



**HAL**  
open science

# Analyse mathématique et numérique d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique des fluides : applications aux écoulements en milieux poreux

Clément Cancès

► **To cite this version:**

Clément Cancès. Analyse mathématique et numérique d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique des fluides : applications aux écoulements en milieux poreux. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Pierre et Marie Curie 2015. tel-01239700

**HAL Id: tel-01239700**

**<https://hal.science/tel-01239700>**

Submitted on 8 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches en mathématiques

# Analyse mathématique et numérique d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique des fluides : applications aux écoulements en milieux poreux

*Clément Cancès*

*Rapporteurs :*

**Alexandre Ern**

École Nationale des Ponts et Chaussées

**Mario Ohlberger**

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

**Felix Otto**

Max Planck Institute, Leipzig

*Soutenance le 7 décembre 2015 devant le jury :*

**Grégoire Allaire**

École Polytechnique

**Albert Cohen**

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

**Robert Eymard**

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

**Raphaèle Herbin**

Université d'Aix-Marseille

**Franck Boyer**

Université Toulouse 3 Paul Sabatier

**Alexandre Ern**

École Nationale des Ponts et Chaussées

**Edwige Godlewski**

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6



# Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier Alexandre Ern, Mario Ohlberger et Felix Otto d'avoir accepté de consacrer de leur temps précieux pour rapporter mon mémoire. Leurs remarques pointues et constructives ont permis d'en améliorer sensiblement le contenu. Merci en particulier à Mario Ohlberger et Felix Otto d'avoir surmonté la barrière de la langue.

Je remercie aussi chaleureusement Edwige Godlewski, Raphaële Herbin, Grégoire Allaire, Franck Boyer, Albert Cohen, et Robert Eymard pour leur participation à mon jury.

Ce mémoire synthétise mes travaux de recherches depuis ma thèse sous la direction de Thierry Gallouët. Je tiens à remercier toutes celles et ceux qui ont contribué aux résultats qui y sont présentés : merci Thierry, Alessio, Michel, Konstantin, Danielle, Boris, Mathieu, Christophe, Sorin, Martin, Yabin, Catherine, Hélène, Nicolas, Edwige, Frédéric, Anne-Céline, Khaled, Cindy, Moustafa, Mazen, Thomas, Léonard et Ayman de m'avoir guidé, inspiré, corrigé, relancé et supporté.

De Marseille à Lille en passant par Rennes et Paris, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreux collègues aux qualités mathématiques et humaines remarquables. Merci à tous ceux avec qui j'ai pu échanger autour des multiples thés et cafés, et plus particulièrement aux patronnes de l'EPU pour leur enthousiasme, aux joyeux drilles du couloir 16-26 3xx et aux Lillois (et Bruxellois) pour leur accueil fabuleux.

Le bon fonctionnement du monde de la recherche repose largement sur les secrétariats, services informatiques ou autres services administratifs. Je profite de ces quelques lignes pour leur témoigner ma reconnaissance.

Enfin, mes pensées vont à mes proches amis et bien sûr ma famille. Leur soutien constant a permis, parmi bien d'autres choses, à ce mémoire de voir le jour. Merci.



# Table des matières

<b>Publications de l'auteur</b>	<b>7</b>
<b>Préambule</b>	<b>9</b>
<b>1 Autour de modèles dissipatifs d'écoulements multiphasiques en milieux poreux</b>	<b>11</b>
1.1 Mise en équation du problème . . . . .	11
1.2 Approche variationnelle . . . . .	14
1.3 Analyse du problème continu . . . . .	16
1.4 Approximation par des schémas Volumes Finis . . . . .	23
1.5 Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	26
<b>2 Lois de conservation scalaires avec flux discontinu</b>	<b>29</b>
2.1 Limite hyperbolique d'écoulements en milieux poreux . . . . .	29
2.2 État de l'art de l'analyse mathématique . . . . .	31
2.3 Approche par diagramme de transmission . . . . .	35
2.4 Estimation d'erreur pour le schéma de Godunov . . . . .	42
<b>3 Méthodes numériques non-linéaires pour les équations de diffusion</b>	<b>45</b>
3.1 Présentation de la problématique . . . . .	45
3.2 Corrections monotones de schémas numériques . . . . .	47
3.3 Un schéma entropique préservant la positivité . . . . .	49
3.4 Une méthode variationnelle pour les flots de gradients . . . . .	53
<b>4 Modélisation adaptative pour des systèmes hyperboliques avec relaxation</b>	<b>61</b>
4.1 Présentation de la problématique . . . . .	61
4.2 Application aux systèmes hyperboliques avec relaxation . . . . .	63
4.3 Estimation d'erreur sur un modèle simplifié . . . . .	64
<b>5 Quelques autres résultats</b>	<b>69</b>
5.1 Continuité en temps des solutions entropiques des lois de conservation scalaires . . . . .	69
5.2 Un lemme d'Aubin-Simon discret non-linéaire . . . . .	71
5.3 Estimation d'erreur pour des schémas explicites pour les systèmes hyperboliques . . . . .	75
<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>



# Publications de l'auteur

Mes publications sont disponibles à partir de ma page personnelle :

<http://chercheurs.lille.inria.fr/ccances/>

Les articles [A20], [A19], [A18], [A16], [A17], [A15] et les actes de conférences [C6], [C5] sont issus de mes travaux de thèse.

## Articles parus ou acceptés dans des revues internationales

- [A1] C. Cancès, T. O. Gallouët, L. Monsaingeon, *The gradient flow structure for incompressible immiscible two-phase flows in porous media*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **2015**, 353, pp. 985-989.
- [A2] C. Cancès, C. Guichard, *Convergence of a nonlinear entropy diminishing Control Volume Finite Element scheme for solving anisotropic degenerate parabolic equations*. À paraître dans Math. Comp.
- [A3] C. Cancès, F. Coquel, E. Godlewski, H. Mathis, N. Seguin, *Error analysis of a dynamic model adaptation procedure for nonlinear hyperbolic equations*. Comm. Math. Sci., **2016**, 14(1), pp. 1-30.
- [A4] B. Andreianov, C. Cancès, *On interface transmission conditions for conservation laws with discontinuous flux of general shape*. J. Hyp. Diff. Eq., **2015**, 12(2), pp. 343-384.
- [A5] H. Mathis, C. Cancès, E. Godlewski, N. Seguin, *Dynamic model adaptation for multiscale simulation of hyperbolic systems with relaxation*, J. Sci. Comput., **2015**, 63(3), pp. 820-861.
- [A6] B. Andreianov, C. Cancès, *A phase-by-phase upstream scheme that converges to the vanishing capillarity solution for countercurrent two-phase flow in two-rocks media*, Comput. Geosci., **2014**, 18(2), pp. 211-226.
- [A7] C. Cancès, M. Vohralík, I. S. Pop, *An a posteriori error estimate for vertex-centered finite volume discretizations of immiscible incompressible two-phase flow*, Math. Comp., **2014**, 83(285), pp. 153-188.
- [A8] B. Andreianov, K. Brenner, C. Cancès, *Approximating the vanishing capillarity limit of two-phase flow in multi-dimensional heterogeneous porous medium*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **2014**, 94(7-8), pp. 651-667.
- [A9] C. Cancès, M. Cathala, C. Le Potier, *Monotone coercive cell-centered finite volume schemes for anisotropic diffusion equations*, Numer. Math., **2013**, 125 (3), pp. 387-417.
- [A10] B. Andreianov, C. Cancès, *Vanishing capillarity solutions of Buckley-Leverett equation with gravity in two-rocks' medium*, Comput. Geosci., **2013**, 17(3), pp. 551-572.
- [A11] K. Brenner, C. Cancès, D. Hilhorst, *Finite volume approximation for an immiscible two-phase flow in porous media with discontinuous capillary pressure*, Comput. Geosci., **2013**, 17(3), pp. 573-597.
- [A12] C. Cancès, N. Seguin, *Error estimate for Godunov approximation of locally constrained conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., **2012**, 50(6), pp. 3036-3060.
- [A13] C. Cancès, M. Pierre, *An existence result for multidimensional immiscible two-phase flows with discontinuous capillary pressure field*, SIAM J. Math. Anal., **2012**, 44 (2), pp. 966-992.
- [A14] B. Andreianov, C. Cancès, *The Godunov scheme for scalar conservation laws with discontinuous bell-shaped flux functions*, Appl. Math. Letters, **2012**, 25, pp. 1844-1848.



- [A15] C. Cancès, T. Gallouët, *On the time continuity of entropy solutions*, J. Evol. Equ., **2011**, 11 (1), pp. 43-55.
- [A16] C. Cancès, *Asymptotic behavior of two-phase flows in heterogeneous porous media for capillarity depending only on space. I. Convergence to the optimal entropy solution*, SIAM J. Math. Anal., **2010**, 42 (2), pp. 946-971.
- [A17] C. Cancès, *Asymptotic behavior of two-phase flows in heterogeneous porous media for capillarity depending only on space. II. Non-classical shocks to model oil-trapping*, SIAM J. Math. Anal., **2010**, 42 (2), pp. 972-995.
- [A18] C. Cancès, *Finite volume scheme for two-phase flow in heterogeneous porous media involving capillary pressure discontinuities*, M2AN, **2009**, 43, pp. 973-1001.
- [A19] C. Cancès, T. Gallouët, A. Porretta, *Two-phase flows involving capillary barriers in heterogeneous porous media*, Interfaces Free Bound., **2009**, 11, pp. 239-258.
- [A20] C. Cancès, *Nonlinear parabolic equation with spatial discontinuities*, NoDEA, **2008**, 15, pp 427-45.

## Actes de conférences

- [C1] C. Cancès, C. Guichard. *Entropy-diminishing CVFE scheme for solving anisotropic degenerate diffusion equations*, Proceedings de la conférence FVCA7, HAL : hal-00937595, **2014**.
- [C2] A.-C. Boulanger, C. Cancès, H. Mathis, K. Saleh, N. Seguin, *OSAMOAL : Optimized simulations by adapted models using asymptotic limits*, ESAIM Proc., **2012**, 38, pp.183–201.
- [C3] C. Cancès, C. Choquet, Y. Fan, I.S. Pop, *An existence result related to two-phase flows with dynamic capillary pressure*, MAMERN, **2011**.
- [C4] K. Brenner, C. Cancès, D. Hilhorst, *A Convergent Finite Volume Scheme for Two-Phase Flows in Porous Media with Discontinuous Capillary Pressure Field*, Finite volumes for complex applications VI, **2011**.
- [C5] C. Cancès, *On the effects of discontinuous capillarities for immiscible two-phase flows in porous media made of several rock-types*, Netw. Heterog. Media., A special issue New Trends in Model Coupling, Theory, Numerics and Applications, **2010**, 5 (3), pp. 635-647.
- [C6] C. Cancès, *Two-phase Flows Involving Discontinuities on the Capillary Pressure*, Finite volumes for complex applications V : problems and perspectives Robert Eymard and Jean-Marc Hérard (Eds), Hermes, **2008**.

## Prépublications

- [P1] B. Andreianov, C. Cancès, A. Moussa. *A nonlinear time compactness result and applications to discretization of degenerate parabolic-elliptic PDEs*, HAL: hal-01142499, **2015**.
- [P2] C. Cancès, C. Guichard, *Numerical analysis of a robust entropy-diminishing Finite Volume scheme for parabolic equations with gradient structure*, HAL: hal-01119735, **2015**.
- [P3] C. Cancès, M. Ibrahim, M. Saad, *Positive nonlinear CVFE scheme for degenerate anisotropic Keller-Segel system*, HAL: hal-01119210, **2015**.
- [P4] C. Cancès, H. Mathis et N. Seguin. *Error estimate for time-explicit finite volume approximation of strong solutions to systems of conservation laws*, HAL: hal-00798287, **2015**.
- [P5] C. Cancès, C. Choquet, Y. Fan, I.S. Pop. *Existence of weak solutions to a degenerate pseudo-parabolic equation modeling two-phase flow in porous media*, Preprint LJLL n° R11050, **2011**.

## Thèse de doctorat

- [T1] *Écoulements diphasiques en milieux poreux hétérogènes : modélisation et analyse des effets liés aux discontinuités de la pression capillaire*, Thèse de Université de Provence, **2008**.

# Préambule

L'objectif de ce mémoire est de donner un aperçu complet de mes travaux publiés ou soumis pour publication. Une liste exhaustive de ces travaux se situe aux pages 7 et 8 de ce document.

La thématique générale abordée est l'étude analytique et numérique de modèles d'équations aux dérivées partielles (EDP) issues d'applications provenant de la mécanique des fluides. Une grande partie de mes travaux a comme motivation sous-jacente l'analyse d'écoulements complexes en milieux poreux. Mais ce mémoire contient aussi des contributions visant à être appliquées pour la simulation multi-échelles d'écoulements libres (en opposition avec les écoulements en milieux poreux). Enfin, un dernier chapitre rassemble des résultats dont la portée est plus générale et moins ciblée sur un objectif particulier. Ce mémoire est divisé en 5 chapitres.

Le premier chapitre est essentiellement consacré à la mise en équation, aux l'études, théoriques puis numériques, de modèles d'écoulements diphasiques en milieux poreux, en particulier dans le cas où le milieu poreux est discontinu par rapport à la variable d'espace, ce qui est typiquement le cas lorsque l'on considère un écoulement dans un sous-sol fait de plusieurs roches. Les modèles que nous considérons dans ce travail prennent en compte la diffusion capillaire, ce qui conduit à des problèmes paraboliques dégénérés. Nous avons proposé dans [A19]<sup>1</sup> puis [A13] des notions de solutions pertinentes pour ces modèles, puis démontré leur existence et leur unicité dans certains cas. Une interprétation variationnelle formelle de ces modèles est mise en avant dans [A1]. Les méthodes numériques employées pour leur approximation dans [A20,A18, A11] sont des schémas volumes finis à deux points présentant de bonnes propriétés de monotonie pour lesquels des résultats de convergence ont été démontrés.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude asymptotique d'un modèle étudié au chapitre 1 lorsque la diffusion capillaire tend vers 0. Dans ce cas, nous obtenons une loi de conservation scalaire hyperbolique dont le flux dépend de manière discontinue de la variable d'espace. Ce qui ressort de l'état de l'art abondant sur le sujet est une ambiguïté sur la notion pertinente de solution entropique, contrairement aux cas homogène ou hétérogène à variations régulières où la théorie de Kruřkov fournit une réponse complète. Après avoir mis en lumière dans [A16,A17] l'apparition de phénomènes singuliers au niveau des interfaces entre les différentes roches, nous sommes parvenus à caractériser dans [A10] la notion pertinente de solution de capillarité évanescence. Cette solution présente la particularité de dépendre des pressions capillaires alors que les phénomènes liés à la capillarité semblaient négligés de prime abord. Cette constatation allant à l'encontre de la littérature existante, nous avons proposé des schémas numériques efficaces permettant de calculer la limite de capillarité évanescence dans [A8, A6]. Enfin, nous présentons une théorie relativement générale (allant au delà de la problématique des écoulements en milieux poreux) issue de [A4] permettant de construire des schémas numériques performants pour les lois de conservations scalaires à flux discontinu.

---

1. Tout au long de ce manuscrit, les citations des contributions dont je suis auteur sont traitées différemment des autres références et utilisent la nomenclature introduite aux pages 7 et 8.

Les méthodes numériques présentées au chapitre 1 ont des propriétés de monotonie très forte dont de nombreuses propriétés sont déduites. Or, il n'existe pas à notre connaissance de méthode linéaire (c'est à dire que la discrétisation d'un problème linéaire conduit à un système linéaire) permettant de préserver la monotonie des opérateurs de diffusion continus lorsqu'on les discrétise sur des grilles générales. Dans le contexte des écoulements en milieux poreux et plus particulièrement de l'ingénierie pétrolière, les maillages sont souvent prescrits par les relevés géologiques. De plus, les opérateurs de diffusion apparaissant dans les modèles peuvent présenter une forte anisotropie. Développer des méthodes numériques robustes par rapport au maillage et à l'anisotropie est donc un challenge important en vue des applications, et c'est l'objectif du chapitre 3 de ce mémoire. Une première approche, développée dans [A9], consiste à corriger un schéma linéaire existant pour lui donner les propriétés de monotonie espérées. La seconde approche consiste à discrétiser l'équation sous une forme très non-linéaire motivée par la physique de manière à pouvoir imposer la décroissance des entropies physiques. Cette approche a tout d'abord conduit à la méthode proposée dans [A2] permettant de préserver la positivité des solutions et la décroissance de l'entropie. Malheureusement, la vitesse de convergence de cette méthode est insuffisante pour la rendre compétitive. Nous avons donc proposé dans [P2] une nouvelle méthode pour laquelle l'entropie physique décroît toujours et dont la vitesse de convergence est satisfaisante.

Le chapitre 4 de ce mémoire porte sur la modélisation adaptative de systèmes hyperboliques avec relaxation. L'application sous-jacente visée est la simulation multi-échelles d'écoulement multiphasiques libres (en opposition avec les écoulements en milieux poreux). Partons de la constatation que plusieurs modèles peuvent être utilisés pour simuler un même phénomène physique. Plus le modèle est riche, ou *fin*, plus il permet de prendre en compte des effets liés aux petites échelles, mais plus son coût de calcul est important. Un modèle plus pauvre, ou *grossier*, permet d'économiser de la puissance de calcul au prix d'une précision plus faible. Le but de la contribution [A5] est de fournir des estimateurs *a posteriori* d'erreur de modélisation permettant de déterminer de manière automatique les zones où un modèle fin est nécessaire et les zones où un modèle grossier est suffisant. Cette étude est principalement heuristique et la question de quantifier rigoureusement l'erreur commise en appliquant une telle démarche est naturelle. Analyser les modèles étudiés dans [A5] étant hors d'atteinte, nous avons proposé dans [A3] une étude rigoureuse complète sur un modèle jouet jusqu'à obtenir une estimation d'erreur entre la solution fournie par la procédure adaptative et la solution du modèle fin.

Enfin, le chapitre 5 rassemble des résultats dont la visée n'est pas directement applicative et dont la portée est plus générale. Ce chapitre synthétise les résultats de 3 contributions. La première contribution [A15] est consacrée à démontrer que les solutions entropiques d'équations paraboliques ou hyperboliques sont nécessairement continues par rapport à la variable de temps. L'intérêt de ce résultat est qu'il autorise à parler de valeur ponctuelle (en temps) des solutions entropiques alors que celles-ci ne sont *a priori* définies que presque partout. La deuxième contribution [P1] vise à fournir un résultat de compacité à la Aubin-Simon qui s'applique aux problèmes paraboliques dégénérés ainsi qu'à leurs approximations numériques. Ce résultat vise à être utilisé comme une boîte noire afin d'éviter d'utiliser la technique des translatés en temps d'Alt et Luckhaus et les calculs que cette dernière nécessite. Enfin, la troisième et dernière contribution [P4] du chapitre 5 est consacrée à l'analyse d'erreur *a priori* pour l'approximation par schémas volumes finis explicites en temps des solutions fortes de systèmes hyperboliques. Cette estimation repose sur une nouvelle estimation de stabilité obtenue en quantifiant la dissipation numérique d'entropie.

# Chapitre 1

## Autour de modèles dissipatifs d'écoulements multiphasiques en milieux poreux

Les publications présentées dans ce chapitre sont [A19, A18, C6, A13, C4, A11, A7, A1].

Ce chapitre présente des travaux réalisés au cours de ma thèse (en particulier les articles [A19] et [A18]) portant sur les écoulements diphasiques en milieux poreux lorsque la pression capillaire dépend de la variable d'espace. Ces résultats portent essentiellement sur des modèles uni-dimensionnels. L'extension au cadre des écoulements multidimensionnels de ces travaux est l'objet des articles [A13] et [A11]. Une ré-interprétation variationnelle des modèles est proposée dans [A1].

Nous détaillerons peu la modélisation. Nous renvoyons par exemple aux ouvrages de référence [46, 47] pour une discussion complète sur la dérivation des modèles que nous étudierons par la suite.

### 1.1 Mise en équation du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier par morceaux de  $\mathbb{R}^d$  représentant un milieu poreux, c'est à dire une structure solide dans laquelle de l'espace est disponible pour permettre à un fluide de circuler. La porosité  $\phi \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  désigne le ratio volumique local d'espace libre dans la matrice poreuse dans lequel le fluide peut circuler. On supposera par la suite que  $\phi(\mathbf{x}) > 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

#### 1.1.1 Écoulement monophasique en milieu poreux

Dans le cas où un fluide monophasique circule dans les pores en saturant tout le volume poreux, la vitesse de filtration  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  du fluide se déduit de la loi de Darcy [92]

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{\Lambda} (\nabla p - \rho \mathbf{g}), \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{\Lambda} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  est un champ de tenseurs symétriques définis positifs appelé perméabilité du milieu poreux,  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  désigne la pression du fluide,  $\rho$  sa densité,  $\mu$  sa viscosité, et  $\mathbf{g}$  désigne

le vecteur gravité. On supposera dans la suite de ce chapitre que  $\mu$  et surtout  $\rho$  sont constants, ce qui revient à supposer que le fluide est homogène et incompressible. On obtient un problème elliptique classique en complétant l'équation (1.1) par la relation de conservation du volume de fluide

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

où  $f \in H^1(\Omega)$  désigne un terme source et par des conditions aux limites *ad hoc* sur  $\partial\Omega$ , comme par exemple Dirichlet sur la pression, flux nul ou de type Signorini :

$$p \geq 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad \text{et} \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Dans la relation (1.3) et dans la suite de ce chapitre,  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

La dérivation rigoureuse de la loi de Darcy a été proposée dans [8, 7] par homogénéisation périodique en supposant que l'écoulement est gouverné au niveau microscopique par les équations de Stokes.

### 1.1.2 Écoulement diphasique multidimensionnel

Le cas où deux phases incompressibles et immiscibles sont en compétition pour circuler dans l'espace poreux est plus complexe. L'exemple typique de deux phases incompressibles et immiscibles est un mélange eau-huile. Dans ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes :

- l'indice  $o$  permet de désigner les grandeurs physiques caractéristiques de la phase huileuse ;
- l'indice  $w$  permet de désigner les grandeurs physiques caractéristiques de la phase aqueuse.

On désigne par  $s_\alpha$  la saturation de la phase  $\alpha$  pour  $\alpha \in \{o, w\}$ , c'est à dire le ratio volumique de la phase  $\alpha$  dans le fluide (ce qui impose en particulier que  $s_\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ). Il est naturel de supposer que tout le volume des pores est rempli par le fluide. Cela revient à exiger que

$$s_o + s_w = 1 \quad \text{presque partout dans } Q_T := \Omega \times (0, T), \quad (1.4)$$

où  $T > 0$  est un temps final arbitraire.

Les deux phases étant immiscibles, chaque phase possède sa propre pression. En écrivant la conservation du volume de chaque phase (ce qui est équivalent à la conservation de la masse vue que les phases sont supposées homogènes et incompressibles), on obtient que

$$\phi \partial_t s_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0 \quad \text{dans } Q_T, \quad \forall \alpha \in \{o, w\}, \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{v}_\alpha$  désigne la vitesse de filtration de la phase  $\alpha$ .

**Remarque 1.1** *Notons que, par souci de simplicité, nous n'avons pas considéré de terme source dans (1.5). La prise en compte de sources "régulières" est détaillée dans [34, 81]. La prise en compte de sources singulières portées par des Dirac (représentant des puits) est étudiée dans [134].*

Les vitesses de filtration  $\mathbf{v}_\alpha$  et les pressions de phase  $p_\alpha$  sont reliées par la loi de Darcy-Muskat [184]

$$\mathbf{v}_\alpha = - \frac{k_\alpha(s_\alpha)}{\mu_\alpha} \mathbf{\Lambda} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) \quad \text{dans } Q_T, \quad \forall \alpha \in \{o, w\}. \quad (1.6)$$

La loi de Darcy-Muskat (1.6) est une généralisation de la loi de Darcy (1.1) en présence de plusieurs phases. La fonction de perméabilité relative  $k_\alpha : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante par rapport à sa première variable, régulière par morceaux par rapport à sa deuxième variable, et satisfait  $k_\alpha(0, \mathbf{x}) = 0$ ,  $k_\alpha(1, \mathbf{x}) = 1$  et  $k_\alpha(s_\alpha, \mathbf{x}) \leq s_\alpha$  pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Un exemple typique est  $k_\alpha(s_\alpha, \mathbf{x}) = s_\alpha$ .

**Remarque 1.2** Supposer  $k_\alpha(\cdot, \mathbf{x})$  strictement croissante sur  $[0, 1]$  impose que  $k_\alpha(s_\alpha, \mathbf{x}) > 0$  si  $s_\alpha > 0$ . Cela revient à négliger les saturations résiduelles. Ce choix permet de simplifier la présentation dans la suite du document. On pourra se référer par exemple à [A1] pour une mise en équations faisant intervenir les saturations résiduelles.

**Remarque 1.3** La loi de Darcy-Muskat telle que formulée dans (1.6), à savoir avec une fonction de perméabilité relative  $k_\alpha$  à valeurs réelles est valable dans le cas d'un milieu poreux isotrope (c'est à dire si  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonal). La dérivation (formelle) par homogénéisation de la loi de Darcy-Muskat (voir par exemple [37, 47]) conduit plutôt à des tenseurs de perméabilité relative  $\mathbf{k}_\alpha : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  avec  $\mathbf{k}_\alpha \mathbf{\Lambda}$  symétrique semi-défini positif dans le cas anisotrope. Néanmoins, l'utilisation de la loi de Muskat sous sa forme (1.6) dans le cas anisotrope est courante.

Il manque encore une relation afin d'avoir le même nombre d'inconnues que d'équations. Nous faisons l'hypothèse classique [46, 215, 76, 33, 138] qu'il existe une fonction  $\pi : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement croissante par rapport à sa première variable et régulière par morceaux par rapport à la deuxième, telle que

$$p_o(\mathbf{x}, t) - p_w(\mathbf{x}, t) = \pi(s_o(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } (\mathbf{x}, t) \in Q_T. \quad (1.7)$$

De plus, on suppose que  $s \mapsto \pi(s, \mathbf{x})$  appartient à  $L^1(]0, 1])$  pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , et que

$$\operatorname{esssup}_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\pi(\cdot, \mathbf{x})\|_{L^1(]0, 1])} \leq C. \quad (1.8)$$

Concernant les conditions aux limites, on considèrera (pour simplifier) que le flux de chaque phase au bord est nul

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad \forall \alpha \in \{o, w\}. \quad (1.9)$$

La composition du fluide à l'instant initial  $t = 0$  est donnée par

$$s_\alpha(\cdot, 0) = s_\alpha^0 \in L^\infty(\Omega; [0, 1]), \quad \forall \alpha \in \{o, w\}, \quad \text{avec } s_o^0 + s_w^0 = 1. \quad (1.10)$$

Lorsque la fonction  $\pi$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}$ , ou lorsque cette dépendance est suffisamment régulière [11, 162, 9, 34, 81], le problème (1.4)–(1.7), (1.9)–(1.10) admet une solution globale en temps. De plus, sous certaines hypothèses (pas nécessairement vérifiées par les modèles physiques), l'unicité de la solution peut être prouvée [81]. Les démonstrations utilisent fortement les transformations mathématiques présentée dans la partie §1.3.1 de ce mémoire.

Il apparaît cependant que dans le cas où la fonction  $\pi$  dépend de manière discontinue de  $\mathbf{x}$ , il faut retravailler la relation (1.7). Le problème a pour origine la constatation suivante : en multipliant (formellement) la relation (1.5) par  $p_\alpha$ , puis en sommant sur  $\alpha \in \{o, w\}$  et en intégrant sur  $Q_T$ , on obtient en utilisant (1.4), (1.6), (1.7) et (1.8) que

$$\iint_{Q_T} \sum_{\alpha \in \{o, w\}} \frac{k_\alpha(s_\alpha)}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha)^2 \leq C. \quad (1.11)$$

Cette estimation fournit un contrôle des pressions de la phase  $\alpha$  uniquement lorsque  $k_\alpha(s_\alpha) > 0$ , donc lorsque  $s_\alpha > 0$ . La pression de la phase  $\alpha$  peut donc être choisie arbitraire lorsque  $s_\alpha = 0$ , mais elle doit rester en dessous de la valeur critique dictée par la relation (1.7) correspondant à la pression à laquelle la phase  $\alpha$  apparaîtrait. Cela nous a conduit dans [A13] (puis dans [A11]) à introduire la notion de pression multivaluée, qui consiste à dire que

$$\begin{cases} p_o(\mathbf{x}, t) \in [-\infty, p_w(\mathbf{x}, t) + \pi(0, \mathbf{x})] & \text{si } s_o(\mathbf{x}, t) = 0, \\ p_w(\mathbf{x}, t) \in [-\infty, p_o(\mathbf{x}, t) - \pi(1, \mathbf{x})] & \text{si } s_o(\mathbf{x}, t) = 1, \end{cases} \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Cela revient à étendre la fonction de pression capillaire  $\pi(\cdot, \mathbf{x})$  en le graphe maximal monotone  $\tilde{\pi}(\cdot, \mathbf{x}) : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}}$  défini par

$$\tilde{\pi}(s_o, \mathbf{x}) = \begin{cases} \pi(s_o, \mathbf{x}) & \text{si } s_o \in ]0, 1[, \\ [-\infty, \pi(0, \mathbf{x})] & \text{si } s_o = 0, \\ [\pi(1, \mathbf{x}), +\infty] & \text{si } s_o = 1, \\ \emptyset & \text{si } s_o \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (1.12)$$

De manière équivalente, cela revient à dire que l'inverse  $\pi^{-1}(\cdot, \mathbf{x})$  de la fonction de pression capillaire  $\pi(\cdot, \mathbf{x})$  est étendu à  $\mathbb{R}$  tout entier de manière continue par des constantes en une fonction  $\tilde{\pi}^{-1}(\cdot, \mathbf{x})$  :

$$\tilde{\pi}^{-1}(p, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } p \leq \pi(0, \mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}^{-1}(p, \mathbf{x}) = 1 \quad \text{si } p \geq \pi(1, \mathbf{x}).$$

La relation (1.7) doit alors être remplacée par

$$p_o(\mathbf{x}, t) - p_w(\mathbf{x}, t) \in \tilde{\pi}(s_o(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (1.13)$$

ou de manière équivalente par

$$s_o(\mathbf{x}, t) = \tilde{\pi}^{-1}(p_o(\mathbf{x}, t) - p_w(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } (\mathbf{x}, t) \in Q_T. \quad (1.14)$$

Explicitons maintenant les conditions de transmissions au niveau des variations brutales du type de roche. Soit  $\Sigma \subset \Omega$  une sous-variété régulière par morceaux de dimension  $(d - 1)$  et de normale  $\mathbf{n}_\Sigma$  à travers laquelle la fonction de pression capillaire  $(s, \mathbf{x}) \mapsto \pi(s, \mathbf{x})$  est discontinue par rapport à  $\mathbf{x}$ . Soit  $\mathbf{x} \in \Sigma$  et  $s \in [0, 1]$ , on note  $p_{\alpha, \pm}$  les traces des pressions de phases de part et d'autre de  $\Sigma$  si elles existent, et  $\mathbf{v}_{\alpha, \pm}$  les traces des vitesses de filtration. La conservation de la masse (donc du volume) de chaque phase à travers l'hétérogénéité de la roche impose que

$$(\mathbf{v}_{\alpha, +}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_{\alpha, -}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \times (0, T) \text{ et } \alpha \in \{o, w\}. \quad (1.15)$$

L'autre condition naturelle à imposer à l'interface est la continuité des pressions de phases

$$p_{\alpha, +}(\mathbf{x}, t) = p_{\alpha, -}(\mathbf{x}, t), \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \times (0, T) \text{ et } \alpha \in \{o, w\}. \quad (1.16)$$

On retrouve ainsi une formulation englobant les résultats partiels (dans le cas unidimensionnel et/ou sur des modèles simplifiés) proposés dans [214, 50, 115, 116, 67] et dans les article [A19, A18] issus de ma thèse.

## 1.2 Approche variationnelle

Les équations montrées ci-dessus, en particulier la question de l'extension multivaluée des pressions de phase, sont dérivées au niveau formel. Nous en proposons ici (et dans [A1]) une nouvelle interprétation basée sur une approche variationnelle. Depuis maintenant plus de quinze ans et les travaux fondateurs de F. Otto [192, 153, 193], de nombreux travaux ont porté sur l'interprétation de problèmes physiques dissipatifs comme flots de gradient d'une énergie libre dans des espaces métriques, souvent de type mesure de probabilité avec distance de Wasserstein. On pourra par exemple se référer à [48, 6, 17, 16, 58, 57, 160] et surtout aux monographies [219, 15, 220] pour une liste non exhaustive de références sur le sujet.

Plus récemment, A. Mielke a proposé dans [180] un formalisme sur les flots gradients généralisés. Ce cadre permet de traiter des problèmes plus généraux que ceux abordables par la théorie de [15].

Le prix à payer pour cela étant que tout ne peut pas être justifié parfaitement dans ce formalisme, que nous expliquons brièvement maintenant en adoptant le formalisme un peu plus léger proposé par M. A. Peletier [196].

Pour définir un flot gradient généralisé, il faut

- (i) un espace des états admissibles  $\mathcal{M}$  dans lequel vit la solution ;
- (ii) à chaque point  $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$ , le plan tangent  $T_{\mathbf{s}}\mathcal{M}$  à  $\mathcal{M}$ , dans lequel vit la variation en temps  $\partial_t \mathbf{s}$  de la solution. Les éléments  $\dot{\mathbf{s}}$  du plan tangent sont identifiés (de manière non nécessairement unique) à des éléments  $\mathbf{V}$  de l'espace des processus  $\mathcal{Z}_{\mathbf{s}}$ . Plus précisément, pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$ , l'identification se fait à l'aide d'un opérateur linéaire surjectif  $\mathcal{P}(\mathbf{s}) : \mathcal{Z}_{\mathbf{s}} \rightarrow T_{\mathbf{s}}\mathcal{M}$ .
- (iii) une fonctionnelle d'énergie libre  $\mathcal{E} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$  localement sous-différentiable. On note  $\partial_{\mathbf{s}}\mathcal{E}(\mathbf{s}) \subset (T_{\mathbf{s}}\mathcal{M})^*$  son sous-différentiel local en  $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$  ;
- (iv) un potentiel de dissipation  $\mathcal{D}$ , tel que pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$  et tout  $\mathbf{V}$  dans  $\mathcal{Z}_{\mathbf{s}}$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{V}) \geq 0$ . La fonctionnelle  $\mathcal{D}$  est supposée convexe et coercive par rapport à sa deuxième variable ;
- (v) Une donnée initiale  $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{M}$ .

Une fois ces ingrédients donnés, le comportement du flot gradient généralisé de l'énergie libre  $\mathcal{E}$  pour la dissipation  $\mathcal{D}$  est régi par la condition de moindre dissipation

$$\partial_t \mathbf{s} = \mathcal{P}(\mathbf{s})\mathbf{V} \quad \text{où} \quad \mathbf{V} \in \operatorname{argmin}_{\widehat{\mathbf{V}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{s}}} \left( \max_{\mathbf{h} \in \partial_{\mathbf{s}}\mathcal{E}(\mathbf{s})} \left( \mathcal{D}(\mathbf{s}(t); \widehat{\mathbf{V}}(t)) + \langle \mathbf{h}, \mathcal{P}(\mathbf{s})\widehat{\mathbf{V}} \rangle_{(T_{\mathbf{s}}\mathcal{M})^*, T_{\mathbf{s}}\mathcal{M}} \right) \right). \quad (1.17)$$

Dans [A1], nous avons montré que le problème (1.4)–(1.6), (1.9)–(1.10) et (1.13) possède cette structure de flot gradient généralisé. Pour remarquer cela, nous avons posé

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{s} = (s_o, s_w) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^2 \mid \int_{\Omega} \phi s_{\alpha} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \phi s_{\alpha}^0 d\mathbf{x} \right\}$$

l'espace des états admissibles de tous les profils de saturations à masse fixée. L'espace des processus  $\mathcal{Z}_{\mathbf{s}}$  est constitué des profils de vitesse de filtration :

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{s}} = \left\{ \mathbf{V} = (\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_w) \mid \mathbf{v}_{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ avec } \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

L'opérateur  $\mathcal{P}(\mathbf{s}) : \mathcal{Z}_{\mathbf{s}} \rightarrow T_{\mathbf{s}}\mathcal{M}$  est défini par

$$\mathcal{P}(\mathbf{s})\mathbf{V} = \left( -\frac{1}{\phi} \nabla \cdot \mathbf{v}_o ; -\frac{1}{\phi} \nabla \cdot \mathbf{v}_w \right), \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{s}}.$$

La conservation du volume de chaque phase (1.5) est une conséquence directe de (1.17).

