



HAL
open science

Modélisation du comportement (thermo-) mécanique des élastomères et prévision de leur tenue en fatigue

Stéphane Méo

► **To cite this version:**

Stéphane Méo. Modélisation du comportement (thermo-) mécanique des élastomères et prévision de leur tenue en fatigue. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université François Rabelais de Tours, 2012. tel-01237757

HAL Id: tel-01237757

<https://hal.science/tel-01237757>

Submitted on 3 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS



Année Universitaire : 2012-2013

Habilitation à Diriger des Recherches

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement :

par :

Stéphane Méo

le : 25 Octobre 2012

Modélisation du comportement (thermo-)mécanique des élastomères et prévision de leur tenue en fatigue

Travail réalisé sous l'aimable bienveillance de Narayanaswami Ranganathan,
Professeur de l'Université François Rabelais de Tours

JURY :

BOUKAMEL Adnane

CANTOURNET Sabine

FOND Christophe

RANGANATHAN Narayanaswami

TRAN VAN François

VERRON Erwan

Directeur, HDR, École Hassania des Travaux Publics (Maroc)

Maître de recherche, HDR, École des Mines de Paris

Professeur des Universités, Université de Strasbourg

Professeur des Universités, Université François Rabelais de Tours

Professeur des Universités, Université François Rabelais de Tours

Professeur des Universités, École Centrale de Nantes

À mes amours : Nathalie et Lucie,
mes parents et mon frère.



Remerciements

Les travaux exposés par la suite sont le fruit d'un cheminement entamé en 1996 par un stage de DEA et ont été principalement réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique et du Laboratoire de Mécanique et Rhéologie de l'Université François Rabelais de Tours. Ils sont le résultat d'un effort personnel bien sûr, mais aussi et surtout, de rencontres, de collaborations et d'amitiés.

Naturellement, mes premières pensées vont aux deux femmes de ma vie : Nathalie et Lucie. Elles m'ont, continuellement et sans défaillance, encouragé, poussé, motivé, supporté (...) dans les moments (nombreux) de doute et de démotivation. Elles m'ont aussi permis de relativiser quant à l'importance de chaque chose. Leur amour a été le moteur principal de la rédaction du présent manuscrit et est surtout celui de bien d'autres choses !

Mes parents et mon frère ont eux aussi toujours été présents durant cette année charnière sur un plan professionnel et surtout personnel. Les savoir indéfectiblement derrière moi a été, est et sera toujours un soutien moral indispensable.

Comme je l'ai dit précédemment, mon parcours m'a offert la chance de nouer des amitiés dans mon travail créant ainsi des conditions exceptionnelles pour avancer dans mon cheminement. Mes pensées amicales vont ainsi à Gaëlle Berton, Adnane Boukamel, Florent Chalon, Florian Lacroix et Stéphane Lejeunes.

Je remercie tout ceux qui m'ont fait confiance toutes ces années, le Professeur Olivier Débordes et Adnane Boukamel qui, les premiers, m'ont mis le pied à l'étrier de la recherche en m'encadrant dans mes travaux de DEA puis de thèse et le Professeur Narayanaswami Ranganathan qui m'a recruté au sein du LMR, m'a encadré et guidé dans ce travail d'HDR.

Merci aussi à Jean-Marc Martinez, Séverine Gauchet, Jean-Louis Poisson et Alexis Delattre, mes docteurs, qui m'ont fait (me font) progresser et apportent une grande contribution aux éléments scientifiques présentés par la suite.

Je remercie l'ensemble des membres de l'École polytechnique de l'Université de Tours, du LMR et du CERMEL trop nombreux pour être ici cités.

Enfin, toute ma reconnaissance va aux membres de mon jury, à savoir François Tran Van à qui incombait la tâche de président, Sabine Cantournet, Christophe Fond et Erwan Verron qui ont accepté de rapporter sur mon travail et Adnane Boukamel qui m'a (encore une fois) fait l'amitié d'être présent comme examinateur.



Table des matières

Glossaire	1
Table des figures	5
Liste des tableaux	11
Introduction générale	13
Chapitre 1 Généralités, contexte et résultats expérimentaux.	17
1.1 Introductions et généralités sur les élastomères	19
1.1.1 Un bref historique	19
1.1.2 Composition chimique	19
1.2 Présentation des différentes études réalisées ou encadrées. Matériaux étudiés	21
1.2.1 Travaux personnels	21
1.2.2 Doctorat de Jean-Marc Martinez	21
1.2.3 Doctorat de Séverine Gauchet	22
1.2.4 Doctorat de Jean-Louis Poisson	23
1.2.5 Doctorat d'Alexis Delattre	23
1.3 Phénomènes (thermo-)mécaniques rencontrés, modélisés ou non	25
1.3.1 Influence du type de charge	25
1.3.2 Effet Mullins	25
1.3.3 Cristallisation	27
1.3.4 Influence de l'amplitude de chargement et effet Payne	28
1.3.5 Influence de la vitesse de chargement, de la fréquence	30
1.3.6 Influence de la température et couplage thermo-mécanique	31
1.4 Conclusion	37

Chapitre 2	Cadre thermodynamique	39
2.1	Introduction	41
2.2	Démarche et cadre thermodynamique	43
2.2.1	Cinématique et définitions	43
2.2.2	Premier principe	44
2.2.3	Inégalité de Clausius-Duhem	44
2.3	Lois générales du comportement	45
2.3.1	État local	45
2.3.2	Premières variables	45
2.3.3	Phénomènes dissipatifs, choix de variables	46
2.3.4	Lois de comportement et d'évolution	49
2.3.5	Modèles rhéologiques	50
2.3.6	Quelques exemples de modèles	53
2.4	Généralisation à plusieurs états intermédiaires	55
2.4.1	Principe	55
2.4.2	Conséquences et lois de comportement	56
2.5	Conclusion	59
Chapitre 3	Modèles et généralisation statistique	61
3.1	Introduction	63
3.2	Modèles unitaires	65
3.2.1	Modèles visco-élastiques en configuration lagrangienne	65
3.2.2	Modèles élasto-(visco)-plastique en configuration eulérienne	70
3.3	Généralisation statistique visqueuse	75
3.3.1	Problématiques	75
3.3.2	Un modèle mésoscopique : un point de départ discret	75
3.3.3	Passage à un modèle continu	78
3.3.4	Choix des potentiels et des fonctions statistiques	80
3.3.5	Analyse de la branche statistique	80
3.3.6	Stratégie d'identification	82
3.3.7	Résultats	84
3.4	Implémentation numérique	89
3.4.1	Introduction	89
3.4.2	Développement de modèles unitaires	89
3.4.3	Modèle statistique, ajout d'une nouvelle discrétisation	98
3.5	Conclusion	101
Chapitre 4	Influence de la température sur le comportement et couplage thermo-mécanique	103
4.1	Introduction et positionnement du problème	105
4.2	Aspects théoriques du couplage thermo-mécanique	107
4.2.1	Lois de comportement	107
4.2.2	Équation de la chaleur	108
4.2.3	Position du problème thermo-mécanique	109
4.3	Traitement du couplage	113
4.3.1	Simplifications et hypothèses	113
4.3.2	Problème thermo-mécanique et paramètres matériaux	113

4.3.3	Découplage des problèmes thermiques et mécaniques	115
4.4	Exemple et résultats	121
4.4.1	Calcul préliminaire et recalage du modèle	121
4.4.2	Modèle recalé	122
4.5	Conclusion	125
Chapitre 5	Fatigue des élastomères	127
5.1	Introduction et contexte	129
5.2	Fractographie	131
5.2.1	Introduction	131
5.2.2	Étude du HNBR et influence du type de charges renforçantes	131
5.2.3	Étude du CR	134
5.3	Fatigue du CR	143
5.3.1	Introduction	143
5.3.2	Chargement uniaxial (traction)	145
5.3.3	Chargement multiaxial (traction/torsion)	150
5.4	Conclusion	157
Conclusion générale		158
Annexe A	Influence de la température sur les réponses contrainte/déformation	165
Annexe B	État intermédiaire et inégalité de Clausius-Duhem	169
B.1	Configurations lagrangienne et mixte	171
B.2	Configuration eulérienne	172
Annexe C	Extension de l'énergie libre et conservation de l'isotropie	175
C.1	Eulérien	177
C.2	Lagrangien	179
C.3	Conséquences	179
C.3.1	Eulérien	179
C.3.2	Lagrangien et mixte	179
Annexe D	Modèles unitaires du chapitre 3	181
D.1	Modèles visco-élastiques dans le cadre lagrangien incompressible	183
D.1.1	Modèle de Zener	183
D.1.2	Modèle de Poynting-Thomson	184
D.1.3	choix des potentiels	184
D.2	Modèles élasto(-visco)-plastiques dans le cadre eulérien compressible	185
D.2.1	Modèles Z, Bingham et Zener	185
D.2.2	Poynting-Thomson	186
D.2.3	Lois d'écoulement de modèles de Zener, Poynting-Thomson et Bingham	186
Annexe E	Observations M.E.B. complémentaires de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales	189
E.1	Observations macroscopiques	191
E.2	Détails de la zone d'initiation (x27)	192

Annexe F	Courbes S-N obtenues sous chargement de traction avec $R_\sigma = 0.5$ négligé	193
Annexe G	Identification du comportement du CR	197
G.1	Préambule	199
G.2	Modèle analytique	199
G.2.1	Principe	199
G.2.2	Quelques résultats	200
G.3	Modèle éléments finis	201
G.3.1	Principes	201
G.3.2	Quelques résultats	202
Bibliographie		205

Glossaire

Symbole	Désignation	Commentaires
\otimes	Produit tensoriel	
\cdot	Produit tensoriel simplement contracté	
$:$	Produit tensoriel doublement contracté	
δ_{ij}	Symbole de Kronecker	$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ $= 0$ sinon
$\mathbf{1}$	Identité d'ordre 2	$[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}$ $\mathbf{1} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{Y}$ d'ordre 1 ou 2
\mathbb{I}	Identité d'ordre 4	$[\mathbb{I}]_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ $\mathbb{I} : \mathbf{Y} = \mathbf{Y} : \mathbb{I} = \mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{Y}$ d'ordre 2
$\text{tr} \mathbf{Y}$	Trace d'un tenseur d'ordre 2	
\mathbf{Y}_{sym}	Partie symétrique d'un tenseur d'ordre 2	
\mathbf{Y}^D	Partie déviatorique d'un tenseur d'ordre 2	
\mathbf{Y}^T	Transposée d'un tenseur d'ordre 2	
\mathbf{Y}^{-1}	Inverse d'un tenseur d'ordre 2	
\mathbf{Y}^{-T}	Inverse de la transposée d'un tenseur d'ordre 2	$\mathbf{Y}^{-T} = (\mathbf{Y}^T)^{-1} = (\mathbf{Y}^{-1})^T$
$\text{cof}(\mathbf{Y})$	Tenseur des cofacteurs	$\text{cof}(\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{Y}) \mathbf{Y}^{-T}$
$\ \mathbf{Y}\ $	Norme d'un tenseur d'ordre 2	$\ \mathbf{Y}\ = \sqrt{\mathbf{Y} : \mathbf{Y}}$
$\text{grad}_{\mathbf{x}}$	Gradient en configuration eulérienne	
$\text{grad}_{\mathbf{X}}$	Gradient en configuration lagrangienne	
$\text{div}_{\mathbf{x}}$	Divergence en configuration eulérienne	
$\text{div}_{\mathbf{X}}$	Divergence en configuration lagrangienne	

TAB. 1 – Opérateurs tensoriels, notations et conventions.

Symbole	Désignation	Commentaires
C_0	Condifuration initiale	
C_t	Condifuration à un instant t	
\mathbf{X}	Position d'une particule dans C_0	
\mathbf{x}	Fonction position à l'instant t	$\mathbf{x} : \begin{cases} C_0 \rightarrow C_t \\ \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \end{cases}$
\mathbf{u}	Fonction déplacement à l'instant t	$\mathbf{u} : \begin{cases} C_0 \rightarrow C_t \\ \mathbf{X} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \end{cases}$
$d\mathbf{X}$	Vecteur élémentaire dans la configuration initiale	
$d\mathbf{x}$	Transformé de $d\mathbf{X}$ dans la configuration actuelle	
\mathbf{F}	Tenseur gradient de la transformation	$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ et $J = \det(\mathbf{F}) > 0$
\mathbf{F}_{vol}	Partie volumique de \mathbf{F}	$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}_{\text{vol}}$
$\bar{\mathbf{F}}$	Partie isochorique de \mathbf{F}	$\det \bar{\mathbf{F}} = 1$
\mathbf{C}	Tenseur de Cauchy-Green droit	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$
\mathbf{E}	Tenseur des déformations de Green-Lagrange	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$
\mathbf{B}	Tenseur de Cauchy-Green gauche	$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T$
\mathbf{A}	Tenseur des déformations d'Euler-Almansi	$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$
\mathbf{L}	Gradient eulérien des vitesses	$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$
\mathbf{D}	Tenseur taux de déformation	$\mathbf{D} = \left(\dot{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} \right)_{sym}$
$\bar{\mathbf{B}}$	Tenseur de Cauchy-Green gauche associé à $\bar{\mathbf{F}}$	$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$
$\bar{\mathbf{C}}$	Tenseur de Cauchy-Green droit associé à $\bar{\mathbf{F}}$	$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$

TAB. 2 – Grandeurs cinématiques utilisées.

Symbole	Désignation	Commentaires
$\bar{\mathbf{B}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{B}}^i$)	Tenseur de Cauchy-Green gauche associé à $\bar{\mathbf{F}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}^i$)	$\bar{\mathbf{B}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^T$ (resp. $\bar{\mathbf{B}}^i = \bar{\mathbf{F}}^i \cdot \bar{\mathbf{F}}^{iT}$)
$\bar{\mathbf{B}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{B}}$)	Tenseur de Cauchy-Green gauche associé à $\bar{\mathbf{F}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{F}}$)	$\bar{\mathbf{B}}_a = \bar{\mathbf{F}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^T$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{B}} = {}^i\bar{\mathbf{F}} \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}^T$)
$\bar{\mathbf{C}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{C}}^i$)	Tenseur de Cauchy-Green droit associé à $\bar{\mathbf{F}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}^i$)	$\bar{\mathbf{C}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{C}}^i = \bar{\mathbf{F}}^{iT} \cdot \bar{\mathbf{F}}^i$)
$\bar{\mathbf{C}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{C}}$)	Tenseur de Cauchy-Green droit associé à $\bar{\mathbf{F}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{F}}$)	$\bar{\mathbf{C}}_a = \bar{\mathbf{F}}_a^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{C}} = {}^i\bar{\mathbf{F}}^T \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}$)
$\bar{\mathbf{V}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{V}}^i$)	Tenseur gauche des déformations pures associé à $\bar{\mathbf{F}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}^i$)	$\bar{\mathbf{F}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{R}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}^i = \bar{\mathbf{V}}^i \cdot \bar{\mathbf{R}}^i$)
$\bar{\mathbf{D}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{D}}$)	Tenseur taux de déformation associé à $\bar{\mathbf{F}}_a$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{F}}$)	$\bar{\mathbf{D}}_a = \left(\dot{\bar{\mathbf{F}}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} \right)_{sym}$ (resp. ${}^i\bar{\mathbf{D}} = \left({}^i\dot{\bar{\mathbf{F}}} \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}^{-1} \right)_{sym}$)

TAB. 3 – Grandeurs cinématiques liées au découpage $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a$.

Symbole	Désignation	Commentaires
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy (description eulérienne)	
$\boldsymbol{\Pi}$	Premier tenseur de Piola-Kirchhoff (description mixte)	$\boldsymbol{\Pi} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$
\mathbf{S}	Second tenseur de Piola-Kirchhoff (description lagrangienne)	$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$
\mathbf{f}_v	Densité massique d'effort	
$\rho_0 \mathbf{f}_v$	Densité volumique d'effort dans C_0	$\text{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\pi} + \rho_0 \mathbf{f}_v = \mathbf{0}$
$\rho \mathbf{f}_v$	Densité volumique d'effort dans C_t	$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_v = \mathbf{0}$
\mathbf{F}_s	Densité surfacique d'effort imposé dans C_0	$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}_s$
\mathbf{f}_s	Densité surfacique d'effort imposé dans C_t	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s = \mathbf{F}_s \frac{dS}{ds}$

TAB. 4 – Grandeurs sthéniques utilisées.

Symbole	Désignation	Commentaires
\mathbf{S}_{vol}	Contibution volumique à \mathbf{S}	$\rho_0 J \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}$
$\boldsymbol{\pi}_{vol}$	Contibution volumique à $\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\pi}_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F})$
$\boldsymbol{\sigma}_{vol}$	Contibution volumique à $\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma}_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1}$
$\bar{\mathbf{S}}_{eq}$	Part hyperélastique de \mathbf{S}	$\bar{\mathbf{S}}_{eq} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}})$
$\bar{\boldsymbol{\pi}}_{eq}$	Part hyperélastique de $\boldsymbol{\pi}$	$\bar{\boldsymbol{\pi}}_{eq} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}}(\bar{\mathbf{C}})$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}$	Part hyperélastique partielle de $\boldsymbol{\sigma}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}})$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}$	Part hyperélastique partielle de $\boldsymbol{\sigma}$ liée à $\bar{\mathbf{F}}_e$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e)$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e$ (resp. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^i$)	Part hyperélastique partielle de $\boldsymbol{\sigma}$ liée à $\bar{\mathbf{F}}_e$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}^i$)	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e)$ $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^i = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}^i}(\bar{\mathbf{B}}^i)$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^a$ (resp. ${}^i \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}$)	Part hyperélastique partielle de $\boldsymbol{\sigma}$ liée à $\bar{\mathbf{F}}_a$ (resp. ${}^i \bar{\mathbf{F}}$)	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^a = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a}(\bar{\mathbf{B}}_a)$ ${}^i \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq} = 2\rho_0 J^{-1} {}^i \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial {}^i \bar{\mathbf{B}}}({}^i \bar{\mathbf{B}})$

TAB. 5 – Autres tenseurs des contraintes.

Symbole	Désignation	Commentaires
ρ_0 (resp. ρ)	Masse volumique dans C_0 (resp. C_t)	$\rho = \frac{\rho_0}{J}$
T	Température	
s	Entropie spécifique	
\mathbf{q}	Flux de chaleur dans la configuration actuelle	
\mathbf{Q}	Transporté du flux de chaleur dans la configuration initiale	$\mathbf{Q} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}$
r	Densité massique de chaleur	
e	Energie interne spécifique	
ψ	Energie libre spécifique	$\psi = e - \eta T.$
ψ_{vol}	Part volumique de ψ	$\psi_{vol} = \psi_{vol}(J).$
$\psi_{eq}; \psi_{neq}$	Parts incompressibles de ψ	$\psi_{neq} = \psi_{neq}^a + \psi_{neq}^e$ $\psi_{neq} = {}^i \psi_{neq} + \psi_{neq}^e$

TAB. 6 – Autres grandeurs thermodynamiques utilisées.

Symbole	Désignation	Commentaires
\mathbb{P}_1	Déviateur eulérien	$\mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
\mathbb{P}_C	Déviateur lagrangien	$\mathbb{P}_C = J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right]$
$\mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a}$	Déviateur lagrangien secondaire ($\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a$)	$\mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}_a \otimes \bar{\mathbf{C}}_a^{-1}$
$\mathbb{P}_{{}^i \bar{\mathbf{C}}}$	Déviateur lagrangien secondaire ($\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^i \cdot {}^i \bar{\mathbf{F}}$)	$\mathbb{P}_{{}^i \bar{\mathbf{C}}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} {}^i \bar{\mathbf{C}} \otimes {}^i \bar{\mathbf{C}}^{-1}$
\mathbb{P}_F	Déviateur mixte	$\mathbb{P}_F = J^{-\frac{1}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right]$

TAB. 7 – Déviateurs.

Table des figures

1.1	Observation d'un agglomérat de silice de grande taille sur une éprouvette vierge de VHDS 1029.	22
1.2	Influence du type de charges sur la réponse statique de différents matériaux HNBR (Gauchet, 2007).	26
1.3	Influence du type de charges sur le pic de $\tan \delta$ d'un HNBR (Gauchet, 2007)	26
1.4	Chargement cyclique d'un élastomère.	27
1.5	Cristallisation sous contrainte (Harwood et al., 1967)	28
1.6	Comparaison des cycles initial et stabilisé. Comparaison du cycle initial et des cycles obtenus par cyclage multiple croissant (matériau : CR, éprouvette H2, vitesse de déformation $0.02s^{-1}$) (Poisson, 2012).	28
1.7	Évolutions des grandeurs dynamiques en fonction de l'amplitude sollicitation cyclique.	29
1.8	Influence du type de noir de carbone sur les évolutions des modules de stockage E' et de perte E'' dans le cas d'une matrice HNBR (Gauchet, 2007).	29
1.9	Essais sur éprouvette de double-cisaillement, Contrainte ($\frac{R}{e \times L}$, MPa) - Déformation globale ($\tan \theta = \frac{u}{l}$, %), $T = 23^\circ C$ (Méo, 2000b).	30
1.10	Évolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ réalisés à différentes amplitudes de déformation.	31
1.11	Évolution des grandeurs dynamiques en fonction de la fréquence de sollicitation cyclique ($T = 23.7^\circ C$, $\varepsilon_0 = 1\%$) (Poisson, 2012).	31
1.12	Observation de l'influence de la vitesse de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que $\gamma_{max} = 50\%$ (Martinez, 2005).	32
1.13	Évolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ réalisés à différentes vitesses de déformation.	32

1.14	Évolution des grandeurs dynamiques en fonction de la température.	33
1.15	Courbes contrainte déformation obtenues à différentes températures d'essais sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50 % et de fréquence 3.1 Hz.	34
1.16	Influence de la température sur la relaxation ($\gamma_{max} = 50\%$) du Silicone ₂₀₀₅ (Martinez, 2005).	34
1.17	Auto-échauffement d'une éprouvette de double cisaillement sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence 3.1 Hz à différentes températures (Méo, 2000b).	35
2.1	Système de configurations.	43
2.2	Découplage des parties volumique et isochore.	45
2.3	Milieu à une configuration intermédiaire incompressible.	47
2.4	Modèle rhéologique général décrit par les équations (2.45).	51
2.5	Modèle rhéologique général étendu.	51
2.6	Milieu à n configurations intermédiaires.	55
2.7	Modèle rhéologique général étendu.	57
3.1	Modèle de Zener	65
3.2	Modèle de Poynting-Thomson	66
3.3	Découplage des courbes expérimentales.	67
3.4	Algorithme d'identification des paramètres matériaux.	68
3.5	Résultats d'identification sur le modèle de Zener; influence de l'amplitude sur les réponses du modèle (cisaillement 10%, 20%, 50%, $f = 3.5Hz$, $T = 23^{\circ}C$).	69
3.6	Résultats d'identification sur le modèle de Poynting-Thomson; influence de l'amplitude sur les réponses du modèle (cisaillement 10%, 20%, 50%, $f = 3.5Hz$, $T = 23^{\circ}C$).	70
3.7	Modèle élasto-plastique unitaire (modèle Z).	71
3.8	Modèle visco-élasto-plastique unitaire (modèle de Bingham généralisé).	73
3.9	Vision "macro-meso" d'un élastomère chargé (Martinez, 2005).	76
3.10	Interprétation rhéologique des trois phases de la représentation mésoscopique d'un élastomère (Martinez, 2005).	76
3.11	Représentations multi-branches du comportement rhéologique du matériau.	77
3.12	Modèle rhéologique statistique général étendu.	79
3.13	Représentation schématique des évolutions des caractéristiques $G(\omega)$, $\eta(\omega)$ et $\tau(\omega)$ suivant la variable aléatoire ω (Martinez, 2005).	81
3.14	Observation schématique de la fonctionnelle de pondération $\mathcal{P}(\omega)$ suivant la variable aléatoire ω (Martinez, 2005).	82
3.15	Confrontation modèle statistique (sans plasticité)/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale (Martinez, 2005).	85
3.16	Confrontation modèle statistique (avec plasticité)/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale (Martinez, 2005).	86
3.17	Évolutions normalisées des différents paramètres du modèle statistique en fonction de la température ($X_n(T) = X(T)/X(T = 25^{\circ}C)$).	86
3.18	Résultats pour des chargements complexes. Tests réalisés sur éprouvette de double cisaillement.	87

3.19	Modèles lagrangiens (ou mixte via $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi}$) développés.	91
3.20	Éprouvette diablo, géométrie et maillage adopté.	97
3.21	Tests numériques de traction cyclique sur diablo.	97
3.22	Répartition de la contrainte de Von Mises au maximum d'un cycle stabilisé pour un modèle de Poynting-Thomson. Algorithmes de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF), Euler implicite (BETS), Euler implicite linéarisé (LBETS).	98
3.23	Répartition de la contrainte de Von Mises au minimum d'un cycle stabilisé pour un modèle de Poynting-Thomson. Algorithmes de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF), Euler implicite (BETS), Euler implicite linéarisé (LBETS).	98
4.1	Problème thermo-mécanique eulérien.	109
4.2	Problème thermo-mécanique lagrangien.	110
4.3	Évolution en fonction de la température des différents paramètres mécaniques du Silicone ₂₀₀₀	114
4.4	Algorithme de couplage thermo-mécanique.	115
4.5	Représentation schématique de la dissipation et de sa moyenne temporelle au cours de deux couples de calcul.	117
4.6	Problèmes physique et numériques.	118
4.7	Évolution de la température au coeur d'une des couches d'élastomères. Comparaison des résultats obtenus pour les deux configurations.	119
4.8	Évolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Température d'enceinte = 27°C.	121
4.9	Évolution de la température aux thermocouple b et d. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ($\alpha = 0.704$); Température d'enceinte = 27°C et 60°C.	122
4.10	Détail des évolutions numériques ($\alpha = 0.704$) de la température au thermocouple b et d (Température d'enceinte = 27°C).	123
4.11	Évolution du champ de température ($\alpha = 0.704$; Température d'enceinte = 27°C).	123
5.1	Description d'une éprouvette diablo (dimension en <i>mm</i>).	129
5.2	Micrographie M.E.B. de la zone d'amorçage du faciès de rupture par fatigue de mélanges HNBR (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5Hz$, $T = 120^\circ C$).	132
5.3	Observations au microscope optique du faciès de rupture par fatigue d'un mélange HNBR chargé en N550 (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5Hz$, $T = 120^\circ C$).	133
5.4	Influence du type de noir de carbone sur la morphologie du faciès de rupture du HNBR, dans la zone de propagation stable : (a) N550, (b) S6000, (c) N990. Vues globales (x25) (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5Hz$, $T = 120^\circ C$).	133
5.5	Influence du type de noir de carbone sur la morphologie du faciès de rupture du HNBR, dans la zone de propagation stable : (a) N550, (b) S6000, (c) N990. Détails (x55) (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5Hz$, $T = 120^\circ C$).	134
5.6	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (électrons secondaires) de faciès de rupture.	136
5.7	Faciès de rupture d'éprouvettes (traction, ($R_\sigma \geq 0$)) : (a) zone d'amorçage de fissure, (b) zone de propagation stable de fissure, (c) zone de fin de vie, (d) zone catastrophique de déchirement.	137
5.8	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (électrons secondaires, x30).	138

5.9	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (électrons rétrodiffusés, x30).	139
5.10	Influence du rapport de charge sur la densité de languettes.	139
5.11	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (x1100).	140
5.12	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (électrons rétrodiffusés, x55) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm, \theta_{max} = 34^\circ, R_\epsilon = 0.1$).	141
5.13	Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (x1100) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm, \theta_{max} = 34^\circ, R_\epsilon = 0.1$).	142
5.14	Évolution de la dissipation intrinsèque ($\phi_0(MPas^{-1})$) et dissipation moyenne sur un cycle $\bar{\phi}_0(MPas^{-1})$ sur un cycle stabilisé (<i>i</i> ème cycle).	144
5.15	Courbes S-N, réponses globales (tirées de (Lacroix, 2004; Lacroix et al., 2005)). Sollicitations de traction, $f = 5Hz$.	145
5.16	Courbe S-N en contrainte maximale π_{max} .	147
5.17	Courbe S-N en contrainte alternée.	147
5.18	Courbe S-N en densité d'énergie de déformation.	148
5.19	Courbe S-N en densité d'énergie dissipée.	148
5.20	Diagramme de Haigh en traction simple pour le polychloroprène.	149
5.21	Influence du rapport de charge sur la densité de languettes.	150
5.22	Courbe S-N en première contrainte principale.	152
5.23	Courbe S-N en SED.	153
5.24	Courbe S-N en Σ^* (calcul analytique).	153
5.25	Courbe S-N en CED.	154
5.26	Courbe S-N en DED.	154
5.27	Diagramme de Haigh multiaxial.	155
A.1	Influences de la température globale. Courbes contrainte - déformation obtenues sur une éprouvette de double cisaillement pour une sollicitation sinusoïdale de fréquence 3.1 Hz et d'amplitudes 5 %, 10 %, 20 %, 50 % et 100 %.	167
E.1	Observations au M.E.B. de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm, \theta_{max} = 34^\circ, R_\epsilon = 0.1$).	191
E.2	Observations au M.E.B. (x27) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm, \theta_{max} = 34^\circ, R_\epsilon = 0.1$).	192
F.1	Courbe S-N du polychloroprène en contrainte maximale. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).	195
F.2	Courbe S-N du polychloroprène en contrainte alternée. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).	195
F.3	Courbe S-N du polychloroprène en densité d'énergie de déformation. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).	196
F.4	Courbe S-N du polychloroprène en densité d'énergie dissipée. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).	196
G.1	Validation du modèle analytique multiaxial	200
G.2	Validation du modèle analytique multiaxial	200
G.3	Validation du modèle analytique multiaxial	201
G.4	Éprouvette diabolé maillée.	201
G.5	Réponse en force multiaxiale du modèle EF (Déphasage 90°)	202

G.6	Partie axiale de la Réponse en force multiaxiale du modèle EF (Déphasage 90°)	203
G.7	Partie angulaire de la Réponse en force multiaxiale du modèle EF (Déphasage 90°)	203

Liste des tableaux

1	Opérateurs tensoriels, notations et conventions.	1
2	Grandeurs cinématiques utilisées.	2
3	Grandeurs cinématiques liées au découpage $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a$	2
4	Grandeurs sthéniques utilisées.	2
5	Autres tenseurs des contraintes.	3
6	Autres grandeurs thermodynamiques utilisées.	3
7	Déviateurs.	3
1.1	Catégories et usages des élastomères (Martinez, 2005).	20
1.2	Désignations et surfaces spécifiques des noirs de carbone étudiés (Gauchet, 2007).	25
2.1	Répartition forces/flux dans (2.28).	49
2.2	Répartition forces/flux dans (2.32).	49
2.3	Répartition forces/flux dans (2.35).	49
2.4	Modèles obtenus en fonction des choix de potentiels (<i>i.e.</i> énergies libres ou pseudo potentiels de dissipation).	54
3.1	Choix des différents potentiels pour les modèles de Zener et Poynting-Thomson en configuration lagrangienne.	67
3.2	Résultats d'identification - modèle de ZENER ($\gamma_0 = 50\%$, $f = 3.5Hz$).	69
3.3	Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON ($\gamma_0 = 50\%$, $f = 3.5Hz$).	70
3.4	Procédure d'identification des paramètres du modèle statique.	83
3.5	Résultats d'identification du modèle statistique sans prise en compte de la plasticité ($T = 25^\circ C$).	84
3.6	Résultats d'identification du modèle statistique avec prise en compte de la plasticité ($T = 25^\circ C$).	84
3.7	Paramètres identifiés lors de l'étape finale pour différentes températures.	84

3.8	Représentation schématique du découplage additif des contraintes (<i>i.e.</i> σ) en configuration eulérienne.	93
3.9	Modèles unitaires développés en approche eulérienne et lois d'écoulement associées (avec $\bar{\sigma}_{\text{neq}}^e = 2J^{-1} [W_{\text{neq},1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{\text{neq},2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]$).	94
3.10	Choix des différents potentiels pour les modèles de Zener, Bingham et Poynting-Thomson en configuration lagrangienne.	96
3.11	Paramètres matériaux des 3 modèles unitaires eulériens.	96
4.1	Caractéristiques thermiques du Silicone ₂₀₀₀	113
4.2	Caractéristiques thermiques et mécaniques de l'acier	118
5.1	Caractéristiques morphologiques de la zone d'amorçage (pilotage en contrainte, $\sigma_{\text{nom}}^{\text{max}} = 1.45\text{MPa}$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5\text{Hz}$, $T = 120^\circ\text{C}$).	131
5.2	Conditions expérimentales de traction.	146
5.3	Conditions de fatigue multiaxiales.	151



Introduction générale

Les élastomères sont de plus en plus présents dans le monde industriel. Ils possèdent un haut pouvoir de déformabilité tout en étant incompressibles – ou quasiment – et proposent dans le cas où ils sont chargés, de l’amortissement, caractère recherché lié à la viscosité.

Ces propriétés, bien qu’intéressantes, sont souvent couplées à d’autres phénomènes dissipatifs moins bien appréhendés et engendrent de nombreuses difficultés dans la prévision de leur comportement (grandes déformations, incompressibilité, auto-échauffement, forte sensibilité à la température, à la vitesse de sollicitation...). De plus, leur utilisation se faisant dans des conditions de plus en plus extrêmes (larges gammes de température, d’amplitude et de fréquence), il devient difficile de proposer un modèle (*i.e.* une loi de comportement et un unique jeu de paramètres) permettant de couvrir l’intégralité du domaine d’utilisation et de prévoir la durée de vie en fatigue de pièces industrielles réelles.

C’est en grande partie autour de ces problématiques que s’articulent les activités de recherche qui vont être présentées dans ce manuscrit, à savoir :

- lois de comportement mécanique des élastomères ;
- lois de comportement thermo-mécanique ;
- chargements complexes (multi-fréquences, différents chargements thermiques) ;
- intégration numérique de lois de comportement des élastomères (mise en oeuvre des lois identifiées via la méthode des éléments finis) ;
- prévision de la durée de vie en fatigue de pièces en élastomères soumises à des sollicitations complexes ;
- prise en compte des effets dynamiques dans le comportement des élastomères.

Bien que l’étude des élastomères reste mon activité principale, j’ai pu aussi travailler sur d’autres sujets tels que l’évaluation de l’énergie en pointe de fissure sur des matériaux métalliques avec le Professeur Narayanaswami Ranganathan et Florent Chalon (Mdc LMR) ou encore sur des problèmes de biomécanique avec René Leroy (Mdc LMR) et Florent Chalon. Ce dernier travail fait partie d’une collaboration initiée par René Leroy avec le CHU de Tours.

Outre mes manuscrits de DEA et de thèse (Méo, 1996, 2000a), mes activités ont donné lieu à la production scientifique suivante :

- la participation à l'édition d'un livre : (Boukamel et al., 2007)
- la rédaction de 3 chapitres d'ouvrages : (Aït Hocine et al., 2010; Ranganathan et al., 2012; Chalon et al., 2012)
- 8 articles dans des revues internationales à comités de lecture : (Boukamel et al., 2001; Méo et al., 2002a; Ranganathan et al., 2008; Lejeunes et al., 2010, 2011; Martinez et al., 2011; Poisson et al., 2011, 2012b)
- 2 articles dans des revues nationales à comités de lecture : (Méo et al., 2002b; Moreau et al., 2008)
- la participation à 17 congrès internationaux avec comités de lecture et publication d'actes : (Méo et al., 1999, 2000; Boukamel et Méo, 2001, 2002; Boukamel et al., 2005; Lacroix et al., 2005; Méo et al., 2005, 2006; Boukamel et al., 2008; Chalon et al., 2008; Boukamel et al., 2009; Ranganathan et al., 2009a; Chalon et al., 2009; Ranganathan et al., 2009b; Poisson et al., 2010b,a, 2012a)
- la participation à 9 congrès nationaux avec comités de lecture et publication d'actes : (Boukamel et al., 1997; Martinez et al., 2002, 2003; Méo et al., 2003; Gauchet et al., 2006; Lejeunes et al., 2009; Méo et al., 2009a; Poisson et al., 2010c; Cruanes et al., 2012)

Ce manuscrit a pour but de retracer les différents problèmes abordés au cours de ces dernières années en rapport avec "la modélisation du comportement (thermo-)mécanique des élastomères et la prévision de leur tenue en fatigue". De manière plus précise, il s'articulera ainsi :

Après une courte présentation portant sur l'historique des élastomères, le premier chapitre s'attache à présenter les différentes études que j'ai pu mener et/ou encadrer en donnant pour chacune la problématique, le matériau étudié et s'il y a lieu, le cadre industriel, les éventuelles collaborations scientifiques et travaux de doctorants qui y sont liés. Un survol des différents phénomènes mécaniques que nous sommes amenés à rencontrer par la suite sont listés et illustrés.

Le second chapitre propose un cadre thermodynamique auquel il sera fait référence tout au long de ce travail. Pour ce faire, l'approche est classique et se base sur le postulat de l'état local et le cadre des matériaux standards généralisés. Après avoir scindé le gradient de la transformation en une partie volumique et une autre incompressible, on applique à cette dernière le concept d'état(s) intermédiaire(s) (Sidoroff, 1973) permettant d'obtenir les différentes variables internes nécessaires à la bonne description du comportement dissipatif des matériaux étudiés. On montre qu'une telle description peut être vue comme une généralisation aux grandes déformations de modèles rhéologiques. Les cas compressibles et incompressibles des lois de comportement et d'évolution des variables sont traités.

Le chapitre 3 illustre l'utilisation du cadre préalablement défini en donnant les différents modèles développés et utilisés. Initialement sont décrits des modèles qualifiés d'unitaires (*i.e.* faisant intervenir une seule variable interne) dans les cas compressibles et/ou incompressibles. Cette approche marquant le pas vis-à-vis de chargements mécaniques complexes (multifréquentiels par exemple), une généralisation statistique de modèles à plusieurs états intermédiaires est proposée ainsi qu'une stratégie d'identification. Tous ces modèles ayant été utilisés dans différents codes de calculs par éléments finis, quelques pistes sur leurs implémentations numériques sont données.

Un algorithme de couplage thermo-mécanique est formulé dans un quatrième chapitre consacré à l'influence réciproque que peuvent avoir l'un sur l'autre température et mécanique. Il consiste en une succession de calculs mécaniques et thermiques, les premiers considérant des propriétés matériaux qui dépendent de la température et les seconds prenant la dissipation intrinsèque mécanique comme terme source volumique de chaleur. L'algorithme est ensuite particularisé au cas des sollicitations mécaniques périodiques, dans le but d'obtenir les évolutions temporelles – jusqu'à stabilisation – de la température en différents points d'une éprouvette de double cisaillement soumise à une sollicitation harmonique.

Enfin le dernier chapitre se présente en deux parties *a priori* distinctes. La première consiste à explo-

rer les faciès de rupture d'éprouvettes ayant rompu sous sollicitation de fatigue. Deux matériaux sont étudiés : un HNBR (caoutchouc nitrile hydrogéné) et un CR (polychloroprène). Sur le premier, on met en avant l'influence des charges utilisées pour renforcer la matrice, en particulier par les spécificités d'une zone de propagation stable caractérisée par une structure en rosace. Quant à elle, l'étude menée sur le CR établit une corrélation entre le rapport de charge de la sollicitation et la densité de languettes présentes en zone d'initiation de fissure.

De manière plus classique, la seconde partie de ce chapitre porte sur l'étude en fatigue de ce dernier matériau. Elle a pour objectif de tester la fiabilité d'un critère basé sur l'énergie dissipée. Celui-ci est mis à l'épreuve pour des chargement axiaux ou multiaxiaux et est comparé à différents autres critères tirés de la littérature. En outre, l'influence du rapport de charge sur la durée de vie en fatigue, en particulier un renforcement pour les valeurs élevées de celui-ci, est mise en évidence par un diagramme de Haigh. Un rapprochement de ce phénomène avec celui observé sur la densité des languettes en pointe de fissure est proposé, mettant ainsi en rapport les deux parties de ce chapitre.

Généralités, contexte et résultats expérimentaux.

Après un bref rappel sur l'histoire des élastomères, sur leurs compositions chimiques et sur les principales étapes de leur obtention, nous nous attacherons à présenter, au travers des divers travaux réalisés et/ou encadrés, les différents types d'élastomères rencontrés :

- 2 **silicones chargés en silice** qui, par un manque d'information imputable au secret industriel, seront considérés différents,
- 4 mélanges à matrice **HNBR** dont seuls les types de noir de carbone (**N115**, **N550**, **N990** et **S6000**) la renforçant varieront, et qui auront le même module élastique à 20% de déformation,
- un **CR** renforcé par un noir de carbone de type **N990**.
- et un **BR** dont tout, ou presque, nous est inconnu dans sa composition (nous ne sommes même pas sûrs du monomère).

Au travers de quelques-unes des caractérisations expérimentales menées sur tous ces matériaux, nous tenterons de présenter des phénomènes que nous serons amenés à rencontrer. Par la suite, ceux-ci seront soit pris en compte dans nos futures modélisations – l'effet Payne, la dépendance vis à vis de la température... –, soit non modélisés et il conviendra alors de les éliminer – l'effet Mullins par exemple.

Ce chapitre se veut assez “contemplatif” et a, avant tout, une vocation illustrative des particularités des comportements mécaniques et/ou thermiques des élastomères. Pour des présentations exhaustives des campagnes expérimentales qui y sont évoquées ainsi que pour des analyses plus fines des résultats en découlant, nous renvoyons le lecteur vers les différents manuscrits de thèse (*Delattre, soutenance prévue en 2015; Gauchet, 2007; Martinez, 2005; Poisson, 2012; Méo, 2000b*).

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1	Introductions et généralités sur les élastomères	19
1.1.1	Un bref historique	19
1.1.2	Composition chimique	19
1.2	Présentation des différentes études réalisées ou encadrées. Matériaux étudiés	21
1.2.1	Travaux personnels	21
1.2.2	Doctorat de Jean-Marc Martinez	21
1.2.3	Doctorat de Séverine Gauchet	22
1.2.4	Doctorat de Jean-Louis Poisson	23
1.2.5	Doctorat d'Alexis Delattre	23
1.3	Phénomènes (thermo-)mécaniques rencontrés, modélisés ou non	25
1.3.1	Influence du type de charge	25
1.3.2	Effet Mullins	25
1.3.3	Cristallisation	27
1.3.4	Influence de l'amplitude de chargement et effet Payne	28
1.3.5	Influence de la vitesse de chargement, de la fréquence	30
1.3.6	Influence de la température et couplage thermo-mécanique	31
1.3.6.1	Influence de la température d'enceinte	33
1.3.6.2	Auto-échauffement	34
1.4	Conclusion	37

1.1 Introductions et généralités sur les élastomères

REMARQUE 1.1

De manière plus complète, on retrouvera une grande partie des informations données dans ce paragraphe dans les manuscrits de [Martinez \(2005\)](#); [Poisson \(2012\)](#) ainsi que sur le site du Syndicat National du Caoutchouc et des Polymères ([SNCP](#)).

1.1.1 Un bref historique

C'est au début du 15^{ème} siècle, avec la colonisation des Amériques Centrale et Méridionale du Sud, que l'Europe, par l'observation des populations indigènes, a pu se convaincre de l'utilité du latex. Ce dernier était (et continue de l'être) extrait de différentes plantes telles que l'hévéa. Deux siècles passèrent avant que, entre 1735 et 1745, les français Charles Marie de La Condamine et François Fresneau procèdent à des observations scientifiques de l'utilisation du caoutchouc¹. C'est donc sous sa forme brute (*i.e.* amorphe) que ce matériau est, dans un premier temps, utilisé dans la fabrication de gommages ou la confection d'imperméables et de bretelles. A cette époque, son expansion fut enrayée par une forte thermo-instabilité. Ce n'est qu'en 1839 que Charles Goodyear résout accidentellement ce problème de stabilité tout en améliorant les propriétés élastiques, en chauffant du latex auquel avait été ajouté du soufre, réalisant pour la première fois ce qui deviendrait la vulcanisation au soufre. C'est ainsi, que jusqu'au début du XX^{ème} siècle le caoutchouc naturel (natural rubber, NR) vit son utilisation croissante. Des facteurs économiques, dus à l'éloignement des zones de production, ont amené industriels et scientifiques à s'intéresser à l'élaboration de caoutchoucs synthétiques. Ces contraintes, amplifiées par la seconde guerre mondiale qui rendit difficile l'approvisionnement en latex, ont largement contribué à l'élaboration industrielle des caoutchoucs synthétiques à grande échelle. Par la suite, la production ne cessera plus de se développer tant quantitativement que qualitativement avec la mise au point de caoutchoucs répondant à des contraintes de plus en plus sévères en termes de sollicitations mécaniques, thermiques ou chimiques.

1.1.2 Composition chimique

En 1826 Michaël Faraday montra que le caoutchouc naturel non vulcanisé est un hydrocarbure $(C_5H_8)_n$, par la suite, en 1860, le monomère, composant les longues chaînes à la base de cet élastomère, fut isolé et nommé isoprène par Charles Greville Williams. 19 ans plus tard, Georges Bourchardat synthétisa pour la première fois ce dernier, pour qu'en 1909 Fritz Hoffmann dépose le premier brevet d'un caoutchouc synthétique basé sur ce monomère. Par la suite, d'autres monomères furent envisagés et mis en oeuvre, permettant d'aboutir à de nouveaux élastomères tels que le CR (polychloroprène), le BR (Polybutadiène)... La famille des élastomères s'élargit encore grâce à :

- la copolymérisation (*i.e.* la polymérisation de différents monomères, des co-monomères) permettant d'agrandir la famille des élastomères aux NBR, SBR, EPDM...
- l'ajout d'autres atomes tels que le chlore, le fluor, l'azote... (passage du IR au BIR ou CIR...)
- l'hydrogénation, qui par exemple permet, en agissant sur le butadiène du NBR, le passage au HNBR,
- l'emploi de monomères basés sur le silicium, plutôt que le carbone, et l'oxygène dans le cas des silicones.

[Martinez \(2005\)](#) propose, suivant leurs usages, de classer ainsi les différentes familles d'élastomères :

¹Le terme de caoutchouc est repris de l'expression indienne "cao" = bois, "tchu" qui pleure

Type d'utilisation	Nom usuel	Sigle	Nature de l'élastomère	Propriétés les plus remarquables
Usages généraux	Caoutchouc naturel	NR	Polymère de l'isoprène	Bonnes propriétés mécaniques
	SBR	SBR	Copolymère de butadiène et de styrène	
	Polyisoprène de synthèse	IR	Polymère de l'isoprène	
	Polybutadiène	BR	Polymère de butadiène	Très bonne résistance à l'abrasion
Usages spéciaux	EPDM	EPDM	terpolymère de l'éthylène, du propylène et d'un termonomère (diène)	Excellente résistance au vieillissement
	Butyle	IIR	Copolymère d'isobutylène et d'isoprène	Très bonne résistance au vieillissement et étanchéité aux gaz
	Néoprène ou polychloroprène	CR	Polymère de chloroprène	Bonne résistance au vieillissement et aux huiles
	Nitrile	NBR	Copolymère de butadiène et de nitrile acrylique	Très bonne résistance aux hydrocarbures et faible perméabilité aux gaz
Usages très spéciaux	Thiokol	T	Polymère de sulfure d'éthylène	Excellente résistance à certaines huiles
	Hypalon	CSM	Polyéthylène chlorosulfoné	Remarquable tenue à l'ozone
	Polyuréthanes	EU	Polymère complexe	Très bonne résistance aux huiles et à la dégradation. Hautes performances mécaniques
	Silicone	Q/MQ	Polymère complexe dont le squelette est composé de silicium et d'oxygène	Haute résistance à la chaleur et au froid
	Élastomère fluoré	FM	Copolymère fluoré	Exceptionnelle résistance à la chaleur et aux huiles

TAB. 1.1 – Catégories et usages des élastomères (Martinez, 2005).

Mais un élastomère est un peu plus qu'un monomère (ou même qu'un co-monomère). Dans sa forme brute ou amorphe, le comportement du matériau obtenu relève plus du fluide visqueux que du matériau solide élastique. Il se présente sous forme d'une pelote statistique, à savoir un amas de macromolécules indépendantes – ou presque. Afin de principalement lui conférer ses propriétés de cohésion et d'élasticité, une étape de réticulation est nécessaire. Elle consiste en la mise en place d'un réseau tridimensionnel solidarisant les chaînes entre elles. Historiquement, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent (*cf.* § 1.1.1), ceci fut fait pour la première fois au cours de ce qui deviendrait par la suite la vulcanisation au soufre. Depuis sont apparus d'autres procédés tels que les vulcanisations au peroxyde ou aux oxydes métalliques.

Les propriétés d'amortissement, de résistance à l'abrasion, de tenue en fatigue... sont obtenues ou améliorées par l'ajout de charges (principalement des noirs de carbone ou des silices). Ces adjonctions, bien que trouvant leur origine dans un but de diminution de coût, se sont imposées pour devenir indispensables. Les charges vont se répartir sous forme d'agrégats plus ou moins gros, créant d'éventuelles hétérogénéités dans la matière et donc des zones de singularités (géométriques, contraintes, liaisons chimiques...). Au sein d'un même matériau, ces agrégats peuvent aussi former différentes familles qui pourront répondre de manière différente vis-à-vis d'une même sollicitation.

Enfin d'autres ingrédients, tels que les accélérateurs contrôlant la cinétique de vulcanisation, les plastifiants donnant une plus grande processabilité et les antioxydants, viennent compléter la formulation et peuvent eux aussi influencer sur le comportement.

1.2 Présentation des différentes études réalisées ou encadrées. Matériaux étudiés

Il est question ici de présenter chronologiquement les différents travaux que j'ai pu encadrer et/ou réaliser. Au travers des ces présentations, nous pourrions définir les matériaux utilisés et les notations choisies pour chacun d'entre eux ainsi que le cadre de l'étude dans laquelle ils furent impliqués. Nous verrons qu'il sera impossible dans certains cas de définir la composition précise du mélange soit parce qu'elle fait l'objet d'accords de confidentialité industrielle, soit parce qu'elle nous est inconnue !

1.2.1 Travaux personnels

Mes travaux de doctorat et de DEA (Méo, 2000b, 1996), encadrés par Olivier Débordes et Adnane Boukamel, ont porté sur la modélisation de pièces en élastomère et ont été réalisés dans le cadre d'une collaboration entre l'équipe Modèles Numériques du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA, UPR CNRS 7051) et la société Eurocopter. Le matériau de l'étude était fourni par la société Paulstra. La composition précise de celui-ci reste encore aujourd'hui inconnue et s'est résumée – et se résume encore pour nous aujourd'hui – à un caoutchouc silicone chargé en silice. Ce choix a été grandement guidé par le caractère très amortissant du matériau, sa bonne tenue aux hautes températures et une température de transition vitreuse très basse. Dans la suite du manuscrit, il sera fait référence à ce matériau sous la désignation **Silicone₂₀₀₀**.

Au cours des travaux menés, deux grands parties sont à distinguer.

Dans un premier temps, il a été mis en place un cadre thermodynamique en grandes transformations, puis développées des lois de comportement (*i.e.* la généralisation aux grandes déformations incompressibles ou quasi-incompressibles des modèles rhéologiques de Zener et Poynting-Thomson) aptes à modéliser les réponses mécaniques de notre matériau. En outre, une famille d'éléments finis adaptés à celles-ci a été proposée. Ce travail a ensuite été étendu au couplage thermo-mécanique via un algorithme de couplage faible (Boukamel et al., 1997; Méo et al., 2000; Boukamel et al., 2001; Boukamel et Méo, 2001; Méo et al., 2002a).

Par la suite, nous nous sommes intéressés à la modélisation d'un assemblage de structures composites à matrice élastomère, une à une invariantes dans une même direction. La forte hétérogénéité des composants, rendant impossible la modélisation par homogénéisation périodique, contraint à user du couplage d'une technique de sous-structuration classique et d'une méthode de sous-structuration multi-niveaux (Méo et al., 1999, 2002b).

1.2.2 Doctorat de Jean-Marc Martinez

Le doctorat de Jean-Marc Martinez (Martinez, 2005) constitue une large extension du cadre mécanique qui avait été mis en place au cours de mes travaux de thèse. Le matériau étudié, toujours fourni par la société Paulstra dans le cadre d'une collaboration avec Eurocopter, est aussi un silicone chargé en silice de comportement mécanique très proche de celui précédemment présenté, cependant nous n'avons pas la certitude de l'exacte similitude des deux mélanges. Pour cette raison, nous les distinguerons par la suite en désignant celui-ci par **Silicone₂₀₀₅**.

Une série d'observations au microscope électronique à balayage (M.E.B.) (figure 1.1) sur l'endommagement et la fatigue de ce matériau a permis de mettre en évidence l'existence de plusieurs types de charges présentes dans le matériau (Courtois, 2003).

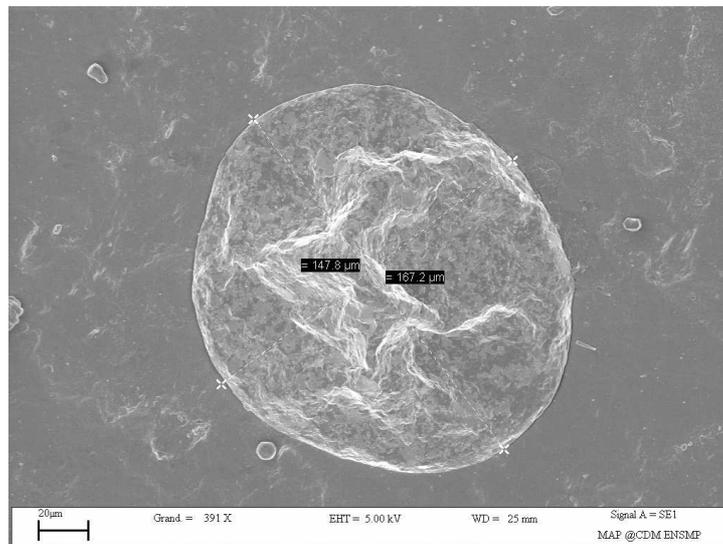


FIG. 1.1 – Observation d’un agglomérat de silice de grande taille sur une éprouvette vierge de VHDS 1029.

La problématique était d’identifier et de prévoir le comportement du Silicone₂₀₀₅ sous sollicitations harmoniques ou multi-harmoniques, pour des fréquences oscillant entre 1 et $10Hz$ (ou des vitesses de déformations allant de $0.01s^{-1}$ à $10s^{-1}$ dans le cas de sollicitations cycliques triangulaires), d’amplitudes de déformations pouvant aller jusqu’à 100% et pour des températures s’étalant sur une plage allant de $-55^{\circ}C$ à $100^{\circ}C$.

Le point de départ du travail de Jean-Marc Martinez fut une considérable campagne expérimentale statique et cyclique (harmonique et multi-harmonique). Ceci a permis de construire un modèle statistique qui, pour un unique jeux de paramètres identifié à une température donnée, peut reproduire la réponse du matériau à cette dernière et en particulier les influences de la fréquence et de l’amplitude de la sollicitation (Méo et al., 2009b,a; Martinez et al., 2002, 2003; Méo et al., 2003; Boukamel et al., 2005; Martinez et al., 2011).

Au moment de rédiger ce travail, il est à noter que ce travail est toujours d’actualité au travers d’une collaboration signée en 2012 entre le Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique et le Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (LMR, EA20640) (Lejeunes et al., 2010; Boukamel et al., 2008; Lejeunes et al., 2009, 2011).

1.2.3 Doctorat de Séverine Gauchet

Dans le cadre d’une bourse CIFRE avec la société Hutchinson, Séverine Gauchet a pu étudier l’influence du type de charges sur le comportement en fatigue d’élastomères (Gauchet, 2007).

Partant d’un caoutchoucs nitrile hydrogénés (HNBR par la suite) et en faisant varier le type de noirs de carbone (N115, N550, N990 et S6000), nous nous sommes attachés dans ce travail à élaborer 4 matériaux de même module élastique à 20% de déformation. Ceci nous a permis de mettre en évidence que passée la limite de 20% de déformation, les 4 matériaux présentaient des comportement radicalement différents, mais aussi qu’en dessous de celle-ci, leurs comportements dynamiques (étudiés au DMA) l’étaient tout autant (vis-à-vis de la fréquence, de l’amplitude et de la température). Dans le cas de sollicitations de fatigue, pour chacun des 4 mélanges, la zone de propagation stable forme une rosace composée de

pétales. Dans cette zone, une surface spécifique réduite des charges diminue la vitesse de fissuration ainsi que la taille des pétales tout en y augmentant la rugosité (Gauchet et al., 2006).

1.2.4 Doctorat de Jean-Louis Poisson

Précédemment au sein du LMR, Florian Lacroix (Lacroix, 2004) a étudié la fatigue d'un polychloroprène renforcé par du noir de carbone de type **N990**. Ce matériau sera noté par la suite **CR**. À la fin de ses travaux auxquels j'ai été associé, nous avons pu mettre en évidence l'intérêt de la dissipation intrinsèque mécanique comme critère de fatigue, ou de sa moyenne sur un cycle dans le cas de sollicitations cycliques (Lacroix et al., 2005; Méo et al., 2005, 2006; Ranganathan et al., 2009b). C'est sur ce même matériau et dans la continuité de cette idée attractive que s'inscrivent les travaux de thèse de Jean Louis Poisson (Poisson, 2012). Le but en est de comparer différents critères de durée de vie (et en particulier la dissipation intrinsèque mécanique) dans le cadre de sollicitations axiales et multi-axiales (Mars et A., 2002; Mars, 2002; Andriyana et Verron, 2007; Verron et al., 2006).

Deux parties sont à distinguer :

- une première a consisté en la mise en place d'essais venant compléter la base de données déjà établie par Lacroix (2004), ce au travers d'une étude complète en traction sur des éprouvettes diabolos, puis étendue à la traction-torsion pour divers cas de déphasage. Différents critères pouvant être calculés sur les réponses globales ont été comparés.
- Afin de corrélérer de manière locale ces différents critères, un modèle analytique simple (une extension aux grandes déformations d'un modèle de Kelvin-Voigt) ainsi qu'un modèle éléments finis ont été développés, ceci permettant de mettre en avant la dissipation comme critère de fatigue (Poisson et al., 2010b,c,a, 2011, 2012b).

1.2.5 Doctorat d'Alexis Delattre

Enfin le dernier matériau, qu'il sera possible de rencontrer dans le paragraphe qui suivra, est élaboré sur une base de ce que nous pensons être un polybutadiène (**BR**). Pour des raisons de confidentialité, il est impossible d'en dire plus sur la formulation de ce dernier². Sa caractérisation ainsi que sa modélisation se feront au cours des travaux de thèse d'Alexis Delattre via une collaboration entre le LMR, le LMA et la société Eurocopter (Delattre, soutenance prévue en 2015). L'aspect dynamique des sollicitations ainsi que le caractère fortement amortissant du matériau constituent en grande partie l'originalité de ce travail.

²d'ailleurs nous n'en savons pas plus...

1.3 Phénomènes (thermo-)mécaniques rencontrés, modélisés ou non

1.3.1 Influence du type de charge

Comme il a été dit précédemment, tout comme le processus d'élaboration, le type, la proportion et la morphologie des charges utilisées influencent grandement les comportements mécanique, thermique et électrique de l'élastomère étudié. Seul le comportement (thermo-)mécanique est étudié dans ce manuscrit.

Gauchet (2007) a pu caractériser l'influence de différentes charges (toutes de type noir de carbone, voir tableau 1.2) sur la réponse mécanique d'un HNBR et *in fine* sur le comportement en fatigue des mélanges obtenus (*cf.* chapitre 5).

type de noir de carbone	surface spécifique (m^2/g)
N115	124.3
N550	41.8
S6000	20.5
N990	8

TAB. 1.2 – Désignations et surfaces spécifiques des noirs de carbone étudiés (**Gauchet, 2007**) .

Les taux de charges intégrés à la matrice ont été choisis de façon à obtenir des comportements statiques similaires sur une plage de déformation la plus grande possible (figure 1.2). Ainsi, le comportement mécanique statique est quasi similaire jusqu'à environ 20% de déformation. Au delà de cette limite, des différences notables apparaissent. Le comportement mécanique cyclique est quant à lui affecté bien avant cette limite en déformation, les évolutions des grandeurs visco-élastiques E' et E'' respectivement reportées sur les figures 1.8(a) et 1.8(b) étant différentes dès les premières amplitudes de déformations. En examinant l'évolution du paramètre $\tan \delta$ (figure 1.3), on constate un décalage de la température de transition vitreuse en fonction du type de charges ainsi qu'une diminution et qu'un élargissement du pic caractérisant cette grandeur.

Le comportement en fatigue se verra lui aussi largement influencé par le type de renforts utilisés comme nous le verrons dans le chapitre 5, qui dans le paragraphe 5.2.2 montre l'influence des charges sur les faciès de rupture.

1.3.2 Effet Mullins

Mullins (1947), via une campagne expérimentales menée sur différents mélanges, a mis en évidence que :

- tous les élastomères étudiés présentent un adoucissement sous chargement,
- pour un même type de charges, plus le taux de ces dernières est important et plus cet adoucissement est marqué
- sur un même essai, l'adoucissement est perdu si on impose une déformation supérieure à toutes celles précédemment vue par le matériau,
- même si une majorité de l'adoucissement se produit sur le premier chargement, plusieurs autres cycles de même amplitude sont nécessaires pour obtenir un état stabilisé.

Cet adoucissement sous contrainte, ou effet Mullins, peut être schématisé dans un cas hyperélastique par un essai de traction cyclique (figure 1.4) (**Govindjee et Simo, 1991**). Partant d'un état initial (0),

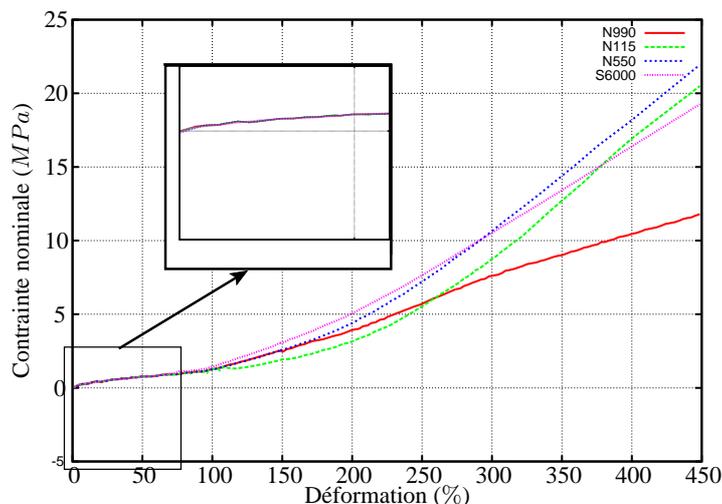


FIG. 1.2 – Influence du type de charges sur la réponse statique de différents matériaux HNBR (Gauchet, 2007).

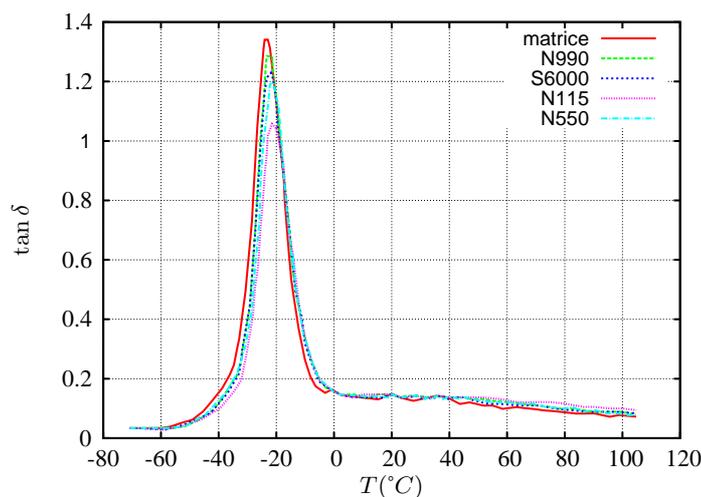


FIG. 1.3 – Influence du type de charges sur le pic de $\tan \delta$ d'un HNBR (Gauchet, 2007).

considéré comme vierge de sollicitations, la courbe de premier chargement suit le chemin (a). Si l'on décharge le matériau arrivé à l'état (1), la courbe de premier déchargement est le chemin (b). Si un deuxième chargement est ensuite appliqué, le chemin suivi sera alors (b) jusqu'à atteindre l'état (1), puis la courbe de chargement se confond à nouveau avec le chemin (a). Si l'on décharge le matériau une fois arrivé à un état (2) ($\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$), la décharge suit (c). En cas de nouveau chargement, le chemin est (c) tant que $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ et redevient (a) par la suite.

L'attribution physique de ce phénomène n'est pas encore arrêtée (endommagement ou non). Il semble que dans le cas de certains élastomères, une partie de cet adoucissement serait réversible, réversibilité accélérée par la température (Diani et al., 2009).

La figure 1.6 est une bonne illustration expérimentale de l'effet Mullins. Ce phénomène de stabilisation, obtenu après quelques cycles, se vérifiera pour tous les matériaux présentés dans ce chapitre.

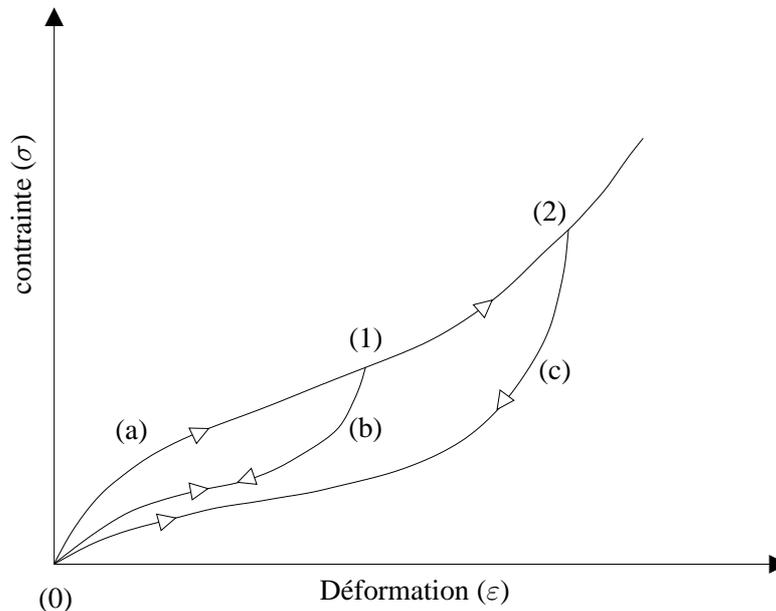


FIG. 1.4 – Chargement cyclique d'un élastomère.

REMARQUE 1.2

Sauf indication contraire, les courbes comportant un seul cycle présentées par la suite seront celles obtenues après stabilisation et donc élimination de l'effet Mullins.

1.3.3 Cristallisation

Nous verrons dans le chapitre 5 traitant de la fatigue des élastomères que se posera la question de la cristallisation d'un des matériaux étudiés. En effet, sous de tels chargements mécaniques, cette dernière aura une grande influence sur les résultats obtenus.

Ce phénomène de cristallisation se produit quand, sous contrainte, les macromolécules, initialement sous la forme d'un enchevêtrement complexe, s'organisent puis s'alignent dans le sens de la sollicitation. Sous certaines conditions de régularité et de simplicité du monomère, les chaînes forment alors des motifs réguliers et ordonnés appelés cristallites qui renforcent (comme des charges supplémentaires) le matériau (Raoult, 2005; Marchal, 2006).

Toki et al. (2004) montrent que ce phénomène est hystérétique, cumulatif et éliminé par un retour à contrainte nulle.

Harwood et al. (1967) proposent de vérifier la cristallisation d'un élastomère en superposant à la réponse d'un essai de montée en charge, celle d'une sollicitation cyclique d'amplitude croissante. Dans le cas d'un matériau cristallisable, les cycles obtenus ne rejoignent pas la réponse de la sollicitation monotone (la figure 1.5 reprend un exemple donné par les auteurs dans le cas d'un SBR non cristallisant et d'un NR cristallisant). En accord avec cette étude, les résultats obtenus par Poisson (2012) pour un cyclage multiple croissant sur notre CR, peuvent laisser penser que ce matériau est cristallisable (figure 1.6).

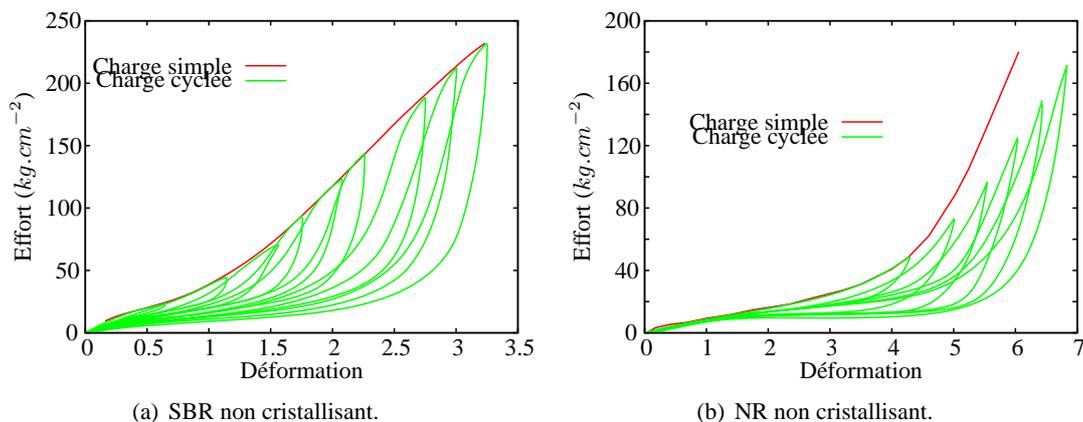


FIG. 1.5 – Cristallisation sous contrainte (Harwood et al., 1967)

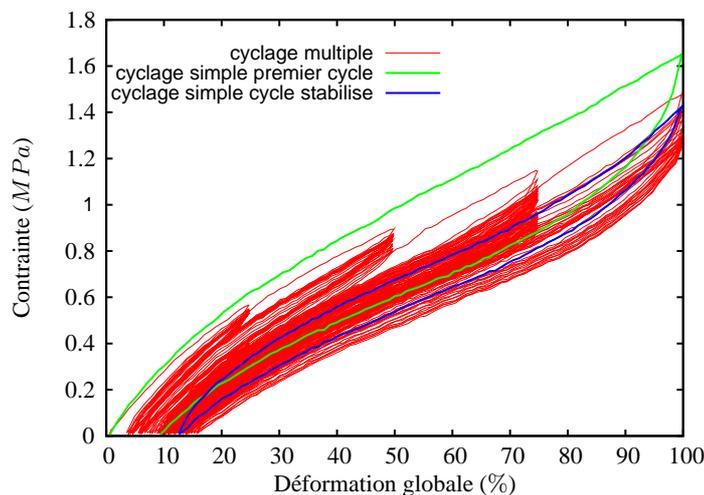


FIG. 1.6 – Comparaison des cycles initial et stabilisé. Comparaison du cycle initial et des cycles obtenus par cyclage multiple croissant (matériau : CR, éprouvette H2, vitesse de déformation $0.02s^{-1}$) (Poisson, 2012).

