement. L'accord entre théorie et expérience est très bon même si l'on observe des écarts non négligeables sur certaines courbes (les échelles sont logarithmiques) en particulier à petits

47. Si la première condition est triviale, les deux suivantes ne sont absolument pas prouvées expérimentalement et peuvent être remises en question le cas échéant. En outre, redimensionner le système (et ainsi prédire un rayon de ressaut ou un profil dimensionné) nécessite de connaître le couple (R_∞, H_∞) ce qui est loin d'être trivial même dans le cas d'un mur de confinement entourant le dispositif.

débits et à hautes viscosités. [48]

Ces écarts peuvent être expliqués en partie par le fait que l'on utilise ici un critère numérique pour définir la position du ressaut. Ce n'est peut être pas exactement la même définition que l'expérimentateur utilise quand il traite ses images d'où un écart possible.

II.4.6.1 Lois d'échelles pour le ressaut circulaire

Dans un second article, les auteurs se proposent de développer par rapport à deux petits paramètres dans l'équation (II.105) afin d'obtenir des lois d'échelles simples pour la position du ressaut [98]. On considère ainsi des petites perturbations δh de la surface libre : $h_J = h_{J0} + \delta h$ où h_J est la hauteur de liquide en r_J la position du ressaut et h_{J0} la hauteur de liquide en r_J au premier ordre [49]. On considère de même une petite perturbation δr (de l'ordre de δh) autour de la position du ressaut :$r_J = r_{J0} + \delta r$ où r_{J0} correspond à la position du ressaut à l'ordre 0. On suppose en outre et de manière cohérente avec l'hypothèse $\delta h \sim \delta r$ que $\delta(dh/dr) \sim 1$, $\delta(d^2h/dr^2) \sim \delta r^{-1}$ et $\delta(d^3h/dr^3) \sim \delta r^{-2}$. L'ordre le plus élevé est l'ordre $O(\delta r^{-2})$ on obtient donc $T_3^{(0)} d^3h/dr^3 = 0$ et donc $h_J = h_{J0} + c_1\delta r + c_2\delta r^2/2$. L'ordre suivant $O(\delta r^{-1})$ conduit donc à $h_J = h_{J0} + c_1\delta r$. A l'ordre $O(1)$ l'équation est donc $T_0^{(0)} + c_1 T_1^{(0)}$. Puisque c_1 est inconnu, l'équation précédente est résolue terme à terme et on obtient ainsi deux équations :

$$\begin{cases} h_{J0}^3 - a_1 h_{J0} - a_0 = 0, \\ r_{J0}^2 = \frac{9Re}{35} h_{J0}, \end{cases} \tag{II.106}$$

avec $a_1 = \frac{27}{20}\frac{\epsilon^2 F}{Re}\left(r_{J0}^2 + \frac{\epsilon^2}{B}\right)^{-1}$ et $a_0 = \frac{27}{70} F \left(r_{J0}^2 + \frac{\epsilon^2}{B}\right)^{-1}$. Une première loi d'échelle peut être obtenue en supposant que la hauteur du ressaut au niveau du choc est égale à la hauteur en bout de plaque c'est-à-dire $h_{J0} = 1$. On obtient alors après avoir redimensionné les variables :

$$R_{J,a} = \left(\frac{9QH_\infty}{35\pi\nu}\right)^{1/2}. \tag{II.107}$$

Comme on peut le voir sur la Fig. II.19 cette loi d'échelle ne fournit pas un bon accord avec les points expérimentaux. [50]

Une des raisons de ce désaccord est l'hypothèse un peu excessive de $h_{J0} = 1$ au niveau du choc.

On se propose donc d'utiliser une hauteur critique correspondant à $h_c = (Q_m^2/g)^{1/3}$ où Q_m correspond au flux de masse : $Q_m = h_1 v_1 = h_2 v_2$ où h_1, h_2, v_1 et v_2 sont respectivement les hauteurs avant et après le ressaut et les vitesses moyennes avant et après le ressaut. On obtient en utilisant la conservation du débit $h_c = \left(\frac{Q^2}{4\pi^2 r_1^2 g}\right)^{1/3}$. Si l'on insère cette hauteur pour h_{J0} et si l'on pose $r_1 = r_{J0}$ dans les équations (II.106), on obtient la loi d'échelle obtenue par Bohr *et al.* (voir équation II.61) avec pour préfacteur $2^{-1/4}(9/35)^{3/8}(\pi)^{-5/8}$.

Cette approximation ne dépend pas de H_∞ ce qui est déroutant puisque la hauteur après le ressaut

48. Toutefois il est nécessaire d'apporter des réserves à ces résultats : en effet toutes les hauteurs en bout de plaque ont été fixées à $H_\infty = 1,5$ mm. Pourtant nous verrons plus loin que H_∞ varie avec le débit mais aussi en fonction du liquide utilisé ou du rayon de la plaque.

49. Rappelons que toutes les hauteurs et différences de hauteurs sont adimensionnées par H_∞ et tous les rayons sont adimensionnés par R_∞

50. L'article examiné ici n'indique pas clairement les valeurs de H_∞ on peut donc douter de la validité de la comparaison avec l'expérience sur cette courbe ainsi que sur toutes celles faisant intervenir la hauteur à l'infini H_∞ ($R_{J,b}$ et $R_{J,d}$).

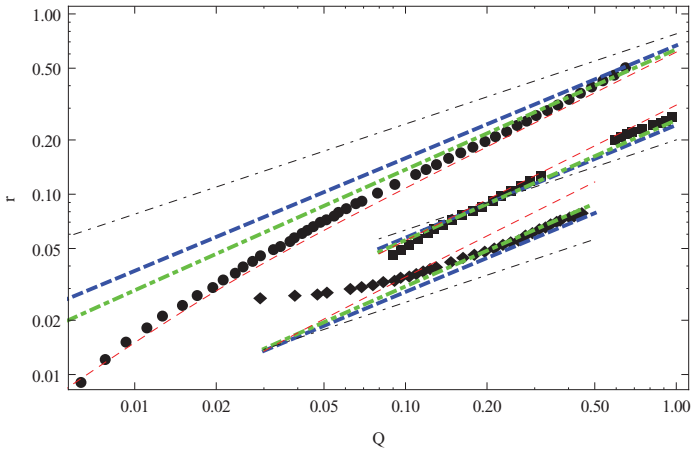


FIGURE *II.19 – Rayon du ressaut en fonction du débit. Les Lois d'échelles présentées plus haut ont été testées pour trois jeux de données expérimentales. Les points obtenus pour de l'eau sont représentés par des cercles ($\gamma = 7,4.10^{-2}$ N/m , $\nu = 1.10^{-6}$ m^2/s), ceux obtenus pour l'huile sont représentés par les carrés ($\nu = 15.10^{-6}$ m^2/s) et ceux obtenus pour une huile plus visqueuse sont représentés par les losanges ($\nu = 95.10^{-6}$ m^2/s). Les rayons sont re-dimensionnés par $L = 16,5$ cm et les débits par $Q = 100$ cm^3/s. La loi d'échelle $R_{J,a}$ (II.107) est représentée par la couleur grise et l'alternance tirets-points (fins), $R_{J,b}$ (II.109) est représentée par la couleur rouge et par des tirets (fins), $R_{J,c}$ (II.110) est représentée par la couleur bleue et par les tirets (épais) et $R_{J,d}$ (II.111) est représentée par la couleur verte et l'alternance tirets-points (épais). Pour davantage d'informations se reporter à [98].*

dépend expérimentalement de la hauteur en bord de plaque. Les auteurs proposent donc de considérer que la hauteur au niveau de r_J est égale à la hauteur avant le choc h_1. Pour déterminer cette hauteur, les auteurs utilisent l'équation de choc proposée par Bush *et al.* Si l'on considère que la hauteur après le ressaut est égale à la hauteur en bord de plaque H_∞ (c'est-à-dire à 1) cette équation s'écrit :

$$h_1 = \frac{H_\infty}{2}\left(1+\frac{2}{B_0}\right)\left[-1+\sqrt{1+\frac{8F_1^2}{(1+2/B_0)^2}}\right] = \frac{2H_\infty F_1^2}{1+2/B_0}+O(F_1^4), \tag{II.108}$$

où $F_1^2 = 3Q^2/(10\pi^2 g R_J^2 H_\infty^3)$ est un nombre de Froude effectif défini juste en aval du ressaut et $B_0 = \rho g H_\infty R_J/\gamma$. Lorsque l'on remplace h_{J0} par h_1 (à l'ordre 2 en F_1) dans la deuxième équation de (II.106) et que l'on néglige la tension de surface on obtient une deuxième loi d'échelle :

$$R_{J,b} = \left(\frac{9}{70}\frac{Q^3}{\pi^3 \nu H_\infty^2 g}\right)^{1/4}. \tag{II.109}$$

Comme on peut le voir sur la Fig. II.19 l'accord entre expérience et théorie [51] est meilleur que dans le cas précédent et s'ajuste assez bien avec les points expérimentaux de l'eau. Toutefois cette solution n'est pas entièrement convaincante dans le cas des huiles même si l'ordre de grandeur est très correct.

On peut aussi obtenir des lois d'échelles en résolvant les équations (II.106) par rapport à ϵ. Il est à noter que cette approche correspond davantage à ce qui a été fait dans la première partie du travail des auteurs [97]. Ainsi au premier ordre en ϵ on obtient :

$$R_{J,c} = \left(\frac{3^9}{2\ 35^4}\frac{Q^5}{\pi^5 \nu^3 g}\right)^{1/8}. \tag{II.110}$$

51. Ce n'est pas l'équation (II.109) qui est représentée mais la solution exacte, sans négliger la tension de surface.

Cela correspond une fois de plus à la loi d'échelle obtenue par Bohr *et al.* (voir équation II.61), mais avec un préfacteur différent de celui obtenu précédemment. Sur la Fig. II.19 elle est aussi comparée aux points expérimentaux mais comme dit précédemment cette loi d'échelle ne permet pas de modéliser des paramètres physiques que l'on sait déterminants comme la hauteur en bord de plaque ou la tension de surface. On va donc résoudre les équations (II.109) en remplaçant r_{J0} par $R_{J,a}$ dans a_1 et a_0. Il existe trois solutions, seule une est satisfaisante physiquement :

$$R_{J,d} = \left(\frac{18Re}{35} \frac{\left(3^{1/3} a_{1,0} + 2^{-2/3} \left(9a_{0,0} + \sqrt{-12a_{1,0}^3 + 81a_{0,0}^2} \right)^{2/3} \right)}{6^{2/3} \left(9a_{0,0} + \sqrt{-12a_{1,0}^3 + 81a_{0,0}^2} \right)^{1/3}} \right)^{1/2}, \tag{II.111}$$

avec $a_{1,0} = \frac{27}{20} \frac{\epsilon^2 F}{Re} \left(R_{J,a}^2 + \frac{\epsilon^2}{B} \right)^{-1}$ et $a_{0,0} = \frac{27}{70} F \left(R_{J,a}^2 + \frac{\epsilon^2}{B} \right)^{-1}$. Ces points sont ensuite comparés à l'expérience sur la Fig. II.19. On peut constater que l'on n'améliore pas considérablement le résultat par rapport à la loi d'échelle $R_{J,c}$.

Ainsi les articles de Rojas *et al.* proposent une excellente description du ressaut par le biais numérique (en particulier le profil d'épaisseur) mais peinent à fournir une loi d'échelle exacte [52]. Dans ces articles la hauteur extérieure est considérée comme un paramètre d'entrée, elle doit donc être mesurée pour chaque prédiction du ressaut ce qui rend difficile l'utilisation pratique de ces lois d'échelles.

II.4.7 Approche de Dasgupta et Govindarajan

L'article de Dasgupta et Govindarajan [28] propose une nouvelle approche numérique du ressaut hydraulique. Ils étudient le cas du ressaut hydraulique à deux dimensions et généralisent son approche au cas du ressaut hydraulique circulaire. Le principal résultat de ce papier est d'obtenir des profils de vitesses complexes en amont et en aval du ressaut et ainsi de s'affranchir des profils divergents obtenus via une approximation de profil auto-similaire (en particulier du profil en spiral que l'on obtient en intégrant (II.55) ou (II.96)). Il montre par exemple l'existence de deux solutions en aval du ressaut. Ces résultats sont ensuite comparés aux expériences et fournissent un accord convenable.

Les équations de base sont les maintenant familières (II.44) - (II.47). En utilisant les variables $\eta = z/h(r)$ et $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}r/h(r)$ et en écrivant les vitesses à l'aide d'une fonction de courant $\Psi = Q/(2\pi) f(\eta, \zeta)$ on obtient $u = U \frac{\partial f}{\partial \eta}$; $\quad v = U(\eta \frac{dh}{dr} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \zeta})$ avec $U = Q/(2\pi r h)$ ainsi (II.45) - (II.47) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - \frac{dh}{dr} \frac{Re}{Fr^2} + Re \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 = Re \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right), \\ f(0,\zeta) = 0; \qquad , \frac{\partial f}{\partial \eta}(0,\zeta) = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(1,\zeta) = 0, \end{cases} \tag{II.112}$$

avec $Re = Q/(2\pi r \nu)$ un nombre de Reynolds local et $Fr = U/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude local. En outre la conservation du débit ajoute une équation supplémentaire : $f(1,\zeta) = 2\pi$.

Dans le cas plan le problème est bouclé [53]. Néanmoins dans le cas du ressaut circulaire, il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire : en effet à Froude donné il existe une infinité de solutions qui correspondent à une même valeure de $h'Re$ puisque Re dépend de r (en effet le débit linéique $q = Q/2\pi r$ dépend de la distance à l'impact contrairement au cas plan où il est constant). On

52. Probablement en raison d'une vision beaucoup trop simpliste de la partie extérieure du ressaut où l'on considère que le profil extérieur est constant avec pour tout $r > R_J$, $h(r) = H_\infty$ nous verrons plus loin que le profil de hauteur est plus élaboré.

53. Re ne dépend pas de r donc la donnée d'un nombre de Froude initial permet d'intégrer de part et d'autre de ce nombre et donc de résoudre entièrement l'ensemble du problème. Il n'y a donc pas besoin d'ajouter une condition initiale.

est donc obligé d'ajouter une condition supplémentaire ce qui revient à donner le rayon correspondant à la valeur du nombre de Froude initial [54]. Cette contrainte est donc une fois de plus problématique puisqu'il faut connaître avec précision un point du profil pour pouvoir intégrer.

L'intégration des équations (II.112) en fonction du nombre de Froude se résume ainsi : il existe un nombre de Froude Fr_0 (typiquement 0,7) tel que pour $Fr > Fr_0$ (l'amont du ressaut) il existe une unique solution au problème correspondant à h' positif et notée P et pour $Fr < Fr_0$ (l'aval du ressaut) il existe deux solutions à (II.112) : la solution P où $h' > 0$ mais aussi une autre solution où $h' < 0$ notée alors N. Pour des nombres de Froude Fr de l'ordre de 1 (ou plus petits) le profil de vitesse obtenu par la solution P montre une séparation (correspondant donc à une recirculation) : plus Fr est petit plus cette séparation est importante.

On en déduit qu'une solution auto-similaire n'est acceptable que pour les grands nombres de Froude (voir Fig. II.20). La solution N, quant-à elle, présente un profil non séparé très proche d'un profil parabolique. En Fig. II.20 sont représentés des profils correspondant aux solutions P et N à plusieurs Fr locaux dans le cas 2D.

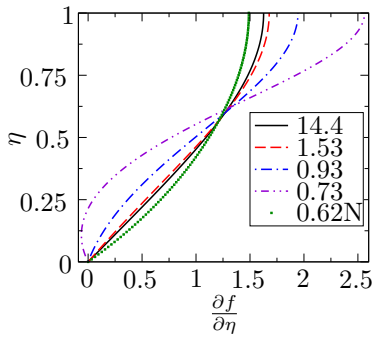


FIGURE *II.20 – Profil de vitesse pour différents nombres de Froude locaux dans le cas 2D. Toutes les courbes correspondent à la solution P des équations exceptée $Fr = 0.62$ obtenu pour la solution N. Comme on peut le voir les profils de la solution P montrent une importante séparation lorsque l'on décroît la valeur de Fr. Le profil N lui est quasiment parabolique. Pour davantage d'informations se reporter à [28].*

Les profils montrant une large séparation sont susceptibles d'être instables tandis que les profils paraboliques sont eux stables (numériquement on retrouve bien que P est très instable à faibles Fr). On aboutira donc logiquement à une transition des solutions P vers N lorsque le nombre de Froude local décroît, ce qui se traduit par la fin de la zone de recirculation à l'extérieur du ressaut.

L'expérience est ainsi bien décrite avec une zone de recirculation bien délimitée puis une zone où $h' < 0$ ce qui correspond bien au profil N. Malheureusement la transition entre P et N correspondant à la fin de la zone de recirculation ne peut pas être simplement captée à partir de (II.112).

Le ressaut est ainsi modélisé par une solution P valable dans la zone interne du ressaut, se poursuivant dans le choc mais aussi après sous la forme d'un écoulement avec recirculation pour transiter finalement vers une solution N après cette zone de recirculation.

Dans la Fig. II.21 les solutions des équations (II.112) sont comparées aux points expérimentaux obtenus par Craik *et al.* [26] ainsi qu'aux solutions attendues par Tani [108] et Bohr *et al.* [8] (dans son

54. Autrement dit si l'on intègre à partir de $Fr = 100$ il faut aussi donner le rayon r qui correspond à cette valeur du nombre de Froude.

premier article) c'est-à-dire à la solution obtenue avec un profil auto-similaire (et la pression hydrostatique). Les conditions initiales pour les intégrations sont obtenues à partir d'un point expérimental (de coordonnées $(r_i; h_i)$). Comme on peut le voir la solution P décrit assez bien ce qui se passe en amont du ressaut et permet d'obtenir un ressaut sans condition de choc (on évite ainsi la spirale obtenue dans le cas de Bohr et Tani). La solution N s'ajuste très bien sur la partie extérieure du profil. Malheureusement on n'a pas de transition douce entre la solution P et la solution N, les auteurs ont donc choisi de placer la transition afin que leur solution s'ajuste au mieux avec les points expérimentaux.

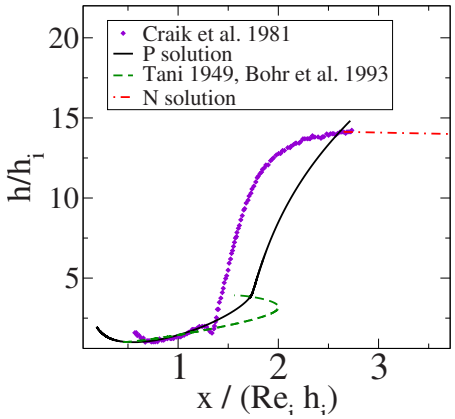


FIGURE *II.21 – Comparaison entre les solutions P et N des équations (II.112), les solutions obtenues par Bohr et al. [8] et Tani [108] et un profil expérimental obtenu par Craik et al. [26]. Les solutions numériques sont intégrées à partir d'un point $(r_i; h_i)$ obtenu à partir de la courbe expérimentale de Craik et al. . Les axes sont ensuite adimensionnés à partir de ce point. Pour davantage d'informations se reporter à [28].*

Enfin les auteurs reviennent sur l'hypothèse faite par Rao *et al.* [90] ainsi que par Bohr *et al.* dans son second article [113] d'un profil de vitesse cubique en η. Dasgupta *et al.* montrent mathématiquement que les équations (II.112) ne permettent pas de terme cubique dans le profil de vitesse ; ainsi l'hypothèse d'un profil cubique semble infondée.

Cet article permet une modélisation nouvelle du ressaut par le biais d'une approche numérique et permet d'approcher le profil du ressaut de manière convenable. On obtient encore une fois la zone de recirculation après le choc. Pour autant, cette approche nécessite encore la connaissance d'un point du profil expérimental pour converger. Elle ne permet toujours pas une prédiction de la position du ressaut R_J.

II.5 Conclusion de la revue bibliographique

Au cours de cette revue bibliographique nous avons présenté les principaux modèles décrivant le ressaut circulaire hydraulique. Il en ressort en définitive un large consensus autour de la description de la zone interne qui se décompose, rappelons-le, en trois zones :

(i) La zone d'impact du jet qui n'a pas ou peu été étudiée.

(ii) Survient ensuite, avec l'augmentation de la distance à l'impact, le développement d'une couche limite qui envahit progressivement l'ensemble de l'épaisseur de liquide de la zone interne.

(iii) Et enfin une couche limite pleinement développée jusqu'au choc.

Il est à noter que la plupart des études (Tani, Bohr *et al.* , Bréchet *et al.* , Kasimov, Rojas *et al.* , Dasgupta *et al.*) travaillent uniquement à partir de la zone (iii) où le profil de vitesse est pleinement développé.

Les différences entre modèles interviennent dans la modélisation du ressaut en lui même. On distingue trois approches :

(i) L'approche "classique" qui correspond à une modélisation du ressaut par un choc d'épaisseur nulle (donc sans friction) comme proposée par Bélanger et donnée par l'équation (I.1). Cette condition de choc peut éventuellement être généralisée en ajoutant les effets de tension superficielle comme l'a montré Bush *et al.* Cette approche est utilisée par Tani, Watson, Bohr *et al.* (uniquement dans un premier article), Godwin et Kasimov.

(ii) L'approche "numérique" qui correspond à une intégration numérique des équations de base. Il est à noter que pour cette approche de modélisation du choc il est nécessaire de tenir compte de la pression hydrostatique qui pouvait être négligée dans la zone interne. Ces études permettent une description plus physique du choc mais ne sont pas analytiques et donc difficiles à utiliser. Ces intégrations étant numériques, elles nécessitent en outre la connaissance d'au moins un point expérimental du profil (mais souvent 2). Ces approches ont été utilisées par Rao *et al.* , Bohr *et al.*[55], Rojas *et al.*[56] et Dasgupta *et al.* .

(iii) L'approche "originale" ou plutôt les approches originales : l'approche de Godwin qui considère que le choc survient lorsque la couche limite envahit entièrement l'épaisseur de liquide dans la zone centrale, l'approche de Bréchet et Néda qui remplace la condition de choc par une considération sur le Reynolds et enfin l'approche de Higuera qui essaye de décrire chacune des zones du choc en utilisant un modèle de jet liquide.

La zone externe est la partie la moins bien traitée dans ces théories. Dans certains cas elle n'est pas traitée (Watson, Godwin, Bréchet et Néda) et dans les cas numériques elle est traitée à partir d'un point expérimental qui sert donc de paramètre d'entrée (Rojas *et al.* et Dasgupta *et al.*). Les approches de Bohr *et al.* , Rao et Arakeri, Higuera et Kasimov considèrent cette zone comme réellement importante et développent un réel effort de modélisation. Dans certaines approches, il apparaît qu'un profil logarithmique serait susceptible de décrire la zone externe. Cette loi n'est jamais testée et les conditions d'arrêt au bord extérieur du système sont floues et dépendent des différents modèles.

Nous allons donc présenter dans ce mémoire une approche expérimentale et théorique qui reconsidère cette zone externe et examiner ses conséquences sur la sélection du rayon du ressaut pour laquelle il semble ne pas y avoir de loi analytique simple, jusqu'ici, donnant une prédiction précise et quantitative.

55. Qui proposent ensuite une loi de choc alternative à (I.1) à partir d'un développement analytique des équations maîtresses au voisinage du choc.

56. Ils extraient ensuite des équations de départ des lois d'échelles à partir de développements de différents ordres au voisinage du choc.

Chapitre III

Description de l'expérience et premiers résultats

III.1 Montage

Le dispositif expérimental est décrit sur la Fig. III.1. Il se compose d'un dispositif alimentant un injecteur. Le liquide impacte ensuite un disque de verre horizontal puis s'écoule sous forme de colonnes liquides dans le bac d'alimentation duquel il est à nouveau pompé et réinjecté. Le dispositif fonctionne ainsi en circuit fermé.

La gamme de débit accessible ainsi que les viscosités choisies ont pour effet de maintenir un écoulement laminaire et stationnaire. Plus encore, les conditions aux limites telles que fixées (c'est-à-dire les plus simples possibles : l'absence de tout mur de confinement, laissant libre l'écoulement d'ajuster sa propre hauteur en bord de plaque) ainsi que l'observation de traceurs ajoutés dans le liquide montrent que nous observons un ressaut de type I (c'est-à-dire un écoulement unidirectionnel, sans vortex de recirculation au niveau de la surface libre).

III.1.1 Dispositif d'alimentation

Deux types d'alimentation peuvent être utilisés : directement via la pompe ou bien en utilisant un bac à niveau constant (bac situé en hauteur, alimenté par la pompe et doté d'un trop plein, le liquide s'écoule donc simplement sous l'effet de la gravité). Il est apparu que le bac à niveau constant ne permettait qu'une gamme de débits très limitée. Il est donc tentant d'utiliser plutôt la pompe directement afin d'obtenir une gamme de débits plus importante. Toutefois on peut craindre que des pulsations dues à la pompe se répercutent sur le ressaut ce qui pouvait être évité par le bac à niveau constant.

Nous utilisons une pompe à engrenages hélicoïdaux (Micropump 75211-67) afin de réduire au maximum les pulsations dues à la pompe. Le phénomène étudié est stationnaire et la viscosité du liquide permet un fort amortissement d'éventuelles pulsations résiduelles. Nous avons vérifié l'absence d'effets dus à la pompe en comparant l'alimentation directe et celle via le bac à niveau constant pour les bas débits (5-10 cm^3/s^{-1}). Nous n'avons pu enregistrer aucune différence. On utilise donc le plus souvent directement la pompe pour alimenter notre dispositif.

Le réglage du débit s'effectue directement par l'intermédiaire de la pompe dont la tête (Micropump) est couplée à un moteur de vitesse de rotation variable.

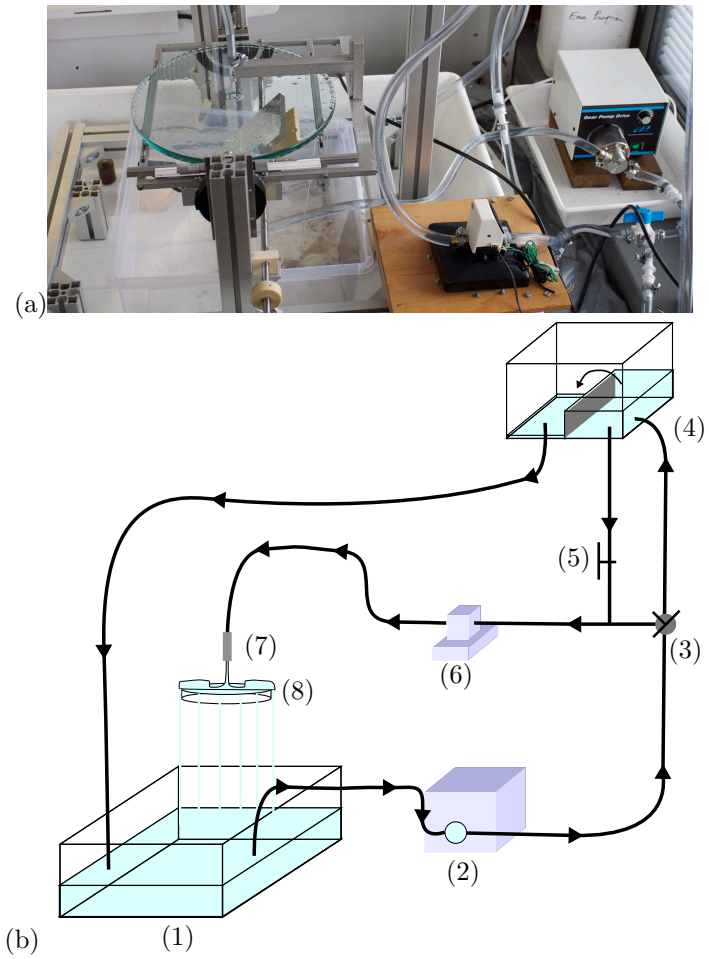


FIGURE *III.1 – Photographie (a) et schéma explicatif (b) du dispositif expérimental utilisé. Le dispositif expérimental se décrit ainsi d'amont en aval : une pompe à engrenage (2) aspire le liquide dans le bac de stockage et de récupération (1). La pompe (2) alimente une jonction en T (3) qui alimente ou bien un bac à niveau constant (4) dont le débit est réglé ensuite à l'aide d'une vanne (5) ou bien directement le reste du dispositif. Dans tous les cas le liquide passe au travers d'un débitmètre numérique (6). Le liquide s'écoule ensuite dans une buse (7) de diamètre ϕ puis impacte un disque de verre horizontal (8) pour former un ressaut hydraulique. Le liquide s'écoule radialement sur la plaque puis sous forme de colonne liquide dans le bac de stockage (1).*

Le dispositif est complété par un débitmètre numérique (McMillan S-111-6) calibré par des mesures répétées de pesées pour chaque liquide. La gamme de débits accessible (dépendant de chaque liquide et de chaque viscosité utilisée) est typiquement 5-80 cm^3/s^{-1} et l'erreur sur les valeurs indiquées de débit est typiquement de ± 0.25 $cm^3.s^{-1}$.

Dans le cas des débits élevés, en alimentation directe, il arrive que des bulles d'air soient captées lors du pompage du liquide dans le bac de récupération (la présence de bulles d'air dépend également fortement de la distance entre la buse et la plaque, du débit, du diamètre de l'injecteur et d'éventuelles prises d'air dans le circuit). Pour les huiles silicones de "faibles viscosités" (20 cS) ces bulles n'ont pas d'influence sur la viscosité effective ni sur la densité du liquide [1] tandis que pour les fortes viscosités on

1. On ne constate aucune différence entre les cas où il y a "beaucoup" de bulles et dans les cas où il y en a moins.

peut constater une légère déviation au cours du temps (les bulles sont évacuées trop lentement). Il faut alors stopper les mesures, laisser l'huile au repos et reprendre ensuite les mesures. Sur ces questions le débitmètre est notre moyen de contrôle : si, on constate une fluctuation de la valeur indiquée par le débitmètre c'est qu'il y a changement de viscosité effective.

III.1.2 Injecteur et plaque : la géométrie de l'expérience

Le jet liquide est issu d'un tube vertical de diamètre interne ϕ (buse) (ϕ = 1.1-7 mm) et impacte le centre d'un disque de verre de rayon R_∞ (R_∞ = 8, 10, 15 cm) placé à une distance Z de la sortie de la buse (que nous avons fait varier de 4 à 40 mm).

Sauf mention contraire, le liquide s'écoule librement au bord du disque (pas de mur de confinement). Le bord est parfois à arête nue (R_∞ = 8 cm) mais le plus souvent biseauté sur 1mm (les autres cas).

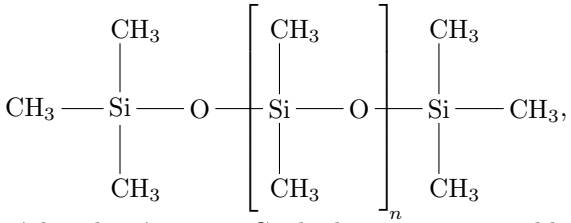
L'horizontalité de la plaque est réglée par un chassis adapté, à l'aide de deux vis micrométriques et en utilisant un niveau à bulle de précision.

Le centrage de la plaque est simplement effectué à l'aide d'une règle graduée.

III.2 Liquides utilisés

III.2.1 Huiles silicones

Les huiles silicones (nous avons choisi la marque CRC) sont composées de PDMS (PolyDiMéthyl-Siloxane) de formule chimique :



où l'indice n désigne le degré de polymérisation. Ces huiles sont non-miscibles dans l'eau, transparentes, inertes chimiquement et ne vieillissent quasiment pas sous l'effet de l'air, de l'eau, de la chaleur ou de la lumière, même ultraviolette. Ces huiles existent dans une très large gamme de viscosité (de 0,65 à plusieurs centaines de milliers de centiStokes) et sont très peu volatiles pour des viscosités supérieures ou égales à 5 cS. Ces différentes viscosités sont obtenues simplement par le fabricant en changeant la longueur de la chaîne des polymères : plus cette chaîne est longue plus le liquide est visqueux. Bien entendu pour les huiles les plus visqueuses le liquide perd son caractère newtonien en raison de la dynamique complexe des trop longues chaînes de polymères [2]. La viscosité de ces huiles est en outre assez stable en fonction de la température, on n'aura donc aucun problème pour une expérience commencée un matin et terminée dans l'après midi (on observe moins de 4% de variation pour un changement de température de 25 à 30 °C) . Un autre avantage de ces huiles est que quelle que soit la viscosité choisie on aura toujours une densité très proche de 1 et une tension de surface γ quasi constante de l'ordre de 20 mN/m (voir Tableau III.1). Comme cette tension de surface est basse il y a peu de risque d'abaissement de la tension de surface par contamination (contrairement au cas de

2. Pour obtenir une viscosité intermédiaire, il suffit simplement de mélanger dans les bonnes proportions les huiles de viscosité supérieure et inférieure (en bonne approximation on obtient un litre d'huile silicone à 15 cS en mélangeant 0,5 L de 10 cS avec 0,5 L de 20 cS).

l'eau)

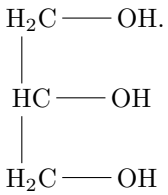
Ces huiles mouillent la plupart des substrats solides (en particulier le verre). Dans notre cas les huiles utilisées permettront de mouiller l'intégralité de la surface du disque ainsi que le bord de la plaque.

Huile	ν (cS)	ρ (kg/m^3)	γ (mN/m)
20 cS	$20,4 \pm 0,6$	950	20,6
50 cS	$44,9 \pm 1,5$	959	20,7
100 cS	$98,8 \pm 3$	965	20,9

TABLE *III.1 – Propriétés des huiles silicones utilisées : viscosité cinématique ν (mesurée avec un viscosimètre à capillaire, voir Annexe A). L'erreur tient compte des changements de température été-hiver ce qui explique sa valeur un peu élevée. Sont aussi indiquées la masse volumique ρ et la tension de surface γ. Les valeurs de ces deux dernières grandeurs proviennent de la documentation fournie par l'industriel.*

III.2.2 Mélanges eau-glycérol

Le glycérol (ou glycérine), du grec "glykerós" qui signifie doux, est une molécule organique naturelle issue de la transformation des huiles végétales. Son nom scientifique est le propan-1,2,3-triol et sa formule chimique :



À température ambiante, le glycérol se présente comme un liquide incolore, inodore et très visqueux (1182 cS). Cette molécule est non toxique et très hydrophile. Cette dernière propriété s'explique par la présence de ses trois groupements hydroxyles. Cette propriété hydrophile est très intéressante pour le physicien, en effet il est très facile de mélanger eau et glycérol pour obtenir un mélange de viscosité cinématique voulue (comprise entre 1 et 1182 cS), les valeurs de la viscosité en fonction des proportions eau/glycérol sont tabulées dans la référence [104] et estimées dans la référence [81]. Attention toutefois au fait que la densité varie avec les proportions eau/glycérol en effet la masse volumique du glycérol est de 1260 kg/m^3 contre 1000 dans le cas de l'eau, la densité doit donc être évaluée précisément pour chaque mélange (elle est aussi donnée par [81]). Cela est d'autant plus vrai pour la conversion de viscosité dynamique (donnée dans les tables) en viscosité cinématique (utilisée ici).

La tension de surface du mélange eau-glycérol est de de l'ordre de 65 mN/m. C'est cette tension de surface élevée qui nous intéresse ici : nous obtiendrons facilement des liquides d'une viscosité comparable à celle des huiles silicones utilisées, cela nous permet donc de faire varier uniquement la tension de surface, les autres paramètres restant constants, pour en observer les effets sur le ressaut.

Bien sûr utiliser un liquide à aussi forte tension de surface nous place en situation de mouillage partiel sur du verre. Il y avait donc un risque de se trouver dans une situation de perte d'axisymétrie de la zone externe comme dans le cas de Maynes *et al.* (voir sous-section I.6.2). Heureusement ici les conditions de mouillage ne sont pas trop contraignantes et le liquide mouille l'intégralité de la surface

de la plaque. Le démouillage n'apparaît que sur le bord latéral de la plaque. L'utilisation de ce liquide n'est donc pas trop limitante ici.

Néanmoins un rapide coup d'oeil aux références [104, 81] convaincra le lecteur des limites expérimentales de ce mélange : les variations de viscosité en fonction de la température sont très importantes, y compris aux échelles de temps typiques des expériences (la température peut facilement s'abaisser ou augmenter de 2 ou 3 degrés au cours d'une expérience). De plus les mélanges eau-glycérol sont des mélanges qui s'hydratent ou s'évaporent à l'air libre (modifiant ainsi considérablement la viscosité tant un pourcent d'eau supplémentaire peut modifier la viscosité cf [104, 81]), ils se polluent très facilement (très forte tension superficielle) et sont susceptibles de vieillir. Pour obtenir des résultats convenables avec ces mélanges il faut donc redoubler de précautions en particulier lorsque l'on utilise des quantités importantes (plusieurs litres) comme c'est le cas ici. Nous avons reporté ici (voir Tableau III.2) les propriétés des deux mélanges utilisés dans cette partie :

ν (cS)	ρ (kg/m^3)	γ (mN/m)
$18 \pm 0,7$	1190	~ 65
$44 \pm 1,5$	1220	~ 65

TABLE *III.2 – Propriétés des mélanges eau-glycérol utilisés : viscosité cinématique ν (mesurée avec un viscosimètre à capillaire, voir Annexe A). Sont aussi indiquées la masse volumique ρ et la tension de surface γ. Les valeurs de ces deux dernières grandeurs proviennent de la documentation fournie par [104, 81].*

III.3 Visualisation

Filmer un ressaut hydraulique circulaire est plus compliqué qu'il n'y paraît : il est malaisé de prendre des images par au-dessus. En effet, le dispositif d'injection et le jet liquide masquent systématiquement une partie importante de l'image. Une vue de biais n'est pas davantage satisfaisante car dans ce cas on ajoute en plus des questions de parallaxes et de redressement d'images tout en sachant qu'une partie du ressaut restera masquée par le dispositif d'injection et/ou le jet liquide. La seule manière d'obtenir une image fiable est donc de l'acquérir par en-dessous au travers du disque de verre. Il n'est pour autant pas question de placer la caméra immédiatement en dessous du dispositif sous peine de la détériorer en cas de projection ou débordement des liquides. On utilise donc un miroir à 45°sous le dispositif (voir Fig. III.2) que l'on filme à une distance d'une trentaine de centimètres grâce à la caméra, un zoom 12,5 - 75 mm et un jeu de bagues allonges qui permet d'ajuster au mieux l'image à la taille des ressauts observés. [3]

Enfin, avec un tel dispositif le liquide s'écoule en bord de plaque en colonne liquide dans le champ de la caméra. Pour ne pas être gêné par ces colonnes il est donc nécessaire de prévoir une gouttière qui capte le liquide avant qu'il n'entre dans le champ et qui ne modifie pas localement les conditions aux limites du ressaut.

Reste à régler la question de l'éclairage. Les liquides utilisés étant transparents l'obtention d'un bon contraste sur la plaque de verre n'est pas évidente. Nous avons fait le choix d'un néon circulaire entourant le ressaut. La lumière se réfléchissant sur les parois du ressaut, celles-ci sont rendues très

3. Avec un tel dispositif il est nécessaire d'utiliser un miroir première surface (l'argenture du miroir n'est pas protégée par une plaque de verre mais exposée directement à l'air libre) ce qui permet d'éviter les réflexions "fantômes" dues aux réflexions parasites sur la paroi de verre d'un miroir classique.

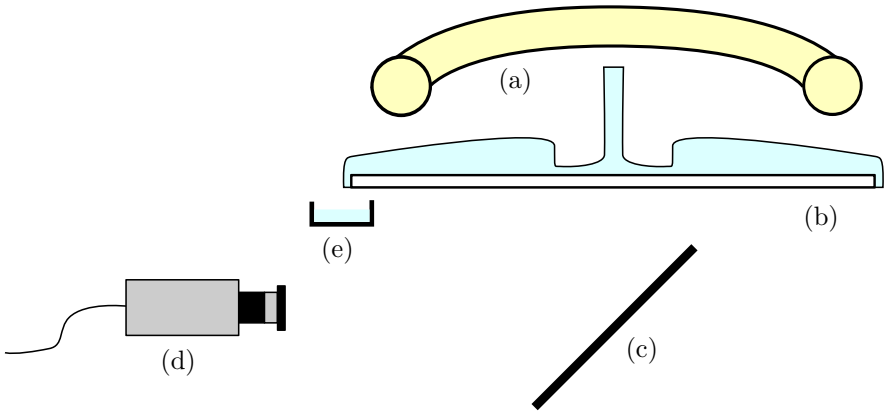


FIGURE *III.2 – Schéma décrivant la technique de visualisation : le dispositif est éclairé par un néon circulaire (a) de manière à éclairer les bords du ressaut et à les rendre lumineux à l'image. On utilise un disque de verre (b) (donc transparent) afin d'acquérir les images par en dessous et ce au travers d'un miroir première surface (c) à 45° qui réfléchit l'image vers la caméra (d). À ce dispositif est ajoutée une gouttière (e) qui permet d'éviter que les colonnes liquides formées en bord de plaque n'entrent dans le champ de la caméra.*

lumineuses. Si l'on ajoute un fond noir au-dessus on obtient des images très facilement exploitables avec un bon contraste (voir Fig. III.3).

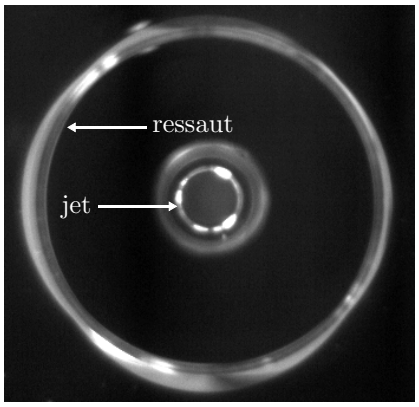


FIGURE *III.3 – Image d'un ressaut hydraulique vu de dessous via notre dispositif de visualisation. Au centre de l'image on voit le jet impactant (ϕ = 5 mm). La première zone noire après le jet correspond à la zone interne du ressaut (faible déformation de la surface libre été donc apparaissant en noir). On mesurera la position du ressaut hydraulique grâce au diamètre intérieur de la zone noire en considérant que la position du ressaut se trouve dès le début de la zone grisée. L'épaisseur du ressaut est d'environ 1 mm, l'incertitude sur la position exacte du ressaut que l'on commet est donc d'environ 0,5 mm. Dans cette photographie R_∞ = 15 cm et la viscosité de l'huile est de 20 cS.*

III.4 Mesure des hauteurs

Dans un certain nombre d'expériences rapportées ici, nous avons eu besoin de mesurer des profils de hauteur ou des variations de hauteur avec une grande précision. Nous avons donc dû utiliser des

techniques expérimentales adaptées à chaque configuration afin de trouver l'optimal entre efficacité et précision.

III.4.1 Le profondimètre ou comparateur de puits

Pour s'assurer d'une bonne précision dans la mesure des profils de hauteur expérimentaux nous avons utilisé l'instrument représenté en Fig. III.4 : un comparateur de puits muni d'une pointe est fixé sur une platine de translation verticale dont on peut régler la position à 10 μm près, le tout étant placé sur un support rigide et horizontal. Pour réaliser une mesure on place le tripode sur la plaque de verre dans la zone sous-critique (on s'assure que les pieds de l'appareil ne modifient que localement l'écoulement et la hauteur de liquide et n'altèrent en rien la mesure que l'on effectue au niveau de la pointe). On descend ensuite la pointe jusqu'à ce qu'elle touche la surface de l'huile, et cette altitude sert alors de référence. On continue ensuite à enfoncer la pointe jusqu'au contact avec le fond. L'aiguille du comparateur de puits se déplace dès que le couple augmente ; cela nous permet de nous arrêter précisément dès le contact avec la plaque atteint. La seconde lecture du micromètre nous donnera ainsi une valeur de la hauteur précise à la dizaine de microns près. Pour plus de sécurité on peut répéter plusieurs fois l'expérience, la dispersion des résultats nous permettant d'estimer l'erreur à 0,02 mm.

III.4.2 Éstimation directe de la hauteur

La méthode précédente est certes efficace mais elle est fastidieuse et pose un certain nombre de problèmes : il est très difficile de ne pas bouger le trépied et donc de prendre plusieurs mesures exactement au même endroit ou sur une ligne. De plus il reste à vérifier ce que l'on a admis précédemment, c'est-à-dire que les trois pieds du support ne perturbent absolument pas l'écoulement et les hauteurs au niveau du point de mesure.

Pour toutes ces raisons, nous avons mis au point une méthode de mesure plus directe. Nous avons donc utilisé un objectif de 200 mm et un jeu de bagues allonges pour observer les hauteurs de liquides en vue de côté. Le champ de l'appareil est suffisamment faible pour nous permettre d'obtenir une image précise de la hauteur de liquide. Bien sûr cette méthode s'appuie sur le fait que la hauteur de liquide diminue avec r dans la zone externe et elle nous interdit tout accès au profil de hauteur interne qui est dissimulée par la zone épaisse de liquide tout autour du "mur".

Pour obtenir la hauteur, on prend d'abord une image de la plaque propre ce qui nous fournira la référence. En soustrayant cette référence aux images obtenues par la suite on obtient la hauteur réelle. Lors de l'observation à rayon fixé, les seules sources d'incertitudes sont les erreurs de lecture sur l'image de référence et les erreurs de lecture sur les hauteurs mesurées. On obtient alors une erreur de quelques dizaines de microns (autrement dit, une erreur légèrement plus élevée qu'avec la méthode précédente mais qui reste du même ordre de grandeur). Un exemple est donné dans le cas d'une prise de vue de hauteur en bord de plaque en Fig. III.5.

Ce dispositif optique permet en outre de mesurer d'autres hauteurs. C'est avec cette méthode que nous avons mesuré les hauteurs de liquide en sortie de ressaut ($H_J(Q)$). L'exercice est ici plus périlleux. En effet, la position où l'on filme correspond à la zone directement après le ressaut. Si l'on veut une résolution suffisante, il est donc nécessaire de bouger la caméra au fur et à mesure que l'on augmente le débit et donc le rayon du ressaut R_J. Pour ce faire on place la caméra et l'objectif sur une crémaillère, mais subsistent un certain nombre de mouvements verticaux de la caméra dus principalement à des

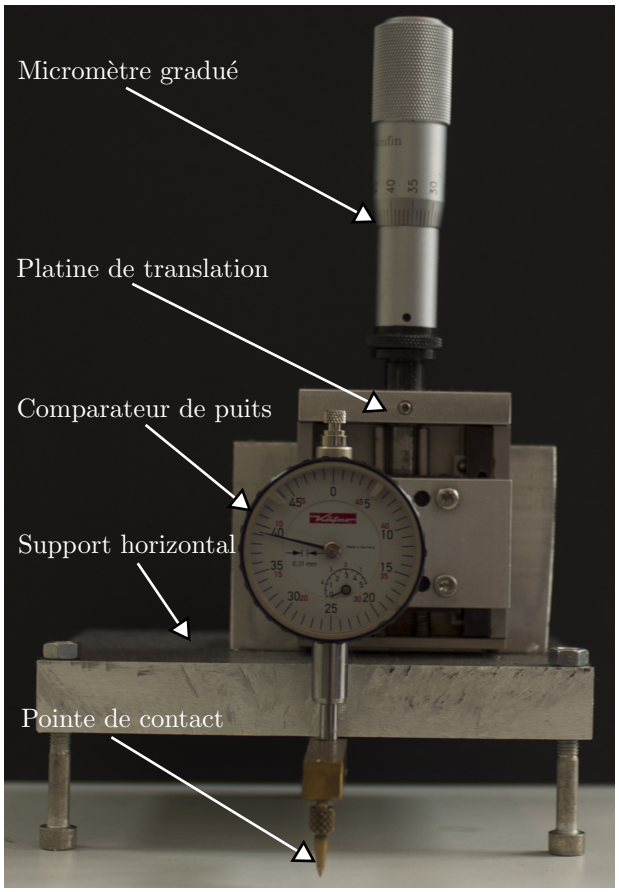


FIGURE *III.4 – Photographie de l'instrument pour mesurer la profondeur. La pointe est mobile verticalement et la lecture de l'altitude se fait à 0.01 mm près. Pour réaliser une mesure on descend la pointe jusqu'à ce qu'elle touche la surface, puis jusqu'à ce qu'elle entre en contact avec la surface (l'aiguille du comparateur de puits va bouger). La différence entre les deux lectures du vernier fournira ainsi une excellente estimation de la hauteur.*

défauts d'horizontalité. Pour conserver une hauteur de liquide absolue il faut donc mesurer l'effet sur l'image du déplacement de la caméra par rapport à l'état initial de référence obtenu avec une plaque sèche. Ainsi lorsqu'il est nécessaire de bouger la caméra on prendra, à débit constant, une image avant et une après le déplacement de la caméra. La différence de hauteurs relatives mesurées nous donnera la variation de hauteur par rapport à l'image de référence. Cette technique a pour principal défaut d'additionner les erreurs que l'on fait sur la hauteur. Néanmoins, en prenant une image de la plaque sèche à la position finale de la caméra, on peut se convaincre que notre valeur de référence n'a pas dévié de plus de 30 microns et donc que la méthode est précise à 30 μm environ.

III.5 Les limites du dispositif ou le ressaut peu circulaire

Dans certains cas limites extrêmes, malgré toutes nos précautions, le ressaut peut se déformer : la structure circulaire se transforme progressivement en formant une excroissance liquide qui va s'amplifier avec le débit (voir Fig. III.6). Ce phénomène très dérangeant n'est pas dû à l'injecteur : si l'on tourne l'injecteur on conserve exactement la même forme sans aucun déplacement de la structure.

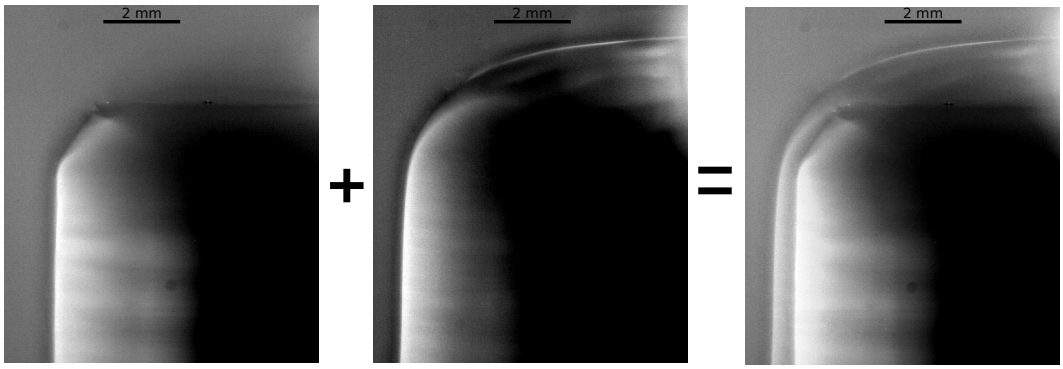


FIGURE *III.5* – *Montage de deux photographies permettant la mesure de l'épaisseur de liquide en bord de plaque. Sur toutes ces images l'écoulement se fait de droite vers la gauche. Le liquide s'écoule ensuite verticalement le long du bord de la plaque. La première image correspond au bord de la plaque lorsqu'elle est sèche, comme rappelé précédemment l'arrête est légèrement biseautée. La deuxième image correspond au bord de la plaque recouvert de liquide. La dernière image indique la superposition des deux. Le trait noir figure 2 mm. On distingue très clairement sur le montage le substrat (bord de la plaque biseautée) ainsi que la couche de liquide le recouvrant qui provient de la deuxième photo.*

Il n'est pas dû non plus à une éventuelle poussière ou perturbation de l'injection, il est en effet très reproductible. Nous pensons qu'il s'agit en fait d'une vorticité résiduelle introduite par le parcours du liquide dans les tubes d'alimentation qui modifie très légèrement l'injection de liquide et a pour conséquence de déformer le ressaut hydraulique. On s'en aperçoit aisément : si l'on bouge les tuyaux (souples) sans toucher à l'injecteur on fait tourner la structure formée avec le plan qui contient ces tubes.

Afin de "supprimer" ce phénomène parasite nous avons cherché à allonger au maximum la longueur verticale du tuyau d'alimentation. Nous avons ajouté aussi une grille très fine mais cela n'a eu aucune influence sur ce phénomène parasite. Seule une structure en nid d'abeille en amont de l'injection aurait peut-être été susceptible de freiner ce phénomène, mais une telle structure aurait augmenté considérablement les pertes de charges si bien que la gamme des débits à laquelle ce phénomène est gênant aurait été tout simplement inaccessible.

En effet, on peut observer ce phénomène uniquement pour des débits très importants (au delà de 60 cm^3/s^{-1}) pour des viscosités faibles (ici pour 20 cS mais nous avons fait des essais avec une huile à 5 cS, dans ces conditions la déformation advenait pour des débits assez faibles et déformait très fortement le choc jusqu'à la présence d'un "coin" liquide). Ce phénomène semble aussi dépendant du rayon de la plaque. En effet, pour les plaques de petits rayons $R_\infty = 8$ cm cette déformation est accrue. Pour quantifier les effets de cette déformation nous mesurons le grand axe de cette structure ainsi que le petit axe (tout deux passant par le centre de l'injecteur voir Fig. III.6). La différence des deux sur la longueur du grand axe nous fournit une idée de l'erreur commise sur la valeur du rayon en raison de ce phénomène parasite. Lorsque l'erreur est supérieure à 5 % (2 mm pour un rayon de 4 cm) on néglige simplement le point expérimental. Dans le cas où l'erreur est inférieure à 5% on considère que le rayon du ressaut vaut la somme du grand axe et du petit axe divisée par 4.

Cet effet n'est actuellement pas compris et n'a jamais été étudié quantitativement. La difficulté tient au fait qu'il est très difficile à éliminer mais aussi très difficile à maîtriser quantitativement car

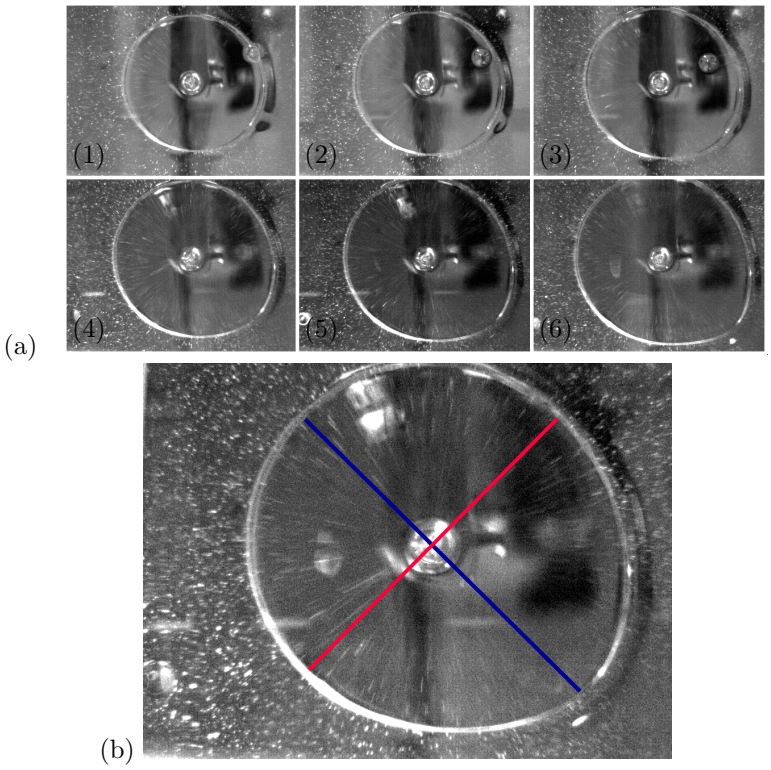


FIGURE *III.6* – *Ressaut hydraulique déformé. Nous pensons que la déformation est due à une vorticité résiduelle apparue dans le circuit hydraulique. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS, le diamètre de l'injecteur est $\phi = 7$ mm, le rayon du disque est $R_\infty = 15$ cm. (a) croissance de l'excroissance liquide : l'image (1) correspond à un débit de 60 $\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}^{-1}$ et l'on peut y voir un ressaut hydraulique parfaitement circulaire. Les images sont obtenues à débit croissant et séparées d'environ 4 $\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}^{-1}$, on peut y voir la croissance du coin liquide. (b) Image d'un ressaut déformé à 85 $\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}^{-1}$. En rouge est représenté le petit axe de la structure, en bleu le grand axe. La différence des deux divisée par la valeur du grand axe donne une estimation de l'erreur sur le rayon due au phénomène parasite. Si elle est plus importante que 5% le point expérimental est négligé. Dans le cas contraire, on considère que R_J vaut la somme du petit et du grand axe divisée par 4. Les tâches blanches correspondent à des bulles d'air formées au niveau de l'impact du jet.*

dépendant du circuit d'alimentation. Dans ce mémoire nous tiendrons compte de ce phénomène comme cela a été décrit précédemment mais nous ne chercherons pas à en pousser plus loin la compréhension.

III.6 Premières mesures ou l'échec des lois d'échelles simples

Comme vu dans l'étude bibliographique la plupart des études sur le ressaut se sont concentrées sur la compréhension de la loi liant le rayon du ressaut R_J au débit Q. Nous traçons donc cette loi expérimentale sur la Fig. III.7 en faisant varier les paramètres physiques ν (trois viscosités sont testées) et γ (deux tensions de surface sont comparées) et les paramètres géométriques ϕ (par le biais de 4 injecteurs de diamètres différents) et R_∞ (où trois diamètres de plaque sont étudiés).

Cette étude utilisant un grand nombre de paramètres nous enseigne que :

(i) Les effets de la viscosité sont importants mais les effets de la tension de surface sont, comme

attendu, assez faibles (bien que non nuls).

(ii) En ce qui concerne l'approche géométrique, si les effets ne semblent pas majeurs au premier ordre il apparaît que le rayon de la plaque R_∞ a une influence non négligeable sur le rayon du ressaut et ceci n'a encore jamais été mentionné jusqu'à présent. [4]

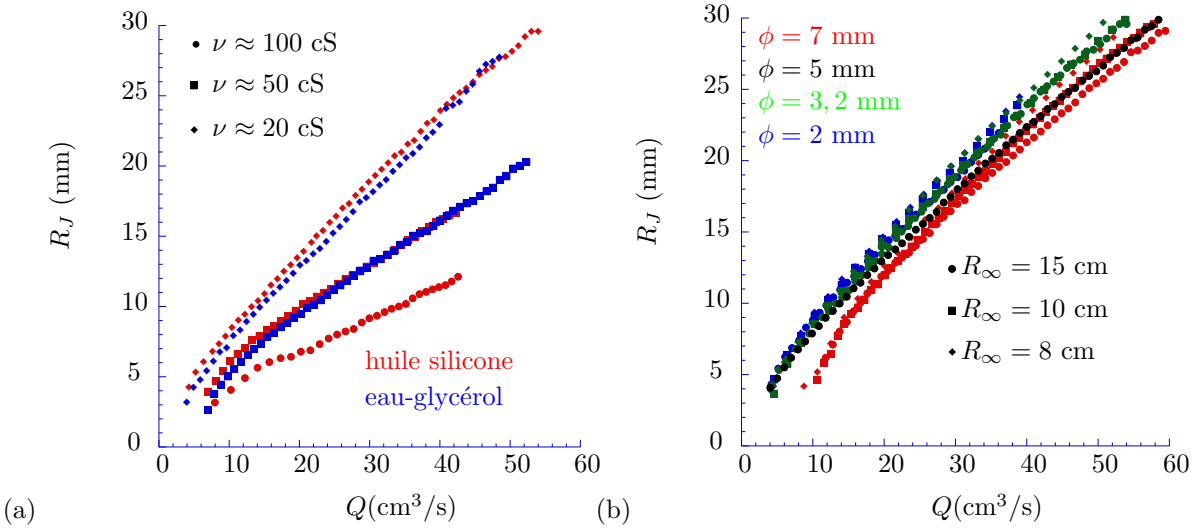


FIGURE *III.7 – Rayons du ressaut R_J en fonction du débit Q pour différents paramètres physiques et géométriques. (a) R_J en fonction de Q pour $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. Les liquides utilisés sont des huiles silicones (rouge) et des mélanges eau-glycérol (bleu) de différentes viscosités (20, 50 ,100 cS). (b) R_J en fonction de Q avec de l'huile silicone 20 cS. Nous avons fait varier les propriétés géométriques du système : le rayon de la plaque R_∞ (8, 10, 15 cm) et le diamètre de l'injecteur ϕ (7 mm (rouge), 5 mm (noir), 3,2 mm (vert) et 2 mm (bleu)).*

Dans un premier de temps nous avons comparé ces points expérimentaux aux lois d'échelles simples obtenues dans les travaux antérieurs.

Le modèle de Watson [114] ne peut être testé car il nécessite la connaissance de la hauteur après le ressaut comme paramètre d'entrée, il s'agit donc d'une approche incomplète nécessitant l'approfondissement de la modélisation de la zone externe. Nous proposerons plus loin un test de cette loi.

Pour commencer cette comparaison avec les lois d'échelles connues on se propose d'étudier celle proposée par Bohr (voir équation (II.61)). Nous avons donc comparé le rayon du ressaut R_J avec une loi $Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$ pour différents liquides dans la Fig. III.8. Comme on peut le constater, cette loi d'échelle est correcte mais loin d'être parfaite : si elle capte très bien la dépendance en viscosité, la loi $R_J(Q)$ n'est pas entièrement convaincante. En réalité, si l'on ajuste les lois proposées en Fig. III.7 par des lois de puissance on trouve des exposants compris entre 0,7 et 1. On est donc assez éloigné des 0,625 que propose la loi d'échelle de Bohr *et al.* [5]

Les travaux de Rojas *et al.* proposent aussi un certain nombre de lois d'échelles simples. Nous avons donc simplement comparé les lois d'échelles obtenues dans la partie (II.4.6) , R_{Ja} (II.107), R_{Jb} (II.109), R_{Jc} (II.110), R_{Jd} (II.111) avec les points expérimentaux pour de l'huile silicone 20 cS, une

4. On a également fait varier la distance entre l'injecteur et la plaque de 4 à 40 mm. On n'observe alors aucune variation de R_J supérieure au pourcent.

5. Il est bien évident que cette constatation nous permet d'éliminer les modélisations de Godwin et Bréchet qui proposent une dépendance en viscosité en -1/3 ce qui est très proche des -3/8 proposés par Bohr *et al.* mais une loi pour $R_J(Q)$ en $Q^{1/3}$ ce qui est donc bien moins satisfaisant que 5/8 et encore plus éloigné de la réalité.

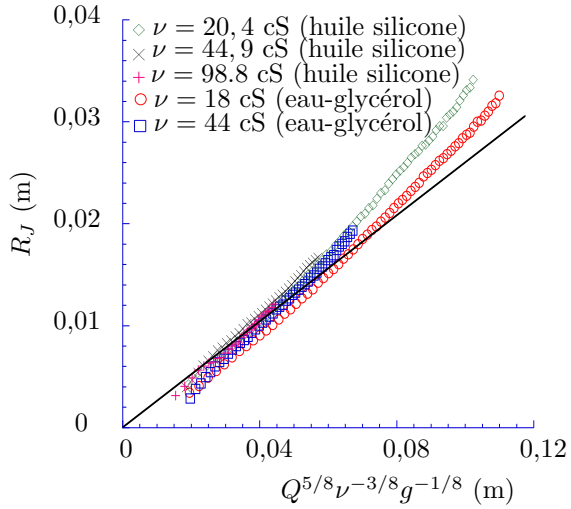


FIGURE *III.8* – *Test de la loi d'échelle proposée par Bohr et al. pour deux liquides différents et cinq viscosités : eau-glycérol à 18 cS (cercles rouges), huile silicone à 20.4 cS (losanges verts), eau-glycérol à 44 cS (carrés bleus), huile silicone à 44.9 cS (croix noires) et huile silicone à 98.8 cS (croix roses). Dans chaque cas R_J est reporté en fonction de la loi d'échelle : $Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$. Cette loi d'échelle ne réussit clairement pas à s'ajuster proprement sur nos données.*

plaque de rayon $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. Le résultat est visible en Fig. III.9.

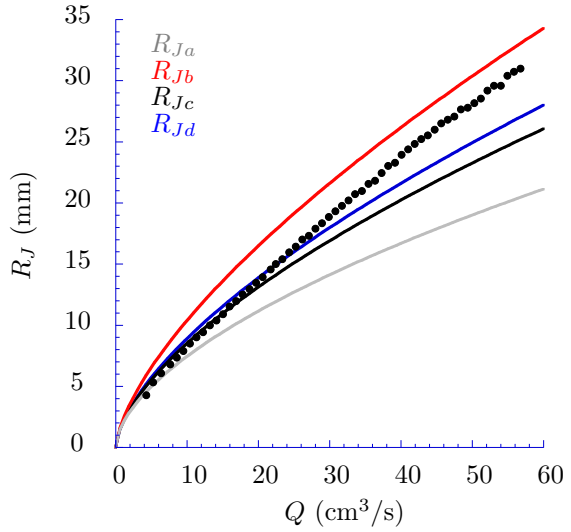


FIGURE *III.9* – *Lois d'échelles pour R_J obtenues par Rojas et al. dans la partie (II.4.6) et comparaison avec l'expérience. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS et la géométrie est donnée par $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. Les points expérimentaux sont représentés par les cercles noirs. Les lois d'échelles sont représentées comme suit : R_{Ja} (II.107) (couleur grise), R_{Jb} (II.109) (couleur rouge), R_{Jc} (II.110) (couleur noire) et R_{Jd} (II.111) (couleur bleue). Comme on peut le constater, aucune de ces lois ne s'ajuste sur les données... Toutefois comme on pouvait s'y attendre, c'est la loi d'échelle la plus complexe qui s'ajuste le mieux aux données sans toutefois parvenir à s'ajuster parfaitement aux points expérimentaux.*

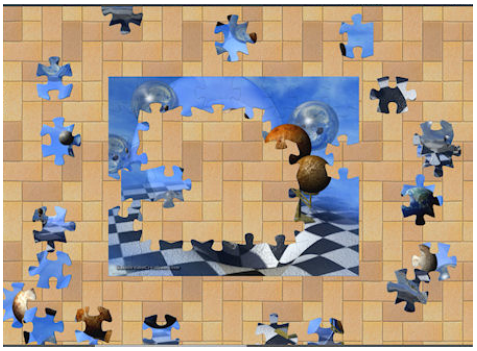
Comme on peut le constater, l'accord entre théorie et expériences n'est pas bon et ce malgré une modélisation plus fine tenant davantage compte de la zone externe.

Face à ce manque de modélisations analytiques simples et convaincantes, la plupart des auteurs se sont tournés, comme on l'a vu, vers des approches plus numériques nécessitant l'intégration des équations de base. Cette approche, outre sa difficulté d'usage, nécessite également un ou plusieurs points expérimentaux : on perd alors le caractère prédictif de la modélisation. On constate aussi que la plupart des théories existantes peinent à modéliser le profil extérieur et qu'aucune ne s'appuie sur des données expérimentales exhaustives pour cette modélisation. Nous avons donc été amenés, dans le présent manuscrit, à reconsidérer la question de la zone externe d'une façon plus précise. Empiriquement, nous avons alors découvert qu'une condition imprévue, sur le nombre de Froude en sortie du ressaut s'appliquait et conditionnait la sélection du rayon $R_J(Q)$, imposant une forme analytique simple de façon très inattendue et compatible avec les données expérimentales.

Chapitre IV

Vers une nouvelle théorie, ou une exploration en partant du bord

Et si on commençait le puzzle par les bords...



IV.1 Objectif et idée de départ

Comme on l'a vu dans la partie bibliographique il existe un consensus sur la modélisation de la zone interne qui, à des niveaux de complexité divers, s'assimile au modèle de Watson. La condition de choc peut être ou bien intégrée dans les équations lorsque l'on traite le problème numériquement ou bien, lorsque l'on procède à une approche plus analytique, dérivée de celle de Bélanger (avec éventuellement l'ajout de la contribution de la tension de surface). En revanche la plupart des modèles divergent en ce qui concerne la zone externe : certains auteurs ne décrivent pas cette zone et/ou utilisent un point du profil extérieur comme paramètre d'entrée pour permettre l'intégration numérique des équations ou l'application de la condition de choc. D'autres proposent des modélisations de la zone extérieure mais peinent à définir une condition aux limites permettant d'obtenir une équation utilisable du profil extérieur. [1]

Nous avons donc choisi, en ce qui nous concerne, de raisonner sur cette question du ressaut hydraulique circulaire comme face à un puzzle : en commençant par les bords. On se propose donc d'explorer

1. Bohr *et al.* ne définissent pas clairement la position de la singularité qu'ils utilisent et proposent d'utiliser le bord de la plaque. Il ne s'agit toutefois pas d'une hypothèse démontrée. Kasimov essaye lui de prédire un point du profil extérieur. Toutefois sa modélisation du point en bord de plaque est loin d'être convaincante...

notre système depuis le bord extérieur. Nous développerons donc dans les paragraphes qui suivent un modèle pour le profil d'épaisseur extérieure que nous testerons expérimentalement. On examinera ensuite le raccordement de ce profil au choc. En découlera une condition inattendue au choc que nous vérifierons expérimentalement et nous en déduirons alors une nouvelle expression analytique pour $R(Q)$.

IV.2 Profil extérieur

IV.2.1 Modélisation en terme de lubrification et validation expérimentale

Pour modéliser l'écoulement extérieur, à la vue des conditions aux limites (écoulement quasi parallèle) nous faisons le choix d'un modèle simple : on propose donc de modéliser l'écoulement par un demi-Poiseuille. On se place dans la zone externe donc sous critique. La pente locale est toujours faible, le nombre de Reynolds réduit est également faible (on a typiquement $Re' \sim QH_J/(2\pi R_\infty^2 \nu) \sim 5\,10^{-2}$ et la pente est de l'ordre de $2,5\,10^{-2}$). On peut donc se placer dans l'approximation de lubrification. La vitesse de l'écoulement est alors donnée par un équilibre entre la pression hydrostatique et les frottements visqueux sur la surface du verre (voir Fig. IV.1).

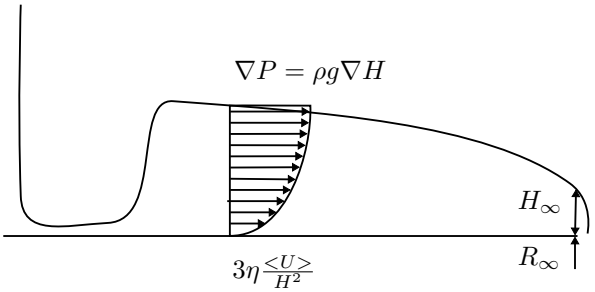


FIGURE *IV.1 – Schéma de principe pour un modèle de la zone externe du ressaut. On modélise l'écoulement par un demi Poiseuille (profil parabolique). On ne considère que la pression hydrostatique comme moteur de l'écoulement et la friction à la surface solide. L'inertie est négligée.* $< U >$ *correspond à la vitesse moyenne de l'écoulement.*

Plus précisément l'équation régissant l'écoulement est donnée par :

$$3\eta \frac{< U(r) >}{H(r)^2} = -\rho g \frac{dH(r)}{dr}, \tag{IV.1}$$

avec $< U(r) >$ la vitesse moyenne dans le sens radial. En couplant cette équation (IV.1) avec la conservation du débit $Q = 2\pi r < U > H$ on obtient :

$$\frac{dH(r)}{dr} H(r)^3 = -\frac{3}{2\pi} \frac{\nu Q}{rg}. \tag{IV.2}$$

Après intégration on obtient :

$$H(r) = \left(H_\infty^4 + \frac{6}{\pi} \frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{r} \right) \right)^{1/4}, \tag{IV.3}$$

où le couple $(R_\infty; H_\infty)$ est défini comme la hauteur de plaque au niveau de $r = R_\infty$ le rayon du disque de verre. [2]

Comme nous l'avons vu, ce type de profil de hauteur a déjà été rapporté dans la littérature [8, 57, 113, 98] mais n'a jamais fait l'objet d'une vérification expérimentale. Dans ces différents modèles le choix du couple $(R_\infty; H_\infty)$ est vague : dans certains cas les auteurs ont considéré que la hauteur est nulle en bord de plaque [3], dans d'autres cas qu'elle est imposée par le profil de vitesse au niveau du bord [4], ou enfin elle est considérée comme une valeur arbitraire et constante correspondant à la hauteur d'un mur de confinement ou non [5]. Nous nous proposons donc d'utiliser des valeurs expérimentales de H_∞ mesurées par nos soin pour valider ce modèle.

Il est très simple de tester ce modèle sur les profils de hauteurs expérimentaux que nous avons obtenus en utilisant le profondimètre. La Fig. IV.2 présente un tel profil.

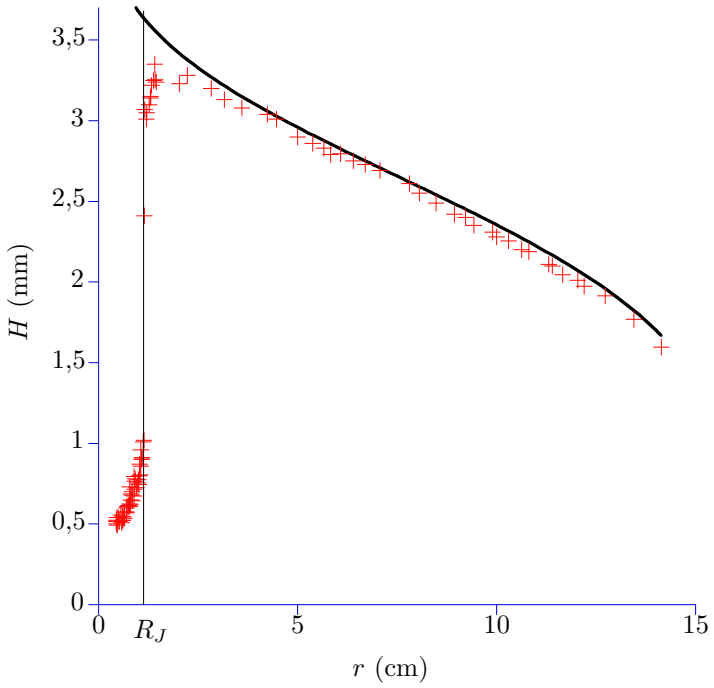


FIGURE *IV.2 – Profil extérieur de la hauteur de liquide. Le liquide utilisé est de l'huile silicone (20 cS). Nous sommes donc dans un cas de mouillage total. Le débit (mesuré) est de* 17 $\mathrm{cm}^3.\mathrm{s}^{-1}$ *et l'épaisseur mesurée en bord de plaque* ($R_\infty = 15$ *cm) est* $H_\infty = 1.4$ *mm. L'équation (IV.3) est représentée par la ligne noire continue (sans paramètre ajustable puisque les valeurs des paramètres physiques sont déterminées expérimentalement). La position du ressaut est indiquée à titre d'information par la ligne verticale.*

Comme on peut le voir, l'accord entre théorie et points expérimentaux est excellent. Le trait noir continu représente l'équation (IV.3) avec comme paramètres d'entrée les valeurs mesurées expérimentalement du débit Q et de H_∞. Cet accord est obtenu sans aucun paramètre ajustable, notre modélisation s'avère donc particulièrement robuste.

On note toutefois qu'à l'approche du ressaut l'accord diminue entre points expérimentaux et théo-

2. Expérimentalement, nous ferons le choix de mesurer H_∞ 5 mm un peu avant le bord de la plaque afin d'éviter justement les effets de bord.
3. Bohr *et al.* [8]
4. Kasimov [63]
5. Higuera et Rojas *et al.* [57, 98]

rie. Cela est principalement dû aux effets de l'inertie qui ont été négligés dans notre modèle. Cette hypothèse semble tout à fait cohérente avec le fait que l'inertie joue le rôle d'un moteur supplémentaire à l'écoulement et donc aura tendance à aplatir le profil expérimental. Outre l'inertie, le fait de ne pas retrouver le profil attendu s'explique aussi par la présence d'une recirculation après le ressaut qui signifie très clairement qu'en sortie de ressaut le profil de vitesse ne peut être assimilé à un demi-Poiseuille. Cet effet aurait quant-à-lui plutôt tendance à augmenter localement la hauteur.

Pour quantifier davantage l'écart entre théorie et expérience, on se propose de tracer $H^4 - H_\infty^4$ en fonction de $6/\pi\nu Q/gln(R_\infty/r)$ (voir Fig. IV.3). On pourra ainsi évaluer la zone d'influence réelle du terme d'inertie, en particulier après le ressaut et juste avant le bord de la plaque. Comme l'axe des abscisses dépend en log de $1/r$ nous avons choisi pour ne montrer que la partie intéressante du profil de ne considérer que les points situés après le maximum de hauteur atteint (maximum inclu).