L'énergie libre  $\mathcal{E} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{E}(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} \phi E(\mathbf{s}, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

où

$$E(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \int_0^{s_o} \pi(a, \mathbf{x}) da + (\rho_w - \rho_o) s_o g z & \text{si } s_o + s_w = 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$



La densité volumique d'énergie dans le fluide est la somme d'une énergie volumique capillaire et d'une énergie potentielle de pesanteur. Le sous-différentiel de  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$  est alors donné par

$$\partial_{\mathbf{s}}\mathcal{E}(\mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{h} = (h_o, h_w) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid h_o - h_w + (\rho_o - \rho_w)gz \in \pi(s_o, \cdot) \right\}.$$

Concernant la dissipation, elle est donnée par

$$\mathcal{D}(\mathbf{s}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \{o, w\}} \int_{\Omega} \mu_{\alpha} \frac{\Lambda^{-1} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha}}{k_{\alpha}(s_{\alpha})} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{M}, \forall \mathbf{V} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{s}}.$$

Les équations (1.4), (1.6) et (1.13) se déduisent de l'application du principe de moindre dissipation (1.17).

### 1.3 Analyse du problème continu

On s'intéresse dans cette partie à l'analyse mathématique du problème (1.4)–(1.6), (1.13), (1.9)–(1.10). Afin de simplifier la présentation, on supposera (comme cela a été fait dans [A13, A11]) que le milieu poreux  $\Omega$  est constitué de deux roches homogènes, représentées par des sous-domaines polygonaux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\Omega$ . Plus précisément, on a

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{\Sigma}.$$

Pour toute fonction  $f : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , on note  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  la fonction définie par  $f_i(s) = f(s, \mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega_i$ . Dans ce qui suit, on remplace la notation  $s_o$  par  $s$ , la saturation de la phase aqueuse devenant naturellement  $s_w = 1 - s$  grâce à la condition (1.4). En additionnant (1.5) pour  $\alpha = \{o, w\}$ , on obtient que dans  $Q_{T,i} = \Omega_i \times (0, T)$ , on a

$$\phi_i \partial_t s - \nabla \cdot \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (1.18a)$$

et

$$- \nabla \cdot \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \Lambda (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \right) = 0. \quad (1.18b)$$

Sur le bord  $(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times (0, T)$ , les conditions de flux nul (1.9) donnent

$$\left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.19a)$$

et

$$\left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \Lambda (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.19b)$$

À l'interface  $\Sigma$  entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (plus précisément, sur  $\Sigma \times (0, T)$ ), on a

$$p_{w,1} = p_{w,2} \quad \text{et} \quad p_{o,1} = p_{o,2}, \quad (1.20a)$$

alors que la continuité du flux impose

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (1.20b)$$

et

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \Lambda (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \Lambda (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_i = 0. \quad (1.20c)$$

### 1.3.1 Pression globale et transformée de Kirchhoff

Afin de pouvoir étudier le problème d'un point de vue mathématique, nous avons recours aux transformations mathématiques appelées transformée de Kirchhoff et pression globale [76, 33].

Soit  $(\mathbf{x}, t) \in Q_{T,i}$ , et soit  $\pi \in \tilde{\pi}_i(s(\mathbf{x}, t))$ , on définit la pression globale  $P(\mathbf{x}, t)$  par

$$P(\mathbf{x}, t) = p_w(\mathbf{x}, t) + \lambda_{w,i}(\pi) = p_o(\mathbf{x}, t) + \lambda_{o,i}(\pi), \quad (1.21)$$

où pour tout  $\pi \in \tilde{\pi}_i(s(\mathbf{x}, t))$ , on a

$$\begin{aligned} \lambda_{o,i}(\pi) &= - \int_0^\pi \frac{k_{w,i}(1 - \tilde{\pi}_i^{-1}(a))}{\frac{\mu_w}{\mu_o} k_{o,i}(\tilde{\pi}_i^{-1}(a)) + k_{w,i}(1 - \tilde{\pi}_i^{-1}(a))} da, \\ \lambda_{w,i}(\pi) &= + \int_0^\pi \frac{k_{o,i}(\tilde{\pi}_i^{-1}(a))}{k_{o,i}(\tilde{\pi}_i^{-1}(a)) + \frac{\mu_o}{\mu_w} k_{w,i}(1 - \tilde{\pi}_i^{-1}(a))} da. \end{aligned}$$

Il est remarquable que la valeur de la pression globale  $P(\mathbf{x}, t)$  au point  $(\mathbf{x}, t)$  ne dépend pas du choix de  $\pi \in \tilde{\pi}_i(s(\mathbf{x}, t))$ , une des deux expressions de  $P(\mathbf{x}, t)$  dans (1.21) étant toujours univaluée. La fonction  $P$  ainsi construite vérifie la relation

$$\frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \nabla p_o + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \nabla p_w = M_i(s) \nabla P,$$

où

$$M_i(s) = \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \right)$$

vérifie  $M_i(s) \geq \alpha_M > 0$  pour tout  $s \in [0, 1]$  et pour  $i \in \{1, 2\}$ .

On définit la transformée de Kirchhoff  $\varphi_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) par

$$\varphi_i(s) = \int_{\pi_i^{-1}(0)}^s \frac{k_{w,i}(1-a)k_{o,i}(a)}{\mu_o k_{w,i}(1-a) + \mu_w k_{o,i}(a)} \pi'(a) da, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Des calculs maintenant classiques [76, 33, 34] permettent de montrer que les équations (1.18) se reformulent

$$\phi_i \partial_t s - \nabla \cdot \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \mathbf{\Lambda}_i (\nabla P - \rho_o \mathbf{g}) + \mathbf{\Lambda}_i \nabla \varphi_i(s) \right) = 0 \quad \text{dans } Q_{T,i}, \quad (1.22a)$$

$$- \nabla \cdot (M_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \nabla P - \xi_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{g}) = 0 \quad \text{dans } Q_{T,i}, \quad (1.22b)$$

où  $\xi_i(s) = \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \rho_o + \frac{k_{w,i}(1-s)}{\mu_w} \rho_w$ .

Avec ces nouvelles variables principales  $(s, P)$ , les conditions aux limites (1.19) se reformulent

$$\left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \mathbf{\Lambda}_i (\nabla P - \rho_o \mathbf{g}) + \mathbf{\Lambda}_i \nabla \varphi_i(s) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times (0, T), \quad (1.23a)$$

$$(M_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \nabla P - \xi_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times (0, T). \quad (1.23b)$$

Concernant les conditions de transmission à travers l'interface  $\Sigma$ , la conservation du volume s'écrit simplement

$$\sum_{i \in \{1, 2\}} \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} \mathbf{\Lambda}_i (\nabla P - \rho_o \mathbf{g}) + \mathbf{\Lambda}_i \nabla \varphi_i(s) \right) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times (0, T) \quad (1.24a)$$

pour la phase huileuse et

$$\sum_{i \in \{1,2\}} (M_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \nabla P - \xi_i(s) \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times (0, T) \quad (1.24b)$$

pour le volume total.

Notons  $s_i$  et  $P_i$  les traces unilatérales de la saturation d'huile  $s$  et de la pression globale  $P$  sur l'interface  $\Sigma \times (0, T)$  depuis  $Q_{T,i}$ . Le raccord des pressions de phase (1.20a) peut se réécrire : il existe  $\pi : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable telle que

$$\pi \in \tilde{\pi}_1(s_1) \cap \tilde{\pi}_2(s_2) \quad \text{et} \quad P_1 - \lambda_{w,1}(\pi) = P_2 - \lambda_{w,2}(\pi) \quad \text{p.p. sur } \Sigma \times (0, T). \quad (1.24c)$$

### 1.3.2 Existence globale de solution

Nous définissons ci-dessous la notion de solution faible au problème (1.22)–(1.24).

**Définition 1.4** *Un couple  $(s, P)$  est dit solution faible du problème (1.22)–(1.24) si*

- (i)  $s \in L^\infty(Q_T; [0, 1])$ ,  $\phi \partial_t s \in L^2((0, T); (H^1(\Omega))')$  et  $\varphi_i(s) \in L^2((0, T); H^1(\Omega_i))$ ;
- (ii)  $P \in L^2((0, T); H^1(\Omega_i))$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $\int_\Omega P(\mathbf{x}, \cdot) d\mathbf{x} \equiv 0$ ;
- (iii) il existe  $\pi : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable telle que la condition (1.24c) soit vérifiée;
- (iv) pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$ , on a

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \phi s \partial_t \psi d\mathbf{x} dt + \int_\Omega \phi s^0 \psi(\cdot, 0) d\mathbf{x} \\ & - \sum_{i \in \{1,2\}} \iint_{Q_T} \left( \frac{k_{o,i}(s)}{\mu_o} (\nabla P - \rho_o \mathbf{g}) + \nabla \varphi_i(s) \right) \cdot \mathbf{\Lambda}_i \nabla \psi d\mathbf{x} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

et

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \iint_{Q_T} M_i(s) (\nabla P - \xi_i(s) \mathbf{g}) \cdot \mathbf{\Lambda}_i \nabla \psi d\mathbf{x} dt = 0. \quad (1.26)$$

Le résultat principal de l'article [A13], à savoir un résultat d'existence globale d'une solution pour le problème (1.22)–(1.24), est rappelé ci-dessous.

**Théorème 1.5** *On suppose que les fonctions  $\varphi_i$  sont Lipschitziennes sur  $[0, 1]$ , alors pour toute fonction  $s_0 \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ , il existe (au moins) une solution au problème (1.22)–(1.24) au sens de la définition 1.4. Le choix du temps final  $T$  étant arbitraire, la solution est globale en temps.*

La preuve du théorème 1.5, dont nous détaillons maintenant les grandes lignes, se fait par compacité à l'aide de deux régularisations successives.

(a) *Régularisation des courbes de pression capillaire.* On approche les graphes de pression capillaire  $\tilde{\pi}_i$  par des courbes  $(\pi_{i,n})_{n \geq 1}$  vérifiant les relations de compatibilité

$$\pi_{1,n}(0) = \pi_{2,n}(0) \quad \text{et} \quad \pi_{1,n}(1) = \pi_{2,n}(1) \quad (1.27)$$

et telles que

$$\pi_{i,n}(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad \pi_{i,n}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad \|\pi_{i,n} - \pi_i\|_{L^1([0,1])} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|\varphi'_{i,n}\|_{L^\infty([0,1])} \leq C.$$

On note  $(s_n, P_n)$  la solution approchée (dont il faut justifier l'existence) correspondant aux courbes de pression capillaire régularisées  $(\pi_{i,n})_i$ . À l'interface, la relation (1.24c) peut être remplacée par la condition

$$\pi_{1,n}(s_{1,n}) = \pi_{2,n}(s_{2,n}) \quad \text{et} \quad P_{1,n} - \lambda_{w,1,n}(\pi_{1,n}(s_{1,n})) = P_{2,n} - \lambda_{w,2,n}(\pi_{2,n}(s_{2,n})) \quad (1.28)$$

(b) *Régularisation de la dégénérescence.* Une des difficultés dans l'étude du problème vient du fait que  $k_{\alpha,i}(0) = 0$  pour  $\alpha \in \{o, w\}$  et  $i \in \{1, 2\}$ . On régularise le problème en en posant

$$k_{\alpha,i}^\epsilon(s) = k_{\alpha,i}(s) + \epsilon > \epsilon, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \forall \epsilon > 0. \quad (1.29)$$

Avec cette régularisation, on peut résoudre directement le problème (1.18)–(1.20). Les pressions de phases correspondantes  $p_\alpha^\epsilon$  appartiennent à  $L^2((0, T); H^1(\Omega))$ . La saturation  $s_\epsilon$  est alors définie par

$$s_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \pi_n^{-1}(p_o^\epsilon(\mathbf{x}, t) - p_w^\epsilon(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}).$$

L'existence d'une solution au problème avec régularisation de la dégénérescence a été obtenue récemment par convergence d'un schéma numérique dans [133]. A l'époque de la rédaction de [A13], nous avons eu recours à une dernière étape de régularisation pour se baser sur les résultats existants [34, 81]. Cette étape consistait à régulariser l'interface  $\Sigma$  et transformer la fonction  $\pi^n : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  constante par morceaux par rapport à sa deuxième variable en une fonction  $\pi^{n,\delta} : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Nous l'omettons dans ce mémoire, dans un souci de clarté, d'autant que le résultat présenté dans [133] permet de s'en affranchir.

En prenant  $\psi = \pi^n(s^{n,\epsilon})$  dans la version régularisée de l'équation (1.25) et  $\psi = P^{n,\epsilon} - \lambda_w^{n,\epsilon}(s^{n,\epsilon})$  dans la version régularisée l'équation (1.26), puis en sommant les deux équations ainsi obtenues, on obtient les estimations uniformes par rapport à  $n$  et  $\epsilon$  suivantes :

$$0 \leq s^{n,\epsilon}(\mathbf{x}, t) \leq 1 \quad \text{pour p.t. } (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (1.30)$$

$$\sum_i \int_0^T \int_{\Omega_i} \left[ (\nabla P^{n,\epsilon})^2 + \left( \nabla \varphi_i(s^{n,\epsilon}) \right)^2 \right] d\mathbf{x} dt \leq C, \quad (1.31)$$

$$\|\phi \partial_t s^{\epsilon,n}\|_{L^2((0,T);(H^1(\Omega))^{\prime})} \leq C. \quad (1.32)$$

Comme cela peut être démontré en utilisant les outils présentés dans [152, Appendix], l'estimation (1.31) implique (avec la condition  $\int_\Omega P^{n,\epsilon} d\mathbf{x} = 0$ ) que

$$\|P^{n,\epsilon}\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega_i))} + \|\varphi^{n,\epsilon}(s^{n,\epsilon})\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega_i))} \leq C, \quad \forall \epsilon > 0, \forall n \geq 1. \quad (1.33)$$

D'après [P1] résumé dans la partie §5.2 de ce mémoire (voir [10, 11] pour une méthode plus classique utilisant les translatés en temps), les estimations (1.30), (1.32) et (1.33) sont suffisantes pour assurer que la famille de fonctions  $(s^{n,\epsilon})_{\epsilon,n}$  est séquentiellement compacte dans  $L^p(Q_T)$  pour tout  $p \in [1, \infty[$ . En particulier, il existe  $s \in L^\infty(Q_T; [0, 1])$  avec  $\varphi_i(s) \in L^2((0, T); H^1(\Omega_i))$  et  $P_i \in L^2((0, T); H^1(\Omega_i))$  avec  $\int_\Omega P d\mathbf{x} = 0$  telles que

$$s^{n,\epsilon} \rightarrow s \quad \text{p.p. dans } Q_T \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0,$$

$$\varphi_i^{n,\epsilon}(s^{n,\epsilon}) \rightharpoonup \varphi_i(s) \quad \text{faiblement dans } L^2((0, T); H^1(\Omega_i)) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0,$$

$$P_i^{n,\epsilon} \rightharpoonup P_i \quad \text{faiblement dans } L^2((0, T); H^1(\Omega_i)) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0.$$

Ces propriétés sont suffisantes pour passer à la limite dans les formulations faibles (1.25)–(1.26).

Il reste à montrer le point (iii) de la Définition 1.4. Le passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  pour  $n$  fini fixé ne pose pas de problème particulier. En effet lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , les traces unilatérales  $s_i^{n,\epsilon}$  de la saturation régularisée en  $n$  et  $\epsilon$  convergent presque partout sur  $\Sigma \times (0, T)$  vers les traces  $s_i^n$  en  $n$  seulement, alors que les traces unilatérales  $P_i^{n,\epsilon}$  convergent faiblement dans  $L^2(\Sigma \times (0, T))$  vers  $P_i^n$ . Ces propriétés sont suffisantes pour passer à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  et récupérer (1.28). Le passage à la limite  $n \rightarrow \infty$  est beaucoup plus délicat. Nous ne le développons pas ici, et renvoyons à [§3.3, A13] pour les détails de la preuve.

**Remarque 1.6** *Une partie des résultats présentés ci-dessus peuvent s'étendre au cas de fluides compressibles [159, 12, 69, 199, 14, 13, 200]. C'est en particulier le cas du passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  qui est l'objet de l'article [13].*

### 1.3.3 Unicité dans le cas unidimensionnel

La question de savoir si le problème (1.22)–(1.24) est bien posé est une question encore ouverte. En effet, l'existence d'une trace normale forte pour le flux sur  $\Sigma \times (0, T)$  est nécessaire pour faire tourner la preuve d'unicité. Cette question d'existence de trace forte pour le flux est par exemple centrale dans les travaux [25, 26]. En revanche, un cadre d'existence et unicité a été proposé dans [A19, A18] pour le cas unidimensionnel. La notion de solution qui y est proposée est un peu plus restrictive que la notion de solution faible introduite à la Définition 1.4. Des résultats d'unicité sur des problèmes voisins avait été aussi proposés dans [50, 203].

On se place maintenant en dimension 1. Pour simplifier, nous supposons que  $\Omega = (-1, 1)$ ,  $\Omega_1 = (-1, 0)$ ,  $\Omega_2 = (0, 1)$  et  $\Sigma = \{0\}$ . Le fait de réduire à la dimension 1 à pour effet principal que l'équation (1.22b) et les conditions de bord (1.23b) impliquent que

$$\partial_x P = \frac{\xi_i(s)g}{M_i(s)} \text{ dans } \Omega_i \times (0, T).$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.22a), on obtient

$$\phi_i \partial_t s + \partial_x (f_i(s) - \partial_x \varphi_i(s)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \quad (1.34)$$

où le terme de convection est donné par

$$f_i(s) = \Lambda_i \frac{k_{o,i}(s)k_{w,i}(s)}{\mu_o k_{w,i}(s) + \mu_w k_{o,i}(s)} (\rho_o - \rho_w)g, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Puisque l'équation (1.22b) sur la pression globale a été éliminée, la condition de transmission (1.24c) se simplifie en

$$\tilde{\pi}_1(s_1) \cap \tilde{\pi}_2(s_2) \neq \emptyset \quad \text{sur } \Sigma \times (0, T). \quad (1.35)$$

Cette dernière relation doit se comprendre comme la continuité de la pression capillaire en un sens généralisé. Elle apparaît pour la première fois dans [203] et a été justifiée rigoureusement simultanément dans [67] et [A19].

**Définition 1.7** *Une fonction  $s$  est dite solution à flux borné du problème unidimensionnel si*

$$(i) \quad s \in L^\infty(Q_T; [0, 1]) \cap C([0, T]; L^1(\Omega)), \quad \phi \partial_t s \in L^1\left(\left((0, T); (W^{1,1}(\Omega))'\right)\right) \text{ et } \partial_x \varphi_i(s) \in L^\infty(Q_{T,i});$$

(ii) pour tout  $\psi \in W^{1,1}(Q_T)$  avec  $\psi(\cdot, T) = 0$ , on a

$$\iint_{Q_T} \phi s \partial_t \psi \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \phi s^0 \psi(\cdot, 0) \, dx + \sum_{i \in \{1,2\}} \iint_{Q_{i,T}} (f_i(s) - \partial_x \varphi_i(s)) \partial_x \psi \, d\mathbf{x} dt = 0.$$

La dénomination *solution à flux borné* vient de l'estimation  $\partial_x \varphi_i(s) \in L^\infty(Q_{T,i})$ , qui assure que le flux

$$F_i = f_i(s) - \partial_x \varphi_i(s) \quad (1.36)$$

appartient à  $L^\infty(Q_{i,T})$ . Pour cela, il faut que la solution initiale induise un flux borné, à savoir que

$$s^0 \in L^\infty(\Omega; [0, 1]), \quad \varphi_i(s^0) \in L^\infty(\Omega_i), \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}_1(s_1^0) \cap \tilde{\pi}_2(s_2^0) \neq \emptyset. \quad (1.37)$$

Dans le papier [A19], nous avons démontré le résultat suivant.

**Théorème 1.8** *On suppose que  $f_i \circ \varphi_i^{-1} \in C^{0,1/2}$ . Soit  $s^0$  une donnée initiale telle que (1.37) est vérifiée, alors il existe une unique solution  $s$  à flux borné au sens de la Définition 1.7. De plus, soit  $\tilde{s}^0$  une autre donnée initiale satisfaisant (1.37), et soit  $\tilde{s}$  la solution à flux borné associée à  $\tilde{s}^0$ , alors on a le principe de contraction  $L^1_\phi$  suivant :*

$$\int_{\Omega} \phi |s(x, t) - \tilde{s}(x, t)| \, dx \leq \int_{\Omega} \phi |s^0(x) - \tilde{s}^0(x)| \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.38)$$

Le preuve du Théorème 1.8 se divise en deux parties principales : l'existence d'une solution à flux borné, et l'unicité de cette solution.

- (a) *Existence d'une solution à flux borné.* L'idée de la preuve consiste à considérer l'équation vérifiée par le flux. La preuve esquissée ci-dessous peut être rendue rigoureuse à l'aide de régularisations du problème semblables à celles proposées dans la preuve du Théorème 1.5 et en utilisant des résultats classique de régularité des solutions d'équations (uniformément) paraboliques (voir par exemple [165]). Dans chaque sous-domaine  $Q_{i,T}$ , on peut dériver par rapport au temps l'expression (1.36) du flux  $F_i$ , ce qui, en utilisant l'équation  $\partial_t s = -\frac{1}{\phi_i} \partial_x F_i$ , mène à l'équation

$$\partial_t F_i + \frac{f'_i(s)}{\phi_i} \partial_x F_i - \partial_x \left( \frac{\varphi'_i(s)}{\phi_i} \partial_x F_i \right) = 0. \quad (1.39)$$

La condition de flux nul au bord assure que  $F_1(-1, t) = 0$  et  $F_2(1, t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . À l'interface, on a  $F_1(0, t) = F_2(0, t)$  grâce à la conservation de la masse (donc du volume). La condition (1.35) (du moins, sa version régularisée en espace) permet de clore le système. Les solutions de l'équation non conservative (1.39) vérifient le principe du maximum, ce qui permet de conclure que

$$\max_{x \in \Omega} |F(x, t)| \leq \max_{x \in \Omega} |F(x, 0)| \leq C.$$

Le fait que  $s \in C([0, T]; L^1(\Omega))$  est une conséquence directe du résultat montré dans [A15] (voir aussi §5.1 de ce mémoire).

- (b) *Unicité de la solution à flux borné.* En utilisant le travail de F. Otto [191] basé sur la technique du dédoublement de variable en temps, on obtient que pour toute fonction

$\psi \in W^{1,1}(\Omega)$  avec  $\psi \geq 0$  et  $\psi(0) = 0$  pour toute fonction  $\theta \in \text{BV}(0, T)$ , avec  $\theta \geq 0$ ,  $\theta(T) = 0$ , l'inégalité de Kato suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \partial_t \theta(t) \int_{\Omega} \phi(x) |s(x, t) - \check{s}(x, t)| \psi(x) dx dt \\ & + \theta(0) \int_{\Omega} \phi(x) |s^0(x) - \check{s}^0(x)| \psi(x) dx + \mathcal{R}(\theta, \psi) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

où

$$\mathcal{R}(\theta, \psi) = \int_0^T \theta(t) \sum_{i \in \{1, 2\}} \int_{\Omega_i} [\text{sign}(s - \check{s})(f_i(s) - f_i(\check{s})) - \partial_x |\varphi_i(s) - \varphi_i(\check{s})|] \partial_x \psi dx dt.$$

En posant  $\psi_{\delta}(x) = \min\left(1, \frac{|x|}{\delta}\right)$ , alors la borne uniforme sur les flux et la monotonie de la condition de transmission (1.35) permettent de montrer que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{R}(\theta, \psi_{\delta}) \leq 0,$$

ce qui mène à

$$\int_0^T \partial_t \theta(t) \int_{\Omega} \phi(x) |s(x, t) - \check{s}(x, t)| dx dt + \theta(0) \int_{\Omega} \phi(x) |s^0(x) - \check{s}^0(x)| dx \geq 0.$$

L'inégalité (1.38), qui implique l'unicité de la solution, s'en déduit en prenant  $\theta = \mathbf{1}_{[0, t]}$ .

Le cadre d'existence et d'unicité avec principe contraction  $L^1_{\phi}$  peut s'étendre par densité à toutes les données initiales  $s^0 \in L^{\infty}(\Omega; [0, 1])$ . En effet, pour  $s^0$  quelconque, il existe une suite  $(s_n^0)_{n \geq 1}$  de données initiales préparées, c'est à dire vérifiant (1.37) pour tout  $n \geq 1$ , telle que

$$\|s_n^0 - s_p^0\|_{L^1_{\phi}, n, p \rightarrow \infty} \longrightarrow 0.$$

On déduit du principe (1.38) que la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de solutions à flux borné correspondant à la suite de donnée initiale  $(s_n^0)_{n \geq 1}$  est de Cauchy dans  $C([0, T]; L^1_{\phi}(\Omega))$ . Elle converge donc vers une fonction  $s \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T; [0, 1])$ . Il est aisé de vérifier que la fonction limite est aussi solution faible du problème (c'est à dire à flux  $L^2(Q_T)$ ). Néanmoins, cela ne permet pas d'affirmer l'unicité des solutions faibles, mais seulement de celles obtenues comme limite de solutions à flux borné, appelées SOLA (solutions obtenues comme limite d'approximations) dans [A19, A18].

**Remarque 1.9** *La question de l'unicité des solutions dans le cadre multi-dimensionnel est une question difficile. Des réponses partielles sont proposées dans [A20] dans le cas où les pressions capillaires sont compatibles, c'est à dire lorsque la relation (1.27) est vérifiée. Des preuves d'unicité pour un modèle réduit proche du problème unidimensionnel (1 seule équation) sont aussi proposées dans [115, 161], mais l'existence des solutions qui y sont considérées n'est pas assurée en raison de la régularité excessive demandée.*

## 1.4 Approximation par des schémas Volumes Finis

### 1.4.1 Le cas multi-dimensionnel

Le but de cette partie, qui résume les contributions [A18, A11, C6, C4], est d'approcher les solutions du problème (1.18)–(1.20) étudiées dans la partie §1.3 numériquement. En raison du fort intérêt industriel du problème, un certain nombre de travaux purement numériques ont été proposés au cours des dernières décennies [122, 149, 118]. Plus récemment, l'étude de convergence d'un schéma numérique sous l'hypothèse que non-dégénérescence (1.29) a été proposé dans [133].

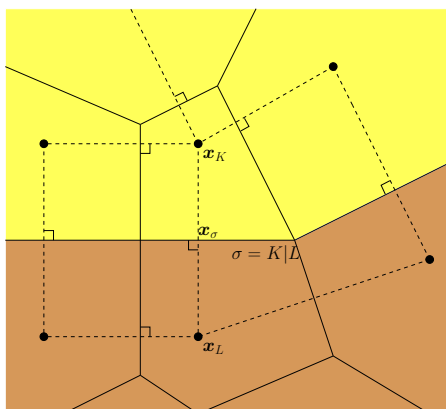
Dans [A11] (voir aussi [C4]), l'objectif était de proposer un schéma avec une preuve de convergence lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0. Le schéma volumes finis que nous avons proposé se base sur des discrétisations monotones des opérateurs de diffusion et de convection. En particulier, cela impose deux restrictions importantes dans la suite :

- (a) le tenseur  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{Id}$  est isotrope, avec  $\Lambda(x) = \Lambda_1 \mathbf{1}_{\Omega_1}(x) + \Lambda_2 \mathbf{1}_{\Omega_2}(x)$ .
- (b) la maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  satisfait une condition d'orthogonalité classique (cf. [125, 124]).

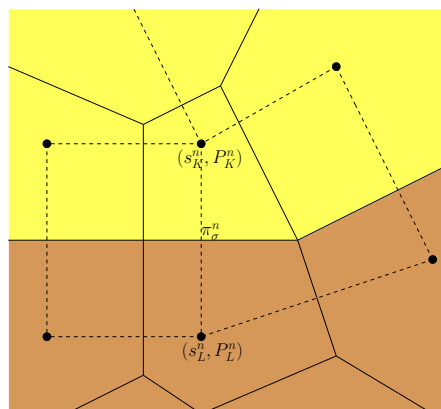
Des méthodes numériques permettant de lever ces deux restrictions seront présentées dans les parties §3.3 et §3.4 de ce mémoire (voir aussi [A2, C1, P2]).

**Définition 1.10** *Un maillage admissible de  $\Omega$  consiste en un ensemble  $\mathcal{T}$  d'ouverts polygonaux disjoints appelés mailles recouvrant  $\Omega$ , une famille  $\mathcal{E}$  de sous-ensembles de  $\overline{\Omega}$  contenus dans des hyperplans de  $\mathbb{R}^d$  appelés arêtes, et une famille de points  $(\mathbf{x}_K)_{K \in \mathcal{T}}$  appelés centres de maille satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (i) *Le maillage respecte la géométrie de  $\Omega$  : les mailles sont soit dans  $\Omega_1$ , soit dans  $\Omega_2$  ;*
- (ii) *Les arêtes forment les bords des mailles ;*
- (iii) *Condition d'orthogonalité : si les mailles  $K$  et  $L$  partagent une arête  $\sigma$  (notée alors  $K|L$ ), alors le vecteur  $\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K$  est orthogonal à  $\sigma$ , orienté dans le sens sortant de  $K$ .*



(a) Géométrie du maillage à l'interface  $\Sigma$



(b) Localisation des inconnues du schéma

Le schéma numérique implicite en temps proposé dans [A11] a pour inconnues

- les saturations  $(s_K^n)_{K \in \mathcal{T}, n \geq 1}$  aux centres des mailles  $\mathbf{x}_K$  à l'instant  $n\Delta t$ ,



- les pressions globales  $(P_K^n)_{K \in \mathcal{T}, n \geq 1}$  aux centres des mailles  $\mathbf{x}_K$  à l'instant  $n\Delta t$ ,
- les pressions capillaires  $(\pi_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}_\Sigma, n \geq 1}$  sur les arêtes  $\sigma \in \mathcal{E}_\Sigma$  à l'interface  $\Sigma$  entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

La conservation locale du volume d'huile s'écrit

$$\phi_i \frac{s_K^n - s_K^{n-1}}{\Delta t} |K| + \sum_{\sigma \subset \partial K} F_{K,\sigma}^n = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_i, \forall n \geq 1, \quad (1.41)$$

alors que la conservation du volume total s'écrit

$$\sum_{\sigma \subset \partial K} G_{K,\sigma}^n = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_i, \forall n \geq 1. \quad (1.42)$$

La définition des flux  $F_{K,\sigma}^n$  et  $G_{K,\sigma}^n$  est identique à celle proposée par A. Michel [179] lorsque  $\sigma = K|L$  est une arête interne à  $\Omega_i$ . Pour construire les flux d'interface  $F_{K,\sigma}^n$  et  $G_{K,\sigma}^n$  pour  $\sigma = K|L \subset \Sigma$ , on utilise l'inconnue  $\pi_\sigma^n$  pour satisfaire la condition de conservation des volumes des phases :

$$F_{K,\sigma}^n + F_{L,\sigma}^n = 0, \quad G_{K,\sigma}^n + G_{L,\sigma}^n = 0.$$

Cette approche est inspirée de la méthode étudiée dans [116] sur un modèle simplifié.

Le résultat principal de l'article [A11] est résumé dans l'énoncé suivant, dont la preuve suit les lignes de la preuve du Théorème 1.5, les difficultés liées à la discrétisation en plus.

**Théorème 1.11** *Soit  $\mathcal{T}$  un maillage admissible au sens de la Définition 1.10, alors le schéma numérique (1.41)–(1.42) admet au moins une solution. Soit  $(s_{\mathcal{T}}, P_{\mathcal{T}})$  la reconstruction constante par maille et par pas de temps obtenue à l'aide des inconnues du schéma, alors il existe une solution faible  $(s, P)$  du problème continu au sens de la Définition 1.4 telle que, à l'extraction d'une sous-suite près,  $s_{\mathcal{T}} \rightarrow s$  fortement dans  $L^p(Q_T)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) et  $P_{\mathcal{T}} \rightarrow P$  faiblement dans  $L^2(Q_T)$  lorsque la taille caractéristique des éléments de  $\mathcal{T}$  et  $\Delta t$  tendent vers 0 sous contrainte classique de non-dégenérescence du maillage.*

## 1.4.2 Le cas uni-dimensionnel

Le Théorème 1.11 garantit la convergence (à une sous-suite près) des solutions discrètes vers une solution faible de problème au sens de la Définition 1.4. Or, comme cela a été signalé dans la partie §1.3.3, l'unicité est un problème ouvert dans la classe des solutions faibles. Afin de se ramener à un cadre avec existence et unicité de la solution, il faut :

- se restreindre au cadre de la dimension 1 ;
- considérer des solutions à flux borné, ou bien des solutions faibles qui sont limites de solutions à flux borné (SOLA).

Il est donc naturel de se poser la question suivante : le schéma numérique capture-t'il ces solutions particulières? La réponse positive à cette question fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 1.12** *Dans le cas unidimensionnel, il existe une unique solution au schéma volumes finis (1.41)–(1.42). De plus, sous les hypothèses du théorème 1.8 (en particulier que la donnée initiale vérifie (1.37)), la solution discrète converge dans  $L^p(Q_T)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) vers l'unique solution  $s$  à flux borné du problème unidimensionnel au sens de la Définition 1.7. Si la donnée initiale ne vérifie pas (1.37), alors la solution discrète converge dans  $L^p(Q_T)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) vers l'unique SOLA du problème unidimensionnel.*

La preuve de ce théorème est détaillée dans [A18]. Elle repose sur les constatations suivantes.

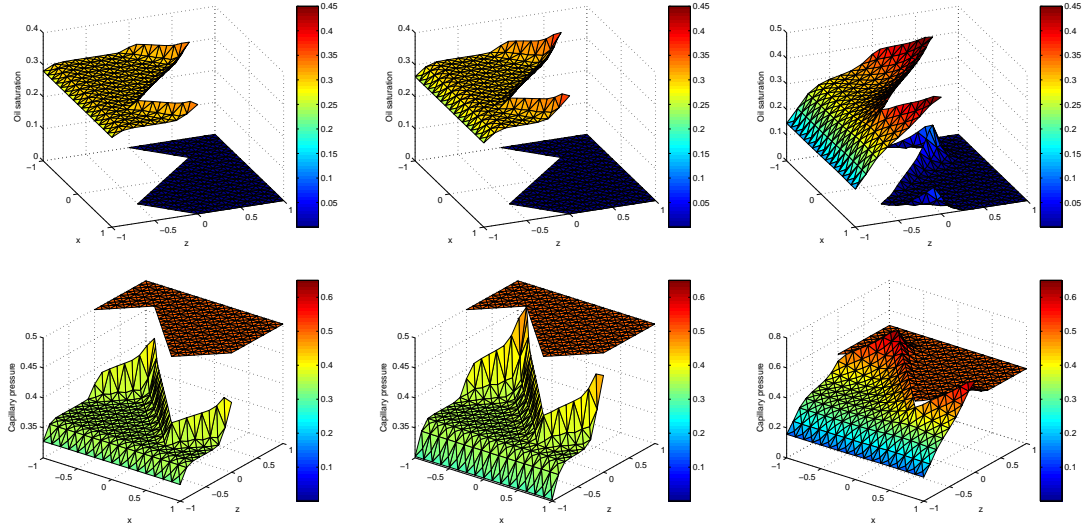


FIGURE 1.1 – Évolution de la saturation d'huile dans le domaine  $\Omega$  (haut) et de la pression capillaire (bas). L'huile se déplace par poussée d'Archimède. Elle ne parvient à pénétrer dans le domaine du haut que lorsque la saturation sous l'interface est suffisante pour assurer la continuité de la pression capillaire.