1.3.4 Influence de l'amplitude de chargement et effet Payne

L'amplitude dans le cas de chargements statiques et dynamiques a bien évidemment une influence sur la réponse d'un milieu continu solide. Cependant, cette influence peut être plus ou moins marquée et surtout plus ou moins linéaire. C'est cette non linéarité que nous allons, au travers de la présentation de différents essais effectués sur nos matériaux, tenter d'illustrer. Ce phénomène, dans le cas de chargements cycliques et dans le domaine des faibles déformations, est souvent appelée effet **Payne** (1961, 1962) (Lion et al., 2003) ou effet **Fletcher et Gent** (1953) et est souvent illustré par des essais DMA de balayage en amplitude, à fréquence et température constantes. A titre d'exemple, la figure 1.7 présente ce type d'essai, réalisé sur un CR et sur un BR, respectivement dans le cadre des travaux de thèse de Poisson (2012) et Delattre (soutenance prévue en 2015).

Il peut être intéressant de rappeler que la rigidification aux faibles amplitudes de déformations peut aussi

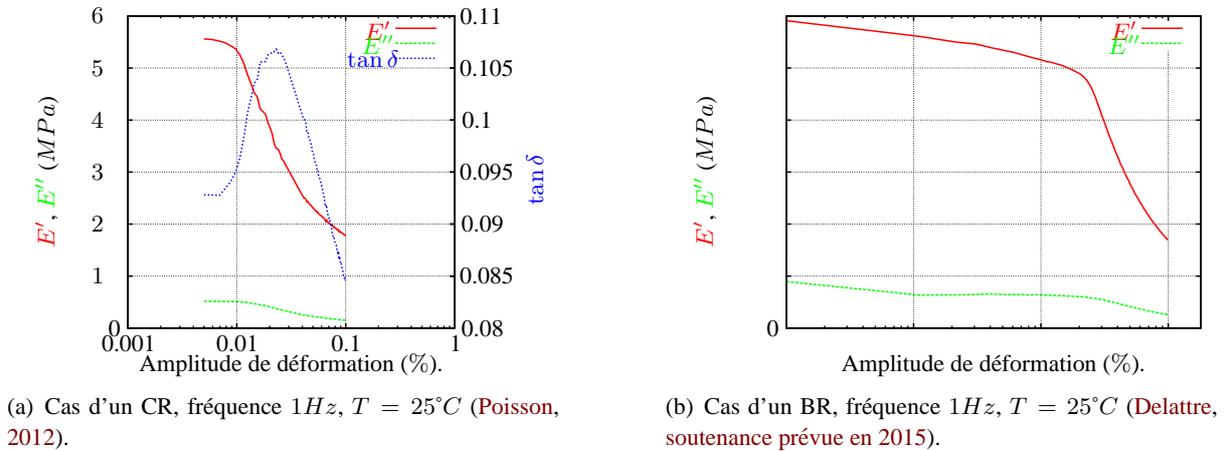
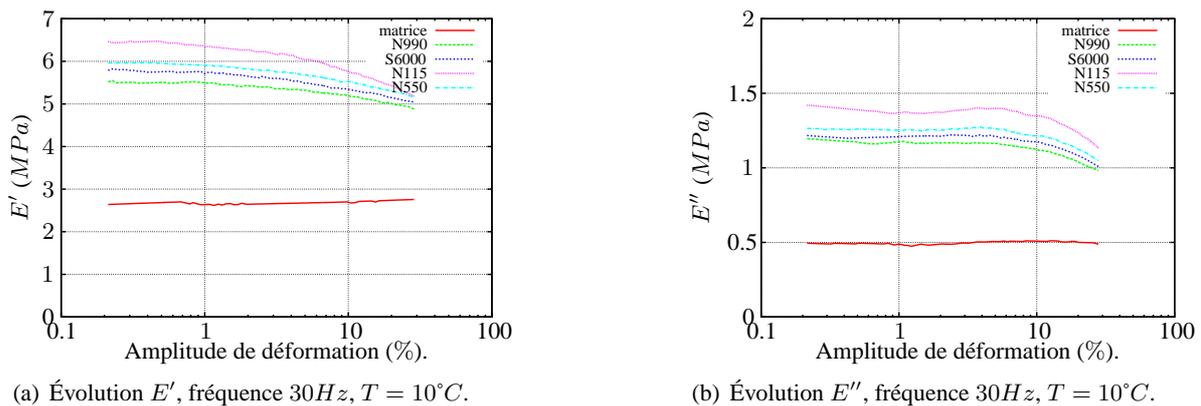


FIG. 1.7 – Évolutions des grandeurs dynamiques en fonction de l'amplitude sollicitation cyclique.

FIG. 1.8 – Influence du type de noir de carbone sur les évolutions des modules de stockage E' et de perte E'' dans le cas d'une matrice HNBR (Gauchet, 2007).

largement être amplifiée par le type et/ou le pourcentage de charges (Payne et Whittaker, 1971) ainsi que le temps de vulcanisation (Fletcher et Gent, 1953). Il nous a été donné d'illustrer ce phénomène dans le cadre des travaux de thèse de Gauchet (2007) traçant (figure 1.8) les différentes grandeurs dynamiques pour nos mélanges HNBR pour lesquels on faisait varier le type de noir de carbone³. Les essais présentés dans les figures 1.7(a), 1.7(b) et 1.8(a) présentent une chute du module E' plus ou moins marquée et donc d'un effet Payne plus ou moins important. Les mécanismes se produisent pour des amplitudes sensiblement différentes.

Les différents résultats précédemment examinés ont entièrement trait à des mesures de DMA. Il est intéressant d'étendre ces remarques aux grandes déformations. Il est évident que la forte non-linéarité des réponses obtenues rend impossible l'utilisation de grandeurs telles que E' , E'' et $\tan \delta$. Ainsi, dans le cadre des travaux de Méo (2000b) (des résultats en tous points similaires ont été produits par Martinez

³On rappelle que les mélanges étaient renforcés pas différentes charges présentant en particulier des surfaces spécifiques différentes et qu'ils présentaient le même comportement statique jusqu'à au moins 20% de déformations (cf. figure 1.2).

(2005)), les résultats présentés figure 1.9 ont été obtenus. Ils représentent la réponse à une sollicitation de cisaillement cyclique pour différentes amplitudes de sollicitations.

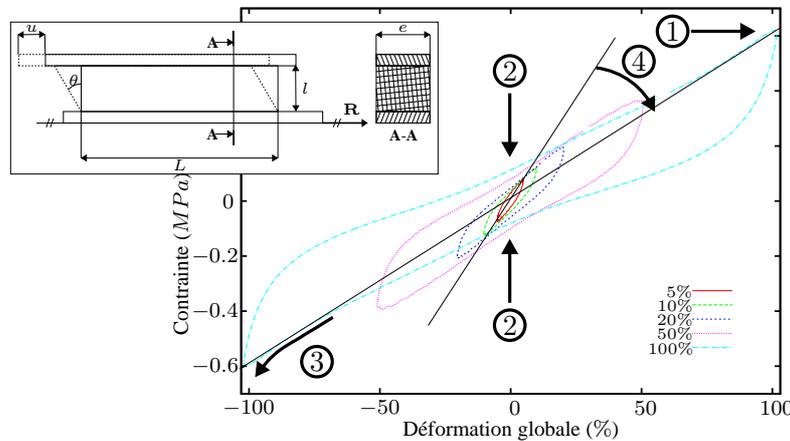


FIG. 1.9 – Essais sur éprouvette de double-cisaillement, Contrainte ($\frac{R}{e \times L}$, MPa) - Déformation globale ($\tan \theta = \frac{u}{l}$, %), $T = 23 \text{ } ^\circ\text{C}$ (Méo, 2000b).

Ici encore, il est possible de constater une large influence de l'amplitude de déformation. Plusieurs phénomènes sont mis en évidence. En particulier, on note :

- la présence d'un **point anguleux** (①) au changement du signe de la sollicitation.
- l'existence d'un **étranglement** de l'hystérésis au passage à l'origine (②).
- un **raidissement** pour les amplitudes de sollicitations importantes (③).
- Enfin, un **raidissement global** du matériau (④) pour les faibles amplitudes du taux de cisaillement.

Afin de quantifier ces phénomènes, les évolutions de la raideur moyenne et de la dissipation en fonction de l'amplitude de chargement ont été choisies comme indicateurs (figure 1.10)⁴. A une température donnée, ces outils mettent en évidence des augmentations non proportionnelles de la dissipation et de la raideur moyenne d'un cycle, renforçant encore un peu plus la problématique non-linéaire de notre problème vis-à-vis de l'amplitude.

1.3.5 Influence de la vitesse de chargement, de la fréquence

Les différents élastomères étudiés au cours des travaux présentés § 1.2 présentent tous une dépendance marquée vis-à-vis de la fréquence, ou plus généralement vis-à-vis de la vitesse de chargement. Ceci est naturellement dû au caractère visqueux de ces matériaux. Celui-ci est, la plupart du temps, recherché car il permettra de dissiper de l'énergie et donc de donner une réponse plus ou moins amortie.

À l'instar de l'effet Payne, l'influence de la vitesse de chargement est largement évoqué dans la littérature pour des études portant sur les propriétés dynamiques (Nakajima et al., 417-424, 1974; Ferry et Fitzgerald, 1982; Yoshinobu et Ferry, 1984), ou plus récemment sur l'influence couplée de l'amplitude et de la fréquence sur l'effet Payne (Lion et al., 2003; Höfer et Lion, 2009). Le balayage en fréquences, présenté FIG. 1.11, réalisé à température ambiante et amplitude de déformation constante, réalisé sur un CR (Poisson, 2012) peut servir d'illustration dans le cadre des petites perturbations (h.p.p.).

⁴L'influence de la température sera réexaminée dans le paragraphe § 1.3.6

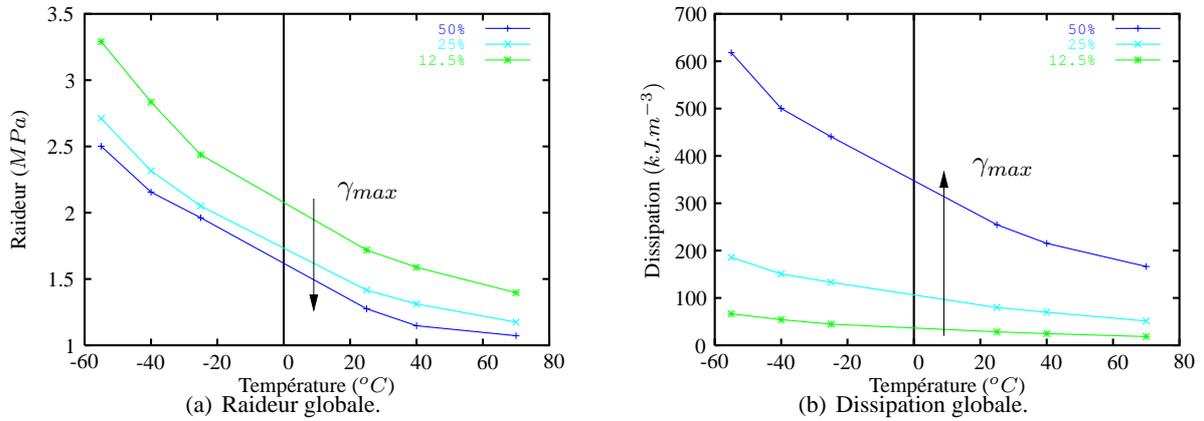


FIG. 1.10 – Évolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\dot{\gamma} = \pm 10 \text{s}^{-1}$ réalisés à différentes amplitudes de déformation (Martinez, 2005).

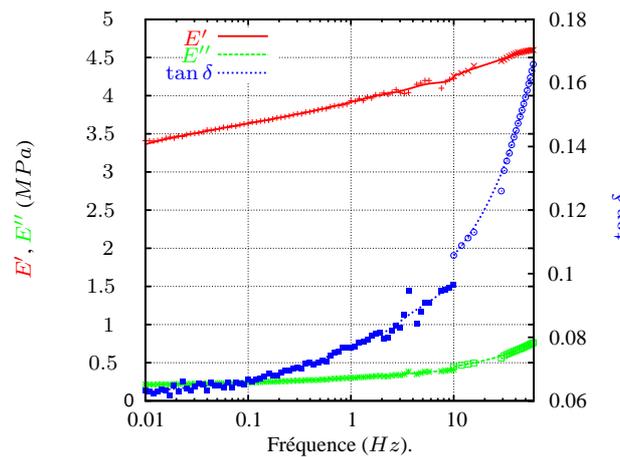


FIG. 1.11 – Évolution des grandeurs dynamiques en fonction de la fréquence de sollicitation cyclique ($T = 23.7^\circ\text{C}$, $\varepsilon_0 = 1\%$) (Poisson, 2012).

En dehors de ce cadre, les travaux réalisés par Martinez (2005), confirment aussi une influence non négligeable de la vitesse de sollicitation sur le “comportement” du matériau (figure 1.12). En utilisant, de plus, les mêmes indicateurs que dans les paragraphes précédents (*i.e.* la raideur moyenne et la dissipation), cette influence est mise en exergue de manière plus quantitative (figure 1.13).

1.3.6 Influence de la température et couplage thermo-mécanique

Il est encore une fois possible de mesurer l’impact des conditions thermiques – influence de la température du milieu extérieur, ou l’évolution de la température d’échantillon – par des essais DMA. Ceux-ci sont systématiquement réalisés pour tous nos matériaux, en particulier pour déterminer leurs températures de transition vitreuse (T_G). La figure 1.14 représente, dans les cas du CR et du BR, l’évolution des différentes grandeurs visco-élastiques en fonction de la température, permettant une détermination plus ou moins précise de la T_G . Ces deux matériaux présentent des comportements rhéologiques assez

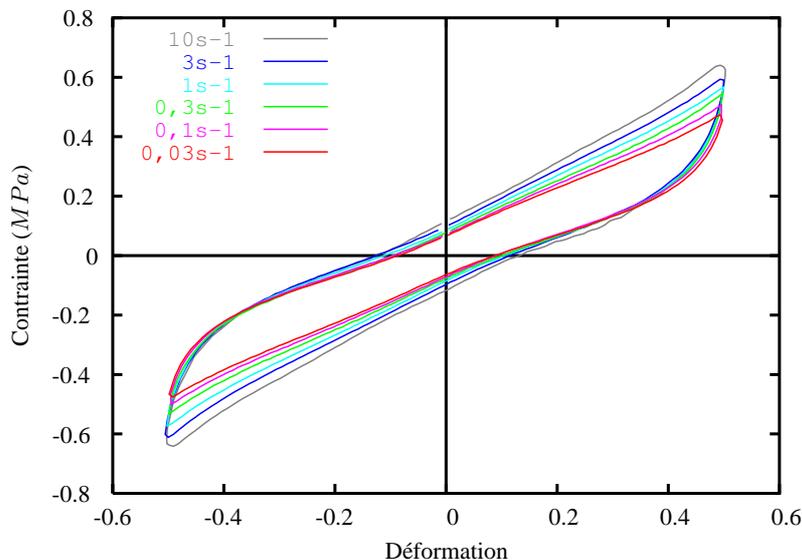


FIG. 1.12 – Observation de l’influence de la vitesse de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que $\gamma_{max} = 50\%$ (Martinez, 2005).

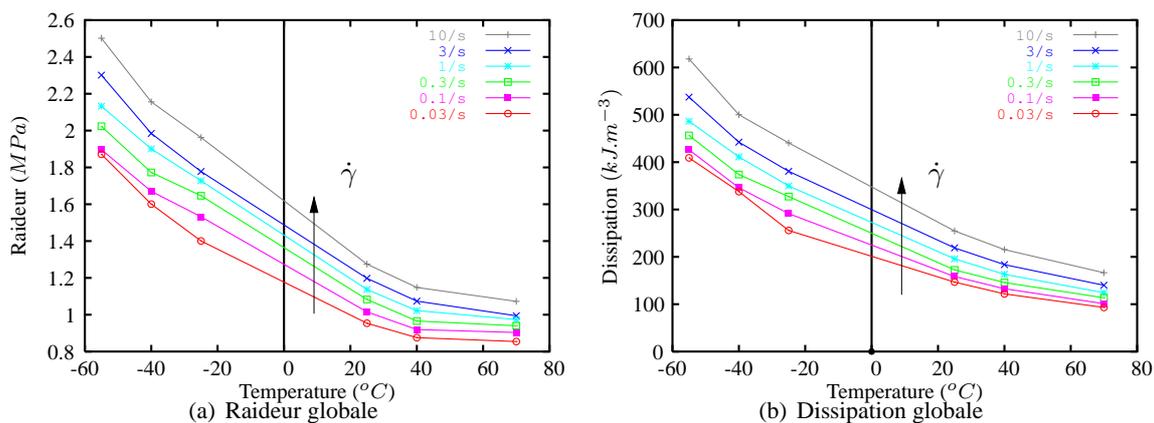


FIG. 1.13 – Évolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ réalisés à différentes vitesses de déformation (Martinez, 2005).

proches, un pic marqué de $\tan \delta$ désignant des températures de transition vitreuse négatives, une influence visqueuse peu marquée pour des températures inférieures à T_G ($\tan \delta \simeq 0$). Pour les températures positives, il y a cependant une différence notable de comportement qui est largement visco-élastique dans le cas du BR ($\tan \delta > 0$) et quasi élastique dans le cas du CR pour $T > 50^\circ C$ ($\tan \delta \simeq 0$).

Bien que qualitativement intéressantes, ces analyses ne pourront servir d’entrée aux modèles qui seront développés dans les chapitres 2, 3 et 4, ceux-ci s’appuyant sur le cadre des grandes déformations⁵. Il semble donc judicieux de caractériser nos matériaux dans ce domaine. C’est cette caractérisation, pour le Silicone₂₀₀₀ et Silicone₂₀₀₅, qui est présentée dans les deux paragraphes à venir.

⁵Les différentes grandeurs visco-élastiques (E' , E'' , $\tan \delta$) n’ont de sens qu’en l’absence de non linéarité géométrique.

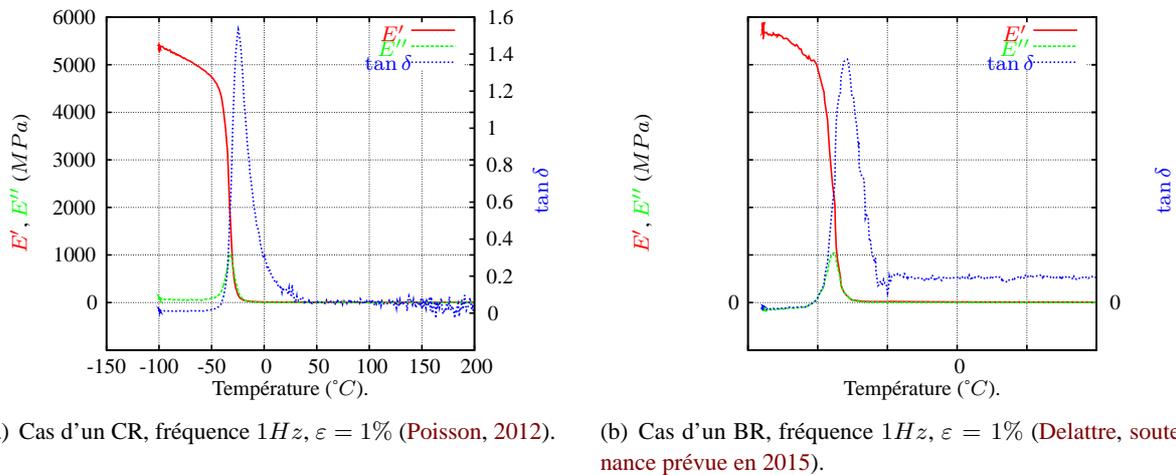


FIG. 1.14 – Évolution des grandeurs dynamiques en fonction de la température.

REMARQUE 1.3

Seule une petite partie des résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de la thèse de Martinez (2005) est présentée, une description exhaustive de ces derniers est naturellement faite dans son manuscrit.

1.3.6.1 Influence de la température d'enceinte

Les résultats présentés ci-après sont obtenus sur des éprouvettes de double cisaillement sollicitées dans une enceinte thermiquement régulée. On suppose qu'au moins en début d'essai, le champ de température dans l'élastomère est uniforme et égal à la température de l'enceinte. L'effet Mullins (§ 1.3.2) est préalablement éliminé avant toute mesure (voir remarque 1.2).

La figure 1.15 présente les réponses de l'éprouvette de double cisaillement soumise à la même sollicitation sinusoïdale pour différentes températures d'essais : -55°C , -45°C , 23°C , 70°C , 100°C . L'ensemble des résultats expérimentaux de ce type est présenté dans l'annexe A.

On constate FIG. 1.15 un accroissement général de la rigidité du matériau (①) avec l'abaissement de la température. Outre ce phénomène attendu, on peut voir aussi une augmentation de l'aire des hystérésis avec la diminution de la température (④), une accentuation du point anguleux au changement de signe de la sollicitation (③) ainsi qu'un raidissement pour les grandes amplitudes de cisaillement (②)

Les travaux de Martinez (2005) conduisent à des courbes d'hystérésis semblables à celles présentées FIG. 1.15 (la sollicitation en déformation étant toujours cyclique mais de forme triangulaire). Il réalisera de plus une analyse de l'influence de la température sur les évolutions de la raideur et de la dissipation, et ce pour des balayages en amplitude (FIG. 1.10) ou en fréquence (FIG. 1.13). Ces deux séries de courbes traduisent donc de manière plus quantitative les effets de la température sur deux des caractéristiques importantes de nos hystérésis.

Il montrera aussi une influence non-linéaire de la température sur la réponse en relaxation du matériau (figure 1.16).

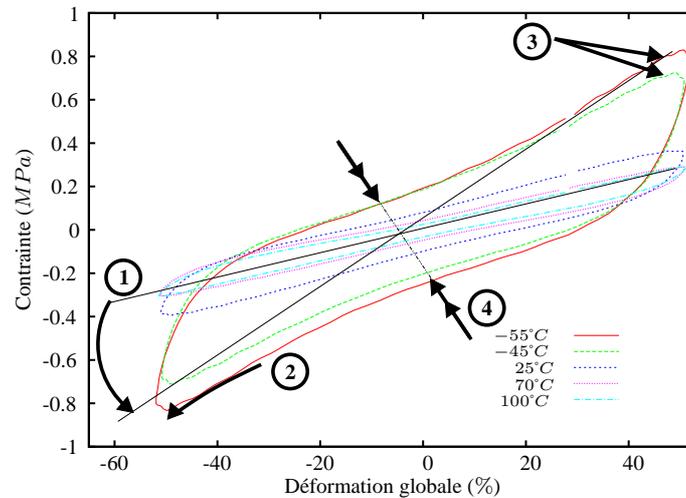


FIG. 1.15 – Courbes contrainte déformation obtenues à différentes températures d'essais sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50 % et de fréquence 3.1 Hz (Méo, 2000b).

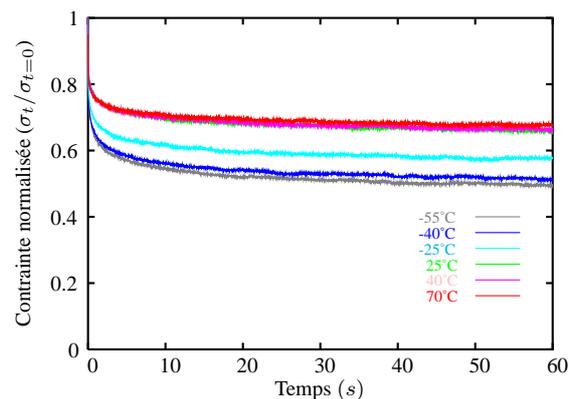


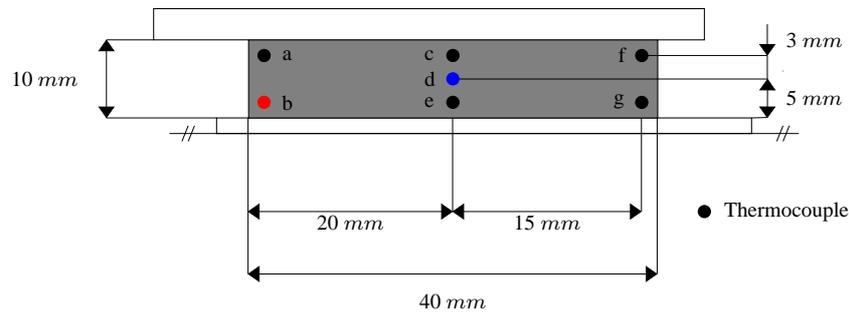
FIG. 1.16 – Influence de la température sur la relaxation ($\gamma_{max} = 50\%$) du Silicone₂₀₀₅ (Martinez, 2005).

1.3.6.2 Auto-échauffement

L'influence de la température du milieu extérieur sur le comportement mécanique est clairement mise en évidence dans le paragraphe précédent. Nous allons montrer ici que la réciproque est aussi vraie, à savoir que la mécanique crée une variation (temporelle et/ou géométrique) du champ des températures. Pour ce faire, dans une enceinte thermique à température contrôlée, une éprouvette de double cisaillement équipée de thermocouples (cf. figure 1.17(a)) est sollicitée de manière harmonique. Les graphiques présentés en figure 1.17(b) et figure 1.17(c) donnent les évolutions temporelles de la température en deux points (thermocouples d et b) de l'éprouvette lors d'essais à des températures ambiantes de 27 °C et 60 °C.

On dégage trois remarques principales :

- l'évolution initiale de la température est rapide et pratiquement linéaire aux deux points de mesure ;
- la température tend vers une asymptote horizontale en fin d'essai ;
- en début d'essai, la température en coin (thermocouple b) est plus élevée qu'au centre (thermocouple d). Ce phénomène est plus accentué pour une température d'enceinte de 27 °C.



(a) Positionnement des thermocouples sur la demi éprouvette supérieure.

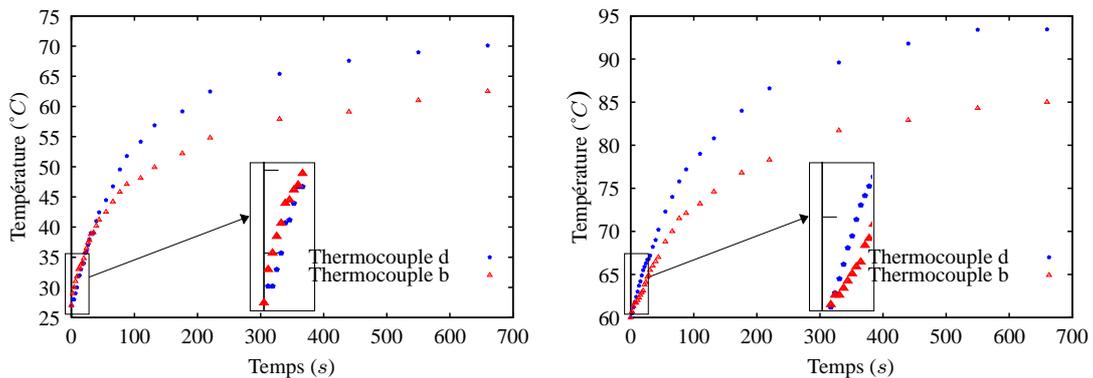
(b) Évolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de $27^{\circ}C$. (c) Évolution de la température aux thermocouples b et d à une température extérieure de $60^{\circ}C$.

FIG. 1.17 – Auto-échauffement d'une éprouvette de double cisaillement sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude de déformation 50% et de fréquence $3.1Hz$ à différentes températures (Méo, 2000b).

Ces évolutions assez importantes de la température incitent ainsi à voir l'influence de la thermique sur la mécanique, mise en évidence dans le paragraphe 1.3.6.1, comme une influence réciproque et justifie la mise en place d'une résolution couplée telle que celle présentée dans le chapitre 4.

1.4 Conclusion

Comme nous avons pu le voir sur ce chapitre, les élastomères que nous avons pu étudier (silicones, HNBR, CR, BR) présentent de nombreuses caractéristiques mécaniques, voir thermo-mécaniques. A ce titre, on peut noter que :

- le type de charges influe sur le comportement du matériau. Nous verrons dans le chapitre 5 qu’elles marqueront aussi les faciès de rupture obtenus sous chargement de fatigue.
- la cristallisation (ou non) de l’élastomère considéré, tout comme le type de renfort, aura à la fois une forte influence sur ses réponses mécaniques et sur sa tenue en fatigue ;
- nos élastomères présentent tous un effet Mullins significatif. Aucune modélisation de ce dernier n’est proposée dans le travail qui suit car il disparaît suite à quelques cycles de chargement. Nous nous attacherons donc à modéliser des comportements exempts de ce phénomène (*i.e.* après les quelques cycles nécessaires à son élimination) ;
- les influences de l’amplitude (effet Payne ou Gent-Fletcher) et de la fréquence sont clairement mises en évidence, tant dans le domaine des petites que des grandes déformations. Elles semblent, de plus, être largement non-linéaires ;
- enfin les aspects thermiques et/ou thermo-mécaniques seront à prendre en compte, les matériaux étudiés étant fortement dissipatifs et ayant des caractéristiques mécaniques dépendantes de la température.

La démarche suivie dans les chapitres à venir, consistera, dans un premier temps, à s’intéresser exclusivement au comportement mécanique du matériau afin d’obtenir un modèle qui, à une température donnée (quelle qu’elle soit, proche ou non de la T_G), sera capable de rendre compte des différents phénomènes mécaniques listés ci-dessus (en particulier des influences de la fréquence et de l’amplitude de sollicitation et hors effet Mullins). Son utilisation rendra alors possible une prévision du comportement en régime thermique stabilisé et pourra aussi être utilisé pour décliner différents critères locaux de fatigue. Pour rendre compte du couplage thermo-mécanique et après avoir déterminé les évolutions, en fonction de la température, des différents paramètres mécaniques des modèles, nous verrons comment réintégrer la dissipation intrinsèque mécanique dans l’équation de la chaleur et ainsi prévoir les influences réciproques de la thermique et de la mécanique.

Cadre thermodynamique

Le cadre thermodynamique qui va être décrit dans ce chapitre a pour but de fournir des outils suffisamment généraux pour pouvoir prendre en compte les phénomènes mécaniques présentés dans le chapitre 1 et portant en grande partie sur les matériaux qui seront étudiés par la suite. Il est à noter qu'une hypothèse d'isothermie sera faite dans le cadre de ce chapitre. Celle-ci sera rediscutée et remise en question dans le chapitre 4. Ainsi est présentée une description complète en grandes déformations des comportements hyper-élasto-dissipatifs. Un découpage de la transformation, en une part purement volumique et l'autre strictement incompressible, permet d'aboutir à une formulation générale compressible aisément déclinable en incompressible.

Pour ce faire, le cadre standard généralisé est adopté (Halphen et Son Nguyen, 1975), les différentes variables internes sont introduites via le concept d'état(s) intermédiaire(s) appliqué sur la transformation incompressible. Les lois d'évolution de ces dernières sont obtenues au moyen d'un potentiel de dissipation. Nous nous restreignons, dans un premier temps, à une décomposition à un seul état intermédiaire inélastique. Ceci permet alors de mettre en exergue une généralisation en grandes déformations de différents modèles rhéologiques unitaires (i.e. une seule variable interne est nécessaire à leurs descriptions). Puis, cette décomposition est étendue à plusieurs états intermédiaires. Dans ces deux approches, les lois des modèles compressibles et incompressibles sont systématiquement présentées dans les configurations lagrangienne, eulérienne et mixte.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Introduction	41
2.2	Démarche et cadre thermodynamique	43
2.2.1	Cinématique et définitions	43
2.2.2	Premier principe	44
2.2.3	Inégalité de Clausius-Duhem	44
2.3	Lois générales du comportement	45
2.3.1	État local	45
2.3.2	Premières variables	45
2.3.3	Phénomènes dissipatifs, choix de variables	46
2.3.3.1	État intermédiaire	46
2.3.3.2	Conséquences sur l'énergie libre	47
2.3.3.3	Réécriture de l'énergie libre	48
2.3.4	Lois de comportement et d'évolution	49
2.3.5	Modèles rhéologiques	50
2.3.5.1	Modèles de base	50
2.3.5.2	Extension du modèle de base	50
2.3.5.3	Cas incompressible	52
2.3.6	Quelques exemples de modèles	53
2.4	Généralisation à plusieurs états intermédiaires	55
2.4.1	Principe	55
2.4.2	Conséquences et lois de comportement	56
2.4.2.1	Cas compressible	56
2.4.2.2	Cas incompressible	58
2.5	Conclusion	59

2.1 Introduction

Afin de décrire le caractère non linéaire des élastomères, plusieurs approches sont proposées dans la littérature.

Les comportements hyperélastiques sont largement répandus pour caractériser le comportement statique des élastomères. Ceci se fait soit en mettant en avant des démarches statistiques (Treloar, 1943, 1957; Arruda et Boyce, 1993), ou des approches purement phénoménologiques (Ogden, 1972; Hart-Smith, 1966; Rivlin, 1948; Mooney, 1940). Une présentation assez exhaustive de ces deux différentes approches est faite dans le travail de thèse de Lejeunes (2006a).

Une approche en endommagement peut être mise en place afin de modéliser l'adoucissement rencontré, sur les premiers cycles d'un chargement cyclique caractérisant l'effet Mullins (voir § 1.3.2) (Harwood et al., 1967; Mullins, 1947, 1956; Mullins et Tobin, 1965). Un cadre théorique micro-mécanique a été donné dans ce but par Govindjee et Simo (1991, 1992) pour un matériau hyperélastique. Une approche similaire est aussi proposée dans le cas d'un matériau visco-élastique par Simo (1988); Miehe (1995a). Il est à noter que ce dernier prend en compte, en plus un endommagement discontinu induit par l'effet Mullins, un endommagement continu.

Enfin trois grandes voies se détachent afin de rendre compte de la visco-élasticité. On distinguera :

- les approches intégrales tenant compte de l'histoire passée du matériau (Morman, 1988; Chang et al., 1978; Lianis, 1963; Christensen, 1971; Coleman et Noll, 1961; Coleman, 1964),
- les approches micro-physiquement motivées principalement axées sur les interactions entre la matrice et les charges (Drozdov, 2001a,b; Drozdov et Dorfmann, 2002, 2003; Drozdov et al., 2004) ou sur un réarrangement moléculaire (Drozdov, 2000, 1998; Reese, 2003),
- les approches différentielles s'appuyant sur le cadre des matériaux standards généralisés. Ce sont ces dernières que nous allons largement développer dans ce chapitre en nous appuyant principalement sur les travaux de Sidoroff (1973, 1974, 1975a,b, 1976, 1977, 1982). Ces méthodes pourront être vues comme une extension aux grandes déformations des classiques lois d'assemblage rhéologique (Seung et al., 1997; Le Tallec et Rahier, 1994; Leonov, 1992). Certains auteurs, comme Miehe et Keck (2002), proposent de superposer au comportement visco-élastique différentiel un comportement élasto-plastique. Nous verrons dans le chapitre 3 l'intérêt d'une telle démarche.

REMARQUE 2.1

Les approches thermo-mécaniques ne sont pas évoquées dans la liste présentée ci-dessus, car celles-ci feront l'objet d'une étude spécifique dans le chapitre 4 entièrement consacré à ce phénomène de couplage et à l'influence de la température dans le comportement du matériau.

2.2 Démarche et cadre thermodynamique

Comme nous l'avons constaté dans le paragraphe 1.3 du chapitre 1 (en particulier sur la figure 1.9 ainsi que sur celles données en annexe A), nos futures lois de comportement devront rendre compte des non linéarités géométriques du matériau par une écriture dans le cadre des grandes transformations, du caractère dissipatif (plastique et/ou visqueux), de l'effet Payne (*i.e.* rigidification du comportement global avec l'augmentation de l'amplitude) et de l'influence de la fréquence (ou de la vitesse) de chargement.

HYPOTHÈSE 2.1

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur l'aspect mécanique. Ainsi tous les phénomènes étudiés sont supposés isothermes et les matériaux sont considérés à température homogène.

HYPOTHÈSE 2.2

Aucune forme d'endommagement ne sera prise en compte qu'il soit de type Mullins (basé sur une élongation maximale) ou de type accumulation.

REMARQUE 2.2

L'ensemble des grandeurs tensorielles, opérateurs, opérations tensorielles,... intervenant dans les équations à suivre sont définies dans le glossaire.

2.2.1 Cinématique et définitions

Classiquement, on considère un solide occupant un domaine Ω dans sa configuration initiale (C_0) et ω dans sa configuration déformée (C_t). Le passage de l'une à l'autre de ces configurations se fait par l'intermédiaire du gradient de la transformation \mathbf{F} . Ce dernier permet de définir les grandeurs cinématiques décrites dans le tableau 2 du glossaire. Cet outil est, de plus, indispensable pour passer de l'une à l'autre des mesures de contraintes citées TAB. 4 du glossaire, ainsi que pour exprimer dans l'une ou l'autre des deux configurations des grandeurs telles que la masse volumique ou le flux de chaleur (Glossaire, TAB. 6).

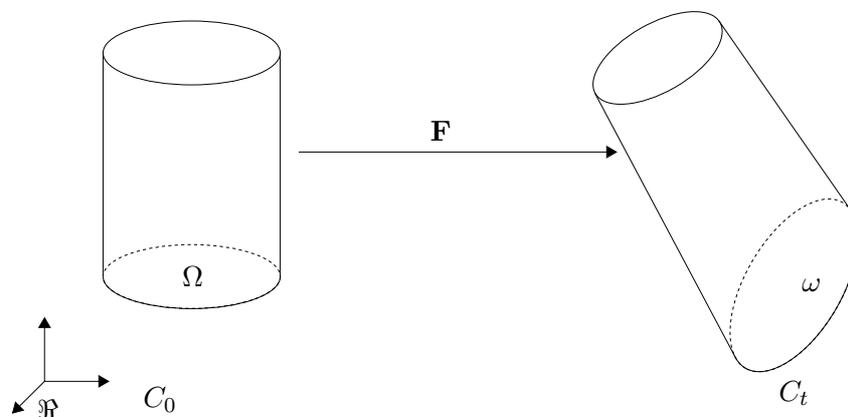


FIG. 2.1 – Système de configurations.

2.2.2 Premier principe

Il est alors aisé d'écrire dans trois configurations le premier principe de la thermodynamique traduisant la conservation de l'énergie :

– formulation eulérienne :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}, \quad (2.1)$$

– formulation lagrangienne :

$$\rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}, \quad (2.2)$$

– formulation mixte :

$$\rho_0 \dot{e} = \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}. \quad (2.3)$$

2.2.3 Inégalité de Clausius-Duhem

Il en va de même pour l'inégalité de Clausius-Duhem exprimant la positivité de dissipation :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{e} - T\dot{s}) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0, \quad (2.4)$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{s}) - \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0, \quad (2.5)$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{s}) - \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T + \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0. \quad (2.6)$$

Si bien qu'en postulant l'existence d'une énergie libre ψ (cf. TAB. 6) telle que

$$\psi = e - sT \quad (2.7)$$

les équations (2.4), (2.5) et (2.6) deviennent :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0, \quad (2.8)$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0, \quad (2.9)$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T + \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0. \quad (2.10)$$

Enfin, les formes recherchées des trois équations précédentes sont obtenues en s'appuyant sur l'hypothèse \mathcal{H} . 2.1.

– formulation lagrangienne :

$$\boxed{\phi_0 = -\rho_0 \dot{\psi} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0} \quad (2.11)$$

– formulation mixte :

$$\boxed{\phi_0 = -\rho_0 \dot{\psi} + \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0} \quad (2.12)$$

– formulation eulérienne :

$$\boxed{\phi = -\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0} \quad (2.13)$$

2.3 Lois générales du comportement

2.3.1 État local

Sous l'hypothèse de l'état local (**Lemaitre et Chaboche, 1996**), il est possible de définir l'énergie libre comme une fonction du gradient de la transformation \mathbf{F} et de variables d'état que nous noterons \mathcal{A}_i ou α_i respectivement dans les descriptions lagrangienne (ou mixte) et eulérienne.

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \mathcal{A}_i) \text{ ou } \psi = \psi(\mathbf{F}, \alpha_i) \quad (2.14)$$

Les lois d'évolution de ces variables sont alors, dans le cadre standard généralisé (**Halphen et Son Nguyen, 1975**), obtenues en supposant l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation.

C'est cette démarche qui va être suivie en faisant, dans un premier temps, le choix de découpler les influences des parties volumique et et isochore du gradient de transformation puis en introduisant les différentes variables internes par le concept d'état intermédiaire.

2.3.2 Premières variables

Comme il a été dit en introduction, le choix de découper \mathbf{F} en une transformation purement volumique¹ $\mathbf{F}_{\text{vol}} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}$ et une autre purement incompressible $\bar{\mathbf{F}}$ a été opéré dans ce travail.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (2.15)$$

Ceci peut être vu comme l'introduction d'un état intermédiaire \bar{C}_0 entre les états final et de référence, obtenu à partir de l'état initial par une transformation représentant l'intégralité du changement de volume de la transformation (FIG. 2.2).

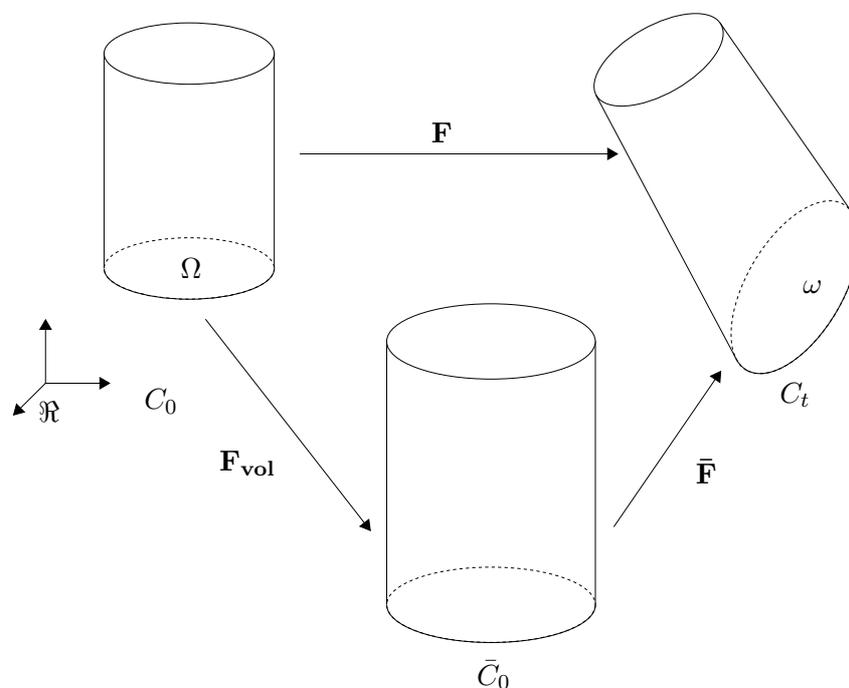


FIG. 2.2 – Découplage des parties volumique et isochore.

¹On rappelle en accord avec TAB. 2 que $J = \det \mathbf{F}$.

Une conséquence directe d'un tel découpage est de pouvoir appréhender la dépendance de l'énergie libre en \mathbf{F} comme une dépendance en J et $\bar{\mathbf{F}}$. Ainsi, il devient possible de réécrire (2.14) en :

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{F}}, \mathcal{A}_i) \text{ ou } \psi = \psi(J, \bar{\mathbf{F}}, \alpha_i) \quad (2.16)$$

De plus, il est aussi possible de définir les classiques outils cinématiques, associés à $\bar{\mathbf{F}}$, tels que $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$, respectivement les tenseur de Cauchy-Green gauche et droit :

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B} \quad (2.17)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad (2.18)$$

2.3.3 Phénomènes dissipatifs, choix de variables

2.3.3.1 État intermédiaire

L'objectif est ici d'introduire les variables internes (*i.e.* \mathcal{A}_i et/ou α_i dans (2.16) et (2.14)) nécessaires à la modélisation d'un caractère dissipatif pour nos lois de comportement. Il semble crucial de ramener ces variables à un sens physique.

La notion d'état intermédiaire a initialement été introduite par Sidoroff (1973) dans le cadre de travaux portant sur l'élasto-plasticité en grandes déformations. Cette approche postule l'existence d'une nouvelle configuration – l'état ou la configuration intermédiaire –, obtenue par un relâchement élastique à partir de la configuration finale. Ceci permet alors de décomposer multiplicativement le gradient de la transformation comme suit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \quad (2.19)$$

où \mathbf{F}_e et \mathbf{F}_p représentent respectivement des gradients de transformation élastique et plastique.

Le travail présenté par la suite s'appuie grandement sur ce concept qui a largement été étendu par la suite par Sidoroff (1974, 1975a,b, 1977), ainsi que par les travaux de Gabrieli (1995); Méo (2000b); Lejeunes et al. (2010).

Le choix est ainsi fait de postuler l'existence d'un nouvel² état intermédiaire $\bar{\mathbf{C}}_a$ entre $\bar{\mathbf{C}}_0$ et \mathbf{C}_t (*cf.* FIG. 2.3).

REMARQUE 2.3

Il est à noter que cette démarche fait donc porter l'intégralité des processus dissipatifs à la transformation isochore $\bar{\mathbf{F}}$.

Tout comme \mathbf{F} dans (2.19), $\bar{\mathbf{F}}$ peut alors être multiplicativement décomposé :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a, \quad (2.20)$$

et ce en introduisant $\bar{\mathbf{F}}_e$ et $\bar{\mathbf{F}}_a$, deux gradients incompressibles respectivement élastique et anélastique (c'est-à-dire visqueux, plastique ou visco-plastique³).

De manière analogue aux équations (2.17) et (2.18), les tenseurs de Cauchy-Green gauche et droit associés à $\bar{\mathbf{F}}_e$ et $\bar{\mathbf{F}}_a$ sont définis :

$$\bar{\mathbf{B}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^T \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_e \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_a = \bar{\mathbf{F}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^T \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}_a = \bar{\mathbf{F}}_a^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_a \quad (2.22)$$

²Après $\bar{\mathbf{C}}_0$ introduit dans le paragraphe 2.3.2.

³La notion d'état élastiquement relâché trouve moins de signification physique dans le cas visco-élastique que dans les cas élasto-plastique et élasto-visco-plastique...

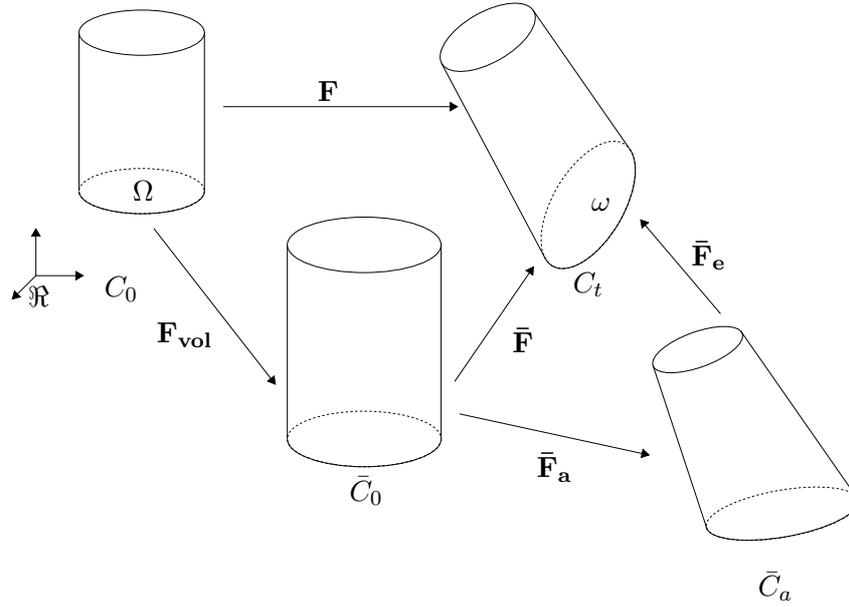


FIG. 2.3 – Milieu à une configuration intermédiaire incompressible.

2.3.3.2 Conséquences sur l'énergie libre

Le découpage défini précédemment conduit à faire évoluer l'énergie libre définie (2.16) :

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{F}}_e) \text{ ou } \psi = \psi(J, \bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{F}}_a) \quad (2.23)$$

Des considérations d'isotropie, d'objectivité, ainsi que de respect du PIFC⁴ conduisent alors à voir l'énergie libre comme une fonction isotrope du jeu de variables, considérées indépendantes, $(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a)$ dans le cas des approches lagrangienne et mixte ou $(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$ dans le cas eulérien :

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a) \text{ ou } \psi = \psi(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) \quad (2.24)$$

Il est à noter que cette approche est similaire à celle proposée dans le cas des assemblages rhéologiques sous l'hypothèse des petites perturbations. À ceci près que sous cette hypothèse, c'est la déformation qui est décomposée et ce, additivement, en une partie élastique et anélastique (*i.e.* $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_a$) menant à une énergie libre fonction des variables $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_e)$ ou $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_a)$. Un découpage additif de l'énergie libre est alors introduit, revenant à la considérer comme une variable extensive et pouvant mener à :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_e) = \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \text{ ou } \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_a) = \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_a(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \quad (2.25)$$

C'est cette même voie qui est suivie dans la suite de notre travail, nous menant à considérer

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{C}}) + \psi_{neq}(\bar{\mathbf{C}}_a), \quad (2.26)$$

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{neq}(\bar{\mathbf{B}}_e). \quad (2.27)$$

ψ_{eq} et ψ_{neq} étant des fonctions isotropes de leur variable respective⁵ représentant les phénomènes à l'équilibre (*i.e.* élastique) et hors équilibre (plastique, visqueux...).

⁴Principe d'Invariance des Fonctions Constitutives (Sidoroff, 1976, 1974, 1973)

⁵Les mêmes noms de fonctions, ψ_{eq} et ψ_{neq} , ont été utilisées pour les écritures eulérienne (2.27) et mixte/lagrangienne (2.26) par simple commodité, un choix plus rigoureux, comme par exemple ψ_{eq}^{lag} , ψ_{eq}^{eul} , ψ_{neq}^{lag} et ψ_{neq}^{eul} , aurait sans doute nui à la lecture.

2.3.3.3 Réécriture de l'énergie libre

Le détail des calculs dans les trois descriptions est produit dans l'annexe B.

2.3.3.3.1 Écriture lagrangienne

En utilisant l'expression de ψ obtenue (2.26), l'équation (2.11) devient :

$$[-\bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - \mathbf{S}_{\text{vol}} + \mathbf{S}] : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} \geq 0 \quad (2.28)$$

avec

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}); \mathbf{S}_{\text{vol}} = \rho_0 J \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (2.29)$$

et

$$\mathbb{P}_{\mathbf{C}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (2.30)$$

2.3.3.3.2 Écriture mixte

Une démarche analogue, partant de (2.26) et (2.12), donne en configuration mixte :

$$\left[-\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) + \boldsymbol{\pi} \right] : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} \geq 0 \quad (2.31)$$

qui s'écrira sous forme objective :

$$[\mathbf{F}^{-1} \cdot [-\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \boldsymbol{\pi}]] : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} \geq 0 \quad (2.32)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{F}}}(\bar{\mathbf{C}}) = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}); \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) \quad (2.33)$$

et

$$\mathbb{P}_{\mathbf{F}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right] \quad (2.34)$$

2.3.3.3.3 Écriture eulérienne

Enfin, intégrant la forme (2.27) dans l'expression eulérienne de la dissipation intrinsèque (2.13), il est possible d'arriver à :

$$[-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} + \boldsymbol{\sigma}] : \mathbf{D} + \left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \right] : \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ} \geq 0 \quad (2.35)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{1} \quad (2.36)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}}(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}), \quad (2.37)$$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (2.38)$$

De plus, $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}}$ est obtenu par la décomposition polaire de $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$ (*i.e.* $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}}$) et $\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ}$ représente une mesure objective de la vitesse de déformation anélastique :

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ} = \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}}^{-1} \quad (2.39)$$

avec $\bar{\mathbf{D}}_a$ la vitesse de déformation anélastique :

$$\bar{\mathbf{D}}_a = \left(\dot{\bar{\mathbf{F}}}_a \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} \right)_{sym} \quad (2.40)$$

2.3.4 Lois de comportement et d'évolution

Pour chacune des trois formes de l'inégalité de Clausius-Duhem obtenues précédemment, nous nous plaçons sous l'hypothèse des matériaux standards généralisés (Halphen et Son Nguyen, 1975), postulant que chacune des forces thermodynamiques mises en jeu dans ces équations suit un principe de normalité par rapport à un potentiel de dissipation. Ce dernier est quant à lui choisi dépendant des flux thermodynamiques. Les tableaux TAB. 2.1, TAB. 2.2 et TAB. 2.3 donnent respectivement les répartitions forces/flux des expressions (2.28), (2.32) et (2.35).

forces	$-\bar{\mathbf{S}}_{eq} : \mathbb{P}_C - \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}$	$-\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a}$
flux	$\dot{\mathbf{E}}$	$\dot{\bar{\mathbf{C}}}_a$

TAB. 2.1 – Répartition forces/flux dans (2.28).

forces	$\mathbf{F}^{-1} \cdot [-\bar{\boldsymbol{\pi}}_{eq} : \mathbb{P}_F - \boldsymbol{\pi}_{vol} + \boldsymbol{\pi}]$	$-\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a}$
flux	$\dot{\mathbf{E}}$	$\dot{\bar{\mathbf{C}}}_a$

TAB. 2.2 – Répartition forces/flux dans (2.32).

forces	$-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} : \mathbb{P}_1 - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq} : \mathbb{P}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \boldsymbol{\sigma}$	$2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e$
flux	\mathbf{D}	$\bar{\mathbf{D}}_a^o$

TAB. 2.3 – Répartition forces/flux dans (2.35).

Tout comme pour l'énergie libre, est considérée pour le potentiel de dissipation une contribution découplée des différentes variables flux :

$$\varphi(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a) = \varphi_0(\dot{\mathbf{E}}) + \varphi_a(\dot{\bar{\mathbf{C}}}_a) \quad (2.41)$$

$$\varphi(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}_a^o) = \varphi_0(\mathbf{D}) + \varphi_a(\bar{\mathbf{D}}_a^o) \quad (2.42)$$

Dès lors, en respectant le principe de normalité ainsi que l'incompressibilité de la transformation intermédiaire, il vient les lois de comportement et d'évolution des variables internes pour les différentes configurations :

– configuration lagrangienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{eq} : \mathbb{P}_C + \mathbf{S}_{vol} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

avec

– configuration mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}}} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{F}}} : \bar{\mathbf{F}}^{-T} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

– configuration eulérienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ}} \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0 ; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ} = 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$\mathbb{P}_{\mathbf{C}}$, $\mathbb{P}_{\mathbf{F}}$, $\mathbb{P}_{\mathbf{1}}$ et $\mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}}$ sont 4 opérateurs déviateurs définis dans le glossaire.

REMARQUE 2.4

Dans le cas où ψ_{neq} est une fonction isotrope de $\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}$ – c’est notre cas – la loi complémentaire (2.45-2) se simplifie et devient :

$$\underbrace{\left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}} \right]}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{a}}^{\circ}} \quad (2.46)$$

2.3.5 Modèles rhéologiques

2.3.5.1 Modèles de base

Les lois de comportement et d’évolution obtenues dans le cadre eulérien peuvent être vues comme une généralisation en grandes déformations des lois d’assemblages du modèle rhéologique décrit sur la figure 2.4.

(2.45-1) traduit que la contrainte totale est la somme des contraintes obtenues dans chacune des 3 branches en parallèle ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}$ représentant une seule et même contrainte hyperélastique), (2.45-2) (ou (2.46)) porte uniquement sur la dernière branche et signifie que la contrainte engendrée par cet assemblage en série peut être vue comme la contribution soit de la partie élastique portée par $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$, soit de la partie dissipative portée par $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$.

2.3.5.2 Extension du modèle de base

Une des conséquences fondamentales de la démarche précédemment présentée est de postuler une forme isotrope de la fonction énergie libre et qui, dans le cadre eulérien (*i.e.* celui qui nous a servi à généraliser aux grandes déformations le modèle rhéologique donné Fig. 2.4), doit être une fonction isotrope des seules variables ($\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}$). On montre en annexe C qu’il est correct de réécrire (2.27) :

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}) = \psi_{\text{vol}}(J) + \psi_{\text{eq}}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{\text{neq}}^e(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}) + \psi_{\text{neq}}^a(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{a}}). \quad (2.47)$$

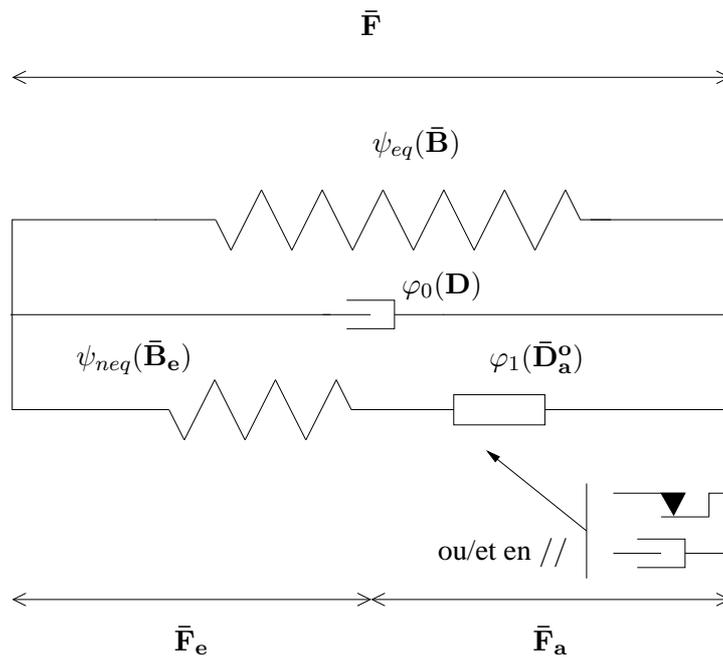


FIG. 2.4 – Modèle rhéologique général décrit par les équations (2.45).

car si ψ_{neq}^a est isotrope de $\bar{\mathbf{B}}_a$ alors elle l'est de $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$.

Ceci permet alors d'étendre le modèle présenté FIG. 2.4 à celui décrit FIG. 2.5. Le problème (2.45) se

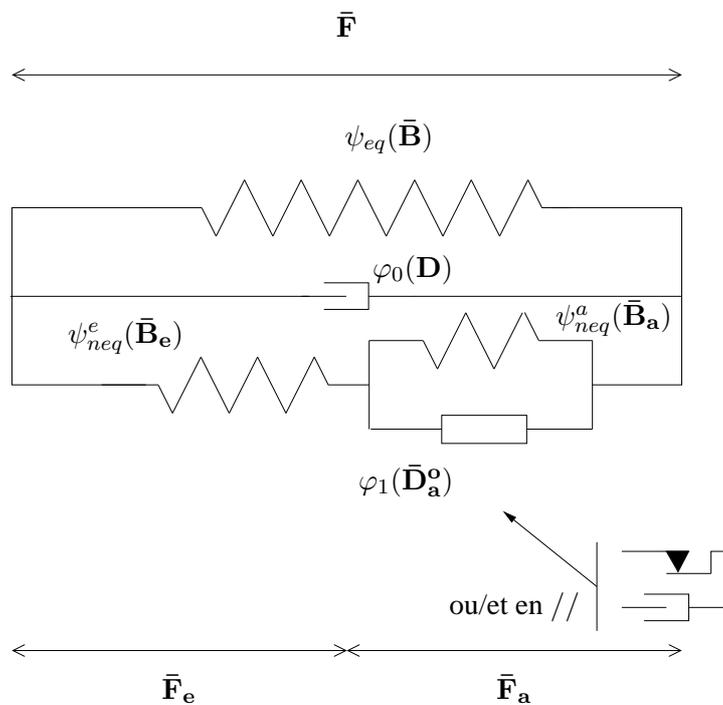


FIG. 2.5 – Modèle rhéologique général étendu.

trouve alors modifié ainsi (démonstration en annexe C) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e - \bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T \right] : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}) \\ \text{et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a}(\bar{\mathbf{B}}_a) \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (2.48)$$

REMARQUE 2.5

De manière analogue à la remarque 2.4, la loi d'évolution (2.48-2) devient par l'isotropie de ψ_{neq}^e :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} + [\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T] : \mathbb{P}_1 \quad (2.49)$$

Cette équation vérifie encore (au transport par la rotation $\bar{\mathbf{R}}_e$ près) une démarche d'assemblage rhéologique.

Dans les cas lagrangien et mixte, en s'appuyant sur l'extension de (2.26)

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a) = \psi_{\text{vol}}(J) + \psi_{\text{eq}}(\bar{\mathbf{C}}) + \psi_{\text{neq}}^e(\bar{\mathbf{C}}_e) + \psi_{\text{neq}}^a(\bar{\mathbf{C}}_a) \quad (2.50)$$

nos deux problèmes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_C + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_C + \mathbf{S}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} \right] : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_F + 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_F + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} \right] : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{F}}} : \bar{\mathbf{F}}^{-T} = 0; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.52)$$

2.3.5.3 Cas incompressible

Il est choisi ici de présenter les équations dans le cas incompressible (ou en très faiblement compressible), ce cas étant utilisé dans ce manuscrit.

L'idée générale est d'introduire une pression hydrostatique p telle que

$$\psi_{\text{vol}} = -p(J - 1) \quad (2.53)$$

p est alors vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité $J = 1$

La condition d'incompressibilité, porte alors sur \mathbf{F} et non plus sur $\bar{\mathbf{F}}$.

$$\det \mathbf{F} = J = 1 \Leftrightarrow \mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.54)$$

La distinction entre \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{F}}$ ne présente donc plus d'intérêt et la décomposition présentée (2.20) et FIG. 2.3 peut directement être réalisée sur \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a \quad (2.55)$$

\mathbf{F}_e et \mathbf{F}_a étant tous deux considérés comme décrivant des transformations incompressibles.

Les différents problèmes (2.43), (2.44) et (2.45) se trouvent alors modifiés ainsi⁶ :

– configuration lagrangienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \mathbf{C}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \mathbf{C}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \mathbf{C}_a} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{avec } \mathbf{S}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{C}} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

– configuration mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + 2\rho_0 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \mathbf{C}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - p \text{cof}(\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \mathbf{C}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \mathbf{C}_a} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{C}} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{F}} : \mathbf{F}^{-T} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

– configuration eulérienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} - p \mathbf{1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{D}_a^o} + [\mathbf{R}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^a \cdot \mathbf{R}_e^T] : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} \\ \text{avec } \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{B}} ; \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^e = 2\rho_0 \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \mathbf{B}_e} ; \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^a = 2\rho_0 \mathbf{B}_a \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \mathbf{B}_a} \\ \text{en respectant } \text{tr} \mathbf{D} = 0 ; \text{tr} \mathbf{D}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (2.58)$$

2.3.6 Quelques exemples de modèles

Les équations (2.48), (2.51) et (2.52) dans le cas compressible ou (2.56), (2.57) et (2.58) dans le cas incompressible, font toutes intervenir des dérivées (par rapport à un tenseur de Cauchy-Green droit ou gauche) d'énergies libres isotropes et fonctions d'une unique variable vérifiant une condition d'incompressibilité – elles ne dépendent donc que du premier et du second invariants de ce tenseur. Ces formes rappellent les définitions obtenues pour les différentes mesures des contraintes des cas hyperélastiques incompressibles. C'est pourquoi, et dans un souci de simplicité, il est choisi d'attribuer des potentiels hyperélastiques à toutes nos énergies libres.

⁶La dépendance des différents potentiels n'est plus en \bar{X} mais en X .

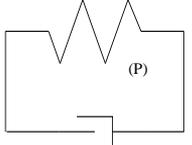
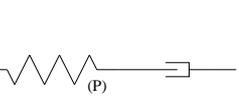
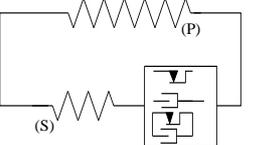
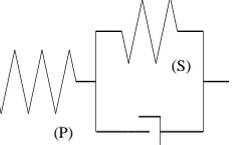
Après avoir étudié les modèles de **Mooney (1940)**, **Rivlin et Saunders (1951)**, **Hart-Smith (1966)**, **Gent et Thomas (1973)**, néo-Hooke (**Treloar, 1943**)..., notre choix définitif s'est arrêté sur les formes de Gent-Thomas pour les potentiels principaux ($\psi = c_1(I_1 - 3) + C_2 \ln \frac{I_2}{3}$) et de néo-Hooke ($\psi = a_1(I_1 - 3)$) pour les secondaires⁷ et respectivement notés P et S dans le tableau 2.4.

Les différents potentiels de dissipation purement visqueux sont choisis quadratiques :

$$\varphi_i(\mathbf{X}) = \frac{\eta_i}{2} \mathbf{X} : \mathbf{X} \quad (2.59)$$

Les stratégies et choix faits pour les potentiels de dissipation dans les cas purement élasto-plastique ou élasto-visco-plastique (*i.e.* Modèle de Bingham) seront spécifiquement et respectivement abordés dans les paragraphes 3.2.2.1 et 3.2.2.2.

Le choix de prendre en considération l'un ou l'autre des potentiels introduits dans le paragraphe précédent, peut se schématiser par une représentation rhéologique résumée TAB. 2.4.

Potentiels	Kelvin-Voigt	Maxwell	élasto-plastique (Z) /Zener/Bingham	Poynting-Thomson
ψ_{eq}	✓(P)	✗	✓(P)	✗
ψ_{eq}^a	✗	✗	✓(S)	✓(S)
ψ_{eq}^e	✗	✓(P)	✗	✓(P)
φ_0	✓	✗	✗	✗
φ_1	✗	✓	✓	✓
représentation				

TAB. 2.4 – Modèles obtenus en fonction des choix de potentiels (*i.e.* énergies libres ou pseudo potentiels de dissipation).

Le chapitre suivant explicitera complètement les équations :

- des modèles de Zener et Poynting Thomson via une comparaison de ces derniers écrits en lagrangien incompressible afin de mesurer leurs aptitudes à rendre compte du comportement du Silicone₂₀₀₀ (*cf.* § 1.2.1) en cisaillement,
- des modèles compressibles Z et Bingham afin de constater la facilité d'écriture des lois de comportement de ceux-ci dans le cadre eulérien.

Le modèle de Kelvin-Voigt, qui ne nécessite pas d'état intermédiaire, sera quant à lui utilisé, pour sa simplicité d'écriture (*i.e.* pas de variable interne), dans le chapitre traitant de la fatigue des élastomères (*i.e.* chapitre 5). Cette étude présentera entre autres ses équations, son identification et son utilisation afin de déterminer des critères de fatigue locaux.

⁷L'étude complète menant à ce choix est présentée dans **Méo (2000b)**

2.4 Généralisation à plusieurs états intermédiaires

2.4.1 Principe

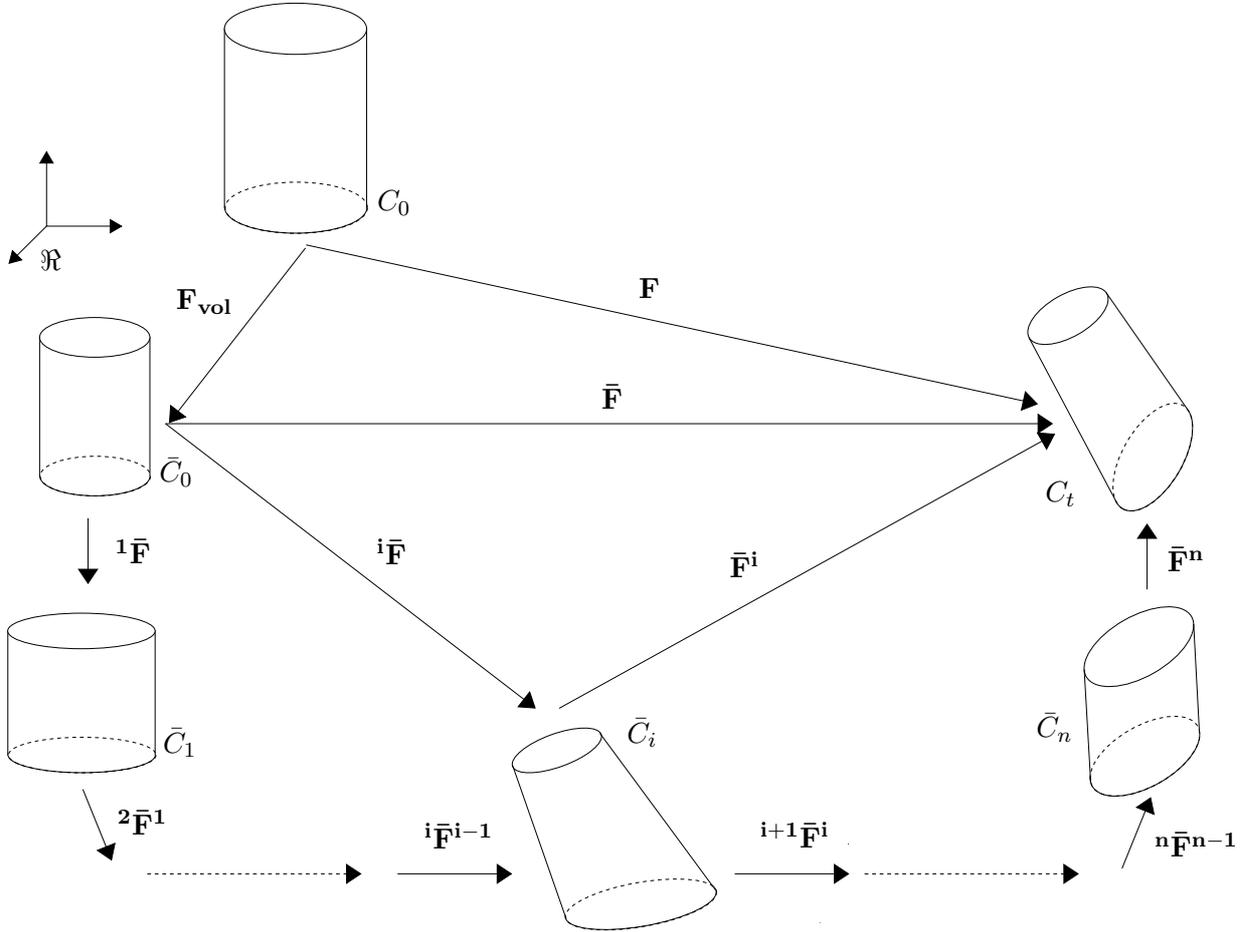


FIG. 2.6 – Milieu à n configurations intermédiaires.