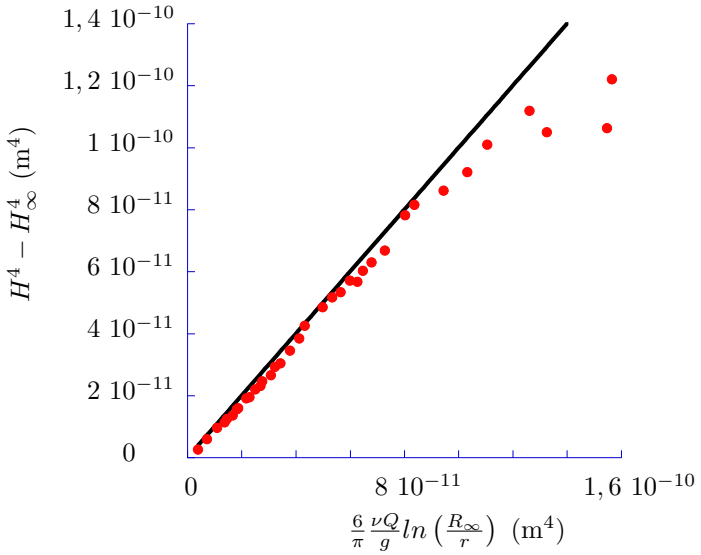


FIGURE *IV.3* – $H^4 - H_\infty^4$ *en fonction de* $6/\pi\nu Q/gln(R_\infty/r)$. *La ligne noire correspond donc à la loi attendue (sans paramètre ajustable). Les points représentés sont les mêmes que ceux de la Fig. IV.2. Les conditions expérimentales sont donc identiques. Comme on peut le voir l'accord est excellent pour* $r > 2R_J$.

Comme on peut le voir sur la figure le résultat est tout à fait convenable d'autant plus que l'erreur est volontairement mise en avant en considérant la puissance 4 des hauteurs. Globalement on peut en conclure que l'inertie ne joue aucun rôle 3 cm après le ressaut $r \approx 4R_J$, et joue un rôle assez faible (suffisamment pour la négliger en tout cas) à partir de $r \approx 2R_J$. On peut donc considérer que le profil de hauteur est bien modélisé par (IV.3) après cette dernière limite. En particulier on montre qu'en bout de plaque le modèle reste correct malgré l'influence locale du bord de la plaque sur l'écoulement.

IV.2.2 Note sur la hauteur en bord de plaque

Comme on le voit dans le modèle présenté dans la partie précédente la hauteur en bord de plaque H_∞ joue un rôle crucial dans la modélisation du profil extérieur.

Nous avons donc réalisé une série d'expériences dans le cas de l'huile silicone à 20 cS pour observer les variations de H_∞ en fonction du débit Q et de divers facteurs géométriques R_∞, ϕ. Utilisant de l'huile silicone, nous sommes en situation de mouillage total. Donc le liquide s'écoule le long de la

paroi sous forme d'un film homogène avant de se séparer en colonnes liquides sous la plaque. H_∞ est donc bien homogène sur tout le bord de la plaque. Comme on peut le voir sur la Fig. IV.4 H_∞ varie assez peu en fonction du débit (on peut ajuster les points expérimentaux par une loi de puissance d'exposant variant entre 0,1 et 0,17), très peu suivant le diamètre d'injection (pour un facteur deux on ne constate quasiment aucune variation) et relativement faiblement en fonction du rayon de la plaque même si l'influence est plus marquée que dans les deux cas précédents. On peut constater que plus R_∞ augmente plus H_∞ diminue (typiquement 30 % de variation pour un facteur 2 sur R_∞)

La valeur de H_∞ se situe aux alentours de 1,75 mm, ce qui correspond à une valeur de l'ordre de la longueur capillaire pour l'huile silicone ($l_c \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \sim 1,4$ mm avec γ la tension de surface et ρ la masse volumique).

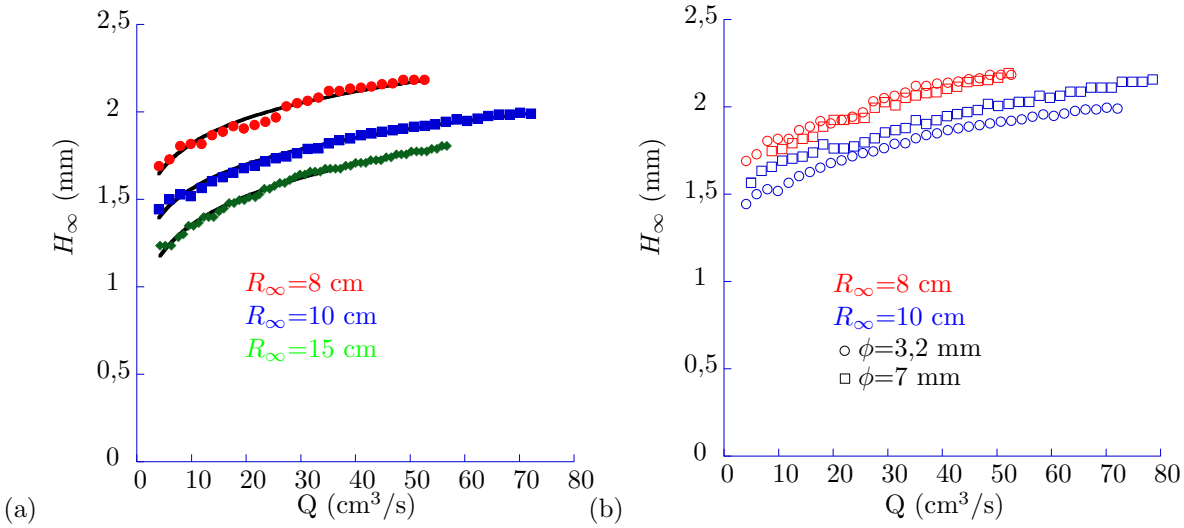


FIGURE *IV.4 – La hauteur en bord de plaque H_∞ en fonction du débit Q pour différents paramètres expérimentaux. Le liquide utilisé est de l'huile à 20 cS. (a) H_∞ en fonction de Q pour ϕ= 3,2 mm, trois rayons de disque R_∞ sont reportés : 8 cm (cercles rouges), 10 cm (carrés bleus) et 15 cm (losanges verts). (b) H_∞ en fonction de Q pour deux tailles d'injecteurs (ϕ = 3,2 mm (cercles) et 7mm (carrés)) et deux rayons de disques (8 cm (rouge) et 10 cm (bleu)).*

Comme précisé plus haut, nous avons également mesuré l'influence de la tension de surface sur le rayon du ressaut hydraulique. Nous avons donc utilisé des mélanges eau-glycerol. Dans ce cas H_∞ est plus difficile à mesurer car le liquide s'écoule sur le verre en situation de mouillage partiel. Néanmoins si l'on travaille avec un disque de verre suffisamment propre le liquide mouille entièrement le dessus de la plaque, le démouillage ne se produisant que sur le bord latéral du disque avec la formation de ruisselets qui brisent légèrement la symétrie de l'écoulement sur le périmètre du disque. Le nombre total de ruisselets N sera fonction de nombreux paramètres : le rayon de la plaque R_∞, le débit Q, la viscosité cinématique ν... il sera typiquement autour de 20 ce qui limite beaucoup la brisure de symétrie. Ces filets liquides influent légèrement sur la hauteur de liquide en bord de plaque. On ne peut donc pas mesurer H_∞ de la même manière que précédemment. Qualitativement nous observons que la symétrie radiale reste préservée partout excepté à la proximité directe du périmètre du disque, là où H_∞ est justement mesurée.

Néanmoins le profondimètre utilisé à plusieurs endroits (mais toujours à 5 mm de l'arrête de la plaque) et pour plusieurs débits nous fournit une valeur de H_∞ constante et très proche de 3 mm (soit

légèrement supérieure à la longueur capillaire du mélange qui se situe aux alentours de 2,5 mm), les fluctuations dues aux perturbations causées par les ruisselets n'excèdent pas quelques pourcents. Cette valeur est cohérente avec la valeur constante déjà établie par Dressaire *et al.* [36] dans une expérience très similaire.

Cette valeur de 3 mm étant à nouveau très proche de la longueur capillaire du liquide utilisé, on soupçonne qu'elle soit imposée au premier ordre par un équilibre entre pression hydrostatique et tension de surface. [6]

IV.2.3 Hauteur extérieure après le choc

Revenons maintenant au profil de hauteur extérieure défini par l'équation (IV.3) et à sa vérification expérimentale en Fig. IV.2. Comme on peut le constater, le profil de hauteur permet de proposer deux définitions de H_J la hauteur de liquide en sortie de ressaut. La première H_{J1} est la valeur mesurée juste après le choc c'est-à-dire la hauteur maximum en sortie de ressaut. La seconde définition H_{J2} correspond à la valeur extrapolée de $H(R_J)$ provenant de l'équation (IV.3) prise à la position du ressaut R_J obtenue expérimentalement. Pour plus de clarté nous avons indiqué sur la Fig. IV.5 les deux définitions possibles pour H_J.

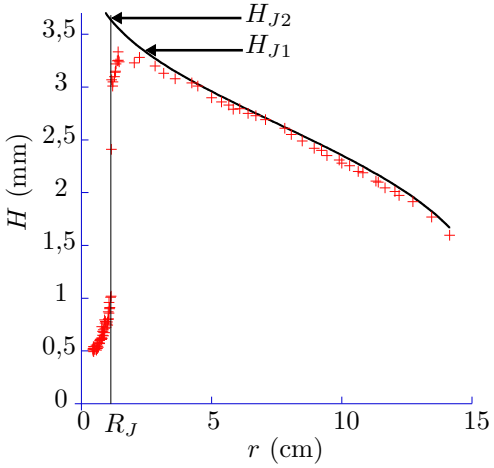


FIGURE *IV.5 – Profil extérieur de la hauteur de liquide (voir Fig. IV.2 pour les détails techniques). L'équation (IV.3) est représentée par la ligne noire continue (sans paramètre ajustable puisque les valeurs des paramètres physiques sont déterminées expérimentalement). La position du ressaut est indiquée à titre d'information par la ligne verticale. Deux valeurs pour H_J peuvent être extraites : H_{J1} la hauteur mesurée expérimentalement juste en sortie de ressaut et H_{J2} la valeur extrapolée de l'épaisseur de liquide calculée à partir de l'équation (IV.3) en R_J.*

Ces deux définitions présentent l'avantage d'éviter d'avoir à considérer la structure complexe de l'écoulement en sortie de ressaut. Bien sûr la première définition H_{J1} est plus naturelle mais la seconde où $H_J = H_{J2}$ nous permettra de développer analytiquement notre modèle.

L'utilisation de ces deux définitions pourrait être un réel problème si ces deux valeurs de H_J n'étaient pas proportionnelles l'une à l'autre. Expérimentalement nous avons pu vérifier sur notre gamme de débits et en faisant varier les paramètres géométriques qu'il existait toujours une relation de proportionnalité entre H_{J1} et H_{J2}. Si bien qu'il est possible de définir un coefficient β dépendant

6. En tout état de cause la modélisation de H_∞ s'avère très difficile et nous n'y sommes pas parvenu.

des paramètres géométriques tels que :

$$\frac{H_{J1}}{H_{J2}} = \beta(\phi, R_\infty). \tag{IV.4}$$

Bien entendu cette proportionnalité entre H_{J1} et H_{J2} peut être vérifiée expérimentalement. Les résultats de cette comparaison sont visibles sur la Fig. IV.6.

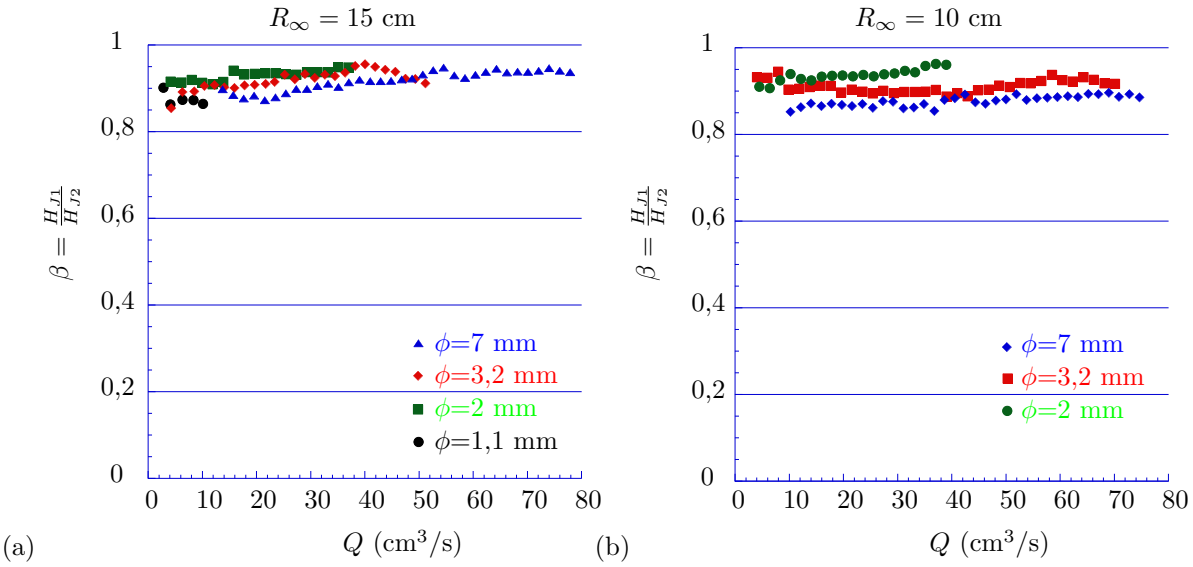


FIGURE *IV.6 – Rapport β (défini en IV.4) comme H_{J1} sur H_{J2} où H_{J1} correspond à la hauteur mesurée et H_{J2} la hauteur extrapolée à partir du modèle (IV.3) en fonction du débit pour différents rayons de plaque R_∞ et différents diamètres d'injecteurs ϕ. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS. La figure (a) représente β pour $R_\infty = 15$ cm et pour quatre valeurs de ϕ (7 mm (bleu), 3,2 mm (rouge), 2 mm (vert) et 1,1 mm (noir)). La figure (b) représente β pour $R_\infty = 10$ cm et pour trois diamètres d'injecteurs (7 mm (bleu), 3,2 mm (rouge) et 2 mm (vert)).*

Comme on peut le voir, on a bien H_{J1} proportionnel à H_{J2} aux incertitudes de mesure près. De fait, on n'observe aucune tendance à variation reproductible entre les différentes courbes. Les courbes de la Fig. IV.6 nous permettent d'obtenir les coefficients β dont la valeur varie entre 0,88 et 0,94 en fonction de la géométrie. Nous ne savons pas encore ce qui explique ces variations en fonction de la géométrie. Toutefois il semble que le rayon du disque n'a quasiment aucune influence tandis que plus le diamètre de l'injecteur diminue plus le rapport augmente [7].

IV.2.4 Conclusion

La conclusion de cette partie tient en une formule :

$$H(r) = \left(H_\infty^4 + \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{r}\right)\right)^{1/4}.$$

Cette loi qui provient de l'équilibre entre pression hydrostatique et frottement visqueux sur la paroi solide avec un profil d'écoulement parabolique fournit un excellent modèle de la zone extérieure, excepté juste après le ressaut.

Le profil proposé pose également la question de la valeur de la hauteur juste au bord de la plaque :

7. Excepté pour $\phi = 1,1$ mm mais nous possédons très peu de points.

H_∞. On retiendra que cette longueur est dans tout les cas légèrement supérieure à la longueur capillaire.

En outre, on a vue que l'on pouvait définir deux valeurs pour H_J : H_{J1} la valeur mesurée juste après le choc c'est-à-dire la hauteur maximum en sortie de ressaut et H_{J2} correspondant à la valeur extrapolée de $H(R_J)$ provenant de l'équation (IV.3) prise à la position du ressaut R_J obtenue expérimentalement.

IV.3 Raccordement au choc

Curieusement, le nombre de Froude Fr n'a été que très peu étudié dans ce système de ressaut hydraulique circulaire. Pourtant c'est le nombre sans dimension classique pour l'étude des ressauts dans un canal. On se propose donc ici d'étudier le comportement du nombre de Froude observé localement à la sortie du ressaut. Le Froude local se construit comme $Fr = U(r)/\sqrt{gH(r)}$ avec $U(r)$ la vitesse moyenne locale et $H(r)$ la hauteur de liquide locale. Le nombre de Froude après le ressaut s'écrira donc $Fr = U_J/\sqrt{gH_J}$, où U_J la vitesse moyenne juste après le choc et H_J la hauteur juste après le choc (voir Fig. IV.7).

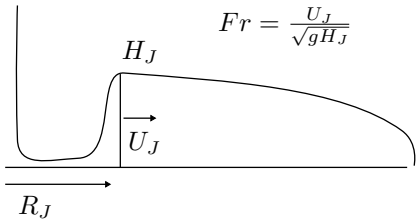


FIGURE *IV.7 – Définition du nombre de Froude en sortie de ressaut.*

Afin de déterminer la valeur du nombre de Froude sans ambiguité, on utilise la conservation du débit : $Q = 2\pi RUH$. On aboutit alors à : $Fr = \frac{Q}{2\pi g^{1/2} RH^{3/2}}$, qui, si l'on s'intéresse au nombre de Froude en sortie de ressaut et que l'on considère la profondeur du ressaut (selon r) comme négligeable (ce qui revient à supposer un choc d'épaisseur nulle) devient :

$$Fr = \frac{Q}{2\pi g^{1/2} R_J H_J^{3/2}}. \tag{IV.5}$$

Les mesures de la hauteur H_J et du rayon du ressaut R_J en fonction du débit Q suffisent donc à estimer la valeur de Fr. Comme on l'a vu précédemment, il y a plusieurs définitions pour H_J : H_{J1} la mesure directe obtenue expérimentalement et H_{J2} la mesure provenant de l'équation (IV.3) prise à la position du ressaut R_J obtenue expérimentalement. On peut donc définir deux nombres de Froude à l'aide de ces définitions : $Fr_1 = \frac{Q}{2\pi g^{1/2} R_J H_{J1}^{3/2}}$ et $Fr_2 = \frac{Q}{2\pi g^{1/2} R_J H_{J2}^{3/2}}$.

Sur la Fig. IV.8 on représente donc les deux nombres de Froude de sortie Fr_1 et Fr_2 pour de l'huile silicone à 20 cS avec $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. Pour obtenir Fr_1, on mesure directement H_J et R_J puis on obtient Fr_1 en utilisant l'équation (IV.5). Pour obtenir Fr_2 on mesure R_J puis l'on obtient H_J grâce à (IV.3) et l'on obtient alors Fr_2 à partir de (IV.5).

Le principal résultat de cette observation est que les deux nombres de Froude Fr_1 et Fr_2 apparaissent comme indépendants du débit, ou alors de manière imperceptible. On mesure $Fr_1 \approx 0,38 \pm 0,02$ et $Fr_2 \approx 0,33 \pm 0,01$. Seul le premier point de la courbe semble différer de cette tendance. Cela peut s'expliquer par le fait que les tout premiers points dépendent très fortement de la tension

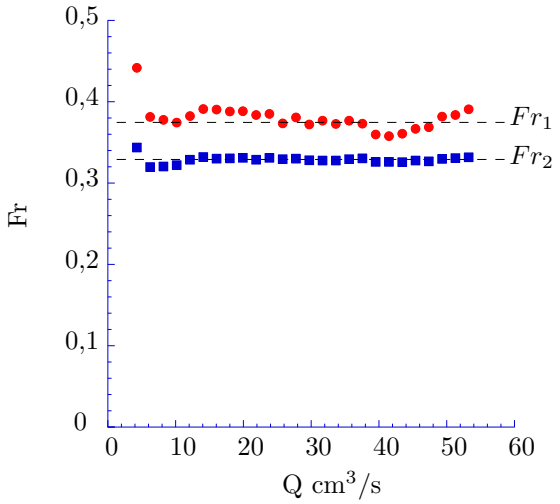


FIGURE *IV.8 – Observation expérimentale des nombres de Froude locaux Fr_1 et Fr_2 définis par la relation IV.5 en fonction du débit. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS, dans cette configuration $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. On observe que les deux nombres de Froude sont constants et que Fr_1 vaut $Fr_1 \approx 0,38 \pm 0,02$ et Fr_2 vaut $Fr_2 \approx 0,33 \pm 0,01$.*

de surface car le rayon du ressaut est très faible [8]. On ne s'étonnera pas du fait que les deux Froude sont tous deux constants. En effet, on a H_{J1} proportionnelle à H_{J2} et d'après (IV.5) les deux nombres de Froude sont proportionnels et donc si l'un est constant l'autre l'est aussi.

Comme attendu par la théorie, Fr est bien inférieur à 1 dans la zone sous critique. Néanmoins un nombre de Froude constant en sortie de ressaut est un résultat qui n'a jamais été reporté dans la littérature, ni expérimentalement ni théoriquement.

On peut se demander si ce nombre de Froude varie en fonction de la viscosité, de la tension de surface ou en fonction des paramètres géométriques du système (le diamètre de la buse ϕ, le rayon de la plaque R_∞). Nous avons donc tracé Fr_2 en fonction de Q pour différentes viscosités et tensions de surface sur la Fig. IV.9 [9].

On constate que le nombre de Froude (du moins Fr_2 mais très vraisemblablement Fr_1 également) est constant et indépendant du débit, de la viscosité et de la tension de surface et vaut $Fr_2 \approx 0,33 \pm 0,01$. [10].

Nous avons donc été amenés, empiriquement, à utiliser une condition de choc alternative à toutes les précédentes : un nombre de Froude constant en sortie de ressaut. [11]

8. Ce résultat d'un nombre de Froude constant en sortie de ressaut est avancé ici pour la première fois, on ne trouve aucune trace d'un tel résultat dans la littérature.

9. On ne représente pas Fr_1 car les mesures de hauteur après le ressaut sont délicates et souvent perturbées par des bulles piégées dans des liquides trop visqueux.

10. On constate à nouveau que les premiers points de chaque courbe sont légèrement écartés, nous l'expliquons par l'influence de la tension de surface aux faibles rayons.

11. On notera également que le fait d'obtenir une proportionnalité entre H_{J1} et H_{J2} est probablement lié au fait d'obtenir un nombre de Froude constant : si le Froude est constant cela signifie que les effets inertiaux auront toujours le même poids relativement aux effets gravitaires. On peut donc voir les effets inertiaux comme une correction proportionnelle aux termes gravitaires, les négliger comme cela est fait pour (IV.3) ne modifiera donc pas l'évolution de H avec les paramètres physiques, mais modifiera uniquement le préfacteur de H.

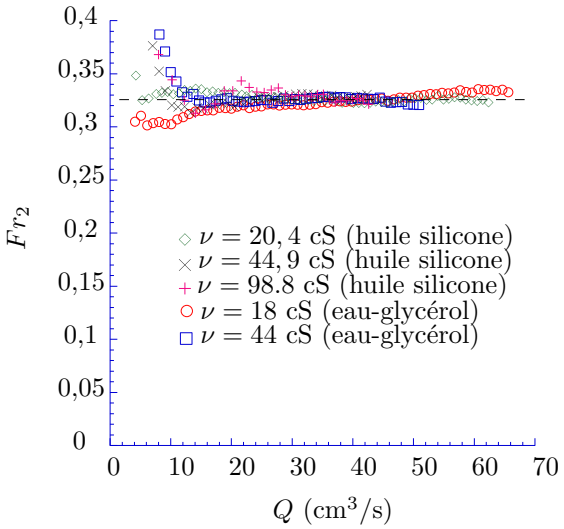


FIGURE *IV.9 – Observation expérimentale du nombre de Froude Fr_2 en fonction du débit pour deux liquides différents et cinq viscosités : eau-glycérol à 18 cS (cercles rouges), huile silicone à 20.4 cS (losanges verts), eau-glycérol à 44 cS (carrés bleus), huile silicone à 44.9 cS (croix noires) et huile silicone à 98.8 cS (croix roses). Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS, dans cette configuration $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. On observe que toutes les courbes s'ajustent sur une même courbe maîtresse où $Fr_2 \approx 0,33 \pm 0,01$.*

IV.4 Conséquence pour $R(Q)$

Nous nous proposons maintenant de réunir les différents éléments détaillés précédemment pour aboutir à de nouvelles lois permettant de prédire le comportement du ressaut. On se propose dans un premier temps d'établir une nouvelle loi prédictive liant le rayon du ressaut R_J et le débit Q.
On se place juste après le ressaut et l'on suppose $r = R_J$: le nombre de Froude s'écrit :

$$Fr = \frac{Q}{2\pi g^{1/2} R_J H_J^{3/2}},$$

comme vu en (IV.5). Si l'on considère Fr_2 (et donc $H_J = H_{J2}$) on obtient :

$$Q = 2\pi Fr_2 g^{1/2} R_J \left(H_\infty^4 + \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{3/8}. \tag{IV.6}$$

Cette équation, relativement simple, permet de lier R_J, Q, ν, g, Fr_2, H_∞ et R_∞. Elle reste toutefois assez peu tractable : H_∞ n'est pas connue et dépend de nombreux paramètres (tension de surface γ, débit Q, paramètres géométriques R_∞ ou ϕ).

Afin de mesurer le poids relatif de H_∞^4 on le compare au deuxième terme de H : $\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)$ (voir Fig. IV.10).

La valeur de H_∞ a une influence très faible sur H_J dans le cas du mouillage total (entre 3 et 7 %). On peut ainsi considérer que, en particulier pour le cas $R_\infty = 15$ cm, $H_\infty^4 \ll \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)$ et donc que $H_J \approx \left(\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{1/4}$. Ainsi l'équation (IV.6) prend la forme :

$$R_J \left(ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{3/8} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{-3/8} Fr_2^{-1} Q^{5/8} \nu^{-3/8} g^{-1/8}, \tag{IV.7}$$

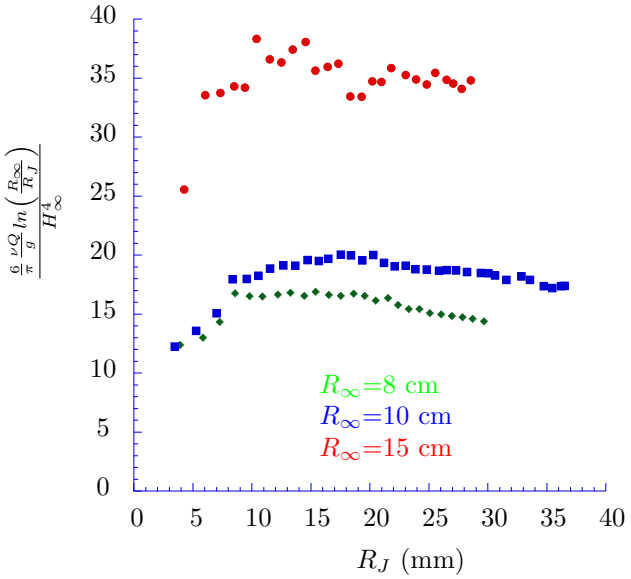


FIGURE *IV.10 – On trace le rapport* $\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)$ *sur* H_∞^4 *en fonction du rayon de ressaut* R_J*. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS. En outre on a* $\phi = 3{,}2$ *mm. Trois rayons de plaque* R_∞ *sont testés : 15 cm (cercles rouges), 10 cm (carrés bleus) et 8 cm (losanges verts). Comme on peut le voir ce rapport est très important. On pourra donc raisonnablement négliger* H_∞ *dans les équations.*

c'est-à-dire

$$R_J \left(ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{3/8} = KQ^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}, \tag{IV.8}$$

avec $K = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{-3/8} Fr_2^{-1}$.

On retrouve ainsi la loi d'échelle proposée par Bohr *et al.* (voir équation (II.61)). Mais dans notre cas nous obtenons un terme logarithmique supplémentaire non négligeable. On peut aussi estimer les valeurs du préfacteur de cette loi en connaissant la valeur du nombre de Froude ($Fr_2 \approx 0,33$).

Pour autant, dans le cas où l'on considère un mélange eau-glycérol, il faut nous montrer plus prudent : dans le cas d'un mélange eau glycérol peu visqueux l'approximation $H_\infty^4 \ll \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)$ n'est plus valable (H_∞ varie à la puissance 4). Il faut alors considérer l'ensemble des termes de l'équation (IV.6) sous peine de commettre de lourdes erreurs sur l'estimation du rayon de ressaut. [12]

Le rapport $\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)$ sur H_∞^4 nous indique que dans le cas d'un mélange eau glycérol de 44 cS la viscosité est telle que H_∞ peut être négligé en assez bonne approximation, tandis que pour le mélange eau glycérol moins visqueux (18 cS) H_∞ ne peut plus être négligé. Il faut alors prendre en compte tous les termes de (IV.6). On tracera alors la courbe :

$$Q = Fr_2\, f(R_J, Q, H_\infty), \tag{IV.9}$$

12. Un exemple dans la littérature démontre l'importance de ce H_∞ en cas de mouillage partiel [91]. Dans cette étude sont utilisés des disques de différentes matières (Perspex (PMMA) et aluminium) fortement chanfreinés ou droits, légèrement coniques ou non avec différents rayons de plaques R_∞. Dans le cas de l'aluminium le mouillage en bord de plaque est assez faible on peut donc s'attendre à H_∞ assez faible et l'on observe R_J assez grand. Dans le cas du PMMA l'angle de contact est au contraire assez élevé. On s'attend donc à un fort H_∞ et l'on observe alors R_J beaucoup plus faible à débit fixé que dans le cas précédent. Le fait de chanfreiner ou d'utiliser un cône incliné de 2 degrés va dans le sens d'une diminution de H_∞ et donc d'une augmentation de R_J par rapport au cas standard et c'est bien ce que l'on peut observer. Pour plus d'informations on se reportera à [91].

avec $f(R_J, Q, H_\infty) = g^{1/2} 2\pi R_J (H_\infty^4 + \frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln(\frac{R_\infty}{R_J}))^{3/8}$.

Les résultats expérimentaux pour différentes viscosités et tensions de surface sont comparés aux lois (IV.8) et (IV.9) dans la Fig. IV.11. Afin de comparer les points expérimentaux obtenus avec un mélange eau glycérol à 18 cS et la loi (IV.9) on utilise, en conformité avec les mesures exposées dans la section IV.2.2, une valeur unique pour H_∞ de 3 mm.

On peut tirer plusieurs enseignements des courbes présentées en Fig. IV.11 : le premier est que nous avons ici proposé une loi analytique simple en excellent accord avec l'ensemble des données expérimentales testées. D'autre part, nous apportons ici une preuve expérimentale que le nombre de Froude en sortie de ressaut ne dépend pas de la viscosité ni même de la tension de surface car les lois utilisées ((IV.8) et (IV.9)) sont intrinsèquement basées sur la constance de Fr... Cette courbe permet aussi de montrer que l'effet de la viscosité est bien décrit par l'exposant $-3/8$. Cette dépendance en viscosité bien qu'attendue théoriquement n'avait encore jamais été observée expérimentalement. La valeur de Fr que l'on peut extraire de cette courbe correspond bien au 0,33 attendu. On observe aussi que les variations de la tension de surface ne modifient pas la loi observée. Cela a été suggéré par les travaux de Bush *et al.* qui ont montré la faible influence de ce paramètre.

Nous avons donc abouti à une expression analytique qui permet de lier le rayon du ressaut avec les principaux paramètres physiques par une loi simple, chose qui n'avait jamais été faite jusqu'à présent.

IV.5 Effets de la géométrie

IV.5.1 Nombre de Froude

On se propose maintenant d'explorer les effets géométriques sur le nombre de Froude. Nous avons déjà vu que ces effets intervenaient de façon non négligeable sur le profil de hauteur (cf IV.2.2 et IV.2.3). On mesure alors la valeur expérimentale des deux nombres de Froude que nous avions défini précédemment en fonction de la géométrie.

Comme cela est visible sur la Fig. IV.12, les paramètres géométriques ont une importance non négligeable sur le nombre de Froude en sortie de ressaut. Nous avons fait varier la valeur du rayon de la plaque d'un facteur 2 (de 8 à 15 cm) et le rayon de l'injecteur d'un facteur 6 (de 1,1 à 7 mm) et l'on peut constater des variations de la valeur de Fr de l'ordre de 10%.

Pour $R_\infty = 15$ cm on observe des nombres de Froude Fr_1 et Fr_2 quasi indépendants du débit, excepté pour la courbe de Fr_1 obtenue avec une buse de diamètre 7 mm. Cela tend à confirmer notre hypothèse d'un nombre de Froude constant. [13]

Pour $R_\infty = 10$ cm, on observe des nombres de Froude Fr_1 quasi indépendants du débit. Par ailleurs on observe pour les courbes de Fr_2 une très légère augmentation avec le débit dans les cas $\phi = 3,2$ mm et $\phi = 2$ mm. Dans le cas de $\phi = 7$ mm la courbe de Fr_2 n'est pas tout à fait plate mais elle est à peu près stabilisée pour les grands débits. Toutefois ces variations sont très faibles (de l'ordre

13. L'une des hypothèses que nous proposons pour expliquer cette singularité de comportement de Fr_1 pour $\phi = 7$ mm est la très faible vitesse du liquide en sortie de buse (comprise entre 0,2 et 1 m/s pour la première moitié de la courbe). Avec une vitesse aussi faible la distance entre le bas de l'injecteur et la plaque (ici de 4 mm) est suffisante pour que les effets de la tension de surface modifient le rayon effectif et la vitesse effective du jet. On peut aussi craindre, avec des vitesses aussi faibles, des interactions entre le jet et l'injecteur lui-même dues à la tension de surface et aux conditions de mouillage total. Cette dernière hypothèse est appuyée par le fait que l'augmentation de la distance entre la buse et le disque tend à diminuer cette zone intermédiaire alors qu'on s'attendrait plutôt à une déstabilisation du jet.

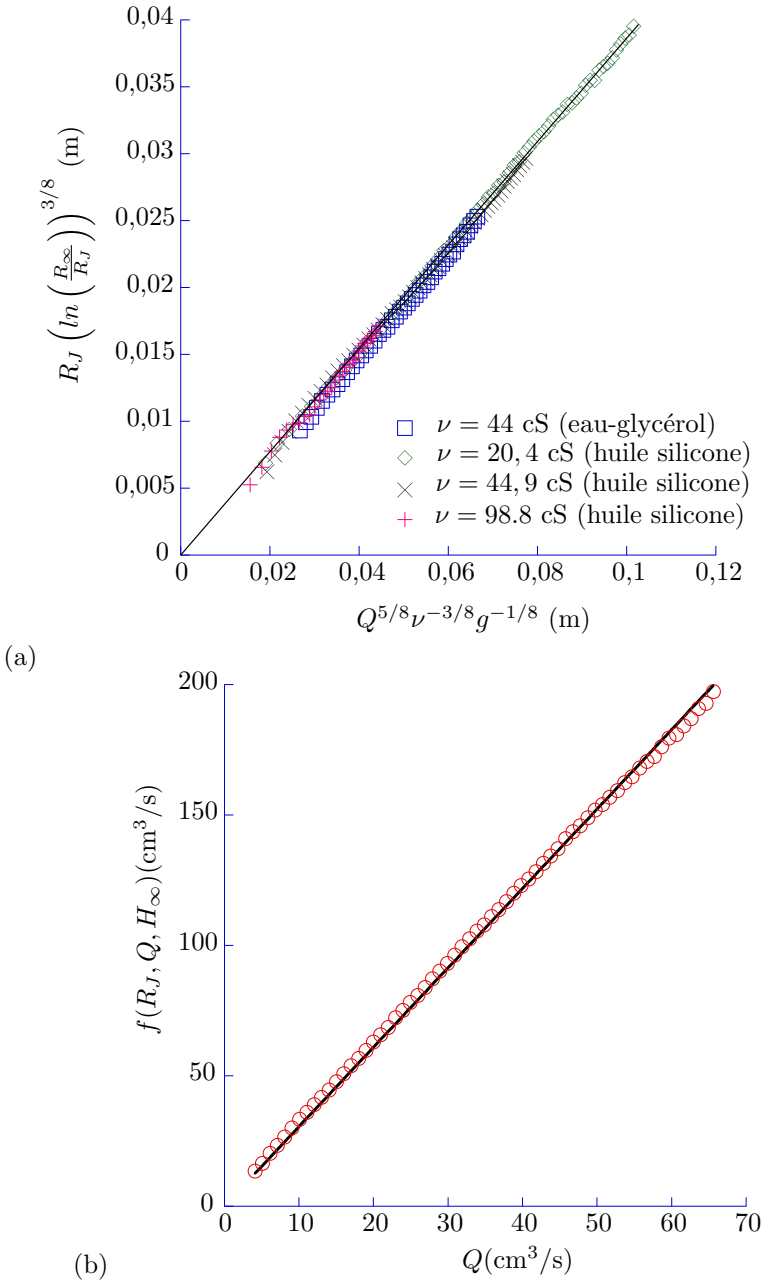


FIGURE *IV.11 – Les équations (IV.8) et (IV.9) sont testées pour deux différents types de liquide : huile silicone et mélange eau-glycérol et pour cinq viscosités différentes (18 cS, 20.4 cS, 44 cS, 44.9 cS et 98.8 cS). La configuration expérimentale est* $R_\infty = 15$ *cm et* $\phi = 3,2$ *mm. (a) On compare les résultats obtenus avec l'huile silicone (20.4 cS, 44.9 cS et 98.8 cS) et avec un mélange eau glycérol (44cS). Tout les points expérimentaux s'alignent sur une courbe maîtresse qui peut être ajustée par une fonction linéaire. On retrouve ainsi le résultat attendu par (IV.8). On peut extraire une valeur de* Fr_2 *à 0,33. (b) Pour les plus faibles viscosités il est nécessaire de tenir compte de* H_∞ *(on choisira ici* $H_\infty = 3$ *mm conformément à IV.2.2) on ajuste donc les points expérimentaux du mélange eau glycérol à 18 cS avec la loi (IV.9). Cette fois encore l'accord avec une fonction linéaire est excellent et permet d'aboutir sur une valeur de* Fr_2 *de 0,33 en accord avec la figure (a).*

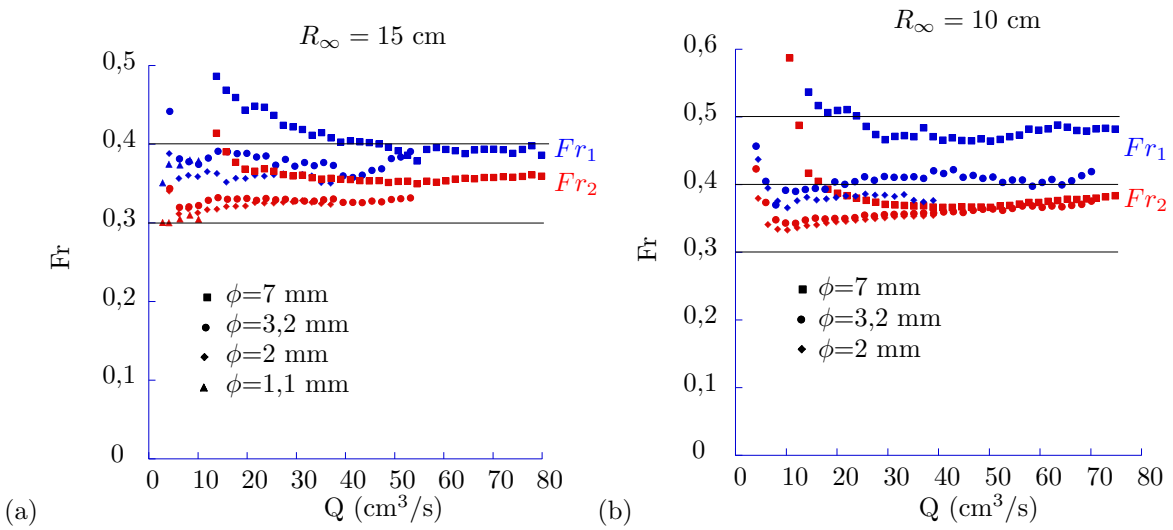


FIGURE *IV.12 – Nombres de Froude Fr_1 et Fr_2 en fonction du débit pour différents rayons de plaque R_∞ et différents diamètres d'injecteurs ϕ. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS. La figure (a) représente $Fr(Q)$ pour $R_\infty = 15$ cm et pour quatre valeurs de ϕ (7 mm (bleu), 3,2 mm (rouge), 2 mm (vert) et 1,1 mm (noir)). La figure (b) représente $Fr(Q)$ pour $R_\infty = 10$ cm et pour trois diamètres d'injecteurs (7 mm (bleu), 3,2 mm (rouge) et 2 mm (vert)). On constate des nombres de Froude constants.*

de 5%) et ne sont pas en accord avec les observations de Fr_1 (on observe des tendances différentes). Il est donc difficile de conclure sur ces variations qui sont de l'ordre de grandeur des erreurs commises.

Les tout premiers points de chaque courbe semblent eux montrer un comportement discordant avec nos conclusions : cela se comprend aisément par le fait que pour les tout petits ressauts la tension de surface n'est pas négligeable, en effet en dessous de 1 cm de rayon la tension de surface peut modifier de plus de 10% le rayon du ressaut. [14]

On observe donc des variations de la valeur des nombres de Froude Fr avec ces paramètres géométriques. Elles semblent, de prime abord, difficile à interpréter : Fr diminue avec le diamètre de l'injecteur ϕ et augmente avec le rayon du disque R_∞.

Pour conclure sur ce point, on trace les valeurs de Fr_1 et de Fr_2 en fonction du rapport du diamètre de l'injecteur sur le diamètre du disque $(\phi/(2R_\infty))$ (voir Fig. IV.13). En effet, on a deux paramètres dimensionnés par une longueur, on construit donc un paramètre adimensionné représentatif de la géométrie du système.

En ce qui concerne Fr_1, on observe que les points s'ajustent raisonnablement sur une droite d'équation :

$$Fr_1 = 0,35 + 2,75\phi/(2R_\infty). \tag{IV.10}$$

En extrapolant vers 0 on trouve une valeur pour le nombre de Froude dans un cas "parfait" (disque de diamètre infini et un injecteur de diamètre nul) :

$$Fr_{limite} \approx 0,35. \tag{IV.11}$$

Cette limite est certainement importante d'un point de vue théorique. En effet, dans la plupart des

14. Nous pensons que c'est ce phénomène qui est visible ici. En effet la tension de surface tend à diminuer R_J et donc à augmenter Fr qui varie en $1/R_J$ d'après IV.5 (la tension de surface ne jouera que marginalement sur H_J).

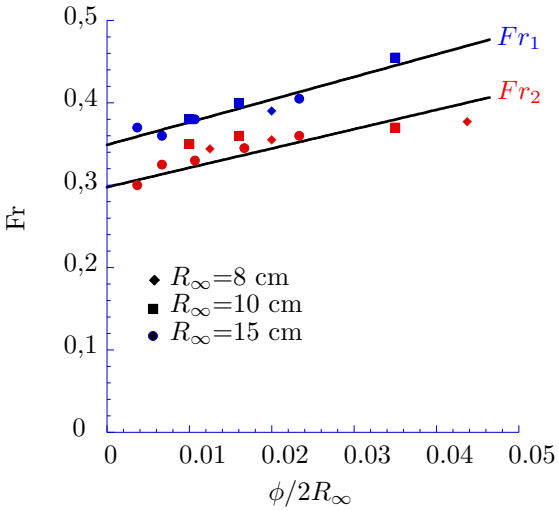


FIGURE *IV.13 – Nombres de Froude Fr_1 (représenté en bleu) et Fr_2 (représenté en rouge) en fonction du rapport entre le diamètre de l'injecteur ϕ et le diamètre de la plaque $2R_\infty$. Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS. Trois rayons de disque R_∞ sont testés : 15 cm (cercles), 10 cm (carrés) et 8 cm (losanges) et cinq différents diamètres de buses ϕ : 7; 5; 3,2; 2 et 1,1 mm. L'ensemble des points de Fr_1 se place sur une courbe maîtresse d'équation : $Fr_1 = 0,35 + 2,75\phi/(2R_\infty)$ représentée en ligne continue noire sur la figure. Nous avons aussi essayé d'ajuster Fr_2 par une loi affine mais cela marche nettement moins bien. On ajuste les points correspondant à Fr_2 par une droite affine proportionnelle à Fr_1 : $Fr_2 = 0,30 + 2,34\phi/(2R_\infty)$.*

théories en présence, il apparaît que l'on considère un jet d'épaisseur nulle soit la limite en 0 de notre courbe.

En ce qui concerne Fr_2, une approximation par une droite est un peu plus discutable. Cela se comprend par le fait que bien qu'il existe un coefficient β entre H_{J1} et H_{J2} (et donc que Fr_1 est proportionnel à Fr_2), nous avons vu que ce coefficient β était faiblement dépendant de la géométrie. Cela est donc en contradiction avec le fait d'obtenir un comportement affine proportionnel pour Fr_2.

Toutefois, pour des raisons de simplicité, on va tout de même ajuster Fr_2 par une fonction affine empirique proportionnelle à IV.10 (le coefficient de proportionnalité est de 0,85) :

$$Fr_2 = 0,30 + 2,34\phi/(2R_\infty). \tag{IV.12}$$

IV.5.2 Conséquence pour $R(Q)$

Il s'avère donc que ni Fr_1 ni Fr_2 ne sont indépendants de la géométrie. On s'attend donc à ce que les courbes ne se superposent pas sur une seule courbe maîtresse si l'on applique l'équation (IV.8). Néanmoins en utilisant IV.12 comme donnée empirique, on s'attend à trouver une courbe maîtresse satisfaisante. La comparaison entre théorie et expérience pour les paramètres géométriques aboutit à la Fig. IV.14 : on trace $R_J \left(ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{3/8}$ d'abord en fonction de $Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$ puis en fonction de $Fr_2^{-1}Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$.

Lorsque l'on observe la Fig. IV.14 (a) on constate des comportements linéaires dans toutes les situations testées. Cela traduit la validité de notre modèle et la pertinence d'un nombre de Froude constant y compris en faisant varier la géométrie. Sur la Fig. IV.14 (b) on constate que les courbes s'ajustent raisonnablement bien sur la courbe maîtresse. En particulier, on constate que dans le cas $R_\infty = 15$ cm nous avons su capter la dépendance en ϕ de notre problème. Dans certaines situations,

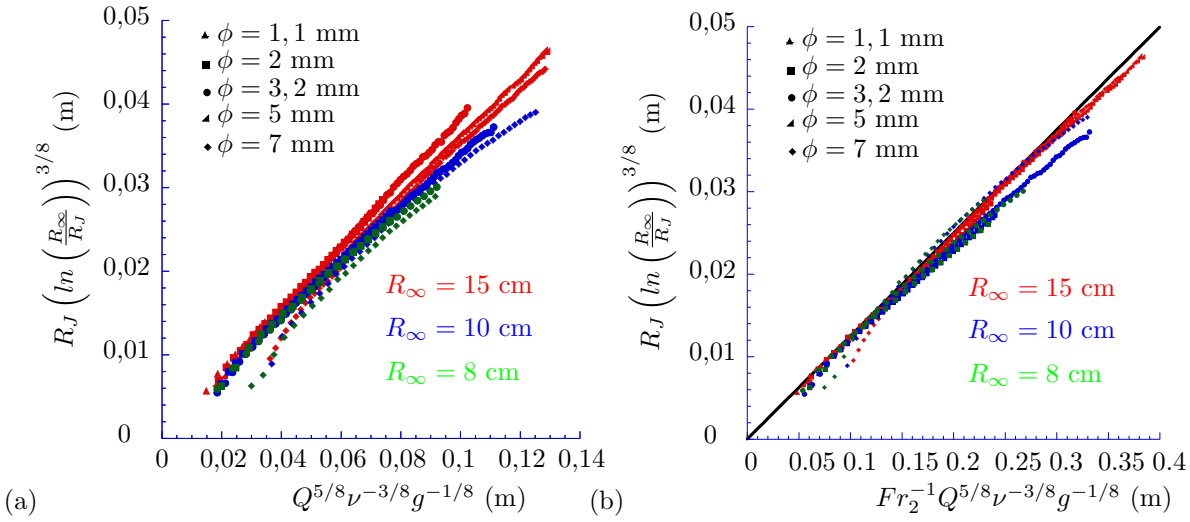


FIGURE *IV.14 – L'équation (IV.8) est testée pour différentes géométries (différents diamètres d'injecteurs $\phi = 1,1$ mm (triangles équilatéraux), $\phi = 2$ mm (carrés), $\phi = 3,2$ mm (cercles), $\phi = 5$ mm (triangles rectangles) et $\phi = 7$ mm (losanges) et différents rayons de disques $R_\infty = 15$ cm (rouge), $R_\infty = 10$ cm (bleu) et $R_\infty = 8$ cm (vert)). (a) les points expérimentaux sont comparés directement aux termes de l'équation (IV.8). (b) On trace maintenant le terme logarithmique en fonction de $Fr_2^{-1}Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$, la valeur de Fr_2 étant donnée par IV.12. On trace en noir la courbe maîtresse attendue par (IV.8) et l'on obtient un accord assez satisfaisant.*

pour $R_\infty = 10$ ou 8 cm, on constate de légers écarts de préfacteurs par rapport à la théorie [15], cela traduit le fait que le facteur β liant H_{J1} et H_{J2} fluctue légèrement avec la géométrie ce qui explique, comme vu plus haut, que la loi empirique IV.12 pour Fr_2 ne soit pas parfaitement adaptée pour remettre à l'échelle nos courbes.

Par ailleurs il est possible d'améliorer légèrement le comportement linéaire des courbes obtenues pour $R_\infty = 10$ ou 8 cm en ajoutant la contribution de H_∞. En effet, on l'a vu en Fig. IV.10 H_∞ commence à influencer le profil de hauteur de manière non négligeable dès $R_\infty = 10$ cm. [16]

IV.6 Conclusion

Nous avons donc proposé dans ce chapitre une modélisation du profil d'épaisseur situé après le choc. Cette modélisation repose sur un calcul de lubrification simple équilibrant la pression hydrostatique et les frottements visqueux sur la surface de la plaque pour un écoulement parabolique. Cette approche simple nous permet d'obtenir une expression analytique pour le profil d'épaisseur externe. Nous testons expérimentalement cette prédiction et obtenons un accord remarquable entre expérience et théorie. Ce premier travail permet de répondre à la question de la zone externe soulevée par de nombreux modèles. En particulier, on découvre un moyen de prendre en compte le rayon de la plaque qui joue un rôle non négligeable comme on a pu le voir sur nos courbes brutes.

15. Il convient toutefois de relativiser ces écarts qui sont au plus de 7% de la valeur du préfacteur...

16. On remarque également que certaines courbes ($R_\infty = 10$ cm et $\phi = 7$ mm par exemple) montrent un très léger décrochage pour les forts rayons de ressaut. Dans ces cas de figure le rayon du ressaut R_J devient comparable à R_∞ il est alors possible que la proximité avec le bord de la plaque influence le profil de vitesse dans la zone externe et influence ainsi le rayon du ressaut R_J.

Cette approche nous permet aussi de découvrir un fait expérimental jusque là jamais établi : la tension de surface, en plus de jouer un rôle (marginal) sur le ressaut et sur le jet impactant, intervient également sur le rayon du ressaut en modifiant le profil extérieur. En effet, la tension de surface (via les conditions de mouillage) joue sur la sélection de la hauteur en bord de plaque H_∞, qui peut s'avérer importante sur le profil de hauteur et donc sur H_J, la hauteur de liquide en sortie de ressaut qui influe elle-même sur le rayon du ressaut.

Lors des vérifications expérimentales de ce profil nous avons pu constater un phénomène curieux : le nombre de Froude en sortie de ressaut apparaît comme étant indépendant [17] du débit, de la viscosité et de la tension de surface et faiblement dépendant des conditions géométriques (rayon de la plaque, diamètre de l'injecteur). Cette observation expérimentale inédite à ce jour nous permet de proposer une alternative à la condition de choc de Bélanger (I.1) pour déterminer la position de choc du ressaut.

On peut donc proposer une nouvelle loi prédisant le rayon du ressaut R_J en fonction des paramètres physiques testés. Cette loi qui dans sa forme réduite s'écrit comme : $R_J \left(ln \left(\frac{R_\infty}{R_J} \right) \right)^{3/8} \sim Q^{5/8} \nu^{-3/8} g^{-1/8}$ est structurellement très proche de celle proposée par Bohr *et al.* mais le terme logarithmique que nous y avons ajouté apporte une contribution importante. Nous avons en effet testé les lois résultant de notre approche sur les valeurs expérimentales et nous arrivons à la conclusion que ces lois fournissent une excellente prédiction du comportement de R_J.

En définitive, nous proposons une loi qui offre un comportement plus pertinent que la loi d'échelle proposée par Bohr *et al.* (et qui permet d'estimer le préfacteur à partir de la valeur du nombre de Froude) et qui permet d'éviter la complexité d'une modélisation ayant recours au calcul numérique.

Il reste maintenant à comprendre le lien probable entre le nombre de Froude Fr et le coefficient β liant H_{J1} et H_{J2} et son évolution avec la géométrie du système afin de fournir une meilleure description de Fr_2 en fonction de la géométrie, ce qui nous permettrait une meilleure unification de nos résultats.

Il nous reste également à comprendre ce qui fixe la valeur de ce nombre de Froude et si ce nombre de Froude reste constant au delà de la gamme de paramètres que nous avons explorée (par exemple pour des débits plus élevés...) ou si ces variations sont trop lentes pour que nous ayons pu les capter.

17. Ou du moins sans variations significatives mesurable sur les gammes de variations des paramètres testés.

Chapitre V

Quelques questions laissées ouvertes par notre approche.

V.1 Introduction

L'approche que nous avons développée pose des questions au niveau de la cohérence avec ce qui est connu du ressaut circulaire et avec les théories existantes. Imposer un nombre de Froude constant en sortie de ressaut signifie ajouter une nouvelle contrainte à un système qui en principe est déjà bouclé. Ce résultat est-il compatible avec les théories existantes ou au moins avec certaines d'entre elles ? Y a-t-il quelque chose qui serait à retirer ou à remettre en cause dans celles-ci et quoi exactement ? Nous n'avons en fait pas pu répondre de façon définitive à ces questions mais nous présentons ici quelques tentatives inabouties qui seront peut-être utiles aux continuateurs.

Nous nous sommes posés 3 questions :

Peut-on retrouver nos résultats et ce Froude constant en utilisant une méthode similaire à ce qu'a développé Bohr dans son premier article ? Nous verrons que non.

A-t-on de meilleurs résultats en combinant la solution interne de Watson à notre solution extérieure via une condition de choc classique ? Nous verrons que cela marche un peu mieux mais n'est pas parfaitement satisfaisant.

A la vue de notre réponse à la dernière question faut-il remettre en cause l'écoulement interne de Watson ou la condition de choc ?

V.2 Tentative numérique à la Bohr *et al.*

Suite à des discussions avec Henri Lhuissier, il a été tenté une intégration numérique des équations régissant le profil extérieur. Les deux idées majeures étaient d'étudier l'influence de l'inertie dans notre modélisation du profil extérieur et d'observer le comportement du nombre de Froude et de $R_J(Q)$.

Dans ces intégrations numériques on considère que :

(i) La zone interne est décrite par les équations de lubrification classiques extraites du modèle de Bohr *et al.* (c'est-à-dire les équations (II.44), (II.45), (II.46) et (II.47) décrites dans II.3 et qui donnent donc II.54) [1]. Il est également nécessaire d'ajouter une condition initiale pour l'intégration. On choisit donc le point où la couche limite envahit entièrement l'épaisseur de liquide dans la zone interne selon

1. On garde donc les termes gravitaires.

la théorie de Watson, c'est-à-dire le point $r_0 = 0,3155aRe^{\frac{1}{3}}$ avec $h(r_0)$ obtenu via l'équation II.22. On utilisera en outre un profil parabolique pour l'écoulement. [2]

(ii) La zone externe est à nouveau décrite par les équations de lubrification classique conduisant à une équation du type II.54. On considère également un profil parabolique pour l'écoulement. La condition d'intégration en bord de plaque ($r = R_\infty$) est fixée par $H_\infty = \left(\frac{5\sqrt{3}}{8\pi^2}\right)^{1/3} Q^{2/3} g^{-1/3} R_\infty^{-2/3}$ (qui est très proche de 0). [3]

(iii) Enfin la condition de choc est une équation de type Bélanger (I.1) adaptée aux écoulements de part et d'autre.

V.2.1 Profil externe

Un résultat typique de cette simulation peut être vu en pointillés verts sur la Fig. V.1 (a). En rouge est figurée la loi (IV.3) avec $H_\infty = 0$. Les points noirs correspondent aux points expérimentaux.

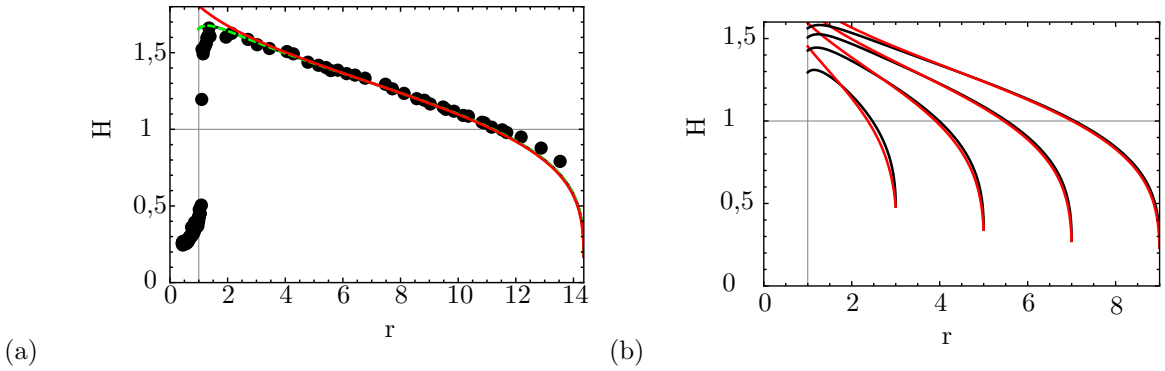


FIGURE V.1 – *Profils de hauteurs. Pour toutes les simulations la coordonnée r est adimensionnée comme dans le cas de Bohr par $Q^{5/8}\nu^{-3/8}g^{-1/8}$ multiplié par un coefficient calculé à l'aide du profil de l'écoulement (ici un demi poiseuille) et H est adimensionnée par $Q^{1/4}\nu^{1/4}g^{-1/4}$ également multiplié par un coefficient dépendant du profil. Cet adimensionnement est identique à celui réalisé par Bohr et al. dans [8]. Le profil représenté sur la figure (a) est établi en utilisant les conditions expérimentales du profil obtenu sur la Fig. IV.4, la ligne en pointillés (verts) est obtenue par la méthode décrite ci-dessus tandis que la ligne continue (rouge) correspond à l'équation (IV.3) (avec $H_\infty = 0$). Les points noirs correspondent aux points expérimentaux. Comme on peut le constater l'ajout de l'inertie permet de mieux s'ajuster localement (après le choc) avec les points expérimentaux. Sur la figure (b) on a fait varier le rapport R_J/R_∞ et l'équation (IV.3) est représentée par la ligne continue rouge. L'intégration complète est elle représentée par la ligne continue noire. Encore une fois, on remarque que même dans les cas extrêmes l'inertie ne joue qu'un rôle faible et ce, juste au voisinage du ressaut.*

Les enseignements que l'on peut tirer de cette simulation du profil sont :

(i) Pour des disques dont le rayon est grand devant celui du ressaut, l'inertie (courbe pointillés verts qui est le modèle utilisé par Bohr) ne modifie la loi visqueuse en logarithme (en rouge) que localement, près du ressaut et au bord du disque. Lorsque l'on diminue beaucoup la taille du disque

2. Ce choix d'un profil parabolique n'est pas important ce qui l'est plus est de considérer que ce profil est auto-similaire, en effet cela a pour effet de fixer les coefficients dans II.54. Le fait de considérer qu'il est parabolique change juste la valeur de ces coefficients d'intégration car on ne considère que des vitesses moyennes.

3. Cette condition aux limites est construite via une approche proche de celle de Kasimov.

l'inertie joue un plus grand rôle sur tout le profil.

(ii) Le modèle vert, basé sur un profil de demi-Poiseuille, est en accord avec les données jusqu'au ressaut : s'il y a un vortex son influence est faible. Cela signifie également que notre modélisation par un profil parabolique est tout à fait pertinente.

On en déduit donc que notre approximation consistant à négliger l'inertie dans le profil extérieur s'avère parfaitement fondée. On comprend également que la différence entre H_{J1} et H_{J2} s'explique simplement par la présence de termes inertiels qui ne sont pas tout à fait négligeables en sortie de ressaut. Leur prise en compte semble suffire, même pour un écoulement parabolique, à fournir une excellente approximation de H_{J1}.

V.2.2 Prédiction du rayon du ressaut

A l'aide de ces simulations nous avons également cherché à vérifier notre hypothèse d'un nombre de Froude constant : il s'avère que l'on observe des variations du nombre de Froude non négligeables, y compris pour nos paramètres expérimentaux. Plus étonnant encore : on enregistre d'importantes différences entre les rayons de ressaut prédits par l'intégration numérique et ceux obtenus expérimentalement (voir Fig. V.2).

Sachant que le modèle numérique décrit fidèlement la réalité dans la zone externe il n'y a que deux explications possibles :

(i) La description de la zone interne est discutable. [4]

(ii) La condition de choc de type Bélanger est trop brutale, voire même erronée suite à une force supplémentaire, par exemple liée à la présence de vortex.

Pour essayer de répondre à cette question nous aller essayer de travailler sur le modèle de Watson qui inclut à la fois une description de la zone interne et un modèle de choc de type Bélanger.

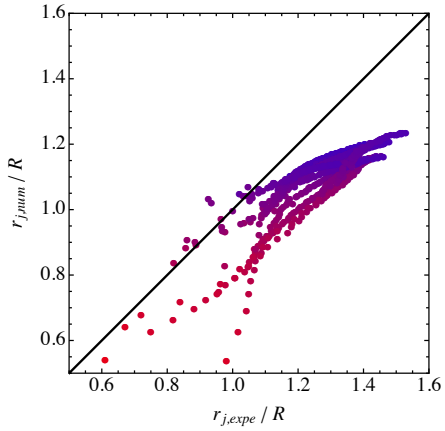


FIGURE *V.2 – Comparaison entre les valeurs de R_J obtenues par intégration numérique et obtenues expérimentalement. Les courbes représentées correspondent à l'ensemble des données obtenues avec de l'huile silicone de toutes les viscosités et dans toutes les géométries. En ordonnées sont représentées les valeurs de R_J obtenues numériquement et en abscisse les valeurs expérimentales de R_J. Les rayons sont tous adimensionnés de la même manière que dans la Fig. V.1.*

4. La description proposée par Watson est pourtant communément admise par les auteurs ayant travaillé sur le sujet, tant expérimentateurs que théoriciens.

V.3 Tentative d'une construction à la Watson

Dans un premier temps, nous allons pouvoir comparer notre ensemble de données avec la théorie proposée par Watson (II.2) et améliorée par Bush *et al.* (II.2.4). Nous possédons en effet une modélisation de la zone externe qui fixe la hauteur du liquide au ressaut, et il est donc possible de tester ce modèle.

Pour mémoire, les équations (*II*.41) et (*II*.42) liant les paramètres physiques et géométriques dans le modèle de Watson s'écrivent :
Pour $R_J < r_0$ [5] :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2}\left(1+\frac{2}{B_0}\right)+\frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J}=0,10132-0,1297\left(\frac{R_J}{a}\right)^{\frac{3}{2}}Re^{-\frac{1}{2}},$$

et au contraire pour $R_J > r_0$ (ce qui correspond au cas de la totalité de nos mesures) :

$$\frac{R_J H_J^2 g a^2}{Q^2}\left(1+\frac{2}{B_0}\right)+\frac{a^2}{2\pi^2 R_J H_J}=0,01676\left(\left(\frac{R_J}{a}\right)^{3}Re^{-1}+0,1826\right)^{-1}.$$

L'élément clé que nous apportons ici est de proposer une modélisation pour H qui permet d'obtenir un modèle complet pour le ressaut. On utilise donc le modèle développé précédemment pour H_J c'est-à-dire $H_J = \beta\left(H_\infty^4+\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g}ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right)\right)^{1/4}$ avec β le coefficient de proportionnalité entre H_{J1} et H_{J2} présenté précédemment et déterminé expérimentalement [6]. On trace donc en Fig. V.3 notre jeu de données pour le comparer à la théorie de Watson.

Comme on peut le constater sur cette Fig. V.3 l'accord entre la théorie et l'expérience est très bon et comparable aux données précédemment obtenues sur cette loi de Watson (voir Fig. II.9 et Fig. II.10).

Toutefois on constate de légers écarts de tendance entre théorie et expérience loin d'être complètement négligeables même si ces écarts apparaissent difficilement sur le graphe en raison de la forme de la courbe. La représentation log-log permet de démontrer que la tendance des courbes n'est pas exactement celle attendue par la théorie : pour chaque courbe les premiers points sont tous sous la courbe théorique et les derniers points tous au dessus. Cela est particulièrement bien visible dans le cas où les différents liquides sont testés mais cela est aussi observable lors du test de tous les paramètres géométriques. [7] Cette déviation systématique, même si elle n'est pas aussi criante que les écarts entre numérique et expérimental observés précédemment, est elle aussi symptomatique d'un problème de modélisation situé ou bien dans la description de la zone interne ou bien au niveau de la condition de choc.

Dans un premier temps on va s'intéresser à ce qui se passe dans la zone interne du point de vue du modèle de Watson.

5. où $r_0 = 0,3155aRe^{\frac{1}{3}}$ est le rayon pour lequel la couche limite envahit l'épaisseur du film liquide. Voir (II.2) pour le détail

6. Notons que dans le cas des liquides de viscosités élevées où l'on n'a pas pu mesurer H_{J1} on a gardé le β obtenu pour de l'huile silicone 20 cS.

7. Cette déviation systématique est particulièrement visible si l'on ne prend qu'une série de points expérimentaux comme cela est visible en Fig. II.5. Toutefois la représentation de la Fig. V.3 permet de nous assurer que cette déviation est reproductible.

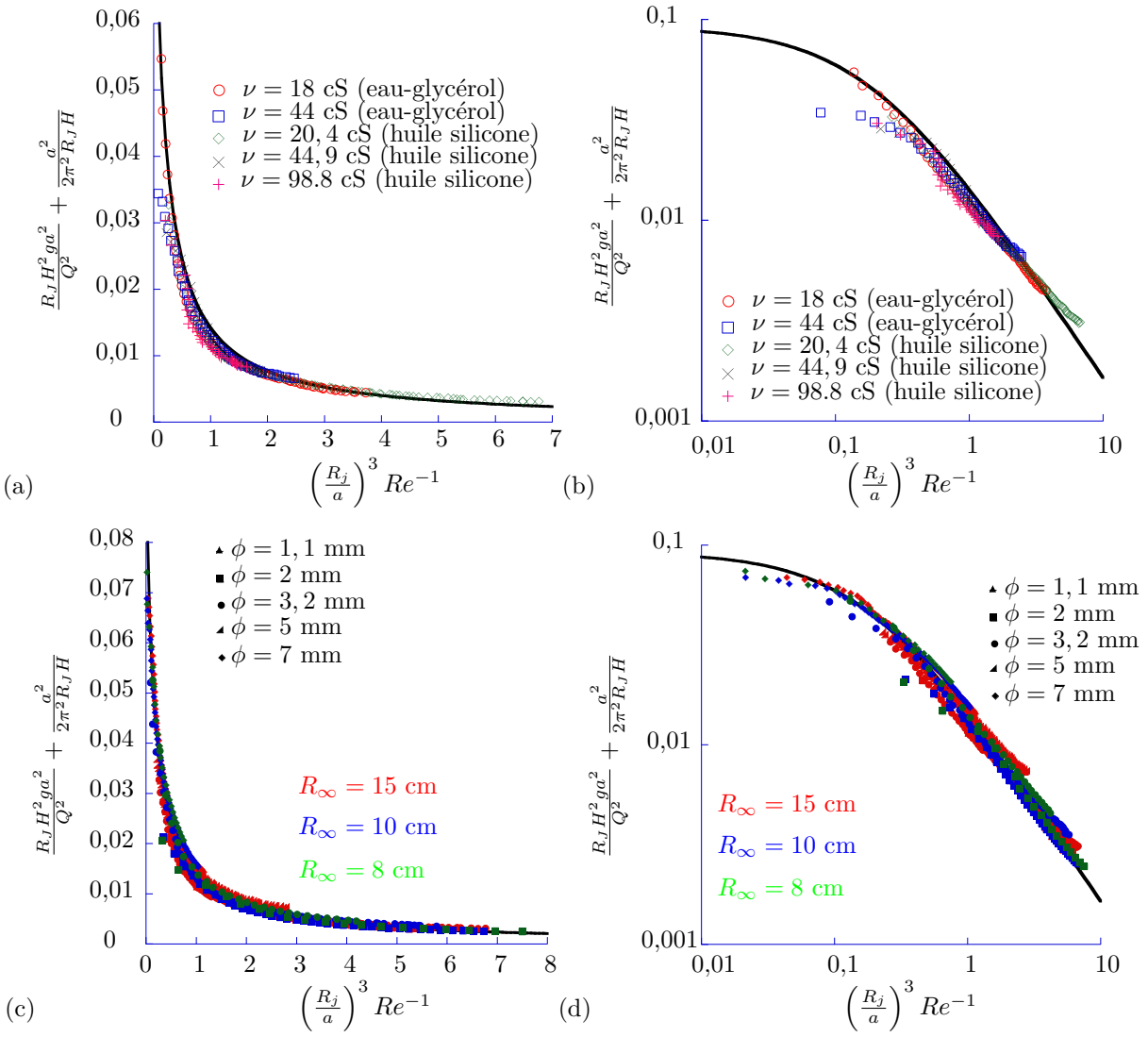


FIGURE V.3 – *Test de la loi de Watson (II.42) avec notre jeu de données. Pour être tracées, ces lois nécessitent de connaître la valeur de la hauteur de liquide en sortie de ressaut. Pour ce faire, on l'estime à l'aide du modèle de hauteur développé précédemment : l'équation (IV.3) corrigée avec le paramètre experimental β. H_∞ est toujours négligé excepté dans le cas des mélanges eau-glycérol. (a) et (b) Test de la loi de Watson en représentation lin-lin (a) et log-log (b) pour deux différents types de liquide : huile silicone et mélange eau-glycérol et pour cinq viscosités différentes (18 cS (cercles rouges), 20.4 cS (losanges verts), 44 cS (carrés bleus), 44.9 cS (croix noires) et 98.8 cS (croix roses)). La configuration expérimentale est $R_\infty = 15$ cm et $\phi = 3,2$ mm. (c) et (d) Test de la loi de Watson en représentation lin-lin (c) et log-log (d) pour différentes géométries (différents diamètres d'injecteurs $\phi = 1,1$ mm (triangles équilatéraux), $\phi = 2$ mm (carrés), $\phi = 3,2$ mm (cercles), $\phi = 5$ mm (triangles rectangles) et $\phi = 7$ mm (losanges) et différents rayons de disques ($R_\infty = 15$ cm (rouge), $R_\infty = 10$ cm (bleu) et $R_\infty = 8$ cm (vert))). La loi théorique est représentée par la ligne continue noire sur toute les figures. Comme on le voit l'accord entre théorie et expérience est excellent. On constate néanmoins sur les quatre courbes une légère déviation systématique par rapport à la théorie.*

V.4 Éssais d'exploration de l'écoulement interne

On se propose donc d'étudier la loi décrivant $h(r)$ (II.22) proposée par Watson pour modéliser la zone interne et valable pour $r > r_0$ [8] :

$$h(r) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\nu(r^3 + l^3)}{Qr}.$$

Nous avons donc comparé en Fig. V.4 cette prédiction de $h(r)$ avec des profils de hauteurs obtenus expérimentalement avec de l'huile silicone 20 cS ;, $\phi = 3,2$ mm et $R_\infty = 15$ cm.

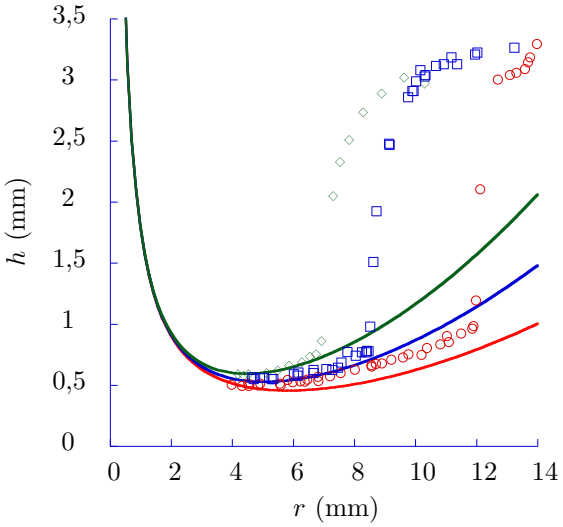


FIGURE *V.4* – *Comparaison des profils d'épaisseur avant le ressaut hydraulique avec les profils attendus par la loi de Watson régissant la hauteur de liquide (II.22). Le liquide utilisé est de l'huile silicone 20 cS et les paramètres géométriques sont $\phi = 3,2$ mm et $R_\infty = 15$ cm. Trois différents débits sont représentés : 7,7* cm^3/s *(losanges verts), 11* cm^3/s *(carrés bleus) et 17* cm^3/s *(cercles rouges). Les lois théoriques sont reportées par les traits continus : la couleur correspondant bien sûr au débit considéré. Comme on le voit, la théorie est en accord avec l'expérience dans le cas du plus faible débit. Lorsqu'on augmente le débit la théorie semble s'écarter de l'expérience. Dans l'ensemble l'ordre de grandeur est tout de même excellent.*

La théorie de Watson fournit donc une excellente estimation de l'ordre de grandeur comme on peut le constater sur la Fig. V.4.

Néanmoins et de manière surprenante, il s'avère que si la théorie et les points expérimentaux s'ajustent parfaitement dans le cas du plus petit débit (7,7 cm^3/s), les points expérimentaux tendent à s'écarter de la théorie avec l'augmentation du débit (c'est le cas pour les courbes correspondant à 11 et 17 cm^3/s). On observe ainsi près de 10% d'erreur dans l'estimation de la hauteur avant le ressaut.

V.5 Cohérence entre condition de choc et écoulement dans la zone interne

On peut également se poser la question de la pertinence de la condition de choc dans le modèle de Watson amélioré par Bush.

8. Ce qui sera le cas pour la plupart des points expérimentaux présentés ici et en particulier ceux proches du ressaut.

Pour ce faire, on va utiliser la relation de passage (II.39) introduite précédemment :

$$g\frac{H_J^2-h_J^2}{2}+\frac{\gamma}{\rho}\frac{\Delta H}{R_J}=\int_0^{h_J}u_J^2\mathrm{d}z-\int_0^{H_J}U_J^2\mathrm{d}z, \tag{V.1}$$

avec h_J et H_J respectivement les hauteurs avant et après le ressaut.

En supposant, comme le font les auteurs, que $h_J^2 \ll H_J^2$ cette équation devient [9] :

$$g\frac{H_J^2}{2}+\frac{\gamma}{\rho}\frac{\Delta H}{R_J}+C_eH_J<U_J>^2=\int_0^{h_J}u_J^2\mathrm{d}z, \tag{V.2}$$

avec C_e défini comme $\int_0^{H_J}U_J^2\mathrm{d}z = H_JC_e <U_J>^2$ où $<U_J>$ est la vitesse moyenne en sortie de ressaut. Afin d'utiliser cette équation on pose également : avec $\int_0^{h_J}u_J^2\mathrm{d}z = h_JC_i <u_J>^2$ où $<u_J>$ est la vitesse moyenne du liquide juste avant le ressaut et C_i une constante dépendant de l'écoulement [10]. L'équation (V.2) est donc une équation en h_J d'ordre 2. Elle est soluble et l'on obtient deux solutions : l'une fournit un résultat non physique (on a $h_J > H_J$) la deuxième s'écrit

$$h_J=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho g R_J H_J^2}{\gamma}+\frac{C_e\rho Q^2}{4\pi^2H_JR_J\gamma}+H_J-\sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{\rho g R_J H_J^2}{\gamma}+\frac{C_e\rho Q^2}{4\pi^2H_JR_J\gamma}+H_J\right]^2-\frac{C_i\rho Q^2}{\pi^2R_J\gamma}}\right). \tag{V.3}$$

On peut donc tracer $h_J(Q)$ à partir des valeurs (H_J, R_J et Q) obtenues précédemment. Il suffit alors simplement de poser $C_e = 6/5$ (en cohérence avec le résultat de notre étude numérique) pour avoir l'ensemble des paramètres extérieurs fixés à l'exception d'un seul : C_i. On suppose que le profil de vitesse doit se situer entre un profil parabolique $C_i = 6/5$ et l'écoulement de type bouchon $C_i = 1$. Cela semble assez légitime aux vues des modélisations pour un film horizontal en couche mince dans un régime majoritairement inertiel. On peut donc raisonnablement estimer que $1 < C_i < 6/5$.

Cette imprécision ne nous permet d'obtenir qu'un ordre de grandeur et une tendance pour h_J, on choisit donc de ne tracer les valeurs obtenues par V.3 que dans un seul cas : de l'huile silicone 20 cS, $\phi = 3,2$ mm et $R_\infty = 15$ cm. On choisit en outre pour H_J les valeurs données par l'équation (IV.3) et multipliées par notre coefficient β obtenu empiriquement (voir IV.2.3, ici $\beta \approx 0,9$). Les résultats sont visibles sur la Fig. V.5 .