- (a) Dans le cas unidimensionnel, le problème devient scalaire, et le schéma numérique considéré est monotone [89]. L'unicité de la solution au schéma en découle (voir par exemple [125]), et on a un principe de contraction  $L^1$  au niveau discret :

$$\int_{\Omega} \phi(x) |s_h(x, t) - \tilde{s}_h(x)| dx \leq \int_{\Omega} \phi(x) |s^0(x) - \tilde{s}^0(x)| dx, \quad \forall t > 0. \quad (1.43)$$

- (b) La preuve qui fournit une borne uniforme sur les flux peut être transposée au niveau discret. En particulier, la solution discrète au schéma converge vers l'unique solution à flux borné lorsque les pas d'espace et de temps tendent vers 0.
- (c) Enfin, pour identifier que le schéma converge toujours vers une SOLA, on utilise les principes de contraction  $L^1$  continu (1.38) et discret (1.43). En effet, si  $s^0$  est une donnée initiale ne satisfaisant pas la condition (1.37), on approche  $s^0$  dans  $L^1_{\phi}(\Omega)$  par la suite  $(s_n^0)_{n \geq 1}$ . En notant  $s$  l'unique SOLA du problème unidimensionnel, et  $s_n$  (resp.  $s_{n,h}$ ) l'unique solution à flux borné (resp. discrète) associée à  $s_n$ , on a

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \phi(x) |s_h(x, t) - s(x, t)| dx dt &\leq \iint_{Q_T} \phi(x) |s_h(x, t) - s_{n,h}(x, t)| dx dt \\ &\quad + \iint_{Q_T} \phi(x) |s_{n,h}(x, t) - s_n(x, t)| dx dt \\ &\quad + \iint_{Q_T} \phi(x) |s_n(x, t) - s(x, t)| dx dt. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, les premier et dernier termes tendent vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  uniformément en les paramètres de discrétisation grâce à (1.38) et (1.43). Cela

permet d'affirmer que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \phi(x) |s_h(x, t) - s(x, t)| dx dt = 0.$$

## 1.5 Analyse d'erreur *a posteriori*

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de résultats [A7] obtenus avec I. S. Pop et M. Vohralík sur les estimations d'erreur *a posteriori* pour les écoulements diphasiques en milieux poreux. On se place dans le cadre où le milieu poreux est homogène, c'est à dire que les fonctions  $k_\alpha$ ,  $\pi$  (donc  $\varphi$  et  $\lambda_\alpha$ ) ne dépendent pas de  $\mathbf{x}$ . Dans ce cadre simplifié, l'analyse du problème (1.22)–(1.23) (sans interface) est plus abordable et l'unicité des solutions faibles peut être montrée sous des hypothèses plus ou moins réalistes (voir par exemple [81]). Par des techniques relativement semblables, des estimations d'erreur a priori ont été proposées dans [82] pour une approximation par éléments finis. Pour simplifier la présentation, nous avons aussi négligé la gravité ( $\rho_o = \rho_w = 0$ ). Cependant, les termes de gravité ne posent pas de problème particulier. On pourra par exemple considérer [147] pour des calculs similaires avec gravité.

L'objectif de ce travail était de fournir des outils avec leur justification rigoureuse pour optimiser la résolution numérique du problème par des méthodes volumes finis non spécifiées (le méthodologie qui est présentée dans [A7] s'adapte tout aussi bien aux approximations par éléments finis). En particulier, nous nous appuyons sur les développements récents [221, 222, 114, 223, 106, 120, 101] de la théorie de l'analyse d'erreur a posteriori pour les problèmes elliptiques et paraboliques qui permettent de séparer dans les estimateurs d'erreurs les contributions de la discrétisation en espace et en temps, les erreurs de linéarisation (point fixe ou Newton), les erreurs liées aux méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires (par exemple avec GMRES ou Gradient Conjugué), voir en particulier [120].

Pour pouvoir appliquer le Théorème 1.13 ci-dessous, deux hypothèses doivent être satisfaites par le problème (outre des hypothèses techniques sur les non-linéarités pour lesquelles nous renvoyons à [A7]). La première porte sur le problème continu, la deuxième sur la discrétisation.

- (H1) Il existe une solution faible  $(s, P)$  au problème (1.22)–(1.23) telle que  $\nabla P \in L^\infty(Q_T)$ .
- (H2) À chaque pas de temps  $n \geq 1$  et pour chaque élément  $K \in \mathcal{T}$ , il existe des vitesses de filtration reconstruites  $\mathbf{v}_{o,h}^n$  et  $\mathbf{v}_{t,h}^n = \mathbf{v}_{o,h}^n + \mathbf{v}_{w,h}^n$  dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  telles que

$$\begin{cases} \phi_K \frac{s_K^n - s_K^{n-1}}{\Delta t} |K| + \int_{\partial K} \mathbf{v}_{o,h}^n \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \int_{\partial K} \mathbf{v}_{t,h}^n \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Ces deux hypothèses méritent quelques commentaires. Tout d'abord, l'hypothèse (H1) est vérifiée dans le cas où le domaine  $\Omega$  a une frontière  $\partial\Omega$  régulière (voir [81, Théorème 4.5]). Comme nous nous intéressons au cas de domaines polyédrique (pour les mailler), nous supposons que ce résultat de régularité reste vrai. Cette hypothèse de régularité permet de montrer l'unicité de la solution faible au problème (1.22)–(1.23).

Quant à l'hypothèse (H2), elle est vérifiée par de nombreux schémas (on en propose deux dans [A7]). En effet, il existe maintenant des outils puissants pour reconstruire des flux  $\mathbf{v}_{o,h}^n$  et  $\mathbf{v}_{t,h}^n$  à l'aide de petits problèmes mixtes locaux (voir par exemple [119, 121]).

**Théorème 1.13** *Supposons que la propriété de régularité (H1) soit vérifiée, alors pour tout schéma numérique possédant la propriété (H2), il existe  $C > 0$  ne dépendant que des paramètres*

du problème continu et des quantités  $\eta_{\text{sp}}^{n,k,i}$ ,  $\eta_{\text{tm}}^{n,k,i}$ ,  $\eta_{\text{lin}}^{n,k,i}$ ,  $\eta_{\text{alg}}^{n,k,i}$ ,  $\eta_{\text{quad}}^{n,k,i}$  calculables explicitement et localisables en espace et en temps quantifiant respectivement les erreurs liées à la discrétisation spatiale et temporelle, à la procédure de linéarisation, aux méthodes itératives pour les problèmes linéaires et aux méthodes de quadrature pour traiter les nonlinéarités, telles que

$$C \left( \|s_h - s\|_{L^\infty(H^{-1})}^2 + \|P_h - P\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\varphi(s_h) - \varphi(s)\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \\ \leq \|s_h(\cdot, 0) - s^0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \left( \eta_{\text{sp}}^{n,k,i} + \eta_{\text{tm}}^{n,k,i} + \eta_{\text{lin}}^{n,k,i} + \eta_{\text{alg}}^{n,k,i} + \eta_{\text{quad}}^{n,k,i} \right)^2.$$

La preuve repose sur des estimations des résidus

$$(\mathcal{R}_o(s_h, P_h), \mathcal{R}_t(s_h, P_h)) \in \left( L^2 \left( (0, T); (H^1(\Omega))' \right) \right)^2$$

définis par

$$\langle \mathcal{R}_o(s_h, P_h); \psi \rangle := \int_0^T \langle \phi \partial_t s_h; \psi \rangle_{(H^1)', H^1} dt + \iint_{Q_T} \left( \frac{k_o(s_h)}{\mu_o} \nabla P_h + \nabla \varphi(s_h) \right) \cdot \mathbf{\Lambda} \nabla \psi d\mathbf{x} dt, \\ \langle \mathcal{R}_t(s_h, P_h); \theta \rangle := \iint_{Q_T} M(s_h) \nabla P_h \cdot \mathbf{\Lambda} \nabla \theta d\mathbf{x} dt$$

pour tout  $(\psi, \theta) \in \left( L^2 \left( (0, T); H^1(\Omega) \right) \right)^2$ .

La démonstration du Théorème 1.13 se fait alors en deux étapes.

- (a) Premièrement, on montre que la norme des résidus permet de contrôler l'erreur dans des normes bien choisies :

$$\|\mathcal{R}_o(s_h, P_h)\|_{L^2((H^1)')}^2 + \|\mathcal{R}_t(s_h, P_h)\|_{L^2((H^1)')}^2 + \|s_h(\cdot, 0) - s^0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ \geq C \left( \|s_h - s\|_{L^\infty(H^{-1})}^2 + \|P_h - P\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\varphi(s_h) - \varphi(s)\|_{L^2(Q_T)}^2 \right). \quad (1.44)$$

Cette preuve est une adaptation de la preuve d'unicité proposée dans [81]. En effet, il suffit de prendre  $(s_h, P_h)$  solution faible pour que l'estimation (1.44) assure l'unicité de la solution et la continuité par rapport à la donnée initiale dans une topologie bien choisie. Cette partie de la preuve nécessite en particulier l'hypothèse **(H1)**.

- (b) La deuxième partie de la démonstration consiste à utiliser la machinerie de la théorie de l'analyse a posteriori basée sur le contrôle des résidus (voir par exemple [223] et les références qui s'y trouvent) pour obtenir la borne calculable et localisable de la norme duale des résidus

$$\|\mathcal{R}_o(s_h, P_h)\|_{L^2((H^1)')}^2 + \|\mathcal{R}_t(s_h, P_h)\|_{L^2((H^1)')}^2 \leq \left( \eta_{\text{sp}}^{n,k,i} + \eta_{\text{tm}}^{n,k,i} + \eta_{\text{lin}}^{n,k,i} + \eta_{\text{alg}}^{n,k,i} + \eta_{\text{quad}}^{n,k,i} \right)^2. \quad (1.45)$$

C'est dans cette partie de la preuve que nous utilisons l'hypothèse **(H2)** sur la méthode numérique.

Les estimateurs proposés dans [A7] permettent de stopper les procédures itératives dès que l'erreur engendrée par leur convergence incomplète est du même ordre que l'erreur de discrétisation. Cette stratégie a été utilisée avec succès dans [224] (voir aussi [102, 100] pour des modèles plus compliqués où seule la partie (1.45) de l'estimation peut être obtenue).



## Chapitre 2

# Lois de conservation scalaires avec flux discontinu

Les publications présentées dans ce chapitre sont [A16, A17, C5, A14, A12, A10, A8, A6, A4].

Au cours de ma thèse, plus particulièrement dans le cadre des études présentées dans [A16, A17], j'ai commencé à m'intéresser aux lois de conservations à flux discontinu. En effet, de tels problèmes apparaissent naturellement pour certaines asymptotiques à partir des modèles étudiés au chapitre §1. Les progrès réalisés dans l'analyse des lois de conservation à flux discontinu à cette période (on mentionnera en particulier l'article [29] sur lequel reposent les résultats proposés dans [A14, A12, A10, A8, A6, A4]) ont permis de pousser l'étude à des cas plus complexes : nous avons poursuivi l'analyse asymptotique pour les écoulements en milieux poreux [A10], développé de méthodes numériques dédiées [A8, A6], ou encore contribué à la théorie générale des lois de conservation scalaires à flux discontinu [A12, A4].

### 2.1 Limite hyperbolique d'écoulements en milieux poreux

Lorsque l'on considère un écoulement diphasique incompressible immiscible dans un milieu poreux, la diffusion capillaire est souvent négligée. En effet, comme cela apparaît sur la figure 2.1a, les forces de capillarité sont à l'équilibre pour un milieu poreux idéal où tous les pores ont le même diamètre. En revanche, la figure 2.1b illustre le fait que dans le cas où le milieu poreux est constitué de deux roches, on s'attend à ce que la capillarité joue un rôle important au niveau de l'interface.

En gardant les notations du chapitre §1 de ce mémoire (en particulier de la partie §1.3), nous considérons l'écoulement de deux phases incompressibles est immiscibles dans un milieu poreux unidimensionnel constitué de deux roches  $\Omega_1 = ]-\infty, 0[$  et  $\Omega_2 = ]0, \infty[$ . L'équation gouvernant cet écoulement au sein des roches  $\Omega_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) est donnée par

$$\partial_t s + \partial_x (f_i(s) - \nabla \varphi_i(s)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \quad (2.1)$$

les comportements des fonctions  $f_i$  et  $\varphi_i$  étant illustrés par la figure 2.2 (on a fixé les porosités  $\phi_i$  égales à 1 pour alléger les notations). Les fonctions  $f_i$  apparaissant dans la partie convective du flux sont *compatibles*, i.e.,

$$f_1(0) = f_2(0) \quad \text{et} \quad f_1(1) = f_2(1) \quad (2.2)$$

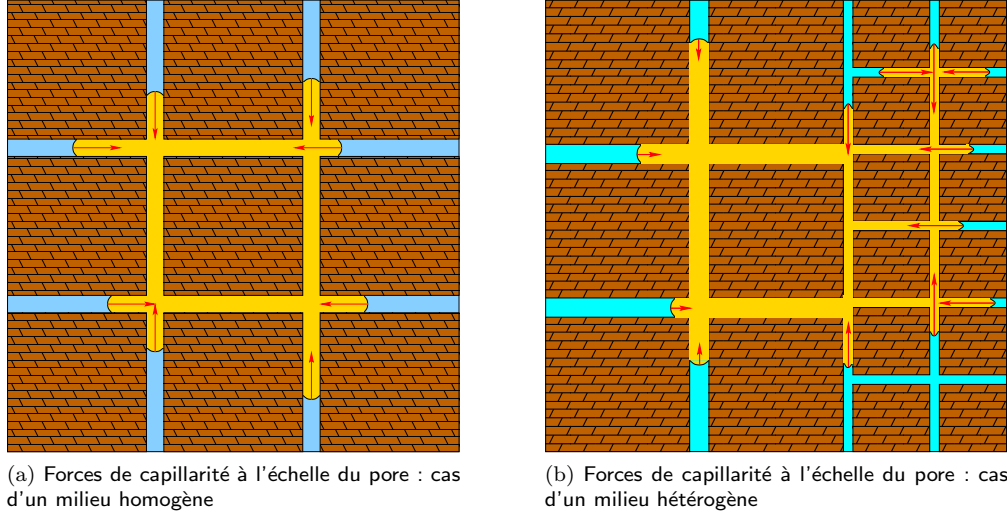


FIGURE 2.1 – À l'échelle du pore, la pression capillaire est une fonction croissante de la courbure de l'interface entre les deux phases. L'angle de mouillage, c'est à dire l'angle au point (ou sur la ligne en 3d) où les deux phases et la roche se rencontrent, est une donnée physique du problème dépendant des fluides et de la roche. Par conséquent, plus les pores sont étroits, plus la pression capillaire est grande. Dans la configuration homogène (a), les forces de capillarité sur le fluide non mouillant (en jaune sur la figure) se compensent. Les forces de capillarité résultantes au niveau macroscopique sont alors petites. En revanche, cet équilibre est perdu dans le cas (b) où le fluide non-mouillant se trouve à cheval sur les deux roches dont les caractéristiques diffèrent (diamètre des pores, angles de contact,...)

et *quasi-concaves* (*bell-shaped* dans la littérature en anglais), i.e.,

$$\text{il existe } u_i^* \in [0, 1] \text{ tel que } f_i'(u)(u - u_i^*) < 0 \text{ pour p.t. } u \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Négliger la diffusion capillaire dans le modèle revient alors à regarder la loi de conservation scalaire à flux discontinu (par rapport à la variable d'espace)

$$\partial_t s + \partial_x f(s, x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T), \quad (2.4)$$

où  $f(s, x) = f_1(s)\mathbf{1}_{\Omega_1}(x) + f_2(s)\mathbf{1}_{\Omega_2}(x)$ . On se donne aussi la condition initiale

$$s|_{t=0} = s_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1]). \quad (2.5)$$

Supposons pour simplifier que la solution  $s$  de (2.4) admet des traces  $s_1$  et  $s_2$  de part et d'autre de l'interface  $\Sigma := \{x = 0\} \times (0, T)$  –cette hypothèse d'existence de traces de la solution peut-être contournée à l'aide de résultats dus à E. Yu. Panov [195], mais simplifie la présentation–. La conservation du volume d'huile à l'interface revient à imposer la continuité du flux

$$f_1(s_1(t)) = f_2(s_2(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T). \quad (2.6)$$

Puisque dans  $\Omega_i \times (0, T)$ , la solution recherchée de (2.4) est obtenue comme limite  $\epsilon \rightarrow 0$  du problème parabolique

$$\partial_t s^\epsilon + \partial_x f_i(s^\epsilon) = \epsilon \partial_{xx} \varphi_i(s^\epsilon), \quad \text{avec } \epsilon > 0,$$

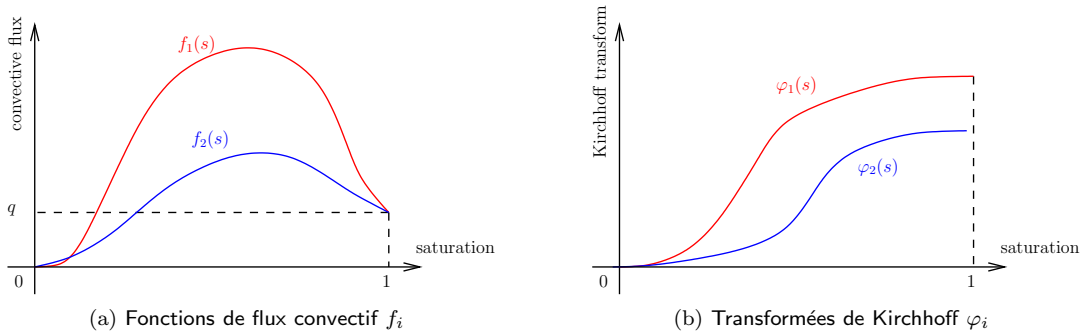


FIGURE 2.2 – En présence de gravité, les fonctions  $f_i$  sont quasi-concaves (2.3) — c’est à dire croissantes puis décroissantes — et compatibles (2.2) :  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  et  $f_1(1) = f_2(1) = q$ , où  $q$  désigne le débit total (on a supposé  $q = 0$  dans la partie §1.3.3 de ce mémoire par souci de simplicité). Les fonctions  $\varphi_i$  sont strictement croissantes sur  $[0, 1]$ . Leurs dérivées  $\varphi'_i$  s’annulent en  $s = 0$  et  $s = 1$ , ce qui induit une dégénérescence du problème parabolique considéré.

la solution doit vérifier les conditions d’entropie de Kružkov : en notant

$$\phi_i(s, \kappa) = \text{sign}(s - \kappa)(f_i(s) - f_i(\kappa)), \quad \forall (s, \kappa) \in [0, 1]^2, \quad (2.7)$$

la limite  $s$  de  $s^\epsilon$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 vérifie

$$\partial_t |s - \kappa| + \partial_x \phi_i(s, \kappa) \leq 0 \quad \text{pour tout } \kappa \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

Les inégalités (2.8) doivent être comprises au sens des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega_i \times (0, T))$ , c’est à dire contre des fonctions test s’annulant sur l’interface. Avant d’aller plus loin, quelques rappels bibliographiques s’imposent.

**Remarque 2.1** *Hors du champ des écoulements en milieux poreux, d’autres modèles mènent classiquement à des lois de conservation scalaires avec flux discontinu. Mentionnons par exemple les modèles de type Lighthill-Whitham-Richards [174, 197] qui permettent de prévoir la densité de voitures sur des autoroutes. Lorsque la route change brutalement de capacité (comme lors d’un changement du nombre de voies) [84, 64], ou lorsque la circulation est contrainte en un point (par exemple par une barrière de péage) [85, 27], des effets singuliers sont produits. Ces effets induisent des effets similaires à ceux produits par l’interface entre les deux roches (cf. Figure 2.1b). Mentionnons aussi des modèles pour des stations de traitement des eaux [103], ou alors des modèles de type Burgers avec particule [30] (voir aussi [31]).*

## 2.2 État de l’art de l’analyse mathématique

Vu leur intérêt pratique important, les lois de conservation scalaires ont été l’objet de nombreux travaux. On mentionnera les travaux pionniers [211, 212, 5, 204, 157, 3, 38, 4, 36, 41, 181, 39, 40] sur le sujet. En particulier, il a été remarqué dans [4] que le problème (2.6)–(2.8) admet une infinité de solutions. En effet, l’absence de condition d’entropie à l’interface  $\{x = 0\}$  autorise des discontinuités sous-compressives (parfois appelées *chocs non-classiques*) violant les critère de Lax [166] ou d’Oleńik [190]. Pour sélectionner une solution du problème (2.6)–(2.8), il faut imposer une condition d’entropie *ad hoc* au niveau de l’interface  $\{x = 0\}$ . Cette condition s’obtient



en général à partir d'une analyse asymptotique faisant intervenir le problème complet avec de la dissipation. Parmi les conditions classiquement étudiées, mentionnons la condition menant à la notion de solution optimale [4] ou encore la notion de solution de viscosité évanescence [104, 28].

### 2.2.1 Introduction à la théorie d'Andreianov-Karlsen-Risebro

Nous donnons ci-dessous un rappel de la théorie axiomatique proposée par B. Andreianov, K. H. Karlsen et N. H. Risebro [29] sur laquelle sont basés les résultats présentés dans les parties §2.3 et §2.4 de ce manuscrit.

Les résultats présentés ci-dessous s'appliquent pour tout couple de fonctions de flux  $(f_1, f_2)$  Lipschitziennes compatibles au sens de (2.2). En particulier, l'hypothèse que les flux sont quasi-concaves au sens de (2.3) n'est pas utilisée dans cette partie.

**Définition 2.2 (Germe  $L^1$ -dissipatif)** *Un sous-ensemble  $\mathcal{G}$  de  $[0, 1]^2$  est un germe  $L^1$ -dissipatif ( $L^1$ -D pour faire court) pour des fonctions de flux  $f_1$  et  $f_2$  compatibles au sens de (2.2) si*

(i) *les éléments du germe vérifient la condition de Rankine Hugoniot :*

$$f_1(u_1) = f_2(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in \mathcal{G};$$

(ii) *on a la propriété de dissipation suivante entre éléments du germe :*

$$\phi_2(u_2, \hat{u}_2) \leq \phi_1(u_1, \hat{u}_1), \quad \forall ((u_1, u_2), (\hat{u}_1, \hat{u}_2)) \in \mathcal{G}^2,$$

où  $\phi_i$  est défini par (2.7).

Nous rappelons maintenant quelques notions introduites dans [29].

- Un germe  $L^1$ -D  $\widehat{\mathcal{G}}$  est une *extension* du germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathcal{G}}$ .
- Un germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  est dit *maximal* si sa seule extension est lui-même.
- Un germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  est *défini* s'il admet une unique extension maximale.
- Le *dual*  $\mathcal{G}^*$  d'un germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  est donné par

$$\mathcal{G}^* = \{(v_1, v_2) \in [0, 1]^2 \mid f_1(v_1) = f_2(v_2) \text{ et } \phi_2(u_2, v_2) \leq \phi_1(u_1, v_1), \forall (u_1, u_2) \in \mathcal{G}\}. \quad (2.9)$$

**Proposition 2.3** *Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1$ -D défini, alors son unique extension maximale coïncide avec son dual  $\mathcal{G}^*$ .*

**Définition 2.4 (Solution  $\mathcal{G}$ -entropique)** *Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1$ -D défini pour les fonctions de flux  $f_1, f_2$  vérifiant la relation de compatibilité (2.2). Une fonction  $s \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T); [0, 1])$  est dite solution  $\mathcal{G}$ -entropique si*

(i)  *$s$  est solution faible de (2.4), c'est à dire que pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T])$ , on a*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} s \partial_t \psi dx dt + \int_{\mathbb{R}} s_0 \psi(\cdot, 0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f(s; x) \partial_x \psi dx dt = 0; \quad (2.10)$$

(ii)  *$s$  est solution entropique au sens de Kruřkov de part et d'autre de l'interface, c'est à dire que pour  $i \in \{1, 2\}$ , pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}^+(\Omega_i \times [0, T])$  et pour tout  $\kappa \in [0, 1]$ , on a*

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} |s - \kappa| \partial_t \psi dx dt + \int_{\Omega_i} |s_0 - \kappa| \psi(\cdot, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i(s, \kappa) \partial_x \psi dx dt \geq 0; \quad (2.11)$$

(iii)  $s$  vérifie les conditions d'entropie adaptées au germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  au niveau de l'interface au sens de [36], c'est à dire que pour tout couple  $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathcal{G}$  et pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R} \times [0, T])$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \{1, 2\}} \int_0^T \int_{\Omega_i} |s - \kappa_i| \partial_t \psi \, dx \, dt + \sum_{i \in \{1, 2\}} \int_{\Omega_i} |s_0 - \kappa_i| \psi(\cdot, 0) \, dx \\ + \sum_{i \in \{1, 2\}} \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i(s, \kappa_i) \partial_x \psi \, dx \, dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

La condition d'entropie à l'interface (2.12) est celle qui permet de sélectionner une solution particulière du problème. Elle prescrit en particulier que les traces  $(s_1(t), s_2(t))$  de la solution sur l'interface  $\{x = 0\}$  (si ces traces existent) doivent appartenir pour presque tout temps au germe  $L^1$ -D maximal  $\mathcal{G}^*$ . Les notions présentées précédemment sont suffisantes pour garantir l'unicité des solutions  $\mathcal{G}$ -entropiques pour tout germe  $\mathcal{G}$  qui soit  $L^1$ -D et défini. Afin d'assurer l'existence d'une solution, il nous faut encore introduire une nouvelle notion : celle de germe complet.

- Un germe  $L^1$ -D  $\mathcal{G}$  est dit *complet* si pour tout couple  $(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, 1]^2$ , il existe une solution  $\mathcal{G}$ -entropique au problème de Riemann correspondant à la donnée initiale

$$s_0(x) = \sigma_1 \mathbf{1}_{\Omega_1}(x) + \sigma_2 \mathbf{1}_{\Omega_2}(x).$$

**Théorème 2.5 (Existence et unicité de la solution  $\mathcal{G}$ -entropique)** *Soient  $f_1, f_2$  deux fonctions  $L_f$ -lipschitziennes vérifiant la condition de compatibilité (2.2). Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1$ -D défini dont le germe dual  $\mathcal{G}^*$  est complet.*

- (i) *Pour toute donnée initiale  $s_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ , il existe une unique solution  $\mathcal{G}$ -entropique  $s$  au sens de la Définition 2.4.*
- (ii) *Cette solution appartient à  $C([0, T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$  d'après [A15] (voir aussi §5.1 de ce mémoire).*
- (iii) *Soit  $\widehat{s}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$  une autre donnée initiale, et soit  $\widehat{s}$  la solution  $\mathcal{G}$ -entropique correspondante, on a le principe de contraction  $L^1$  suivant :*

$$\int_a^b |s(x, t) - \widehat{s}(x, t)| \, dx \leq \int_{a-L_f t}^{b+L_f t} |s_0(x) - \widehat{s}_0(x)| \, dx, \quad \forall [a, b] \subset \mathbb{R}, \forall t \in [0, T].$$

La preuve de l'existence d'une solution  $\mathcal{G}$ -entropique repose sur la convergence du schéma de Godunov. Résoudre explicitement les multiples problèmes de Riemann à l'interface  $\{x = 0\}$  peut s'avérer difficile, d'où l'intérêt de proposer des approches numériques alternatives.

### 2.2.2 La cas des flux quasi-concaves

Dans de nombreux modèles, comme en particulier pour les écoulements en milieux poreux ou pour des modèles de trafic routier, les fonctions de flux  $f_i$  sont quasi-concaves, c'est à dire que l'hypothèse (2.3) est vérifiée. En particulier, les fonctions  $f_i$  ne sont constantes sur aucun intervalle de  $[0, 1]$ , ce qui permet d'appliquer un résultat de E. Yu. Panov [195] et d'affirmer que pour un germe  $\mathcal{G}$  défini quelconque, toute solution  $\mathcal{G}$ -entropique  $s$  admet des traces  $s_i$  depuis  $\Omega_i$  sur l'interface  $\{x = 0\} \times (0, T)$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{(-h, 0)} |s(x, t) - s_1(t)| \, dx \, dt = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{(0, h)} |s(x, t) - s_2(t)| \, dx \, dt = 0.$$

Et comme cela a été annoncé précédemment, il résulte de la condition d'entropie (2.12) que pour presque tout  $t \in (0, T)$ , on a  $(s_1(t), s_2(t)) \in \mathcal{G}^*$ .

Nous introduisons maintenant la notion de *connexion* qui joue un rôle fondamental dans la caractérisation des germes lorsque les flux sont quasi-concaves [4, 65]

**Définition 2.6** *Un couple  $(A, B) \in [0, 1]^2$  est une connexion pour les fonctions de flux  $f_1, f_2$  si  $f_1(A) = f_2(B)$  et si  $A \geq u_1^*$  et  $B \leq u_2^*$ . La connexion est dite optimale si  $A = u_1^*$  ou si  $B = u_2^*$ . Dans la suite, on note  $\mathfrak{C}$  l'ensemble des connexions.*

Si  $(A, B)$  est une connexion, alors  $A\mathbf{1}_{\Omega_1} + B\mathbf{1}_{\Omega_2}$  est une solution faible stationnaire de (2.4). La discontinuité en  $\{x = 0\}$  est sous-compressive : les caractéristiques sortent de la discontinuité, violant ainsi le critère de Lax.

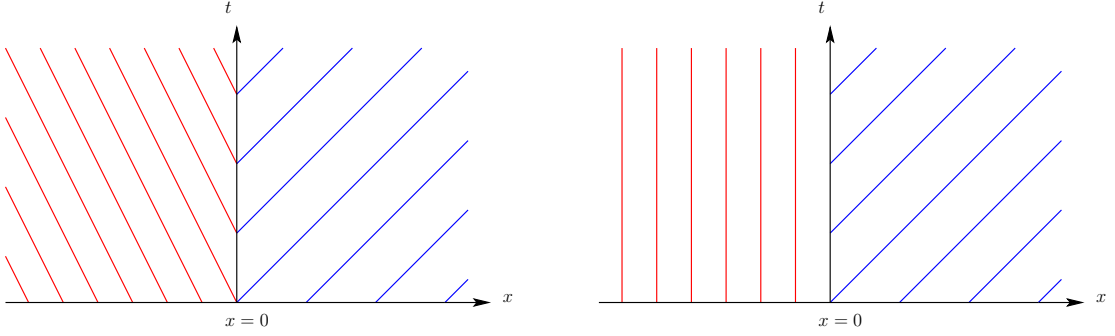


FIGURE 2.3 – Tracé des courbes caractéristiques dans le cas d'une connexion non-optimale (à gauche) et dans le cadre d'une connexion optimale avec  $A = u_1^*$  (à droite). Les caractéristiques sortent de ligne de discontinuité  $\{x = 0\}$  entre les états  $A$  et  $B$  à gauche et à droite (le cas optimal est dégénéré).

**Proposition 2.7** *Lorsque les fonctions de flux sont bell-shaped, chaque germe contient une unique connexion  $(A, B)$ . Il y a donc bijection entre l'ensemble des germes  $L^1$ -D et l'ensemble  $\mathfrak{C}$  des connexions. Le germe constitué du singleton  $\{(A, B)\}$  est défini dès que  $(A, B) \in \mathfrak{C}$ . De plus, tous les germes  $L^1$ -D sont complets.*

Grâce à l'hypothèse *bell-shaped* sur les flux, il existe une unique connexion  $(A, B)$  telle que  $f_1(A) = f_2(B) = \overline{F}$  pour tout  $\overline{F} \in [\max\{f_i(0), f_i(1)\}, \min_i f_i(u_i^*)]$ . On notera  $(A_{\overline{F}}, B_{\overline{F}})$  ou  $\overline{F}_{(A, B)}$  lorsque l'on souhaitera souligner cette correspondance. On notera  $(A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}})$  la connexion optimale et  $\overline{F}_{\text{opt}}$  le niveau de flux correspondant.

Comme cela a été explicité dans [3], le flux de Godunov à l'interface correspondant à la solution optimale, c'est à dire  $\{(A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}})\}$ -entropique, est donné par

$$G_{\text{opt}}(s_\ell, s_r) = \min(f_1(\min(s_\ell, u_1^*)), f_2(\max(s_r, u_2^*))), \quad \forall (s_\ell, s_r) \in [0, 1]^2. \quad (2.13)$$

Nous donnons maintenant un résultat démontré dans [A14].

**Proposition 2.8** *Soit  $(A, B) \in \mathfrak{C}$  une connexion, alors le flux de Godunov à l'interface  $\{x = 0\}$  correspondant à la solution  $\{(A, B)\}$ -entropique est donné par la formule*

$$G_{(A, B)}(s_\ell, s_r) = \min(\overline{F}_{(A, B)}, G_{\text{opt}}(s_\ell, s_r)).$$

*De plus, l'unique solution  $\{(A, B)\}$ -entropique  $s$  vérifie la contrainte unilatérale  $f_i(s_i(t)) \leq \overline{F}_{(A, B)}$  sur le flux à l'interface pour presque tout  $t \in (0, T)$ .*

L'interprétation de la formule ci-dessus est la suivante : alors que la notion de solution optimale est une extension naturelle (différente de celle de viscosité évanescence, cf. [65, 28]) de la notion de solution entropique classique (à la Oleïnik [190] ou à la Kružkov [163]) dans le cadre où la fonction de flux  $f$  dépend de  $x$ , imposer une autre condition entropique d'interface revient à imposer une contrainte sur le flux à travers l'interface  $\{x = 0\}$  dans la lignée de ce qui a été proposé dans [85, 27].

## 2.3 Approche par diagramme de transmission

### 2.3.1 Retour au cas des milieux poreux

Considérons le cas d'un écoulement diphasique en milieu poreux gouverné par les équations introduites dans les parties §1.3.3 et §2.1 de ce mémoire (on néglige la porosité pour alléger les notations), à savoir

$$\partial_t s^1 + \partial_x f_i(s^1) = \partial_{xx} \varphi_i(s^1) \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T), \quad (2.14)$$

le flux étant continu à l'interface  $\{x = 0\}$  ainsi que la pression capillaire (étendue)

$$\pi_1(s_1^1) \cap \pi_2(s_2^1) \neq \emptyset \quad \text{sur } \{x = 0\} \quad (2.15)$$

où les  $\pi_i$  sont des graphes maximaux monotones de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . En faisant un changement d'échelle hyperbolique, à savoir en considérant

$$x \rightarrow \frac{x}{\epsilon} \quad t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$$

pour  $\epsilon > 0$  petit dans (2.14)–(2.15), on obtient les équations

$$\partial_t s^\epsilon + \partial_x f_i(s^\epsilon) = \epsilon \partial_{xx} \varphi_i(s^\epsilon) \quad \text{dans } \Omega_i \times (0, T) \quad (2.16)$$

pour caractériser l'écoulement au sein des roches homogènes. Au niveau de l'interface entre les roches, on a toujours la continuité des flux ainsi que la continuité de la pression capillaire étendue :

$$\pi_1(s_1^\epsilon) \cap \pi_2(s_2^\epsilon) \neq \emptyset \quad \text{sur } \{x = 0\}. \quad (2.17)$$

Passons formellement à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  dans les équations (2.16)–(2.17). Comme l'opérateur d'ordre supérieur dans (2.16) est un opérateur de diffusion, on peut affirmer (voir par exemple [60]) que l'éventuelle limite  $s$  de  $s^\epsilon$  satisfait les inégalités d'entropie (2.8) loin de l'interface. Au niveau de l'interface  $\{x = 0\}$ , la continuité du flux s'écrit

$$f_1(s_1) = f_2(s_2) \quad (2.18)$$

alors que la continuité de la pression capillaire s'écrit

$$\pi_1(s_1) \cap \pi_2(s_2) \neq \emptyset,$$

ou de manière équivalente –on rappelle ici que les inverses  $\pi_i^{-1}$  des graphes de pression capillaire sont des fonctions croissantes au sens large–

$$\text{il existe } p \in \overline{\mathbb{R}} \text{ tel que } s_i = \pi_i^{-1}(p), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.19)$$

Ces deux conditions sont incompatibles, et les traces  $s_i$  de la solution  $s$  dite de *capillarité évanescence* ne peuvent pas satisfaire (2.18) et (2.19) simultanément en général. On peut justifier

rigoureusement, par passage à la limite en epsilon, le résultat formel (2.18), c'est à dire que la conservation du volume d'huile est assurée par le modèle hyperbolique. En revanche, la continuité de la pression capillaire (2.19) est à relaxer en signifiant que la relation n'est vérifiée qu'à une couche limite près. Plus précisément, si on note

$$G_i(a, b) = \begin{cases} \min_{s \in [a, b]} f_i(s) & \text{si } a \leq b \\ \max_{s \in [b, a]} f_i(s) & \text{si } a \geq b \end{cases} \quad (2.20)$$

le flux de Godunov associé à la fonction de flux  $f_i$ , les conditions (2.18) et (2.19) doivent être remplacés par

$$\text{il existe } p \in \overline{\mathbb{R}} \text{ tel que } f_1(s_1) = G_1(s_1, \pi_1^{-1}(p)) = G_2(\pi_2^{-1}(p), s_2) = f_2(s_2). \quad (2.21)$$

Écrire que  $f_1(s_1) = G_1(s_1, \pi_1^{-1}(p))$  (resp.  $G_2(\pi_2^{-1}(p), s_2) = f_2(s_2)$ ) revient exactement à dire que  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) est une trace admissible à gauche (resp. à droite) au sens de Bardos, Le Roux et Nédélec [44] pour la donnée au bord  $\pi_1^{-1}(p)$  (resp.  $\pi_2^{-1}(p)$ ). Il reste maintenant à comprendre le lien entre la relation (2.21) et la théorie existante présentée au §2.2.