L'objet de ce paragraphe est de donner une alternative dans le cas d'un comportement présentant plusieurs comportements dissipatifs tel que l'élasto-visco-plasticité par exemple et qui nécessite alors plus d'une variable interne et donc plus d'un état intermédiaire. Ce cadre a été donné par [Sidoroff \(1976\)](#) qui propose une décomposition en n états intermédiaires (nommés \bar{C}_i dans la figure 2.6). On passera de \bar{C}_0 à \bar{C}_i puis à C_t respectivement par les gradients ${}^i\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{F}}^i$. Ces deux grandeurs jouent donc les rôles de $\bar{\mathbf{F}}_a$ et $\bar{\mathbf{F}}_e$ définis dans la description à une unique configuration intermédiaire (cf. § 2.3.3.1) et en présentent donc les mêmes propriétés, *i.e.*

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^i \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}} \quad \forall i \quad (2.60)$$

Il est alors possible, toujours en s'appuyant sur la démarche à une seule configuration intermédiaire, de définir les tenseurs de Cauchy-Green droits et gauches associés à ces gradients :

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \bar{\mathbf{F}}^i \cdot \bar{\mathbf{F}}^{iT} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}^i = \bar{\mathbf{F}}^{iT} \cdot \bar{\mathbf{F}}^i \quad \forall i \quad (2.61)$$

$${}^i\bar{\mathbf{B}} = {}^i\bar{\mathbf{F}} \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}^T \quad \text{et} \quad {}^i\bar{\mathbf{C}} = {}^i\bar{\mathbf{F}}^T \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}} \quad \forall i \quad (2.62)$$

On associe de même les taux de déformation associés :

$${}^i\bar{\mathbf{D}} = (\dot{\bar{\mathbf{F}}^i} \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}^{-1})_{sym} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{D}}^i = (\dot{\mathbf{F}}^i \cdot \bar{\mathbf{F}}^{i-1})_{sym} \quad \forall i \quad (2.63)$$

Ceci permet, pour chacun des états intermédiaires, la définition d'un tenseur objectif du taux de déformation anélastique :

$${}^i\bar{\mathbf{D}}^o = \bar{\mathbf{R}}^i \cdot {}^i\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{R}}^{i-1} \quad \forall i \quad (2.64)$$

avec la décomposition polaire de $\bar{\mathbf{F}}^i$

$$\bar{\mathbf{F}}^i = \bar{\mathbf{R}}^i \cdot \bar{\mathbf{U}}^i = \bar{\mathbf{V}}^i \cdot \bar{\mathbf{R}}^i \quad \forall i \quad (2.65)$$

2.4.2 Conséquences et lois de comportement

La fonction énergie libre peut alors être définie⁸ :

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{C}}, {}^i\bar{\mathbf{C}}) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{C}}) + {}^i\psi_{neq}({}^i\bar{\mathbf{C}}), \quad (2.66)$$

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}^i) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{B}}^i). \quad (2.67)$$

puis étendue comme précédemment à

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{C}}, {}^i\bar{\mathbf{C}}) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{C}}) + {}^i\psi_{neq}({}^i\bar{\mathbf{C}}) + \psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{C}}^i) \quad (2.68)$$

ou

$$\psi = \psi(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}^i) = \psi_{vol}(J) + \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{B}}^i) + {}^i\psi_{neq}({}^i\bar{\mathbf{B}}). \quad (2.69)$$

On fait de même pour les potentiels de dissipation :

$$\varphi(\dot{\mathbf{E}}, {}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}}) = \varphi_0(\dot{\mathbf{E}}) + {}^i\varphi({}^i\dot{\bar{\mathbf{C}}}) \quad (2.70)$$

$$\varphi(\mathbf{D}, {}^i\bar{\mathbf{D}}^o) = \varphi_0(\mathbf{D}) + {}^i\varphi({}^i\bar{\mathbf{D}}^o) \quad (2.71)$$

Le principe de normalité peut enfin nous conduire aux lois de comportements et équations complémentaires liées aux problèmes eulérien, mixte ou lagrangien dans les cas compressible et incompressible.

2.4.2.1 Cas compressible

2.4.2.1.1 Configuration eulérienne

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \bar{\sigma}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \sum_i \bar{\sigma}_{neq}^i : \mathbb{P}_1 + \sigma_{vol} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \bar{\sigma}_{neq}^i : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial {}^i\varphi}{\partial {}^i\bar{\mathbf{D}}^o} + \left[\bar{\mathbf{R}}^i \cdot {}^i\bar{\sigma}_{neq} \cdot \bar{\mathbf{R}}^{iT} \right] : \mathbb{P}_1 \quad \forall i \\ \text{avec } \mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \text{et } \bar{\sigma}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \sigma_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\ \bar{\sigma}_{neq}^i = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}^i}; {}^i\bar{\sigma}_{neq} = 2\rho_0 J^{-1} {}^i\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial {}^i\psi_{neq}}{\partial {}^i\bar{\mathbf{B}}} \quad \forall i \\ \text{en respectant } \text{tr} \mathbf{D} = 0; \text{tr} {}^i\bar{\mathbf{D}}^o = 0 \quad \forall i \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Ces équations sont alors vues comme une généralisation aux grandes déformations du modèle présenté FIG. 2.7. Il est aussi possible de décliner les équations (2.72) dans le cas incompressible (cf. § 2.4.2.2.1).

⁸ Attention dans (2.66), (2.67), (2.68), (2.69), (2.70) et (2.71), une sommation sur i est implicitement faite.

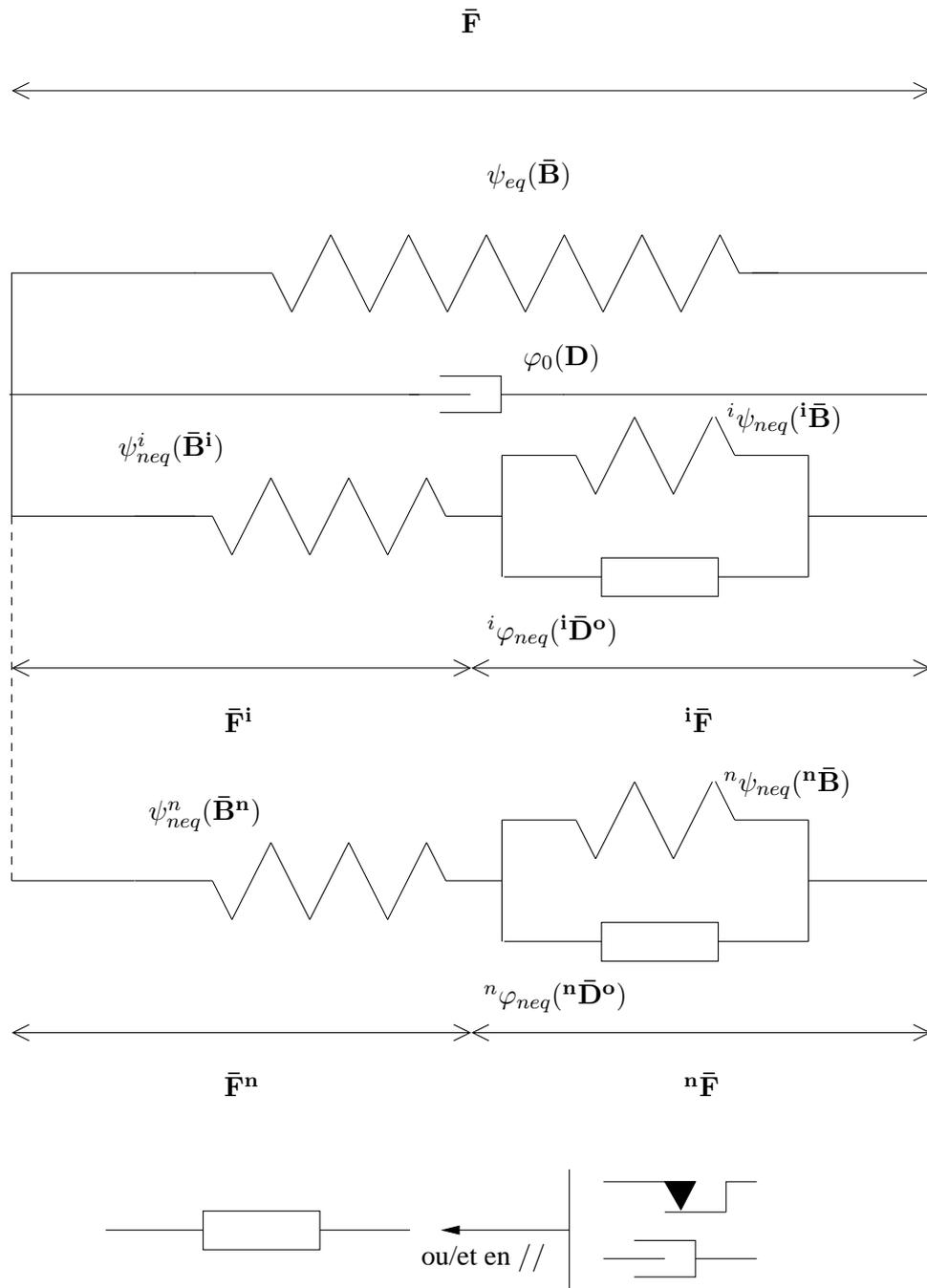


FIG. 2.7 – Modèle rhéologique général étendu.

2.4.2.1.2 Configurations lagrangienne et mixte

L'établissement des cas lagrangien et mixte se fait par un raisonnement analogue à celui menant aux

équations (2.51) et (2.52). Leur généralisation au cadre incompressible est donnée § 2.4.2.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \sum_{\mathbf{i}} 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \mathbf{S}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \sum_{\mathbf{i}} 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial^i \psi_{\text{neq}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial^i \varphi}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] ; \mathbb{P}_{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right] ; \mathbb{P}_{\mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{et } \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} ; \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} ; \mathbf{S}_{\text{vol}} = \rho_0 J \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} ; \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 ; \mathbf{i}\dot{\bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 \quad \forall \mathbf{i} \end{array} \right. \quad (2.73)$$

2.4.2.2 Cas incompressible

La démarche pour arriver aux équations (2.75) et (2.74) est exactement la même que celle proposée § 2.3.5.3.

2.4.2.2.1 Configuration eulérienne

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} + \sum_{\mathbf{i}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\mathbf{i}} : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} - p\mathbf{1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \left[2\rho_0 \mathbf{V}^{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{B}^{\mathbf{i}}} \cdot \mathbf{V}^{\mathbf{i}} - \mathbf{R}^{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{i}T} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \frac{\partial^i \varphi}{\partial \mathbf{D}^{\mathbf{i}}} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{1}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \text{et } \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \mathbf{B}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\mathbf{i}} = 2\rho_0 \mathbf{B}^{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{B}^{\mathbf{i}}} ; \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = 2\rho_0 \mathbf{i}\mathbf{B} \cdot \frac{\partial^i \psi_{\text{neq}}}{\partial \mathbf{B}^{\mathbf{i}}} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{en respectant } \text{tr} \mathbf{D} = 0 ; \text{tr}^{\mathbf{i}} \mathbf{D}^{\mathbf{o}} = 0 \quad \forall \mathbf{i} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

2.4.2.2.2 Configurations lagrangienne et mixte

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \sum_{\mathbf{i}} 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \sum_{\mathbf{i}} 2\rho_0 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - p\text{cof}(\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial^i \psi_{\text{neq}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\mathbf{i}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial^i \varphi}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] ; \mathbb{P}_{\mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad \forall \mathbf{i} \\ \text{et } \mathbf{S}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} ; \boldsymbol{\pi}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 ; \mathbf{i}\dot{\bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{i}\bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 \quad \forall \mathbf{i} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

2.5 Conclusion

Ce chapitre part de la nécessité de se placer dans une démarche non-linéaire, due à la fois aux grandes déformations et au comportement hyper-élasto-dissipatif des matériaux étudiés (*cf.* chapitre 1). Il propose donc, dans un cadre isotherme – ou en tout cas où les effets sur la dissipation de la mécanique et de la thermique sont dissociés, ce cadre sera largement remis en question dans le chapitre 4 –, différents outils permettant la réalisation d'une telle modélisation.

Pour ce faire, nous partons des classiques premier et second principes de la thermodynamique, tous deux écrits dans les configurations lagrangienne, mixte et eulérienne. Sont alors choisies les deux premières variables d'état, J et $\bar{\mathbf{F}}$, obtenues par le découpage de la transformation \mathbf{F} en une partie isochore et une autre volumique. Par la suite $\bar{\mathbf{F}}$ est multiplicativement décomposée en deux transformations : une élastique $\bar{\mathbf{F}}_e$ et l'autre anélastique $\bar{\mathbf{F}}_a$, en utilisant la notion de configuration intermédiaire. Ceci, via des considérations d'isotropie et d'objectivité, donne alors le choix complet de nos variables d'état, $(J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a)$ et $(J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$ respectivement dans les cas lagrangien/mixte et eulérien. L'inégalité de Clausius-Duhem, puis le principe de normalité, nous permettent alors l'obtention complète des problèmes dans les différentes configurations⁹.

L'étude des milieux à plusieurs configurations intermédiaires est obtenue par l'extension de la démarche à un seul état intermédiaire. Cette approche se révélera précieuse dans le chapitre à venir car elle permettra d'introduire plusieurs phénomènes dissipatifs (élasto-plasticité, visco-élasticité. . .) et sera le point de départ d'une généralisation statistique du comportement visco-élastique (passage d'un modèle discret à n branches à un modèle continu à une infinité de branches).

Le cas particulier d'une transformation incompressible est aussi présenté dans ce chapitre, les équations régissant le comportement dans ce cadre sont alors vues comme un cas particulier du cadre général (*cf.* § 2.3.5.3 et § 2.4.2.2). Ces dernières pourront aussi être utilisées dans les chapitres suivants.

⁹L'intégralité des calculs utiles à l'obtention de ces derniers est donnée en annexes B et C.

Modèles et généralisation statistique

Les assemblages rhéologiques simples (*i.e.* faisant intervenir au plus un seul état intermédiaire) tels que les modèles de Zener, Poynting-Thomson, généralisés aux grandes déformations, appelés modèles “unitaires” dans ce chapitre, peuvent dans bien des cas refléter convenablement le comportement d’un élastomère, mais uniquement dans les gammes d’amplitudes et de vitesses de déformation ayant servi à leurs identifications. Ainsi, les influences non linéaires de ces deux grandeurs (*cf.* § 1.3.4 et 1.3.5) seront très difficiles à traduire pour un unique jeu de paramètres. De plus, une identification simple, mais à température négative (proche de ou inférieure à la température de transition vitreuse), deviendra un véritable écueil pour ces modèles.

Pour pallier ces problèmes, il est proposé une généralisation statistique des aspects visco-élastiques, portée à la fois par une fonction de répartition dépendant d’une variable statistique et des paramètres matériaux, aussi fonctions de cette dernière. Ceci permet alors une bonne prise en compte de l’influence de la fréquence. Enfin, l’extension du cadre visco-élastique-(statistique) à celui visco-élastique-(statistique)-élasto-plastique, comme le suggère *Olsson et Austrell (2001)*; *Miehe et Keck (2002)*, rendra possible une modélisation de l’effet Payne (*i.e.* influence de l’amplitude) et une meilleure transcription du comportement à basses températures.

En conclusion, pour chaque température (6 températures s’échelonnant entre -55°C et 70°C) un jeu de paramètres est identifié. Chacun d’entre eux rend alors possible, à la température d’identification, la prévision du comportement pour des sollicitations complexes (multi-harmoniques. . .) et couvrant de larges gammes d’amplitudes et de fréquences.

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1	Introduction	63
3.2	Modèles unitaires	65
3.2.1	Modèles visco-élastiques en configuration lagrangienne	65
3.2.1.1	Modèle de Zener	65
3.2.1.2	Modèle de Poynting-Thomson	65
3.2.1.3	Stratégie d'identification	66
3.2.1.4	Identification et comparaison des Modèles de Poynting-Thomson et Zener	67
3.2.2	Modèles élasto-(visco)-plastique en configuration eulérienne	70
3.2.2.1	Modèle élasto-plastique de type Z	71
3.2.2.2	Modèle de Bingham généralisé	72
3.3	Généralisation statistique visqueuse	75
3.3.1	Problématiques	75
3.3.2	Un modèle mésoscopique : un point de départ discret	75
3.3.3	Passage à un modèle continu	78
3.3.4	Choix des potentiels et des fonctions statistiques	80
3.3.5	Analyse de la branche statistique	80
3.3.6	Stratégie d'identification	82
3.3.7	Résultats	84
3.3.7.1	Importance de la branche élasto-plastique	84
3.3.7.2	Paramètres identifiés	84
3.3.7.3	Exemples de sollicitations complexes	85
3.4	Implémentation numérique	89
3.4.1	Introduction	89
3.4.2	Développement de modèles unitaires	89
3.4.2.1	Approche lagrangienne : prise en compte global du comportement	89
3.4.2.2	Apport de l'approche eulérienne	92
3.4.3	Modèle statistique, ajout d'une nouvelle discrétisation	98
3.5	Conclusion	101

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis d'établir, dans des configurations lagrangienne, mixte et eulérienne, les systèmes (2.48), (2.51) et (2.52) donnant la mesure des contraintes choisies en fonction des déformations globales ainsi que d'éventuelles variables internes et les lois d'évolutions de ces dernières. Ces lois ont été par la suite particularisées pour une transformation incompressible (2.58), (2.56) et (2.57). Toutes ces équations correspondent à une décomposition unique de $\bar{\mathbf{F}} (= \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a)$. Dans le cas d'une décomposition multiple, *i.e.* $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^i \cdot {}^i\bar{\mathbf{F}}$, les systèmes à résoudre sont (2.72) et (2.73) dans le cas compressible et (2.74) et (2.75) dans le cas incompressible.

Bien entendu, comme cela a pu être évoqué dans le paragraphe 2.3.6 et précisé pour une décomposition à un seul état intermédiaire dans le tableau 2.4, ces équations ne seront utilisables que si sont choisis les potentiels (énergies libres et pseudo-potential de dissipation) à conserver puis les formes à leurs donner. Nous proposons de réaliser cette démarche dans le présent chapitre.

Ainsi dans un premier temps seront présentés des modèles unitaires (unitaires car ne découlant de l'introduction que d'un seul état intermédiaire).

- Pour un matériau considéré incompressible (Silicone₂₀₀₀), seront comparés deux modèles visco-hyperélastiques : les modèles de Zener et de Poynting-Thomson. Une identification complète de ces derniers sera proposée. Les paramètres identifiés seront réutilisés dans le chapitre 4.
- Puis, dans un cadre compressible et de manière plus qualitative, seront développées les équations de modèles hyperélasto(-visco)-plastiques (ces résultats seront directement repris dans le paragraphe de généralisation statistique).

Par la suite, une décomposition multiple du gradient $\bar{\mathbf{F}}$ (voir figure 2.6) permettra d'appréhender des modèles rhéologiques multi-branches (*cf.* figure 2.7) qui seront généralisés à une infinité de branches par une opération statistique. Le(s) modèle(s) ainsi obtenu(s) est (sont) identifié(s) puis confronté(s) à de nombreuses validations telles que la bonne prise en compte de l'effet Payne, l'influence de la fréquence et la retranscription correcte de la réponse du matériau sous sollicitations harmoniques et ce pour un unique jeu de paramètres.

Enfin, quelques pistes de développement numériques seront présentées. Il est à noter que celles-ci seront largement complétées par les références bibliographiques idoines.

3.2 Modèles unitaires

3.2.1 Modèles visco-élastiques en configuration lagrangienne

REMARQUE 3.1

Le cadre **incompressible** est ici choisi, d'une part pour la relative simplicité d'écriture des équations et d'autre part car l'essai de double cisaillement mis en oeuvre dans la démarche d'identification est isochore. Le développement des modèles éléments finis des comportements qui va en découler se fera en s'aidant d'une formulation en lagrangien perturbé qui revient, sous certaines hypothèses, à considérer une très faible compressibilité du matériau (*i.e.* une quasi-incompressibilité plutôt qu'une incompressibilité).

De plus, seule l'écriture **lagrangienne** est présentée. Les calculs sont détaillés dans le paragraphe D.1 de l'annexe D.

On notera dans ce qui suivra :

$$W_{eq,i} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial I_i} ; W_{neq,i}^a = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial I_i^a} ; W_{neq,i}^e = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial I_i^e} \quad i \in \{1; 2\} \quad (3.1)$$

avec I_i, I_i^a et I_i^e respectivement les i -èmes invariants de \mathbf{C} , \mathbf{C}_a et \mathbf{C}_e .

3.2.1.1 Modèle de Zener

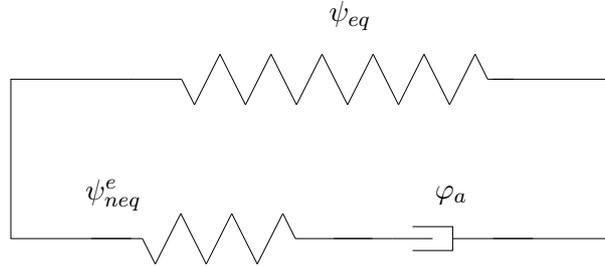


FIG. 3.1 – Modèle de Zener

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2 \left[W_{eq,1} \mathbf{C} - W_{eq,2} \mathbf{C}^{-1} + W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p \mathbf{C}^{-1} \\ \left[W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.2.1.2 Modèle de Poynting-Thomson

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2 \left[W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p \mathbf{C}^{-1} \\ \left[-W_{neq,1}^a \mathbf{C}_a + W_{neq,2}^a \mathbf{C}_a^{-1} + W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

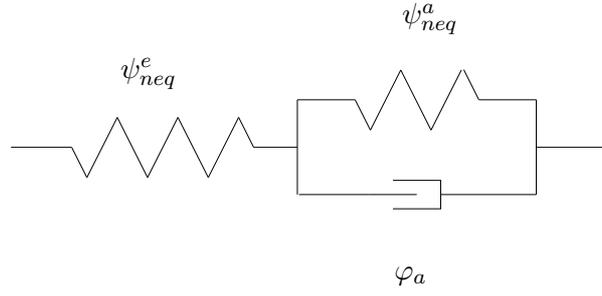


FIG. 3.2 – Modèle de Poynting-Thomson

3.2.1.3 Stratégie d'identification

En vue de tester la “robustesse” des deux modèles précédemment proposés, il est choisi d'identifier leurs paramètres et ainsi de juger de leurs capacités à rendre compte du comportement du Silicone₂₀₀₀ (cf. § 1.2.1). Pour ce faire, nous disposons des courbes expérimentales obtenues sur éprouvettes de double-cisaillement (FIG. 1.9), présentées en annexe A. Nous choisissons de travailler sur les essais réalisés à différentes températures, à déformation sinusoïdale imposée d'amplitude 50% et de fréquence de 3.5Hz. L'identification se fait semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®].

Nous prenons en compte les hypothèses suivantes :

- la rigidité de l'acier étant très supérieure à celle de l'élastomère, la déformation des mors est négligée,
- le cisaillement de l'élastomère est uniforme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

- le pseudo gradient visqueux est de la forme :

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} \gamma_{v11} & \gamma_v & 0 \\ 0 & \gamma_{v22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{v33} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

On définit les points expérimentaux par les $2 \times N$ couples déformation/contraainte (γ_i, τ_i) , avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{\gamma}_i < 0 \quad \forall i \in \{N \dots 2N\} \end{cases} \quad (3.6)$$

L'hystérésis définie par ces $2 \times N$ couples n'étant pas bijective, il est préférable de décomposer les résultats expérimentaux en deux parties bijectives. On adopte les définitions suivantes (figure 3.3) :

- la courbe moyenne entre la descente ($\dot{\gamma} < 0$) et la montée ($\dot{\gamma} \geq 0$) :

$$t_i = \frac{\tau_i + \tau_{2N-i}}{2} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (3.7)$$

- et l'écart entre ces deux courbes est :

$$d_i = \tau_i - \tau_{2N-i} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (3.8)$$

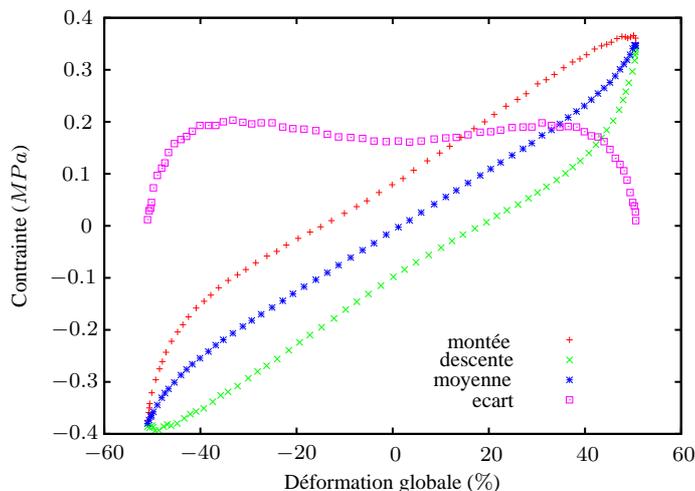


FIG. 3.3 – Découplage des courbes expérimentales.

L'identification des paramètres du matériau $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_n)$ peut se ramener à la minimisation de l'écart entre les courbes expérimentales (γ_i, t_i) , (γ_i, d_i) et leurs homologues théoriques. Cet écart peut être caractérisé par la distance des moindres carrés :

$$E(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t(X)|_{\gamma_i})^2 + \sum_{i=1}^n (d_i - d(X)|_{\gamma_i})^2} \quad (3.9)$$

On adopte l'algorithme de minimisation décrit figure 3.4.

3.2.1.4 Identification et comparaison des Modèles de Poynting-Thomson et Zener

REMARQUE 3.2

Les identifications présentées ci-après ont été réalisées sur des essais menés sur le Silicone₂₀₀₀ (voir § 1.2.1).

Par la suite, les équations (3.2) et (3.3) sont complètement explicitées par les choix suivant :

Modèles	Zener	Poynting-Thomson
$\rho_0 \psi_{eq}$	✓ (Gent-Thomas)	✗
$\rho_0 \psi_{eq}^e$	✓ (Néo-Hooke)	✓ (Gent-Thomas)
$\rho_0 \psi_{eq}^a$	✗	✓ (Néo-Hooke)
φ_a	✓ $(\frac{\eta}{2} \dot{C}_a : \dot{C}_a)$	✓ $(\frac{\eta}{2} \dot{C}_a : \dot{C}_a)$

TAB. 3.1 – Choix des différents potentiels pour les modèles de Zener et Poynting-Thomson en configuration lagrangienne.

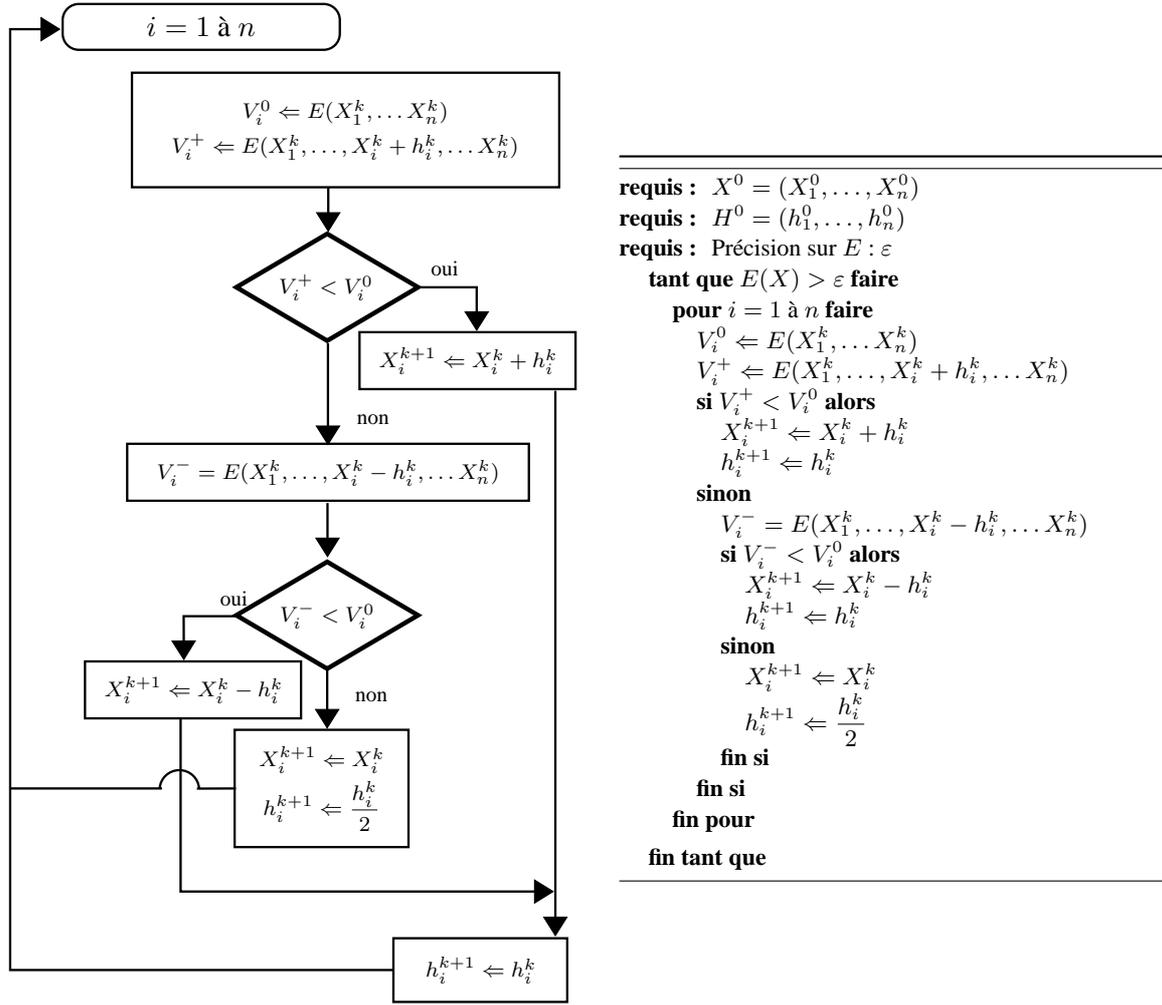


FIG. 3.4 – Algorithme d'identification des paramètres matériaux.

On rappelle que l'on a respectivement pour les potentiels hyperélastiques de Gent-Thomas et néo-Hooke :

$$\rho_o \psi(\mathbf{X}) = c_1 (I_1(\mathbf{X}) - 3) + c_2 \ln \frac{I_2(\mathbf{X})}{3} \quad (3.10)$$

et

$$\rho_o \psi(\mathbf{X}) = a_1 (I_1(\mathbf{X}) - 3) \quad (3.11)$$

3.2.1.4.1 Modèle de Zener

Les caractéristiques identifiées à 50% de cisaillement du modèle de Zener sont données TAB. 3.2. Pour ces paramètres, on compare sur la figure 3.5(a) les réponses expérimentale et numérique obtenues pour l'amplitude d'identification (*i.e.* 50%). À $T = 23^\circ\text{C}$, les évolutions de l'hystérésis, de la moyenne et de l'écart, numériquement obtenues pour des amplitudes de cisaillement allant de 10% à 50%, sont observées sur les figures 3.5(b), 3.5(c) et 3.5(d).

Deux des phénomènes attendus, inhérents à l'amplitude sont observés : un point anguleux au changement de signe de la sollicitation, ainsi qu'un raidissement dans la zone de sollicitation maximale (*cf.*

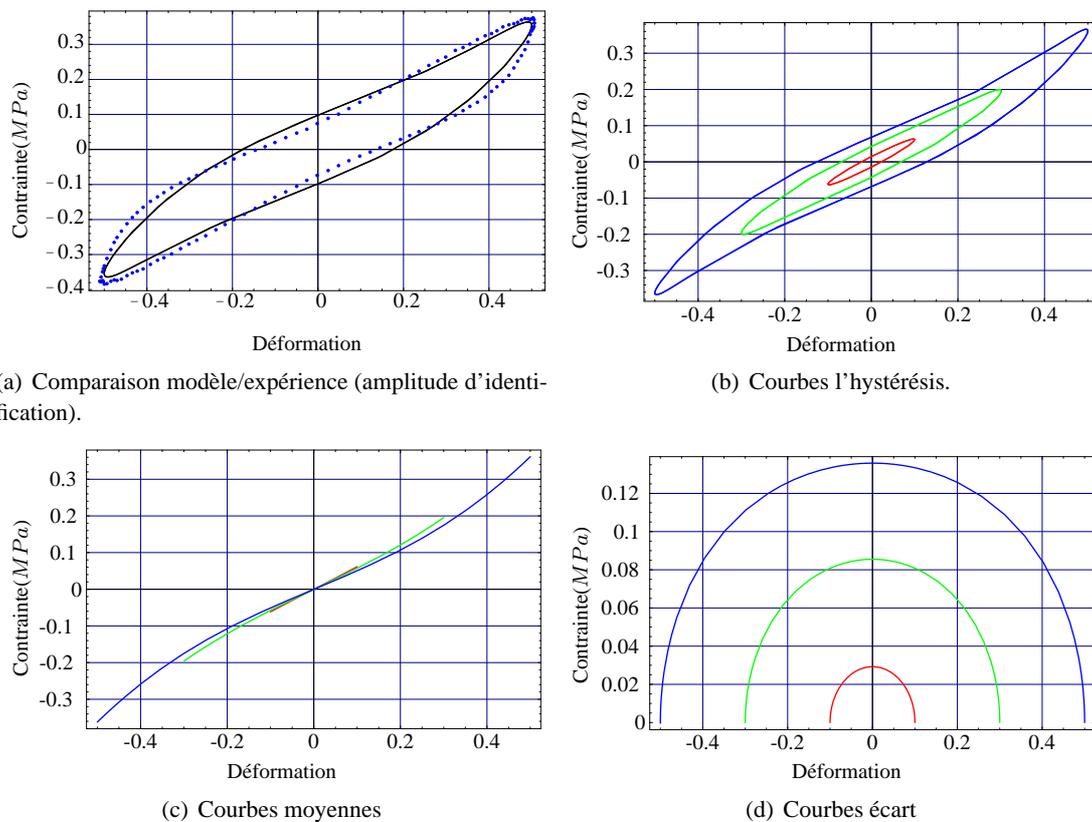


FIG. 3.5 – Résultats d'identification sur le modèle de Zener ; influence de l'amplitude sur les réponses du modèle (cisaillement 10%, 20%, 50%, $f = 3.5Hz$, $T = 23^{\circ}C$).

Températures	Gent-Thomas		Néo-Hooke	φ
	$c_1(MPa)$	$c_2(MPa)$	$a_1(MPa)$	$\eta(MPa.s)$
$23^{\circ}C$	1,02	-4,52577	0.790917	0.29898
$70^{\circ}C$	0.58	-2.95	0.66	0.39
$100^{\circ}C$	0.51	-2.76	0.68	0.58

TAB. 3.2 – Résultats d'identification - modèle de ZENER ($\gamma_0 = 50\%$, $f = 3.5Hz$).

FIG. 1.9). En revanche, ni étranglement, ni raidissement global pour des faibles valeurs de cisaillement ne sont constatés.

3.2.1.4.2 Modèle de Poynting-Thomson

À l'instar de celui de Zener, le modèle de Poynting-Thomson présente deux des phénomènes que l'on cherche à modéliser (cf. FIG. 1.9), à savoir le raidissement général de l'hystérésis pour les faibles taux de cisaillement global et l'étranglement de la courbe dans les zones de sollicitation proche de zéro. On constate, de plus, un léger raidissement de la courbe au changement de signe de la sollicitation (FIG. 3.6).

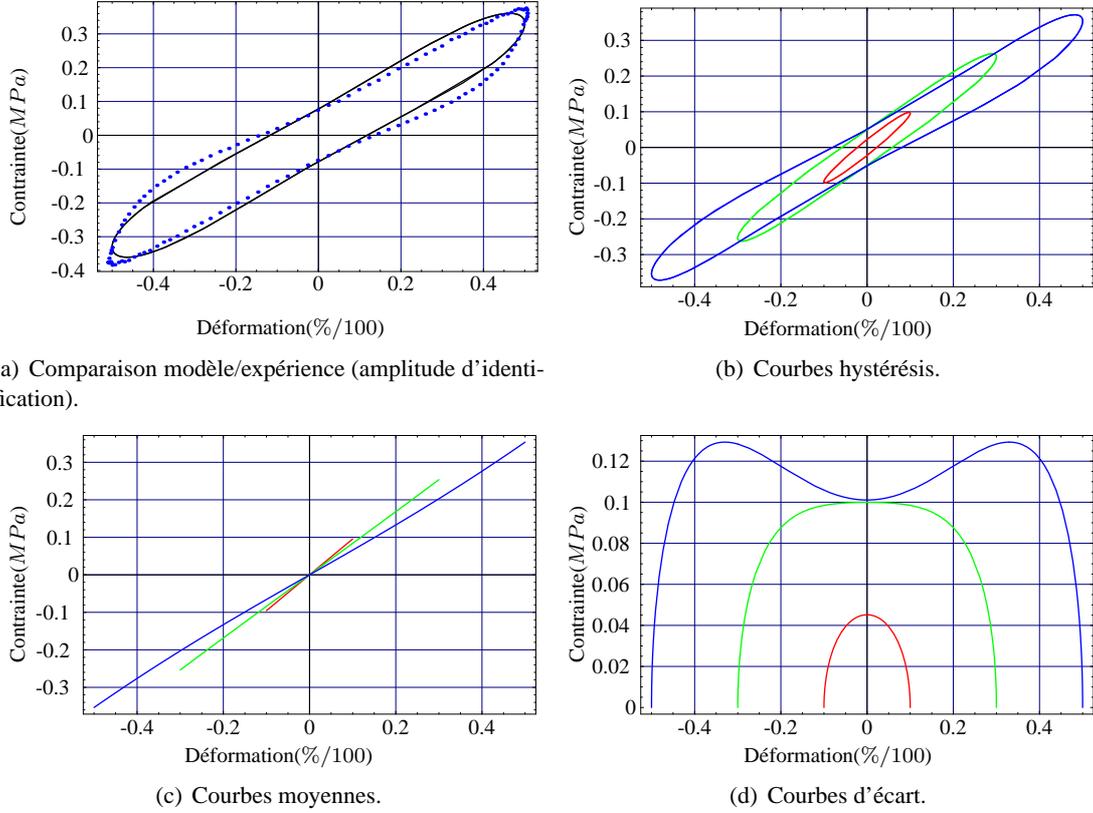


FIG. 3.6 – Résultats d'identification sur le modèle de Poynting-Thomson ; influence de l'amplitude sur les réponses du modèle (cisaillement 10%, 20%, 50%, $f = 3.5Hz$, $T = 23^\circ C$).

Températures	GENT-THOMAS		NÉO-HOOKE	φ
	$c_1(MPa)$	$c_2(MPa)$	$a_1(MPa)$	$\eta(MPa.s)$
$23^\circ C$	1.65851	-3.42677	0.0300972	0.0751336
$70^\circ C$	0.99	-1.92	0.06	0.08
$100^\circ C$	0.96	-1.84	0.08	0.10

TAB. 3.3 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON ($\gamma_0 = 50\%$, $f = 3.5Hz$).

3.2.2 Modèles élasto-(visco)-plastique en configuration eulérienne

Les modèles développés ci-dessous ne seront pas accompagnés d'une identification, contrairement à leurs homologues purement visco-hyperélastiques définis au paragraphe précédent. Ici, l'intérêt est de donner des "outils" utilisés par la suite, dans les paragraphes 3.3 et 3.4 de ce chapitre. Le cadre **compressible eulérien** est adopté (cf. § D.2 de l'annexe D pour les détails de calculs).

Ce paragraphe sera aussi l'occasion d'observer la simplicité des lois obtenues dans le cadre eulérien.

Par la suite, on adopte les notations :

$$W_{eq,i} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial I_i} ; W_{neq,i}^e = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial I_i^e} ; W_{neq,i}^a = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial I_i^a} \quad i \in \{1; 2\} \quad (3.12)$$

avec I_i, I_i^e et I_i^a respectivement les i -èmes invariants de $\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e$ et $\bar{\mathbf{B}}_a$.

3.2.2.1 Modèle élasto-plastique de type Z

En adaptant les équations générales (2.48) (complétées par la remarque 2.5) au modèle présenté en figure 3.7, puis en éliminant les différents potentiels nuls (*i.e.* ψ_{neq}^a et φ_0), il est assez simple¹ de montrer que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \bar{\mathbf{D}}_p^0} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le choix de φ_p se porte sur une forme classique (Boukamel, 2006) dans le cas où le mécanisme de plasticité est activé :

$$\varphi_p(\bar{\mathbf{D}}_p^0) = \chi \|\bar{\mathbf{D}}_p^0\| \quad (3.14)$$

avec χ un seuil de plasticité et $\|\cdot\|$ une norme des tenseurs d'ordre 2 et définie par $\|\cdot\| = \sqrt{\cdot : \cdot}$.

Finalement, il est obtenu :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D = \chi \frac{\bar{\mathbf{D}}_p^0}{\|\bar{\mathbf{D}}_p^0\|} \end{cases} \quad (3.15)$$

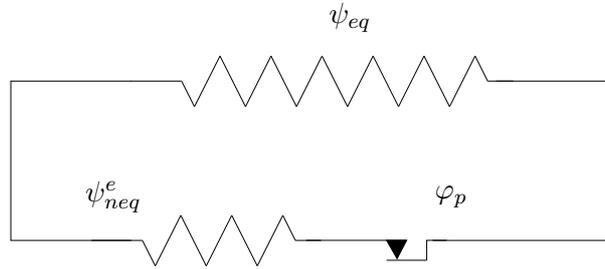


FIG. 3.7 – Modèle élasto-plastique unitaire (modèle Z).

¹C'est l'avantage majeur de l'écriture eulérienne qui permet d'écrire pratiquement les lois de comportement comme dans le cas d'assemblages rhéologiques sous l'hypothèse des petites perturbations.

REMARQUE 3.3

Dans le cas d'un modèle de Zener classique (*i.e.* visco-élastique) qui conduirait à, par exemple, un choix de potentiel de dissipation de forme quadratique :

$$\varphi_v = \frac{\eta}{2} \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}}^0 : \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}}^0 \quad (3.16)$$

seule la loi complémentaire (3.15-b) se trouverait modifiée, conduisant aux équations du comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right]^D = \eta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}}^0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Sous les mêmes hypothèses (*i.e.* cadre eulérien compressible, potentiel de dissipation défini par (3.16)), il en va de même pour le modèle Poynting-Thomson dont le comportement sera décrit par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right]^D = \eta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{v}}^0 + 2J^{-1} \left[\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}} \cdot \left[W_{neq,1}^a \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}} - W_{neq,2}^a \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}}^{-1} \right] \cdot \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}}^T \right]^D \end{cases} \quad (3.18)$$

Encore une fois l'établissement de ces lois est donné en annexe D.

3.2.2.2 Modèle de Bingham généralisé

L'étude du modèle de Bingham généralisé (FIG. 3.8) est sensiblement similaire à celle menée précédemment. La loi complémentaire (2.48-2) est réécrite sous sa forme duale, faisant intervenir la transformée de Legendre-Fenchel du potentiel de dissipation :

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{p}}^0 = \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD} \right) \quad (3.19)$$

avec

$$\varphi_p^* = \frac{\langle \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}\| - \chi \rangle^2}{\eta}, \quad (3.20)$$

χ, η étant respectivement un seuil de plasticité et une viscosité et $\langle \cdot \rangle$ définissant les crochets de Macaulay². Le comportement est alors obtenu par les équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \\ \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{p}}^0 = \frac{\langle \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}\| - \chi \rangle}{\eta} \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}\|} \text{ avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e = 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^{-1} \right] \end{cases} \quad (3.21)$$

²*i.e.* $\langle f \rangle = f$ si $f > 0$ et 0 sinon.

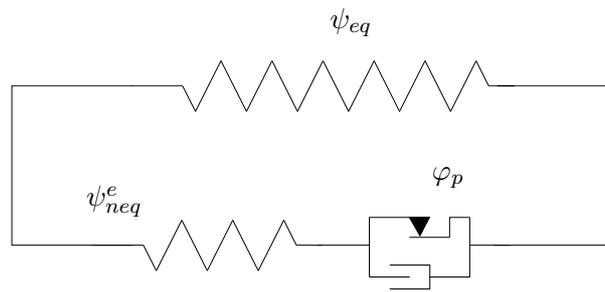


FIG. 3.8 – Modèle visco-élasto-plastique unitaire (modèle de Bingham généralisé).

REMARQUE 3.4

Le modèle de Bingham généralisé peut être utilisé afin de numériquement obtenir un modèle élasto-plastique. Il suffira pour cela de faire tendre la valeur de η vers 0. Ce paramètre matériau devient, dans ce cas, un paramètre numérique de régularisation d'algorithme (Martinez, 2005).

3.3 Généralisation statistique visqueuse

REMARQUE 3.5

Dans les différentes équations traduisant le comportement de notre matériau apparaîtront des termes qui concerneront la prise en compte d'un éventuel caractère élasto-plastique pour des interphases. Une **police orange** sera utilisée pour ces termes symbolisant qu'ils pourront être considérés ou non, en fonction de la modélisation ou non de l'interphase.

3.3.1 Problématiques

Trois des principales problématiques posées par nos partenaires industriels concernant la prévision du comportement des élastomères ont été (et continuent de l'être, par exemple au travers de la thèse de d'Alexis Delattre ([Delattre, soutenance prévue en 2015](#))) :

- modéliser l'effet Payne (*cf.* § 1.3.4),
- capter les effets de la fréquence (*cf.* § 1.3.5),
- prendre en compte l'influence de la température du milieu extérieur sur le comportement et ce, pour une gamme allant de -55°C à 100°C (*cf.* § 1.3.6.1).

Dans cette démarche, la température étant une variable d'état, il n'est pas gênant de faire dépendre les paramètres matériaux de cette dernière, il n'en va évidemment pas de même pour la fréquence (ou la vitesse de sollicitation) ou l'amplitude. Il nous faut donc obtenir un modèle, avec des jeux de paramètres identifiés à des températures variées couvrant la plage souhaitée – on ne parle donc pas encore de couplage thermo-mécanique car la température du matériau est supposée constante égale à celle de l'environnement – et capable de rendre compte des influences couplées de la fréquence et de l'amplitude du chargement. Adnane Boukamel ([Boukamel, 2006](#)) montre dans son manuscrit d'HDR la limite des modèles unitaires visco-élastiques qui, à une température donnée, ne peuvent reproduire ces phénomènes sur le Silicone₂₀₀₅. Sur ce dernier, il montre de plus qu'ils ne peuvent traduire le comportement à très basse température. Afin de combler ces lacunes, [Martinez et al. \(2011\)](#); [Boukamel et al. \(2005\)](#); [Martinez et al. \(2002, 2003\)](#); [Méo et al. \(2003, 2009b,a\)](#); [Martinez \(2005\)](#) proposent dans leurs travaux une généralisation statistique de modèles rhéologiques étendus aux grandes déformations.

3.3.2 Un modèle mésoscopique : un point de départ discret

Une vision mésoscopique du matériau telle que celle présentée par [Leblanc \(2003\)](#) amène à considérer le matériau comme composé de (voir [FIG. 3.9](#)) :

- de charges (sous forme d'agrégats ou d'agglomérats),
- d'une matrice élastomère extractible
- et d'une part de matrice (interphase) liée aux charges.

L'hypothèse de Voigt, pour ce milieu triphasé, permet de considérer que la déformation est la même dans les trois phases et qu'elle correspond à la déformation macroscopique.

Par la suite, on attribue ([FIG. 3.10](#)) :

- un comportement hyperélastique pour la matrice, (élément ressort),
- un comportement hyper-visco-élastique pour les inclusions, (modèle visco-élastique de Maxwell),
- **et éventuellement un comportement hyperélasto-plastique pour l'interphase (modèle de Saint-Venant)**³.

Enfin, si l'on considère qu'il existe plusieurs familles de charges (qui ont un même comportement, *i.e.* visco-hyperélastique, mais avec des paramètres différents), les figures [3.11\(a\)](#) ou [3.11\(b\)](#) peuvent

³on rappelle que dans ce chapitre une **police orange** correspond à un choix optionnel.

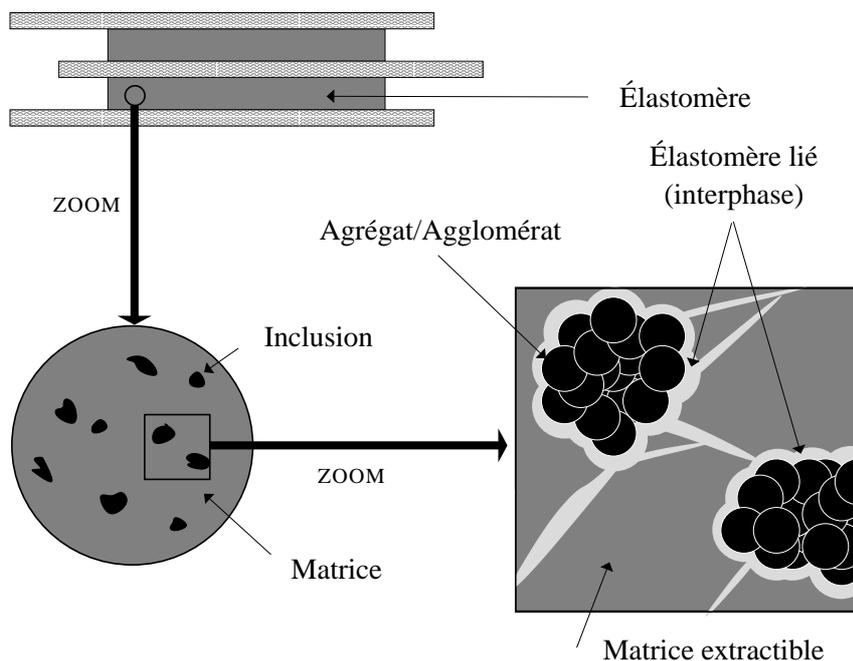


FIG. 3.9 – Vision "macro-meso" d'un élastomère chargé (Martinez, 2005).

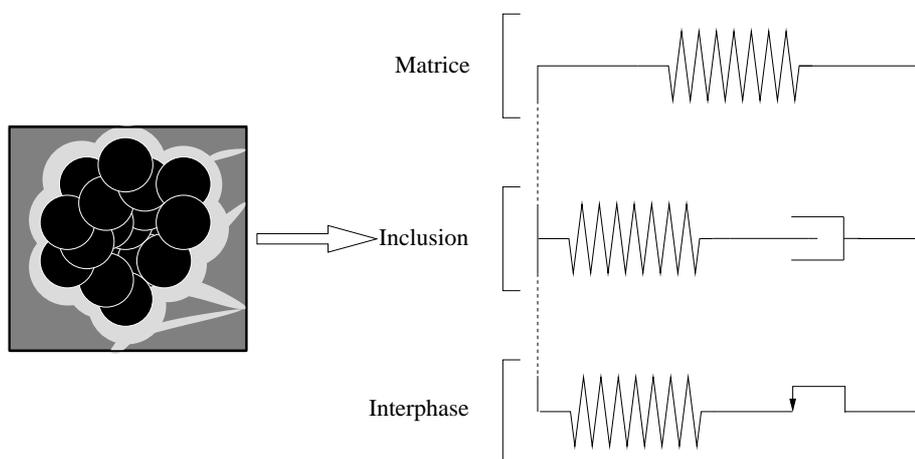
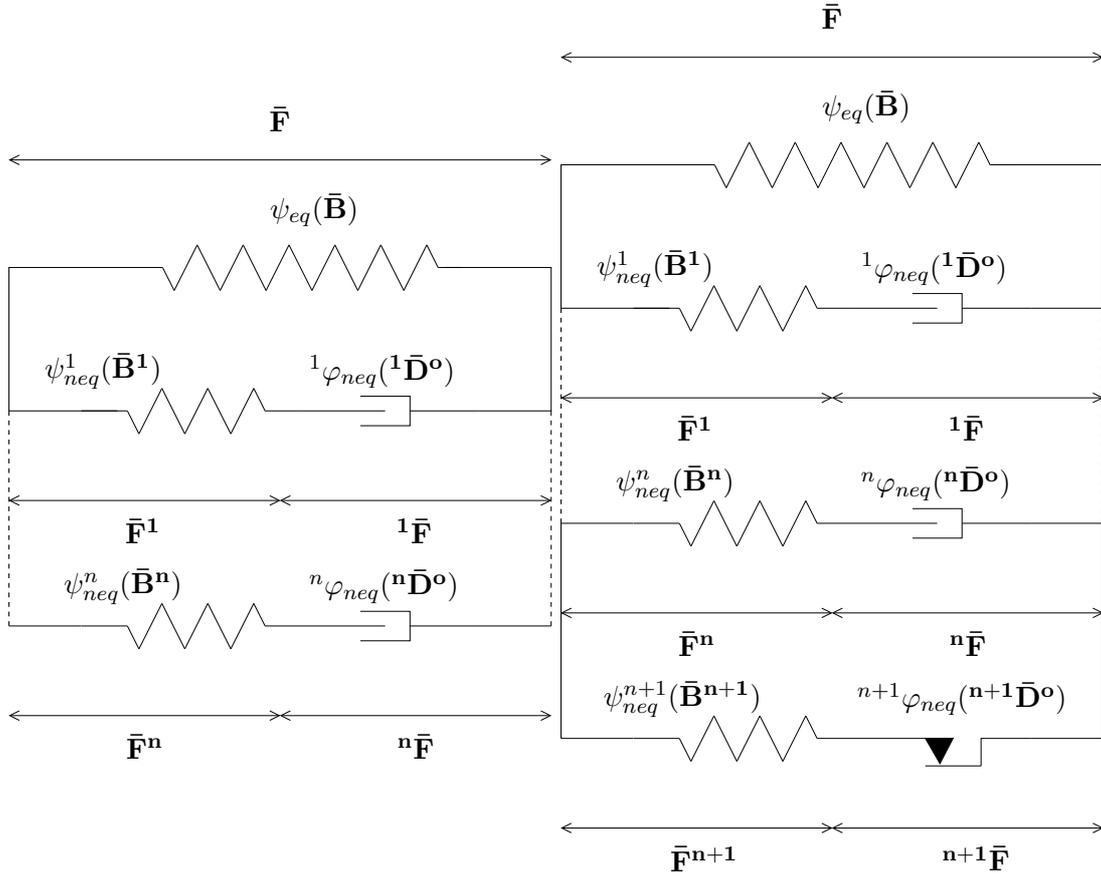


FIG. 3.10 – Interprétation rhéologique des trois phases de la représentation mésoscopique d'un élastomère (Martinez, 2005).

schématiser le comportement du matériau suivant que l'on attribue ou non à l'interphase une influence différente de celle de la matrice.

Les lois de comportements et d'évolution en configuration eulérienne compressible isotrope sont alors aisément⁴ obtenues en suivant (2.72) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \bar{\sigma}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\sigma}_{neq}^i : \mathbb{P}_1 + \sigma_{vol} \\ \bar{\sigma}_{neq}^i : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial^i \varphi}{\partial \bar{\mathbf{D}}^o} \quad \forall i \in \{1 \dots n+1\} \\ \text{avec } \mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \text{et } \bar{\sigma}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \sigma_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\ \bar{\sigma}_{neq}^i = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}^i}(\bar{\mathbf{B}}^i) \quad \forall i \in \{1 \dots n+1\} \\ (\bar{\sigma}_{neq}^{n+1} = \mathbf{0} \text{ pour le modèle décrit FIG. 3.11(a)}) \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr}^i \bar{\mathbf{D}}^o = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n+1\} \end{array} \right. \quad (3.22)$$



(a) Modèle rhéologique général étendu (sans prise en compte de l'interphase).

(b) Modèle rhéologique général étendu (prise en compte de l'interphase).

FIG. 3.11 – Représentations multi-branches du comportement rhéologique du matériau.

Dans le cas d'un choix de potentiels similaire à celui proposé § 3.2.2.1, à savoir :

– ψ_{eq} une fonction isotrope $\bar{\mathbf{B}}$,

⁴Il suffit de sommer à la contrainte hyperélastique les contributions des branches secondaires, comme nous l'aurions fait en h.p.p.

- ψ_{neq}^i une fonction isotrope $\bar{\mathbf{B}}^i \quad \forall i \in \{1 \dots n+1\}$,
- ${}^i\varphi = \eta_i {}^i\bar{\mathbf{D}}^o : {}^i\bar{\mathbf{D}}^o \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$,
- ${}^{n+1}\varphi = \chi \|{}^{n+1}\bar{\mathbf{D}}^o\|$ ou une définition duale d'un potentiel de dissipation visco-plastique avec une faible valeur de viscosité (voir l'équation (3.20) et la remarque 3.4),

et en s'appuyant sur (3.15) (3.17), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(W_{neq,1}^i \bar{\mathbf{B}}^i - W_{neq,2}^i \bar{\mathbf{B}}^{i-1} \right) \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^i \bar{\mathbf{B}}^i - W_{neq,2}^i \bar{\mathbf{B}}^{i-1} \right]^D = \eta_i {}^i\bar{\mathbf{D}}^o \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}^{n+1} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}^{n+1-1} \right]^D = \chi \frac{{}^{n+1}\bar{\mathbf{D}}^o}{\|{}^{n+1}\bar{\mathbf{D}}^o\|} \\ \text{en respectant } \text{tr}\bar{\mathbf{D}} = 0 ; \text{tr}{}^i\bar{\mathbf{D}}^o = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n+1\} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

3.3.3 Passage à un modèle continu

Les inconvénients majeurs des modèles auxquels nous aboutissons par la démarche du paragraphe 3.3.2 restent la détermination de n , le nombre de branches visco-élastiques nécessaires pour la bonne représentation du comportement du matériau et bien entendu l'identification des différents paramètres les définissant.

Pour pallier cette difficulté, on introduit une densité de probabilité, \mathcal{P} , dépendant d'une variable statistique ω et l'on définit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{neq}^{ep}(\bar{\mathbf{B}}_e^p) + \psi_{vol}(J) + \int_0^{+\infty} \psi_{neq}^{ev}(\omega, \bar{\mathbf{B}}_e^v(\omega)) \mathcal{P}(\omega) d\omega \\ \varphi = \varphi_{neq}^{ep}(\bar{\mathbf{D}}_p^0) + \int_0^{+\infty} \varphi_{neq}^{ev}(\omega, \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)) \mathcal{P}(\omega) d\omega \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Dans cette expression, on a :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e^p \cdot \bar{\mathbf{F}}_p = \bar{\mathbf{F}}_e^v(\omega) \cdot \bar{\mathbf{F}}_v(\omega) \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\quad (3.25)$$

$\bar{\mathbf{F}}_e^p, \bar{\mathbf{F}}_p, \bar{\mathbf{F}}_e^v(\omega), \bar{\mathbf{F}}_v(\omega), \psi_{neq}^{ev}, \psi_{neq}^{ep}, \varphi_{neq}^{ev}$ et φ_{neq}^{ep} ont respectivement des rôles similaires à $\bar{\mathbf{F}}^{n+1}, {}^{n+1}\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{F}}^i$ ($i \in \{1 \dots n\}$), ${}^i\bar{\mathbf{F}}$ ($i \in \{1 \dots n\}$), ψ_{neq}^i ($i \in \{1 \dots n\}$), $\psi_{neq}^{n+1}, {}^i\varphi$ ($i \in \{1 \dots n\}$) et ${}^{n+1}\varphi$. Les tenseurs $\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e^p, \bar{\mathbf{B}}_e^v(\omega)$ sont les tenseurs de Cauchy-Green gauche associés à $\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{F}}_e^p, \bar{\mathbf{F}}_e^v(\omega)$ (cf. (2.21) et (2.22)); $\bar{\mathbf{D}}_p^0, \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)$ sont les mesures objectives des vitesses de déformations associées à $\bar{\mathbf{F}}_p$ et $\bar{\mathbf{F}}_v(\omega)$ (cf. (2.39)).

Le modèle peut alors être représenté comme l'assemblage rhéologique donné FIG. 3.12, pour lequel une branche visco-élastique statistique remplace les n branches de Maxwell des modèles discrets décrits FIG. 3.11.

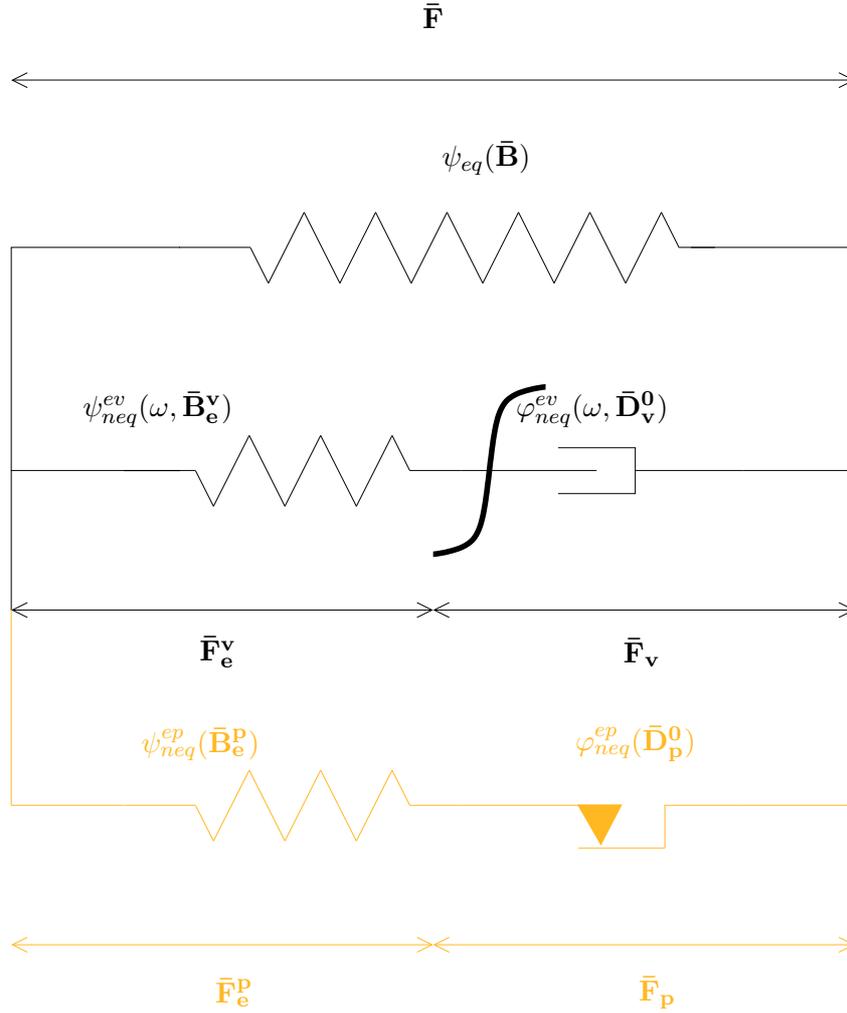


FIG. 3.12 – Modèle rhéologique statistique général étendu.

Les équations générales décrivant le comportement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^p : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \int_0^{+\infty} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^v(\omega) : \mathbb{P}_1 \mathcal{P}(\omega) d\omega \\
 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^p : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_{neq}^{ep}}{\partial \bar{\mathbf{D}}_p^0}(\bar{\mathbf{D}}_p^0) \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^v(\omega) : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_{neq}^{ev}}{\partial \bar{\mathbf{D}}_v^0}(\omega, \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)) \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\\
 \text{avec } \mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\
 \text{et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}) ; \boldsymbol{\sigma}_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\
 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^p = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^p \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^{ep}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e^p}(\bar{\mathbf{B}}_e^p) \\
 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^v = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^v(\omega) \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^{ev}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e^v}(\omega, \bar{\mathbf{B}}_e^v(\omega)) \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\\
 \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0 ; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_p^0 = 0 ; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[
 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

3.3.4 Choix des potentiels et des fonctions statistiques

L'état d'avancement de l'équation (3.26) ne demande plus qu'à choisir les différents potentiels (énergies libres ou pseudo-potentiels de dissipation) ainsi (et surtout, puisque c'est ici que réside l'originalité et la "richesse" du modèle) que des différentes fonctions statistiques ($\mathcal{P}(\omega)$ et celles intervenant dans ψ_{neq}^{ev} et φ_{neq}^{ev})

- pour la partie non statistique, sont choisies des énergies libres de type néo-Hooke pour ψ_{eq} et ψ_{neq}^{ep} et la forme définie en (3.14) pour φ_{neq}^{ep} :

$$\begin{aligned}\rho_0 \psi_{eq} &= C_1 (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) \\ \rho_0 \psi_{vol} &= \frac{\kappa}{2} (J - 1)^2 \\ \rho_0 \psi_{neq}^{ep} &= A_p (I_1(\bar{\mathbf{B}}_e^p) - 3) \\ \varphi_{neq}^{ep} &= \chi \|\bar{\mathbf{D}}_p^0\|\end{aligned}\quad (3.27)$$

- concernant la partie statistique, une forme de gaussienne centrée en 0 a été attribuée à la fonction de répartition :

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{2}{\Omega\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \quad (3.28)$$

Pour les potentiels, notre choix se porte, encore une fois, sur des modèles simples :

$$\begin{aligned}\psi_{neq}^{ev} &= G(\omega) (I_1(\bar{\mathbf{B}}_e^v(\omega)) - 3) \\ \varphi_{neq}^{ev} &= \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) : \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)\end{aligned}\quad (3.29)$$

avec

$$G(\omega) = G_0 \exp[\omega] \quad \text{et} \quad \eta(\omega) = \eta_\infty \left[\frac{\ln[\sqrt{\omega} + 1]}{\omega} + 1 \right]. \quad (3.30)$$

Il devient alors aisé de faire aboutir le modèle (3.26) à sa forme finale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 2J^{-1}C_0\bar{\mathbf{B}}^D + 2A_p J^{-1}\bar{\mathbf{B}}_e^{pD} + \int_0^{+\infty} 2G(\omega)J^{-1}\bar{\mathbf{B}}_e^{vD}(\omega)\mathcal{P}(\omega)d\omega + \underbrace{\kappa(J-1)}_p \mathbf{1} \\ 2A_p J^{-1}\bar{\mathbf{B}}_e^{pD} = \chi \frac{\bar{\mathbf{D}}_p^0}{\|\bar{\mathbf{D}}_p^0\|} \\ 2G(\omega)J^{-1}\bar{\mathbf{B}}_e^{vD}(\omega) = \eta(\omega)\bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\\ \text{en respectant } \text{tr}\bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr}\bar{\mathbf{D}}_p^0 = 0; \text{tr}\bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\end{array} \right. \quad (3.31)$$

3.3.5 Analyse de la branche statistique

Dans ses travaux de thèse, Jean-Marc Martinez (Martinez, 2005) propose une analyse macroscopique des différents choix statistiques précédemment proposés (cf. (3.28) (3.30)).

En traçant l'évolution des paramètres $G(\omega)$, $\eta(\omega)$ (FIG. 3.13(a)) et du temps caractéristique $\tau(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{G(\omega)}$ (FIG. 3.13(b)) – comme nous pourrions le faire dans le cas d'un modèle unitaire étudié en petites perturbations –, on constate que :

- si $\omega \rightarrow 0$ (i.e. $G \rightarrow G_0$ et $\eta \rightarrow \infty$), la partie statistique donne une réponse instantanée de module élastique G_0 ⁵.
- si $\omega \rightarrow \infty$ (i.e. $G \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow \eta_\infty$), c'est une réponse purement visqueuse de viscosité η_∞ qui est traduite par celle-ci⁵.
- Entre les deux, est balayée une infinité d'assemblages visco-élastiques de type Maxwell.

Ces différents comportements sont par la suite pondérés par $\mathcal{P}(\omega)$ comme le suggère la figure 3.14. Dans notre cas, notre choix s'est porté sur la forme donnée par l'équation (3.28), c'est-à-dire une gaussienne centrée en 0 favorisant donc le comportement élastique. Il serait envisageable de "décentrer" cette gaussienne ce qui favoriserait le temps de relaxation $\tau(\omega_0)$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}_1} e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\right)^2} \text{ avec } \mathcal{P}_1 = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\right)^2} d\omega \quad (3.32)$$

ou encore de combiner plusieurs pondérations favorisant deux populations distinctes de charges par exemple :

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}_2} \left(e^{-\left(\frac{\omega-\omega_1}{\Omega}\right)^2} + e^{-\left(\frac{\omega-\omega_2}{\Omega}\right)^2} \right) \text{ avec } \mathcal{P}_2 = \int_0^\infty \left(e^{-\left(\frac{\omega-\omega_1}{\Omega}\right)^2} + e^{-\left(\frac{\omega-\omega_2}{\Omega}\right)^2} \right) d\omega \quad (3.33)$$

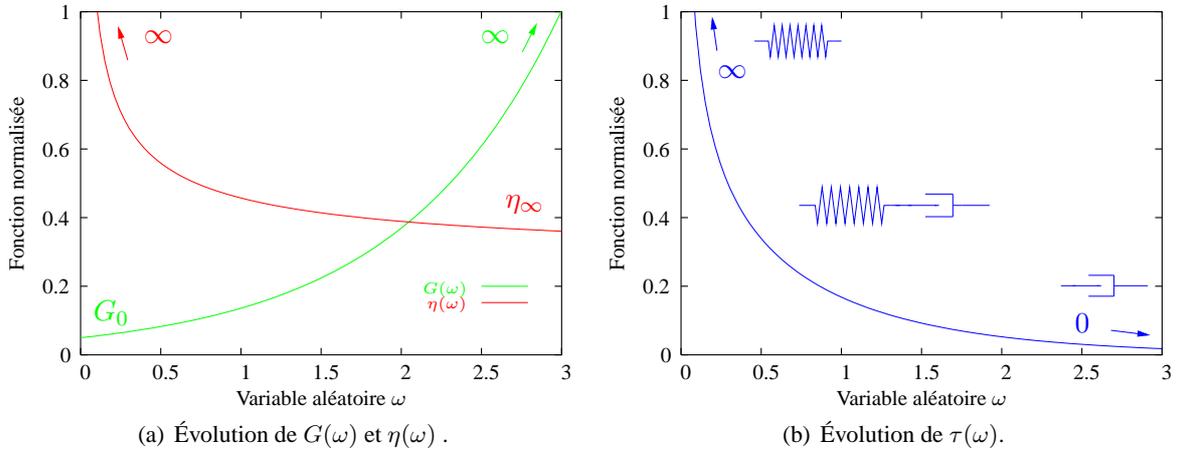


FIG. 3.13 – Représentation schématique des évolutions des caractéristiques $G(\omega)$, $\eta(\omega)$ et $\tau(\omega)$ suivant la variable aléatoire ω (Martinez, 2005).

