



**HAL**  
open science

# Développement d'un estimateur d'état non linéaire embarqué pour le pilotage-guidage robuste d'un micro-drone en milieu complexe

Jean-Philippe Condomines

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Condomines. Développement d'un estimateur d'état non linéaire embarqué pour le pilotage-guidage robuste d'un micro-drone en milieu complexe. Physique de l'espace [physics.space-ph]. INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE (ISAE), 2015. Français. NNT: . tel-01235618

**HAL Id: tel-01235618**

**<https://hal.science/tel-01235618>**

Submitted on 30 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

---

---

Présentée et soutenue le 5 février 2015 par :

**JEAN-PHILIPPE CONDOMINES**

**Développement d'un estimateur d'état non linéaire embarqué pour le pilotage-guidage robuste d'un micro-drone en milieu complexe**

---

---

## JURY

ERIC FÉRON	Professeur d'université GaTech	Président
GILDAS BESANÇON	Professeur d'université GIPSA-lab	Rapporteur
BRUNO JOUVENCEL	Professeur d'université LIRMM	Rapporteur
CÉDRIC SEREN	Ingénieur de recherche ONERA	Directeur de thèse
GAUTIER HATTENBERGER	Enseignant-chercheur ENAC	Co-directeur de thèse
PAUL COX	Ingénieur MathWorks	Examineur

---

**École doctorale et spécialité :**

*EDSYS : Automatique 4200046*

**Unité de Recherche :**

*ENAC - MAIAA (DRONE), ONERA - CSDV*

**Directeur(s) de Thèse :**

*Cédric Seren et Gautier Hattenberger*

**Rapporteurs :**

*Gildas Besançon et Bruno Jouvencel*



---

## Remerciements

Ce manuscrit concrétise trois années de recherches au sein du laboratoire Drones de l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile (ENAC) et du service DCSD (commande des systèmes et dynamique du vol) de l'Office Nationale des Etudes et des Recherches Aérospatiales (ONERA). Cette thèse est loin d'être un travail solitaire. Elle n'aurait pas été possible sans l'intervention d'un grand nombre de personnes que je tiens aujourd'hui à remercier.

Tout d'abord, je remercie grandement mes deux directeurs de thèse, Gautier HATTENBERGER (enseignant chercheur à l'ENAC) et Cédric SEREN (ingénieur de recherche à l'ONERA) pour m'avoir confié ce projet mais également pour la qualité de leur encadrement, leur aide, leur patience et leurs conseils. Deux chercheurs si différents mais qui ont su enrichir mes travaux et m'accompagner chacun à leur manière sur ce projet. Merci Gautier pour les longs moments que tu as consacrés au codage, pour tes précieuses explications du logiciel Paparazzi indispensables à la réalisation de mes travaux ainsi que pour le temps que tu m'as accordé sur le terrain, à l'aérodrome de Muret, afin de tester mes algorithmes sur les avions.

Quant à toi, Cédric, merci pour ton souci du détail sans cesse manifesté, pour ton soutien et tes encouragements ainsi que pour ton exigence qui, certes a été souvent source d'angoisse, mais qui au final, m'a permis d'aller puiser dans mes ressources pour fournir un travail de qualité. Je ne sais comment exprimer ma reconnaissance autrement qu'en vous promettant d'agir comme vous avec des thésards si un jour l'occasion m'en est donnée.

Je remercie également Catherine RONFLE-NADAUD (directrice du laboratoire Drones à l'ENAC) pour m'avoir accueilli au sein de son service, pour s'être investi aussi efficacement afin de m'intégrer dans son équipe ainsi que pour son dévouement quotidien. Merci aussi pour tes conseils sur les axes de recherche que j'ai entrepris. Je pense notamment à ton idée de développer un algorithme plus robuste pour le logiciel Paparazzi. Grâce à toi, Cathy, j'ai aussi pu participer à de nombreux évènements tels que l'IMAV en Allemagne ou à Toulouse, effectuer une conférence internationale à Boston, travailler avec le reste de l'équipe...Autant de bons moments qui ont ponctué ma thèse et qui m'ont permis d'élargir mes connaissances et de rencontrer des professionnels.

Merci aussi à toi, Michel, pour tes talents d'électronicien indispensables à mes travaux : réalisation de cartes électroniques, sélection des capteurs...Je sais à quel point je t'ai souvent « embêté » avec mes nombreuses questions...Merci pour ta patience, tes compétences et ton humour.

Un grand merci à mes collègues de travail sans qui ces trois années de recherche n'auraient pas été si agréable. Merci à Anh TRUONG, le vietnamien, Murat BRONZ et Savas SEN, les turcs, Xavier PARIS, le toulousain, Xavier GILBERT, l'espagnol, Christophe DUMONT, le bourguignon, Emmanuel CHAMBON, le parisien, Elodie DURRAFOURG, la Jurassienne et

---

Razvan LUZI, le polonais. Finalement, j'aurais bien voyagé avec vous, quel enrichissement ! Merci pour votre humour, votre gentillesse, nos délires mais aussi pour nos discussions en anglais qui m'ont permis de progresser.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, aussi par les discussions enrichissantes que j'ai eu avec eux, mais aussi par leurs suggestions et conseils. Je pense notamment à Erwan SALAÛN.

Mes remerciements vont aussi à Eric FERON, professeur d'université Georgia Tech à l'université d'Atlanta, qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ma thèse. Merci également à Gildas BESANCON, professeur d'université GIPSA, et à Bruno JOUVENCEL, professeur d'université LIRMM, mes rapporteurs de thèse, qui par leur rôle ont également contribué à améliorer la qualité de cette thèse. Je vous en suis très reconnaissant. Merci aussi à Paul COX, ingénieur MathWorks, examinateur aux côtés de mes deux directeurs de thèse.

Une mention particulière à Mathy GONON, chef de département SINA à l'ENAC qui m'a accordé le financement pour participer à la conférence CDC à Los Angeles en décembre dernier. Une conférence très sélective à laquelle j'ai eu la chance de présenter mes travaux. Une attention pour Cathy MIGOT, Colette ROY et Sabine CANTAYRE, « supers secrétaires » au service Missions de l'ENAC. Je vous remercie pour la patience dont vous avez fait preuve face à mes visites, mes emails et mes appels téléphoniques répétés afin d'obtenir les signatures et les documents nécessaires pour mes déplacements à l'étranger, mon contrat de travail... Sans vous, les procédures administratives auraient été encore plus longues.

Merci aussi à Thierry MIQUEL pour m'avoir donné l'occasion de dispenser des cours et des travaux dirigés durant ma thèse ; des moments qui m'ont permis de me consacrer à autre chose et qui m'ont donné le goût pour l'enseignement.

Je tiens aussi à remercier mes parents, mon frère, ma belle-soeur, ma belle-famille ainsi que mes amis pour leur encouragement et leur soutien. Sans eux, rien de tout cela n'aurait été possible. Merci d'avoir cru en moi.

Je pense aussi à toi, Marie-Hélène, qui nous a quittés il y a un peu plus d'un an maintenant. J'ai souvent ressenti le besoin de te parler ces derniers mois, toi qui aussi avais fait une thèse, je pense que ton expérience, tes conseils et ta sagesse m'auraient réconforté et aidé.

Et pour finir, une mention particulière à Sophie, ma compagne, qui a su me rassurer, m'épauler et me conseiller. Merci aussi pour les bons moments, les week-end et vacances que l'on a partagé, ça m'a permis de me ressourcer pour mieux reprendre mes recherches.

Finalement, rédiger cette page de remerciement m'a permis de me repasser en mémoire ces trois années de travail, de me souvenir à la fois des bons moments passés avec chacun mais aussi de l'exigence et de la rigueur qu'il a fallu fournir pour que vous puissiez lire aujourd'hui ce manuscrit. Il représente à mes yeux à la fois l'aboutissement de mes années d'études et le commencement d'une vie professionnelle qui je l'espère, sera riche et intéressante.

---

*Si nous avons chacun un objet et que nous les échangeons,  
nous avons chacun un objet.  
Si nous avons chacun une idée et que nous les échangeons,  
nous avons chacun deux idées.*

Proverbe chinois



# Table des matières

Table des figures xi

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

<b>Chapitre 1</b>
-------------------

<b>Contexte de la thèse</b>	<b>5</b>
-----------------------------	----------

- 1.1 La robotique aérienne . . . . . 5
- 1.2 Le projet Paparazzi . . . . . 9
- 1.3 Les différents moyens de mesure . . . . . 13
- 1.4 Motivations et objectifs des travaux de thèse . . . . . 23

<b>Chapitre 2</b>
-------------------

<b>Etat de l'art</b>	<b>25</b>
----------------------	-----------

- 2.1 Concepts de base . . . . . 25
- 2.2 Revue bibliographique . . . . . 31
- 2.3 Filtrage optimal des systèmes linéaires gaussiens . . . . . 40
- 2.4 Approximation du filtrage optimal par linéarisation . . . . . 43
- 2.5 Approximation du filtrage optimal par discrétisation . . . . . 45
- 2.6 La logique floue . . . . . 52
- 2.7 Théorie des observateurs invariants . . . . . 54

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Modèles pour la navigation inertielle</b>	<b>65</b>
----------------------------------------------	-----------

- 3.1 Préambule : modélisation des mini-drones . . . . . 65
- 3.2 Dérivation d'un modèle pour la navigation . . . . . 68

3.3	Problème de la navigation inertielle dite « véritable » . . . . .	71
3.4	Modélisation et identification des imperfections des capteurs inertiels . . . . .	74
3.5	La navigation inertielle du pauvre : l’AHRS . . . . .	80
3.6	L’AHRS augmenté d’un GPS et d’un baromètre : l’INS . . . . .	86

<b>Chapitre 4</b>	
<b>Algorithmes IUKF/<math>\pi</math>-IUKF</b>	<b>89</b>

4.1	Systèmes invariants/équivalents . . . . .	93
4.2	Observateurs invariants - AHRS/INS . . . . .	94
4.3	Erreur d’estimation sur l’état invariante . . . . .	104
4.4	Square-Root UKF . . . . .	107
4.5	1 <sup>ère</sup> reformulation du filtrage de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	108
4.6	2 <sup>nde</sup> reformulation du filtrage de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	139

<b>Chapitre 5</b>	
<b>Validation méthodologique, expérimentations et résultats</b>	<b>147</b>

5.1	Validation sur données simulées . . . . .	148
5.2	Validation sur données réelles . . . . .	168
5.3	Implémentation de l’observateur invariant pour le modèle INS . . . . .	190

<b>Chapitre 6</b>	
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>195</b>

<b>Annexe A</b>	
<b>Notions de géométrie différentielle et théorie des groupes</b>	<b>201</b>

A.1	Variété, difféomorphisme . . . . .	202
A.2	Topologie et espace d’état . . . . .	204
A.3	Vecteur tangent à une variété et champs de vecteurs . . . . .	207
A.4	Groupes de Lie . . . . .	208
A.5	Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie . . . . .	213
A.6	Méthode du repère mobile de Cartan . . . . .	214

---

<b>Annexe B</b>	
<b>Notions de logique floue</b>	<b>217</b>
B.1 Fuzzification . . . . .	217
B.2 Opérateurs logiques flous et inférences . . . . .	220
<b>Annexe C</b>	
<b>Quaternions et rotations</b>	<b>225</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>227</b>



# Table des figures

1.1	<i>Production/Développement de drones sur la période 2006-2012</i>	6
1.2	<i>Exemples de drones HALE</i>	7
1.3	<i>Exemples de drones MALE</i>	7
1.4	<i>Le drone Sperwer décolle depuis un rampe de lancement</i>	8
1.5	<i>Exemples de micro drones</i>	8
1.6	<i>L'architecture logicielle de Paparazzi</i>	10
1.7	<i>Comparaison des différents projets Open-source en 2010</i>	12
1.8	<i>Exemples de gyromètre</i>	14
1.9	<i>Diverses solutions technologiques pour divers besoins de mission</i>	15
1.10	<i>Schémas de principe de l'accéléromètre</i>	16
1.11	<i>Applications des différentes technologies d'accéléromètres</i>	17
1.12	<i>Prix des capteurs proprioceptifs en fonction de leur technologie</i>	17
1.13	<i>Le positionnement par satellite</i>	18
1.14	<i>Principe physique à la base d'un compas électronique magnétorésistif</i>	20
1.15	<i>Différentes catégories de systèmes inertiels</i>	22
2.1	<i>Filtre de Wiener</i>	32
2.2	<i>Travaux fondateurs en théorie de l'estimation</i>	34
2.3	<i>Classification des méthodes d'estimation</i>	38
2.4	<i>Principe de l'approche par sigma points</i>	46
2.5	<i>Comparaison de l'approche sigma-points et EKF</i>	49
2.6	<i>Orbites du groupe de transformation</i>	56
2.7	<i>La dynamique de la voiture est invariante sous l'action du groupe <math>SE(2)</math></i>	59
2.8	<i>L'espace d'état <math>\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1</math> coïncide topologiquement avec le groupe <math>SE(2)</math></i>	59

2.9	<i>Une voiture suivie d'une remorque</i> . . . . .	61
2.10	<i>Interprétation des erreurs invariantes entre la position réelle <math>P</math> et estimée <math>\hat{P}</math></i> . . . . .	63
2.11	<i>Interprétation du repère invariant construit sur le groupe <math>SE(2)</math></i> . . . . .	64
3.1	<i>Système de Guidage, Navigation et Contrôle (GNC) pour un drone aérien</i> . . . . .	67
3.2	<i>Flux d'air au dessus de l'aile d'un mini-drone (ENAC/ISAE)</i> . . . . .	67
3.3	<i>Structure des données pour la méthode de la variance d'Allan</i> . . . . .	76
3.4	<i>Courbe typique de la variance d'Allan pour des capteurs inertiels MEMS</i> . . . . .	76
3.5	<i>Asymptotes de la variance d'Allan pour différents bruits</i> . . . . .	79
4.1	<i>AHRS - Illustration du passage entre les repères terrestre et avion</i> . . . . .	94
4.2	<i>INS - Illustration des transformations galiléennes invariantes</i> . . . . .	100
4.3	<i>Réseau des <math>(2n + 1)</math> repères invariants associés aux sigma points</i> . . . . .	113
4.4	<i>Comparatif SRIUKF standard vs. SRIUKF appliqué au cas de l'AHRS. Paramétrage par les sigma points <math>\{\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}, \mathcal{X}^{(i)})/i \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket\}</math></i> . . . . .	116
4.5	<i>Comparatif SRIUKF standard vs. SRIUKF appliqué au cas de l'AHRS. Paramétrage par l'état prédit <math>\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = \sum_{j \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket} W_{(m)}^{(j)} \mathcal{X}_{k+1 k}^{(j)}</math></i> . . . . .	118
4.6	<i>Modèle de parafoil MP-360 de chez Onyx avec sa charge utile</i> . . . . .	120
4.7	<i>UKF : estimation de l'attitude <math>(\phi, \theta, \psi)</math> et erreurs d'estimation</i> . . . . .	122
4.8	<i>IUKF : estimation de l'attitude <math>(\phi, \theta, \psi)</math> et erreurs d'estimation</i> . . . . .	122
4.9	<i>UKF : estimation des états associés au quaternion <math>q</math> et tracés des écarts-types</i> . . . . .	123
4.10	<i>IUKF : estimation des états associés au quaternion <math>q</math> et tracés des écarts-types</i> . . . . .	123
4.11	<i>UKF : estimation des imperfections : biais <math>\omega_b</math> et facteurs d'échelle <math>(a_s, b_s)</math></i> . . . . .	126
4.12	<i>IUKF : estimation des imperfections : biais <math>\omega_b</math> et facteurs d'échelle <math>(a_s, b_s)</math></i> . . . . .	126
4.13	<i>Comparaison des écarts-types théoriques calculés par l'UKF et l'IUKF</i> . . . . .	127
4.14	<i>UKF : erreur d'estimation sur l'état : <math>\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}</math></i> . . . . .	128
4.15	<i>IUKF : erreur d'estimation invariante sur l'état : <math>\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})</math></i> . . . . .	128
4.16	<i>UKF : gains de correction calculés</i> . . . . .	130
4.17	<i>IUKF : gains de correction calculés</i> . . . . .	131
4.18	<i>Cas bruité - Comparaison des écarts-types théoriques UKF vs. IUKF</i> . . . . .	132
4.19	<i>Cas bruité - UKF : gains de correction calculés</i> . . . . .	133
4.20	<i>Cas bruité - IUKF : gains de correction calculés</i> . . . . .	134