### 2.3.2 Cas des flux *bell-shaped*

Dans le cadre des écoulements en milieux poreux, il est naturel de supposer que les fonctions de flux sont quasi-concaves au sens de (2.3). Comme cela a été souligné dans la Proposition 2.7, il suffit de déterminer quelle connexion  $(A, B) \in \mathfrak{C}$  fait partie du germe  $\mathcal{G}$  pour savoir quel critère d'entropie ajouter à l'interface  $\{x = 0\}$ . Nous suivons pour cela la procédure géométrique détaillée dans [A10] et illustrée sur la Figure 2.4.

On définit l'ensemble  $\mathfrak{P}$  des couples  $(s_1, s_2)$  satisfaisant (2.19), c'est à dire

$$\mathfrak{P} = \{(\pi_1^{-1}(p), \pi_2^{-1}(p)) \in [0, 1]^2 \mid p \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

des couples de traces pour lesquels la pression capillaire est continue à l'interface.  $\mathfrak{P}$  définit un graphe maximal monotone de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . En particulier, on remarque que  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$  appartiennent à  $\mathfrak{P}$ . De part l'hypothèse (2.3) faite sur les flux, l'ensemble  $\mathfrak{C}$  des connexions est une courbe strictement décroissante.  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{C}$  se croisent donc en au plus 1 point. On a alors l'alternative suivante :

- (a) si  $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{C} = \{(A, B)\} \neq \emptyset$ , alors la solution de capillarité évanescence vérifiant (2.21) à l'interface coïncide avec l'unique solution  $\{(A, B)\}$ -entropique.
- (b) si  $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{C} = \emptyset$ , alors la solution de capillarité évanescence vérifiant (2.21) à l'interface coïncide avec l'unique solution optimale  $\{(A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}})\}$ -entropique.

Nous donnons maintenant un résultat issu de [A10] permettant de justifier pleinement l'étude proposée ci-dessus.

**Théorème 2.9** *Soit  $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, et soit  $s_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ . Soit  $(s^{\epsilon_n})_{n \geq 1}$  la suite de solutions au sens introduit dans la partie §1.3.3 du mémoire du problème (2.16)–(2.17) associées à la donnée initiale  $s_0$ . Alors la suite  $(s^{\epsilon_n})_{n \geq 1}$  converge fortement dans  $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times (0, T))$  pour tout  $p \in [1, \infty)$  vers l'unique solution de capillarité évanescence  $s$  caractérisée par l'alternative présentée ci-dessus sur l'intersection ou non des ensembles  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{C}$ .*

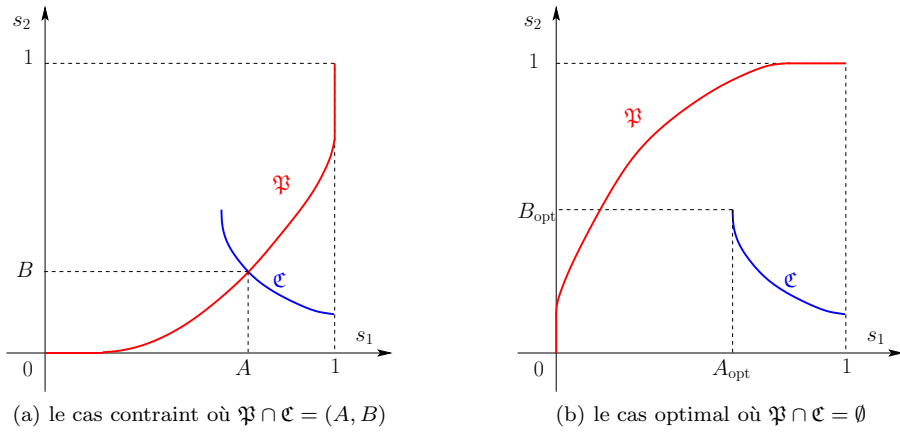


FIGURE 2.4 – Illustration graphique des ensembles  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{C}$  et de leur possible intersection.

De cette analyse et de la formule explicite pour le schéma de Godunov donnée dans la Proposition 2.8, on déduit un schéma numérique (le schéma de Godunov) permettant de capturer la solution de capillarité évanescence. Une fois la bonne connexion  $(A, B)$  trouvée, le schéma de Godunov explicite est particulièrement performant. Par exemple, on compare dans les Figures 2.5 et 2.6 les résultats numériques obtenus pour les schéma implicite proposé dans la partie §1.4.2 de ce mémoire (voir aussi [A18]) pour  $\epsilon = 10^{-3}$  avec les résultats obtenu par le schéma de Godunov adapté. Outre la grande similitude des résultats, il est à noter que le schéma de Godunov explicite nécessite 800 fois moins de temps de calcul, en grande partie en raison du caractère implicite du schéma utilisé pour le problème parabolique.

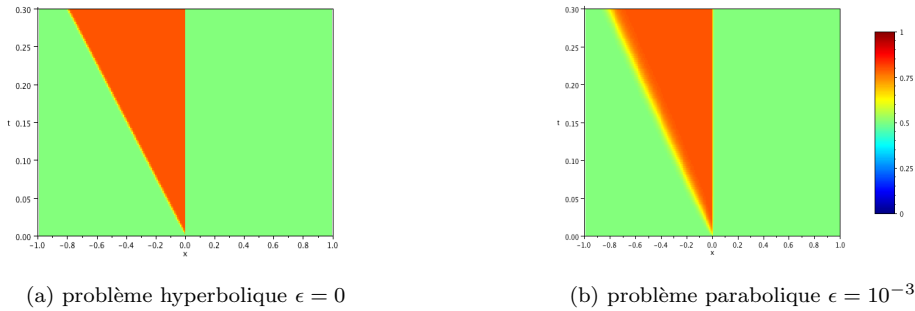


FIGURE 2.5 – Tracé des solutions  $s$  et  $s^\epsilon$  dans le  $(x, t)$  obtenues respectivement par le schéma de Godunov explicite (cf. Proposition 2.8) et par le schéma implicite étudié dans la partie §1.4.2 de ce manuscrit et dans [A18]. Dans le cas présenté ci-dessus,  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{C} = \emptyset$ , si bien que la solution physiquement pertinente à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  est la solution entropique optimale.

Il est primordial que même si la diffusion capillaire est négligée, la connaissance des graphes de pression capillaire est nécessaire pour caractériser la solution de capillarité évanescence qui est la seule physiquement pertinente. Cette constatation est nouvelle et va à l'encontre des résultats existants de la littérature [155, 182, 213]. Une conséquence directe et fondamentale est que, dans

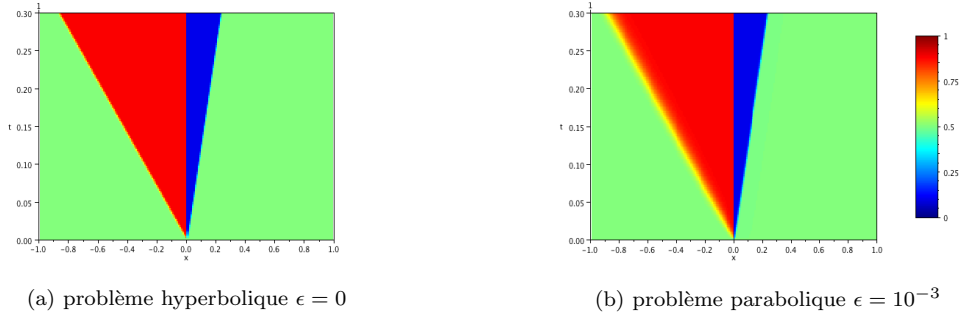


FIGURE 2.6 – Tracé des solutions  $s$  et  $s^\epsilon$  dans le  $(x, t)$  obtenues respectivement par le schéma de Godunov explicite (cf. Proposition 2.8) et par le schéma implicite étudié dans la partie §1.4.2 de ce manuscrit et dans [A18]. Dans le cas présenté ci-dessus,  $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$ , si bien que la solution physiquement pertinente à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  n'est plus la solution entropique optimale. On constate alors que la solution diffère profondément de la solution présentée à la Figure 2.5. A noter que les fonctions de flux  $f_i$  sont identiques dans les cas tests illustrés par les Figures 2.5 et 2.6. La seule différence entre les cas test intervient dans la définition des graphes de pression capillaire  $\pi_i$ .

le cas général, la connaissance des graphes de pression capillaire est nécessaire à la construction de tout schéma numérique convergent.

**Remarque 2.10** *Au cours de ma thèse, j'ai étudié le cas particulier d'une pression capillaire ne dépendant que de la roche et plus de la saturation, menant aux contributions [A16, A17] et [C5]. Bien que la motivation initiale soit différente, ces travaux peuvent s'analyser de la manière présentée ci-dessus. L'ensemble  $\mathfrak{P}$  est dans ce cas soit caractérisé par*

$$\mathfrak{P} = \{(s_1, s_2) \in [0, 1]^2 \mid s_1(1 - s_2) = 0\},$$

soit par

$$\mathfrak{P} = \{(s_1, s_2) \in [0, 1]^2 \mid s_2(1 - s_1) = 0\}.$$

*Dans le premier cas, la solution optimale est toujours sélectionnée. En revanche, dans le deuxième cas, c'est une autre solution, appelée solution barrière et caractérisée par le fait qu'elle minimise le flux à l'interface, qui est sélectionnée. Nous renvoyons à [A16, A17] et [C5] pour de plus amples discussions sur le sujet.*

### 2.3.3 Analyse pour des flux généraux

Deux constatations apparaissent en filigrane dans la partie §2.2 de ce manuscrit :

- (a) dans le cas de flux généraux (i.e., non *bell-shaped*), la théorie proposée dans [29] est essentiellement abstraite. Le seul schéma numérique dont on dispose est le schéma de Godunov. Or le fait que l'on sache résoudre le problème de Riemann est une hypothèse mathématique (le germe  $\mathcal{G}$  est complet).
- (b) Dans le cas *bell-shaped*, on a une connaissance exhaustive de tous les germes. Le schéma de Godunov est donné par la formule explicite de la Proposition 2.8. D'autres schémas monotones sont disponibles pour approcher numériquement toutes les solutions entropiques des lois de conservation à flux discontinu (voir par exemple [65]).

L'approche introduite dans la partie §2.3.1 et dont l'analyse a été poussée dans [A4] permet de traiter, aussi bien au niveau de l'analyse que numériquement, de nombreux cas où les flux ne sont plus *bell-shaped*. Elle repose sur la notion de diagramme de transmission ( $\mathfrak{B}$  jouait ce rôle dans le cas des milieux poreux) et consiste à décrire à l'aide un graphe maximal monotone  $\beta$  de  $[0, 1]^2$  les quantités sur lesquelles on souhaite imposer une continuité microscopique (à couches limites près) à travers l'interface.

**Définition 2.11 (Diagramme de transmission)** *Un diagramme de transmission  $\beta \subset [0, 1]^2$  consiste en un graphe maximal monotone de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .*

**Théorème 2.12** *Soit  $\beta$  un diagramme de transmission et  $(f_1, f_2)$  des fonctions de flux lipschitziennes et compatibles au sens de (2.2), alors l'ensemble*

$$\mathcal{G}_\beta = \{(s_1, s_2) \in [0, 1]^2 \mid \exists (\sigma_1, \sigma_2) \in \beta \text{ t.q. } f_1(s_1) = G_1(s_1, \sigma_1) = G_2(\sigma_2, s_2) = f_2(s_2)\}, \quad (2.22)$$

où  $G_i$  désigne le flux de Godunov associé à  $f_i$  donné par (2.20), est un germe  $L^1$ -dissipatif maximal et complet. En particulier, il existe une unique solution  $\mathcal{G}_\beta$ -entropique.

Outre ce résultat d'existence et d'unicité d'une solution  $\mathcal{G}_\beta$ -entropique pour tout diagramme de transmission  $\beta$ , notre approche fournit une procédure simple pour calculer le flux de Godunov  $G_\beta(s_1, s_2)$  à l'interface correspondant à des données  $s_1$  et  $s_2$  de part et d'autre de l'interface.

**Proposition 2.13** *Soit  $(s_\ell, s_r) \in [0, 1]^2$ , alors le flux  $G_\beta(s_\ell, s_r) = f_i(s_i)$  à travers l'interface  $\{x = 0\}$  pour tout  $t > 0$  de l'unique solution  $\mathcal{G}_\beta$ -entropique du problème de Riemann*

$$\partial_t s + \partial_x f(s; x) = 0, \quad s|_{t=0} = s_\ell \mathbf{1}_{\Omega_1} + s_r \mathbf{1}_{\Omega_r}$$

est donné par

$$G_\beta(s_\ell, s_r) = G_1(s_\ell, \sigma_1) = G_2(\sigma_2, s_r) \quad \text{avec } (\sigma_1, \sigma_2) \in \beta. \quad (2.23)$$

Pour calculer de manière effective le flux de Godunov (2.23), on commence par se donner une paramétrisation monotone du graphe :

$$\sigma_i : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1] \\ p & \mapsto & \sigma_i(p) \end{cases} \quad \text{telle que } \beta = \{(\sigma_1(p), \sigma_2(p)) \mid p \in [0, 1]\}$$

avec des fonctions  $\sigma_i$  lipschitziennes et croissantes. On a nécessairement que  $\sigma_i(0) = 0$  et  $\sigma_i(1) = 1$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . En raison des propriétés de monotonie des flux de Godunov  $G_i$  (qui sont croissants par rapport à leur première variable et décroissants par rapport à la seconde), la fonction

$$\Psi : p \mapsto G_1(s_\ell, \sigma_1(p)) - G_2(\sigma_2(p), s_r) \quad (2.24)$$

est décroissante sur  $[0, 1]$ . Il résulte de l'hypothèse de compatibilité (2.2) et de la monotonie des  $G_i$  que  $\Psi(0) \geq 0$  et  $\Psi(1) \leq 0$ . Il découle du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe  $p^* \in [0, 1]$  tel que  $G_1(s_\ell, \sigma_1(p^*)) = G_2(\sigma_2(p^*), s_r)$ . Si la valeur de  $p^*$  n'est pas nécessairement unique (la fonction  $\Psi$  est décroissante au sens large), le niveau de flux  $G_\beta(s_\ell, s_r) = G_1(s_\ell, \sigma_1(p^*)) = G_2(\sigma_2(p^*), s_r)$  l'est. Pour la résolution pratique de l'équation  $\Psi(p) = 0$ , nous préconisons l'utilisation de la méthode de la fausse position ou *regula falsi*.

**Remarque 2.14** *Si à chaque diagramme de transmission  $\beta$  correspond un germe  $L^1$ -D maximal  $\mathcal{G}_\beta$ , nous avons montré dans [A4] que tous les germes  $L^1$ -D ne correspondent pas à des diagrammes de transmission. En revanche, il est à souligner que l'approche par diagramme de transmission permet de traiter théoriquement et numériquement des modèles hors du champs des milieux poreux [103, 104, 85, 27, 28, 31, 73, 30].*



### 2.3.4 Construction et analyse d'autres schémas numériques

Pour résumer, la Proposition 2.13 et la discussion qui la suit assurent que si l'on sait calculer les flux de Godunov  $G_i$  de part et d'autre de l'interface et paramétrer le diagramme de transmission  $\beta$ , alors on sait calculer le schéma de Godunov  $G_\beta$  à l'interface  $\{x = 0\}$  correspondant à la solution  $\mathcal{G}_\beta$ -entropique. Or, calculer les flux de Godunov  $G_i$  n'est pas toujours aisé, en particulier lorsque la dynamique des fonctions  $f_i$  est complexe. On préfère se tourner dans ce cas vers des solveurs de Riemann approchés. Construire des schémas numériques pour les lois de conservation scalaire à flux discontinu basés sur des solveurs de Riemann approchés revêt donc une grande importance.

**Définition 2.15 (Solveur de Riemann approché)** *La fonction  $R_i : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un solveur de Riemann approché associé à la fonction lipschitzienne  $f_i$  si elle satisfait les hypothèses suivantes :*

- (i) consistance : pour tout  $s \in [0, 1]$ , on a  $R_i(s, s) = f_i(s)$  ;
- (ii) monotonie et régularité : la fonction  $R_i$  est  $\mathcal{L}_i$ -lipschitzienne et

$$0 \leq \partial_a R_i(a, b) \leq \mathcal{L}_i, \quad -\mathcal{L}_i \leq \partial_b R_i(a, b) \leq 0, \quad \text{pour p.t. } (a, b) \in [0, 1]^2. \quad (2.25)$$

Pour toute fonction  $f_i$   $L_{f_i}$ -lipschitzienne, on peut construire un certain nombre de solveurs de Riemann approchés correspondant. Voici une liste d'exemples non-exhaustive :

- le schéma de Lax-Friedrich :

$$R_i^{\text{LF}}(a, b) = \frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} + \frac{\Delta x}{2\Delta t}(a - b), \quad \text{sous condition CFL } \frac{L_{f_i}\Delta t}{\Delta x} \leq 1;$$

- le schéma de Rusanov :

$$R_i^{\text{LF}}(a, b) = \frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} + \frac{L_{f_i}}{2}(a - b);$$

- le schéma d'Engquist-Osher :

$$R_i^{\text{EO}}(a, b) = \frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} - \frac{1}{2} \int_a^b |f'_i(s)| ds;$$

- le schéma de Godunov (qui est le solveur de Riemann exact).

Certains autres schémas exploitent la structure physique des fonctions de flux. C'est le cas par exemple du schéma décentré amont phase par phase pour les écoulements en milieux poreux (cf. [202, 62] et [A6]) ou du schéma de Hilliges-Weidlich [148] pour les modèles de trafic routier de Lighthill-Whitham-Richards [174, 197].

**Définition 2.16 (Solveur d'interface)** *On définit le solveur de Riemann approché  $R_\beta$  à l'interface  $\{x = 0\}$  correspondant aux solveurs de Riemann approchés  $R_i$  pour les fonctions  $f_i$  et au diagramme de transmission par*

$$R_\beta(a, b) := R_1(a, \sigma_1(p)) = R_2(\sigma_2(p), b) \quad \text{pour un } p \in [0, 1], \quad \forall (a, b) \in [0, 1]^2. \quad (2.26)$$

La relation (2.26) définit bien de manière unique le solveur  $R_\beta(a, b)$ . En effet, la discussion à la fin de la partie §2.3.3 peut être intégralement reproduite en remplaçant les flux de Godunov  $G_i$  par les solveurs de Riemann approchés  $R_i$ . Le calcul effectif de  $R_\beta$  se ramène encore à la résolution d'une équation du type  $\Psi(p) = 0$  avec  $\Psi$  décroissante (au sens large). La méthode de la fausse position donne des résultats satisfaisants (robustesse et convergence sur-linéaire).

**Proposition 2.17** *Le solveur de Riemann approché satisfait les propriétés suivantes.*

(i) *La fonction  $R_\beta$  est lipschitzienne et monotone, plus précisément*

$$0 \leq \partial_a R_\beta(a, b) \leq \mathcal{L}_1, \quad -\mathcal{L}_2 \leq \partial_b R_\beta(a, b) \leq 0,$$

*ou  $\mathcal{L}_i$  désigne la constante de Lipschitz du solveur de Riemann approché  $R_i$ .*

(ii) *Soit  $(s_1, s_2) \in \beta$  tel que  $f_1(s_1) = f_2(s_2)$ , alors  $R_\beta(s_1, s_2) = G_\beta(s_1, s_2) = f_1(s_1) = f_2(s_2)$ .*

Le premier point de la proposition précédente est fondamental pour montrer la convergence d'un schéma numérique explicite sous condition CFL. La deuxième point permet de montrer que le schéma préserve un certain nombre d'états d'équilibre important (on dit que le schéma est *well-balanced*) permettant de caractériser le germe  $\mathcal{G}_\beta$ .

Soit  $\Delta x > 0$ , on discrétise la droite réelle  $\mathbb{R}$  en cellule  $(j\Delta x, (j+1)\Delta x)$ . La donnée initiale  $s_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$  est discrétisée comme suit :

$$s_{j+1/2}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} s_0(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

Étant donné un pas de temps  $\Delta t = T/(N+1) > 0$ , on considère le schéma numérique Volumes Finis explicite suivant :

$$s_{j+1/2}^{n+1} = s_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad (2.28)$$

où les flux  $(F_j^n)_{j,n}$  sont donnés par

$$F_j^n = \begin{cases} R_1(s_{j-1/2}^n, s_{j+1/2}^n) & \text{si } j < 0, \\ R_2(s_{j-1/2}^n, s_{j+1/2}^n) & \text{si } j > 0, \\ R_\beta(s_{-1/2}^n, s_{1/2}^n) & \text{si } j = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

La solution discrète  $s_h \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  est alors définie presque partout par

$$s_h(x, t) = s_{j+1/2}^n \quad \text{si } (x, t) \in (j\Delta x, (j+1)\Delta x) \times (n\Delta t, (n+1)\Delta t) \quad (2.30)$$

Le résultat principal de cette partie est consigné dans le théorème suivant dont la démonstration se trouve dans [A4]. Évidemment, le choix d'une discrétisation uniforme en espace et en temps n'est fait que pour alléger la présentation.

**Théorème 2.18** *Si la condition CFL*

$$\frac{\max(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.31)$$

*est satisfaite, alors la solution discrète  $s_{\Delta x, \Delta t}$  donnée par le schéma (2.27)–(2.30) est uniformément bornée entre 0 et 1. De plus, pour tout  $p \in [1, \infty)$ , on a*

$$s_h \xrightarrow{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} s \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R} \times [0, T])$$

*où  $s$  est l'unique solution  $\mathcal{G}_\beta$ -entropique.*

L'application de cette méthodologie a permis dans [A6] de proposer un schéma décentré amont phase par phase capturant la solution de capillarité évanescente. Notre schéma répond en particulier aux questions soulevées dans [182, 213]. Toujours grâce aux mêmes idées, nous avons aussi proposé dans [A8] un schéma qui capture la solution de capillarité évanescente dans le cadre multidimensionnel. Le problème en question est nettement plus compliqué à analyser, car l'équation hyperbolique que l'on retrouve dans le cadre monodimensionnel est couplée avec une équation elliptique sur la pression. Si une preuve de convergence de notre schéma est hors de portée, les résultats numériques présentés dans [A8] (voir Figure 2.7) illustre encore que même si la diffusion capillaire est négligée, la pression capillaire joue un rôle crucial aux interfaces entre des roches différentes.

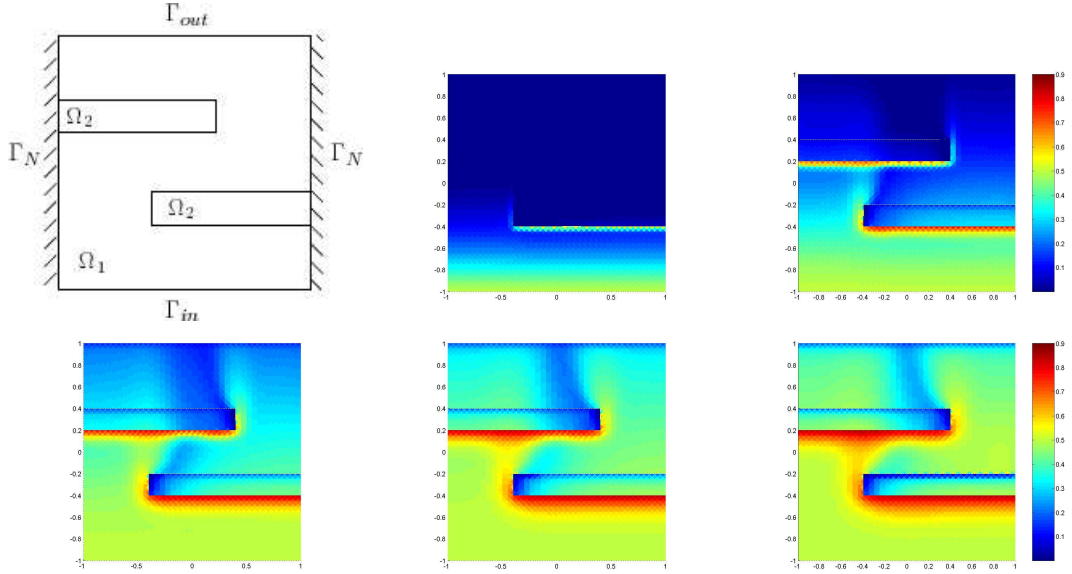


FIGURE 2.7 – On simule la remontée par poussée d'Archimède d'huile dans un milieu poreux hétérogène fait de deux roches. A saturation d'huile donnée, la pression capillaire est plus faible dans  $\Omega_1$  que dans  $\Omega_2$ , ce qui fait que l'huile rencontre des difficultés pour pénétrer dans le domaine  $\Omega_2$ , comme en attestent les instantanés aux temps  $t = 0.075, 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.8$  présentés ci-dessus. Signalons que les fonctions autres que la pression capillaire sont égales dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Les phénomènes de barrière apparaissant dans les images ci-dessus sont donc exclusivement générés par les discontinuités de la pression capillaire.

## 2.4 Estimation d'erreur pour le schéma de Godunov

La dernière question que nous aborderons dans ce chapitre est celle de la précision des méthodes numériques proposées. Il est maintenant bien connu que dans le cas monodimensionnel (ou sur maillages cartésiens) et lorsque la fonction de flux ne dépend pas de  $x$ , les schémas numériques monotones basés sur des solveurs de Riemann approchés (au sens de la Définition 2.15) sont TVD (voir [96] pour un contre-exemple sur maillage non-structuré), c'est à dire que la variation totale de la solution numérique  $s_h$  diminue au cours du temps. Grâce à cette estimation sur la variation totale et en exploitant la technique du dédoublement de variable [163],

l'estimation d'erreur suivante est obtenue [164, 146] :

$$\|s_h - s\|_{L^1(K)} \leq C(K)h^{1/2}, \quad \forall K \subset \mathbb{R} \times [0, T]$$

où  $s$  est l'unique solution entropique au sens classique de [190, 163]. Si cette estimation est optimale dans le cas d'un problème de transport linéaire, on observe numériquement de l'ordre 1 lorsque la fonction de flux est uniformément convexe ou concave. La question naturelle qui se pose alors est la suivante : est-il possible d'obtenir une estimation semblable dans le cas où la fonction  $f$  dépend de manière discontinue de  $x$ , ou tout du moins si des effets singuliers apparaissent au niveau de l'interface ?

En amont d'une analyse à la Kružkov [163] du problème avec effet singulier, deux ingrédients sont nécessaires à l'obtention d'une estimation d'erreur :

- (a) une estimation sur la variation totale de la solution exacte  $s$  qui doit rester bornée. La question de l'existence d'une telle borne pour les lois de conservation scalaire à flux discontinu est une question difficile traitée dans [2] pour un flux uniformément concave (donc quasi-concave). Il y est en particulier démontré qu'une telle estimation est possible à obtenir en général pour toute solution  $\{(A, B)\}$ -entropique autre que la solution optimale, pour laquelle des contre-exemples sont disponibles.
- (b) une estimation sur la variation totale de la solution approchée. Celle-ci doit rester bornée afin d'obtenir une estimation d'erreur optimale. Une estimation où la variation totale explose moins vite que  $1/h$  lorsque l'on raffine le maillage permet d'obtenir des estimations d'erreurs sous-optimales (voir par exemple [75, 218, 83, 123, 189]). Si on arrive à montrer que la variation totale de la solution approchée  $s_h$  reste bornée, alors en passant à la limite sur le maillage, on obtient directement une estimation sur la solution exacte  $s$ . Afin d'obtenir cette borne forte sur la variation totale de  $s_h$ , nous allons nous restreindre à l'étude du cas particulier proposé dans [85, 27] où  $f_1 = f_2$ , mais toujours avec une condition d'entropie spécifique autorisant la connexion  $(A, B)$  pour les discontinuités en  $\{x = 0\}$ .

Dans notre contribution [A12], la connexion  $(A, B)$  peut varier au cours du temps. Pour simplifier la présentation, nous supposons dans ce manuscrit que la connexion  $(A, B)$  ne dépend pas du temps, et que nous sommes donc intéressés par l'unique solution  $(A, B)$ -entropique du problème

$$\partial_t s + \partial_x f(s) = 0, \quad s|_{t=0} = s_0. \quad (2.32)$$

La fonction de flux  $f$  apparaissant dans l'équation ci-dessus est supposée quasi-concave (2.3) et  $\mathcal{L}$ -lipschitzienne. En vertu de la Proposition 2.8 (cette constatation remonte en réalité à [27]) imposer la connexion  $(A, B)$  revient à appliquer la contrainte unilatérale sur le flux

$$f(s_1) = f(s_2) \leq \overline{F}_{(A,B)} = f(A) = f(B), \quad \text{pour p.t. } t \in (0, T), \quad (2.33)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont toujours les traces à gauche et à droite de  $\{x = 0\}$  où s'applique la contrainte.

Comme  $f$  est quasi-concave, le flux de Godunov classique (ou optimal) correspondant est donné explicitement par

$$G(a, b) = \min(f(\min(a, u^*)), f(\max(b, u^*))), \quad \forall (a, b) \in [0, 1]^2,$$

alors que le flux contraint à l'interface est donné par

$$G_{(A,B)}(a, b) = \min(G(a, b), \overline{F}_{(A,B)}).$$

On peut alors définir la solution approchée  $s_h$  donnée par le schéma de Godunov en reproduisant la procédure détaillée en (2.27)–(2.30).

**Proposition 2.19** Soit  $s_h$  la solution discrète donnée par le schéma de Godunov correspondant à une donnée initiale  $s_0 \in L^1 \cap BV(\mathbb{R})$  avec  $0 \leq s_0 \leq 1$  presque partout. On suppose que la condition de CFL

$$\frac{\mathcal{L}\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.34)$$

est satisfaite, alors la solution discrète vérifie

$$0 \leq s_h \leq 1 \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R} \times (0, T)$$

et la variation totale de la solution discrète est uniformément bornée par rapport aux paramètres de discrétisation  $\Delta x, \Delta t$  :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|\partial_x s_h| + |\partial_t s_h|) \leq C. \quad (2.35)$$

Par conséquent, la solution exacte  $s$  vérifie aussi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|\partial_x s| + |\partial_t s|) \leq C. \quad (2.36)$$

Comme souligné dans [85], la variation totale de la solution exacte (mais donc aussi des solutions discrètes) ne diminue pas. Cependant, nous démontrons que la variation totale reste uniformément bornée dans cette nouvelle estimation.

Maintenant que les prérequis (2.35)–(2.36) à une estimations d’erreurs sont posés, nous pouvons appliquer la technique du dédoublement de variable [163] pour obtenir une estimation d’erreur. Nous nous heurtons aux mêmes difficultés que pour des problèmes aux limites [189] : traiter les conditions de bord rigoureusement implique une perte dans l’ordre de convergence. Cependant, notre traitement exploitant explicitement la trace des solutions discrètes et continues à l’interface permet de retrouver l’ordre optimal  $h^{1/2}$  sous une hypothèse vérifiée dans les cas tests pratiques. Plus précisément, on observe toujours de l’ordre  $1/2$  si  $f$  est linéaire sur certaines parties (typiquement  $f(s) = \min(s, 1 - s)$ ) et de l’ordre  $1$  si  $f$  est uniformément concave (typiquement  $f(s) = s(1 - s)$ ), ce qui signifie que le traitement de l’interface par le flux de Godunov n’ajoute pas d’erreur notable. Le résultat principal de [A12] est consigné dans le théorème suivant.

**Théorème 2.20** Soit  $s_h$  la solution discrète donnée par le schéma de Godunov sous condition de CFL (2.34), et soit  $s$  la solution exacte du problème (2.32)–(2.33). Si la donnée initiale  $s_0$  appartient à  $L^1 \cap BV(\mathbb{R})$ , on a

$$\|s_h - s\|_{L^1(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq C\Delta x^{1/3}. \quad (2.37)$$

De plus, sous une hypothèse sur les traces discrète raisonnable (vérifiée en pratique pour de nombreux cas tests), on peut démontrer que

$$\|s_h - s\|_{L^1(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq C\Delta x^{1/2}. \quad (2.38)$$

Evidemment, les résultats présentés dans le Théorème 2.20 sont localisables en espace grâce à la propagation à vitesse finie (inférieure à  $\mathcal{L}$ ) de l’information. On peut donc travailler avec des données  $s \in L^\infty \cap BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et obtenir des estimations similaires à (2.37)–(2.38).

## Chapitre 3

# Méthodes numériques non-linéaires pour les équations de diffusion

Ce chapitre résume les travaux [A9], [A2], [C1] et [P2].

Discrétiser une équation aux dérivées partielles par une méthode numérique permettant de conserver au niveau discret certaines propriétés fondamentales de la solution de l'équation n'est pas chose facile, en particulier lorsque les maillages sont généraux et en présence d'anisotropie. Nous proposons dans ce chapitre quelques éléments d'analyse numérique de méthodes permettant de préserver la positivité des solutions ou la décroissance d'une entropie.

### 3.1 Présentation de la problématique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation d'équations de diffusion avec anisotropie. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné lipschitzien et soit  $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive. Le problème elliptique anisotrope

$$-\nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3.1)$$

admet une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Le problème (3.1) est monotone, c'est à dire que si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions associées aux seconds membres  $f_1$  et  $f_2$ , alors

$$f_1 \geq f_2 \quad \implies \quad u_1 \geq u_2. \quad (3.2)$$

La linéarité du problème (3.1) implique que la propriété (3.2) est équivalente à la propriété de positivité

$$f \geq 0 \quad \implies \quad u \geq 0. \quad (3.3)$$

Approcher numériquement le problème (3.1) par des méthodes de type éléments finis [117], volumes finis [107], Galerkin discontinu [98] ou Hybrid High Order [99] mène à des systèmes linéaires de la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

où  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est inversible, et où  $\mathbf{U}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$ . L'équivalent discret de la propriété (3.3), à savoir que

$$\mathbf{F} \geq 0 \quad \implies \quad \mathbf{U} \geq 0, \quad (3.5)$$

est équivalent au fait que  $\mathbb{A}^{-1} \geq 0$ . Il est raisonnable de supposer que le système (3.4) peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{L=1}^N a_{KL}(u_K - u_L) + a_{KK}^{\text{ext}} u_K = m_K f_K, \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_N)^T$  et  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_N)^T$  et où  $m_K$  désigne la mesure de la maille  $K$ . Bien que cette condition puisse être légèrement relaxée (voir par exemple [185]), il est usuel pour obtenir la propriété (3.5) de chercher à construire des méthodes numériques telles que

$$a_{KK}^{\text{ext}} \geq 0 \quad \text{and} \quad a_{KL} \geq 0, \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall L \neq K. \quad (3.7)$$

La propriété (3.7) permet de transposer au cas discret un certain nombre de propriétés du modèle continu [140].

Il est relativement aisé (au moins en dimension  $d = 2$ ) de construire des méthodes numériques pour lesquelles la condition (3.7) est vérifiée si le problème est isotrope, c'est à dire  $\mathbb{K} = \lambda \mathbb{I}_d$  avec  $\lambda > 0$ . En effet, de telles matrices  $\mathbb{A}$  peuvent être obtenues grâce à des éléments finis P1 sur maillage de Delaunay (voir par exemple [117]) où par des schémas volumes finis avec flux à deux points sur des maillages satisfaisant la condition d'orthogonalité (voir par exemple [125, 124]).

L'obtention de méthodes satisfaisant (3.7) est plus délicate dans le cas anisotrope. Mentionnons la contribution récente [135] permettant de construire de telles méthodes dans le cas d'un maillage cartésien. En revanche, il n'y a pas à notre connaissance d'algorithme général permettant de construire des schémas linéaires monotones pour des problèmes de diffusion anisotrope sur maillage non structuré. Des schémas non-linéaires ont été proposés (voir par exemple [66, 167, 156, 225, 175, 168, 112, 205, 97, 55] et [A9]) de manière à se ramener à un problème de la forme

$$\sum_{L=1}^N \alpha_{KL}(\mathbf{U})(u_K - u_L) + \alpha_{KK}^{\text{ext}}(\mathbf{U})u_K = m_K f_K, \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.8)$$

où les coefficients  $\alpha_{KL}(\mathbf{U})$  et  $\alpha_{KK}^{\text{ext}}(\mathbf{U})$  sont tous positifs ou nuls. Dans la partie §3.2 de ce mémoire, nous analysons les propriétés fondamentales (conservation, coercivité, convergence) de schémas volumes finis monotones obtenus en corrigeant des schémas non-monotones.