⁵Si on considère un modèle de Maxwell (rigidité et viscosité respectivement notées k et η) soumis à une sollicitation harmonique de fréquence f , il est aisé de montrer que le module complexe d'un tel assemblage est :

$$\bar{E} = E' + iE''$$

avec

$$E' = \frac{\eta^2 k (2\pi f)^2}{k^2 + \eta^2 (2\pi f)^2} \quad E'' = \frac{\eta k^2 (2\pi f)}{k^2 + \eta^2 (2\pi f)^2}$$

Ainsi dans les cas

- $k \rightarrow k_0$ et $\eta \rightarrow \infty$ on a $E' \rightarrow k_0$ et $E'' \rightarrow 0$, i.e. $\bar{E} \rightarrow k_0$ (module complexe d'une élasticité simple)
- $k \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow \eta_\infty$ on a $E' \rightarrow 0$ et $E'' \rightarrow \eta_\infty (2\pi f)$, i.e. $\bar{E} \rightarrow i\eta_\infty (2\pi f)$ (module complexe d'une viscosité simple)

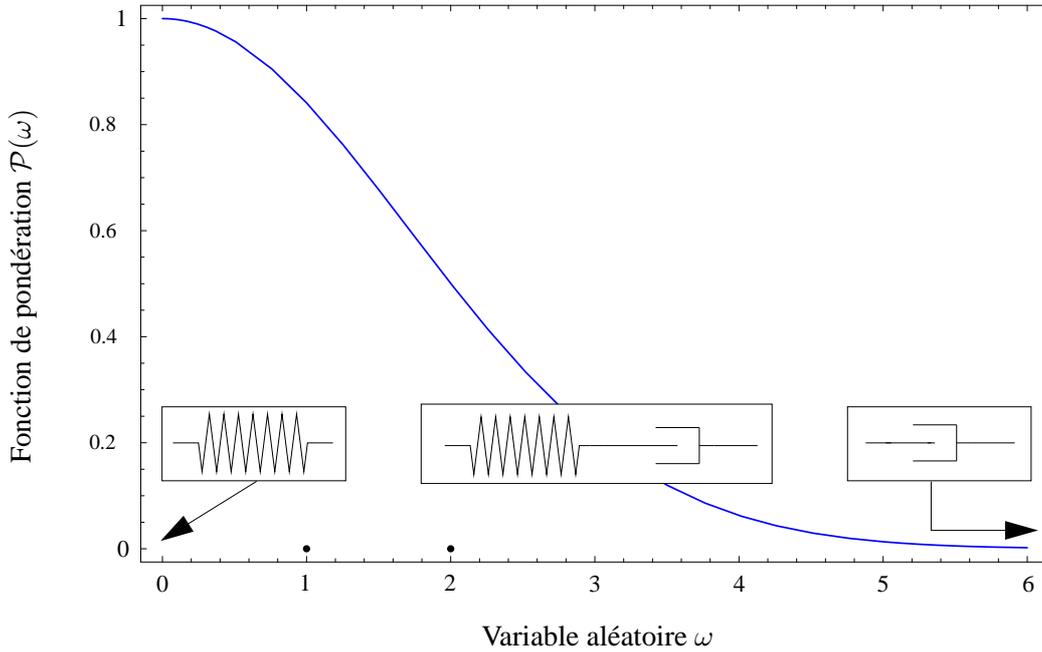


FIG. 3.14 – Observation schématique de la fonctionnelle de pondération $\mathcal{P}(\omega)$ suivant la variable aléatoire ω (Martinez, 2005).

3.3.6 Stratégie d'identification

REMARQUE 3.6

La stratégie d'identification qui va suivre a été réalisée sur des essais menés sur le Silicone₂₀₀₅ (voir § 1.2.2).

L'utilisation des équations (3.31) passe maintenant par l'identification des différents paramètres matériaux y intervenant, à savoir 1 paramètre déterministe (C_1) étendu à 3 si on considère une branche élasto-plastique (A_p et χ) et 3 paramètres statistiques (G_0 , η_∞ et Ω).

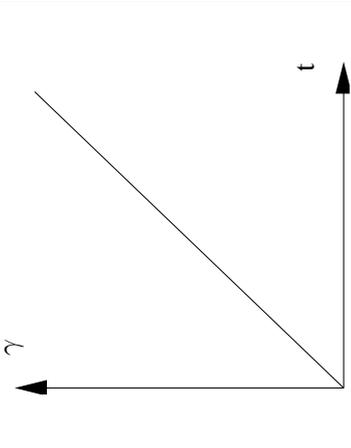
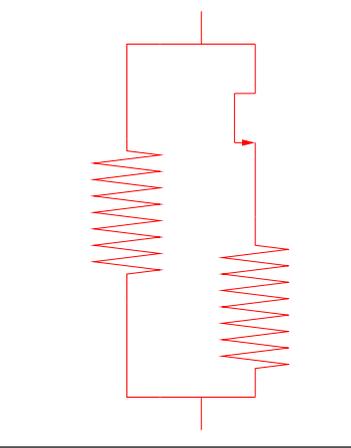
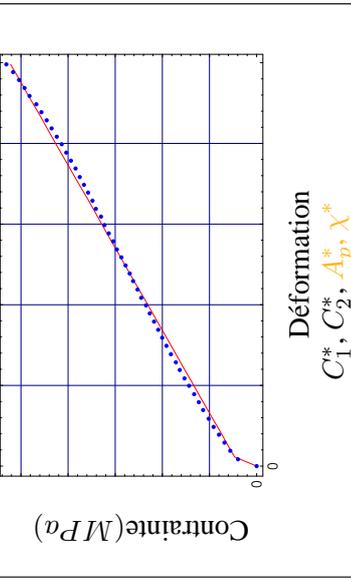
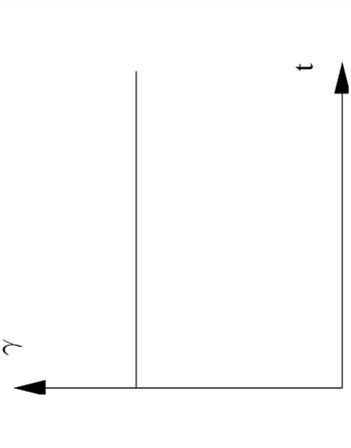
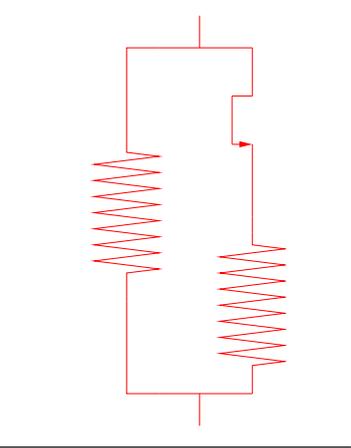
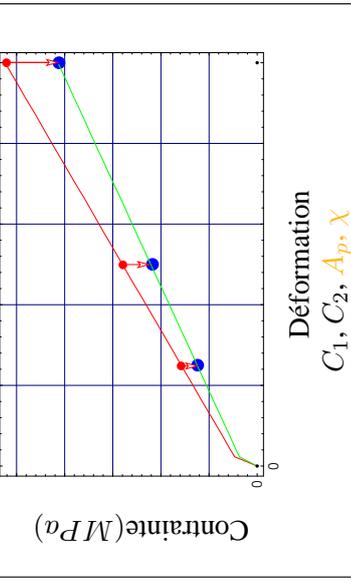
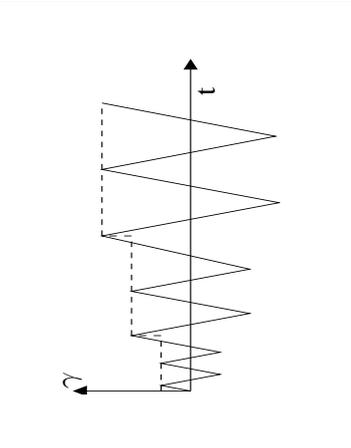
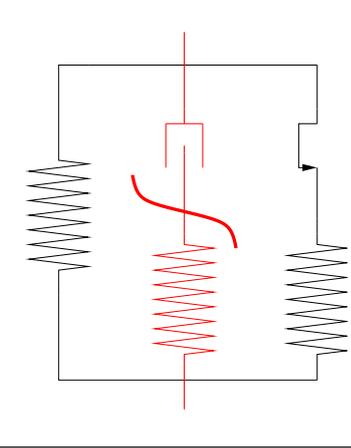
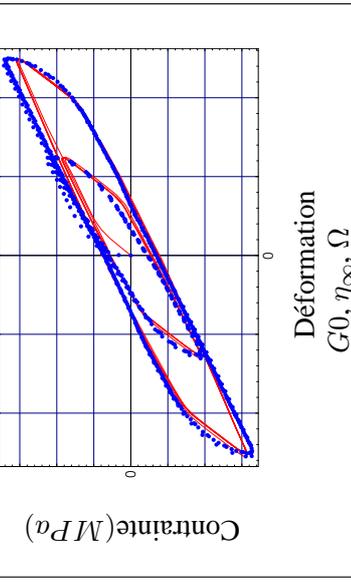
Chaque étape présentée par la suite correspond à la minimisation, via l'algorithme décrit FIG. 3.4, d'un écart des moindres carrés (3.34) définissant la distance entre des réponses expérimentales et semi-analytiques obtenues par le modèle, dans des cas de sollicitations de traction ($\pi_{11} = \sigma$) et de cisaillement ($\pi_{12} = \tau$).

$$E(\mathbf{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_T} \xi_i (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, \mathbf{X}))^2 + \sum_{i=1}^{N_S} \eta_i (\tau_i - \tau(\gamma_i, \mathbf{X}))^2}, \quad (3.34)$$

Ces étapes sont les suivantes :

1. Sur un essai de chargement monotone quasi-statique, on donne une première évaluation des paramètres C_1 , C_2 , A_p , χ respectivement notés C_1^* , C_2^* , A_p^* , χ^* .
2. Puis, au travers des essais de relaxation, une correction est amenée à cette prédiction. À cette étape, les paramètres déterministes sont considérés identifiés.
3. Enfin, à l'aide d'essais triangulaires cycliques à amplitude croissante, G_0 , η_∞ sont déterminés.

Cette procédure, schématisée dans le tableau 3.4, est répétée pour les différentes températures expérimentales permettant de décrire l'évolution des paramètres du modèle en fonction de cette variable.

Test	Chargement	Modèle	Paramètres
<p>Monotone cisaillement + traction</p>			 <p>Contrainte(MPa)</p>
<p>Relaxation cisaillement + traction</p>			<p>Déformation $C_1^*, C_2^*, A_p^*, \chi^*$</p>  <p>Contrainte(MPa)</p>
<p>Triangulaire $\gamma_i \nearrow$</p>			<p>Déformation C_1, C_2, A_p, χ</p>  <p>Contrainte(MPa)</p> <p>Déformation $G^0, \eta_{\infty}, \Omega$</p>

TAB. 3.4 – Procédure d'identification des paramètres du modèle statique.

3.3.7 Résultats

3.3.7.1 Importance de la branche élasto-plastique

Comme nous avons pu le voir précédemment, il est assez simple d'intégrer une branche élasto-plastique au modèle statistique (ajout des termes en police orange dans les équations du modèles (3.31)). Il est cependant logique de quantifier l'apport d'une telle intégration. Pour ce faire, deux identifications sont réalisées : l'une avec de la plasticité et l'autre sans. Les paramètres ainsi obtenus sont reportés dans les tableaux 3.6 et 3.5.

$C_1(MPa)$	$G_0(MPa)$	$\eta_\infty(MPa.s)$	Ω
0.39	0.0696	0.0272	2.23

TAB. 3.5 – Résultats d'identification du modèle statistique sans prise en compte de la plasticité ($T = 25^\circ C$).

$C_1(MPa)$	$A_p(MPa)$	$\chi(Mpa)$	$G_0(Mpa)$	$\eta_\infty(MPa.s)$	Ω
0.386	1.23	0.04	0.0614	0.063	1.56

TAB. 3.6 – Résultats d'identification du modèle statistique avec prise en compte de la plasticité ($T = 25^\circ C$).

Les figures 3.15 et 3.16 donnent alors les évolutions en fonction de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation de nos deux indicateurs : la dissipation sur un cycle stabilisé et la raideur moyenne de celui-ci dans des cas de sollicitations sinusoïdales (cf. FIG. 1.10 et FIG. 1.13). Nous constatons alors que :

- l'influence de la fréquence sur la raideur moyenne et la dissipation est prise en compte de manière correcte par les deux modèles (figures 3.15(a), 3.15(b), 3.16(a) et 3.16(b)),
- il en va de même pour l'amplitude du signal sur la dissipation (figures 3.15(d) et 3.16(d)).
- par contre, les graphiques 3.15(c) et 3.16(c) montrent clairement l'apport de cette branche pour la prise compte de la perte de rigidité avec l'augmentation de l'amplitude (*i.e.* effet Payne, voir § 1.3.4). Ce dernier phénomène étant un des trois des objectifs de modélisation que nous nous étions fixés (cf. § 3.3.1), la prise en compte de la branche élasto-plastique apparaît donc indispensable.

3.3.7.2 Paramètres identifiés

Le tableau 3.7 et la figure 3.17 récapitulent l'identification du modèle en donnant respectivement les paramètres en fonction de la température et leurs évolutions normalisées.

$T(^{\circ}C)$	$C_1(MPa)$	$A_p(MPa)$	$\chi(MPa)$	$a_0(MPa)$	$\eta_\infty(MPa.s)$	Ω
-55	0.538	2.424	0.107	0.151	0.14	1.56
-40	0.486	2.109	0.088	0.136	0.105	1.56
-25	0.451	1.767	0.075	0.121	0.096	1.56
25	0.386	1.23	0.04	0.0614	0.063	1.56
40	0.359	1.024	0.031	0.059	0.056	1.56
70	0.342	0.855	0.02	0.051	0.053	1.56

TAB. 3.7 – Paramètres identifiés lors de l'étape finale pour différentes températures.

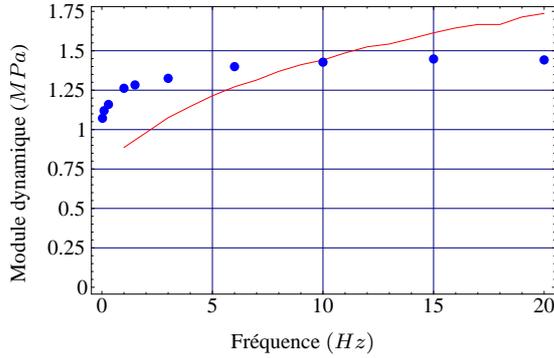
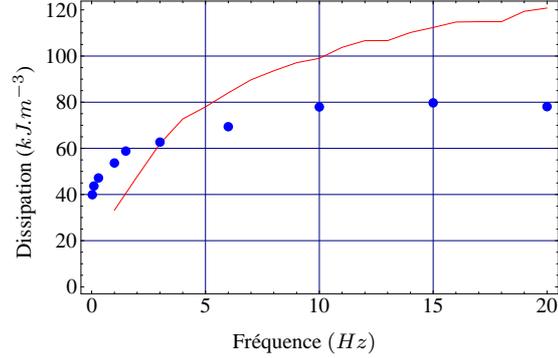
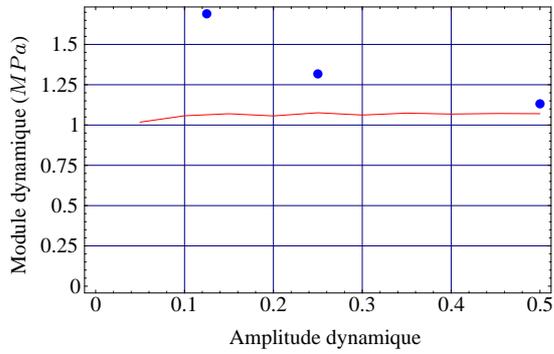
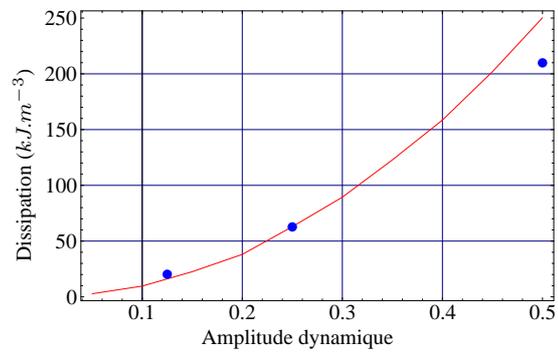
(a) Module suivant la fréquence ($\gamma_d = 25\%$).(b) Dissipation suivant la fréquence ($\gamma_d = 25\%$).(c) Module suivant l'amplitude ($f_r = 3Hz$).(d) Dissipation suivant l'amplitude ($f_r = 3Hz$).

FIG. 3.15 – Confrontation modèle statistique (sans plasticité)/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale (Martinez, 2005).

3.3.7.3 Exemples de sollicitations complexes

REMARQUE 3.7

Les résultats présentés ci-après ne sont qu'une petite partie des simulations réalisées par Jean-Marc Martinez après identification. Pour une description exhaustive, nous renvoyons le lecteur vers son manuscrit de thèse (Martinez, 2005).

Après avoir identifié les paramètres du modèle (un unique jeu pour une température donnée) sur des essais cycliques triangulaires, la cohérence du modèle est mise à l'épreuve sur :

- des sollicitations cycliques sinusoïdales à N harmoniques (voir FIG. 3.18(a) et FIG. 3.18(b) pour une simple harmonique, FIG. 3.18(c) et FIG. 3.18(d) pour une double harmonique et FIG. 3.18(e) pour une triple harmonique.)

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_{d_i} \sin(i2\pi f_r t)$$

- des sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation (FIG. 3.18(f) et 3.18(g)),

$$\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi f_r t)$$

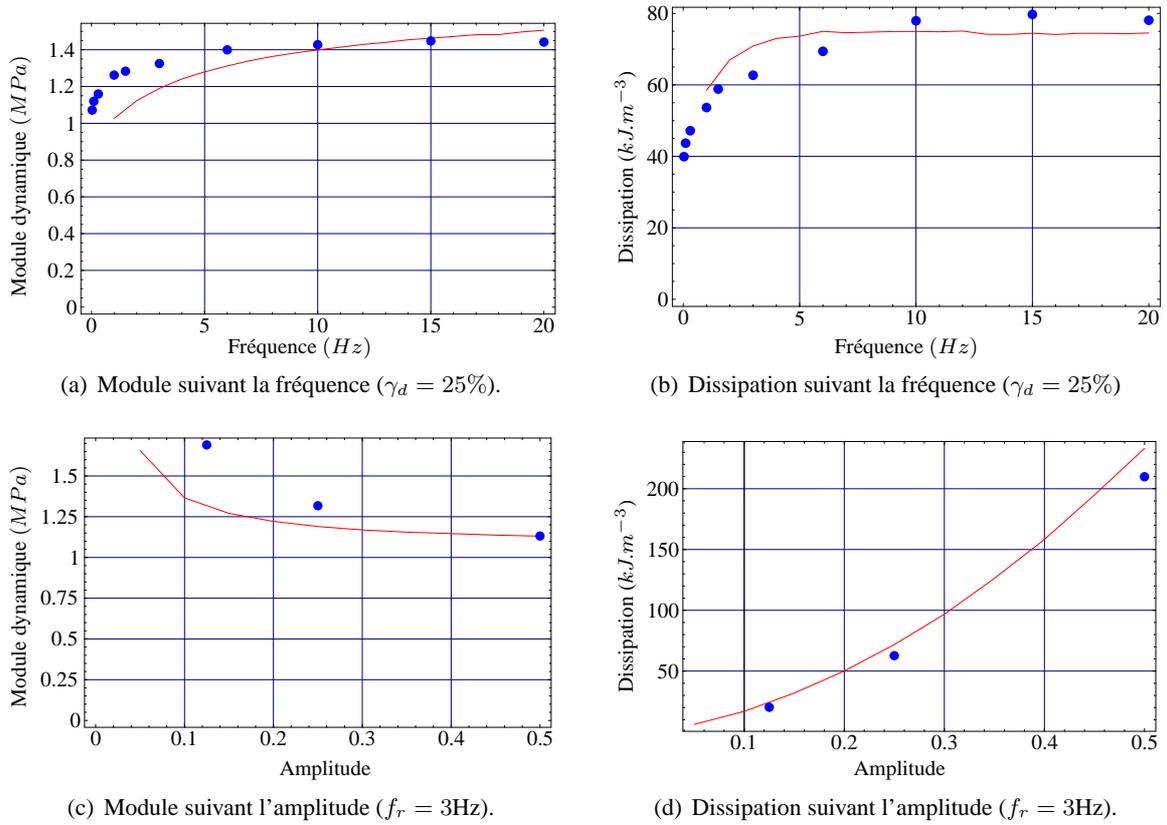


FIG. 3.16 – Confrontation modèle statistique (avec plasticité)/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale (Martinez, 2005).

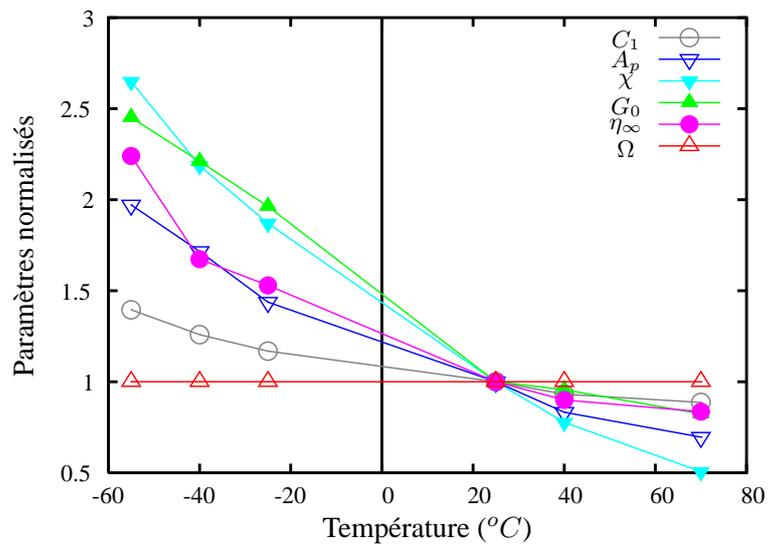


FIG. 3.17 – Évolutions normalisées des différents paramètres du modèle statistique en fonction de la température ($X_n(T) = X(T)/X(T = 25^{\circ}\text{C})$).

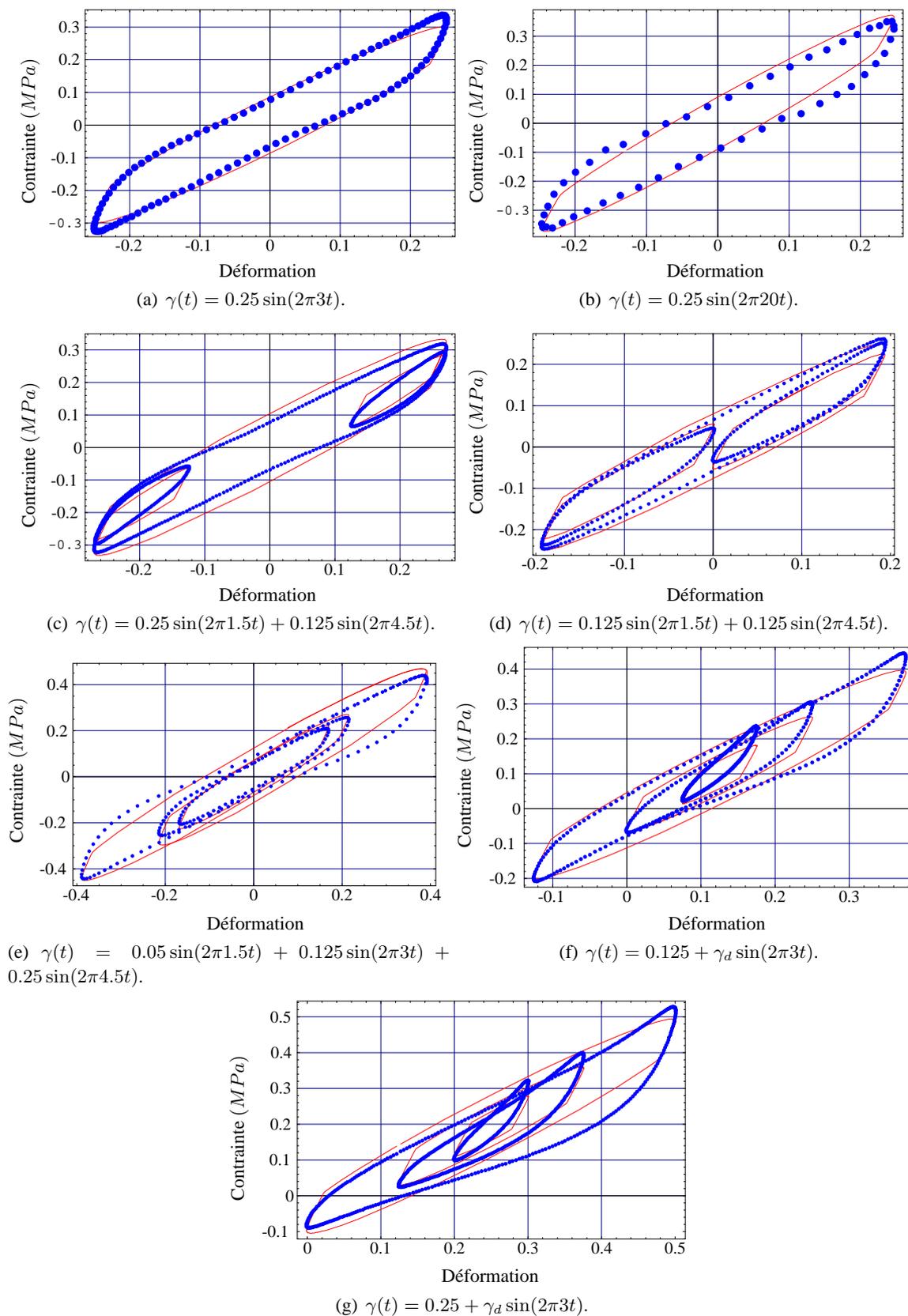


FIG. 3.18 – Résultats pour des chargements complexes. Tests réalisés sur éprouvette de double cisaillement.

3.4 Implémentation numérique

3.4.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans les paragraphes précédents, le comportement dissipatif des différents élastomères étudiés est abordé au travers de la généralisation aux grandes transformations de modèles rhéologiques. Chronologiquement, au début des années 2000, nous avons privilégié les approches lagrangiennes et/ou mixtes dans nos travaux (Méo, 1996; Boukamel et al., 1997; Méo, 2000b; Boukamel et al., 2001; Boukamel et Méo, 2001; Méo et al., 2002a) puis notre préférence est allée vers la description eulérienne (Boukamel et Méo, 2002; Martinez et al., 2002, 2003; Méo et al., 2003; Boukamel et al., 2005, 2008, 2009; Lejeunes et al., 2009; Méo et al., 2009a; Lejeunes et al., 2010, 2011; Martinez et al., 2011) car c'est elle qui établit l'analogie avec les assemblages rhéologiques sous l'hypothèse des petites perturbations (cf. § 2.3.5). Ceci permet des traitements séparés de la contribution élastique et élasto-dissipative et fait apparaître pour cette dernière un découplage des phénomènes dans le cas d'états intermédiaires multiples (voir les équations (2.72) et (2.74) respectivement pour les cas compressible et incompressible).

L'implémentation de modèles rhéologiques étendus au cadre des grandes déformations a été abordée dans la littérature. On peut citer les études de Simo (1988); Simo et Hugues (2000) traitant les problèmes élasto-plastiques en grandes déformations par un algorithme de retour radial, ceux de Reese et Govindjee (1998b) proposant un retour exponentiel pour les cas visco-élastiques. Par la suite, cette dernière stratégie a largement été utilisée (Dal et al., 2009; Areias et Matouš, 2008; Fancello et al., 2008; Nedjar, 2002).

Pour notre part, parallèlement aux deux voies empruntées dans la description du comportement (*i.e.* lagrangienne/mixte et eulérienne), deux stratégies de développement éléments finis s'appuyant sur une formulation variationnelle en lagrangien perturbé ont été proposées :

- le développement d'éléments finis 2D, numériquement stables prenant en compte les comportements de Zener et de Poynting-Thomson décrits en lagrangien incompressible (cf. § 3.2.1).
- la mise en place d'une famille complète d'éléments finis 2D et 3D, numériquement stables décrivant les lois compressibles des modèles Zener, Poynting-Thomson, Bingham généralisé et Z (voir respectivement les équations (3.17), (3.18), (3.21) et (3.15) du paragraphe 3.2.2)

Enfin, partant de la dernière approche, une proposition d'implémentation du modèle statistique a aussi été proposée introduisant une discrétisation de l'espace statistique venant s'ajouter aux découpages spatial et temporel.

3.4.2 Développement de modèles unitaires

3.4.2.1 Approche lagrangienne : prise en compte global du comportement

3.4.2.1.1 Position du problème

REMARQUE 3.8

Les travaux qui vont être décrits ci-après sont largement décrits dans les mémoires (Gabrieli, 1995; Méo, 1996, 2000b) ainsi que dans les articles Boukamel et al. (2001); Méo et al. (2002a). Pour une description complète nous renverrons donc le lecteur vers ces références.

L'approche propose de modéliser le comportement visco-hyperélastique du Silicone₂₀₀₀ (voir § 1.2.1), partant des descriptions lagrangiennes incompressibles décrivant les comportements des modèles de Zener et Poynting-Thomson données au travers des équations (3.2) et (3.3).

Le problème variationnel d'équilibre quasi-statique est résolu via une formulation en lagrangien perturbé (Carey et Oden, 1986; Lejeunes, 2006b). La solution d'équilibre (\mathbf{u}, p) vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_u^m(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \pi : \delta \mathbf{F} dV - \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{f}_v \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \\ \mathcal{W}_p^m(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \delta p (J - 1 - \alpha p) dV = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

pour tous $\delta \mathbf{u}$ et δp respectivement choisis dans les mêmes espaces que les solutions \mathbf{u} et p . α est un coefficient de perturbation strictement positif, qui quand il tend vers 0, fait tendre la solution (\mathbf{u}, p) vers la solution du problème incompressible.

Les développements numériques ont été réalisés en Fortran 77 sur le logiciel S.I.C. (Système Interactif de Conception) (Aunay, 1990). Il était principalement développé par l'Université de Technologie de Compiègne (UTC) et le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA). Les éléments finis (uniquement 2D) sont basés sur une formulation mixte en déplacement et pression. Les déplacements sont choisis continus entre chaque frontière élémentaire tandis que la pression y est discontinue afin d'en permettre une condensation statique⁶. Nous avons pris soin de positionner nos différentes formulations par rapport à la condition L.B.B. et d'autres tests de stabilité numérique (Crisfield et Norris, 2000; Oden et Kikuchi, 1982; Oden et al., 1982; Babuska et Narasimhan, 1997).

Cette bibliothèque d'éléments finis est couplée à un solveur non-linéaire basé sur la méthode de Newton-Raphson.

3.4.2.1.2 Modèles considérés et algorithme de résolution

Seuls les modèles de Zener et de Poynting-Thomson (Fig. 3.1 et 3.2) ont été traités au cours de ce travail. La figure 3.19 résume les choix des différents potentiels et leurs conséquences sur les équations décrivant les comportements établis § 3.2.1.

3.4.2.1.3 Lois d'écoulement

Au cours d'une itération du processus de Newton-Raphson, l'incrément de gradient étant donné, il apparaît clairement que dans les équations (3.39) et (3.41), la détermination de \mathbf{S} passe par la connaissance de la variable interne. Celle-ci est déterminée par les lois d'écoulement (équations différentielles en \mathbf{C}_a) directement obtenues des lois complémentaires :

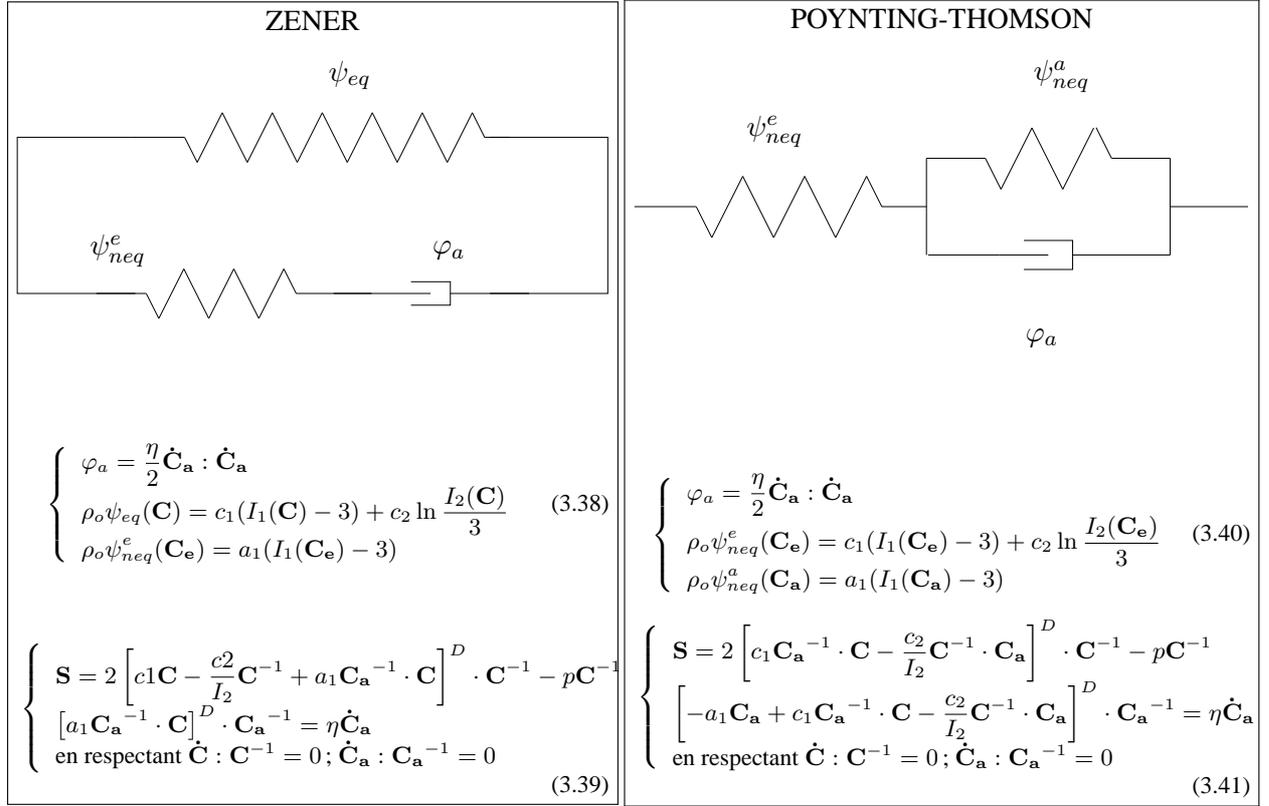
$$\begin{cases} [a_1 \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C}]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \eta \dot{\mathbf{C}}_a \text{ pour le modèle de Zener} \\ \left[-a_1 \mathbf{C}_a + c_1 \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - \frac{c_2}{I_2} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \eta \dot{\mathbf{C}}_a \text{ pour le modèle de Poynting-Thomson} \end{cases} \quad (3.36)$$

Elles peuvent toutes deux se résumer ainsi :

$$\dot{\mathbf{C}}_a(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{C}_a(t)) \quad (3.37)$$

Cette équation est résolue en chaque point d'intégration de l'élément, à l'aide du schéma classique d'Euler implicite sous divisant l'intervalle de temps de l'itération de Newton-Raphson considérée.

⁶Ainsi, malgré une formulation mixte le problème obtenu garde une taille identique à celle d'une formulation en déplacement pur.

FIG. 3.19 – Modèles lagrangiens (ou mixte via $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi}$) développés.

3.4.2.1.4 Opérateur tangent

Sur un plan plus technique⁷, la matrice tangente nécessaire au schéma numérique itératif adopté nécessite le calcul du module tangent

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{d\mathbf{F}} = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \mathbf{F}}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \mathbf{C}_a}}_{\textcircled{2}} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \mathbf{F}}}_{\textcircled{3}} \quad (3.42)$$

Les termes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ de (3.42) sont analytiquement obtenus à partir de (3.39-1) ou (3.41-1). La différenciation de (3.37) donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\mathbf{C}}_a}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{C}_a} : \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \mathbf{F}} \\ \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{C}}_a}{\partial \mathbf{F}} \right|_{t_{\text{début itération}}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.43)$$

qui permet d'obtenir $\textcircled{3}$ par un algorithme de Cranck-Nicholson. Ce dernier est réalisé avec la même sous-discretisation temporelle que celle mise en oeuvre dans l'algorithme d'Euler nécessaire à l'obtention de \mathbf{C}_a .

⁷Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers (Boukamel, 1988; Gabrieli, 1995; Méo, 2000b). Ce renvoi reste vrai pour l'intégralité de l'intégration numérique des modèles lagrangiens.

3.4.2.2 Apport de l'approche eulérienne

3.4.2.2.1 Principe

À la suite du travail de Jean-Marc Martinez (Martinez, 2005), pour lequel aucune mise en oeuvre éléments finis n'avait été proposée, une collaboration étroite s'est mise en place entre le LMA, au travers d'Adnane Boukamel et Stéphane Lejeunes, et le LMR.

Pour ce travail, c'est sur l'approche eulérienne des lois de comportement que notre choix se porte car elle fait apparaître un découplage complet (TAB. 3.8) entre une contribution hyperélastique (σ_{hyp}), à laquelle on fait porter la transformation volumique (*i.e.* \mathbf{F}_{vol} , voir (2.15)), une autre purement visqueuse (σ_{visco}) et d'éventuelles hyperélasto-dissipatives ($\bar{\sigma}_{\text{ed}}^i$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\bar{\sigma}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_1 + \sigma_{\text{vol}}}_{\sigma_{\text{hyp}}} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\bar{\sigma}_{\text{neq}}^i : \mathbb{P}_1}_{\bar{\sigma}_{\text{ed}}^i} + \underbrace{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}}}_{\sigma_{\text{visco}}} \quad (3.44)$$

Les lois complémentaires d'écoulement relatives à chaque variable interne sont :

$$\bar{\sigma}_{\text{ed}}^i = \bar{\sigma}_{\text{neq}}^i : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial^i \varphi}{\partial^i \mathbf{D}^0} + \left[\bar{\mathbf{R}}^i \cdot {}^i \bar{\sigma}_{\text{neq}} \cdot \bar{\mathbf{R}}^{iT} \right] : \mathbb{P}_1 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (3.45)$$

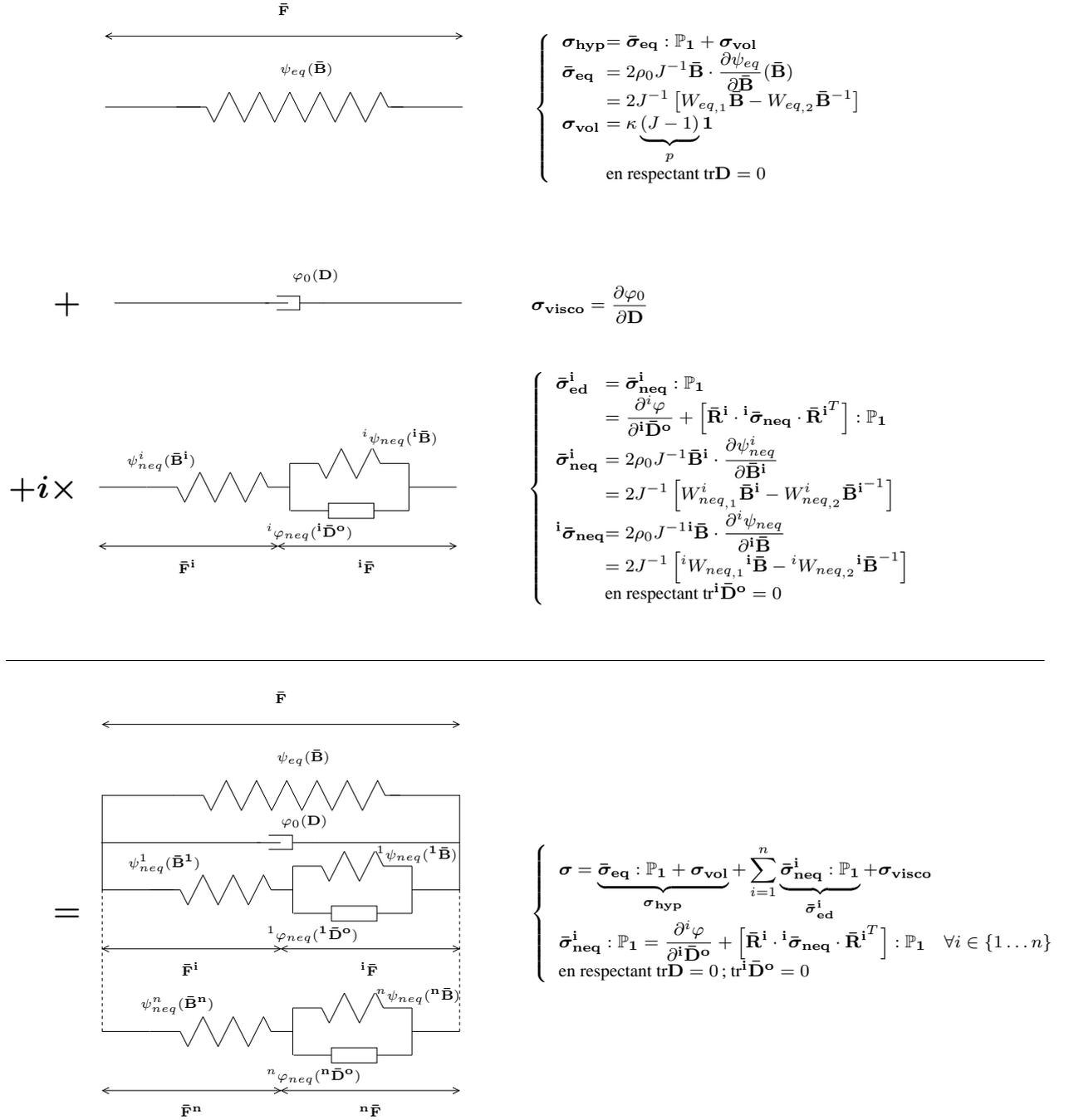
avec $\bar{\sigma}_{\text{eq}}$, σ_{vol} , $\bar{\sigma}_{\text{neq}}^i$, ${}^i \bar{\sigma}_{\text{neq}}$ définis (2.72) ou TAB. 3.8.

Le point de départ de tous nos développements est le travail de Stéphane Lejeunes (Lejeunes, 2006b) qui a proposé et implémenté une classe complète d'éléments finis hyperélastiques (*i.e.* notre première branche) dans le code ZéBuLoN (Foerch et al., 1997). L'ensemble de ces développements étant réalisé en C++, nos différents comportements hyperélasto-dissipatifs peuvent être mis en place en héritant (au sens C++) des classes hyperélastiques déjà existantes et en les traitant de manière découplée. Ce traitement revient pour chaque branche à la résolution d'une loi d'écoulement donnant l'évolution temporelle de la variable interne (*i.e.* $\bar{\mathbf{B}}^i$) la caractérisant et au calcul de l'opérateur tangent qui lui est associé. Via (3.44), l'opérateur tangent global se met sous la forme :

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\text{hyp}} + \mathbb{T}_{\text{visco}} + \sum_{i=1}^n \mathbb{T}_{\text{ed}}^i \quad (3.46)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\text{hyp}} &= \frac{d\boldsymbol{\pi}_{\text{hyp}}}{d\mathbf{F}} \quad \text{avec } \boldsymbol{\pi}_{\text{hyp}} = J\boldsymbol{\sigma}_{\text{hyp}} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbb{T}_{\text{visco}} &= \frac{d\boldsymbol{\pi}_{\text{visco}}}{d\mathbf{F}} \quad \text{avec } \boldsymbol{\pi}_{\text{visco}} = J\boldsymbol{\sigma}_{\text{visco}} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbb{T}_{\text{ed}}^i &= \frac{d\bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{ed}}^i}{d\mathbf{F}} \quad \text{avec } \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{ed}}^i = J\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{ed}}^i \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

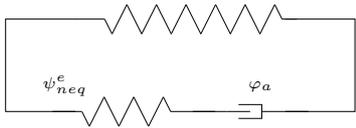
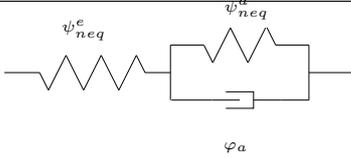
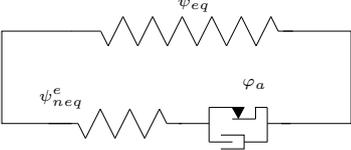


TAB. 3.8 – Représentation schématique du découplage additif des contraintes (*i.e.* σ) en configuration eulérienne.

3.4.2.2.2 lois d'écoulement

C'est dans le contexte précédemment présenté que les modèles unitaires de Zener, Poynting-Thomson et Bingham ont été développés. Les équations qui régissent ces modèles en configuration eulérienne ont

respectivement été proposées en (3.17) (3.18) et (3.21). Le tableau 3.9 récapitule pour ces trois modèles l'expression de la contrainte de Cauchy ainsi que la forme adoptée de la loi d'écoulement, ces dernières étant établies en annexe § D.2.3.

		Zener	Poynting-Thomson
Représentation			
Comportement		$\begin{cases} \sigma = 2J^{-1} [W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}} - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e \\ - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]^D + \sigma_{vol} \\ 2J^{-1} [W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]^D = \eta \bar{\mathbf{D}}_v^0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sigma = 2J^{-1} [W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]^D + \sigma_{vol} \\ 2J^{-1} [W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]^D \\ = \eta \bar{\mathbf{D}}_v^0 + 2J^{-1} [\bar{\mathbf{R}}_e \cdot [W_{neq,1}^a \bar{\mathbf{B}}_a - W_{neq,2}^a \bar{\mathbf{B}}_a^{-1}] \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T]^D \end{cases}$
Écoulement		$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (1 : \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{2}{\eta} \bar{\sigma}_{neq}^D \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (3.48)$	$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = & \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (1 : \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{2}{\eta} \bar{\sigma}_{neq}^D \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \\ & + \frac{4}{\eta J} W_{neq,1}^a \left[\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_e \right] \\ & + \frac{4}{\eta J} W_{neq,2}^a \left[\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}}^{-1} : \bar{\mathbf{B}}_e) \bar{\mathbf{B}}_e \right] \end{aligned} \quad (3.49)$
Bingham			
Représentation			
Comportement		$\begin{cases} \sigma = 2J^{-1} [W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]^D + \sigma_{vol} \\ \bar{\mathbf{D}}_p^0 = \frac{\langle \ \bar{\sigma}_{neq}^D\ - \chi \rangle}{\eta} \frac{\bar{\sigma}_{neq}^D}{\ \bar{\sigma}_{neq}^D\ } \end{cases}$	
Écoulement		$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (1 : \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - 2 \frac{\langle \ \bar{\sigma}_{neq}^D\ - \chi \rangle}{\eta} \frac{\bar{\sigma}_{neq}^D}{\ \bar{\sigma}_{neq}^D\ } \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (3.50)$	

TAB. 3.9 – Modèles unitaires développés en approche eulérienne et lois d'écoulement associées (avec $\bar{\sigma}_{neq}^e = 2J^{-1} [W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}]$).

Les résolutions des lois d'écoulement (3.48), (3.49) et (3.50) peuvent être menée via trois stratégies. Une première, directe, s'appuyant par un schéma direct de Runge-Kutta-Fehlberg (Fehlberg, 1969) est proposée⁸.

Une autre s'inspirant des algorithmes de prédiction-correction est mise en place. Une prédiction $\bar{\mathbf{F}}_e^*$ de $\bar{\mathbf{F}}_e$ est faite à chaque début d'itération de Newton-Raphson :

$$\mathbf{F}_e^* = \bar{\mathbf{F}}(t) \cdot \bar{\mathbf{F}}_{a|n} \quad (3.51)$$

⁸Par la suite cet algorithme sera désigné sous l'acronyme RKF

avec $\bar{\mathbf{F}}_{a|n}$ la valeur de $\bar{\mathbf{F}}_a$ à la dernière itération convergée. Puis afin de “corriger” \mathbf{F}_e^* , $\bar{\mathbf{B}}_e$, le tenseur de Cauchy-Green gauche associé à la solution, est supposé décomposable :

$$\bar{\mathbf{B}}_e = b(t)\mathbf{N} + s(t)\mathbf{1} \quad (3.52)$$

ou \mathbf{N} est un tenseur sphérique normalisé.

Ainsi décomposé, $\bar{\mathbf{B}}_e$ est réintroduit dans les différentes lois d’écoulement, permettant d’aboutir à un système différentiel du premier ordre à deux équations et deux inconnues $(b(t), s(t))$ qui peut être résolu par un algorithme d’Euler implicite⁹.

Enfin, une variante de l’algorithme précédent consistant à linéariser¹⁰ $b(t)$ et $s(t)$ autour de la dernière solution convergée $(b(t_n), s(t_n))$, est aussi développée :

$$\begin{cases} b(t) = b(t_n) + \delta b(t) \\ s(t) = s(t_n) + \delta s(t) \end{cases} \quad (3.53)$$

C’est sous cette forme qu’est réintroduit $\bar{\mathbf{B}}_e$ dans les lois d’écoulement ou les termes d’ordre 2 sont négligés. Une fois encore un système différentiel du premier ordre est obtenu :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\delta b} \\ \dot{\delta s} \end{Bmatrix} = [A(t)] \begin{Bmatrix} \delta b \\ \delta s \end{Bmatrix} + \{C(t)\} \quad (3.54)$$

$\delta b(t_{n+1})$ et $\delta s(t_{n+1})$ (ou t_{n+1} est le temps de fin de la nouvelle itération) peuvent alors être évaluées :

– soit de manière semi-analytique par :

$$\begin{Bmatrix} \delta s(t_{n+1}) \\ \delta b(t_{n+1}) \end{Bmatrix} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{[\Omega(t_{n+1}-s)]} \{C(s)\} ds \quad (3.55)$$

ou $\Omega(t)$ est une série de Magnus (Iserles. et al., 1999) :

$$\Omega(t) = \int_{t_n}^t A(s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t [A(s), \int_{t_n}^s A(s1) ds1] ds + \frac{1}{4} \int_{t_n}^t [A(s), \int_{t_n}^s [A(s1), \int_{t_n}^s A(s2) ds2] ds1] ds + \dots \quad (3.56)$$

avec $[X, Y] = XY - YX$.

– soit de manière numérique en supposant $[A(t)]$ et $\{C(t)\}$ constants sur l’itération et égaux à leurs valeurs à t_n .

REMARQUE 3.9

Une description complète des schémas numériques précédemment évoqués est présentée dans (Boukamel et al., 2008; Lejeunes et al., 2009, 2010, 2011).

De plus, tout comme dans le cas lagrangien, les détails de calcul des opérateurs tangents ne sont pas donnés dans ce manuscrit. Pour le calcul des opérateurs tangents hyperélastiques (\mathbb{T}_{hyp}) le lecteur est renvoyé vers (Lejeunes, 2006b) et pour ceux liés aux comportement élasto-dissipatif (\mathbb{T}_{ed}), il est renvoyé vers les articles précités dans cette remarque.

⁹D’où le nom choisi pour ce schéma : BETS pour Backward Euler Time Stepping.

¹⁰Expliquant la désignation choisie pour ce schéma : LBETS pour Linearized Backward Euler Time Stepping.

3.4.2.2.3 Exemple

L'exemple traité par la suite porte sur la modélisation d'une éprouvette diabolo dont les dimensions sont données FIG. 3.20(a) et sur laquelle est appliquée le chargement suivant :

$$u = u_0 + u_0 \sin(2\pi ft) \text{ avec } f = 3Hz \text{ et } u_0 = 2.0mm \quad (3.57)$$

Dans cet exemple, les potentiels hyperélastiques sont ainsi choisis (les pseudo-potentiels de dissipation l'étant déjà pour l'établissement de (3.48), (3.49) et (3.50)) :

Potentiels	Zener et Bingham	Poynting-Thomson
$\rho_0 \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}})$	$C_1(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + C_2(I_2(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + C_{20}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3)^2$	X
$\rho_0 \psi_{eq}^e(\bar{\mathbf{B}}_e)$	$G(I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3)$	$C_1(I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3) + C_2(I_2(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3) + C_{20}(I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3)^2$
$\rho_0 \psi_{eq}^a$	X	$G(I_1(\bar{\mathbf{B}}_a) - 3)$

TAB. 3.10 – Choix des différents potentiels pour les modèles de Zener, Bingham et Poynting-Thomson en configuration lagrangienne.

Les caractéristiques du matériau sont décrites pour chacun des trois modèles dans le tableau 3.11. Le chargement et la géométrie étant axisymétriques, c'est sous cette hypothèse qu'est discrétisée la structure à l'aide de 308 éléments quadrangles de type Q9P3¹¹ (cf. FIG. 3.20(b)).

La figure 3.21 donne les évolutions de la force de réaction due au déplacement en fonction de celui-ci pour chaque assemblage rhéologique. Plusieurs remarques peuvent être établies concernant ces dernières :

- Les modèles semblent bien rendre compte de ce à quoi ils sont destinés : retranscrire des non-linéarités imputables à la fois aux grandes déformations et au comportement.
- Les trois algorithmes choisis donnent des réponses globales se stabilisant. Cependant, si l'on fait exception du modèle de Zener pour lequel les trois réponses sont très proches, il semble que la linéarisation autour de la dernière solution convergée (LBETS) soit un peu trop grossière pour les modèles de Poynting-Thomson et Bingham. Ceci est sans doute à rapprocher de la plus grande complexité des lois d'écoulement de ces deux modèles (3.49) (3.50) en comparaison avec celle décrivant l'évolution de la variable interne du modèle de Zener (3.48). Ce constat semble se confirmer en examinant, par exemple, les répartitions de la contraintes de Von Mises pour le modèle de Poynting-Thomson aux extrema d'un cycle stabilisé (cf. FIG. 3.22 et 3.23). Les écarts, constatés sur les réponses globales, se retrouvent aussi au niveau local où l'on voit une différence de cartographie entre, d'un côté, les schémas numériques RKF et BETS et de l'autre sa variante linéarisé LBETS.

Modèles	$C_1(MPa)$	$C_2(MPa)$	$C_3(MPa)$	$G(MPa)$	$\eta(MPa.s)$	$\chi(MPa)$
Zener	7.08e-02	-8.42e-02	5.27e-02	6.14e-01	5.06e-01	X
Poynting-Thomson	6.16e-01	-4.52e-02	2.01	1.78	4.89e-01	X
Visco-plastique	2.68e-01	2.37e-01	2.10e-02	8.25e-01	1.29e-01	1.33e-01

TAB. 3.11 – Paramètres matériaux des 3 modèles unitaires eulériens.

¹¹Ces éléments quadratiques en déplacement et linéaires en pression vérifient la condition LBB.

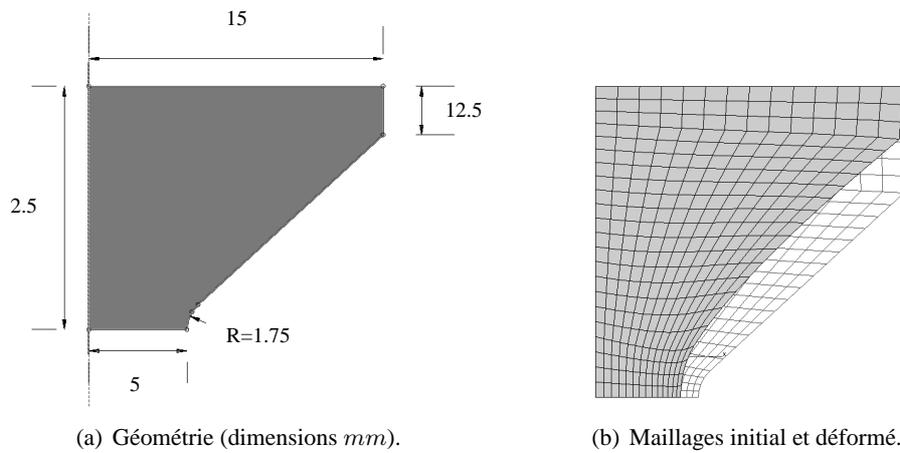


FIG. 3.20 – Éprouvette diabolo, géométrie et maillage adopté.

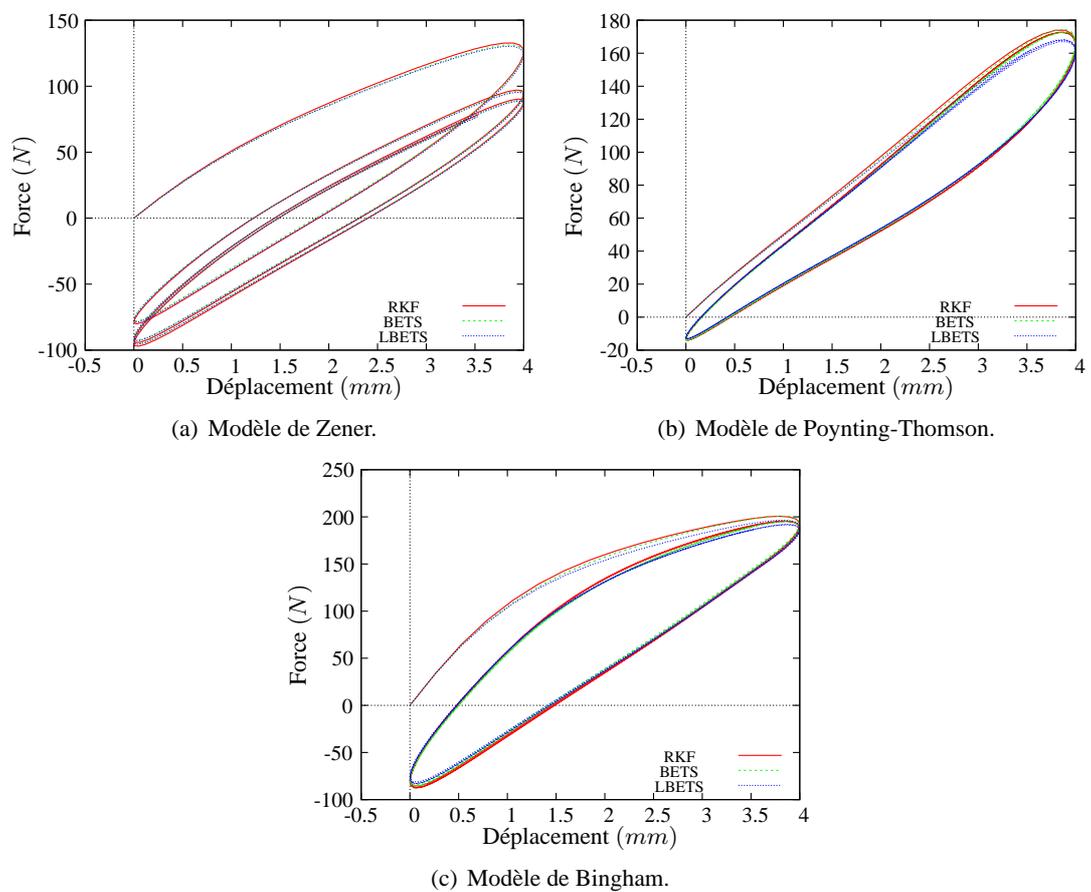


FIG. 3.21 – Tests numériques de traction cyclique sur diabolo.

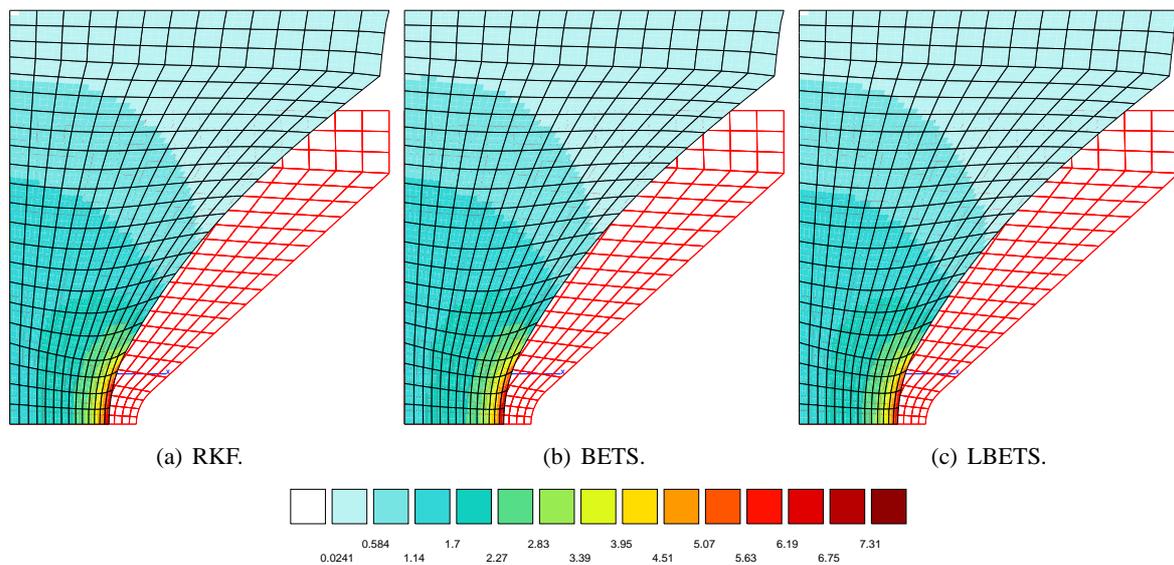


FIG. 3.22 – Répartition de la contrainte de Von Mises au maximum d'un cycle stabilisé pour un modèle de Poynting-Thomson. Algorithmes de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF), Euler implicite (BETS), Euler implicite linéarisé (LBETS).

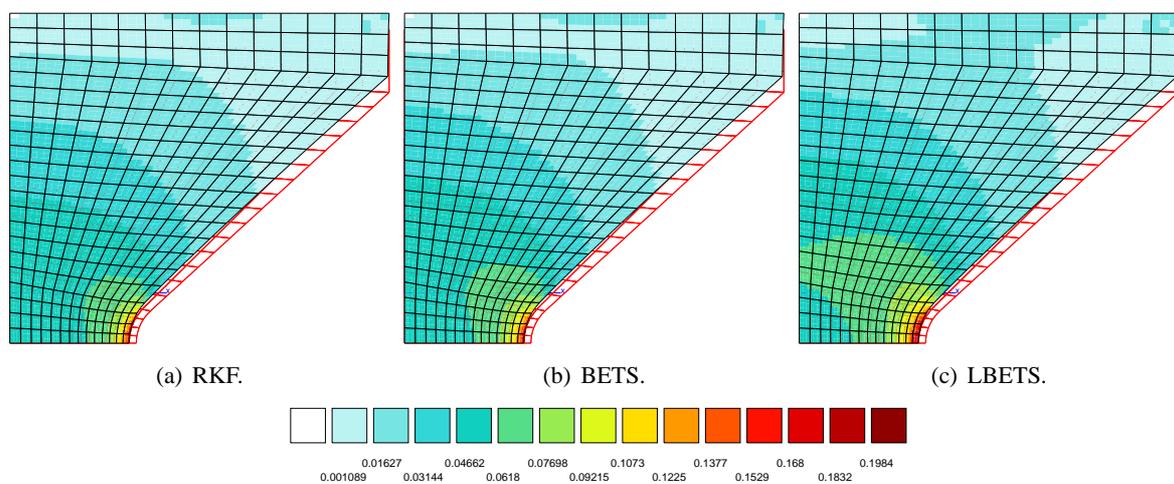


FIG. 3.23 – Répartition de la contrainte de Von Mises au minimum d'un cycle stabilisé pour un modèle de Poynting-Thomson. Algorithmes de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF), Euler implicite (BETS), Euler implicite linéarisé (LBETS).

3.4.3 Modèle statistique, ajout d'une nouvelle discrétisation

L'implémentation numérique du modèle statistique proposé en (3.31) s'appuie grandement sur les développements proposés précédemment. En effet, on a vu que finalement le système d'équations régissant son comportement pouvait être vu comme un assemblage en parallèle d'une branche hyperélastique, d'une branche élasto-plastique parfaite et d'une branche visco-élastique statistique (FIG. 3.12).

Chaque comportement est traité séparément comme le suggère la procédure décrite précédemment.

REMARQUE 3.10

Les équations présentées par la suite tiendront compte des choix de potentiels qui sont faits dans le paragraphe 3.3.4.

Dans un premier temps, l'hyperélasticité (en lui faisant une fois de plus porter la transformation volumique) amène une contribution à la contrainte de Cauchy totale :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{hyp}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} = 2J^{-1}C_1\bar{\mathbf{B}}^D + \underbrace{\kappa(J-1)}_p \mathbf{1} \text{ en respectant } \text{tr}\bar{\mathbf{D}} = 0 \quad (3.58)$$

et le module tangent \mathbb{T}_{hyp} .

L'élasto-plasticité décrite par le système (3.31) :

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{\text{p}} : \mathbb{P}_1 = 2A_p J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{p}D} \\ 2A_p J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{p}D} = \chi \frac{\bar{\mathbf{D}}_p^0}{\|\bar{\mathbf{D}}_p^0\|} \\ \text{en respectant } \text{tr}\bar{\mathbf{D}}_p^0 = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

donne un module tangent noté \mathbb{T}_{ep} . La mise en oeuvre de cette branche se fait par un algorithme de retour radial (Simo et Hugues, 2000).

Enfin, le traitement numérique de la branche visco-élastique statistique décrite par

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{\text{v}}(\omega) : \mathbb{P}_1 \mathcal{P}(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} 2G(\omega) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{v}D}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega \\ 2G(\omega) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{v}D}(\omega) = \eta(\omega) \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\\ \text{tr}\bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\end{cases} \quad (3.60)$$

nous oblige à discrétiser l'intégrale (ce qui n'est pas le cas dans le traitement semi-analytique) donnant la contribution en contrainte de la branche visco-élastique statistique :

$$\int_0^{+\infty} 2G(\omega) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{v}D}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega \simeq \sum_{i=1}^n 2G(\omega_i) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{v}D}(\omega_i) \mathcal{P}(\omega_i) \Delta\omega_i \quad (3.61)$$

Il en va de même pour $\mathbb{T}_{ev}^{\text{stat}}$, l'opérateur tangent qui en découle :

$$\mathbb{T}_{ev}^{\text{stat}} = \int_0^{+\infty} \mathbb{T}_{ev}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega \simeq \sum_{i=1}^n \mathbb{T}_{ev}(\omega_i) \mathcal{P}(\omega_i) \Delta\omega_i \quad (3.62)$$

L'implémentation devient alors très simple puisqu'il n'y a plus qu'à réaliser, autant de fois que de points de discrétisation de l'espace statistique, l'un des trois algorithmes présentés (RKF, BETS, LBETS) dans le paragraphe précédent. Ceci amène alors à voir la contrainte et le module tangent engendrés par cette branche comme deux sommes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{hyp}}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{\text{p}} : \mathbb{P}_1 + \sum_{i=1}^n 2G(\omega_i) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{v}D}(\omega_i) \mathcal{P}(\omega_i) \Delta\omega_i \quad (3.63)$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\text{hyp}} + \mathbb{T}_{ep} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{T}_{ev}(\omega_i) \mathcal{P}(\omega_i) \Delta\omega_i}_{\mathbb{T}_{ev}^{\text{stat}}} \quad (3.64)$$

3.5 Conclusion

Dans un premier temps, en nous appuyant sur un découpage unique de la transformation incompressible $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a$, comme le suggère le paragraphe 2.3.3.1 – il est proposé d’expliciter des modèles rhéologiques simples introduisant une unique variable interne afin de décrire la partie dissipative du comportement. Ainsi, dans un cadre lagrangien incompressible, les modèles de Zener et de Poynting-Thomson sont déclinés puis confrontés à des essais de double cisaillement réalisés sur Silicone₂₀₀₀. Ils font preuve d’une assez bonne cohérence avec l’expérimental, présentant chacun deux des quatre caractéristiques géométriques des boucles d’hystérésis réelles. Ensuite, la faisabilité de remplacer la partie dissipative visqueuse par une partie plastique ou visco-plastique est présentée dans un cadre compressible et eulérien. Cette approche met au passage en évidence la simplicité d’écriture inhérente à la description eulérienne.

Mais tous ces modèles unitaires marquent le pas quand il s’agit de retranscrire le comportement à basses températures (*i.e.* proches de la transition vitreuse) et/ou de traduire simultanément les influences de l’amplitude et de la fréquence (ou de la vitesse) du chargement. Pour parvenir à nos fins, partant d’une décomposition multiple (*cf.* § 2.4), nous avons (principalement dans le cadre du travail de Jean-Marc Martinez (Martinez, 2005; Martinez et al., 2011; Boukamel et al., 2005; Martinez et al., 2002, 2003; Méo et al., 2003, 2009a)) statistiquement généralisé la partie visqueuse à l’aide d’une fonction de répartition et de potentiels dépendants d’une variable statistique. De plus, l’apport indéniable d’une branche élasto-plastique est aussi mis en exergue, et ce afin de prendre en compte l’influence de l’amplitude de sollicitation sur la réponse du matériau. Le modèle obtenu rend alors compte, dans le cadre d’essais réalisés sur Silicone₂₀₀₅, pour des jeux de paramètres identifiés sur une plage de températures allant de -55°C à 70°C (la stratégie d’identification étant aussi décrite), de l’effet Payne et de l’influence de fréquence. Il est aussi confronté avec succès à des chargements complexes présentant une ou plusieurs harmoniques et d’éventuels paliers statiques.

Enfin deux stratégies d’implémentation éléments finis des modèles sont proposées, l’une partant d’une formulation lagrangienne et appliquée aux modèles de Poynting-Thomson et Zener, et l’autre s’appuyant sur un formalisme eulérien permettant la mise en oeuvre des assemblages de Zener, Poynting-Thomson, Bingham et du modèle statistique via une discrétisation de l’espace statistique.

Influence de la température sur le comportement et couplage thermo-mécanique

Comme il a été vu dans le chapitre 1, la thermique et la mécanique semblent réciproquement s'influencer. Afin de prendre en compte ces phénomènes thermo-mécaniques, une plate-forme de couplage est mise en place.

En supposant séparément positives les parts thermique et mécanique de la dissipation (réécrite sans aucune hypothèse et dans les différentes configurations), il est possible de réutiliser les lois de comportement mécanique présentées dans les chapitres 2 et 3 dont les paramètres sont choisis dépendants de la température et d'adopter une classique loi de Fourier pour prévoir la réponse thermique. Les équations constitutives (thermiques ou mécaniques) restent quasiment inchangées, seule la conservation de l'énergie se trouve modifiée par la prise en compte de la dissipation intrinsèque mécanique et de termes de couplage comme sources volumiques de chaleur.