---

4.21	<i>Principes de synthèse d'estimateurs invariants</i>	136
4.22	<i>Illustration de la propriété log-linéaire de l'erreur de propagation (extrait de {Barrau et Bonnabel, 2014})</i>	141
5.1	<i>Mesures simulées issues des capteurs : vitesse angulaire- accélération totale- champ magnétique terrestre</i>	149
5.2	<i>Résultat de l'estimation des angles d'attitude <math>(\varphi, \theta, \psi)</math></i>	152
5.3	<i>Norme de l'accélération <math>y_A</math> (localement <math>\dot{V} \neq 0</math>)</i>	153
5.4	<i>Biais et facteurs d'échelles influencés localement par <math>\dot{V} \neq 0</math></i>	153
5.5	<i>Comparaison des écarts types théoriques/mesurés pour le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF</i>	154
5.6	<i>Résultats fournis par le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF</i>	155
5.7	<i>Résultats sur la convergence du SRUKF et du <math>\pi</math>-IUKF</i>	156
5.8	<i>Résultats de l'estimation d'attitude <math>\hat{q}</math> (pointillés bleus) fournis par le <math>\pi</math>-IUKF et représentation de l'erreur d'estimation linéaire (SRUKF) et invariante (<math>\pi</math>-IUKF)</i>	158
5.9	<i>Résultats de l'estimation d'attitude <math>\hat{q}</math> (pointillés bleus) fournis par le <math>\pi</math>-IUKF et représentation de l'erreur d'estimation linéaire (SRUKF) et invariante (<math>\pi</math>-IUKF). La seule différence avec la figure 5.8 est que la condition initiale <math>q_0</math> est différente</i>	158
5.10	<i>Résultats de convergence des gains de corrections <math>K</math> obtenus avec le SRUKF (en haut) et le <math>\pi</math>-IUKF (en bas)</i>	159
5.11	<i>Résultats d'estimation sur l'attitude <math>(\varphi, \theta, \psi)</math></i>	160
5.12	<i>Résultats de l'estimation des vitesses <math>(V_x, V_y, V_z)</math></i>	160
5.13	<i>Résultats de l'estimation des positions <math>(P_x, P_y, P_z)</math></i>	161
5.14	<i>Comparaison des écarts types théoriques/mesurés pour le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF</i>	162
5.15	<i>Résultats fournis par le <math>\pi</math>-IUKF et le SRUKF</i>	163
5.16	<i>Résultats comparés entre le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF</i>	164
5.17	<i>Résultats de l'estimation fournis par le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF</i>	165
5.18	<i>Résultats de l'estimation des positions <math>(P_x, P_y, P_z)</math></i>	166
5.19	<i>Résultats de la convergence des coefficients <math>K</math> fournis par le SRUKF (vignette du haut) et le <math>\pi</math>-IUKF (vignette du bas)</i>	167
5.20	<i>Carte autopilote Apogee</i>	168
5.21	<i>Antenne Novatel.</i>	169
5.22	<i>Descriptif des différents composants embarqués sur un mini-drone à aile fixe</i>	169
5.23	<i>Schéma Simulink représentant l'acquisition et la calibration des mesures ainsi qu'une vue d'ensemble des entrées/sorties des filtres SRUKF et <math>\pi</math>-IUKF.</i>	170

---

5.24	<i>Variance d'Allan pour chaque axe de l'accéléromètre et du gyromètre . . . . .</i>	172
5.25	<i>Distributions et écarts types des bruits de mesure . . . . .</i>	174
5.26	<i>Mesure de vitesse angulaire et d'accélération . . . . .</i>	175
5.27	<i>Spectre de Fourier des signaux <math>\omega_{mx}</math> et <math>a_{mx}</math> étudié lors de plusieurs phases de vol</i>	175
5.28	<i>Calibration des magnétomètres . . . . .</i>	177
5.29	<i>Résultats de la convergence des biais et des facteurs d'échelles fournis par le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF . . . . .</i>	178
5.30	<i>Résultats de l'estimation des angles d'attitude . . . . .</i>	178
5.31	<i>Résultats de la convergence des coefficients <math>K</math> obtenus avec le SRUKF et le <math>\pi</math>-IUKF . . . . .</i>	179
5.32	<i>Evolutions temporelles des angles d'Euler pour différents gains . . . . .</i>	181
5.33	<i>Base de connaissance . . . . .</i>	182
5.34	<i>Les différents réglages des gains de l'observateur invariant . . . . .</i>	182
5.35	<i>Les différentes surfaces de réglage pour les gains de l'observateur invariant . . . . .</i>	183
5.36	<i>Résultats de la convergence des biais du SRUKF et du <math>\pi</math>-IUKF . . . . .</i>	184
5.37	<i>Résultats de l'estimation des angles d'attitudes . . . . .</i>	185
5.38	<i>Résultats de l'estimation de l'altitude . . . . .</i>	185
5.39	<i>Résultats de la convergence des gains sur l'estimation des quaternions . . . . .</i>	186
5.40	<i>Résultats de la convergence des gains sur la vitesse, la position et les biais . . . . .</i>	187
5.41	<i>Un Twinstar équipé d'une antenne Novatel . . . . .</i>	188
5.42	<i>La position horizontale et verticale du Twinstar . . . . .</i>	189
5.43	<i>Performance des trois algorithmes . . . . .</i>	189
6.1	<i>Nouvelle formulation de l'UKF dans un cadre invariant . . . . .</i>	196
6.2	<i>Amélioration du contrôle des systèmes non linéaires . . . . .</i>	197
6.3	<i>Boucle de contrôle robuste vis-à-vis de potentiels pannes . . . . .</i>	198
A.1	<i>Sous-espace topologique compact <math>\mathbb{S}^n</math> d'un espace Euclidien <math>\mathbb{R}^n</math> . . . . .</i>	203
A.2	<i>Représentation des quatres cartes du cercle <math>\mathcal{S}^1</math> . . . . .</i>	204
A.3	<i>Espaces d'état les plus courants qui sont simplement connexes de la droite <math>\mathbb{R}</math> ou du plan <math>\mathbb{R}^2</math> . . . . .</i>	206
A.4	<i>L'espace d'état du pendule est le cylindre, <math>(\theta, \dot{\theta} = \omega) \in \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}</math>, et le vecteur vitesse <math>v(\theta, \omega)</math> est tangent au cylindre . . . . .</i>	206

---

A.5	<i>Les trajectoires de <math>\dot{\theta}_1 = \omega_1, \theta \in \mathcal{S}^1</math> et <math>\dot{\theta}_2 = \omega_2, \theta_2 \in \mathcal{S}^1</math> sont des hélices tracées sur un tore paramétré par les deux angles, latitude et longitude, <math>\theta_1</math> et <math>\theta_2</math> . . . . .</i>	206
A.6	<i>Théorème du redressement dans <math>\mathbb{R}^3</math>, le changement de coordonnées, <math>x \rightarrow y</math>, définit par <math>x = (x_1, x_2, x_3) = \phi_{y_3}(y_1, y_2, 0)</math>, transforme le champ <math>v</math> en un champ constant.</i>	207
A.7	<i>Orbites du groupe de transformation <math>G</math> agissant sur <math>\Sigma</math> dans les coordonnées du redressement. Cas 2D et 3D . . . . .</i>	216
B.1	<i>Vue globale du traitement flou . . . . .</i>	217
B.2	<i>Différence entre logique « classique » et logique « flou » . . . . .</i>	219
B.3	<i>Mise en forme du problème pour la fuzzification . . . . .</i>	220
B.4	<i>Fuzzification . . . . .</i>	221
B.5	<i>Activation . . . . .</i>	221
B.6	<i>Implication . . . . .</i>	222
B.7	<i>Agrégation . . . . .</i>	223



# Introduction

L'UTILISATION de drones dans le secteur civil est à l'aube de l'explosion. En effet, avec un marché qui atteindra en France plus de 2 milliards d'euros à l'horizon 2015, la Direction Générale de l'Aviation Civile (DGAC) recensait déjà, fin octobre 2012, 345 opérateurs de drones représentant au total 585 appareils. Si l'utilisation des drones dans le secteur militaire n'est pas nouvelle, celle-ci émerge tout juste pour certaines applications civiles comme par exemple la surveillance de pipelines, la protection des populations ou l'aide au traitement et à l'analyse des sols cultivés. De nouvelles applications exploitant les drones comme vecteur expérimental sont actuellement à l'étude. Parmi tant d'autres, citons leur exploitation future en aérologie et météorologie pour la compréhension et la mesure de phénomènes locaux tels que les gradients de vent ou la formation de brouillard. Il est intéressant de constater que depuis 2006, l'augmentation du nombre d'engins exploités touche principalement les mini- et les micro-drones qui se classent dans la catégorie des moins de 30kg. Les appareils de cette catégorie, sur lesquels nous nous focaliserons, présentent l'avantage d'être relativement légers et facilement transportables contrairement à ceux de plus de 150kg. Outre leur masse, les drones aériens peuvent également être classés selon leur autonomie qui conditionne leur portée d'utilisation. Il est ainsi commun de les répertorier en Short Range (SR), Close Range (CR) et Medium Range (MR). Malgré une variété de configurations possibles, ces engins partagent cependant plusieurs caractéristiques communes :

- ▶ des masses à vide et au décollage, ainsi qu'un poids et une taille limites propres à leur catégorie. La donnée de ces caractéristiques conditionne fortement le nombre et la performance des capteurs qu'il est possible d'embarquer ;
- ▶ en conséquence, un niveau d'autonomie et une portée seuils qui orientent l'utilisation du drone vers telle ou telle application ;
- ▶ enfin, des qualités de vol plus ou moins bien connues et compatibles ou non avec des vols en intérieur, en milieu encombré, en présence de vent, etc.

Au-delà du concept de drone envisagé, un moyen très répandu pour en optimiser les performances consiste à travailler au développement d'une chaîne avionique spécifique qui conférera à l'engin un degré d'autonomie et des qualités de vol en boucle fermée en adéquation avec la

ou les missions qu'il doit remplir. De façon très concrète, ce système avionique peut se décomposer en une partie hardware (comprenant un ordinateur embarqué, des capteurs, un ensemble d'actionneurs et un module de communication sol/bord) et une partie software qui regroupe :

- ▶ des algorithmes de traitement du signal qui assurent des fonctions aussi diverses que le débruitage des sorties des capteurs ou l'estimation et la reconstruction des états du drone ou d'autres paramètres de vol, à partir d'une fusion des données mesurées disponibles à bord (et souvent peu redondées), corroborées par les sorties d'un modèle mathématique de prédiction, descriptif du comportement dynamique de l'engin ;
- ▶ des algorithmes de contrôle « bas-niveau » pour le pilotage et le guidage de l'appareil en boucle fermée de sorte que celui-ci soit commandé en consigne à atteindre ;
- ▶ des algorithmes de contrôle « haut-niveau » pour la navigation, la replanification ou l'aide à la décision (IA) en l'absence d'un opérateur humain ou dans le cas de situations dégradées (rupture de COM, pannes, etc.).

Les algorithmes d'estimation, d'état ou de paramètres, et de contrôle apparaissent donc primordiaux, d'autant plus lorsque la technologie des capteurs et des actionneurs, pour des raisons de coût et d'encombrement essentiellement, ne permet pas de disposer de capacités illimitées. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des micro- et des mini-drones. L'estimation permet donc de fusionner, en temps réel, les informations imparfaites provenant des différents capteurs et de fournir une estimation, par exemple de l'état du drone (orientation, vitesse, position) au ordinateur embarqué où sont implémentés les algorithmes de commande de l'engin. Ce contrôle de l'appareil doit garantir sa stabilité en boucle fermée quelque soit l'ordre de consigne fourni directement par l'opérateur ou par tout système automatique de gestion du vol et, assurer que celle-ci soit correctement recopiée. Estimation et commande participent donc grandement au succès de toute mission. Une dimension extrêmement importante qui a conditionné les travaux entrepris tout au long de cette thèse concerne la capacité d'emport des mini-drones que nous considérons. En effet, celle-ci, relativement limitée, et couplée à la volonté de ne pas grever les budgets de développement de tout mini-drone, autorise uniquement l'intégration de matériels dits « bas-coûts ». Malgré les progrès significatifs de la miniaturisation et l'augmentation continue des capacités de calcul embarqué (cf. Loi de Moore), les mini-drones d'intérêt considérés ici n'embarquent donc que des capteurs aux performances limitées dans un contexte où cette catégorie d'engins autonomes est amenée à être de plus en plus fréquemment exploitée pour remplir des missions elles-mêmes toujours plus nombreuses. Celles-ci requièrent notamment que de tels drones puissent de manière sûre s'insérer et partager l'espace aérien civil moyennant le passage d'une certification de leur vol au même titre que pour les avions de transport des différentes compagnies aériennes. Dès lors, face à cet enjeu de sécurisation des vols de mini-drones, la consolidation de la connaissance de l'état de l'aéronef par des techniques d'estimation devient une tâche essentielle pour en assurer le contrôle, y compris en situations dégradées (pannes capteurs, perte occasionnelle de signaux, bruits et perturbations environnantes, imperfections des

---

moyens de mesure, etc.). Tenter de répondre à cet enjeu conduit naturellement le chercheur à s'attaquer à des problèmes relativement nouveaux, en tout cas pas forcément aussi proches de ceux qui se posent dans le secteur de l'aéronautique civile ou militaire, où le système avionique est sans commune mesure avec celui sur lequel nous avons travaillé dans cette thèse. En effet, ce dernier doit être extrêmement sophistiqué pour remplir diverses fonctions à bord pour un poids et un volume les plus faibles possibles. En particulier, les algorithmes d'estimation sont soumis à de très fortes contraintes, en termes de performances bien évidemment, mais aussi de temps d'exécution, d'espace mémoire et de preuve de convergence.

Le travail effectué au cours de cette thèse tente d'apporter une solution algorithmique originale à la problématique de l'estimation de l'état d'un mini-drone en vol qui soit compatible avec les exigences d'embarquabilité inhérentes au système. Il a été orienté vers les méthodes d'estimation non linéaire à base de modèles. Ce travail a tout d'abord consisté à définir une modélisation dynamique descriptive du vol des mini-drones étudiés, suffisamment générique pour être exploitée pour différents types de mini-drones (voilure fixe, quadrirotor, etc.). Par la suite, deux algorithmes d'estimation originaux, dénommés IUKF et  $\pi$ -IUKF, exploitant ce modèle, ont été développés avant d'être testés en simulation puis sur données réelles pour la version  $\pi$ -IUKF. Ces deux méthodes transposent le cadre générique des observateurs invariants au cas de l'estimation non linéaire de l'état d'un système dynamique par une technique de type Unscented Kalman Filter (UKF) qui appartient à la classe plus générale des algorithmes de filtrage non linéaire de type Sigma Point (SP). La solution proposée sera à l'avenir intégrée à l'avionique des mini-drones de l'ENAC ; le code informatique est d'ores et déjà disponible dans l'autopilote Paparazzi.

## Organisation du mémoire

Le présent mémoire de thèse comprend cinq chapitres :

□ Le premier chapitre présente le contexte de la thèse et offre un aperçu des différentes évolutions technologiques qui ont permis l'essor de la robotique aérienne dans le secteur civil. En outre, cet essor a également entraîné avec lui un certain nombre d'initiatives de développement dites Open Source dont l'objectif est de proposer un système complet de pilote automatique pour mini-drones. Les motivations et objectifs des travaux de recherche réalisés durant cette thèse sont donnés en guise de conclusion de chapitre et discutent de la problématique de conception d'un estimateur d'état pour mini-drone qui soit compatible avec les exigences d'embarquabilité inhérentes au système Open Source Paparazzi.

□ Le deuxième chapitre présente un état de l'art du domaine de l'estimation. Cette étude bibliographique sert de référence tout au long du rapport et détaille plus particulièrement deux techniques d'estimation : le filtrage de Kalman et les observateurs invariants. Concernant cette dernière, nous conseillons au lecteur, peu familier avec la géométrie différentielle, de se reporter à l'annexe A. C'est à partir de l'hybridation de ces deux techniques que nous avons développé puis validé deux algorithmes d'estimation non linéaire.