Si on suppose la matrice  $\mathbb{A}$  intervenant dans (3.4) est symétrique définie positive, (ce qui est le cas des matrices issues de nombreuses discrétisations du problème (3.1)), on a

$$\mathbf{U}^T \mathbb{A} \mathbf{U} \geq \alpha |\mathbf{U}|^2 > 0, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Cette inégalité est la contrepartie discrète de l'estimation

$$\int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla u \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Or, si  $\phi$  est une fonction croissante (au sens large) et Lipschitzienne et  $\xi : u \mapsto \int_0^u \sqrt{\phi'(s)} \, ds$ , on a

$$\int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla u \cdot \nabla \phi(u) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \xi(u) \cdot \nabla \xi(u) \, d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (3.9)$$

En notant  $\phi(\mathbf{U}) = (\phi(u_1), \dots, \phi(u_N))^T$  et  $\xi(\mathbf{U}) = (\xi(u_1), \dots, \xi(u_N))^T$ , l'équivalent discret de (3.9) est

$$\phi(\mathbf{U})^T \mathbb{A} \mathbf{U} \geq \xi(\mathbf{U})^T \mathbb{A} \xi(\mathbf{U}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N. \quad (3.10)$$

La relation (3.10) est vérifiée pour toute fonction croissante  $\phi$  lorsque la matrice  $\mathbb{A}$  vérifie (3.7). Cette propriété permet par exemple de montrer la convergence de schémas monotones pour des problèmes avec des seconds membres peu réguliers [111, 71] ou d'obtenir des estimations  $L^\infty$  uniformes pour les approximations d'équations elliptiques [140].

Dans de nombreux problèmes physiques, il est important de pouvoir choisir une fonction  $\phi$  croissante particulière (par exemple la fonction de pression capillaire  $\pi$  dans le premier chapitre de ce mémoire). Pouvoir imposer une relation de la forme (3.10) pour une fonction  $\phi$  choisie au préalable permet de garantir la décroissance d'une entropie prescrite au préalable pour des problèmes instationnaires. Cet aspect sera développé dans les parties §3.3 et §3.4 de ce chapitre.

## 3.2 Corrections monotones de schémas numériques

On cherche maintenant à approcher numériquement la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (3.1). On suppose que l'on dispose pour cela d'un schéma volumes finis centré aux mailles se ramenant à la résolution d'un système linéaire (3.4) avec  $\mathbb{A}$  inversible et pouvant se mettre sous la forme (3.6). On ne suppose pas la propriété (3.5) vérifiée, mais uniquement les propriétés suivantes.

- i. *Conservation* : le schéma peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{S}_K(\mathbf{U}) := \sum_{L \in \mathcal{N}_K} F_{KL}(\mathbf{U}) + F_{K,\text{ext}}(\mathbf{U}) = m_K f_K, \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{N}_K$  désigne les mailles voisines de la maille  $K$ , c'est à dire partageant une arête avec  $K$  —on note  $(K, L) \in \mathcal{E}$ —, et où la fonction de flux  $\mathbf{U} \mapsto F_{KL}(\mathbf{U})$  est linéaire et vérifie

$$F_{KL}(\mathbf{U}) + F_{LK}(\mathbf{U}) = 0 \quad (3.12)$$

pour toute arête  $(K, L)$  avec  $L \in \mathcal{N}_K$ . On suppose que  $F_{K,\text{ext}}(\mathbf{U}) = 0$  si le bord  $\partial K$  de  $K$  ne contient pas d'interface  $\sigma \subset \partial\Omega$ .

- ii. *Coercivité* : il existe  $\zeta > 0$  ne dépendant pas du pas de maillage  $h_{\mathcal{D}}$ , (mais éventuellement de sa régularité  $\theta_{\mathcal{D}}$ ) tel que

$$\sum_{K=1}^N u_K \mathcal{S}_K(\mathbf{U}) = \sum_{(K,L) \in \mathcal{E}} F_{KL}(\mathbf{U})(u_K - u_L) + \sum_{K=1}^N F_{K,\text{ext}}(\mathbf{U})u_K \geq \zeta \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{D}}^2, \quad (3.13)$$

où

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{D}} := \left( \sum_{\sigma=(K,L) \in \mathcal{E}} m_\sigma \frac{(u_K - u_L)^2}{d_\sigma} \right)^{1/2} \quad (3.14)$$

désigne la norme  $H_0^1(\Omega)$ -discrète dans laquelle apparaissent, pour chaque arête  $\sigma \in \mathcal{E}$ , la mesure de Lebesgue  $(d-1)$ -dimensionnelle  $m_\sigma$  de l'arête, et la distance  $d_\sigma$  associée à  $\sigma$  définie par

$$d_\sigma = \begin{cases} \text{dist}(\mathbf{x}_K, \sigma) + \text{dist}(\mathbf{x}_L, \sigma) & \text{si } \sigma = (K, L) \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \text{dist}(\mathbf{x}_K, \sigma) & \text{si } \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le cas où  $\sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega$ , on a posé  $u_L = 0$  dans la formule (3.14).



iii. *Consistance* : soit  $(\mathcal{D}_m)_{m \geq 1}$  une suite de maillages dont le pas  $h_{\mathcal{D}_m}$  tend vers 0 (donc  $N_m \rightarrow \infty$ ), et soit  $\mathbf{U}^{(m)} = (u_1^{(m)}, \dots, u_{N_m}^{(m)})^T$  une suite de vecteurs avec  $\mathbf{U}^{(m)} \in \mathbb{R}^{N_m}$ . On suppose que

(a) la suite  $(\mathbf{U}^{(m)})_{m \geq 1}$  est bornée pour les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_m}$ ,

(b) la suite de solutions discrètes  $u^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_K u_K^{(m)} \mathbf{1}_K(\mathbf{x})$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,

alors pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{K=1}^{N_m} \varphi(\mathbf{x}_K) \mathcal{S}_K(\mathbf{U}^{(m)}) = - \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (3.15)$$

On cherche à corriger le défaut de monotonie du schéma numérique. Pour cela, on introduit des corrections non-linéaires  $\mathcal{R}_K$ , de sorte que le schéma s'écrit

$$\mathcal{S}_K(\mathbf{U}) + \mathcal{R}_K(\mathbf{U}) = m_K f_K, \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.16)$$

où

$$\mathcal{R}_K(\mathbf{U}) := \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \beta_{KL}(\mathbf{U})(u_K - u_L), \quad \forall K \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.17)$$

Choisir une correction revient donc à choisir des termes  $\beta_{KL}$  pour tout couple  $(K, L)$  tel que  $a_{KL}$  ou  $a_{LK}$  est non nul.

Avant d'imposer la monotonie du schéma grâce aux corrections  $(\mathcal{R}_K)_K$ , la proposition ci-dessous permet de donner un cahier des charges sur les termes  $\beta_{KL}$  de manière à ce que la conservation locale de la masse et la coercivité soient préservées. La preuve est détaillée dans [168] et [A9].

**Proposition 3.1** *On suppose que les  $(\beta_{KL})_{1 \leq K, L \leq N}$  satisfont*

$$\beta_{KL}(\mathbf{U}) = \beta_{LK}(\mathbf{U}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N, \forall 1 \leq K, L \leq N,$$

*alors le schéma corrigé (3.16)–(3.17) est conservatif et coercitif.*

Afin que le schéma soit monotone, il faut que l'on puisse mettre le système (3.16)–(3.17) sous la forme (3.8). Dans [A9], une présentation générale est donnée sur comment construire des corrections satisfaisant une telle propriété. Par souci de synthèse, nous nous concentrons ici sur l'exemple proposé dans [168].

En écrivant

$$\mathcal{S}_K(\mathbf{U}) = \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left( \frac{\mathcal{S}_K(\mathbf{U}) \text{sign}(u_K - u_L)}{\sum_{J \in \mathcal{N}_K} |u_K - u_L|} \right) (u_K - u_L), \quad (3.18)$$

on voit que le schéma corrigé se met sous la forme

$$\sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left( \frac{\mathcal{S}_K(\mathbf{U}) \text{sign}(u_K - u_L)}{\sum_{J \in \mathcal{N}_K} |u_K - u_L|} + \beta_{KL}(\mathbf{U}) \right) (u_K - u_L) = m_K f_K. \quad (3.19)$$

Le schéma corrigé est alors monotone dès que

$$\beta_{KL}(\mathbf{U}) \geq \frac{|\mathcal{S}_K(\mathbf{U})| \text{sign}(u_K - u_L)}{\sum_{J \in \mathcal{N}_K} |u_K - u_L|}, \quad \forall (K, L) \text{ avec } a_{KL} \neq 0. \quad (3.20)$$

On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 3.2** *En choisissant*

$$\beta_{KL}(\mathbf{U}) = \frac{|\mathcal{S}_K(\mathbf{U})| \operatorname{sign}(u_K - u_L)}{\sum_{J \in \mathcal{N}_K} |u_K - u_J|}, \quad (3.21)$$

le schéma corrigé (3.16)–(3.17) est conservatif, coercitif et monotone. De plus,  $\mathbf{U} \mapsto (\mathcal{R}_K(\mathbf{U}))_K$  est continue de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ , et le schéma admet (au moins) une solution.

Il est important de remarquer qu'en choisissant une autre réécriture (3.18) de  $\mathcal{S}_K$ , on obtient un autre schéma corrigé. En particulier, une autre correction est proposée dans le papier [A9].

La question de la convergence est plus délicate. Il n'y a à notre connaissance pas de preuve complète, c'est à dire ne nécessitant pas d'hypothèse sur la solution elle-même. Voici ci-dessous un énoncé pour le choix (3.21) de  $\beta_{KL}$ .

**Théorème 3.3** *Soit  $(\mathcal{D}_m)_{m \geq 1}$  une suite de maillages dont le pas  $h_{\mathcal{D}_m}$  tend vers 0, et soit  $(\mathbf{U}^{(m)})_{m \geq 1}$  la suite correspondante de solutions au schéma numérique. On suppose que*

$$\sup_K \left( h_K \frac{|\mathcal{S}_K(\mathbf{U}^{(m)})|}{m_K} \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (3.22)$$

où  $h_K$  désigne le diamètre de la maille  $K$ , alors la solution discrète  $u^{(m)} = \sum_{K=1}^{N_m} u_K^{(m)} \mathbf{1}_K$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers l'unique solution  $u$  de (3.1).

L'hypothèse (3.22) peut être vérifiée numériquement. Pour tous les tests numériques effectués (et en particulier ceux présentés dans [A9]), l'hypothèse (3.22) est vérifiée. En pratique, on observe une convergence d'ordre 1 en norme  $L^2$ , c'est à dire

$$\|u^{(m)} - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch_m$$

même si le schéma linéaire de départ est d'ordre 2. Les premiers correcteurs d'ordre 2 ont été proposés très récemment par C. Le Potier dans [169].

Pour conclure ce paragraphe, soulignons qu'une approche similaire a été proposée dans [66] pour des éléments finis. Enfin, soulignons aussi que la méthodologie que nous avons proposée a pu être transposée à des modèles plus complexes issus de la biologie (cf. [74, 54]).

## 3.3 Un schéma entropique préservant la positivité

### 3.3.1 Définition du problème continu

Nous présentons maintenant l'approche développée dans [A2] (voir aussi [C1]). Pour cela, on considère une équation de diffusion évolutive non-linéaire

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\eta(u) \mathbb{K} \nabla p(u)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.23)$$

où  $p \in C^1 \cap L^1((0, 1); \mathbb{R})$  est une fonction strictement croissante<sup>1</sup>. On complète le problème avec une condition de flux nul au bord

$$\eta(u) \mathbb{K} \nabla p(u) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.24)$$

---

1. Il est possible de considérer le cas où  $p$  est un graphe maximal monotone. Néanmoins, dans un souci de concision, nous ne développerons pas cette piste dans ce manuscrit.

et une condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{avec } 0 \leq u_0 \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (3.25)$$

On suppose dans la suite que  $\eta$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et vérifie

$$\eta(0) = \eta(1) = 0, \quad \text{et } \eta(u) > 0 \quad \text{si } 0 < u < 1 \quad (3.26)$$

et

$$\lim_{u \rightarrow \{0,1\}} \eta(u)p(u) = \lim_{u \rightarrow \{0,1\}} \eta(u) (p(u))^2 = 0.$$

En introduisant les fonctions strictement croissantes  $\varphi, \xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\varphi(u) = \int_{1/2}^u \eta(s)p'(s)ds, \quad \xi(u) = \int_{1/2}^u \sqrt{\eta(s)}p'(s)ds, \quad (3.27)$$

les équations (3.23) et (3.24) peuvent se réécrire

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla \varphi(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \mathbb{K} \nabla \varphi(u) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.28)$$

Le problème (3.25),(3.28) admet une unique solution faible (cf. [10, 191])  $u$  et celle-ci satisfait

$$0 \leq u(\mathbf{x}, t) \leq 1 \quad \text{pour presque tout } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (3.29)$$

De plus, en multipliant formellement l'équation (3.23) par  $p(u) - p(1/2)$  et en intégrant sur  $\Omega \times (0, T)$ , on obtient l'estimation d'entropie suivante

$$\int_{\Omega} \Gamma(u(\mathbf{x}, T))d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \xi(u(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla \xi(u(\mathbf{x}, t))d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega} \Gamma(u_0(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

où  $\Gamma$  est la fonction strictement convexe définie par

$$\Gamma(u) = \int_{1/2}^u (p(s) - p(1/2)) ds, \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (3.31)$$

Le problème (3.28) admet un nombre infini d'entropies convexes. Cependant, toutes n'ont pas un sens physique évident. Dans notre travail, nous avons supposé que l'entropie  $\Gamma$  avait un sens physique notable. Préserver sa décroissance au niveau discret est donc un enjeu important. Comme cela a été évoqué dans la partie §3.1, si le schéma vérifie (3.7), alors il résulte de la propriété (3.10) que l'entropie discrète va décroître. On cherche maintenant à s'affranchir de la condition (3.7) afin de pouvoir traiter des cas avec anisotropie et maillage généraux. Néanmoins, on souhaite récupérer au niveau discret les propriétés (3.29) et (3.30). Pour cela, nous discrétiserons le problème sous la forme (3.23) plutôt que sous la forme (3.28).

### 3.3.2 Le schéma CVFE non-linéaire

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage triangulaire conforme de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  —l'extension de la méthode au cas tridimensionnel est possible, nous nous restreignons au cas  $d = 2$  par souci de simplicité— dont l'ensemble des sommets est noté  $\mathcal{V}$ . Pour  $K \in \mathcal{V}$ , on note  $\mathbf{x}_K \in \Omega$  la position du sommet  $K$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes, c'est à dire des couples de sommets  $(K, L)$  appartenant à un même triangle  $T \in \mathcal{T}$ . On notera  $\sigma_{KL}$  l'élément de  $\mathcal{E}$  joignant les sommets  $K$  et  $L$ . On notera

$\mathcal{V}_K$  l'ensemble des sommets  $L \in \mathcal{V}$  tels que l'arête  $\sigma_{KL}$  existe. On peut donc définir l'espace d'éléments finis  $\mathbb{P}1$  conforme

$$V_{\mathcal{T}} = \{f \in C(\overline{\Omega}) \mid f|_T \text{ est affine pour tout } T \in \mathcal{T}\}$$

et sa base  $(e_K)_{K \in \mathcal{T}}$  telle que  $e_K(\mathbf{x}_L) = \delta_{K,L}$ . Dans la suite, on note

$$h_{\mathcal{T}} = \max_{T \in \mathcal{T}} \text{diam}(T), \quad \theta_{\mathcal{T}} = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{\text{diam}(T)}{\text{diam}(\rho_T)}, \quad (3.32)$$

où  $\rho_T$  est le diamètre du cercle inscrit du triangle  $T$ .

A partir du maillage triangulaire  $\mathcal{T}$ , on définit le maillage dual barycentrique  $\mathcal{M}$  constitué des cellules  $\omega_K$  ( $K \in \mathcal{V}$ ) obtenues en joignant par des segments les milieux  $\mathbf{x}_{\sigma}$  des arêtes  $\sigma \in \mathcal{E}$  dont  $K$  est une extrémités et les centre de gravité  $\mathbf{x}_T$  des triangles  $T \in \mathcal{T}$  dont  $K$  est un sommet. Une illustration est donnée à la figure 3.1. On note

$$m_K := \int_{\omega_K} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} e_K(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \mathcal{V}.$$

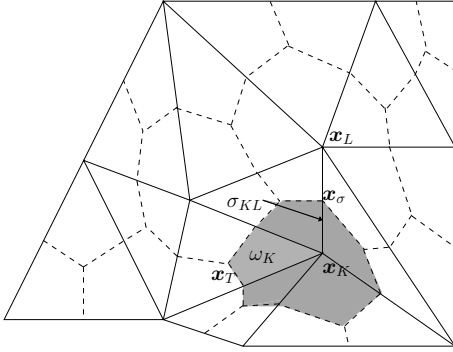


FIGURE 3.1 – Le maillage triangulaire primal  $\mathcal{T}$  (traits pleins) et le maillage dual barycentrique  $\mathcal{M}$  (pointillés).

Concernant la discrétisation temporelle du problème, nous choisissons une discrétisation uniforme afin d'alléger la présentation. En pratique, un pas de temps variable est utilisé dans les tests numériques afin de garantir la convergence de la méthode de Newton. Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $t_n = n\Delta t$ .

La donnée initiale est discrétisée en prenant

$$u_K^0 = \frac{1}{m_K} \int_{\omega_K} u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.33)$$

On en déduit directement que  $0 \leq u_K^0 \leq 1$  pour tout  $K \in \mathcal{V}$ .

Afin de définir le schéma numérique, nous définissons les transmissivités  $(a_{KL})_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}}$  par

$$a_{KL} = - \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla e_K(\mathbf{x}) \nabla e_L(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma_{KL} \in \mathcal{E},$$

de façon à ce que pour tout  $(u_K)_K \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{V}}$  et tout  $(v_K)_K \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{V}}$ , on ait

$$\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}} a_{KL} (u_K - u_L) (v_K - v_L) = \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v_{\mathcal{T}} d\mathbf{x},$$

où  $u_{\mathcal{T}}$  et  $v_{\mathcal{T}}$  sont les uniques éléments de  $V_{\mathcal{T}}$  tels que  $u_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_K) = u_K$  et  $v_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_K) = v_K$  pour tout  $K \in \mathcal{V}$ . Soulignons une fois de plus que nous n'imposons pas que  $a_{KL} \geq 0$ .

Avant de définir le schéma numérique permettant de calculer  $(u_K^{n+1})_K$  en fonction de  $(u_K^n)_K$ , nous avons besoin de définir les mobilités d'arête. Pour toute arête  $\sigma_{KL} \in \mathcal{E}$  et tout  $0 \leq n \leq N$ , on note  $I_{KL}^{n+1} = [\min\{u_K^{n+1}, u_L^{n+1}\}, \max\{u_K^{n+1}, u_L^{n+1}\}]$ , et on définit

$$\eta_{KL}^{n+1} = \begin{cases} \max_{s \in I_{KL}^{n+1}} \eta(s) & \text{si } a_{KL} \geq 0, \\ \min_{s \in I_{KL}^{n+1}} \eta(s) & \text{si } a_{KL} < 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

Le schéma numérique s'écrit alors

$$\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} m_K + \sum_{L \in \mathcal{V}_K} \eta_{KL}^{n+1} a_{KL} (p(u_K^{n+1}) - p(u_L^{n+1})) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{V}. \quad (3.35)$$

**Proposition 3.4** *On suppose que  $0 \leq u_K^n \leq 1$  pour tout  $K \in \mathcal{V}$ , alors il existe  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{V}}$  solution du schéma telle que*

$$0 \leq u_K^{n+1} \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{V}, \quad (3.36)$$

et telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{V}} m_K \Gamma(u_K^{n+1}) + \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}} a_{KL} (\xi(u_K) - \xi(u_L))^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{V}} m_K \Gamma(u_K^n). \quad (3.37)$$

On a de plus  $u_K^{n+1} > 0$  si  $\lim_{u \rightarrow 0} p(u) = -\infty$  et  $u_K^{n+1} < 1$  si  $\lim_{u \rightarrow 1} p(u) = +\infty$ .

Illustrons pourquoi le choix (3.34) des mobilités permet d'assurer la positivité de la solution (le fait que la solution est bornée supérieurement par 1 se démontre de manière similaire). On se place en la maille  $K$  telle que  $u_K^{n+1} \leq u_L^{n+1}$  pour tout  $L \in \mathcal{V}$ , et supposons que  $u_K^{n+1} < 0$ . Il résulte du choix (3.34) et du fait que  $\eta(0) = 0$  que  $\eta_{KL}^{n+1} = 0$  pour tout  $L$  tel que  $a_{KL} < 0$ . Dans cette maille, on a donc

$$\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} m_K + \sum_{L \in \mathcal{V}_K} \eta_{KL}^{n+1} (a_{KL})^+ (p(u_K^{n+1}) - p(u_L^{n+1})) = 0.$$

Or, comme  $p(u_K^{n+1}) \leq p(u_L^{n+1})$  par croissance de la fonction  $p$ , et comme  $\eta_{KL}^{n+1} \geq 0$ , on en déduit que  $u_K^{n+1} \geq u_K^n \geq 0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $u_K^{n+1} < 0$ .

La Proposition 3.4 permet de définir la solution approchée  $u_{\mathcal{M}, \Delta t}$  définie presque partout par

$$u_{\mathcal{M}, \Delta t}(\mathbf{x}, t) = u_K^{n+1} \quad \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \omega_K \times (t_n, t_{n+1}] \quad (3.38)$$

En définissant la fonction  $\xi_{\mathcal{T}, \Delta t}$  comme l'unique fonction de  $V_{\mathcal{T}}$  telle que  $\xi_{\mathcal{T}, \Delta t}(\mathbf{x}_K, t_{n+1}) = \xi(u_K^{n+1})$  pour tout  $K \in \mathcal{V}$  et tout  $n \geq 0$ , alors l'inégalité (3.37) se réécrit

$$\int_{\Omega} \Gamma(u_{\mathcal{M}, \Delta t}(\mathbf{x}, t_{n+1})) d\mathbf{x} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \xi_{\mathcal{T}, \Delta t} \cdot \nabla \xi_{\mathcal{T}, \Delta t} d\mathbf{x} dt \leq \int_{\Omega} \Gamma(u_{\mathcal{M}, \Delta t}(\mathbf{x}, t_n)) d\mathbf{x}. \quad (3.39)$$

L'estimation (3.39) est une version discrète de l'égalité (3.30).

La démonstration du résultat de convergence suivant est disponible dans [A2].



FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution fournie par discrétisation du problème sous la forme (3.28) (à gauche) et celle fournie par le schéma (3.35) qui discrétise l'équation sous la forme (3.23). On remarque la régularité bien supérieure et l'absence d'undershoots pour le schéma numérique (3.35).

**Théorème 3.5** Soit  $(\mathcal{T}_m)_m$  une suite de maillages dont le pas  $h_{\mathcal{T}_m}$  tend vers 0 et dont la régularité  $\theta_{\mathcal{T}_m}$  reste bornée par  $\theta^* > 0$ . Soit  $(u_{\mathcal{M}_m, \Delta t_m})_m$  la suite de solutions discrètes au schéma (3.35) pour la donnée initiale (3.33). Alors pour tout  $r \in [1, +\infty)$  et pour tout  $t_f > 0$ , la suite  $(u_{\mathcal{M}_m, \Delta t_m})_{m \geq 1}$  des solutions discrètes (3.38) au schéma (3.35) pour la donnée initiale (3.33) converge fortement dans  $L^r(\Omega \times (0, t_f))$  vers l'unique solution faible  $u$  du problème (3.23)–(3.25).

Pour finir cette partie, mentionnons la prépublication [P3] dans laquelle un schéma numérique inspiré de (3.35) a été proposé pour un modèle de chimiotactisme. Une des difficultés surmontées dans [P3] est la gestion de la convection. La solution proposée dans [P3] permet de garantir le respect des bornes physiques  $0 \leq u \leq 1$  et la convergence du schéma numérique lorsque le pas de maillage tend vers 0.

Les résultats numériques présentés dans [A2] et [C1] montrent que dans le cas où  $\mathbb{K}$  est fortement anisotrope, le schéma numérique (3.33)–(3.35) introduit une diffusion numérique excessive et donc une convergence lente vers la solution exacte. En revanche, la solution discrète ne présente pas d'undershoots comme cela a été démontré (voir la relation (3.36)). Nous présentons à la figure 3.2 un instantané de la solution numérique de l'équation des milieux poreux anisotrope

$$\partial_t u - \nabla \cdot (2u\mathbb{K}\nabla u) = 0$$

où  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ . La solution exacte consiste en un front monotone ne dépendant pas de  $y$ . On voit que la méthode numérique nonlinéaire proposée dans ce chapitre permet de régulariser la solution numérique et d'éviter les valeurs non-physiques  $u < 0$ .

### 3.4 Une méthode variationnelle pour les flots de gradients

Dans cette partie qui résume le travail [P2], nous poursuivons notre effort pour proposer un schéma numérique qui permet de prendre des fonctions test non-linéaires dans le schéma numérique et ainsi d'obtenir une estimation d'entropie/dissipation discrète. Dans ce travail, nous

avons considéré le problème modèle suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\eta(u) \mathbb{K} (\nabla p(u) + \nabla V)) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \eta(u) \mathbb{K} (\nabla p(u) + \nabla V) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u|_{t=0} = u_0 \geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $V \in W^{1,\infty}(\Omega)$  est un potentiel donné. Dans ce travail, nous avons supposé que la fonction  $\eta$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifie  $\eta(0) = 0$  et  $\eta(u) > 0$  si  $u > 0$ . La fonction  $\eta$  est prolongée à  $\mathbb{R}$  par parité.

**Remarque 3.6** *Un exemple typique de problème (3.40) est obtenu en prenant  $\eta(u) = u$  et  $p(u) = \log(u)$ . Dans ce cas, on a écrit sous forme non-linéaire l'équation de Fokker-Planck linéaire. Comme cela a été souligné dans [153], cette écriture non-linéaire possède un sens physique riche qui demande à être préservé au niveau discret.*

Formellement (et même rigoureusement si  $\eta(u) = u$  [153, 193, 6, 176] ou si  $\eta(u) \geq \alpha > 0$ ), le problème (3.40) peut s'interpréter comme le flot de gradient de l'entropie

$$\mathfrak{E}(u) = \int_{\Omega} (\Gamma(u) + Vu) \, d\mathbf{x}, \quad \forall u \geq 0, \quad (3.41)$$

où  $\Gamma$  est définie par (3.31), dans une géométrie (formellement) riemannienne *ad hoc*. Par souci de concision, nous ne détaillerons pas ici et renvoyons à [A2] pour plus de détails. Toujours est-il qu'il résulte de cette structure de flot de gradient que la fonction  $t \mapsto \mathcal{E}(u)(t)$  est décroissante si  $u$  est solution de (3.40). Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier la première équation de (3.40) par l'enthalpie libre  $p(u) + V$  et d'intégrer par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{E}(u) + \int_{\Omega} \eta(u) \mathbb{K} \nabla (p(u) + V) \cdot \nabla (p(u) + V) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.42)$$

Nous cherchons dans ce travail à proposer un schéma avec un équivalent discret de (3.42) tout en gardant une grande souplesse sur le maillage et sur le tenseur d'anisotropie  $\mathbb{K}$ .

**Remarque 3.7** *Nous omettons ici quelques hypothèses techniques liant les nonlinéarités  $\eta$  et  $p$ . Nous nous référons à [P2] pour l'intégralité des hypothèses.*

### 3.4.1 Définition du schéma VAG non-linéaire

Le schéma que nous proposons dans [P2] est une extension du schéma VAG proposé dans [130, 129] (voir aussi [131, 132, 133, 63] pour des applications du schéma à des problèmes d'écoulements en milieux poreux). Avant de définir le schéma, il faut définir le maillage sur lequel le problème sera discrétisé. Plutôt qu'une définition, nous proposons trois illustrations sur la figure 3.3 des différents maillages utilisés dans notre étude. Nous nous référons à [130, 129] ou [P2] pour une définition détaillée des trois maillages  $\mathcal{M}$  (maillage primal),  $\mathcal{T}$  (maillage simplicial), et  $\mathcal{D}$  (maillage après condensation de masse). La taille et la régularité du maillage sont définies par les quantités  $h_{\mathcal{T}}$  et  $\theta_{\mathcal{T}}$  introduite dans (3.32).

Les inconnues sont localisées aux centres de mailles  $\mathbf{x}_{\kappa}$  et aux sommets  $\mathbf{x}_s$ . On note

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{v} = (v_{\kappa}, v_s)_{\kappa,s}\} \simeq \mathbb{R}^{\#\mathcal{M} + \#\mathcal{V}}$$

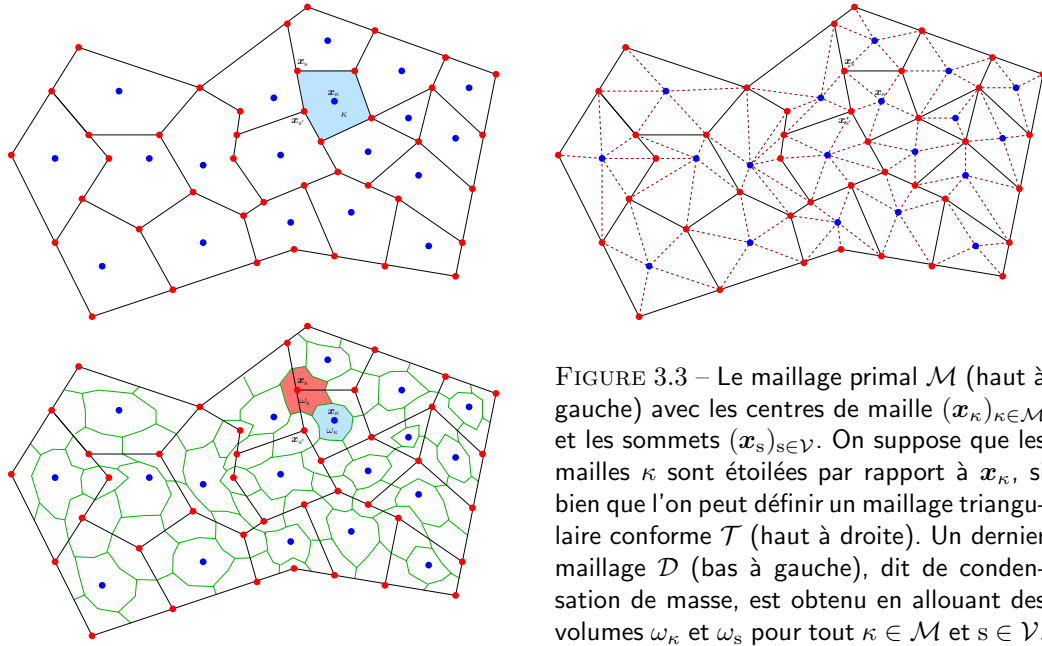


FIGURE 3.3 – Le maillage primal  $\mathcal{M}$  (haut à gauche) avec les centres de maille  $(\mathbf{x}_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{M}}$  et les sommets  $(\mathbf{x}_s)_{s \in \mathcal{V}}$ . On suppose que les mailles  $\kappa$  sont étoilées par rapport à  $\mathbf{x}_\kappa$ , si bien que l'on peut définir un maillage triangulaire conforme  $\mathcal{T}$  (haut à droite). Un dernier maillage  $\mathcal{D}$  (bas à gauche), dit de condensation de masse, est obtenu en allouant des volumes  $\omega_\kappa$  et  $\omega_s$  pour tout  $\kappa \in \mathcal{M}$  et  $s \in \mathcal{V}$ .

l'espace dans lequel vivent les inconnues. On introduit les opérateurs linéaires de reconstruction  $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{W} \rightarrow L^\infty(\Omega)$  et  $\nabla_{\mathcal{T}} : \mathcal{W} \rightarrow L^\infty(\Omega)^d$  par

$$\pi_{\mathcal{D}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} v_\kappa \mathbf{1}_{\omega_\kappa}(\mathbf{x}) + \sum_{s \in \mathcal{V}} v_s \mathbf{1}_{\omega_s}(\mathbf{x}), \quad (3.43)$$

$$\nabla_{\mathcal{T}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} v_\kappa \nabla e_\kappa(\mathbf{x}) + \sum_{s \in \mathcal{V}} v_s \nabla e_s(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} \sum_{s \in \mathcal{V}_\kappa} (v_s - v_\kappa) \nabla e_s(\mathbf{x}) \mathbf{1}_\kappa(\mathbf{x}), \quad (3.44)$$

où les fonctions  $e_\kappa$  et  $e_s$  sont les fonctions de base éléments finis  $\mathbb{P}1$  conforme correspondant au maillage simplicial  $\mathcal{T}$ .

Étant donné une maille  $\kappa$  et deux de ses sommets  $s$  et  $s'$  (avec potentiellement  $s = s'$ ), on définit le coefficient

$$a_{s,s'}^\kappa = \int_{\kappa} \mathbb{K} \nabla e_s \cdot \nabla e_{s'} d\mathbf{x} = a_{s',s}^\kappa.$$

La matrice  $\mathbb{A}^\kappa = (a_{s,s'}^\kappa)_{s,s' \in \mathcal{V}_\kappa} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{V}_\kappa \times \#\mathcal{V}_\kappa}$  est symétrique définie positive. De plus, on peut démontrer que son conditionnement est borné par une quantité ne dépendant que de  $\theta_{\mathcal{T}}$  et de  $\mathbb{K}$  (mais pas du pas de maillage  $h_{\mathcal{T}}$ ) :

$$\text{cond}(\mathbb{A}^\kappa) \leq C(\theta_{\mathcal{T}}, \mathbb{K}), \quad \forall \kappa \in \mathcal{M}. \quad (3.45)$$

Pour tout  $\kappa \in \mathcal{M}$  et tout  $s \in \mathcal{V}$ , on définit les quantités

$$m_\kappa = \int_{\omega_\kappa} d\mathbf{x}, \quad m_s = \int_{\omega_s} d\mathbf{x}, \quad V_\kappa = \frac{1}{m_\kappa} \int_{\omega_\kappa} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad V_s = \frac{1}{m_s} \int_{\omega_s} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



et on note  $\mathbf{V} = (V_\kappa, V_s)_{\kappa,s} \in \mathcal{W}$  la discrétisation du potentiel  $V$ . On initialise le schéma numérique en posant

$$u_\kappa^0 = \frac{1}{m_\kappa} \int_{\omega_\kappa} u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad u_s^0 = \frac{1}{m_s} \int_{\omega_s} u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.46a)$$

Pour passer de l'étape  $n-1$  à l'étape  $n$ , le schéma numérique consiste en l'écriture de conservation locale sur les volumes  $\omega_\kappa$  et  $\omega_s$  pour  $\kappa \in \mathcal{M}$  et  $s \in \mathcal{V}$ , c'est à dire

$$\frac{u_\kappa^n - u_\kappa^{n-1}}{\Delta t} m_\kappa + \sum_{s \in \mathcal{V}_\kappa} F_{\kappa,s}^n = 0, \quad \forall \kappa \in \mathcal{M}, \quad (3.46b)$$

$$\frac{u_s^n - u_s^{n-1}}{\Delta t} m_s + \sum_{\kappa \in \mathcal{M}_s} F_{s,\kappa}^n = 0, \quad \forall s \in \mathcal{V}. \quad (3.46c)$$

Les flux  $F_{\kappa,s}^n$  et  $F_{s,\kappa}^n$  sont donnés par :  $\forall \kappa \in \mathcal{M}$ ,  $\forall s \in \mathcal{V}_\kappa$ ,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} F_{\kappa,s}^n = \sqrt{\eta_{\kappa,s}^n} \sum_{s' \in \mathcal{V}_\kappa} \sqrt{\eta_{\kappa,s'}^n} a_{s,s'}^\kappa (p(u_\kappa^n) + V_\kappa - p(u_{s'}^n) - V_s), \\ F_{s,\kappa}^n + F_{\kappa,s}^n = 0, \end{cases} \quad (3.46d)$$

où

$$\eta_{\kappa,s}^n = \frac{\eta(u_\kappa^n) + \eta(u_s^n)}{2}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{V}_\kappa, \forall n \geq 1. \quad (3.46e)$$

On note  $\mathbf{u}^n = (u_\kappa^n, u_s^n)_{\kappa,s} \in \mathcal{W}$  une solution du schéma et, pour toute maille primale  $\kappa \in \mathcal{M}$  dont les sommets sont  $s_1, \dots, s_q$ , on note

$$\boldsymbol{\delta}^\kappa(\mathbf{u}^n) = \left( u_\kappa^n - u_{s_1}^n, \dots, u_\kappa^n - u_{s_q}^n \right)^T \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{V}_\kappa}$$

le vecteur des différences internes à la maille  $\kappa$  et

$$\mathbb{B}^\kappa(\mathbf{u}^n) = \mathbb{H}^\kappa(\mathbf{u}^n) \mathbb{A}^\kappa \mathbb{H}^\kappa(\mathbf{u}^n),$$

où l'on a posé

$$\mathbb{H}^\kappa(\mathbf{u}^n) = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_{\kappa,s_1}^n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\eta_{\kappa,s_q}^n} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbb{B}(\mathbf{u}^n)$  est symétrique, positive et définie si  $u_\kappa^n > 0$ . Le schéma peut alors se réécrire

$$\int_{\Omega} \pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \pi_{\mathcal{D}} \phi d\mathbf{x} + \Delta t \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\delta}^\kappa(p(\mathbf{u}^n) + \mathbf{V})^T \mathbb{B}(\mathbf{u}^n) \boldsymbol{\delta}^\kappa(\phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{W}. \quad (3.47)$$

### 3.4.2 Quelques propriétés du schéma VAG non-linéaire

De part sa structure, le schéma numérique (3.46) conserve la masse totale. Cela peut se voir en prenant  $\phi = \mathbf{1}_{\mathcal{W}}$  dans (3.47), ce qui fournit

$$\int_{\Omega} \pi_{\mathcal{D}} \mathbf{u}^n d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \pi_{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{n-1} d\mathbf{x}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.48)$$

En prenant  $\phi = p(\mathbf{u}^n) + \mathbf{V}$  dans (3.47) puis en utilisant la convexité de la fonction  $\Gamma$ , on obtient que

$$\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n) + \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}^n) \leq \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{n-1}), \quad (3.49)$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n) &:= \int_{\Omega} (\pi_{\mathcal{D}}\Gamma(\mathbf{u}^n) + \pi_{\mathcal{D}}\mathbf{u}^n\pi_{\mathcal{D}}\mathbf{V}) \, dx, \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}^n) &:= \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} \delta^{\kappa}(p(\mathbf{u}^n) + \mathbf{V})^T \mathbb{B}(\mathbf{u}^n) \delta^{\kappa}(p(\mathbf{u}^n) + \mathbf{V}) \geq 0. \end{aligned}$$

Cette estimation est la contrepartie discrète de l'égalité (3.42).