En négligeant les termes de couplage, le problème se résume alors à une succession de séquences composées d'un calcul mécanique (dont les paramètres sont identifiés à partir du champ de température de l'étape thermique précédente) et d'un calcul thermique (avec comme source volumique de chaleur le champ de dissipation mécanique de l'étape mécanique précédente).

Enfin, dans les cas de chargements mécaniques périodiques, en considérant une moyenne de la dissipation stabilisée comme terme source thermique, des temps de résolution mécaniques et thermiques peuvent être choisis différents. Ceci permet alors d'atteindre l'état stationnaire thermique avec un gain en temps de calcul significatif.

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1	Introduction et positionnement du problème	105
4.2	Aspects théoriques du couplage thermo-mécanique	107
4.2.1	Lois de comportement	107
4.2.2	Équation de la chaleur	108
4.2.2.1	Écriture eulérienne	108
4.2.2.2	Écriture lagrangienne (mixte)	109
4.2.3	Position du problème thermo-mécanique	109
4.2.3.1	Description eulérienne	109
4.2.3.2	Description lagrangienne	110
4.3	Traitement du couplage	113
4.3.1	Simplifications et hypothèses	113
4.3.1.1	Termes de couplage	113
4.3.1.2	Dilatation thermique	113
4.3.2	Problème thermo-mécanique et paramètres matériaux	113
4.3.3	Découplage des problèmes thermiques et mécaniques	115
4.3.3.1	Cas particulier de sollicitations mécaniques cycliques	116
4.4	Exemple et résultats	121
4.4.1	Calcul préliminaire et recalage du modèle	121
4.4.2	Modèle recalé	122
4.5	Conclusion	125

4.1 Introduction et positionnement du problème

D'un point de vue du comportement mécanique, nombreux sont les essais pouvant mettre en évidence l'influence importante de la température sur la réponse mécanique de nos élastomères. Ceci peut, par exemple, être étayé par :

- les figures 1.3 et 1.14 qui montrent cette dépendance sur les propriétés visco-élastiques des CR, BR et HNBR étudiés,
- les figures 1.15 et A.1 qui l'illustrent sur les courbes d'hystérésis du Silicone₂₀₀₀ et du Silicone₂₀₀₅,
- ou encore les figures 1.10 et 1.13, représentant les évolutions de la raideur global de ces courbes et leurs aires (à amplitude ou fréquence fixe), qui contribuent à une quantification de ce phénomène.

Il est, de plus, intéressant de constater que cette dépendance semble réciproque car, pour une température d'enceinte contrôlée et maintenue constante, le champ de température du matériau évolue spatialement et temporellement (FIG. 1.17(b) et FIG. 1.17(c)).

Dans littérature, ces problèmes sont aussi expérimentalement approchés, citons les études de Caborgan (2011) faisant suite à Honorat (2006) et estimant les quantités de chaleur mises en jeu dans le couplage thermo-mécanique du NR. Le Saux (2010) propose, quant à lui, une méthode originale de caractérisation de la fatigue par une mesure de l'auto-échauffement par thermographie infrarouge.

La problématique à laquelle nous allons tenter de répondre dans ce chapitre est de prévoir, le champ de température stabilisé d'une structure soumise à une sollicitation mécanique cyclique et placée dans une atmosphère à température constante. Pour ce faire, nous nous sommes attachés à mettre en place une plate-forme simple capable de rendre compte de ce couplage thermo-mécanique.

D'autres auteurs se sont intéressés à ce problème. Holzapfel et Reiter (1995) proposèrent une modélisation thermo-mécanique en visco-élasticité linéaire. Dans le cadre des grandes transformations, il est aussi possible de citer en thermo-élasticité (Holzapfel et Simo, 1996a; Lion, 1997a,b), en thermo-visco-élasticité (Holzapfel et Simo, 1996b) et thermo-visco-plasticité (Lion, 2000). Sur un plan plus numérique citons les travaux de Reese et Govindjee (1998a); Reese (2001); Miehe (1995b); Le Chenadec et al. (2008).

Notre approche s'appuie sur le cadre thermodynamique présenté dans le chapitre 2 en ne prenant plus en compte l'hypothèse \mathcal{H} . 2.1 supposant l'isothermie et l'homogénéité de la température.

4.2 Aspects théoriques du couplage thermo-mécanique

4.2.1 Lois de comportement

N'ayant plus à notre disposition l'hypothèse \mathcal{H} . 2.1, il nous faut repartir des équations (2.8), (2.10) et (2.9), en supposant :

$$\psi = \psi(T, J, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a) \text{ ou } \psi = \psi(T, J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) \quad (4.1)$$

ce qui conduira par une démarche analogue à celle menée dans le chapitre 2 à

– en configurations lagrangienne et mixte

$$\phi_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \underbrace{\frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} T}_{\phi_0^{ther}} - \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a + \frac{\partial \psi}{\partial J} : \dot{J} \right)}_{\phi_0^{int}} + \underbrace{\boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}}}_{\text{①}} \geq 0 \quad (4.2)$$

– en configuration eulérienne

$$\phi = -\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \underbrace{\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} T}_{\phi^{ther}} - \underbrace{\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e + \frac{\partial \psi}{\partial J} : \dot{J} \right)}_{\phi^{int}} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (4.3)$$

HYPOTHÈSE 4.1

On suppose que la dissipation (ϕ ou ϕ_0) résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique. Ceci conduit à la relation :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (4.4)$$

HYPOTHÈSE 4.2

On suppose que les dissipations intrinsèque et thermique sont séparément positives et ce, indépendamment de la configuration (Germain, 1973).

$$\phi^{int} \geq 0 \text{ et } \phi^{ther} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\phi_0^{int} \geq 0 \text{ et } \phi_0^{ther} \geq 0 \quad (4.6)$$

Sous l'hypothèse \mathcal{H} . 4.1, cette condition est suffisante pour assurer $\phi \geq 0$ ou $\phi_0 \geq 0$

Cette dernière hypothèse présente l'intérêt majeur, en considérant, $\phi^{int} \geq 0$ et $\phi_0^{int} \geq 0$, de nous permettre de reproduire exactement la démarche menée dans le chapitre 2 car la dissipation intrinsèque mécanique est égale à la dissipation totale dans le cadre isotherme. Les termes ① et ② des équations (4.2) et (4.3) ont déjà été traités en annexe B. Ainsi, le principe de normalité, appliqué à ϕ^{int} et ϕ_0^{int} , conduira aux équations de comportement mécanique précédemment établies dans le chapitre 2.

La positivité des dissipations thermiques peut être obtenue en adoptant un comportement thermique simple suivant une loi de Fourier dans les configurations eulérienne et lagrangienne (Bérardi, 1995) :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \text{grad}_{\mathbf{x}} T \quad (4.7)$$

$$\mathbf{Q} = -J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-T} \text{grad}_{\mathbf{x}} T \quad (4.8)$$

et $\mathbf{K} = K\mathbf{1}$ dans le cas d'un milieu isotrope de conductivité thermique K .

4.2.2 Équation de la chaleur

Afin d'établir l'équation de la chaleur, il nous faut revenir à (2.7), la définition initiale de ψ :

$$e = \psi + sT \quad (4.9)$$

4.2.2.1 Écriture eulérienne

En configuration eulérienne, ψ est considérée être une fonction des variables $(T, J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$, si bien que sous l'hypothèse \mathcal{H} . 4.2

$$\dot{e} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e + \frac{\partial \psi}{\partial J} : \dot{J} + \dot{s}T \quad (4.10)$$

Le premier principe exprimé en (2.3) donne alors l'égalité :

$$\rho \dot{s}T = \phi^{int} + \rho r - \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} \quad (4.11)$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse \mathcal{H} . 4.2 et comme $(T, J, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$ est un jeu de variables considérées comme indépendantes :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial T} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial J} : \dot{J} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \\ &= -\left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}} : \mathbb{P}_1 + 2\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \mathbb{P}_1 + J \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial J} \right] : \mathbf{D} \\ &\quad + \left[2\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \end{aligned} \quad (4.12)$$

on obtient alors l'équation de la chaleur sous sa forme finale :

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho C_\varepsilon \dot{T}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}}_{\textcircled{2}} &= \underbrace{\rho r}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\phi^{int}}_{\textcircled{4}} \\ &\quad - \rho T \left[2\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \\ &\quad + \rho T \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}} : \mathbb{P}_1 + 2\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \mathbb{P}_1 + J \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial J} \right] : \mathbf{D} \quad \left. \vphantom{\rho T} \right\} \textcircled{5} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Avec C_ε la chaleur spécifique à déformation constante¹ :

$$C_\varepsilon = T \frac{\partial s}{\partial T}$$

L'analyse des différents termes de l'équation (4.13) reste la même que sous l'hypothèse des petites déformations, à savoir :

¹En étant plus précis, avec $\bar{\mathbf{B}}$, J et $\bar{\mathbf{B}}_e$ constants.

- les composantes ① et ② correspondent respectivement aux termes d'absorption et de fuite de chaleur,
- la grandeur ρr (③) représente tout échange volumique réalisé avec l'extérieur,
- en ④ on retrouve la dissipation intrinsèque (mécanique) qui est donc homogène à une source volumique de chaleur interne,
- et enfin les termes de couplage (⑤) qui traduisent la dépendance entre les problèmes mécanique et thermique.

4.2.2.2 Écriture lagrangienne (mixte)

Une démarche analogue à celle menée en eulérien conduirait à une équation de la chaleur de la forme :

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho_0 C_\varepsilon \dot{T}}_{\text{①}} + \underbrace{\text{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}}_{\text{②}} &= \underbrace{\rho_0 r}_{\text{③}} + \underbrace{\phi_0^{int}}_{\text{④}} \\ &+ \underbrace{\rho_0 T \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a + \rho_0 T \left[2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + J \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial J} \mathbf{C}^{-1} \right] : \dot{\mathbf{E}}}_{\text{⑤}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'analyse des différents termes cerclés de (4.14) est la même que celle proposée dans le paragraphe précédent.

4.2.3 Position du problème thermo-mécanique

Il est maintenant possible de résumer les équations régissant notre problème thermo-mécanique en fonction de la configuration choisie.

4.2.3.1 Description eulérienne

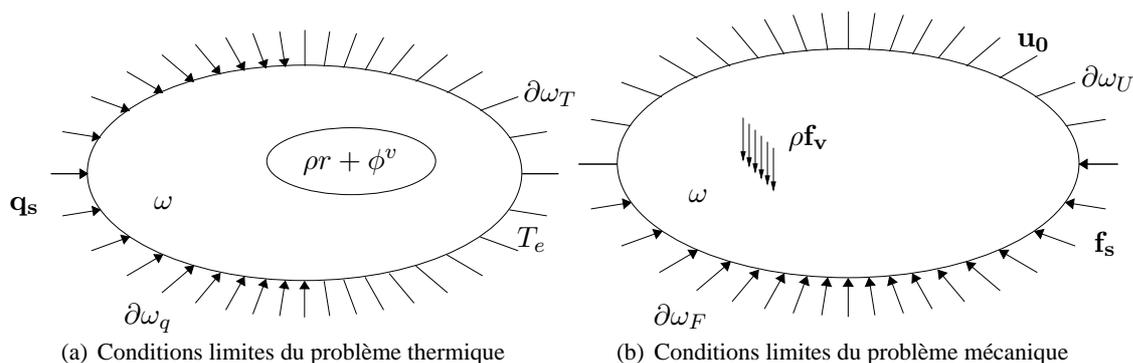


FIG. 4.1 – Problème thermo-mécanique eulérien.

Le bilan nous donne alors pour chacun des deux problèmes

- **Problème mécanique :**

- Équation locale de conservation du mouvement

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \omega \quad (4.15)$$

avec \mathbf{f}_v et \mathbf{u} respectivement la densité massique d'effort et le déplacement.

- Les conditions aux limites

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s & \forall \mathbf{x} \in \partial\omega_F \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\omega_U \end{cases} \quad (4.16)$$

où \mathbf{f}_s et \mathbf{u}_0 sont la densité surfacique d'effort imposé dans C_t et le déplacement imposé.

- Les équations constitutives données par exemple dans le cas général d'un milieu décrit par une seule configuration intermédiaire (cf. (2.48) et (2.49)) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf{D}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial\varphi_a}{\partial\bar{\mathbf{D}}_a^o} + [\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T] : \mathbb{P}_1 \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial\psi_{\text{eq}}}{\partial\bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}) \\ \text{et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial\psi_{\text{neq}}^e}{\partial\bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial\psi_{\text{neq}}^a}{\partial\bar{\mathbf{B}}_a}(\bar{\mathbf{B}}_a) \\ \text{en respectant } \text{tr}\bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr}\bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \omega \quad (4.17)$$

- **Problème thermique :**

- La conservation de l'énergie doit être respectée :

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} + \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = \rho r + \phi^a \quad \forall \mathbf{x} \in \omega \quad (4.18)$$

avec $\phi^a = \textcircled{4} + \textcircled{5}$ de l'équation (4.13).

- Les conditions de frontières thermiques

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_s & \forall \mathbf{x} \in \partial\omega_q \\ T = T_e & \forall \mathbf{x} \in \partial\omega_T \end{cases} \quad (4.19)$$

avec T_e et \mathbf{q}_s les conditions limites thermiques respectivement en températures et en flux de chaleur (eulérien).

- Le comportement thermique est régi par la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -K \text{grad}_{\mathbf{x}} T \quad \forall \mathbf{x} \in \omega \quad (4.20)$$

4.2.3.2 Description lagrangienne

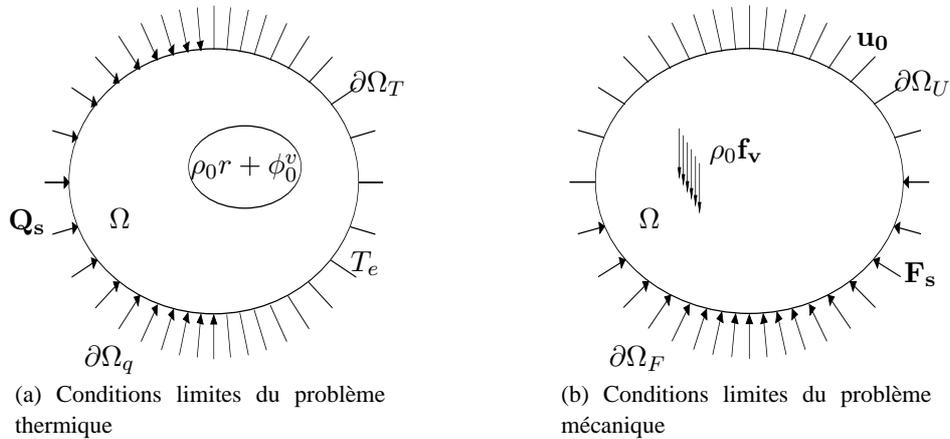


FIG. 4.2 – Problème thermo-mécanique lagrangien.

Une démarche analogue en lagrangien à celle précédemment menée en eulérien est proposée :

• **Problème mécanique :**

- Équation locale de conservation du mouvement

$$\operatorname{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\pi} + \rho_0 \mathbf{f}_v = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (4.21)$$

- Les conditions aux limites

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}_s & \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_F \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_U \end{cases} \quad (4.22)$$

- Les équations constitutives données par exemple dans le cas général d'un milieu décrit par une seule configuration intermédiaire (cf. (2.51) ou (2.52)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ \text{ou encore } \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \mathbf{S}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} \right] : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) \text{ et } \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{F}}} : \bar{\mathbf{F}}^{-T} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (4.23)$$

• **Problème thermique :**

- La conservation de l'énergie doit être respectée :

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} = \rho r + \phi_0^a \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (4.24)$$

avec $\phi_0^a = \textcircled{4} + \textcircled{5}$ de l'équation (4.14).

- Les conditions de frontières thermiques

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s & \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_q \\ T = T_e & \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_T \end{cases} \quad (4.25)$$

- Le comportement thermique est régi par la loi de Fourier

$$\mathbf{Q} = -JK\mathbf{C}^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (4.26)$$

\mathbf{f}_v , \mathbf{u} , \mathbf{u}_0 et T_e ont les mêmes définitions que dans l'approche eulérienne. \mathbf{F}_s et \mathbf{Q} sont quant à eux la densité surfacique d'effort imposé et le flux de chaleur imposé en configuration lagrangienne.

4.3 Traitement du couplage

4.3.1 Simplifications et hypothèses

4.3.1.1 Termes de couplage

HYPOTHÈSE 4.3

Les termes de couplage de l'équation de la chaleur (⑤ des équations (4.13) ou (4.14)) sont supposés nuls.

On constate que les termes ⑤ des équations (4.13) ou (4.14) sont homogènes à des dérivées de contraintes mécaniques par rapport à la température. Ainsi, l'hypothèse \mathcal{H} . 4.3, nous amène à considérer les contraintes mécaniques comme des fonctions indépendantes de la température ou variant peu avec celle-ci. Cette hypothèse restreint le domaine de validité du modèle à des températures éloignées de la zone de transition vitreuse et reste discutable en début d'essai. À titre d'exemple Caborgan (2011); Honorat (2006) ne négligent pas ces termes. Dans notre cas, leur prise en compte contraindrait à des temps physiques de simulations inférieurs à ceux souhaités dans le cadre de notre application.

4.3.1.2 Dilatation thermique

Certains auteurs (Lion, 1997a; Holzapfel et Simo, 1996a) choisissent de décomposer la transformation en une partie purement thermique (\mathbf{F}_T) et une autre purement mécanique (\mathbf{F}_M). Ceci conduirait à introduire un état intermédiaire purement thermique.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{F}_T \text{ avec } \mathbf{F}_T = (f(T - T_0))^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}, T_0 \text{ la température initiale et } f(0) = 1 \quad (4.27)$$

HYPOTHÈSE 4.4

Aucune dilatation n'ayant été constatée au cours de nos essais expérimentaux, ce phénomène est donc négligé dans le cadre de notre modèle, *i.e.* :

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{1}.$$

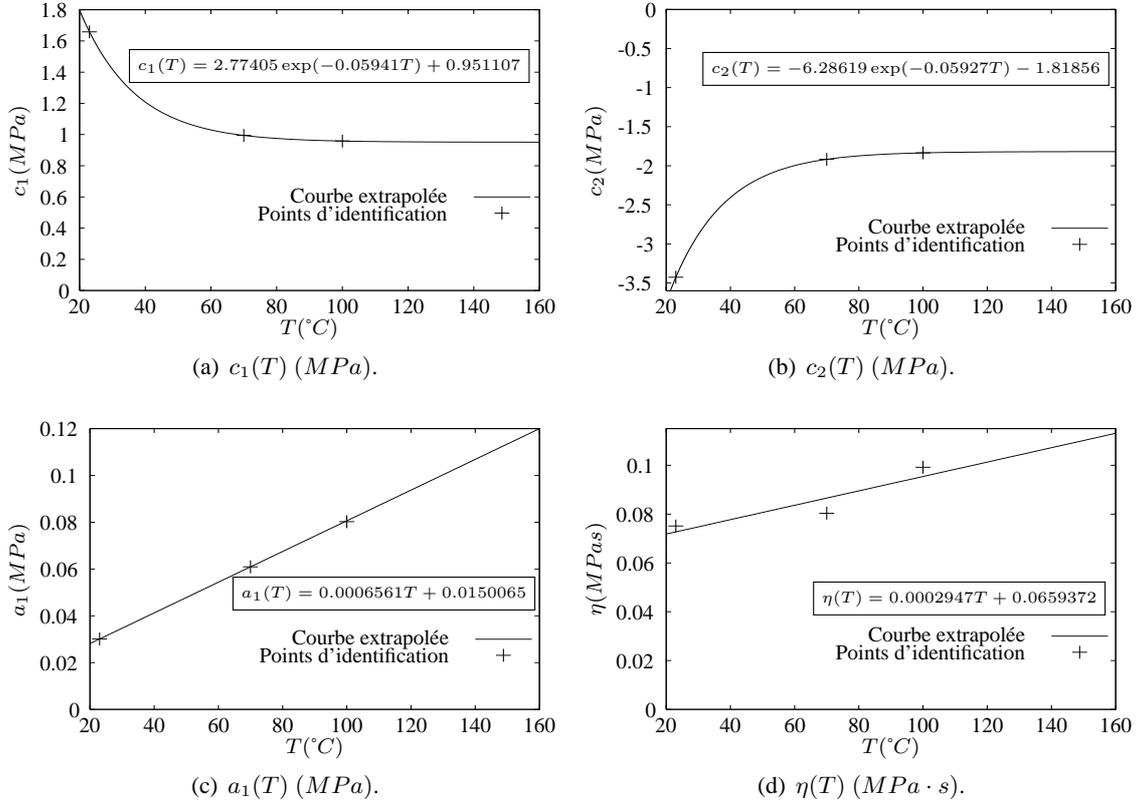
4.3.2 Problème thermo-mécanique et paramètres matériaux

En accord avec nos travaux sur le Silicone₂₀₀₀, on attribue à l'élastomère un comportement mécanique de type Poynting-Thomson incompressible. on utilisera pour décrire ce modèle la formulation lagrangienne (3.3). Les paramètres de ce modèle pour ce matériau ont été identifiés en fonction de la température et décrites TAB. 3.3. Des lois d'évolution sont extrapolées pour chacun d'eux et sont données FIG. 4.3.

Les propriétés thermiques sont quant à elles données TAB. 4.1.

$K (Wm^{-1}K^{-1})$	0.127
$\rho_0 C_\varepsilon (Jm^{-3}K^{-1})$	$1.88 \cdot 10^6$

TAB. 4.1 – Caractéristiques thermiques du Silicone₂₀₀₀.

FIG. 4.3 – Évolution en fonction de la température des différents paramètres mécaniques du Silicone₂₀₀₀.

Le problème thermo-mécanique complet, sous les hypothèses \mathcal{H} . 4.3 et \mathcal{H} . 4.4, le choix fait pour le modèle mécanique ainsi que les extrapolations de ses paramètres (voir FIG. 4.3), devient :

$$\begin{array}{l}
 \text{Comportement mécanique : } \left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{S} = 2 \left[c_1(T) \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - \frac{c_2(T)}{I_2^e} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p \mathbf{C}^{-1} \\
 \left[a_1(T) \mathbf{C}_a + c_1(T) \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - \frac{c_2(T)}{I_2^e} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \eta(T) \dot{\mathbf{C}}_a \\
 \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0
 \end{array} \right. \\
 \text{Comportement thermique : } \mathbf{Q} = -JK \mathbf{C}^{-1} \text{grad}_{\mathbf{X}} T \\
 \text{Équations constitutives mécaniques : } \left\{ \begin{array}{ll}
 \text{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\pi} + \rho_0 \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \\
 \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}_s & \text{sur } \partial\Omega_F \\
 \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_U
 \end{array} \right. \\
 \text{Équations constitutives thermiques : } \left\{ \begin{array}{ll}
 \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \text{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} = \rho_0 r + \phi_0^{int} & \text{sur } \Omega \\
 \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\
 T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \tag{4.28}$$

4.3.3 Découplage des problèmes thermiques et mécaniques

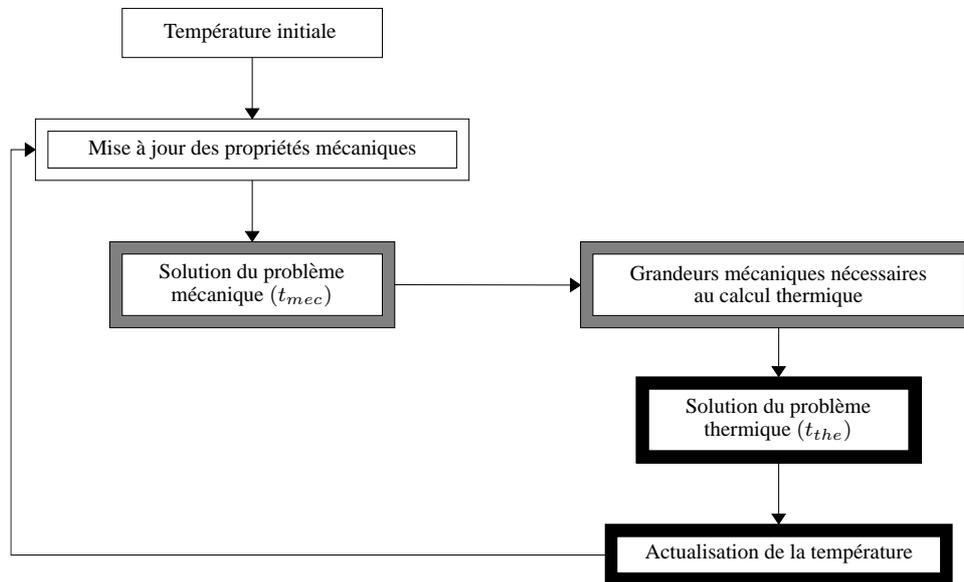


FIG. 4.4 – Algorithme de couplage thermo-mécanique.

Grâce en particulier aux hypothèses \mathcal{H} . 4.3 et \mathcal{H} . 4.4, il est possible d’adopter l’algorithme de couplage ”faible” décrit figure 4.4 qui consiste en un découplage des calculs thermiques et mécaniques (Bérardi, 1995; Gabrieli, 1995; Holzapfel et Simo, 1996a). Au cours de la modélisation est réalisée une succession de calculs mécaniques et thermiques. Les calculs mécaniques sont supposés **isothermes**, tandis que les calculs thermiques sont réalisés sur **la géométrie déformée à vitesse de déformation nulle** et en considérant **la dissipation intrinsèque comme source volumique de chaleur**².

Une telle description du couplage nécessite, *a priori*, la réalisation d’essais numériques mécaniques et thermiques sur un même temps de modélisation :

$$t_{mec} = t_{the} \quad (4.29)$$

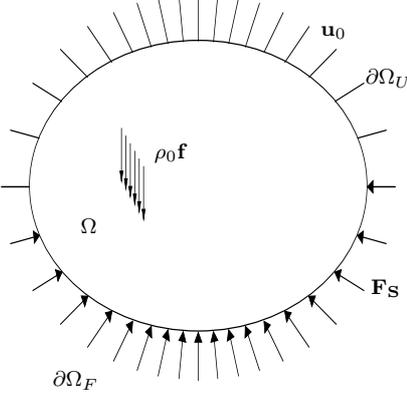
Pour résumer, partant de deux découpage éléments finis (un mécanique et un thermique) :

1. en début de processus, connaissant le champ de température, les paramètres mécaniques sont identifiés en chaque point de Gauss du maillage mécanique, en utilisant les évolutions données Fig. 4.3 (leur répartition sera homogène, si initialement la température l’est)
2. une résolution du problème mécanique est faite sur un temps de modélisation t_{mec} ,
3. puis sont transmis, en chaque point d’intégration du maillage thermique, la dissipation et le gradient de la transformation,
4. le problème thermique est alors résolu pour un temps de modélisation $t_{the}(= t_{mec})$,
5. la température peut maintenant être transférée au maillage mécanique, permettant une actualisations des propriétés mécaniques,
6. enfin, on boucle à nouveau sur l’étape 2 et ainsi de suite...

²D’après (4.14) sous l’hypothèse \mathcal{H} . 4.3.

Problème mécanique

$\dot{T} = 0$



Comportement mécanique

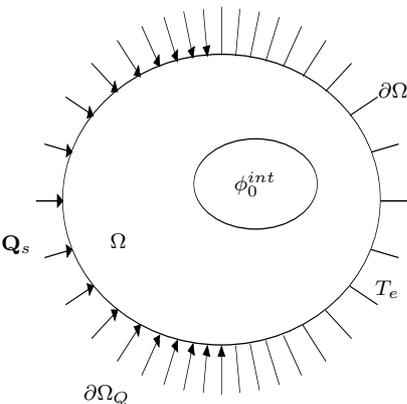
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2 \left[c_1(T) \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} \right. \\ \left. - \frac{c_2(T)}{I_2^e} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p \mathbf{C}^{-1} \\ \left[a_1(T) \mathbf{C}_a + c_1(T) \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} \right. \\ \left. - \frac{c_2(T)}{I_2^e} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \eta(T) \dot{\mathbf{C}}_a \\ \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 \\ \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right.$$

Équations constitutives

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\pi} + \rho_0 \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}_S & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right.$$

Problème thermique

$\dot{\mathbf{F}} = 0$



Comportement thermique

$$\mathbf{Q} = -JK \mathbf{C}^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T$$

Équations constitutives

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} = \rho_0 r + \phi_0^{int} & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T \end{array} \right.$$

4.3.3.1 Cas particulier de sollicitations mécaniques cycliques

Dans la plupart des cas que nous étudions, l'intérêt est de trouver l'état thermo-mécanique stabilisé qui, dans le cas nous intéressant, pour une sollicitation cyclique de cisaillement d'amplitude 50% et de fréquence 3.1 Hz à des températures d'enceinte de 27°C et 60°C semble être atteint après 600s (cf. FIG. 1.17(b) et 1.17(c)).

Pour contourner ce problème, la propriété de périodicité de la dissipation intrinsèque obtenue pour une sollicitation cyclique est utilisée. Ainsi, le problème numérique global à résoudre sera toujours considéré comme une succession de couples de problèmes (*i.e.* un problème mécanique + un problème thermique). Le problème mécanique, dont les coefficients matériau ont été identifiés à partir du champ de température résultant de la partie thermique du couple précédent, est mené jusqu'à stabilisation de la dissipation

intrinsèque. C'est alors la moyenne temporelle de cette grandeur,

$$\bar{\phi}_0^{int}(t) = \frac{\int_0^t \phi_0^{int}(s) ds}{t} \quad (4.30)$$

qui est considérée comme terme source du calcul thermique qui est réalisé sur la **géométrie non déformée** (le transfert de \mathbf{F} aux points d'intégration thermiques devient inutile). Ce calcul est mené jusqu'à une évolution raisonnable de la température globale de la structure. Le champ de température ainsi obtenu peut alors être utilisé pour à nouveau déterminer les champs spatiaux des différents paramètres mécaniques du couple de problème suivant.

L'algorithme décrit est identique à celui mis en place dans le paragraphe 4.3.3, avec :

$$t_{mec} \neq t_{the}, \quad (4.31)$$

et en considérant non plus la dissipation intrinsèque instantanée comme terme source thermique, mais la moyenne temporelle de cette grandeur.

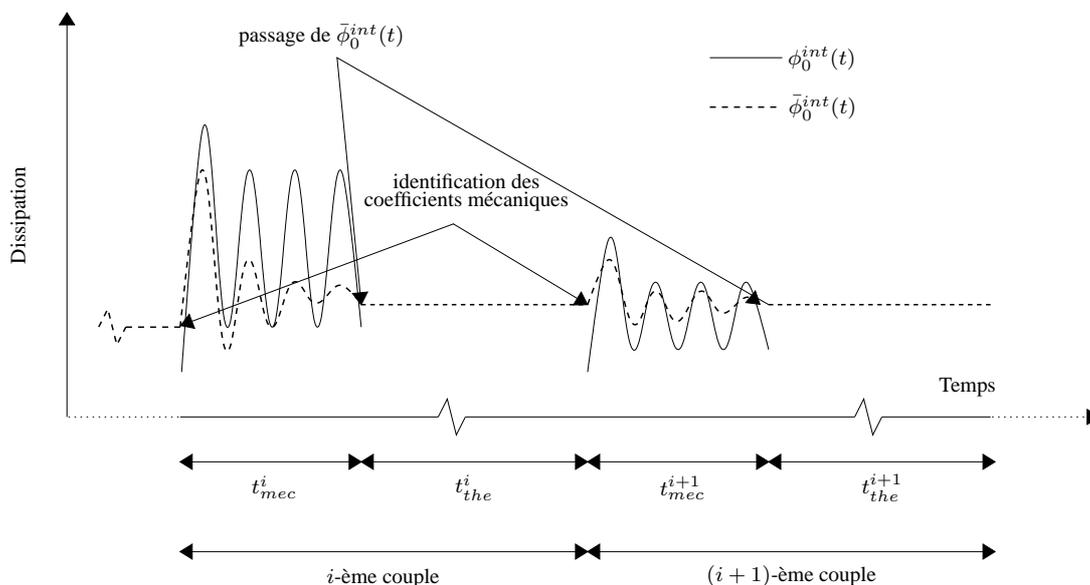


FIG. 4.5 – Représentation schématique de la dissipation et de sa moyenne temporelle au cours de deux couples de calcul.

Cette approche a été validée par la comparaison de l'évolution de la température au centre d'un des blocs de Silicone₂₀₀₀ d'une éprouvette de double-cisaillement (thermocouple d, FIG. 1.17(a)), sur les 15 premières secondes d'une modélisation reproduisant les conditions de l'essai donnant les résultats FIG. 1.17(b) et rappelé FIG. 4.6(a), pour deux découpages temporels :

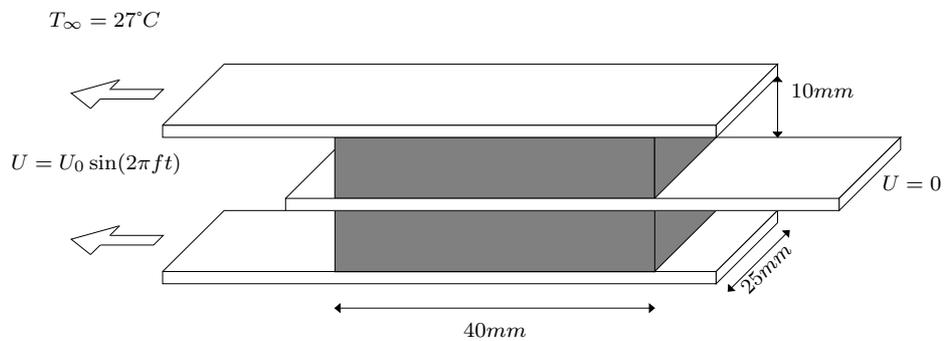
- $t_{mec} = t_{the} = 0.02s$, soit 750 couples mécaniques/thermiques à résoudre
- $t_{mec} = 0.93s$ (trois cycles de chargement à $f = 3.1Hz$) et $T_{the} = 15s$ soit 1 unique couple mécanique/thermique à résoudre

Les conditions limites des problèmes mécaniques et thermiques sont respectivement données sur les figures 4.6(b) et 4.6(c)³. Les paramètres matériaux pour le Silicone₂₀₀₀ sont donnés TAB. 4.1 et FIG. 4.3. et pour l'acier TAB. 4.2

³Les valeurs des coefficients d'échanges convectifs sont (Bérardi, 1995) : $h_{acier} = 30Wm^{-2}K^{-1}$ et $h_{Silicone2000} = 17Wm^{-2}K^{-1}$.

$E(MPa)$	210000
ν	0.3
$K(Wm^{-1}K^{-1})$	45
$\rho_0 C_\varepsilon(Jm^{-3}K^{-1})$	$3.5 \cdot 10^6$

TAB. 4.2 – Caractéristiques thermiques et mécaniques de l'acier



(a) Description du test de validation de l'algorithme adopté dans le cas de sollicitations cycliques.

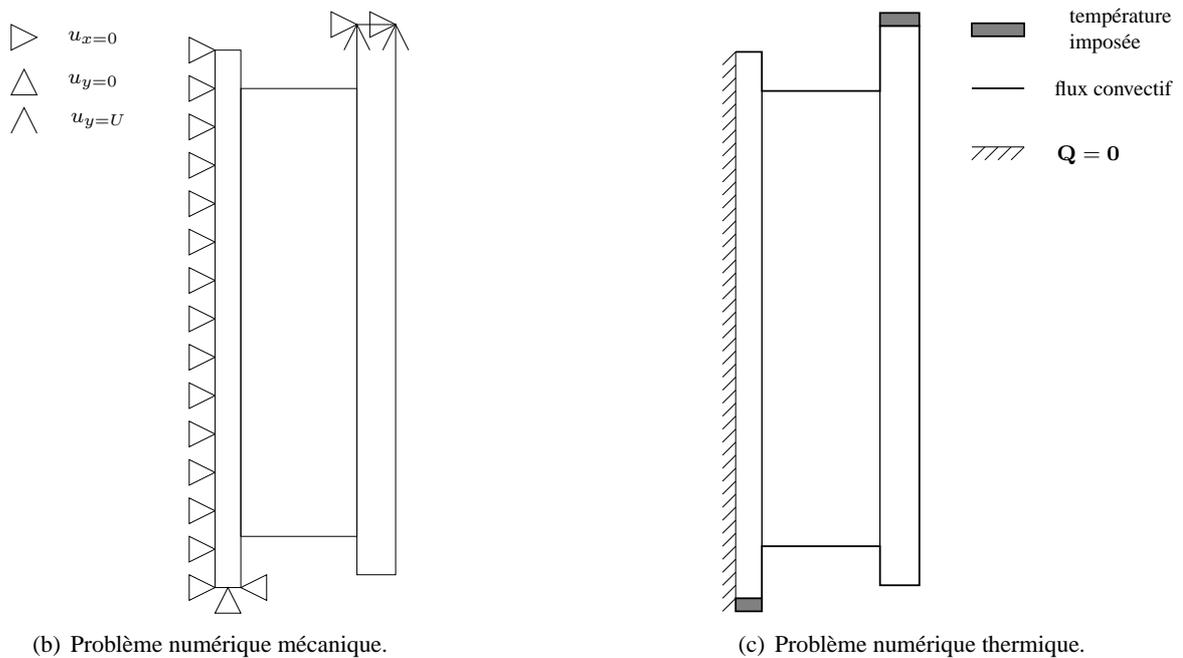


FIG. 4.6 – Problèmes physique et numériques.

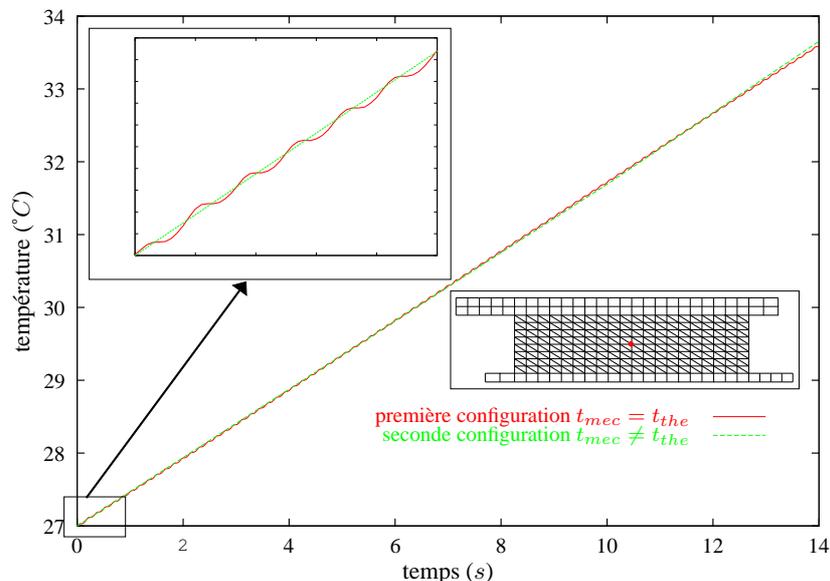


FIG. 4.7 – Évolution de la température au coeur d’une des couches d’élastomères. Comparaison des résultats obtenus pour les deux configurations.

On peut constater FIG. 4.7 que la configuration “simplifiée” ($t_{mec} \neq t_{the}$) donne une évolution de la température ne s’écartant pas de plus de $1/10^e$ de degré de celle obtenue par la configuration complète ($t_{mec} = t_{the}$) et ce pour un temps de calcul 15 fois inférieur⁴.

Un si faible écart valide notre découpage temporelle simplifié (*i.e.* $t_{mec} \neq t_{the}$) car il semble évident que les différentes hypothèses simplificatrices \mathcal{H} . 4.3 et \mathcal{H} . 4.4 ainsi que le mode de résolution induit par l’algorithme de couplage “faible” ne laissent pas espérer une telle précision et engendrent au moins autant d’écart avec l’évolution réelle de la température.

Par la suite, on adoptera donc le découpage temporel suivant (ceci a fait l’objet d’une étude présentée dans (Méo, 2000b)) :

$$\text{Répartition adoptée} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ i^{\text{ème}} \text{ couple} \\ \vdots \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} (1 \text{ calcul mécanique sur trois cycles de chargement, } T_{mec} = 0.93s \\ +1 \text{ calcul thermique, } T_{the} = 10 \times 2^{i-1}s) \end{array} \right. \quad (4.32)$$

⁴De manière plus précise, on peut voir sur un zoom de ces mêmes courbes, une oscillation de l’évolution obtenue par la configuration 1 ($t_{mec} = t_{the}$) autour des résultats donnés par la configuration 2 ($t_{mec} \neq t_{the}$). La fréquence de ces oscillations est égale à deux fois celle de la sollicitation mécanique, *i.e.* $f = 6.2Hz$. Ce résultat était attendu, car sur notre éprouvette, la dissipation (et par conséquent le terme source mécanique de l’équation de la chaleur) passe par un maximum pour les maxima et minima de la sollicitation mécanique.

4.4 Exemple et résultats

On propose ici de modéliser le problème présenté FIG. 4.6 jusqu'à obtention d'une température stabilisée. Le découpage temporel est celui adopté en (4.32). Le problème sera résolu pour deux températures d'enceinte : $27^\circ C$ et $60^\circ C$. Les sollicitations mécaniques restent les mêmes que celles décrites FIG. 4.6(a).

4.4.1 Calcul préliminaire et recalage du modèle

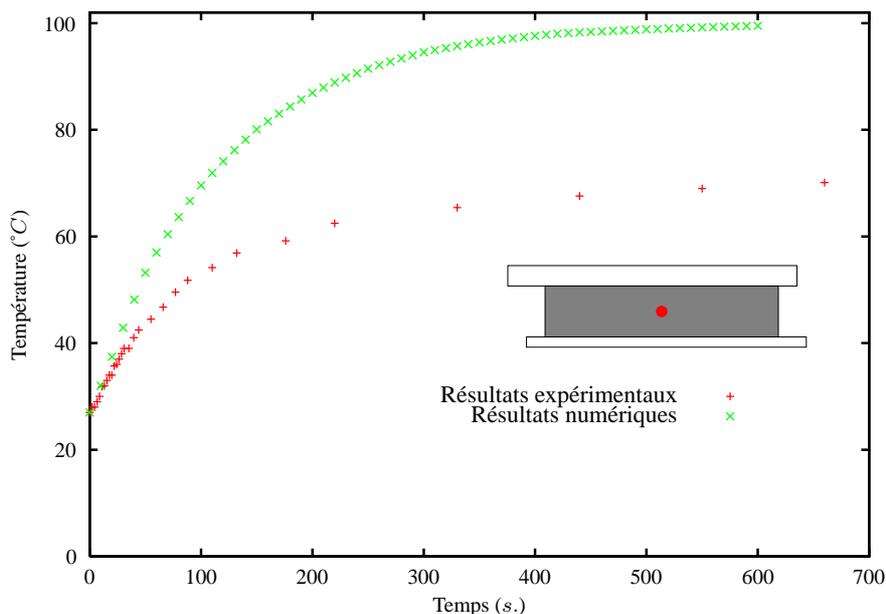


FIG. 4.8 – Évolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Température d'enceinte = $27^\circ C$.

Dans le cas d'une température d'enceinte de $27^\circ C$, la comparaison des évolutions numérique et expérimentale de la température au centre de l'éprouvette (thermocouple d, FIG. 1.17(a)), montre une température asymptotique largement surestimée (FIG. 4.8). Ceci a été attribué à la prise en compte de la dissipation intrinsèque totale comme terme source de l'équation de la chaleur. La démarche qui suit expose la méthode employée afin de recalibrer le modèle.

Sur la partie asymptotique de l'évolution temporelle de la température on a :

$$\dot{T} = 0, \quad (4.33)$$

si bien que l'équation de la chaleur devient (en considérant la dissipation moyenne (4.30) comme l'unique terme source volumique et sous l'hypothèse \mathcal{H} . 4.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{Q} &= \bar{\phi}_0^{int} \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbf{K}_L \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} T) &= \bar{\phi}_0^{int} \text{ d'après la loi de Fourier (4.8)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

en notant α le rapport entre les températures expérimentale (T^{exp}) et numériques (T^{num}) au centre de la couche de l'élastomère

$$\alpha = \frac{T^{exp}}{T^{num}} = \frac{70.1}{99.51} = 0.704 \quad (4.35)$$

Or T^{num} est solution de (4.34) au centre de l'élastomère et sur la partie asymptotique de l'évolution :

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{X}}(\mathbf{K}_L \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T^{num}) = \bar{\phi}_0^{int}. \quad (4.36)$$

Soit en remplaçant T^{num} par $\frac{T^{exp}}{\alpha}$ dans (4.36) :

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{X}}(\mathbf{K}_L \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} T^{exp}) = \alpha \bar{\phi}_0^{int}. \quad (4.37)$$

Le recalage du modèle passe donc par la prise en compte de 70.4% de la dissipation comme terme source volumique dans l'équation de la chaleur.

REMARQUE 4.1

Les conséquences de cette correction ne peuvent, *a priori*, pas être anticipées :

- en d'autres points que le cœur de la couche d'élastomère,
- sur une partie autre que la partie asymptotique de l'évolution temporelle de la température
- et pour une température d'enceinte différente de 27°C .

4.4.2 Modèle recalé

La figure 4.9 permet de superposer aux évolutions expérimentales, obtenues aux thermocouples b et d (cf. FIG. 1.17(a)) pour des températures d'enceinte de 27°C ou 60°C (déjà présentées FIG. 1.17(b) et 1.17(c)), leurs homologues numériques.

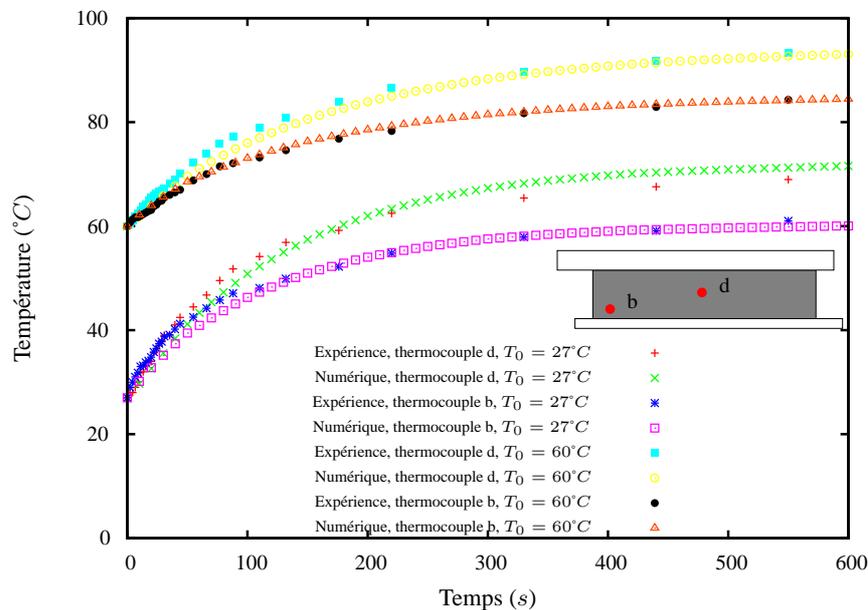


FIG. 4.9 – Évolution de la température aux thermocouple b et d. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques ($\alpha = 0.704$) ; Température d'enceinte = 27°C et 60°C .

On constate que le recalage de la dissipation qui assurait uniquement l'obtention, *a priori*, de la température asymptotique au thermocouple d pour une température d'enceinte de 27°C , conduit à une bonne concordance des résultats numériques et expérimentaux sur l'ensemble de la courbe pour ce point, un autre point (le thermocouple b) de l'éprouvette et pour deux températures ambiantes différentes. De plus,

l'inversion du maximum géométrique constatée pour une température d'enceinte de 27°C semble aussi reflétée par le modèle, puisque celui-ci donne initialement une température au thermocouple b supérieure à celle du thermocouple d, tendance qui s'inverse après une vingtaine de secondes. Ce phénomène peut sans doute être mieux appréhendé en observant, sur la figure 4.11, l'évolution du champ de température sur une demie éprouvette mettant en évidence une localisation du maximum de la température aux coins de l'éprouvette (points de singularité de dissipation) puis un "recentrage" du champ sans doute dû à la faible conductivité du Silicone₂₀₀₀ (cf. TAB. 4.1)

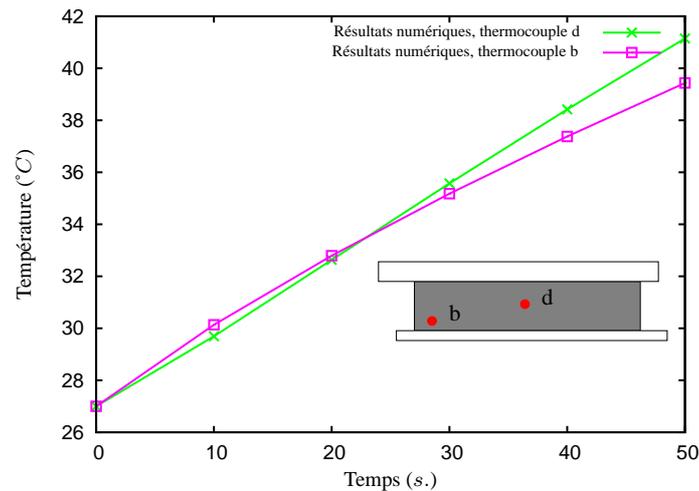


FIG. 4.10 – Détail des évolutions numériques ($\alpha = 0.704$) de la température au thermocouple b et d (Température d'enceinte = 27°C).

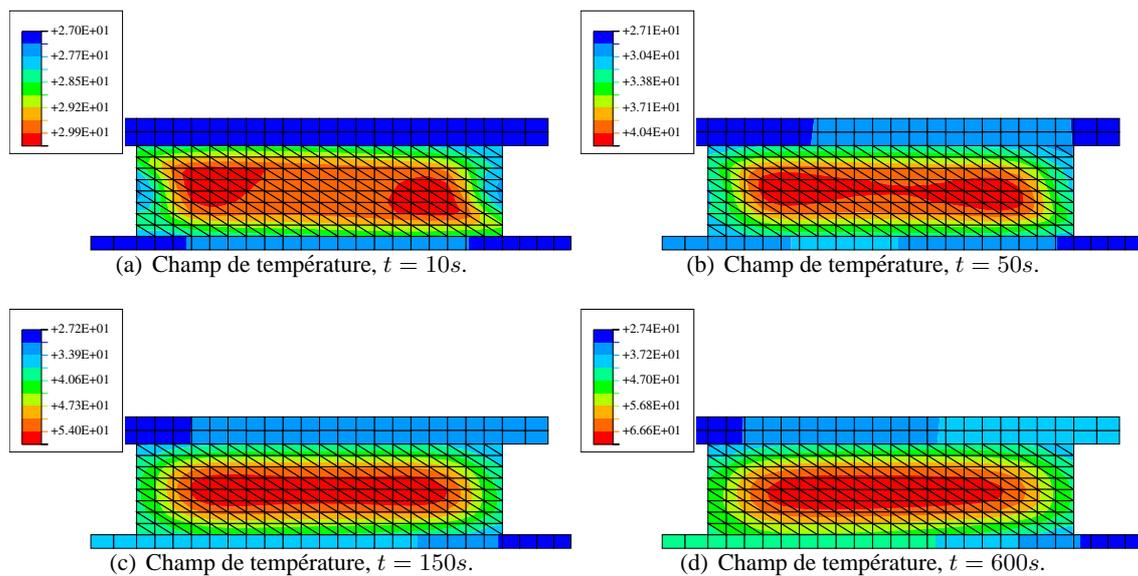


FIG. 4.11 – Évolution du champ de température ($\alpha = 0.704$; Température d'enceinte = 27°C).

4.5 Conclusion

Les paragraphes 1.3.6.1 et 1.3.6.2 mettent en exergue une influence réciproque des phénomènes thermiques et mécaniques, confirmant ainsi la nécessité de rendre compte du couplage thermo-mécanique. Le point de départ de l'approche proposée est la réécriture de l'inégalité de Clausius-Duhem (dans les différentes configurations) sans l'hypothèse d'isothermie spatiale et temporelle (*i.e.* sans \mathcal{H} . 2.1). Considérant alors les contributions mécaniques et thermiques à la dissipation totale séparément positives, le principe de normalité, appliqué à chacune, donne les lois de comportement thermique et mécanique, respectivement la loi de Fourier et les différents comportements mécaniques établis dans les chapitres 2 et 3. Les différentes équations constitutives sont obtenues et un soin particulier est apporté à l'équation de la chaleur mettant en évidence, en plus des sources thermiques, des termes inhérents à la mécanique (la dissipation intrinsèque) et au couplage.

Afin de simplifier le modèle, les termes de couplage et la dilatation thermique sont négligés. Ceci permet alors de voir le problème thermo-mécanique comme une succession de couples mécaniques-thermiques à résoudre. Pour chaque couple, l'impact de la thermique sur le problème mécanique se fait par des propriétés qui dépendent de la température et, réciproquement, la thermique se voit influencée par des résolutions réalisées sur la géométrie déformée et en considérant la dissipation mécanique comme terme source.

Par la suite, nous intéressant aux chargements mécaniques cycliques (ceux rencontrés dans le cas d'une sollicitation de fatigue par exemple), le modèle est particularisé dans ce contexte. Profitant de la périodicité de la sollicitation, le problème thermo-mécanique est toujours vu comme une succession de couples mécaniques-thermiques à résoudre, mais avec des temps physiques de résolution différents. Les problèmes mécaniques, dont les paramètres dépendent toujours de la température, sont maintenant résolus jusqu'à obtention d'une dissipation stabilisée. Intervient alors la résolution du problème thermique qui est faite jusqu'à l'obtention d'une évolution significative de la température et en prenant comme terme source la moyenne sur le temps de la dissipation intrinsèque. Cette approche met en évidence une surévaluation de la contribution mécanique dans le calcul thermique, un recalage consistant à ne considérer que 70%, environ, de la dissipation mécanique moyenne comme terme source de l'équation de la chaleur donne alors une bonne cohérence des résultats expérimentaux et numériques sur l'ensemble du temps de modélisation, pour différents points de l'éprouvette et pour deux températures d'enceinte différentes. Cette approche permet un large gain de temps de calcul, ce dernier résultant principalement de la forte non-linéarité du comportement mécanique.

Pour revenir sur l'apport initial surestimé de la dissipation dans le calcul thermique, un début de justification a été proposée par Méo (2000b); Boukamel (2006), pour qui une partie de la dissipation mécanique peut être utilisée lors d'un endommagement ou d'une éventuelle réorganisation moléculaire. Elle peut, sans doute, être aussi à rapprocher des termes de couplage qui n'ont pas été pris en compte dans le calcul. Or, ces termes interviennent, tout comme la dissipation mécanique, comme termes sources dans l'équation de la chaleur. De plus cette approximation est largement discutable, car comme le montre Caborgan (2011), ces derniers peuvent influencer sur la réponse thermo-mécanique d'un élastomère

Fatigue des élastomères

Dans ce chapitre, deux études sont abordées. Elles trouveront néanmoins une concomitance à la fin de celui-ci.

Dans un premier temps, on propose deux campagnes d'analyses fractographiques. La première tend à montrer l'influence de la surface spécifique des charges utilisées dans le renforcement d'un HNBR (cf. § 1.2.3) en s'intéressant particulièrement aux caractéristiques de la zone de propagation stable présentant une morphologie originale en forme de rosace. La seconde s'intéresse aux faciès de rupture d'éprouvettes en CR (cf. § 1.2.4) obtenus sous sollicitations de fatigue. Celles-ci sont uniaxiales de traction ou multiaxiales de traction-torsion. On étudie la zone d'initiation qui présente des languettes dont la densité semble, à force maximale fixée, d'abord augmenter avec le rapport de charge pour ensuite diminuer.

Par la suite, est présentée l'étude en fatigue sur CR dont sont tirés les faciès précédemment utilisés en fractographie. On met en avant un critère en dissipation (au sens de l'aire de l'hystérésis) donnant de bonnes corrélations pour les deux types de chargements (i.e. traction ou traction-torsion). Cette grandeur est aussi comparée à d'autres critères classiques de la littérature. Une représentation de Haigh dans le cas de la traction met en évidence un changement de régime de fatigue pour une valeur donnée du rapport de charge. Celle-ci semble être à rapprocher du changement de comportement observé pour la densité de languettes précédemment évoqué. Enfin, dans le cas multiaxiale, une approche originale du diagramme de Haigh est développée.

PLAN DU CHAPITRE 5

5.1	Introduction et contexte	129
5.2	Fractographie	131
5.2.1	Introduction	131
5.2.2	Étude du HNBR et influence du type de charges renforçantes	131
5.2.3	Étude du CR	134
5.2.3.1	Chargement axiale (traction)	135
5.2.3.2	Chargement multiaxial (traction/torsion)	141
5.2.3.3	Bilan	142
5.3	Fatigue du CR	143
5.3.1	Introduction	143
5.3.2	Chargement uniaxial (traction)	145
5.3.2.1	Conditions expérimentales	145
5.3.2.2	Courbes S-N	146
5.3.2.3	Diagramme de Haigh	149
5.3.3	Chargement multiaxial (traction/torsion)	150
5.3.3.1	Cas de chargement	150
5.3.3.2	Critères étudiés	151
5.3.3.3	Résultats	152
5.3.3.4	Diagramme de Haigh	155
5.4	Conclusion	157

5.1 Introduction et contexte

Ce chapitre traite de la fatigue des élastomères. Il sera divisé en deux parties principales. La première s'appuie sur des études fractographiques menées dans le cadre des thèse de Séverine Gauchet (Gauchet, 2007) relative à l'étude de l'influence du type de noir de carbone sur la tenue en fatigue d'un HNBR (cf. § 1.2.3) et de celle de Jean-Louis Poisson (Poisson, 2012) traitant du comportement en fatigue d'un CR sous chargement multiaxial. Quant à la seconde partie, il a été choisi, dans un soucis de concision, de principalement s'attarder sur l'étude en fatigue menée par Jean-Louis Poisson dans laquelle différents critères en amorçage de fissure sont comparés dans des approches globales, locales et pour des chargements uniaxiaux de traction ou mutiaxiaux couplant traction et torsion. Dans cette dernière section, il sera aussi fait référence aux travaux de Florian Lacroix (Lacroix, 2004) auxquels j'ai collaboré sans pour autant participer à l'encadrement.

L'ensemble des études expérimentales développées dans ces trois travaux a été réalisé sur des éprouvettes de type "diabolo" dont la description géométrique est donnée FIG. 5.1.

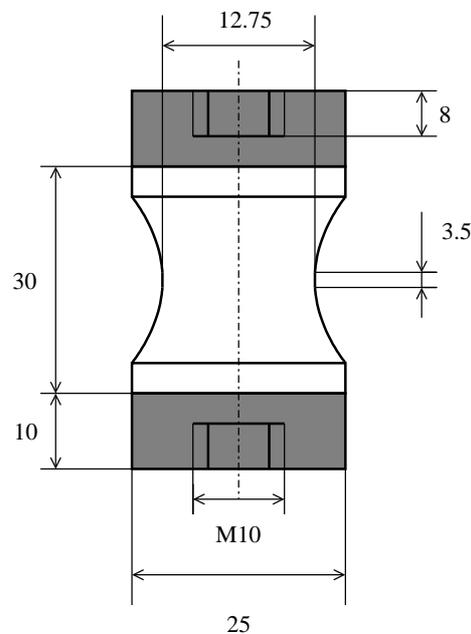


FIG. 5.1 – Description d'une éprouvette diabolo (dimension en *mm*).

Dans ce chapitre seront notés :

- R_σ le rapport de charge en force,
- R_ε le rapport de charge en déplacement,
- σ_{nom} la contrainte nominale appliquée au diabolo sous chargement de traction.

5.2 Fractographie

5.2.1 Introduction

Une des voies explorées afin d'améliorer la tenue en fatigue des matériaux élastomères est l'étude *post mortem* de leurs faciès de rupture. Ceci peut aider à comprendre les phénomènes microscopiques (mécaniques, thermiques, chimiques...) mis en jeu et ainsi conduire à des choix plus opportuns de matrice, des améliorations dans le processus de fabrication, le choix des charges renforçantes...

Nombreuses sont les études portant sur ce sujet, on peut notamment citer [Bhowmick et al. \(1979a\)](#); [Le Cam et al. \(2004\)](#); [Le Cam \(2005a\)](#); [Le Cam et al. \(2008\)](#); [Legorju-Jago \(1998\)](#); [Legorju et Bathias \(2002\)](#) pour du caoutchouc naturel (NR), les travaux de [Setua et De \(1983\)](#) sur du SBR, de [Bhowmick et al. \(1979b\)](#); [Bascom \(1977a,b\)](#) sur du NBR, [Chakraborty et al. \(1982\)](#) sur du XNBR... Au LMR, les études se sont principalement portées sur :

- le CR pour lequel [Lacroix \(2004\)](#) s'est attaché à comprendre les mécanismes d'endommagement sous sollicitations de fatigue, ces travaux ont ensuite largement été complétés par [Poisson \(2012\)](#) qui s'est efforcé à mettre en évidence l'influence du rapport de charge sur le faciès de rupture
- et le HNBR pour lequel [Gauchet \(2007\)](#) a montré le lien existant entre la surface spécifique des charges renforçantes, la durée de vie et l'aspect du faciès de rupture.

5.2.2 Étude du HNBR et influence du type de charges renforçantes

Comme cela a été rappelé dans le paragraphe 1.2.3 du chapitre 1, Séverine Gauchet ([Gauchet, 2007](#)) s'est, entre autre, attachée à montrer l'influence de différents noirs de carbone sur le comportement en fatigue du HNBR. Les charges utilisées ainsi que leurs surfaces spécifiques sont données TAB. 1.2.

Toutes les micrographies présentées ci-après ont été obtenues par rupture en fatigue sous les conditions suivantes de chargements mécaniques et thermiques :

$$\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa \quad R_\sigma = 0.1 \quad f = 5 Hz \quad T = 120^\circ C \quad (5.1)$$

De manière assez classique, l'observation des faciès de rupture laisse apparaître 3 zones :

- une zone d'amorçage, qui est souvent sur ou à proximité d'un "grain" au coeur de la zone utile de l'éprouvette diabolo (*cf.* FIG. 5.1). Il est intéressant de constater que site prendra des tailles différentes suivant le type de charge et qu'autour de lui des languettes et des micro-fissures apparaissent.

On constate TAB. 5.1 et FIG. 5.2.2 que plus la surface spécifique du noir¹ est faible plus :

- la taille de l'amorçage est faible,
- les micro-fissures amorcées sont nombreuses déviées et branchées,
- la présence de languettes augmente.

Noir de carbone	N550	N990	S6000
Taille de l'amorçage	≈ 50 μm	≈ 90 μm	≈ 70 μm
Densité de languettes	+++	+	++
Présence de micro-fissures	+++	+	++

TAB. 5.1 – Caractéristiques morphologiques de la zone d'amorçage (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5 Hz$, $T = 120^\circ C$).

¹Pour mémoire, on rappelle que $S_{spécifique}^{N550} > S_{spécifique}^{S6000} > S_{spécifique}^{N990}$, voir TAB. 1.2.

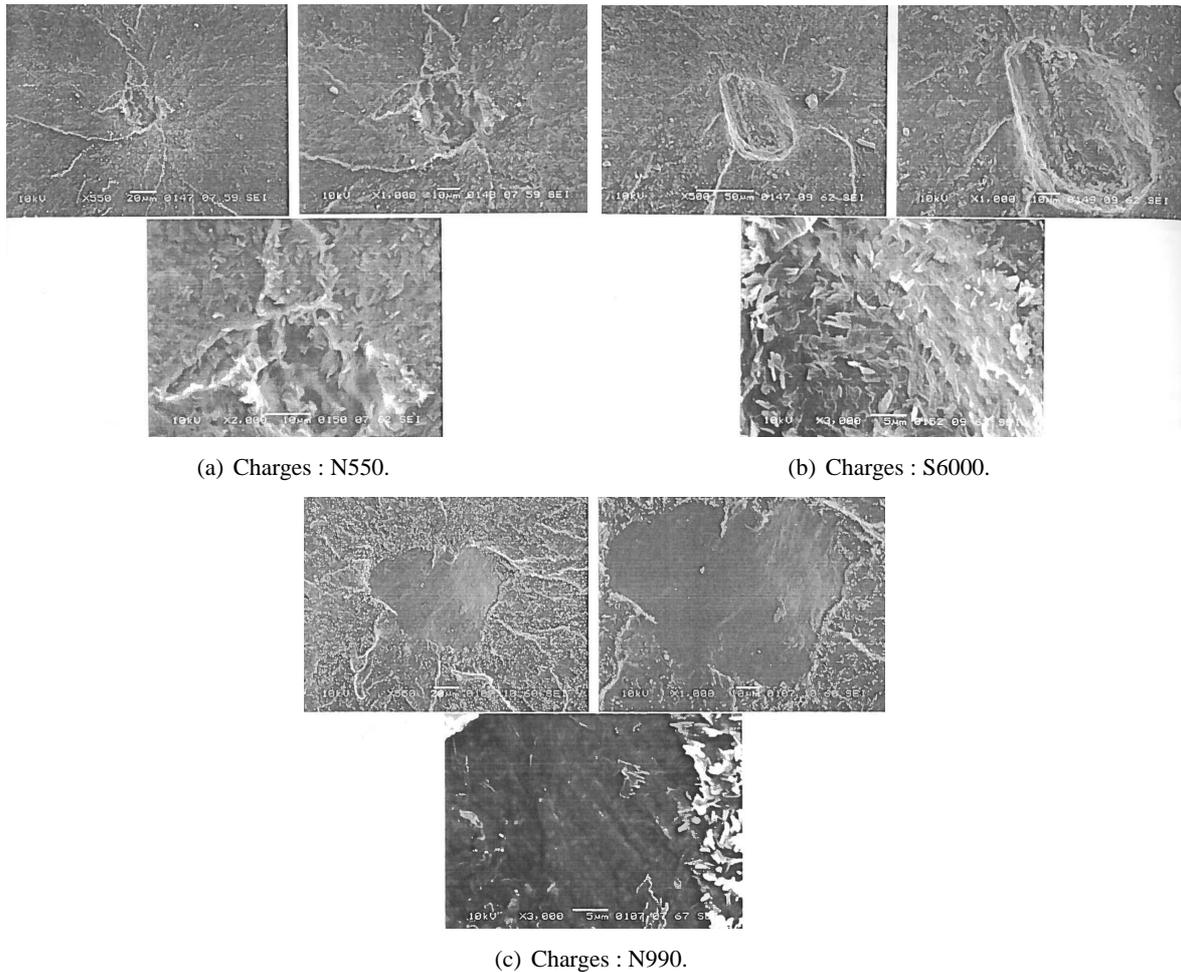


FIG. 5.2 – Micrographie M.E.B. de la zone d’amorçage du faciès de rupture par fatigue de mélanges HNBR (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5 Hz$, $T = 120^\circ C$).

- une zone de propagation stable, qui a pour originalité de former une rosace autour de la zone d’amorçage (FIG. 5.3). Le cheminement de la fissure se fait classiquement, à savoir perpendiculairement à la direction de sollicitation indiquant un mode d’ouverture et de propagation de type I. Dans ce plan, les fissures se propagent initialement dans la direction donnée par l’amorçage pour s’incurver et se rejoindre formant ainsi un pétale de la rosace. Sur le contour des pétales on constate la présence de languettes.
- une zone de rupture finale qui est plus lisse que la précédente. Des macro-fissures s’initient en périphérie de la zone de stabilité et débouchent en subsurface du diabolo. Ces dernières sont assimilables à des lignes de déchirement.

L’étude de la zone de propagation stable (*i.e.* celle présentant la structure en rosace) met en évidence une claire influence des charges comme le montre les figures 5.4 et 5.5. En ayant en tête les surfaces spécifiques des charges, on constate que l’étendue de la zone de propagation stable est d’autant plus grande que la surface spécifique est petite, qu’il en va de même pour le nombre de pétales composant la rosace et que la tendance est inversée pour la taille de ces derniers. Séverine Gauchet constate, de plus, que l’abaissement de la surface spécifique s’accompagne d’une diminution de la rugosité au niveau macroscopique et d’une augmentation celle-ci au niveau microscopique.

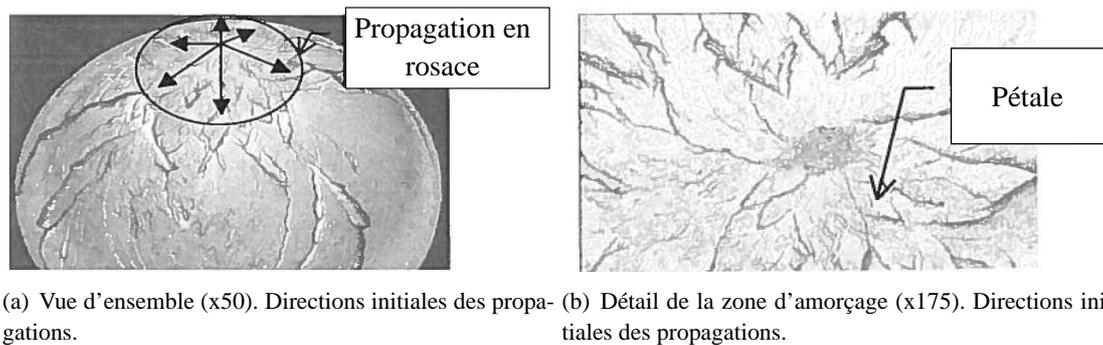


FIG. 5.3 – Observations au microscope optique du faciès de rupture par fatigue d'un mélange HNBR chargé en N550 (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5 Hz$, $T = 120^\circ C$).