□ Dans le troisième chapitre, nous présentons les différents modèles cinématiques communément exploités pour la navigation des systèmes dynamiques. Les différents filtres estimateurs développés au cours de cette thèse ont été bâtis à partir de ces modèles génériques, qui permettent par ailleurs de prendre en compte les erreurs de nature aléatoire qui perturbent le système réel (cf. imperfections de mesure). Nous avons donc mené de façon détaillée une étude d’observabilité afin d’établir si les variables d’état peuvent être reconstruites à partir des entrées connues du système et des mesures. Ainsi, nous verrons que l’établissement d’un modèle dynamique précis pour la navigation inertielle peut comporter plusieurs degrés de liberté, et qu’il est donc assujéti à un certain nombre de choix de modélisation pour garantir que le problème d’estimation reste observable.

□ A partir des modèles issus du chapitre trois, le quatrième chapitre a trait au développement de principes méthodologiques originaux qui ont permis d’élaborer deux algorithmes d’estimation non linéaire, IUKF et  $\pi$ -IUKF, qui diffèrent du point de vue de leur formulation. Ceux-ci, fondés conjointement sur la théorie des observateurs invariants et sur les principes du filtrage de Kalman dit *unscented*, permettent d’apporter une solution algorithmique extrêmement intéressante aux problèmes de navigation inertielle. Ainsi, un ensemble complet de tous premiers résultats caractérisant l’IUKF permettra de conclure quant au bien-fondé de cet algorithme et de son apport tant du point de vue théorique que pratique.

□ Le cinquième et dernier chapitre fournit un ensemble complet de résultats pour le  $\pi$ -IUKF. La première partie propose une comparaison des performances des algorithmes SRUKF (standard) et  $\pi$ -IUKF. Cette analyse est effectuée sur la base de données simulées bruitées des modèles génériques du chapitre trois qui intègrent les imperfections des différents capteurs. Ensuite, la seconde partie du chapitre présente, toujours en se basant sur un modèle de navigation complet, plusieurs résultats expérimentaux issus de l’estimation, sur données réelles, de l’état du mini-drone à partir des trois principaux algorithmes présentés dans ce mémoire : le SRUKF, le  $\pi$ -IUKF et l’observateur invariant classique. Ces résultats valident l’approche qui permet de déterminer une correction spécifique de la prédiction fournie par n’importe quelle représentation d’état non linéaire utilisée pour l’estimation, de sorte que la dynamique de l’observateur synthétisé vérifie aussi les propriétés de symétrie du système considéré.

Enfin, un ensemble d’annexes complète ce manuscrit. De nombreuses références vers ces dernières sont fournies tout au long du mémoire de thèse.

# Chapitre 1

## Contexte de la thèse

### Sommaire

---

<b>1.1 La robotique aérienne . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1.1 L'essor des drones dans le secteur civil . . . . .	6
1.1.2 Les différentes configurations de mini drones . . . . .	8
<b>1.2 Le projet Paparazzi . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.3 Les différents moyens de mesure . . . . .</b>	<b>13</b>
1.3.1 Les capteurs proprioceptifs . . . . .	13
1.3.2 Les capteurs extéroceptifs . . . . .	18
1.3.3 Les systèmes inertiels . . . . .	21
<b>1.4 Motivations et objectifs des travaux de thèse . . . . .</b>	<b>23</b>
1.4.1 Motivations . . . . .	23
1.4.2 Objectifs . . . . .	24

---

### 1.1 La robotique aérienne

Les robots aériens ou drones (Remotely Piloted Aircraft Systems, en anglais RPAS) sont des engins volants sans pilote, capables de mener à bien une mission de façon plus ou moins autonome. Leur fonction principale est de réaliser une tâche de façon plus sûre ou plus efficace qu'un engin piloté à distance. La possibilité d'utiliser des systèmes autonomes tels que les drones aériens dans le secteur civil a été depuis quelques années largement testée. Un certain nombre de projets de recherche, certains financés par la commission européenne, ont permis d'étudier les concepts d'application potentielle des drones dans le domaine civil. En effet, ces engins ont souvent été déployés pour des besoins militaires spécifiques au cours d'interventions multiples, notamment en Irak, Afghanistan, etc, durant lesquelles ils jouaient un rôle prépondérant comme maillon actif d'un réseau d'information, de décision et d'action. Aujourd'hui, un grand nombre de missions passées en zone hostile, durant lesquelles plusieurs vies humaines étaient en jeu, ont

vu leur scénario d'intervention être complètement repensé en raison de l'apport opérationnel de drones dotés de capacités décisionnelles suffisantes. Il en va de même des missions de surveillance qui ne sont plus opérées aujourd'hui comme elles l'étaient il y a encore quelques dizaines d'années. Le système prend en charge des tâches de pilotage et de guidage, ainsi que des tâches de veille pour lesquelles la vigilance humaine est faillible. Il soulage véritablement l'opérateur humain de sorte que celui-ci peut plus se consacrer à la gestion de haut-niveau de la mission. De la sorte, de nouvelles applications exploitant les drones comme vecteur expérimental sont actuellement à l'étude.

### 1.1.1 L'essor des drones dans le secteur civil

Depuis 2006, l'augmentation du nombre d'appareil touche principalement les mini- et les micro-drones qui se classent dans la catégorie des moins de  $30kg$  (cf. Figure 1.1, [www.sesarju.eu](http://www.sesarju.eu)). Comme l'introduction l'a évoqué, les appareils de cette catégorie seront ceux sur lesquels nous nous focaliserons dans ce manuscrit. Ils présentent l'avantage d'être relativement légers et facilement transportables contrairement à ceux de plus de  $150kg$ . Les robots aériens offrent une très grande variété de types. Outre la masse, ils peuvent également être classés selon leur endurance qui conditionne leur portée d'utilisation. Nous pouvons ainsi distinguer les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance), les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance), les drones dits de moyenne et courte portées et les mini-drones. La classification présentée dans cette thèse reprend celle proposée par l'U.S Air Force. Les RPAS sont également caractérisés par ailleurs, par leur fonction, initialement définie pour un usage militaire. De la sorte, nous distinguerons les drones stratégiques et les drones tactiques ou drones de combat (Unmanned Combat Air Vehicle, en anglaisUCAV). La configuration de ces engins peut aller des ailes fixes aux voilures tournantes en passant par des systèmes de vol hybride. Les drones stratégiques sont

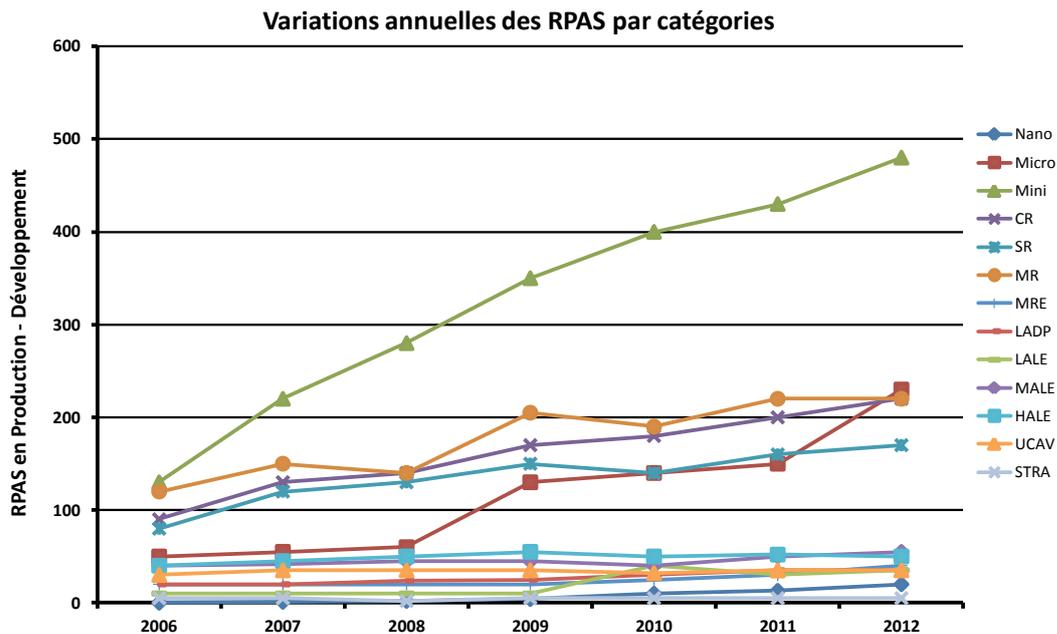


FIGURE 1.1 – Production/Développement de drones sur la période 2006-2012

généralement des drones de type HALE. Ayant une autonomie de plusieurs jours pour certains et évoluant à plus de 20000 mètres d'altitude, ils sont principalement destinés à des missions de reconnaissance. Les deux seuls drones HALE connus aujourd'hui sont le Global Hawk construit par Northrop Grumman et le Sentinel développé par Lockheed Martin (cf. Figure 1.2).



(a) RQ-4B Global Hawk

(b) RQ-170 Sentinel

FIGURE 1.2 – Exemples de drones HALE

Les drones tactiques représentent une très large gamme d'engins, allant de la catégorie MALE aux mini-ou micro-drones. Ayant une autonomie d'une trentaine d'heures et évoluant entre 5000 et 15000 mètres d'altitude, les drones MALE sont donc amenés à accomplir un panel très large de missions militaires ou civiles. Nous pouvons citer entre autres le Reaper et le Gray Eagle, tous les deux développés par General Atomics (cf. Figure 1.3).



(a) MQ-9 Reaper

(b) MQ-1C Gray Eagle

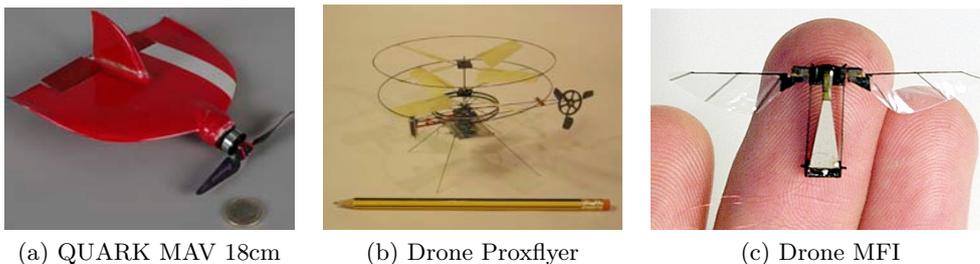
FIGURE 1.3 – Exemples de drones MALE

Ces engins doivent pourtant être différenciés des UCAV, dont les caractéristiques techniques sont très différentes (une dizaine d'heures d'autonomie en évoluant à moins de 5000 mètres d'altitude). L'endurance des drones de combat est donc bien plus faible mais leur masse au décollage apparaît équivalente à un avion d'arme classique (soit environ 10 tonnes contre 1.2 pour le Predator A). Les drones tactiques de courte et moyenne portées MR et SR (Medium Range et Short Range) sont destinés à des missions de surveillance et fortement utilisés dans le milieu civil comme par exemple en tant que relais de communication. Ce type de drone est actuellement en très fort développement dans beaucoup de pays dont la France avec, par exemple, le Sperwer de Sagem (cf. Figure 1.4).

Enfin, les mini-drones sont, comme leur nom l'indique des drones de petite taille, de l'ordre du mètre, caractérisés par une autonomie de quelques heures. De toutes les catégories, c'est le type

FIGURE 1.4 – *Le drone Sperwer décolle depuis un rampe de lancement*

d'engin qui se prête le mieux au développement de plateformes expérimentales, relativement faciles à mettre en œuvre et peu onéreuses. Entre autre, ils servent à mettre en pratique et à illustrer des travaux de recherche dans les domaines de la robotique, de l'automatique ou du traitement du signal. C'est d'ailleurs, sur cette catégorie que nous nous sommes focalisés pour développer puis implémenter plusieurs algorithmes d'estimation essentiels pour le bon fonctionnement de l'engin, d'autant plus lorsque les technologies des capteurs et des actionneurs, pour des raisons de coût et d'encombrement essentiellement, ne permettent pas de disposer de capacités illimitées. La figure 1.5 présente un bref aperçu de ce qui peut être aujourd'hui conçu en termes de miniaturisation des véhicules aériens, à savoir le drone Quark développé par le groupe Automatique de l'équipe MAIAA de l'ENAC, un drone de la gamme Proxflyer et un drone de type MFI (Micromechanical Flying Insect).



(a) QUARK MAV 18cm

(b) Drone Proxflyer

(c) Drone MFI

FIGURE 1.5 – *Exemples de micro drones*

### 1.1.2 Les différentes configurations de mini drones

**Les voilures tournantes** : les drones à rotors multiples ou voilures tournantes constituent certainement la configuration aéromécanique la plus connue et la plus répandue parmi les véhicules aériens autonomes. Ces appareils sont généralement équipés de quatre rotors, mais il en existe également avec six, voire huit rotors. Cette configuration est particulièrement bien adaptée aux vols stationnaires et à basse vitesse. En revanche, elle n'est pas du tout optimisée pour effectuer des vols de longue durée (environ 30 minutes maximum suivant le poids de l'appareil) et n'est pas recommandée non plus pour des vols en translation à haute vitesse.

**Les voilures fixes** : longtemps utilisés par les radiomodélistes, les drones à voilure fixe permettent d’accomplir principalement des missions d’observation. En effet, grâce à ce type de cellules énergétiquement plus efficaces que celles à voilure tournante, il est possible d’obtenir des durées de vol allant au-delà de l’heure. Malheureusement, la dégradation des performances en termes d’endurance va de pair avec une réduction de la dimension de la cellule. C’est pourquoi, de nombreuses études portant sur la conception de mini-drones de longue endurance ont permis d’optimiser chaque partie du véhicule (motorisation, hélices, ailes, fuselage, etc) afin d’obtenir à la fois les avantages du mini-drone et des drones de grande envergure.

**Les convertibles** : très peu connus à ce jour, les drones convertibles tentent d’apporter une solution alternative aux principales lacunes rencontrées avec les différentes configurations, qu’elles soient à voilure fixe ou à voilure tournante, en proposant une possibilité de combiner le vol stationnaire où à très basse vitesse avec le vol en translation. C’est pourquoi, plusieurs études ont été réalisées afin de développer des véhicules au comportement équivalent à un hélicoptère à basse vitesse et à celui d’un avion à haute vitesse. En pratique, la conception de tels engins se révèle d’un point de vue mécanique complexe, pour un résultat extrêmement fragile du point de vue de la structure. De plus, la phase de transition entre le mode hélicoptère et le mode avion s’avère une phase critique dont les effets aérodynamiques sont méconnus.

## 1.2 Le projet Paparazzi

Historiquement, de très nombreux groupes issus du monde académique (laboratoires de recherche, universités, institutions, etc.) ou du secteur privé ont contribué au développement de la robotique aérienne. De ce fait, ils ont très largement œuvré pour : - la conception d’engins innovants (et notamment de mini-drones) ; - la commercialisation de capteurs aux performances et coûts divers et variés ; - le développement de logiciels embarqués qui confèrent aux robots aériens un très grand nombre de capacités, les rendant exploitables pour accomplir diverses missions. Nous pouvons citer parmi tant d’autres acteurs, l’ETH Zurich et son projet PIXHAWK qui traite de la vision pour des robots aériens autonomes ; l’université de Standford/Berkeley et sa plateforme STARMAC (Standford/Berkley Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi-Agent Control) grâce à laquelle de nouveaux concepts de contrôle pour les systèmes multi-agents ont pu être mis au point ; la société allemande Ascending Technologies qui commercialise plusieurs types de mini-drones, entièrement équipés, ainsi que des cartes électroniques de pilote automatique pré-programmées fournies avec des outils de développement ; et la société française Parrot qui commercialise l’ARDRONE-2, un des premiers drones grand public. L’impressionnant essor de la robotique aérienne ces 10-15 dernières années a également entraîné avec lui un certain nombre d’initiatives de développement dites Open Source qui se sont nourries de la passion d’individus issus de tous bords (chercheurs, universitaires, aéromodélistes, électroniciens, informaticiens, etc). Les travaux de cette thèse s’inscrivent dans cette logique et ont contribué à enrichir le système libre appelé *Paparazzi*<sup>1</sup> {Hattenberger *et al.*, 2014} dont l’objectif est de

---

1. [www.paparazzi-uav.org](http://www.paparazzi-uav.org)

proposer un système complet de pilote automatique pour mini-drones. Celui-ci repose sur une communauté où chaque développeur met à la disposition de tous, toute avancée ou contribution méthodologique, technologique ou logicielle. Chaque apport à la communauté peut ainsi être évalué par le retour d'expérience de centaines d'autres utilisateurs à travers le monde. De très nombreux projets se sont structurés selon ce mode d'organisation, le plus célèbre d'entre eux étant très certainement le système d'exploitation Linux. Dans le domaine de la robotique, environ 2000 projets{Lim et Park, 2012} ont adopté ce mode de fonctionnement. Face à *Paparazzi*, d'autres alternatives existent. Citons entre autres : OpenPilot, Arducopter, Pixhawk de l'ETH-Zurich, MikroKopter de HiSystems GmbH pour la partie logicielle et KKMulticopter, Multiwii et Aeroquad par ailleurs.