Sur cette Fig. V.5 on constate que les valeurs de h_J obtenues sont du bon ordre de grandeur et de la bonne tendance mais légèrement sous estimées. Il apparaît que u_J est quasi indépendant du débit. Nous avons procédé à des mesures directes de la vitesse de surface u_s en fonction du débit dans une situation expérimentale similaire en injectant des traceurs et nous étions parvenus à une valeur $u_s \approx 0,3$ m/s quasi indépendante du débit. Le résultat présenté est donc parfaitement cohérent avec ces observations. Ce résultat nous permettra d'expliquer les résultats observés plus loin sur les gouttes dans un ressaut.

La condition de choc de Bélanger prédit que si le nombre de Froude en sortie est constant, le nombre de Froude en entrée l'est aussi (voir I.5). Malgré l'hypothèse consistant à négliger le terme en gh_J^2 on retrouve ici un nombre de Froude quasi constant et valant entre 3 et 4. Cela confirme donc la validité de l'hypothèse proposée.

Nous avons fait ici l'hypothèse d'un profil parabolique immédiatement en sortie de ressaut. Cette

9. Cette approximation est discutable aux vues de la Fig. V.4. Par exemple dans le cas du débit le plus élevé la hauteur avant le choc est de l'ordre de 1 mm et la hauteur après le choc de l'ordre de 3,5 mm. Ainsi le rapport des deux hauteurs au carré n'est que de 10.

10. Ces deux constantes dépendent de l'écoulement : par exemple on aura 1 pour un écoulement bouchon ou 6/5 pour un profil parabolique.

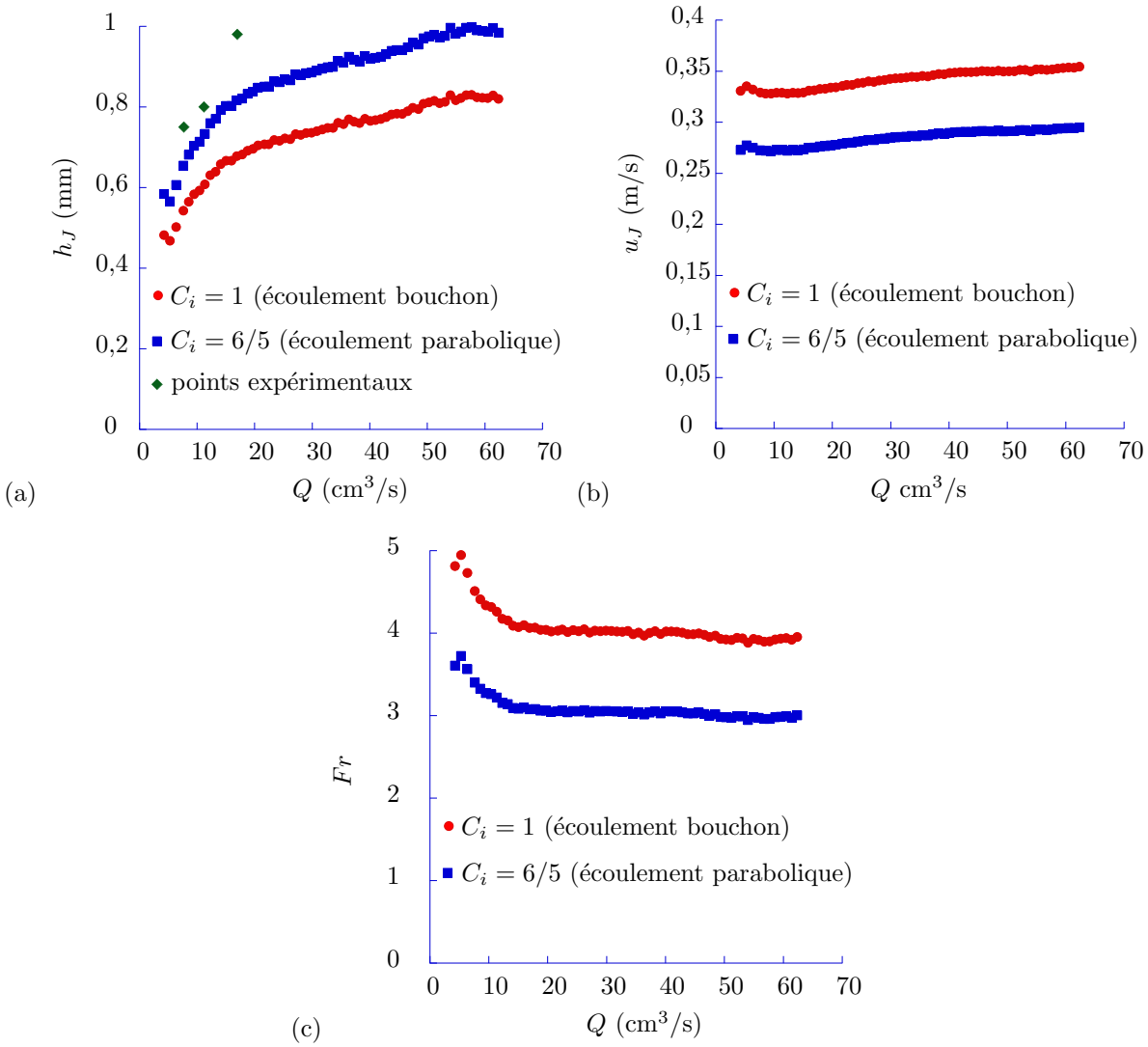


FIGURE V.5 – *Estimation de la valeur des paramètres juste avant le ressaut (h_J, u_J et Fr) en utilisant la relation de passage (V.2). On utilise la relation (V.3) avec $C_e = 6/5$. H_J est obtenu grâce à la loi (IV.3) multiplié par le coefficient correctif β. On choisit deux valeurs pour C_i : le cas du demi-Poiseuille $C_i = 6/5$ (carrés bleus) et le cas de l'écoulement bouchon $C_i = 1$ (cercles rouges). (a) La relation (V.3) nous permet d'évaluer $h_J(Q)$. Figurent également en vert les points expérimentaux de h_J extraits de la Fig. V.4. (b) La conservation du débit nous permet ensuite d'estimer $u_J(Q)$. (c) On trace ensuite le nombre de Froude avant le ressaut $Fr(Q)$.*

hypothèse est un peu excessive car on se doute que juste après le choc un tel profil ne peut être directement établi et de plus c'est négliger entièrement la contribution d'un vortex de recirculation. Toutefois la valeur de C_e affecte le terme inertiel relativement faible (on a en effet un Fr^2 comparant les effets inertiaux et gravitaires de l'ordre de 0,1 en sortie de ressaut). Ainsi changer sa valeur de moitié (on pose $C_e = 0.6$) n'affectera pas la tendance des courbes et modifiera légèrement le préfacteur en allant vers une meilleure modélisation des hauteurs comme on peut le voir sur Fig. V.6. [11]

11. Pour $C_e = 0,6$ on aura alors un nombre de Froude interne quasi constant valant entre 2,5 ($C_i = 6/5$) et 3,2 ($C_i = 1$) et une vitesse quasi constante entre 25 cm/s ($C_i = 6/5$) et 30 cm/s ($C_i = 1$) ce qui reste parfaitement en accord avec les observations précédentes. Les tendances observées sont alors parfaitement identiques à celles présentées

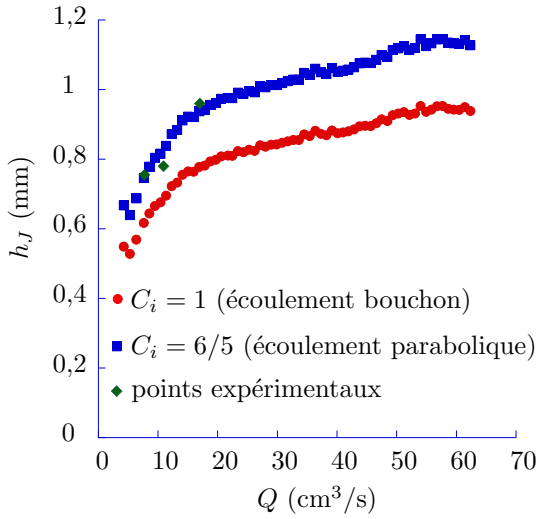


FIGURE *V.6 – Estimation de la hauteur juste avant le ressaut (h_J) en utilisant la relation de passage (V.2). On utilise la relation (V.3) avec $C_e = 0,6$. $H_J$est obtenu grâce à la loi (IV.3) multiplié par le coefficient correctif β. On choisit deux valeurs pour C_i : le cas du demi-Poiseuille $C_i = 6/5$ (carrés bleus) et le cas de l'écoulement bouchon $C_i = 1$ (cercles rouges). En vert figurent les points expérimentaux obtenus dans la Fig. V.4.*

On peut maintenant comparer ces valeurs obtenues via la relation de choc et les valeurs de h_J attendues par le modèle de Watson (équation (II.22)). Le résultat de cette comparaison est présenté en Fig. V.7. On choisit $C_e = 0.6$ pour être cohérent avec les valeurs de h_J observées expérimentalement.

Des courbes présentées en Fig. V.7, on peut tirer plusieurs conclusions :

La première est que si l'on suppose que nous avons correctement modélisé le profil extérieur, le modèle de Watson porte en lui une contradiction intrinsèque : en appliquant la conservation du choc on trouve des courbes pour h_J (les courbes rouges) incompatibles avec la prédiction de h_J découlant du modèle de la zone interne (courbe bleue). Il ne s'agit pas seulement de préfacteur mais bien de tendances réellement divergentes.

La seconde est que les points que nous avons obtenus pour h_J à partir des profils sont incompatibles avec la théorie de Watson de la zone interne (l'écart entre les points bleus et verts est très important).

La dernière est que les points expérimentaux que nous avons trouvés sont éventuellement compatibles avec la condition de choc. Toutefois avant de pouvoir l'affirmer il serait important d'apporter davantage de points de h_J en fonction du débit. Il serait également bon de vérifier la valeur de C_e de 0,6 en observant l'écoulement directement en sortie de ressaut et de mesurer la valeur C_i provenant de l'écoulement interne.

V.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons pu apporter une preuve numérique supplémentaire en ce qui concerne la validité de notre modélisation de la zone externe. Pour autant nous avons pu constater que notre approche s'avérait incompatible avec les modèles développées par Bohr *et al.* et Watson. Les points numériques que nous avons obtenus via une approche "à la Bohr" s'avèrent en effet incompa-

précédemment.

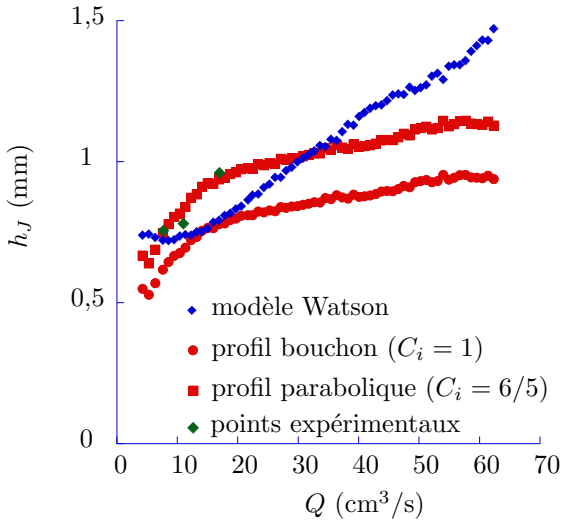


FIGURE V.7 – *Estimation de la valeur de h_J juste avant le ressaut en fonction du débit Q en utilisant le modèle de Watson de deux manières : en utilisant la relation de passage (V.2) avec en entrée les valeurs de H_J obtenues grâce à notre modèle, et en utilisant directement la valeur attendue par l'équation (II.22).*
Pour la première méthode on utilise la relation (V.3) avec H_J calculé grâce à (IV.3) multiplié par un coefficient empirique β. Cette fois encore on choisit deux valeurs pour C_i : le cas du demi-Poiseuille $C_i = 6/5$ (carrés rouges) et le cas de l'écoulement bouchon $C_i = 1$ (cercles rouges). Pour C_e on choisit une valeur en accord avec les valeurs de h_J obtenues expérimentalement : $C_e = 0,6$. Pour la seconde méthode on utilise directement l'équation (II.22) (cercles bleus). Dans tous les cas les seuls paramètres en entrée sont les valeurs de $R_J(Q)$. Comme on peut le voir les courbes ne se superposent absolument pas. Le modèle de Watson ne semble donc pas compatible avec nos observations expérimentales extérieures.

tibles avec nos mesures expérimentales. Nous avons pu également observer l'échec de la modélisation de la zone interne par Watson qui s'avère à la fois incompatible avec nos mesures expérimentales directes et avec l'application de la condition de choc en supposant que l'écoulement externe est convenablement modélisé par nos soins. En ce qui concerne la condition de choc, nous ne disposons pas de suffisamment d'éléments pour conclure sur sa validité. Nos résultats nous indiquent seulement qu'elle n'est pas incompatible avec nos données à condition toutefois de respecter une hypothèse sur la forme de l'écoulement aval (à savoir $C_e = 0,6$) que nous n'avons pas vérifiée ici.

Il s'avère donc nécessaire de poursuivre l'étude de la zone interne en mesurant d'autres profils de hauteur mais également de mesurer l'écoulement en sortie de ressaut (éventuellement à l'aide d'un dispositif de PIV intelligent).

Chapitre VI

Perspectives et Conclusion

VI.1 Au delà des frontières

Il est temps maintenant de s'aventurer un peu au delà du cadre que nous nous sommes fixés à l'origine. On se propose donc de lever quelques unes des contraintes que nous nous sommes imposés à savoir l'absence de mur de confinement mais aussi l'utilisation de verre et de Plexiglas comme substrat. Cette démarche nous permettra d'explorer les limites de notre modèle et les pistes pour en poursuivre l'étude...

VI.1.1 Et avec des bords ?

Bien entendu la première contrainte que l'on souhaite relaxer est celle des murs de confinement... L'idée est bien sûr de regarder si notre théorie peut être élargie à d'autres systèmes. Pour cela, on utilise simplement un couvercle de boîte de Pétri dont on a rogné les bords. On injecte ainsi le liquide dans une boîte de 4,5 cm de diamètre et de bord environ 2,8 mm. Nous avons fait le choix d'injecter deux huiles silicones de viscosités différentes (20 et 50 cS) au travers d'une buse de diamètre $\phi = 3,2$ mm en filmant à travers le Plexiglas. Si l'on considère que H_∞ vaut la somme de la hauteur du mur rigide et de l'épaisseur du liquide débordant au dessus de ce mur on voit déjà que H_∞ ne peut en aucun cas être considérée comme négligeable si l'on utilise le modèle précédemment développé. On mesurera donc sa valeur pour chaque point représenté (cette valeur est typiquement comprise entre 4 et 5 mm). On fait donc le choix de tracer en Fig. VI.1 la formule (IV.9). Naturellement on s'attend à ce que la modélisation présentée précédemment s'écroule puisque la présence de mur force une transition vers un écoulement de type II et qu'en outre la présence d'un mur de confinement modifie profondément la nature de l'écoulement qui ne peut plus être un simple écoulement parabolique surtout sur un aussi faible rayon de boîte.

Pourtant la Fig. VI.1 tend à montrer que le modèle proposé avec un nombre de Froude constant résiste très bien. En effet les courbes des deux viscosités se superposent bien sur la même courbe maîtresse et s'ajustent très bien sur une fonction linéaire. On trouve alors un nombre de Froude $Fr_2 \approx 0,31$ qui est donc en dessous du nombre de Froude attendu par l'équation IV.12 (qui vaudrait ici 0,38). Cela traduit probablement les modifications du profil de l'écoulement extérieur après le choc par rapport à celui observé précédemment. Ce résultat bien que non complètement anticipé tend à confirmer la robustesse du modèle proposé ainsi que l'observation d'un nombre de Froude constant en sortie de ressaut. Cet aspect du problème semble intéressant à étudier en observant le profil de hauteur

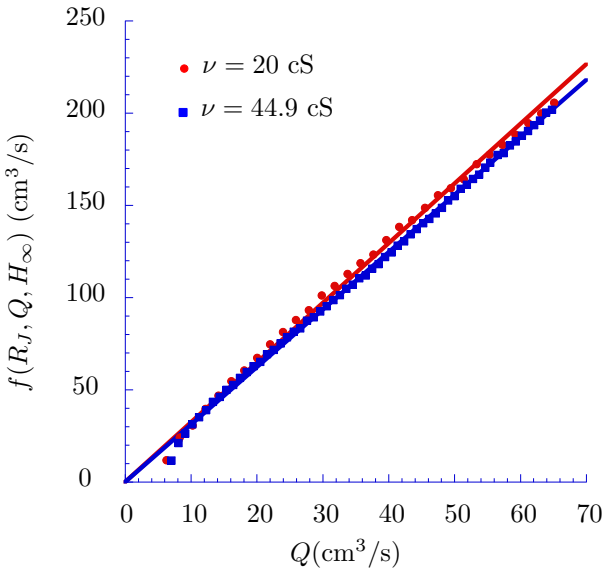


FIGURE *VI.1 – Test de la loi (IV.9) dans le cas d'un ressaut confiné par un mur d'environ 2,8 mm de hauteur. Les liquides utilisés dont des huiles silicones de 20 cS (cercles rouges) et 44,9 cS (carrés bleus). Nous impactons directement dans une boîte de Pétri en Plexiglas de rayon* $R_\infty = 4,5$ *cm. Le diamètre de l'injecteur est* $\phi = 3,2$ *mm.* H_∞ *est mesurée pour chaque point. Comme on le voit les points s'ajustent sur une courbe maîtresse. On trouve alors* $Fr_2 \approx 0,31$ *au lieu de 0,38.*

dans le cas d'un ressaut avec mur de confinement puis en construisant un modèle plus complexe pour la zone externe et il semble mériter une étude expérimentale à part entière.

VI.1.2 Le cas super-hydrophobe

On se pose maintenant la question de la validité de notre modèle si nous nous plaçons dans une configuration extrême. Nous avons donc traité une plaque carrée de cuivre à l'aide du traitement développé dans l'annexe C. On fait impacter un jet d'eau issu d'un injecteur de diamètre $\phi = 4$ mm. Contrairement aux cas précédents l'eau ne mouille pas entièrement la plaque : on observe plutôt une large flaque qui s'écoule par des filets liquides sur les bords. Ces filets se déplacent et l'on ne peut pas réellement définir la forme de la flaque.

Si l'on compare ces observations avec celle de Maynes *et al.* (voir partie I.6.1) on se trouve bien dans un régime de petits nombres de Weber. En effet dans notre cas on a $We < 450$. On observe donc bien un résultat comparable à celui observé par Maynes sur la Fig. I.18 (a).

On suppose que dans cette situation la hauteur de liquide au bord est simplement donnée par l'épaisseur de flaque c'est-à-dire :

$$H_\infty \approx 2 l_c sin\frac{\theta}{2}, \tag{VI.1}$$

où $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ et θ est l'angle de contact du liquide avec la plaque c'est-à-dire ici 160°. Cela nous permet d'estimer H_∞ à environ 5 mm. Des mesures à l'aide du profondimètre permettent en outre de confirmer cette estimation. Comme on utilise de l'eau la viscosité du liquide est très faible ainsi on a : $\frac{6}{\pi}\frac{\nu Q}{g} ln\left(\frac{R_\infty}{R_J}\right) \ll H_\infty^4$. L'équation (IV.6) devient donc :

$$Q = Fr_2 2\pi g^{1/2} R_J H_\infty^{3/2}. \tag{VI.2}$$

On peut ainsi tester l'équation (VI.2) avec nos points expérimentaux. Le résultat est visible sur la Fig. VI.2.

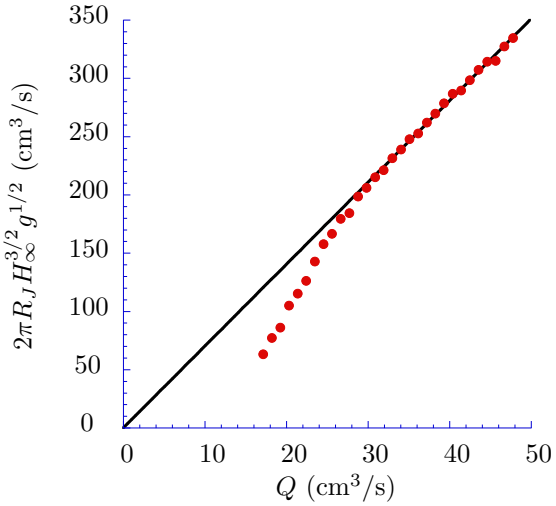


FIGURE *VI.2 – Test de la loi (VI.2) dans le cas d'un jet d'eau issu d'un injecteur de diamètre* $\phi = 4$ *mm sur une plaque de cuivre carrée traitée super-hydrophobe (voir l'annexe C). L'écoulement extérieur se fait sous la forme d'une flaque qui s'écoule parfois via des filets liquides. La droite noire est simplement un ajustement linéaire sur les points. Comme on peut le voir le modèle semble bien fonctionner (on comprend facilement que les premiers points sont écartés de la courbe en raison de la tension de surface) toutefois le coefficient est tout à fait surprenant puisqu'il correspond à un* $Fr_2 \approx 0,14$.

Les points expérimentaux semblent plutôt bien correspondre à la théorie. Cela accrédite une fois encore l'observation d'un nombre de Froude constant en sortie du ressaut. L'écart des premiers points avec la droite s'explique assez simplement par l'influence de la tension de surface, en effet le liquide que nous utilisons possède une tension de surface élevée ($\gamma \approx 70.10^{-3}$ N/m) et comme on l'a vu dans la section II.2.4 l'influence de la tension de surface est proportionnelle à la différence de hauteur de liquide de part et d'autre du choc à R_J donné. Cette différence est en effet plus importante dans notre cas car $H_J \approx H_\infty$.

Il est néanmoins beaucoup plus difficile de comprendre le coefficient directeur de la fonction linéaire qui ajuste nos points expérimentaux. En effet il nous permet d'estimer un nombre de Froude Fr_2 d'environ 0,14. Ce coefficient ne correspond absolument pas à ceux obtenus précédemment (Fr_2 de l'ordre de 0,3). [1]

Il est difficile de fournir une explication raisonnable à cet état de fait. Toutefois le fait que la loi que nous observons ait le bon comportement nous invite à penser une fois de plus que la théorie d'un nombre de Froude constant en sortie de ressaut est particulièrement robuste.

VI.2 Conclusion du Chapitre

La richesse de la littérature sur le ressaut hydraulique circulaire prouve s'il en était besoin à quel point il serait présomptueux de tirer une conclusion définitive sur le sujet. Comme on le constate nous n'avons pas encore terminé le puzzle et si les bords nous ont fourni un certain nombre d'informations

1. Par ailleurs nous avons aussi testé ces points expérimentaux sur la théorie de Watson-Bush et l'accord entre théorie et expérience est désastreux.

les dernières pièces à poser soulèvent d'épineuses questions.

Si cette approche par les bords peut sembler évidente pour construire un puzzle, elle va, comme on l'a vu au cours de la partie bibliographique, plutôt à contre courant d'une approche hydrodynamique classique qui a plutôt tendance à minorer l'importance de ces conditions aux limites. Cela montre toute la difficulté de la question du ressaut hydraulique : il s'agit de la transition d'une zone super critique à une zone sous critique et pourtant zones super et sous critiques interagissent l'une sur l'autre pour fixer la position du ressaut. Ainsi notre approche "par les bords" si elle offre un regard un peu différent sur le ressaut n'en demeure pas moins incomplète.

Nous avons en effet modélisé la zone externe à l'aide d'un modèle simple (au demeurant déjà présent dans la littérature) reposant sur l'équilibre entre pression hydrostatique et frottements visqueux pour un écoulement parabolique. Nous avons ensuite vérifié sa validité expérimentalement et numériquement. Il n'en demeure pas moins que ce modèle repose sur la connaissance de H_∞, la hauteur de liquide en bord de plaque, qui est influencée par différents paramètres comme la géométrie du bord de la plaque, la tension de surface mais aussi la viscosité et le débit. Cette question peut sembler annexe mais comme on l'a vu la valeur de H_∞ peut affecter de manière importante le rayon du ressaut. Cette question relativement simple d'un écoulement sur une arrête ne peut pourtant pas être résolue simplement et mériterait une étude à part entière mêlant mouillage et hydrodynamique.

Enfin que devient cette modélisation simple de la zone externe lorsque l'on place des murs de confinement en bord de plaque ? Nous avons montré que la réponse à cette question était une des clés de notre compréhension du système et nous avons fourni les premiers jalons expérimentaux d'un travail qui reste à accomplir.

Pour autant la puissance quatrième de H_∞ nous permet de souvent nous placer dans des cas limites où ce terme est négligeable (absence de mur) ou prédominant (présence d'un mur assez haut et/ou condition de mouillage particulière). Il est toutefois important de garder à l'esprit que les deux termes existent et bien réfléchir à la situation étudiée.

Cette connaissance du profil extérieur nous permet ensuite de remonter jusqu'à la sortie d'un ressaut. A cet endroit on peut ainsi prédire mais surtout observer un nombre de Froude indépendant du débit, de la viscosité et de la tension de surface et dépendant peu de la géométrie. Ce nombre de Froude est à la fois attendu par la relation $R_J(Q)$ et observé expérimentalement par mesures directes. De ce résultat simple et pourtant jamais observé on tire ensuite une loi analytique simple permettant de prédire la position du ressaut en fonction du débit, de la viscosité, des paramètres géométriques et de la tension de surface via son influence sur H_∞, loi qui se vérifie très bien expérimentalement. Pour autant nous ne comprenons pas théoriquement ce qui fixe ce nombre de Froude. Et l'on peut se demander si cette condition est universelle ou si les variations du nombre de Froude sont simplement trop faibles pour être observées avec notre dispositif expérimental.

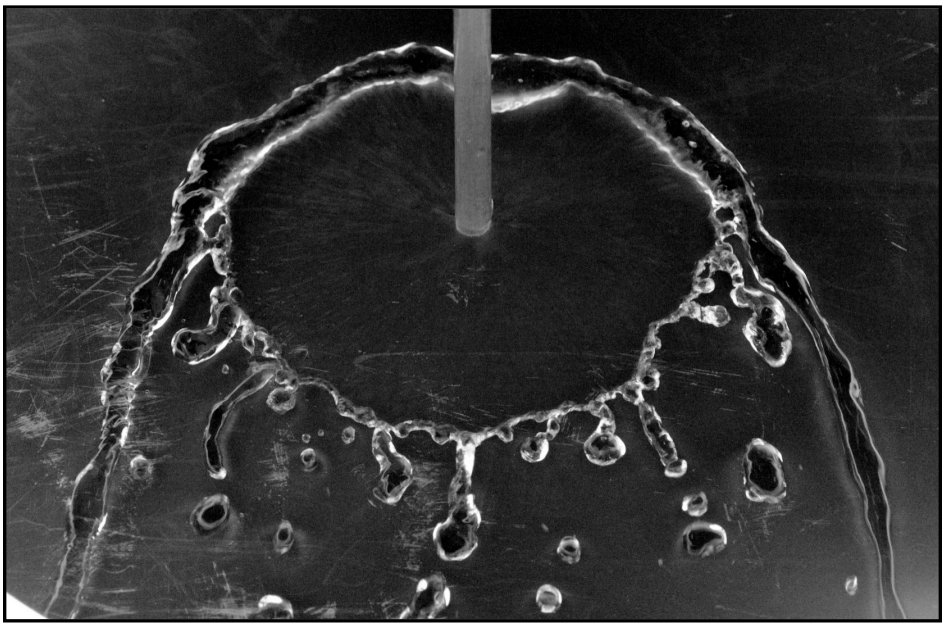
La réponse à cette question n'est pas anodine : en effet le fait d'ajouter une condition supplémentaire ($Fr = cste$) au système fournit une équation supplémentaire à un système déjà bouclé. Il n'est pas évident comme nous l'avons vu sur la question de modèle de Watson que cette condition supplémentaire soit compatible avec l'équation de Bélanger et les deux descriptions des zones interne et externe. Cette observation d'un nombre de Froude constant soulève donc d'importantes questions théoriques.

En ce qui nous concerne, notre étude bibliographique exhaustive nous pousse à travailler vers un modèle plus complet du ressaut mêlant à la fois une nouvelle description de la zone interne (celle de Watson se trouvant mise en défaut), la théorie de Higuera (qui avait presque abouti à la loi que nous défendons) pour modéliser au mieux la zone du choc et son voisinage (en particulier la zone interne

près du choc) et enfin notre modèle. Par ce travail encore à accomplir il y aurait éventuellement possibilité de parvenir à un modèle complet du ressaut circulaire hydraulique qui redonnerait un nombre de Froude constant en sortie. Une piste concernant les travaux à accomplir en terme de modélisation de la zone interne serait de considérer plus précisément le jet et l'impact...

Enfin nos premières expériences sur l'impact d'un jet sur un substrat super hydrophobe semblent à la fois encourageantes aux vues du succès de notre loi d'échelle et déroutantes par les valeurs obtenues. Pour poursuivre dans cette direction il faut à la fois résoudre le cas simple du ressaut sur surface "normale" mais aussi travailler sur la modélisation de l'écoulement dans ces conditions particulières en s'inspirant par exemple des travaux de Prince *et al.* [87] sur le ressaut sur substrat super hydrophobe isotrope. Pour autant l'exploration expérimentale de la frontière entre un ressaut hydraulique et la fragmentation d'une nappe liquide comme mis en évidence par Maynes *et al.* [80] peut éventuellement nous fournir des informations sur ce qu'est finalement un ressaut hydraulique en tant qu'objet physique.

Pour terminer ce Chapitre il est assez tentant de faire remarquer qu'ouvrir un robinet et regarder le fond de son évier n'a pas fini de rendre passionnante la vaisselle pour le physicien.



Deuxième partie

Le ressaut incliné

Chapitre VII

État de l'art et dispositif expérimental

VII.1 Et si on incline notre ressaut ?

On se pose maintenant la question de la brisure de symétrie imposée par l'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale, l'injection du liquide continuant de se faire de manière perpendiculaire au substrat. L'expérience de pensée n'a rien d'évident et soulève un grand nombre de questions : Observe-t-on toujours un ressaut ? Quelle est sa forme ? Quels sont les paramètres physiques importants à considérer dans le problème ?

Nous avons vu dans le précédent chapitre l'importance des conditions aux limites. Le fait d'incliner la plaque recevant le liquide permet de modifier profondément ces conditions : le liquide s'écoule le long de la plaque, un bourrelet liquide entourant le ressaut se forme... Quels seront les effets de ces conditions aux limites sur le ressaut ?

On peut également se poser la question de la valeur d'un nombre de Froude dans ce cas d'un ressaut hydraulique sur plan incliné. Est-il constant ? Peut-on généraliser l'approche précédente pour modéliser le ressaut hydraulique sur plan incliné ?

VII.1.1 Beaucoup de questions... et peu de réponses.

La longue liste de questions que l'on vient de poser ne trouve justement que peu de réponses dans la littérature. Cet état de fait est pour le moins curieux quand on connaît la richesse de la littérature sur le ressaut hydraulique circulaire. Il n'existe en effet aucun article de référence sur lequel s'appuyer pour une étude dans cette nouvelle géométrie.

Bien entendu l'idée de forcer la brisure de symétrie d'un ressaut circulaire n'est pas neuve. Le moyen le plus répandu est d'incliner le jet [64, 65, 66, 68, 109]. On observe alors des formes variées de ressauts hydrauliques. On peut en particulier distinguer le cas où le ressaut est ovale et le cas où le ressaut présente un ou plusieurs "coins". Ces différents types de ressaut dus à un jet incliné sont présentés sur la Fig. VII.1 (un diagramme de phase a également été présenté au cours de l'introduction en Fig. I.19).

Notons au passage que dans le cas le plus simple d'un ressaut ovoïde, Kate, Das et Chakraborthy proposent un calcul pour le "rayon" du ressaut. En modélisant avec précision la zone d'impact du jet et en particulier la position exacte du point de stagnation puis en suivant une ap-

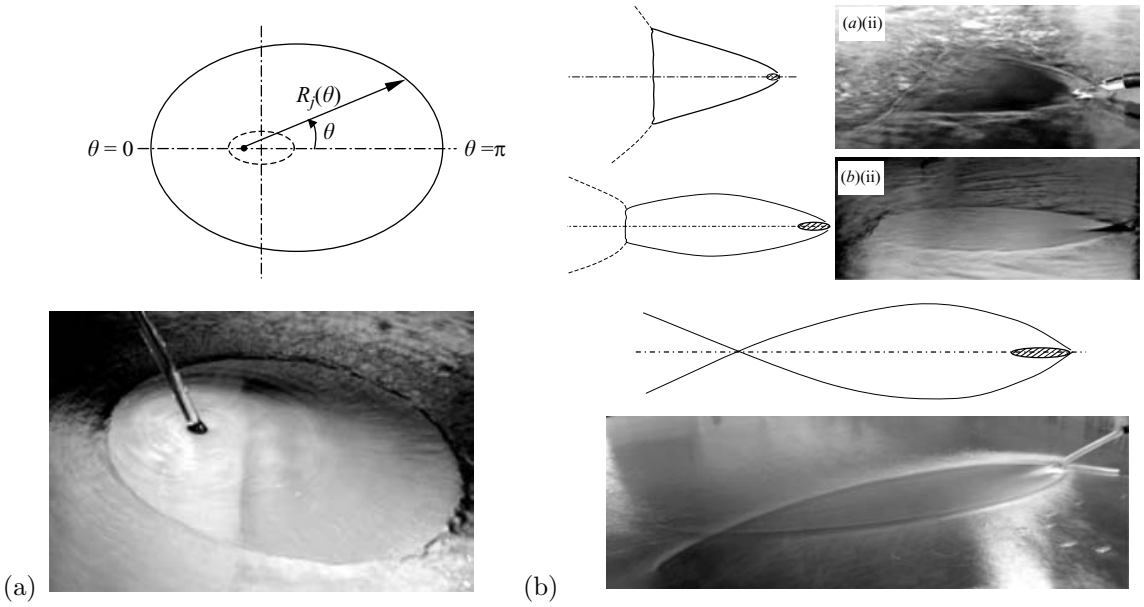


FIGURE *VII.1 – Jets inclinés impactants un plan horizontal. (a) Définition du problème. Lorsque le jet est faiblement incliné le ressaut devient ovoïde. (b) Lorsque l'on incline davantage le jet on peut obtenir une grande variété de formes pour le front, y compris avec des brisures de front ou "coins". Suivant les citations on peut dénombrer un ou plusieurs "coins". Cette zoologie n'est, à ce jour, toujours pas entièrement comprise. Toutefois un diagramme de phase est visible en Fig. I.19 dans le présent manuscrit. Photographies tirées de [64].*

proche identique à celle proposée par Bohr *et al.* dans la référence [8] ils aboutissent au résultat $R_J(\theta, \zeta) = K(\theta, \zeta) Q^{5/8} \nu^{-3/8} g^{-1/8}$, où $K(\theta, \zeta)$ est un pré facteur explicité dans la référence [64] dépendant de l'angle d'inclinaison du jet ζ et de la position angulaire dans le ressaut θ. On remarquera en particulier que cette loi est analogue à la loi d'échelle proposée par Bohr *et al.* dans l'article [8] et présentée dans ce manuscrit à l'équation II.61, mais modifiée par un préfacteur tenant compte de l'inclinaison du jet.

On peut aussi briser la symétrie d'un ressaut en faisant impacter un jet sur une plaque horizontale en mouvement [50, 67, 105]. Il n'existe pas à ce jour de théorie susceptible de modéliser cet écoulement mais quelques images de cette situation sont présentées en Fig. VII.2.

Pour autant, notre situation simple consistant à incliner la plaque et l'injecteur (pour qu'il reste toujours perpendiculaire à la plaque) n'a pour le moment quasiment pas été étudiée. Bien sûr le cas d'un ressaut hydraulique "classique" en deux dimensions et sur substrat incliné a déjà été abordé dans la littérature tant théoriquement qu'expérimentalement (par exemple par les travaux de Dyment [38], de Defina & Susin [32], de Benilov [6] ou même de Bohr *et al.* [113]). En ce qui concerne un ressaut formé par un jet impactant, on ne trouve guère que les travaux de Johnson & Gray [62] mais il s'agit dans ce cas d'un jet de granulaire toujours vertical dans le plan du laboratoire formant un ressaut de grains (illustration en Fig. VII.3) sur un plan incliné... On observe des régimes stationnaires mais aussi des régimes instationnaires et en tout état de fait ni le dispositif ni les formes obtenues ne sont comparables avec nos observations. Leur étude est donc difficilement adaptable avec le système qui nous intéresse ici.

Un autre domaine a avoir été largement étudié est l'étalement d'un liquide sur un plan incliné.

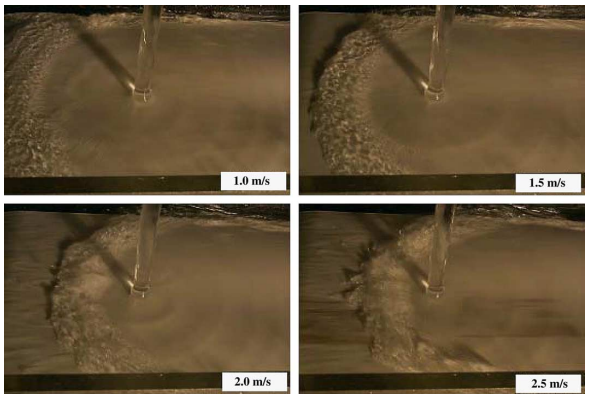


FIGURE *VII.2 – Jet impactant verticalement un plan horizontal en translation. Quatre vitesses sont représentées (de 1 à 2,5 m/s). Le tapis se déplace de gauche à droite. Plus la vitesse du tapis augmente plus le front se rapproche du jet incident et plus la hauteur après le choc grandit. Photographies tirées de [50].*

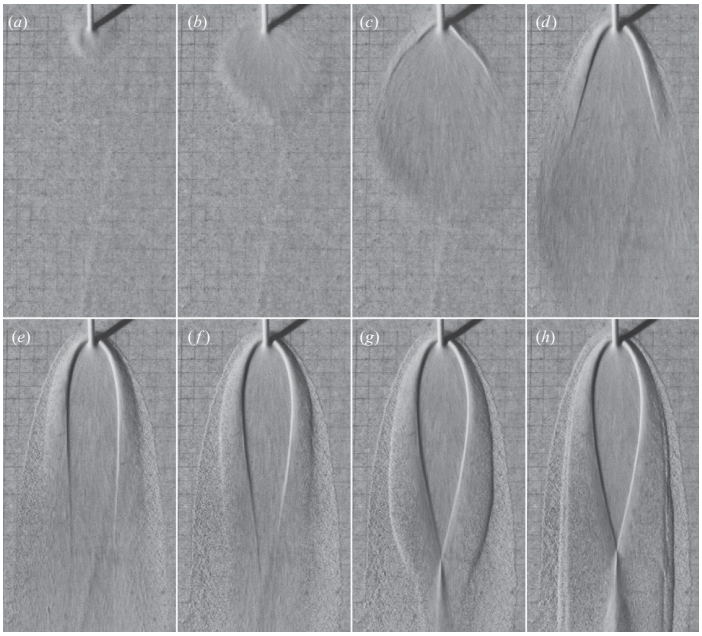


FIGURE *VII.3 – Impact d'un jet granulaire vertical (dans le référentiel du laboratoire) sur un plan incliné. Les images sont prises successivement lors de la formation de la structure, à débit constant, la dernière représentant la structure stationnaire. On remarquera une très grande proximité de forme avec la structure obtenu par Kate et al. utilisant un jet liquide incliné sur un plan horizontal (voir Fig. VII.1 (b)). D'autres formes de ressaut peuvent être obtenues en faisant varier l'inclinaison de la plaque et le débit. Pour plus d'informations se reporter à [62].*

On trouve par exemple des travaux détaillant l'étalement d'un liquide extrêmement visqueux à partir d'un point source ou depuis une ligne source située horizontalement en haut d'un plan incliné. On pense par exemple aux travaux de Lister en ce qui concerne la modélisation théorique [75] ou ceux de Huppert *et al.* tant expérimentaux que théoriques [58, 55]. On trouve aussi des études concernant l'écoulement d'un liquide visqueux suivant les équations de couches limites dans une configuration où le liquide est lâché d'un point situé en haut d'une plaque, on pense par exemple aux travaux de Smith

[106]. Ces questions ont, en effet, passionné une grande communauté de chercheurs travaillant autour de problèmes de géophysique comme l'écoulement de nappes de lave ou de boue.

Dans la limite opposée un certain nombre de modèles utilisant un point source sur un plan incliné ont aussi été réalisés dans le cas d'un fluide non visqueux (par exemple celui de Rienstra [95]). Un tel modèle prédit donc la position d'un bord de nappe liquide de forme parabolique uniquement fixé par un équilibre entre gravité et inertie et ainsi donné en ordre de grandeur par $U^2/(2gsin\alpha)$ où U est la vitesse du jet incident et $gsin\alpha$ la composante de gravité le long du plan (ce qui signifie donc 10 cm pour un jet liquide de seulement 2 m/s). Cette approche a ensuite été améliorée par Edwards *et al.* [41] accompagnée de la première expérience qualitative rapportée d'un jet liquide impactant un plan incliné. Edwards *et al.* utilisent un modèle de choc δ pour modéliser l'extérieur de la nappe cela réduit de 5/9 les valeurs attendues par le modèle et maintient une forme à peu près parabolique (voir Fig. VII.4).

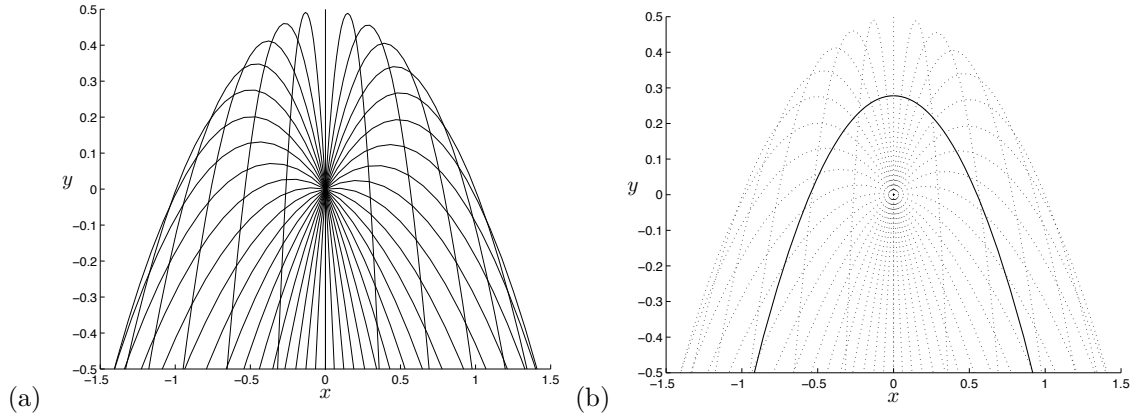


FIGURE *VII.4 – (a) Courbes caractéristiques ou chemins de particules obtenus depuis un point source sur un plan incliné. Les seuls ingrédients physiques présents ici sont l'inertie et la gravité. (b) Le tube de masse (ligne continue noire) représente la limite physique attendue par un choc δ. La surface étant supposée sèche à l'extérieur. Ce modèle de choc permet de réduire de 5/9 les valeurs attendues par le modèle précédent qui deviennent alors plus "réalistes". Toutefois ce modèle ne tenant pas compte d'une couche limite visqueuse ne semble pas pertinent en regard de l'expérience. Schémas extraits de la référence [41]*

Bien entendu, toute cette littérature des cas les plus visqueux aux fluides parfaits n'observe ni ne prédit de ressaut hydraulique. Si cela est logique pour une situation très visqueuse où les vitesses sont toujours sous-critiques, on comprend que les modèles proposés dans une limite faiblement visqueuse échouent à modéliser la situation expérimentale négligeant, de fait, la formation d'une couche limite visqueuse, élément qui est, comme on peut s'y attendre après la lecture de la Partie I, absolument déterminant.

Le ressaut hydraulique formé par un jet impactant verticalement un plan incliné semble donc un sujet peu référencé. Notre approche consistera donc avant tout en une première étude expérimentale puis théorique dans le but de défricher ce sujet à la lumière de notre étude sur le ressaut circulaire horizontal.

Toutefois deux articles publiés par Wilson *et al.* [116, 111] relatent le cas particulier de jets horizontaux ou obliques impactants une surface verticale. Il ne s'agit donc pas ici d'une étude sur plan incliné, l'angle de la plaque étant laissé constant à 90°, mais on trouve tout de même un certain nombre d'éléments intéressants dans ces publications, susceptibles de nous guider dans notre démarche. Signalons

également une étude inachevée de Thiffeault et Belmonte qui proposent une approche similaire à celle développée par Kate *et al.* pour déterminer la position du ressaut [1].Nous allons maintenant détailler les éléments les plus pertinents des approches de Wilson*et al.* [116, 111].

VII.1.2 Les précurseurs

La situation étudiée par les auteurs est très spécifique ; il s'agit de l'impact d'un jet d'eau horizontal sur divers substrats verticaux, en situation de mouillage partiel. Les effets de tension de surface s'avèrent donc importants.

Lorsque l'on fait impacter un jet orthogonalement à une surface verticale on peut observer différents types d'écoulement comme décrit par Wilson *et al.* dans [116] :

(i) *Écoulement en méandre :* lorsque les effets de la tension de surface sont comparables ou dominants devant les effets gravitaires on observe un ressaut hydraulique quasiment fermé entouré d'un bourrelet liquide, le liquide s'écoule ensuite sous forme d'un ruisselet formant des méandres (voir Fig. VII.5 : (a)).

(ii) *Écoulement gravitaire :* dans ce cas là les effets gravitaires et inertiaux dominent par rapport aux effets capillaires. On observe ainsi un ressaut en forme de fer à cheval entouré d'un bourrelet de liquide. Le liquide s'écoule ensuite sous la forme d'un film liquide relativement mince et toujours entouré par un bourrelet liquide plus épais (voir Fig. VII.5 : (b)). Ce film liquide est susceptible de se diviser en aval sous forme de plusieurs ruisselets.

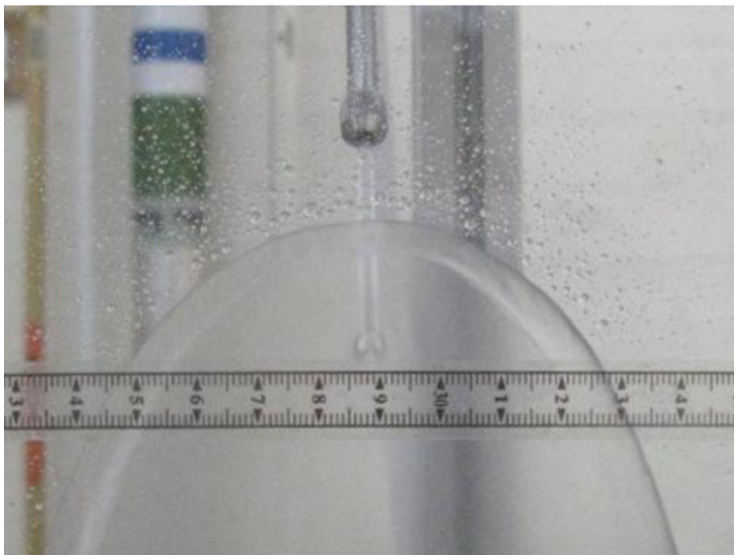
(a) (b) 

FIGURE *VII.5 – Jet horizontal impactant un plan vertical. (a) Ecoulement sous forme de méandre (les effets capillaires et gravitaires dominent). Le bourrelet entoure entièrement le film mince. (b) A débits plus élevés nous sommes en situation d'écoulement gravitaire : les effets gravitaires et inertiaux dominent. On observe un ressaut en fer à cheval entouré d'un bourrelet liquide. Photographies extraites des références [116, 111].*

Les auteurs proposent ensuite un modèle simplifié des références [59, 15], lui même basé sur le modèle de Watson [114] décrit dans le corps de la Partie I (voir II.2). L'idée de ce modèle est d'estimer

1. Cette approche fut présentée au cours de l'APS DFD de 2008 (voir, http ://meetings.aps.org/link/BAPS.2008.DFD.BK.1).

la position du choc ou du ressaut en modélisant l'écoulement après le jet, dans la zone interne. Deux schémas reprenant les différentes notations du problème sont représentés en Fig. VII.6.

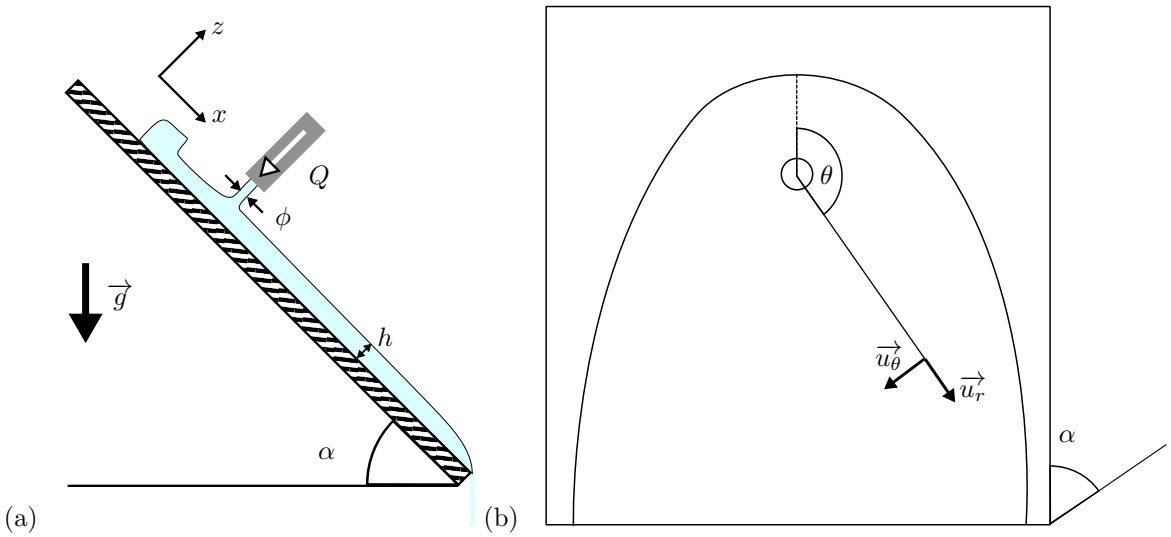


FIGURE *VII.6 – Schémas du problème du ressaut sur un plan incliné d'un angle α. Pour le moment on se contente de $\alpha = \pi/2$ dans le cadre du modèle de Wilson et al. . (a) Un jet de débit Q impacte perpendiculairement un plan incliné d'un angle α via un injecteur de diamètre interne ϕ. L'épaisseur du film liquide est notée h. (b) On se repère dans le plan de la plaque grâce aux coordonnées polaires (r, θ) de centre O correspondant au centre du jet impactant. Les vecteurs vitesses unitaires correspondants sont notés $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.*

Dans un premier temps, et pour simplifier au maximum, les auteurs proposent de négliger la gravité devant l'inertie emportée par le liquide (on présente ici le modèle vu dans [116]). Cela signifie donc que nous sommes dans une situation analogue à celle du ressaut circulaire hydraulique et que la vitesse peut être considérée comme invariante selon θ (l'angle de la coordonnée polaire dans le plan de la plaque voir Fig. VII.6 (b)), le rayon du ressaut attendu sera donc considéré par les auteurs comme lui aussi invariant selon θ on le notera R_J comme dans le cas du ressaut horizontal. Le terme en vitesse radial sera donc noté $u(r, z)$ où r est la coordonnée radiale à partir du centre du jet et dans le plan de la plaque (voir Fig. VII.6 (b))et z la coordonnée orthogonale à la plaque (voir Fig. VII.6 (a)).

Les auteurs se placent à grand r dans une zone où $r^3 \gg l^3$ (avec l la longueur définie dans le modèle de Watson II.2 à savoir $l = 0,284\phi Re^{\frac{1}{3}}$ où $Re = \frac{2Q}{\nu\phi}$), le profil de l'écoulement est donc pleinement établi. Pour des raisons de simplicité on l'approxime par un profil parabolique. Ainsi si l'on note $\langle u(r)\rangle$ la vitesse moyenne du liquide dans la zone centrale et que l'on suppose que le profil de l'écoulement est parabolique on a

$$\langle u(r)\rangle = u(r,h)\left(2\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right), \tag{VII.1}$$

où h est la hauteur de liquide selon z. On considère que la contrainte visqueuse a pour forme

$$\sigma = \eta\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} \approx 3\eta\frac{\langle u\rangle}{h}, \tag{VII.2}$$

où η est la viscosité dynamique du liquide. Les auteurs ont donc développé ici les hypothèses et les équilibres proposés par Bréchet et Néda dans [12].

On se propose donc de réaliser un bilan de quantité de mouvement. Le flux de quantité de mouvement par unité est donc :

$$M = \int_0^h \rho u^2 \mathrm{d}z = \frac{6}{5}\rho\langle u\rangle^2 h, \tag{VII.3}$$

avec ρ la masse volumique du liquide. Le bilan de quantité de mouvement donne donc, après calcul,

$$\frac{d}{dr}\left[r\langle u\rangle^2 h\right] = -\frac{5}{2}\nu\frac{r\langle u\rangle}{h}, \tag{VII.4}$$

avec ν la viscosité cinématique. L'utilisation de la conservation du débit donne $Q = 2\pi r\langle u\rangle h$ car on suppose l'écoulement radial. Cela permet d'obtenir l'équation différentielle :

$$\frac{d\langle u\rangle}{\langle u\rangle^2} = -\frac{10\pi^2\nu}{Q^2}r^2\mathrm{d}r. \tag{VII.5}$$

Ce qui donne après intégration :

$$\frac{1}{\langle u\rangle(r)} - \frac{1}{\langle u\rangle(r_0)} = \frac{10\pi^2\nu}{Q^2}\frac{1}{3}(r^3 - r_0^3), \tag{VII.6}$$

où r_0 est la position juste après l'impact. Nous avons considéré que le calcul a été fait pour des rayons tels que $r^3 \gg l^3$. Nous sommes donc dans un cas où $r^3 \gg r_0^3$. On peut aussi considérer que $\langle u\rangle(r_0) \gg \langle u\rangle(R_J)$ (la vitesse d'impact au niveau du jet est de plusieurs mètres par seconde tandis que la vitesse du liquide au niveau du choc est plutôt de l'ordre du dixième de mètre par seconde). On obtient ainsi le rayon attendu pour le choc :

$$R_J^3 = \frac{3Q^2}{10\pi^2\nu}\frac{1}{\langle u\rangle(R_J)}. \tag{VII.7}$$

Ce qui correspond à un résultat similaire à celui de Bréchet et Néda dans [12].

L'originalité de l'approche des auteurs réside dans la condition de choc. L'idée proposée par les auteurs est en effet d'équilibrer le flux de quantité de mouvement avec les effets de la tension de surface en particulier sur les conditions de mouillage (pour un rappel sur le mouillage et les angles de contacts se référer à l'annexe B). Un schéma traduisant cette relation de choc est visible sur la Fig. VII.7. Cette condition de choc s'écrit donc :

$$M = \gamma(1 - cos\beta), \tag{VII.8}$$

avec γ la tension de surface et β l'angle de contact entre le liquide et le substrat.

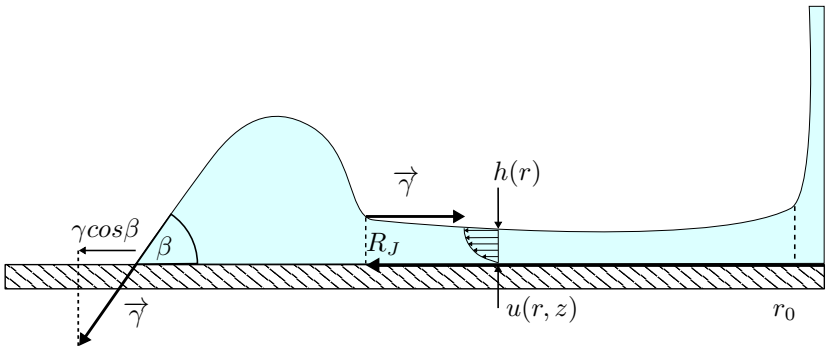


FIGURE *VII.7 – Le profil de vitesse du liquide est considéré comme parabolique. La position du ressaut est notée R_J et est fixée par l'équilibre entre le flux de quantité de mouvement et les effets de tension de surface.*

En utilisant cette condition on aboutit à la loi pour le rayon du choc :

$$R_J = \left(\frac{9}{50\pi^3}\right)^{1/4} Q^{3/4}\nu^{-1/4}\rho^{1/4}\left(\gamma(1-cos\beta)\right)^{-1/4}. \tag{VII.9}$$

Ce modèle fournit une tendance convenable et un ordre de grandeur satisfaisant pour décrire les évolutions de la position du choc [2] comme cela est montré sur la Fig. VII.8 issue de [116]. [3] Toutefois cette figure montre une très grande dispersion des points. Une assez grande incertitude dans les mesures des angles de contact est aussi rapportée dans le texte.

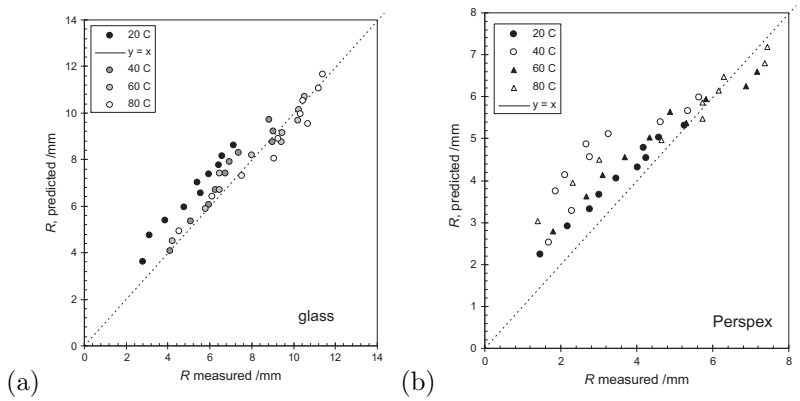


FIGURE *VII.8 – Jet impactant horizontalement un plan vertical. Test de la loi présentée en VII.9 pour de l'eau à différentes températures (20, 40, 60 et 80°C) pour deux conditions de mouillage différentes : (a) eau-verre et (b) eau-Perspex. En ordonnée est représentée le R_J prédit et en abscisse R_J mesuré dans l'expérience (probablement à l'horizontale par rapport à l'injecteur : ce que nous définirons plus loin comme R_{width}). Comme on peut le voir l'accord entre théorie et expérience est convenable. Toutefois on constate une grande dispersion des points et aucune tendance reproductible en ce qui concerne la température. Pour plus d'informations se reporter à [116]*

Dans un autre article [111] les auteurs se proposent d'améliorer le modèle précédent en ajoutant un terme dû à la gravité. L'idée est d'améliorer la modélisation et d'essayer de décrire au mieux la partie supérieure du choc. On se propose donc d'ajouter un terme dans l'équilibre des quantités de mouvement :

$$\frac{d}{dr}\left[r\langle u\rangle^2 h\right] = -\frac{5}{2}\nu\frac{r\langle u\rangle}{h} + \frac{5}{6}rhg\ sin\alpha\ cos\theta, \tag{VII.10}$$

avec α l'angle d'inclinaison de la plaque par rapport à l'horizontale (donc dans le cas des auteurs $\alpha = \pi/2$) et θ la coordonnée polaire dans le plan de la plaque. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement on obtient :

$$\langle u\rangle\frac{d\langle u\rangle}{dr} = -\frac{10\pi^2\nu\langle u\rangle^3 R_J^2}{Q^2} + \frac{5}{6}g\ sin\alpha\ cos\theta. \tag{VII.11}$$

Cette équation différentielle ne peut pas s'intégrer simplement analytiquement mais, couplée à la condition présentée dans l'équation VII.8, elle peut être intégrée numériquement. Le résultat de

2. Là où il a lieu c'est-à-dire dans la partie supérieure, voir Fig. VII.6 (b)

3. Pour autant les auteurs ne précisent pas la manière dont ils choisissent la valeur expérimentale de R_J qui peut être choisie de différentes manières : par exemple à altitude constante ou entre l'injecteur et le point le plus haut du ressaut ou encore en moyennant l'ensemble des positions de ressaut visibles... Il ne s'agit pas là d'un point de détail, la Fig. VII.5 montrant bien que le ressaut ne peut pas vraiment être considéré comme circulaire. La courbe est donc à interpréter avec prudence.

cette intégration montre que la contribution du terme de gravité est faible (au mieux de l'ordre de 10 %) et n'est pas suffisante pour décrire la forme du choc visible en Fig. VII.6 (b) [4]. Les auteurs proposent un test pour les équations VII.11 et VII.8. Dans ce cas il est explicitement précisé que le test expérimental se fait sur le rayon mesuré horizontalement (comme mesurable à l'aide du réglet dans la Fig. VII.6 (b)). En outre ils se proposent de mesurer l'influence du rayon de l'injecteur qui n'apparaît pas explicitement dans les équations. Ces résultats sont visibles en Fig. VII.9.

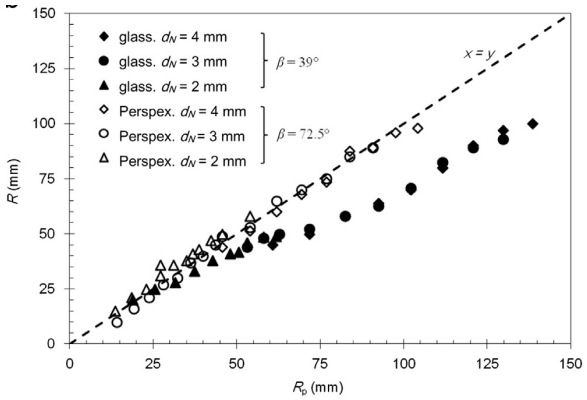


FIGURE *VII.9 – Jet impactant horizontalement un plan vertical. Test de la loi présentée en VII.9 pour de l'eau dans deux conditions de mouillage différentes : eau-verre et eau-Perspex. Trois différents diamètres d'injecteurs sont testés. En ordonnée est représenté le R_J prédit et en abscisse R_J mesuré dans l'expérience à l'horizontale par rapport à l'injecteur (ce que nous définirons plus loin comme R_{width}). Comme on peut le voir l'accord entre théorie et expérience est assez mauvais : en particulier en ce qui concerne les petits angles de contact. On remarque en outre que le diamètre de l'injecteur ne semble avoir aucune importance (il n'apparaît pas explicitement dans les équations). Pour plus d'informations se reporter à [111]*

On retiendra de la Fig. VII.9 principalement deux choses :

(i) le modèle proposé n'est pas apte à décrire la position du choc, en tout cas à petit angle de contact liquide-solide. Il prédit toutefois un ordre de grandeur raisonnable.

(ii) Un nouveau paramètre est testé : le rayon de la buse. Ce paramètre, comme dans le cas horizontal, ne semble agir que de manière marginale. Son influence semble donc être négligeable.

VII.1.3 Conclusion

En définitive, l'impact d'un jet sur un plan incliné semble être un sujet très ouvert tant expérimentalement que théoriquement. Il n'existe à ce jour pas de modèle convaincant et les données disponibles dans la littérature sont réduites. Pourtant le sujet apparaît comme important tant du point de vue fondamental (l'impact d'une brisure de symétrie sur un ressaut hydraulique circulaire) que du point de vue appliqué (les articles publiés par Wilson *et al.* [116, 111] évoquent par exemple l'utilité de leur dispositif en terme de nettoyage de surface dans un cadre industriel mais on peu aussi penser aux différentes problématiques liées à l'enduisage d'une surface ou son refroidissement). Nous allons donc nous attacher à poser les premiers jalons d'une compréhension de ce phénomène à l'aide d'un dispositif expérimental simple et de modèles théoriques élémentaires.

4. La différence entre théorie et expérience est aussi visible dans les figures de l'article [111] et en particulier dans la figure 12 de cet article.

VII.2 Description de l'expérience

VII.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est décrit sur la Fig. VII.10. Ce dispositif est assez analogue au précédent à savoir : un jet de liquide issu d'un tube vertical (de diamètre ϕ variable) impacte un plan incliné repéré par rapport à l'horizontal par un angle α. Ce plan est une plaque carrée de 40 cm de côté (nous reviendrons plus loin sur la nature du substrat) placée à une distance de 3 mm de la sortie de la buse. Il est très important de minimiser autant que possible cette distance afin de limiter le risque de déflexion du jet sous l'effet de la gravité. Un réglage fin et continu de l'angle α est possible grâce à un système de tige de poussée reliée à une vis sans fin. Ce dispositif expérimental permet ainsi d'accéder à un angle d'inclinaison pour la plaque compris entre 0 et 90°. L'estimation de l'angle se fait à l'aide d'un inclinomètre numérique Fisco Solatronic. La valeur des angles est connue avec une erreur de $\pm 0,1°$.

Le liquide s'écoule jusqu'en bas de la plaque où il est récupéré dans une gouttière (sans contact avec la plaque) puis réinjecté directement dans le circuit.

Pour injecter le liquide on utilise une pompe à engrenage similaire à celle utilisée dans la partie précédente : Micropump 75211-30 munie elle aussi d'une tête de pompe Micropump 81111. Ce dispositif d'injection ne présente *a priori* pas de pulsation visible du débit. Cette pompe offre en outre le précieux avantage de posséder une commande et un affichage numérique. Cela permet, après un étalonnage par pesée de contrôler directement le débit injecté et de s'affranchir de l'utilisation d'un débitmètre. La gamme de débits accessible est comparable à celle utilisée dans la partie précédente à savoir typiquement : 5-60 cm^3/s^{-1}. L'erreur sur les valeurs indiquées de débit est ici encore de l'ordre de ± 0.25 $cm^3.s^{-1}$.

VII.2.2 Liquides et substrats utilisés

Les expériences d'impact d'un jet sur un plan incliné ont été menées, comme cela a déjà été évoqué précédemment avec différentes conditions de mouillage : mouillage total, mouillage partiel et mouillage quasi-nul. Le choix des liquides couplé à celui des substrats est bien entendu un excellent moyen de faire varier ces conditions de mouillage. [5]

Nous avons choisi pour étudier le mouillage total d'utiliser de l'huile silicone 20 cS sur du verre (voir dans la partie précédente le paragraphe qui y est consacré : III.2.1). [6]

En ce qui concerne le mouillage partiel, il est bien évident que le couple liquide le plus simple reste le couple eau/verre. Nos expériences sont donc réalisées avec de l'eau distillée sur une plaque de verre [7].

Pour ce qui est de la situation de non mouillage nous avons aussi utilisé le liquide le plus simple et le plus susceptible d'offrir un grand angle de contact avec le substrat, à savoir l'eau distillée. Mais nous avons utilisé comme substrat une plaque de cuivre traitée super-hydrophobe par la technique décrite dans l'Annexe C.

5. Pour un rappel rapide sur la question du mouillage et des lignes de contact on consultera l'annexe B.
6. Le liquide qui est utilisé possède donc une viscosité cinématique ν de 20,4 $\pm 0,6$ cS, une masse volumique ρ de 950 (kg/m^3) et une tension de surface γ de 20,6 (mN/m).
7. $\nu \sim 1$ cS, $\rho \sim 1000$ (kg/m^3) et $\gamma \sim 70$ mN/m

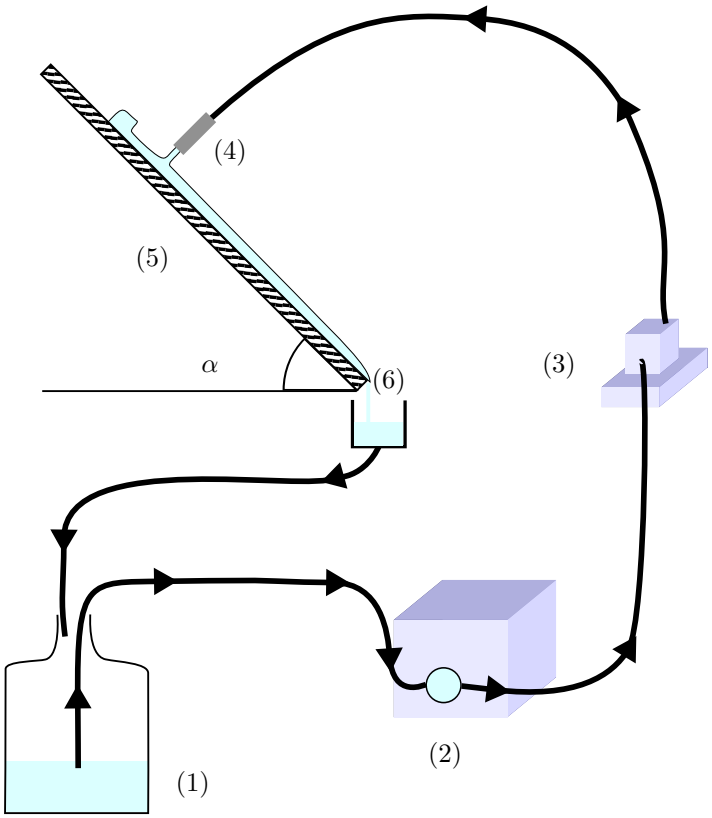


FIGURE *VII.10 – Schéma explicatif du dispositif expérimental utilisé. Le dispositif expérimental se décrit ainsi d'amont en aval : une pompe à engrenage (2) aspire le liquide dans le bidon de stockage (1). La pompe à affichage numérique (2) alimente directement une buse (4) de diamètre ϕ. Le jet impacte une plaque de verre de 40* cm *de côté (5) pour former un ressaut hydraulique. Le liquide s'écoule ensuite sur la plaque jusqu'à la gouttière de récupération (6) qui alimente ensuite le bidon de stockage (1). Lorsque l'on n'utilise pas une pompe volumétrique à affichage numérique, un débitmètre numérique (3) vient compéter le dispositif.*

VII.2.3 Visualisation

La visualisation du ressaut hydraulique incliné s'avère encore une fois difficile. Les mêmes raisons que celles développées dans la partie précédente (voir III.3) peuvent être évoquée : la nécessité d'éviter le dispositif d'injection et le jet liquide. Mais dans le cas présent la structure observée est plus compliquée. Dans le cas précédent nous avions uniquement le ressaut circulaire hydraulique à observer. Pour ce dispositif il faut aussi tenir compte du bourrelet liquide qui masque en partie la lumière venue des côtés.

Nous allons donc travailler, lorsque cela est possible (c'est-à-dire lorsque le substrat est transparent ce qui est le cas pour le mouillage partiel et total mais pas dans le cas du non mouillage où le substrat est opaque), cette fois encore en filmant le dispositif par en dessous. On utilisera donc à nouveau un miroir incliné à 45° sous la plaque pour pouvoir filmer à une distance de quelques dizaines de centimètres à l'aide d'une caméra[8] munie d'un zoom 12,5 - 75 mm et un jeu de bagues allonges. Un schéma de ce dispositif d'acquisition est présenté en Fig. VII.11.

8. Dans un premier temps analogique et tout dernièrement numérique. Cela explique certaines différences d'images.

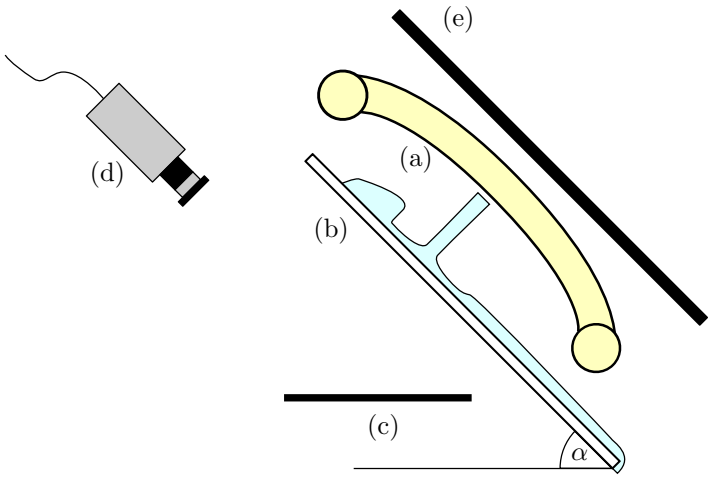


FIGURE *VII.11 – Schéma décrivant la technique de visualisation : le dispositif est éclairé par un néon circulaire (a) de manière à éclairer les bords du ressaut et à les rendre lumineux à l'image. On utilise la plupart du temps une plaque de verre (b) (donc transparente) afin d'acquérir les images par en dessous et ce au travers d'un simple miroir (c) à 45° qui réfléchit l'image vers la caméra (d). A ce dispositif est ajouté un écran diffuseur (e) constitué d'une page de papier quadrillée ou plus simplement recouverte de lignes parallèles.*

La question de l'éclairage est, comme on l'a dit, assez délicate. Les liquides utilisés sont transparents et la structure observée assez complexe. On a donc choisi d'utiliser à nouveau un néon circulaire mais que nous avons cette fois couplé à un écran diffuseur au dessus du néon. Cet écran est simplement constitué d'une page de papier quadrillée ou plus simplement recouverte de lignes parallèles. L'impression de ces motifs qui seront réfractés par le liquide permet d'observer précisément les zones à changement de pentes [9]. On obtient ainsi des images bien contrastées et facilement interprétables. Quelques exemples de ces images sont présentés en Fig. VII.12.

Il est nécessaire de trouer ces feuilles pour permettre à l'injecteur de traverser l'écran diffuseur. C'est la raison pour laquelle on observera des zones noires autour de l'injecteur (voir par exemple Fig. VII.12) : ces zones noires sont les fentes effectuées afin de permettre à l'injecteur de traverser la feuille. On n'en tiendra donc pas compte.

Bien évidemment il est nécessaire de faire en sorte que le dispositif de visualisation (miroir, caméra, néon et cache) soit "embarqué", c'est-à-dire qu'il soit solidaire du dispositif expérimental et qu'il s'incline du même angle que la plaque et l'injecteur.

VII.2.4 Traitement d'image

Malheureusement, il n'a pas toujours été possible de travailler sur des substrats transparents. En particulier le traitement superhydrophobe étant réalisé sur une plaque de cuivre le substrat est par définition opaque. [10] Nous avons donc observé le ressaut également de côté. Afin de redresser les images nous avons utilisé un plugin de redressement d'image (pour le logiciel ImageJ) réalisé par Adrian Daerr. Nous montrons en Fig. VII.13 l'effet du plugin. Comme on peut le constater sur cette figure

9. Bien que ce dispositif soit, en l'état, trop rudimentaire pour mesurer des épaisseurs. Par ailleurs, l'idée de mesurer des angles et des épaisseurs à l'aide d'un tel motif constituerait une amélioration importante de notre dispositif expérimental et permettrait de nouvelles mesures nécessaires à la confirmation de certaines de nos hypothèses.

10. La possible utilisation d'une grille de cuivre permettant d'obtenir un substrat partiellement transparent n'est pas satisfaisante : le liquide s'écoule sous la grille pour des forts débits.

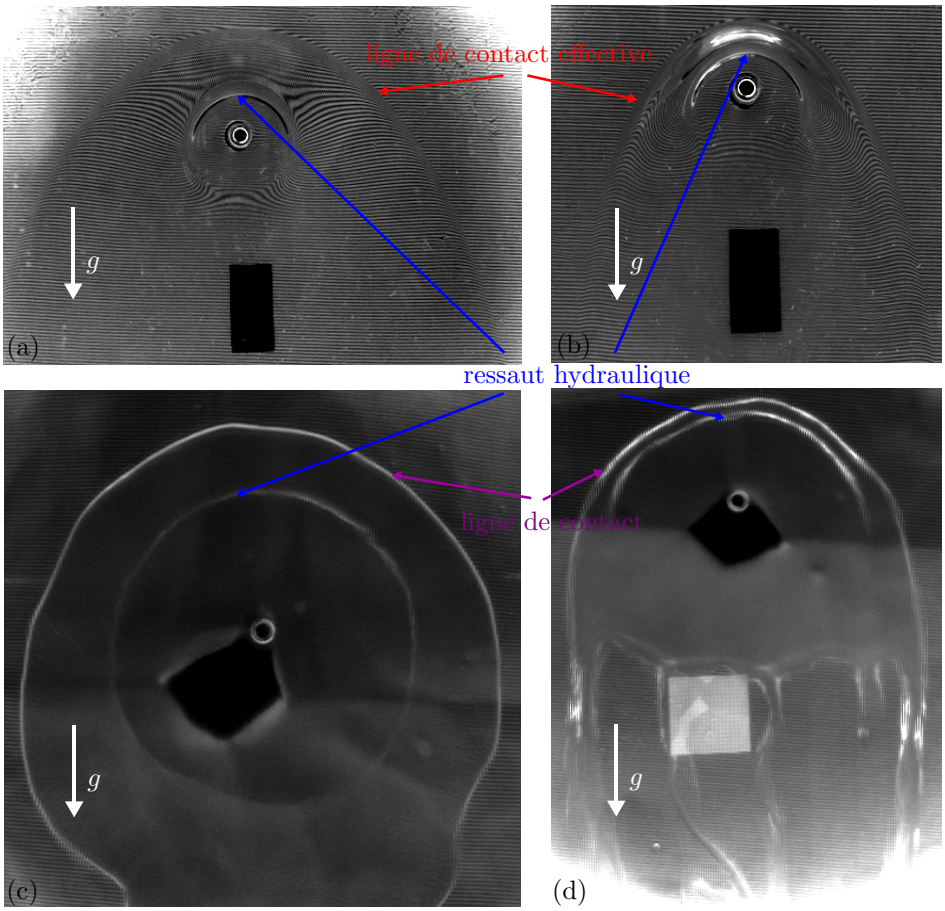


FIGURE *VII.12 – Exemples d'images obtenues à l'aide de notre dispositif. Deux situations de mouillage sont illustrées : le mouillage total (a) et (b) et le mouillage partiel (c) et (d). Dans ces deux situations de mouillage on compare la situation à petit et à grand angle : la figure (a) correspond à 14°, la figure (b) à 59°, la figure (c) à 2,5° et la figure (d) à 75°. Dans les deux situations on travaille à débit constant : en mouillage total* $Q = 12,3$ cm^3/s *et en mouillage partiel* $Q = 22,1$ cm^3/s. *Le disque noir correspond à l'injecteur, la première ligne blanche depuis l'injecteur au ressaut hydraulique et la seconde à la ligne de contact (voir une image similaire sur la Fig. III.3). Sur ces images on peut voir le ressaut hydraulique fermé dans le cas des faibles inclinaisons et ouvert pour les fortes inclinaisons. On observe en outre une ligne de contact effective dans le cas du mouillage total ainsi qu'une ligne de contact en mouillage partiel. Dans le cas du mouillage partiel on observe une zone noire autour de l'injecteur. Il ne s'agit en réalité que d'une déchirure du papier constituant l'écran.*

l'effet du plugin ne semble visuellement pas très impressionnant. Il est pourtant nécessaire sous peine de commettre des erreurs de mesure.