Le premier théorème sur le schéma (3.46), dont la preuve est consignée dans [P2], concerne son analyse numérique à maillage fixé.

**Théorème 3.8** *Étant donné  $\mathbf{u}^{n-1} \in \mathcal{W}$  tel que  $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{n-1}) < \infty$ , alors il existe (au moins) une solution  $\mathbf{u}^n$  au schéma (3.46). La masse correspondant à cette solution est conservée (cf. (3.48)) et son entropie décroît (cf. (3.49)). De plus, si  $\lim_{u \rightarrow 0} p(u) = -\infty$ , on a  $\pi_{\mathcal{D}}\mathbf{u}^n > 0$  presque partout dans  $\Omega$ .*

La stricte positivité des solutions si  $\lim_{u \rightarrow 0} p(u) = -\infty$  est très importante. En effet dans ce cas, le schéma n'est pas continu au voisinage des états où une des composantes de la solution s'annule. Contrôler le fait que les solutions au schéma restent loin de 0 permet de restreindre la zone de recherche de solution à un ensemble sur lequel le schéma est uniformément continu. On peut donc appliquer un théorème de point fixe (Brouwer) ou un argument de type degré topologique [172, 95].

L'existence d'une solution au schéma numérique permet de définir la solution discrète  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^n)_{n \geq 0} \in \mathcal{W}^{\mathbb{N}}$  au schéma numérique ainsi que les opérateurs de reconstruction

$$\pi_{\mathcal{D}, \Delta t} : \mathcal{W}^{\mathbb{N}} \rightarrow L^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathcal{T}, \Delta t} \mathcal{W}^{\mathbb{N}} \rightarrow L^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_+)^d$$

définis par

$$\pi_{\mathcal{D}, \Delta t}(\mathbf{u})(\cdot, t) = \pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n) \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathcal{T}, \Delta t}(\mathbf{u})(\cdot, t) = \nabla_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^n) \quad \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n].$$

Nous allons maintenant discuter du comportement du schéma numérique lorsque le pas de maillage et le pas de temps tendent vers 0. Ainsi, nous considérons une suite de maillages  $(\mathcal{M}_m, \mathcal{T}_m, \mathcal{D}_m)_{m \geq 0}$  dont le pas  $h_{\mathcal{T}_m}$  tend vers 0 et dont la régularité  $\theta_{\mathcal{T}_m}$  reste bornée par une quantité  $\theta^*$ . On note  $\mathbf{u}_m \in (\mathcal{W}_m)^{\mathbb{N}}$  la solution du schéma numérique.

La première information cruciale vient du contrôle de la dissipation  $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}^n)$  grâce à la propriété (3.45) : il existe une quantité  $C > 0$  ne dépendant que des données du problème continu, de  $\theta^*$  et de  $t_f > 0$  (mais pas de  $m$ ) telle que

$$\int_0^{t_f} \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla_{\mathcal{T}_m, \Delta t_m} \xi(\mathbf{u}_m) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m, \Delta t_m} \xi(\mathbf{u}_m) \, dx \, dt \leq C, \quad (3.50)$$

où  $\xi$  est la fonction strictement croissante introduite dans (3.27). La relation (3.50) fournit de l'information sur les translatés en espace de la solution. En utilisant le fait que  $\mathbf{u}_m$  est solution du schéma numérique, on en déduit l'existence (par exemple en utilisant le résultat présenté

dans [P1] et résumé dans la partie §5.2 de ce mémoire) d'une fonction  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, à extraction d'une sous-suite près,

$$\pi_{\mathcal{D}_m, \Delta t_m} \mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \quad \text{fortement dans } L^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+). \quad (3.51)$$

De plus,  $\xi(u) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$  et

$$\nabla_{\mathcal{T}_m, \Delta t_m} \xi(\mathbf{u}_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi(u) \quad \text{faiblement dans } L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+)^d. \quad (3.52)$$

En passant à la limite  $m \rightarrow \infty$  dans la formulation (3.47) du schéma numérique, on arrive à montrer que la limite  $u$  de la suite  $\pi_{\mathcal{D}_m, \Delta t_m} \mathbf{u}_m$  est l'unique solution faible du problème (3.40), d'où le théorème de convergence suivant qui est encore issu de [P2].

**Théorème 3.9** *Soit  $(\mathbf{u}_m)_{m \geq 1}$  une suite de solutions discrètes au schéma numérique (3.46) pour une suite de maillage  $(\mathcal{M}_m, \mathcal{T}_m, \mathcal{D}_m)_{m \geq 0}$  dont la régularité reste bornée et dont le pas de maillage  $h_{\mathcal{T}_m}$  tend vers 0. On suppose aussi que le pas de temps  $\Delta t_m$  tend vers 0. Alors la suite  $(\pi_{\mathcal{D}_m, \Delta t_m} \mathbf{u}_m)_{m \geq 1}$  de solution discrètes reconstruites converge fortement dans  $L^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$  vers l'unique solution faible  $u$  de l'équation de Fokker-Planck.*

### 3.4.3 Validation numérique du schéma

Comme cela a été souligné à la fin de la partie §3.3 de ce mémoire, la convergence du schéma numérique (3.34)–(3.35) est lente. Nous souhaitons donc nous assurer que la méthode (3.46) autorise une convergence plus rapide. Nous présentons maintenant quelques résultats pour deux tests numériques. Nous nous référons à [P2] pour plus de résultats numériques et des discussions plus poussées.

Le premier cas test consiste en la résolution numérique du problème

$$\partial_t u - \nabla \cdot (u \mathbb{K} (\nabla(2u) - \mathbf{g})) = 0 \quad \text{sur } (0, 1)^2 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.53)$$

où  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et où la matrice  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$  par notre schéma (3.46). La solution est comparée à celle produite pour une discrétisation (formellement d'ordre 2) en espace du problème

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbb{K} (\nabla(u^2) - u\mathbf{g})) = 0 \quad (3.54)$$

par le schéma VAG [130] pour la partie diffusion et par un schéma implicite centré pour la convection. Concernant le maillage, on utilise des raffinements successifs d'un maillage de triangles représenté à la figure 3.4. L'erreur calculée par rapport à une solution analytique (avec conditions de Dirichlet au bord) est représentée sur cette même figure. On remarque que notre schéma est du même ordre que le schéma classique proposé, la constante dans l'erreur étant légèrement améliorée. Soulignons que les coûts de calcul pour obtenir les deux solutions numériques sont du même ordre.

Le deuxième cas test que nous présentons ici concerne le comportement du schéma en temps long sur maillage fixé. Il a été mis en avant dans [51] (voir aussi [53]) que pour avoir un bon comportement, il faut que les solutions stationnaires soient exactement préservées par le schéma, ce qui implique de traiter la diffusion et la convection simultanément. Les méthodes proposés dans [51, 53] nécessitent de travailler avec des schémas monotones, ce qui interdit de travailler sur maillage généraux ou avec de l'anisotropie. Notre méthodologie permet donc d'étendre ces

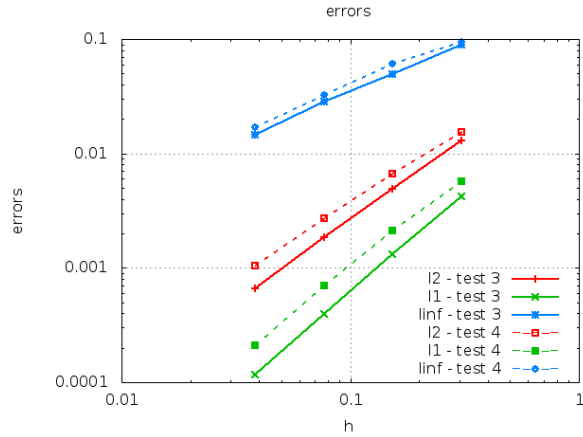
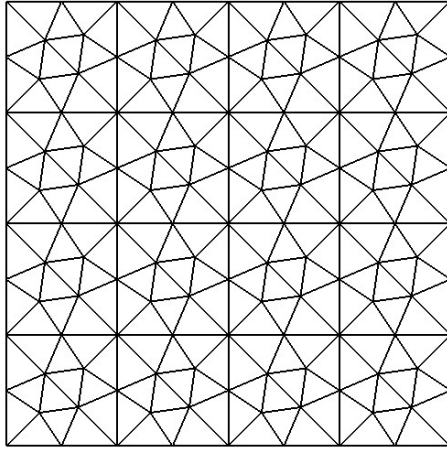


FIGURE 3.4 – Les maillages utilisés dans l'étude de convergence sont obtenus par raffinements successifs d'un maillage triangulaire (gauche). La comparaison des erreurs (droite) produites par notre schéma (traits pleins) et d'un schéma classique (pointillés) montrent que l'ordre est préservé par notre méthode, que ce soit pour la norme  $L^\infty$  (bleu),  $L^2$  (rouge), ou  $L^1$  (vert).

travaux dans des cas anisotropes avec maillage déformé. Pour illustrer ce bon comportement, nous considérons le cas test

$$\partial_t u - \nabla \cdot (u \mathbb{K} (\nabla \log(u) - \mathbf{g})) = 0 \quad \text{sur } (0, 1)^2 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.55)$$

où  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et où la matrice  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec des conditions de flux nul et une donnée initiale

$$u_0(x, y) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left( \pi \cos(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x) \right) + \pi \exp\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

La solution  $u$  converge exponentiellement vite vers le régime permanent

$$u_{\text{perm}}(x, y) = \pi \exp\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Cette propriété est préservée par notre schéma malgré l'irrégularité du maillage comme en atteste la figure 3.5.

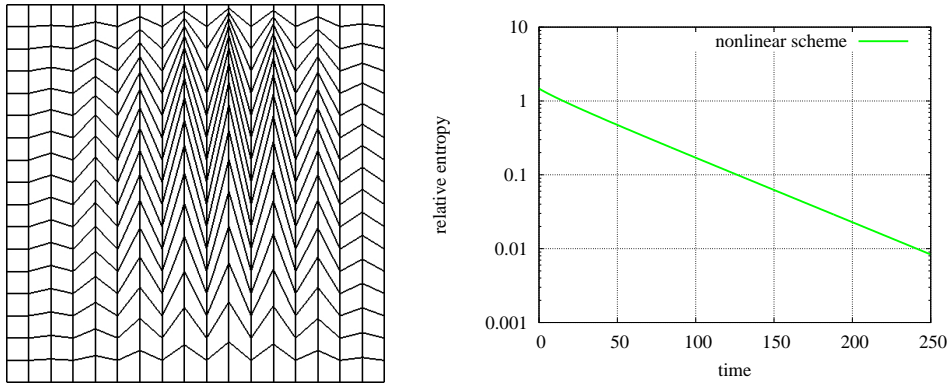


FIGURE 3.5 – La solution discrète est calculée à l'aide de notre schéma sur un maillage de Kershaw (gauche). On trace le comportement de l'entropie (de Boltzmann) relative (droite) entre la solution numérique et la solution discrète. Le fait que l'entropie relative soit définie pour tout temps nécessite la positivité de la solution numérique mise en avant dans le Théorème 3.8. La convergence exponentielle de la solution numérique vers le régime permanent est clairement mise en évidence.

## Chapitre 4

# Modélisation adaptative pour des systèmes hyperboliques avec relaxation

Ce chapitre synthétise les articles [A5] et [A3] qui sont le fruit d'une collaboration dans le cadre du laboratoire de recherche conventionné *Modélisation et approximation numérique orientées pour l'énergie nucléaire* (MANON) entre le Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL) dont je faisais partie et le Département de modélisation des systèmes et structures (DM2S) de la Direction de l'énergie nucléaire (DEN) du CEA-Saclay.

### 4.1 Présentation de la problématique

#### 4.1.1 Généralités

Pour décrire des écoulements diphasiques compressibles (libres, pas en milieux poreux), plusieurs modèles peuvent être pertinents suivant les conditions physiques. Une hiérarchie de modèles hyperboliques avec termes sources peut être obtenue par relaxation successive de contraintes thermodynamiques qui ne sont satisfaites qu'à l'équilibre [208]. Par exemple, un modèle de référence pour les écoulements diphasiques a été proposé par M. R. Baer et J. W. Nunziato dans [42] puis largement étudié par la suite, particulièrement en ce qui concerne l'approximation numérique de ses solutions (voir par exemple [32, 18, 23, 201, 88, 87]). A partir de ce modèle de Baer-Nunziato constitué de 7 équations –3 équations pour chacune des 2 phases (masse, quantité de mouvement et énergie) et une équation pour la fraction volumique caractérisant la composition du fluide–, on peut supposer que certaines quantités sont à l'équilibre (par exemple les vitesses des deux phases coïncident) et ainsi réduire la taille du système à résoudre.

On postule que plus le modèle est riche physiquement –on dira *fin*–, plus la résolution numérique effective du système est difficile. Cependant, un modèle trop simplifié –on dira *grossier*– amènerait à ne pas prendre en compte des phénomènes physiques jouant un rôle important. Il apparaît donc primordial de savoir choisir pertinemment le modèle que l'on veut considérer. Le problème se complique encore lorsque l'écoulement que l'on considère est hétérogène : un modèle peut n'être valable dans certaines parties du domaine de calcul seulement. Utiliser un seul modèle n'est pas pertinent :

- un modèle fin partout mène à un coût de calcul excessif ;

- un modèle grossier partout ne permet pas d'atteindre une précision suffisante.

La bonne idée est donc d'adapter le choix du modèle à la situation locale. Celle-ci pouvant évoluer au cours du temps, nous cherchons à développer des indicateurs d'erreur de modélisation *a posteriori* pour déterminer dans quelle zone il est nécessaire de raffiner le modèle et dans quel zone un modèle grossier est suffisant.

L'approche consistant à adapter localement le modèle à l'aide de techniques issues de l'analyse *a posteriori* a été par exemple utilisée pour des problèmes elliptiques dans [226, 188, 1, 207, 187, 217, 61, 186, 49]. Elle a aussi été employée pour enrichir des modèles de mécanique des fluides à l'aide de modèles cinétique [93, 94] (voir aussi [136]).

Dans la suite de ce chapitre, on considère deux modèles, à savoir un modèle fin ( $\mathcal{M}_f$ ) et un modèle grossier ( $\mathcal{M}_g$ ) dans lequel les petites échelles sont négligées. On supposera que le modèle ( $\mathcal{M}_g$ ) s'obtient à partir de ( $\mathcal{M}_f$ ) en faisant tendre un paramètre  $\epsilon$  vers 0.

Étant donné un domaine de calcul  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , nous cherchons à déterminer un découpage

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_f \cup \overline{\Omega}_g$$

en deux sous-domaines  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  où l'on résoudra le modèle fin et le modèle grossier respectivement. Dans le cas où  $\Omega_f \cap \Omega_g = \emptyset$ , on cherchera alors à coupler à travers l'interface fine  $\Sigma = \overline{\Omega}_f \cap \overline{\Omega}_g$ . Cette stratégie est utilisée dans la partie 4.2 de ce manuscrit. Elle nécessite de savoir coupler différents modèles à travers une interface. Nous nous appuyerons sur les travaux antérieurement développés par le groupe de travail LJLL-CEA Saclay [68, 20, 21, 22, 24, 139, 19] pour coupler spatialement sans recouvrement des systèmes hyperboliques.

Dans la partie 4.3 de ce manuscrit, nous chercherons à justifier notre approche sur un modèle simplifié. Pour obtenir des estimations d'erreur entre la solution du modèle fin et la solution obtenue par la procédure d'adaptation de modèle, nous aurons besoin de considérer le cas d'un couplage avec recouvrement, c'est à dire à travers une interface épaisse à travers de laquelle la transition entre les modèles ( $\mathcal{M}_f$ ) et ( $\mathcal{M}_g$ ) est régulière.

### 4.1.2 L'algorithme d'adaptation de modèle

Nous présentons maintenant brièvement l'algorithme utilisé. Il s'agit, connaissant le profil de la solution approchée  $u^n$  à l'instant  $t_n$ , de trouver une solution approchée  $u^{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  pour laquelle on aura résolu localement soit le modèle ( $\mathcal{M}_f$ ) soit le modèle ( $\mathcal{M}_g$ ). Comme nous considérons des systèmes hyperboliques, nous avons pris le parti de développer des algorithmes explicites en temps. On suppose que, donnée une configuration  $u^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on sait définir un indicateur d'erreur  $e^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  permettant d'estimer l'erreur commise par la résolution du modèle grossier au lieu du modèle fin sur un pas de temps :

$$|u_g^{n+1} - u_f^{n+1}| \lesssim e^n, \quad (4.1)$$

où  $u_g^{n+1}$  (resp.  $u_f^{n+1}$ ) se déduit de  $u^n$  par la résolution sur  $[t_n, t_{n+1}]$  du modèle ( $\mathcal{M}_g$ ) (resp. ( $\mathcal{M}_f$ )). Cependant, le calcul de  $e^n$  ne doit pas nécessiter le calcul explicite de  $u_f^{n+1}$ .

Soit  $\theta > 0$  un seuil de tolérance à fixer par l'utilisateur. L'algorithme d'adaptation dynamique de modèle s'écrit alors

1. Calculer l'indicateur d'erreur  $e^n$  et découper  $\Omega$  en  $\Omega_f^n$  et  $\Omega_g^n$  en prenant

$$\Omega_f^n = \left\{ (\mathbf{x}, t) \in \Omega \mid e^n(\mathbf{x}, t) > \theta \right\}, \quad \Omega_g^n = \overbrace{\Omega \setminus \Omega_f^n}^{\circ}.$$

2. Résoudre  $(\mathcal{M}_f)$  sur  $\Omega_f^n$  et  $(\mathcal{M}_g)$  sur  $\Omega_g^n$  avec couplage à travers l'interface  $\Sigma$ , puis définir

$$u^{n+1} = u_f^{n+1} \mathbf{1}_{\Omega_f^n} + u_g^{n+1} \mathbf{1}_{\Omega_g^n}.$$

On comprend bien qu'une fois les problèmes inhérents au couplage spatial de modèles traités, la principale difficulté consiste en la détermination d'un indicateur  $e^n$  pertinent et, dans une moindre mesure, en le choix du paramètre  $\theta$ .

## 4.2 Application aux systèmes hyperboliques avec relaxation

Dans cette partie du manuscrit qui synthétise les travaux présentés dans [A5], nous nous intéressons spécifiquement aux modèles fins  $(\mathcal{M}_f)$  ayant la forme d'un système hyperbolique avec terme source de relaxation à la Chen-Levermore-Liu [78]. On peut alors se ramener à l'étude du problème simplifié

$$\partial_t u_f + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_1^\alpha(u_f, v_f) = 0, \quad (4.2a)$$

$$\partial_t v_f + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_2^\alpha(u_f, v_f) = \frac{1}{\epsilon} r(u_f, v_f), \quad (4.2b)$$

avec les conditions initiales  $u_f(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$  et  $v_f(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N-k}$ . Le terme source  $r$  est supposé dissipatif au sens de [78]. Le paramètre  $\epsilon$  peut être supposé petit, si bien que le système (4.2) représentant le modèle fin est raide. On est tenté de considérer directement la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  du modèle fin (4.2), à savoir

$$\partial_t u_g + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_1^\alpha(u_g, v_{\text{eq}}(u_g)) = 0, \quad (4.3)$$

où  $v_{\text{eq}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$  permet de décrire la variété d'équilibre, i.e.

$$r(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = v_{\text{eq}}(u).$$

Seule la condition initiale  $u_g(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$  est alors pertinente. Il est à noter que sous les conditions *ad hoc* établies dans [78], les systèmes (4.2) et (4.3) sont hyperboliques et munis d'entropies  $\Phi(u, v)$  et  $\phi(u) = \Phi(u, v_{\text{eq}}(u))$  convexes.

Revenons à la problématique de l'adaptation de modèle, et donc à l'objectif de trouver un indicateur  $e^n(\mathbf{x})$  permettant de quantifier l'erreur  $|u_f(\mathbf{x}, t_{n+1}) - u_g(\mathbf{x}, t_{n+1})|$  en fonction de quantités calculées à l'instant  $t_n$ . Vue la forme des systèmes (4.2) et (4.3), on aimerait idéalement considérer

$$e_{\text{ideal}}^n(\mathbf{x}) = \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |v_f(\mathbf{x}, t) - v_{\text{eq}}(u(\mathbf{x}, t))|,$$

mais évaluer cette quantité nécessite de résoudre le modèle fin partout. La première idée naturelle pour contourner cette difficulté consiste à définir l'indicateur  $e_1^n$  donné par

$$e_{\text{naïf}}^n(\mathbf{x}) = |v(\mathbf{x}, t_n) - v_{\text{eq}}(u(\mathbf{x}, t_n))|. \quad (4.4)$$

Ce choix est trop naïf car si on a obtenu l'état  $(u(\mathbf{x}, t_n), v(\mathbf{x}, t_n))$  en résolvant le modèle grossier dans un voisinage de  $\mathbf{x}$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on a naturellement que  $e_{\text{naïf}}^n(\mathbf{x}) = 0$ . Par conséquent,



l'estimateur  $e_{\text{naïf}}^n$  ne permet pas de raffiner le modèle. Toute zone où le modèle grossier est utilisé restera dans le modèle grossier pour tout temps ultérieur. Il faut donc trouver un nouvel indicateur. La stratégie utilisée dans [A5] repose sur un développement de Chapman-Enskog pour le problème (4.2) autour de l'état  $(u, v_{\text{eq}}(u))$ .

**Proposition 4.1** *À des termes d'ordre  $\epsilon^2$  près, les solutions régulières du problème (4.2) satisfont*

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^d f_1^\alpha(u, v_{\text{eq}}(u)) = -\epsilon \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha \nabla_v f_1^\alpha(u, v_{\text{eq}}(u)) v_1, \quad (4.5)$$

$$v = v_{\text{eq}}(u) + \epsilon v_1, \quad (4.6)$$

où l'on a posé

$$v_1 = (\nabla_v r(u, v_{\text{eq}}(u)))^{-1} \left[ \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_2^\alpha(u, v_{\text{eq}}(u)) - \nabla v_{\text{eq}}(u)^T \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_1^\alpha(u, v_{\text{eq}}(u)) \right]. \quad (4.7)$$

Il est important de noter que dans l'expression donnant  $v_1$  dans la formule (4.7), seule la composante  $u$  apparaît. En particulier, on peut calculer  $v_1$  et obtenir un résultat non trivial en partant de toute donnée  $u$ , la valeur de  $v$  n'influençant pas le résultat. La formule (4.6) nous incite à définir l'indicateur d'erreur de modélisation

$$e_{\text{CE}}^n(\mathbf{x}) = |\epsilon v_1(u(\mathbf{x}, t_n))|, \quad (4.8)$$

où  $v_1$  est donné par (4.7). Si l'estimateur  $e_{\text{CE}}^n$  défini par (4.8) permet bien de raffiner le modèle en donnant un résultat non nul là où  $v(\mathbf{x}, t_n) = v_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t_n)$ , il est identiquement nul sur les données constantes en espace mais hors équilibre. Le compromis choisi dans [A5] consiste alors à poser

$$e^n(\mathbf{x}) = \max(e_{\text{naïf}}^n(\mathbf{x}), e_{\text{CE}}^n(\mathbf{x})). \quad (4.9)$$

En transposant ce raisonnement sur les schémas numériques de type volumes finis, soit en faisant directement le développement de Chapman-Enskog sur le schéma, soit en discrétisant la quantité  $v_1$  donnée par (4.7), on obtient alors un estimateur dynamique d'erreur de modélisation. Nous présentons ci-dessous un cas test où l'interaction entre une onde de pression dans un liquide et une bulle de vapeur est étudiée. Le modèle grossier consiste à supposer que la transition de phase se fait instantanément, alors que c'est une procédure de relaxation vers l'équilibre thermodynamique qui la gouverne dans le modèle fin. Nous nous référons à [A5] pour les détails liés au schéma numérique et au modèle, ainsi que pour d'autres cas tests.

On remarque sur les figures 4.1 et 4.2 que les résultats fournis par la procédure adaptative permettent de capturer des phénomènes que le modèle grossier ne voit pas. En particulier, la bulle persiste aux interactions avec l'onde de pression lorsque l'on prend en compte la dynamique du changement de phase. Il est intéressant de vérifier (cf. figure 4.3) que, comme l'on s'y attend, le modèle fin n'est utilisé que dans la zone où il y a de la vapeur. Le modèle grossier est utilisé sur la plupart du domaine de calcul. Soulignons que dans sa version actuelle, la méthode numérique ne permet pas de gain de calcul significatif.

## 4.3 Estimation d'erreur sur un modèle simplifié

### 4.3.1 Présentation des modèles fin et grossier

En parallèle des travaux essentiellement numériques résumés dans la partie §4.2 de ce manuscrit et détaillés dans [A5], nous avons cherché à quantifier rigoureusement l'erreur de modélisation

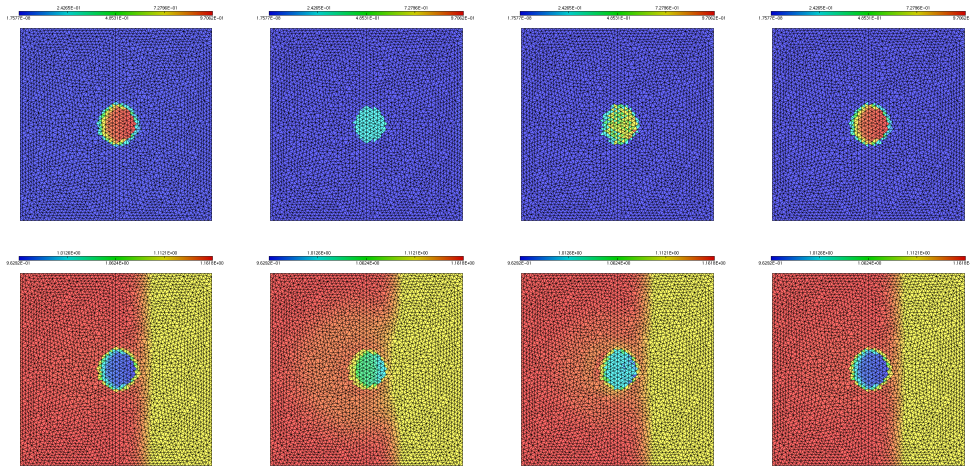


FIGURE 4.1 – Solution après la deuxième interaction : fraction massique de vapeur (haut) et masse volumique du mélange (bas) obtenues (de gauche à droite) à l’aide du modèle fin, du modèle grossier, de l’algorithme d’adaptation pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 10^{-2}$ .

commise au cours de la procédure d’adaptation. En raison des difficultés théoriques, nous n’avons pas fait cette analyse sur des systèmes de la forme générale (4.2) et (4.3) mais sur un modèle réduit sur lequel il est envisageable d’utiliser les résultats rigoureux relativement complets disponibles dans le cas quasi-scalaire ( $k = 1$  et  $N = 2$  avec les notations de la partie §4.2). Afin de simplifier l’étude, nous avons aussi supposé que les deux équations (4.2a) et (4.2b) n’étaient que faiblement couplées. Plus précisément, nous considérons le modèle fin suivant :

$$\partial_t u_f + \partial_x F(u_f, v_f) = 0, \quad (4.10)$$

où  $v_f$  relaxe vers une fonction  $v_{\text{eq}}$  régulière (de classe  $\mathcal{C}^2$ ) dépendant de  $x$  et de  $t$  (mais pas de  $u$ )

$$\partial_t v_f = \frac{v_{\text{eq}} - v_f}{\tau}, \quad (4.11)$$

où  $\tau > 0$  désigne un temps de relaxation vers l’équilibre  $v_{\text{eq}}$ . Il résulte de la régularité de  $v_{\text{eq}}$  et de celle de la donnée initiale  $v_0$  que  $v_f$  est régulier (de classe  $\mathcal{C}^2$ ).

Le modèle grossier est obtenu en considérant la limite  $\tau \rightarrow 0$  dans (4.10)–(4.11), ce qui donne

$$\partial_t u_g + \partial_x F(u_g, v_{\text{eq}}) = 0. \quad (4.12)$$

Sur ce problème extrêmement simplifié par rapport à celui étudié dans la partie §4.2, nous allons définir une stratégie d’adaptation de modèle proche de celle introduite dans la partie §4.1.2 pour laquelle nous serons capables de démontrer une estimation d’erreur de modélisation rigoureuse. Notre objectif est essentiellement théorique et nous nous affranchissons dans cette partie de considérations concernant le temps de calcul.

### 4.3.2 Présentation de l’algorithme et résultat principal

On cherche à trouver des fonctions  $u_a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v_a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  (l’indice  $a$  signifie *adaptée*) où  $v_a$  est soit gouvernée par le modèle fin (4.10), soit par le modèle grossier (4.12), soit

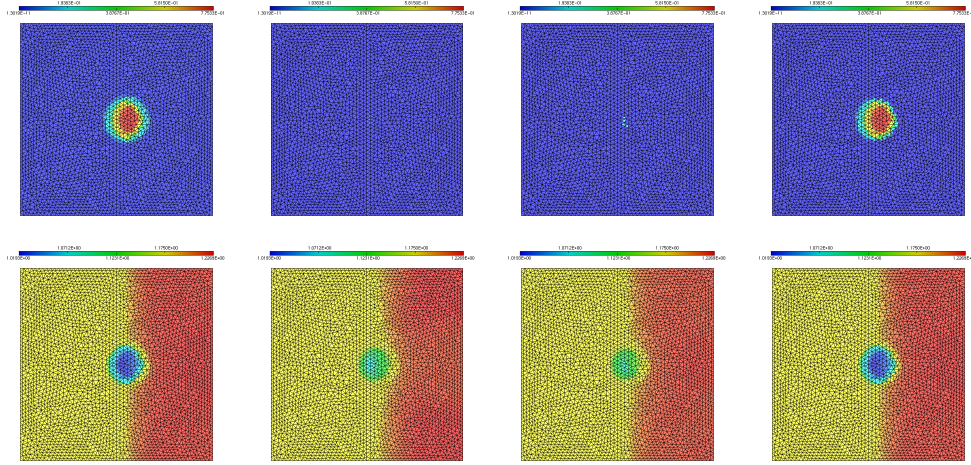


FIGURE 4.2 – Solution après la deuxième interaction : fraction massique de vapeur (haut) et masse volumique du mélange (bas) obtenues (de gauche à droite) à l'aide du modèle fin, du modèle grossier, de l'algorithme d'adaptation pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 10^{-2}$ .

par un mélange des deux dans une zone tampon. Voici l'algorithme proposé dans l'article [A3].

INITIALISATION :

On pose  $(u_a^{(-1)}, v_a^{(-1)})(\cdot, 0) = (u_0, v_0)(\cdot)$ .

PASSAGE DE  $t_n = n\Delta t$  à  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  (on note  $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ ) :

1. On définit la fonction  $v_i^{(n)} : \mathbb{R} \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$  comme la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v_i^{(n)} = \frac{1}{\tau} (v_{\text{eq}} - v_i^{(n)}), \\ v_i^{(n)}(\cdot, t_n) = v_a^{(n-1)}(\cdot, t_n). \end{cases} \quad (4.13)$$

2. Soient  $\Sigma, \Sigma', \Sigma'' > 0$ . On définit les ouverts  $\Omega_f^{(n)}$  et  $\Omega_g^{(n)}$  de  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \Omega_f^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| v_{\text{eq}}(x, t) - v_i^{(n)}(x, t) \right| > \Delta t \Sigma, \right. \\ \left. \left| \partial_x v_{\text{eq}}(x, t) - \partial_x v_i^{(n)}(x, t) \right| > \Delta t \Sigma', \text{ or } \left| \partial_{xx}^2 v_i^{(n)} \right| > \Sigma'', \forall t \in I_n \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\text{et } \Omega_g^{(n)} = \overbrace{\mathbb{R} \setminus \Omega_f^{(n)}}^{\circ}.$$

3. On introduit la fonction caractéristique régularisée  $\chi_\delta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; [0, 1])$  telle que

$$\chi_\delta(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_f^{(n)}, \\ 0 & \text{if } d(x, \Omega_f^{(n)}) \geq \delta, \end{cases} \quad (4.15)$$

pour tout  $t \in I_n$  et  $x \in \mathbb{R}$ , et telle qu'il existe  $\alpha_1, \alpha_2$  ne dépendant ni de  $\Omega_f$  ni de  $\delta$  tels que

$$\|\partial_x \chi_\delta(\cdot, t)\|_\infty \leq \frac{\alpha_1}{\delta}, \quad \|\partial_{xx}^2 \chi_\delta(\cdot, t)\|_\infty \leq \frac{\alpha_2}{\delta^2}. \quad (4.16)$$

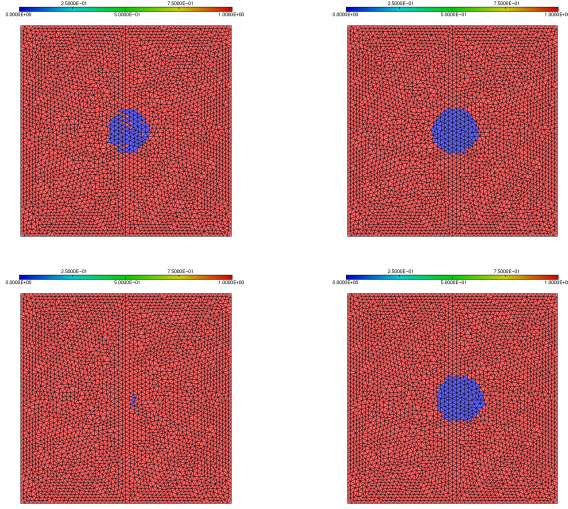


FIGURE 4.3 – Répartition des domaines de calcul  $\Omega_f$  (en bleu) et  $\Omega_g$  (en rouge) pour  $\theta = 1$  (à gauche) et  $\theta = 10^{-2}$  (à droite) après la première interaction (en haut) et après la seconde (en bas). On remarque la capacité de l'algorithme à n'employer le modèle fin que là où la vapeur est présente, et donc là où le changement de phase est susceptible d'intervenir. On remarque aussi que naturellement, la taille de  $\Omega_f$  augmente lorsque le seuil  $\theta$  diminue.