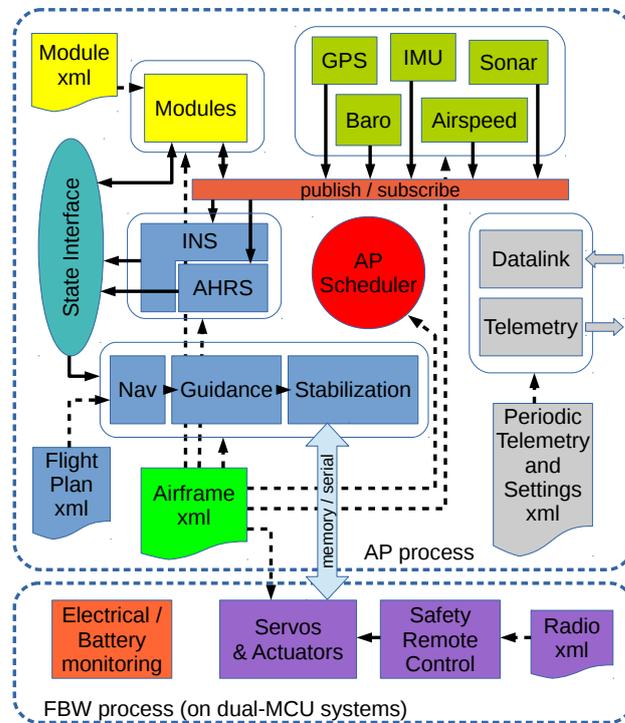


FIGURE 1.6 – *L'architecture logicielle de Paparazzi*

La plupart des projets de développement de mini-drones, qu'ils soient de nature privée ou académique, utilisent des algorithmes d'estimation d'état relativement génériques appelés Attitude and Heading Reference System (AHRS) ou Inertial Navigation System (INS) suivant que seule l'attitude et éventuellement, la position et la vitesse de l'aéronef est/sont estimée/s. Comme nous le verrons au cours du chapitre 2, l'état de l'art nous apprend que de très nombreuses méthodes peuvent être employées afin d'estimer ces variables essentielles pour la restitution de l'état du mini-drone. Les différents projets libres énumérés précédemment proposent différentes solutions relativement standards au problème d'estimation. Pour chaque projet open-source détaillé dans le Tableau 1.7 nous retrouvons : - les différents algorithmes de filtrage implémentés dans le pilote automatique de l'aéronef; - les modes de navigation proposés et adaptés aux cas mono- et multi- engins ainsi que les possibilités offertes en termes de contrôle automatique désirées.

Ces modes de contrôle sont définis par la capacité du mini-drone à maintenir une position, une attitude ou un cap à l'aide de ses capteurs. Le contrôle basé capteurs nécessite de caractériser les imperfections des différents moyens de mesure embarqués afin de développer un algorithme de filtrage performant. Cette caractérisation fera l'objet de la section qui suit. Par ailleurs, le choix d'une méthode d'estimation doit tenir compte de certaines caractéristiques liées au modèle retenu pour la navigation. Dans le Tableau 1.7, deux algorithmes d'estimation sont utilisés, chacun présentant des avantages et des inconvénients.

- 1) le filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter, en anglais EKF), détaillé dans le chapitre 2, présente l'inconvénient d'utiliser un modèle local linéaire autour de la trajectoire estimée qui peut conduire à des situations de divergence si celui-ci n'est pas suffisamment représentatif de la dynamique du drone au point de vol considéré. Le temps de calcul nécessaire à sa détermination sera relativement faible si la linéarisation peut être connue analytiquement et beaucoup plus élevé si celle-ci doit être conduite numériquement. En revanche, l'EKF présente l'avantage de pouvoir utiliser un modèle relativement complet de la cinématique ou de la dynamique du vol de l'engin et s'affranchir des bruits ;
- 2) les filtres complémentaires linéaires et non linéaires (Linear/Non linear Complementary Filter, en anglais LCF/NCF) {Mahony *et al.*, 2008} ont l'inconvénient d'être applicables uniquement sur une partie du modèle de navigation (AHRS), ce qui rend l'estimation peu robuste aux pertes de signal GPS. La fusion avec d'autres capteurs est impossible en pratique. En ce qui concerne le filtre NCF, son avantage est de fournir une estimation très précise de l'attitude de l'appareil.

L'architecture mise en place au sein du système *Paparazzi* se caractérise par une boucle d'acquisition des données, une étape d'estimation de l'état du système et un bloc de commande qui permettront à l'aéronef de respecter le plan de vol défini par l'utilisateur (cf. Figure 1.6). A l'intérieur de cette structure mise en place depuis le début du projet *Paparazzi*, le processus d'estimation se fait de façon classique en s'insérant entre la boucle d'acquisition des données (bloc en vert foncé) et le calcul de la commande (bloc Stabilization). Ainsi, l'algorithme d'estimation agrège les informations provenant des différents capteurs afin d'améliorer, en temps réel, les performances des boucles de commande et de navigation de l'engin. Pour ce dernier point, il existe dans *Paparazzi* trois filtres indépendants, chacun représentant un sous-système pour estimer les variables de navigation ou d'attitude de l'engin (blocs INS/AHRS) :

- ▶ **une AHRS (NCF)** assure la fusion des capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) pour estimer uniquement l'attitude de l'appareil sur ses trois axes : roulis, lacet, tangage ;
- ▶ **un filtre de Kalman dit vertical** réalise la fusion entre la mesure scalaire du baromètre ou de la composante verticale du GPS et l'accélération pour estimer l'altitude à laquelle se trouve le véhicule aérien ;
- ▶ **le dernier sous-système** reçoit uniquement la mesure brute du signal GPS, ce qui permet à l'aéronef de connaître sa position dans le plan horizontal.

	Openpilot <small>www.openpilot.org</small>	Pixhawk <small>www.pixhawk.org</small>	Aeroquad <small>www.aeroquad.com</small>	Arducopter <small>www.diydrones.com</small>	Paparazzi <small>wiki.paparazziuav.org</small>	Mikrokopter <small>www.mikrokopter.de</small>	Multiwii <small>www.multiwii.com</small>
<b>Filtrages &amp; modèles</b>							
Estimation	EKF	EKF	NCF/KF	NCF/KF	NCF/KF	LCF/KF	LCF/KF
Modèle complet de type INS	✓	✓	—	—	—	—	—
<b>Spécificités</b>							
Plate-forme multi-cellules	✓	—	—	✓	✓	✓	—
Navigation GPS-based par point de passage	Δ	Δ	—	✓	✓	Δ	Δ
Vol intérieur basé vision	—	✓	—	—	—	—	—
<b>Contrôle du vol (capteur exploité)</b>							
Maintien de cap (magnétomètre)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Maintien de position (GPS)	Δ	Δ	—	✓	✓	Δ	Δ
Maintien d'altitude (baromètre)	✓	Δ	✓	✓	✓	✓	✓
Maintien d'altitude (GPS)	Δ	Δ	—	✓	✓	Δ	Δ
Maintien d'altitude (sonar)	—	—	✓	✓	—	—	—
Maintien d'altitude (caméra-flux optique)	✓	✓	—	—	—	—	—
Licence logiciel libre	GPL	GPL	GPL	LGPL	GPL	—	GPL

Δ : partiellement utilisé (ex : besoin de rajouter des composants pour la navigation), ✓ : utilisé, — : pas utilisé.

FIGURE 1.7 – Comparaison des différents projets Open-source en 2010

## 1.3 Les différents moyens de mesure

Tous les capteurs utilisés dans le domaine de la robotique mobile qu'elle soit terrestre, aquatique ou aérienne, appartiennent à l'une des deux grandes catégories suivantes {Aldon, 2001} :

**Les capteurs proprioceptifs** délivrent une mesure par rapport à ce qu'ils perçoivent localement du mouvement du véhicule dans l'espace (par exemple, une mesure d'accélération). Ces mesures constituent une source d'information simple à manipuler ne dépendant pas des conditions environnementales dans lesquelles évolue l'engin. Ces informations sont donc d'une importance capitale pour la navigation autonome des drones. Cependant, comme nous le verrons par la suite, dans le cas d'une technologie dite à « bas coûts », la précision de ces informations se dégrade continuellement au cours du temps, les rendant peu fiables et même inutilisables comme unique référence à long terme. Il sera alors indispensable d'associer à ces capteurs aux performances limitées une source d'information supplémentaire.

**Les capteurs extéroceptifs**, quant à eux, permettent de recueillir des informations sur l'environnement dans lequel le véhicule évolue (pression, champ magnétique, etc.). Ces informations correspondent à des observations par rapport à un référentiel absolu attaché à l'environnement (par exemple le positionnement par satellite). Ces capteurs délivrent des mesures indispensables pour recalibrer périodiquement la localisation obtenue par la mesure des mouvements issue des capteurs proprioceptifs.

### 1.3.1 Les capteurs proprioceptifs

#### Les gyromètres

Par définition, un gyromètre est un appareil qui mesure la vitesse angulaire d'un corps animé d'un mouvement suivant un ou plusieurs axes d'un référentiel de référence par rapport à un repère inertiel. Les gyromètres se divisent en deux grandes familles : les gyromètres optiques et les gyromètres mécaniques. Les premiers sont basés sur l'effet Sagnac {Lawrence, 1998} et les seconds sur l'effet Coriolis {Titterton et Weston, 2004}. La propriété physique de l'effet Sagnac est à l'origine des gyromètres laser et des gyromètres à fibre optique. Ces types de capteurs possèdent généralement de très bonnes performances mais sont encombrants. L'effet Coriolis appelé aussi force de Coriolis a donné naissance aux gyromètres à oscillateur piézoélectrique (cf. Figure 1.8c), dont les principes généraux sont connus depuis l'expérience du pendule de Foucault (1851). Leur principe de fonctionnement exploite le couplage, induit par effet Coriolis, de deux modes de vibration (excitateur et détecteur). Cette technologie de capteur est composée d'une multitude d'éléments vibrants dont le mouvement se trouve entretenu en permanence par le biais d'excitations sinusoïdales (mode excitateur). Lorsque le système est au repos, les résultantes de ces signaux propagés au travers des éléments vibrants sont identiques et d'amplitudes constantes. En revanche, lorsque le système est animé d'un mouvement de rotation, des perturbations dues

à la force de Coriolis, entraînent des différences d'amplitude proportionnelles à la vitesse de rotation (mode détecteur).

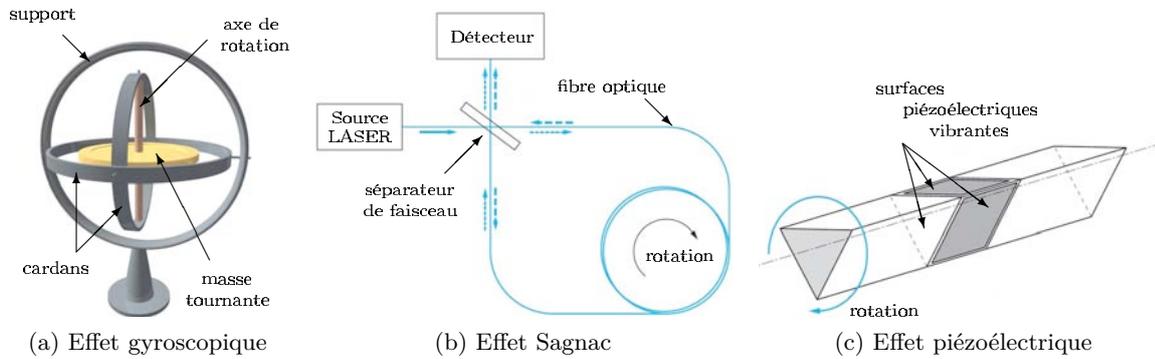


FIGURE 1.8 – *Exemples de gyromètre*

Les principaux paramètres qui conditionnent la précision d'un gyromètre sont le biais, le facteur d'échelle (ou sensibilité) et la résolution de mesure du capteur. Le biais correspond à une modification ou une dérive du signal de sortie du capteur (exprimée en Volt) en l'absence de signal d'entrée. Le facteur d'échelle est, quant à lui, défini comme le rapport entre la sortie du capteur et la grandeur d'entrée (exprimée en  $^{\circ}/\text{sec}$ ) ; il s'exprime donc en  $(\text{Volt}/^{\circ}/\text{sec})$ . Une évolution du biais au cours du temps ou lors d'une variation de température se traduit directement par une erreur de mesure exprimée en valeur absolue ( $^{\circ}/\text{sec}$ ), alors qu'une évolution du facteur d'échelle se traduit par une erreur de mesure exprimée en valeur relative (unité ppm : partie par million). Pour avoir une idée de ce que représente l'unité ppm, une erreur de 300ppm (0.03%) sur le facteur d'échelle, se traduit par une erreur angulaire de 0.1deg après une rotation complète du gyromètre. Enfin, la résolution du capteur (exprimée en  $^{\circ}/\text{sec}$ ) correspond au plus petit signal d'entrée mesurable. La résolution est le produit de la densité spectrale de bruit (exprimée en  $^{\circ}/\text{sec}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) par la racine carrée de la bande passante du capteur (exprimée en Hz).

Dans le but d'être embarqué sur un engin autonome, le choix d'un certain type de technologie pour les gyroscopes devra être soigneusement réfléchi à partir des différentes caractéristiques précédemment définies afin de répondre aux exigences d'une mission particulière. Ainsi, la figure 1.9 propose une vue synthétique des principaux paramètres (le biais et le facteur d'échelle) qui caractérisent la précision d'un gyromètre pour différentes missions qu'un engin autonome est susceptible d'accomplir en utilisant les technologies actuelles [Titterton et Weston, 2004].

L'émergence de nouvelles technologies telles que celles basées sur les principes électromécaniques (MicroElectroMechanical Systems, en anglais MEMS) ont clairement un avantage significatif en termes de poids et de taille par rapport aux capteurs inertiels utilisant l'interférométrie. Initialement utilisées pour les applications militaires, les technologies MEMS sont devenues accessibles au grand public grâce à une implémentation massive de celles-ci dans le milieu de la

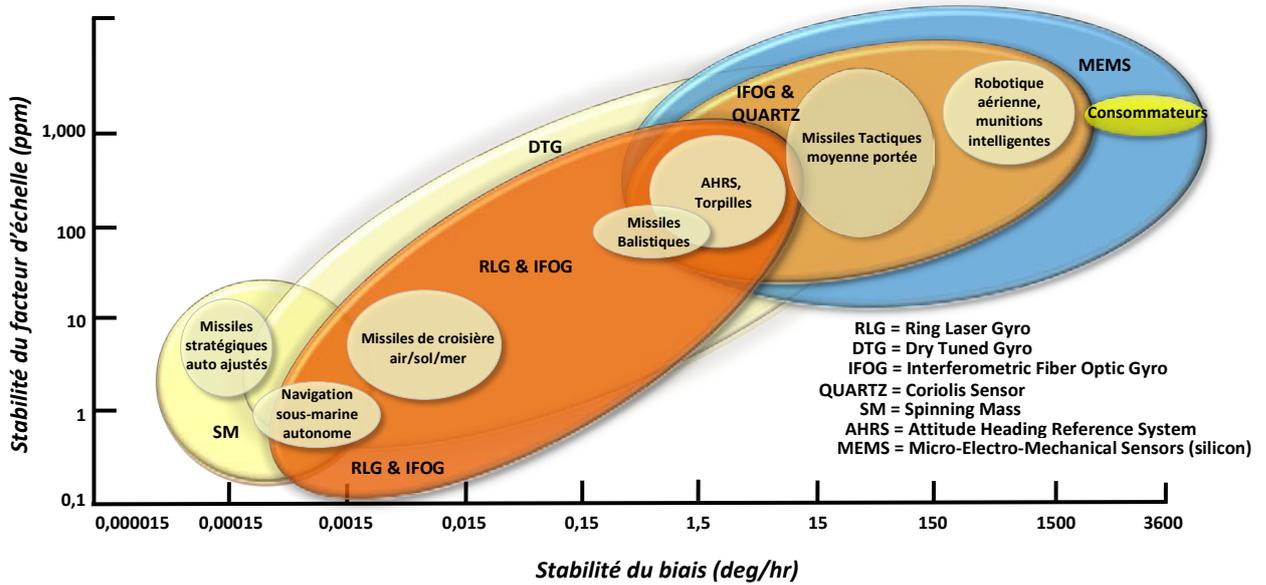


FIGURE 1.9 – Diverses solutions technologiques pour divers besoins de mission

téléphonie mobile, réduisant ainsi leur coût de production. Cette technologie a permis de diminuer considérablement la taille des gyromètres. Ainsi le marché militaire devrait favoriser dans les années à venir les études liées aux développements de ces types de technologie pour des utilisations telles que les munitions intelligentes ou bien le guidage de missiles tactiques à court temps de vol. Exploitées dans de nombreuses applications, les technologies MEMS et IFOG (interférométrie) devraient à terme remplacer beaucoup de systèmes inertiels utilisant le principe du laser RLG et des masses mécaniques. A noter que de nombreux domaines, comme celui de la robotique aquatique, utilisent la technologie RLG pour réduire les fortes contraintes portant sur la stabilité du facteur d'échelle, ce qui en fait dans ce cas-là une technologie bien supérieure à l'IFOG.