Comme on peut le voir sur la Fig. VII.13 certaines images sont bruitées : les positions du ressaut et de la ligne de contact fluctuent autour de leurs positions moyennes en particulier dans les cas de forte inclinaison. Pour résoudre ce problème on enregistre plusieurs images que l'on moyenne ensuite. Ce sont ces images moyennées que l'on redresse et sur lesquelles on travaille.

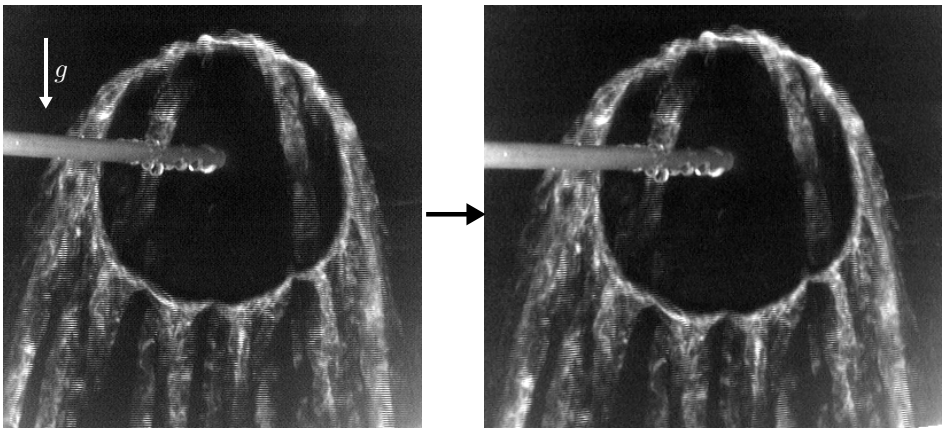


image originale image redressée

FIGURE *VII.13 – Redressement d'une image via notre plug-in sous imageJ. Dans le cas du ressaut sur substrat super hydrophobe on ne peut acquérir les images par en dessous puisque la plaque est opaque. Il est donc nécessaire d'utiliser un plug-in de redressement. L'image originale a été prise sur une plaque inclinée de* $\alpha = 90°$ *à un débit*$Q = 41,4$ cm^3/s.

VII.2.5 Longueurs étudiées

Au cours de ce chapitre nous étudierons, pour simplifier au maximum les mesures quantitatives, principalement deux grandeurs caractéristiques (dans le plan de la plaque) : R_{top} qui est la distance entre le centre de l'injecteur et le ressaut supérieur (rayon parallèle à la projection de $\overrightarrow{g}$ dans le plan de la plaque) et R_{width} qui est la distance entre le centre de l'injecteur et le ressaut à même altitude (rayon vertical à la projection de $\overrightarrow{g}$ dans le plan de la plaque). Ces éléments sont visibles sur la Fig. VII.14.

Nous serons aussi amenés à considérer l'épaisseur w du bourrelet liquide situé entre le ressaut et la ligne de contact (effective dans le cas du mouillage total). On définira ainsi deux mesures : w_{top} l'épaisseur du bourrelet dans le prolongement de R_{top}, et w_{width} l'épaisseur du bourrelet dans le prolongement de R_{width}.

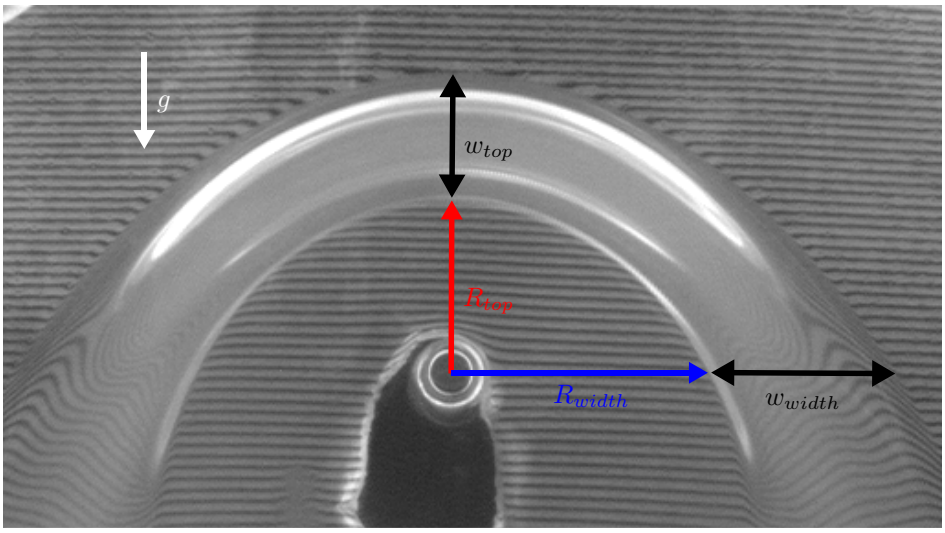


FIGURE *VII.14* – *Définition des longueurs étudiées. On définit R_{top} comme la distance entre le centre de l'injecteur et la position du ressaut hydraulique de plus haute altitude. On définit R_{width} comme la distance entre le centre de l'injecteur et le ressaut hydraulique à altitude constante. w_{top} et w_{width} correspondent aux épaisseurs de bourrelet respectivement en continuation de R_{top} et de R_{width}. La photographie a été prise pour $\alpha = 70°$ et $Q = 35,8$ cm^3/s en situation de mouillage total.*

Chapitre VIII

Ressaut sur plan incliné en mouillage total

VIII.1 Premiers résultats en mouillage total

Muni de ces outils nous allons donc commencer par étudier le cas du mouillage total. Cette étude a deux motivations : la première est que la situation de mouillage total est la plus directement comparable avec ce que nous avons présenté dans la partie précédente. Nous sommes, comme dans le cas précédent dans le cas d'un liquide visqueux qui ne démouille pas.. La deuxième motivation provient du constat que les modèles proposés par Wilson *et al.* . reposent sur le fait que, dans une situation d'impact d'un jet sur un plan fortement incliné, la condition de choc entre fin film et bourrelet liquide se résume à l'équilibre entre inertie et tension de surface. On s'attend donc à l'absence de choc dans le cas du mouillage total où la tension de surface n'exerce aucune force de rappel. On aurait ainsi un écoulement purement gravitaire comme ce qui a été présenté par Edwards *et al.* [41] et donc sans ressaut hydraulique et sans choc.

On a pu le voir sur les premières images présentées dans la section concernant le dispositif expérimental et on le verra dans les Fig. VIII.1 et Fig. VIII.2, on observe bien, tout de même, un ressaut dans le cas de l'impact d'un jet sur un plan incliné. Les modèles présentés jusqu'à présent ne sont donc pas susceptibles de décrire notre situation. Nous allons donc proposer ici une première caractérisation expérimentale de ce ressaut hydraulique.

VIII.1.1 Forme du ressaut

On se propose dans un premier de temps d'observer la forme de notre ressaut hydraulique.
Si l'on se place à débit constant et que l'on fait varier l'angle α de la plaque on peut observer les structures présentées en Fig. VIII.1.

Qualitativement on constate que pour les faibles inclinaisons le ressaut est fermé et entoure entièrement l'injecteur. A mesure que l'on augmente l'inclinaison on observe une disparition progressive du ressaut dans la partie aval jusqu'à ce que le choc n'apparaisse plus que dans la partie amont et que le liquide s'écoule en film à peu près homogène dans la partie aval. Ainsi entre 10° et 20° on observe que le ressaut s'ouvre légèrement au point le plus bas. Pour s'ouvrir finalement entièrement autour de 60°.

On observe aussi que R_{width} varie assez peu sur l'ensemble de la gamme d'angles présentée ici tandis que R_{top} diminue presque d'un facteur 2. Les courbures du front changent donc avec l'angle

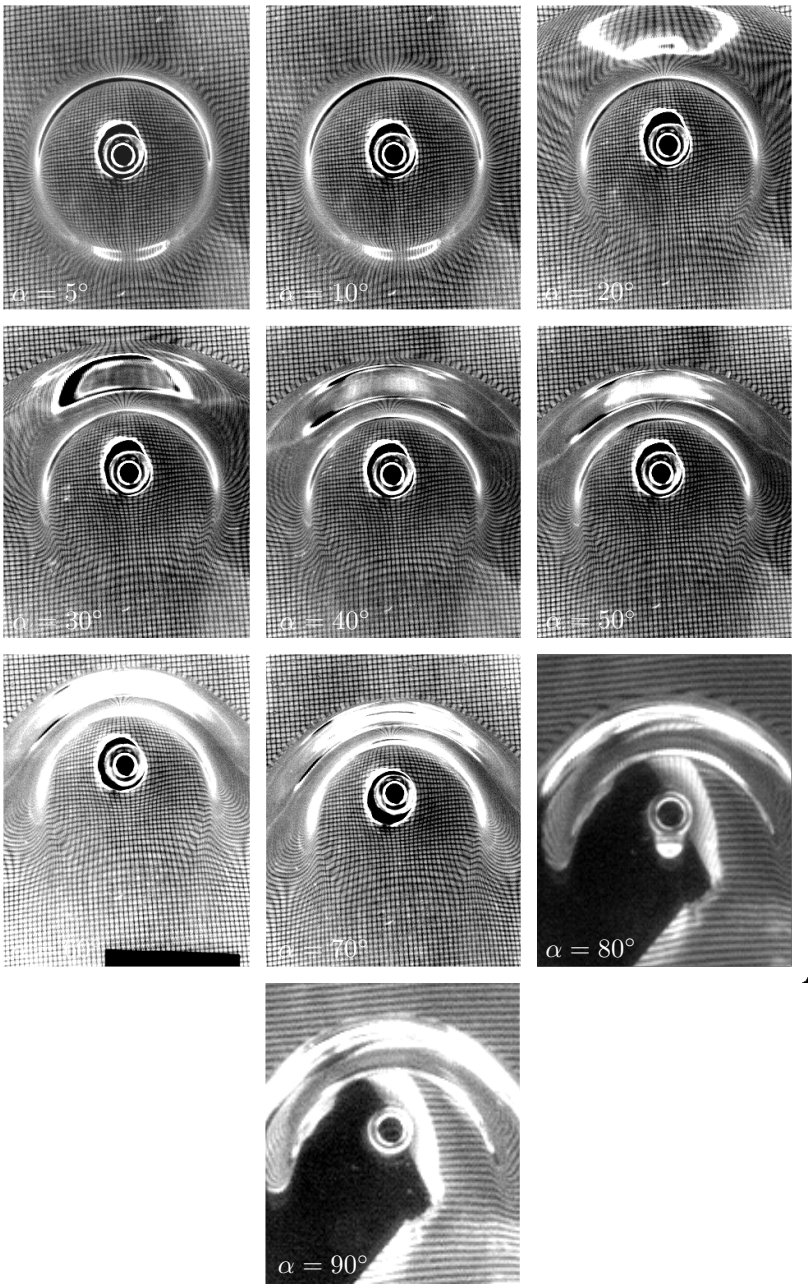


FIGURE *VIII.1 – Photographies prises de dessous de ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage total à débit fixé ($Q = 14,8$ cm^3/s) pour 10 angles d'inclinaison α différents (5° puis tout les 10° entre 10° et 90°). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 3$ mm. On constate que pour les faibles inclinaisons le ressaut est fermé puis qu'il s'ouvre progressivement en augmentant α. On constate aussi un rétrécissement de l'épaisseur du bourrelet avec l'augmentation de l'inclinaison. A première vue les variations de R_{width} semblent très faibles tandis que les variations de R_{top} sont importantes.*

entre 5 et 90°.

Si l'on fixe maintenant l'angle et que l'on augmente le débit on peut observer les structures présentées en Fig. VIII.2.

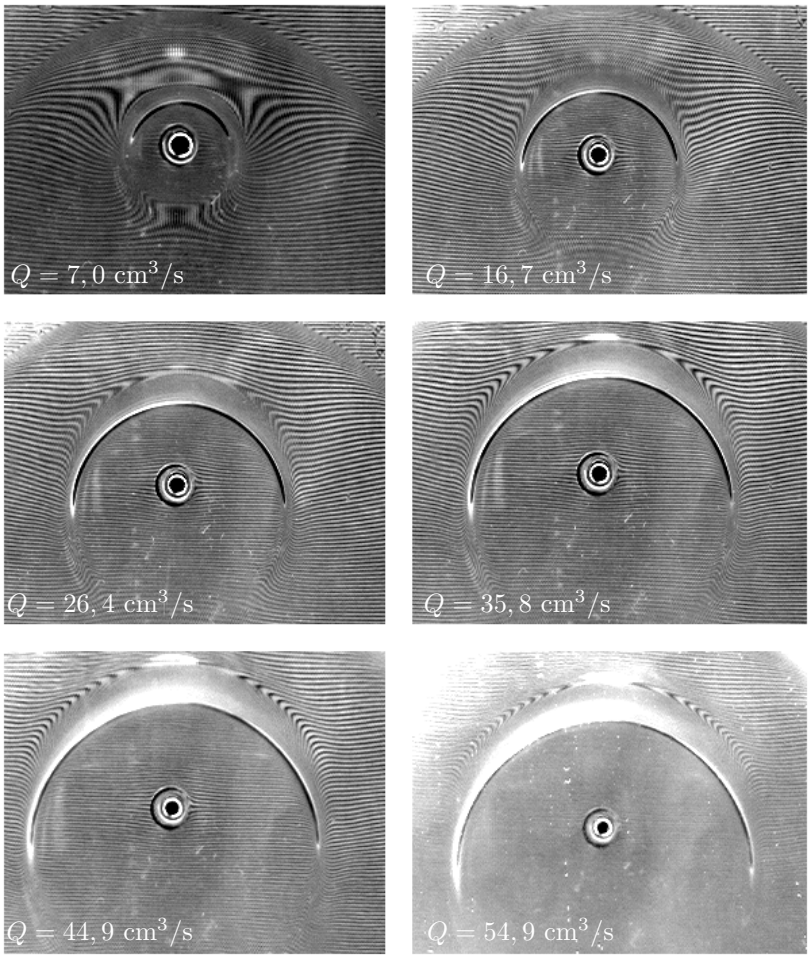


FIGURE *VIII.2 – Photographies prises du dessous de ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage total angle d'inclinaison fixé ($\alpha = 14°$) pour 6 débits différents (7; 16,7; 26,4; 35,8; 44,9; 54,9* cm^3 : s *). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 3$* mm*. On constate que pour les faibles débits le ressaut est fermé puis qu'il s'ouvre progressivement en augmentant Q.*

On a choisi volontairement un angle faible où le ressaut était susceptible d'être fermé. Comme on peut le voir, à mesure que l'on augmente le débit le front aval s'ouvre progressivement si bien qu'entre le plus petit débit (7,0 cm^3/s) et un débit intermédiaire (35,8 cm^3/s) le front semble s'être ouvert en aval.

Comme on peut le constater il n'est pas aisé de définir un couple (α, Q) pour lequel on observe une ouverture du ressaut. Nous avons donc renoncé à quantifier cette transition entre un ressaut fermé et un ressaut ouvert.

Cependant on peut essayer d'interpréter qualitativement ce phénomène d'ouverture aval du ressaut :

En aval le liquide décélère en raison des contraintes visqueuses qui s'exercent sur lui mais accélère en raison de la gravité. On peut donc supposer que lorsque la gravité est suffisamment forte le liquide ne passe jamais en zone sous critique et s'écoule toujours dans un régime super critique jusqu'au bord de plaque. Cela est assez cohérent avec les résultats présentés dans les Fig. VIII.1 et Fig. VIII.2 :

Sur la Fig. VIII.1 on constate que lorsque la gravité augmente on observe bien une ouverture de

plus en plus large en aval du ressaut. Plus on incline la plaque plus l'accélération due à la gravité est forte dans la zone aval jusqu'à ouvrir entièrement le front inférieur.

La Fig. VIII.2 présente elle aussi une certaine cohérence avec le phénomène proposé : en effet plus on augmente le débit plus l'inertie du liquide au niveau de l'impact du jet est importante et plus elle mettra du temps à s'atténuer (du point de vue d'une particule de fluide) ; [1] et donc, plus le liquide mettra de temps à ralentir plus les effets de l'accélération de la gravité seront importants. Cela peut expliquer pourquoi plus les débits sont élevés moins le ressaut aval est marqué pour aller jusqu'à s'ouvrir.

Toutefois un autre phénomène est susceptible d'intervenir : il est possible que le ressaut hydraulique devienne tout simplement instable à mesure que la gravité augmente. Dans ce cas le choc pourrait être advecté vers l'aval sous forme d'onde de surface. La Fig. VIII.3 montre en effet la présence importante d'ondes de surface en aval.

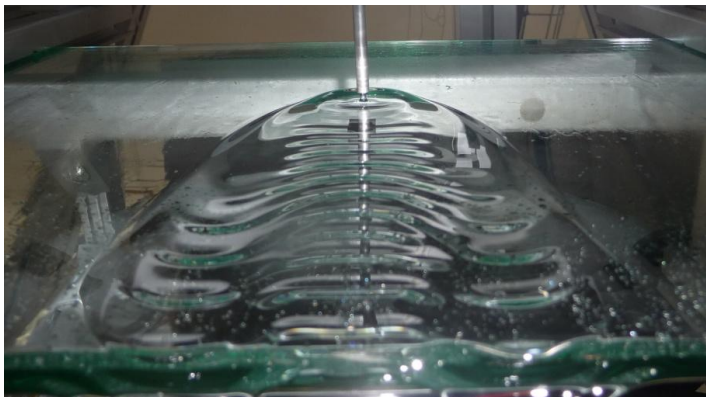


FIGURE *VIII.3 – Front d'ondes en aval d'un ressaut sur un plan incliné en mouillage total. La structure de ces ondes est assez complexe. Il est possible que le ressaut aval soit instable et advecté sous forme d'ondes...*

VIII.1.2 Bourrelet macroscopique et ligne de contact effective

Si l'on cherche à décrire la structure découlant de l'impact d'un jet on observe certes un film mince puis un choc que nous appelons ressaut hydraulique mais nous avons vu dans la partie précédente que ce ressaut était aussi influencé par la partie "externe" (c'est-à-dire la zone sous-critique). Il est donc important dans notre cas d'observer et de chercher à décrire cette zone sous critique.

Comme on peut le voir sur les images de la Fig. VIII.1 pour $\alpha > 30°$ [2], on observe un bourrelet liquide qui entoure le ressaut. Ce bourrelet liquide est lui même défini par une épaisseur w séparant la position du choc d'une position où l'épaisseur de liquide cesse d'être macroscopique. On observe donc une "ligne de contact effective" délimitant la zone où l'épaisseur de liquide est macroscopique d'un éventuel film précurseur à l'échelle micro voir nanoscopique.

Cette "ligne de contact effective" est bien visible sur les images (nous l'avons par exemple signalée sur la la Fig. VII.12 mais on peut également l'observer sur la Fig. VIII.1) et l'on peut s'étonner de cette transition brutale entre deux échelles. Ce raccordement se traduit en effet par un "angle de contact

1. Ce raisonnement n'est pas spécifique au cas incliné, il s'applique aussi au cas horizontal et explique que le rayon croisse avec le débit.

2. Ce bourrelet liquide est bien sûr visible pour des inclinaisons plus faibles. Il n'est simplement pas visible dans le champ des images présentées ici. Nous pouvons même l'observer pour des angles α autour de 2,5°.

effectif" comme cela est visible sur la Fig. VIII.4.

FIGURE *VIII.4 – Vue de côté d'un ressaut hydraulique sur plan incliné en situation de mouillage total. Sur cette photographie on peut observer un "angle de contact effectif" séparant une zone où le film liquide est macroscopique et une zone où il est micro voir nanoscopique. On voit cette "ligne de contact effective" tout le long de l'écoulement.*

Cet "angle de contact" statique est assez inattendu dans un cas de mouillage total. [3]

Sur l'axe central (c'est-à-dire l'axe selon R_{top}), on constate que l'interface est presque horizontale pour un angle d'inclinaison α en dessous de 60°. ll semble alors, qualitativement, que "l'angle de contact" β au niveau de $r = R_{top} + w_{top}$ corresponde grossièrement à l'angle d'inclinaison de la plaque : $\beta \approx \alpha$ aux petits angles. [4]

Notons également qu'on observe cet angle de contact effectif tout le long du bourrelet liquide (par exemple pour $R_{width} + w_{width}$) (voir Fig. VIII.4). La Fig. VIII.5 montre en effet que la ligne de contact est visible sur tout l'écoulement et la déformation du motif quadrillé montre que "l'angle de contact" demeure important tout le long de cette ligne de contact.

Nous ne savons pas encore ce qui fixe la valeur de cet angle de contact effectif inattendu et son évolution le long du bourrelet. Cet effet mériterait une étude approfondie à part entière.

VIII.1.3 Les lois rayon-débit

Il est temps maintenant de faire intervenir des éléments plus quantitatifs afin de permettre une meilleure appréhension du phénomène. On se propose donc de tracer R_{top} et R_{width} respectivement en fonction du débit Q à angle constant et en fonction de l'angle α à débit constant.

À α constant

3. La seule trace d'angle de contact effectif en cas de mouillage total est le cas d'un angle de contact dynamique lors de l'avancé d'une couche de liquide en mouillage total.

4. Des mesures sont en cours afin de mesurer et de préciser l'évolution de cet angle de contact effectif β en fonction de l'angle d'inclinaison de la plaque.

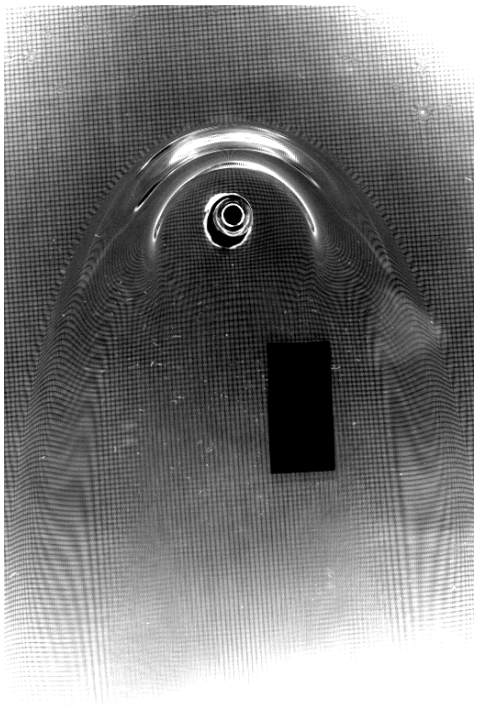


FIGURE *VIII.5 – Sur cette photographie prise de dessous d'un ressaut sur plan incliné en mouillage total on observe la ligne de contact "effective" séparant l'écoulement macroscopique d'un film précurseur.*

Dans un premier temps on travaille à angle d'inclinaison constant en faisant varier le débit sur toute la gamme accessible. L'injecteur a un diamètre intérieur ϕ de 3 mm. Les mesures sont reportées sur la Fig. VIII.6.

Une première constatation est que, comme on peut le voir sur la Fig. VIII.6, la dépendance en angle ne semble pas très marquée [5].

En ce qui concerne R_{top} on constate que quel que soit l'angle d'inclinaison on observe une loi rayon-débit similaire à celle observée dans la Partie I. C'est-à-dire qu'à angle fixé l'ensemble des points expérimentaux s'ajuste très bien sur une loi de puissance, de préfacteur et d'exposant très proches de ceux obtenus pour le même liquide dans le cas du ressaut horizontal. On trouve un exposant commun à toute ces lois de puissances, indépendant de l'inclinaison, et très proche de 5/8 (pour mémoire on avait, dans le cas du ressaut horizontal, des exposants effectifs de l'ordre de 3/4 : voir III.6). Cet exposant commun est particulièrement bien visible sur la Fig. VIII.7 qui correspond à la représentation log-log des courbes représentées en Fig. VIII.7 (a).

Pour R_{width}, on constate une dépendance en inclinaison bien plus faible que dans le cas de R_{top} et à nouveau un comportement très similaire au cas horizontal (une loi de puissance d'exposant et de préfacteur proche de ceux obtenus dans le cas horizontal modélisera bien chaque courbe à α donné). Les points expérimentaux peuvent être ajustés par des lois $R_{width} \approx f(\alpha)Q^c$ avec $f(\alpha)$ une fonction dépendant faiblement de l'inclinaison α du substrat et c un exposant commun. Cet exposant c est de l'ordre de 0,7 c'est-à-dire un exposant entre 5/8 et 3/4. On peut aussi observer cet exposant sur la Fig. VIII.7 (b) en log-log.

5. Nous reviendrons plus précisément sur cette question dans les paragraphes suivants.

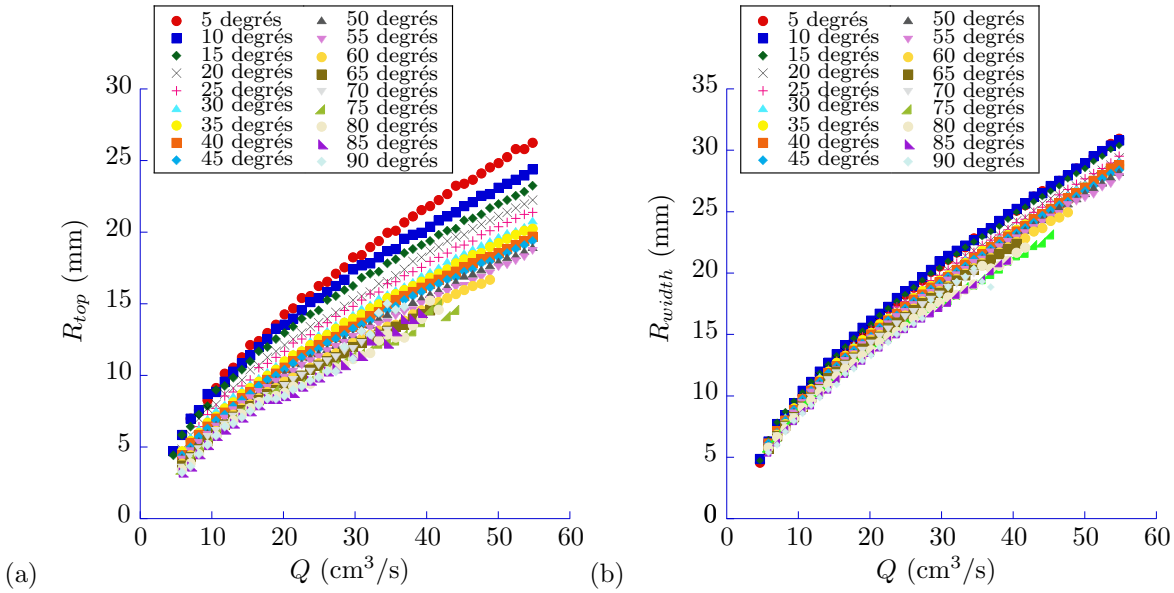


FIGURE *VIII.6 – Rayons caractéristiques du ressaut sur un plan incliné en situation de mouillage total (R_{top} et R_{width}) en fonction du débit pour plusieurs angles d'inclinaison du plan (α variant de 5 à 90°). L'injecteur a un diamètre interne de $\phi = 3$ mm. (a) R_{top} en fonction de Q les lois $R(Q)$ semblent suivre des comportements similaires quel que soit l'angle utilisé. (b) R_{width} en fonction de Q : on constate la faible dispersion des points. R_{width} semble extrêmement peu dépendant de l'angle. La tendance de R_{width} semble extrêmement similaire à celle de R_{top}. Le liquide utilisé est une huile silicone 20* cS.

Sur la Fig. VIII.7 on peut donc observer les variations de R_{top} et R_{width} en représentation log-log. Les variation de R_{top} suivent une loi de puissance en $0,64 \pm 0,02$ et ce pour tous les angles α considérés. Cet exposant est très proche de $5/8$ ($= 0,625$). En ce qui concerne R_{width} on remarque que les points s'écartent très légèrement d'une loi de puissance en $5/8$. En effet, l'exposant commun aux différents angles est $0,68 \pm 0,02$. Toutefois on peut considérer en très bonne approximation que R_{top} et R_{width} se décrivent très bien par une loi en $Q^{5/8}$. C'est un premier résultat important : à angle donné il semble donc, comme on pouvait l'observer sur la Fig. VIII.2, que la structure est globalement conservée en augmentant le débit. En tout état de cause le rapport d'aspect R_{top}/R_{width} est indépendant du débit (et ne dépend que de l'angle d'inclinaison de la plaque).

Une loi en $Q^{5/8}$ est un résultat très paradoxal. En effet ce résultat fait directement écho à la loi d'échelle proposée par Bohr *et al.* (voir II.3 et en particulier l'équation II.61) et prédisant exactement le même exposant pour le débit. Pourtant, nous l'avons vu, cette loi ne fonctionnait clairement pas dans le cas du ressaut horizontal du fait des corrections logarithmiques. Nous sommes donc devant une contradiction apparente : la loi d'échelle de Bohr *et al.* ne fonctionne pas dans le cas horizontal "simple" mais apparaît comme correcte dans le cas incliné, pour laquelle elle n'est pas spécifiquement prévue. [6]

À Q constant

6. Ce résultat peut probablement s'expliquer par les conditions limites qui sont radicalement différentes dans les deux cas : dans le cas horizontal les conditions aux limites sont imposées par la géométrie axisymétrique tandis que dans le cas incliné les conditions aux limites sont peut-être plus libres de s'ajuster. Nous reviendrons sur ces questions dans les paragraphes concernant les éléments de modèle que nous proposons.

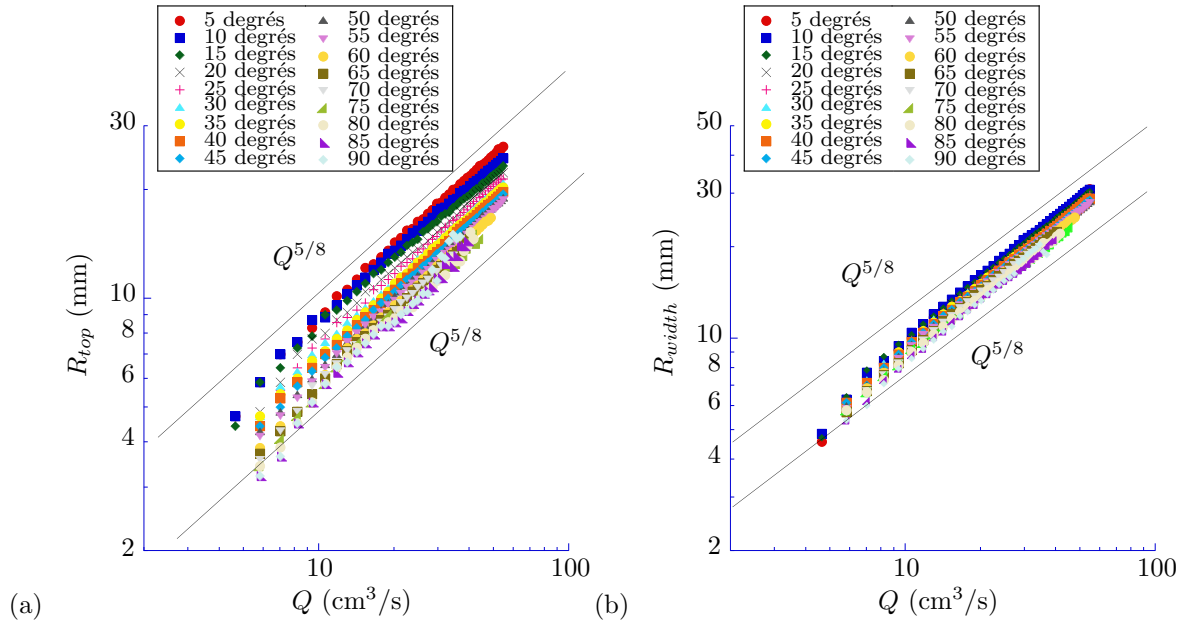


FIGURE *VIII.7 – Représentation en log-log de l'ensemble de données présenté en Fig. VIII.6 : R_{top} et R_{width} en fonction de Q pour des angles d'inclinaisons variant de 5 à 90°. Les lignes noires correspondent à $Q^{5/8}$. (a) Les lois $R_{top}(Q)$ sont des lois de puissances en 5/8 pour tous les angles étudiés. (b) Les lois $R_{width}(Q)$ s'assimilent à des lois de puissance en 0,68 et ce quelle que soit l'inclinaison. On visualise particulièrement bien la faible dispersion des valeurs de R_{width} en fonction de l'angle.*

On se propose maintenant de tracer les données présentées dans les figures Fig. VIII.6 et Fig. VIII.7 mais cette fois-ci à débit fixé en faisant varier l'angle d'inclinaison de la plaque. On obtient alors pour R_{top} et R_{width} les graphes présentés en Fig. VIII.8.

La Fig. VIII.8 nous permet de quantifier ce que nous avions entrevu qualitativement sur la Fig. VIII.6 à savoir la faible influence de la gravité sur la position du ressaut dans le cas d'un impact sur un plan incliné. Cette représentation nous permet de déterminer la fonction de α servant de pré facteur à la loi en $Q^{5/8}$ décrivant les variations de R_{top}. Comme on peut le constater cette fonction varie lentement et n'est pas triviale. On ne peut en particulier pas utiliser les fonctions trigonométriques de manière intuitive. A défaut d'une description "physique" on se contente d'une description en loi de puissance : le préfacteur décroît en $\alpha^{-0,2}$ sur la gamme représentée. Cette décroissance représente, sur l'ensemble de la gamme d'angle, une variation de 45% par rapport à la valeur à 5°.

La Fig. VIII.8 (b) permet de déterminer la fonction de α préfacteur de la loi décrivant cette fois les variations de R_{width}. Comme dans le cas précédent, on se contente de décrire les variations de R_{width} en fonction de α par une loi de puissance en $\alpha^{-0,05}$. On constate environ 15 % de variation entre les deux points extrêmes de la courbe. Par la suite, dans nos tentatives de modèles, on considérera que R_{width} est indépendant de α ce qui semble assez justifié à l'ordre 1.

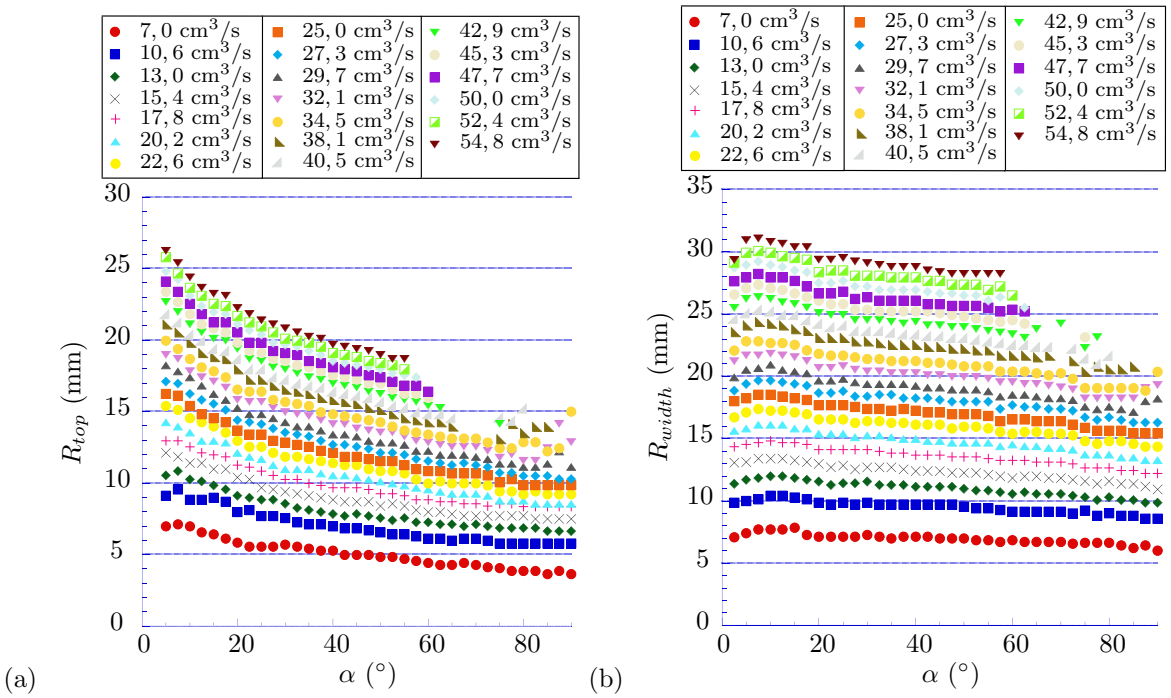


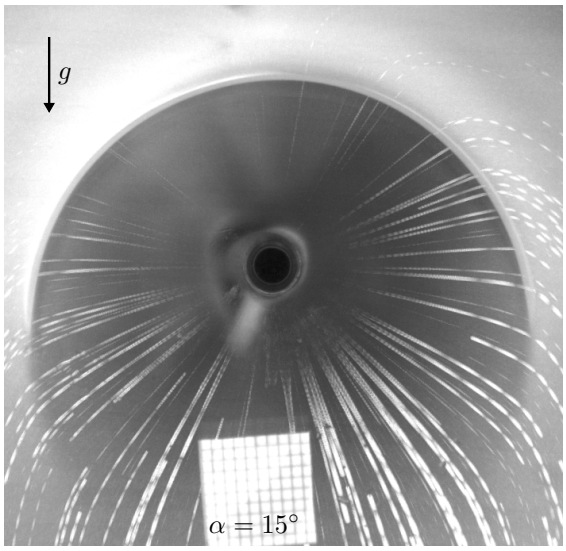
FIGURE *VIII.8 – Le jeu de données présenté précédemment est maintenant présenté comme R_{top} et R_{width} en fonction de l'angle d'inclinaison α pour des débits allant de 7 à 54,* cm^3/s. *(a) R_{top} en fonction de α : aucune tendance utilisant des fonctions trigonométriques ne semble apparaître. Toutefois si l'on ajuste les points par des lois de puissance on trouve que toutes les courbes correspondent à une même loi en puissance -0,2 avec des préfacteurs différents. (b) R_{width} en fonction de α : de la même manière aucune tendance simple utilisant des fonctions trigonométriques ne semble apparaître. En ajustant les points par des lois de puissance on trouve que toutes les courbes correspondent à une même loi en puissance -0,05 avec des préfacteurs différents. Cela confirme bien notre observation d'une très faible dépendance en α pour R_{width}.*

VIII.1.4 Ecoulement dans le ressaut

Cette dernière remarque tend à suggérer que l'influence de l'inclinaison est très faible pour R_{width}. Il est donc tentant de considérer que l'écoulement dans la zone interne change assez peu avec α, voire que cet écoulement reste radial, même en cas de forte inclinaison. Est-ce que cela est vrai pour toute la partie supérieure du ressaut ? Pour répondre à cette question on injecte des bulles dans le ressaut. On obtient alors les structures de l'écoulement présentées en Fig. VIII.9.

Comme on peut le voir sur la Fig. VIII.9 l'écoulement reste parfaitement radial dans la zone interne (on ne mesure pas plus de 4° d'écart par rapport à une ligne de courant radial). On retrouve ce résultat pour toutes les inclinaisons et pour toutes les directions vers l'amont. Vers l'aval on voit que l'écoulement est radial puis se courbe pour suivre la gravité. Cela explique la proximité des résultats obtenus avec le cas simple du ressaut sur plan horizontal : dans la zone interne l'écoulement est quasiment inchangé. En ce qui concerne la zone sous critique (ou externe), on voit que l'écoulement est principalement gravitaire. Ce n'est pas une surprise : si l'on considère que le nombre de Froude est du même ordre que dans le cas horizontal on s'aperçoit que le nombre de Froude au carré qui compare les effets inertiaux aux effets de la gravité est petit devant 1 dans la zone externe.

On considérera donc pour nos tentatives de modèle que l'écoulement est radial .

(a) 

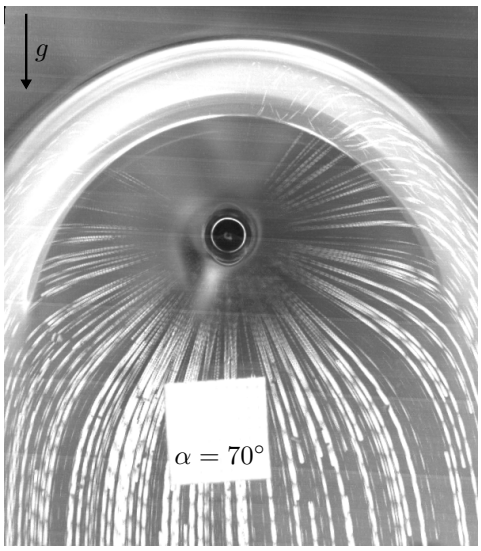
(b) 

FIGURE *VIII.9 – Vues du dessous du ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage total pour deux angles d'inclinaisons : (a) 15° et (b) 70° et à débit constant : $Q = 26,4$ cm^3/s. Des traceurs ont été injectés dans la solution et permettent de suivre les lignes de courant. Comme on peut le voir les lignes de courants sont radiales dans la zone interne, même en cas de forte inclinaison. La situation au delà du choc est, elle, beaucoup plus difficile à décrire. On observe en outre qu'en aval les lignes de courants se courbent lorsqu'elles sont suffisamment éloignées du jet.*

VIII.2 Un premier modèle en mouillage total

On cherche ici à construire un premier modèle pour le ressaut sur plan incliné. Pour plus de simplicité on se concentrera sur R_{width} et R_{top}. Cela nous permettra de ne considérer que deux situations pour la gravité : dans le cas de R_{width} la gravité ne s'oppose pas à l'écoulement tandis que dans le cas de R_{top} elle s'y oppose frontalement. L'idée en étudiant uniquement ces deux rayons est de mettre en évidence les principaux éléments physiques qui composent le problème mais de pouvoir résoudre le problème avec des lois analytiques.

La zone interne

Aux vues des résultats expérimentaux montrant les lignes de courant radiales dans la zone interne nous allons faire une première hypothèse : on suppose que l'écoulement est purement radial ($u_\theta = 0$), on suppose en outre que la gravité est négligeable dans la zone interne.

Pour modéliser la vitesse dans la zone interne, il est possible de construire un modèle inspiré de Watson. Si l'on suppose que $r^3 \gg l^3$ [7] on retrouve un profil de vitesse proche de celui d'un profil parabolique.

On considérera donc ici un profil parabolique, encore une fois pour des raisons de facilité :

$$\langle u(r) \rangle = u(r,h) \left(2\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right), \tag{VIII.1}$$

7. En réalité il y a à peu près un facteur 10 entre ces deux termes au niveau du ressaut.

où h est la hauteur de liquide selon z. On considèrera comme dans le modèle de Wilson *et al.* que la contrainte visqueuse a pour forme VII.2 c'est-à-dire :

$$\sigma = \eta \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} \approx 3\eta \frac{\langle u \rangle}{h},$$

où η est la viscosité dynamique du liquide.

Comme dans le cas de Wilson *et al.* on réalise un bilan de quantité de mouvement. Le flux de quantité de mouvement par unité s'écrit comme dans l'équation VII.3 :

$$M = \int_0^h \rho u^2 \mathrm{d}z = \frac{6}{5}\rho \langle u \rangle^2 h,$$

avec ρ la masse volumique du liquide. Le bilan de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d}{dr}\left[r\langle u \rangle^2 h\right] = -\frac{5}{2}\nu \frac{r\langle u \rangle}{h},$$

avec ν la viscosité cinématique (voir VII.4). A partir de ce bilan on peut obtenir l'équation VII.6 :

$$\frac{1}{\langle u \rangle(r)} - \frac{1}{\langle u \rangle(r_0)} = \frac{10\pi^2\nu}{Q^2}\frac{1}{3}(r^3 - r_0^3),$$

où r_0 est la position juste après l'impact. Puisque nous avons considéré que $r^3 \gg l^3$ on peut aussi considérer comme précédemment que $r^3 \gg r_0^3$ et $\langle u \rangle(r_0) \gg \langle u \rangle(R_J)$. On obtient ainsi le rayon attendu pour le choc déjà présenté en VII.7 :

$$R_J^3 = \frac{3Q^2}{10\pi^2\nu}\frac{1}{\langle u \rangle(R_J)}.$$

En situation de mouillage total ce terme en $\gamma(1 - cos\beta)$ est discutable pour servir de condition d'arrêt, en effet, comme nous l'avons suggéré, on peut négliger cet éventuel terme capillaire en raison de la présence du film précurseur.

Il convient à partir de ce point de distinguer R_{top} et R_{width}.

VIII.2.1 Calcul de R_{top}

(i) On considère que l'écoulement est radial et donc que u_θ est nul.

(ii) Si l'on se réfère à l'intégration numérique réalisée par Wilson *et al.* de l'équation VII.11 (qui correspond au modèle présenté jusqu'à présent dans lequel on a ajouté un terme de gravité) on observe que l'influence de la gravité dans le cas extrême de $\alpha = 90°$ n'a qu'un effet négligeable dans la zone interne. Comme nous considérons une large gamme d'angles et que l'on a vu que la différence entre R_{top} à $\alpha = 5°$ et $90°$ pouvait atteindre un facteur 2 on considèrera que cette dépendance de la gravité est négligeable devant les principaux effets qui réduisent R_{top}.

(iii) Le bourrelet liquide interagit très fortement sur le ressaut : le poids du bourrelet tend à diminuer R_{top}.

Compte tenu de ces observations, il ne semble pas judicieux de traiter le problème via la zone interne comme proposé plus haut mais plutôt de nous intéresser au bourrelet liquide. L'idée est d'utiliser une approche par l'extérieur similaire à ce que nous avions fait dans la partie précédente.

VIII.2.1.1 Bourrelet liquide

Pour modéliser le bourrelet, on va avoir recours à une hypothèse simplificatrice. On considère que dans le bourrelet les effets de la gravité sont grands devant tous les autres (effets inertiels et de tension de surface). On considère donc le bourrelet comme un coin de liquide, comme cela est représenté en Fig. VIII.10 : l'interface supérieure est supposée horizontale et l'on suppose une interface verticale au niveau du choc. La hauteur du bourrelet H_J vaut ainsi $sin\alpha w_{top}$ (où w_{top}, est, pour mémoire, la largeur du bourrelet dans la direction de R_{top}). Cette description du bourrelet, bien que grossière, semble assez réaliste aux vues de la Fig. VIII.10.

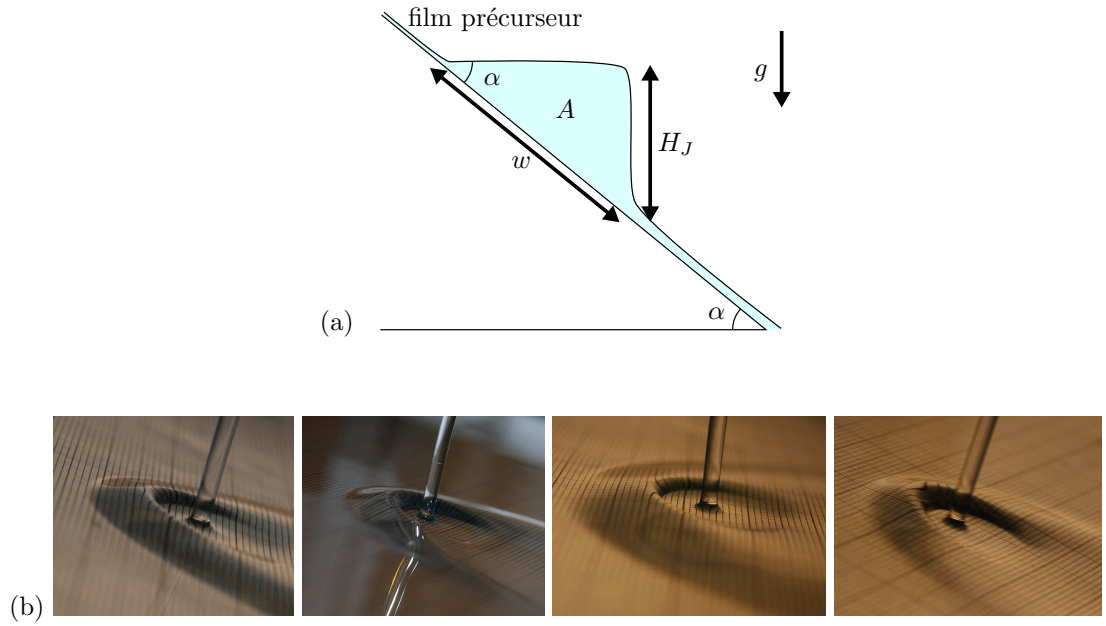


FIGURE *VIII.10 – (a) Schéma représentant notre modèle pour le bourrelet. On se propose de modéliser le bourrelet comme un coin liquide d'aire A. Le bord supérieur est horizontal et le mur liquide est vertical. On rappelle que l'épaisseur du bourrelet est nommé w_{top}. (b) Photographies de bourrelet liquide avec une inclinaison assez faible illustrant notre modèle.*

Il est possible de calculer w_{top} à l'aide d'un modèle simple pour cette forme de bourrelet [8]. Pour ce faire on peut calculer l'aire du triangle A en fonction de w_{top} et de α. On trouve, après calcul :

$$A = \frac{1}{2} w_{top}^2 \, sin\alpha \, cos\alpha. \tag{VIII.2}$$

Calculer la valeur du bourrelet se fait en considérant un petit morceau du bourrelet liquide de volume $R_{top}\theta$ avec θ tendant vers 0. On fait le choix de considérer R_{top} plutôt que $(R_{top} + w_{top})/2$ afin de simplifier le problème et d'obtenir une solution analytique [9]. Ces informations sont résumées dans le schéma de la Fig. VIII.11.

Si l'on applique la conservation du débit (on suppose toujours que l'écoulement est radial) on obtient :

$$Av = Q\frac{\theta}{2\pi}, \tag{VIII.3}$$

8. Ce modèle est inspiré du calcul proposé par Wang *et al.* dans [111].
9. Bien sûr l'hypothèse consistant à considérer $R_{top} \approx (R_{top} + w_{top})/2$ est très discutable. On verra plus loin qu'elle n'influe que peu sur le résultat final.

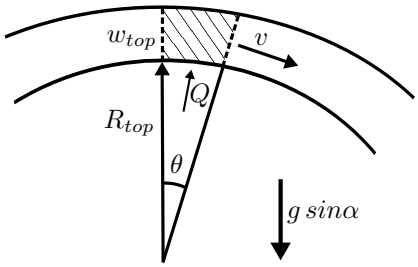


FIGURE *VIII.11 – Schéma de principe concernant l'estimation de w_{top}. On considère un petit volume de contrôle grisé avec θ faible. En considérant la conservation du débit dans notre volume de contrôle et la conservation de la quantité de mouvement (inertie vs gravité) on peut estimer la largeur du bourrelet.*

où v est la vitesse longitudinale du bourrelet.

On applique dans un second temps la conservation de la quantité de mouvement sur l'élément hachuré visible en Fig. VIII.11. On suppose que la quantité de mouvement apportée par l'inertie au niveau du choc est négligeable ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'un écoulement gravitaire purement radial.[10] On obtient donc pour la quantité de mouvement l'équilibre entre la quantité de mouvement due à la gravité et la quantité de mouvement due à l'inertie du liquide dans le bourrelet :

$$\rho g\, sin\alpha\, A R_{top} \mathrm{d}\theta\, sin\theta = \mathrm{d}(\rho A v^2). \tag{VIII.4}$$

Comme l'on considère un angle θ qui tend vers 0 on peut considérer que $\sin\theta \approx \theta$. La conservation de la quantité de mouvement (VIII.4) et du débit (VIII.3) amène à l'équation différentielle suivante :

$$g\, sin\alpha\, R_{top}\theta^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\theta^2 v^2}{2}\right). \tag{VIII.5}$$

On obtient ainsi :

$$v^2 = g\, sin\alpha\, R_{top}\frac{\theta^2}{2}. \tag{VIII.6}$$

En combinant maintenant (VIII.6), (VIII.3) et (VIII.2) on obtient une expression pour w_{top} :

$$w_{top} = \left[\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{sin\alpha^3 cos\alpha^2}\frac{Q^2}{R_{top}g}\right]^{1/4}. \tag{VIII.7}$$

On se propose donc de tester cette loi à débit fixé (6 et 34 cm^3/s) en faisant varier l'inclinaison de 5° à 90° (voir Fig. VIII.12 (a)) et à angles constants (14° et 59°) en faisant varier le débit sur l'ensemble de la gamme accessible (voir Fig. VIII.12 (b)). La valeur de R_{top} dépendant à la fois de Q et de α il est plus aisé de comparer w_{top} mesuré à w_{top} attendu par le modèle.

La Fig. VIII.12 (a) montre un excellent accord de tendance entre théorie et expérience pour des angles compris entre 6° et 60° et ce pour les deux débits testés. Entre 60° et 70,° il est très clair que la tendance change, cependant l'ordre de grandeur prédit reste tout à fait cohérent avec celui attendu. Au delà de 70° les points sont franchement divergents.

Il est à noter que l'écart à la théorie dans la limite des très petits angles était prévisible : des

10. Notons que dans le cas du ressaut horizontal le terme inertiel est de l'ordre de 15% du terme gravitaire. Notre hypothèse semble donc raisonnable lorsque l'on incline la plaque et que l'on augmente de fait la hauteur du liquide en sortie.

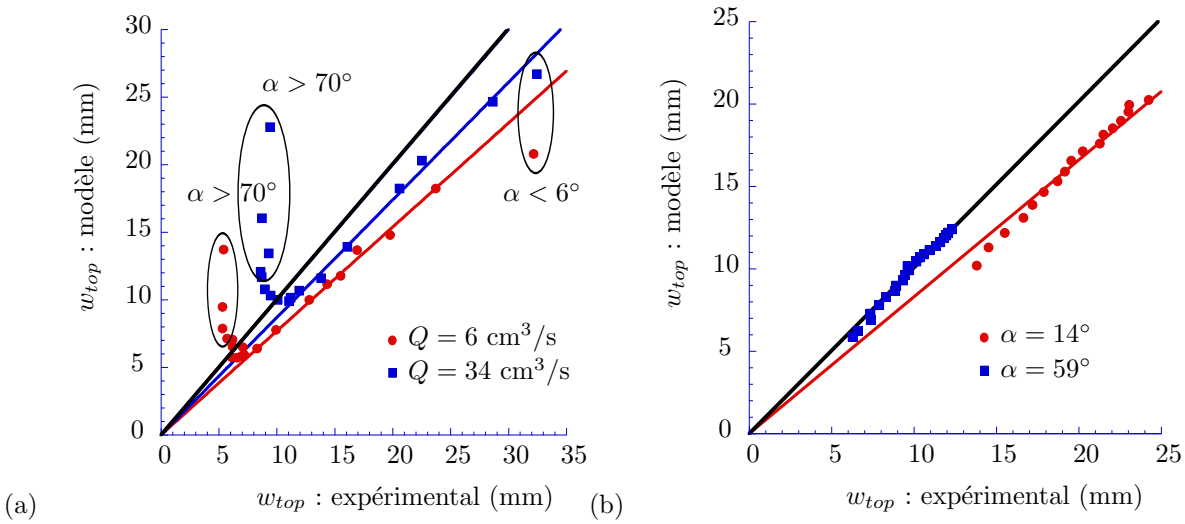


FIGURE *VIII.12 – La loi VIII.7 donnant w_{top} de manière théorique est testée en regard des valeurs expérimentales de w_{top} dans deux situations : (a) à débit fixé en faisant varier α de 5° à 85° et (b) à angles fixés (14° et 59°) en faisant varier le débit de 6 à 34* cm^3/s. *La ligne noire correspond donc au résultat attendu par la théorie. (a) En rouge $Q = 6$* cm^3/s *et en bleu $Q = 34$* cm^3/s. *On trouve bien un comportement linéaire entre l'expérience et la théorie pour α compris entre 6° et 60°. Entre 60° et 70° on s'écarte légèrement de la courbe et au delà le modèle et la théorie ne sont clairement plus en accord. Le préfacteur entre w_{top} expérimental et w_{top} théorique devrait être de 1. On constate que les courbes si elles sont bien linéaires ont une pente un peu plus faible. (b) En rouge est représenté le cas $\alpha = 14°$ et en bleu le cas $\alpha = 59°$. On trouve bien un comportement linéaire (avec ici encore un préfacteur légèrement différent de celui attendu ce qui est cohérent avec (a)) excepté pour les tout premiers points ce qui explique le comportement différent de la courbe $Q = 6$* cm^3/s *dans (a).*

effets de conditions limites se font sentir et la contribution des effets inertiaux devient difficilement négligeable. [11]

Le comportement aux grands α pouvait lui aussi s'anticiper. Mathématiquement on voit bien que w_{top} dépend de $cos\,\alpha$ à la puissance -1/2. Le modèle ne pouvait donc que diverger. Physiquement, la forme du bourrelet est assez différente lorsque l'on tend vers $\alpha = 90°$ puisque l'on continue à observer un choc. Un modèle d'un bourrelet triangulaire ne permet géométriquement plus de choc. A très grands α le choc cesse donc d'être vertical.

Ces résultats sont tout à fait cohérents avec une observation que nous avons pu faire : pour des angles supérieurs à 52,5° on voit que le choc se met à osciller très légèrement pour des débits très élevés. A mesure que l'on augmente l'inclinaison, cette instabilité de la position du choc se fait plus forte en amplitude et évolue sous certaines conditions avec le temps : elle s'amplifie jusqu'à briser le bourrelet liquide dans son ensemble. On peut observer un tel phénomène dès $\alpha = 60°$ à partir de débits de l'ordre de 50 cm^3/s. Le bourrelet se restabilise ensuite (ce qui permet de prendre la mesure de R_{top}) puis le processus recommence. Plus l'inclinaison augmente plus ces brisures adviennent à de faibles débits. Cette instabilité suggère qu'il n'existe plus de forme de bourrelet réellement stable au delà de 60°. Quelques images sont présentées en Fig. VIII.13 pour illustrer ce phénomène.

11. Dans ce cas la hauteur du choc est également induite par l'écoulement externe (c'est-à-dire que w_{top} devient très grand et que l'écoulement au sein de cette épaisseur agit sur la hauteur) comme nous l'avons vu dans la partie précédente dans le cas du ressaut horizontal.

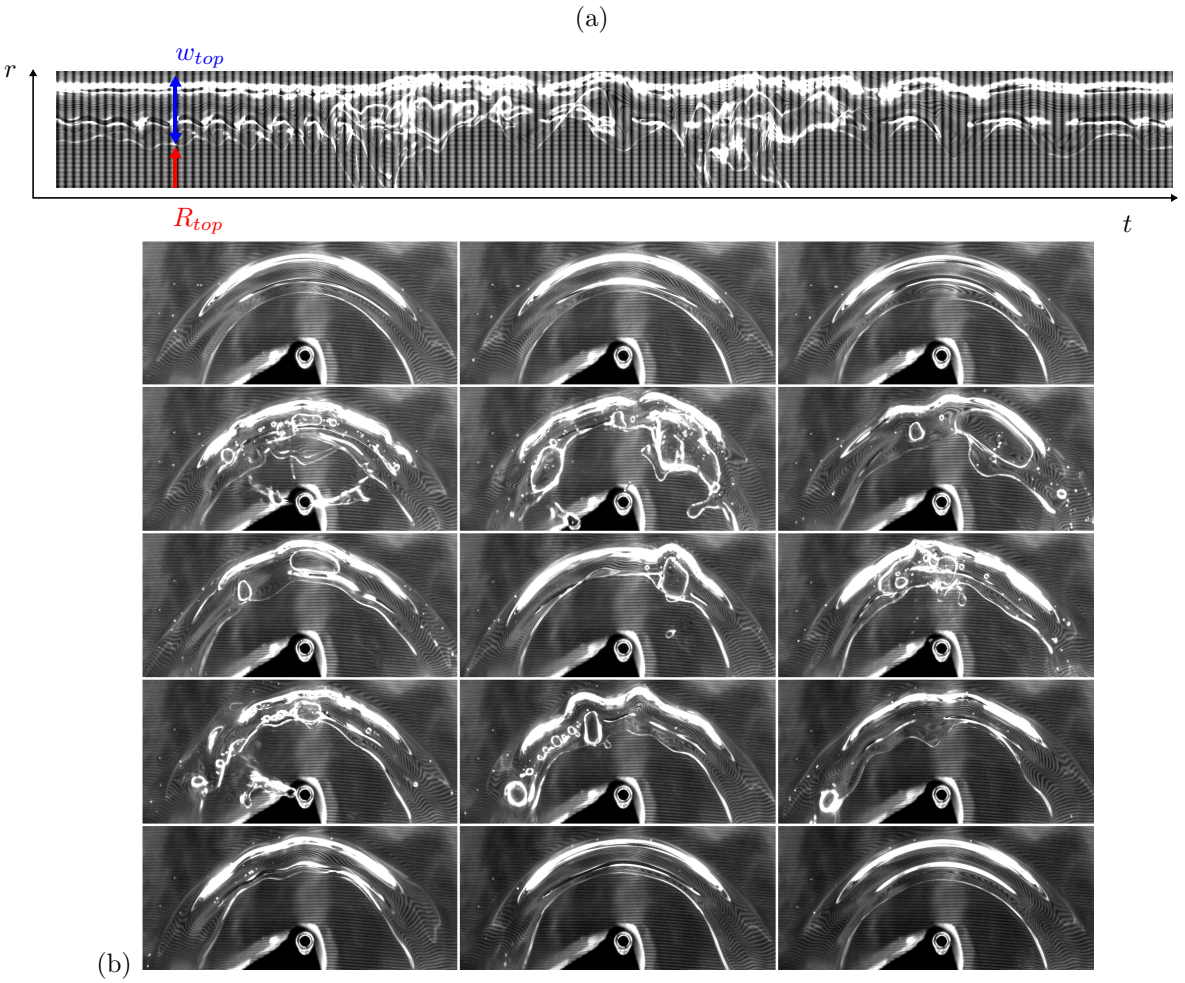


FIGURE *VIII.13 – (a) Diagramme spatio temporel du front du ressaut à sa plus forte altitude. Une bande de pixel verticale est prise au niveau de R_{top} pour une inclinaison α de 60° et pour un débit $Q = 54$ cm^3/s. La fréquence d'acquisition des images est de 1000 Hz. On observe des oscillations de la position du ressaut qui s'amplifie avec le temps jusqu'au déferlement et qui se restabilise ensuite. (b) Succession d'images du ressaut prises par en dessous. Les images correspondent au film dont est extrait le diagramme spatio-temporel. Les images se lisent de gauche à droite. 9 centièmes de seconde séparent deux images. On peut donc y voir l'oscillation du front sur les trois premières images puis le déferlement et enfin la restabilisation du front.*

On constate aussi sur la Fig. VIII.12 (a) une différence entre le préfacteur mesuré et le préfacteur attendu de l'ordre de 15% pour $Q = 34$ cm^3/s et d'environ 30 % pour $Q = 6$ cm^3/s. L'écart entre le préfacteur attendu et le préfacteur mesuré peut s'expliquer par la simplicité de notre modèle et en particulier de notre hypothèse sur la forme triangulaire. L'écart au modèle peut donc être vu comme une correction du facteur de forme. L'écart entre les deux préfacteurs mesurés expérimentalement à deux débits différents est plus problématique et suggère un défaut de modélisation pour la loi en débit.

Pourtant il n'en est rien, la Fig. VIII.12 (b) montre elle aussi un excellent accord entre théorie et

expérience au préfacteur près : le comportement est en effet bien linéaire. L'écart observé précédemment est donc un léger écart aux faibles débits.

En définitive on peut considérer que ce modèle est efficient pour décrire le bourrelet liquide entre 6° et 70° même si le préfacteur mériterait d'être ajusté en modélisant avec plus d'accuité la forme exacte du bourrelet. Pour des angles au delà de 70° le ressaut devient instable et notre modèle n'est clairement pas suffisant pour décrire cette instabilité.

Revenons sur une des hypothèses les plus critiquables de notre modèle de bourrelet : on a considéré que $R_{top} \approx (2R_{top} + w_{top})/2$. Or il se trouve que w_{top} est souvent comparable et parfois supérieur à R_{top}. Nous avons donc voulu tester l'impact de cette hypothèse dans notre modèle pour w_{top}. Nous avons donc remplacé R_{top} par $(2R_{top} + w_{top})/2$ dans l'équation (VIII.7) (avec le w mesuré expérimentalement bien sûr). Les résultats à débit constant ($Q = 34$ cm^3/s puisqu'il se trouve en pleine gamme de validité de notre modèle) et à angle constant ($\alpha = 14°$ qui se trouve lui aussi en pleine gamme de validité) sont visibles respectivement sur la sur la Fig. VIII.14 (a) et sur la Fig. VIII.14 (b).

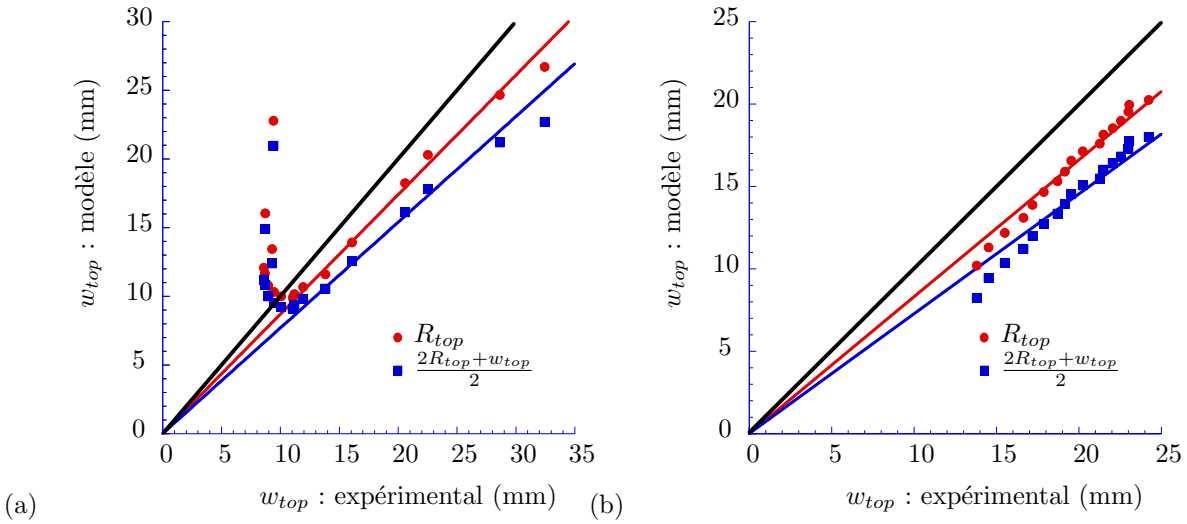


FIGURE *VIII.14 – On cherche à mesurer l'influence de l'hypothèse consistant à considérer que* $(2R_{top} + w_{top})/2 \approx R_{top}$ *sur notre modèle pour* w_{top}*. On trace donc à nouveau* w_{top} *extrait de VIII.7 (en rouge en utilisant* R_{top} *et en bleu en utilisant* $(2R_{top}+w_{top})/2$ *où* w_{top} *correspond à la valeur expérimentale) en fonction de* w_{top} *mesuré expérimentalement. La ligne noire correspond donc au résultat attendu par la théorie. (a) A débit fixé (*$Q = 34$ cm^3/s*) en faisant varier l'angle. (b) A angle fixé (*$\alpha = 14°$*). Comme on peut le constater une meilleur prise en compte de la position du bourrelet ne change en rien le comportement observé mais écarte légèrement les points d'une pente de 1.*

Comme on peut le voir sur la Fig. VIII.14 les tendances ne sont pas affectées par la prise en compte d'un rayon plus "réel" du bourrelet. Le préfacteur change, lui, légèrement. On pouvait s'attendre à un faible effet sur le préfacteur en considérant que l'expression de w_{top} ne varie qu'en $R_{top}^{-1/4}$. [12] On en déduit donc que la prise en compte du terme en $(2R_{top} + w_{top})/2$ est d'assez faible importance sur le résultat du modèle. On choisira donc, afin de poursuivre des calculs analytiques simples, de conserver l'expression (VIII.7) pour w_{top}.

12. Curieusement, cette meilleure prise en compte de la réalité a tendance à écarter les points expérimentaux du modèle.

VIII.2.1.2 Estimation de R_{top}

Nous allons donc, conscients de ces limites, utiliser cette description du bourrelet pour fournir une première prédiction de R_{top}.Pour ce faire on va considérer que la hauteur après le ressaut correspond à $H_J = w_{top} sin\alpha$.

En supposant que l'écoulement dans la zone centrale est radial et que les effets gravitaires peuvent être négligés on peut appliquer le modèle de Watson [114] (développé en II.2) qui repose sur ces hypothèses. On obtient donc les équations (II.36) et (II.37). [13]Dans notre cas nous sommes toujours à $R_{top} > r_0$. On considèrera donc que l'équation (II.37) régit la position de R_{top} et donc que :

$$\frac{R_{top} H_J^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_{top} H_J} = 0,01676 \left(\left(\frac{R_{top}}{a} \right)^3 Re^{-1} + 0,1826 \right)^{-1}. \tag{VIII.8}$$

Dans un premier temps nous allons tester ce modèle avec des valeurs expérimentales de w_{top} pour tester la pertinence du modèle de Watson dans ce cas. On se propose donc de tester cette loi à angles constants (14° et 59°) en faisant varier le débit sur l'ensemble de la gamme accessible (voir Fig. VIII.15 (a)) et à débit fixé (6 et 34 cm^3/s) en faisant varier l'inclinaison de 5° à 90° (voir Fig. VIII.15 (b)).

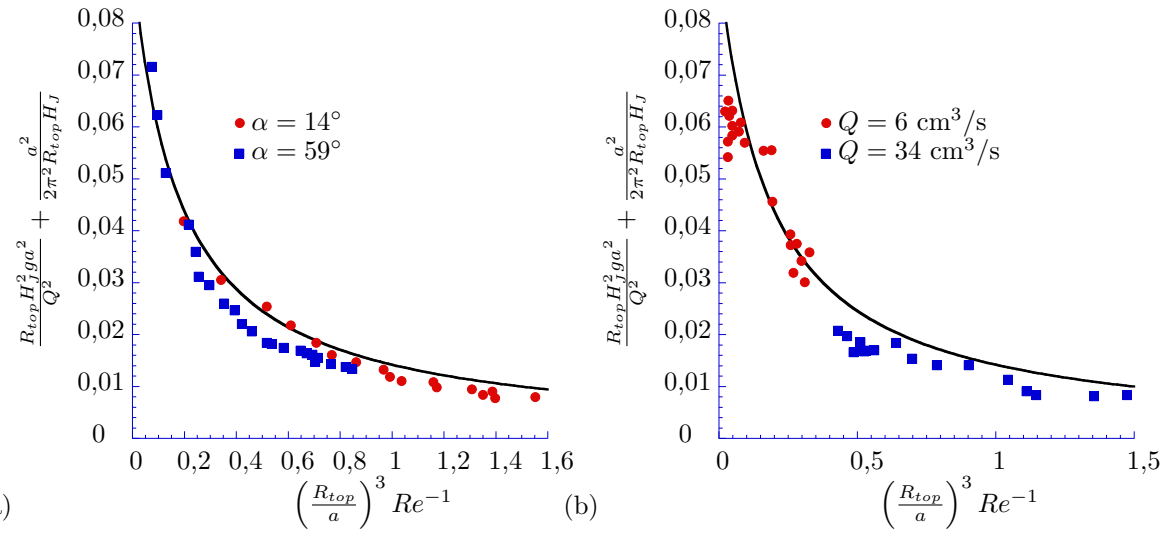


FIGURE *VIII.15 – Pour de l'huile silicone à 20* cS *: test de la loi de Watson (VIII.8) en utilisant les valeurs expérimentales de w_{top}. (a) On travaille à angles fixés (14° et 59°) en faisant varier le débit. On représente en carrés bleus les mesures prises pour $\alpha = 59°$ et en disques rouges les points expérimentaux obtenus pour $\alpha = 14°$. La ligne noire représente le résultat attendu sans paramètre ajustable. Le résultat apparaît donc comme excellent. (b) On travaille à débit fixé : les cercles rouges représentent $Q = 6$ cm^3/s et les carrés bleus $Q = 34$ cm^3/s. La ligne noire représente le résultat attendu sans paramètre ajustable. On trouve un assez bon accord excepté pour les angles d'inclinaisons très élevés.*

Comme on peut le voir sur la Fig. VIII.15 (a) à angles fixés l'accord est excellent pour la gamme de débits étudiée. Sur la Fig. VIII.15 (b), à débits fixés, l'accord est lui aussi très bon. Toutefois on constate des amas de points sur la gauche des ensembles de points : certains de ces points s'écartent de manière non négligeable de la courbe : ils correspondent aux valeurs très élevées de α. Autrement dit

13. Implicitement on vient de faire le choix de la modélisation de Watson pour la zone interne. Il nous a en effet semblé inutile de considérer la description plus simple de Wilson.

à très fortes inclinaisons il semble que le modèle de Watson couplé à notre hypothèse sur H_J décroche. Cela s'explique par le fait qu'à très fortes inclinaisons le bourrelet ne peut plus se modéliser par un triangle comme nous l'avons vu auparavant et donc l'hypothèse $H_J = w_{top} sin\alpha$ devient invalide.

On se propose maintenant de tester la loi (VIII.8) en utilisant notre modélisation de w_{top} (VIII.7). On obtient ainsi une prédiction de R_{top} sans aucun paramètre d'entrée (contrairement au test précédent qui nécessitait la mesure de w_{top} pour chaque point en plus de la connaissance de R_{top}). Les résultats pour six angles compris entre 5° et 80° sont présentés en Fig. VIII.16.

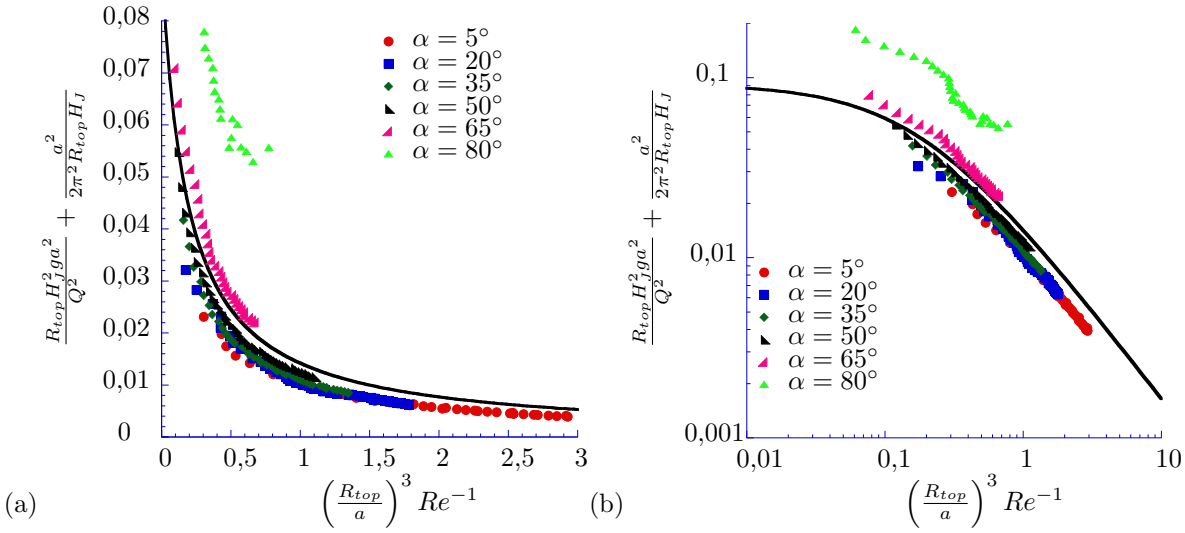


FIGURE *VIII.16 – Pour de l'huile silicone à 20* cS *test de la loi de Watson (VIII.8) en utilisant cette fois les valeurs théoriques de w_{top} obtenues grâce à l'équation (VIII.7) (en utilisant R_{top}). On représente nos résultats en représentation lin-lin (a) et en représentation log-log (b). On explore des angles d'inclinaisons compris entre 5° et 80°. La ligne noire représente le résultat attendu sans paramètre ajustable. On trouve un assez bon accord excepté pour les angles d'inclinaison très élevés.*

La Fig. VIII.16 montre un excellent accord pour les angles compris entre 5° et 65° et un accord plutôt mauvais dans le cas de $\alpha = 80°$ comme cela était prévisible aux vues des paragraphes précédents. L'écart entre les points expérimentaux est susceptible d'être réduit en tenant compte d'un éventuel facteur de forme pour ajuster la loi (VIII.7) avec les points expérimentaux. En considérant Fig. VIII.15, il apparaît qu'une meilleure modélisation du bourrelet est susceptible d'améliorer considérablement le comportement de notre modèle à fortes inclinaisons et d'améliorer légèrement l'accord entre théorie et expérience pour sa gamme de validité.