4. On définit alors  $v_a^{(n)} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times I_n; \mathbb{R})$  par

$$v_a^{(n)} = \chi_\delta v_i^{(n)} + (1 - \chi_\delta) v_{\text{eq}} \quad (4.17)$$

et  $u_a^{(n)} \in \mathcal{C}([t_n, t_{n+1}]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$  comme l'unique solution entropique [163] de la loi de conservation scalaire inhomogène

$$\begin{cases} \partial_t u_a^{(n)} + \partial_x F(u_a^{(n)}, v_a^{(n)}) = 0, \\ u_a^{(n)}(\cdot, t_n) = u_a^{(n-1)}(\cdot, t_n). \end{cases} \quad (4.18)$$

L'objectif du travail [A3] était de choisir les paramètres  $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$  et  $\delta$  afin de quantifier puis minimiser l'erreur commise

$$\|u_f - u_a\|_{C([0, T]; L^1(\mathbb{R}))}$$

entre le modèle adapté et le modèle fin.

Grâce à des estimations sur la variation totale des solutions entropiques de lois de conservation scalaires inhomogènes proposées dans [86, 170] et à la généralisation au cas inhomogène d'une estimation de stabilité par rapport à la fonction de flux des solutions entropiques des lois de conservation scalaire proposée dans [60], nous avons pu obtenir le résultat suivant.

**Théorème 4.2** *Le scaling permettant de minimiser la borne de l'erreur consiste à prendre*

$$\delta = \Sigma' = \sqrt{\Sigma}, \quad \Sigma'' = 1. \quad (4.19)$$

*Avec ce choix, on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u_f - u_a\|_{C([0, T]; L^1(\mathbb{R}))} \leq C(T) \sqrt{\Sigma}. \quad (4.20)$$

Afin de vérifier l'optimalité de l'estimation, nous avons testé numériquement la procédure sur le cas où  $F(u, v) = uv$ . Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.4, l'erreur se comporte comme  $\sqrt{\Sigma}$ , ce qui laisse penser que l'estimation (4.20) est optimale.

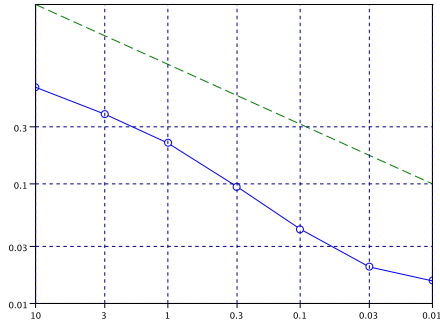


FIGURE 4.4 – Tracé de l'erreur de modélisation  $\|u_f - u_a\|_{C([0,T];L^1(\mathbb{R}))}$  en fonction du paramètre  $\Sigma$  avec le scaling (4.19) (bleu, trait plein). Droite de pente  $-1/2$  (vert, pointillé). L'optimalité du résultat du Théorème 4.2 semble confirmée.

# Chapitre 5

## Quelques autres résultats

Ce chapitre rassemble les résultats développés dans les travaux [A15], [P1] et [P4] qui ne s'insèrent pas directement dans les axes développés dans les chapitres précédents. Les résultats présentés dans les articles [A15] et [P1] ont en commun d'avoir été développés comme des outils directement utilisés dans les études présentées précédemment. Leur portée étant générale, ils ont été présentés séparément de leurs applications et non comme lemmes techniques. La contribution [P4] a été développée dans l'idée d'être utilisée ultérieurement pour construire des estimateurs d'erreur numérique *a posteriori* à coupler avec les algorithmes de modélisation adaptative présentés dans le Chapitre §4 de ce mémoire.

### 5.1 Continuité en temps des solutions entropiques des lois de conservation scalaires

La théorie des solutions entropiques pour les lois de conservation scalaires hyperboliques a connu de nombreux développements depuis le travail fondateur de Kružkov [163]. En particulier, il a été remarqué que la technique du dédoublement de variable permettait de traiter des cas plus riches, par exemple des équations avec de la diffusion [137, 60, 70]. Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons aux solutions entropiques d'une EDP de la forme

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{F}(u) - \nabla \phi(u)) = b \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  est supposée continue,  $\phi$  est croissante au sens large et lipschitzienne (le cas hyperbolique  $\phi \equiv 0$  rentre dans le cadre de notre étude),  $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  et

$$b \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega)) \cap L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+).^1$$

Précisons ce que nous entendons par là dans la définition suivante.

**Définition 5.1** Une fonction  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$  est une solution entropique de (5.1) si

1.  $\mathbf{F}(u) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ ,
2.  $\phi(u) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_{\text{loc}}(\Omega))$ ,

---

1. Le résultat que nous présentons peut s'étendre au cadre des solutions renormalisées dans le cas où  $b \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$  mais  $b \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega))$ . Nous renvoyons vers [56] pour une théorie sur les solutions renormalisées pour les équations paraboliques dégénérées.

3. pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$  et tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} |u - \kappa| \partial_t \psi d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} |u_0 - \kappa| \psi(\cdot, 0) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} (\mathbf{F}(u \top \kappa) - \mathbf{F}(u \perp \kappa) - \nabla |\phi(u) - \phi(\kappa)|) \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \text{sign}(u - \kappa) b \psi d\mathbf{x} dt \geq 0, \quad (5.2) \end{aligned}$$

où  $a \top b = \max(a, b)$  et  $a \perp b = \min(a, b)$ .

Il est notable que rien n'est précisé concernant les conditions aux limites en espace ou concernant des conditions lorsque  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Tout les raisonnements présentés sont locaux. En revanche, la condition initiale apparaît explicitement dans la formulation entropique (5.2), contrairement à ce qui est proposé dans le travail fondateur de Kruřkov [163], où la continuité en  $t = 0$  est une hypothèse supplémentaire à satisfaire pour les solutions entropiques. Nous renvoyons à [77, 216, 194] pour des discussions sur la continuité en 0 des solutions entropique sans prise en compte de la donnée initiale dans les inégalités d'entropie.

**Proposition 5.2** *Toute solution entropique de (5.1) au sens de la Définition 5.1 est aussi solution faible (c'est à dire au sens des distributions). De plus, si  $\phi^{-1}$  est continue, alors les notions de solution faible et de solution entropique sont équivalentes.*

Le résultat principal de [A15] est le suivant :

**Théorème 5.3** *Soit  $u$  une solution entropique. Il existe  $\bar{u} \in C(\mathbb{R}_+; L_{\text{loc}}^1(\Omega))$  tel que  $u = \bar{u}$  presque partout dans  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ .*

Nous donnons maintenant quelques éléments clé de la démonstration du Théorème 5.3.

**Définition 5.4** *Un temps  $t \geq 0$  est un point de Lebesgue à droite de la fonction  $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$  s'il existe  $\bar{u}(t) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tel que, pour tout  $K$  compact de  $\Omega$ , on ait*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} \|u(s) - \bar{u}(t)\|_{L^1(K)} ds = 0.$$

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des points de Lebesgue à droite de la solution entropique  $u$ .

Presque tout  $t \geq 0$  est point de Lebesgue à droite de  $u$  (cf. [141, Exercice 5.13] ou [198]) dès que  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ . En adaptant des résultats existant (voir [178, Lemme 7.41] dans le cas hyperbolique  $\phi \equiv 0$  ou [191] dans le cas parabolique  $\phi^{-1}$  continue), on montre que  $0 \in \mathcal{L}$ , et même plus précisément le résultat suivant :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathcal{L}}} \|\bar{u}(t) - u_0\|_{L^1(K)} = 0, \quad \forall K \subset\subset \Omega.$$

En utilisant ensuite une inégalité de Kato prouvée dans [70], on démontre que l'application

$$t \mapsto \bar{u}(t) \quad \text{est uniformément continue de } \mathcal{L} \text{ dans } L_{\text{loc}}^1(\Omega).$$

Comme  $\mathcal{L}$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ , l'application  $t \mapsto \bar{u}(t)$  peut être étendue de manière unique en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$  à valeur dans  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

Pour conclure cette partie, mentionnons que dans [86, 170], des estimations BV sont prouvées pour les lois de conservation scalaires dans le cas hyperbolique  $\phi \equiv 0$ . Ces estimations permettent de montrer que la solution entropique  $u$  est en réalité Lipschitz à valeur  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  lorsque la donnée initiale est régulière, i.e.,  $u_0 \in \text{BV}_{\text{loc}}(\Omega)$ . Notre résultat est moins fort, mais ne nécessite pas de régularité sur la donnée initiale  $u_0$ .

## 5.2 Un résultat de compacité en temps pour l'approximation numérique des équations paraboliques fortement dégénérées

Nous présentons maintenant la prépublication [P1].

### 5.2.1 Présentation du contexte

Pour démontrer l'existence d'une solution  $u$  à une équation aux dérivées partielles (voire à un système d'EDP), une méthode classique consiste à approcher  $u$  par une méthode de régularisation ou de discrétisation et de construire une suite  $(u_m)_{m \geq 0}$  de solutions approchées. Si on arrive à montrer de la relative compacité sur la famille  $(u_m)_{m \geq 0}$ , on peut alors extraire une sous-suite convergente et espérer montrer que sa limite  $u$  est nécessairement solution du problème de départ. Par exemple, les méthodes de Galerkin peuvent utiliser cette approche.

Dans le cadre des problèmes uniformément paraboliques, on dispose souvent d'information sur la régularité spatiale de la solution, par exemple  $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ . En parallèle, le fait que  $u$  soit solution d'une EDP permet de récupérer une information faible sur sa dérivée en temps  $\partial_t u$ , par exemple  $\partial_t u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega))$ . Il est bien connu depuis [35] que la combinaison d'information sur la régularité en espace et une estimation faible sur les variations temporelles permet d'obtenir de la compacité forte dans l'espace  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ . Ce résultat a été affiné dans [206] pour caractériser les ensembles compacts de  $L^p((0, T); \mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}$  est un espace de Banach. Des extensions au cadre non-linéaire de ce lemme ont été proposées dans [113, 177, 45, 80, 79, 183] afin de traiter des cas dégénérés où le résultat [206] ne s'applique pas.

Une autre technique pour obtenir la compacité sur l'espace produit  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  consiste à utiliser explicitement le fait que  $u$  est solution d'une EDP et plus seulement pour en déduire des informations concernant sa régularité. Cette approche introduite dans [10] permet d'obtenir une estimation sur les translatés en temps de la solution, une estimation analogue sur les translatés en espace étant directement donnée par la régularité spatiale de la solution. Un des intérêts majeurs de cette technique réside dans le fait qu'elle est particulièrement robuste par rapport au problème. Ainsi, cette technique a été étendue avec succès pour étudier la convergence de schémas numériques (voir par exemple [128, 125, 127]). Le principal défaut de cette méthode vient du fait que comme on utilise explicitement l'équation (ou le schéma numérique dans le cas discret), on se retrouve à devoir reproduire des calculs similaires dans de nombreux articles. Cette constatation a poussé à étendre au cas discret dans [142] le théorème de J. Simon [206]. Nous avons cherché à proposer un résultat de compacité en temps de type Aubin-Simon discret qui puisse être utilisé comme boîte noire même lorsque le problème que l'on considère est fortement dégénéré. Une approche similaire à la notre a été développée parallèlement dans [108].

### 5.2.2 Le résultat dans le cas continu

Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $T > 0$  un temps final arbitraire. Le premier résultat énoncé ci-dessous est un résultat dû à Ayman Moussa [183].

**Proposition 5.5** *Soit  $q \in (1, \infty)$  et  $p \in [1, \infty)$  et soit  $\alpha > \frac{pd}{d+p}$ . Soient  $(u_m)_{m \geq 1}$  et  $(v_m)_{m \geq 1}$  deux suites de fonctions mesurables telles que*

- (a) *la suite  $(u_m)_m$  est bornée dans  $L^q((0, T); W^{1, \alpha}(\Omega))$ , et converge donc faiblement vers  $u$  dans  $L^q((0, T); W^{1, \alpha}(\Omega)) \subset L^q((0, T); L^p(\Omega))$  à une sous-suite près ;*



(b) la suite  $(v_m)_m$  est bornée dans  $L^q\left((0, T); L^{p'}(\Omega)\right)$  et converge donc faiblement vers  $v$  dans  $L^q\left((0, T); L^{p'}(\Omega)\right)$  à une sous-suite près.

On suppose de plus qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} v_m \partial_t \varphi \, d\mathbf{x} dt \leq C \|\nabla \varphi\|_{\infty}, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega \times (0, T)). \quad (5.3)$$

Alors, à une sous-suite près,

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_m v_m \varphi \, d\mathbf{x} dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} uv \varphi \, d\mathbf{x} dt, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega \times (0, T)). \quad (5.4)$$

La preuve de cette proposition consiste à écrire

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_m v_m - uv) \varphi \, d\mathbf{x} dt = R_1(\ell) + R_2(m, \ell) + R_3(m, \ell) + R_4(m, \ell),$$

où, pour une suite d'approximations de l'unité  $(\rho_{\ell})_{\ell \geq 1}$ , on a posé

$$\begin{aligned} R_1(\ell) &= \iint_{Q_T} [uv - u(v * \rho_{\ell})] \varphi \, d\mathbf{x} dt, \\ R_2(m, \ell) &= \iint_{Q_T} [u(v * \rho_{\ell}) - u_m(v_m * \rho_{\ell})] \varphi \, d\mathbf{x} dt, \\ R_3(m, \ell) &= \iint_{Q_T} [u_m(v_m * \rho_{\ell}) - (u_m v_m) * \rho_{\ell}] \varphi \, d\mathbf{x} dt, \\ R_4(m, \ell) &= \iint_{Q_T} [(u_m v_m) * \rho_{\ell} - u_m v_m] \varphi \, d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Il est clair que  $R_1(\ell) \rightarrow 0$  lorsque  $\ell \rightarrow \infty$ , de même que

$$R_4(m, \ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément en } m.$$

En utilisant l'injection compacte de  $W^{1,\alpha}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ , on peut montrer (cf. [183]) que

$$R_3(m, \ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément en } m.$$

Pour  $\ell \geq 1$  fixé, la suite  $(v_m * \rho_{\ell})_m$  est relativement compacte dans  $L^q((0, T); L^{p'}(\Omega))$  donc

$$R_2(m, \ell) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \ell \geq 1.$$

On choisit donc  $\ell$  suffisamment grand de manière à assurer

$$|R_1(\ell) + R_3(m, \ell) + R_4(m, \ell)| \leq \epsilon, \quad \forall m \geq 1$$

puis on laisse tendre  $m$  vers l'infini, ce qui assure que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} (uv - u_m v_m) \varphi \, d\mathbf{x} dt \right| \leq \epsilon,$$

et ce pour  $\epsilon > 0$  arbitraire.

Le deuxième résultat que nous citons est un résultat démontré dans [§2,P1] qui vise à exploiter la relation (5.4).

**Proposition 5.6** Soient  $(u_m)_{m \geq 0}$  et  $(v_m)_{m \geq 0}$  des suites de  $L^1(\Omega \times (0, T))$  convergeant faiblement dans  $L^1(\Omega \times (0, T))$  vers  $u$  et  $v$  respectivement. On suppose que  $uv \in L^1(\Omega \times (0, T))$  et que pour tout  $m \geq 0$ , on a  $u_m v_m \in L^1(\Omega \times (0, T))$ , et que (5.4) est vérifiée. On suppose de plus que pour tout  $m \geq 0$ , on a  $v_m \in \beta(u_m)$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ , où  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  est un graphe maximal monotone, alors

- (a)  $v \in \beta(u)$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ ,
- (b) il existe des sous-ensembles mesurables  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  de  $\Omega \times (0, T)$  avec  $\Omega \times (0, T) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  tels que

$$u_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \text{ fortement dans } L^1(\mathcal{U}) \quad \text{et} \quad v_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v \text{ fortement dans } L^1(\mathcal{V}). \quad (5.5)$$

De plus, si  $\beta$  (resp.  $\beta^{-1}$ ) est le graphe d'une fonction, alors  $\mathcal{V} = \Omega \times (0, T)$  (resp.  $\mathcal{U} = \Omega \times (0, T)$ ).

Le point (a) de la proposition précédente se démontre à l'aide de l'astuce de Minty [171]. Nous renvoyons à [Lemme 2.1, P1] pour une preuve détaillée. Concernant le point (b) de la proposition, la preuve repose sur la représentation sous forme de mesure de Young [43, 150] de la fonction  $u+v$  qui est la limite faible dans  $L^1(\Omega \times (0, T))$  de la suite  $(u_m + v_m)_{m \geq 1}$ . En exploitant la relation de monotonie  $v_m \in \beta(u_m)$  et  $v \in \beta(u)$  suivant une méthodologie présentée dans [151] et [Lemmes 2.2 et 2.3, P1], nous parvenons à montrer que soit  $(u_m)_m$ , soit  $(v_m)_m$  converge fortement.

En compilant les propositions précédentes, on déduit directement un résultat de compacité en temps sous les hypothèses de régularité/intégrabilité de la Proposition 5.5 combinée avec l'hypothèse de monotonie  $v_m \in \beta(u_m)$  pour tout  $m$ .

### 5.2.3 Extension au cadre discret

On cherche à étendre le résultat de compacité présenté précédemment au cadre discret dans le but de pouvoir utiliser cet argument pour démontrer la convergence de schémas numériques. On utilise alors le formalisme des *Gradient Schemes* [109, 110] afin d'obtenir un résultat générique s'appliquant à un ensemble de méthodes numériques le plus large possible. Nous nous restreignons néanmoins à des méthodes où la discrétisation en espace et celle en temps sont conçues séparément.

Soit  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  le nombre de degrés de liberté de l'approximation en espace. On suppose qu'il existe deux opérateurs linéaires

$$\pi_m : \mathbb{R}^m \rightarrow L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla_m : \mathbb{R}^m \rightarrow L^\infty(\Omega)^d$$

tels que les hypothèses suivantes soient satisfaites.

- (A1) Pour tout  $p \in [1, \infty)$  et tout  $m \geq 1$ , il existe une norme  $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|_{p,m}$  sur  $\mathbb{R}^m$  telle que

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \sup_{m \geq 1} \sup_{\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|\pi_m \mathbf{v}_m(\cdot + \zeta) - \pi_m \mathbf{v}_m\|_{L^p(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_m\|_{p,m}} = 0, \quad \forall p \in [1, +\infty), \quad (5.6)$$

la fonction  $\pi_m \mathbf{v}_m$  étant prolongée par 0 hors de  $\Omega$ .

- (A2) Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on note

$$P_m(\varphi) = \left\{ \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^m \mid \int_{\Omega} \pi_m \mathbf{v}_m (\varphi - \pi_m \mathbf{u}_m) \, d\mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m \right\}$$

l'image réciproque par  $\pi_m$  du projeté orthogonal  $L^2(\Omega)$  de  $\varphi$  sur l'image  $\pi_m$ . En particulier,  $P_m(\varphi)$  est toujours non-vide. On suppose alors qu'il existe  $C > 0$  ne dépendant pas de  $m$  telle que

$$\|\nabla_m \phi_m\|_\infty \leq C \|\nabla \varphi\|_\infty, \quad \forall \phi_m \in P_m(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (5.7)$$

(A3) On suppose que pour tout  $\mathbf{u}_m = (u_{m,i})_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{v}_m = (v_{m,i})_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m$  avec  $v_{m,i} \in \beta(u_{m,i})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , on a  $\pi_m \mathbf{v}_m \in \beta(\pi_m \mathbf{u}_m)$  presque partout dans  $\Omega$ .

La propriété (A1) fournit de la compacité : si  $(\mathbf{v}_m)_m$  est telle que  $\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$  et  $\|\mathbf{v}_m\|_{p,m} \leq C$ , alors la suite  $(\pi_m \mathbf{v}_m)_{m \geq 1}$  est relativement compacte dans  $L^p(\Omega)$ . Typiquement, lorsque l'on dispose d'inégalité de Sobolev discrète [126, 52], on peut prendre

$$\|\mathbf{v}_m\|_{p,m} = \|\pi_m \mathbf{v}_m\|_{L^\alpha(\Omega)} + \|\nabla_m \mathbf{v}_m\|_{L^\alpha(\Omega)^d}, \quad \forall \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}_m$$

pour  $\alpha > \frac{pd}{p+d}$ . Dans le cas particulier des méthodes conformes pour lesquelles  $\nabla_m = \nabla \pi_m$ , la propriété (A2) revient à la continuité de la projection  $L^2(\Omega)$  sur  $\text{Im}(\pi_m)$  pour la norme  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . Mais les méthodes conformes ne vérifient pas (A3) pour des graphes  $\beta$  généraux. Afin de vérifier la propriété (A3), il faut se restreindre à des méthodes comme par exemple des schémas volumes finis, éléments finis mixtes de plus bas degré, ou éléments finis avec condensation de masse [110]. On a vérifié dans [P1] que dans le cas des méthodes volumes finis avec flux à deux points (comme par exemple dans la partie §1.4 de ce manuscrit), les propriétés (A1), (A2) et (A3) sont satisfaites sous hypothèse de régularité du maillage. Toujours sous une hypothèse usuelle de régularité sur le maillage (3.32), on peut vérifier que les éléments finis avec condensation de masse —et par conséquent les méthodes numériques présentées dans les parties §3.3 et §3.4 de ce rapport— vérifient les propriétés (A1), (A2) et (A3).

On cherche maintenant à discrétiser en temps. Afin de simplifier la présentation, nous nous concentrons ici sur le cas de discrétisations uniformes de  $(0, T)$  et renvoyons à [P1] pour une extension au cas de discrétisations générales. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on pose  $\Delta t_n = T/n$  et  $t_{n,k} = k\Delta t_n$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . L'espace discret que l'on considère maintenant est donc

$$\mathbb{R}^{m(n+1)} = \left\{ \mathbf{v}_m^n = (\mathbf{v}_m^{n,k})_{0 \leq k \leq n} = (\mathbf{v}_m^{n,k})_{1 \leq i \leq m}^{0 \leq k \leq n} \right\}.$$

Les opérateurs  $\pi_m$  et  $\nabla_m$  sont étendus à  $\mathbb{R}^{m(n+1)}$  en des opérateurs  $\pi_m^n$  et  $\nabla_m^n$  définis par

$$\pi_m^n \mathbf{v}_m^n(\mathbf{x}, t) = \pi_m \mathbf{v}_m^{n,k}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \nabla_m^n \mathbf{v}_m^n(\mathbf{x}, t) = \nabla_m \mathbf{v}_m^{n,k}(\mathbf{x}) \quad \text{si} \quad t \in (t_{n,k-1}, t_{n,k}]. \quad (5.8)$$

On introduit la semi-norme  $\|\cdot\|_{p,m,q,n}$  sur  $\mathbb{R}^{m(n+1)}$  définie par

$$\|\mathbf{u}_m^n\|_{p,m,q,n} = \left( \sum_{k=1}^n \Delta t_n \|\mathbf{u}_m^{n,k}\|_{p,m}^q \right)^{1/q}.$$

Toujours dans un souci de concision, nous ne présentons ici que le cas des schémas de discrétisation temporelle à un pas (comme les méthodes de Runge-Kutta). On définit l'opérateur  $\delta_m^n : \mathbb{R}^{m(n+1)} \rightarrow L^\infty(\Omega)$  par

$$\delta_m^n \mathbf{v}_m^n(\cdot, t) = \frac{\pi_m(\mathbf{v}_m^{n,k}) - \pi_m(\mathbf{v}_m^{n,k-1})}{\Delta t}, \quad \text{si} \quad t \in (t_{n,k-1}, t_{n,k}). \quad (5.9)$$

Le résultat que nous écrivons ci-dessous est une version adaptée au cadre discret des Propositions 5.5 et 5.6. La démonstration de ce résultat suit les lignes de la démonstration du cas continu ébauchée dans la partie §5.2.2.

**Théorème 5.7** Soient  $(\pi_m)_m$  et  $(\nabla_m)_m$  des suites d'opérateurs vérifiant les conditions (A1)–(A3) et soient  $(\pi_m^n)_m$ ,  $(\nabla_m^n)_m$  et  $(\delta_m^n)_m$  les opérateurs de reconstruction espace temps définis par (5.8) et (5.9). Soit  $(\mathbf{u}_m^n)_m$  et  $(\mathbf{v}_m^n)_m$  deux suites telles que  $\mathbf{u}_m^n, \mathbf{v}_m^n \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$ . On suppose qu'il existe  $p, q \in (1, \infty)$  tels que

- (i)  $\|\mathbf{u}_m^n\|_{p,m,q,n} \leq C$ , ce qui implique en particulier que la suite  $(\pi_m^n \mathbf{u}_m^n)_{m,n}$  admet une limite faible  $u$  dans  $L^q((0, T); L^p(\Omega))$  lorsque  $m, n \rightarrow \infty$ ;
- (ii)  $\|\pi_m^n \mathbf{v}_m^n\|_{L^{q'}((0, T); L^{p'}(\Omega))} \leq C$ , ce qui implique que la suite  $(\pi_m^n \mathbf{v}_m^n)_{m,n}$  admet une limite faible  $v$  dans  $L^{q'}((0, T); L^{p'}(\Omega))$  lorsque  $m, n \rightarrow \infty$ ;
- (iii) pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , on a  $v_{m,i}^{n,k} \in \beta(u_{m,i}^{n,k})$ ;
- (iv) pour tout  $\phi_m^n \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$ , on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \delta_m^n \mathbf{u}_m^n \pi_m^n \phi_m^n d\mathbf{x} dt \leq C \|\nabla_m^n \phi_m^n\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))}.$$

Alors  $v \in \beta(u)$  presque partout et il existe  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  tels que  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \Omega \times (0, T)$  et tels que

$$\pi_m^n \mathbf{u}_m^n \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} u \text{ fortement dans } L^1(\mathcal{U}), \quad \pi_m^n \mathbf{v}_m^n \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} v \text{ fortement dans } L^1(\mathcal{V}).$$

De plus, si  $\beta$  (resp.  $\beta^{-1}$ ) est le graphe d'une fonction, alors  $\mathcal{V} = \Omega \times (0, T)$  (resp.  $\mathcal{U} = \Omega \times (0, T)$ ).

Dans [P1], nous avons aussi étudié le cas de discrétisations non-uniformes et de méthodes de discrétisation temporelle multi-pas (comme les méthodes BDF [143]). L'idée principale est d'exprimer l'opérateur de différentiation temporelle  $\widehat{\delta}_m^n$  comme combinaison linéaire de shifts  $\tau_{-k\Delta t_n} \delta_m^n$  de l'opérateur de différentiation élémentaire (5.9). Cela nous a permis de démontrer (toujours dans [P1]) la convergence d'un schéma volumes finis avec discrétisation BDF2 en temps pour l'équation des milieux poreux.

### 5.3 Estimation d'erreur pour des approximations volumes finis explicites des solutions fortes de systèmes hyperboliques

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la prépublication [P4]. Nous y démontrons une estimation d'erreur entre les solutions approchées construites à l'aide d'un schéma volumes finis et les solutions fortes d'un système hyperbolique possédant une entropie uniformément convexe. La particularité de notre travail est que nous avons pu traiter le cas des schémas explicites en temps, qui sont généralement utilisés dans les applications. En effet, un résultat proche dans le cadre de schémas implicites a été proposé dans [154] ou encore dans [145, 144] pour un problème semi-discrétisé en espace avec une approche Galerkin discontinu. Un préalable à l'obtention de cette estimation d'erreur est une nouvelle estimation de stabilité (cf. Proposition 5.8) qui quantifie la dissipation numérique d'entropie. Cette estimation est une extension au cas des systèmes de l'estimation *BV-faible* déjà utilisée dans [75, 83, 218, 123, 72] pour le cas scalaire. De cette estimation, nous déduisons une estimation d'erreur (sous-optimale) en  $h^{1/4}$  en norme  $L^2$  espace temps. Cette estimation repose sur la stabilité des solutions fortes et l'utilisation de l'entropie relative [90, 105, 154, 91] pour estimer l'écart entre la solution numérique et une solution forte. Nous écrivons les erreurs de consistance liées à l'approximation numérique sous la forme de mesures de Radon, étendant au cadre des systèmes le formalisme introduit pour le cas scalaire dans [123] et étendu dans [60].

### 5.3.1 Systèmes hyperboliques et entropie relative

On considère un système de  $m$  lois de conservation

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha f_\alpha(u)(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.10)$$

posé sur tout l'espace  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , et pour tout temps  $t \in (0, T)$ ,  $T > 0$ . On suppose qu'il existe un sous-ensemble convexe et borné de  $\mathbb{R}^m$ , noté  $\Omega$  et appelé *ensemble des états admissibles*, tel que

$$u(\mathbf{x}, t) \in \Omega, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]. \quad (5.11)$$

Le système (5.10) est complété avec une donnée initiale

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \in \Omega, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.12)$$

On suppose que pour tout  $\alpha \in \{1, \dots, d\}$ , les fonctions  $f_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  appartiennent à  $C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ , et que leurs différentielles  $Df_\alpha$  sont diagonalisables et à valeurs propres réelles.

Le système (5.10) est muni d'une entropie  $\eta \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$  telle qu'il existe  $\beta_1 \geq \beta_0 > 0$  pour lesquels

$$\text{spec}(D^2\eta(u)) \subset [\beta_0, \beta_1], \quad \forall u \in \overline{\Omega}, \quad (5.13)$$

et telle que le flux d'entropie correspondant  $\xi \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$  satisfasse

$$D\xi_\alpha(u) = D\eta(u)Df_\alpha(u), \quad \forall u \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, d\}. \quad (5.14)$$

Il est bien connu que même pour des données initiales  $u_0$  régulières, les solutions de (5.10)–(5.12) peuvent développer des discontinuités après un temps fini. Néanmoins, notre étude se restreint au cas où une *solution forte*  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \Omega)$  de (5.10)–(5.12) existe. L'entropie correspondant aux solutions fortes est conservée au cours du temps, c'est à dire

$$\partial_t \eta(u) + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha \xi_\alpha(u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+. \quad (5.15)$$

On renvoie aux ouvrages [158, 173, 91] pour des résultats spécifiques sur les solutions fortes des systèmes de lois de conservations.

Pour une donnée  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \Omega)$ , une fonction  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \Omega)$  est *solution faible* de (5.10)–(5.12) si, pour toute fonction  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ , on a

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} u \cdot \partial_t \phi \, d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0 \cdot \phi(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \sum_{\alpha=1}^d f_\alpha(u) \cdot \partial_\alpha \phi \, d\mathbf{x} dt = 0. \quad (5.16)$$

De plus,  $u$  est une *solution faible entropique* de (5.10)–(5.12) si  $u$  satisfait (5.16), et si pour toute fonction  $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ ,  $u$  satisfait

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \eta(u) \partial_t \psi \, d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0) \psi(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \sum_{\alpha=1}^d \xi_\alpha(u) \partial_\alpha \psi \, d\mathbf{x} dt \geq 0. \quad (5.17)$$

Soient  $u, v \in \Omega$ , alors on définit l'entropie relative  $H(v, u)$  de  $v$  par rapport à  $u$  en posant

$$H(v, u) = \eta(v) - \eta(u) - D\eta(u)(v - u).$$

Le flux d'entropie relative associé  $Q : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est défini par

$$Q_\alpha(v, u) = \xi_\alpha(v) - \xi_\alpha(u) - D\eta(u)(f_\alpha(v) - f_\alpha(u)), \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, d\}.$$

Il résulte de la condition (5.13) que

$$\frac{\beta_0}{2}|v - u|^2 \leq H(v, u) \leq \frac{\beta_1}{2}|v - u|^2, \quad \forall u, v \in \bar{\Omega}. \quad (5.18)$$

De plus, si  $u$  est une solution forte et  $v$  une solution faible entropique, alors

$$\partial_t H(v, u) + \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha Q_\alpha(v, u) \leq - \sum_{\alpha=1}^d (\partial_\alpha u)^T Z_\alpha(v, u) \quad (5.19)$$

au sens des distributions, où

$$Z_\alpha(v, u) = D^2\eta(u)(f_\alpha(v) - f_\alpha(u) - Df_\alpha(u)(v - u)). \quad (5.20)$$

L'exploitation des relations (5.18)–(5.19) permet d'obtenir l'estimation de stabilité  $L^2_{\text{loc}}$  suivante :

$$\int_{|\mathbf{x}| < r} |v(\mathbf{x}, T) - u(\mathbf{x}, T)|^2 d\mathbf{x} \leq C(T, u) \int_{|\mathbf{x}| < r+sT} |v_0(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (5.21)$$

pour tout  $r > 0$  et pour un certain  $s > 0$ . La quantité  $C(T, u)$  dépend de manière exponentielle de  $T$  (en raison de l'utilisation d'un lemme de Gronwall) et de  $\|u\|_{W^{1,\infty}}$  :  $C(T, u)$  explose lorsque la solution  $u$  développe des singularités. On se réfère à [91] pour la preuve de cette inégalité, qui a pour conséquence un principe d'unicité fort-faible, c'est à dire que s'il existe une solution forte, toute solution faible entropique coïncide avec cette solution forte.

Notre objectif dans la suite est d'utiliser cette propriété de stabilité pour quantifier l'erreur numérique commise lors d'approximations par des schémas volumes finis. L'idée est de perturber cette preuve, la solution faible entropique étant remplacée par une solution numérique.

### 5.3.2 Schémas volumes finis et stabilité non-linéaire

Nous introduisons maintenant les outils nécessaires à la définition du schéma volumes finis, à commencer par le maillage  $\mathcal{T}$  que l'on suppose constitué d'ouverts polygonaux  $K \in \mathcal{T}$  avec

$$|K| \geq ah^d \quad \text{et} \quad |\partial K| := \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |\sigma_{KL}| \leq \frac{h^{d-1}}{a}, \quad \forall K \in \mathcal{T} \quad (5.22)$$

pour une certaine constante  $a > 0$  caractérisant la régularité du maillage. La normale unitaire à l'interface  $\sigma_{KL}$  de la maille  $K$  vers la maille  $L$  est notée  $n_{KL}$ . Étant donné le pas de temps  $\Delta t > 0$ , on note  $t_n = n\Delta t$  et  $N_T = \max\{n \in \mathbb{N}, n \leq T/\Delta t + 1\}$ .

Pour ce qui est des flux numériques associés au schéma volumes finis, nous adoptons le formalisme développé dans le livre [59] (voir aussi [209, 210]). En particulier, nous nous restreignons à des flux  $G_{KL}$  entre les mailles  $K$  et  $L$  ne dépendant que des états dans la maille  $K$  et dans la maille  $L$ , et donc aux schémas d'ordre 1.

Pour tout couple  $(K, L) \in \mathcal{T}^2$ ,  $L \in \mathcal{N}(K)$  de mailles voisines, on considère le flux numérique  $G_{KL} : \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On suppose que ces flux numériques sont *conservatifs*, i.e.,

$$G_{KL}(u, v) = -G_{LK}(v, u), \quad \forall (u, v) \in \Omega^2. \quad (5.23)$$

Nous faisons l'hypothèse que les flux sont *consistants*, i.e.,

$$G_{KL}(u, u) = f(u) \cdot n_{KL}, \quad \forall u \in \Omega, \quad (5.24)$$

et qu'ils *préservent les états admissibles par interface*. Plus précisément, on suppose l'existence d'un  $\lambda^* > 0$  tel que, pour tout  $\lambda > \lambda^*$ , pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et pour tout  $L \in \mathcal{N}(K)$ ,

$$u - \frac{1}{\lambda} (G_{KL}(u, v) - f(u) \cdot n_{KL}) \in \Omega, \quad \forall (u, v) \in \Omega^2. \quad (5.25)$$

Afin de garantir la stabilité non-linéaire du schéma, on suppose l'existence de *flux d'entropie numériques*  $\xi_{KL} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui soient conservatifs

$$\xi_{KL}(u, v) = -\xi_{LK}(v, u), \quad \forall (u, v) \in \Omega^2, \quad (5.26)$$

et vérifient les inégalités d'entropie à l'interface : pour tout  $\lambda \geq \lambda^* > 0$ , pour tout couple  $(u, v) \in \Omega^2$ , on a

$$\xi_{KL}(u, v) - \xi(u) \cdot n_{KL} \leq -\lambda \left( \eta \left( u - \frac{1}{\lambda} (G_{KL}(u, v) - f(u) \cdot n_{KL}) \right) - \eta(u) \right). \quad (5.27)$$

Le schéma numérique que nous considérons est alors défini par

$$\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} |K| + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} G_{KL}(u_K^n, u_L^n) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \geq 0, \quad (5.28)$$

complété avec la donnée initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (5.29)$$

La solution discrète  $u_h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  correspondante est définie par

$$u_h(\mathbf{x}, t) = u_K^n \quad \text{si } (\mathbf{x}, t) \in K \times [t_n, t_{n+1}). \quad (5.30)$$

Sous les hypothèses (5.23)–(5.27), et si le pas de temps  $\Delta t$  satisfait la condition CFL

$$\frac{\lambda^* \Delta t}{a^2 h} \leq 1, \quad (5.31)$$

alors la solution discrète  $u_h$  définie par (5.28)–(5.30) est bornée à valeurs dans  $\Omega$  et satisfait des inégalités d'entropie locales

$$\frac{\eta(u_K^{n+1}) - \eta(u_K^n)}{\Delta t} |K| + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \xi_{KL}(u_K^n, u_L^n) \leq 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \geq 0.$$

Cette estimation n'est néanmoins pas suffisante pour passer à la limite  $h \rightarrow 0$  dans le schéma numérique en l'absence d'hypothèse de compacité sur la suite  $u_h$ .