### Les accéléromètres

Un accéléromètre mesure, comme son nom l'indique, l'accélération linéaire d'un mobile ou de tout autre objet sur lequel il est fixé. La structure physique d'un accéléromètre consiste en une masse d'épreuve (appelée aussi masse sismique), c'est-à-dire un objet dont la masse et la forme sont précisément connues, suspendues par une charnière (ressorts, lame flexible, membrane) à un cadre rigide. Au repos, ou lorsque l'objet se déplace à vitesse linéaire constante, la masse est en position d'équilibre comme le montre la Figure 1.10a. En revanche, lorsque le capteur est soumis subitement à une accélération non nulle, la masse d'épreuve, soumise à cette variation soudaine ainsi qu'à une force de rappel induite par le type de charnière, tend à se déplacer. La mesure du déplacement de la masse d'épreuve permet alors de déduire l'accélération étant donné que cette dernière est directement proportionnelle à l'allongement mesuré  $m\ddot{x} + kx = 0$ .

Dans la Figure 1.10b, l'objet subit une accélération vers la droite. La plage de mesure est fixée par deux cales qui limitent le débattement de la masse sismique afin d'éviter d'endommager la charnière. Ainsi, cette limite indique l'accélération maximum que pourra subir le capteur avant d'être endommagé définitivement. Dans la littérature, il existe différentes techniques pour mesurer le déplacement du corps d'épreuve ainsi que pour transformer l'action de l'accélération sur le capteur en signal électrique. Ce type de capteur est caractérisé par plusieurs paramètres tels que : la plage de fonctionnement exprimée en  $m.s^{-2}$ , la bande passante (exprimée en Hz),

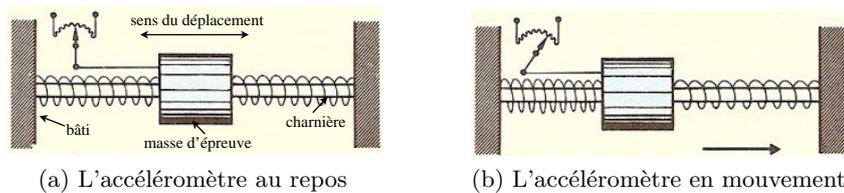


FIGURE 1.10 – Schémas de principe de l'accéléromètre

la résolution (exprimé en g), le facteur d'échelle (sensibilité) qui nous donne une information sur la qualité de suivi des faibles variations de la grandeur d'entrée autour du point de mesure (exprimée en V/g ou en valeur relative (ppm)) et le choc maximum toléré (exprimée en g). A noter que dans le système international, la plupart des documentations indiquent que la mesure d'accélération est fournie en  $g \approx 9.81m.s^{-2}$ , soit en unité d'accélération causée par la pesanteur.

De manière similaire à la section précédente, le choix d'un certain type de technologie accélérométrique sera nécessaire afin de répondre aux exigences d'une mission devant être effectuée par un engin autonome. Ainsi, la Figure 1.11 propose une vue d'ensemble des principaux paramètres (le biais et le facteur d'échelle) qui caractérisent la précision d'un accéléromètre pour différentes missions qu'un engin autonome est susceptible d'accomplir en utilisant les technologies actuelles. Comme le montre la figure, les applications civiles et militaires sont là aussi dominées par la technologie MEMS, non seulement parce qu'elle est généralement à faible coût mais aussi du fait qu'aucune autre technologie n'a pu lui succéder (les résonateurs à quartz étant plus chers pour une qualité comparable). Ces questionnements relatifs à la capacité d'emport des mini-drones que nous considérons, représentent une dimension extrêmement importante qui a conditionné les travaux entrepris tout au long de cette thèse. En effet, celle-ci, relativement limitée, et couplée à la volonté de ne pas grever les budgets de développement de tout mini-drone, autorise uniquement l'intégration de matériels dits « bas coûts ». La Figure 1.12 fournit une représentation synthétique du prix à investir dans les différents capteurs proprioceptifs présentés précédemment en fonction de la technologie utilisée et des performances attendues {Titterton et Weston, 2004}. Malgré les progrès significatifs de la miniaturisation et l'augmentation continue des capacités de calcul embarqué (Loi de Moore, i.e.  $\kappa$  calcul double tous les 18 mois<sup>2</sup>), les mini-drones d'intérêt considérés ici n'embarquent donc que des capteurs aux performances limitées dans un contexte où cette catégorie d'engins autonomes est amenée à être de plus en plus fréquemment exploitée pour remplir des missions elles-mêmes toujours plus nombreuses.

2. à la fin de cette thèse, ces  $\kappa$  calculs auront plus que quadruplés

1.3 Les différents moyens de mesure

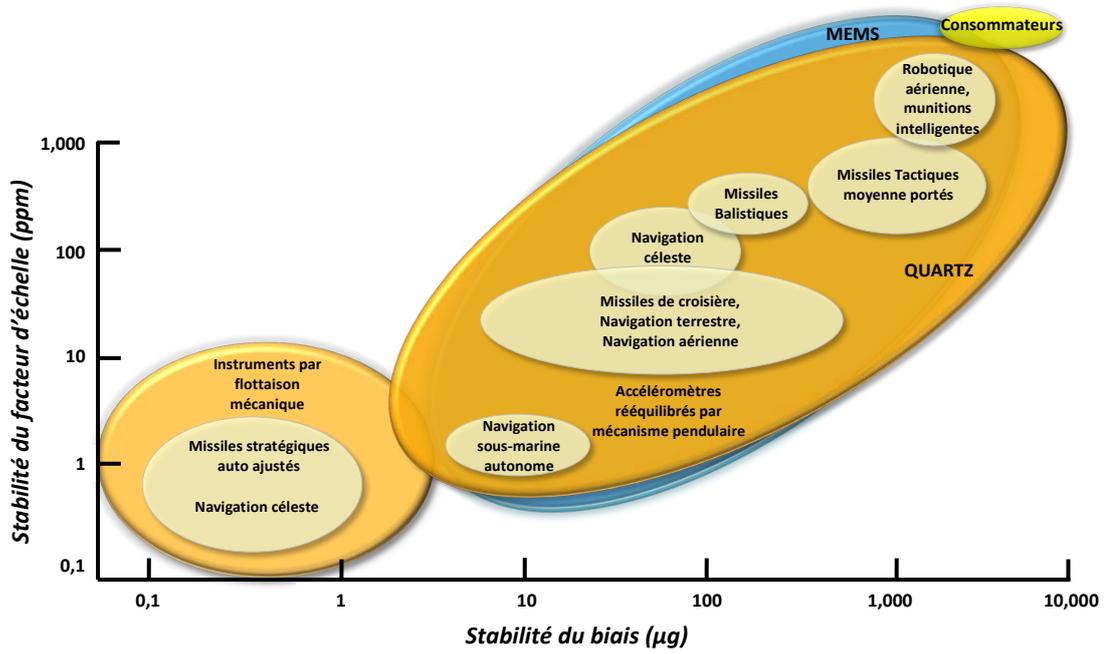


FIGURE 1.11 – Applications des différentes technologies d'accéléromètres

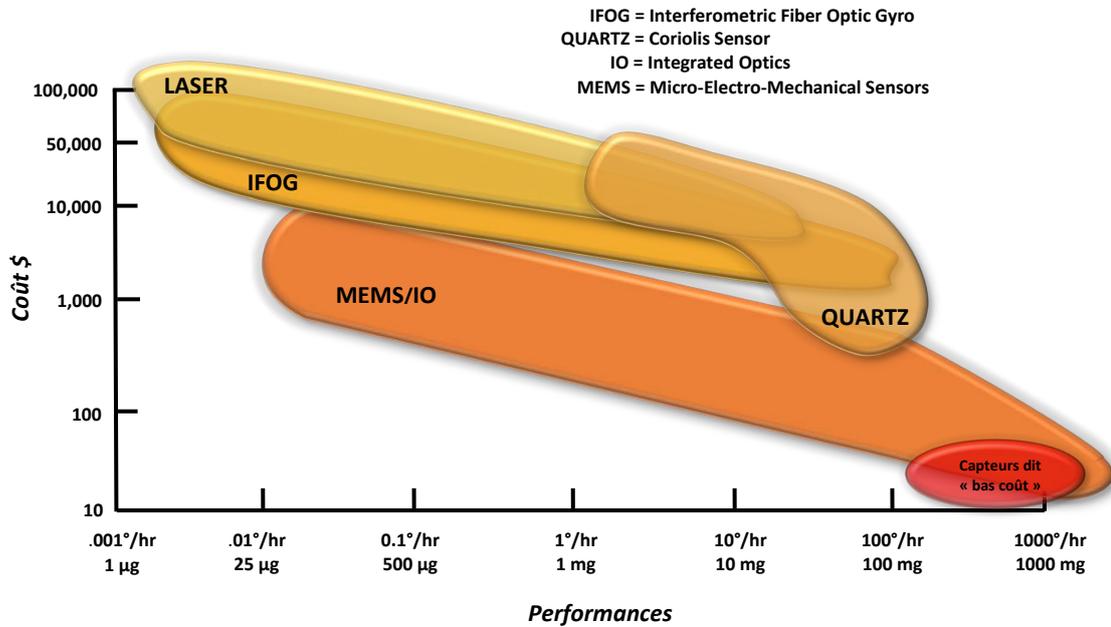


FIGURE 1.12 – Prix des capteurs proprioceptifs en fonction de leur technologie

### 1.3.2 Les capteurs extéroceptifs

#### Les systèmes de positionnement par satellites

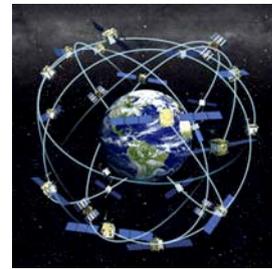
Un système de positionnement par satellites permet de déterminer la position absolue d'un objet sur Terre, grâce à une multitude de signaux émis par une constellation de satellites prévue à cet effet. Donnée en terme de latitude, longitude et altitude, cette position peut être facilement représentée dans l'espace par un système de référence géodésique (*WGS84*) avec une précision d'une dizaine de mètres pour les systèmes standards. C'est pourquoi ils sont principalement utilisés pour localiser des véhicules de transport tels que des avions, des navires, des missiles et même des satellites évoluant en orbite basse. Outre le système russe GLONASS (GLObal NAVigation



(a) Un satellite GPS



(b) Un satellite GLONASS



(c) La constellation

FIGURE 1.13 – *Le positionnement par satellite*

Satellite System), le système de positionnement par satellite le plus connu et le plus répandu est certainement le GPS (Global Positioning System), développé et contrôlé par les Etats-Unis mais aujourd'hui accessible au grand public avec un niveau de précision volontairement réduit. Afin de déterminer la position absolue d'un récepteur sur terre, chaque satellite émet, en permanence sur deux fréquences modulées en phase, un ou plusieurs codes pseudo-aléatoires datés précisément grâce à une horloge atomique embarquée à son bord. En utilisant son horloge interne, le récepteur détermine les temps de propagation de ces signaux depuis les satellites émetteurs vers lui-même. Chaque mesure de distance permet une localisation du récepteur sur une sphère centrée sur chaque satellite émetteur. En recoupant les localisations déterminées par trois satellites émetteurs, la position absolue du récepteur peut alors être déduite précisément par trilatération. Ce principe relativement simple est cependant inutilisable en l'état. En effet, pour valider tout le raisonnement qui précède, encore faut-il que la mesure du temps de synchronisation des horloges entre les trois satellites et le récepteur soit précise ; un décalage d'un millième de seconde engendrant une erreur de plus de 300 km. Pour remédier à ce problème de non-synchronisation des horloges, un quatrième satellite vient compléter le processus de mesure afin de figer les temps d'émission et de lever ainsi toute incertitude.

Outre les erreurs dues à la non-synchronisation du récepteur et des satellites, il importe de prendre en compte la différence de vitesse de propagation des signaux dans les différentes

couches de l'atmosphère, leur réverbération et les dégradations volontaires de signal justifiées par l'armée américaine. Une manière d'atténuer ces erreurs est d'utiliser une méthode de positionnement relatif : le DGPS (Differential Global Positioning System). Ce système, utilisé par le service EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay Service), repose sur une erreur de positionnement local calculée à partir d'un ensemble de stations fixes dont la position est parfaitement connue. Cette information est ensuite transmise au récepteur par radiodiffusion ou par satellite. Une autre façon d'avoir une meilleure précision serait d'utiliser autour des années 2020 le système GALILEO qui garantira l'autonomie de l'Union Européenne vis-à-vis des Etats-Unis et de la Russie sur un plan stratégique. Dans les véhicules aériens, le GPS à usage civil offre un niveau de précision de l'ordre de la dizaine de mètres en environnement dégagé. En revanche, en milieu urbain, qui correspond souvent à une zone encombrée, cette précision est plus aléatoire et demande l'utilisation d'un algorithme de fusion pour améliorer significativement la localisation. Du matériel plus performant peut aussi être utilisé moyennant un encombrement et un coût beaucoup plus importants.

#### **Les altimètres barométriques**

Un altimètre barométrique est un instrument qui mesure une différence de pression atmosphérique par rapport à un niveau de référence, généralement celui de la mer. En réalité, on l'utilise surtout pour déterminer la hauteur à laquelle un objet se trouve par rapport à une hauteur de référence, en se basant ainsi sur le fait que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Dans les applications pour mini-drone, la technologie la plus répandue reste celle des baromètres anéroïdes dont le composant principal est une capsule, en acier ou en béryllium, où le vide a été réalisé. Sous l'effet de la pression atmosphérique, cette capsule, dite de Vidi, se déforme de façon élastique permettant alors la mesure de la pression. Cependant, cette mesure est à prendre avec précaution car la capsule se déforme aussi sous l'effet d'une forte accélération ou d'une manœuvre très dynamique. Les mesures délivrées par de tels baromètres sont indispensables au fonctionnement de petits drones qui nécessitent de connaître avec précision leur altitude dans toute situation. Néanmoins, cette mesure dépend aussi des conditions météorologiques rencontrées par l'engin. Ainsi, un changement de la pression extérieure (anticyclone ou dépression) peut engendrer l'apparition de larges incertitudes sur la mesure. Par conséquent, un niveau de confiance relatif devra être accordé à ce type de capteur notamment vis-à-vis des autres sources de mesure capables de renseigner l'altitude de l'engin (par exemple, le GPS).

#### **Les magnétomètres**

Le magnétomètre ou compas est un instrument de navigation qui donne une direction de référence (généralement le nord) sur le plan horizontal et permet ainsi la mesure d'angles dans le plan horizontal par rapport à cette direction.

Plusieurs technologies de magnétomètres existent. La plus simple, le compas magnétique, aussi appelé magnétomètre, dont le principe de fonctionnement est basé, comme la boussole, sur l'orientation d'une aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre. Cette solution naturelle ne nécessite aucune source d'énergie et permet donc au compas magnétique de ne pas tomber en panne. Cependant, la direction du nord magnétique ne coïncide pas avec la direction du nord géographique, c'est le phénomène de déclinaison magnétique. Pour ce faire, le compas doit être calibré puis compensé en permanence au cours de son fonctionnement pour qu'une mesure absolue et correcte du cap soit délivrée par rapport à la direction du nord géographique. La principale lacune de cette catégorie simple de capteurs repose sur leur grande sensibilité aux masses magnétiques environnantes, ainsi qu'aux champs magnétiques parasites. Cette sensibilité peut cependant être calibrée, avec plus ou moins de validité, dans l'environnement direct dans lequel évolue le drone en quantifiant de manière purement statique les écarts de mesure observés et induits par ces éléments magnétiques.