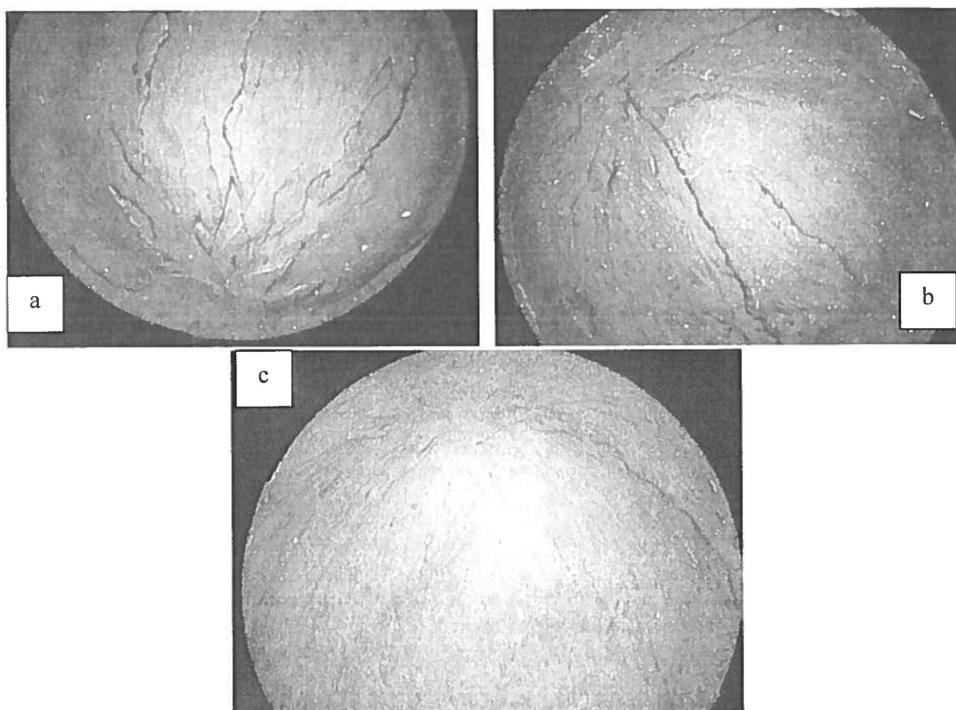


FIG. 5.4 – Influence du type de noir de carbone sur la morphologie du faciès de rupture du HNBR, dans la zone de propagation stable : (a) N550, (b) S6000, (c) N990. Vues globales (x25) (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5 Hz$, $T = 120^\circ C$).

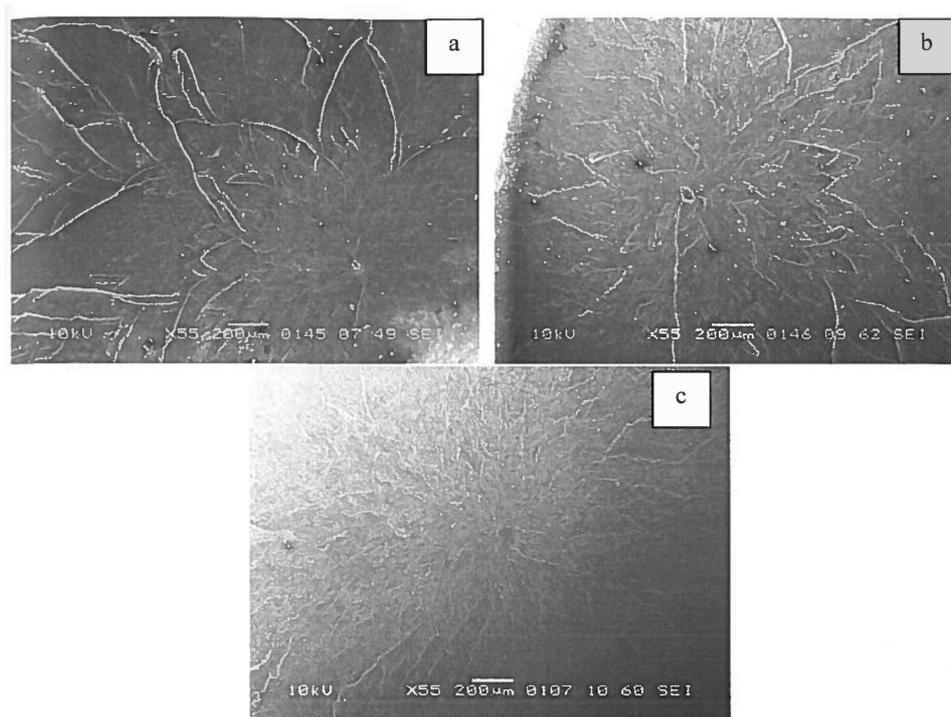


FIG. 5.5 – Influence du type de noir de carbone sur la morphologie du faciès de rupture du HNBR, dans la zone de propagation stable : (a) N550, (b) S6000, (c) N990. Détails (x55) (Gauchet, 2007) (pilotage en contrainte, $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$, $R_\sigma = 0.1$, $f = 5 Hz$, $T = 120^\circ C$).

Il est à noter que seuls les principaux résultats de Gauchet (2007) ont été présentés ici. Cette dernière a pu aussi étudier la zone de rupture finale ainsi qu'une zone de transition entre celle-ci et son homologue stable. Elle a en outre montré une influence des conditions des niveaux de chargements thermiques et mécaniques sur les faciès de rupture. Un abaissement de la contrainte nominale maximale entraîne (*i.e.* passage de $\sigma_{nom}^{max} = 1.45 MPa$ à $1.25 MPa$) :

- une zone d'amorçage plus grande,
- une zone de propagation stable plus étendue,
- des pétales en plus grand nombre et de taille plus petite,
- une densité et une étendue plus importantes des languettes.

Quant à la température, sa diminution (*i.e.* passage de $T = 120^\circ C$ à $20^\circ C$) donne :

- un élargissement de la zone d'amorçage,
- des lignes de déchirement plus nombreuses
- des pétales de plus petite taille et plus nombreux,
- une diminution drastique (voir une disparition dans le cas du S6000) des languettes.

5.2.3 Étude du CR

Dans le cadre des travaux de thèse de Jean-Louis Poisson (Poisson, 2012) portant sur le CR (*cf.* § 1.2.4), une étude fractographique complète a été réalisée afin de qualifier l'influence du rapport de charge d'essais de fatigue menés en traction et de mettre en évidence les caractéristiques des faciès de rupture dans le cadre de chargements multiaxiaux.

Cette approche de la fatigue peut être considérée comme préliminaire et complémentaire à celle plus classique présentée dans le paragraphe 5.3.

5.2.3.1 Chargement axiale (traction)

Dans un premier temps, nous avons voulu caractériser l'influence du rapport de charge en traction sur le faciès de rupture. Ainsi un travail a été réalisé sur des éprouvettes de type diabolo (voir FIG. 5.1) soumises à des chargements pilotés en force ² :

$$F_{max} = 150N \quad f = 5Hz \quad T = 20^{\circ}C \quad R_{\sigma} \in [-0.3; 0.4] \quad (5.2)$$

La figure 5.6 donne quelques exemples de faciès obtenus pour différents R_{σ} . Les faciès les plus rugueux semblent donner les durées de vie les plus importantes.

Nous avons été amenés à distinguer les faciès obtenus pour des rapports de charge strictement négatifs de ceux obtenus pour des valeurs positives. Les premiers présentent des reliefs très marqués alors que les seconds sont quasiment plans. Pour ces derniers, il est proposé de distinguer 4 zones (cf. FIG. 5.7) une zone d'amorçage (Ⓐ) qui se trouve soit en surface à proximité du plan de joint de l'éprouvette, soit sur ou à proximité d'une inclusion, une zone de propagation stable (Ⓑ), une zone de fin de vie (Ⓒ) et une zone de rupture catastrophique (Ⓓ).

Par la suite, l'étude proposée ne s'attachera qu'à décrire la zone d'amorçage pour des rapport $R_{\sigma} \geq 0$. Nous renvoyons le lecteur vers le manuscrit de Poisson (2012) pour une description supplémentaire portant sur la zone de rupture catastrophique.

Si nous nous intéressons aux zones d'amorçage obtenues pour quatre rapports de charges positifs différents et décrites en figure 5.8, il est possible de voir que la rupture des 3 premières s'est initiée en surface (FIG. 5.8(a) à 5.8(c)) et autour d'un défaut interne pour la quatrième (FIG. 5.8(d)). La figure 5.9 donne l'homologue de la figure 5.8, mais en électrons rétrodiffusés, mettant en évidence des "taches" noires. Le zoom sur celles-ci, présenté sur les figures 5.11(a-d), les caractérise comme étant des languettes. Ce phénomène a déjà été rencontré par Legorju-Jago (1998) dans le cas du NR, Lacroix (2004) dans celui du CR – qui rappelons-le est le point de départ de l'étude menée par Jean-Louis Poisson – et comme nous l'avons vu précédemment par Gauchet et al. (2006); Gauchet (2007) sur différents HNBR. Des observations complémentaires faites au détecteur d'électrons secondaires sont données en figures 5.11(e-h). Elles montrent une influence du rapport de charge sur les morphologies des languettes qui sont saillantes pour $R_{\sigma} = 0$, puis semblent s'arrondir avec l'augmentation de celui-ci, pour complètement disparaître pour une valeur de 0.4.

Concernant ce dernier phénomène de disparition de languettes pour les rapports de charge importants, une présentation qualitative de son influence sur la densité de languettes présentes en zone d'amorçage est faite FIG. 5.10. Celle-ci quantifie les observations au M.E.B. et suggère bien une atténuation de leur présence pour des rapports de charge dépassant 0.2. Ainsi, cette évolution laisse penser à un changement de régime d'endommagement une fois cette valeur passée.

²Ces caractéristiques seront plus amplement détaillées dans le paragraphe 5.3.2.1 de ce chapitre traitant des résultats en fatigue.

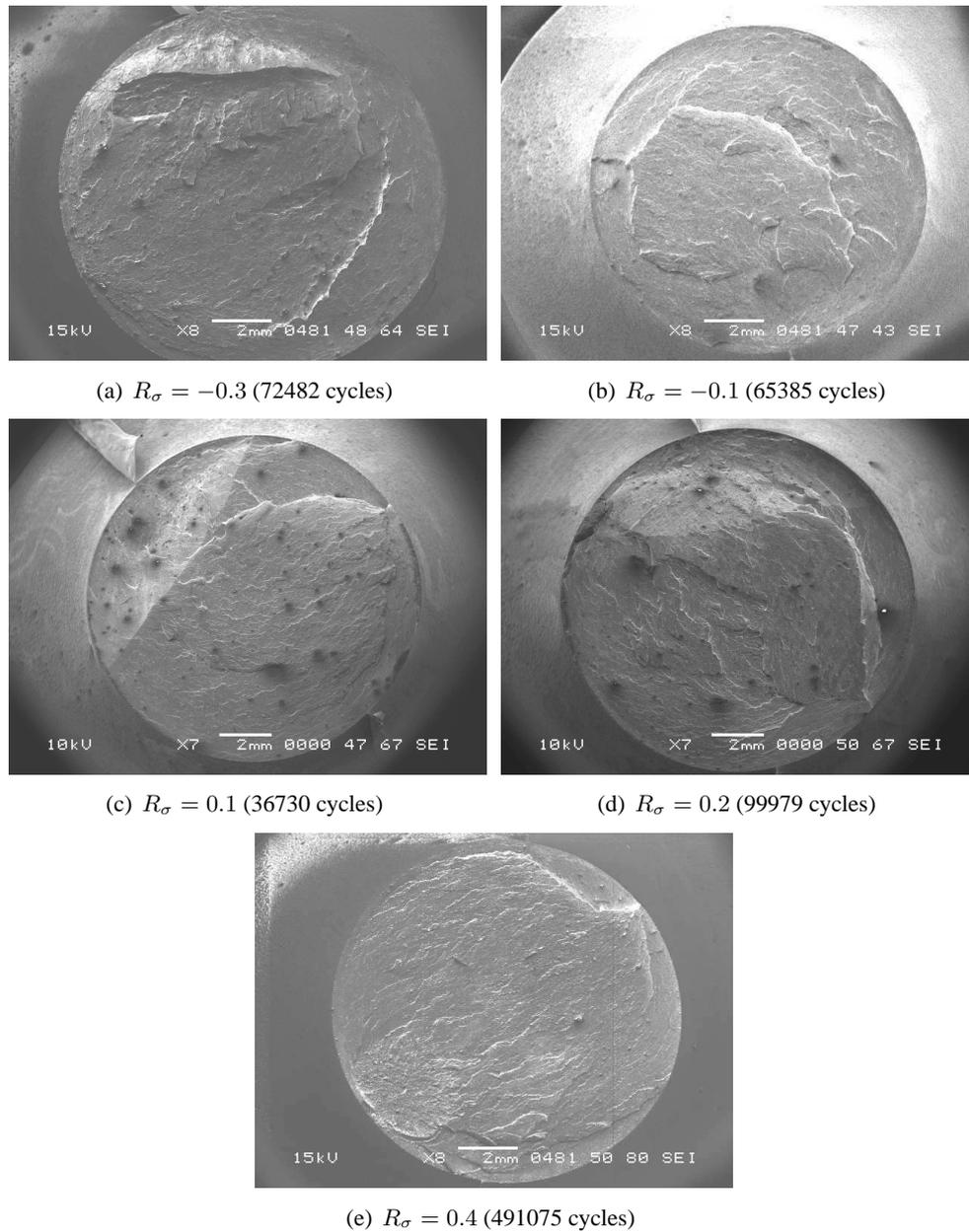
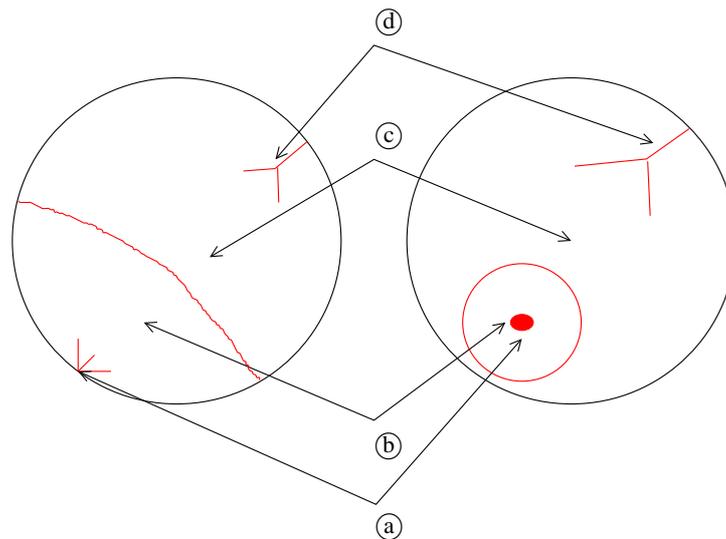
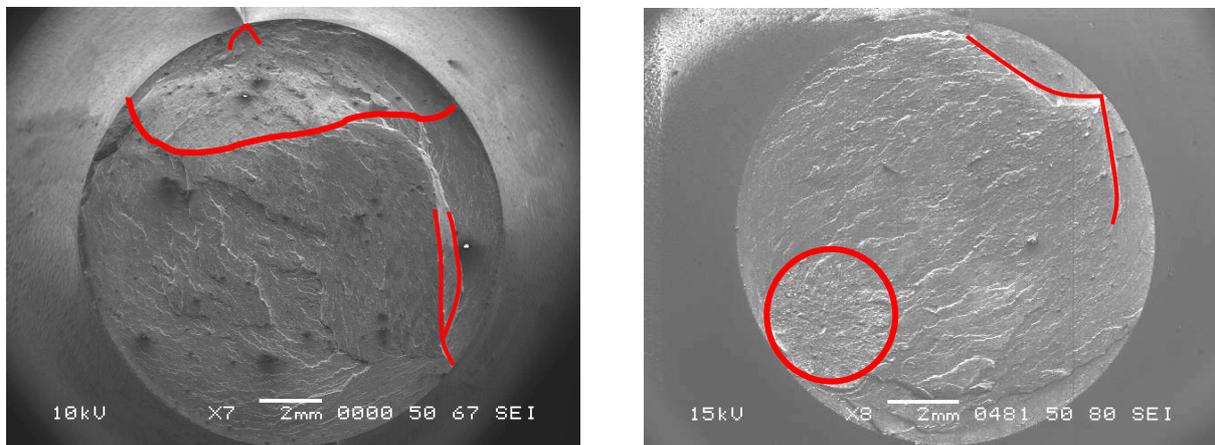


FIG. 5.6 – Observations au M.E.B. de la zone d’amorçage (électrons secondaires) de faciès de rupture.



(a) Schématisation du faciès et principales zones de fatigue.



(b) 2 Exemples de faciès.

FIG. 5.7 – Faciès de rupture d'éprouvettes (traction, $(R_\sigma \geq 0)$) : (a) zone d'amorçage de fissure, (b) zone de propagation stable de fissure, (c) zone de fin de vie, (d) zone catastrophique de déchirement.

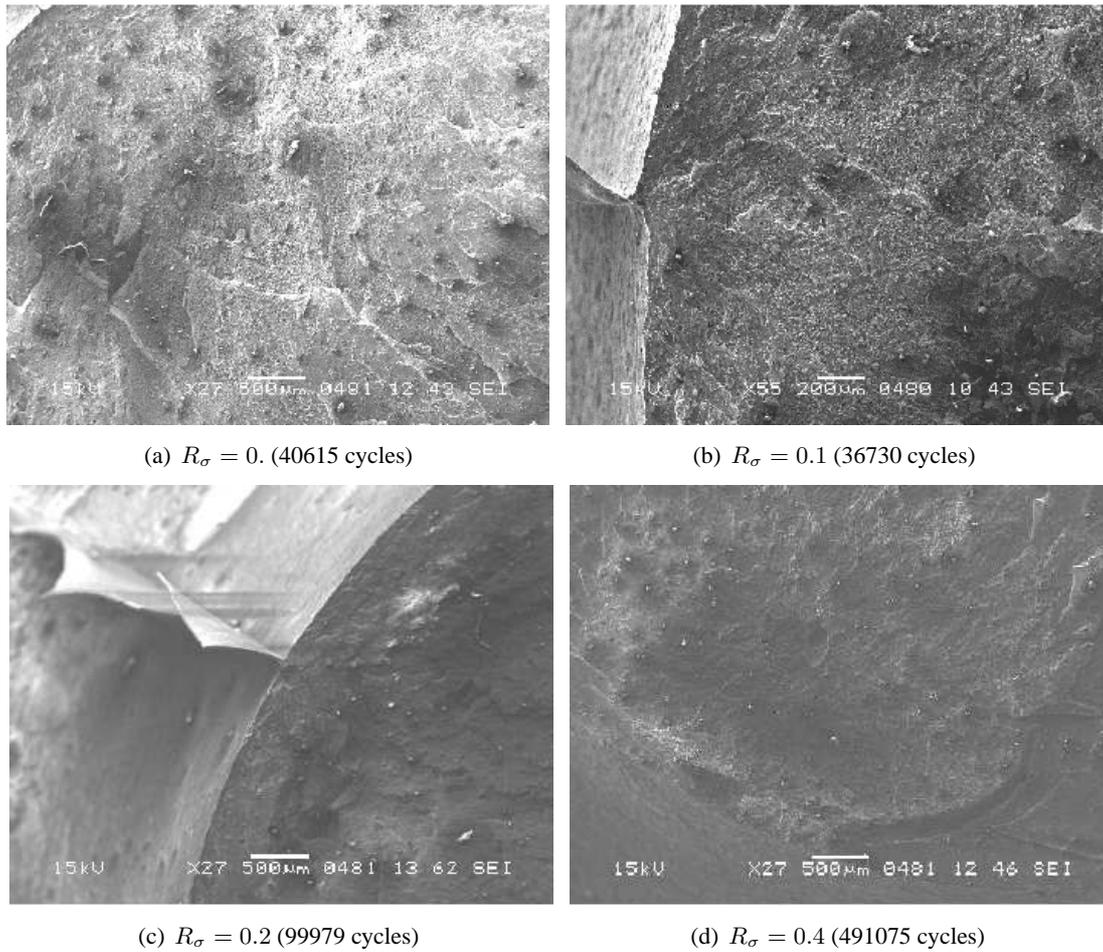


FIG. 5.8 – Observations au M.E.B. de la zone d’amorçage (électrons secondaires, x30).

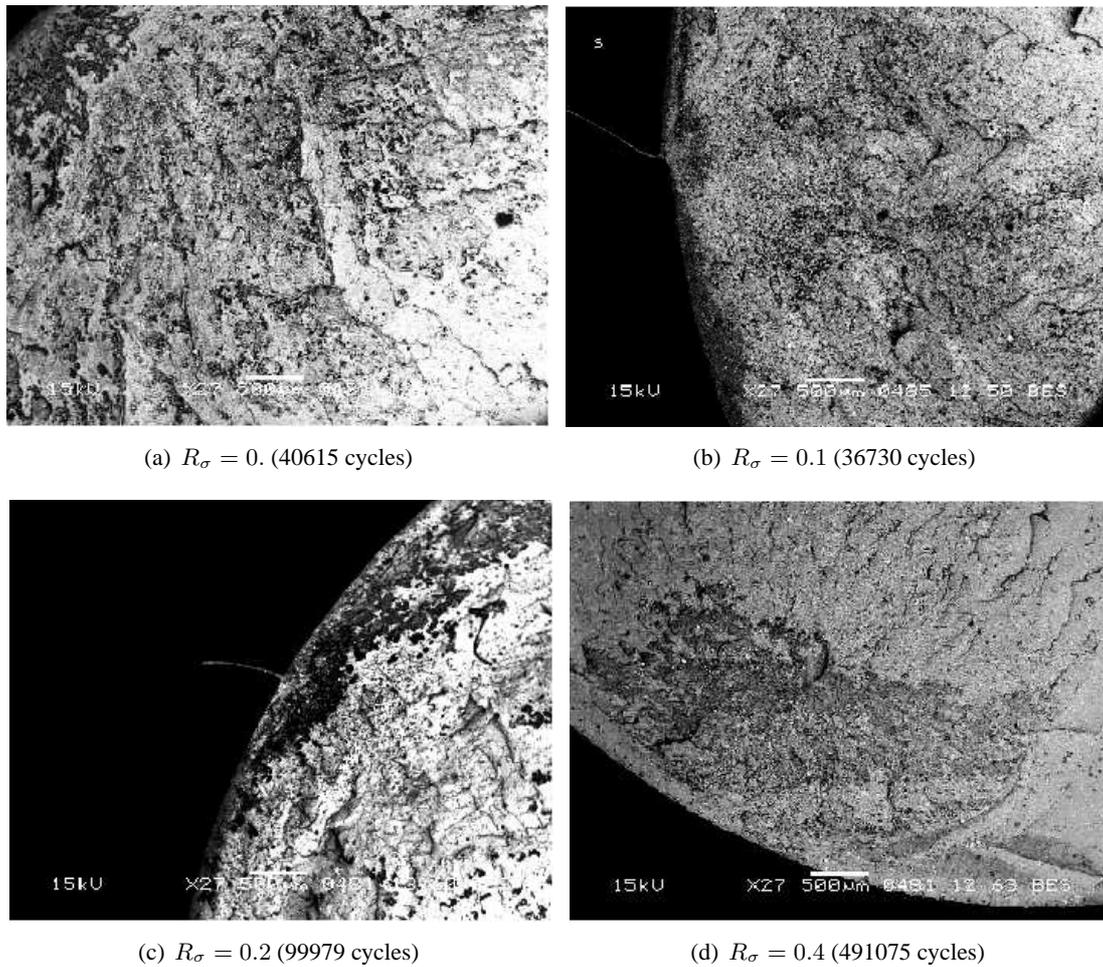


FIG. 5.9 – Observations au M.E.B. de la zone d’amorçage (électrons rétrodiffusés, x30).

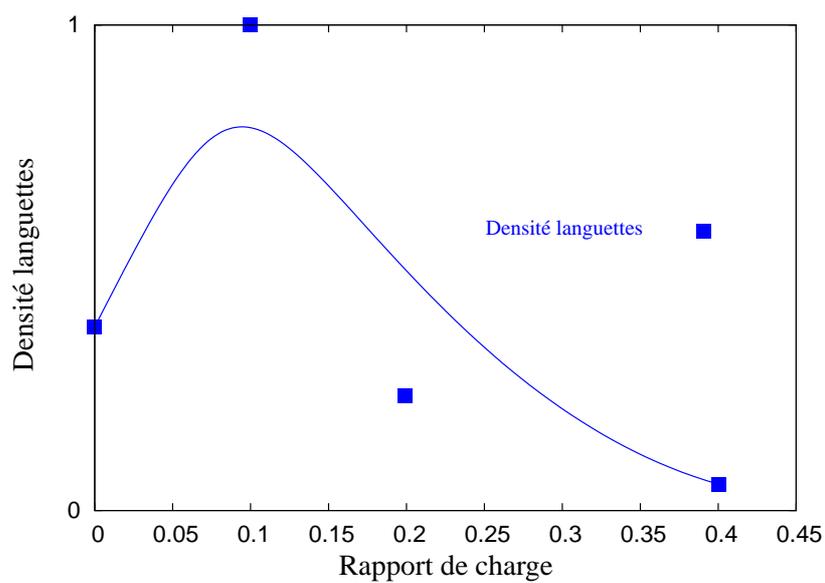
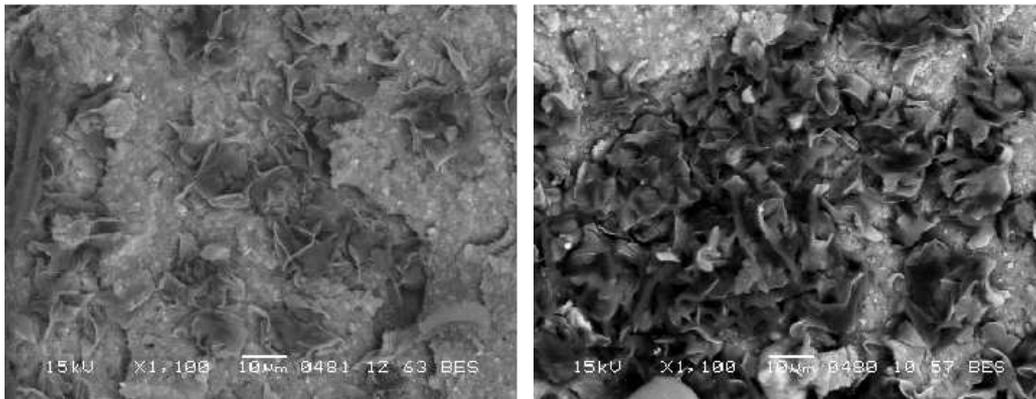
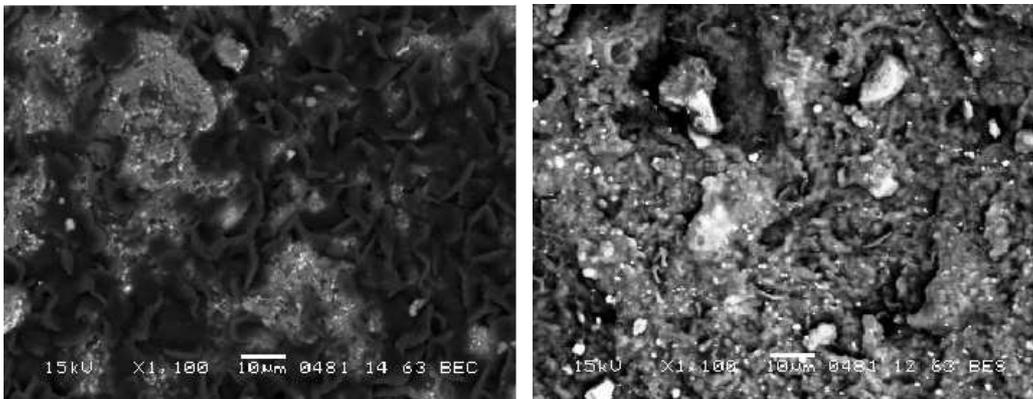


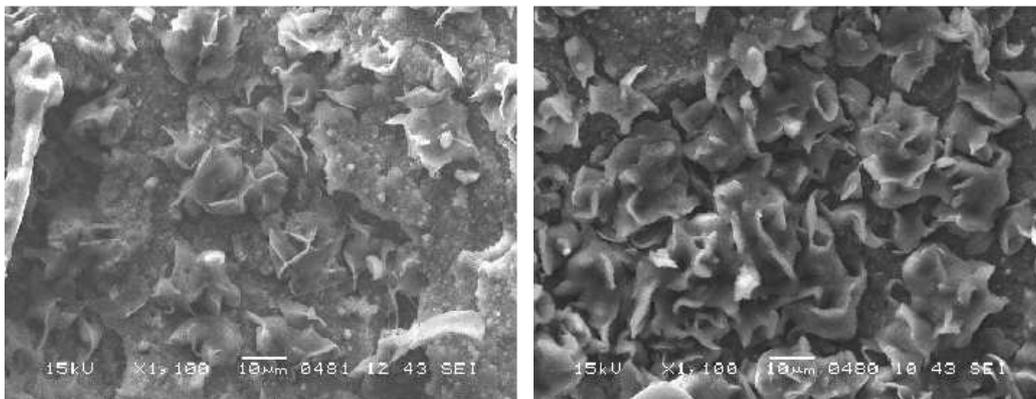
FIG. 5.10 – Influence du rapport de charge sur la densité de languettes.



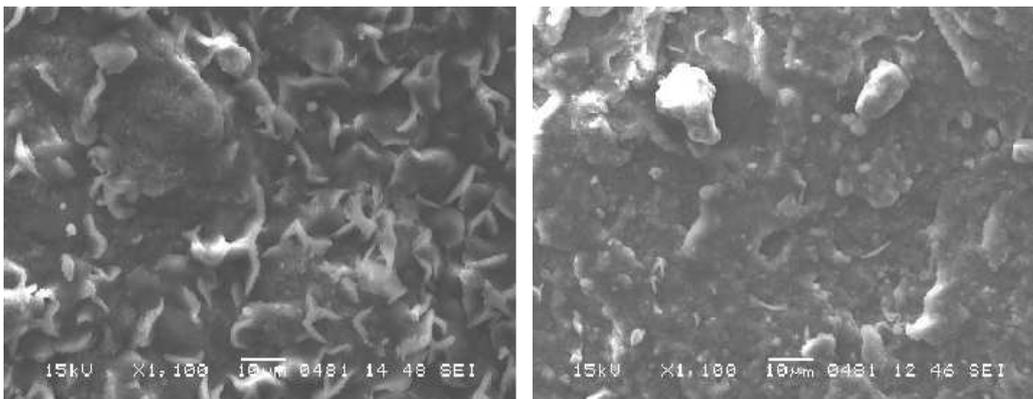
(a) $R_\sigma = 0.$, électrons rétrodiffusés (40615 cycles). (b) $R_\sigma = 0.1$, électrons rétrodiffusés (36730 cycles).



(c) $R_\sigma = 0.2$, électrons rétrodiffusés (99979 cycles). (d) $R_\sigma = 0.4$, électrons rétrodiffusés (491075 cycles).



(e) $R_\sigma = 0.$, électrons secondaires (40615 cycles). (f) $R_\sigma = 0.1$, électrons secondaires (36730 cycles).



(g) $R_\sigma = 0.2$, électrons secondaires (99979 cycles). (h) $R_\sigma = 0.4$, électrons secondaires (491075 cycles).

FIG. 5.11 – Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (x1100).

5.2.3.2 Chargement multiaxial (traction/torsion)

Les différents faciès présentés dans ce paragraphe ont été observés *post mortem* suite à des essais de fatigue sur éprouvettes diabolo (voir FIG. 5.1) réalisés dans le cadre d'une campagne sous chargements multiaxiaux couplant traction et torsion. Les ruptures étudiées ci-après sont obtenues en imposant un déplacement et un angle sur l'armature supérieure de l'éprouvette tout en bloquant la partie inférieure :

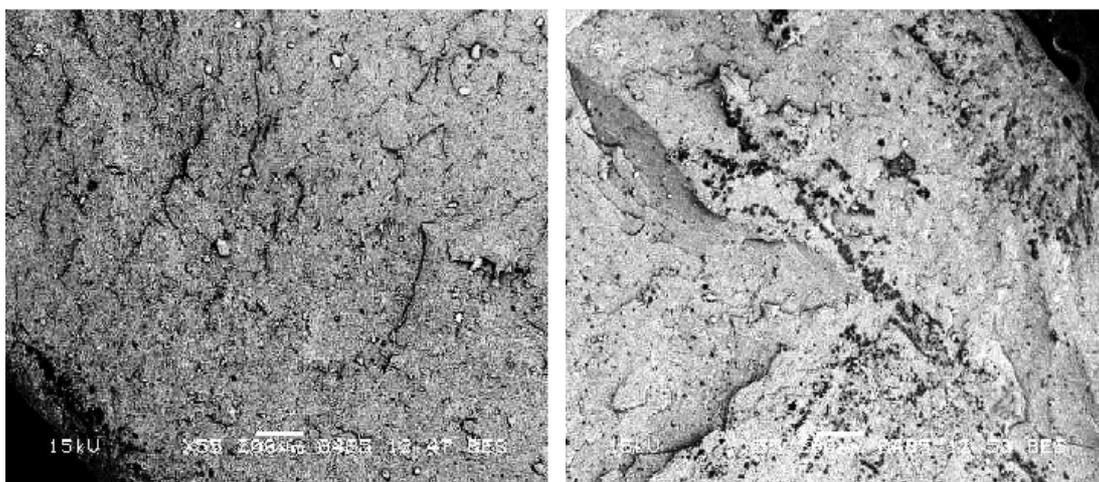
$$U_{max} = 20mm \quad \theta_{max} = 40 \quad f = 5Hz \quad T = 20^{\circ}C$$

$$\delta(\text{angle de déphasage}) \in \{0^{\circ}; 90^{\circ}; 180^{\circ}\} \quad R_{\varepsilon} = \frac{d_{min}}{d_{max}} = \frac{\theta_{min}}{\theta_{max}} \in [-0.2; 0.2] \quad (5.3)$$

Comme pour le cas de chargement de traction évoqué dans le paragraphe précédent, ces conditions expérimentales seront plus longuement décrites dans le paragraphe traitant des résultats en fatigue multiaxiale (§ 5.3.3.1).

Les premières observations macroscopiques (FIG. E.1) ou à faible grossissement (FIG. E.2) conduisent à une typologie de rupture quasi identique à celle rencontrée en traction uniaxiale et schématisée sur la figure 5.7. À ces échelles, tout comme en traction, le faciès le plus rugueux correspond encore une fois à la plus grande durée de vie.

La figure 5.12, donnant un grossissement plus important de la zone d'amorçage, permet d'en comparer sa morphologie pour des éprouvettes soumises à des chargements multiaxiaux différents. On constate une présence de languettes plus marquée pour un déphasage à 180° entre traction et torsion et que tout comme en traction (*cf.* FIG. 5.10), une présence plus importante de languettes correspond à une plus faible durée de vie. La figure 5.13 propose de zoomer plus avant sur cette zone révélant une densité de languettes inférieure à celle obtenue en traction. De plus, les formes obtenues sont différentes pour les deux déphasages observés (*i.e.* $\delta = 0^{\circ}$ et $\delta = 180^{\circ}$). Celles obtenues suite à des chargements proportionnels semblent être plus regroupées et de forme plus saillante, tandis que celles créées suite à une sollicitation déphasée sont plus nombreuses, plus petites et réparties de manière plus homogène.



(a) $\delta = 0^{\circ}$ (74700 cycles).

(b) $\delta = 180^{\circ}$ (41875 cycles).

FIG. 5.12 – Observations au M.E.B. de la zone d'amorçage (électrons retrodiffusés, x55) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm$, $\theta_{max} = 34^{\circ}$, $R_{\varepsilon} = 0.1$).

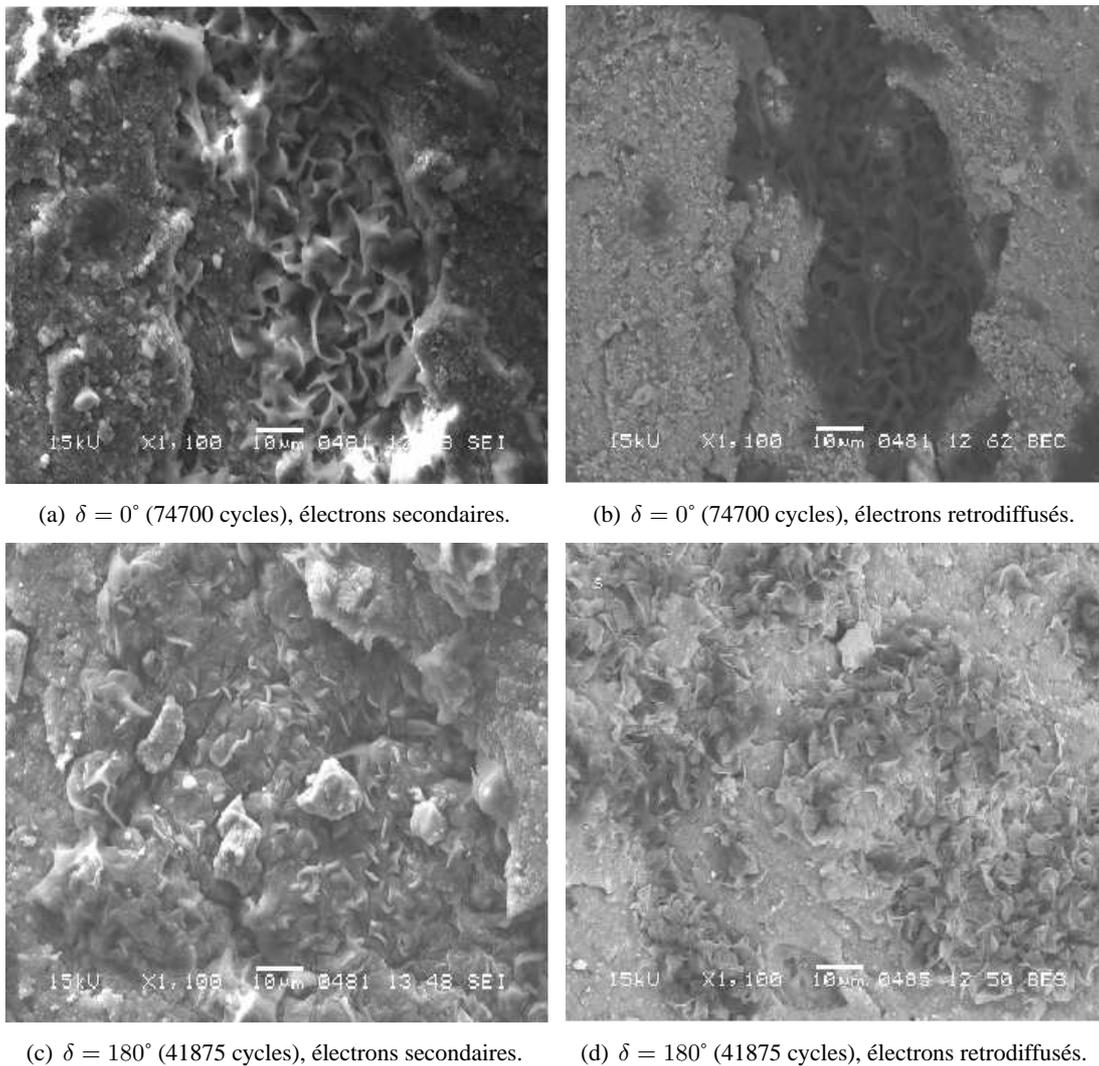


FIG. 5.13 – Observations au M.E.B. de la zone d’amorçage ($\times 1100$) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm$, $\theta_{max} = 34^\circ$, $R_\epsilon = 0.1$).

5.2.3.3 Bilan

L’observation *post mortem* d’échantillons préalablement sollicités jusqu’à rupture permet de mettre en évidence l’apparition plus ou moins importante de languettes en zone d’amorçage, et ce quel que soit la nature du chargement traction ou traction-torsion. Une influence du niveau de chargement, ou plus précisément du rapport de charge est observé rendant possible de distinguer les faibles valeurs de celui-ci (*i.e.* ≤ 0.2) des plus élevées, les premières semblant conduire à des densités de languettes plus importantes dans la zone de naissance de la fissure. Ceci permet d’envisager un changement du régime de fatigue en fonction du rapport de charge. Nous verrons dans la section suivante qu’une corrélation pourra être faite entre l’évolution du nombre de languettes et la durée de vie étayant encore un peu plus l’hypothèse de ce changement de régime.

L’influence de la rotation – dans la gamme de sollicitation choisie dans notre étude – semble être négligeable sur la morphologie macroscopique de la surface de rupture. Par contre, à une échelle plus fine, on distingue tout de même un abaissement de la densité de languettes avec le déphasage.

5.3 Fatigue du CR

5.3.1 Introduction

Faisant suite à la prévision du comportement, la détermination des durées de vie des pièces en élastomère est un sujet présentant de nombreux enjeux industriels et un intérêt scientifique certain. Deux approches s'offrent à nous pour tenter d'appréhender leur réponse en fatigue : la propagation et l'amorçage. La première s'appuie sur les travaux de Griffith (1921) adaptés aux élastomères par Rivlin et Thomas (1953) puis étendus et mis à l'épreuve par Greensmith et Thomas (1955a,b); Greensmith (1960); Lake et Lindley (1965); Lindley (1972); Thomas (1960). Des travaux plus récents ont aussi été proposés par Mars (2001, 2003); Mars et Fatemi (2007, 2009). Au cours des travaux de thèse de Gauchet (2007); Poisson (2012), ce n'est pas cette approche qui a été choisie mais celle en amorçage dans le but de prévoir la durée de vie de pièces en HNBR ou CR initialement vierges (*a priori*) de tout défaut au moyen de courbes S-N et de diagrammes de Haigh.

REMARQUE 5.1

Comme nous l'avons déjà dit, pour des raisons de concision, seuls les travaux de Jean-Louis Poisson seront exposés par la suite. Ces travaux sont suffisamment généraux et explorent un large champ de recherches qui illustrent bien nos travaux en fatigue. Nous renvoyons le lecteur vers le manuscrit de Gauchet (2007) pour une étude complémentaire portant sur l'influence du noir de carbone sur la tenue en fatigue de matériaux à base de HNBR.

Au travers des différents travaux menés en collaboration au LMR (Lacroix, 2004; Lacroix et al., 2005; Méo et al., 2005, 2006; Ranganathan et al., 2009b), nous avons montré l'intérêt de critères énergétiques de fatigue afin de prévoir le comportement en fatigue des pièces en élastomère³. L'avantage majeur étant l'obtention d'une grandeur directement scalaire et naturellement issue de la mécanique des milieux continus. Deux voies ont été explorées, l'une privilégiant une approche expérimentale globale pour laquelle est calculée l'énergie dissipée au sens de l'aire de l'hystérésis obtenue, et une locale, qui en utilisant un modèle éléments finis permet l'obtention de la dissipation intrinsèque au cours du temps. Cette dernière n'étant pas géométriquement stable comme le montre les figures 5.14(a) à 5.14(e), c'est sa moyenne sur un cycle stabilisé qui est choisie comme critère (voir FIG. 5.14(f)). Ces deux approches ont donné des résultats encourageants. La première semble unifier sur une seule courbe S-N le comportement en fatigue obtenu pour des sollicitations de différentes fréquences comme l'illustre la figure 5.15(b), ce qui n'est pas le cas pour la représentation classique en déformation alternée (*cf.* FIG. 5.15(a)). La seconde met en exergue des zones présentant généralement des départs de fissure.

³L'intérêt de ce genre d'approches a aussi été étudié dans le cadre de matériaux métalliques (Ranganathan et al., 2008; Chalou et al., 2008; Ranganathan et al., 2009a; Chalou et al., 2009).

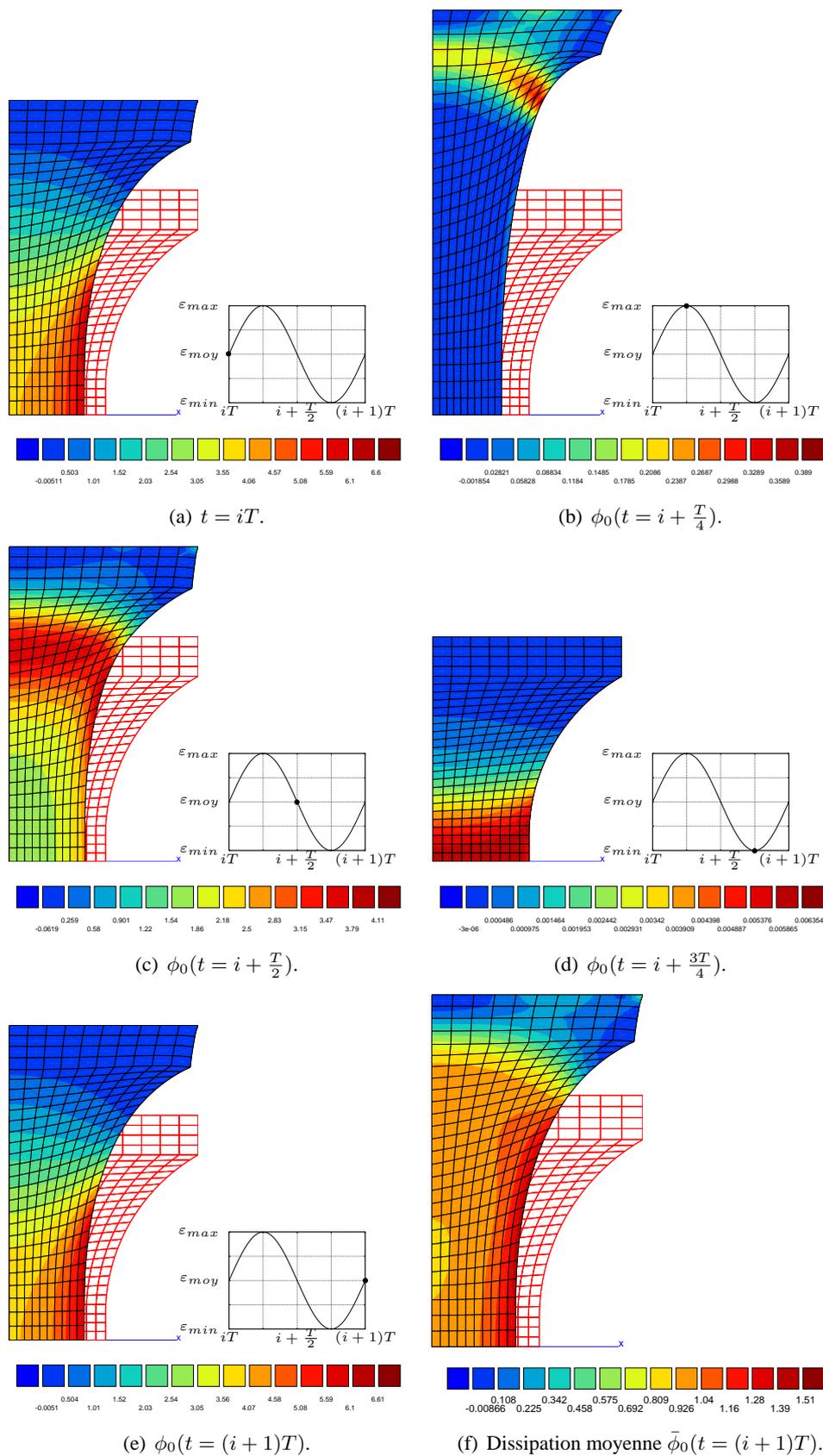


FIG. 5.14 – Évolution de la dissipation intrinsèque ($\phi_0(MPas^{-1})$) et dissipation moyenne sur un cycle stabilisé ($\bar{\phi}_0(MPas^{-1})$) sur un cycle stabilisé (i ème cycle).

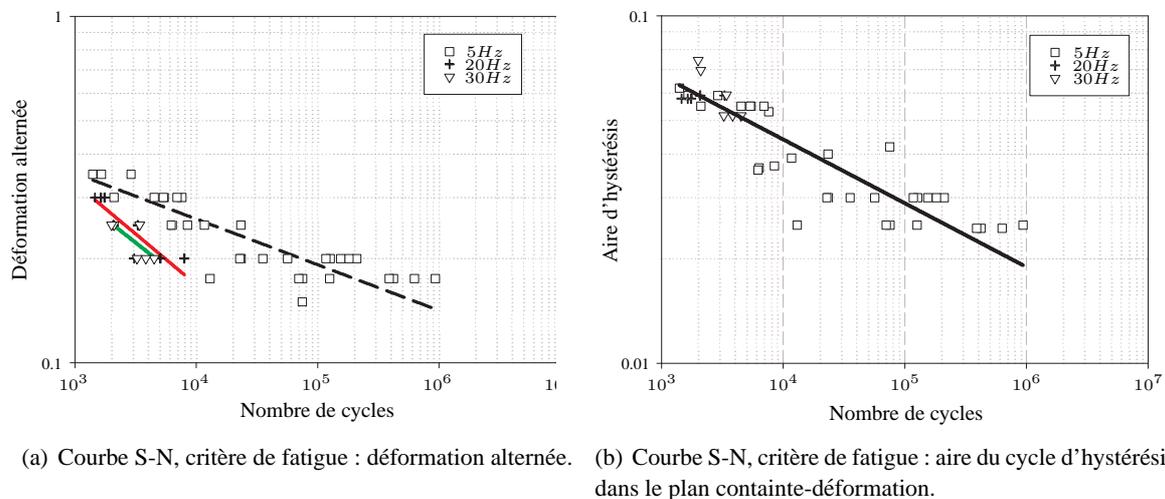


FIG. 5.15 – Courbes S-N, réponses globales (tirées de (Lacroix, 2004; Lacroix et al., 2005)). Sollicitations de traction, $f = 5\text{Hz}$.

Forts de ces résultats prometteurs, nous allons maintenant confronter ces critères en énergie dissipée (au sens de l'aire de l'hystérésis) à d'autres critères classiques et ce dans le cadre d'une campagne expérimentale présentant des sollicitations de traction et de traction-torsion.

Dans la première étude, les critères sont uniquement vus comme des valeurs globales (calculées à partir de données expérimentales telles que la force imposée, le déplacement de traverse...) tandis que pour la seconde, en plus de cette approche, est proposée (quand cela est possible) une démarche locale permettant leurs déterminations, soit via une cinématique simplifiée couplée à une généralisation du modèle de Kelvin-Voigt au cadre des grandes déformations, soit à l'aide d'un modèle éléments finis réalisé sous le code calcul ANSYS.

5.3.2 Chargement uniaxial (traction)

5.3.2.1 Conditions expérimentales

Le tableau 5.2 résume les différentes conditions expérimentales mises en place pour notre étude sous sollicitations de traction. Les essais ont été menés à force imposée⁴. Une description exhaustive des résultats est faite dans la manuscrit de Poisson (2012).

⁴Ils ont été réalisés sur une machine hydraulique INSTRON 8802.

F_{max}	R_σ	F_{max}	R_σ	F_{max}	R_σ	F_{max}	R_σ	F_{max}	R_σ		
300N	0.5	200N	0.5	175N	0.5	150N	0.4	160N, 125N, 100N	0.3		
			0.4		0.4		0.3		0.2	0.2	
	0.4		0		0.2		0.1		0.1	0.1	
			-0.1		0.1		0		-0.1	0	
250N	0.5		-0.1		0		-0.1		-0.1	-0.1	-0.1
	0.4		-0.3		-0.1		-0.3		-0.3	-0.3	-0.3

TAB. 5.2 – Conditions expérimentales de traction.

5.3.2.2 Courbes S-N

Les critères comparés par la suite sont :

- la contrainte nominale maximale :

$$\pi_{max} = \max_{\text{cycle}} \pi(t) \quad \text{avec } \pi(t) = \frac{\mathcal{F}(t)}{S_0} \quad (5.4)$$

- la contrainte alternée

$$\pi_{alt} = \pi_{max} - \pi_{min} \quad \text{avec } \pi_{min} = \min_{\text{cycle}} \pi(t) \quad (5.5)$$

- la densité d'énergie de déformation maximale

$$\max_{\text{cycle}} W(t) \quad \text{avec } W(t) = \int_t \pi(t) dF \quad \text{et } dF = \frac{dL}{L_0} \quad (5.6)$$

- la densité d'énergie dissipée sur un cycle

$$\Phi = \int_{\text{cycle}} \pi(t) dF \quad (5.7)$$

\mathcal{F}, dL, S_0 et L_0 sont respectivement la force imposée, l'allongement infinitésimal de traction, la section et la longueur initiales de la zone utile.

L'ensemble de ces critères sont calculés à l'avant dernier cycle avant rupture. De plus, nous choisissons la rupture totale de l'échantillon comme critère de fin de vie (*i.e.* le nombre de cycles indiqué sur les graphiques à suivre).

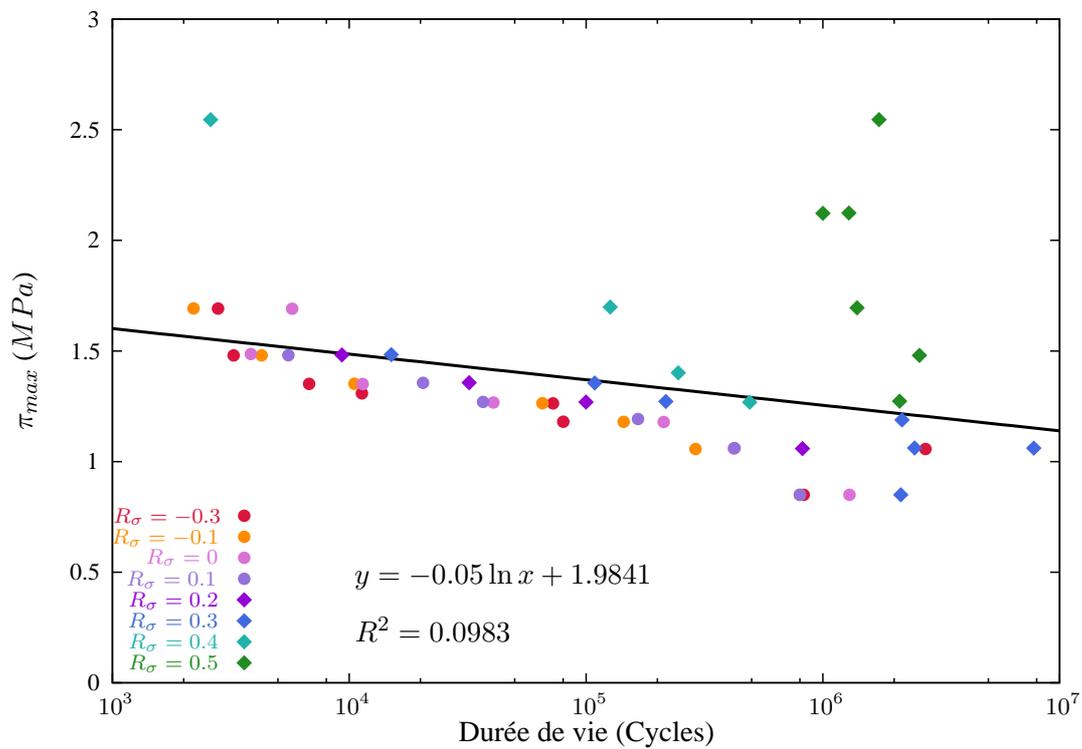
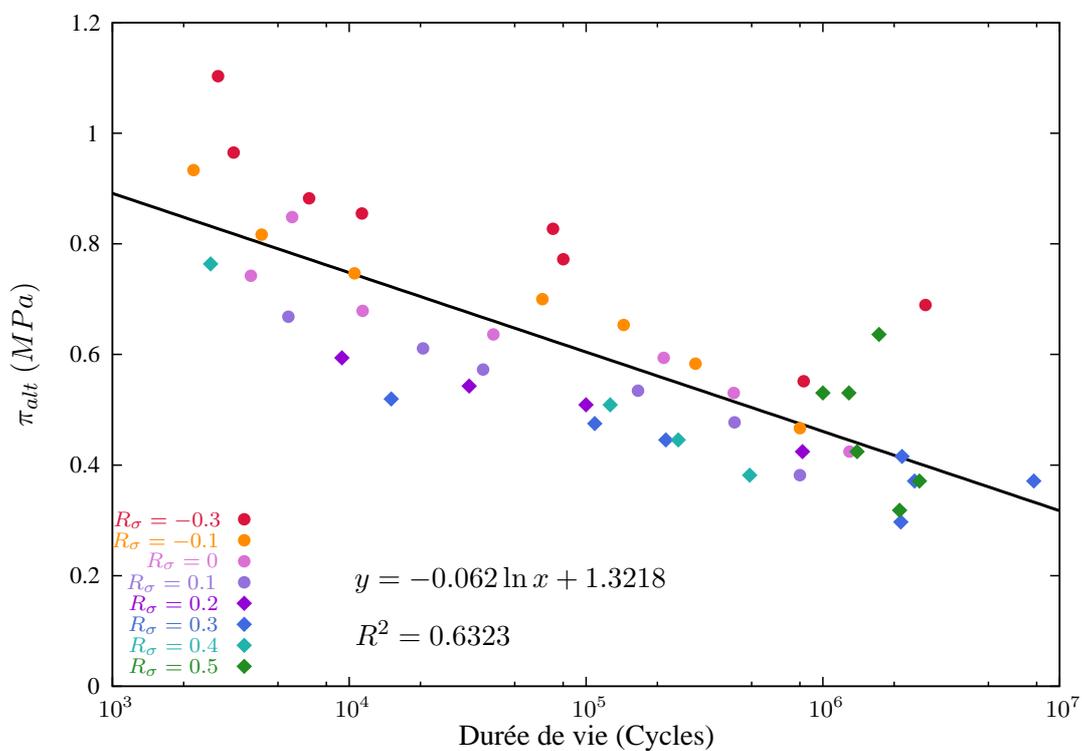
FIG. 5.16 – Courbe S-N en contrainte maximale π_{max} .

FIG. 5.17 – Courbe S-N en contrainte alternée.

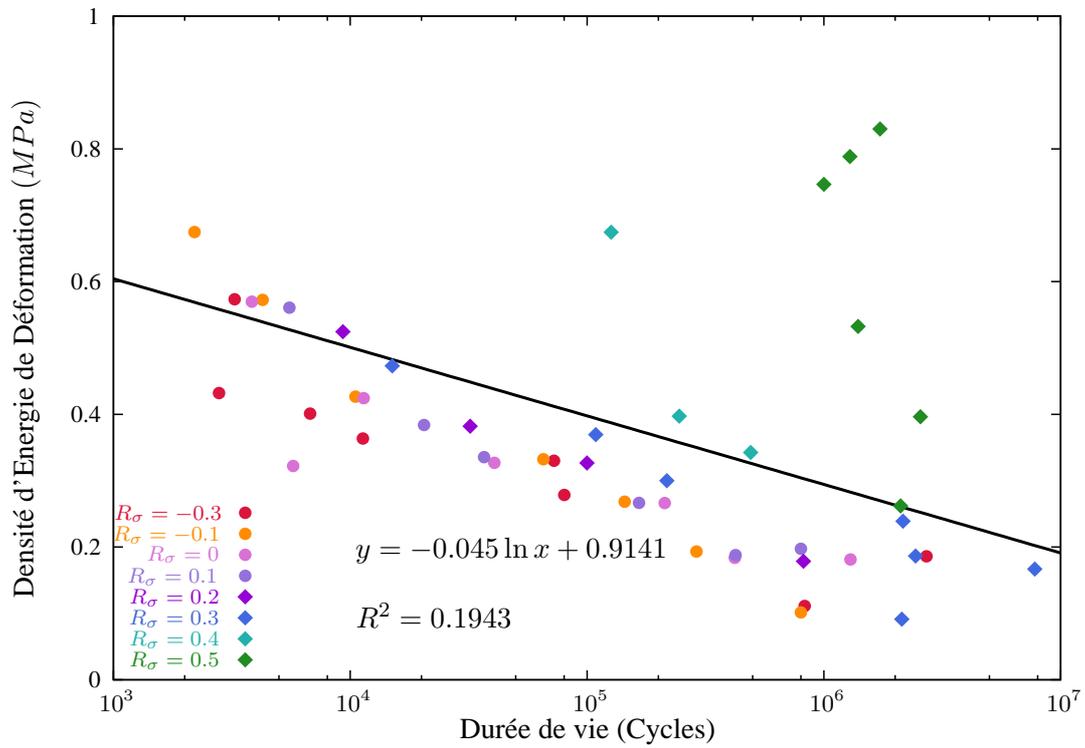


FIG. 5.18 – Courbe S-N en densité d'énergie de déformation.

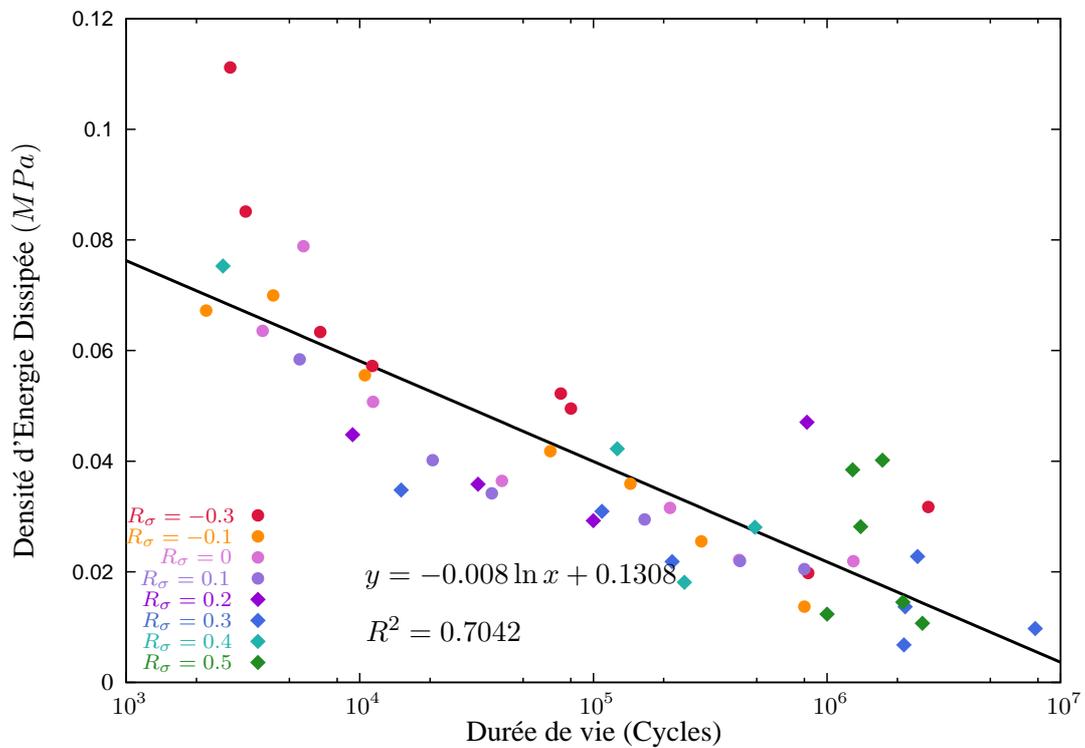


FIG. 5.19 – Courbe S-N en densité d'énergie dissipée.

Nous constatons que les critères en contrainte alternée (FIG. 5.17) et dissipation d'énergie (FIG. 5.19) proposent de meilleurs résultats que ceux en contrainte maximale (FIG. 5.16) et énergie de déformation (FIG. 5.18). Ce bon comportement peut sans doute être attribué à la prise en compte partielle (pour la contrainte alternée) ou totale (pour l'énergie dissipée) de l'histoire du chargement.

5.3.2.3 Diagramme de Haigh

Malgré de moins bons résultats, l'analyse des courbes S-N en contrainte maximale et/ou énergie de déformation nous donne quelques enseignements intéressants en mettant en évidence que les points obtenus pour $R_\sigma > 0.3$ ne sont pas en adéquation avec la courbe de corrélation. On donne en annexe F, les homologues des courbes S-N précédemment présentés en négligeant les résultats obtenus pour le rapport de charge 0.5 dans la corrélation. On constate alors une très nette amélioration de celle-ci pour nos deux critères déficients (FIG. F.1-F.3) et peu ou pas d'amélioration pour les deux autres (FIG. F.2-F.4), ce qui laisse à penser qu'un changement dans le régime de fatigue se produit pour des valeurs de R_σ élevées. Afin de mieux cerner ce phénomène et de quantifier la valeur de ce dernier pour laquelle cette transition apparaît, un diagramme de Haigh a été mis en place. Cette démarche initialement développée pour les matériaux métalliques a été adaptée à l'étude de l'influence du rapport de charge pour la fatigue des élastomères et notamment celle du NR pour lequel un renforcement apparaît pour $R_\sigma \geq 0$ (André et al., 1998; Saintier, 2001; Le Cam, 2005b; Oshima et al., 2007; Le Cam et al., 2008; Mars et Fatemi, 2009). Ce phénomène est attribué à la cristallisation sous contrainte de ce matériau.

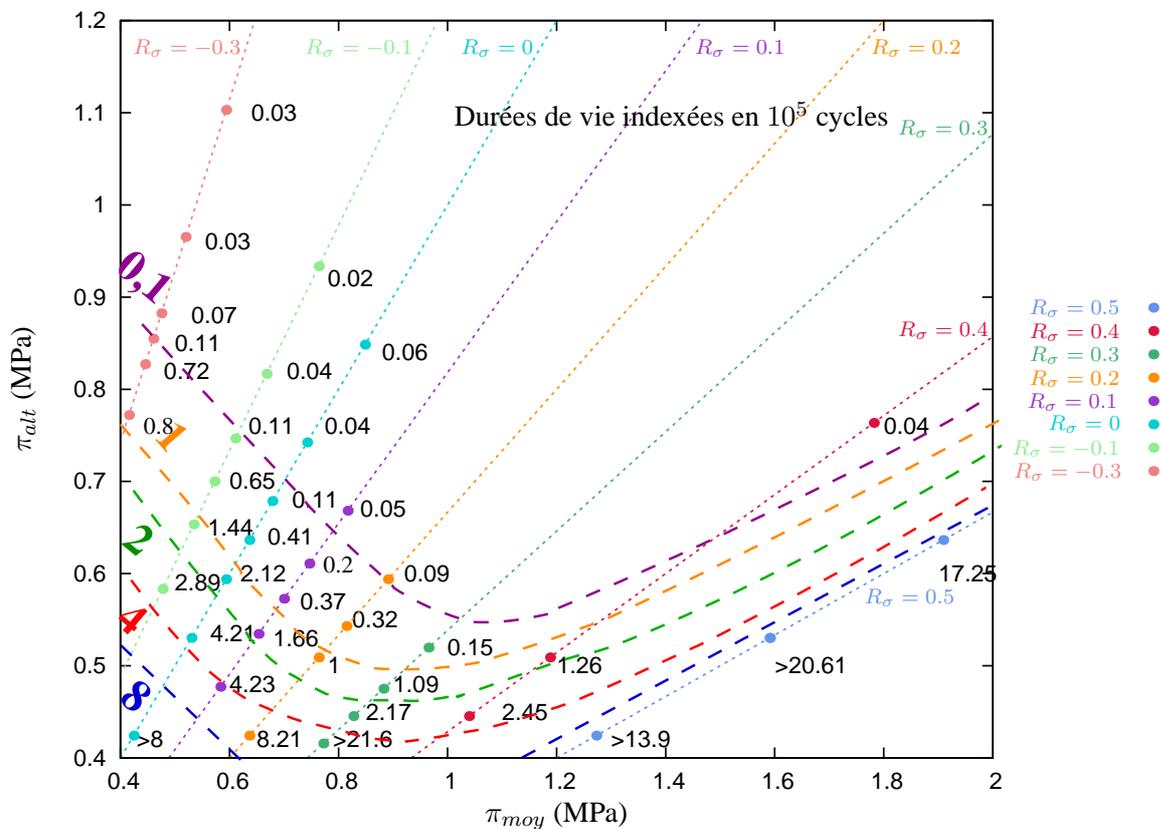


FIG. 5.20 – Diagramme de Haigh en traction simple pour le polychloroprène.

La figure 5.20 confirme le changement de régime évoqué précédemment. Elle illustre une réponse en fatigue similaire à celle d'un caoutchouc non crittalisable pour des rapports de charge inférieurs ou égaux à 0.2, à savoir que la durée de vie diminue avec l'élévation de la contrainte moyenne. De plus, pour $R_\sigma > 0.2$, le matériau propose un renforcement comparable à celui rencontré pour le NR mais obtenu pour $R_\sigma > 0$.

On rappelle que dans la figure 5.10 du paragraphe 5.2.3.1, il a été mis en évidence, à contrainte maximale constante, une atténuation du nombre languettes avec l'augmentation du rapport de charge. La figure 5.21 reprend cette évolution en y superposant les durées de vie des éprouvettes utilisées pour réaliser le décompte de languettes. L'hypothèse d'un changement de régime d'endommagement pour une valeur de rapport de charge supérieur ou égal à 0.2 semble s'étayer encore un peu plus, ce graphique mettant en correspondance pour un dépassement de cette valeur le phénomène déjà observé de chute brutale de la densité de languettes avec celui de l'accroissement de la durée de vie.

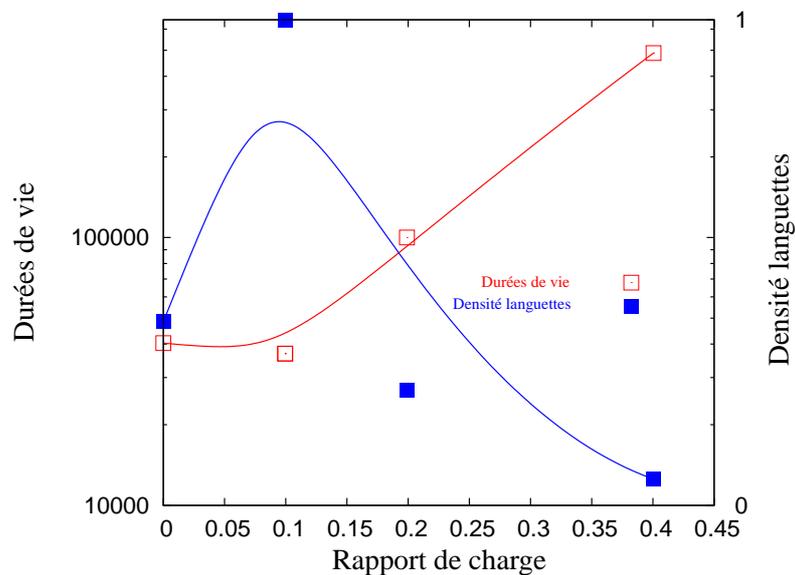


FIG. 5.21 – Influence du rapport de charge sur la densité de languettes.

5.3.3 Chargement multiaxial (traction/torsion)

5.3.3.1 Cas de chargement

Venant compléter la campagne de traction, une étude en traction-torsion⁵ sert de point de départ à la comparaison de différents critères de fatigue. Pour des raisons pratiques, le pilotage expérimental a été réalisé à déplacement et rotation imposés. Les différentes conditions abordées sont présentées TAB. 5.3.

⁵Ces essais ont été réalisés sur une machine Electroforce BOSES 3300.

δ (°)	R_ε	U_{max} (mm)	U_{min} (mm)	θ_{max} (°)	θ_{min} (°)
0°, 90°, 180°, Traction	0.2	20	4	40	8
		17	3.4	34	6.8
		15	3	30	6
	0.1	20	2	40	4
		17	1.7	34	3.4
		15	1.5	30	3
	0	20	0	40	0
		17	0	34	0
		15	0	30	0
	-0.2	20	-4	40	-8
		17	-3.4	34	-6.8
		15	-3	30	-6

TAB. 5.3 – Conditions de fatigue multiaxiales.