VIII.2.2 Calcul de R_{width}

Le calcul de R_{width} s'avère plus complexe que le précédent. En effet, ce n'est plus ici le poids du bourrelet qui fixe la condition externe et donc la position du choc.

Toutefois si l'on considère que l'on a un écoulement radial et que la gravité n'agit ni sur l'écoulement ni sur la position du bourrelet nous nous proposons de traiter le cas de R_{width} comme un ressaut sur un plan horizontal.

VIII.2.2.1 Condition de choc

Reste à fixer une condition de choc pour déterminer R_{width}. On ne pourra pas ici adopter une démarche "par les bords" comme nous l'avons fait précédemment dans le cas du ressaut horizontal. En effet le bourrelet liquide s'avère extrêmement complexe à modéliser car l'on ne maîtrise pas les effets de l'écoulement transversal issu de la collecte du liquide par le bourrelet en amont.

Toutefois on peut, par analogie, supposer un nombre de Froude de sortie constant et donc d'après les conditions de passage un nombre de Froude constant en entrée.

On se propose donc de définir le nombre de Froude de l'écoulement dans la zone interne : $Fr_{i-width} = \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{gh}}$. Si l'on suppose que le choc se fait à un nombre de Froude constant (de l'ordre de 2,5 pour être en cohérence avec le cas horizontal, voir Fig. V.5) on obtient à partir de l'équation VII.7 et de la conservation du débit l'équation :

$$\left(\frac{3}{10\pi^2}\right)^3 \frac{Q^5}{\nu^3 R_{width}^8} = \frac{Fr_{i-width}^2}{2\pi} g. \tag{VIII.9}$$

Cette équation donne alors :

$$R_{width} = \left(\frac{27}{500\pi^5}\right)^{1/8} Q^{5/8} \nu^{-3/8} Fr_{i-width}^{-1/4} g^{-1/8}. \tag{VIII.10}$$

Comme on peut le constater on réussit à obtenir une loi d'échelle proche de celle proposée par Bohr *et al.* (et en accord avec nos observations expérimentales) avec, de plus, un préfacteur susceptible d'être testé avec notre jeu de données comme cela est visible en Fig. VIII.17.

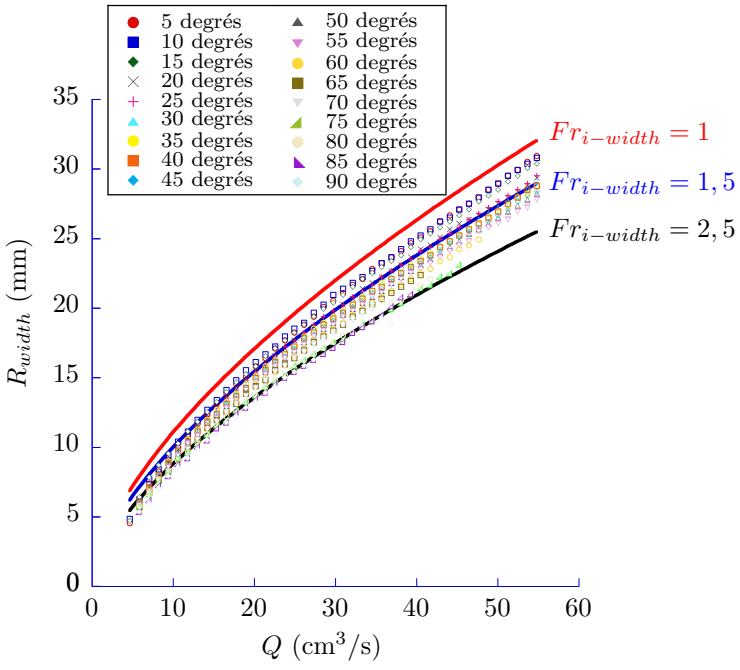


FIGURE *VIII.17 – R_{width} en fonction de Q pour différents angles d'inclinaison α entre 5° et 90°. Il s'agit de l'ensemble de données présenté dans la Fig. VIII.6. On a comparé ces points expérimentaux avec la loi proposée en (VIII.10) pour trois valeurs différentes de $Fr_{i-width}$:1 (ligne continue rouge), 1,5 (ligne continue bleue) et 2,5 (ligne continue noire). On obtient donc le bon comportement. Le préfacteur dépend de l'angle et dans l'ensemble le Froude compatible est trop faible par rapport à la valeur attendue.*

Comme on peut le voir sur la Fig. VIII.17, l'équation VIII.10 capte bien le bon comportement. Nous obtenons donc également un nombre de Froude apparemment indépendant du débit dans cette géométrie nouvelle. Toutefois, le préfacteur, s'il fournit un très bon ordre de grandeur, reste très discutable. Bien sûr on a $Fr > 1$ pour toutes les courbes représentées. Toutefois le nombre de Froude visible n'est pas en accord avec notre prédiction de 2,5 [14] excepté pour les très fortes inclinaisons. Ce résultat est assez étonnant, en effet pour les fortes inclinaisons on s'attendrait à être aux limites de notre modèle.

Il est possible d'améliorer grandement le préfacteur en décrivant avec une plus grande précision la zone interne. On utilise donc le modèle de Watson présenté dans la partie précédente (voir II.2) dans la zone interne. On applique ce modèle sans aucune modification puisque l'on considère les effets de la gravité comme négligeables. On utilise ainsi le profil de hauteur interne obtenu à l'équation II.22, à savoir :

$$h(r) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\nu(r^3 + l^3)}{Qr}.$$

Si l'on considère que $Fr_{i-width}$ est constant au niveau du choc on obtient :

$$\frac{(R_{width}^3 + l^3)^3}{R_{width}} = Fr_{i-width}^{-2} \frac{81\sqrt{3}}{32\pi^8} Q^5 \nu^{-3} g^{-1}. \tag{VIII.11}$$

Si l'on se place dans la limite de $R_{width}^3 \gg l^3$ on retrouve une expression similaire à celle présentée en VIII.10 mais avec un préfacteur différent :

$$R_{width} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{81\sqrt{3}}{32} \right)^{1/8} Q^{5/8} \nu^{-3/8} Fr_{i-width}^{-1/4} g^{-1/8}. \tag{VIII.12}$$

Ce nouveau préfacteur est testé en Fig. VIII.18 et s'avère bien mieux décrire le comportement de R_{width}.

Ce nouveau résultat décrit donc très bien les points expérimentaux avec un nombre de Froude interne $Fr_{i-width}$ indépendant du débit et compris entre 2,5 et 3 (comme présenté sur la Fig. V.5) pour la plupart des inclinaisons testées. Pour aller plus loin dans la modélisation de R_{width} il semble nécessaire de travailler sur la modélisation du bourrelet liquide au niveau de R_{width} pour essayer d'anticiper la valeur du Froude interne via une approche "par les bords". [15]

On retiendra en outre que l'approche de Watson fournit une bien meilleure description de la zone interne et améliore significativement l'accord entre expérience et théorie. Nous allons donc considérer uniquement la description de Watson pour la zone interne à partir de maintenant.

Étudions maintenant le cas plus complexe de R_{top}.

VIII.2.3 Conclusion

Nous avons pu, au cours de ce chapitre, présenter une étude sur l'impact d'un jet perpendiculaire à un plan incliné en situation de mouillage total. Cette étude fait état d'un phénomène peu étudié, nous nous sommes donc attachés à décrire qualitativement les différents éléments présents. On observe ainsi un ressaut hydraulique qui s'ouvre progressivement en aval au fur et à mesure que l'inclinaison du

14. qui est plutôt une limite basse comme on peut le voir sur la Fig. V.5

15. On a pu vérifier en traçant les deux termes de l'équation VIII.11 que le terme en l^3 est bien négligeable. En considérant ce terme on n'obtient pas de modification vraiment convaincante (cela corrige légèrement la pente pour tendre vers un exposant de 0.68).

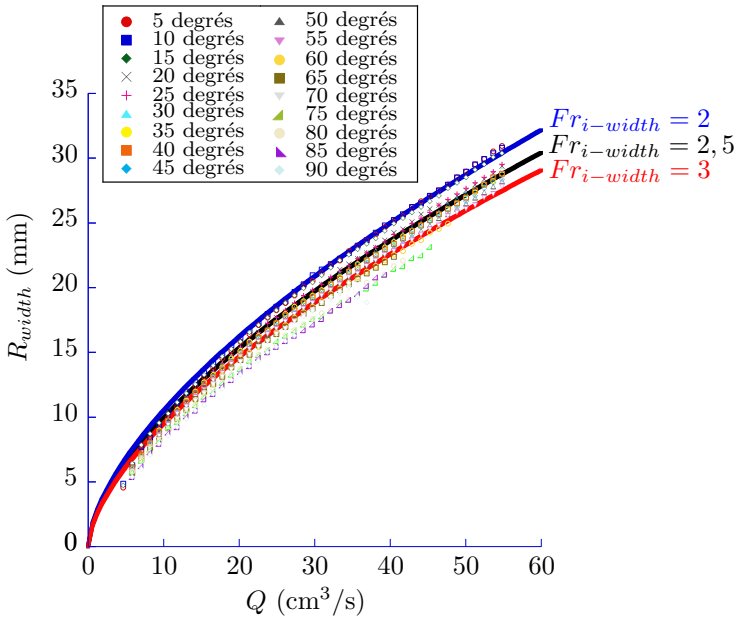


FIGURE *VIII.18 – R_{width} en fonction de Q pour différents angles d'inclinaison α entre 5° et 90°. Il s'agit de l'ensemble de données présenté dans la Fig. VIII.6. Cette fois on a comparé ces points expérimentaux avec la loi proposée en (VIII.12) pour trois différentes valeurs de $Fr_{i-width}$: 2 (ligne continue bleue) ; 2,5 (ligne continue noire) et 3 (ligne continue rouge). La meilleure prise en compte du profil de vitesse permet d'améliorer significativement le préfacteur trouvé. On a toujours le bon comportement et l'on obtient $Fr_{i-width}$ compris entre 2 et 3 pour la plupart des inclinaisons testées. On s'attendait à trouver $Fr_{i-width}$ entre 2,5 et 3 pour être en cohérence avec la partie précédente. L'accord est donc assez bon pour un modèle simple.*

substrat et le débit augmentent. Ce ressaut hydraulique sépare la zone interne d'un bourrelet macroscopique qui à son tour est séparé d'un film précurseur par un "angle de contact effectif". Nous avons pu montrer que cette zone interne était peu sensible à la gravité, l'écoulement y est alors radial et le liquide peu ralenti par la gravité. Cette étude n'est pas terminée à ce jour et certains éléments que nous avons pu observer semblent susceptibles de susciter des études ultérieures (on pense par exemple à l'absence de ressaut en zone aval mais aussi à cet "angle de contact effectif").

Nous avons également obtenu des données quantitatives sur cet objet d'étude. Ainsi nous avons étudié R_{top} et R_{width} respectivement la position du ressaut à l'altitude la plus élevée et la position du ressaut à altitude constante vis-à-vis de l'injecteur. A α fixé ces deux longueurs suivent une loi de puissance en 5/8 en fonction du débit ce qui fait directement écho à la loi d'échelle obtenue par Bohr *et al.* . En outre nous avons pu constater que R_{width} s'avérait quasi indépendant de l'angle d'inclinaison α.

Enfin nous avons présenté ici deux modèles qui nous permettent de tirer un enseignement commun très fort : la zone interne du ressaut sur plan incliné peut être considérée avec une très bonne approximation comme obéissant aux mêmes lois que la zone interne du ressaut circulaire. Il apparaît donc que seules les conditions aux limites diffèrent entre ces deux cas.

Notre modélisation nous a permis d'obtenir des prédictions tout à fait satisfaisantes de R_{top} et R_{width} en utilisant des arguments physiques simples.

Nous allons donc maintenant nous intéresser à l'influence de ces conditions de mouillage en modifiant le liquide pour obtenir des conditions de mouillage différentes. Comme nous allons le voir

dans le cas incliné les conditions de mouillage revêtent une grande importance susceptible de modifier profondément les comportements rayons-débits observés en mouillage total.

Chapitre IX

Ressaut sur plan incliné en mouillage partiel

IX.1 Premiers résultats en mouillage partiel

Nous nous penchons donc à présent sur le cas du mouillage partiel. L'idée est ici de comprendre l'influence des conditions de mouillage sur le ressaut. Bien entendu on ne s'attend à aucun effet visible dans la modélisation de la zone centrale, l'observation précédente d'une absence d'influence de la gravité sur la zone centrale n'étant pas susceptible d'être modifiée par les conditions de mouillage. Cependant ces conditions de mouillage vont modifier fortement les conditions aux limites en faisant intervenir une vraie ligne de contact pour le bourrelet liquide et éventuellement un phénomène hystérétique. On s'attend donc à de fortes modifications des lois liant rayon et débit.

IX.1.1 Forme du ressaut

On se propose à nouveau de commencer par observer la forme de notre ressaut hydraulique. Comme on peut le constater, peu de modifications importantes par rapport au mouillage total sont visibles en ce qui concerne la forme du ressaut. Toutefois des différences majeures par rapport au cas en mouillage total (voir Fig. VIII.1 et Fig. VIII.2) surviennent pour l'épaisseur du bourrelet que nous allons détailler plus loin. On observe aussi un front de démouillage en aval de la plaque.

Si l'on se place à débit constant et que l'on fait varier l'angle α de la plaque on peut observer les structures présentées en Fig. IX.1.

On observe quelques changements de comportement par rapport au cas en mouillage total : on constate toujours que pour les faibles inclinaisons le ressaut est fermé et entoure entièrement l'injecteur. Pourtant à mesure que l'on augmente l'inclinaison on observe un changement de forme. La forme ovale disparaît pour se diviser en deux fronts distincts : un front en forme de fer à cheval dans la partie supérieure et une ligne brisée grossièrement horizontale en aval. Le raccordement de ces deux fronts se fait sur un point anguleux.

Dans ce cas de mouillage partiel on observe donc toujours un choc dans la partie inférieure. On peut parler de choc car cette limite marque la séparation entre un film mince et un film plus épais (ou bourrelet) par lequel le liquide va s'évacuer. La position de ce bourrelet aval correspond au lieu où le liquide démouille la plaque pour passer d'un régime d'écoulement gravito-inertiel à un régime

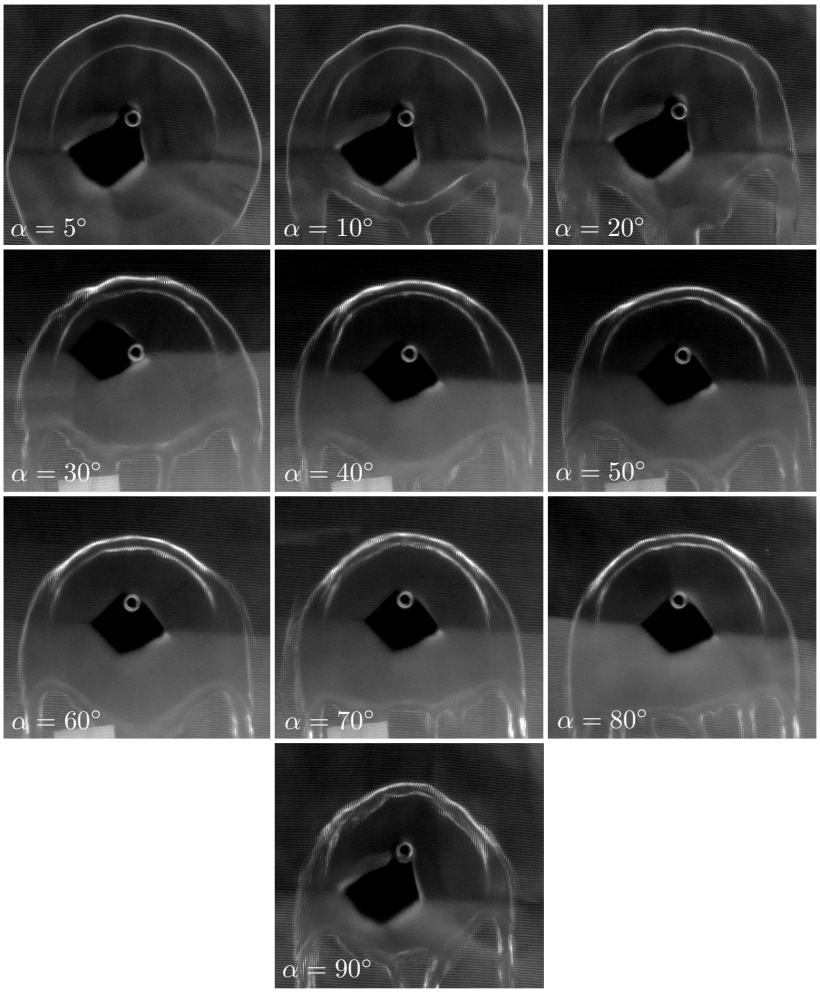


FIGURE *IX.1 – Photographies prises de dessous de ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage partiel à débit fixé ($Q = 17,6$ cm^3/s) pour 10 inclinaisons de plaques α différentes (5° puis tout les 10° entre 10° et 90°). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 3$ mm. On constate que pour les faibles inclinaisons le ressaut est fermé puis qu'il s'ouvre progressivement en augmentant α. On constate aussi un rétrécissement de l'épaisseur du bourrelet avec l'augmentation de l'inclinaison. A première vue les variations de R_{width} semblent très faibles tandis que les variations de R_{top} sont importantes. On constate en outre un bourrelet en aval, ce qui constitue une différence importante avec une situation en mouillage total.*

d'écoulement en méandre (ou écoulement gravito-capillaire). Autrement dit la position du front aval se trouve globalement à l'endroit où il devient sans doute énergiquement défavorable de maintenir un film mince par rapport à un méandre [54]. [1]

Autre observation : on constate que l'épaisseur du bourrelet supérieur est beaucoup plus faible dans ce cas de mouillage partiel que dans le cas du mouillage total. En mouillage partiel l'épaisseur du bourrelet est bel et bien négligeable devant le rayon du ressaut.

On observe que, de manière analogue à la situation en mouillage total que R_{width} varie assez peu en fonction de α tandis que R_{top} présente des variations importantes. Les courbures du front changent

1. La description précise de la ligne brisée séparant un écoulement gravito-inertiel vers un écoulement en méandre (gravito-capillaire) est rendue assez difficile en raison d'interactions avec les méandres issues de cet écoulement.

donc avec l'angle comme dans le cas du mouillage total.

Si l'on fixe maintenant l'angle et que l'on augmente le débit on peut observer les structures présentées en Fig. IX.2.

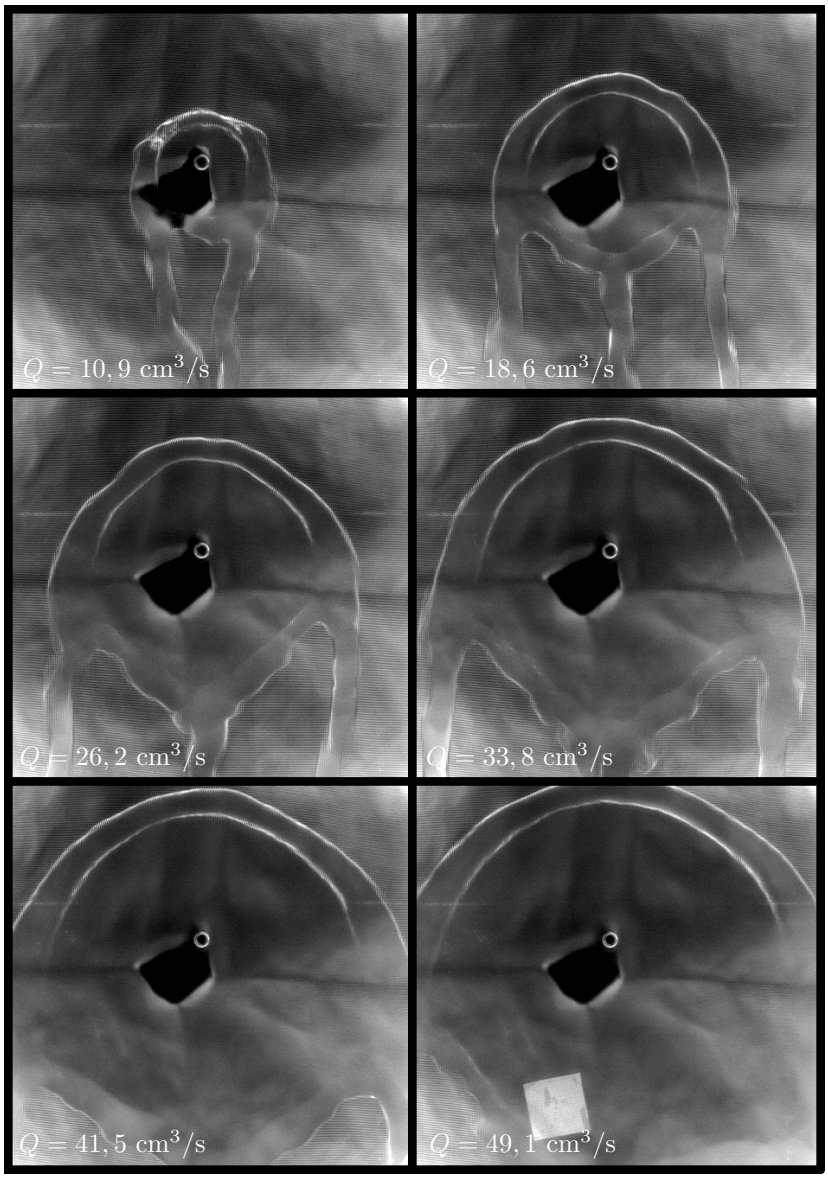


FIGURE *IX.2 – Photographies prises du dessous de ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage partiel à angle d'inclinaison fixé ($\alpha = 15°$) pour 6 débits différents (10,9 ; 18,6 ; 26,2 ; 33,8 ; 41,5 et 49,1* cm^3/s *). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 3$ mm. On constate que la largeur du bourrelet w_{top} varie assez peu avec le débit.*

Comme on peut le voir ici aussi, à mesure que l'on augmente le débit on observe une transition entre un ressaut de forme ovale et une forme en double front avec un front amont en fer à cheval et un front aval en forme de ligne brisée.

Dans ce cas non plus il n'est pas aisé de définir un couple (α, Q) pour lequel on observe la cassure du ressaut en deux fronts... Nous avons donc renoncé à quantifier cette transition.

On notera en outre qu'en première approximation et contrairement au cas du mouillage total la

largeur du bourrelet semble varier assez peu avec le débit et demeure très petite devant le rayon du ressaut.

IX.1.2 Hystérèse et angle de contact

IX.1.2.1 Un phénomène hystérétique ?

A la lecture de l'Annexe B, il apparaît que le phénomène du ressaut hydraulique sur un plan incliné est susceptible d'être un phénomène hystérétique : le bourrelet liquide se termine par une ligne de contact on s'attend donc à ce que l'angle de contact joue un rôle déterminant dans la position et/ou la hauteur du bourrelet liquide. On s'attendrait par exemple que le bourrelet liquide soit fixé par l'angle de contact statique d'avancée à débit croissant et par l'angle de contact statique de reculée pour les débits décroissants.

Pourtant visuellement on n'observe aucune différence entre les formes obtenues à débit croissant et celles obtenues à débit décroissant. On se propose toutefois de s'en assurer en comparant les valeurs de R_{top} et R_{width} pour un angle d'inclinaison $\alpha = 45°$ et pour des débits croissants puis décroissants. Les résultats de ces comparaisons sont présentés en Fig. IX.3.

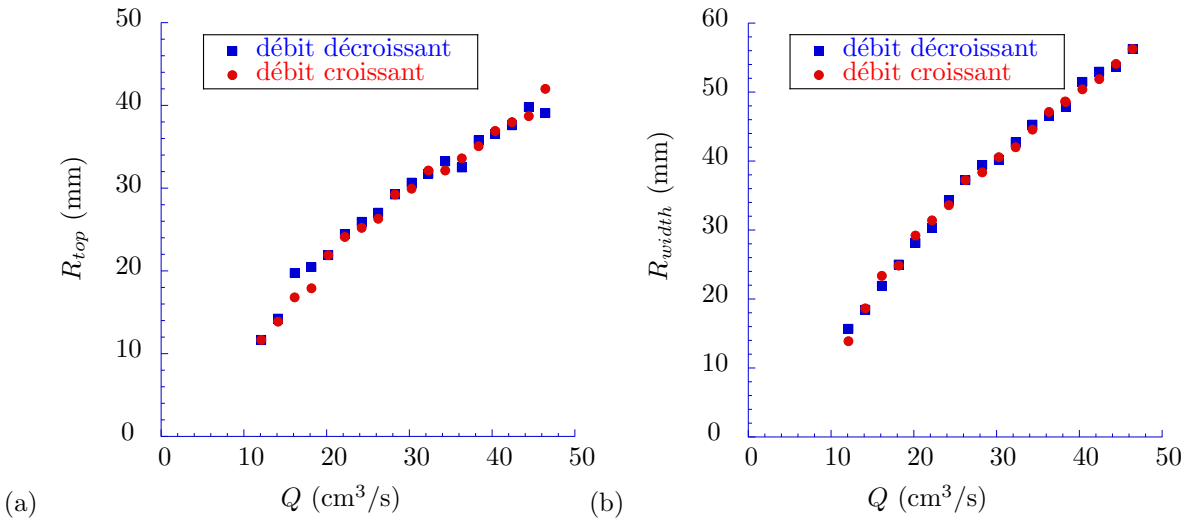


FIGURE *IX.3 – Mesures de R_{top} (a) et de R_{width} (b) en fonction du débit pour un diamètre d'injecteur $\phi = 3,5$ mm et un angle d'inclinaison $\alpha = 45°$. On effectue une première série de mesures à débits croissants (disques rouges) et une seconde série de mesures à débits décroissants (carrés bleus). Comme on peut le constater il n'existe aucune différence significative entre ces deux séries de mesures. On en déduit l'absence totale d'effets hystérétiques.*

Comme on peut le constater sur cette Fig. IX.3 que ce soit pour R_{top} ou R_{width} on n'observe aucune différence significative entre les points obtenus à débits croissants ou décroissants. [2]

Par ailleurs le même travail peut être fait sur le bourrelet et aboutit à la même conclusion : il n'y a aucun effet hystérétique sur ce phénomène.

Le comportement de la ligne de contact nous permet de comprendre cette observation d'apparence contre intuitive. Si l'on observe de près la ligne de contact on s'aperçoit qu'elle est sans cesse en

2. Notons que les écarts observés sont typiquement de l'ordre de grandeur des erreurs de mesures et des fluctuations de forme observées expérimentalement. Par exemple les points de débit maximal sont obtenus dans la même séquence d'enregistrement puisqu'il s'agit du débit maximal accessible.

mouvement, mouillant et démouillant une même zone d'un ou deux millimètres de large. L'angle de contact observé est donc un angle de contact effectif.

IX.1.2.2 Angles de contact

On se propose donc de déterminer maintenant cet "angle de contact effectif". On va en priorité s'intéresser à l'angle effectif au niveau du bourrelet supérieur à savoir β_{top} (voir Fig. IX.4).

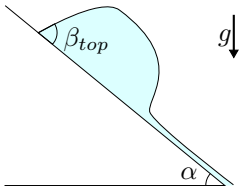


FIGURE *IX.4 – Schéma illustrant la position de l'angle de contact β_{top}.*

Comme nous l'avons dit on observe des mouvements incessants de la ligne de contact. Cela se traduit évidemment aussi par de fortes fluctuations sur les valeurs prises par l'angle de contact. On observe *in fine* que la valeur de β_{top} se situe autour de 70° ±5° et celle de β_{width} autour de 50°. Nous ne mesurons pas de variation significative devant les fluctuations en variant les valeurs de l'inclinaison ou du débit.

Quelques images de mesures de β_{top} sont représentées en Fig. IX.5. La qualité de ces images assez faible est une des raisons qui nous pousse à ne proposer pour β_{top} qu'un ordre de grandeur et à ne pouvoir observer les faibles fluctuations en fonction de Q et α.

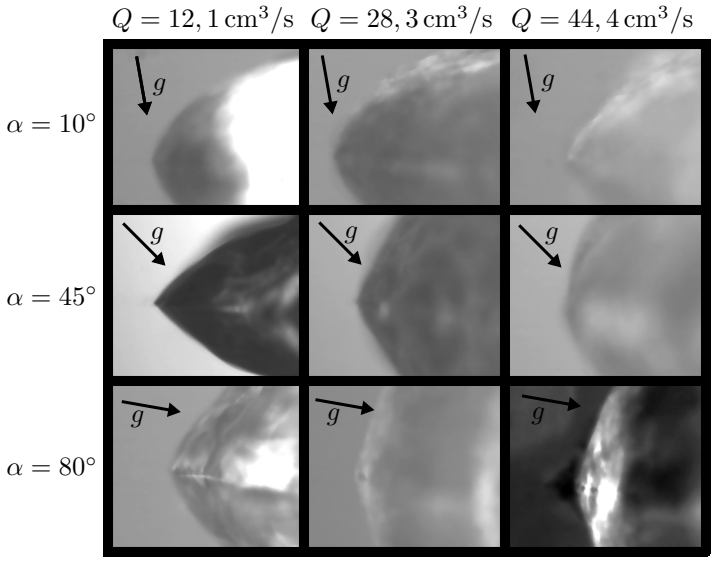


FIGURE *IX.5 – Images typiques de l'angle de contact β_{top} pour trois débits (12,1 ; 28,3 et 44,4 cm^3/s) et pour trois angles (10, 45 et 80°). Le diamètre de l'injecteur est $\phi = 3,5$ mm. Comme on peut le constater il est assez difficile de définir un angle de contact unique, la ligne de contact étant sans cesse mobile. Nous avons donc choisi de considérer un unique angle de contact effectif de l'ordre de 70°.*

Ce résultat d'un angle de contact effectif de l'ordre de 70° est assez surprenant si l'on considère que les angles de contact statiques d'avancée et de reculée pour cette plaque sont respectivement de 106° et 83°. Obtenir des angles de contact effectifs en dessous de cet intervalle est donc assez perturbant.

IX.1.3 Dépendance du rayon du ressaut

Nous allons maintenant essayer, comme dans le cas précédent de décrire plus quantitativement la forme du ressaut. Nous allons donc nous appuyer à nouveau sur les valeurs de R_{top} et de R_{width}.

IX.1.3.1 Influence du diamètre de l'injecteur

Dans un premier temps nous nous posons la question de la pertinence de l'hypothèse de Wilson *et al.* selon laquelle la position du ressaut n'est pas ou peu affectée par le diamètre de l'injecteur. Nous travaillons donc avec quatre diamètres d'injecteurs distincts : $\phi = 2$ mm, $\phi = 3$ mm, $\phi = 3,5$ mm et $\phi = 5$ mm. Nous travaillons pour trois angles distincts :10°, 45° et 80° [3]. Les résultats des mesures sont disponibles sur la Fig. IX.6.

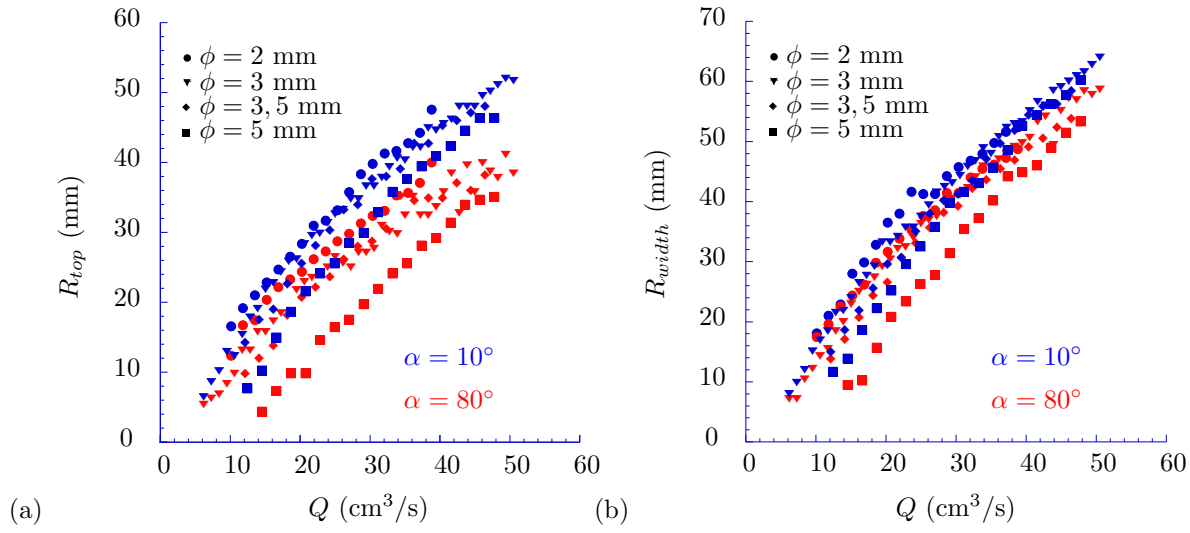


FIGURE *IX.6 – Mesure de l'influence du diamètre de l'injecteur sur les valeurs de (a) R_{top} et (b) R_{width} pour deux angles distincts. Les points réalisés avec une inclinaison de 10° sont représentés en bleus et les points réalisés avec une inclinaison de 80° en rouge. Quatre injecteurs sont représentés les cercles correspondent à $\phi = 2$ mm, les triangles renversés à $\phi = 3$ mm, les losanges à $\phi = 3,5$ mm et les carrés à $\phi = 5$ mm. L'effet des injecteurs est globalement peu significatif excepté pour $\phi = 5$ mm.*

Comme on peut le constater sur cette Fig. IX.6 l'hypothèse consistant à négliger l'influence de l'injecteur est très discutable. Toutefois deux remarques peuvent être faites :

(i) Pour ϕ compris entre 2 et 3,5 mm les comportements sont extrêmement proches et ce, quelque soit le débit considéré et que l'on prenne l'inclinaison α égale à 10° ou 80°.

(ii) Le cas $\phi = 5$ mm est en revanche très éloigné des courbes obtenues avec les autres diamètres d'injecteurs. Cela est vrai en particulier pour les faibles débits. On remarque en effet qu'à fort débit

3. Pour des raisons de clarté nous ne présenterons que les résultats pour 10° et 80°, l'inclinaison de 45° ne représentant qu'un état intermédiaire.

les courbes semblent se rejoindre : on passe ainsi d'une dispersion d'un facteur 3 à des différences de moins de 10% pour les valeurs de R_{width}. Cet effet est tout aussi remarquable en ce qui concerne R_{top}.

Pour interpréter cet effet il est utile de comparer le rayon du ressaut à la longueur l de la théorie de Watson pour le ressaut horizontal qui permet d'évaluer la longueur l sur laquelle les effets de l'injecteur sont importants [4]. Pour être tout à fait exact rappelons que ce que l'on compare est plutôt r^3 par rapport à l^3. En effet les termes de vitesse et hauteur du modèle de Watson (voir (II.21) et (II.22)) dépendent de $r^3 + l^3$.

Contrairement au cas étudié précédemment en mouillage total nous avons un liquide très peu visqueux : nous sommes donc typiquement dans une gamme où les rayons de ressaut sont susceptibles d'être comparables à l. Si l'on compare les valeurs des rayons à l pour les injecteurs de diamètre compris entre 2 et 3,5 mm on s'aperçoit que le rayon du ressaut est systématiquement plus grand voire très grand devant l. Autrement dit pour les hauts débits l'influence de l'injecteur est "oubliée" car $r^3 \gg l^3$. Tandis que pour $\phi = 5$ mm l est du même ordre voire supérieur à r sur presque toute la courbe excepté pour les hauts débits. Cela explique donc que pour les hauts débits on converge vers un régime commun pour tous les diamètres d'injecteur.

IX.1.3.2 Dépendance du rayon en angle et en débit

Ce constat étant établi nous allons travailler dans une situation où $R_J > l$ pour toute la gamme de débits afin de diminuer au maximum les effets de l'injecteur. Nous travaillons donc avec un diamètre d'injecteur $\phi = 3$ mm (un diamètre d'injecteur $\phi = 2$ mm induisant trop de perte de charge et donc une gamme de débits accessibles plus restreinte).

On se propose donc de tracer R_{top} et R_{width} respectivement en fonction du débit Q à angle constant et en fonction de l'angle α à débit constant.

À α constant

Dans un premier temps on travaille à angle d'inclinaison constant en faisant varier le débit sur toute la gamme accessible. Les mesures sont reportées sur la Fig. IX.7.

En ce qui concerne R_{top} on constate que quelque soit l'angle d'inclinaison on observe des lois rayon-débit assez proches de celles observées dans le cas du mouillage total. Toutefois il n'est plus question ici d'ajuster à angle fixé les points expérimentaux par une loi de puissance. Comme on peut le voir sur la Fig. IX.8 qui correspond à la représentation log-log des courbes représentées en Fig. IX.7 on peut observer deux régimes distincts : le premier, à faibles débits, correspond à un régime linéaire tandis que le second à hauts débits correspond à une loi de puissance en 5/8. Autrement dit, après un régime transitoire on retrouve un régime en puissance 5/8 comme dans le cas du mouillage total.

Pour R_{width}, le constat est assez similaire. La faiblesse de l'influence de l'inclinaison est davantage marqué que pour R_{top}. On constate aussi que les points expérimentaux se décomposent en deux régimes (comme cela est particulièrement visible sur la Fig. IX.8 (b)) : un régime linéaire pour les faibles débits et un régime en loi de puissance pour les forts débits.

Sur la Fig. IX.8 on peut observer les variations de R_{top} et R_{width} en représentation log-log. On observe donc que les variation de R_{top} suivent bel et bien une loi de puissance en 5/8 pour les forts débits et ont un comportement linéaire pour les faibles débits. Malheureusement le bruit dans les mesures ne nous permet d'estimer les exposants avec la même acuité que dans le cas du mouillage

4. Pour mémoire on a $l = 0,567\frac{\phi}{2}Re^{1/3}$ avec $Re = Q/\nu a$.

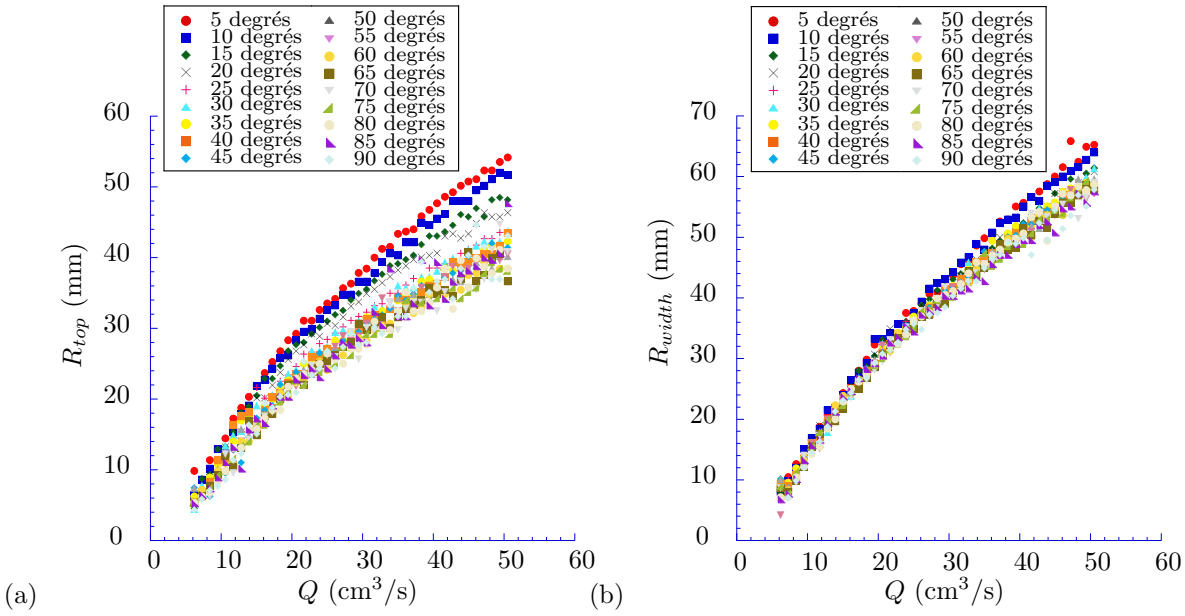


FIGURE *IX.7* – *Rayons caractéristiques du ressaut sur un plan incliné en situation de mouillage partiel (R_{top} et R_{width}) en fonction du débit pour plusieurs angles d'inclinaison du plan (α variant de 5 à 90°). L'injecteur a un diamètre interne de $\phi = 3$ mm. (a) R_{top} en fonction de Q : les lois $R(Q)$ semblent suivre des comportements similaires quel que soit l'angle utilisé. (b) R_{width} en fonction de Q : on constate la faible dispersion des points. R_{width} semble ici aussi extrêmement peu dépendant de l'angle et une fois encore la tendance de R_{width} semble extrêmement similaire à celle de R_{top}. Le liquide utilisé est ici de l'eau distillée.*

total.

En ce qui concerne R_{width} on retrouve bien les deux régimes : linéaire puis en loi de puissance. Toutefois la loi de puissance est, comme dans le cas du mouillage total, légèrement différente de celle visible pur R_{top} : l'exposant commun pour les différents angles est plus proche de $0,68$. Autrement dit après un premier régime linéaire on retrouve asymptotiquement les deux lois de puissances obtenues dans le cas du mouillage total. En tout état de fait le rapport d'aspect R_{top}/R_{width} est indépendant du débit et ne dépend que de l'angle d'inclinaison de la plaque.

Le fait de retrouver asymptotiquement à grand débit une loi en $Q^{5/8}$, comme dans le cas du mouillage total, est très curieux. Cela suggère un comportement commun indépendant de la condition de mouillage accompagné ou pas d'un régime transitoire suivant la condition de mouillage (par exemple une zone transitoire où la ligne de contact ne peut être négligée ?). Ce résultat est d'autant plus troublant que, rappelons-le, $5/8$ correspond à l'exposant pour le débit dans la loi d'échelle proposée par Bohr dans le cadre de son étude du ressaut circulaire. Loi d'échelle uniquement mise en défaut par l'ajout d'un terme logarithmique traduisant les conditions aux limites.

À Q constant

On se propose maintenant de tracer les données présentées dans les figures Fig. IX.7 et Fig. IX.8 mais cette fois-ci à débit fixé en faisant varier l'angle d'inclinaison de la plaque. On obtient alors pour R_{top} et R_{width} les graphes présentés en Fig. IX.9.

La Fig. IX.9 nous permet de quantifier ce que nous avions entraperçu qualitativement sur la

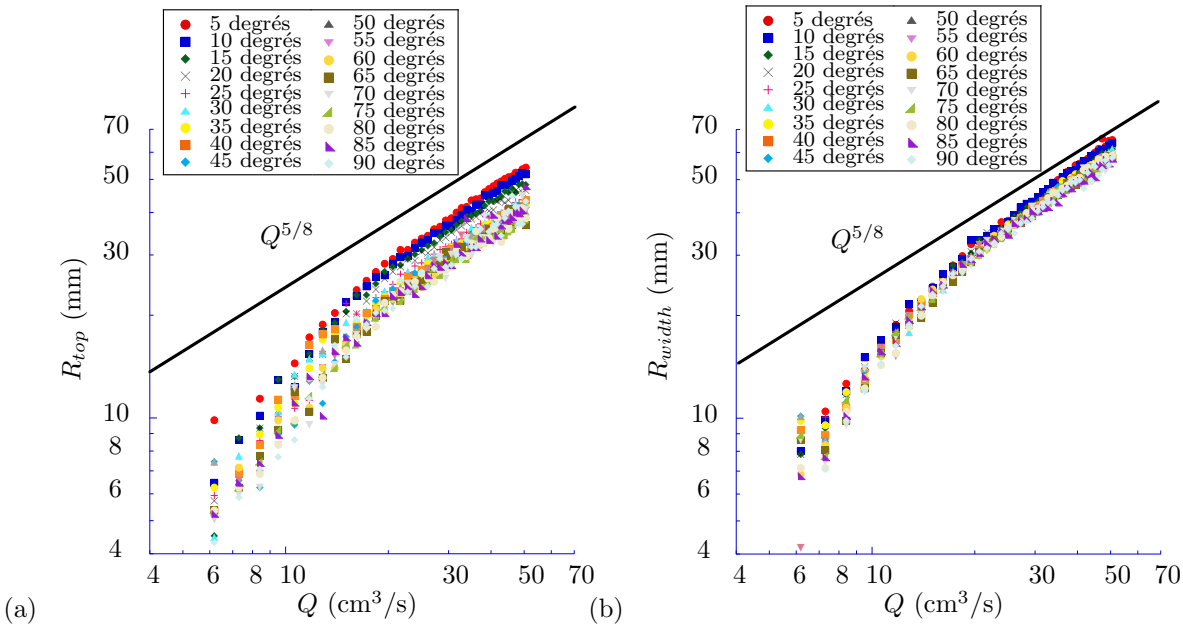


FIGURE *IX.8 – Représentation en log-log de l'ensemble de données présenté en Fig. IX.7 : R_{top} et R_{width} en fonction de Q pour des angles d'inclinaison variant de 5 à 90°. Les lignes noires correspondent à $Q^{5/8}$. (a) Les lois $R_{top}(Q)$ ne sont plus du tout des lois de puissance en 5/8. On constate plutôt deux régimes : le premier linéaire à faibles débits et le second pour des débits élevés qui semble être une loi de puissance avec un exposant proche de 5/8. Ce résultat semble valable pour tous les angles étudiés : seul le préfacteur change avec l'inclinaison. (b) Les lois $R_{width}(Q)$ sont très proches de celles de R_{top} : on y retrouve les deux régimes, le premier linéaire et le second tendant vers une loi de puissance proche de 5/8 et ce quelle que soit l'inclinaison. Par ailleurs, on visualise particulièrement bien la faible dispersion des valeurs de R_{width} en fonction de l'angle.*

Fig. IX.7 à savoir la faible influence de la gravité sur la position du ressaut dans le cas d'un impact sur un plan incliné. Comme on peut le constater on ne peut toujours pas utiliser simplement les fonctions trigonométriques pour décrire les variations de R_{top} et R_{width} en fonction de α. On choisira une fois de plus une description par des lois de puissance. En ce qui concerne R_{top} le préfacteur à la loi complexe régissant $R_{top}(Q)$ décroît en $\alpha^{-0,1}$ sur la gamme représentée. Autrement dit l'exposant est deux fois plus faible dans ce cas que dans le cas du mouillage total. On en déduit donc que R_{top} est bien moins influencé par α en situation de mouillage partiel. Cette décroissance représente, sur l'ensemble de la gamme d'angle, une variation de 33% par rapport à la valeur à 5° (on avait 45% en mouillage total).

La Fig. IX.9 (b) permet de déterminer la fonction de α préfacteur de la loi décrivant cette fois les variations de R_{width}. On décrit les variations de R_{width} en fonction de α par une loi de puissance en $\alpha^{-0,03}$. Cette fois encore la pente est environ deux fois plus faible que dans le cas du mouillage total. On peut presque considérer que R_{width} est indépendant de α, en effet, on constate environ 9% de variation entre les deux points extrêmes de la courbe. [5]

Ces résultats nous permettent donc de considérer que l'écoulement dans la zone interne est bien radiale comme dans le cas du mouillage total. Si nous n'avons pas enregistré d'image démontrant ce point nous avons pu vérifier cette hypothèse visuellement en observant par exemple des bulles d'air.

5. Il est amusant de constater que ces exposants correspondent aux exposants obtenus dans le cas du mouillage total mais divisé par 2.

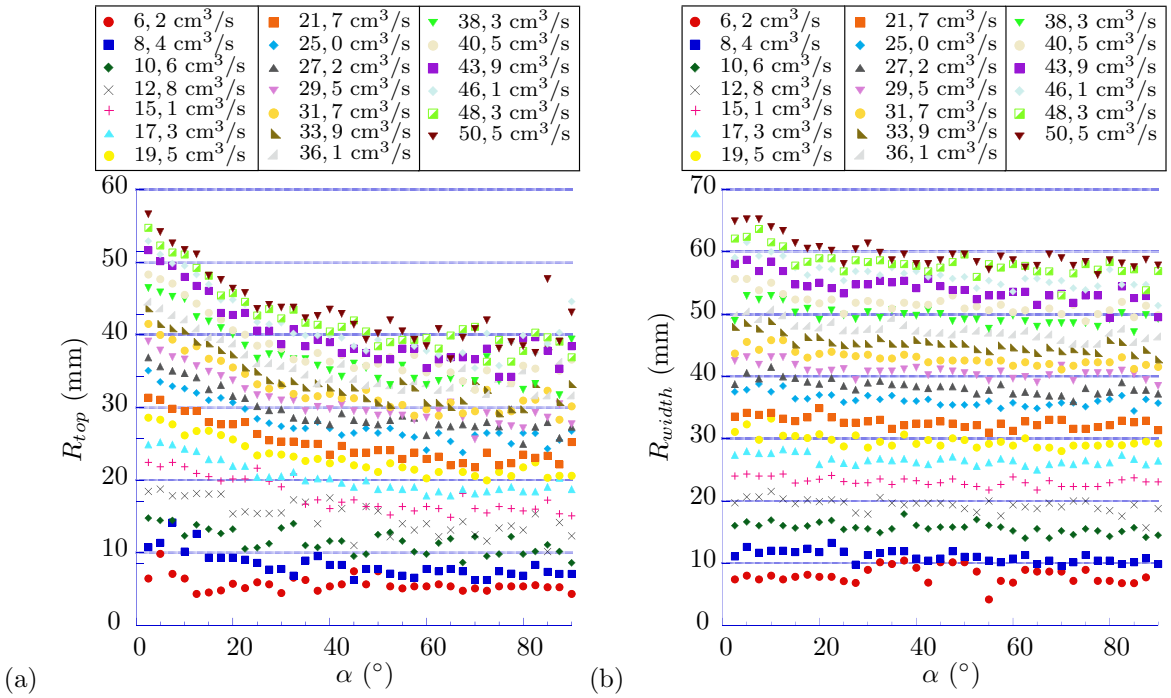


FIGURE *IX.9 – L'ensemble de données présenté précédemment est maintenant présenté comme R_{top} et R_{width} en fonction de l'angle d'inclinaison α pour des débits allant de 6,2 à 50,5,* cm^3/s. *(a) R_{top} en fonction de α : ici aussi aucune tendance utilisant des fonctions trigonométriques ne semble apparaître. Toutefois si l'on ajuste les points par des lois de puissance on trouve que toutes les courbes correspondent à une même loi en puissance -0,1 avec des préfacteurs différents. (b) R_{width} en fonction de α : de la même manière aucune tendance simple utilisant des fonctions trigonométriques ne semble apparaître. En ajustant les points par des lois de puissance on trouve que toutes les courbes correspondent à une même loi en puissance -0,03 avec des préfacteurs différents. La dépendance de R_{width} en α est donc quasiment inexistante. Il est amusant de constater que ces exposants correspondent aux exposants obtenus dans le cas du mouillage total mais divisé par 2.*

Cela étant il est aussi parfaitement possible de discerner les lignes de courant sur les photographies de la Fig. IX.12 et les observations qu'on peut faire vont également dans le sens d'un écoulement parfaitement radial.

IX.2 Modèle en mouillage partiel

On cherche ici à construire un premier modèle pour le ressaut sur plan incliné. Comme cela est visible sur les images le bourrelet extérieur n'a plus du tout la même forme que dans le cas du mouillage total. On ne peut donc pas appliquer les mêmes modèles que dans une situation de mouillage total.

Pour plus de simplicité on se contentera à nouveau uniquement sur R_{width} et R_{top}. Dans le cas de R_{width} la gravité ne s'oppose pas à l'écoulement tandis que dans le cas de R_{top} elle s'y oppose frontalement. L'idée en étudiant uniquement ces deux rayons est de mettre en évidence les principaux éléments physiques qui composent le problème et d'en tirer les premières lois prédictives...

La zone interne

Les résultats expérimentaux montrant les lignes de courant radiales dans la zone interne nous incitent à faire une première hypothèse : on suppose que l'écoulement est purement radial ($u_\theta = 0$).

Aux vues des résultats présentés dans la partie sur le mouillage total il apparaît très raisonnable de négliger la gravité dans la zone interne. On a pu voir que le modèle de Wilson *et al.* fournissait une première approche mais le modèle de Watson présenté dans la partie précédente (voir II.2) améliore substantiellement la description de la zone interne. Forts de nos résultats en mouillage total on applique donc ce modèle sans aucune modification puisque l'on considère les effets de la gravité comme négligeables. On retrouve donc pour les r supérieurs à la position r_0 où la couche limite a envahi toute l'épaisseur de liquide les équations (II.21) et (II.22) :

$$u_s(r) = \frac{27c^3}{8\pi^4}\frac{Q^2}{\nu(r^3+l^3)},$$
$$h(r) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}\frac{\nu(r^3+l^3)}{Qr},$$

IX.2.1 Calcul de R_{width}

Pour le traitement de R_{width}, aux vues des hypothèses, on se propose à nouveau de considérer que ce rayon peut être traité de la même manière que dans le cas horizontal. Contrairement au cas du mouillage total, la situation du bourrelet semble mieux connue, on se propose donc de tenter une approche "par les bords" avec un nombre de Froude constant en sortie de ressaut.

Dans cette situation de mouillage partiel les conditions aux limites ont changé par rapport au cas du mouillage total. On peut maintenant estimer naïvement la hauteur du bourrelet liquide en supposant que cette hauteur de liquide est fixée par l'angle de contact (comme le montre la Fig. IX.10) et suit une loi en

$$H \approx 2l_c sin\frac{\beta_{width}}{2}, \tag{IX.1}$$

où $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ et β_{width} est l'angle de contact du liquide avec la plaque. On supposera ici que $\beta_{width} = 50°$. [6]

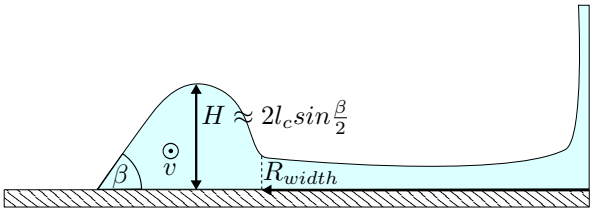


FIGURE *IX.10 – Modèle pour le bourrelet dans le prolongement de R_{width}. On suppose que la hauteur du bourrelet est fixée par (IX.1) c'est-à-dire par l'angle de contact "effectif" β_{width}. Il est toutefois traversé par un courant de vitesse v important et non pris en compte par notre modélisation.*

Si l'on suppose que le Froude de sortie est constant comme dans le cas du ressaut horizontal, en appliquant la conservation du débit juste en sortie de ressaut on obtient :

$$Q^2 = Fr^2 g 4\pi^2 R_{width}^2 H^3. \tag{IX.2}$$

6. On a pu vérifier que cette prédiction de hauteur était réaliste aux vues de nos observations en utilisant notre profondimètre. Toutefois l'utilisation de cet appareil sur un plan incliné présente davantage de possibilités d'erreurs de mesure que dans le cas horizontal.

Ce qui conduit logiquement à

$$R_{width} = \frac{Q}{2\pi Fr \left(2l_c sin\frac{\beta_{width}}{2}\right)^{3/2} g^{1/2}}. \tag{IX.3}$$

Ce modèle propose donc une loi où R_{width} est proportionnel à Q. La Fig. IX.7 nous convaint que nous n'avons pas le bon comportement (du moins pour l'ensemble de la courbe puisque l'on observe un comportement linéaire à faibles débits). Si l'on essaye tout de même de tracer la loi (IX.3) en regard des points expérimentaux pour un nombre de Froude de 0,385 on obtient la Fig. IX.11.

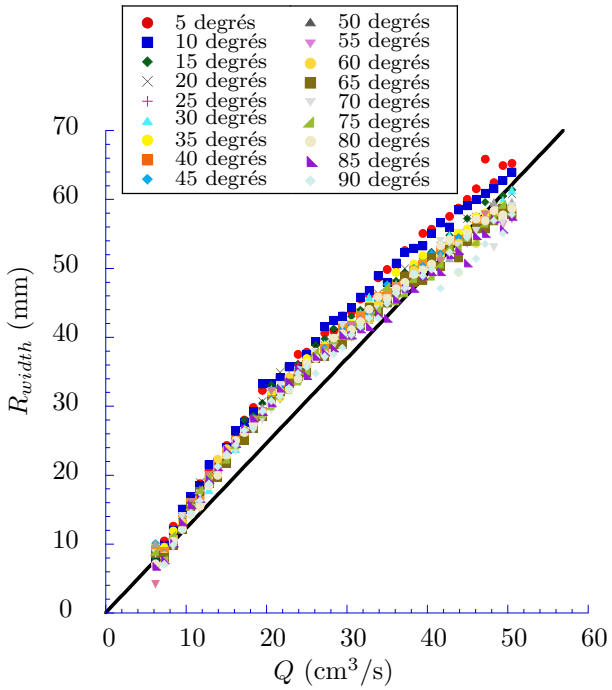


FIGURE *IX.11 – Test de la loi (IX.3) sur l'ensemble de données de R_{width} présenté en Fig. IX.7 (b). La ligne noire correspond à la théorie attendue avec $Fr = 0,385$ et $\beta_{width} = 50°$. Comme on peut le voir l'accord avec la théorie n'est pas très bon. On trouve tout de même un ordre de grandeur satisfaisant.*

Comme on peut le voir sur la Fig. IX.11 l'ordre de grandeur est plutôt bon toutefois il est extrêmement sensible à l'angle de contact effectif . Or nos estimations de cet angle de contact sont assez imprécises il est donc possible que l'erreur soit beaucoup plus importante que celle indiquée. De plus, on le voit, la tendance n'est pas bien prédite. [7]

Un moyen d'interpréter cette différence de tendance est probablement de considérer que le bourrelet est assez mal modélisé. En effet, comme indiqué sur la Fig. IX.10, une grande partie de l'écoulement dans le bourrelet provient du liquide récolté par le bourrelet dans la partie supérieure : il s'écoule à une vitesse v non négligeable et est donc susceptible de modifier la forme du bourrelet. En particulier il est tout à fait possible que l'angle de contact effectif fluctue avec le débit ou que la hauteur ne soit tout simplement pas tout à fait fixée par la loi (IX.1). En définitive on ne pourra pas conclure sur un modèle convaincant pour R_{width} ici.

7. Notons que si l'on essaye d'appliquer le modèle de Watson avec comme paramètre d'entrée H pour prédire R_{width} l'accord entre théorie et expérience est mauvais.

IX.2.2 Calcul de R_{top}

En ce qui concerne R_{top} nous allons suivre une démarche assez similaire à celle qui nous a permis de déterminer R_{top} dans le cas du mouillage total. Nous allons donc essayer de modéliser le bourrelet en utilisant les observations qu'on peut en faire.

IX.2.2.1 Hypothèses sur le bourrelet liquide

On modélise le bourrelet liquide supérieur en considérant que :

(i) Le bourrelet liquide a la forme d'une portion de cercle en R_{top}. Ce qui semble assez cohérent avec les images présentées en Fig. IX.12.

(ii) La hauteur perpendiculaire du bourrelet est donnée par $2l_c sin\frac{\beta_{top}}{2}$ et ce indépendamment du débit et de l'angle d'inclinaison α ce qui semble assez cohérent avec nos observations faites sur les images Fig. IX.4 et avec des mesures réalisées avec notre profondimètre [8].

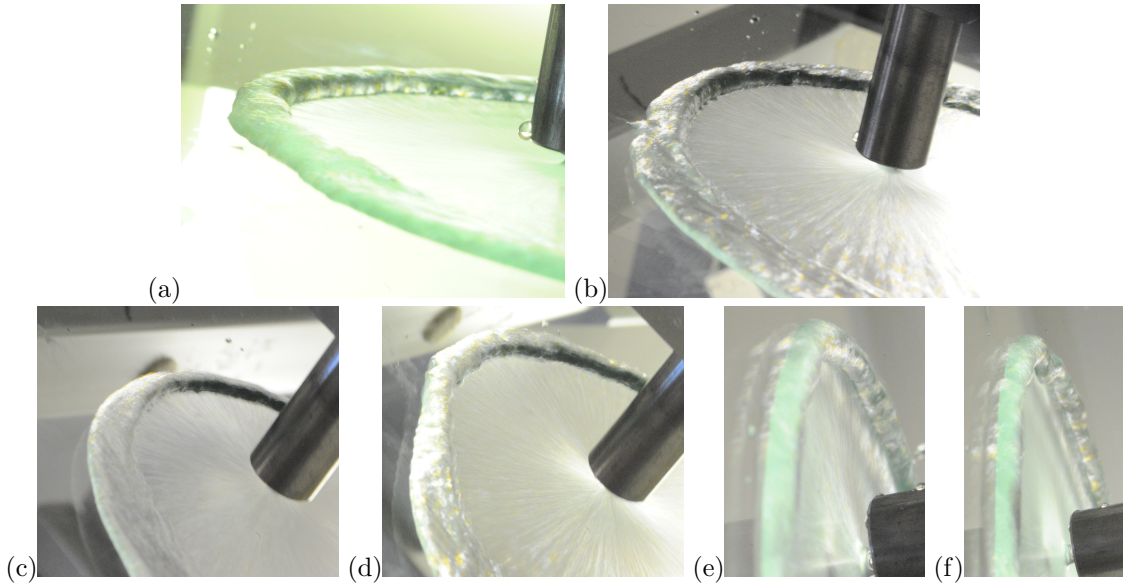


FIGURE *IX.12 – Images de côté du bourrelet liquide d'un ressaut sur plan incliné en situation de mouillage partiel. Trois angles d'inclinaison sont considérés : 20° ((a) et (b)), 45° ((c) et (d)) et 80° ((e) et (f)). Pour chacun de ces angles on a considéré deux débits* $Q = 28,3$ cm^3/s *((a), (c) et (e)) et* $Q = 44,4$ cm^3/s *((b), (d) et (f)). Comme on peut le voir l'aspect du bourrelet (hauteur et largeur) change assez peu (du moins visuellement) en fonction de l'angle et du débit.*

Cela a plusieurs conséquences :

(i) L'épaisseur du bourrelet est donc constante et indépendante du débit Q et de l'inclinaison α. Aux vues des Fig. IX.1, Fig. IX.2 et Fig. IX.12 cette conséquence semble compatible avec nos observations pour $\alpha > 20°$ et pour des débits assez élevés ($Q > 18,6$ cm^3/s).

(ii) L'épaisseur du bourrelet est très petite devant le rayon du ressaut. Encore une fois les Fig. IX.1, Fig. IX.2 et Fig. IX.12 vont plutôt dans ce sens.

La modélisation du bourrelet est donc représentée en Fig. IX.13.

8. Présentant des incertitudes bien supérieures à celles obtenues dans la partie précédente en raison de la géométrie particulière

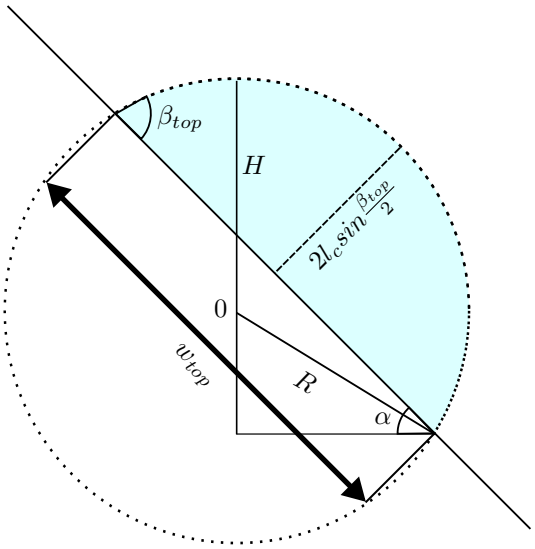


FIGURE *IX.13 – Modélisation de la partie supérieure du bourrelet. On se propose de modéliser cette partie du bourrelet comme une portion d'un disque de rayon R. L'aire de cette portion de disque est uniquement fixée par l'angle de contact β_{top}, sa hauteur perpendiculairement à la plaque est fixée par (IX.1) et sa largeur w_{top} est considérée comme constante et indépendante de Q et de α. La hauteur H qui nous intéresse ici est celle correspondant à la différence d'altitude entre le point le plus bas du bourrelet et le point le plus haut. De simples calculs de géométrie permettent de connaître H, R et w_{top} en fonction des données physiques.*

Après des calculs de géométrie élémentaire on obtient que le rayon du cercle est :

$$R = \frac{2l_c sin\frac{\beta_{top}}{2}}{1 - cos\beta_{top}}. \tag{IX.4}$$

On obtient donc que la hauteur H du point le plus haut du bourrelet liquide par rapport au point le plus bas du bourrelet s'écrit :

$$H = (1 - cos(\alpha + \beta_{top}))\frac{2l_c sin\frac{\beta_{top}}{2}}{1 - cos\beta_{top}}. \tag{IX.5}$$

IX.2.2.2 Estimation de R_{top}

Connaissant H il est maintenant possible d'utiliser le modèle proposé par Watson concernant la zone interne et la condition de choc pour estimer la position de R_{top} [9] on s'attend donc à ce que le rayon du ressaut corresponde aux équations (II.36) et (II.37). Dans notre cas nous sommes toujours à $R_{top} > r_0$. On considèrera donc que l'équation (II.37) régit la position de R_{top} et donc que :

$$\frac{R_{top}H^2ga^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_{top}H} = 0,01676\left(\left(\frac{R_{top}}{a}\right)^3 Re^{-1} + 0,1826\right)^{-1}. \tag{IX.6}$$

On peut donc tester cette équation en utilisant l'estimation de la hauteur proposée en (IX.5). On le fera pour les quatre injecteurs à notre dispositions ainsi que pour trois inclinaisons différentes (α =10°,

9. L'application du modèle de Watson est ici un peu discutable. En effet, dans la géométrie modèle que l'on a choisit, on n'a pas comme dans le cas du mouillage total un "vrai" choc de hauteur H. Pour la condition de choc le terme en $1/2gH^2$ a bien sûr tout son sens mais le terme en HU^2 est lui plus contestable. Quoi qu'il en soit, le terme inertiel est petit devant le terme gravitaire.

45° et 80°). Le résultat de cette comparaison est visible en Fig. IX.14.

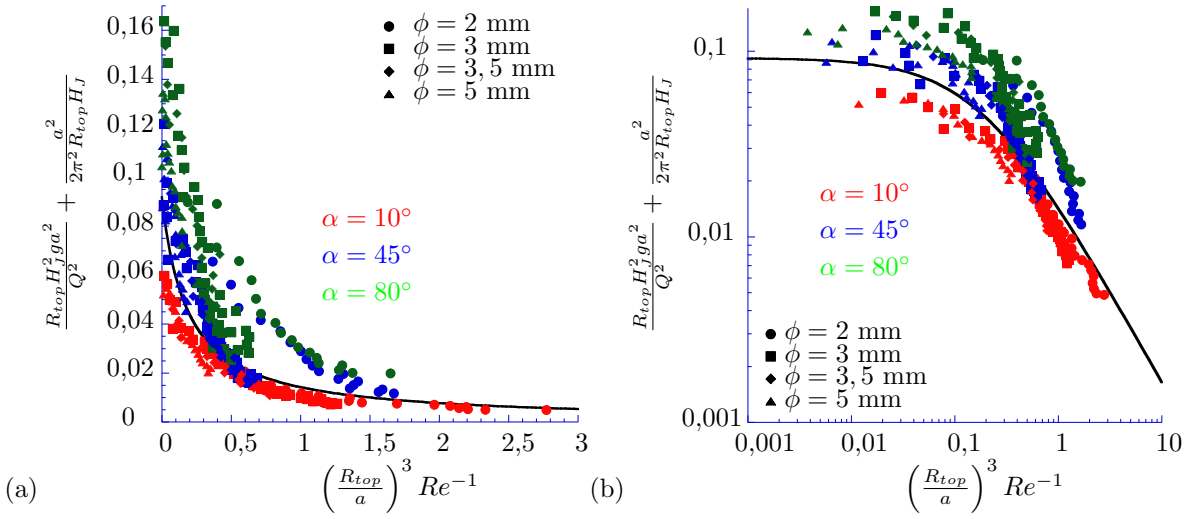


FIGURE *IX.14 – En situation de mouillage partiel sur substrat incliné en utilisant de l'eau à 1 cS on teste la loi de Watson : (IX.6) en utilisant la valeur de H obtenue en (IX.5). La ligne noire correspond à la théorie attendue sans paramètre ajustable. On teste cette loi pour trois inclinaisons : 10° (en rouge), 45° (en bleu) et 80° (en vert). Quatre injecteurs sont représentés : les cercles correspondent à $\phi = 2$ mm, les carrés à $\phi = 3$ mm, les losanges à $\phi = 3,5$ mm et les triangles à $\phi = 5$ mm. Si la dépendance en ϕ a l'air plutôt bien captée, la séparation nette entre les trois couleurs montre l'échec de notre modèle pour capter la dépendance en angle dans cette situation.*

Comme on peut le voir sur cette Fig. IX.14 l'accord entre théorie et expérience n'est pas excellent. On obtient un accord convenable pour $\alpha = 10°$ et $\alpha = 45°$ bien que les courbes soient séparées en fonction de l'inclinaison signe que nous n'avons pas bien capté la dépendance en α tandis que l'accord est très mauvais en ce qui concerne $\alpha = 80°$.

On remarque également que nous captons assez mal la dépendance en ϕ. En particulier $\phi = 2$ mm semble avoir un comportement singulier qui ne se remarque pourtant pas sur la Fig. IX.6.

Nous en concluons donc que notre modélisation est très imparfaite. [10] Il est possible que là encore les fluctuations autour de la valeur donnée β_{top} cachent en réalité une dépendance en fonction du débit et de l'angle. Il est aussi possible que notre modélisation du bourrelet comme une portion de cercle (modélisation qui ne repose que sur des observations mais sur aucun argument physique) soit erronée.

IX.3 Conclusion

Nous avons pu, au cours de ce chapitre, présenter une étude sur l'impact d'un jet perpendiculaire à un plan incliné en situation de mouillage partiel. On retrouve les différents éléments déjà présentés à quelques différences près : si l'on a à nouveau un film mince entouré d'un ressaut, séparant la zone interne d'un bourrelet liquide, ce bourrelet liquide est beaucoup plus fin et se termine par un angle de contact réel (et non plus effectif). Une autre différence est qu'en situation de mouillage partiel on

10. Elle fournit toutefois des ordres de grandeurs raisonnables.

observe un front aval au niveau duquel on assiste à une transition entre un film mince et un bourrelet liquide.

De manière assez surprenante on n'observe pas de phénomène hystérétique dans cette situation de mouillage partiel. Cela tient probablement au fait qu'on a pu observer que la ligne de contact du bourrelet liquide était sans cesse en mouvement, rendant difficile la mesure de l'angle de contact.

Nous avons, à nouveau travaillé avec les longueurs R_{top} et R_{width}. Et nous avons en particulier observé que ces courbes présentaient deux comportements : à faibles débits un comportement linéaire et pour les débits plus élevés un comportement en puissance 5/8. Ce comportement asymptotique en 5/8 est très troublant car il évoque à la fois le comportement observé en cas de mouillage total mais également la loi d'échelle proposée par Bohr *et al.* .

Nous avons à nouveau travaillé sur des modèles et nous conservons notre conclusion concernant la faible importance de la gravité dans la zone interne. Pour autant si nos modèles ont permis d'obtenir des ordres de grandeurs et des tendances satisfaisants ils ne sont clairement pas excellents. Nous pensons que notre modélisation du ressaut en mouillage partiel repose sur des évaluations d'angles de contact qui sont très discutables. Il semble donc nécessaire de travailler autour de cette question en développant une réelle technique d'acquisition de l'angle [11] et de réaliser des statistiques sur la valeur de ces angles...

11. Par exemple l'observation des déformations d'une grille...

Chapitre X

Ressaut sur un plan incliné super hydrophobe

On se propose maintenant d'observer le cas d'un jet liquide impactant perpendiculairement une plaque de cuivre rendue super hydrophobe grâce au traitement décrit en Annexe C. Cette étude a donné lieu à l'observation de comportements inattendus et c'est ce que nous allons tacher de présenter ici. En particulier nous allons montrer que sous certaines conditions la description en terme de ressaut hydraulique cesse d'être pertinente. Les phénomènes observés relèvent alors davantage de la fragmentation d'une nappe liquide que du ressaut hydraulique.

X.1 Influence de l'injecteur

Au cours de ces expériences nous avons utilisé tour à tour deux injecteurs de diamètres différents : $\phi = 3$ ou 4 mm. Nous avions jusqu'à présent travaillé sur le ressaut et nous avons pu montrer à de nombreuses reprises dans les lignes précédentes que le bon paramètre de contrôle était le débit Q et non la vitesse du liquide injecté. Ce qui en conséquence signifie une assez faible importance du diamètre de l'injecteur. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas ici.

X.1.1 Injecteur de 4mm de diamètre

Lorsque l'on travail avec un injecteur de diamètre ϕ on obtient les images présentées en Fig. X.1 et Fig. X.2. Dans la première figure on travaille à débit constant en faisant varier l'angle tandis que dans la deuxième on travaille à angle constant (ici $\alpha = 45°$) en faisant varier le débit.

Ce qui apparaît alors clairement sur ces deux figures c'est que le choc présente deux formes extrêmement différentes : dans la zone amont on retrouve bien le bourrelet liquide déjà observé dans le cas du ressaut incliné en mouillage partiel (ce qui était bien sûr attendu). Mais en aval on observe plus du tout de bourrelet liquide mais bien la fragmentation du film mince en gouttes. Ce que l'on peut observer dans la zone aval s'apparente davantage à la fragmentation d'une nappe de Savart [101, 102, 21] qu'à un ressaut hydraulique. On observe en particulier le décollement du bourrelet à une altitude donnée, la transition se faisant brusquement entre ressaut et fragmentation.

Comme on peut le constater sur la Fig. X.1 cette limite dépend peu de l'angle d'inclinaison. La valeur de R_{top} est tout à fait similaire à ce que l'on a pu observer et prédire dans la partie concernant

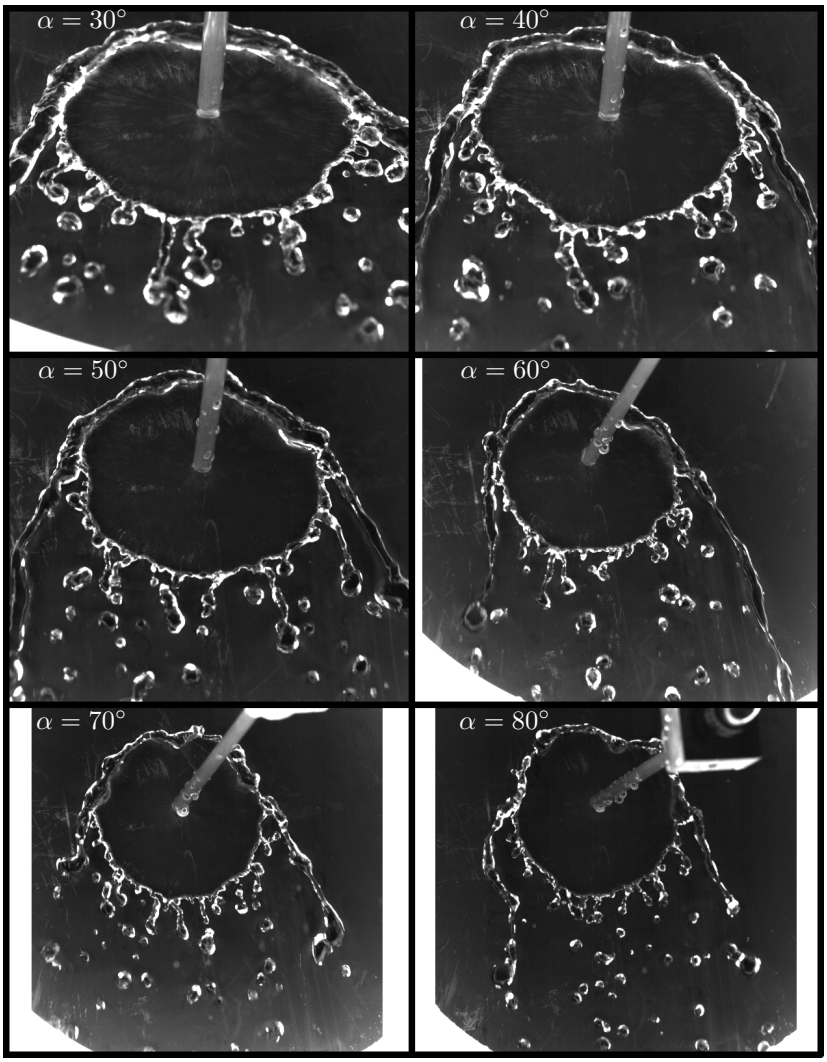


FIGURE *X.1 – Photographies prises de face du ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage quasi-nul à débit fixé ($Q = 37,3$ cm^3/s) pour 6 angles différents (de 30° à 80° tout les 10°). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 4$ mm. Les effets de perspectives permettent difficilement d'appréhender le comportement de R_{top} toutefois on observe comme point commun à toutes ces photographies la division en deux zones : une zone aval où la nappe liquide se fragmente et la zone amont où le choc est entouré d'un bourrelet liquide. On constate aussi que la taille du bourrelet ne semble pas varier avec l'inclinaison. Le nombre de points de fragmentation et la distance les séparant semblent dépendre assez peu de l'angle d'inclinaison. On constate en outre que la limite entre zone de fragmentation et bourrelet liquide semble indépendante du débit.*

le ressaut sur plan incliné en mouillage partiel "classique". En revanche la partie aval soulève de nombreuses questions sur le nombre de points de fragmentation et la distance qui les sépare en fonction de l'angle d'inclinaison. Cet effet mériterait une étude à part entière.