Les compas électroniques, quant à eux, sont capables de déterminer la direction du nord magnétique à partir des propriétés électroniques de certains matériaux lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique. Ils s'appuient pour cela sur différents principes comme l'effet Hall, la magnétoinduction ou la magnétorésistivité. Le principe de fonctionnement d'un compas électronique magnétorésistif est présenté à la Figure 1.14.

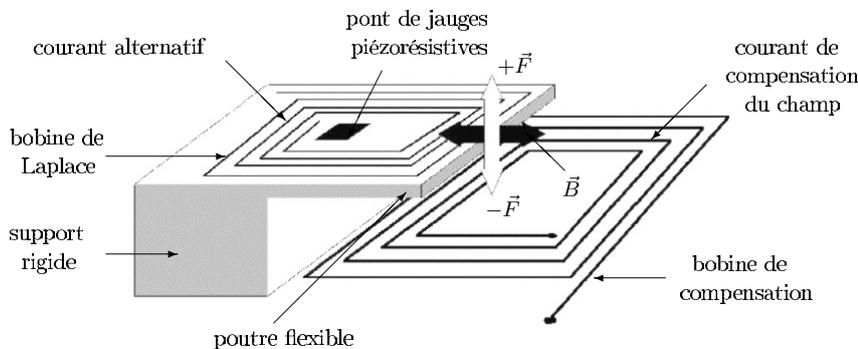


FIGURE 1.14 – Principe physique à la base d'un compas électronique magnétorésistif

Un tel capteur est constitué d'un support rigide sur lequel une poutre flexible vient s'ajuster de manière à ce que le courant alternatif qui la traverse soit au-dessus de la bobine de compensation. En présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$  sur le capteur, une force magnétique  $\vec{F}$ , appelée force de Laplace, s'exerce sur la poutre entraînant sa déformation mécanique dont l'amplitude est mesurée par un pont de jauges piézorésistives. Le pilotage du courant qui parcourt la bobine de compensation permet de neutraliser les champs parasites éventuels qui s'appliqueraient au niveau de la jauge. Ce type de technologie constitue un exemple de magnétomètre adéquat pour les systèmes électroniques destinés aux mini-drones aériens.

#### Les caméras et télémètres

Les caméras et télémètres sont des capteurs qui permettent de déterminer la distance ou l'orientation d'un objet, en utilisant des procédés radioélectriques, acoustiques ou optiques. D'une manière générale, ces capteurs permettent la restitution d'informations concernant un objet dans son environnement.

Le principe d'un télémètre consiste à envoyer un signal en direction de l'objet à localiser et de collecter les signaux renvoyés par celui-ci. Ces instruments sont ainsi principalement utilisés pour la cartographie en trois dimensions et la détection d'objets dans une scène. Plusieurs types de capteurs télémétriques existent, utilisant différents types d'onde. La première technologie regroupe les télémètres exploitant les ondes acoustiques, ou SONAR (SOund Navigation And Ranging). Cette technologie de capteur à ultrasons est la plus fréquemment utilisée en robotique mobile et aérienne de part sa simplicité, sa compacité et son coût. Les inconvénients majeurs de cet instrument ont trait à la zone de quelques centimètres de longueur au-dessus de laquelle la détection d'objets n'est plus réalisable ainsi qu'à l'apparition de fausses mesures dues à la propagation des ondes sonores. Son utilisation sera donc envisageable uniquement pour la mesure de la distance qui sépare l'engin du sol dans les phases de décollage et d'atterrissage. La seconde catégorie de capteurs repose sur l'exploitation d'ondes optiques ou LIDAR (LIght Detection And Ranging){Trucco et Verri, 1998}{Manecy *et al.*, 2012}. Leur fonctionnement est le même que celui des SONAR à la différence près que la nature du signal utilisé ne se situe pas dans le même domaine spectral de fréquence. Il est important de noter que ce dernier type de technologie est proposé à un prix peu abordable et que son encombrement reste inapproprié pour une utilisation en robotique aérienne.

En ce qui concerne les caméras, plusieurs possibilités existent à l'heure actuelle pour extraire les informations visuelles issues de ces capteurs{Ma *et al.*, 2004}{Ruffier *et al.*, 2009}. Une approche simple, basée sur le biomimétisme des abeilles, consiste à extraire les informations de flux optique présentes dans l'image c'est-à-dire le déplacement apparent d'objet de la scène causé par le mouvement relatif de la caméra par rapport à l'environnement {Ruffier et Franceschini, 2004}. Cette technique très utilisée pour le décollage et la stabilisation des vols peut néanmoins être faussée par les conditions environnementales (par exemple, le vent qui produit un mouvement intempestif et relatif de l'image). D'autres possibilités, telle que la cartographie {Ma *et al.*, 2004}{Trucco et Verri, 1998}{Cyganek et Siebert, 2009}, fonctionnent en utilisant une paire de caméra de la même façon que le ferait un humain pour estimer la position, l'orientation et la vitesse d'un objet dans l'espace.

#### 1.3.3 Les systèmes inertiels

Les systèmes inertiels se divisent en trois catégories à savoir les unités de mesures inertielles (Inertial Measurement Unit, en anglais IMU), les centrales d'attitude (Attitude and Heading

Reference System, en anglais AHRS) et les centrales inertielles (Inertial Navigation System, en anglais INS) (cf. Figure 1.15). Par définition, une IMU est composée principalement de trois accéléromètres et de trois gyromètres permettant de mesurer l'accélération spécifique propre à un véhicule (hors gravitation) ainsi que sa vitesse de rotation. Par intégration de ces six mesures, ces instruments sont théoriquement capables de déterminer la vitesse linéaire, la position et l'orientation d'un mobile relativement à une situation initiale{De Laubier, 2008}{Grewal *et al.*, 2001}. Ainsi, la plupart des applications issues du domaine de la robotique mobile en sont équipées en complément du système de positionnement par satellite.

Une AHRS est donc conçue sur la base d'une IMU augmentée du calcul en temps réel de l'orientation de l'objet qui la supporte. En complément, une INS permet de calculer, en temps réel, à partir des composantes de l'accélération, l'évolution du vecteur vitesse et de la position du véhicule à bord duquel elle est installée{Farrell et Barth, 1998}{Farrell, 2008}. La différence majeure entre les deux équipements est la phase de traitement des données issues des capteurs. En effet, dans le cas de la centrale d'attitude, les capteurs sont identiques à ceux utilisés dans une centrale inertielle mais le traitement des données n'est pas prévu pour le calcul de la position. En pratique, le fonctionnement théorique de l'IMU est altéré par plusieurs défauts dus aux

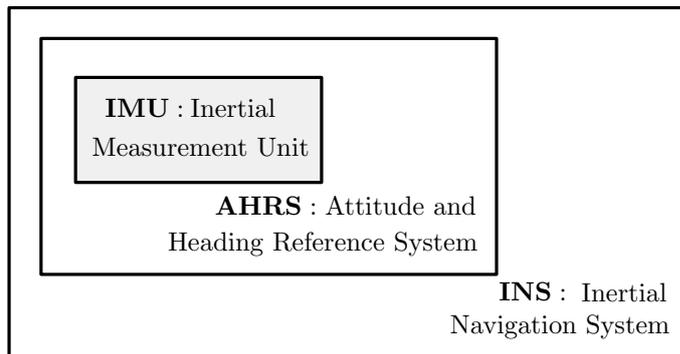


FIGURE 1.15 – Différentes catégories de systèmes inertiels

imperfections des capteurs qui affectent les mesures des accélérations et des rotations (bruits, biais, facteurs d'échelle, etc). Ces défauts dont nous avons donné les principales caractéristiques dans la section 1.3, engendrent alors des dérives temporelles au niveau des estimations de la position, de la vitesse et de l'orientation du véhicule. Il est toutefois possible d'obtenir une meilleure précision de mesure. Une première manière de faire consiste à sélectionner des accéléromètres et des gyromètres dont les erreurs n'excèdent pas quelques  $\mu\text{g}$  et quelques centièmes de degré par heure. De plus, les mesures doivent être faites à une cadence de plusieurs centaines de Hertz. Le coût d'une centrale inertielle ayant de bonne performance se chiffrerait en centaines de milliers d'euros (cf. Figure 1.12). La seconde solution repose sur l'utilisation d'algorithmes hybrides fusionnant les informations issues des capteurs proprioceptifs avec celles provenant de capteurs extéroceptifs. Un algorithme de fusion permet à partir de mesures données par un système de positionnement par satellite, de déterminer la position, la vitesse et l'orientation d'un véhicule

ainsi que les biais des accéléromètres et des gyromètres. Une telle méthode permet donc à tout moment d'élaborer potentiellement une estimation représentative du vrai état du véhicule.

## 1.4 Motivations et objectifs des travaux de thèse

### 1.4.1 Motivations

Bien que l'architecture mise en place par le système *Paparazzi* soit l'une des plus modulaires et des plus adaptées au développement d'algorithmes embarqués (commande, estimation, etc.), aucune technique de fusion de données élargie, traitant l'ensemble des mesures disponibles à bord, n'existe actuellement. Comme cela a été décrit lors de la section 1.2, seules quelques opérations de fusion de données, limitées bien souvent à un seul axe, peuvent être recensées. Ainsi, face aux multiples défis que la robotique aérienne tente de relever (vols agiles, en zone urbaine, en milieu encombré, avec possible perte de signal GPS, etc.), les fonctionnalités offertes par le pilote automatique *Paparazzi* sont insuffisantes notamment en termes de reconstruction de l'état du mini-drone nécessaire au développement de lois de commande avancées. D'autant plus, lorsque l'on sait sur quelles technologies reposent la mise au point de tels engins, pour des raisons de coût essentiellement. Ce point, ainsi que le précédent, motivent l'ensemble des travaux qui ont été menés au cours de cette thèse. De toute évidence, l'augmentation des capacités de vol des mini-drones de l'ENAC, destinés à accomplir, *in fine*, des missions de plus en plus complexes, doit conduire au développement de nouveaux algorithmes performants qui fourniront à ces engins le degré d'autonomie nécessaire. Il en va donc de même des fonctionnalités de fusion de données qui doivent progresser et ce, pour plusieurs raisons :

- ▶ du fait de la faible qualité des mesures, la reconstruction de l'état de l'engin doit s'appuyer sur un nombre élargie de données et non plus se limiter à une estimation de celui-ci selon un seul axe ;
- ▶ de ce fait, certaines grandeurs utilisées auparavant de manière brute par les lois de commande pourront être utilement filtrées et leur cohérence vérifiée au travers de la modélisation exploitée pour l'estimation ;
- ▶ enfin, la disponibilité d'un algorithme de fusion de données modulaire étendu à un ensemble de mesures facilite une éventuelle exploitation de nouveaux capteurs, à terme, pour la fusion de données. Nous pensons ici aux capteurs basés vision qui ajouteront de la redondance dans le système.

Dès lors, face à cet enjeu de sécurisation des vols de mini-drones, la consolidation de la connaissance de l'état de l'aéronef par des techniques d'estimation robuste devient une tâche essentielle pour garantir, au mieux possible, un contrôle actif de l'engin assurant l'intégrité de la cellule en toute situation.

### 1.4.2 Objectifs

Les objectifs à atteindre au cours de cette thèse consistent :

- 1) à développer et mettre au point une ou plusieurs solutions algorithmiques permettant de répondre au besoin de disposer d'une reconstruction précise et fidèle de l'état du mini-drone. Nous veillerons à ce que toute solution soit, de plus, acceptable en termes de complexité algorithmique en vue de son codage sur cible. De même, au-delà de ses seules performances en termes de qualité de l'estimé, cette solution devra présenter de bonnes propriétés de convergence afin de limiter, au plus possible, les erreurs qui pourraient rejaillir sur la chaîne de contrôle du drone ;
- 2) à valider, de manière exhaustive, le ou les schémas d'estimation retenus. Cette étape nécessaire pourra s'appuyer largement sur le traitement de données simulées que nous pourrons bruiteur, le cas échéant, à bon escient afin d'évaluer la robustesse de la solution ;
- 3) à coder sur cible, la ou les solutions algorithmiques, afin de procéder à des expérimentations en conditions réelles. Cette concrétisation des travaux de thèse permettra une extension toute naturelle de la phase de validation des concepts théoriques développées.

# Chapitre 2

## Etat de l'art

### Sommaire

---

2.1	Concepts de base . . . . .	25
2.2	Revue bibliographique . . . . .	31
2.3	Filtrage optimal des systèmes linéaires gaussiens . . . . .	40
2.4	Approximation du filtrage optimal par linéarisation . . . . .	43
2.5	Approximation du filtrage optimal par discrétisation . . . . .	45
2.6	La logique floue . . . . .	52
2.7	Théorie des observateurs invariants . . . . .	54

---

### 2.1 Concepts de base

La notion mathématique de processus stochastique est essentielle dans la modélisation des systèmes dynamiques réels pour lesquels la construction d'un modèle purement déterministe apparaît bien souvent comme insuffisante. En effet, certains phénomènes physiques très mal connus (comme certaines perturbations non mesurées de type bruit, panne, vent, etc.) qui peuvent avoir une influence significative sur la dynamique du système sont représentables mathématiquement à l'aide de processus stochastiques. De la sorte, il devient possible de prendre en compte dans la modélisation globale du système dynamique différentes formes de méconnaissance de nature aléatoire en jouant sur les propriétés du ou des processus stochastiques. Un modèle relativement général peut alors être décliné. Etant donné ce qui suit, nous nous focaliserons ici au seul cas des représentations d'état non linéaires telles que :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{v} \\ \mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ G(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans (2.1)  $\mathbf{x}$  désigne l'état du système,  $\mathbf{y}$  ses sorties, supposées mesurables, et  $\mathbf{u}$  un ensemble d'entrées connues qui, comme nous le verrons avec les mini-drones, permettent de contrôler celui-ci.  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  constituent des incertitudes de nature aléatoire portant respectivement sur l'évolution et les observations du système. Elles sont donc représentées mathématiquement par deux processus aléatoires additifs à temps continu qui seront fréquemment supposés indépendants et non-corrélés.

De fait, l'état  $\mathbf{x}$  du système, régit par une équation différentielle algébrique stochastique, forme également un processus aléatoire au même titre que le vecteur des sorties  $\mathbf{y}$  qui dépend de manière statique, pour tout instant  $\mathbf{t}$ , de la quantité  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  et des réalisations  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{w}(\mathbf{t})$ . Dès lors, le problème de l'estimation récurrente bayésienne de l'état du système, étant donné un ensemble d'observables sur celui-ci, revient à déterminer la densité de probabilité  $\mathbf{p}(\mathbf{x}(\mathbf{t})|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'})$  où  $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}'$  désignent trois instants de temps quelconques tels que  $\mathbf{t} \geq \mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}' \geq \mathbf{t}_0$ . Du fait de la relation d'ordre qui existe entre  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}'$ , la problématique d'estimation se ramène à :

- ▶ un problème de filtrage si  $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$  ;
- ▶ un problème de prédiction si  $\mathbf{t} > \mathbf{t}'$  ;
- ▶ un problème de lissage si  $\mathbf{t} < \mathbf{t}'$ .