5.3.3.2 Critères étudiés

Afin de calculer certains critères de fatigue, il est nécessaire de déterminer l'état de contrainte et de déformation de notre structure. Ceci est réalisé en utilisant deux approches : une analytique et l'autre purement éléments finis. Les détails de ces deux modélisations sont donnés en annexe G.

Les 5 critères étudiés par la suite sont :

- le maximum sur un cycle stabilisé de la première contrainte principale (PK1) calculée localement,
- le maximum sur un cycle stabilisé de l'énergie de déformation (SED) globalement calculée comme (V représente le volume utile de l'éprouvette) :

$$\max_{\text{cycle}} W^g(t) \quad \text{avec} \quad W^g(t) = \frac{1}{V} \int_t \mathcal{F} dU + C d\theta \quad (5.8)$$

ou localement comme :

$$\max_{\text{structure}} \max_{\text{cycle}} W^l(t) \quad \text{avec} \quad W^l(t) = \int_t \boldsymbol{\pi} : d\mathbf{F} \quad (5.9)$$

- l'énergie dissipée sur un cycle stabilisé (DED) définie globalement ou localement comme :

$$\Phi^g = \frac{1}{V} \int_{\text{cycle}} \mathcal{F} dU + C d\theta \quad \Phi^l = \int_{\text{cycle}} \boldsymbol{\pi} : d\mathbf{F} \quad (5.10)$$

- Σ^* , un critère basé sur la mécanique configurationnelle (Verron et al., 2006; Andriyana et Verron, 2007; Andriyana et al., 2008; Verron et Andriyana, 2008; Andriyana et al., 2010). Dans le cas de chargements uniaxiaux, celui-ci est ainsi déterminé :

$$\Sigma^* = \left| \min \left((\Sigma_i)_{i=1,2,3}, 0 \right) \right| \quad (5.11)$$

ou Σ_i sont les valeurs propres du tenseur des contraintes configurationnelles défini, à partir de W la densité d'énergie de déformation, par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = W\mathbf{1} - C\mathbf{S} \quad (5.12)$$

Dans les cas de chargements complexes (multiaxiaux non proportionnels par exemple), les auteurs précités sont amenés à ne considérer que Σ^d (la partie endommageante de Σ) calculée comme la somme de ses incréments $d\Sigma^d$:

$$\Sigma^d = \int_{cycle} d\Sigma^d \quad (5.13)$$

Pour ce faire, $d\Sigma$ est établi puis diagonalisé :

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma}{dC} : dC = \sum_{i=1}^3 d\Sigma_i \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_i \quad (5.14)$$

en notant $d\Sigma_i$ i-ème valeur propre de $d\Sigma$ et \mathbf{V}_i le vecteur propre s'y rapportant. $d\Sigma^d$ est alors donné comme :

$$d\Sigma^d = \sum_{i=1}^3 d\Sigma_i^d \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_i \quad (5.15)$$

avec

$$d\Sigma_i^d = \begin{cases} d\Sigma_i & \text{si } d\Sigma_i < 0 \text{ et } \mathbf{V}_i \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.16)$$

La forme du critère de fatigue est identique à celle décrite (5.11) mais appliquée à Σ^d :

$$\Sigma^* = \left| \min \left(\left(\Sigma_i^d \right)_{i=1,2,3}, 0 \right) \right| \quad (5.17)$$

Ce dernier sera uniquement localement calculé.

- Le dernier critère étudié est celui proposé par Mars (2001, 2002). Il se base sur l'existence d'une énergie de fissuration (CED) :

$$CED = \int_{cycle} \frac{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}} \quad (5.18)$$

où \mathbf{R} est un vecteur normal au plan de fissuration.

5.3.3.3 Résultats

Les figures 5.22 à 5.26 donnent les représentations des différents critères exposés § 5.3.3.2 dans les conditions expérimentales présentées TAB. 5.3 :

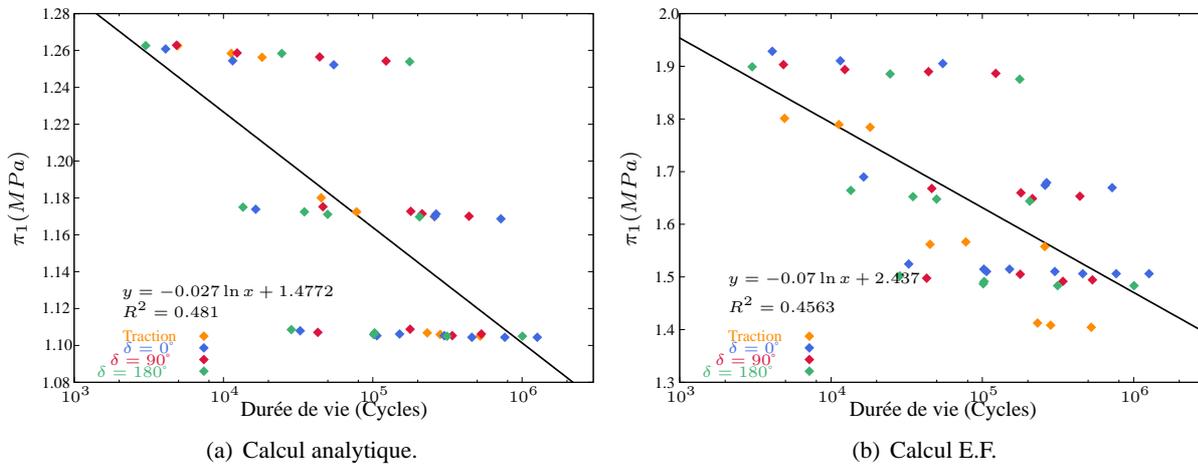


FIG. 5.22 – Courbe S-N en première contrainte principale.

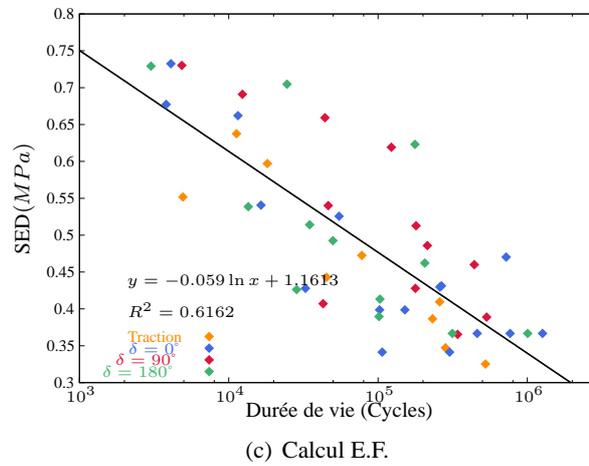
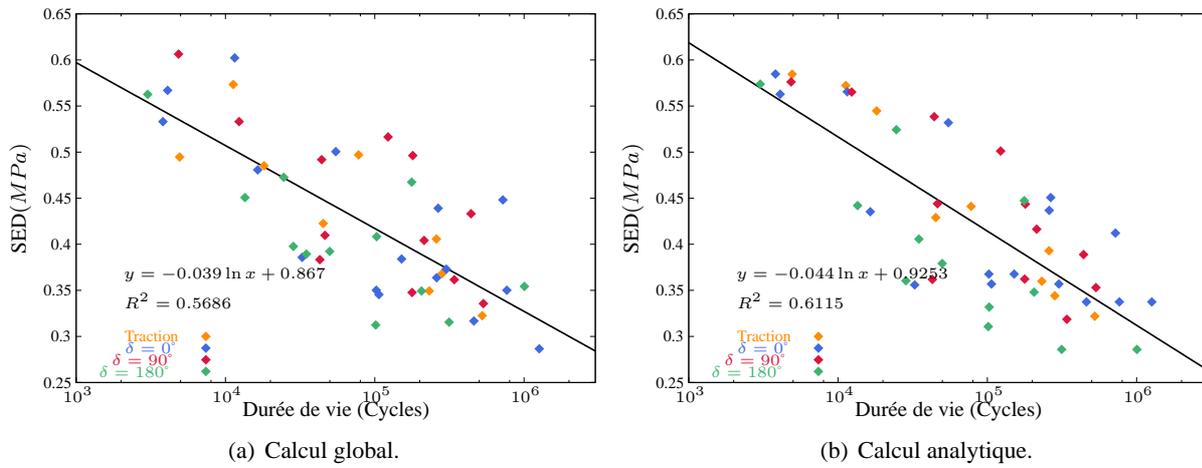


FIG. 5.23 – Courbe S-N en SED.

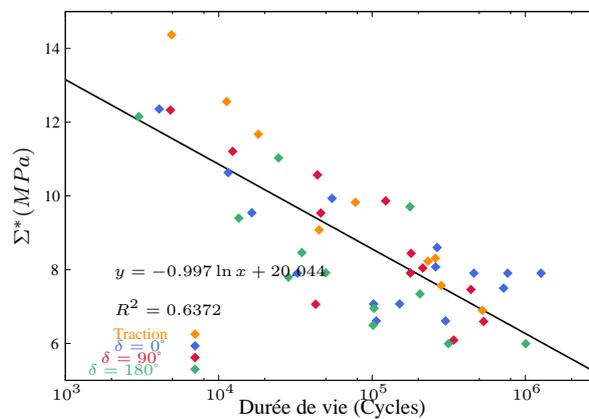


FIG. 5.24 – Courbe S-N en Σ^* (calcul analytique).

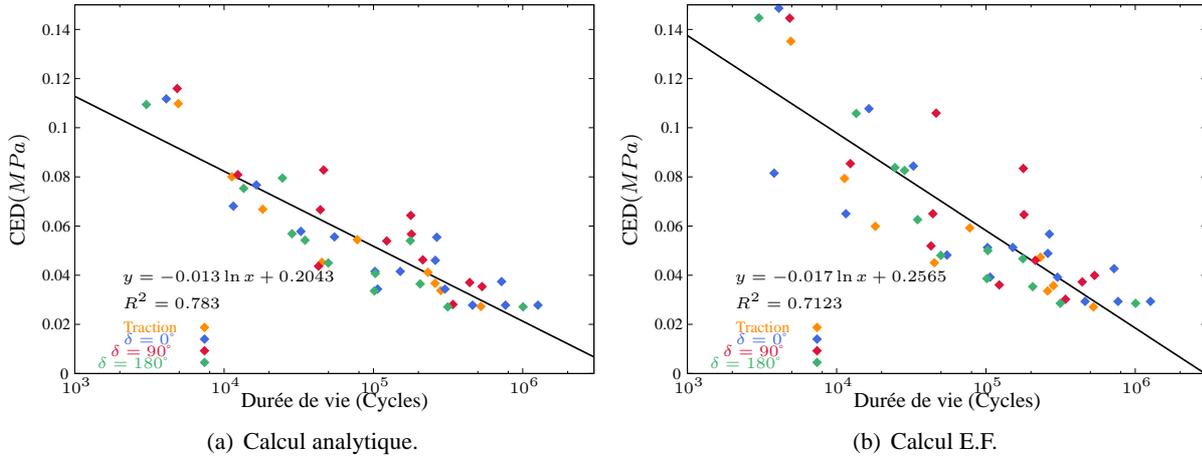


FIG. 5.25 – Courbe S-N en CED.

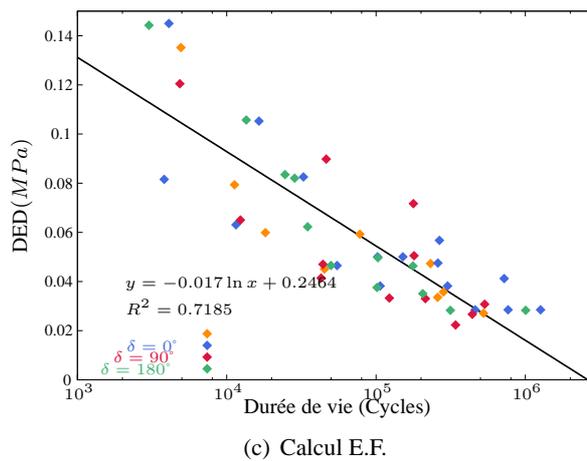
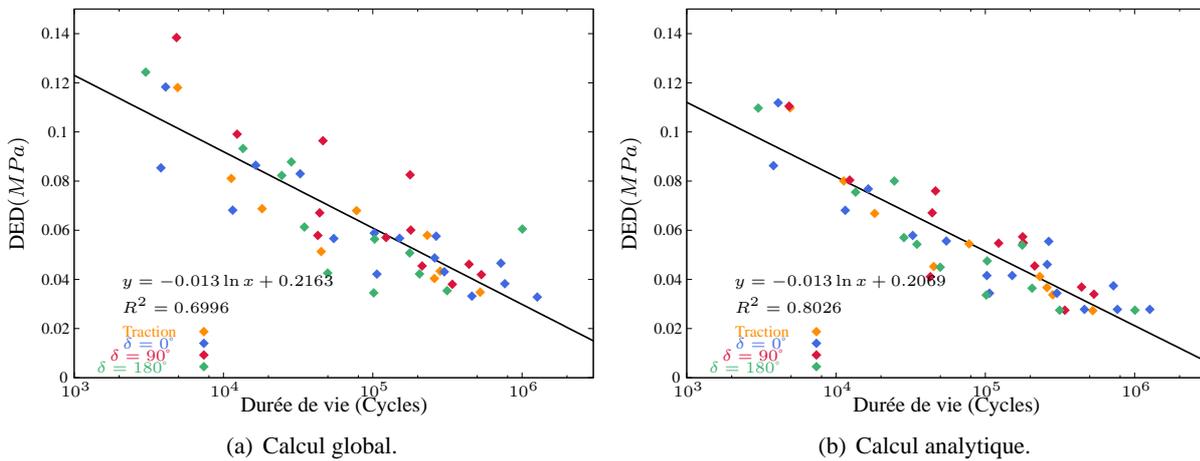


FIG. 5.26 – Courbe S-N en DED.

On constate que la première contrainte principale maximale localement déterminée par la méthode analytique (FIG. 5.22(a)) ou un calcul éléments finis (FIG. 5.22(b)) n'est pas apte à rendre compte du comportement en fatigue multiaxiale du CR. L'énergie de déformation (FIG. 5.23(a),5.23(b) et 5.23(c)) semble

mieux convenir sans doute grâce à une prise en compte partielle de l'histoire du chargement. Enfin, en tenant compte de l'intégralité de cette dernière, les critères en première contrainte principale endommageante d'Eshelby (FIG. 5.24), en énergie de fissuration (FIG. 5.25(a) et FIG. 5.25(b)) et en énergie dissipée (FIG. 5.26(a), 5.26(b) et 5.26(c)) donnent quant à eux de bons résultats. Bien que le critère en énergie dissipée localement calculée par la méthode analytique (*cf.* FIG. 5.26(b)) donne la meilleure corrélation, il semble difficile d'établir une hiérarchie entre les résultats. En effet, un classement ne vaudrait que pour le matériau, la structure et les sollicitations étudiées et pourrait tout aussi bien être inversé pour une autre configuration d'essais. De plus, il convient de garder à l'esprit que le DED n'est pas adapté à la détermination du plan de fissure et qu'il n'a plus lieu d'être dans le cas d'un matériau ou d'un chargement ne proposant pas de réponse hystérétique.

5.3.3.4 Diagramme de Haigh

Dans le paragraphe précédent, ayant obtenu des résultats probants quant au critère DED, il nous a semblé intéressant d'utiliser cette grandeur comme terme d'amplitude d'un diagramme de Haigh. Les avantages de cette grandeur sont qu'elle est directement scalaire et qu'étant invariante, elle ne posera pas de problème d'objectivité. Le diagramme est complété pour refléter le chargement moyen par la pression hydrostatique moyenne :

$$p_{moy} = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in \text{cycle}} p(t) + \min_{t \in \text{cycle}} p(t) \right) \quad (5.19)$$

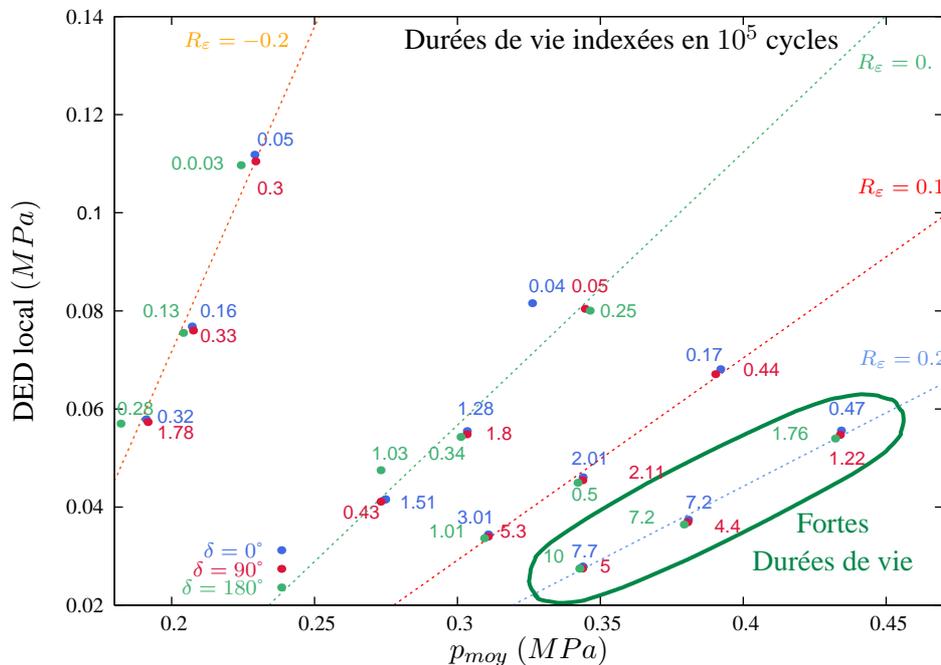


FIG. 5.27 – Diagramme de Haigh multiaxial.

Ce diagramme, bien que nécessitant d'être complété, révèle encore une fois un comportement de polymère amorphe pour un rapport de chargement allant jusqu'à 0.2 (une diminution de la durée de vie avec l'augmentation de la partie moyenne du chargement). Par la suite une fois cette valeur dépassée,

il semble que, tout comme dans le cas de la traction, le régime de fatigue change, laissant entrevoir un renforcement *a priori* indépendant de l'angle de déphasage.

5.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour ambition de proposer, dans un premier temps, différentes analyses fractographiques. Celles-ci ont été menées d'une part afin de comprendre dans des cas de chargements de fatigue mécanique :

- sur du HNBR, l'influence des charges sur les faciès de rupture
- sur du CR, les effets du rapport de charge et de la multiaxialité de la sollicitation.

Concernant le HNBR, quelques résultats intéressants ont pu être mis en avant et, en particulier, une forme de rosace pour la zone de propagation stable. Une augmentation de la surface spécifique des charges donne une rosace plus étendue, avec des pétales plus nombreux mais de taille plus réduite. De plus, il est intéressant de voir sur ce matériau, ne présentant *a priori* pas de cristallisation sous contrainte, la présence de languettes en zone d'amorçage ou de fractuosité.

Durant nos travaux menés sur le CR, notre attention s'est principalement portée sur la zone d'amorçage qui présente elle aussi des languettes. Les faciès de rupture étudiés ont été obtenus suite à des sollicitations de fatigue uniaxiale ou multiaxiale. Dans le premier cas, on observe qu'à force maximale fixe, mais à rapport de charge augmentant, on arrive à une évolution de la densité de languettes d'abord croissante puis décroissante, le maximum étant atteint pour $R_\sigma = 0.2$. Le cas d'une sollicitation multiaxiale ne change pas les faciès macroscopiques, mais semble tout de même abaisser le nombre de languettes en zone d'amorçage et en modifier la morphologie, modification influencée par la valeur du déphasage entre traction et torsion.

Par la suite, nous avons présenté l'étude en fatigue sur CR ayant conduit aux faciès de rupture précités. Le but de cette étude est de tester la robustesse d'un critère en dissipation qui, par simplicité, a été assimilé à la dissipation sur un cycle de chargement (au sens de l'aire de l'hystérésis). Il a ensuite été confronté à différents autres critères. Dans les deux cas de chargements, celui-ci a donné de probants résultats, les courbes S-N obtenues conduisant à de bons coefficients de corrélation. Dans la gamme de chargements que nous avons étudiée, il paraît même être le plus apte à rendre compte de la réponse en fatigue du matériau. Il convient cependant de rester prudent, car un éventuel classement ne vaudrait que pour le matériau étudié et dans la gamme de sollicitations choisie. De plus, ce bon bilan ne doit pas faire oublier que ce critère perd évidemment toute signification pour un matériau non-hystérétique et, pour qui en a l'intérêt, qu'il n'est pas apte à fournir une direction éventuelle de fissuration.

Ce chapitre, dans le cas des chargements de traction, fut aussi l'occasion de réaliser un diagramme de Haigh afin d'expliquer pour les courbes S-N en contrainte maximale et énergie de déformation l'*a priori* incohérence des points issus des rapports de charge élevés, en mettant en évidence un changement de régime de fatigue pour un rapport de charge de 0.2. Il est tentant de relier cette valeur avec celle menant au maximum de l'évolution de la densité de languettes, ce qui laisserait à penser que, pour des rapports de charges inférieurs à cette valeur, le régime de fatigue est sévère et crée des languettes, et qu'une fois celle-ci dépassée, le mécanisme s'adoucit tout en ne créant plus de languettes. Ceci soulève des questions quant à la nature et au processus de formation de ces dernières.

Enfin, l'énergie dissipée est aussi "testée" pour caractériser l'amplitude de chargement d'un diagramme de Haigh – la pression moyenne sur un cycle de chargement est choisie comme terme moyen – recensant les résultats en fatigue multiaxiale. La représentation est là aussi intéressante et met en avant quelques tendances de renforcement pour les valeurs de rapports de charge élevés.



Conclusion générale

Ce manuscrit propose un retour sur mes activités de recherche de ces dernières années. Elles portent principalement sur la compréhension et la prévision de la réponse de matériaux élastomères à diverses sollicitations mécaniques ou thermo-mécaniques, toutes pouvant être (quasi-)statiques, cycliques, dynamiques...

Deux grandes problématiques ont été posées :

- d’une part, la modélisation du comportement des élastomères, qui s’appuie sur un cadre thermodynamique suffisamment général pour décrire, en grandes transformations et en négligeant les effets de la thermique, les comportements élasto-dissipatifs de nos matériaux. Ces équations sont, moyennant quelques hypothèses, étendues et adaptées à un contexte thermo-mécanique.
- d’autre part, la fatigue des élastomères qui s’attache à prévoir, pour des temps de fonctionnement beaucoup plus longs, la tenue de pièces soumises à des chargements variables. Pour ce faire, ont été préférées les approches en amorçage à celles en propagation.

Il n’est pas évident de trouver un point commun à ces deux grands pans de la mécanique, tant il est illusoire de modéliser, via un calcul par éléments finis par exemple, un essai de fatigue de plusieurs centaines d’heures. Dans notre cas, et de manière assez classique, le trait d’union entre ses deux études fut la mise en place d’un critère de fatigue directement issu de la mécanique des milieux continus et donc donné par un de nos modèles. Celui-ci permet alors tout à la fois d’établir, après un calcul simple sur un cycle stabilisé, différentes représentations du comportement en fatigue d’un matériau (courbe S-N, diagramme de Haigh) et de prévoir via une modélisation sur une pièce “réelle” les zones potentiellement sujettes à un départ de fissure.

Revenons à présent plus en détail sur ce qui a été proposé dans ce mémoire. Ceci sera aussi l’occasion de proposer des voies d’amélioration et d’extension.

- **Connaissance et caractérisation du matériau**

Au travers d’une présentation des différents élastomères étudiés, le chapitre 1 met en avant les outils utilisés afin de mieux comprendre nos matériaux.

Mais tout ce qui a pu être présenté dans ce travail se résume à des caractérisations mécaniques (éventuellement en prenant en compte l'influence de la température d'environnement). Il semble de plus en plus évident qu'il faut étendre ces actions à des caractérisations :

- thermiques afin de mieux en cerner les propriétés, leurs évolutions, leurs impacts sur la durée de vie (nous reviendrons sur ce point un peu plus loin),
- chimiques afin de ne plus voir le matériau comme une chose inerte mais qui, subissant des apports et des pertes d'énergie via la thermique et/ou la mécanique, va se réorganiser et évoluer.

En complément à ce dernier point, et en collaboration avec un de nos partenaires industriels, il est aussi prévu de mieux cerner les évolutions de grandeurs pertinentes mécaniques et thermiques – ces évolutions pouvant être liées à des réorganisations de structure du matériau comme nous l'avons dit mais aussi à de l'endommagement mécanique – durant un essai de fatigue. C'est entre autre, dans cette voie que s'engagent les travaux de thèse d'Alexis Delattre (Delattre, soutenance prévue 2015).

● **Modélisation isotherme du comportement élasto-dissipatif**

Concernant la partie modèles mécaniques isothermes, englobant les chapitres 2 et 3, le bilan – et donc les perspectives – est le plus important. Cette problématique a été initiée, pour moi, dès mon stage de DEA (Méo, 1996), poursuivi en thèse (Méo, 2000b) et constamment approfondie depuis.

L'approche thermodynamique est clairement établie. Elle se base sur une décomposition du gradient de la transformation en une partie volumique et une autre isochore, ainsi que sur les hypothèses de l'état local et des matériaux standards généralisés. Les différentes variables internes sont introduites par le concept d'état(s) intermédiaire(s) appliqué à la transformation incompressible. Le cadre ainsi obtenu a été décliné dans les différentes configurations eulérienne, lagrangienne et mixte, en prenant en compte éventuellement l'incompressibilité du matériau. Au final, il se résume à une généralisation aux grandes déformations d'un assemblage rhéologique général, dont la mise en oeuvre peut se décliner sous les différents points suivants :

- l'établissement de modèles unitaires visco-élastiques (modèle de Zener, de Poynting-Thomson) dont le comportement dissipatif est décrit par une unique variable interne. Ceux-ci donnent de probants résultats tant que la sollicitation reste de caractéristiques – fréquence (ou de vitesse) et d'amplitude – proches de celles utilisées pour l'identification des paramètres matériaux. Ils marquent cependant le pas pour les températures négatives,
- afin de couvrir une plage plus importante de fréquence, un modèle visco-élastique statistique est proposé. Le principe en est une généralisation statistique du comportement visco-élastique (ici choisi sous forme d'un modèle de Maxwell). De plus, pour bien rendre compte de l'influence de l'amplitude (effet Payne) et de ne pas être mis en défaut par des températures trop faibles, il est couplé à un modèle élasto-plastique simple. Une proposition d'analyse mésoscopique de ce modèle est aussi proposée,
- chaque modèle a fait l'objet d'une stratégie d'identification, d'une mise en oeuvre numérique (méthode des éléments finis) et d'une confrontation à des résultats expérimentaux.

Comme souvent en modélisation (au sens large du terme et non restreint à l'aspect calcul par éléments finis), tous les aspects précédemment évoqués sont naturellement sujets à améliorations, pour ne citer que quelques points que nous allons devoir aborder à court ou moyen terme :

- l'identification des paramètres de nos différents modèles est toujours assez fastidieuse et mériterait d'être optimisée en ayant recours à des algorithmes génétiques par exemple,
- en réponse à une demande forte d'un de nos partenaires industriels, l'introduction d'une ou plusieurs variables endommagement permettrait de prévoir, en s'aidant des lois d'évolutions préalablement

identifiées expérimentalement, les évolutions du comportements en fonction du nombre de cycles de fatigue. Ceci pourra être fait en s’inspirant par exemple des travaux de [Grandcoin Laneyrie \(2008\)](#),

- une prise en compte plus systématique de la compressibilité et qui, couplée au point précédent, pourra conduire à sa prévision dans le cas où elle est induite par l’endommagement,
- le besoin se fait sentir au niveau industriel de prévisions pour des sollicitations multi-fréquences (question à laquelle on a partiellement répondu), à fréquences élevées (une centaine de Hz) et sur des structures complexes ([Delattre, soutenance prévue en 2015](#)). Ceci obligera à tenir compte des effets d’inertie (nécessitant une amélioration des solveurs avec une discrétisation temporelle plus compliquée) tout en utilisant, sans doute pour répondre aux problèmes structurels, des algorithmes de réduction de modèle tels que ceux mis en oeuvre par Stéphane Lejeunes ([Lejeunes, 2006b](#)) afin de rendre les temps de calcul “industriellement” acceptables.

Tout ce qui vient d’être évoqué reste vrai quel que soit le modèle, qu’il soit unitaire, à variables internes multiples ou statistiques. Il semble nécessaire de faire un aparté sur ces derniers qui par leur genèse, sont des modèles particuliers nécessitant d’aller plus loin dans l’optimisation et la mise à l’épreuve :

- en premier lieu, le modèle doit être confronté à la prévision du comportement d’autres matériaux dissipatifs. Outre le fait de satisfaire notre curiosité scientifique, l’intérêt du modèle s’en verrait grandir dans le cas de résultats concluants.
- il serait sans doute profitable de continuer dans la voie ouverte par [Grandcoin Laneyrie \(2008\)](#) qui a proposé de généraliser par la méthode statistique des branches plus complexes que celle de Maxwell. En effet, ce dernier comportement simple (peut-être même simpliste ?), qui par l’interprétation mésoscopique doit refléter le comportement d’une famille de charges, est peut-être quelque peu réducteur et mériterait sans doute d’être enrichi.
- en allant encore un peu plus loin, nous envisageons de tester d’autres fonctions de distribution statistique $\mathcal{P}(\omega)$. La finalité étant idéalement de déterminer celle-ci *a priori*, en fonction des caractérisations chimiques évoquées précédemment et d’éventuellement faire varier cette fonction en cours d’essais si la structure du matériau venait à changer. Ceci pourrait aussi être complété par une refonte des potentiels statistiques définis par les équations (3.29) et (3.30).

• Couplage thermo-mécanique

Cette partie (*cf.* chapitre 4) prend tout son sens à la vue des résultats proposés au premier chapitre illustrant des valeurs de paramètres mécaniques qui varient avec la température ou des augmentations de température de plusieurs dizaines de degrés par simple auto-échauffement d’éprouvettes en silicône soumises à des sollicitations cycliques.

Le principe de l’algorithme de couplage faible mis en place consiste à réaliser un calcul mécanique dont les paramètres ont préalablement été identifiés en fonction du champ de température puis de réinjecter la dissipation intrinsèque obtenue (ou sa moyenne stabilisée) comme terme source d’un calcul thermique. Après évolution de la température, on peut réitérer sur un nouveau calcul mécanique et ainsi de suite. Cette méthode, malgré deux hypothèses fortes (la dilatation thermique ainsi que les termes de couplage sont négligés) donne de bons résultats en permettant une détermination spatiale et temporelle de la température jusqu’à un état stabilisé.

Ce sujet longtemps à la mode dans les années 1990–2000, a été depuis laissé de côté. Il pourrait cependant être remis au goût du jour au travers des travaux de [Le Saux \(2010\)](#) et ceux à venir de [Christophe](#)

Cruanés (Cruanes et al., 2012) qui proposent de caractériser la durée de vie par des mesures d'auto-échauffement. Un modèle thermo-mécanique robuste pourrait être une solution afin d'évaluer par méthode inverse le(s) terme(s) source(s) nécessaire(s) à l'élévation de température expérimentalement observée et donc d'en déduire l'origine (endommagement ou autre).

Cependant, en préambule à ceci, il semble indispensable de mieux cerner l'impact des termes de couplage sur la réponse thermique du matériau. Cela pourrait peut être expliquer le besoin pour le modèle de partiellement prendre en compte la dissipation comme terme source de chaleur. Un bon point de départ serait sans aucun doute les travaux de Honorat (2006); Caborgan (2011).

• Fatigue des élastomères

Le dernier chapitre propose deux façons d'appréhender la fatigue mais qui, nous l'avons vu, peuvent se révéler complémentaires et concomitantes.

Une étude classique en fatigue axiale et multiaxiale est menée sur du CR. Elle a permis la mise en oeuvre d'un critère de fatigue défini par l'énergie dissipée (au sens de l'aire de l'hystérésis) sur un cycle de chargement. Il donne pleine satisfaction dans ses comparaisons avec d'autres critères classiques de la littérature.

De plus, en utilisant un diagramme de Haigh, cette étude a aussi mis en évidence un changement de régime de fatigue pour les rapports de charge proche de 0.2, à partir duquel on constate un renforcement. Ce phénomène a déjà été constaté sur du caoutchouc naturel mais pour des valeurs de rapports de charge nuls et a été attribué à la cristallisation sous contrainte.

Sur ce même CR, une étude fractographique complémentaire a aussi montré un abaissement brutal, toujours pour $R_\sigma = 0.2$, de la densité de languettes présentes en zone d'amorçage. Une étude similaire menée sur la zone de propagation stable de matériaux HNBR nous a aussi aidé à mieux comprendre l'influence de la surface spécifique des charges sur les mécanismes de propagation de fissures.

Une première perspective intéressante au travail réalisé sur le CR serait d'éprouver les modèles utilisés afin de déterminer localement les différents critères de fatigue. Il est envisageable de mettre en oeuvre un modèle statistique couvrant le comportement sur une large gamme de fréquences et ainsi d'essayer d'unifier sur une même courbe S-N des points obtenus pour différentes vitesses de déformation. De plus, le critère mériterait d'être étendu en faisant référence, non plus à l'aire de l'hystérésis mais, comme c'était l'idée initiale, à la dissipation intrinsèque (ou sa moyenne temporelle sur un cycle). L'écriture eulérienne permettant de découpler les apports de chaque phénomène mécanique sur la dissipation intrinsèque qui peut alors s'écrire comme :

$$\phi = \phi_{\text{plasticité}} + \phi_{\text{visco-plasticité}} + \phi_{\text{viscosité}_1} + \phi_{\text{viscosité}_2} + \dots$$

il est envisageable de ne non plus prendre ϕ comme critère de fatigue, mais l'un ou l'autre de ces apports.

Outre ces améliorations techniques, quelques points fondamentaux restent aussi en suspens concernant les languettes détectées sur les faciès de CR et de HNBR :

- quelle est leur nature ?
- l'abaissement de leur densité en zone d'amorçage peut-elle vraiment être symptomatique du changement de régime de fatigue à $R_\sigma = 0.2$? Cela se retrouve-t-il sur d'autres matériaux ?
- ont-elles un lien avec la cristallisation existante du CR ?
- sont-elles juste une manifestation de thermo-oxydation ?
- ...

Afin de répondre à ces questions et à de nombreuses autres, nous avons convenu d'essayer de comprendre à la fois la nature chimique des languettes par des analyses restant à déterminer et aussi leur

processus de création en envisageant des essais de fatigue sous vide ou gaz inerte par exemple et en cernant mieux l'influence de la température.

Ainsi, au moment du bilan que représente cette conclusion d'Habilitation à Diriger des Recherches, on peut voir qu'un large spectre d'explorations scientifiques a pu être mené et que le point commun de toutes ces études est la prévision (du comportement, de la tenue en fatigue...). Toutes les réponses apportées à des problèmes concrets souvent émanant de partenaires industriels, l'ont toutes été au travers de collaborations scientifiquement et humainement enrichissantes. Néanmoins, de nombreuses questions restent toujours posées et d'autres, nouvelles, ont été soulevées. Elles nécessiteront sans aucun doute de mener plus loin des démarches déjà entreprises, d'en abandonner certaines et d'en faire naître d'autres. Ces interrogations actuelles sont, pour moi, sans doute plus nombreuses maintenant qu'en 1996 et sont le fondement de mon intérêt croissant pour l'étude des matériaux élastomères.

ANNEXE

A

**Influence de la température sur
les réponses
contrainte/déformation**

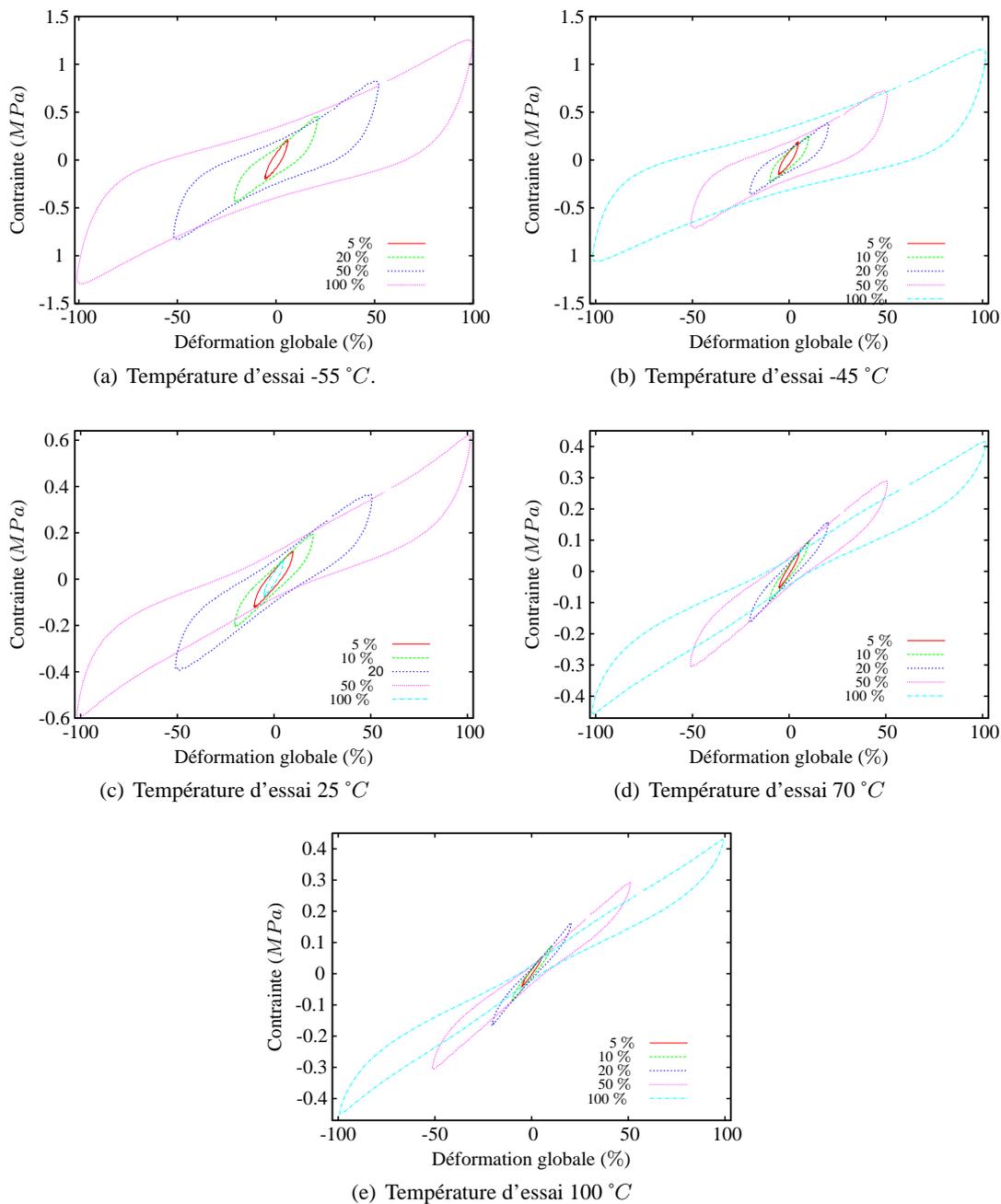


FIG. A.1 – Influences de la température globale. Courbes contrainte - déformation obtenues sur une éprouvette de double cisaillement pour une sollicitation sinusoïdale de fréquence 3.1 Hz et d'amplitudes 5% , 10% , 20% , 50% et 100% .

ANNEXE

B

État intermédiaire et inégalité de Clausius-Duhem

B.1 Configurations lagrangienne et mixte

Le point de départ sont les formes abouties de l'inégalité de Clausius-Duhem (2.11) et (2.12) dans lesquelles sont introduites l'expression découplée de l'énergie libre (2.26). Il est donc nécessaire d'évaluer $\dot{\psi}$, i.e. :

$$\dot{\psi} = \underbrace{\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \dot{J}}_{\textcircled{3}} \quad (\text{B.1})$$

Chacun des trois termes est séparément évaluer :

– La réécriture du terme volumique $\textcircled{3}$ passe par :

$$\dot{J} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} = J \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} = \text{cof}(\mathbf{F}) : \dot{\mathbf{F}} \quad (\text{B.2})$$

– Afin d'évaluer le terme $\textcircled{1}$, il faut réécrire $\dot{\bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}}$, puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] = \mathbb{P}_{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Il est à noter que ce premier terme peut aussi être écrit ainsi

$$\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} \quad (\text{B.4})$$

Ainsi en récrivant $\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}$, il vient facilement que :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right] = \mathbb{P}_{\mathbf{F}} \quad (\text{B.5})$$

Il est alors possible de reformuler le premier terme de l'équation de 2 façons :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} = \left[\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} \right] : \dot{\mathbf{C}} = 2 \left[\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} \right] : \dot{\mathbf{E}} \\ &= \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}} = \left[\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} \right] : \dot{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

– Le terme $\textcircled{2}$ de l'équation reste inchangé.

L'inégalité de Clausius-Duhem peut donc être réécrite sous ses deux formes lagrangienne (2.11) et mixte (2.12) ainsi :

$$\begin{aligned} \left[-2\rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - \rho_0 J \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{S} \right] : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} &\geq 0 \\ \left[-\rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) + \boldsymbol{\pi} \right] : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} &\geq 0 \end{aligned}$$

cette dernière pourra aussi s'écrire sous forme objective :

$$\left[\mathbf{F}^{-1} \cdot \left[-\rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) + \boldsymbol{\pi} \right] \right] : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{a}}} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_{\mathbf{a}} \geq 0$$

En postulant une forme de potentiel de dissipation de la forme énoncée (2.41), les lois de comportements et d'évolution de la variable interne $\bar{\mathbf{C}}_a$ sont¹ :

– Configuration lagrangienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \mathbf{S}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} [\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1}] ; \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}_a \otimes \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} \\ \text{et } \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) ; \mathbf{S}_{\text{vol}} = \rho_0 J \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

– Configuration mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} [\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T}] ; \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}_a \otimes \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} \\ \text{et } \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) ; \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{F}}} : \bar{\mathbf{F}}^{-T} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Configuration eulérienne

La démarche est sensiblement la même que dans le paragraphe précédent en apportant un soin plus particulier à l'objectivité des grandeurs utilisées.

L'obtention des équations (2.45) s'obtiendra donc en partant de l'écriture eulérienne de l'inégalité de Clausius-Duhem (2.13) ainsi que du découplage de l'énergie libre sous sa forme eulérienne (2.27). La dérivée de l'énergie libre est alors vue comme

$$\dot{\psi} = \underbrace{\frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} j}_{\textcircled{3}} \quad (\text{B.9})$$

1. La dérivée de J est donnée par

$$\dot{J} = J\mathbf{1} : \mathbf{D} \quad (\text{B.10})$$

définissant ainsi $\textcircled{3}$.

¹Attention il faut garder en tête la condition d'incompressibilité portant sur $\bar{\mathbf{C}}_a$ qui s'écrit

$$\dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0$$

Cette dernière permet l'écriture de l'égalité

$$\left[-\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} \right] : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a = -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a$$

Le principe de normalité est alors appliqué à $-\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a}$, permettant ainsi de tenir compte de l'incompressibilité de la transformation anélastique.

2. Le terme ① se verra partiellement traité une fois $\dot{\bar{\mathbf{B}}}$ défini.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{B}}} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} \\ &= \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} \\ &= J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \mathbf{B} [1 : \mathbf{D}] \right] \\ &= \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}} [1 : \mathbf{D}]\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &= \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \left[\mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}} [1 : \mathbf{D}] \right] \\ &= \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \mathbf{D} - \left[\left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \mathbf{1} \right] \left[\frac{1}{3} \mathbf{1} : \mathbf{D} \right] \quad (\text{car } \bar{\mathbf{B}} \text{ est symétrique et } \psi_{eq} \text{ isotrope de } \bar{\mathbf{B}}) \\ &= \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \mathbf{D} - \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \frac{1}{3} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] : \mathbf{D} \quad (\text{car } [\mathbf{A} : \mathbf{B}] [\mathbf{C} : \mathbf{D}] = \mathbf{A} : [\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}] : \mathbf{D}) \\ &= \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \underbrace{\left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \right]}_{\mathbb{P}_1} : \mathbf{D}\end{aligned}$$

① est ainsi complètement défini comme suit :

$$\textcircled{1} = \left[2\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right] : \mathbb{P}_1 : \mathbf{D} \quad (\text{B.11})$$

3. $\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e$ n'étant pas une variable objective, le terme ②, contrairement aux cas lagrangien et mixte nécessite une remise en forme. Calculons de manière préalable la dérivée temporelle de $\bar{\mathbf{F}}_e$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{F}}}_e &= \frac{d}{dt} \left(J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{3} J^{-\frac{1}{3}} [1 : \mathbf{D}] \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} + J^{-\frac{1}{3}} \dot{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} + J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{F}}_e [1 : \mathbf{D}] + J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} + \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a \cdot \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}_a^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{F}}_e [1 : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{F}}_e - \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{L}}_a \quad (\text{car } 0 = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{F}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1}) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{F}}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^{-1}}_{\bar{\mathbf{L}}_a} + \bar{\mathbf{F}}_a \cdot \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}_a^{-1})\end{aligned}$$

ceci permet alors une évaluation aisée de :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e &= \dot{\bar{\mathbf{F}}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^T + \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \dot{\bar{\mathbf{F}}}_e^T \\ &= -\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [1 : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^T \\ &= -\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [1 : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \underbrace{\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_a \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T}_{\bar{\mathbf{D}}_a^o} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e\end{aligned}$$

L'expression ainsi obtenue de $\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e$, *i.e.*

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = -\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [1 : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_a^o \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \quad (\text{B.12})$$

permet de réécrire terme ② de (B.9) :

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} &= \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \left[-\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [1 : \mathbf{D}] + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e - 2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] \\
&= \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \mathbf{D} - \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \left[\frac{1}{3} \mathbf{1} [1 : \mathbf{D}] \right] \quad (\text{car } \bar{\mathbf{B}}_e \text{ est symétrique et } \psi_{neq} \text{ isotrope de } \bar{\mathbf{B}}_e) \\
&\quad - \left[2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \\
&= \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \mathbf{D} - \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \left(\frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) : \mathbf{D} \quad (\text{car } [\mathbf{A} : \mathbf{B}] [\mathbf{C} : \mathbf{D}] = \mathbf{A} : [\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}] : \mathbf{D}) \\
&\quad - \left[2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \\
&= \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \underbrace{\left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right]}_{\mathbb{P}_1} : \mathbf{D} - 2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ
\end{aligned}$$

et donc

$$\textcircled{2} = \left[2 \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right] : \mathbb{P}_1 : \mathbf{D} - \left[2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \quad (\text{B.13})$$

La réécriture de l'inégalité de Clausius-Duhem (2.13) peut donc se faire via (B.11), (B.13) et (B.10) :

$$\left[-2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \mathbb{P}_1 - 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \mathbb{P}_1 - \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} + \boldsymbol{\sigma} \right] : \mathbf{D} + \left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \geq 0$$

La forme du potentiel de dissipation postulée (2.42) et le principe de normalité conduisent alors le problème eulérien :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq} : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\
\left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right] : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^\circ} \\
\text{avec } \mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\
\text{et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e); \boldsymbol{\sigma}_{vol} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\
\text{en respectant } \text{tr} \mathbf{D} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^\circ = 0
\end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

ANNEXE

C

Extension de l'énergie libre et conservation de l'isotropie

C.1 Eulérien

REMARQUE C.1

L'ensemble de la démarche présentée ci-dessous est réalisée sans aucune simplification relative à l'incompressibilité dans le soucis d'avoir une démarche complète éventuellement transposable à un cas compressible. Ainsi, dans le cadre choisit dans le chapitre 2, il serait possible de refaire le raisonnement présenté ci-après considérant :

$$\det \bar{\mathbf{B}} = \det \bar{\mathbf{B}}_e = \det \bar{\mathbf{B}}_a = 1$$

Démontrons que : si $\psi_{neq}^a(\bar{\mathbf{B}}_a)$ est une fonction isotrope de $\bar{\mathbf{B}}_a$ alors ψ_{neq}^a est une fonction isotrope de $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$

On définit les opérateurs invariants qui à un tenseur associent l'invariant de ce dernier :

$$I_1(\mathbf{X}) = \text{tr} \mathbf{X} \quad (\text{C.1})$$

$$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{X})^2 - \text{tr} \mathbf{X}^2 \right) \quad (\text{C.2})$$

$$I_3(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X} \quad (\text{C.3})$$

Par ailleurs, on rappelle la propriété fondamentale reliant les invariants d'un tenseur \mathbf{X} invariants à ceux de son inverse \mathbf{X}^{-1} (propriété obtenue par le théorème de CAYLEY -HAMILTON ([Lelong-Ferrand et Arnua diès, 1978](#))) :

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})} \\ I_2(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})} \\ I_3(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\mathbf{X})} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

De plus, on notera :

$$\begin{cases} I_k(\bar{\mathbf{B}}_e) = I_k \\ I_k(\bar{\mathbf{B}}_a) = I_k^a \\ I_k(\bar{\mathbf{B}}_e) = I_k^e \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

De manière analogue, on introduit les opérateurs invariants mixtes associant à deux tenseurs leurs invariants mixtes :

$$\begin{cases} K_{11}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}), \\ K_{12}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^2) = \text{tr}(\mathbf{Y}^2 \cdot \mathbf{X}), \\ K_{21}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^2), \\ K_{22}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{Y}^2) = \text{tr}(\mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{Y}^2), \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

et on note

$$\begin{cases} K_{11}(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = K_{11} \\ K_{12}(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = K_{12} \\ K_{21}(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = K_{21} \\ K_{22}(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = K_{22} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

si ψ_{neq}^a est isotrope de $\bar{\mathbf{B}}_a$ alors cette fonction dépend de (I_1^a, I_2^a, I_3^a) . Montrons que ψ_{neq}^a est une fonction isotrope de $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$ ou encore qu'elle dépend des invariants (simples et mixtes) de ces deux tenseurs.

$$\begin{aligned}
 I_3^a &= \det \bar{\mathbf{B}}_a \\
 &= \det (\bar{\mathbf{F}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^T) \\
 &= \det (\bar{\mathbf{F}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^{-T}) \\
 &= \det \bar{\mathbf{F}}_e^{-1} \det \bar{\mathbf{B}} \det \bar{\mathbf{F}}_e^{-T} \\
 &= \det \bar{\mathbf{B}} \det \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_3^a = \frac{I_3}{I_3^e}} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned}
 I_1^a &= \text{tr} (\bar{\mathbf{B}}_a) \\
 &= \text{tr} (\bar{\mathbf{F}}_a \cdot \bar{\mathbf{F}}_a^T) \\
 &= \bar{\mathbf{F}}_a : \bar{\mathbf{F}}_a \\
 &= (\bar{\mathbf{F}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}) : (\bar{\mathbf{F}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}) \\
 &= (\bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}) : \mathbf{1} \\
 &= \text{tr} (\bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}})
 \end{aligned}$$

On sait que $\bar{\mathbf{B}}_e$ annule son polynôme caractéristique donc :

$$\bar{\mathbf{B}}_e^{-1} = \frac{1}{I_3^e} \bar{\mathbf{B}}_e^2 - \frac{I_1^e}{I_3^e} \bar{\mathbf{B}}_e + \frac{I_2^e}{I_3^e} \mathbf{1}$$

si bien que :

$$\boxed{I_1^a = \frac{K_{12}}{I_3^e} - \frac{I_1^e K_{11}}{I_3^e} + \frac{I_2^e I_1}{I_3^e}} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned}
 I_2^a &= I_3^a I_1 (\bar{\mathbf{B}}_a^{-1}) \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} I_1 (\bar{\mathbf{B}}_a^{-1}) \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} I_1 (\bar{\mathbf{F}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}_e) \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} \text{tr} (\bar{\mathbf{F}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}_e) \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} (\bar{\mathbf{F}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}_e) : \mathbf{1} \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} : \bar{\mathbf{B}}_e \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e : \mathbf{1} \\
 &= \frac{I_3}{I_3^e} \text{tr} (\bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e)
 \end{aligned}$$

Tout comme $\bar{\mathbf{B}}_e$, $\bar{\mathbf{B}}$ annule son polynôme caractéristique :

$$\bar{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{I_3} \bar{\mathbf{B}}^2 - \frac{I_1}{I_3} \bar{\mathbf{B}} + \frac{I_2}{I_3} \mathbf{1}$$

et donc

$$\boxed{I_2^a = \frac{K_{21}}{I_3^e} - \frac{I_1 K_{11}}{I_3^e} + \frac{I_2 I_1^e}{I_3^e}} \quad (\text{C.10})$$

Ainsi les équations (C.8), (C.9) et (C.10) montrent que si ψ_{neq}^a est isotrope de $\bar{\mathbf{B}}_a$ (i.e. qui dépend de (I_1^a, I_2^a, I_3^a)) alors cette fonction dépend de $(I_1, I_2, I_3, I_1^e, I_2^e, I_3^e, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22})$ et est donc isotrope de $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e)$.

C.2 Lagrangien

Une démarche analogue conduirait à démontrer que :

$$\begin{aligned} \text{Si } \psi_{neq}^e(\bar{\mathbf{C}}_e) \text{ est une fonction isotrope de } \bar{\mathbf{C}}_e \text{ alors} \\ \psi_{neq}^e \text{ est une fonction isotrope de } (\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}_a) \end{aligned}$$

C.3 Conséquences

Les différents problèmes se retrouvent ainsi enrichis de l'apport d'un terme supplémentaire ($\psi_{neq}^a(\bar{\mathbf{B}}_a)$ ou $\psi_{neq}^e(\bar{\mathbf{C}}_e)$ respectivement dans les cas eulérien et lagrangien) dans le découpage de l'énergie libre. Ces deux extensions se feront par des calculs différents.

C.3.1 Eulérien

Dans le cas eulérien, il est préférable de repartir de l'expression de la dérivée temporelle de l'énergie libre (*i.e.* de manière analogue à (B.9)) :

$$\dot{\psi} = \underbrace{\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} j}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_a}_{\textcircled{4}} \quad (\text{C.11})$$

Le terme $\textcircled{4}$ peut être réécrit

$$\textcircled{4} = \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a} : [\bar{\mathbf{L}}_a \cdot \bar{\mathbf{B}}_a + \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \bar{\mathbf{L}}_a^T] = 2\bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a} : \bar{\mathbf{D}}_a \quad (\text{car } \psi_{neq}^a \text{ est isotrope et } \bar{\mathbf{B}}_a \text{ est symétrique}) \quad (\text{C.12})$$

ce qui peut finalement s'écrire via (2.39)

$$\textcircled{4} = 2\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a} \bar{\mathbf{R}}_e^T : \bar{\mathbf{D}}_a^\circ \quad (\text{C.13})$$

Le problème (2.45) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{D}} \\ \left[2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e - 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a} \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T \right] : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^\circ} \\ \text{avec } \mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \text{et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e) \\ \text{en respectant } \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^\circ = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.14})$$

C.3.2 Lagrangien et mixte

Dans les cas lagrangien et mixte, la démarche est moins "élégante", car une démarche analogue à celle présentée dans le cas eulérien (*i.e.* faire apparaître un terme $\frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{C}}}_e$ dans l'expression de $\dot{\psi}$) ne

permettrait pas de facilement faire apparaître les dérivées temporelles de nos deux variables d'état $\bar{\mathbf{C}}$ et $\bar{\mathbf{C}}_a$. Ainsi les problèmes lagrangien (2.43) et mixte (2.44) se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + \mathbf{S}_{\text{vol}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ \boldsymbol{\pi} = \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \\ - \left[\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^a}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a} \right] : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a} \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] ; \mathbb{P}_{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right] ; \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}_a} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{C}}_a \otimes \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} \\ \text{et } \bar{\mathbf{S}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) ; \bar{\boldsymbol{\pi}}_{\text{eq}} = 2\rho_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{eq}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}) \\ \mathbf{S}_{\text{vol}} = \rho_0 J \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} ; \boldsymbol{\pi}_{\text{vol}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{vol}}}{\partial J} \text{cof}(\mathbf{F}) \\ \text{en respectant } \dot{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1} = 0 ; \dot{\bar{\mathbf{C}}}_a : \bar{\mathbf{C}}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.15})$$

La définition des lois de comportement et d'évolution des modèles rhéologiques présentés dans le chapitre 3 (guidant le choix des potentiels) sera donc plus délicate dans les cas lagrangien et mixte de par l'évaluation des termes : $\frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}}$ et $\frac{\partial \psi_{\text{neq}}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_a}$.

ANNEXE

D

Modèles unitaires du chapitre 3

D.1 Modèles visco-élastiques dans le cadre lagrangien incompressible

Le point de départ de l'écriture des modèles de Zener et de Poynting-Thomson dans un cadre lagrangien et incompressible est l'équation (2.56).

on adopte les notations suivantes :

$$W_{eq,i} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial I_i}; W_{neq,i}^a = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial I_i^a}; W_{neq,i}^e = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial I_i^e} \quad i \in \{1; 2\} \quad (D.1)$$

D.1.1 Modèle de Zener

Partant de (2.56) en prenant $\psi_{neq}^a = \varphi_0 = 0$, ψ_{eq} et ψ_{neq}^e respectivement isotropes de \mathbf{C} et \mathbf{C}_e^1 , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \mathbf{C}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \mathbf{C}_a} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (D.2)$$

on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2 \left[W_{eq,1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + W_{eq,2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} + 2 \left[W_{eq,1}^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}} + W_{eq,2}^e \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \\ - \left[W_{eq,1}^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}_a} + W_{eq,2}^e \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}_a} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (D.3)$$

En utilisant :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1} \quad (D.4)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C}^{-2} \quad (D.5)$$

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}_a^{-1} \quad (D.6)$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad (D.7)$$

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}_a} = -\mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_a^{-1} \quad (D.8)$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}_a} = \mathbf{C}^{-1} \quad (D.9)$$

il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2 \left[W_{eq,1} \mathbf{C} - W_{eq,2} \mathbf{C}^{-1} + W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p\mathbf{C}^{-1} \\ \left[W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (D.10)$$

¹On rappelle que dans le cas incompressible $\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{C}_e = \bar{\mathbf{C}}_e$.

D.1.2 Modèle de Poynting-Thomson

L'approche pour le modèle de Poynting-Thomson est sensiblement la même en prenant $\psi_{eq} = \varphi_0 = 0$, ψ_{neq}^a et ψ_{neq}^e respectivement isotropes de \mathbf{C}_a et \mathbf{C}_e . (2.56) devient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \mathbf{C}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \\ -\rho_0 \left[\frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \mathbf{C}_a} + \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \mathbf{C}_a} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 2 \left[W_{eq,1}^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}} + W_{eq,2}^e \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \\ - \left[W_{eq,1}^a \frac{\partial I_1^a}{\partial \mathbf{C}_a} + W_{eq,2}^a \frac{\partial I_2^a}{\partial \mathbf{C}_a} + W_{eq,1}^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbf{C}_a} + W_{eq,2}^e \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbf{C}_a} \right] : \mathbb{P}_{\mathbf{C}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

en ajoutant aux équations (D.6), (D.7), (D.9) et (D.9)

$$\frac{\partial I_1^a}{\partial \mathbf{C}_a} = \mathbf{1} \quad (\text{D.13})$$

et

$$\frac{\partial I_2^a}{\partial \mathbf{C}_a} = -\mathbf{C}_a^{-2} \quad (\text{D.14})$$

on arrive directement aux équations gouvernant le comportement du modèle de Poynting-Thomson :

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 2 \left[W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}^{-1} - p\mathbf{C}^{-1} \\ \left[-W_{neq,1}^a \mathbf{C}_a + W_{neq,2}^a \mathbf{C}_a^{-1} + W_{neq,1}^e \mathbf{C}_a^{-1} \cdot \mathbf{C} - W_{neq,2}^e \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}_a \right]^D \cdot \mathbf{C}_a^{-1} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} \\ \text{en respectant } \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{-1} = 0 ; \dot{\mathbf{C}}_a : \mathbf{C}_a^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

D.1.3 choix des potentiels

Nos choix pour les énergies libres se tourneront vers des potentiels hyperélastiques dont les dérivées seront aisées à calculer. De plus le pseudo-potential de dissipation sera choisi de forme quadratique, *i.e.*

$$\varphi_a = \eta \dot{\mathbf{C}}_a : \dot{\mathbf{C}}_a \quad (\text{D.16})$$

donc

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{\mathbf{C}}_a} = \eta \dot{\mathbf{C}}_a \quad (\text{D.17})$$

D.2 Modèles élasto(-visco)-plastiques dans le cadre eulérien compressible

D.2.1 Modèles Z, Bingham et Zener

Une seule démarche sera menée par la suite, car pour les deux modèles présentés dans les paragraphes 3.2.2.1 et 3.2.2.2, seuls les pseudo-potentiels de dissipations seront différents. Celle-ci est sensiblement la même que celles menées précédemment, seul le cadre choisi est différent – ici il est eulérien compressible – ce qui implique comme point de départ le système (2.48) pour lequel $\psi_{neq}^a = \varphi_0 = 0$, ψ_{eq} et ψ_{neq}^e respectivement isotropes de $\bar{\mathbf{B}}$ et $\bar{\mathbf{B}}_e$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} : \mathbb{P}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}}(\bar{\mathbf{B}}); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e) \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.18})$$

ainsi en notant

$$W_{eq,i} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial I_i}; W_{neq,i}^e = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial I_i^e} \quad i \in \{1; 2\} \quad (\text{D.19})$$

on arrive a

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} = 2J^{-1} W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - 2J^{-1} W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \text{ et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^e = 2J^{-1} W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2J^{-1} W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \quad (\text{D.20})$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{eq,1} \bar{\mathbf{B}} - W_{eq,2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} + W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ 2J^{-1} \left[W_{neq,1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2W_{neq,2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.21})$$

Encore une fois, notre choix pour les différentes énergies libres se porte sur des potentiels hyperélastiques simples. Les deux modèles se distinguent alors uniquement par le choix de φ_a :

– dans le cas du modèle Z, on choisit

$$\varphi_a(\bar{\mathbf{D}}_a^o) = \chi \left\| \bar{\mathbf{D}}_a^o \right\| \quad (\text{D.22})$$

et donc (D.21b) devient

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} = \chi \frac{\bar{\mathbf{D}}_a^o}{\left\| \bar{\mathbf{D}}_a^o \right\|} \quad (\text{D.23})$$

– dans le cas du modèle de Zener, on a :

$$\varphi_a(\bar{\mathbf{D}}_a^o) = \eta \bar{\mathbf{D}}_a^o : \bar{\mathbf{D}}_a^o \quad (\text{D.24})$$

et (D.21b) abouti alors à :

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} = \eta \bar{\mathbf{D}}_a^o \quad (\text{D.25})$$

– dans le cas du modèle de Bingham généralisé, une approche duale est préférée

$$\varphi_a^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD}) = \frac{\left\langle \left\| \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD} \right\| - \chi \right\rangle^2}{\eta} \quad (\text{D.26})$$

permettant de substituer à (D.21b) :

$$\bar{\mathbf{D}}_p^0 = \frac{\langle \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD} - \chi\| \rangle}{\eta} \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^{eD}\|} \text{ avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e = 2J^{-1}W_{\text{neq},1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - W_{\text{neq},2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \quad (\text{D.27})$$

D.2.2 Poynting-Thomson

Pour le modèle étudié ici, on a $\psi_{eq} = \varphi_0 = 0$, ψ_{eq}^a et ψ_{neq}^e respectivement isotropes de $\bar{\mathbf{B}}_a$ et $\bar{\mathbf{B}}_e$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e : \mathbb{P}_1 = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \bar{\mathbf{D}}_a^o} + [\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a \bar{\mathbf{R}}_e^T] : \mathbb{P}_1 \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e}(\bar{\mathbf{B}}_e); \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^a = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial \bar{\mathbf{B}}_a}(\bar{\mathbf{B}}_a) \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.28})$$

comme précédemment, en notant :

$$W_{\text{neq},i}^e = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^e}{\partial I_i^e}; W_{\text{neq},i}^a = \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^a}{\partial I_i^a} \quad i \in \{1; 2\} \quad (\text{D.29})$$

et en choisissant un pseudo-potential de dissipation quadratique de la forme

$$\varphi_a = \eta \bar{\mathbf{D}}_a^o : \bar{\mathbf{D}}_a^o \quad (\text{D.30})$$

on arrive à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[W_{\text{neq},1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2W_{\text{neq},2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \\ 2J^{-1} \left[W_{\text{neq},1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2W_{\text{neq},2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D = \eta \bar{\mathbf{D}}_a^o + 2J^{-1} \left[\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \left[W_{\text{neq},1}^a \bar{\mathbf{B}}_a - 2W_{\text{neq},2}^a \bar{\mathbf{B}}_a^{-1} \right] \bar{\mathbf{R}}_e^T \right]^D \\ \text{en respectant } \text{tr} \bar{\mathbf{D}} = 0; \text{tr} \bar{\mathbf{D}}_a^o = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.31})$$

D.2.3 Lois d'écoulement de modèles de Zener, Poynting-Thomson et Bingham

Les lois d'écoulement sont destinés à déterminer la variable interne, ici $\bar{\mathbf{B}}_e$. Dans le cas eulérien l'obtention est moins immédiate qu'en description lagrangienne. Le point de départ de leurs établissement pour les différents modèles est l'équation (B.12) que l'on rappelle :

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = -\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [\mathbf{1} : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_a^o \cdot \bar{\mathbf{V}}_e^T$$

D.2.3.1 Modèle de Zener

Pour ce modèle la démarche est quasi-instantannée puisque d'après les équations (D.18), (D.21) et (D.25), on a :

$$\underbrace{2J^{-1} \left[W_{\text{neq},1}^e \bar{\mathbf{B}}_e - 2W_{\text{neq},2}^e \bar{\mathbf{B}}_e^{-1} \right]^D}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{neq}}^e} = \eta \bar{\mathbf{D}}_a^o \quad (\text{D.32})$$

ce qui une fois introduit dans (B.12), en remarquant que :

$$\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (\text{D.33})$$

donne pour l'équation d'évolution de $\bar{\mathbf{B}}_e$:

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = -\frac{2}{3} \bar{\mathbf{B}}_e [\mathbf{1} : \mathbf{D}] + \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{\eta} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (\text{D.34})$$

D.2.3.2 Modèle de Bingham

La proximité des modèles de Bingham et de Zener conduit à une démarche équivalent mais en introduisant directement (D.27) dans (B.12) :

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (\mathbf{1} : \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - 2 \frac{\langle \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD}\| - \chi \rangle}{\eta} \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD}\|} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \quad (\text{D.35})$$

D.2.3.3 Modèle de Poynting-Thomson

Quelques résultats préliminaires sont nécessaires à l'établissement de cette loi.

On remarque que :

$$\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}_a \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T = \bar{\mathbf{V}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{V}}_e^{-1} \quad (\text{D.36})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}_a^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_e^T = \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \quad (\text{D.37})$$

ainsi que :

$$[\bar{\mathbf{V}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{V}}_e^{-1}]^D = \bar{\mathbf{V}}_e^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{V}}_e^{-1} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}) \mathbf{1} \quad (\text{D.38})$$

$$[\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e]^D = \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}}^{-1} : \bar{\mathbf{B}}_e) \mathbf{1} \quad (\text{D.39})$$

Ainsi l'évolution de $\bar{\mathbf{B}}_e$, dans le cas du modèle de Poynting-Thomson est :

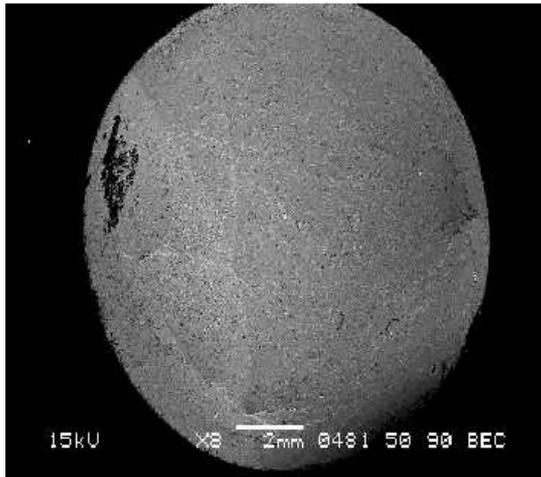
$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = & \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} (\mathbf{1} : \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{2}{\eta} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^{eD} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e \\ & + \frac{4}{\eta J} W_{neq,1}^a \left[\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_e \right] \\ & + \frac{4}{\eta J} W_{neq,2}^a \left[\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}}^{-1} : \bar{\mathbf{B}}_e) \bar{\mathbf{B}}_e \right] \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

ANNEXE

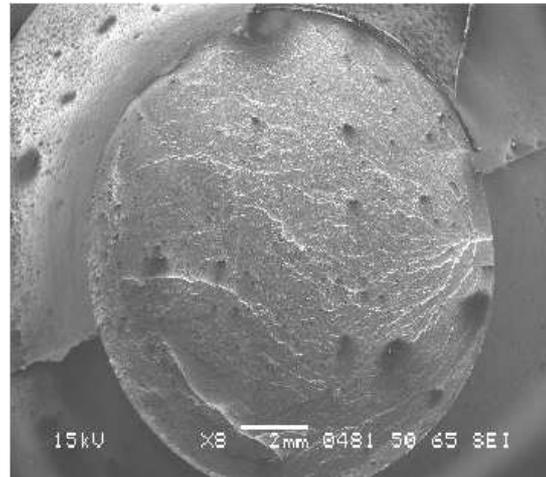
E

**Observations M.E.B.
complémentaires de faciès de
rupture obtenus sous sollicitations
multiaxiales**

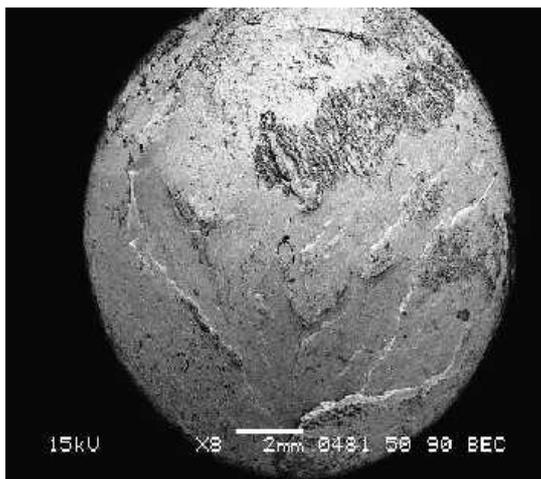
E.1 Observations macroscopiques



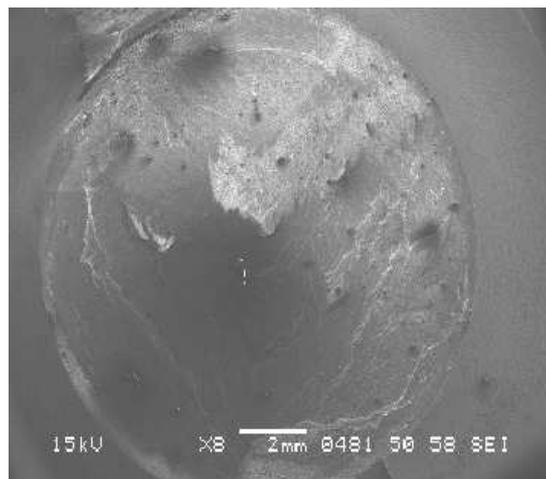
(a) $\delta = 0^\circ$ (74700 cycles), électrons secondaires.