La Fig. X.2 quant-à elle nous montre que le débit a une très forte influence sur la position de détachement du bourrelet liquide : plus le débit augmente plus la limite entre ressaut hydraulique et fragmentation est élevée (par rapport au centre de l'injecteur). Par ailleurs comme cela était prévisible

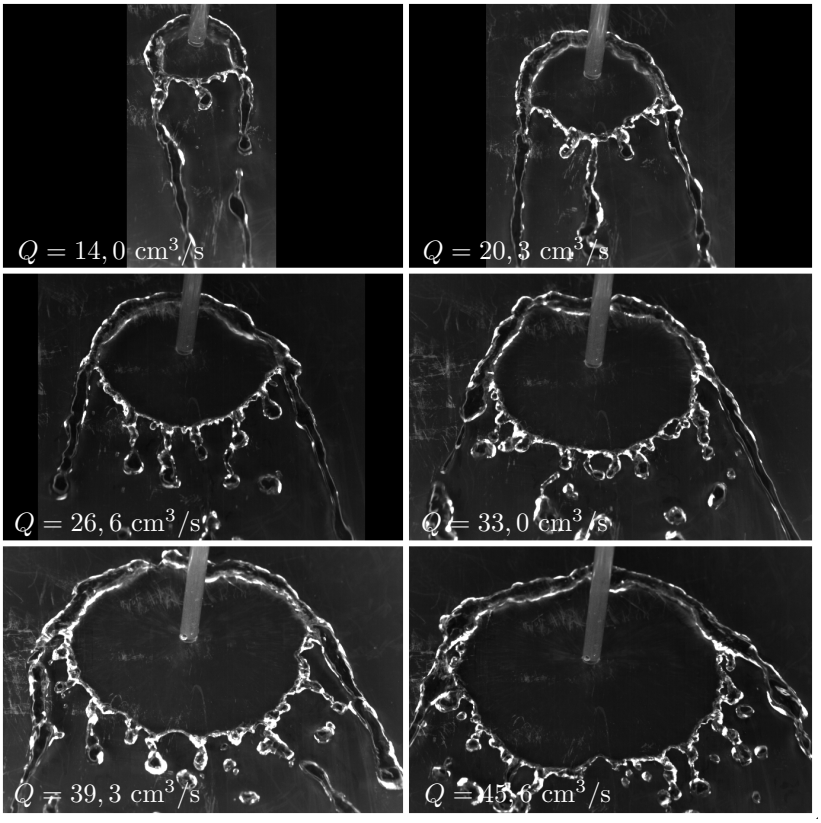


FIGURE *X.2 – Photographies prises de face du ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage quasi nul à angle d'inclinaison fixé ($\alpha = 45°$) pour 6 débits différents (14 ; 20,3 ; 26,6 ; 33,0 ; 39,3 et 45,6* cm^3/s *). Le diamètre de l'injecteur est ici de $\phi = 4$* mm*. On constate à nouveau cette séparation entre zone aval fragmentée et zone amont entourée par un bourrelet liquide. Dans ce cas le bourrelet liquide semble dépendre toujours très peu du débit. En revanche le nombre de points de fragmentation croît fortement avec le débit. On remarque en outre que la position de décollement du bourrelet (c'est-à-dire la limite entre zone de fragmentation et bourrelet) est de plus en plus élevée à mesure que le débit croît.*

le débit joue un rôle très important dans le nombre de points de fragmentation visibles.

X.1.2 Injecteur de 3mm de diamètre

Lorsque l'on fait varier le diamètre de l'injecteur et que l'on utilise un injecteur de diamètre interne $\phi = 3$ mm on observe les images typiques présentées en Fig. X.3. [1] En comparaison, à débit identique on constate que dans le cas présent la limite bourrelet-fragmentation est beaucoup plus élevée. On arrive même à une situation où le bourrelet liquide a entièrement disparu et où l'on observe de la fragmentation sur l'ensemble du périmètre. Dans ce cas le front de fragmentation est quasi circulaire autour de l'injecteur (montrant une fois de plus la validité de nos hypothèses concernant la zone centrale). On observe une disparition du bourrelet liquide pour les inclinaisons importantes (au delà de

1. Malheureusement si nous avons fait une étude systématique équivalente à celle présentée pour $\phi = 4$ mm nous n'avons pas réussi à enregistrer des images de la qualité de celles présentées précédemment pour des raisons matérielles. Les images que nous avons obtenues s'apparentent davantage aux images présentées dans la Fig. VII.13. Il est donc très difficile d'y décerner si le régime est celui du bourrelet ou de la fragmentation.

$\alpha = 50°$) et pour les débits élevés.

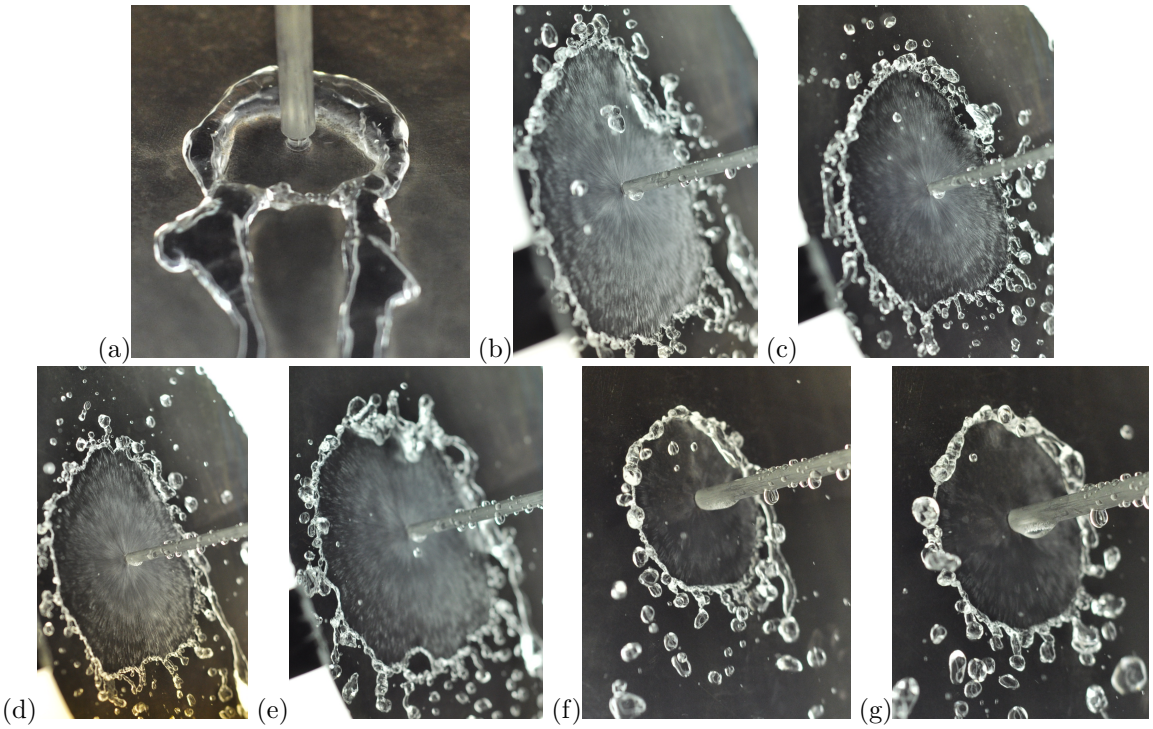


FIGURE X.3 – *Photographies de côté du ressaut hydraulique sur plan incliné en mouillage quasi nul mais avec cette fois-ci un injecteur de diamètre $\phi = 3$ mm. Ces images ont été réalisées avec des inclinaisons assez fortes (typiquement entre 75° et 85°) et des débits variés ((a) : $Q = 9$ cm^3/s, (b) $Q = 46$ cm^3/s, (c) et (d) $Q = 48$ cm^3/s, (e) $Q = 38$ cm^3/s, (f) et (g) $Q = 18$ cm^3/s). Comme on peut le constater sur ces images pour les débits les plus élevés on ne constate plus de bourrelet liquide même en aval mais un front de fragmentation sur tout le périmètre de la nappe liquide. Et ce, même pour des débits intermédiaires comme ceux des deux dernières images. La physique est donc différente lorsque l'on fait varier le diamètre de l'injecteur.*

Ce résultat fait directement écho aux observations de Maynes *et al.* (voir partie I.6.1) qui faisait état d'un nombre de Weber du jet critique We_c se situant aux alentours de 900 [2]. Ce nombre de Weber critique distingue les cas où l'on observe un ressaut hydraulique standard ($We < We_c$) et ceux où l'on constate la fragmentation du film mince ($We > We_c$). Or le Weber maximum obtenu avec l'injecteur de 4 mm est d'environ 900 ce qui est extrêmement proche de We_c tandis que pour un injecteur de diamètre interne de 3 mm on obtient un We maximum de 2200. On sera donc au delà du Weber critique pour une gamme de débits de 35 à 50 cm^3/s. Donc bien qu'étant à débit quasiment constant on observe deux comportements extrêmement différents. Le fait que le We devienne le véritable paramètre de contrôle montre bien que les phénomènes physiques en jeu sont très différents... On avait jusque là comme paramètre de contrôle privilégié le débit Q.

Reste une question ouverte : pourquoi observe-t-on de la fragmentation en aval du ressaut et ce, même pour des Weber très en dessous de We_c ? Encore une fois il apparaît clair que le ressaut hydraulique (ici bourrelet liquide) n'est pas stable en aval. Nous n'en savons toutefois pas davantage.

2. Pour rappel on a $We = \rho U^2 \phi / \sigma$ avec U la vitesse du liquide en sortie de buse et γ la tension de surface du liquide.

X.2 Modèle

Le cas où $\phi = 4$ mm se modélise de la même manière que le ressaut sur plan incliné en mouillage partiel classique. Il n'y a pas ici à apporter davantage d'éléments.

Pour modéliser le cas $\phi = 3$ mm il est important de proposer une alternative au modèle précédent puisque nous travaillons avec un phénomène physique différent.

Nous observons que le périmètre du film mince est quasiment circulaire. On se propose donc d'en tirer deux hypothèses pour la modélisation :

(i) $R_{width} = R_{top} = R_J$. Ce résultat se trouvera, comme nous le verrons, largement vérifié expérimentalement.

(ii) L'écoulement est considéré comme parfaitement radial et les effets de la gravité sont considérés comme négligeables. La modélisation proposée par Watson (voir II.2) s'impose donc pour la zone interne. On aura donc une vitesse u :

$$u(r,z) = \frac{27c^3}{8\pi^4}\frac{Q^2}{\nu(r^3+l^3)}f(\eta), \tag{X.1}$$

avec c la constante définie dans la partie II.2 et valant $c = 1,402$, $\eta = z/h(r)$ et f la fonction telle que $u = u_s(r)f(\eta)$ (voir (II.14)).

X.2.1 Condition de choc

On suppose ici que la fragmentation a lieu pour tout débit. L'idée est donc d'équilibrer le flux de quantité de mouvement avec les effets de la tension de surface qui retient les gouttes. [3] Un schéma traduisant cette relation de choc est visible sur la Fig. X.4. Cette condition de choc s'écrit donc en $r = R_J$:

$$\int_0^h \rho u^2 \mathrm{d}z = \gamma(1 - cos\beta), \tag{X.2}$$

avec γ la tension de surface et β l'angle de contact entre le liquide et le substrat. On choisira ici $\beta = 160°$ car c'est l'angle de contact statique pour l'eau sur le substrat superhydrophobe.

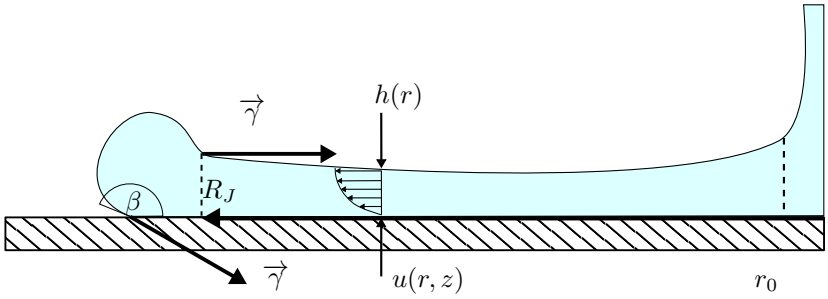


FIGURE X.4 – *Le mécanisme de fragmentation correspond de manière classique à l'équilibre entre les effets inertiels et les effets de tension de surface γ. C'est cet équilibre qui fixe la position du ressaut R_J.*

3. On retrouve ce type d'équilibre classique lors de l'étude des nappes de Savart ou encore lors de l'étalement d'une goutte après impact. Mais on retrouve aussi l'approche proposée par Wilson *et al.* et détaillée au début de cette partie.

Ce qui donne après calcul :

$$\frac{27\sqrt{3}c^3}{16\pi^6}\frac{\rho Q^3}{R_J\nu(R_J^3+l^3)} = \gamma(1-cos\beta). \tag{X.3}$$

Dans le cas où $R_J^3 \gg l^3$ (ce qui est plutôt vrai dans la gamme de débits où l'on observe la fragmentation) on obtient :

$$R_J = \left(\frac{27\sqrt{3}c^3}{16\pi^6}\right)^{1/4}(1-cos\beta)^{1/4}Q^{3/4}\nu^{-1/4}\rho^{1/4}\gamma^{-1/4}. \tag{X.4}$$

Lorsque l'on trace les points expérimentaux pour des inclinaisons importantes ($\alpha = 60$, 75 et 90°) et les lois (X.3) et (X.4) on obtient les graphes présents sur la Fig. X.5 :

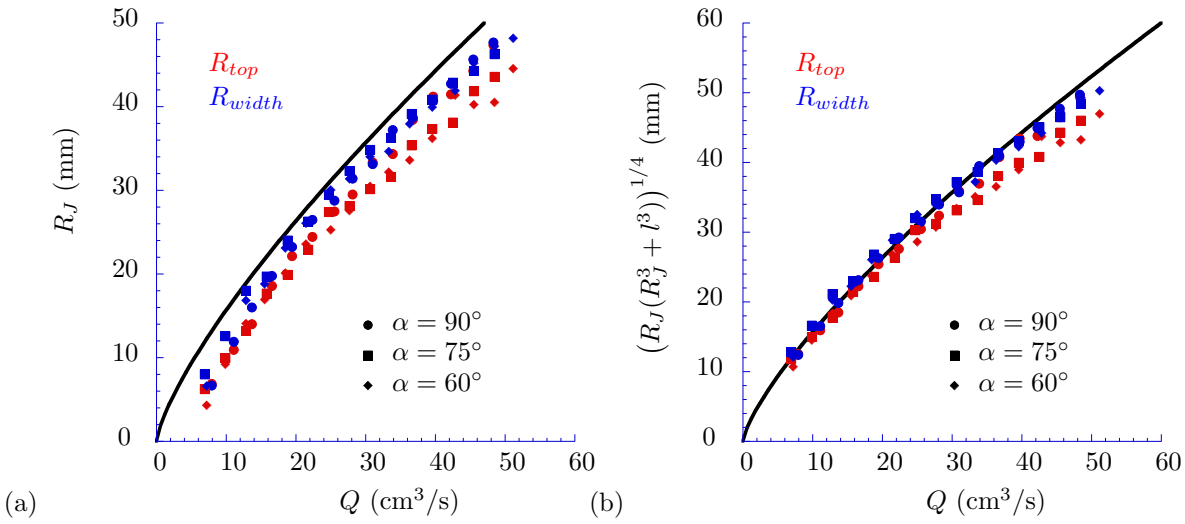


FIGURE X.5 – *R_{top} et R_{width} pour trois angles d'inclinaison de la plaque : 90° (représenté par des cercles), 75° (représenté par des carrés) et 60° (représenté par des losanges). R_{top} est noté en rouge et R_{width} en bleu. Le diamètre de l'injecteur est $\phi = 3$ mm. (a) La loi (X.4) est testée et est représentée par la ligne noire. (b) On fait le choix de ne plus négliger l^3, on obtient alors la loi (X.3) (et non plus R_{top} et R_{width} en fonction de Q). La théorie est encore représentée par la ligne noire (sans paramètre ajustable). Comme on peut le voir l'accord entre théorie et expérience est excellent. On constate que R_{top} est légèrement décalé en dessous de la théorie. Cela s'explique par le fait que la gravité ralentit très légèrement l'écoulement.*

Comme on peut le voir sur cette Fig. X.5 notre hypothèse de travail concernant l'égalité entre R_{top} et R_{width} est largement validée. Si R_{top} est légèrement plus faible que R_{width} c'est en raison de la gravité qui freine très légèrement le liquide.

On constate que le modèle proposé fournit un excellent accord avec les points expérimentaux. Toutefois il semble nécessaire de conserver le terme en l^3 qui permet la prise en compte des effets de l'injecteur. La loi (X.4) s'ajuste donc particulièrement bien sur les points expérimentaux sans aucun paramètre ajustable.

Toutefois on peut être surpris d'un accord aussi bon. En effet, visuellement mais aussi en terme de

nombre de Weber We on s'attend à ce que la fragmentation soit uniquement prédominante pour les hauts débits c'est-à-dire à $Q > 35$ cm^3/s. On peut donc être surpris d'un accord aussi bon au delà de la gamme de validité de notre modèle.

Si l'on veut comparer ces résultats avec le cas où $\phi = 4$ mm on retrouve bien une différence fondamentale de régime. Nous avons donc tracé la loi attendue en cas de fragmentation (X.3) pour deux angles similaires aux précédents ($\alpha = 90$ et $70°$). On obtient les points présentés en Fig. X.6.

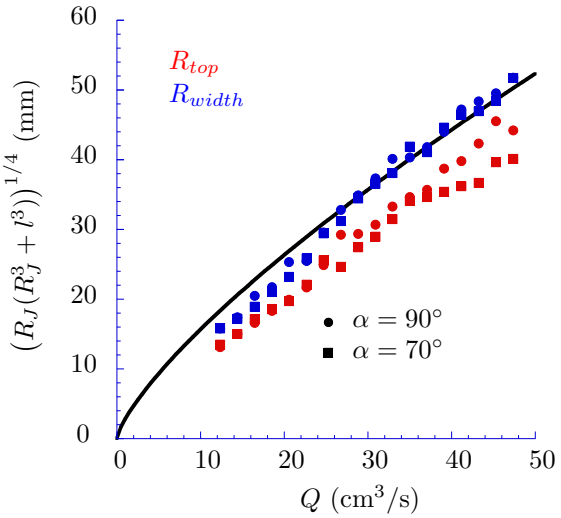


FIGURE *X.6 – R_{top} et R_{width} pour deux angles d'inclinaison de la plaque : 90° (représenté par des cercles) et 70° (représenté par des losanges). R_{top} est noté en rouge et R_{width} en bleu. Le diamètre de l'injecteur est ici $\phi = 4$ mm. La loi (X.3) est testée, on tient donc compte du terme en l^3 (on ne représente donc pas exactement R_{top} et R_{width} en fonction de Q). La théorie est représentée par la ligne noire (sans paramètre ajustable). Comme on pouvait s'y attendre la théorie ne permet pas de décrire le comportement de R_{top}. On constate cependant que R_{width} s'ajuste sur la théorie pour des débits élevés. Cela s'explique par le fait que pour cette gamme de débits la limite de fragmentation est plus élevée que la position de l'injecteur.*

Comme on peut le voir sur cette Fig. X.6 la loi théorique (X.4) ne s'ajuste plus du tout lorsque R_{top} est considéré. Ce résultat était bien sûr attendu puisque le mécanisme dominant est ici celui d'un ressaut hydraulique formant un bourrelet liquide et non celui décrit par notre modèle.

Il est également intéressant de constater que la courbe utilisant R_{width} suit le comportement attendu par la fragmentation pour des débits supérieurs à 25 cm^3/s. Ce débit seuil correspondant justement (comme on peut le voir sur la Fig. X.2) au moment où la limite entre fragmentation et bourrelet dépasse l'altitude de l'injecteur (elle se situera au dessus de cette position pour des débits plus élevés). Cela tend donc à valider notre approche : pour de faibles débits il faut prendre en compte le bourrelet, nous sommes donc dans le cas traité précédemment du ressaut sur plan incliné en situation de mouillage partiel tandis que pour les forts débits on observe une fragmentation et le modèle à considérer est celui présenté ci-dessus.

X.3 Conclusion sur le cas super hydrophobe

Nous avons donc pu le constater : cette situation d'impact d'un jet sur un plan superhydrophobe incliné présente une physique intéressante. Tantôt ressaut hydraulique tantôt fragmentation nous avons

pu en comprendre les enjeux et fournir une première modélisation. Toutefois, le champ d'investigation concernant ce sujet est loin d'être clos, il reste à comprendre et à modéliser la fragmentation dans la partie aval mais aussi à étudier la position de la limite entre fragmentation et bourrelet liquide. Si le nombre de Weber semble le bon paramètre de contrôle il faut toutefois affiner la transition entre fragmentation et bourrelet en fonction de l'angle θ et de l'inclinaison α.

Chapitre XI

Conclusion

Le ressaut hydraulique obtenu par un jet impactant verticalement un plan incliné est-il un ressaut horizontal comme les autres ?

C'est sur cette question un peu provocatrice que l'on pourrait refermer cette partie. Mais ce serait un peu tricher dans la mesure où l'on peut partiellement répondre à cette question.

Effectivement nous avons pu montrer dans toutes les situations étudiées (mouillage total, mouillage partiel, mouillage quasi nul, liquide visqueux ou liquide moins visqueux...) que la zone interne pouvait être traitée comme dans le cas du ressaut horizontal c'est-à-dire un écoulement radial dans lequel la gravité est parfaitement négligeable. Nous avons même pu montrer dans le cas du mouillage total et du mouillage quasi nul que la description de la zone interne proposée par Watson pouvait être appliquée sans aucune adaptation. Donc la réponse à notre question serait plutôt oui...

Pourtant ce serait aller rapidement que de faire une telle conclusion. En effet nous avons pu montrer tout au long de la première partie que les conditions aux limites étaient d'une importance capitale dans la modélisation du ressaut hydraulique. Or justement cette situation de ressaut sur un plan incliné offre des conditions aux limites particulièrement remarquables.

Nous avons, en nous intéressant à ces conditions aux limites, fait varier les conditions de mouillage et obtenu un certain nombre de résultats étonnants :

Dans le cas du mouillage total nous avons pu observer une ligne de contact effective associée à des angles de contact effectifs fixant une limite claire entre film liquide macroscopique et film liquide micro voire nanoscopique. Il était difficile de s'attendre à une transition aussi brutale et à des "angles de contact effectif" aussi bien définis. Nous avons donc pu, en modélisant simplement le bourrelet liquide, obtenir une description convenable du phénomène de ressaut sur plan incliné sur une large gamme d'angles d'inclinaison. Toutefois ce modèle repose sur des hypothèses intuitées qui mériteraient une étude plus approfondie.

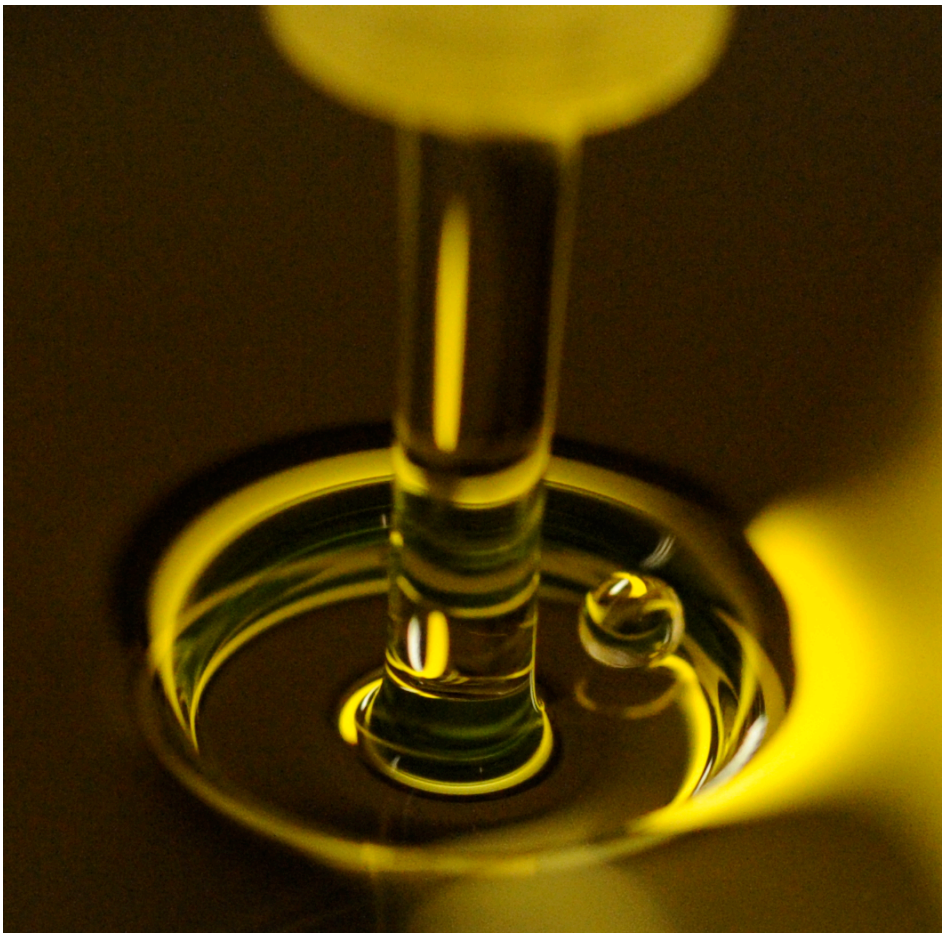
Dans le cas du mouillage partiel nous avons montré l'absence de comportement hystérétique dû au fait que la ligne de contact est sans cesse en mouvement. Cela rend difficile la mesure d'angles de contact moyens que nous avons trouvés plus faibles que les angles statiques d'avancée et de reculée alors que nous sommes, d'apparence, dans un cas statique. La modélisation s'est avérée plus difficile dans le cas de mouillage partiel et les modèles que nous avons obtenus nous encouragent essentiellement à affiner la description du bourrelet liquide et à étudier bien plus en détail les angles de contact au niveau du bourrelet. Il serait en outre intéressant de se confronter à une situation de mouillage différente avec un angle de contact statique plus faible par exemple.

Enfin en ce qui concerne la situation de mouillage quasi nul nous avons pu observer une physique

différente avec la fragmentation du film mince de la zone interne. On se retrouve alors davantage dans une situation proche de la fragmentation d'une nappe de Savart. On a en particulier pu observer la coexistence entre un ressaut conduisant à un bourrelet liquide dans la partie supérieure et cette zone de fragmentation. Il serait très intéressant d'étudier davantage ce phénomène de cohabitation de deux conditions aux limites différentes et en particulier de comprendre la position de décollement du bourrelet liquide.

Donc aux vues de ces résultats le ressaut sur plan incliné affiche une vraie richesse de comportements qui diffèrent fondamentalement du cas horizontal. Nous ne nous sommes pour le moment attelés qu'à une approche simple et il reste de nombreux champs à explorer. En particulier, nous n'avons pas même évoqué la forme du ressaut et il s'agit pourtant là d'un sujet qui semble vaste et important. En effet nous avons pu comprendre que le rapport d'aspect R_{top}/R_{width} changeait avec l'inclinaison. Cela se traduit donc en terme de courbure. Une étude de courbure permettrait peut être d'interpréter voire de comprendre l'instabilité que nous avons pu observer en situation de mouillage total...

Enfin le ressaut sur plan incliné n'est pas un ressaut comme les autres car il s'agit dans la plupart des situations d'un ressaut ouvert. Nous n'avons pas réussi à comprendre ni même à mesurer cette transition d'ouverture. Cette situation de ressaut ouvert est pourtant loin d'être triviale et interroge profondément sur la nature même du ressaut hydraulique. Pourquoi peut-on maintenir un choc dans une situation faiblement inclinée et comment se fait la transition vers une absence de ressaut ?



Troisième partie

Gouttes dans un ressaut

Chapitre XII

Etat de l'art et dispositif expérimental

XII.1 Non coalescence et dynamique : une goutte en lévitation dans un ressaut hydraulique

Revenons maintenant au cas "simple" du ressaut hydraulique circulaire sur un plan horizontal. Lorsque l'on dépose une goutte du même liquide dans la zone interne du ressaut (zone de forte vitesse et de faible épaisseur) la goutte se trouve séparée du bain par un mince film d'air, dans un état de non coalescence. Cette goutte, "plaquée" contre le "mur" liquide va se déplacer dans le ressaut de manière périodique ou apériodique suivant les conditions expérimentales.

Cette expérience n'est pas sans évoquer d'autres situations où la non coalescence de gouttes offre un système à la dynamique particulièrement riche et inattendue. Avant d'aller plus loin sur les travaux effectués, attardons-nous sur quelques unes de ces situations remarquables.

XII.1.1 De la goutte volante à la goutte "quantique".

Lorsqu'une goutte impacte un bain du même liquide ou une surface solide elle va coalescer avec le liquide ou mouiller le solide. Il existe toutefois un certain nombre de situations où l'on observe un retard, voire une absence de coalescence due à un film d'air ou de vapeur séparant la goutte du substrat. On parle alors de "non-mouillage".

Le moyen le plus connu pour maintenir un tel film gazeux est de chauffer le substrat pour obtenir un effet dit de caléfaction [73] (effet Leidenfrost). Le liquide s'évaporant sous la goutte forme alors un film isolant entre la goutte et le substrat chaud sur lequel celle-ci lévite. Dans cette configuration, pour des gouttes suffisamment petites (quelques dizaines de microns), on observe même le "décollage" de la goutte [17] qui voit évoluer très rapidement la distance entre elle et le substrat.

Dans le cas de l'interaction entre une goutte et un bain liquide on peut maintenir un film d'air en faisant vibrer un bain liquide : à chaque oscillation du bain le film d'air sous la goutte se renouvelle [88] et la goutte n'entre donc jamais en contact avec le bain (dans les faits on peut ainsi maintenir une goutte en situation de non mouillage pendant une durée de l'ordre de la journée). Dans cette situation, en faisant vibrer le bain de manière à s'approcher du seuil de l'instabilité de Faraday, il est possible de déplacer la goutte (on parle alors de goutte marcheuse ou simplement de marcheur) [24]. Le marcheur

constitue un objet d'étude passionnant, en effet, lorsque la goutte rebondit sur le liquide vibré elle engendre une onde circulaire. La goutte et le champ d'ondes associé permettent ainsi de reproduire à l'échelle classique des expériences impliquant la dualité onde corpuscule comme la diffraction ou l'effet tunnel [23, 40]. En ajoutant une goutte de ferrofluide à l'intérieur du marcheur goutte on peut "charger" le marcheur et observer sa dynamique dans un champ magnétique inhomogène : un puits de potentiel harmonique à deux dimensions. On observe en particulier des orbites quantifiées (circulaires ou plus complexes : lemniscates, trifolium) [85] ainsi que des dynamiques d'inversions entre ces états [84].

Il est à noter qu'avec un dispositif similaire (une goutte sur un bain vibré) un autre groupe a pu observer la dynamique d'une goutte mise en mouvement par ses propres modes de vibrations harmoniques [35, 48].

On peut également faire rebondir une goutte sur un film de savon mis en vibration par un haut-parleur. Le film d'air est donc maintenu par un dispositif assez semblable au cas précédent. Dans ce cas de figure on observe que la période des rebonds de la goutte peut transiter vers le chaos [46, 47].

Il est aussi possible de "tricher" un peu et de recouvrir la goutte d'une poudre hydrophobe qui séparera la goutte du substrat ou de fabriquer un substrat super-hydrophobe (voir par exemple Annexe C). Sur un tel substrat la goutte est certes en contact avec le solide mais la texture du substrat se traduit par le fait que la surface de la goutte en contact avec le substrat est presque négligeable. Dans ces deux cas la goutte repose quasiment sur un film d'air. Lorsque l'on incline le substrat jusqu'au roulement rapide de la goutte on assiste à des déformations de la goutte particulièrement surprenantes que le substrat soit super hydrophobe [92], ou la goutte recouverte de poudre [1, 92]. Dans ce dernier cas, on peut même observer que la goutte prend les formes prédites par Poincaré pour les corps célestes en rotation.

Nous avons rapporté en Fig. XII.1 quelques unes des images de ces diverses publications pour donner au lecteur une idée plus précise de ce que nous évoquons.

XII.1.2 Gouttes dans un ressaut hydraulique : état de l'art

Nous proposons ici un dispositif original pour l'étude de la dynamique de gouttes en non coalescence : le ressaut circulaire hydraulique. Ici, ce qui maintient un film d'air entre la goutte et le bain est le bain lui-même. La goutte est placée dans le zone interne du ressaut et plaquée contre le "mur liquide" ; la vitesse du liquide sous la goutte est, comme on l'a vu précédemment, de l'ordre de 0,3 m/s. Cette vitesse est suffisante pour renouveler en permanence le film d'air via un entraînement visqueux et ainsi séparer la goutte du bain pendant plusieurs minutes.

XII.1.2.1 Les travaux précurseurs

Le premier groupe à avoir relaté ce phénomène de non coalescence est le groupe de Sreenivas *et al.* [107]. Dans leur article, le ressaut hydraulique est obtenu en faisant impacter un jet sur un disque de verre horizontal (la distance entre l'injecteur et le jet est typiquement de 7 cm). Le liquide utilisé dans ce cas est de l'eau. Les débits utilisés sont de l'ordre de 10 cm^3/s, le ressaut a donc un rayon d'environ 1,5 cm.

Sreenivas *et al.* déposent alors des gouttes de différents liquides au bord du ressaut (eau, mélange eau glycérol, eau savonneuse et huile de moteur) et observent un état de non coalescence pour ces gouttes (voir Fig. XII.2). Des essais sont aussi réalisés avec de l'ethanol mais la très forte miscibilité et l'évaporation de l'ethanol empêche de constater un état de non coalescence pour ce liquide. Les

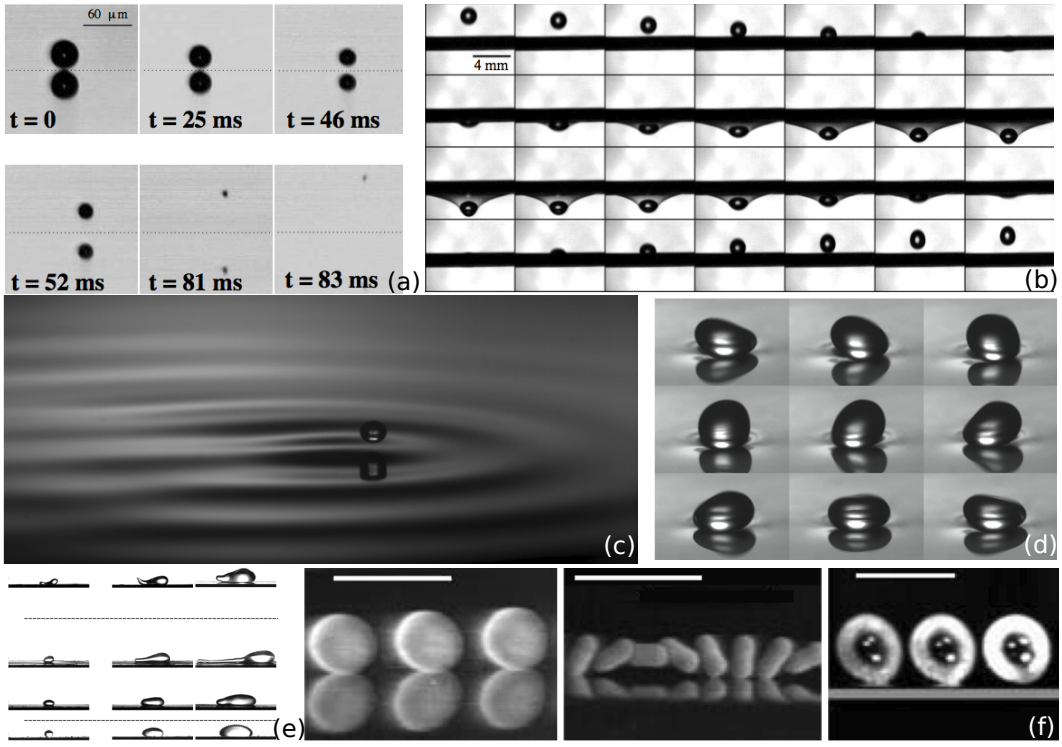


FIGURE *XII.1 – (a) Décollage d'une goutte d'eau par effet Leidenfrost. Photographie tirée de [17]. (b) Rebond d'une goutte sur un film de savon en vibration. Photographie tirée de [47]. (c) Goutte marcheuse et son onde : un exemple macroscopique de dualité onde corpuscule. Photographie tirée de [24]. (d) Goutte rebondissante en surface d'un bain visqueux vibré. Les harmoniques propres de la goutte vont engendrer un déplacement. Photographie tirée de [48]. (e) Gouttes dévalant un substrat superhydrophobe incliné. Les différentes formes de goutte dépendent de la taille de la goutte et de l'inclinaison du substrat. Photographie tirée de [92]. (f) Gouttes de glycerol enrobées de poudre hydrophobe sur un plan incliné. Les gouttes se déstabilisent à grande vitesse sous l'effet de la force centrifuge. Photographie tirée de [1].*

gouttes sont déposées à l'aide d'une seringue et leur volume se situe entre 0,03 et 1 mL. Les gouttes mesurent donc entre deux et une dizaine de millimètres de rayon. On est donc de l'ordre, voire bien au delà, de la longueur capillaire et les gouttes observées ressemblent davantage à des flaques qu'à des gouttes. La durée de vie des gouttes observée par Sreenivas *et al.* est au maximum de l'ordre de cinq minutes.

Un rapide calcul équilibrant la pression de sustentation générée par la lubrification et la masse de la goutte permet d'estimer la hauteur d_A du film d'air séparant la goutte du bain. En utilisant la référence [16] pour les coefficients numériques on arrive à $d_A \approx 14$ μm.

En outre les auteurs observent une rotation interne dans la goutte et se proposent d'en estimer la vitesse. On équilibre le taux de travail effectué par la goutte W et le taux de dissipation dans la goutte liquide τ :

$$\begin{cases} W \sim \eta_a U_D \frac{U_S - U_D}{d_A} D^2, \\ \tau \sim \eta_d \frac{U_D^2}{H^2} D^3, \end{cases} \tag{XII.1}$$

où η_a et η_d sont respectivement les viscosités dynamiques de l'air et de la goutte, U_S et U_D les vitesses à la surface du liquide et à la surface de la goutte et D et H le diamètre et la hauteur de la goutte.

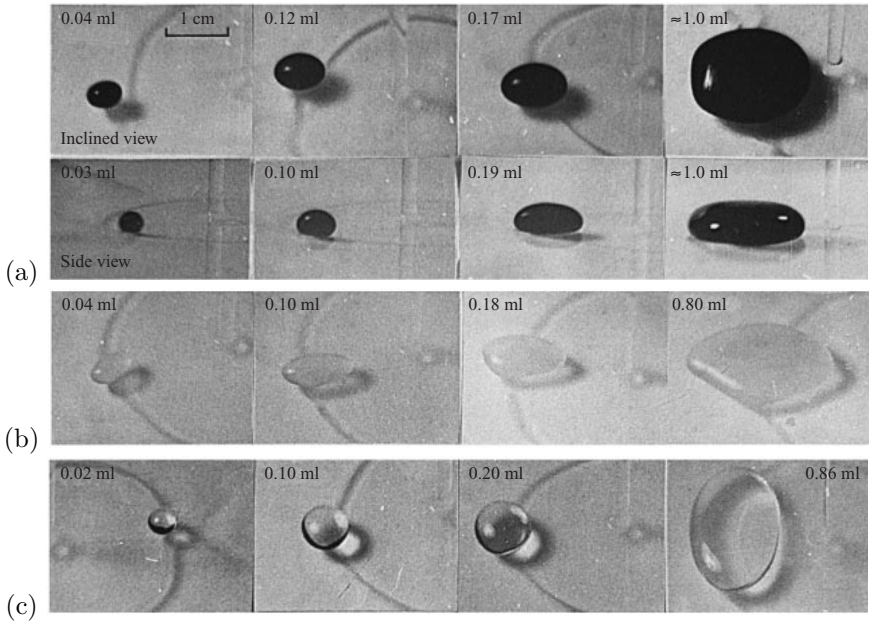


FIGURE *XII.2 – Formes des gouttes déposées dans un ressaut d'eau circulaire pour trois liquides : (a) eau, (b) eau savonneuse et (c) huile de moteur et pour une gamme de volume de 0,02 à 0,86* mL. *Le débit est de l'ordre de 8* cm^3/s *et le rayon du ressaut de l'ordre de 1,8* cm. *Dans les petites gouttes la tension de surface domine par rapport à la gravité : elles ont donc une forme quasi sphérique. Pour les gouttes les plus grosses la gravité domine, les goutte s'assimilent davantage à des flaques.*

Egaliser les deux termes nous conduit à

$$U_D \approx \frac{U_S}{1+K}, \tag{XII.2}$$

avec $K = d_A\eta_d/(H\eta_a)$. Ce calcul aboutit à une vitesse d'environ 7,5 mm/s pour une goutte d'1 mL d'huile tandis que la valeur expérimentale mesurée est de 6 mm/s. L'accord semble donc tout à fait correct. Nous testerons plus loin cette loi de manière systématique. [1]

XII.1.2.2 Le cas du ressaut faiblement incliné

C'est dans l'article [86] issu de notre équipe, en collaboration avec Christophe Pirat, que l'on retrouve la première évocation d'un mouvement de la goutte dans le ressaut. Toutefois, ce travail considère un autre cadre que le nôtre : le ressaut hydraulique n'est plus tout à fait circulaire et plus tout à fait horizontal... Il est, en effet, légèrement incliné d'un angle $\alpha = 1° \pm 0,1°$. Mis à part cette différence le dispositif est extrêmement proche de celui décrit dans la section suivante : un jet d'huile silicone de 20 cS projeté depuis un injecteur de 4 mm de diamètre interne impacte radialement un

1. Étonnamment le papier ne fait référence à aucune sorte de mouvement de la goutte à l'intérieur du ressaut. La dynamique de la goutte n'y est même pas évoquée. La taille des gouttes utilisées est probablement la cause de cette absence. En effet, les gouttes sont toutes de taille très importante et les plus grosses "montent" même sur le ressaut. Dans notre dispositif expérimental, nous obtenons des mouvements de la goutte pour différents rayons de la goutte mais nous nous trouvons plutôt dans le cas de gouttes dont le rayon est de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire. Une autre différence importante est que nous utilisons pour le bain une huile silicone de 20 cS donc un liquide beaucoup plus visqueux... La vitesse au niveau de l'impact peut ainsi être très différente et donc la dynamique de la goutte posée dessus aussi.

disque de verre de 30 cm de diamètre situé 3 cm en dessous.

Dans cette expérience on fait attention à contrôler la taille des gouttes que l'on dépose : elles ont une taille proche de la longueur capillaire. De telles gouttes, placées dans ce ressaut légèrement incliné vont se mettre à osciller périodiquement autour de la position la plus basse comme on peut le voir sur la Fig. XII.3.

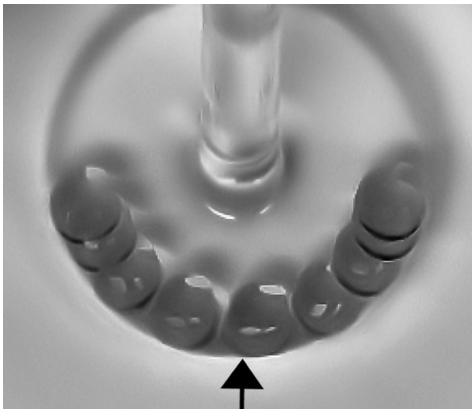


FIGURE *XII.3 – Chronophotographie d'une goutte en non coalescence contre un ressaut hydraulique légèrement incliné. La goutte et le bain sont du même liquide c'est-à-dire de l'huile silicone 20* cS*. La goutte ne reste pas stationnaire au point de plus basse altitude (signalé par une flèche) mais se met en mouvement spontanément sous l'action d'une instabilité gyroscopique. La goutte oscille périodiquement dans le ressaut comme cela est visible sur l'image où les positions successive de la goutte sont superposées. Photographie tirée de [86].*

Dans cet article, Pirat *et al.* proposent un modèle, qui fut développé par Antoine Fruleux, lors d'un stage au laboratoire MSC, puis par Clément Savaro et moi-même ensuite, pour décrire le mécanisme de rotation qui a lieu dans cette expérience. Nous allons le développer ici car nous le reprendrons plus tard dans le cas "plus simple" d'une goutte dans un ressaut horizontal.

Pour simplifier le problème, la goutte (de rayon a) est modélisée par une sphère rigide et le ressaut (de rayon R_J) par une "gouttière" rigide et verticale. On suppose deux points de contact entre la goutte et le liquide : l'un sous la goutte noté A et l'autre contre la paroi du ressaut noté B. La vitesse sous la goutte est notée U_A et la vitesse de la paroi est notée U_B. Les principales notations sont présentées en Fig. XII.4 (a).

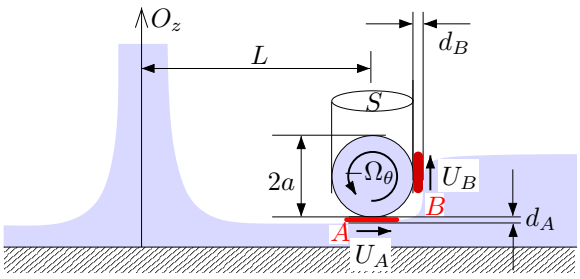
L'idée est simple : entraînée par le mouvement radial du liquide, la goutte acquiert une rotation propre, dont le moment cinétique associé est parallèle au front. Si maintenant une perturbation déplace latéralement la goutte, celle-ci tentera de conserver son moment cinétique qui, de fait, va acquérir une composante radiale, susceptible d'engendrer un couple moteur par friction sur le bain, amplifiant la perturbation initiale. Il en résulte alors un mouvement orbital entretenu (voir Fig. XII.4 (b)). [2]

Ce modèle peut être formulé plus rigoureusement en écrivant les équations régissant le mouvement d'une sphère de rayon a décrivant la goutte. La goutte ne pouvant bouger selon r où selon z un angle θ suffit à repérer sa position dans le ressaut. On cherche donc à obtenir une loi horaire pour θ.

On suppose que les forces échangées au niveau des points de contact A et B sont de type friction visqueuse à travers un film d'air cisaillé :

$$\overrightarrow{F_A} = \eta_a (S_A/d_A)(\overrightarrow{U}_A - \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{GA}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F_B} = \eta_a (S_B/d_B)(\overrightarrow{U}_B - \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{GB}), \tag{XII.3}$$

2. Bien entendu ce mécanisme, analogue à un effet gyroscopique, reste valable dans le cas horizontal.

(a) 

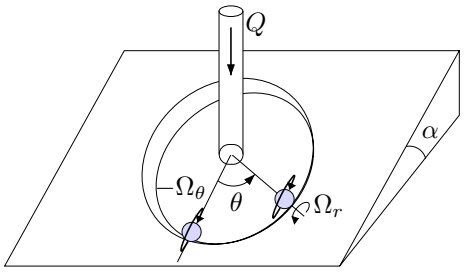
(b) 

FIGURE *XII.4 – (a) Schéma de la goutte dans le ressaut hydraulique. L'axe central du jet de liquide est représenté par O_z. La goutte de rayon a, repérée par sa position orbitale $L = R_J - a$ est en contact en deux points avec le ressaut hydraulique : A et B. Les vitesses du liquide du ressaut en ces points sont notées U_A et U_B et les épaisseurs d'air séparant la goutte du bain en ces points d_A et d_B. On considère que la surface de contact correspond à πa^2. (b) Principe de l'instabilité vu en 3 dimensions. Lorsque l'on écarte légèrement la goutte de sa position d'équilibre elle tend à conserver son moment angulaire constant. Cela a pour effet de développer une composante radiale du vecteur vitesse de rotation instantanée de la goutte ce qui tend à amplifier le déplacement de la goutte.*

où η_a est la viscosité de l'air, les quantités $S_A, S_B, d_A, d_B, \overrightarrow{U}_A, \overrightarrow{U}_B$ désignent les surfaces de contact, les épaisseurs locales des films d'air, et les vitesses du bain aux points A et B. G est le centre de masse de la goutte et $\overrightarrow{\Omega}$ désigne le vecteur vitesse de rotation instantanée de la goutte autour de G dans le référentiel du laboratoire.

Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse de la goutte conduit aux équations :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_r}{dt} + \frac{1}{\tau_A}\left(\Omega_r + \frac{L}{a}\omega\right) = \omega\Omega_\theta, \\ \frac{d\Omega_\theta}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}\right)\Omega_\theta = -\omega\Omega_r - \frac{1}{a}\left(\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B}\right), \\ \frac{d\Omega_z}{dt} + \frac{1}{\tau_B}\left(\Omega_z + \frac{L}{a}\omega\right) = 0, \end{cases} \tag{XII.4}$$

avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse orbitale, $L = R_J - a$ le rayon de l'orbite suivie par la goutte, et les deux temps caractéristiques $\tau_A = \frac{8}{15}\pi a^3 \frac{\rho_l}{\eta_a}\frac{d_A}{S_A}$ et $\tau_B = \frac{8}{15}\pi a^3 \frac{\rho_l}{\eta_a}\frac{d_B}{S_B}$ où ρ_l désigne la masse volumique du liquide de la goutte. La goutte ne bougeant que selon θ le principe fondamental de la dynamique peut fournir une équation supplémentaire :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}\right)\omega + \left(\frac{g}{L} sin\alpha\right) sin\theta = -\frac{2}{5}\frac{a}{L}\left(\frac{\Omega_r}{\tau_A} + \frac{\Omega_z}{\tau_B}\right) \tag{XII.5}$$

On obtient ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues (les trois composantes de $\overrightarrow{\Omega}$ et ω).

Toutefois parmi les paramètres en jeux τ_A et τ_B ne peuvent être simplement calculés. Pirat *et al.* proposent donc une série d'approximations pour évaluer leur valeur moyennant différentes approximations sur les surfaces de contact S_A et S_B et les distances d_A et d_B (voir Fig. XII.4).

La première est de considérer que les deux surfaces de contact mises en jeu sont de l'ordre de la surface de la goutte c'est-à-dire que $S_A \sim S_B \sim \pi a^2$.

Il faut en outre déterminer les valeurs de d_A et d_B. Les auteurs se proposent donc de fournir une estimation en loi d'échelle pour déterminer ces valeurs.

Pour d_A : si U_A désigne la vitesse de surface du liquide sous la goutte alors le film d'air s'écoule lui aussi avec une vitesse typique de l'ordre de U_A sur son épaisseur d_A, développant ainsi un gradient de pression de l'ordre de $\eta_a U_A/d_A^2$ et donc une pression de $\eta_a a U_A/d_A^2$. Cette pression fournit une force permettant la lévitation d'ordre $\eta_a a^3 U_A/d_A^2$ qui s'équilibre alors avec le poids de la goutte et fournit l'estimation :

$$d_A \sim \left(\frac{\eta_a U_A}{\rho g}\right)^{1/2}. \tag{XII.6}$$

On estime ainsi d_A de l'ordre de 18 μm. Pour ce faire on utilise l'hypothèse que la vitesse de surface du liquide est de 16 cm/s [3].

Pour estimer d_B on suit une démarche analogue on obtient ainsi une force séparant la goutte du ressaut de l'ordre de $\eta_a a^3 U_B/d_B^2$. Dans ce cas là il n'est pas question de l'équilibrer avec la gravité mais avec la friction : $F_A = \eta_a (S_A/d_A)(U_A - a\Omega_\theta)$. L'expression de F_A est assez inutilisable puisque Ω_θ varie et que c'est un des paramètres du problème. Les auteurs font donc le choix de négliger le terme en $a\Omega_\theta$. On obtient alors une expression pour d_B :

$$d_B \sim \left(\frac{d_A a U_B}{U_A}\right)^{1/2}. \tag{XII.7}$$

Les auteurs estiment alors que U_B est de l'ordre de 1/10 de U_A. On obtient ainsi une valeur pour d_B de l'ordre de 43 μm (avec $d_A \approx 18$ μm). Cela nous permet ensuite de calculer les valeurs de τ_A et τ_B. Ainsi on estime τ_A à environ 0,63 s et τ_B à environ 1,7 s.

Connaissant tous les paramètres on peut intégrer numériquement les équations (XII.4) et (XII.5). Le résultat de cette intégration est présenté en Fig. XII.5 (de (a) à (d) on voit le résultat des intégrations pour les paramètres calculés précédemment et la figure (e) compare les périodes d'oscillations mesurées expérimentalement avec celles attendues par le modèle).

Comme on le voit, le modèle proposé par les auteurs semble très bien décrire les oscillations d'une goutte dans un ressaut hydraulique. On constate en particulier un assez bon accord entre la période d'oscillation attendue et la période d'oscillation observée. On peut faire le même constat pour ce qui est de l'amplitude de ces oscillations...

Les épaisseurs de film d'air jouent un rôle extrêmement important, il convient donc d'approfondir davantage cette question.

XII.1.2.3 Epaisseur des films d'air

Quelques éléments de réponse peuvent être trouvés dans une récente publication de Lhuissier *et al.* [74]. Dans cette publication les auteurs s'intéressent à un autre dispositif expérimental : des gouttes d'huile silicone (50 cS) en lévitation dans un tambour tournant sur lequel est placé une mince couche de liquide. Ce dispositif permet de modifier facilement la vitesse du film liquide et se trouve être assez analogue à la situation des gouttes dans un ressaut. On s'attend en particulier à ce que le film d'air se comporte de même manière dans les deux expériences.

L'un des principaux résultats de cet article est l'obtention de deux lois d'échelle pour ce film d'air.

Dans le cas des petites gouttes on obtient :

$$d_A \sim Ca^{4/5} (l_c \kappa_b)^{4/5} \kappa_b^{-1} \tag{XII.8}$$

3. Cette vitesse est plutôt à interpréter comme étant la vitesse de surface du bain "vue par la goutte" (la vitesse du bain est, elle, de l'ordre de 30 cm/s comme on l'a vu dans la Partie I). Elle est estimée en observant la vitesse de rotation typique de la goutte.

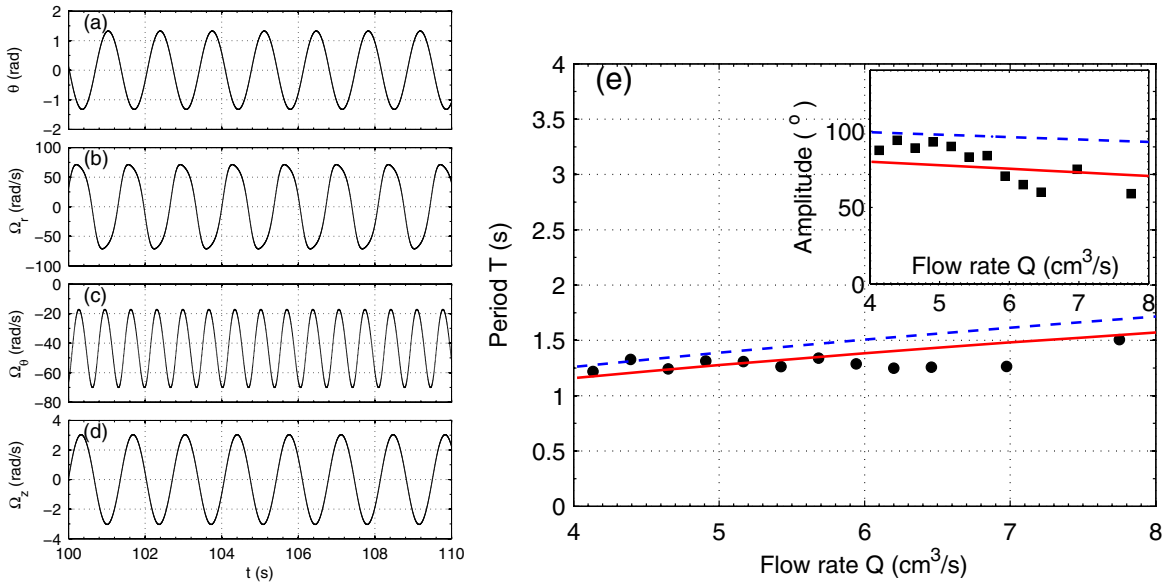


FIGURE *XII.5 – Solutions typiques des équations (XII.4) et (XII.5) intégrées numériquement avec* $\tau_A = 0,63$ s, $\tau_B = 1,70$ s, $a/(R_J - a) = 0,25$, $U_A/a = 123$ s^{-1} *et* $g/(R_J - a)sin\alpha = 36,9$ s^{-2}. *(a) Mouvement d'oscillation de la goutte* $\theta(t)$ *obtenu sur une grande échelle de temps de calcul. (b)-(d) Oscillations relatives à* $\theta(t)$ *des vitesses angulaires* $\Omega_r(t)$, $\Omega_\theta(t)$ *et* $\Omega_z(t)$. *(e) Période des oscillations de la goutte en fonction du débit* Q. *Insert : Amplitude de ces oscillations en fonction du débit. Les droites de couleur représentent la théorie sous forme d'intégration des équations (XII.4) et (XII.5). La ligne en pointillés bleus correspond au cas* $\alpha = 1°$ *et la ligne continue rouge à* $\alpha = 1,1°$. *Comme on peut le voir sur ces courbes l'accord entre théorie et expérience est tout à fait satisfaisant. Pour plus d'informations se reporter à [86].*

et pour les grosses gouttes :

$$d_A \sim Ca^{2/3}\kappa_b^{-1}, \tag{XII.9}$$

où Ca est le nombre capillaire construit avec la viscosité du film d'air (i.e. $Ca = \eta_a U_A/\gamma$ avec γ la tension de surface du liquide), l_c la longueur capillaire ($l_c = \sqrt{\gamma/(\rho_l g)}$) et κ_b la courbure en dessous de la goutte.

L'article de Lhuissier *et al.* propose en outre des mesures directes de l'épaisseur du film d'air via une méthode par interférométrie couleur. Il obtient ainsi pour des diamètres de gouttes directement comparables à celles de Pirat *et al.* ou à celles que nous utiliserons dans notre dispositif (entre 0,55 et 1,5 mm de rayon) une épaisseur de film d'air située entre 4 et 5 μm pour une vitesse de surface U_A de l'ordre de 1,5 m/s. Il y a donc un facteur 5 entre la vitesse typique utilisée dans cette situation et les vitesses typiques observées pour le ressaut au voisinage du choc. Le nombre capillaire Ca sera donc cinq fois moins élevé dans le cas du ressaut. Si l'on utilise les lois d'échelle XII.8 et XII.9 et que l'on considère que la courbure du bas de la goutte est sensiblement égale dans le cas du ressaut et dans le cas étudié précédemment on obtient alors

$$d_A \sim 1\mu\text{m}. \tag{XII.10}$$

Il y a donc un très fort écart entre les épaisseurs typiques estimées par Sreenivas *et al.* puis Christophe Pirat *et al.* et l'épaisseur qui semble la plus probable dans notre cas aux vues des résultats de Lhuissier *et al.* . On considérera donc à partir de maintenant que d_A vaut environ 1 μm. Cela nous permettra, entre autres, d'expliquer la grande fragilité du film d'air sous la goutte dans notre expérience.

Si on a $d_A = 1$ μm on obtient alors τ_A valant environ 0,03 s et si maintenant on suppose que l'équation XII.7 reste valable (ce qui est pour le moins discutable) τ_B vaut 0,3 s (avec $d_B \sim 10$ μm).

XII.2 Dispositif expérimental

XII.2.1 Montage

Le dispositif expérimental que nous avons utilisé pour cette étude des gouttes dans un ressaut repose bien évidemment sur l'obtention d'un ressaut hydraulique le plus stable et le plus contrôlé possible. L'idée est d'observer une goutte en lévitation dans un ressaut dans une situation parfaitement horizontale. On s'appuie donc bien évidemment sur le montage décrit précédemment dans le chapitre I (voir section III.1 et particulièrement la Fig. III.1) que nous avons adapté et amélioré. Rappelons qu'il s'agit grosso modo d'une buse alimentée par un bac à niveau constant injectant de l'huile perpendiculairement au centre d'un disque de verre horizontal. Ce dispositif est décrit dans la Fig. XII.6.

Pour être plus précis notons que la buse a un diamètre intérieur de $\phi = 3,2$ mm, que la distance entre l'injecteur et la plaque est de $Z = 4$ cm (le jet n'est ainsi pas déstabilisé par l'instabilité de Rayleigh-Plateau toutefois avec une telle distance il s'affine en raison de la gravité et de la tension de surface ; nous reviendrons sur ce point plus loin dans le manuscrit) et que le disque de verre présente un rayon R_∞ de 15 cm. Aux vues de la gamme de débits où les phénomènes étudiés sont visibles, nous avons fait le choix de remplacer le débitmètre numérique précédent par un débitmètre de la même marque mais correspondant à une gamme plus proche de la nôtre : le McMillan S-111-8. Comme dans le cas précédent il est calibré par des mesures de pesées.

XII.2.2 Stabilité du dispositif

L'observation expérimentale d'une goutte dans un ressaut est toutefois assez différente de celle du ressaut hydraulique en lui-même. La goutte étant en lévitation sur un film d'air micrométrique, il est nécessaire de travailler davantage sur la stabilité du dispositif et la propreté de l'huile. Cela est particulièrement vrai puisque nous nous intéressons à la dynamique de la goutte. Plusieurs niveaux de stabilité sont donc à prendre en compte.

XII.2.2.1 Stabilité de l'injection de liquide

Bien que les pompes à engrenages que nous utilisons soient conçues pour délivrer un débit non pulsé, il subsiste tout de même le risque d'avoir un léger bruit mécanique (bien que non perceptible à l'aide de nos instruments de mesures usuels) que ce soit à cause de l'âge de la pompe (les engrenages étant des pièces d'usure) ou de toute autre raison. Nous avons donc fait le choix d'utiliser exclusivement un bac à niveau constant (alimenté lui-même par une pompe à engrenages posée sur un support différent du reste de l'expérience afin d'éviter la transmission des vibrations mécaniques de la pompe). Le liquide étant uniquement mû par la gravité, une vanne permet d'imposer le débit. On s'attend donc à un débit parfaitement contrôlé. Le bac à niveau constant permet aussi d'éviter que des bulles ne viennent perturber l'écoulement, la pompe entraînant parfois quelques bulles d'air. Toutefois l'utilisation d'un bac à niveau constant présente le désavantage majeur de diminuer drastiquement la gamme de débits accessibles.

La circulation de liquide dans toute la tuyauterie s'effectue en régime visqueux et suit donc une loi de Poiseuille : la perte de charge à vaincre est proportionnelle à la viscosité, au débit, à la longueur des tuyaux et à la puissance quatrième de leur diamètre. Il a donc fallu, pour obtenir la plus grande

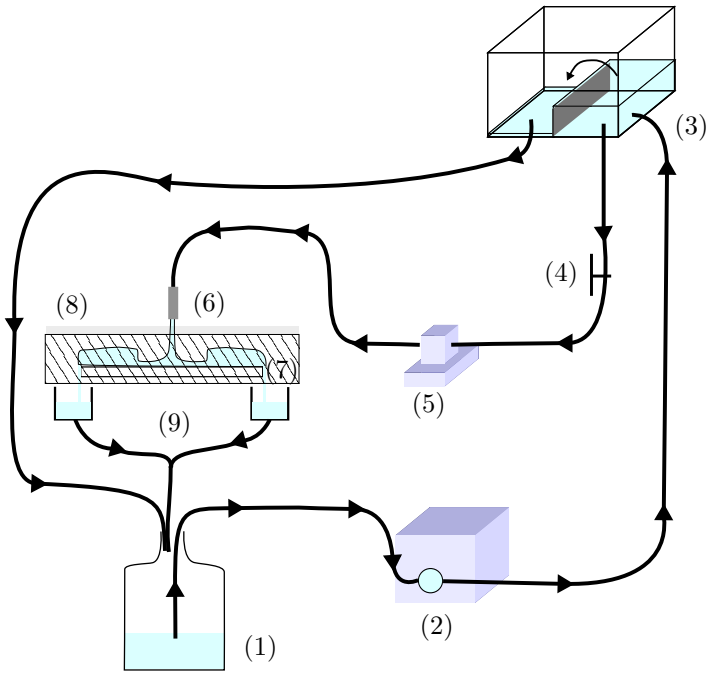


FIGURE *XII.6 – Schéma explicatif du dispositif expérimental utilisé. Le dispositif expérimental se décrit ainsi d'amont en aval : une pompe à engrenage (2) aspire le liquide dans le bidon de stockage (1). La pompe (2) alimente un bac à niveau constant (3) dont le débit est réglé ensuite à l'aide d'une vanne (4). Le liquide passe au travers d'un débitmètre numérique (5) puis s'écoule ensuite dans une buse (6) de diamètre 3,2* mm. *Le jet impacte un disque de verre horizontal (7) pour former un ressaut hydraulique. Le liquide s'écoule radialement sur la plaque puis s'écoule dans les gouttières de récupération (9) qui alimente ensuite le bidon de stockage (1). La zone d'impact est protégée des courants d'air par le dispositif (8), c'est-à-dire un mur extérieur surmonté de plaques de Plexiglas qui permettent de fermer le dispositif.*

gamme de débits possible, ajuster au mieux le circuit, utiliser les tuyaux les plus larges possibles et diminuer autant que possible les longueurs de ces tuyaux tout en essayant d'éviter de multiplier les raccords de plomberie, ce qui aurait constitué une source possible de création de bulles d'air dans le circuit.

XII.2.2.2 Stabilité vis-à-vis des bruits parasites extérieurs

Au cours de nos expériences nous avons pu relever deux sources de bruits "parasites" : les courants d'air (un léger souffle d'air peut modifier le comportement de la goutte dans le ressaut) et les vibrations.

Nous avons donc mis en place un mur de protection autour du disque de verre qui peut être recouvert quasi entièrement par un couvercle en Plexiglas afin de nous prémunir des coups de vent importuns.

Nous avons aussi fait l'acquisition d'une table optique anti-vibratoire. Le système anti-vibratoire passif (c'est-à-dire que la table repose sur des coussins d'air et est conçue avec une structure interne en nids d'abeilles) nous permet ainsi de ne plus ressentir les vibrations extérieures par exemple lorsque l'expérimentateur marche autour du dispositif.

XII.2.2.3 Horizontalité

Cette table optique permet en outre de fournir une référence stable au réglage de l'horizontalité. Pour ajuster au mieux cette dernière on dispose de deux éléments microcontrôles qui permettent de fixer les deux degrés de liberté en rotation de la plaque.

Ce paramètre est crucial, en effet, le degré d'horizontalité nécessaire pour nos mesures est très élevé : un défaut peut perturber la loi horaire de la goutte, voire empêcher sa mise en mouvement.

Les niveaux à bulle les plus précis ne suffisent pas à régler ce paramètre et l'on ne peut pas se servir des colonnes liquides en raison de l'utilisation de gouttières. Nous utilisons donc les gouttes elles-mêmes : si l'on dépose les gouttes à plusieurs endroits du ressaut et que l'on ne détecte pas de position préférentielle on estime que le dispositif est parfaitement horizontal.

XII.2.2.4 Stabilité de l'huile

Durant toutes ces expériences nous utilisons de l'huile de Silicone 20 cS de marque CRC (voir III.2.1). La viscosité cinématique de cette huile est donc de $20,4 \pm 0,6$ cS, sa densité 950 kg/m^3 et sa tension de surface 20,6 mN/m.

On a vu dans la partie concernant les huiles silicones (voir III.2.1) que ces huiles ne vieillissaient pas et ne se polluaient pas. Pourtant on a pu observer que la durée de vie des gouttes en non coalescence fluctuait avec le temps. Il semble donc que si les propriétés physiques de l'huile ne sont pas altérées par le vieillissement, les propriétés concernant la non coalescence sont, elles, altérées. Nous ne connaissons pas le ou les paramètres responsables de cette altération (aération de l'huile, humidité, pollution par des poussières...). Néanmoins, il est devenu évident qu'il fallait protéger au maximum l'huile pour éviter toute source de pollution. Nous avons donc cherché à réaliser le circuit le plus fermé possible. Nous utilisons donc un système de gouttière qui récupère le liquide en bord de plaque et qui le fait s'écouler dans le réservoir. Ce réservoir est en réalité un bidon. C'est du goulot que partent les tuyaux du circuit. Il n'y a donc quasiment aucun risque de prise de poussière à ce niveau-là. Les plaques de Plexiglas placées au dessus du disque de verre (pour éviter les courants d'air) permettent aussi d'éviter la présence de poussière polluante dans l'huile. Le circuit est donc quasiment intégralement protégé de la poussière.

Par ailleurs, nous avons aussi pu observer l'importance de la marque de l'huile silicone. La comparaison de plusieurs huiles dans les mêmes conditions (les propriétés physiques du liquide étant identiques) met en évidence de fortes variations du "temps de vie" de la goutte. Nous proposons l'explication suivante :

Pour obtenir une huile silicone d'une viscosité donnée on peut ou bien mélanger des polymères de différentes longueurs et obtenir la viscosité moyenne voulue, ou bien sélectionner la bonne longueur de chaîne et obtenir la solution la plus monodisperse possible autour de cette longueur. Commercialement on trouve les deux types de fabrication ce qui explique d'ailleurs les différences de prix entre les marques. Dans notre cas les huiles silicones les plus monodisperses semblent fournir la plus longue "durée de vie" à nos gouttes.

XII.2.3 Visualisation

Le dispositif expérimental étant très proche de celui utilisé pour l'étude du ressaut hydraulique circulaire dans le Chapitre I, les techniques de visualisation sont similaires (voir III.3). On visualise à nouveau par en dessous, au travers du disque de verre via un miroir première surface placé à 45° sous la plaque de verre (voir Fig. XII.7). On met au point sur ce miroir à une distance d'une trentaine de

centimètres grâce à une caméra Basler (656 pi x 491 pi), un zoom 12,5 - 75 mm et un jeu de bagues allonges qui permet d'ajuster au mieux l'image à la taille des ressauts observés. La fréquence d'acquisition des images est de 100 Hz. La gouttière permet d'éviter que des colonnes liquides n'entrent dans le champ de la caméra. Un exemple d'image obtenue est présenté en Fig. XII.7.

Visuellement, une goutte est constituée d'une partie intérieure sombre entourée d'un cercle brillant

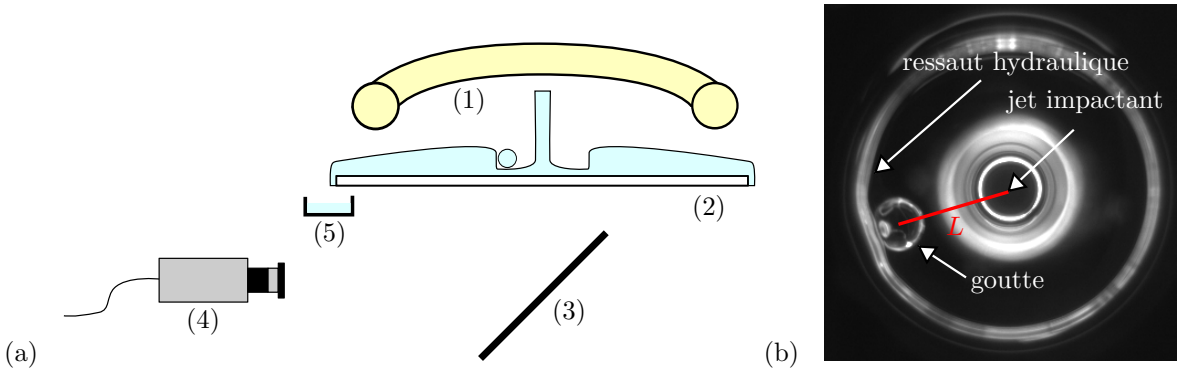


FIGURE *XII.7 – (a) Schéma décrivant la technique de visualisation : le dispositif est éclairé par un néon circulaire (1) de manière à éclairer les bords du ressaut et à les rendre lumineux à l'image. On utilise un disque de verre (2) (donc transparent) afin d'acquérir les images par en dessous et ce au travers d'un miroir première surface (3) à 45° qui réfléchit l'image vers la caméra (4). A ce dispositif est ajoutée une gouttière (5) qui permet d'éviter que les colonnes liquides formées en bord de plaque n'entrent dans le champ de la caméra. (b) Image du ressaut hydraulique et de la goutte en état de non coalescence vue de dessous via notre dispositif de visualisation. Cette image fait écho à la Fig. III.3 du premier chapitre. Au centre de l'image on peut voir le jet impactant de diamètre* $2a$*, la première zone noire correspond à la zone interne et le cercle lumineux extérieur correspond au ressaut de rayon* R_J*. La goutte est constituée d'une partie intérieure sombre entourée d'un cercle brillant qui délimite le bord de la goutte. On définit la longueur* L *comme l'orbite suivie par la goutte c'est-à-dire* $L = R_J - a$ *où* a *est le rayon de la goutte.*

qui délimite le bord de la goutte. Il y a également une partie brillante dans la zone centrale, probablement due aux effets de réfraction. C'est à partir de ces images que l'on déterminera le rayon de la goutte.

En ce qui concerne le contraste on utilise la même technique que précédemment, c'est-à-dire un néon circulaire et un fond noir au dessus du ressaut. On peut éventuellement se passer du néon circulaire mais il faut alors prendre garde aux changements de luminosité dans la pièce...

XII.2.4 Fabrication des gouttes

Pour déposer des gouttes de rayons variables a à l'intérieur d'un ressaut nous utilisons une seringue et différentes tailles d'aiguilles (de diamètre intérieur compris entre 0,4 et 1,1 mm). Cette technique permet de produire des gouttes de rayons grossièrement contrôlés (avec une erreur de l'ordre d'une quinzaine de pourcents).

On peut aussi utiliser des fils de pêche en nylon de diamètres extrêmement faibles (quelques centaines de microns) [4]. La technique est simple : si l'on plonge le fil dans le liquide et qu'on le retire rapidement un film d'huile va se déposer sur le fil (film dit de Landau-Levich). Ce film va ensuite se

4. Nous avons même dû utiliser des cheveux (50-60 microns de diamètres) pour obtenir de très petites gouttes.

déstabiliser en raison de l'instabilité de Rayleigh-Plateau puis s'écouler lentement le long de la fibre sous forme de gouttes (rappelons que nous utilisons une huile silicone très mouillante, il n'y a donc pas d'effet de piégeage susceptible de stopper les gouttes). Ces gouttes vont s'agglomérer en une "grosse" goutte au bord de la fibre. Cette goutte va ensuite se détacher de la fibre pour un rayon seuil. On peut ainsi fabriquer des gouttes à rayons contrôlés (jusqu'à environ 1 mm de diamètre) avec une précision de l'ordre de 10%.

ll est par contre difficile de produire des gouttes avec un rayon parfaitement maîtrisé. C'est pourquoi il nous faudra mesurer le rayon de ces gouttes après coup grâce aux images obtenues. On choisira de considérer le diamètre "en largeur" w pour les gouttes que nous mesurons (voir Fig. XII.8). En effet la séparation de la goutte et du ressaut "en longueur" l n'est pas très bien marquée sur les images. Il faut toutefois relativiser l'importance de ce choix : la différence entre w et l ne dépasse pas quelques pixels... On estimera donc $w = 2a$ où a est le rayon de la goutte.