Si l'on supposait résolu le problème alors la valeur moyenne de l'état pourrait être estimée telle que :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}(\cdot|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'})} [\mathbf{x}(\mathbf{t})] = \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}(\mathbf{t})|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'}) d\mathbf{x}(\mathbf{t})$$

Dans le cas de processus stochastiques à temps discret markoviens, il est possible d'ébaucher les solutions générales du problème d'estimation en considérant une modélisation dynamique générique de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{t}+1} \sim \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}+1}|\mathbf{x}_{\mathbf{t}}) \\ \mathbf{y}_{\mathbf{t}} \sim \mathbf{p}(\mathbf{y}_{\mathbf{t}}|\mathbf{x}_{\mathbf{t}}) \end{cases}$$

La densité de probabilité correspondante au problème de filtrage s'écrit alors :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}|\mathbf{x}_{\mathbf{t}}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})}{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})}$$

or on a :  $\mathbf{p}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{p}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \cdot \mathbf{p}(\mathcal{B})$ . Ainsi :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}|\mathbf{x}_{\mathbf{t}}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})}{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})} = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}|\mathbf{x}_{\mathbf{t}})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})}{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})} \quad (2.2)$$

Dans (2.2), on a de plus :  $\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}} | \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1}) = \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})}} \mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}} | \mathbf{x}_{\mathbf{t}})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}} | \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})d\mathbf{x}_{\mathbf{t}}$  qui se déduit de l'intégration sur la variable d'état  $\mathbf{x}_{\mathbf{t}}$  de la densité de probabilité suivante :

$$\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}, \mathbf{x}_{\mathbf{t}}|\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1}) = \mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}} | \mathbf{x}_{\mathbf{t}})\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}} | \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}-1})$$

Concernant le problème de prédiction, la densité de probabilité recherchée  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'})$  s'obtient par une intégration multidimensionnelle sur les variables d'état  $\mathbf{x}_{t'}, \mathbf{x}_{t'+1}, \dots, \mathbf{x}_{t-t'+1}$  telle que :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}) = \int_{\mathbb{R}^{(t-t')\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t'+1}, \mathbf{x}_{t'} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t':t-1} \quad (2.3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{(t-t')\dim(\mathbf{x}(t))}} \left( \prod_{i=t'+1}^t \mathbf{p}(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}) \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{t'} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t':t-1} \quad (2.4)$$

L'équation 2.4 est connue sous le nom d'équation de Chapman-Komolgorov. Enfin, la densité de probabilité du problème de lissage est également obtenue à partir d'une intégration telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}) &= \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t'}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t+1} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t'}) &= \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t}, \mathbf{z}_{t+1:t'}) \\ &= \frac{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{t+1:t'} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t})}{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{t+1:t'} | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t})} \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t}) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}) &= \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t'}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{t_0:t}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{t_0:t}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t})}{\mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t})} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t}) \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{t_0:t}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'})}{\mathbf{p}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{t_0:t})} d\mathbf{x}_{t+1} \end{aligned}$$

Comme les résultats précédents le prouvent, le calcul de la densité de probabilité, quelle qu'elle soit (prédiction, filtrage, lissage) fait intervenir des intégrales multidimensionnelles qui sont inextricables en pratique pour tenter de déterminer une solution analytique au problème général de l'estimation. Seuls quelques rares cas particuliers permettent de s'affranchir de cette complexité. Le plus connu d'entre tous est sans aucun doute celui pour lequel le modèle dynamique est linéaire et les variables stochastiques gaussiennes puisque la solution se ramène alors au filtrage de Kalman. Les nombreuses applications traitées avec succès grâce à cette technique de filtrage optimal montrent en définitive que bon nombre de problèmes d'estimation de la vie

réelle s'accommode de ce cadre mathématique simplifié, rendant ainsi ce cas particulier plus aussi spécifique que cela. Pour autant, la plupart des problèmes d'estimation qu'il est possible de rencontrer gagneraient à pouvoir être résolu dans un cadre plus général, sur la base d'hypothèses moins restrictives.

Pour cela, la problématique décrite précédemment doit pouvoir être résolue proprement. La faculté de résoudre dans un cadre plus général le problème d'estimation précédant ouvre également le champ des applications qu'il devient alors possible de traiter, notamment celles qui présentent un niveau de complexité accru, et pour lesquelles des méthodes linéaires ne suffisent plus. Une alternative très intéressante à la recherche d'une solution analytique au problème général de l'estimation de l'état d'un système dynamique peut-être construite en ré-interprétant les objectifs visés par n'importe quelle méthode d'estimation. En effet, au lieu de s'attaquer à la loi de probabilité du processus  $\mathbf{x}$ , il peut s'avérer moins complexe de s'intéresser à la recherche d'une réalisation de  $\mathbf{x}$  directement. Ainsi, étant donné un ensemble d'entrées connues et un ensemble de mesures incertaines, l'estimation consiste à produire, au cours du temps, un estimé du vecteur des états du système, noté  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ , tel que :

$$\xi : \quad \mathbb{U}_{\mathbf{t}'} \times \mathbb{Y}_{\mathbf{t}'} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}$$

$$\left( \mathbf{u}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'} \right) \longmapsto \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \xi(\mathbf{u}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'}, \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'}), \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \underset{\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}}{\operatorname{argopt}} (\mathbf{J})$$

transformant ainsi la détermination de la loi de densité de probabilité  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}} \mid \mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}})$  en la recherche d'une réalisation temporelle du processus  $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \xi)$  la plus probable pour expliquer les évolutions et les variations observées du système. Néanmoins, cette alternative n'est viable que si la qualité de l'estimé peut-être par ailleurs établie au travers d'un critère mathématique  $\mathbf{J}$ . C'est cette caractérisation de l'estimé qui permet de dire si la réalisation temporelle calculée sera ou non hautement probable et donc représentative de la réalité observée. Le cadre probabiliste du problème ouvre donc la voie à l'utilisation de diverses notions mathématiques comme les notions de covariance et d'écart type, les tests statiques ou les régions de confiance pour évaluer la qualité de l'estimé  $\hat{\mathbf{x}}$  au cours du temps. Bon nombre d'approches opèrent de la sorte et ont été appliquées avec succès dans la littérature. Cette estimation « point à point » de l'état du système dynamique observé et que l'on peut à tout moment caractériser en termes de qualité, fonde de très nombreuses techniques comme nous allons le vérifier par la suite.

- **Minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation**

Aborder le problème d'estimation qui se pose à nous selon l'alternative évoquée précédemment induit la définition d'au moins un critère mathématique vis-à-vis duquel  $\hat{\mathbf{x}}$  forme une solution optimale. Ainsi, une première idée relativement intuitive consiste à rechercher un vecteur estimé des états du système qui minimise en moyenne l'écart quadratique qui le

sépare du vrai état  $\mathbf{x}$ , étant données les observations  $\mathbf{z}_{t_0:t'}$  i.e tel que :

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \underset{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{E}\{\|\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} \quad (2.5)$$

La résolution de ce problème d'optimisation conduit à l'élaboration de l'estimateur bayésien du minimum de l'erreur quadratique moyenne ou estimateur bayésien du minimum de variance. Sa solution théorique peut être obtenue en développant le critère apparaissant dans (2.5) tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\|\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} &= \mathbf{E}\{(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)^T(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t) | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} \\ &= \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{x}}_t^T \hat{\mathbf{x}}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} - 2\hat{\mathbf{x}}_t^T \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} + \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t^T \mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_t^T \hat{\mathbf{x}}_t - 2\hat{\mathbf{x}}_t^T \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} + \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t^T \mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} \\ &= \|\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\}\|^2 + \mathbf{E}\{\|\mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} - \|\mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\}\|^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}} = \underset{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{E}\{\|\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} \sim \underset{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\}\|^2$$

Soit :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}} = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}\} = \int_{\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}} \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}) d\mathbf{x}(t)$$

Il en ressort que la moyenne conditionnelle fournit un estimé optimal pour toute classe des fonctions de coût quadratique. De plus, l'estimé sera non-biaisé. En effet :

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}}] = \mathbf{E}[\mathbf{x}_t] - \mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}}] = \mathbf{E}[\mathbf{x}_t] - \underbrace{\mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}]]}_{=\mathbf{E}[\mathbf{x}_t]} = \mathbf{0}$$

Par conséquent, dans le cas gaussien, une CNS pour résoudre le problème du filtrage linéaire optimal est de connaître les deux premiers moments conditionnels associés à  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t})$ , i.e :

- la moyenne  $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t}\} = \hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}}$  ;
- et la matrice de covariance  $\mathbf{E}\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}})(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MEQM}})^T | \mathbf{z}_{t_0:t}\} = \hat{\mathbf{P}}_t^{\text{MEQM}}$ .

Le 1<sup>er</sup> moment donne l'estimé optimal du problème et le 2<sup>nd</sup> une mesure de la qualité de cet estimé. Les équations d'évolution de ces 2 premiers moments fournissent, dans le cas gaussien, les équations du filtre optimal, plus connues sous le nom de filtre de Kalman-Bucy.

• **Maximisation de la vraisemblance de la probabilité conditionnelle**

Une autre approche, non plus fondée sur un critère quadratique mais qui réintroduit la notion de probabilité conditionnelle, peut également être exploitée pour déterminer un estimé optimal au problème d'estimation bayésienne. Celle-ci consiste à interpréter l'état  $\mathbf{x}_t$  comme étant un paramètre explicatif des observateurs qui sont réalisés sur le système. De la sorte, la recherche d'un estimé optimal pour l'état  $\mathbf{x}_t$  se traduit en la détermination d'un vecteur de paramètres qui rend maximale la vraisemblance des observables. Cette méthode, développée par Fisher à partir des années 40, porte le nom d'estimation par Maximum de Vraisemblance (**MV**). Mathématiquement, elle définit l'estimé optimal  $\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MV}}$  tel que :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MV}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmax}} \mathbf{p}(\mathbf{z}_{t_0:t'} | \mathbf{x}_t) \quad (2.6)$$

En cas d'observation indépendante, (2.6) se réécrit :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MV}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=t_0}^{t'} \mathbf{p}(\mathbf{z}_i | \mathbf{x}_t) \quad (2.7)$$

De ce fait, il n'est pas rare de trouver dans la littérature une formulation de l'estimation par **MV** qui exploite le logarithme népérien du produit énoncé dans l'équation (2.7) telle que :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MV}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=t_0}^{t'} \ln(\mathbf{p}(\mathbf{z}_i | \mathbf{x}_t))$$

Dans le cas où les probabilités conditionnelles élémentaires sont gaussiennes, on considère même l'opposé du logarithme népérien de  $\mathbf{p}(\mathbf{z}_{t_0:t'} | \mathbf{x}_t)$  de sorte que :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{\text{MV}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmax}} \left( -\ln(\mathbf{p}(\mathbf{z}_{t_0:t'} | \mathbf{x}_t)) \right)$$

Généralement, le calcul pratique de la valeur de l'estimé à l'instant  $t$  met en oeuvre une technique d'optimisation numérique, rendant parfois complexe l'application de l'estimateur par **MV**. Toutefois, celui-ci fournit systématiquement un estimé optimal et ce, y compris pour des ensembles de données de grande dimension.

• **Maximisation de la vraisemblance *a posteriori* de la probabilité conditionnelle**

Par suite, un autre point de vue peut être adopté pour définir la solution du problème d'estimation. Celui-ci consiste à dire que l'estimé optimal du problème est l'argument qui maximise la densité de probabilité de l'état du système connaissant les observations. Ainsi, il est possible d'écrire que :

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(t))}}{\operatorname{argmax}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{t_0:t'}) \quad (2.8)$$

L'application de la règle de Bayes à (2.8) permet ensuite d'écrire que :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'} | \mathbf{x}_{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})}{\mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'})} \sim \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}} \mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'} | \mathbf{x}_{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})$$

Ainsi,  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}^{\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}} \mathbf{p}(\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'} | \mathbf{x}_{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})$

Cette formulation est connue sous le nom d'estimation par Maximum *a posteriori* (MAP). Elle permet d'inclure une éventuelle connaissance *a priori* sur l'état du système au travers de la densité de probabilité  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})$ . La formulation d'hypothèses, quelles qu'elles soient, sur  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_{\mathbf{t}})$  transforme ensuite le problème d'optimisation en la recherche de l'état à l'instant  $\mathbf{t}$  qui explique au mieux les observations faites sur le système. Il s'agit là de ce que l'on appelle communément la vraisemblance. Il est important de relever que :

- si la quantité d'observables  $\mathbf{z}_{\mathbf{t}_0:\mathbf{t}'}$  est limitée alors l'estimé (et sa qualité) reposera essentiellement sur la connaissance *a priori* du processus  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  (et sur sa cohérence vis-à-vis de la réalité) ;
- si la quantité d'observables augmente alors l'estimateur par MAP pondère l'information entre vraisemblance et connaissance *a priori* dans le calcul de l'estimé. Ainsi, asymptotiquement, lorsque  $\mathbf{t}' \mapsto +\infty$ , les estimateurs par MAP et MV deviennent équivalents.

C'est à partir de cette théorie de l'estimation que de nombreux chercheurs ont conçu divers algorithmes d'estimation pour résoudre un large panel de problématiques, comme nous allons le voir dans la section qui suit.

## 2.2 Revue bibliographique

### 2.2.1 Travaux fondateurs

La théorie de l'estimation, entendue ici au sens de la recherche d'un estimé à partir de données bruitées, trouve son origine historique dans les travaux anciens de Gauss (*XVIII<sup>e</sup>s*) et Legendre (*XIX<sup>e</sup>s*) qui contribuèrent à mettre au point la technique très connue des moindres carrés pour l'appliquer notamment à l'époque à la détermination des paramètres de l'orbite de la planète Cérés découverte en 1801 par Piazzi. Les moindres carrés offraient déjà à l'époque une solution optimale au problème de l'estimation de paramètres inconnus à partir de données expérimentales et ont contribué à faire se rapprocher sciences techniques et appliquées comme l'illustre l'exemple de mécanique spatiale évoqué précédemment.

Par suite, il aura fallu plus de cent ans (cf. Figure 2.2) pour qu'une avancée majeure soit faite en théorie de l'estimation avec les travaux de Borel sur la théorie de la mesure et son application à la théorie des probabilités ainsi que ceux de Fisher {1922} qui popularisa l'approche du maximum

de vraisemblance entre 1912 et 1922 grâce aux nombreux résultats, preuves et démonstrations qu'il établit (matrice d'information de Fisher, convergence, efficacité de l'estimation, etc.).

Le domaine de l'estimation allait alors entrer dans une période faste où pendant un peu plus de 50 ans plusieurs développements théoriques fondateurs allaient voir le jour. En premier lieu, et à partir du milieu de la première moitié des années 30, les recherches effectuées par Kolmogorov {1922} en théorie des probabilités et des processus stochastiques allaient permettre de repenser la théorie de l'estimation comme cela a été présenté dans la précédente section. En effet, ses travaux, qui constituent toujours aujourd'hui une base mathématique incontournable dans l'enseignement des probabilités et des processus stochastiques, ont notamment permis de définir et de formaliser mathématiquement la notion de probabilité conditionnelle (si essentielle en estimation) à partir du théorème de Lesbesgue-Radon-Nikodyron. Au passage, Kolmogorov s'attaqua par ailleurs aux fondements de la théorie de la mesure ce qui permettra par la suite de traiter enfin de manière appropriée les processus stochastiques dans les problèmes d'estimation.

Son théorème de construction d'une mesure de probabilité sur un espace de dimension infinie constitue d'ailleurs l'un des résultats les plus importants de son travail en théorie de la mesure. L'axiomatisation de la théorie des probabilités de Kolmogorov a insufflé ensuite bon nombre de progrès dans l'étude des processus stochastiques en temps continu, répondant ainsi à certains besoins de la physique de l'époque. L'équation de Chapman-Kolmogorov (cf.§2.1) représente ainsi l'un des résultats majeurs de cette étude.

Consécutivement, Wiener s'intéressa dans les années 40 au filtrage linéaire continu des processus stochastiques stationnaires qu'il résolut en introduisant les équations du filtre qui porte son nom. Celles-ci s'appuient notamment sur la résolution des équations intégrales de Wiener-Hopf dans le domaine temporel qui met en jeu les fonctions de corrélation et de densité spectrale associées à l'entrée (bruitée) du filtre optimal et à la sortie désirée pour celui-ci ; ces quantités étant considérées toutes deux comme aléatoires. En basculant dans le domaine fréquentiel par

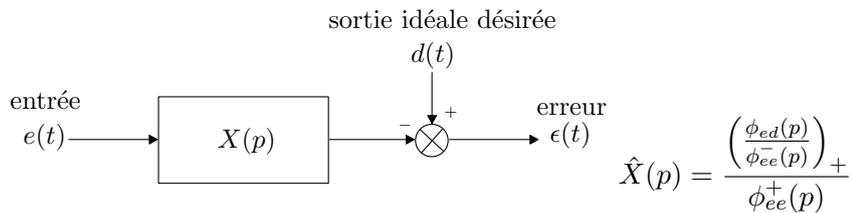


FIGURE 2.1 – *Filtre de Wiener*

l'intermédiaire de la transformée de Laplace bilatérale, la solution optimale décrivant le filtre estimateur s'obtient simplement, sous une forme rationnelle connue analytiquement, à partir des spectres complexes des signaux mentionnés précédemment (cf. Figure 2.1). Cette avancée importante a orienté bon nombre de travaux de recherche jusqu'au tout début des années 60, moment où Swerling, Kalman et Bucy {Kalman, 1960a} introduisirent en théorie de l'estimation les techniques d'espace d'état qui conduirent à la définition du filtre de Kalman pour les sys-

tèmes linéaires. Il montra notamment sous certaines hypothèses que le filtrage ainsi réalisé est optimal, au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation, stable et robuste moyennant des conditions de commandabilité et d'observabilité.