(b) $\delta = 0^\circ$ (74700 cycles), électrons retrodiffusés.



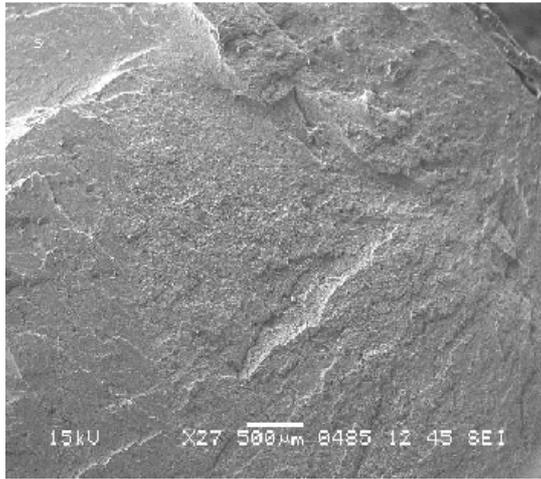
(c) $\delta = 180^\circ$ (41875 cycles), électrons secondaires.



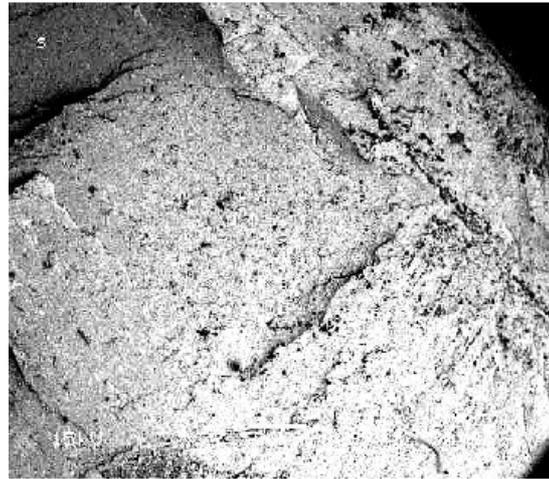
(d) $\delta = 180^\circ$ (41875 cycles), électrons retrodiffusés.

FIG. E.1 – Observations au M.E.B. de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm$, $\theta_{max} = 34^\circ$, $R_e = 0.1$).

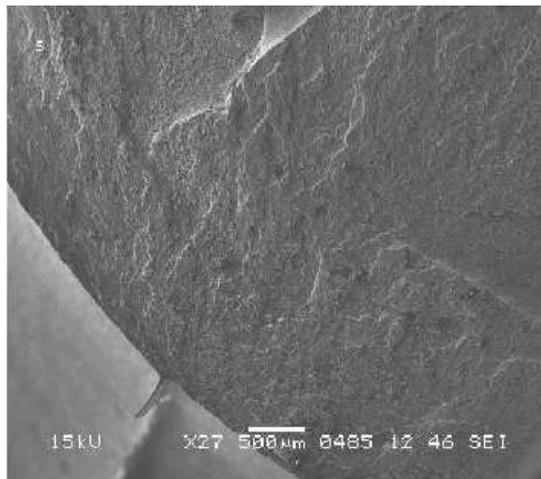
E.2 Détails de la zone d'initiation (x27)



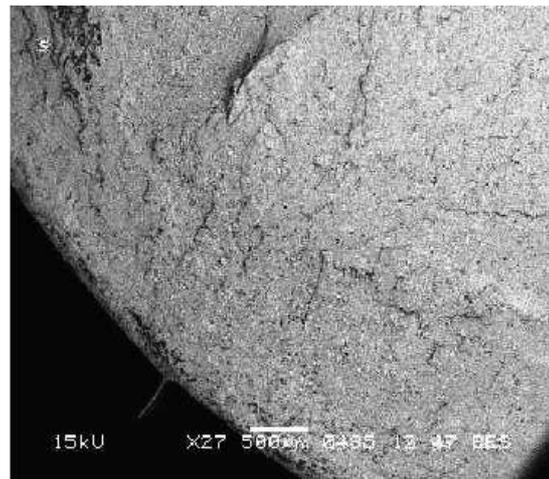
(a) $\delta = 0^\circ$ (74700 cycles), électrons secondaires.



(b) $\delta = 0^\circ$ (74700 cycles), électrons retrodiffusés.



(c) $\delta = 180^\circ$ (41875 cycles), électrons secondaires.



(d) $\delta = 180^\circ$ (41875 cycles), électrons retrodiffusés.

FIG. E.2 – Observations au M.E.B. (x27) de faciès de rupture obtenus sous sollicitations multiaxiales ($d_{max} = 17mm$, $\theta_{max} = 34^\circ$, $R_\epsilon = 0.1$).

F

**Courbes S-N obtenues sous
chargement de traction avec
 $R_\sigma = 0.5$ négligé**

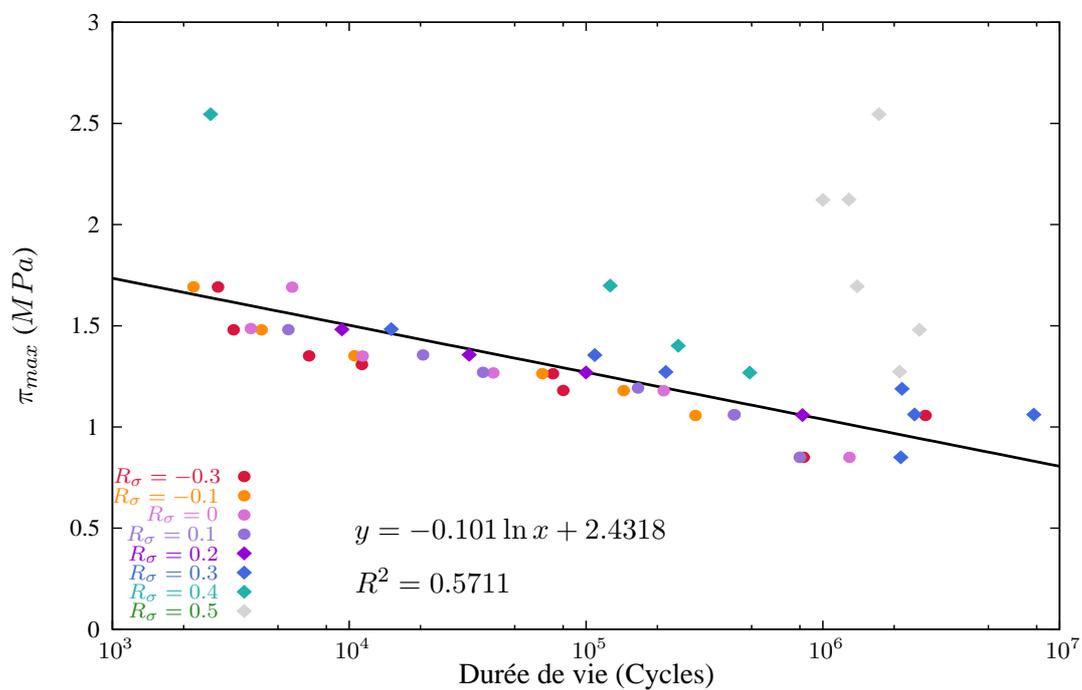


FIG. F.1 – Courbe S-N du polychloroprène en contrainte maximale. $R_{\sigma} = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).

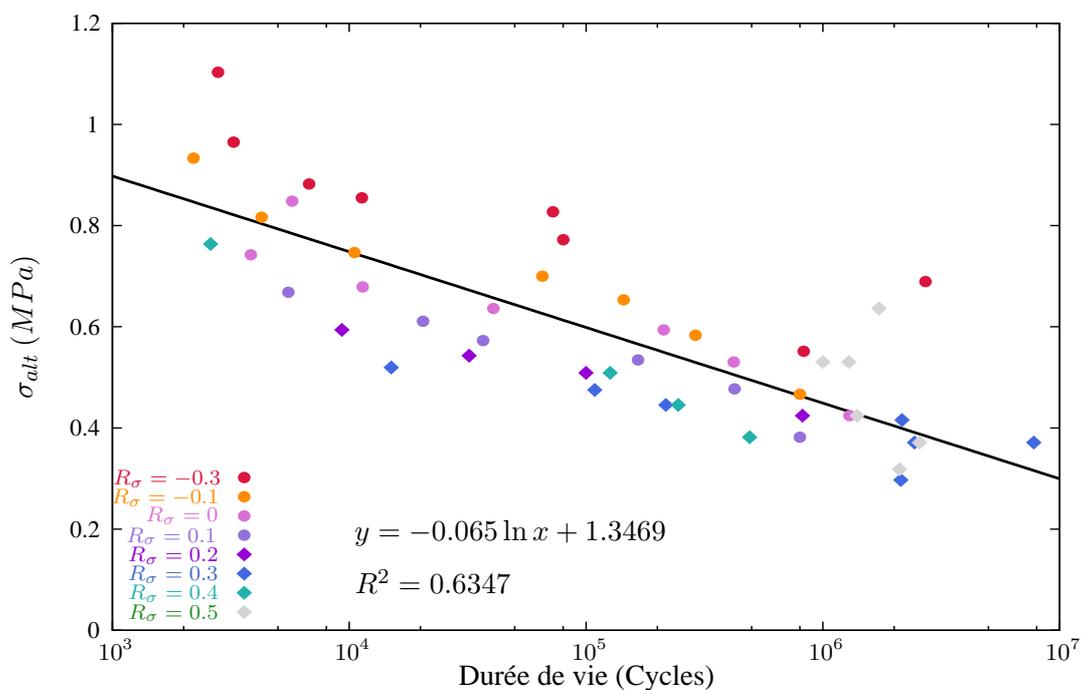


FIG. F.2 – Courbe S-N du polychloroprène ena contrainte alternée. $R_{\sigma} = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).

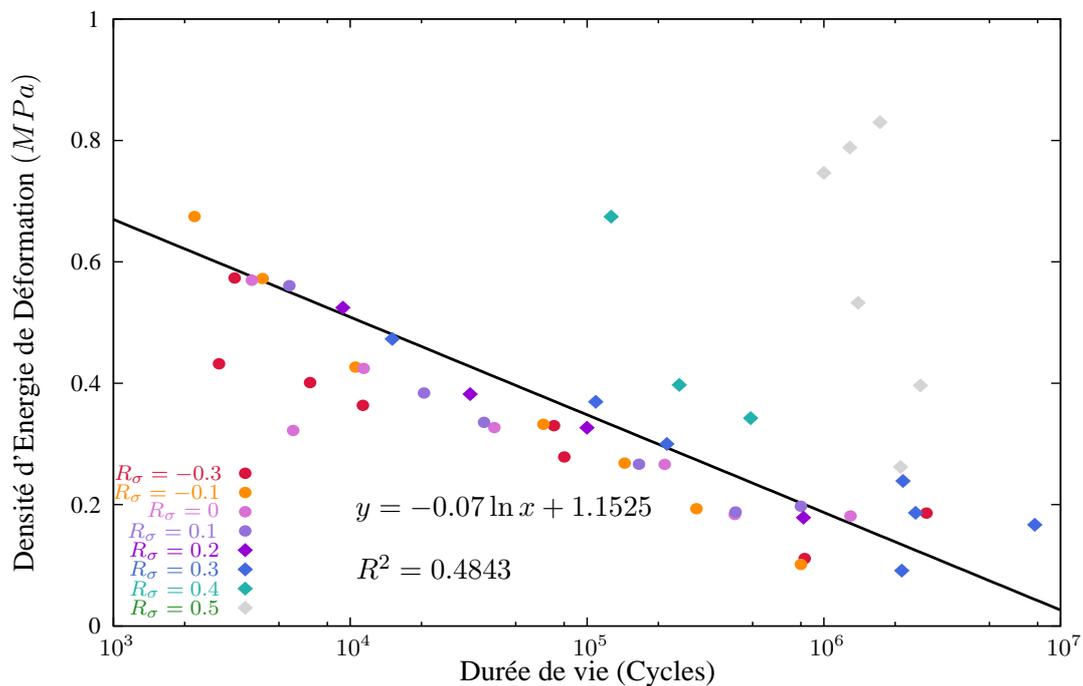


FIG. F.3 – Courbe S-N du polychloroprène en densité d'énergie de déformation. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).

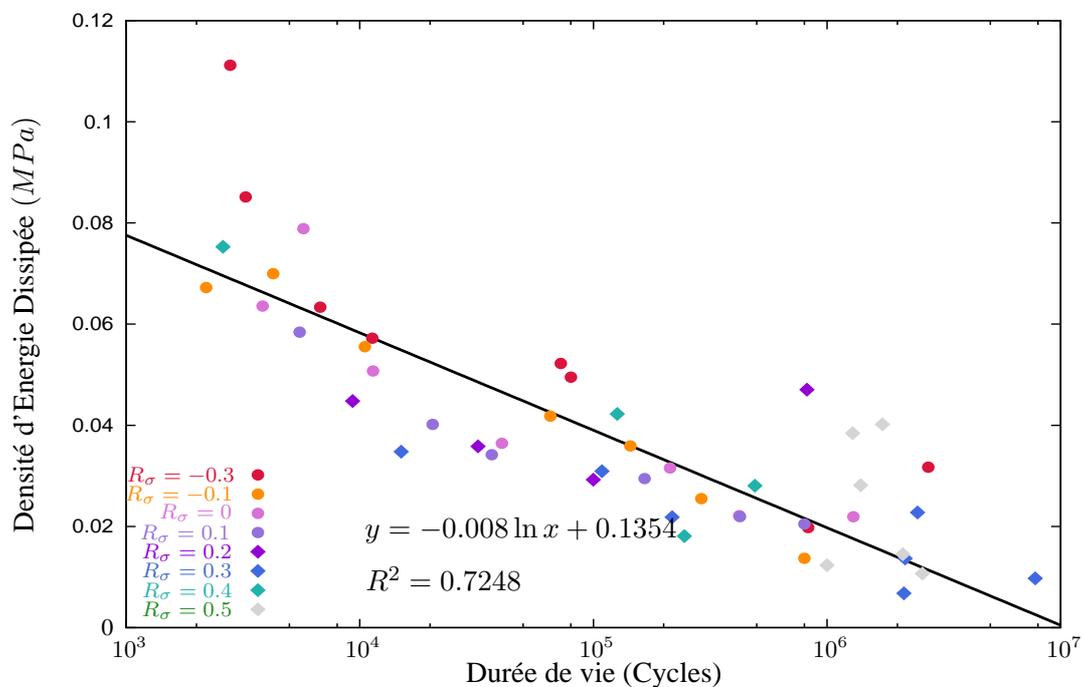


FIG. F.4 – Courbe S-N du polychloroprène en densité d'énergie dissipée. $R_\sigma = 0.5$ négligé dans la corrélation (points gris).

ANNEXE

G

Identification du comportement du CR

G.1 Préambule

Afin de calculer de manière locale et sous sollicitations complexes les différents critères mises en oeuvre dans le paragraphe 5.3.3, il nous est nécessaire de connaître la distribution sur notre éprouvette de différents champs mécaniques (contraintes, déformations...) ainsi que de leurs évolutions dans le temps. Pour ce faire, deux choix simples se sont offerts à nous : un modèle analytique ou un modèle éléments finis.

G.2 Modèle analytique

G.2.1 Principe

Le modèle analytique proposé ici s'appuie sur :

- une cinématique incompressible simplifiée considérant le diabolo comme un cylindre, ainsi en un point M de coordonnées (R, Θ, Z) dans la base cylindrique initiale $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$, le gradient s'exprimera dans cette même base :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1/2} R \cos(\frac{\beta Z}{L}) & -\lambda^{-1/2} R \sin(\frac{\beta Z}{L}) & -\frac{\lambda^{-1/2} R \beta}{L} \sin(\frac{\beta Z}{L}) \\ \lambda^{-1/2} R \sin(\frac{\beta Z}{L}) & \lambda^{-1/2} R \cos(\frac{\beta Z}{L}) & \frac{\lambda^{-1/2} R \beta}{L} \cos(\frac{\beta Z}{L}) \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda = 1 + \frac{\delta l}{L} \quad (\text{G.1})$$

où β , δl et L sont respectivement l'angle de torsion, le déplacement de traction appliqués et la longueur initiale de la zone utile.

- une loi simple généralisant aux grandes déformations un modèle de Kelvin-Voigt (cf. (2.57) et TAB. 2.4) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = 2\rho_0 \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathbf{E}}} - p \mathbf{F}^{-T} \\ \rho_0 \psi = C_{10}(I_1(\mathbf{C}) - 3) + C_{01}(I_2(\mathbf{C}) - 3) \\ \varphi = \eta \dot{\mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

Les paramètres sont identifiés sur une courbe d'hystérésis stabilisée obtenue sous chargement de traction, au moyen d'une méthode des moindres carrés. Les résultats obtenus sont :

$$C_{10} = 0.0476 \text{ MPa} \quad C_{01} = 0.7067 \text{ MPa} \quad \eta = 0.0037 \text{ MPas}$$

G.2.2 Quelques résultats

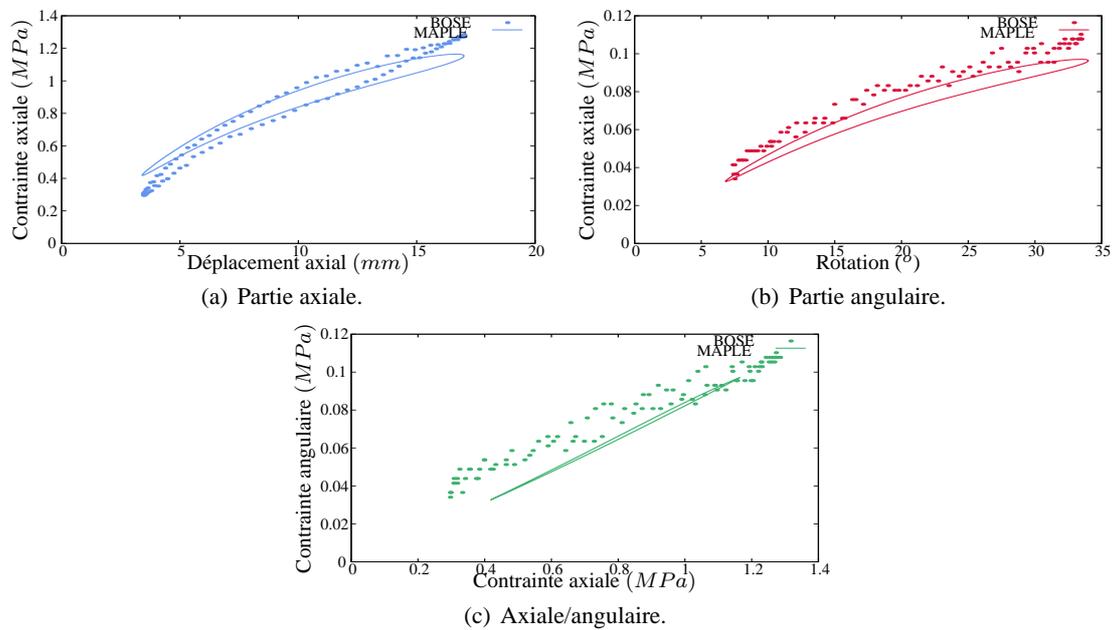


FIG. G.1 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ($\delta = 0^\circ$, $R_\varepsilon = 0.2$, $d_{max} = 17\text{mm}$).

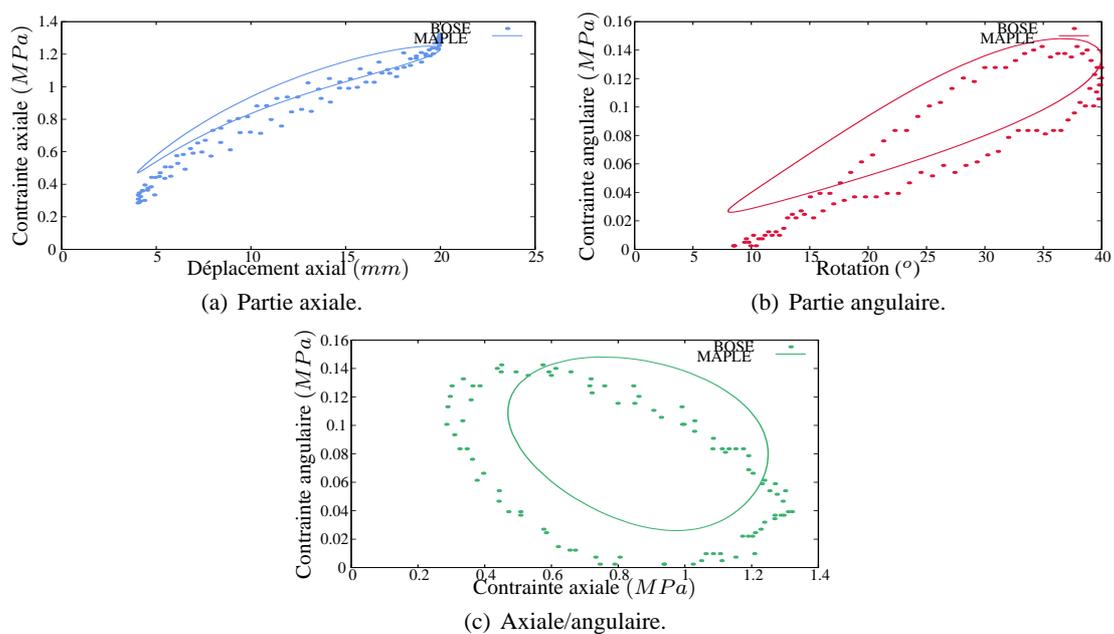


FIG. G.2 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ($\delta = 90^\circ$, $R_\varepsilon = 0.2$, $d_{max} = 20\text{mm}$).

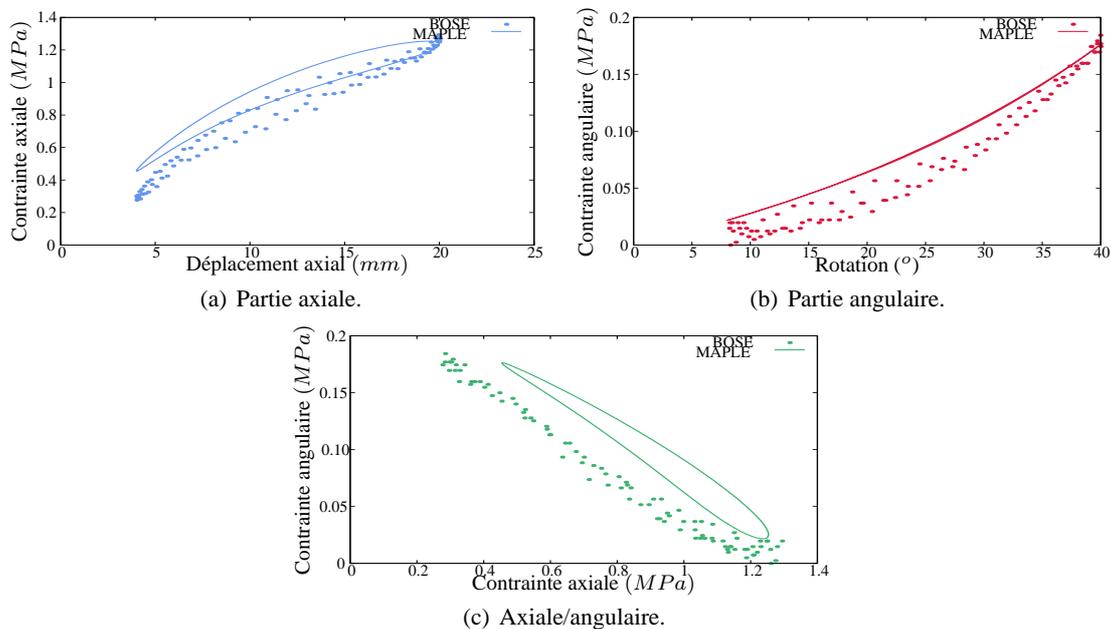


FIG. G.3 – Confrontation du modèle analytique avec un cycle de fatigue stabilisé ($\delta = 180^\circ$, $R_\varepsilon = 0.2$, $d_{max} = 20mm$).

G.3 Modèle éléments finis

G.3.1 Principes

La discrétisation géométrique du diabolo utilisée est donnée FIG. G.4, elle fait intervenir l'élément volumique SOLID186 du logiciel ANSYS[®], de forme héxaédrique, qui propose une formulation mixte déplacement-pression (quadratique en déplacement et linéaire en pression).

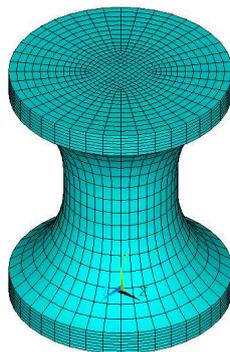


FIG. G.4 – Éprouvette diabolo maillée.

La loi de comportement choisie est détaillée dans (Holzapfel, 1996b,a)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{ISO}}(\mathbf{C}) - p\mathbf{C}^{-1} + \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{Q}_\alpha \quad (\text{G.3})$$

Avec \mathbf{S}_{ISO} une contrainte hyperélastique ici définie via un potentiel de type Mooney-Rivlin à deux termes (C_{10}, C_{01}) et

$$\mathbf{Q}_\alpha = e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}} \mathbf{Q}_0^\alpha + \int_0^t \beta_\infty^\alpha e^{-\frac{t-s}{\tau_\alpha}} \frac{d\mathbf{S}_{ISO}}{ds} ds \quad (\text{G.4})$$

où $\beta_\infty^1, \beta_\infty^2, \tau_1$ et τ_2 sont 4 paramètres à identifier.

Le modèle dépend donc de 6 coefficients matériaux dont l'identification sera :

$$C_{10} = 0.36 \text{MPa} \quad C_{01} = 0.12 \text{MPa} \quad \alpha_1^G = \frac{\beta_\infty^1}{G_0} = 0.18 \quad \alpha_2^G = \frac{\beta_\infty^2}{G_0} = 0,1 \quad \tau_1 = 2s \quad \tau_2 = 2000s$$

G.3.2 Quelques résultats

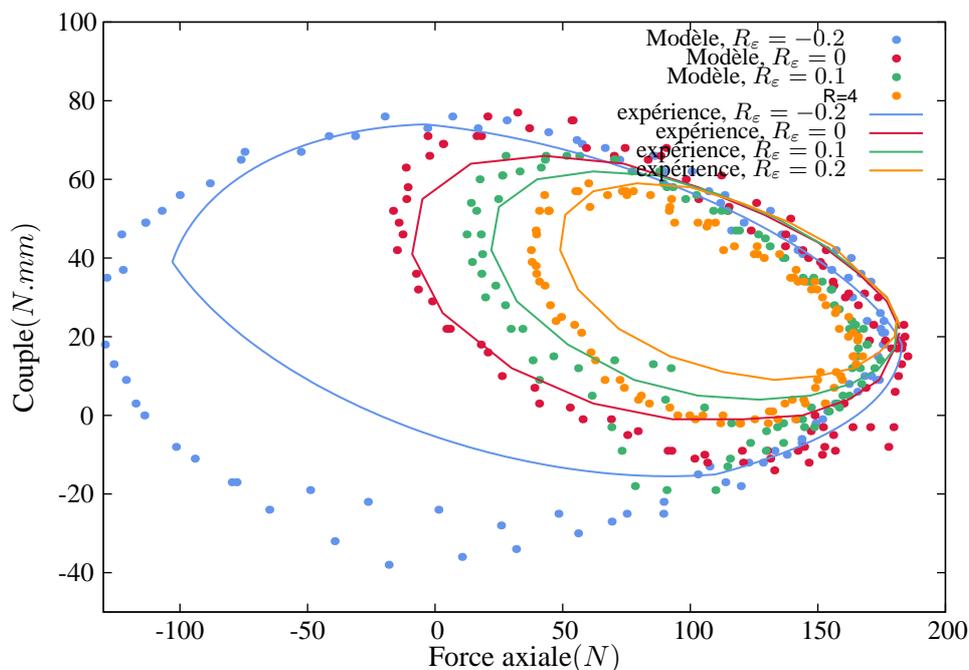


FIG. G.5 – Réponses en force du modèle éléments finis, avec $\delta = 90^\circ$, pour différents rapports R_ϵ et $d_{max} = 20mm$. Confrontation avec les réponses expérimentales.

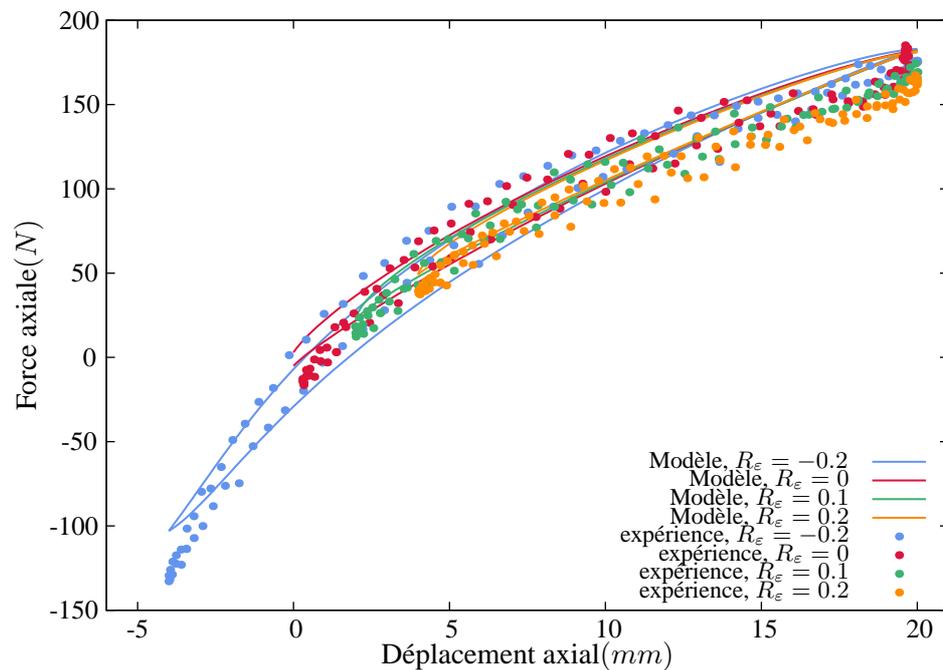


FIG. G.6 – Partie axiale des réponses en force du modèle éléments finis, avec $\delta = 90^\circ$, pour différents rapports R_ε et $d_{max} = 20mm$. Confrontation avec les réponses expérimentales.

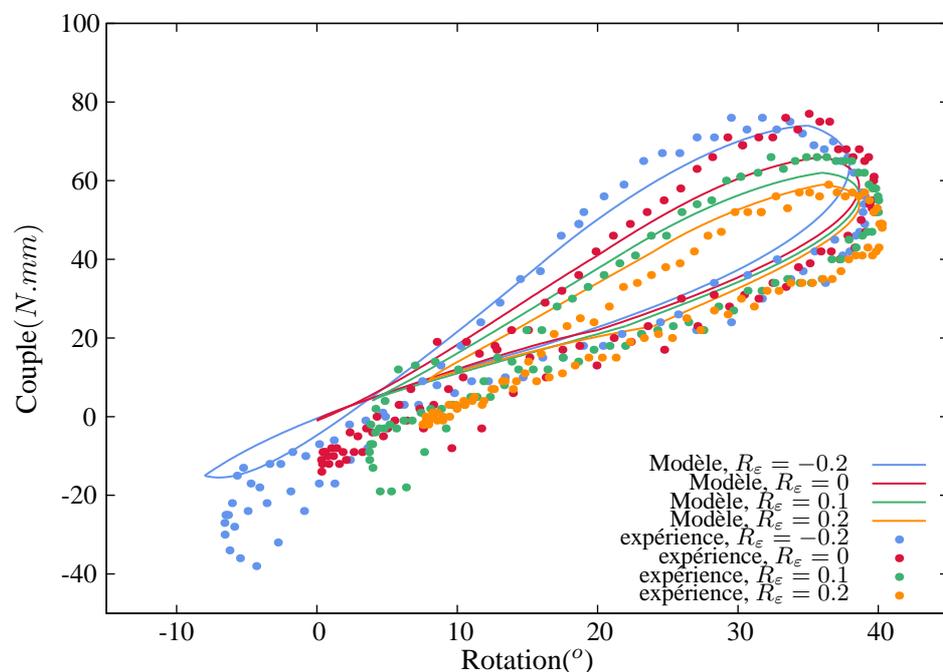


FIG. G.7 – Partie angulaire des réponses en force du modèle éléments finis, avec $\delta = 90^\circ$, pour différents rapports R_ε et $d_{max} = 20mm$. Confrontation avec les réponses expérimentales.

Pour les autres déphasages, le lecteur est renvoyé vers (Poisson, 2012).



Bibliographie

- N. André, G. Cailletaud, et R. Piques. Haigh diagram for fatigue crack initiation prediction of natural rubber components. *Kautsch Gummi Kunstst*, 52 :120–123, 1998. (Cité en page 149.)
- A. Andriyana, A. Saintier, et E. Verron. Multiaxial fatigue life prediction of rubber using configurational mechanics and critical plane approach : a comparative study. A. Boukamel, L. Laianandrasana, S. Méo, et E. Verron, editors, *Constitutive models for rubber V*, pages 191–196. A.A. Balkema publishers, 2008. (Cité en page 151.)
- A. Andriyana, N. Saintier, et E. Verron. Configurational mechanics and critical plane approach : Concept and application to fatigue failure analysis of rubberlike materials. *International Journal of Fatigue*, 32(10) :1627–1638, 2010. (Cité en page 151.)
- A. Andriyana et E. Verron. Prediction of fatigue life improvement in natural rubber using configurational stress. *International Journal of Solids and Structures*, 44(7–8) :2079–2092, 2007. (Cité en pages 23 et 151.)
- P. Areias et K. Matouš. Finite element formulation for modeling nonlinear viscoelastic elastomers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4702–4717, 2008. (Cité en page 89.)
- E.M. Arruda et M.C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J Mech Phys Solids*, 41 :389–412, 1993. (Cité en page 41.)
- S. Aunay. *Architecture de logiciel de modélisation et traitements distribués*. PhD thesis, Université de Compiègne, 1990. (Cité en page 90.)
- N. Aït Hocine, S. Méo, F. Lacroix, et P. Méroz. *Rubber : Types, Properties and Uses*, chapter Properties and mechanical reliability of elastomers. Nova Publishers, 2010. (Cité en page 14.)
- I. Babuska et R. Narasimhan. The babuska-bressi condition and the patch test : an example. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 140 :183–199, 1997. (Cité en page 90.)

- W.D. Bascom. Scanning electron microscopy of rubber tear. *Rubber Chem. Technol.*, 50 :875–883, 1977a. (Cité en page 131.)
- W.D. Bascom. Sem study of a cyclized rubber surface. *Rubber Chem. Technol.*, 50 :327–332, 1977b. (Cité en page 131.)
- G. Bérardi. *Modélisation numérique du comportement thermo-viscoélastique d'un élastomère en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 1995. (Cité en pages 108, 115 et 117.)
- A.K. Bhowmick, S. Basu, et S.K. De. Scanning electron microscopy studies of nitrile rubber fractured surfaces. *Rubber Chem. Technol.*, 53 :321–326, 1979a. (Cité en page 131.)
- A.K. Bhowmick, G.B. Nando, S. Basu, et S.K. De. Scanning electron microscopy studies of fractured natural rubber surfaces. *Rubber Chem. Technol.*, 53 :327–334, 1979b. (Cité en page 131.)
- A. Boukamel. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988. (Cité en page 91.)
- A. Boukamel, C. Gabrieli, et S. Méo. Modélisation en grandes déformations viscoélastiques des élastomères. *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 387–396, 1997. (Cité en pages 14, 21 et 89.)
- A. Boukamel, L. Laiarinandrasana, S. Méo, et E. Verron, editors. *Constitutive Models for rubbers V*. Taylor & Francis Group, 2007. (Cité en page 14.)
- A. Boukamel, JM. Martinez, et S. Méo. A statistical approach for a hyper-visco-elasto-plastic model for a filled elastomer. *Constitutive Models for Rubber IV*, pages 191–196. Proceedings of the 4th European Conference for Constitutive Models for Rubber, June 2005. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- A. Boukamel et S. Méo. Identification of mechanical parameters linked to a visco-hyperelastic model : Application to a class of elastomers. *Constitutive Models for Rubber II*. Proceedings of the 2nd European Conference for Constitutive Models for Rubber, September 2001. (Cité en pages 14, 21 et 89.)
- A. Boukamel et S. Méo. Model with multiple intermediate visco-plastic states. *Euromech Colloquium on Constitutive Equations for Polymer Microcomposites : On the border of Mechanics and Chemistry and Workshop on Viscoelasticity for Rubberlike Solids : From Theory to Applications*, July 2002. (Cité en pages 14 et 89.)
- A. Boukamel, S. Méo, O. Débordes, et M. Jaeger. A numerical formulation for athermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application large strain. *Archive of Applied Mechanics*, 71 :785–801, 2001. (Cité en pages 14, 21 et 89.)
- A. Boukamel, S. Méo, et S. Lejeunes. Fe-implementation of a statistical hyper-visco-plastic model. proceedings of the 5th european conference on constitutive models for rubber. *Constitutive Models for Rubber V*. Proceedings of the 5th European Conference for Constitutive Models for Rubber, September 2008. (Cité en pages 14, 22, 89 et 95.)

- A. Boukamel, S. Méo, et S. Lejeunes. Un schéma direct d'intégration numérique de modèles visco-hyperélastique par relaxation radiale. *Conception et Modélisation des Systèmes Mécanique 2009*, March 2009. (Cité en pages 14 et 89.)
- Adnane Boukamel. *Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*. Hdr, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, October 2006. (Cité en pages 71, 75 et 125.)
- Rodica Caborgan. *Contribution à l'analyse expérimentale du comportement thermomécanique du caoutchouc naturel*. These, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, December 2011. (Cité en pages 105, 113, 125 et 162.)
- G.F. Carey et J.T. Oden. *Finite elements*, volume 2. Prentice-Hall, N.J., 1986. (Cité en page 90.)
- S.K. Chakraborty, A.K. Bhowmick, et S.K. De. Scanning electron microscopy studies of tear of carboxylated nitrile rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 55 :41–50, 1982. (Cité en page 131.)
- F. Chalon, S. Méo, et N. Ranganathan. Validity of 2d numerical energetic fatigue criteria. *12th international Spring Meeting, Fatigue and plasticity : from mechanism to design, JIP 2008*, May 2008. (Cité en pages 14 et 143.)
- F. Chalon, S. Méo, et N. Ranganathan. Macroscopic numerical estimation of energetic fatigue criteria for elastoplastic material. *Fatigue Design*, November 2009. (Cité en pages 14 et 143.)
- F. Chalon, S. Méo, N. Ranganathan, et D. Tien Dung. *Fatigue Crack Growth : Mechanisms, Behavior and Analysis*, chapter Numerical Modeling of Energy Dissipated in the Plastic Zone. Nova Publishers, 2012. (Cité en page 14.)
- W.V. Chang, R. Bloch, et N.W. Tschoegl. The behaviour of rubber-like materials in moderately large deformations. *Journal of Rheology*, 22 :1–32, 1978. (Cité en page 41.)
- R.M. Christensen. *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press Inc., New York, 1971. (Cité en page 41.)
- B.D. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17 :1–46, 1964. (Cité en page 41.)
- B.D. Coleman et W. Noll. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, 33 :239–249, 1961. (Cité en page 41.)
- J. Courtois. *Une approche physiquement motivée pour l'endommagement des élastomères*. Diplôme d'Études Approfondies, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2003. (Cité en page 21.)
- M.A. Crisfield et V.C Norris. Lessons for incompressible and near-incompressible elasticity drawn from the driven cavity flow problem. *Computers and Structures*, 75 :529–538, 2000. (Cité en page 90.)
- C. Cruanes, G. Berton, F. Lacroix, J.L. Poisson, S. Méo, et N. Ranganathan. Etude de la fatigue de matériaux élastomères par des techniques de thermographie infrarouge. *2ème Journée thématique du 24 mai 2012 sur la Caractérisation Mécanique des Elastomères - Nouvelles approches.*, May 2012. (Cité en pages 14 et 162.)

- H. Dal, M. Kaliske, et M. Bergström-Boyce. Model for nonlinear finite rubber viscoelasticity : theoretical aspects and algorithmic treatment for the fe method. *Computational Mechanics*, 44 :809–823, 2009. (Cité en page 89.)
- A. Delattre. *Prévision du comportement de structures lamifiées sous chargements statiques, dynamiques complexes*. PhD thesis, Université de Tours, soutenance prévue 2015. (Cité en page 160.)
- A. Delattre. *Prévision du comportement de structures lamifiées sous chargements statiques, dynamiques complexes*. Thèse de Doctorat, Université de Tours, soutenance prévue en 2015. (Cité en pages 17, 23, 28, 29, 33, 75 et 161.)
- J. Diani, B. Fayolle, et P. Gilormini. A review on the mullins effect. *European Polymer Journal*, 45 : 601–612, 2009. (Cité en page 26.)
- A. D. Drozdov et L. Dorfmann. A micro-mechanical model for the response of filled elastomers at finite strains. *International Journal of Plasticity*, vol. 19 :p. 1037–1067, 2003. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov. A model for the nonlinear viscoelastic response in polymers at finite strains. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35(18) :p. 2315–2347, 1998. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov. A model of cooperative relaxation in finite viscoelasticity of amorphous polymers. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 35 :897–909, 2000. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov. A model for the viscoelastic and viscoplastic responses of glassy polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :8285–8304, 2001a. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov. Modelling nonlinear viscoelasticity and damage in amorphous glassy polymers. *Mathematical and Computer Modelling*, 33 :883–893, 2001b. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov, S. Agarwal, et R.K. Gupta. Linear thermo-viscoelasticity of isotactic polypropylene. *Computational Materials Science*, 29 :195–213, 2004. (Cité en page 41.)
- A.D. Drozdov et L. Dorfmann. The nonlinear viscoelastic response of carbon black-filled natural rubbers. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39 :p. 5699–5717, 2002. (Cité en page 41.)
- E. Fancello, J.M. Vassoler, et L. Stainier. A variational constitutive update algorithm for a set of isotropic hyperelastic-viscoplastic material models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4132–4148, 2008. (Cité en page 89.)
- E. Fehlberg. Low-order classical runge-kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. *Tech. rep., NASA TR, R- :315*, 1969. (Cité en page 94.)
- J.D. Ferry et E.R. Fitzgerald. Dynamic mechanical properties of a carbon black-loaded butyl rubber vulcanizate and a carbon black-loaded polyisobutylene. *Rubber Chemistry and Technology*, 55 : 1403–1412, 1982. (Cité en page 30.)
- W.P. Fletcher et A.N. Gent. Nonlinearity in the dynamic properties of vulcanized rubber compounds. *Transactions of the Institution of the Rubber Industry*, 25(5) :266–280, 1953. (Cité en pages 28 et 29.)
- R. Foerch, J. Besson, G. Cailletaud, et P. Pilvin. Polymorphic constitutive equations in finite element codes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 141(3–4) :355–372, 1997. (Cité en page 92.)

- C. Gabrieli. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1995. (Cité en pages 46, 89, 91 et 115.)
- S. Gauchet. *Etude de l'influence du type de noir de carbone sur la tenue en fatigue de caoutchouc HNBR*. Thèse de Doctorat, Université de Tours, 2007. (Cité en pages 5, 7, 11, 17, 22, 25, 26, 29, 129, 131, 132, 133, 134, 135 et 143.)
- S. Gauchet, S. Méo, G. Berton, et N. Ranganathan. Etude des propriétés de caoutchouc base hnbr : influence du noir de carbone. *41ème Colloque du Groupe Français de Rhéologie*, October 2006. (Cité en pages 14, 23 et 135.)
- A.N. Gent et A.G. Thomas. *Forms for the stored strain energy function for vulcanised rubber*. Masson, 1973. (Cité en page 54.)
- P Germain. *Cours de Mécanique des milieux continus, tome I*. Masson, 1973. (Cité en page 107.)
- S. Govindjee et J. Simo. Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology : carbon black filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :213–233, 1992. (Cité en page 41.)
- S. Govindjee et J.C. Simo. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :87–112, 1991. (Cité en pages 25 et 41.)
- Julie Grandcoin Laneyrie. *Contribution à la modélisation du comportement dissipatif des élastomères chargés : D'une modélisation micro-physiquement motivée vers la caractérisation de la fatigue*. These, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, July 2008. (Cité en page 161.)
- H.W. Greensmith. Rupture of rubber. vii. effect of rate of extension in tensile tests. *J. Appl. Polym. Sci.*, 3 :175–182, 1960. (Cité en page 143.)
- H.W. Greensmith et A.G. Thomas. Rupture of rubber. iii. determination of tear properties. *J. Polym. Sci.*, 18 :189–200, 1955a. (Cité en page 143.)
- H.W. Greensmith et A.G. Thomas. Rupture of rubber. iv. tear properties of vulcanizates containing carbon black. *J. Polym. Sci.*, 21 :175–187, 1955b. (Cité en page 143.)
- A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. T. Roy. Soc. A*, 221 :1028–1039, 1921. (Cité en page 143.)
- B. Halphen et Quoc Son Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méc.*, 14 :39–63, 1975. (Cité en pages 39, 45 et 49.)
- L.J. Hart-Smith. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *J. Appl. Math. Phys.*, 17 :608–626, 1966. (Cité en pages 41 et 54.)
- J.A.C. Harwood, L. Mullins, et A.R. Payne. Stress softening in rubbers : a review. *Journal of the IRI*, pages 17–27, 1967. (Cité en pages 5, 27, 28 et 41.)

- P. Höfer et A. Lion. Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 :500–520, 2009. (Cité en page 30.)
- G.A. Holzapfel. *Ansys verification manual 234*, 1996a. (Cité en page 201.)
- G.A. Holzapfel. On large strain viscoelasticity : Continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22 :3903–3926, 1996b. (Cité en page 201.)
- G.A. Holzapfel et G. Reiter. Fully coupled thermomechanical behaviour of viscoelastic solids treated with finite elements. *Int. J. Engng. Sci.*, 33 :1037–1058, 1995. (Cité en page 105.)
- G.A. Holzapfel et J. Simo. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 132 :17–44, 1996a. (Cité en pages 105, 113 et 115.)
- G.A. Holzapfel et J. Simo. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermo-mechanical changes. *Int. J. Structures*, 33 :3019–3034, 1996b. (Cité en page 105.)
- V. Honorat. *Analyse thermomécanique par mesure de champs des élastomères*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 2006. (Cité en pages 105, 113 et 162.)
- A. Iserles., A. Marthinsen, et S.P. Nørsett. On the implementation of the method of magnus series for linear differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, 39 :281–304, 1999. (Cité en page 95.)
- F. Lacroix. *Etude du comportement en fatigue des caoutchoucs synthétiques*. Thèse de Doctorat, Université François Rabelais de Tours, 2004. (Cité en pages 8, 23, 129, 131, 135, 143 et 145.)
- F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, F. Chalon, A. Tougui, et N. Ranganathan. A local criterion for fatigue crack initiation on chloroprene rubber : approach in dissipation. *Constitutive Models for Rubber IV*, pages 77–82. Proceedings of the 4th European Conference for Constitutive Models for Rubber, June 2005. (Cité en pages 8, 14, 23, 143 et 145.)
- G.J. Lake et P.B. Lindley. Cut growth and fatigue of rubbers. ii. experiments on a noncrystallizing rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 38 :292–300, 1965. (Cité en page 143.)
- Y. Le Chenadec, C. Stolz, I. Raoult, M. Nguyen, P. Charrier, et Benoit Delattre. A novel approach to the heat build up problem of rubber. Laiarinandrasana Méo & Verron Boukamel, editor, *Constitutive Models for Rubber*, volume V, pages 345–350, Paris, France, 2008. Taylor and Francis Groupe, London. (Cité en page 105.)
- Vincent Le Saux. *Fatigue et vieillissement des élastomères en environnements marin et thermique : de la caractérisation accélérée au calcul de structure*. These, Université de Bretagne occidentale - Brest, October 2010. (Cité en pages 105 et 161.)
- P. Le Tallec et C. Rahier. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37 :1159–1186, 1994. (Cité en page 41.)
- J.L. Leblanc. Interaction caoutchouc-noir de carbone et compréhension du mélangeage des caoutchoucs. *11èmes journées techniques du LRCCP*, 2003. (Cité en page 75.)
- J.B. Le Cam. *Endommagement en fatigue des élastomères*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, 2005a. (Cité en page 131.)

- J.B. Le Cam. *Endommagement en fatigue des élastomères*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, 2005b. (Cité en page 149.)
- J.B. Le Cam, B. Huneau, et E. Verron. Description of fatigue damage in carbon black filled natural rubber. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 31 :1031–1038, 2008. (Cité en pages 131 et 149.)
- J.B. Le Cam, B. Huneaud, E. Verron, et L. Gornet. Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37 :5011–5017, 2004. (Cité en page 131.)
- K. Legorju et C. Bathias. Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers. *International Journal of Fatigue*, 24 :85–92, 2002. (Cité en page 131.)
- K. Legorju-Jago. *Influence de la cristallisation sous contrainte sur l'endurance et la propagation des fissures de fatigue dans les élastomères*. Thèse de Doctorat, École Centrale Paris, Paris, 1998. (Cité en pages 131 et 135.)
- S. Lejeunes. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2006a. (Cité en page 41.)
- S. Lejeunes. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2006b. (Cité en pages 90, 92, 95 et 161.)
- S. Lejeunes, A. Boukamel, et S. Méo. Finite element implementation of nearly-incompressible rheological models based on multiplicative decompositions. *Computers and Structures*, 89 :411–421, 2011. (Cité en pages 14, 22, 89 et 95.)
- S. Lejeunes, S. Méo, et A. Boukamel. Un schéma d'intégration numérique de modèles visco-hyperélastiques par relaxation radiale. *Actes du 9ème Colloque National en Calcul des Structures*, May 2009. (Cité en pages 14, 22, 89 et 95.)
- S. Lejeunes, S. Méo, et A. Boukamel. A direct numerical integration scheme for visco-hyperelastic models using radial return relaxation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19 :129–140, 2010. (Cité en pages 14, 22, 46, 89 et 95.)
- J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnuadiès. *Cours de mathématiques, Tome1, Algèbre*. Dunod, Paris, 1978. (Cité en page 177.)
- J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1996. (Cité en page 45.)
- A.I. Leonov. On thermodynamics and stability of general maxwell-like viscoelastic constitutive equations, theoretical and applied rheology. *XIth Int. Cong. On Rheology*, pages 97–99, 1992. (Cité en page 41.)
- G. Lianis. Constitutive equations of viscoelastic solids under finite deformation. *Purdue University report*, A&ES 63-11, 1963. (Cité en page 41.)
- P.B. Lindley. Energy for crack growth in model rubber components. *J. Strain Anal. Eng.*, 7 :132–140, 1972. (Cité en page 143.)
- A. Lion. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1805–1834, 1997a. (Cité en pages 105 et 113.)

- A. Lion. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomer. *Acta Mechanica*, 123 :1–25, 1997b. (Cité en page 105.)
- A. Lion. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity : a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity*, 16 :469–494, 2000. (Cité en page 105.)
- A. Lion, C. Kardelky, et P. Haupt. On the frequency and amplitude dependence of the payne effect : Theory and experiments. *Rubber Chemistry and Technology*, 76 :533–547, 2003. (Cité en pages 28 et 30.)
- J. Marchal. *Cristallisation des caoutchoucs chargés et non chargés sous contrainte : Effet sur les chaines amorphes*. Thèse de Doctorat, Université de Paris XI Orsay, 2006. (Cité en page 27.)
- W.V. Mars. *Multiaxial fatigue of rubber*. PhD thesis, university of Toledo, Toledo and USA, 2001. (Cité en pages 143 et 152.)
- W.V. Mars. Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber Chemistry and Technology*, 75 :1–17, 2002. (Cité en pages 23 et 152.)
- W.V. Mars. A phenomenological model for the effect of r-ratio on fatigue of strain crystallizing rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, 76 :1240–1258, 2003. (Cité en page 143.)
- W.V. Mars et Fatemi A. A literature survey on analysis approaches for rubber. *International Journal of Fatigue*, 24 :949–969, 2002. (Cité en page 23.)
- W.V. Mars et A. Fatemi. The correlation of fatigue crack growth rates in rubber subjected to multiaxial loading using continuum mechanical parameters. *Rubber Chem. Technol.*, 80 :169–182, 2007. (Cité en page 143.)
- W.V. Mars et A. Fatemi. Computed dependence of rubber's fatigue behavior on strain crystallization. *Rubber Chem. Technol.*, 82 :51–61, 2009. (Cité en pages 143 et 149.)
- J.M. Martinez. *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2005. (Cité en pages 5, 6, 11, 17, 19, 20, 21, 29, 31, 32, 33, 34, 73, 75, 76, 80, 81, 82, 85, 86, 92 et 101.)
- J.M. Martinez, A. Boukamel, P. Legendre, et S. Méo. Modélisation du comportement des élastomères : Approche statistique de modèles multi-branches. *6ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, May 2003. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- J.M. Martinez, A. Boukamel, et S. Méo. Approche multi-fréquentielle du comportement viscoélastique en grandes déformations des élastomères. *1er Colloque Interactions Modèles - Expériences en mécanique, Journal de Physique IV*, July 2002. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- J.M. Martinez, A. Boukamel, S. Méo, et S. Lejeunes. Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber : Experimental characterization and numerical modeling. *European Journal of Mechanics -A/Solids*, 30 :1028–1039, 2011. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- S. Méo. *Comportement viscoélastique en grandes déformations et couplage thermo-mécanique*. Diplôme d'Études Approfondies , Université d'Aix-Marseille II, 1996. (Cité en pages 13, 21, 89 et 160.)

- S. Méo. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2000a. (Cité en page 13.)
- S. Méo. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2000b. (Cité en pages 5, 6, 17, 21, 29, 30, 34, 35, 46, 54, 89, 91, 119, 125 et 160.)
- S. Méo, A. Boukamel, et Débordes. Analysis of a thermoviscoelastic model in large strain. *Computers and Structures*, 80 :2085–2098, 2002a. (Cité en pages 14, 21 et 89.)
- S. Méo, A. Boukamel, et O. Débordes. Analysis of a thermo-viscoelastic model in large strain. *Proceedings of the Fifth International Conference on Computational Structures Technology*, September 2000. (Cité en pages 14 et 21.)
- S. Méo, A. Boukamel, et J-M. Martinez. Modélisation du comportement hyper-visco-plastique en grandes déformations des élastomères. *DEPOS 18 Colloque sur la déformation des polymères solides*, 2003. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- S. Méo, A. Boukamel, J.M. Martinez, et S. Lejeunes. Une approche statistique de comportement visco-hyper-plastique pour des élastomères chargés. *19ème Congrès Français de Mécanique*, August 2009a. (Cité en pages 14, 22, 75, 89 et 101.)
- S. Méo, A. Boukamel, J.M. Martinez, et S. Lejeunes. Une approche statistique de comportement visco-hyper-plastique pour des élastomères chargés. *19ème Congrès Français de Mécanique*, August 2009b. (Cité en pages 22 et 75.)
- S. Méo, O. Débordes, et A. Boukamel. A substructure method for an assembly of structures invariant in one direction. application to the elastomeric flex beam. *Proceedings of the twelfth International Conference on Composite Materials (ICCM)*, July 1999. (Cité en pages 14 et 21.)
- S. Méo, O. Débordes, et A. Boukamel. Assemblage de structures une à une invariants dans une direction. *Mécanique et Industries*, 3 :211–225, 2002b. (Cité en pages 14 et 21.)
- S. Méo, F. Lacroix, G. Berton, A. Tougui, et N. Ranganathan. Studies on a local criterion for crack initiation on a vulcanized filled elastomer méo. *10th Conference on Fracture Mechanics*, September 2005. (Cité en pages 14, 23 et 143.)
- S. Méo, F. Lacroix, A. Tougui, G. Berton, et N. Ranganathan. Fatigue life estimation of elastomeric components. *International Conference Residual Fatigue Life And Life Time Extension Of In-Service Structures*, May 2006. (Cité en pages 14, 23 et 143.)
- C. Miehe. Discontinuous and continuous damage evolution in ogden-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14 :697–720, 1995a. (Cité en page 41.)
- C. Miehe. Entropic thermoelasticity at finite strains. aspects of the formulation and numerical implementation. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, 120 :243–269, 1995b. (Cité en page 105.)
- C. Miehe et J. Keck. Surimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 48 :323–365, 2002. (Cité en pages 41 et 61.)

- M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, 11 :582–592, 1940. (Cité en pages 41 et 54.)
- S. Moreau, R. Leroy, S. Méo, et N. Ranganathan. Influence de la température et de la vitesse de sollicitation sur les propriétés mécaniques d’alliage ternaire. *Mécanique et Industries*, 9 :193–204, 2008. (Cité en page 14.)
- K.N. Morman. Original contributions. an adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like by use of the generalised strain measure. *Rheologica Acta*, 27 :3–14, 1988. (Cité en page 41.)
- L. Mullins. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 16 :275–289, 1947. (Cité en pages 25 et 41.)
- L. Mullins. Determination of degree of crosslinking in natural rubber vulcanizates. part i. *J. Poly. Sci.*, 19 :225–236, 1956. (Cité en page 41.)
- L. Mullins et N.R. Tobin. Stress softening in rubber vulcanizates. part i, use of a strain amplification factor to describe the elastic of filler-reinforced rubber. *J. Appl. Poly. Sci.*, 9 :2933–3009, 1965. (Cité en page 41.)
- N. Nakajima, H.H. Bowerman, et E.A. Collins. Viscoelastic behavior of butadiene-acrylonitrile copolymers at small and large deformations and their ultimate properties. *Rubber Chemistry and Technology*, 1973(46), 417-424. (Cité en page 30.)
- N. Nakajima, E.A. Collins, et P.R. Kumler. Dynamic viscoelastic properties of raw butadiene—acrylonitrile elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, pages 778–787, 1974. (Cité en page 30.)
- B Nedjar. Frameworks for finite strain viscoelastic-plasticity based on multiplicative decomposition. part i : Continuum formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 1541–1562, 2002. (Cité en page 89.)
- J.T. Oden et N. Kikuchi. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18 :701–725, 1982. (Cité en page 90.)
- J.T. Oden, N. Kikuchi, et Y.J. Song. Penalty-finite elements methods for the analysis of stokesian flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 31 :297–329, 1982. (Cité en page 90.)
- R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity, on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc., Lond.*, A326 :565–584, 1972. (Cité en page 41.)
- A. Olsson et P. Austrell. A fitting procedure for a viscoelastic-elastoplastic material. *Constitutive Models for Rubber II*. Proceedings of the 2nd European Conference for Constitutive Models for Rubber, 2001. (Cité en page 61.)
- H. Oshima, Y. Aono, et S. Shibata. Fatigue characteristics of vulcanized natural rubber for automotive engine mounting. *memoirs of the faculty of engineering*, 67-2 :75–83, 2007. (Cité en page 149.)
- A.R. Payne. Dynamic mechanical properties of filler loaded vulcanisates. *Rubber and Plastics Age*, 42 : 963–967, 1961. (Cité en page 28.)

- A.R. Payne. The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates. part i. *Journal of Applied Polymer Science*, 6 :57–63, 1962. (Cité en page 28.)
- A.R. Payne et R. E. Whittaker. Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chemistry and Technology*, 44(2) :440–478, 1971. (Cité en page 29.)
- J.L. Poisson. *Fatigue multiaxiale d'un chloroprène*. Thèse de Doctorat, Université de Tours, 2012. (Cité en pages 5, 17, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 129, 131, 134, 135, 143, 145 et 203.)
- J.L. Poisson, F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, et N. Ranganathan. Biaxial fatigue investigations on polychloroprene rubber. *178th Technical Meeting of the Rubber Division, ACS*, October 2010a. (Cité en pages 14 et 23.)
- J.L. Poisson, F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, et N. Ranganathan. A study of biaxial fatigue behavior of a synthetic rubber. *International Conference on Multiaxial Fatigue and Fracture*, June 2010b. (Cité en pages 14 et 23.)
- J.L. Poisson, F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, et N. Ranganathan. Biaxial fatigue behavior of a polychloroprene rubber. *Biaxial fatigue Behavior of a polychloroprene Rubber , aInternational Journal of Fatigue*, 33 :151–1157, 2011. (Cité en pages 14 et 23.)
- J.L. Poisson, F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, et N. Ranganathan. Rubber fatigue – the intrinsic intricacies. *Symposium on the Fatigue of Materials II : Advances and Emergences in Understanding, Materials Science and Technology 2012 Conference and Exhibition*, October 2012a. (Cité en page 14.)
- J.L. Poisson, S. Méo, F. Lacroix, et N. Ranganathan. Fatigue en traction-torsion d'un élastomère synthétique fatigue en traction-torsion d'un élastomère synthétique fatigue en traction-torsion d'un élastomère synthétique. *DéPoS 23*, October 2010c. (Cité en pages 14 et 23.)
- J.L. Poisson, S. Méo, F. Lacroix, N. Ranganathan, et G. Berton. Multiaxial fatigue criteria applied to a polychloroprene rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 85 :80–91, 2012b. (Cité en pages 14 et 23.)
- N. Ranganathan, F. Chalon, et S. Méo. Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation. *International Journal of Fatigue*, 80 :1921–1929, 2008. (Cité en pages 14 et 143.)
- N. Ranganathan, F. Chalon, S. Méo, et R. Leroy. An energy model to fatigue crack propagation : Application to variable amplitude loading. , *DVM, Material and Component Performance under Variable Loading*, volume 1, March 2009a. (Cité en pages 14 et 143.)
- N. Ranganathan, D. Joly, F. Chalon, S. Méo, et R. Leroy. *Fatigue Crack Growth : Mechanisms, Behavior and Analysis*, chapter Mechanics and Mechanisms of Variable Amplitude Fatigue Crack Growth in Selected Aluminum Alloys. Nova Publishers, 2012. (Cité en page 14.)
- N. Ranganathan, F. Lacroix, S. Méo, G. Berton, A. Tougui, et P. Méroz. Fatigue of synthetic rubber. *Elastomers 2009 : performance under variable amplitude loading*, November 2009b. (Cité en pages 14, 23 et 143.)
- I. Raoult. *Structures élastomères sous chargement cyclique. Comportement - Fatigue - Durée de vie*. Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2005. (Cité en page 27.)

- S. Reese. On the numerical modelling of the thermo-mechanical material behaviour of rubber-like polymers. *Constitutive models for rubber II*, 2001. (Cité en page 105.)
- S. Reese. A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *International Journal of Plasticity*, 19 :909–940, 2003. (Cité en page 41.)
- S. Reese et S. Govindjee. Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1 :357–396, 1998a. (Cité en page 105.)
- S. Reese et S. Govindjee. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solid and Structures*, 35 :3455–3482, 1998b. (Cité en page 89.)
- R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic material. *Trans. Roy. Soc. London*, 240 :491–508, 1948. (Cité en page 41.)
- R.S. Rivlin et D.W. Saunders. Large elastic deformations of isotropic material vii. experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 243 :251–288, 1951. (Cité en page 54.)
- R.S. Rivlin et A.G. Thomas. Rupture of rubber. i. characteristic energy for tearing. *J. Polym. Sci.*, 10 : 291–318, 1953. (Cité en page 143.)
- N. Saintier. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : mécanismes d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Mines de Paris, Paris, 2001. (Cité en page 149.)
- D.K. Setua et S.K. De. Scanning electron microscopy studies on mechanism of tear fracture of styrene butadiene rubber. *J. Mater. Sci.*, 18 :847–852, 1983. (Cité en page 131.)
- J.K. Seung, S.K. Kyeong, et Y.C. Jin. Viscoelastic model of finitely deforming rubber and its finite element analysis. *ASME, Journal of Applied Mechanics.*, 64 :835–841, 1997. (Cité en page 41.)
- F. Sidoroff. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25(2) :299–309, 1973. (Cité en pages 14, 41, 46 et 47.)
- F. Sidoroff. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13(4) : 679–713, 1974. (Cité en pages 41, 46 et 47.)
- F. Sidoroff. Variables internes en viscoélasticité, 1. variable internes scalaires et tensorielles. *J. Méc.*, 14(3) :545–566, 1975a. (Cité en pages 41 et 46.)
- F. Sidoroff. Variables internes en viscoélasticité, 2. milieux avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 14(4) :571–595, 1975b. (Cité en pages 41 et 46.)
- F. Sidoroff. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, 15(1) :85–118, 1976. (Cité en pages 41, 47 et 55.)
- F. Sidoroff. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. *Symposium franco-polonais, Cracovie*, 1977. (Cité en pages 41 et 46.)
- F. Sidoroff. Cours sur les grandes déformations. *Ecole d'été, Sophia-Antipolis*, 1982. (Cité en page 41.)

- J.-C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part ii. computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79 :1–31, 1988. (Cité en pages 41 et 89.)
- J.C. Simo et T.J.R. Hugues. *Computational inelasticity*. 2000. (Cité en pages 89 et 99.)
- SNCP. Syndicat national du caoutchouc et des polymères. <http://www.lecaoutchouc.com>, Dernière visite 2012. (Cité en page 19.)
- A.G. Thomas. Rupture of rubber. vi. further experiments on tear criterion. *J. Appl. Polym. Sci.*, 3 : 168–174, 1960. (Cité en page 143.)
- S. Toki, I. Sics, S. Ran, L. Liu, B.S. Hsiao, S. Murakami, M. Tosaka, S. Kohjiya, S. Poombadub, Y. Ikeda, et A.H. Tsu. Strain-induced molecular orientation and crystallization in natural and synthetic rubbers under uniaxial deformation by in-situ synchrotron x-ray study. *Rubber Chemistry and Technology*, 77 :317–335, 2004. (Cité en page 27.)
- L.R.G. Treloar. The elasticity of a network of long chain molecules i. *Trans. Faraday Soc.*, 39 :36–64, 1943. (Cité en pages 41 et 54.)
- L.R.G. Treloar. The present status of the theory of large elastic deformations. *The rheology of elastomers*, 1957. (Cité en page 41.)
- E. Verron et A. Andriyana. Definition of a new predictor for multiaxial fatigue crack nucleation in rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2) :417–443, 2008. (Cité en page 151.)
- E. Verron, J.-B. L Cam, et L. Gornet. A multiaxial criterion for crack nucleation in rubber. *Mechanics Research Communications*, 33(4) :493–498, 2006. (Cité en pages 23 et 151.)
- I. Yoshinobu et J.D. Ferry. Stress relaxation and differential dynamic modulus of carbon black-filled styrene-butadiene rubber in large shearing deformations. *Rubber Chemistry and Technology*, 57 : 925–943, 1984. (Cité en page 30.)

Résumé :

Dans un premier temps sont présentés les matériaux élastomères étudiés dans ce manuscrit, le contexte dans lequel ils l'ont été et les phénomènes (mécaniques, thermiques...) rencontrés (modélisés ou non).

Par la suite, on propose un cadre thermodynamique complet afin de rendre compte du comportement des matériaux en grandes déformations. Il se base sur les hypothèses classiques de l'état local et des matériaux standards généralisés. Après décomposition du gradient de la transformation en une partie volumique et une autre incompressible, on applique à cette dernière la notion d'état intermédiaire permettant d'introduire les différentes variables internes en charge de refléter le caractère dissipatif du matériau. Cette approche peut être vue comme une généralisation aux grandes déformations d'assemblages rhéologiques.

Les équations générales ainsi obtenues sont mises en oeuvre dans le cas de modèles simples (*i.e.* à une seule variable interne) puis sont généralisées par une approche statistique du comportement visco-hyperélastique. Celle-ci permet de rendre alors compte à la fois des dépendances en fréquence et en amplitude (effet Payne) d'un silicone.

Afin de modéliser la réponse thermo-mécanique des élastomères, une plate-forme de couplage est développée. Elle s'appuie, d'une part, sur une forme simple de l'équation de la chaleur ayant pour terme source la dissipation intrinsèque et, d'autre part, des paramètres mécaniques évoluant en fonction de la température. Diverses simulations sont présentées et confrontées à l'expérience.

Enfin, ce manuscrit se termine par un chapitre traitant de la fatigue des caoutchoucs. On présente d'abord deux analyses fractographiques ayant pour but de comprendre l'influence sur les faciès de rupture : des charges, des effets du rapport de charge et de la multiaxialité de la sollicitation. Puis une étude en fatigue plus classique est mise en place afin de tester un paramètre de fatigue en énergie dissipée. Celui-ci est mis en oeuvre dans le cadre de courbe S-N et de diagrammes de Haigh.

Mots clefs : élastomères, grandes déformations, hyperélasticité, visco-hyperélasticité, hyperélasto-visco-plasticité, approche statistique, assemblages rhéologiques, fractographie, fatigue.

Abstract :

At first, we present the studied materials in this manuscript, the context in which they was and the phenomena (mechanical, thermal...) encountered (modeled or not).

Then, a complete thermodynamical framework is given. The aim is to take into account the materials behavior in large strains. It is based on the classical assumptions of the local state and on the generalized standard approach. Once the deformation gradient is decomposed into a volumetric part and an isochoric one, the concept of intermediate state is applied to the latter part. This allows us to introduce different internal variables describing the dissipative behavior of materials. These approaches can be seen as a generalization to large strain of classical rheological assemblies.

The obtained equations are first used to describe simple models (with only one internal variable) and then generalized by a statistical approach applied on the visco-hyperelastic behavior. For the behavior of a silicone, this allows to take into account both the effects of frequency and amplitude (Payne effect).

To model the thermo-mechanical response of rubbers, a coupling algorithm is proposed. It is based, on the one hand, on a simple form of the heat equation with the intrinsic dissipation as a source of heat and, in an another hand, on mechanical parameters depending on temperature. Some numerical and experimental evolutions of temperature are compared.

Finally, this work concludes with a study on the rubber fatigue. It begins by two fractographic analysis. They show the influences on the fracture surface of the fillers, the load ratio and its multiaxiality. Then a more classical study of fatigue is given in order to test the dissipated energy as a fatigue parameter. It gives good results as a parameter of S-N curves and Haigh diagram.

keywords : elastomers, large strains, hyperelasticity, visco-hyperelasticity, hyperelasto-visco-plasticity, statistical approach, rheological assembly, fractography, fatigue.