Pour montrer la convergence du schéma (et même mieux!), on peut montrer une estimation d'erreur entre la solution exacte  $u$  (supposée solution forte dans ce qui suit) et la solution approchée  $u_h$  fournie par le schéma (5.28)–(5.30). Pour obtenir une telle estimation d'erreur, nous avons besoin d'une nouvelle estimation de stabilité basée sur la quantification de la dissipation numérique d'entropie nécessitant une condition de CFL renforcée : on suppose qu'il existe  $\zeta \in (0, 1)$  tel que

$$\frac{\lambda^* \Delta t}{a^2 h} \leq (1 - \zeta) \frac{\beta_0}{\beta_1}. \quad (5.32)$$

**Proposition 5.8** *On suppose que la condition CFL renforcée (5.32) est vérifiée, alors*

$$\sum_{k=1}^{N_T} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T} \cap B(0,r)} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |\sigma_{KL}| |G_{KL}(u_K^n, u_L^n) - f(u_K^n) \cdot n_{KL}| \leq \frac{C}{\sqrt{h}} \quad (5.33)$$

pour une quantité  $C$  ne dépendant pas de  $h$ .

### 5.3.3 Estimation d'erreur pour les solutions fortes

Afin de pouvoir s'appuyer sur la preuve de stabilité des solutions faibles entropiques par rapport aux solutions fortes, nous devons quantifier l'erreur commise par  $u_h$  dans les formulations faible (5.16) et entropique (5.17). On étend au cas des systèmes le cadre proposé dans [123, 60].

**Proposition 5.9** *Sous les hypothèses (5.23)–(5.27) et la condition CFL renforcée (5.32), il existe des mesures de Radon positives localement bornées  $\mu_0, \nu_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$  et  $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$  telles que*

$$\begin{aligned} \mu_0(B(0,r)) &\leq C(r)h, & \nu_0(B(0,r)) &\leq C(r)h, \\ \mu(B(0,r) \times (0,T)) &\leq C(r,T)\sqrt{h}, & \nu(B(0,r) \times (0,T)) &\leq C(r,T)\sqrt{h}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

et telles que pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ , on ait

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \eta(u_h) \partial_t \psi \, d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0) \psi(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \sum_{\alpha=1}^d \xi_\alpha(u_h) \partial_\alpha \psi \, d\mathbf{x} dt \\ \geq -\langle \mu_0, \psi(\cdot, 0) \rangle - \langle \mu, |\nabla \psi| + |\partial_t \psi| \rangle, \end{aligned} \quad (5.35)$$

et telles que pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ , on ait

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} u_h \cdot \partial_t \phi \, d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0 \cdot \phi(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \sum_{\alpha=1}^d f_\alpha(u_h) \cdot \partial_\alpha \phi \, d\mathbf{x} dt \right| \\ \leq \langle \nu_0, |\phi(\cdot, 0)| \rangle + \langle \nu, |\nabla \phi| + |\partial_t \phi| \rangle. \end{aligned} \quad (5.36)$$

La proposition ci-dessus permet d'affirmer que la solution discrète  $u_h$  est presque une solution faible entropique lorsque  $h$  est petit. En adaptant la démonstration du principe de stabilité fort-faible (5.21) et en utilisant les estimations (5.34) (elles-même conséquences de l'estimation (5.33)), on aboutit au théorème suivant.

**Théorème 5.10** *Soit  $u$  une solution forte de (5.10) et soit  $u_h$  la solution discrète donnée par le schéma (5.28)–(5.30). Sous les hypothèses (5.23)–(5.27) et la condition CFL renforcée (5.32), il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $T, r, \Omega, a, \lambda^*, u_0, G_{KL}, \eta$  et  $f$  (mais pas de  $h$ ) telle que*

$$\int_0^T \int_{B(0,r+s(T-t))} |u - u^h|^2 \, dx dt \leq C\sqrt{h}.$$





# Bibliographie

- [1] R. L. Actis, B. A. Szabo, and C. Schwab. Hierarchic models for laminated plates and shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172 :79–107, 1999.
- [2] Adimurthi, R. Dutta, S. S. Ghoshal, and G. D. Veerappa Gowda. Existence and nonexistence of TV bounds for scalar conservation laws with discontinuous flux. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64(1) :84–115, 2011.
- [3] Adimurthi, J. Jaffré, and G. D. Veerappa Gowda. Godunov-type methods for conservation laws with a flux function discontinuous in space. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :179–208 (electronic), 2004.
- [4] Adimurthi, S. Mishra, and G. D. Veerappa Gowda. Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux-functions. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2(4) :783–837, 2005.
- [5] Adimurthi and G. D. Veerappa Gowda. Conservation law with discontinuous flux. *J. Math. Kyoto Univ.*, 43(1) :27–70, 2003.
- [6] M. Agueh. Existence of solutions to degenerate parabolic equations via the Monge-Kantorovich theory. *Adv. Differential Equations*, 10(3) :309–360, 2005.
- [7] G. Allaire. Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium. *Asymptotic Anal.*, 2(3) :203–222, 1989.
- [8] G. Allaire. Prolongement de la pression et homogénéisation des équations de Stokes dans un milieu poreux connexe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(10) :717–722, 1989.
- [9] H. W. Alt and E. DiBenedetto. Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 12(3) :335–392, 1985.
- [10] H. W. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 183(3) :311–341, 1983.
- [11] H. W. Alt, S. Luckhaus, and A. Visintin. On nonstationary flow through porous media. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 136 :303–316, 1984.
- [12] B. Amaziane, M. Jurak, and A. Vrbaški. Existence for a global pressure formulation of water-gas flow in porous media. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 102, 22, 2012.
- [13] B. Amaziane, M. Jurak, and A. Žgaljić Keko. Modeling compositional compressible two-phase flow in porous media by the concept of the global pressure. *Comput. Geosci.*, 18(3-4) :297–309, 2014.
- [14] B. Amaziane, L. Pankratov, and A. Piatnitski. The existence of weak solutions to immiscible compressible two-phase flow in porous media : the case of fields with different rock-types. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18(5) :1217–1251, 2013.

- [15] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.
- [16] L. Ambrosio, E. Mainini, and S. Serfaty. Gradient flow of the Chapman-Rubinstein-Schatzman model for signed vortices. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(2) :217–246, 2011.
- [17] L. Ambrosio and S. Serfaty. A gradient flow approach to an evolution problem arising in superconductivity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(11) :1495–1539, 2008.
- [18] A. Ambrosio, C. Chalons, F. Coquel, and T. Galié. Relaxation and numerical approximation of a two-fluid two-pressure diphasic model. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 43 :1063–1097, 2009.
- [19] A. Ambrosio, C. Chalons, F. Coquel, and T. Galié. Interface model coupling *via* prescribed local flux balance. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 48(3) :895–918, 2014.
- [20] A. Ambrosio, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-. Raviart, and N. Seguin. The coupling of homogeneous models for two-phase flows. *Int. J. Finite Vol.*, 4(1) :39, 2007.
- [21] A. Ambrosio, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, and N. Seguin. Coupling of general Lagrangian systems. *Math. Comp.*, 77(262) :909–941, 2008.
- [22] A. Ambrosio, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, and N. Seguin. Relaxation methods and coupling procedures. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 56(8) :1123–1129, 2008.
- [23] A. Ambrosio, C. Chalons, and P.-A. Raviart. A godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow. *Comput. Fluids*, 54 :67–91, 2012.
- [24] A. Ambrosio, J.-M. Hérard, and O. Hurisse. A method to couple HEM and HRM two-phase flow models. *Comput. & Fluids*, 38(4) :738–756, 2009.
- [25] B. Andreianov and F. Bouhiss. Uniqueness for an elliptic-parabolic problem with Neumann boundary condition. *J. Evol. Equ.*, 4(2) :273–295, 2004.
- [26] B. Andreianov and M. K. Gazibo. Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux boundary condition. *Z. Angew. Math. Phys.*, 64(5) :1471–1491, 2013.
- [27] B. Andreianov, P. Goatin, and N. Seguin. Finite volume schemes for locally constrained conservation laws. *Numer. Math.*, 115(4) :609–645, 2010. With supplementary material available online.
- [28] B. Andreianov, K. H. Karlsen, and N. H. Risebro. On vanishing viscosity approximation of conservation laws with discontinuous flux. *Netw. Heterog. Media*, 5(3) :617–633, 2010.
- [29] B. Andreianov, K. H. Karlsen, and N. H. Risebro. A theory of  $L^1$ -dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 201(1) :27–86, 2011.
- [30] B. Andreianov, F. Lagoutière, N. Seguin, and T. Takahashi. Well-posedness for a one-dimensional fluid-particle interaction model. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(2) :1030–1052, 2014.
- [31] B. Andreianov and N. Seguin. Well-posedness of a singular balance law. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*, 32(6) :1939–1964, 2012.
- [32] N. Andrianov and G. Warnecke. The Riemann problem for the Baer-Nunziato two-phase flow model. *J. Comput. Phys.*, 195(2) :434 – 464, 2004.

- [33] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. Translated from the Russian.
- [34] T. Arbogast. The existence of weak solutions to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow. *Nonlinear Anal.*, 19(11) :1009–1031, 1992.
- [35] T. Aubin. Un théorème de compacité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 256 :5042–5044, 1963.
- [36] E. Audusse and B. Perthame. Uniqueness for scalar conservation laws with discontinuous flux via adapted entropies. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 135(2) :253–265, 2005.
- [37] J.L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Remarques sur la loi de darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux. *Journal de Mécanique théorique et Appliquée*, pages 141–156, 1986.
- [38] F. Bachmann. Analysis of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients. *Adv. Differential Equations*, 9(11-12) :1317–1338, 2004.
- [39] F. Bachmann. *Equations hyperboliques scalaires à flux discontinu*. PhD thesis, Université Aix-Marseille I, 2005.
- [40] F. Bachmann. Finite volume schemes for a non linear hyperbolic conservation law with a flux function involving discontinuous coefficients. *Int. J. Finite Volumes*, 3, 2006.
- [41] F. Bachmann and J. Vovelle. Existence and uniqueness of entropy solution of scalar conservation laws with a flux function involving discontinuous coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(1-3) :371–395, 2006.
- [42] M. R. Baer and J. W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flows*, 12 :861–889, 1986.
- [43] J. M. Ball. A version of the fundamental theorem for Young measures. In *PDEs and continuum models of phase transitions (Nice, 1988)*, volume 344 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 207–215. Springer, Berlin, 1989.
- [44] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9) :1017–1034, 1979.
- [45] J. W. Barrett and E. Süli. Reflections on Dubinskii’s nonlinear compact embedding theorem. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 91(105) :95–110, 2012.
- [46] J. Bear. *Dynamic of Fluids in Porous Media*. American Elsevier, New York, 1972.
- [47] J. Bear and Y. Bachmat. *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*, volume 4. Springer, 1990.
- [48] J.-D. Benamou and Y. Brenier. A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84(3) :375–393, 2000.
- [49] C. Bernardi, T. C. Rebollo, F. Hecht, and R. Lewandowski. Automatic insertion of a turbulence model in the finite element discretization of the Navier-Stokes equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19 :1139–1183, 2009.
- [50] M. Bertsch, R. Dal Passo, and C. J. van Duijn. Analysis of oil trapping in porous media flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(1) :245–267 (electronic), 2003.
- [51] M. Bessemoulin-Chatard. *Développement et analyse de schémas volumes finis motivés par la présentation de comportements asymptotiques. Application à des modèles issus de la physique et de la biologie*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2012.

- [52] M. Bessemoulin-Chatard, C. Chainais-Hillairet, and F. Filbet. On discrete functional inequalities for some finite volume schemes. *IMA J. Numer. Anal.*, 35 :1125–1149, 2015.
- [53] M. Bessemoulin-Chatard and F. Filbet. A finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(5) :B559–B583, 2012.
- [54] M. Bessemoulin-Chatard and M. Saad. Preserving monotony of combined edge finite volume-finite element scheme for a bone healing model on general mesh. Preprint, submitted for publication, 2015.
- [55] X. Blanc and E. Labourasse. A positive scheme for diffusion problems on deformed meshes. *Z. angew. Math. Mech.*, 2015. doi : 10.1002/zamm.201400234.
- [56] D. Blanchard and A. Porretta. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. *J. Differential Equations*, 210(2) :383–428, 2005.
- [57] A. Blanchet. A gradient flow approach to the Keller-Segel systems. RIMS Kokyuroku’s lecture notes, 2014.
- [58] F. Bolley and J. A. Carrillo. Nonlinear diffusion : geodesic convexity is equivalent to Wasserstein contraction. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(10) :1860–1869, 2014.
- [59] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [60] F. Bouchut and B. Perthame. Kružkov’s estimates for scalar conservation laws revisited. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(7) :2847–2870, 1998.
- [61] M. Braack and A. Ern. A posteriori control of modeling errors and discretization errors. *Multiscale Model. Simul.*, 1 :221–238, 2003.
- [62] Y. Brenier and J. Jaffré. Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(3) :685–696, 1991.
- [63] K. Brenner and R. Masson. Convergence of a vertex centered discretization of two-phase darcy flows on general meshes. *Int. J. Finite Vol.*, 10 :1–37, 2013.
- [64] R. Bürger, A. García, K. H. Karlsen, and J. D. Towers. Difference schemes, entropy solutions, and speedup impulse for an inhomogeneous kinematic traffic flow model. *Netw. Heterog. Media*, 3(1) :1–41, 2008.
- [65] R. Bürger, K. H. Karlsen, and J. D. Towers. An Engquist-Osher-type scheme for conservation laws with discontinuous flux adapted to flux connections. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3) :1684–1712, 2009.
- [66] E. Burman and A. Ern. Discrete maximum principle for galerkin approximations of the laplace operator on arbitrary meshes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 338(8) :641–646, 2004.
- [67] F. Buzzi, M. Lenzinger, and B. Schweizer. Interface conditions for degenerate two-phase flow equations in one space dimension. *Analysis*, 29 :299–316, 2009.
- [68] F. Caetano. *Sur certains problèmes de linéarisation et de couplage pour les systèmes hyperboliques non linéaires*. PhD thesis, UPMC Paris 6, 2006.
- [69] F. Caro, B. Saad, and M. Saad. Two-component two-compressible flow in a porous medium. *Acta Appl. Math.*, 117 :15–46, 2012.
- [70] J. Carrillo. Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 147(4) :269–361, 1999.

- [71] J. Casado-Díaz, T. Chacón Rebollo, V. Girault, M. Gómez Mármol, and F. Murat. Finite elements approximation of second order linear elliptic equations in divergence form with right-hand side in  $L^1$ . *Numer. Math.*, 105(3) :337–374, 2007.
- [72] C. Chainais-Hillairet. Finite volume schemes for a nonlinear hyperbolic equation. Convergence towards the entropy solution and error estimate. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(1) :129–156, 1999.
- [73] C. Chalons, P. Goatin, and N. Seguin. General constrained conservation laws. application to pedestrian flow modeling. *Netw. Heterog. Media*, 8(2) :433–463, 2013.
- [74] G. Chamoun, M. Saad, and R. Talhouk. Monotone combined edge finite volume-finite element scheme for anisotropic Keller-Segel model. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 30(3) :1030–1065, 2014.
- [75] S. Champier, T. Gallouët, and R. Herbin. Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh. *Numer. Math.*, 66 :139–157, 1993.
- [76] G. Chavent and J. Jaffré. *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, volume 17. North-Holland, Amsterdam, stud. math. appl. edition, 1986.
- [77] G. Chen and M. Rascle. Initial layers and uniqueness of weak entropy solutions to hyperbolic conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(3) :205–220, 2000.
- [78] G.Q. Chen, C.D. Levermore, and T.-P. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(6) :787–830, 1994.
- [79] X. Chen, A. Jüngel, and J.-G. Liu. A note on Aubin-Lions-Dubinskii lemmas. *Acta Appl. Math.*, 133 :33–43, 2013.
- [80] X. Chen and J.-G. Liu. Two nonlinear compactness theorems in  $L^p(0, T; B)$ . *Appl. Math. Lett.*, 25(12) :2252–2257, 2012.
- [81] Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow. I. Existence, uniqueness and regularity of a weak solution. *J. Differential Equations*, 171(2) :203–232, 2001.
- [82] Z. Chen and R. E. Ewing. Degenerate two-phase incompressible flow. III. Sharp error estimates. *Numer. Math.*, 90(2) :215–240, 2001.
- [83] B. Cockburn, F. Coquel, and P. G. LeFloch. An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws. *Math. Comp.*, 63(207) :77–103, 1994.
- [84] G. M. Coclite, M. Garavello, and B. Piccoli. Traffic flow on a road network. *SIAM J. Math. Anal.*, 36(6) :1862–1886 (electronic), 2005.
- [85] R. M. Colombo and P. Goatin. A well posed conservation law with a variable unilateral constraint. *J. Differential Equations*, 234(2) :654–675, 2007.
- [86] R. M. Colombo, M. Mercier, and M. D. Rosini. Stability and total variation estimates on general scalar balance laws. *Commun. Math. Sci.*, 7(1) :37–65, 2009.
- [87] F. Coquel, J.-M. Hérard, K. Saleh, and N. Seguin. A robust entropy-satisfying finite volume scheme for the isentropic Baer-Nunziato model. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 48(1) :165–206, 2014.
- [88] F. Coquel, J.-M. Hérard, K. Saleh, and N. Seguin. Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows. *Commun. Math. Sci.*, 12(3) :593–600, 2014.
- [89] M. G. Crandall and A. Majda. Monotone difference approximations for scalar conservation laws. *Math. Comp.*, 34(149) :1–21, 1980.
- [90] C. M. Dafermos. The second law of thermodynamics and stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 70(2) :167–179, 1979.

- [91] C.M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2010.
- [92] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- [93] P. Degond, G. Dimarco, and L. Mieussens. A moving interface method for dynamic kinetic-fluid coupling. *J. Comput. Phys.*, 227 :1176–1208, 2007.
- [94] P. Degond, G. Dimarco, and L. Mieussens. A multiscale kinetic-fluid solver with dynamic localization of kinetic effects. *J. Comput. Phys.*, 229 :4907–4933, 2010.
- [95] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [96] B. Després. An explicit a priori estimate for a finite volume approximation of linear advection on non-Cartesian grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2) :484–504 (electronic), 2004.
- [97] B. Després. Nonlinear schemes for the heat equation in 1D. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 48(01) :107–134, 2014.
- [98] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, volume 69 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [99] D. A. Di Pietro, A. Ern, and S. Lemaire. An arbitrary-order and compact-stencil discretization of diffusion on general meshes based on local reconstruction operators. *Comput. Methods Appl. Math.*, 14(4) :461–472, 2014.
- [100] D. A. Di Pietro, E. Flauraud, M. Vohralík, and S. Yousef. A posteriori error estimates, stopping criteria, and adaptivity for multiphase compositional Darcy flows in porous media. *J. Comput. Phys.*, 276 :163–187, 2014.
- [101] D. A. Di Pietro and M. Vohralík. A review of recent advances in discretization methods, a posteriori error analysis, and adaptive algorithms for numerical modeling in geosciences. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, pages 1–29, June 2014. (online first).
- [102] D. A. Di Pietro, M. Vohralík, and S. Yousef. An a posteriori-based, fully adaptive algorithm with adaptive stopping criteria and mesh refinement for thermal multiphase compositional flows in porous media. *Comput. Math. Appl.*, 68(12, part B) :2331–2347, 2014.
- [103] S. Diehl. A conservation law with point source and discontinuous flux function modelling continuous sedimentation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(2) :388–419, 1996.
- [104] S. Diehl. A uniqueness condition for nonlinear convection-diffusion equations with discontinuous coefficients. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 6(1) :127–159, 2009.
- [105] R. J. DiPerna. Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.*, 28(1) :137–188, 1979.
- [106] V. Dolejší, A. Ern, and M. Vohralík. A Framework for Robust A Posteriori Error Control in Unsteady Nonlinear Advection-Diffusion Problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(2) :773–793, 2013.
- [107] J. Droniou. Finite volume schemes for diffusion equations : introduction to and review of modern methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 24(8) :1575–1620, 2014.
- [108] J. Droniou and R. Eymard. Uniform-in-time convergence of numerical methods for nonlinear degenerate parabolic equations. HAL : hal-00949682, 2015.
- [109] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Gradient schemes : a generic framework for the discretisation of linear, nonlinear and nonlocal elliptic and parabolic equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23(13) :2395–2432, 2013.

- [110] J. Droniou, R. Eymard, and R. Herbin. Gradient schemes : generic tools for the numerical analysis of diffusion equations. HAL : hal-01150517, 2015.
- [111] J. Droniou, T. Gallouët, and R. Herbin. A finite volume scheme for a noncoercive elliptic equation with measure data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6) :1997–2031 (electronic), 2003.
- [112] J. Droniou and Ch. Le Potier. Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(2) :459–490, 2011.
- [113] Ju. A. Dubinskii. Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 67(109) :609–642, 1965.
- [114] L. El Alaoui, A. Ern, and M. Vohralík. Guaranteed and robust a posteriori error estimates and balancing discretization and linearization errors for monotone nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(37-40) :2782–2795, 2011.
- [115] G. Enchéry. *Modèles et schémas numériques pour la simulation de génèse de bassins sédimentaires*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, 2004.
- [116] G. Enchéry, R. Eymard, and A. Michel. Numerical approximation of a two-phase flow in a porous medium with discontinuous capillary forces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6) :2402–2422, 2006.
- [117] A. Ern and J.L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Series*. Springer, New York, 2004.
- [118] A. Ern, I. Mozolevski, and L. Schuh. Discontinuous galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures. Submitted, 2009.
- [119] A. Ern, S. Nicaise, and M. Vohralík. An accurate  $\mathbf{H}(\text{div})$  flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(12) :709–712, 2007.
- [120] A. Ern and M. Vohralík. Adaptive inexact Newton methods with a posteriori stopping criteria for nonlinear diffusion PDEs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(4) :A1761–A1791, 2013.
- [121] A. Ern and M. Vohralík. Four closely related equilibrated flux reconstructions for nonconforming finite elements. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351(1-2) :77–80, 2013.
- [122] B.G. Ersland, M.S. Espedal, and R. Nybo. Numerical methods for flows in a porous medium with internal boundary. *Comput. Geosci.*, 2 :217–240, 1998.
- [123] R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, and R. Herbin. Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes. *IMA J. Numer. Anal.*, 18(4) :563–594, 1998.
- [124] R. Eymard, T. Gallouët, C. Guichard, R. Herbin, and R. Masson. TP or not TP, that is the question. *Comput. Geosci.*, 18 :285–296, 2014.
- [125] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. Ciarlet, P. G. (ed.) et al., in *Handbook of numerical analysis*. North-Holland, Amsterdam, pp. 713–1020, 2000.
- [126] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes sushi : a scheme using stabilization and hybrid interfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, 30(4) :1009–1043, 2010.
- [127] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and A. Michel. Convergence of finite volume schemes for parabolic degenerate equations. *Numer. Math.*, 92 :41–82, 2002.
- [128] R. Eymard, T. Gallouët, D. Hilhorst, and Y. Naït Slimane. Finite volumes and nonlinear diffusion equations. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 32(6) :747–761, 1998.



- [129] R. Eymard, C. Guichard, and R. Herbin. Benchmark 3D : the VAG scheme. In J. Fořt, J. Fürst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, editors, *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*, volume 4 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 1013–1022. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [130] R. Eymard, C. Guichard, and R. Herbin. Small-stencil 3D schemes for diffusive flows in porous media. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 46(2) :265–290, 2012.
- [131] R. Eymard, C. Guichard, R. Herbin, and R. Masson. Multiphase flow in porous media using the VAG scheme. In *Finite volumes for complex applications. VI. Problems & perspectives. Volume 1, 2*, volume 4 of *Springer Proc. Math.*, pages 409–417. Springer, Heidelberg, 2011.
- [132] R. Eymard, C. Guichard, R. Herbin, and R. Masson. Vertex-centred discretization of multiphase compositional Darcy flows on general meshes. *Comput. Geosci.*, 16(4) :987–1005, 2012.
- [133] R. Eymard, C. Guichard, R. Herbin, and R. Masson. Gradient schemes for two-phase flow in heterogeneous porous media and Richards equation. *ZAMM - J. of App. Math. and Mech.*, 94(7-8) :560–585, 2014.
- [134] P. Fabrie and T. Gallouët. Modeling wells in porous media flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 10(5) :673–709, 2000.
- [135] J. Fehrenbach and J.-M. Mirebeau. Sparse non-negative stencils for anisotropic diffusion. *J. Math. Imaging Vision*, 49(1) :123–147, 2014.
- [136] F. Filbet and T. Rey. A hierarchy of hybrid numerical methods for multi-scale kinetic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 37(3) :1218–1247, 2015.
- [137] G. Gagneux and M. Madaune-Tort. Unicité des solutions faibles d’équations de diffusion-convection. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(10) :919–924, 1994.
- [138] G. Gagneux and M. Madaune-Tort. *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l’ingénierie pétrolière*, volume 22 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. With a preface by Charles-Michel Marle.
- [139] T. Galié. *Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques*. PhD thesis, UPMC-Paris 6, 2009.
- [140] T. Gallouët. Nonlinear methods for linear equations. In *Proceedings of Tamtam’07 conference held in Tipaza*, 2007.
- [141] T. Gallouët and R. Herbin. *Mesure, intégration et probabilités*. Ellipses, 2013.
- [142] T. Gallouët and J.-C. Latché. Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs—application to a turbulence model. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11(6) :2371–2391, 2012.
- [143] C. W. Gear. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [144] J. Giesselmann, C. Makridakis, and T. Pryer. A posteriori analysis of discontinuous galerkin schemes for systems of hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 53 :1280–1303, 2015.
- [145] J. Giesselmann and T. Pryer. On a posteriori error analysis of dg schemes approximating hyperbolic conservation laws. In M. Ohlberger J. Fuhrmann and C. Rohde, editors, *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects*, volume 77, 2014.
- [146] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 3/4 of *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991.

- [147] P. Henning, M. Ohlberger, and B. Schweizer. Adaptive heterogeneous multiscale methods for immiscible two-phase flow in porous media. *Comput. Geosci.*, 2015. <http://arxiv.org/abs/1307.2123>.
- [148] M. Hilliges and W. Weidlich. A phenomenological model for dynamic traffic flow in networks. *Transp. Res. B*, 29 :407–431, 1995.
- [149] H. Hoteit and A. Firoozabadi. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures. *Advances in Water Resources*, 31(1) :56–73, 2008.
- [150] N. Hungerbühler. A refinement of Ball’s theorem on Young measures. *New York J. Math.*, 3 :48–53 (electronic), 1997.
- [151] N. Hungerbühler. Quasi-linear parabolic systems in divergence form with weak monotonicity. *Duke Math. J.*, 107(3) :497–520, 2001.
- [152] N. Igbida. Hele-Shaw type problems with dynamical boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 335(2) :1061–1078, 2007.
- [153] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1) :1–17, 1998.
- [154] V. Jovanović and C. Rohde. Error estimates for finite volume approximations of classical solutions for nonlinear systems of hyperbolic balance laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6) :2423–2449, 2006.
- [155] E. F. Kaasschieter. Solving the Buckley-Leverett equation with gravity in a heterogeneous porous medium. *Comput. Geosci.*, 3(1) :23–48, 1999.
- [156] I. Kapyrin. A family of monotone methods for the numerical solution of three-dimensional diffusion problems on unstructured tetrahedral meshes. *Dokl. Math.*, 76 :734–738, 2007.
- [157] K. H. Karlsen, N. H. Risebro, and J. D. Towers.  $L^1$  stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients. *Skr. K. Nor. Vidensk. Selsk.*, (3) :1–49, 2003.
- [158] T. Kato. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58(3) :181–205, 1975.
- [159] Z. Khalil and M. Saad. Degenerate two-phase compressible immiscible flow in porous media : the case where the density of each phase depends on its own pressure. *Math. Comput. Simulation*, 81(10) :2225–2233, 2011.
- [160] D. Kinderlehrer, L. Monsaingeon, and X. Xu. A Wasserstein gradient flow approach to Poisson-Nernst-Planck equations. arXiv :1501.04437, submitted for publication.
- [161] J. C. Koch. *Uniqueness and regularity for porous media equations with  $x$ -dependent coefficients*. PhD thesis, T.U. Dortmund, 2014.
- [162] D. Kröner and S. Luckhaus. Flow of oil and water in a porous medium. *J. Differential Equations*, 55(2) :276–288, 1984.
- [163] S. N. Kruzhkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123) :228–255, 1970.
- [164] N. N. Kuznetsov. Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, 16 :105–119, 1976.
- [165] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.

- [166] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 :537–566, 1957.
- [167] C. Le Potier. Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 340 :12, 2005.
- [168] C. Le Potier. Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d’opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 348 :691–695, 2010.
- [169] C. Le Potier. Correction non linéaire d’ordre 2 et principe du maximum pour la discrétisation d’opérateurs de diffusion. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(11) :947–952, 2014.
- [170] M. Lécureux-Mercier. Improved stability estimates for general scalar conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 8(4) :727–757, 2011.
- [171] J. Leray and J.L. Lions. Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de minty-browder. *Bulletin de la S.M.F.*, tome 93 :97–107, 1965.
- [172] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 51 :45–78, 1934.
- [173] T. T. Li. *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, volume 32 of *RAM : Research in Applied Mathematics*. Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.
- [174] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 229 :317–345, 1955.
- [175] K. Lipnikov, D. Svyatskiy, and Y. Vassilevski. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes. *J. Comput. Phys.*, 228(3) :703–716, 2009.
- [176] S. Lisini. Nonlinear diffusion equations with variable coefficients as gradient flows in Wasserstein spaces. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15(3) :712–740, 2009.
- [177] E. Maitre. On a nonlinear compactness lemma in  $L^p(0, T; B)$ . *Int. J. Math. Math. Sci.*, 27 :1725–1730, 2003.
- [178] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, and M. Růžička. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, volume 13 of *Applied Mathematics and Mathematical Computation*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [179] A. Michel. A finite volume scheme for two-phase immiscible flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4) :1301–1317 (electronic), 2003.
- [180] A. Mielke. A gradient structure for reaction-diffusion systems and for energy-drift-diffusion systems. *Nonlinearity*, 24(4) :1329–1346, 2011.
- [181] S. Mishra. *Analysis and Numerical Approximation of Conservation laws with Discontinuous Coefficients*. PhD thesis, CAM TIFR, Bangalore, 2005.
- [182] S. Mishra and J. Jaffré. On the upstream mobility scheme for two-phase flow in porous media. *Comput. Geosci.*, 14(1) :105–124, 2010.
- [183] A. Moussa. Some variants of the classical Aubin-Lions Lemma. HAL : hal-00938186, 2014.
- [184] M. Muskat. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. McGraw-Hill New York, 1937.
- [185] J. M. Nordbotten, I. Aavatsmark, and G. T. Eigestad. Monotonicity of control volume methods. *Numer. Math.*, 106(2) :255–288, 2007.

- [186] J. T. Oden, S. Prudhomme, A. Romkes, and P. T. Bauman. Multiscale modeling of physical phenomena : adaptive control of models. *SIAM J. S*, 28 :2359–2389, 2006.
- [187] J. T. Oden and K. S. Vemaganti. Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials. I. Error estimates and adaptive algorithms. *J. Comput. Phys.*, 164 :22–47, 2000.
- [188] J. T. Oden and T. I. Zohdi. Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 148 :367–391, 1997.
- [189] M. Oehlberger and J. Vovelle. Error estimate for the approximation of nonlinear conservation laws on bounded domains by the finite volume method. *Math. Comp.*, 75(253) :113–150 (electronic), 2006.
- [190] O. A. Oleĭnik. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 26 :95–172, 1963.
- [191] F. Otto.  $L^1$ -contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations. *J. Differential Equations*, 131 :20–38, 1996.
- [192] F. Otto. Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids : a mean-field theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(1) :63–103, 1998.
- [193] F. Otto. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(1-2) :101–174, 2001.
- [194] E. Yu. Panov. Existence of strong traces for generalized solutions of multidimensional scalar conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2(4) :885–908, 2005.
- [195] E. Yu. Panov. Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 4(4) :729–770, 2007.
- [196] M. A. Peletier. Variational modelling : Energies, gradient flows, and large deviations. Lecture Notes, Würzburg. Available at <http://www.win.tue.nl/~mpeletie>, Feb. 2014.
- [197] P. I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Res.*, 4 :42–51, 1956.
- [198] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980.
- [199] B. Saad and M. Saad. Study of full implicit petroleum engineering finite volume scheme for compressible two phase flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(1) :716–741, 2013.
- [200] B. Saad and M. Saad. Numerical analysis of a non equilibrium two-component two-compressible flow in porous media. *Discr. Cont. Dyn. Syst. S*, 7(2) :317 – 346, 2014.
- [201] K. Saleh. *Analyse et Simulation Numérique par Relaxation d’Ecoulements Diphasiques Compressibles. Contribution au Traitement des Phases Evanescents*. PhD thesis, UPMC-Paris 6, 2012.
- [202] P.H. Sammon. An analysis of upstream differencing. *SPE Reservoir Engrg.*, 3 :1053–1056, 1988.
- [203] B. Schweizer. Homogenization of degenerate two-phase flow equations with oil trapping. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(6) :1740–1763, 2008.
- [204] N. Seguin and J. Vovelle. Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13(2) :221–257, 2003.
- [205] Z. Sheng and G. Yuan. The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes. *J. Comput. Physics*, 230(7) :2588–2604, 2011.

- [206] J. Simon. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146 :65–96, 1987.
- [207] E. Stein and S. Ohnibus. Anisotropic discretization- and model-error estimation in solid mechanics by local Neumann problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176 :363–385, 1999.
- [208] I. Suliciu. On the thermodynamics of rate-type fluids and phase transitions. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 36 :921–947, 1998.
- [209] E. Tadmor. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I. *Math. Comp.*, 49(179) :91–103, 1987.
- [210] E. Tadmor. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems. *Acta Numer.*, 12 :451–512, 2003.
- [211] J. D. Towers. Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2) :681–698 (electronic), 2000.
- [212] J. D. Towers. A difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux : the nonconvex case. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(4) :1197–1218 (electronic), 2001.
- [213] S. Tveit and I. Aavatsmark. Errors in the upstream mobility scheme for countercurrent two-phase flow in heterogeneous porous media. *Comput. Geosci.*, 16(3) :809–825, 2012.
- [214] C. J. van Duijn, J. Molenaar, and M. J. de Neef. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flows in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media*, 21 :71–93, 1995.
- [215] M. Th. Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5) :892–898, 1980.
- [216] A. Vasseur. Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 160(3) :181–193, 2001.
- [217] K. S. Vemaganti and J. T. Oden. Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials. II. A computational environment for adaptive modeling of heterogeneous elastic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :6089–6124, 2001.
- [218] J.-P. Vila. Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. I. Explicit monotone schemes. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 28(3) :267–295, 1994.
- [219] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [220] C. Villani. *Optimal transport*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.
- [221] M. Vohralík. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(4) :1570–1599 (electronic), 2007.
- [222] M. Vohralík. Residual flux-based a posteriori error estimates for finite volume and related locally conservative methods. *Numer. Math.*, 111(1) :121–158, 2008.
- [223] M. Vohralík. *Estimations d’erreur a posteriori, critères d’arrêt et implémentations peu coûteuses pour contrôle d’erreur et efficacité dans des simulations numériques*. PhD thesis, Sorbone Université – UPMC Paris 06, 2010.

- [224] M. Vohralík and M. F. Wheeler. A posteriori error estimates, stopping criteria, and adaptivity for two-phase flows. *Comput. Geosci.*, 17(5) :789–812, 2013.
- [225] G. Yuan and Z. Sheng. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. *J. Comput. Phys.*, 227(12) :6288–6312, 2008.
- [226] T. I. Zohdi, J. T. Oden, and G. J. Rodin. Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 138 :273–298, 1996.