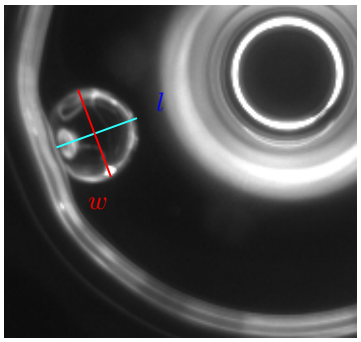


FIGURE *XII.8 – Image de la goutte en état de non coalescence vue du dessous. On observe deux diamètres pour la goutte : le diamètre "en largeur" w et le diamètre "en longueur" l. Le diamètre l n'étant pas bien marqué en raison du contact avec le ressaut, on choisira comme diamètre de référence w. On aura donc $w = 2a$ avec a le rayon de la goutte. Il faut toutefois relativiser l'importance de ce choix : la différence entre w et l ne dépasse pas quelques pixels.*

Chapitre XIII

Orbite d'une goutte dans un ressaut

Dans cette partie on utilisera les notations développées plus haut dans la partie concernant les travaux de Pirat *et al.* Les schémas de principe étant inchangés dans les deux contextes expérimentaux (à l'exception de la disparition de l'angle α) on considérera toujours comme schémas de référence ceux présentés dans la Fig. XII.4.

XIII.1 Premières observations expérimentales

Lorsque l'on place dans un ressaut circulaire hydraulique parfaitement horizontal une goutte dont la taille est de l'ordre de la longueur capillaire, elle va se mettre spontanément en mouvement comme dans le cas du ressaut incliné décrit par Pirat *et al.* Si la goutte n'est pas en contact avec le jet impactant (c'est-à-dire si la longueur entre le ressaut et le bord du jet est plus grande que 2a) on peut mettre en évidence deux dynamiques distinctes pour la goutte :

— Mouvement orbital périodique. La goutte orbite périodiquement le long du ressaut, à une fréquence comprise entre quelques dixièmes de Hertz et plusieurs Hertz. Cette fréquence décroit avec l'augmentation du rayon du ressaut. On peut voir un diagramme spatio-temporel illustrant ce mouvement sur la Fig. XIII.1.a.

— Mouvement "apériodique" (qui ne présente pas de période visible, par opposition au régime précédent). Ce régime est illustré par les diagrammes spatio-temporels Fig. XIII.1.b et XIII.1.c ; on observe des variations de la vitesse de rotation de la goutte dans le ressaut ainsi que des inversions du sens de rotation. Signalons que, dans ce régime, plus le rayon du ressaut est important plus l'amplitude du mouvement des gouttes est faible. Ainsi si pour certaines configurations (petits ressauts) la goutte peut parcourir plusieurs tours avant une inversion de son sens de rotation (voir Fig. XIII.1.b), pour de plus grands ressauts cette amplitude n'est que de quelques degrés. De récents travaux ont même montré que l'on pouvait obtenir une goutte parfaitement immobile dans le ressaut. Pour ce faire, il faut travailler avec le couvercle en Plexiglas parfaitement fermé. Il semble que le comportement de la goutte dans la zone apériodique en fonction de l'écart au seuil change en fonction des perturbations. La transition entre périodique et apériodique est, elle, inchangée. [1]

Lorsque la géométrie de l'expérience est fixée (rayon de la buse, distance plaque-injecteur, rayon du disque...) seul deux paramètres sont nécessaires pour caractériser les différents régimes : a et R_J respectivement les rayons de la goutte et du ressaut. L'absence d'hystérèse entre les deux régimes

1. Des études pour caractériser davantage cette zone apériodique sont en cours.

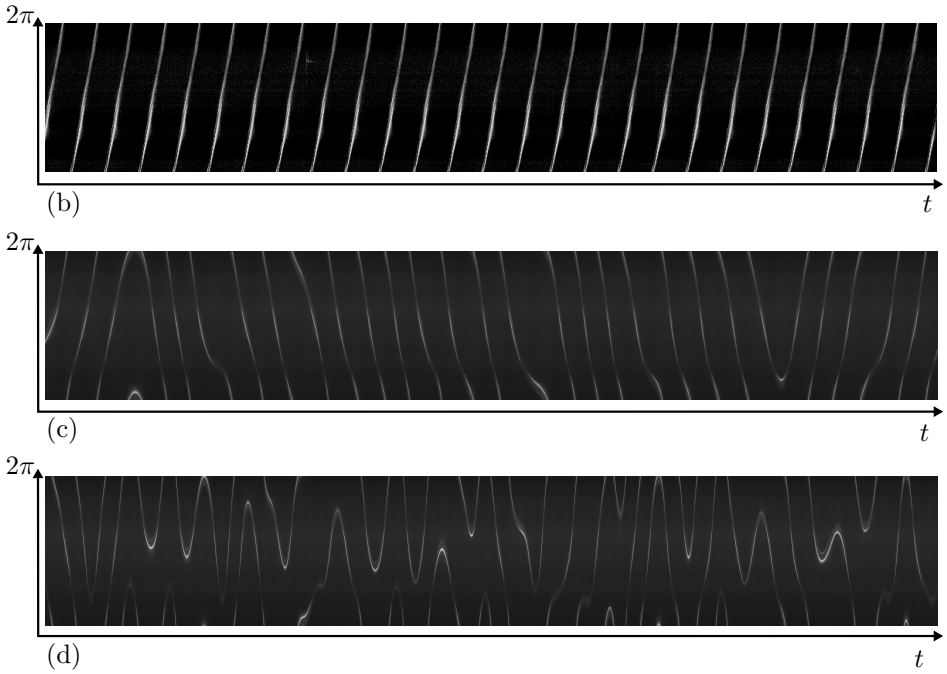


FIGURE *XIII.1 – Diagrammes spatio-temporels, i.e. l'angle θ que décrit la goutte dans le ressaut par rapport à un point arbitraire en fonction du temps (illustration en Fig. XII.4 avec $\alpha = 0$). Ce diagramme est ici obtenu pour une goutte d'huile silicone de rayon $a = 0.75$ mm. (a) Diagramme spatio-temporel dans l'état périodique, le rayon du ressaut mesure $R_J = 3.4$ mm et l'enregistrement dure $\Delta t = 13,5$ s. (b) et (c) diagrammes spatio-temporels dans le régime irrégulier. Le cas (b) ($R_J = 3.7$ mm et $\Delta t = 30,25$ s) montre deux inversions de sens de rotation et est obtenu juste après la transition entre périodique et apériodique tandis que le cas (c) ($R_J = 3.9$ mm et $\Delta t = 64,3$ s) est obtenu au delà.*

observés permet d'obtenir un diagramme de phase (voir Fig. XIII.2). Trois zones différentes y sont visibles : une zone où la goutte est dans un état "apériodique", une zone où la goutte est dans un état "périodique" et une troisième où la dynamique de la goutte est visiblement perturbée par le jet avec lequel elle est aussi en contact (on observera alors des situations où la goutte reste statique, où elle se déplace de manière apériodique et où elle se déplace périodiquement mais en étant visiblement ralentie). On considérera dans le régime apériodique les cas où la goutte montre au moins une inversion de sens ou même des variations dans sa vitesse de rotation.

La séparation entre la zone de contact avec le jet et les autres dynamiques est représentée sur le diagramme de phase Fig. XIII.2 par la ligne pointillée. Pour obtenir cette zone il suffit, en principe, de résoudre l'équation : $R_J = 2a+\phi/2$ (où ϕ est le diamètre de l'injecteur). Toutefois il est apparu que $\phi/2$ ne constituait pas le bon paramètre d'ajustement. En effet, comme nous l'avons vu en section II.2.4 la tension de surface et la gravité sont susceptibles d'affiner le jet. Si ce phénomène était négligeable pour la gamme de débits utilisée précédemment, il s'avère que la zone étudiée ici est d'un ordre de grandeur plus faible en ce qui concerne les débits et rayons de ressaut et que l'on observe ici de très fortes variations du rayon du jet au niveau de l'impact (jusqu'à 50% du rayon de jet maximal $\phi/2$). Il est donc très important de remplacer dans la formule précédente le rayon interne de l'injecteur $\phi/2$ par le rayon de jet liquide incident r_{ji} (le rayon du jet au niveau de l'impact). Pour déterminer ce r_{ji}, on utilise l'équation proposée par Bush *et al.* et développée en II.43 :

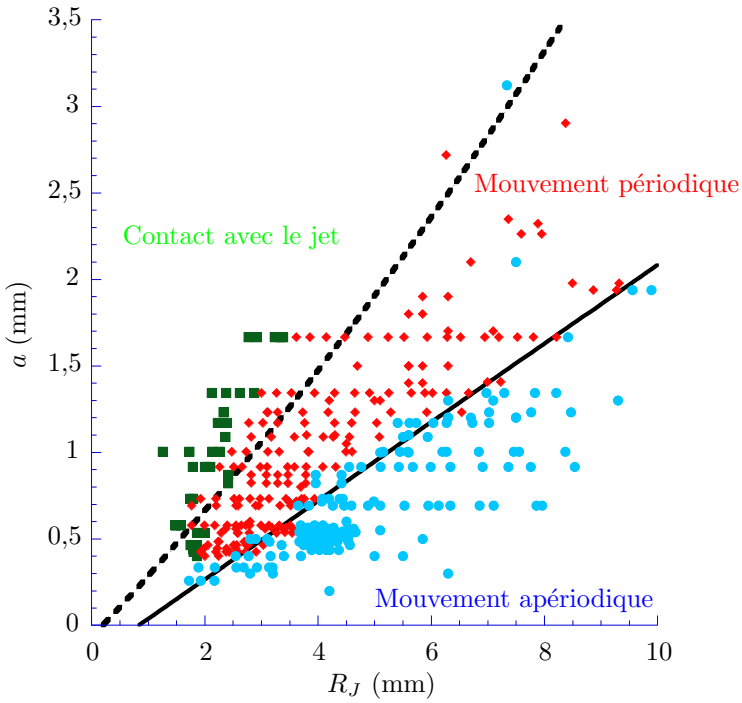


FIGURE *XIII.2 – Diagramme de phase a en fonction de R_J pour les trois types de mouvements de gouttes observés expérimentalement : contact avec le jet (rotations périodiques fortement ralenties, mouvements non périodiques en contact avec le jet et gouttes immobiles contre le jet) repéré par les carrés verts, mouvement périodique représenté par les losanges rouges et mouvement apériodique représenté par les cercles bleus (dans les mouvements apériodiques on a aussi considéré l'état immobile de la goutte observé récemment). La ligne pointillée correspond à l'équation $R_J = 2a + r_{ji}$ (voir texte). La ligne continue noire est tracée de manière empirique et sépare les régimes périodique et apériodique. L'équation de cette droite est $a = (R_J - \beta)/\alpha$ avec $\alpha = 4.4$ et $\beta = 0.84$ mm.*

$$\frac{r_{ji}}{r_N} = \left(1 + \frac{2gZ}{u_N^2} + \frac{2\gamma}{\rho u_N^2}\left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_{ji}}\right)\right)^{-\frac{1}{4}},$$

avec r_{ji} qui est donc le rayon du jet liquide, $r_N = \phi/2$ le rayon interne de la buse, Z la distance entre la buse et la plaque, u_N la vitesse du liquide en sortie de buse et g, ρ et γ les grandeurs physiques utilisées précédemment (la gravité, la densité et la tension de surface).

La ligne pointillée sur le diagramme est donnée par $R_J = 2a + r_{ji}$ (r_{ji} étant déterminé par l'équation ci-avant). Comme on peut le voir cette ligne sépare assez bien les zones périodiques et celles où la goutte est en contact avec le jet. On remarquera toutefois que certains points expérimentaux "périodiques" sont dans la zone "en contact avec le jet". Il ne s'agit généralement pas d'un défaut de modélisation : en effet, visuellement, les gouttes sont bien en contact avec le jet et déforment fortement le ressaut. Toutefois les vitesses de ces gouttes ne semblent pas être modifiées par la présence du jet : les gouttes ne semblent pas freinées contrairement à ce que l'on observe dans la plupart des cas où la goutte est en contact avec le jet.

La présence de points expérimentaux "en contact avec le jet" dans la zone périodique traduit le fait que le modèle proposé par Bush *et al.* et exposé précédemment surestime probablement l'affinement du jet au niveau de l'impact. En effet, il ne modélise que l'affinement du jet et ne prend pas en compte

la zone d'impact et en particulier la présence d'une zone de stagnation qui est susceptible d'agir sur le rayon du jet au niveau de l'impact.

La ligne continue noire sépare, quant-à elle, les régimes périodique et apériodique, elle est tracée de manière empirique. Elle peut toutefois être ajustée par la loi $a = (R_J - \beta)/\alpha$ avec $\alpha = 4.4$ et $\beta = 0.84$ mm.

XIII.2 Un premier modèle

XIII.2.1 Les équations

Nous nous proposons ici d'adapter le modèle présenté par Pirat *et al.* dans la référence [86] au cas du ressaut horizontal. Pour cela nous utilisons les mêmes ingrédients, à savoir une goutte modélisée par une sphère de rayon a dans une gouttière rigide de rayon R_J. La goutte ne pouvant bouger que selon un angle θ avec une vitesse angulaire ω dans cette gouttière. On considère à nouveau deux points A et B où la goutte interagit avec le bain (de vitesse U_A et U_B) via des films d'air d'épaisseur d_A et d_B. Comme dans le paragraphe précédent les forces de frottements s'écrivent :

$$\overrightarrow{F_A} = \eta_a(S_A/d_A)(\overrightarrow{U}_A - \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{GA}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F_B} = \eta_a(S_B/d_B)(\overrightarrow{U}_B - \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{GB}),$$

où η_a est la viscosité de l'air, les quantités $S_A, S_B, d_A, d_B, \overrightarrow{U}_A, \overrightarrow{U}_B$ désignent les surfaces de contact, épaisseurs locales des films d'air, et les vitesses du bain aux points A et B. G est le centre de masse de la goutte et $\overrightarrow{\Omega}$ désigne le vecteur vitesse de rotation instantanée de la goutte autour de G dans le référentiel du laboratoire.

Comme dans le cas précédent, on applique le théorème du moment cinétique au centre de masse de la goutte on obtient les équations inchangées XII.4 :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_r}{dt} + \frac{1}{\tau_A}\left(\Omega_r + \frac{L}{a}\omega\right) = \omega\Omega_\theta, \\ \frac{d\Omega_\theta}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}\right)\Omega_\theta = -\omega\Omega_r - \frac{1}{a}\left(\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B}\right), \\ \frac{d\Omega_z}{dt} + \frac{1}{\tau_B}\left(\Omega_z + \frac{L}{a}\omega\right) = 0, \end{cases}$$

avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse orbitale, $L = R_J - a$ le rayon de l'orbite suivie par la goutte, et les deux temps caractéristiques $\tau_A = \frac{8}{15}\pi a^3 \frac{\rho_l}{\eta_a}\frac{d_A}{S_A}$ et $\tau_B = \frac{8}{15}\pi a^3 \frac{\rho_l}{\eta_a}\frac{d_B}{S_B}$ où ρ_l désigne la masse volumique du liquide de la goutte.

Comme on peut le voir, les équations sont jusqu'ici identiques. En effet l'application du théorème du moment cinétique en G ne fait pas apparaître la gravité. La condition d'horizontalité ne sera donc visible que dans la dernière équation obtenue grâce au principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}\right)\omega = -\frac{2}{5}\frac{a}{L}\left(\frac{\Omega_r}{\tau_A} + \frac{\Omega_z}{\tau_B}\right) \tag{XIII.1}$$

Le système de quatre équations obtenu est ainsi légèrement différent du précédent. En particulier on a vu disparaître la position d'équilibre préférentielle. Ce système peut être résolu numériquement mais aux vues de la petitesse des temps caractéristiques, il semble plus intéressant de considérer les solutions stationnaires. Il n'existe que deux solutions stationnaires possibles :

La première, la plus triviale, est caractérisée par une position immobile de la goutte : la goutte reste au lieu où elle a été déposée et tourne sur elle-même. Les équations associées sont :

$$\begin{aligned} \omega = \Omega_r = \Omega_z = 0 \\ \Omega_\theta = -\frac{1}{a}\frac{\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B}}{\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}} \end{aligned} \tag{XIII.2}$$

On observe effectivement des gouttes statiques dans la zone apériodique dans le ressaut si l'on travaille avec le couvercle et que l'on limite au maximum les perturbations extérieures.
Le second état correspond au cas de la goutte en rotation périodique. Cet état est effectivement observé expérimentalement. les équations s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} \Omega_\theta &= 0 \\ \Omega_r &= \Omega_z = -\omega\frac{L}{a} \\ \omega^2 &= \frac{U_A}{L\tau_A} + \frac{U_B}{L\tau_B} \end{aligned} \tag{XIII.3}$$

On notera que $\Omega_\theta = 0$ ce qui peut paraître étonnant si l'on considère que c'est la rotation propre de la goutte qui est responsable du mouvement.

XIII.2.2 Stabilité des solutions

On peut légitimement se poser la question de la stabilité de ces solutions. Pour ce faire on écrit la matrice jacobienne du système :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_A} & \omega & 0 & \Omega_\theta - \frac{L}{a\tau_A} \\ -\omega & -\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right) & 0 & -\Omega_r \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_B} & -\frac{L}{a\tau_B} \\ -\frac{2}{5}\frac{a}{L\tau_A} & 0 & -\frac{2}{5}\frac{a}{L\tau_B} & -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right) \end{pmatrix}. \tag{XIII.4}$$

On peut ensuite chercher les valeurs propres de cette matrice dans les deux états stationnaires obtenus. Dans le cas où $\omega = 0$ (XIII.2) les valeurs propres λ de la matrice jacobienne sont solutions de :

$$0 = \left(\lambda + \frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}\right)\left[\lambda^3 + \frac{7}{5}\lambda^2\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right) + \lambda\left(\frac{9}{5}\frac{1}{\tau_A\tau_B} - \frac{2}{5}\frac{1}{L}\frac{\frac{U_A}{\tau_A}+\frac{U_B}{\tau_B}}{1+\frac{\tau_A}{\tau_B}}\right) - \frac{2}{5}\frac{1}{L}\frac{\frac{U_A}{\tau_A}+\frac{U_B}{\tau_B}}{\tau_A+\tau_B}\right]. \tag{XIII.5}$$

Si l'on regarde de près cette équation on s'aperçoit que la fonction polynomiale est positive lorsque $\lambda \to +\infty$. En effet le terme dominant est $+\lambda^4$ tandis que lorsque $\lambda = 0$ la fonction polynomiale est négative ($= -\frac{2}{5}\frac{1}{L}\frac{\frac{U_A}{\tau_A}+\frac{U_B}{\tau_B}}{\tau_A+\tau_B}$). Cela signifie donc qu'il existe au moins une valeur propre positive. On en déduit donc que cet état statique est instable.

En ce qui concerne le cas où l'orbite attendue est périodique (XIII.3) les valeurs propres λ de la matrice jacobienne sont solutions de :

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^4 + \frac{12}{5}\lambda^3\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right) + \lambda^2\left[\omega^2 + \frac{9}{5}\frac{1}{\tau_A\tau_B} + \frac{7}{5}\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right)^2\right] + \\ \lambda\left[\omega^2\left(\frac{4}{5}\frac{1}{\tau_A}+\frac{7}{5}\frac{1}{\tau_B}\right) + \frac{9}{5}\frac{1}{\tau_A\tau_B}\left(\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}\right)\right] + \frac{4}{5}\frac{\omega^2}{\tau_A\tau_B}. \end{aligned} \tag{XIII.6}$$

Tout les coefficients de la fonction polynomiale sont de même signe. On en déduit donc que pour $\lambda \geq 0$ la fonction polynomiale ne changera pas de signe. Il n'y a donc aucune valeur propre positive de la matrice Jacobienne pour cet état. L'état périodique orbital est donc linéairement stable [2].

Cela peut être vérifié par l'intégration numérique des équations en utilisant une méthode de Runge

2. Il ne l'est peut être pas d'un point de vue non linéaire.

Kutta d'ordre 4. Quels que soient les paramètres choisis, on obtient toujours une orbite périodique à condition d'utiliser une petite perturbation (aussi petite que l'on veut) par rapport à l'état initial ou de donner une vitesse initiale non nulle.

XIII.2.3 Vitesse du liquide sur la paroi du ressaut

Comme on l'a vu, les seuls paramètres pour notre modèle sont U_A, U_B, τ_A et τ_B. La zone juste avant le ressaut est bien connue et l'on estime assez bien la valeur de U_A grâce à notre connaissance de la zone externe et de la relation de conservation de l'impulsion (voir V.4). Pour mémoire nous avions obtenu U_A quasi indépendant du débit et valant environ 0,3 m/s. On peut donc estimer avec une assez bonne précision l'ordre de grandeur de τ_A. A contrario, la seule information que nous ayons sur τ_B est l'hypothèse proposée par Pirat *et al.* à savoir U_B de l'ordre d'un dixième de U_A. Il est donc nécessaire de se convaincre de la validité de cette hypothèse. Pour ce faire, on injecte des traceurs (particules de charbon ou plus simplement bulles) dans le liquide et l'on suit grâce à une caméra rapide (environ 4000 images par seconde) les traceurs qui se trouvent en surface (les plus rapides). On peut ainsi obtenir des diagrammes spatio-temporels qui permettent d'estimer la vitesse avant le choc, la vitesse après le choc et le temps τ nécessaire à "escalader" le mur liquide. Un exemple de ces diagrammes spatio-temporels est présenté en Fig. XIII.3.

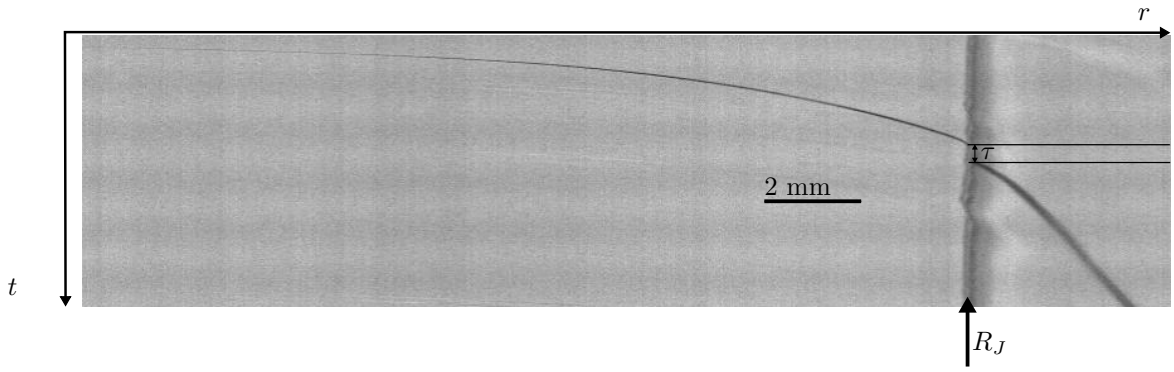


FIGURE *XIII.3 – Diagramme spatio-temporel typique décrivant le trajet d'un traceur en surface en fonction du temps. Le temps est en ordonnée et la position du traceur en abscisse, le diagramme nous permet donc de connaître la position de la particule en fonction du temps. On distingue trois zones : la zone avant le ressaut, de forte vitesse, à gauche sur le diagramme, la zone après le ressaut, de faible vitesse à droite sur le diagramme et une troisième zone intermédiaire (grisée) correspondant à la position du ressaut R_J. On estime la vitesse de parcours de la particule en surface du mur liquide en mesurant le temps τ entre la disparition et la réapparition de la particule. Diviser la différence de hauteur du ressaut $\Delta H \sim 3$ mm par ce temps τ permet d'obtenir la vitesse de surface sur le mur liquide qui s'avère être très proche de U_A.*

Sur le diagramme spatio-temporel on distingue trois zones : la zone avant le ressaut, de forte vitesse, à gauche sur le diagramme, la zone après le ressaut, de faible vitesse à droite sur le diagramme et une troisième zone intermédiaire (grisée) : le ressaut. Pour mesurer une vitesse il suffit de mesurer l'angle α que fait la courbe avec l'horizontale on a alors $\tan\alpha = \frac{temps}{distance} = \frac{1}{V}$. Cette mesure est toutefois assez imprécise et l'on commet une assez forte erreur sur les valeurs estimées. On ne peut donc pas obtenir beaucoup mieux que de bons ordres de grandeur. De ces diagrammes on tire plusieurs informations :

(i) On peut vérifier sur une assez large gamme de débits que la vitesse mesurée juste avant le

ressaut est bien quasi indépendante du débit. La valeur de la vitesse de surface que nous mesurons est environ 0,29 m/s ce qui est parfaitement cohérent avec les résultats obtenus précédemment dans V.4.

(ii) On peut aussi estimer la vitesse de parcours de la particule en surface du mur liquide. On mesure le temps τ entre la disparition et la réapparition de la particule. On divise la différence de hauteur du ressaut $\Delta H \sim 3$ mm par ce temps τ et l'on obtient que la vitesse de surface sur le mur liquide est très proche de U_A.

L'hypothèse proposée par Pirat *et al.* semble donc être mise en défaut par cette expérience. On considérera donc à partir de maintenant que $U_B = U_A$. Cela a pour conséquence de modifier nos estimations pour d_B et τ_B. On estime donc que $d_B \sim 30$ μm et donc que τ_B vaut environ 1 s.

XIII.2.4 Etat orbital de la goutte

On s'intéresse maintenant plus spécifiquement à l'état orbital proposé par le modèle. Il est très facile de le comparer avec les résultats expérimentaux. En particulier, on comparera la vitesse attendue avec la vitesse orbitale mesurée dans le cas périodique.

La vitesse orbitale ω s'écrit :

$$\omega = \sqrt{\frac{U_A}{L\tau_A} + \frac{U_B}{L\tau_B}}. \tag{XIII.7}$$

On utilise les approximations $U_B \approx U_A$ et $\tau_A \ll \tau_B$. On aboutit alors, pour ω, à l'expression simplifiée suivante : $\omega = \sqrt{\frac{U_A}{L\tau_A}}$. Si l'on utilise maintenant l'expression explicite de τ_A on obtient :

$$\omega \sim \sqrt{\frac{15}{8}\frac{\eta_a}{\rho_l}\frac{U_A}{\frac{L\pi a^3 d_A}{S_A}}}, \tag{XIII.8}$$

avec d_A l'épaisseur du film d'air sous la goutte, S_A la surface de contact entre la goutte et le film d'air sous la goutte, η_a la viscosité de l'air (à savoir $1,85.10^{-5}$ Pa.s) et ρ_l la masse volumique du liquide (à savoir 950 kg/m^3).

Si l'on considère maintenant que $U_A \approx 0,3$ m/s et que la surface de contact S_A correspond à πa^2 on obtient pour prévision théorique les lois proposées sur la Fig. XIII.4 et comparées aux données expérimentales.

Comme on peut le voir sur cette Fig. XIII.4, les points expérimentaux montrent bien une variation en $L^{-1/2}$ pour les petits L (à l'exception de $a = 0,57$ mm). Toutefois, on constate que pour chaque goutte la courbe de vitesse orbitale décroche de cette loi en $L^{-1/2}$ pour s'effondrer à l'approche de la transition vers le régime apériodique. On peut aussi faire deux autres remarques : on constate que le préfacteur de la loi proposée par le modèle est bien trop élevé par rapport au préfacteur observé expérimentalement. Il apparaît clairement que ce préfacteur dépend très fortement de a dans notre cadre théorique (plus de 50 % de variation attendue entre les deux extrêmes). Les valeurs des préfacteurs mesurables sur les courbes expérimentales, dépendent effectivement de a mais cette dépendance est de plus faible amplitude que celle attendue (si l'on retire les points singuliers correspondant à $a = 0,57$ mm on trouve environ 30% de variation). On remarque aussi que la dépendance en a ne semble pas bien captée, en effet la valeur du pré facteur doit décroître avec a. On observe expérimentalement qu'en réalité cette valeur croît avec a jusqu'à $a \approx 0,9$ mm, puis diminue comme attendu par la théorie.

Sans toucher au modèle on peut essayer d'améliorer l'accord entre théorie et expérience en relaxant la condition sur la surface de contact. En effet jusqu'à présent on a considéré que $S_A = \pi a^2$ ce qui est évidemment excessif. Si l'on relâche cette condition en posant $S_A = \alpha\pi a^2$, où α devient un paramètre ajustable (indépendant de a), on obtient les courbes proposées en Fig. XIII.5. Sur cette figure $\alpha = 0,07$ pour toutes les valeurs de a.

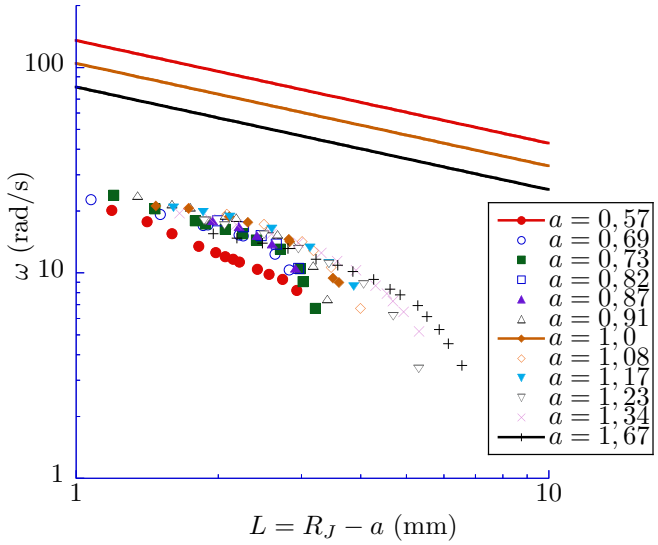


FIGURE *XIII.4* – *Vitesse orbitale de la goutte $\omega = d\theta/dt$ en fonction du rayon de l'orbite suivie par la goutte $L = R_J - a$ en représentation log-log. Un grand nombre de rayons de gouttes est visible : 0,57* mm-*1,67* mm *et a est indiqué en mm. Pour tous les rayons de gouttes testés le comportement est le même (à l'exception de $a = 0,57$) c'est-à-dire un comportement en $L^{-1/2}$ qui décroche brutalement à l'approche de la transition vers l'état apériodique. Les droites continues correspondent au modèle proposé par l'équation XIII.8 pour trois valeurs de a (0,57* mm *en rouge, 1* mm *en brun et 1,67* mm *en noir).*

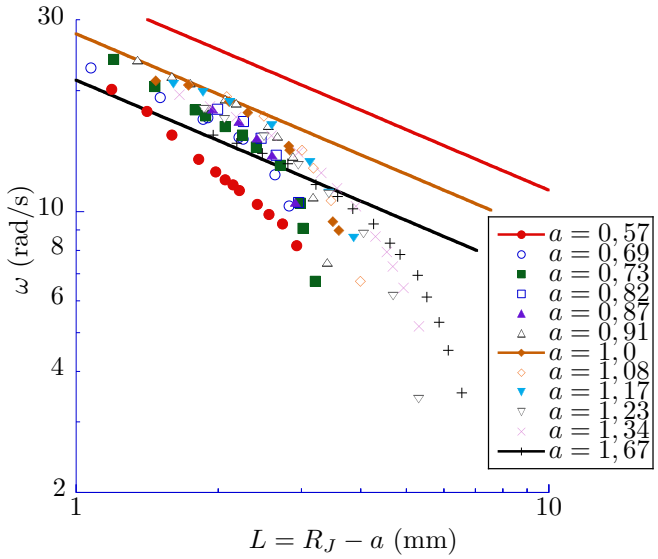


FIGURE *XIII.5* – *Vitesse orbitale de la goutte $\omega = d\theta/dt$ en fonction du rayon de l'orbite suivie par la goutte $L = R_J - a$ en représentation log-log (voir Fig. XIII.4). Les droites continues correspondent à l'équation XIII.8 dans laquelle on a supposé $S_A = \alpha\pi a^2$ avec $\alpha = 0,07$. Comme dans la figure précédente on représente la théorie pour trois valeurs de a (0,57* mm *en rouge, 1* mm *en brun et 1,67* mm *en noir). Les courbes correspondant à $a = 1$* mm *et $a = 1,67$* mm *s'ajustent parfaitement sur les premières valeurs expérimentales obtenues pour ces rayons de gouttes. Ce n'est clairement pas le cas pour $a = 0,57$* mm *.*

Comme on peut le constater sur cette figure, les courbes correspondant à $a = 1$ mm et $a = 1,7$ mm s'ajustent parfaitement sur les premières valeurs expérimentales obtenues pour ces rayons de gouttes (ce n'est toutefois pas le cas pour $a = 0,57$ mm).

Cette valeur de $\alpha = 0,07$ semble bien faible à première vue. On peut la comparer aux valeurs obtenues par Lhuissier *et al.* dans [74] pour le rayon de la zone de contact. Pour les trois gouttes testées expérimentalement il obtient que le rayon de la zone de contact pour la goutte est de l'ordre de $a/2$, ce qui donne un α de l'ordre de 0,25. Il est très probable, puisque nous utilisons le même liquide avec la même densité, que la zone de contact soit du même ordre de grandeur dans notre cas. Il subsiste un facteur 2 entre les préfacteurs obtenus expérimentalement et ceux attendus théoriquement avec $\alpha = 0,25$. Cela signifie que le modèle fournit un ordre de grandeur tout à fait raisonnable, le facteur 2 pouvant probablement se comprendre en modélisant plus précisément l'épaisseur du film d'air, les forces de frottements sous la goutte, la vitesse du liquide ou encore le moment d'inertie de la forme réelle de la goutte[3].

L'écart de comportement entre des gouttes de rayons $a < 0,9$ mm peut s'expliquer par la valeur de α. En effet, la longueur capillaire pour l'huile silicone est $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho_l g)} \sim 1,4$ mm. Nous sommes donc au niveau de la transition de forme pour une goutte : pour $a \ll l_c$ la goutte a une forme de sphère tronquée dont le rayon de la surface de contact est donné par $\frac{a^2}{l_c}$, et pour $a \gg l_c$ la goutte a une forme de flaque de surface de contact πa^2 [30]. Nos mesures se situent donc dans la zone de transition où le coefficient α est susceptible de bouger d'un rayon de goutte à l'autre.

XIII.2.5 Conclusion sur le modèle

Le modèle simple que nous avons permet donc de prédire un état orbital périodique. Il permet en outre d'estimer un ordre de grandeur raisonnable de la vitesse de rotation de la goutte dans le ressaut. Toutefois, lorsque L augmente la vitesse orbitale des gouttes diminue plus rapidement que $L^{-1/2}$ jusqu'à atteindre une vitesse nulle pour L fini permettant un état apériodique absent du modèle (il ne peut y avoir de changement de sens de rotation que si la vitesse s'annule au moins en un point).

De récentes études menées lors du stage de Julien Charlot, ont montré que lorsque l'on limite au maximum les sources de perturbation on obtient une nouvelle zone sur le diagramme où la goutte est parfaitement statique. Cette zone se situe bien évidemment dans la zone apériodique (la zone périodique demeure inchangée). Le cas statique étant instable dans notre modèle, cela signifie qu'il manque un terme dans notre modèle.

Deux raisons peuvent être évoquées pour expliquer ce phénomène :

XIII.2.5.1 Déformation de la goutte

Comme expliqué rapidement précédemment, il apparaît aux vues de photos prises de biais que la goutte est loin d'être parfaitement sphérique (voir Fig. XIII.6). Comme présentée dans [30] mais aussi dans l'article [78] l'explication est assez simple : une goutte en non coalescence va tâcher de diminuer son énergie potentielle de pesanteur, il y aura donc équilibre entre tension superficielle et pesanteur, donnant lieu à une déformation de la goutte : sous forme d'une crêpe pour les grosses gouttes ($a \gg l_c$)

3. En ce qui concerne la modélisation de la vitesse plusieurs erreurs peuvent être commises : ce n'est pour le moment qu'un ordre de grandeur et cette vitesse est susceptible d'être différente de celle du ressaut sans goutte puisque la goutte écrase le film liquide. La vitesse que nous prenons n'est peut être pas prise au bon endroit puisqu'on oublie que la goutte a un rayon lorsqu'on la mesure juste avant le choc.

et d'une sphère tronquée pour les petites gouttes ($a \ll l_c$). Cette déformation a pour effet de dissiper de l'énergie via un mécanisme de dissipation visqueuse et peut ainsi entraîner une dynamique de goutte assez contre intuitive [78].

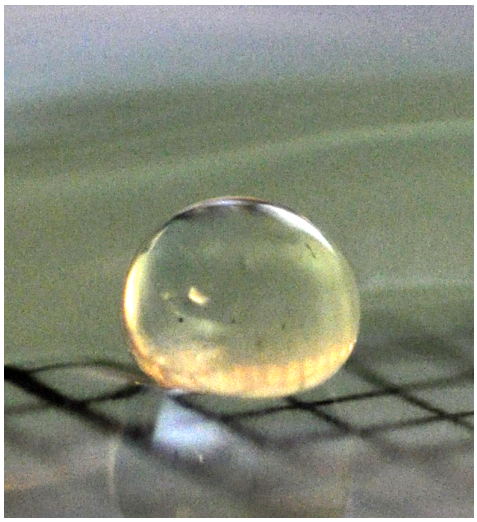


FIGURE *XIII.6 – Photographie d'une goutte d'huile silicone d'environ 1* mm *de rayon vue de côté. On voit très nettement la déformation de la goutte. Ce que l'on voit derrière la goutte est le "mur d'huile". On peut aussi remarquer sur le bord gauche de la goutte la déformation du film liquide sous la goutte par la zone de contact.*

La prise en compte d'une dissipation visqueuse ne semble pas suffisante pour expliquer l'effondrement de la vitesse orbitale. En effet, le calcul de Sreenivas *et al.* comparant les effets de dissipation visqueuse et l'énergie apportée à la goutte par frottements (voir XII.2) tend à montrer que dans notre gamme de rayons cette dissipation est d'un ordre inférieur (on trouve K typiquement égal à 0,5 donc une variation de vitesse attendue de 30 %).

D'autant que cela semble en contradiction avec nos expériences. On a constaté une vitesse constante du liquide au niveau du ressaut et donc sous la goutte. Il n'y aura donc, à rayon donné, pas davantage de dissipation visqueuse pour un grand L que pour un petit. On ne s'attend donc pas à ce que la dissipation visqueuse entraîne une vitesse nulle pour un L fini.

La déformation de la goutte ne semble donc pas, *a priori*, un bon candidat pour expliquer le violent décrochage en vitesse.

XIII.2.5.2 Sillage et déformation du ressaut

Lorsque l'on piège une goutte dans un ressaut, elle va appuyer sur le liquide (cela est visible sur la Fig. XIII.6 au bord de la goutte) sous elle, un "sillage" va donc naître à la surface de ce liquide, en particulier en aval de la zone de contact entre goutte et bain (voir Fig. XIII.7) [4]. On peut constater que plus la zone de contact est étendue (c'est-à-dire plus la goutte appuie sur le liquide) plus le sillage est large. Cela peut être simplement mis en évidence par la comparaison entre le sillage d'une goutte d'huile silicone et le sillage d'une goutte d'huile silicone perfluorée (ayant les mêmes propriétés en terme de tension superficielle et viscosité que l'huile silicone standard mais étant deux fois plus dense

4. Il est certes difficile de parler de sillage dans ces conditions, en effet, la goutte n'entre pas en contact avec le liquide, on emploiera donc improprement ce terme pour parler de l'empreinte laissée par la goutte en aval dans le liquide.

et donc appuyant davantage sur le liquide).

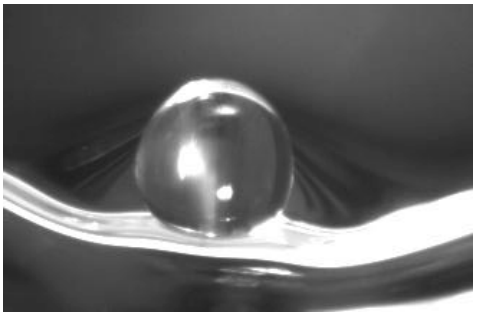


FIGURE *XIII.7 – Photographie vue de dessus d'une goutte d'huile silicone d'environ 1* mm *de rayon. Avec un éclairage adapté on observe très clairement une empreinte ou "sillage" en "V". L'alternance de zones plus foncées et plus claires est dû à des effets d'interférences lumineuses. Ce sillage est dû au fait que la goutte appuie sur le film d'air qui appuie sur le film liquide du bain. Cela a pour effet de ralentir le liquide sous la zone de contact comme le ferait un objet plongé dans le film liquide. Ce ralentissement a un autre effet visible sur la photographie à savoir la déformation du ressaut (en particulier le changement local de courbure).*

La goutte pince de manière significative l'épaisseur de liquide et l'on va constater deux effets principaux :

(i) Cela a pour effet de diminuer la valeur de U_A sous la goutte. La vitesse locale du liquide ne sera donc plus celle estimée précédemment par l'analyse du ressaut seule. Il est donc nécessaire de mener une étude afin de connaître l'écart que l'on commet par rapport à U_A.

(ii) La diminution de la vitesse U_A a pour effet de déformer le mur liquide : la courbure locale du ressaut est plus faible au voisinage de la goutte. En effet, si la vitesse U_A est réduite le "choc" responsable du ressaut va avoir lieu plus tôt (spatialement parlant). Le fait que le sillage ne modifie pas uniformément les vitesses explique aussi la variation de courbure par rapport au centre de la déformation (zone de plus faible vitesse...). Ce phénomène est visible sur la Fig. XIII.7, et il est aussi illustré sur le schéma et la vue de côté présentés en Fig. XIII.8. [5]

La question de la courbure est loin d'être anodine en ce qui concerne la dynamique des gouttes. En effet si le L en tant que distance change un peu par rapport au cas idéal, la courbure effective en $1/L$ peut elle être modifiée énormément, voire devenir nulle ou négative. Cette déformation laisse donc ouverte la possibilité d'obtenir un $\omega = 0$ à L fini. Dans le modèle gyroscopique présenté précédemment, c'est à la fois la courbure et la distance qui sont en jeux. On ne peut pas prédire autrement que qualitativement que cette modification locale du ressaut aura une très grande importance sur la dynamique de la goutte. Le fait d'obtenir une transition entre périodique et apériodique dépendant uniquement de a et R_J et sans aucune hystérèse sur le diagramme de phase semble aller dans ce sens : bien sûr le rapport en a/R_J n'est pas constant mais le rapport des courbures semble important.

Cette déformation du film liquide va aussi avoir pour effet de modifier la structure fine de la zone de contact et la distribution locale de vitesse du bain sous la goutte.

Il semble donc que la déformation du ressaut joue un rôle crucial dans la dynamique. Malheureusement la modélisation de cette déformation que ce soit sous forme d'une force de frottement, d'un

5. On peut aussi s'assurer facilement de la véracité de ces hypothèses en plongeant une aiguille de seringue dans le ressaut.

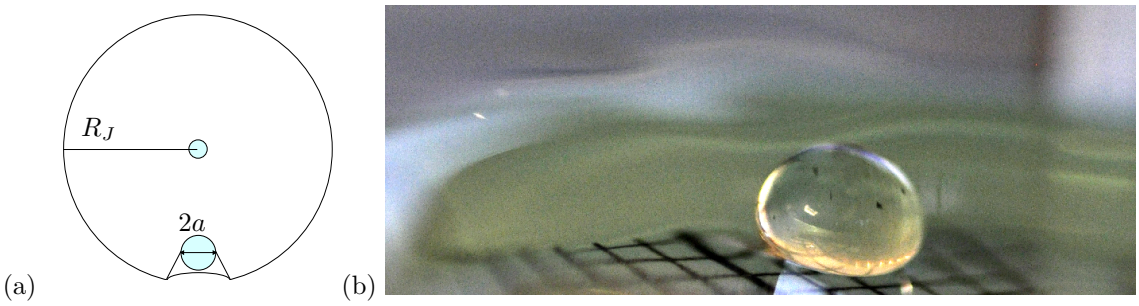


FIGURE *XIII.8 – (a) Schéma représentant la déformation du ressaut par une goutte : une goutte posée dans le ressaut va diminuer la vitesse U_A du liquide sous la goutte. Cela signifie que la quantité de mouvement est plus faible localement et cela a pour effet de modifier la position du choc : le ressaut va avoir lieu plus tôt spatialement parlant. Cela engendrera une modification de la forme locale du ressaut en particulier une modification de la courbure. (b) Photographie de côté d'une goutte (d'environ 1* mm *de rayon) contre le ressaut : on voit très clairement que la goutte déforme macroscopiquement le ressaut en modifiant à la fois sa courbure et la hauteur après le choc. Cet effet semble donc non négligeable.*

rayon de courbure locale ou autrement s'avère particulièrement difficile à réaliser.

XIII.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons pu observer le comportement d'une goutte dans un ressaut circulaire parfaitement horizontal. Nous avons pu observer que la goutte adoptait plusieurs comportements en fonction du couple (a, R_J) ce qui nous a permis d'établir un diagramme de phase robuste (car retrouvé au cours de plusieurs stages) comportant : une zone où la goutte est en contact avec le jet et le ressaut, une zone où la goutte adopte un mouvement périodique dans le ressaut et enfin une zone où la goutte suit un mouvement apériodique qui peut aller jusqu'à un état stationnaire pour la goutte.

Nous avons pu construire un modèle-jouet simple pour le problème. Il en ressort que le mouvement périodique s'explique probablement par une instabilité gyroscopique. Ce modèle nous permet également de fournir une modélisation de ce mouvement périodique. En laissant un paramètre libre nous avons pu ajuster très raisonnablement une partie de nos points expérimentaux, et la valeur obtenue via l'ajustement semble pertinente vis-à-vis de la physique en jeu.

Nous avons également pu proposer plusieurs pistes en vue de l'amélioration du modèle afin de nous permettre de décrire l'état apériodique : une meilleure modélisation de la goutte mais surtout une prise en compte des déformations du ressaut.

Le mécanisme débouchant sur une instabilité gyroscopique repose sur le fait que la goutte roule dans le ressaut. Pourtant cette hypothèse n'a jamais été observée directement. Nous établirons donc dans le prochain chapitre une expérience simple nous permettant de traiter cet aspect dans un cas simple : une goutte immobile dans le ressaut.

Chapitre XIV

Rotation propre d'une goutte

Le modèle que nous avons présenté ici repose sur une proposition simple : une goutte tourne sur elle-même puis une perturbation va venir la déstabiliser et entraîner un mouvement orbital dans le ressaut via une instabilité gyroscopique. Ce modèle repose donc sur une supposée rotation propre de la goutte, or il n'a pas été apporté de preuve expérimentale jusqu'à présent d'une telle rotation propre (exceptées quelques expériences préliminaires non-publiées effectuées par Pirat *et al.*) [1]

Nous avons donc injecté des particules de charbon dans les gouttes. Lorsque l'on dépose une telle goutte dans le ressaut et qu'elle adopte un mouvement orbital périodique on voit bien qu'il y a mouvement au sein de la goutte mais la rotation interne de la goutte est assez difficile à suivre en raison des mouvements de la goutte à l'intérieur du ressaut. On souhaite donc étudier le mouvement de traceurs dans la goutte dans une géométrie plus simple. Pour ce faire, on force le système à adopter l'état stationnaire instable décrit précédemment à savoir l'état censé obéir aux équations XIII.2 :

$$\omega = \Omega_r = \Omega_z = 0$$
$$\Omega_\theta = -\frac{1}{a}\frac{\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B}}{\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}}$$

Pour rendre stable cet état instable, on incline légèrement la plaque de quelques dixièmes voire deux ou trois degrés. La goutte devient donc globalement statique dans le ressaut. En filmant directement la goutte par au dessus on observe des images comme celles présentées en Fig. XIV.1.

Ces images nous permettent facilement de mesurer la fréquence de rotation de la goutte. On enregistre entre 3 et 20 rotations des traceurs dans la goutte puis on trace un diagramme spatio-temporel sur une bande de pixels perpendiculaire à l'axe de rotation de la goutte. Un diagramme spatio-temporel typique est représenté en Fig. XIV.2.

XIV.1 Observations et mesures

La première chose que l'on peut observer sur ces images est que l'hypothèse de rotation en bloc (ou rotation solide) est bien vérifiée. On n'observe, en effet, aucune rotation différentielle dans la goutte.

Plus quantitativement nous avons tracé sur la Fig. XIV.3 la vitesse de rotation angulaire en fonction du rayon de la goutte.

1. Cette question se pose avec d'autant plus d'acuité que dans leur article Lhuissier *et al.* [74] rapportent l'absence de rotation visible de la goutte.

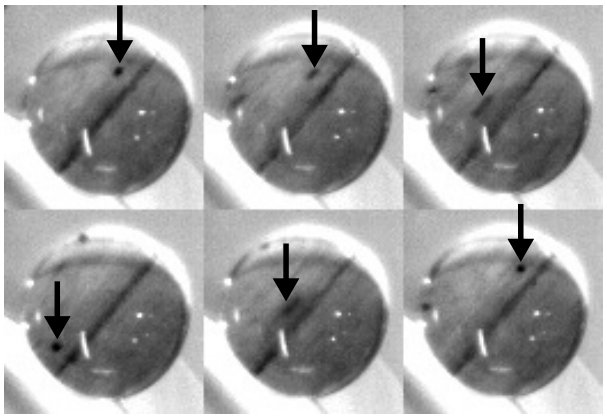
(a)  (b)

FIGURE *XIV.1 – Particules de charbon à l'intérieur d'une goutte piégée dans un ressaut hydraulique légèrement incliné vu du dessus ($a = 1,6$ mm et $R_J = 1,3$ cm). (a) Séquence d'images (le temps entre deux images est de l'ordre de 10 ms). Les traces noires correspondent à des nuages de particules de charbon et la flèche indique une particule faisant un tour complet de la goutte. Le ressaut est visible sur le coin gauche de la photographie. (b) Chronophotographie de la rotation des particules au sein d'une gouttes. La rotation se fait en bloc.*

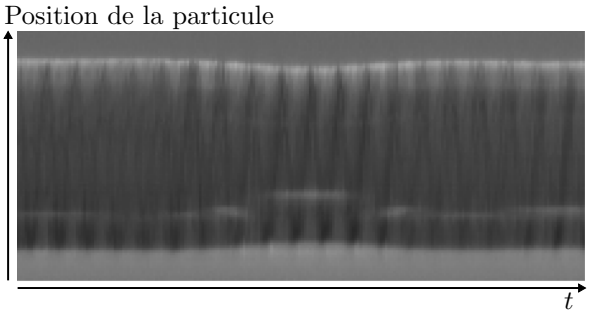


FIGURE *XIV.2 – Diagramme spatio-temporel d'une bande de pixels perpendiculaire à l'axe de rotation de la goutte. La goutte utilisée est celle présentée en Fig. XIV.1. Les particules de charbon permettent donc d'obtenir la fréquence de rotation de la goutte aisément. Les diagrammes spatio-temporels enregistrent typiquement entre 3 et 20 rotations. La fréquence se détermine ainsi au pixel près.*

Pour obtenir ces mesures nous avons utilisé quatre débits (entre 5 et 17 cm^3/s) et la première chose qui frappe à l'observation de la Fig. XIV.3 est que l'ensemble des points s'ajustent sur une seule courbe maîtresse, indépendante du débit. Cela signifie très clairement que les gouttes ne "voient" pas de différence en fonction du débit. En terme plus scientifique cela signifie que la structure fine du ressaut est indépendante du débit : U_A et U_B sont indépendants (au moins au premier ordre) du débit. Ce résultat est tout à fait cohérent avec les observations reportées dans V.4 et XIII.2.3 où la vitesse du liquide avant le ressaut apparaît comme étant indépendante du débit.

En ce qui concerne la vitesse de rotation angulaire représentée sur la Fig. XIV.3 on distingue très nettement deux zones distinctes en variant le rayon de la goutte :

(i) La première pour les gouttes de rayon supérieur à 1 mm (rappelons que la longueur capillaire l_c est ici d'environ 1,4 mm). Dans cette gamme de rayons la vitesse de rotation Ω_θ évolue en $\frac{lU_A}{a^2}$ où l est de l'ordre de 0.4 mm.

(ii) La deuxième pour les gouttes de rayon inférieur à 1 mm, une loi de puissance ne semble pas

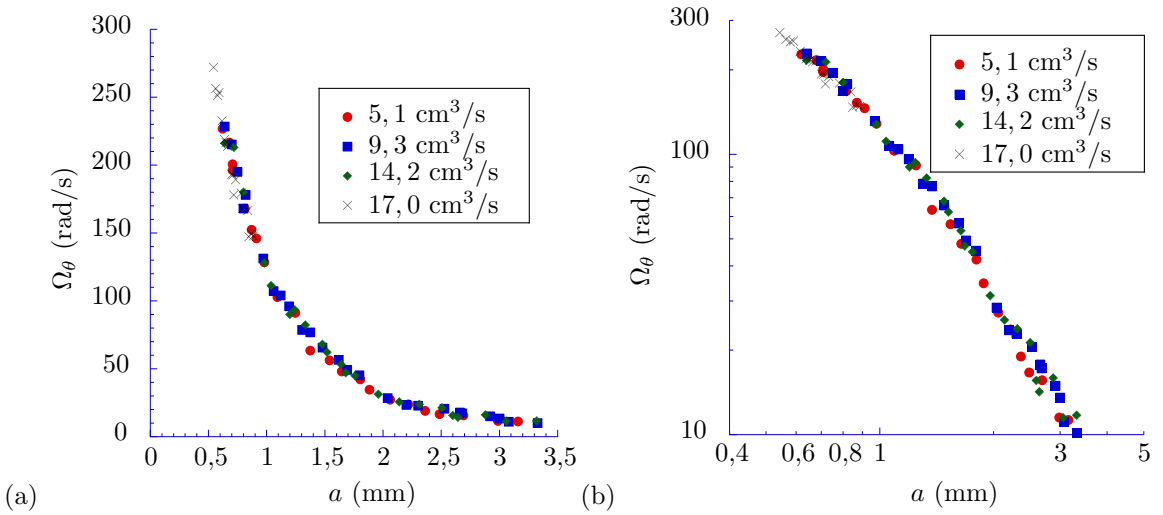


FIGURE *XIV.3 – Vitesse de rotation angulaire Ω_θ en fonction du rayon de la goutte dans un ressaut légèrement incliné pour quatre débits distincts en représentation lin-lin (a) et log-log (b). Bien que différents débits soient utilisés ici toutes les courbes se superposent sur une courbe maîtresse sans aucune remise à l'échelle, suggérant que la structure fine au niveau du ressaut est indépendante du débit. Cela confirme nos hypothèses présentées en V.4. Qualitativement on distingue deux zones de part et d'autre de $a = 1$ mm : pour $a < 1$ on tend vers une loi asymptotique en $\frac{U_A}{a}$ à mesure qu'on diminue la taille des gouttes et pour $a > 1$ mm les données s'ajustent très bien sur une courbe en $\frac{lU_A}{a^2}$ où l est de l'ordre de 0.4 mm .*

être appropriée pour décrire ces points expérimentaux mais dans le cas limite des petites gouttes on s'attend à une loi asymptotique en $\frac{U_A}{a}$.

Voyons maintenant en quoi ces résultats expérimentaux peuvent être interprétés et comparés avec un modèle.

XIV.2 Modèle et ses améliorations

XIV.2.1 Modèle gyroscopique de base

Si on réutilise le modèle développé précédemment on s'attend donc à trouver :

$$\Omega_\theta = -\frac{1}{a}\frac{\frac{U_A}{\tau_A}+\frac{U_B}{\tau_B}}{\frac{1}{\tau_A}+\frac{1}{\tau_B}}.$$

Equation qui peut, en tenant compte du fait que $U_A \sim U_B$ et que $\tau_A \ll \tau_B$ comme vu précédemment, se simplifier en :

$$\Omega_\theta = -\frac{U_A}{a}. \tag{XIV.1}$$

Comme on peut le voir sur la Fig. XIV.4 cette loi fournit un ordre de grandeur correct (typiquement un facteur 3 supérieur aux points expérimentaux) et une tendance convenable. En particulier, il semble qu'il décrive très bien la tendance asymptotique à petits a. Toutefois ce modèle ne capte clairement pas la transition d'un régime à l'autre. Il doit donc être affiné.

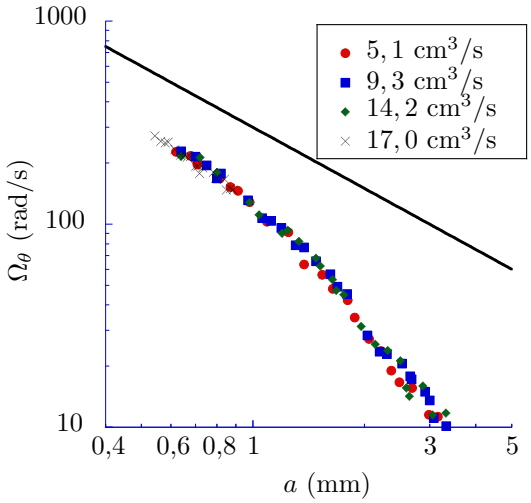


FIGURE *XIV.4* – *Vitesse de rotation angulaire Ω_θ en fonction du rayon de la goutte dans un ressaut légèrement incliné en représentation log-log. Cet ensemble de données déjà présenté en Fig. XIV.3 est comparé à la loi XIV.1. L'équation XIV.1 est représentée par la ligne noire sans paramètre ajustable.*

XIV.2.2 Déformation de la goutte et dissipation visqueuse

Nous pensons ici que les travaux de Sreenivas *et al.* [107] mais aussi de Mahadevan *et al.* [78] peuvent contenir une piste intéressante pour expliquer cette différence de rotation par rapport au résultat attendu : la déformation de la goutte et donc la dissipation visqueuse au sein de la goutte. Si une goutte est parfaitement sphérique et roule sur elle-même il n'y a aucune dissipation visqueuse. Si maintenant cette goutte a la forme d'une sphère tronquée de surface l alors on observe des effets de dissipation visqueuse sur un volume typique l^3. Cela signifie que dans notre cas il faudrait avoir une excellente connaissance de la surface de contact S_A mais aussi de la surface de contact S_B.[2]

Si l'on suppose que l vaut environ 0,5 a, et en supposant que l'épaisseur du film d'air sur cette zone est constante, il semble pertinent d'utiliser les ordres de grandeur utilisés par Sreenivas *et al.* dans [107] et rappelés en XII.1 et qui conduisent à XII.2, à savoir :

$$U_D \approx \frac{U_A}{1+K},$$

avec $K = d_A\eta_d/(H\eta_a)$ où H correspond à la hauteur de la goutte, η_d et η_a aux viscosités dynamiques du liquide dans la goutte et de l'air. On obtient ainsi une vitesse à la surface de goutte U_D différente de U_A on s'attend donc à trouver

$$\Omega_\theta = -\frac{U_A}{a + \frac{\eta_d}{\eta_a}\frac{a d_A}{H}}. \tag{XIV.2}$$

On ne peut à partir de XII.2 obtenir que des ordres de grandeur tant la modélisation de la dissipation visqueuse est discutable.

Deux cas doivent maintenant être distingués. La hauteur de la goutte H apparaît dans cette modélisation et deux cas limites sont à considérer :

2. Ces surfaces de contact sont malheureusement extrêmement difficiles à observer et si l'on se réfère au travaux de Lhuissier *et al.* [74] et de Dell'Aversana *et al.* [34, 33] on s'aperçoit que la structure de la "surface de contact" est compliquée à décrire que ce soit en raison de l'étendue spatiale qui nous reste inconnue ou aux vues de la complexité en trois dimensions du profil du film d'air.

pour $a \ll l_c$ $H \approx 2a$.

pour $a \gg l_c$ alors $H \approx 2l_c$ (dans ce dernier cas, on se retrouvera avec une situation où U_D est proportionnel à U_A, la loi pour Ω_θ ne sera donc modifiée que d'un coefficient).

Malheureusement notre gamme de gouttes se situe justement entre les deux. On considèrera donc les deux cas asymptotiques dans la Fig. XIV.5

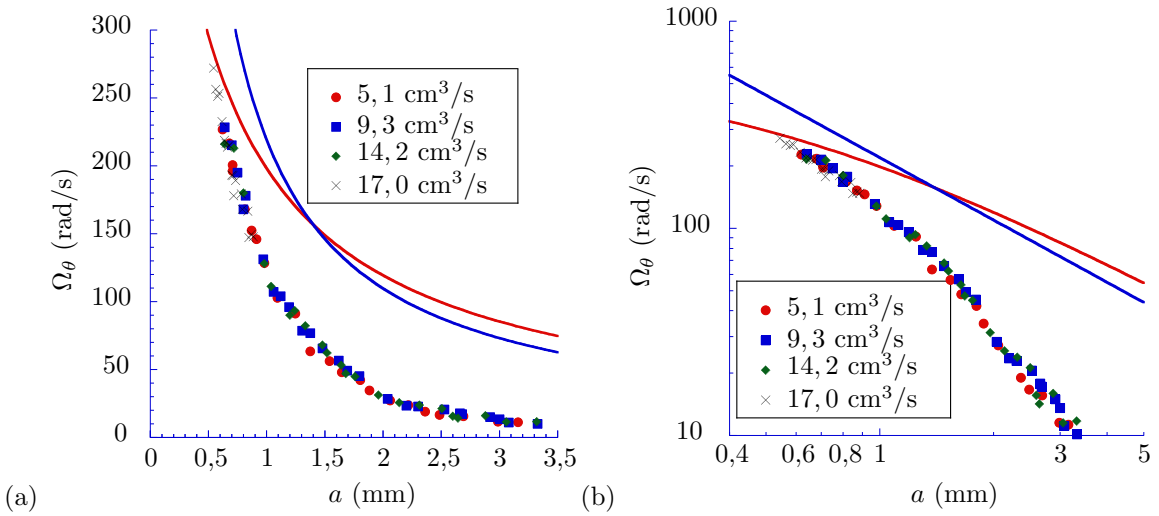


FIGURE *XIV.5 – Vitesse de rotation angulaire Ω_θ en fonction du rayon de la goutte dans un ressaut légèrement incliné en représentation lin-lin (a) et log-log (b). Cet ensemble de données déjà présenté en Fig. XIV.3 est maintenant comparé à la loi XIV.2. Deux cas doivent être distingués : si $a \ll l_c$ alors $H \approx 2a$ (cette situation est représentée par la ligne continue rouge) et si maintenant $a \gg l_c$ alors $H \approx 2l_c$ (cette situation est représentée par la ligne continue bleue). La prise en compte de la dissipation permet donc d'améliorer considérablement l'ordre de grandeur attendu par rapport à la modélisation précédente. Toutefois la tendance en $1/a^2$ n'est pas davantage captée par cette modélisation.*

Comme on peut le voir sur cette Fig. XIV.5, l'ajout de la dissipation visqueuse, malgré toutes ses imperfections, améliore l'accord entre théorie et expérience considérablement : l'accord en terme d'ordre de grandeur est déjà bien meilleur. En outre la prise en compte de cette dissipation visqueuse permet de proposer une explication pour la séparation en deux zones autour de la longueur capillaire : en effet autour de l_c on change de régime de dissipation visqueuse comme montré plus haut et ce en raison de la saturation en hauteur de la goutte.

Toutefois, on le voit clairement, ce modèle décrit très mal le comportement en $1/a^2$ observé pour les grands a (on a une variation en $1/a$ dans cette zone). Il semble donc que notre modélisation demeure insuffisante ou que nous ayons manqué un élément déterminant pour expliquer ce phénomène.

XIV.2.3 Déformation du ressaut

Un autre élément dont nous n'avons pas tenu compte est la déformation du ressaut : nous avons prétendu qu'elle ne jouait qu'un rôle mineur. Pourtant plus la goutte est grosse plus elle pince le film de liquide en écoulement sous elle et plus ce film liquide ralenti. Autrement dit U_A peut possiblement diminuer au fur et à mesure que la goutte grossit.

Un moyen de vérifier l'importance de cet effet est de changer la densité du liquide de la goutte sans

en modifier la viscosité dynamique. Pour ce faire on va utiliser une huile silicone perfluorée Galden HT 270 pour former des gouttes au sein de notre ressaut d'huile silicone standard 20 cSt.

Cette huile silicone perfluorée possède une densité de 1,85 kg/m^3 en ce qui concerne les autres éléments elle est tout à fait comparable avec l'huile silicone utilisée précédemment : une tension de surface aux alentours de 20 mN/m et une viscosité dynamique de 21 cP. [3]

La longueur capillaire de la goutte variant en $\rho^{-1/2}$ on aura ici une longueur capillaire de l'ordre de 1 mm. Cela signifie que, à rayon donné, pour les rayons de gouttes a petits devant cette longueur capillaire, la goutte d'huile silicone perfluorée sera bien plus lourde que celle d'huile silicone standard [4]. Cela reste vrai dans le cas de gouttes de rayon comparable ou supérieur à la longueur capillaire de l'huile perfluorée [5]. À a donné, notre goutte d'huile silicone perfluorée sera donc bien plus lourde que la goutte d'huile silicone et ce, dans tous les cas de figure.

Si l'on se réfère aux lois d'échelle proposées par Lhuissier *et al.* (voir XII.1.2.3) et que l'on exclut l'influence de la densité sur κ_b la courbure en bas de la goutte, le changement de densité va jouer sur l'épaisseur de liquide d_A uniquement dans le cas des petites gouttes. Dans ce cas d_A varie en $l_c^{4/5}$. En ce qui concerne le cas des grosses gouttes on ne s'attend à aucune variation de d_A . Autrement dit on peut considérer que d_A restera de l'ordre de grandeur du micromètre (avec au plus 30% d'écart).

L'équation XIV.1 donnant Ω_θ à partir du modèle gyroscopique simple ne prévoit donc aucune modification dans le cas de l'huile perfluorée.

L'équation XIV.2 prévoit une modification pour l'utilisation de l'huile perfluorée :

(i) dans le cas des petites gouttes ($a \ll l_c$) la modification est de l'ordre de 30% du terme K valant lui même au maximum 1 soit une augmentation de la vitesse U_D de l'ordre de 15% au plus.

(ii) dans le cas des grosses gouttes $a \gg l_c$ la modification est de l'ordre de 40% du terme en K qui vaut donc 0,6 dans le cas d'une grosse goutte d'huile perfluorée au lieu de 0,4 pour une grosse goutte d'huile silicone standard. Cela signifie donc que la vitesse U_D diminuera de 15 % environ dans ce contexte.

L'expérience donne un résultat très différent de celui attendu. En effet, nous avons comparé les fréquences de rotation de trois gouttes d'huile perfluorée (de rayons a compris entre 1,2 et 2,2 mm) à trois gouttes d'huile silicone standard de même rayon. Les données sont présentées dans le tableau XIV.1.

Ces résultats XIV.1 signifient clairement que la masse de la goutte a une importance significative : un facteur 2 en densité a pour effet de modifier de plus de 35 % les valeurs de Ω_θ ce qui est bien au delà des modifications attendues quelle que soit la configuration (petites ou larges gouttes).

La piste la plus plausible est que la goutte appuie davantage sur le film liquide ce qui provoque un ralentissement significatif de ce film. En ce sens la constance du rapport de fréquence n'est pas une surprise puisque l'on se trouve avec a de l'ordre et au delà de la longueur capillaire pour les deux liquides. Dans ce cas c'est seulement la zone de contact qui varie en augmentant a et non la masse par unité de surface.

On peut aussi envisager le fait que la courbure κ_b change avec la densité de la goutte. Malgré tout il serait surprenant que ce facteur ait une importance suffisante : pour obtenir le bon facteur il faut au moins un facteur 1,9 sur cette courbure ce qui semble plutôt énorme pour une courbure locale qui

3. Les deux liquides sont parfaitement miscibles néanmoins le volume représenté par quelques gouttes d'huile silicone perfluorée est négligeable devant les quelques litres d'huile silicone standard qui circulent dans notre dispositif. On considèrera donc qu'il n'y a aucune pollution.

4. Elle aura en effet la même forme (c'est-à-dire une sphère tronquée de rayon a) et une densité deux fois plus importante.

5. En effet, si la hauteur de la goutte atteint environ $2l_c$ (c'est-à-dire 2 mm) et diminue donc en taille par rapport à la situation de l'huile standard (2,8 mm) , soit un facteur $\rho^{1/2}$, la masse pesant sur le film liquide varie elle en ρ.

a (mm)	fréquence huile perfluorée (Hz)	fréquence huile silicone (Hz)	Rapport
1,2000	9,9010	15,300	0,647
1,4752	6,5359	10,450	0,625
2,2000	2,3810	3,7500	0,635

TABLE *XIV.1 – Comparaison des fréquences de rotation obtenues avec une huile silicone classique 20 cS et huile perfluorée HT 270 possédant la même viscosité dynamique, la même tension de surface mais une densité deux fois plus importante que celle de l'huile silicone 20 cS classique. Nous avons fait la comparaison pour trois gouttes de rayons situés entre 1,2 et 2,2 mm donc au dessus de la longueur capillaire de l'huile perfluorée et de l'ordre de la longueur capillaire de l'huile silicone pour les deux premiers a. Le rapport de fréquence est quasiment constant et vaut environ 0,63. Cela traduit le fait que la densité a une influence plus importante que celle prédite par le modèle jusqu'alors. Il semble donc nécessaire de prendre en compte la déformation du film liquide.*

doit être en grande partie fixée par la tension de surface.

Il est malheureusement assez difficile de quantifier l'effet de la masse de la goutte sur le film liquide et encore plus difficile de le modéliser.

XIV.2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons pu valider l'un des ingrédients essentiels du modèle gyroscopique : la rotation de la goutte. Pour la mettre en évidence, nous avons légèrement incliné le ressaut pour la maintenir dans un état stationnaire. Nous avons pu mesurer sa fréquence de rotation en fonction du rayon de la goutte. On a pu voir que cette fréquence de rotation ne dépendait pas du débit ce qui nous renseigne sur la structure fine du ressaut et s'avère très cohérent avec la vitesse quasi constante en entrée de ressaut que nous avions estimée via une condition de choc à la Bélanger. La rotation de ces gouttes s'est avérée plus complexe qu'attendue : nous anticipions, naïvement, une rotation solide en U_A/a pourtant nous avons pu observer que cette loi n'était vraie qu'asymptotiquement, à très petit a. Nous avons alors exhibé deux régimes : le premier transitoire vers un régime asymptotique en U_A/a et le second, pour a au delà de la longueur capillaire se comportant en U_A/a^2.

Nous avons donc cherché à améliorer le modèle-jouet basé sur une sphère dure roulant sur un tapis qui nous permettait déjà de modéliser l'état asymptotique en U_A/a en prenant en compte les effets de la dissipation visqueuse. Cela nous a permis d'améliorer considérablement les ordres de grandeur prédits et de proposer une explication de la transition au niveau de la longueur capillaire. Nous avons également pu montrer l'importance de la déformation du bain sous la goutte grâce à des expériences complémentaires utilisant de l'huile perfluorée.

Un autre ingrédient qui n'a pas été abordé ici et qui n'est pas totalement à exclure est la possible recirculation du film d'air sous la goutte induisant ainsi un changement significatif de la vitesse en surface de la goutte.

Chapitre XV

Perspectives et conclusion

Dans les paragraphes qui suivent nous allons aller un peu plus loin avec ce système expérimental. Nous allons en particulier explorer deux autres aspects : le cas entre-aperçu précédemment où l'on dépose une goutte d'un autre liquide dans le ressaut d'huile silicone 20 cSt et le cas de plusieurs gouttes cohabitant dans le même ressaut.

XV.1 Gouttes d'autres liquides

Dans cette partie nous développons les résultats d'expériences consistant à introduire des gouttes d'un autre liquide dans notre ressaut d'huile silicone standard 20 cS. Deux raisons nous ont poussé dans cette démarche :

(i) La première et la plus évidente est d'essayer d'obtenir une goutte dont la coalescence avec le bain d'huile est fortement retardée. Le but est d'obtenir des gouttes plus stables dans le temps afin d'observer sur un temps long la dynamique complexe de l'état apériodique avec moins de contraintes.

Malheureusement les différents couples n'ont pas radicalement changé la durée de vie des gouttes : lorsque les deux liquides sont miscibles, ils coalescent au bout d'un temps à peu près équivalent au cas "standard" et lorsque les deux liquides sont non-miscibles la goutte se trouve emportée dans l'écoulement sous formes de "lentilles" au bout d'un temps comparable au cas standard.

(ii) Les difficultés que nous avions à comprendre la loi régissant la vitesse angulaire Ω_θ de rotation de la goutte nous ont conduit, comme présenté précédemment, à tester les différents paramètres de la goutte, c'est la deuxième raison qui nous pousse à introduire des gouttes d'autres liquides dans notre ressaut... Nous avons certes testé l'influence de la densité comme vu précédemment mais nous nous posions aussi la question de l'influence de la viscosité et de la tension de surface sur Ω_θ.

XV.1.1 Effet de la viscosité

Afin de mesurer les effets de la viscosité sur la fréquence de rotation des gouttes nous avons utilisé des gouttes d'autres liquides de viscosités différentes comme l'éthanol, l'eau savonneuse (pour avoir une tension de surface variant peu par rapport à la tension de surface de notre huile) ou encore une huile perfluorée basse viscosité. Les informations concernant les propriétés de ces liquides sont résumées dans le tableau XV.1.

Le premier constat que l'on peut faire en plaçant des gouttes peu visqueuses (i.e. l'ensemble des liquides proposés à l'exception de l'huile perfluorée "haute viscosité") dans le ressaut est la forme très

	η (cP)	ρ (kg/m^3)	γ (mN/m)
Huile silicone	20	950	18
Huile perfluorée	21	1850	~ 20
Huile perfluorée basse viscosité	1,7	1720	~ 17
Eau	1	1000	~ 70
Eau savonneuse	~ 1	~ 1000	~ 20
Ethanol	1.2	789	22

TABLE *XV.1 – Propriétés des liquides utilisés pour former des gouttes dans le ressaut : viscosité dynamique η, masse volumique ρ et tension de surface γ. La plupart de ces valeurs proviennent de la littérature proposée par le fabricant (c'est vrai en ce qui concerne l'huile silicone perfluorée haute et basse viscosité et l'huile silicone classique excepté la viscosité qui a pu être mesurée) ou simplement de la littérature.*

étrange qu'elles adoptent. L'approximation sphérique pour les gouttes n'est plus du tout de mise, en effet, leur forme varie entre une forme sphérique et une forme ellipsoïdale au cours de leur parcours dans le ressaut. On se trouve donc dans des situations très différentes de celle précédemment étudiée.

Leur dynamique est elle aussi changée : le diagramme de phase n'est en rien comparable. On assiste en effet au couplage entre la déformation propre de la goutte et la dynamique d'une goutte dans un ressaut. On constate en particulier de très fréquents changements de direction qui s'accompagnent d'un changement de rapport d'aspect.

Quelques images de ces gouttes sont reportées en Fig. XV.1.

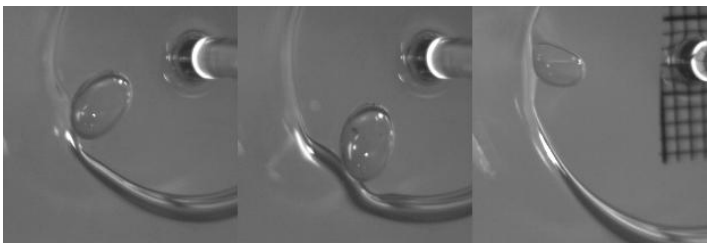


FIGURE *XV.1 – Photographies prises du dessus de gouttes de liquides de basses viscosités déposées dans un ressaut hydraulique circulaire d'huile silicone 20* cS*. De gauche à droite : ethanol, eau savonneuse, huile perfluorée basse viscosité. Les propriétés de ces liquides sont répertoriées dans le tableau XV.1. On n'observe pas de différence notable entre eau savonneuse et ethanol. Visuellement le rapport d'aspect maximal semble être le même. Les gouttes d'huiles perfluorées présentent une géométrie légèrement différente, elles ne sont pas parfaitement ellipsoïdales et peuvent même adopter une forme de noix de cajou. La dynamique de ces gouttes est très complexe et les formes de ces gouttes changent avec le temps et la dynamique dans le ressaut.*

Une manière d'interpréter ce résultat avec des lois d'échelle consiste à comparer la période de rotation typique τ_R avec le temps de diffusion de la quantité de mouvement τ_D. En ordre de grandeur on a : $\tau_R \sim \frac{2\pi a}{U_A} \sim 0,02$ s et ce pour toutes les gouttes. Le temps de diffusion de quantité de mouvement peut être estimé par $\tau_D \sim \frac{a^2}{\nu} \sim 0,05$ s pour de l'huile silicone 20 cS. Ainsi $\tau_D \sim \tau_R$. C'est pourquoi l'approximation de rotation en bloc semble crédible : il suffit d'une ou deux rotations pour que la vorticité dans la goutte soit entièrement homogénéisée. Pour un liquide de viscosité $\nu \approx 1$ cS, τ_R vaut 1 s, autrement dit le mouvement de la goutte ne peut être homogénéisé en une seule rotation. Cela

explique donc pourquoi la goutte se déforme au cours de son mouvement dans le ressaut hydraulique. Cela peut expliquer la forme de pillule observée et le couplage extrêmement compliqué entre la forme de la goutte et sa dynamique dans le ressaut.

De manière plus rigoureuse Gilet *et al.* [48, 35] nous montrent que les déformations d'une goutte sont largement amorties par la viscosité si le nombre d'Ohnesorge, défini par $Oh = \nu\sqrt{\rho/\gamma a}$, est de l'ordre de 1. Pour le cas de l'huile silicone 20 cS on a Oh typiquement de l'ordre de 0,14 (ce qui semble suffisant aux vues des faibles déformations subies par la goutte) et l'on a Oh de l'ordre de 0,007 dans le cas de l'eau savonneuse et de l'alcool. On retrouve ainsi le constat établi précédemment.

XV.1.2 Effet de la tension superficielle

Toutefois, parmi ces dynamiques présentées précédemment, si celle de l'éthanol, de l'eau savonneuse et de l'huile perfluorée basse viscosité sont à peu près identiques, la dynamique d'une goutte d'eau se singularise réellement. Dans le cas de l'eau les déformations de la goutte entre l'état ellipsoïdale et l'état sphérique ont pour fréquence caractéristique environ 50 Hz, elles sont donc complètement décorrelées de la dynamique de la goutte. Dans le cas de l'eau savonneuse la fréquence d'oscillation n'est pas réellement observable car elle est couplée avec la dynamique de la goutte dans le ressaut. Cette différence ne peut être due qu'à la tension de surface qui est le seul paramètre changé entre l'eau et l'eau savonneuse. Une illustration de ce phénomène est proposée en Fig. XV.2.

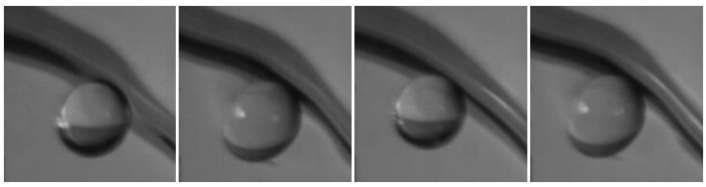


FIGURE *XV.2 – Photographies successives d'une goutte d'eau vue de haut dans un ressaut circulaire d'huile silicone 20* cS *(le ressaut correspond à la bande noire sur les images). Le film est obtenu à l'aide d'une caméra rapide (4000 images par seconde). On peut ainsi mettre en évidence la fréquence de déformation de la goutte de l'ordre de 50* Hz*. On peut le constater, la goutte d'eau est beaucoup moins déformée que dans le cas des basses viscosités. La tension de surface limite donc les déformations mais augmente considérablement la fréquence des vibrations au point de décorreler en fréquence ces vibrations avec la dynamique de la goutte dans le ressaut.*

Il semble donc que la rotation de la goutte sur elle-même soit susceptible d'exciter les modes de Rayleigh de la goutte. Le mode 1 par exemple est de période typique : $\sqrt{\frac{\rho a^3}{\gamma}} \sim 10^{-2}$ s. Cela semble compatible avec la valeur de 50 Hz présentée ici.

Ce système se révèle donc bien plus riche que ce que l'on aurait pu supposer et semble mériter une étude plus complète tant expérimentale que théorique.

XV.2 Plusieurs gouttes dans un ressaut

Lorsque l'on met plusieurs gouttes dans un ressaut, on observe que les gouttes vont cohabiter en interagissant entre elles, sans coalescer. On peut ainsi ajouter autant de gouttes dans le ressaut jusqu'à couvrir de gouttes le périmètre du ressaut comme sur la Fig. XV.3.

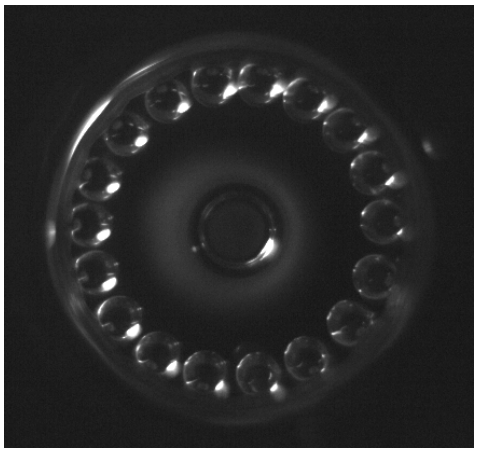


FIGURE *XV.3 – Vue du dessous d'un chapelet de gouttes dans un ressaut hydraulique circulaire d'huile silicone 20* cS. *On peut dénombrer une vingtaine de gouttes (de la même huile) cohabitant dans le même ressaut d'huile (R_J de l'ordre de 1* cm*). On peut ainsi ajouter des gouttes dans le ressaut jusqu'à couvrir de gouttes le périmètre du ressaut. On constate néanmoins que les gouttes ne sont jamais en contact les unes avec les autres : une distance à peu près constante sépare les gouttes deux à deux.*

Lorsque des gouttes sont placées dans un état orbital elles vont adopter des dynamiques collectives surprenantes : elles vont s'entrechoquer (comme l'auraient fait deux balles rebondissantes) en opposition de phase ou au contraire tourner dans le même sens en se suivant. On peut aussi, avec plusieurs gouttes, obtenir un petit pendule de Newton.

Ce phénomène est extrêmement contre intuitif : on s'attend à observer la coalescence de deux gouttes rentrant en contact. On se pose donc la question de ce qui permet aux gouttes de "cohabiter" dans un même ressaut.

Une observation de plusieurs gouttes en état stationnaire (éventuellement réalisée par une faible inclinaison du ressaut) suggère qu'il existe une distance minimale séparant les gouttes les unes des autres. Cette distance dépend de la taille des deux gouttes (le rapport des deux rayons mais aussi de manière absolue). Cette distance semble être un bon candidat pour expliquer la non coalescence de deux gouttes même si elles semblent se toucher. Reste à comprendre d'où vient physiquement cette distance de séparation.

Il est à noter que dans certains cas les gouttes sont séparées d'une distance qui correspond à un angle de plus d'une dizaine de degrés sur le ressaut. Une distance de séparation aussi importante élimine de fait l'hypothèse de film d'air séparant les gouttes par lubrification.

L'image obtenue avec un éclairage de biais et présentée en Fig. XV.4 suggère une explication :

En effet, on l'a vu dans la partie précédente (voir XIII.2.5.2), une goutte va pincer le film liquide et laisser en aval un "sillage". Ce sillage est une structure en trois dimensions. Il créé donc une légère surélévation, ainsi lorsque l'on observe deux gouttes dans le ressaut (avec un éclairage adapté), on peut constater que la distance qui les sépare correspond à la largeur de leurs deux sillages.

Le sillage dépend de la taille de la goutte (plus la goutte est grosse plus le sillage est marqué), de la densité (plus la goutte est dense, plus le sillage sera large), mais aussi de propriétés intrinsèques à la couche d'air qui sépare la goutte du fluide. Ainsi nous constatons que plus la goutte est petite plus elle (à travers son sillage) sera sensible au sillage d'une autre goutte et, a contrario, plus la goutte sera grosse plus elle ignorera le sillage de sa voisine. On peut donc parler d'interactions entre les gouttes à

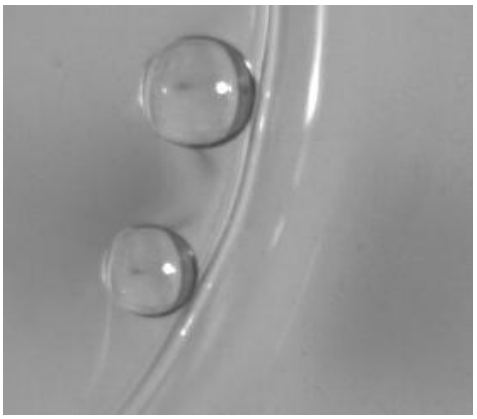


FIGURE *XV.4 – . Photographie de deux gouttes d'huile silicone statiques dans un ressaut circulaire hydraulique d'huile silicone. La photographie est prise du dessus. Deux gouttes statiques sont séparées par une distance à peu près constante. Cette distance dépend des tailles respectives des deux gouttes et du rapport entre ces deux tailles mais aussi de la densité du liquide utilisé pour former les gouttes. L'éclairage de côté permet ici de suggérer une explication à cette distance de séparation : les sillages des deux gouttes semblent interagir et fixer cette distance.*

travers leur sillage. Cette première approche des choses permet de fournir une grille d'analyse crédible à nos observations. On comprend alors pourquoi deux gouttes de tailles différentes vont se repousser davantage que deux gouttes de même taille : la petite goutte sera très sensible au sillage de la grosse et maintiendra une distance plus importante qu'en présence d'une autre goutte de même taille ayant un sillage plus faible. Ce phénomène est présenté en Fig. XV.5

Ce phénomène d'interaction via le sillage reste encore à modéliser mais nécessite toutefois une connaissance précise des mécanismes en jeu pour la dynamique d'une goutte dans le ressaut. Il est donc difficile d'aller plus avant sans répondre aux questions posées dans les parties précédentes.

XV.3 Conclusion

Au cours de cette Partie, nous avons posé les bases de l'étude d'un système dynamique original : lorsque l'on dépose une goutte dans un ressaut elle va se mettre spontanément en mouvement.

Nous avons en particulier pu montrer que les paramètres de contrôle sont extrêmement simples à faire varier : on ne parle ici que du rayon du ressaut hydraulique R_J et du rayon a de la goutte elle-même. Malgré cette apparente simplicité, ce système offre des dynamiques très différentes : on peut observer un état périodique de rotation dans le ressaut mais aussi un état "apériodique" dont l'étude statistique s'annonce intéressante, ou encore un état où la goutte reste parfaitement immobile qui n'est apparu que très récemment avec les dernières améliorations du dispositif expérimental.

L'étude exploratoire menée avec des gouttes de basses viscosités et en faisant varier la tension de surface laisse envisager une variété de comportements dynamiques encore plus importante en ajoutant des modes d'excitations propres de la goutte à la dynamique globale de la goutte. Dans la même logique on peut aussi envisager de changer les propriétés du bain ce qui modifiera les propriétés de déformation du film liquide et donc pourra modifier aussi les dynamiques accessibles à la goutte.

Un autre aspect intéressant réside dans les interactions entre plusieurs gouttes qui semblent suggérer une dynamique riche pour des systèmes à plusieurs corps via des interactions atypiques basées sur le sillage des gouttes. Ce sillage dépendant de la taille et de la densité des gouttes, cette interaction

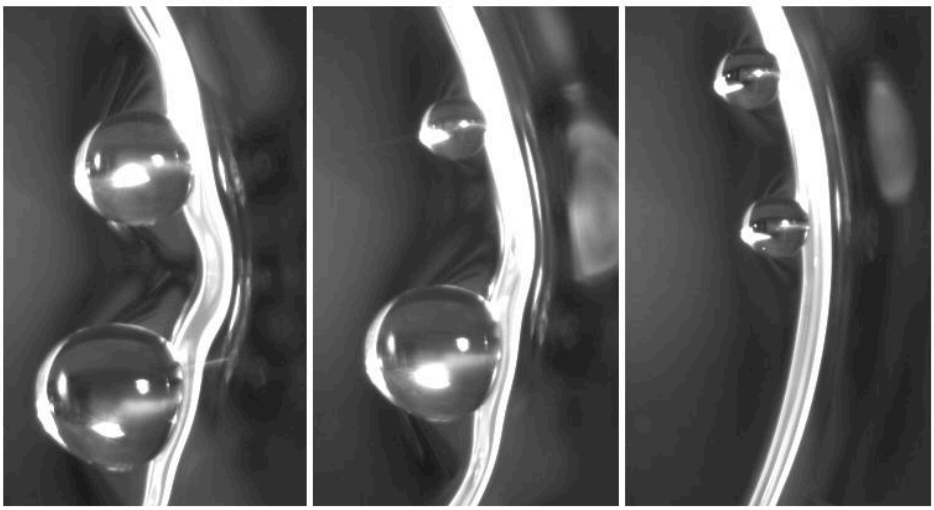


FIGURE *XV.5 – Deux gouttes d'huile silicone sont placées dans un ressaut d'huile, les photographies sont prises du dessus et les échelles ne sont pas changées. On constate que deux gouttes de tailles comparables se repoussent moins que deux gouttes de tailles différentes. Cette observation est compatible avec la théorie que nous proposons, à savoir, plus la goutte est petite plus elle est sensible au sillage d'une goutte et a contrario plus la goutte est grosse plus son sillage sera important. On comprend alors pourquoi deux gouttes de tailles différentes vont se repousser davantage que deux gouttes de même taille : la petite goutte sera très sensible au sillage de la grosse et maintiendra une distance plus importante qu'en présence d'une autre goutte de même taille ayant un sillage plus faible.*

apparaît comme originale et susceptible de devenir une interaction modèle pour d'autres systèmes dynamiques.

Cette simplicité ne doit pas effacer la réelle difficulté à comprendre les phénomènes physiques responsables de ces dynamiques étonnantes. Un modèle gyroscopique simple ne suffit clairement pas à prédire avec précision les différentes dynamiques de la goutte même s'il donne des résultats encourageants en prédisant, par exemple un état orbital périodique stable et un comportement de la vitesse angulaire ω s'ajustant raisonnablement sur une partie de nos points expérimentaux. Il manque clairement un ingrédient physique à ce modèle pour prédire les mouvements apériodiques. Si nous avons pu identifier un certain nombre d'effets physiques à ajouter au modèle (déformation de la goutte, du ressaut, dissipation visqueuse, film d'air,...), il est encore difficile d'en discriminer les effets et de comprendre leur importance relative.

Afin de discriminer ces effets physiques nous avons légèrement modifié le dispositif pour observer la goutte dans un état stationnaire. Nous avons pu alors exhiber l'un des ingrédients clé du modèle gyroscopique, à savoir la rotation de la goutte. Nous avons caractérisé cette rotation et découvert qu'elle était indépendante du débit. Nous avons découvert que la loi d'évolution de la fréquence s'avérait beaucoup plus compliquée à comprendre que ce que nous attendions. Nous avons ensuite compris un certain nombre des effets physiques responsables de cette loi de fréquence si inattendue, même si nous peinons encore à les entrer dans le modèle.

La caractérisation du ressaut au cours de la Partie I nous a été d'un grand secours comme on a pu le voir au cours de cette Partie. Toutefois, une étude encore plus poussée de la zone interne serait susceptible d'apporter des réponses à nos questions. En particulier il serait intéressant de caractériser les effets d'une perturbation ponctuelle en amont du ressaut, ses effets sur la surface libre et sur le

profil de vitesse dans la zone interne, son impact sur la courbure locale du ressaut...

Une ultime ouverture à ce sujet est de se poser la question de l'influence d'un forçage sur la dynamique de la goutte par exemple en modulant l'alimentation en liquide du ressaut ou en faisant vibrer verticalement le plan de récupération du liquide. En particulier, que se passe-t-il si l'on se place au niveau de la transition périodique apériodique pour ces deux perturbations ? Ces deux modes d'excitation de natures différentes devraient donner lieu à des écarts de dynamique intéressants à prospecter.

Quatrième partie

Deux expériences nouvelles en perspective

Chapitre XVI

Deux expériences nouvelles en perspective

Dans ce chapitre au statut un peu particulier nous allons proposer deux dispositifs expérimentaux susceptibles d'apporter des réponses à des questions soulevées précédemment mais aussi d'en poser de nouvelles. Nous n'avons mené aucune étude systématique sur les deux expériences présentées ici et des montages expérimentaux adaptés doivent encore être réalisés pour permettre une approche plus rigoureuse.

Les quelques lignes qui suivent ne présentent donc pas de mesures à proprement parler et encore moins une approche théorique mais des descriptions de phénomènes physiques nouveaux. Nous nous contenterons donc simplement de décrire ces expériences qui pourraient (ou devraient !) être développées dans le futur et d'évoquer leur intérêt potentiel.

XVI.1 Goutte en non coalescence dans un cône

XVI.1.1 Impact d'un jet sur un cylindre creusé en forme de cône

La première des expériences proposées est, en quelque sorte, la "petite soeur" du dispositif de goutte dans un ressaut hydraulique. Il s'agit de faire impacter un jet liquide d'huile silicone (20 cS) au centre d'un cylindre creusé en cône (voir Fig. XVI.1), de diamètre 1,5 cm. L'angle du cône θ que nous avons choisi ici est typiquement de l'ordre de 20 ou 30°. On observe alors plusieurs comportement (non connus et qui mériteraient également une caractérisation propre) :

(i) Pour de faibles débits le cône se rempli de liquide : l'interface liquide-air devient alors horizontale sur l'ensemble du diamètre du cylindre. (voir Fig. XVI.1 (a))

(ii) Pour des débits plus élevés on constate un phénomène de ressaut hydraulique c'est à dire une zone interne de faible épaisseur qui suit la pente du cone puis un choc et enfin un écoulement plus épais dans la zone externe [1]. Nous sommes alors en situation de ressaut sur un plan incliné avec des conditions aux limites différentes de celles observées précédemment. L'étude de ce phénomène présente donc un intérêt important dans la perspective des travaux présentés précédemment. (voir Fig. XVI.1 (b))

(iii) Le ressaut hydraulique est repoussé au delà du cône : l'écoulement se fait alors simplement

1. La transition entre (i) et (ii) est extrêmement hystérétique.

par un mince film qui s'écoule le long de la surface du cône. (voir Fig. XVI.1 (c))

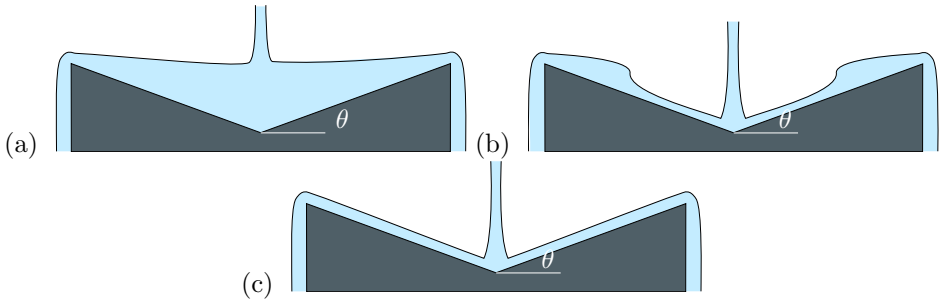


FIGURE *XVI.1 – Vues de côté de l'impact d'un jet au centre d'un cylindre creusé en cône. On observe trois comportements distincts : (a) le cône est rempli de liquide. (b) un ressaut circulaire hydraulique : une zone interne de faible épaisseur et de forte vitesse le long de la surface du cône, un choc puis une zone externe plus épaisse et moins rapide. (c) On observe seulement un film mince qui s'écoule radicalement sur l'ensemble de la surface du cône : le ressaut est évacué au delà du cône.*

L'étude de ce phénomène hydrodynamique est très intéressante. Non seulement en ce qui concerne le phénomène de ressaut mais aussi en ce qui concerne l'impact même du jet sur une surface non horizontale. Cette étude est également à mettre en parallèle avec l'étude du ressaut sur plan incliné.

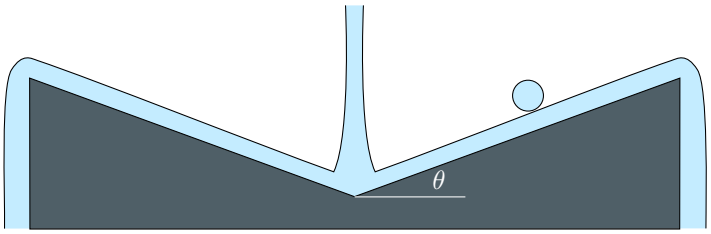
XVI.1.2 Goutte en non coalescence

Cela étant, ce qui nous a motivé dans l'élaboration de ce dispositif expérimental est, comme on l'a dit plus haut, de travailler sur une expérience de dynamique d'une goutte en non coalescence proche du dispositif de la goutte dans un ressaut circulaire hydraulique. L'idée était de remplacer une situation où la goutte avait deux points de contact avec le liquide en une situation où elle n'en a plus qu'un seul. On se place donc, comme présenté sur la Fig. XVI.2, dans la situation (iii) pour avoir un mince film liquide le long de la surface du cône. Puis l'on place une goutte du même liquide (qui est, rappelons le, de l'huile silicone 20 cS) sur ce film mince. On peut observer une situation de non coalescence pendant des durées de l'ordre de la minute, la goutte restant à altitude constante. Cette altitude est le fruit de l'équilibre entre la gravité et la friction causée par le bain liquide via le film d'air sous la goutte. Une image de l'expérience est représentée sur un montage provisoire en Fig. XVI.2.

La goutte se met spontanément en rotation pour orbiter périodiquement autour du jet. Cela tend donc à confirmer nos hypothèses concernant une instabilité gyroscopique pour expliquer les mouvements de la goutte à l'intérieur du ressaut. En effet, dans cette géométrie on réduit les possibilités de mouvement à la seule interaction entre la goutte et le film d'air sous elle. On s'attendrait donc à ce que la goutte ne puisse tourner que dans un plan vertical et dans le sens imposé par l'écoulement du fluide. Seule une instabilité de type gyroscopique est susceptible d'expliquer la transition vers une orbite de la goutte ici. Cela constitue l'un des premiers intérêts de cette expérience : on imagine que cette expérience pourra confirmer un certain nombre des hypothèses développées dans le cas de la goutte dans un ressaut.

Outre l'étude du phénomène en lui même (vitesse et fréquence de la goutte, stabilité de l'orbite)

(a)



(b)

FIGURE *XVI.2 – Schéma (a) et photographie (b) d'une goutte en non coalescence dans le système décrit précédemment. La goutte se situe à altitude constante en raison d'un équilibre entre friction et gravité. Cette altitude varie donc avec la taille de la goutte : plus la goutte est grosse plus la position d'équilibre est basse. On observe également que la goutte orbite périodiquement autour du jet.*

cette expérience offre de nombreux intérêts :

(i) Il permet en particulier de mesurer facilement le coefficient de friction que cause le film d'air sur la goutte. En faisant varier la taille de la goutte on change l'altitude de la goutte. Cela nous permet donc un travail important sur cette question encore mal connue de la friction.

(ii) Connaissant cette force de friction on pourra connaître la force qui s'applique sur le mur liquide dans le cas de la goutte dans le ressaut et ainsi obtenir une équation supplémentaire dans le problème de la goutte dans le ressaut. Cette équation est alors susceptible de nous permettre de déterminer l'un des paramètres encore inconnu du problème de la goutte.

(iii) Toujours sur la question de la goutte dans le ressaut le fait de ne plus avoir de mur liquide nous offre un certain nombre de perspectives comme observer la forme exacte de la goutte mais surtout d'obtenir l'épaisseur du film d'air sous la goutte via des méthodes d'interférométrie.

Cette expérience nous offre donc des perspectives de compréhension importantes non seulement pour l'expérience "soeur" de la goutte dans un ressaut mais surtout pour l'ensemble des questions de dynamique de goutte en situation de non mouillage avec la détermination de coefficients de friction difficilement accessibles dans d'autres géométries.

XVI.2 Impact dans une cavité

La deuxième expérience présentée ici a été montée suite à la visite d'Andrew Belmonte lors d'un séjour à MSC. Elle se rapproche davantage des problématiques du ressaut circulaire horizontal et en particulier des phénomènes de facettage que l'on peut observer avec le ressaut. Dans cette expérience on fait impacter un jet liquide (huile silicone 20 cS) au centre d'une couronne solide sur un plan horizontal (ici du verre). Nous faisons en sorte que le diamètre intérieur de la couronne soit de l'ordre de grandeur du diamètre des ressauts présentés en Partie I (typiquement le diamètre est choisi entre 1 et 4 cm). L'épaisseur de la couronne est typiquement de 5 ou 6 mm. Une image permettant de se figurer l'expérience est présentée en Fig. XVI.3.

FIGURE *XVI.3 – Image de côté figurant le dispositif expérimental : un jet liquide visqueux (huile silicone 20 cS) entouré par une couronne circulaire solide impacte une plaque au niveau du centre de la couronne. La couronne est caractérisée par un diamètre interne variant entre 1 et 4 cm et une épaisseur de l'ordre de 5 mm.*

Suivant les configurations abordées nous avons pu observer la présence ou non d'un ressaut circulaire hydraulique mais ce qui nous intéresse particulièrement ici est ce qu'il se passe lorsque l'on travaille à débit élevé. On observe alors un bourrelet croître à l'intérieur du diamètre interne puis se déstabiliser en bosses liquides, le liquide continuant de s'écouler en un film épais sur le dessus de la couronne. Ces bosses liquides sont un phénomène à 3 dimensions : elles sont aussi visibles vues de dessus que vues de côté, en dépassant largement de la couronne. La hauteur de ces bosses peut en effet atteindre plusieurs fois l'épaisseur de la couronne [2]. Ces bosses liquides sont en nombre fini : il s'agit de modes d'excitation. Ces modes sont relativement stables avec l'augmentation du débit. Une telle augmentation donnera d'abord lieu à la croissance des bosses puis à la déstabilisation de ces bosses à très forts débits. Nous avons représenté en Fig. XVI.4 ce phénomène en vue de côté en augmentant progressivement le débit.

Comme on peut le voir sur cette figure le bourrelet liquide croît en fonction du débit jusqu'à atteindre une hauteur seuil où il se déstabilise pour former plusieurs bosses. Ici il s'agit d'un mode 2. On observe que c'est un mode tournant.

Nous avons en effet pu identifier qu'il pouvait y avoir des modes tournants (les bosses tournent autour du jet) et des modes oscillants (comme dans le cas des modes vibratoires pour des gouttes en caléfaction : temporellement les bosses deviennent creux et les creux deviennent bosses) [3]. Nous avons

2. Un élément remarquable est que tout ces éléments restent globalement confinés à l'intérieur du diamètre interne de la couronne solide.

3. Les modes tournants sont également caractérisés par l'émission d'ondes de surface dans la zone externe.

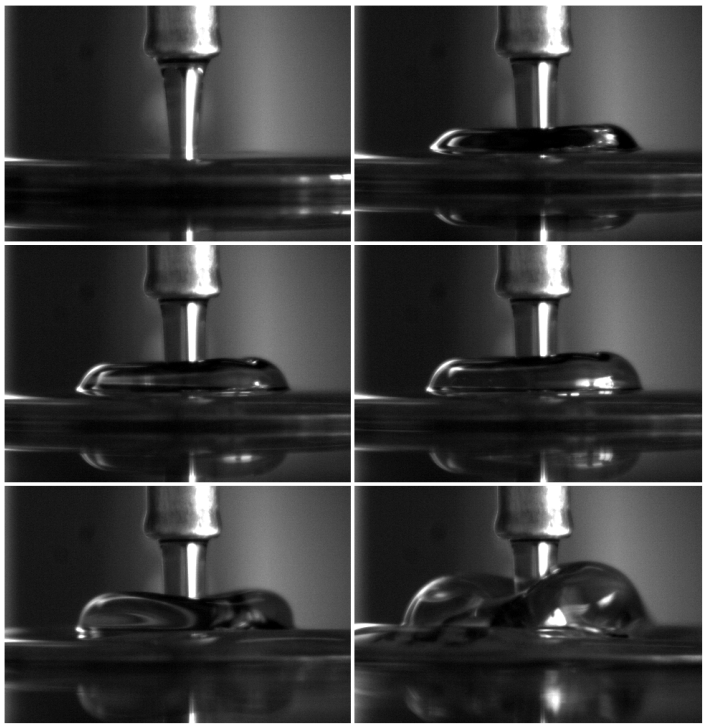


FIGURE *XVI.4 – Prises de vue de côté de la croissance (avec le débit) d'un bourrelet annulaire liquide à l'intérieur d'une couronne solide puis sa déstabilisation en bosses liquides. On observe ici uniquement deux bosses : il s'agit donc d'un mode 2. D'autres modes sont bien sûr accessibles. Si l'on augmente encore davantage le débit, les bosses s'amplifieront jusqu'à se déstabiliser à leur tour.*

également pu constater que le nombre de modes variait en fonction de très nombreux paramètres : le diamètre interne de la cavité mais également sa hauteur, la vitesse du liquide en sortie de jet... Nous avons pu observer des modes allant jusqu'à 5. Nous avons représenté en vue de dessus un mode 3 tournant en Fig. XVI.5.

Il est très probable que comme dans le cas du ressaut hydraulique circulaire l'observation de modes soit due à la déstabilisation d'un vortex annulaire forcé par la couronne liquide. Cependant le phénomène ici se fait à très basse tension de surface contrairement à tous les autres cas abordés précédemment de déstabilisation de vortex annulaire (ressaut circulaire, bump ou tore liquide en caléfaction).

Ce problème apparaît donc de prime abord comme complexe mais extrêmement stimulant tant expérimentalement que théoriquement. A nouveau, les motivations pour poursuivre cette étude ne manquent pas.

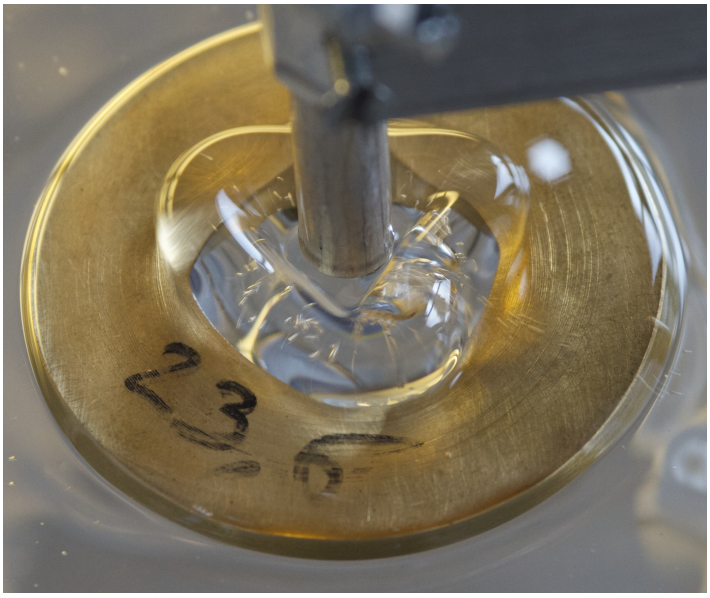


FIGURE *XVI.5 – Vue du dessus d'un mode 3 tournant formé par l'impact d'un jet dans une cavité circulaire.*

Conclusion

Cette thèse est donc une contribution à l'étude des écoulements à surface libre et en particulier au phénomène de ressaut hydraulique. Au cours de ce manuscrit nous avons essayé de convaincre le lecteur de l'enjeu théorique et expérimental que revêt la compréhension de ce phénomène. Nous avons en effet tâché d'apporter une approche nouvelle permettant une meilleure compréhension du ressaut circulaire hydraulique après avoir démontré que sa modélisation n'avait rien de trivial et s'avérait encore un en jeu scientifique d'actualité. Nous avons également traité de la question de la brisure de symétrie spontanée induite par l'inclinaison du substrat sur lequel on fait impacter perpendiculairement un jet liquide. Nous avons pu observer que cette brisure de symétrie engendrait une très forte dépendance du phénomène à la situation de mouillage dans laquelle on se trouve et soulevait des questions complexes sur cette question du mouillage. Enfin nous avons pu montrer que le ressaut pouvait servir de contexte à l'étude de dynamique de gouttes en situation de non coalescence, sujet profondément porteur.

Au cours de la première partie, nous avons en effet abordé spécifiquement la question du ressaut hydraulique circulaire. Notre étude bibliographique nous a permis de démontrer qu'en dépit d'une littérature riche la sélection du rayon de ressaut posait encore question. Nous nous sommes en particulier aperçus que la partie la plus discutée et la moins documentée était la zone externe, après le choc. Nous avons donc, à l'aide d'arguments simples, de vérifications expérimentales mais également numériques (en collaboration avec Henri Lhuissier), élaboré un modèle robuste pour cette zone externe. Cette étude expérimentale a eu de nombreuses conséquences : elle a permis le constat expérimental, jamais établi auparavant, d'un nombre de Froude indépendant du débit, de la viscosité et de la tension de surface en sortie de ressaut. Ce fait expérimental nous a poussé à proposer une loi analytique simple concernant la sélection du rayon du ressaut en fonction des différents paramètres expérimentaux. Cette loi analytique s'est révélée en excellent accord avec l'ensemble de nos données expérimentales. Notre étude de la zone externe nous a également permis de remettre en question la modélisation de la zone interne proposée par Watson et communément admise. Nous avons en particulier pu montrer que cette modélisation de la zone interne s'avérait en désaccord avec la condition de choc également proposée par Watson. Nous avons également pu constater à l'aide de mesures directes que la condition de choc pouvait s'avérer compatible avec nos résultats sous certaines hypothèses non démontrées mais que la modélisation de la zone interne par Watson était bel et bien mise en défaut.

Les perspectives concernant cette partie sont à la fois théoriques et expérimentales. La perspective théorique principale est bien entendu de modéliser ce nombre de Froude constant. Il s'agit de comprendre si le nombre de Froude est indépendant des paramètres physiques au-delà de nos conditions expérimentales ou s'il s'agit en réalité de variations lentes et invisibles sur notre plage de résultats. La réponse à cette question s'avère déterminante dans la compréhension même du phénomène de choc pour le ressaut circulaire hydraulique. Expérimentalement, les perspectives sont d'essayer d'élargir notre approche à d'autres situations comme le cas d'un ressaut confiné par un mur externe ou sur des gammes de paramètres différentes. Il s'agit également de multiplier les mesures dans la zone interne

afin de permettre une modélisation plus pertinente de cette partie du problème. Enfin une connaissance plus fine des structures d'écoulement avant et après le choc, par le biais, par exemple d'un dispositif de PIV nous permettrait de répondre à nos interrogations sur la validité de la condition de choc.

La deuxième partie concernait le ressaut formé par l'impact d'un jet perpendiculairement à un plan incliné. Les résultats que nous avons obtenus sont donc beaucoup plus exploratoires en raison de la faiblesse de la littérature existante sur le sujet. Au cours de cette partie nous nous sommes intéressés à un ressaut séparant une zone interne et un bourrelet liquide d'épaisseur plus importante. Ce ressaut est d'abord fermé aux petites inclinaisons de plaque puis s'ouvre progressivement avec l'augmentation de l'inclinaison pour adopter une structure en "fer à cheval". Nous avons également pu constater que les conditions de mouillage jouaient un grand rôle dans la forme du bourrelet et donc pour la forme du ressaut. Nous avons étudié trois situations différentes de mouillage : total, partiel et quasi-nul. En situation de mouillage total on distingue une séparation nette entre la fin du bourrelet liquide et le film précurseur qui l'entoure qui se traduit par un angle de contact effectif. Cet angle de contact effectif n'a rien de trivial et nous ne savons, à ce jour, toujours pas comment l'interpréter. En situation de mouillage partiel nous avons été frappé par l'absence d'hystérèse entre les situations à débits croissants et décroissants. Cela traduit la dynamique de la ligne de contact qui est sans cesse en mouvement, rendant difficile la mesure de l'angle de contact. En mouillage quasi nul nous avons également pu observer, en fonction du diamètre de l'injecteur, une situation sans ressaut, le film mince de la zone interne se fragmentant sous l'effet de la tension superficielle. On peut également sous certaines conditions observer la coexistence d'un ressaut sur la partie amont et ce phénomène de fragmentation sur la partie aval. Nous avons également travaillé plus quantitativement en se consacrant à l'étude de R_{top} et R_{width} pour chacune des situations de mouillage. Dans toutes ces situations nous obtenons des dépendances en débit indépendantes de l'inclinaison à un préfacteur près. En situation de mouillage total les deux grandeurs étudiées sont bien décrites par une loi en $Q^{5/8}$. Tandis qu'en mouillage partiel on observe, pour les deux longueurs mesurées un régime linéaire à faibles débits et un régime asymptotique à forts débits également en $Q^{5/8}$. Cette loi en puissance 5/8 n'est pas sans rappeler la loi d'échelle obtenue par Bohr *et al.* pour le ressaut circulaire hydraulique. On s'étonne également de trouver une loi d'échelle commune indépendante du débit en régime asymptotique.

Nous avons, dans ce cadre, travaillé à la construction de modèles décrivant nos résultats. Dans tous les cas, à des degrés divers on obtient des ordres de grandeurs et des tendances présentant un accord raisonnable avec nos résultats expérimentaux. Toutefois tous ces modèles doivent être renforcés par des mesures plus précises pour vérifier des hypothèses qui relèvent pour le moment de l'intuition. On retiendra en particulier un résultat commun fort : la zone interne du ressaut est comparable aux résultats obtenus sur un plan horizontal et sa modélisation ne semble pas modifiée par l'inclinaison de la plaque.

Les perspectives expérimentales concernant cet aspect sont bien évidemment un travail autour des questions de modélisation des bourrelets liquides et en particulier des angles de contact. Cela semble être la condition *sine qua non* pour aller vers l'amélioration des modèles que nous avons esquissés.

La troisième partie de ce mémoire traite d'un cas original de dynamique de gouttes en non coalescence. En effet une goutte posée dans un ressaut circulaire hydraulique va se retrouver coincée contre le mur liquide et ne va pas coalescer en raison d'un film d'air entretenu par l'écoulement sous la goutte. La goutte se met alors, comme nous l'avons montré par notre modélisation, spontanément en mouvement dans le ressaut en raison d'une instabilité gyroscopique. Nous avons pu observer plusieurs états dynamiques : l'état périodique où la goutte orbite périodiquement le long du ressaut et l'état apériodique où la goutte subit des changements de vitesses et de sens le long du ressaut. Notre

modèle-jouet nous a permis d'anticiper l'état périodique. Néanmoins il s'avère évident qu'il manque un élément physique dans ce modèle pour expliquer l'état apériodique. Nous fournissons un certain nombre de pistes susceptibles d'améliorer notre modèle comme par exemple la prise en compte de la perturbation du ressaut causée par le sillage de la goutte. Nous avons également pu confirmer notre hypothèse d'instabilité gyroscopique en observant la rotation propre dans un ressaut très légèrement incliné. Il s'avère que la fréquence de rotation de cette goutte est bien plus complexe qu'attendue. Ici encore nous avons identifié un certain nombre d'éléments physiques susceptibles d'entrer en compte dans une modélisation efficace de cette rotation.

Les perspectives de cette partie s'avèrent être particulièrement nombreuses. Outre une exploration plus approfondie de la dynamique (avec par exemple une étude statistique des renversements pour le comportement apériodique) nous en avons esquissé certaines (comme l'étude de l'interaction entre plusieurs gouttes et le changement de liquide pour la goutte) mais un grand nombre restent à construire (faire vibrer le bain ou pulser l'injection afin de maîtriser les perturbations causant le comportement apériodique, changer le liquide du bain...).

Enfin nous avons proposé à la fin de ce manuscrit deux nouvelles expériences permettant de prolonger les travaux présentés ici : la lévitation d'une goutte dans un cylindre creusé en cône et l'impact d'un jet dans une cavité...

Annexes

A Mesure de la viscosité : viscosimètre à capillaire

Afin d'effectuer des mesures de viscosité, on utilise un viscosimètre à capillaire SCHOTT (voir Fig. 6). Le liquide dont on veut mesurer la viscosité est injecté par le tube de droite de manière à ce que le niveau du liquide se situe entre les deux jauges du réservoir. En plaçant une propipette (ou une seringue reliée par un tube) au dessus du tube à capillaire on créé une dépression. Le liquide va donc monter dans ce tube. Afin de créer cette dépression il est bien entendu nécessaire de boucher (avec le doigt par exemple) le troisième tube (qui sert à égaliser les pressions) durant la phase d'aspiration du liquide. Une fois que le niveau du liquide dépasse le trait de jauge supérieur du tube capillaire on peut démarrer la mesure.

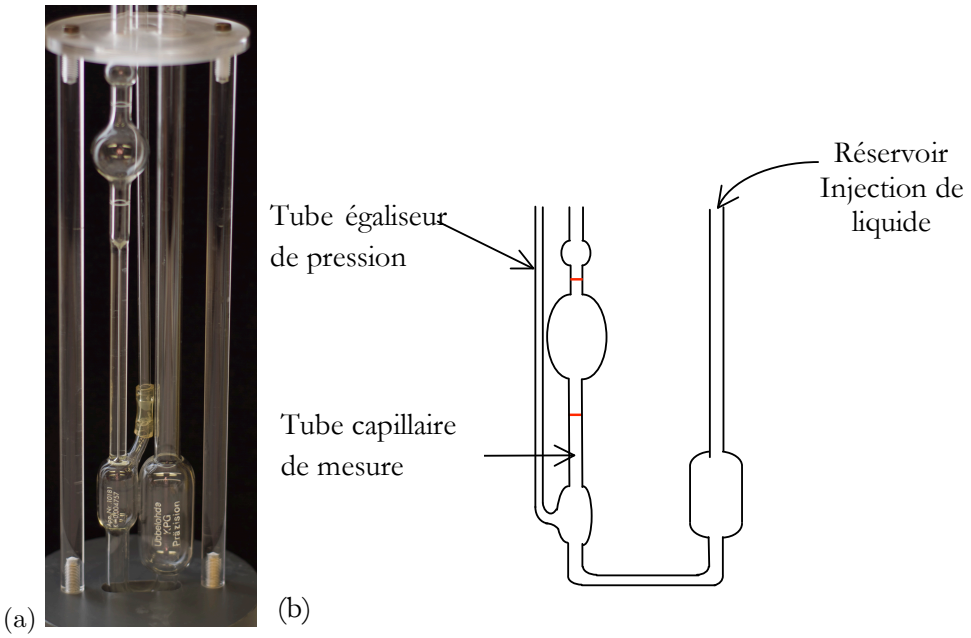


FIGURE 6 – *(a) Photographie d'un viscosimètre capillaire. (b) Schéma explicatif du rôle des différents tubes du viscosimètre (tube égaliseur de pression, tube capillaire de mesure et tube réservoir). La différence entre la photographie et le schéma est que le tube égaliseur de pression occupe une position centrale sur la photographie.*

Si l'on débouche le tube égaliseur de pression, le réservoir situé en dessous du tube à capillaire se remplit partiellement d'air. La pression devient donc identique à la pression atmosphérique en haut et en bas du tube à capillaire. L'écoulement dans le capillaire sera alors de type Poiseuille et le temps τ d'écoulement du liquide entre les deux traits de jauge proportionnel à la viscosité cinématique ν :

$$\nu = k\tau. \tag{1}$$

Avec k une constante dépendant du rayon et de la hauteur du capillaire. Ces constantes k sont déterminées par le constructeur. Ainsi, une simple mesure du temps d'écoulement entre les deux jauges permet d'obtenir une mesure de la viscosité cinématique. L'erreur avec ce type de viscosimètre est extrêmement faible lorsque l'on utilise un k adapté. La principale difficulté réside dans le lavage et le séchage du viscosimètre entre deux usages...

B Quelques rappels sur le mouillage

Dans cette thèse il est souvent fait appel à la notion de mouillage total et partiel. Les angles de contact (statique, d'avancée ou de reculée) sont aussi employés et revêtent une importance particulière dans le cas du ressaut hydraulique incliné. On se propose donc de faire ici un bref rappel sur ces questions de mouillage et d'angles de contact.

B.1 Définition : mouillage et ligne de contact

Lorsque l'on dépose une goutte d'eau sur une surface solide (en atmosphère terrestre) nous sommes en présence d'un système à trois phase : liquide, solide et gazeuse et *a priori* aucune des interactions entre les différentes phases ne peut être négligée pour décrire le système. Le "mouillage" est donc l'étude de l'étalement d'un liquide sur un substrat, le tout dans un gaz. Selon les affinités du liquide avec le gaz et le solide et selon l'affinité entre le solide et le gaz le liquide va plus ou moins s'étaler. Dans nos situations nous ne faisons pas varier le gaz ou ses propriétés (nous restons toujours en contact avec l'atmosphère terrestre) mais seulement le couple liquide/substrat. On obtiendra des situations extrêmes depuis le cas où le liquide s'étale en un fin film (c'est le cas de l'huile sur du verre) jusqu'au cas où la goutte reste quasiment sphérique (c'est le cas dit "super-hydrophobe").

Lorsque la goutte ne mouille pas entièrement la plaque la ligne à l'interface entre les trois phases (liquide, gaz et solide) est appelée "ligne de contact" ou encore "ligne triple".

Le contrôle du mouillage, c'est-à-dire le contrôle de l'étalement des liquides, trouve des applications dans des champs très variés. Par exemple, les vitres des pare-brises ou les verres des lunettes sont enduits d'une surface protectrice pour que l'eau ne s'y étale pas et qu'elle puisse s'écouler en laissant la surface sèche derrière elle.

B.2 Paramètre d'étalement S : mouillage total et mouillage partiel

On distingue deux types de mouillage : total et partiel (voir Fig. 7). Afin de déterminer si une goutte va s'étaler sur un substrat ou non, il faut considérer le paramètre d'étalement S qui correspond à la différence d'énergie entre substrat sec et mouillé :

$$S = \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma), \tag{2}$$

avec γ_{SG} la tension interfaciale solide/gaz, γ_{SL} la tension interfaciale solide/liquide et γ la tension interfaciale entre le liquide et gaz (autrement appelée tension superficielle). Si S est positif, le liquide s'étale complètement sur le substrat pour former un film nanoscopique ; on appelle cette situation mouillage total (voir Fig. 7 (a)). Par contre, si S est négatif, alors la goutte ne s'étale pas et elle forme un angle de contact β_e avec le substrat ; on appelle cette situation "mouillage partiel" (voir Fig. 7 (b)).

B.3 Angle de contact d'équilibre : loi de Young-Dupré

Si l'on équilibre les forces capillaires par unité de longueur (les tensions interfaciales γ_{SL}, γ_{SG} et γ) au niveau de la ligne triple et que l'on projette le résultat sur le plan solide on obtient la loi de Young :

$$\gamma cos\beta_e = \gamma_{SG} - \gamma_{SL}. \tag{3}$$

Notons également que la projection des forces capillaires sur la verticale est équilibrée par une déformation élastique du solide. Si le solide est dur, cette déformation est inobservable.

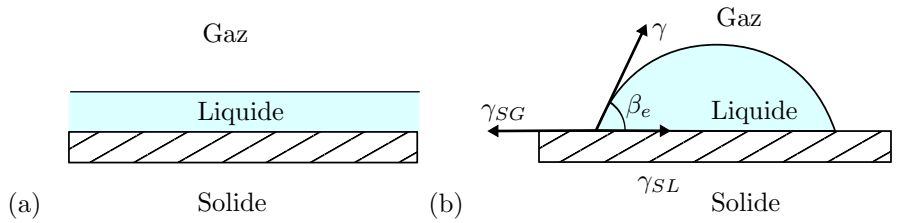


FIGURE 7 – *(a) Mouillage total : le liquide s'étale complètement sur le substrat sous forme d'un film. (b) Mouillage partiel : le liquide forme une goutte d'angle de contact β_e avec le substrat. La ligne à l'interface entre les trois phases est appelée "ligne de contact".*

L'équation 2 définissant le paramètre d'étalement peut être réécrite :

$$S = \gamma(cos\beta_e - 1). \tag{4}$$

On retrouve bien le résultat précédent : si S est négatif il n'existe pas de β_e solution et donc le liquide s'étale totalement sur la plaque jusqu'à une échelle d'épaisseur nanoscopique. Egaliser les équations 2 et 4 permet d'obtenir une expression pour β_e :

$$cos\beta_e = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma}. \tag{5}$$

B.4 Hystérésis de mouillage

Pour autant la loi de Young soulève tout de même un certain nombre d'interrogations. Si l'on suppose un angle de contact d'équilibre unique en cas de mouillage partiel, la goutte, dans le référentiel du solide, est soumise à une force sur la ligne de contact égale à $\gamma\ cos\beta_e$. En intégrant sur l'ensemble de la ligne de contact (circulaire) on obtient que pour la goutte la résultante de cette force est nulle dans le plan du substrat (voir Fig. 8 (a)). Et donc si on incline le substrat, la goutte ne pourra pas rester statique, même pour de très faibles inclinaisons. Pourtant, tout le monde a déjà pu voir des gouttes d'eau qui restent accrochées sur une vitre, même verticale.

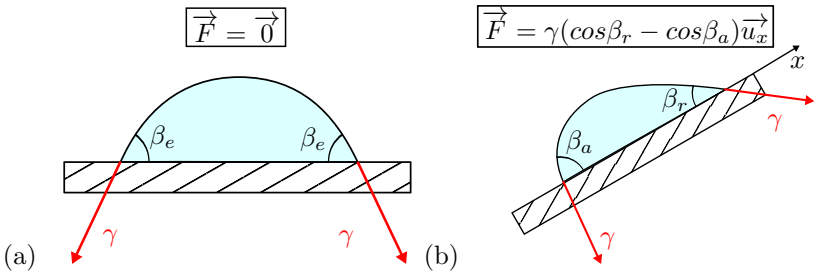


FIGURE 8 – *(a) Goutte parfaitement symétrique de révolution, avec un angle de contact d'équilibre unique β_e. (b) Si l'on incline le substrat on observe que la goutte reste accrochée à la paroi. La symétrie de la goutte est brisée et l'on observe des angles de contact différents entre l'amont et l'aval de la goutte. Les valeurs maximales des angles de contact sont notés β_a pour l'angle d'avancée (le plus grand angle de contact accessible) et β_r pour l'angle de reculée (le plus petit angle de contact accessible). La brisure de symétrie de la goutte entraîne une résultante des forces capillaires (représentées ici dans le référentiel du solide) non nulle et résistive.*

En réalité, il n'y a pas un unique angle de contact d'équilibre β_e, mais toute une gamme d'angles de contact statiques (voir Fig. 8 (b)). Il est possible de s'en convaincre en injectant ou en aspirant du liquide dans une goutte : on observe alors une variété d'angles de contact plus ou moins large suivant le couple solide/liquide choisi. L'angle β_e dépend donc de la façon dont le système a été préparé et est ainsi multivalué et peut prendre des valeurs comprises entre β_a, l'angle statique d'avancée et β_r l'angle statique de reculée. Pour plus d'informations on se reportera à [30].

Lorsque l'on incline le substrat sur lequel repose la goutte, celle-ci reste statique en se dyssymétrisant et ne prenant un angle de contact supérieur à β_e en aval et inférieur β_e en amont (voir Fig. 8 (b)). On aura donc pour la plus grande inclinaison mise en mouvement de la goutte, un angle β_a en aval de la goutte et un angle β_r en amont. Il en résulte une force d'accrochage par unité de longueur, qui s'oppose au déplacement de la goutte et dont la valeur peut atteindre au maximum : $\gamma(cos\beta_r - cos\beta_a)$. La différence $\beta_a - \beta_r$ entre les angles statiques d'avancée et de reculée est appelée "hysteresis de mouillage". Son origine se trouve dans les imperfections du substrat (rugosité ou défauts chimiques du solide) [61, 29].

C Substrat super hydrophobe : la recette

Dans ce travail nous avons eu besoin de travailler sur des substrats avec une mouillabilité bien contrôlée, en particulier nous avons cherché des substrats permettant des angles de contact statiques entre le liquide et la surface bien supérieurs à 90° (pour un rappel sur les angles de contacts voir B. Le choix le plus simple a donc été de choisir comme liquide l'eau qui est un liquide naturellement assez peu mouillant (la polarité des molécules d'eau assure une très grande énergie de liaison entre les molécules) et facile à trouver à température ambiante... Nous avons cherché un substrat pour lequel l'angle de contact est supérieur à 130° (communément appelé surfaces super hydrophobes). De tels substrats existent dans la nature (les feuilles de lotus par exemple) et pour les fabriquer en laboratoire les chercheurs se sont inspirés de ces exemples. Il en résulte qu'un substrat super hydrophobe (naturel ou synthétique) est caractérisé par deux ingrédients : le premier est naturellement la chimie, en effet on cherche à diminuer au maximum les affinités chimiques entre le liquide et la surface, on peut ainsi obtenir des surfaces assez hydrophobes (une goutte d'eau sur une surface téflonnée aura un angle de contact aux alentour de 90-100 degrés). Mais la chimie ne suffit pas, il faut en outre ajouter une texturation de la surface : l'idée est qu'ainsi le liquide ne sera en contact qu'avec une fraction de la surface (comme un fakir sur un tapis de clous) et en grande partie en contact avec de l'air. Or il est toujours plus favorable pour une molécule d'eau d'être en contact avec d'autres molécules d'eau qu'avec l'air autrement dit l'air constitue une surface parfaitement hydrophobe (angle de contact à 180°). Ainsi l'angle de contact de l'eau sur une surface super hydrophobe dépendra de la fraction de la surface effective sur lequel repose le liquide. Plus celle ci sera faible plus la surface sera hydrophobe. Dans le cas de la feuille de lotus cette texturation prend la forme de petits plots d'une taille de l'ordre de 10 microns, possédant eux même une texturation de taille caractéristique proche de la centaine de nanomètre. Pour davantage d'informations nous invitons le lecteur à se reporter au travail de David Quéré (par exemple [89]).

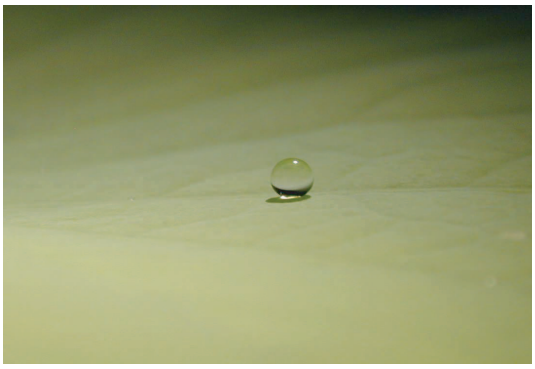
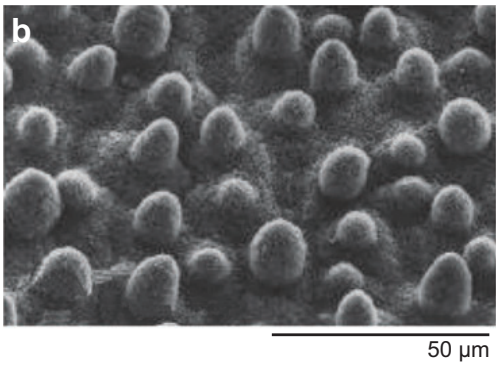
(a)  (b) 

FIGURE 9 – *(a) Photo d'une goutte d'eau millimétrique posée sur une feuille de Lotus. Photo de Sébastien Saint-Jean. (b) Photographie au microscope électronique à balayage d'une feuille de lotus. On peut observer les deux échelles de texturation de la feuille : des plots d'une dizaines de microns eux-mêmes texturés (quelques centaines de nanomètre). Photos de W. Barthlott et de C. Neinhuis. Pour plus d'informations se reporter à [89].*

En règle générale pour fabriquer des substrats super hydrophobes en laboratoire on utilise des méthodes de lithographie : on texture la surface à l'aide de petits plots d'une largeur typique de quelques microns et espacés d'une dizaine de micromètres. La surface est ensuite traitée chimiquement pour

être hydrophobe. Dans notre cas nous avons besoin de larges plaques dont les dimensions dépassent largement le diamètre des wafer de silicium ($\sim$ 20 cm) et qui soient plus simples et moins chères à produire.

Nous avons donc fabriqué des substrats en traitant des plaques métalliques (cuivre) selon une méthode développée par Larmour *et al.* [71] : après avoir nettoyé la plaque (et rincé à l'éthanol) nous trempons la plaque pendant une minute dans une solution de Nitrate d'Argent ($AgNO_3$, $0,1$ mol.L^{-1}, diluée dans l'eau). La grille va alors changer de couleur pour adopter une teinte marron foncée, voire noire. La réaction en jeu est une réaction d'oxydoréduction entre l'ion Ag^+ et le cuivre : des atomes d'argent sont déposés en surface (ce qui explique le changement de couleur). Cette déposition se fait de manière hétérogène et des observations au microscope électronique [71] ont montré que la déposition se fait sous forme d'agrégats (0,15-0,3 μm) de particules (50-100 nm) : on a donc une double échelle de rugosité du substrat.

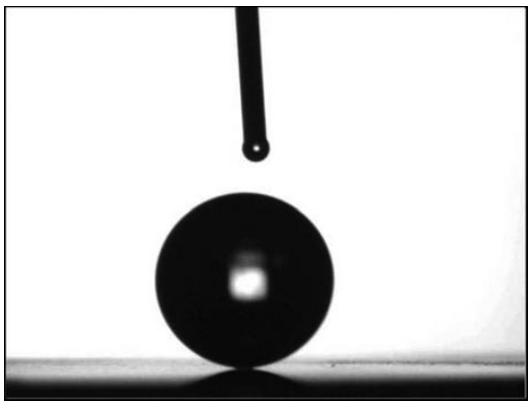
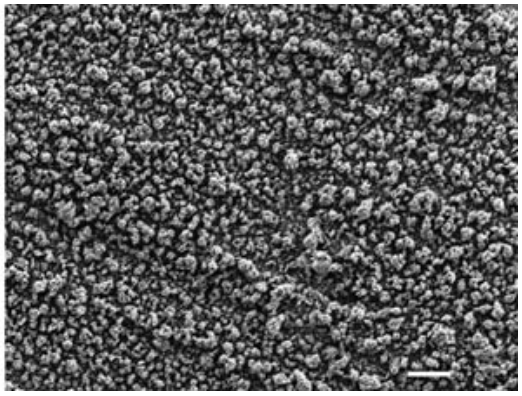
(a)  (b) 

FIGURE *10 – (a) Goutte d'eau (8* mm^3*) sur un substrat traitée suivant la méthode décrite ici [71]. L'angle de contact se situe aux alentours de 170°. (b) Observation au microscope électronique à balayage d'une surface super hydrophobe obtenue par traitement au nitrate d'argent. On observe une rugosité à l'échelle nanométrique, qui, couplée au traitement chimique donne le caractère super hydrophobe de la surface. échelle :* 1μm. *pour plus d'informations se reporter à [71].*

Cette surface est ensuite rincée à l'eau puis séchée. On plonge ensuite la plaque dans une solution de HDFT (3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,10-heptadecafluoro-1-decanethiol) diluée dans l'ethanol à 10^{-3} mol.L^{-1}. Après 20 minutes on peut ensuite sortir la plaque et la rincer à l'ethanol. Ce traitement rend la plaque hydrophobe en se fixant sur les molécules d'argent.

On a ainsi créé en moins d'une heure une plaque super hydrophobe : l'angle de contact de l'eau avec cette plaque se situe aux alentours de 160° et l'hystérèse de mouillage n'est que d'une fraction de degrés.

Bibliographie

[1] P. Aussillous and D. Quere. Liquid marbles. *Nature (London)*, 411 :924, 2001.

[2] C. T. Avedisian and Z. Zhao. The circular hydraulic jump in low gravity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(2001) :2127–2151, 2000.

[3] J. Bosco Baonga, H. Louahlia-Gualous, and M. Imbert. Experimental study of the hydrodynamic and heat transfer of free liquid jet impinging a flat circular heated disk. *Applied Thermal Engineering*, 26(11) :1125–1138, 2006.

[4] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.

[5] J. B. Bélanger. Notes sur l'hydraulique. *Ecole Royale des Ponts et Chaussées, Paris, France, session*, 1842 :223, 1841.

[6] E. S. Benilov. Depth-averaged model for hydraulic jumps on an inclined plate. *Phys. Rev. E*, 89 :053013, May 2014.

[7] G. Bidone. Le remou et sur la propagation des ondes. *Report to Académie Royale des Sciences de Turin, séance*, 12 :21–112, 1819.

[8] T. Bohr, P. Dimon, and V. Putkaradze. Shallow-water approach to the circular hydraulic jump. *J. Fluid Mech.*, 254 :635–648, 1993.

[9] T. Bohr, C. Ellegaard, A. E. Hansen, and A. Haaning. Hydraulic jumps, flow separation and wave breaking : An experimental study. *Physica B*, 228 :1–10, 1996.

[10] T. Bohr, V. Putkaradze, and S. Watanabe. Averaging theory for the structure of hydraulic jumps and separation in laminar free-surface flows. *Physical review letters*, 79(6) :1038, 1997.

[11] R. I. Bowles and F. T. Smith. The standing hydraulic jump : theory, computations and comparisons with experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 242 :145–168, 1992.

[12] Y. Brechet and Z. Néda. On the circular hydraulic jump. *American Journal of Physics*, 67(8) :723–731, 1999.

[13] J. W. M. Bush and J. M. Aristoff. The influence of surface tension on the circular hydraulic jump. *J. Fluid Mech.*, 489 :229–238, 2003.

[14] J. W. M. Bush, J. M. Aristoff, and A. E. Hosoi. An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump. *J. Fluid Mech.*, 558 :33–52, 2006.

[15] E. C. Button, J. F. Davidson, G. J. Jameson, and J. E. Sader. Water bells formed on the underside of a horizontal plate. part 2. theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 649 :45–68, 2010.

[16] A. Cameron. *The Principles of Lubrication*. Longmans Green & Company, 1966.

[17] F. Celestini, T. Frisch, and Y. Pomeau. Take off of small leidenfrost droplets. *Physical review letters*, 109(3) :034501, 2012.

[18] H. Chanson. Bubbly flow structure in hydraulic jump. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 26(3) :367–384, 2007.

[19] H. Chanson. Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena. a survey of experimental results. *Eur. J. Mech. B : Fluids*, 28 :191–210, 2009.

[20] H. Chanson and T. Brattberg. Experimental study of the air–water shear flow in a hydraulic jump. *International Journal of Multiphase Flow*, 26(4) :583–607, 2000.

[21] C. Clanet and E. Villermaux. Life of a smooth liquid sheet. *Journal of fluid mechanics*, 462 :307–340, 2002.

[22] A. Cohen, N. Fraysse, J. Rajchenbach, M. Argentina, Y. Bouret, and C. Raufaste. Inertial mass transport and capillary hydraulic jump in a liquid foam microchannel. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :218303, May 2014.

[23] Y. Couder and E. Fort. Single-particle diffraction and interference at macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97(154101) :154101, 2006.

[24] Y. Couder, E. Fort, C.H. Gautier, and A. Boudaoud. From bouncing to floating : non-coalescence of drops on a fluid bath. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :177801, 2005.

[25] Y. Couder, S. Protiere, E. Fort, and A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437 :208, 2005.

[26] A. D. D. Craik, R. C. Latham, M. J. Fawkes, and P. W. F. Gribbon. The circular hydraulic jump. *J. Fluid Mech.*, 112 :347–362, 1981.

[27] H. Darcy, G. Philibert, and H. Bazin. *Recherches hydrauliques : Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts. 1ère partie.* Impr ; Impériale, 1865.

[28] R. Dasgupta and R. Govindarajan. Nonsimilar solutions of the viscous shallow water equations governing weak hydraulic jumps. *Physics of Fluids*, 22 :112108, 2010.

[29] P.G. De Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Reviews of modern physics*, 57(3) :827, 1985.

[30] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere. *Gouttes, bulles, perles et ondes.* Echelles, Belin, 2002.

[31] L. De Vinci. *Les Carnets de Léonard de Vinci, tome II.* Éditions Tel-Gallimard, trad. Louise Servicen, 1478-1518.

[32] A. Defina and F. M. Susin. Stability of a stationary hydraulic jump in an upward sloping channel. *Physics of Fluids (1994-present)*, 15(12) :3883–3885, 2003.

[33] P. Dell'Aversana and G. P. Neitzel. Behavior of noncoalescing and nonwetting drops in stable and marginally stable states. *Experiments in fluids*, 36(2) :299–308, 2004.

[34] P. Dell'Aversana, V. Tontodonato, and L. Carotenuto. Suppression of coalescence and of wetting : The shape of the interstitial film. *Physics of Fluids (1994-present)*, 9(9) :2475–2485, 1997.

[35] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle, and T. Gilet. Resonant and rolling droplet. *New Journal of Physics*, 10(113021) :113021, 2008.

[36] E. Dressaire, L. Courbin, J. Crest, and H. A. Stone. Thin-film fluid flows over microdecorated surfaces : Observation of polygonal hydraulic jumps. *Phys. Rev. Lett.*, 102(194503), 2009.

[37] E. Dressaire, L. Courbin, J. Crest, and H. A. Stone. Inertia dominated thin-film flows over microdecorated surfaces. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22(7) :073602, 2010.

[38] A. Dyment. Stability of stationary and moving hydraulic jumps in inclined conduits of arbitrary cross section. *Physics of Fluids (1994-present)*, 17(5) :054111, 2005.

[39] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder. Unpredictable tunneling of a classical wave-particle association. *Phys. Rev. Lett.*, 102(240401), 2009.

[40] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder. Unpredictable tunneling of a classical wave-particle association. *Physical review letters*, 102(24) :240401, 2009.

[41] C. M. Edwards, S. D. Howison, H. Ockendon, and J. R. Ockendon. Non-classical shallow water flows. *IMA journal of applied mathematics*, 73(1) :137–157, 2008.

[42] C. Ellegaard, A. E. Hansen, A. Haaning, K. Hansen, A. Marcussen, T. Bohr, J. L. Hansen, and S. Watanabe. Creating corners in kitchen sinks. *Nature*, 392(6678) :767–768, 1998.

[43] C. Ellegaard, A. E. Hansen, A. Haaning, A. Marcussen, T. Bohr, J.L. Hansen, and S. Watanabe. Polygonal hyraulic jumps. *Nonlinearity*, 12 :1–7, 1999.

[44] T. Foglizzo, F. Masset, J. Guilet, and G. Durand. Shallow water analogue of the standing accretion shock instability : Experimental demonstration and a two-dimensional model. *Physical review letters*, 108(5) :051103, 2012.

[45] J. Gajjar and F. T. Smith. On hypersonic self-induced separation, hydraulic jumps and boundary layers with algebraic growth. *J. Fluid Mech.*, 30 :77–93, 1983.

[46] T. Gilet and J. W. M. Bush. Chaotic bouncing of a droplet on a soap film. *Phys. Rev. Lett.*, 102(1) :014501, 2009.

[47] T. Gilet and J. W. M. Bush. The fluid trampoline : droplets bouncing on a soap film. *J. Fluid Mech.*, 625 :167–203, 2009.

[48] T. Gilet, D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo. Dynamics of a bouncing droplet onto a vertically vibrated interface. *Phys. Rev. Lett.*, 100(167802) :167802, 2008.

[49] R. P. Godwin. The hydraulic jump ("shocks" and viscous flow in the kitchen sink). *American Journal of Physics*, 61(9) :829–832, 1993.

[50] M. Gradeck, A. Kouachi, A. Dani, D. Arnoult, and J. L. Borean. Experimental and numerical study of the hydraulic jump of an impinging jet on a moving surface. *Experimental thermal and fluid science*, 30(3) :193–201, 2006.

[51] W. H. Hager and N. V. Bretz. Hydraulic jumps at positive and negative steps. *Journal of Hydraulic Research*, 24(4) :237–253, 1986.

[52] S. H. Hansen, S. Hørlüautck, D. Zauner, P. Dimon, C. Ellegaard, and S. C. Creagh. Geometric orbits of surface waves from a circular hydraulic jump. *Physical Review E*, 55 :7048–7061, 1997.

[53] G. H. Hardy. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1) :451–468, 1912.

[54] D. E. Hartley and W. Murgatroyd. Criteria for the break-up of thin liquid layers flowing isothermally over solid surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 7(9) :1003–1015, 1964.

[55] H. E. Herbert. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 121 :43–58, 1982.

[56] F. J. Higuera. The hydraulic jump in a viscous laminar flow. *Journal of fluid Mechanics*, 274 :69–92, 1994.

[57] F. J. Higuera. The circular hydraulic jump. *Physics of Fluids (1994-present)*, 9(5) :1476–1478, 1997.

[58] H. E. Huppert. Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature*, 300(5891) :427–429, 1982.

[59] G. J. Jameson, C. E. Jenkins, E. C. Button, and J. E Sader. Water bells formed on the underside of a horizontal plate. part 1. experimental investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 649 :19–43, 2010.

[60] G. Jannes, R. Piquet, P. Maissa, C. Mathis, and G. Rousseaux. Experimental demonstration of the supersonic-subsonic bifurcation in the circular jump : A hydrodynamic white hole. *Physical Review E*, 83(5) :056312, 2011.

[61] J. F. Joanny and P.G. De Gennes. A model for contact angle hysteresis. *The journal of chemical physics*, 81(1) :552–562, 1984.

[62] C. G. Johnson and J. M. N. T. Gray. Granular jets and hydraulic jumps on an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 675 :87–116, 2011.

[63] A. R. Kasimov. A stationary circular hydraulic jump, the limits of its existence and its gasdynamic analogue. *J. Fluid Mech.*, 601 :189–198, 2008.

[64] R. P. Kate, P. K. Das, and S. Chakraborty. Hydraulic jumps due to oblique impingement of circular liquid jets on a flat horizontal surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 573 :247–263, 2007.

[65] R. P. Kate, P. K. Das, and S. Chakraborty. Hydraulic jumps with corners due to obliquely inclined circular liquid jets. *Physical Review E*, 75(5) :056310, 2007.

[66] R. P. Kate, P. K. Das, and S. Chakraborty. Investigation on non-circular hydraulic jumps formed due to obliquely impinging circular liquid jets. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32(8) :1429–1439, 2008.

[67] R. P. Kate, P. K. Das, and S. Chakraborty. Effects of jet obliquity on hydraulic jumps formed by impinging circular liquid jets on a moving horizontal plate. *Journal of Fluids Engineering*, 131(3) :034502, 2009.

[68] A. Kibar, H. Karabay, K. S. Yiğit, I. O. Ucar, and H. Y. Erbil. Experimental investigation of inclined liquid water jet flow onto vertically located superhydrophobic surfaces. *Experiments in fluids*, 49(5) :1135–1145, 2010.

[69] M. Labousse and J. W. M. Bush. The hydraulic bump : The surface signature of a plunging jet. *Physics of Fluids*, 25 :094104, 2013.

[70] M. Labousse and J. W. M. Bush. Polygonal instabilities on interfacial vorticities. *soumis à Europhys. Lett.*, 2014.

[71] I. A. Larmour, S. E. J. Bell, and G. C. Saunders. Remarkably simple fabrication of superhydrophobic surfaces using electroless galvanic deposition. *Angewandte Chemie*, 119(10) :1740–1742, 2007.

[72] H. Lecadia, J. C. Passos, and A. F. C. De Silva. Heat transfer behavior of a high temperature steel plate cooled by a subcooled impinging circular water jet. In *7th International Conference on Boiling Heat Transfer, May*, pages 3–7, 2011.

[73] J. G. Leidenfrost. *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus*. Duisburg, 1756.

[74] H. Lhuissier, Y. Tagawa, T. Tran, and C. Sun. Levitation of a drop over a moving surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 733 :R4, 2013.

[75] J. R. Lister. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources. *Journal of Fluid Mechanics*, 242 :631–653, 1992.

[76] X Liu and J. H. Lienhard V. The hydraulic jump in circular jet impingement and in other thin liquid films. *Experiments in Fluids*, 15(2) :108–116, 1993.

[77] P. A. Madsen and I. A. Svendsen. Turbulent bores and hydraulic jumps. *Journal of Fluid Mechanics*, 129 :1–25, 1983.

[78] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Rolling droplets. *Physics of Fluids (1994-present)*, 11(9) :2449–2453, 1999.

[79] E. A. Martens, S. Watanabe, and T. Bohr. Model for polygonal hydraulic jumps. *Physical Review E*, 85(3) :036316, 2012.

[80] D. Maynes, M. Johnson, and B. W. Webb. Free-surface liquid jet impingement on rib patterned superhydrophobic surfaces. *Phys. Fluids*, 23(052104), 2011.

[81] C. Nian-Sheng. Formula for the viscosity of a glycerol-water mixture. *Industrial & engineering chemistry research*, 47(9) :3285–3288, 2008.

[82] M. Passandideh-Fard, A. R. Teymourtash, and M. Khavari. Numerical study of circular hydraulic jump using volume-of-fluid method. *Journal of Fluids Engineering*, 133(1) :011401, 2011.

[83] S. Perrard, Y. Couder, E. Fort, and L. Limat. Leidenfrost levitated liquid tori. *EPL (Europhysics Letters)*, 100(5) :54006, 2012.

[84] S. Perrard, M. Labousse, E. Fort, and Y. Couder. Chaos driven by interfering memory. *Physical review letters*, 113(10) :104101, 2014.

[85] S. Perrard, M. Labousse, M. Miskin, E. Fort, and Y. Couder. Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle. *Nature communications*, 5, 2014.

[86] C. Pirat, L. Lebon, A. Fruleux, J-S. Roche, and L. Limat. Gyroscopic instability of a drop trapped inside an inclined circular hydraulic jump. *Phys. Rev. Lett.*, 105(084503) :084503, 2010.

[87] J. F. Prince, D. Maynes, and J. Crockett. Analysis of laminar jet impingement and hydraulic jump on a horizontal surface with slip. *Physics of Fluids (1994-present)*, 24(10) :102103, 2012.

[88] S. Protiere, A. Boudaoud, and Y. Couder. Particle wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, 554 :85–108, 2006.

[89] D. Quéré. Wetting and roughness. *Annu. Rev. Mater. Res.*, 38 :71–99, 2008.

[90] A. Rao and J. H. Arakeri. Integral analysis applied to radial film flows. *International journal of heat and mass transfer*, 41(18) :2757–2767, 1998.

[91] A. Rao and J. H. Arakeri. Wave structure in the radial film flow with a circular hydraulic jump. *Experiments in fluids*, 31(5) :542–549, 2001.

[92] P. S. Raux. *Interfaces mobiles : friction en mouillage nul et dynamiques de fronts*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2013.

[93] A. K. Ray and J. K. Bhattacharjee. Standing and travelling waves in the shallow-water circular hydraulic jump. *Physics Letters A*, 371(3) :241–248, 2007.

[94] L. Rayleigh. On the theory of long waves and bores. *Proc. R. Soc. London A*, 90(619) :324–328, 1914.

[95] S. W. Rienstra. Thin layer flow along arbitrary curved surfaces. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 76 :423–424, 1996.

[96] H. Robidou, H. Auracher, P. Gardin, and M. Lebouché. Controlled cooling of a hot plate with a water jet. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26(2) :123–129, 2002.

[97] N. Rojas, M. Argentina, E. Cerda, and E. Tirapegui. Inertial lubrication theory. *Physical review letters*, 104(18) :187801, 2010.

[98] N. Rojas, M. Argentina, and E. Tirapegui. A progressive correction to the circular hydraulic jump scaling. *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(4) :042105, 2013.

[99] E. Rolley, C. Guthmann, and M. S. Pettersen. The hydraulic jump and ripples in liquid helium. *Physica B : Condensed Matter*, 394(1) :46–55, 2007.

[100] J. A. Sandover and P. Holmes. The hydraulic jump in trapezoidal channels. *Water Power*, 14(11) :445–449, 1962.

[101] F. Savart. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys*, 53 :337–386, 1833.

[102] F. Savart. Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire. *Ann. chim*, 54 :56–87, 1833.

[103] F. Savart. Suite du mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire. *Ann. chim*, 54 :113–145, 1833.

[104] J. B. Segur and H. E. Oberstar. Viscosity of glycerol and its aqueous solutions. *Industrial & Engineering Chemistry*, 43(9) :2117–2120, 1951.

[105] M. M. Seraj and M. S. Gadala. Non-circular hydraulic jump on a moving surface due to an impinging circular free surface jet of water. *steel research international*, 83(7) :653–670, 2012.

[106] P. C. Smith. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 58(02) :275–288, 1973.

[107] K. R. Sreenivas, P. K. De, and J. H. Arakeri. Levitation of a drop over a film flow. *J. Fluid Mech.*, 380 :297–307, 1999.

[108] I. Tani. Water jump in the boundary layer. *J. Phys. Soc. Japan*, 4 :212–215, 1949.

[109] M. A. Teamah, M. K. Ibrahim, M. M. K. Dawood, and E.S. A. Aleem. Experimental investigation for hydrodynamic flow due to obliquely free circular water jet impinging on horizontal flat plate. *European Journal of Scientific Research*, 83(1) :60–75, 2012.

[110] G. E. Volovik. Hydraulic jump as a white hole. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 82(10) :624–627, 2005.

[111] T. Wang, D. Faria, L. J. Stevens, J. S. C. Tan, J. F. Davidson, and D. I. Wilson. Flow patterns and draining films created by horizontal and inclined coherent water jets impinging on vertical walls. *Chemical Engineering Science*, 102 :585–601, 2013.

[112] R. Wanoschek and W. H. Hager. Hydraulic jump in trapezoidal channel. *Journal of Hydraulic Research*, 27(3) :429–446, 1989.

[113] S. Watanabe, V. Putkaradze, and T. Bohr. Integral methods for shallow free-surface flows with separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 480 :233–265, 2003.

[114] E. J. Watson. The radial spread of a liquid over a horizontal plane. *J. Fluid Mech.*, 20 :481–499, 1964.

[115] S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence. Measurement of stimulated hawking emission in an analogue system. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :021302, Jan 2011.

[116] D. I. Wilson, B. L. Le, H. D. A. Dao, K. Y. Lai, K. R. Morison, and J. F. Davidson. Surface flow and drainage films created by horizontal impinging liquid jets. *Chemical Engineering Science*, 68(1) :449–460, 2012.

[117] K. Yokoi and F. Xiao. Relationships between a roller and a dynamic pressure distribution in circular hydraulic jumps. *Physical Review E*, 61(2) :R1016, 2000.