Le filtrage de Kalman a ensuite initié une multitude de travaux connexes, aussi bien théoriques qu'appliqués, tant il est vrai que les principes établis par Kalman ont permis d'élaborer des algorithmes numériquement efficaces et donc applicables en pratique. C'est ainsi qu'est née la fusion de données pour la navigation dans le secteur aérospatial qui offrait là un cadre quasi-idéal pour l'application de cette technique du fait des nombreux problèmes d'estimation que l'on pouvait y rencontrer. Le filtre de Kalman a ainsi apporté, dès son introduction, des réponses à de multiples problèmes d'estimation dans un cadre linéaire. Progressivement, et à partir des années 60, la communauté scientifique s'est accaparée la question de la recherche de solutions méthodologiques aux problèmes d'estimation non linéaires. Il devenait en effet de plus en plus nécessaire d'élaborer de nouvelles méthodes d'estimation plus perfectionnées, à même de résoudre des problématiques issues du monde de l'ingénierie toujours plus complexes. Ainsi, le filtrage de Kalman linéaire appliqué à des modèles de système intrinsèquement non linéaires ne fournissait pas de résultat satisfaisant ; pire même, celui-ci pouvait diverger. Dès lors, les travaux conjugués de Stratanovich, Krushner, Zakai, Jazwinski, Gelb, Schweppe, Kailath, et plus récemment ceux de Gordon, Julier et Uhlmann, ont permis l'essor de techniques d'estimation non linéaire (comme l'EKF, l'UKF ou le filtrage particulaire) capables de résoudre notamment le problème d'estimation de l'état de système dynamique non linéaire, soumis à des perturbations de nature aléatoire et en présence d'incertitudes de modélisation.

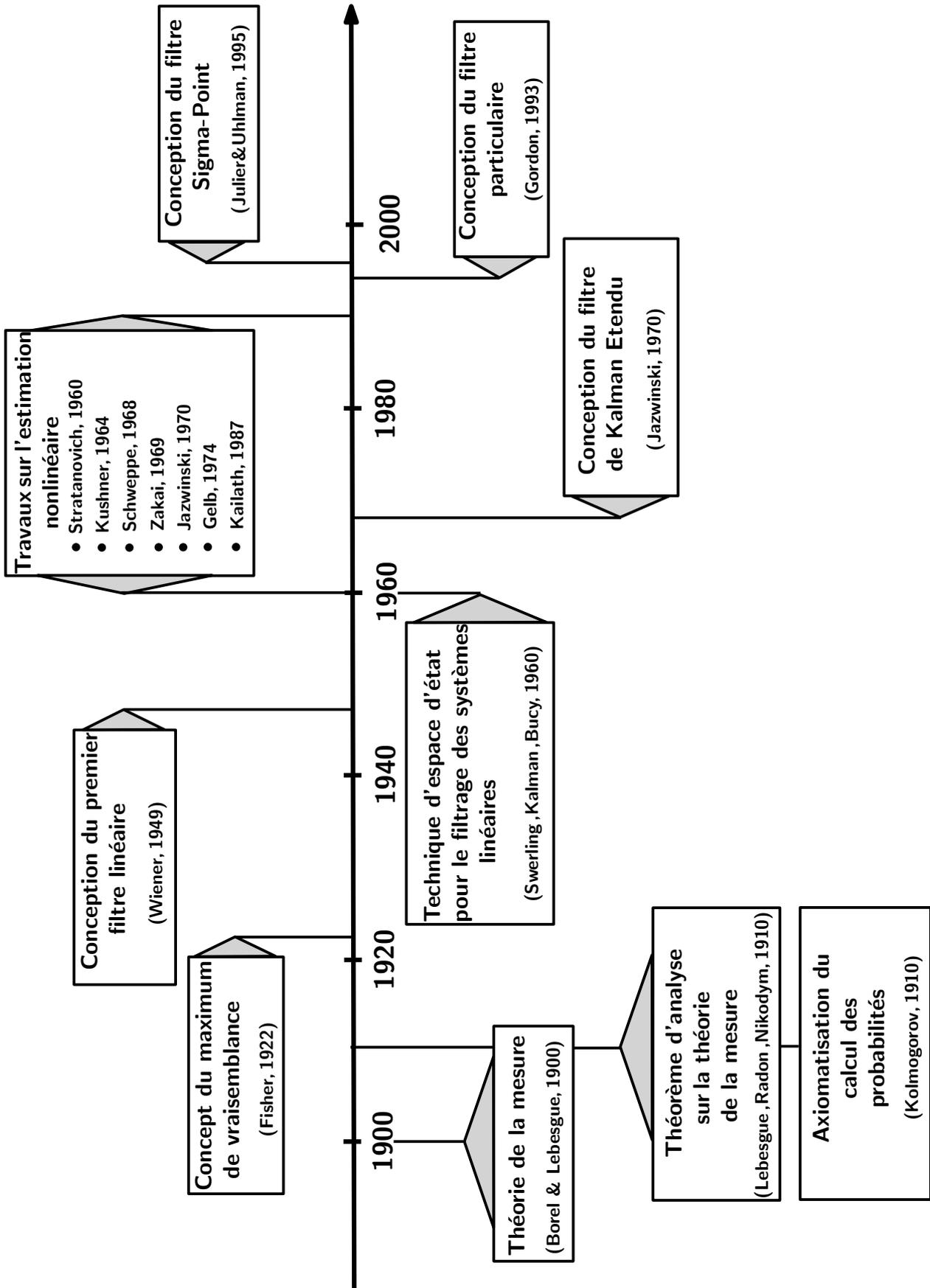


FIGURE 2.2 – *Travaux fondateurs en théorie de l'estimation*

### 2.2.2 Historique

La conception des premiers observateurs d'état peut être datée au début des années 60 en marge des multiples avancées théoriques réalisées dans le domaine de l'estimation. Kalman et Bucy {Kalman, 1960b} furent sans doute les premiers à concevoir un estimateur reposant sur les techniques d'espace d'état pour les systèmes linéaires qui fournit un résultat optimal et exact au problème d'estimation bayésienne formulé de façon récursive. En effet, sous des hypothèses gaussiennes, la solution obtenue est optimale au sens du minimum de la covariance de l'erreur d'estimation. Dressant une analogie avec le filtre de Kalman, Viterbi {1967} introduisit une variante algorithmique adaptée au cas des processus markoviens à temps discret. La solution de l'algorithme de Viterbi est optimale au sens du maximum de vraisemblance introduit presque un demi siècle avant par R.A Fisher.

La description initiale du filtre de Kalman n'exigeait pas explicitement des équations du système qu'elles soient linéaires ou bien que les bruits d'évolution et d'observation soient de densité de probabilité gaussienne. La seule hypothèse avancée par Kalman portait sur la cohérence de la variable aléatoire pouvant être maintenue en propageant ses moments du premier et second ordre (les moyennes et covariances), c'est à dire qu'elle soit non biaisée. Il s'avère que cette hypothèse ne peut être satisfaite dans le cadre non linéaires. Cette approche a donc par la suite été généralisée par Breakwell {1967} au cas non linéaire sous le nom de filtre de Kalman étendu (ou Extended Kalman Filter (EKF)), en appliquant les principes du filtre au modèle d'état obtenu après avoir développé en série de Taylor le système non linéaire d'origine autour de l'état estimé. Par ailleurs, Jazwinski {1970} propose un filtre de Kalman étendu légèrement modifié en supposant que les termes d'ordre deux du développement de Taylor sont bornés. L'intérêt manifesté pour le filtrage de Kalman a été insufflé dans un premier temps par le programme Apollo dans sa version linéaire puis, par une mise en œuvre sur de nombreux exemples non linéaires issus du monde de l'ingénierie {Picard, 1991} {Faruqi et Turner, 2000} {Bijker et Steyn, 2008}. En outre, le secteur aéronautique a permis l'essor de divers algorithmes fondés sur les principes théoriques énoncés par Kalman incluant certaines représentations comme les quaternions pour pallier aux divers problèmes de représentation des angles d'Euler (singularité et discontinuité). Le filtre de Kalman étendu multiplicatif (MEKF) {Murrell, 1978} {Lefferts *et al.*, 1982} constitue encore aujourd'hui une référence dans le domaine et a servi de base à beaucoup d'études récentes. Bien que les techniques s'inspirant du filtrage de Kalman se soient énormément développées dans la communauté scientifique, adaptant ainsi au passage divers notions et concepts pour la résolution du problème d'estimation comme la norme  $H_\infty$  {Nagpal et Khargonekar, 1991} {Markley *et al.*, 1993} {Smith, 1995}, celles-ci ne présentent une convergence limitée en raison de la linéarisation des équations du système non linéaire qui constitue une approximation.

La mise en œuvre progressive de définitions mathématiques destinées à améliorer la stabilité qui est un point central pour l'élaboration d'observateur déterministe, ont permis d'améliorer la structure des observateurs déterministes, les rendre ainsi de plus en plus robuste aux perturba-

tions exogènes. Luenberger {1971} fut le premier à fonder la théorie d'un observateur qui porte son nom et dont le concept repose sur l'ajout d'une correction apportée par chaque mesure du système au modèle d'évolution mis sous une forme de type canonique compagne que l'on appelle aussi forme de Brunovsky. Ce type d'observateur linéaire, sera par la suite repris dans la quasi totalité des méthodes appliquées à la conception d'observateurs non linéaires. Thau {1973} et Kou *et al.* {1975} sont ainsi à l'origine des premiers algorithmes fondés sur l'analyse de la stabilité de Lyapunov, originellement développés pour l'estimation dans le cas linéaire et qui ont conduit à un observateur dit à grand gain. Thau donne des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système, pour la classe des systèmes non linéaires dont la dynamique comporte une partie linéaire et une partie non linéaire, qui vérifie en général une condition de Lipschitz. A noter que l'appellation grand gain provient de la structure de l'observateur : lorsque la fonction d'évolution non linéaire possède une grande constante de Lipschitz, la moindre erreur entre l'état réel et l'état estimé va se répercuter et croître. Par conséquent, le gain de l'observateur doit être important pour compenser cette amplification de l'erreur. Ce type d'observateur a été par la suite largement appliqué à une classe de systèmes biologiques dans le milieu des années 90.

Les bonnes performances locales des filtres de Kalman le rendant robuste au bruit en ont fait une référence pour le monde de l'ingénierie. Les résultats obtenus par Mehra à partir des années 70 Mehra {1970} et Moose {1975} ont marqué le début des approches adaptatives pour le filtrage de Kalman. Cette adaptation consiste à identifier la covariance caractérisant les bruits d'évolution et d'observation perturbant le système modélisé {Moose *et al.*, 1987}. Par ailleurs, {Alpach et Sorenson, 1972} a développé le premier filtre à "mélange de gaussienne" fondé sur un partitionnement de l'état. Alpach et Sorenson avancent l'hypothèse que pour tout système linéaire admettant des entrées aléatoires caractérisées par une densité de probabilité gaussienne, et dont la condition initiale correspond à une somme pondérée de plusieurs densités de probabilité gaussiennes alors, le filtre optimal peut être calculé en dimension finie. Il s'en suit que la densité de probabilité *a posteriori* s'écrit également comme une somme pondérée de plusieurs densités gaussiennes. L'observateur construit dans ce cadre est alors dérivé selon une approche ensembliste c'est-à-dire comme un ensemble de plusieurs filtres de Kalman fonctionnant en parallèle indépendants les uns des autres. Un grand nombre de résultats portant sur les techniques d'estimation d'attitude pour le secteur aéronautique ont permis la conception d'estimateur simplifié dans ce domaine. Ainsi, Higgins {1975} a donné une simplification du filtre de Kalman en son régime permanent, nommé « filtre complémentaire » et Shuster {Shuster et Oh, 1981} a été parmi les premiers à synthétiser un filtre nommé QUEST (en anglais QUaternion ESTimation), fondé sur des matrices présentant des propriétés d'orthogonalité qui minimisent une fonction de transfert par moindre carrés. D'autres travaux ont été menés autour de ce filtre par {Bar-Itzhack, 1996} {Psiaki, 2000}{Shuster, 1989}{Sedlak et Chu, 1993}.

L'évolution de la réflexion sur le thème de la conception d'observateurs non linéaires robustes a amené les chercheurs à utiliser des méthodes de transformations non linéaires pour se ramener

au cas linéaire plus facile à traiter. Krener et Isidori {1983} ont été parmi les premiers à travailler sur la conception d'observateurs non linéaires en adoptant une technique de changement de coordonnées (c'est à dire un difféomorphisme) sur les équations du filtre afin de se ramener à un système linéaire moyennant une injection de sortie supplémentaire. A la suite de cette transformation, l'état estimé fourni par un observateur de Luenberger peut ensuite être recalculé à l'aide d'un changement de coordonnées inverses. Cette méthode met le système initial linéaire sous une forme canonique d'observabilité. Proche des travaux de Krener, Respondek {Respondek et Krener, 1985} a travaillé sur le sujet dans le cas des systèmes à multi-sorties. De nombreuses techniques de linéarisation ont par la suite été développées afin de cibler une plus large classe de systèmes non linéaires {Zeitz, 1988} {Birk et Zeitz, 1988} {Keller, 1987}. La difficulté majeure de ces méthodes réside dans la définition d'une transformation convenable. Afin de surmonter cette difficulté, Bestle {Bestle et Zeitz, 1983} donne les conditions nécessaires et suffisantes utilisant l'algèbre de Lie pour le cas d'un système mono-entrée/mono-sortie (SISO) en supposant que la fonction d'observation est linéaire. La fin des années 80 marque la naissance d'autres techniques dites d'immersion de l'état dans un espace de dimension supérieur dans le but de pallier aux hypothèses trop restrictives des précédentes techniques. Levine {Levine et Marino, 1986} propose dans son article de trouver une transformation injective (tandis que le difféomorphisme est bijectif), qui concerne une classe plus grande de systèmes non linéaires.

Après une courte pause, le thème de la conception d'observateur non linéaire robuste a fait à nouveau l'objet d'études conséquentes au début des années 90. Ainsi Gauthier {Gauthier *et al.*, 1992} a recherché des techniques de démonstration du grand-gain pour justifier *a posteriori* les propriétés d'un filtre de Kalman étendu dans une version modifiée s'inspirant de l'observateur grand-gain. Cette recherche a abouti sur une version du filtre de Kalman étendu grand-gain alliant la vitesse de convergence élevée de l'observateur grand-gain et la bonne robustesse au bruit du filtre de Kalman étendu. A noter que ce n'est qu'une décennie après la construction du filtre à grand gain que Kazantzis et Kravaris {1998} ont élargi cette théorie pour une classe de systèmes non linéaires dont la sortie est une fonction non linéaire de l'état, à valeur réelle. Plus récemment, Besançon {Besançon *et al.*, 2004} propose un observateur à grand gain adaptatif pour les systèmes non linéaires dépendant linéairement de paramètres inconnus. L'article {Farza *et al.*, 2004} détaille la conception d'un observateur à grand gain pour une classe de système non linéaire multi-entrée/multi-sortie (MIMO). Jusqu'à cette époque, les nombreuses méthodes développées pour les systèmes non linéaires (grand gain et méthode de transformation) étaient soit des solutions globales dont les conditions d'application étaient très restrictives, soit des solutions locales, valables uniquement dans un certain domaine de validité.

Si la majeure partie des travaux réalisés autour du filtre de Kalman a eu comme objectif d'estimer l'état de systèmes dynamiques non linéaires sous des hypothèses gaussiennes pour les bruits, d'autres techniques (aussi sous-optimales) ont été développées dans les années 90 pour s'affranchir d'hypothèses particulières. Gordon {Gordon *et al.*, 1993} a ainsi proposé une méthode portant le nom de filtrage particulière qui s'appuie sur une technique de Monte-Carlo

dite séquentielle des processus à estimer. Elle ne se fonde sur aucune hypothèse de la densité *a posteriori* et peut donc être appliquée à tous systèmes stochastiques, non linéaires et/ou non Gaussien. Pour cela, on réalise une approximation de la densité de probabilité conditionnelle du problème de filtrage par une somme pondérée de mesure de Dirac.

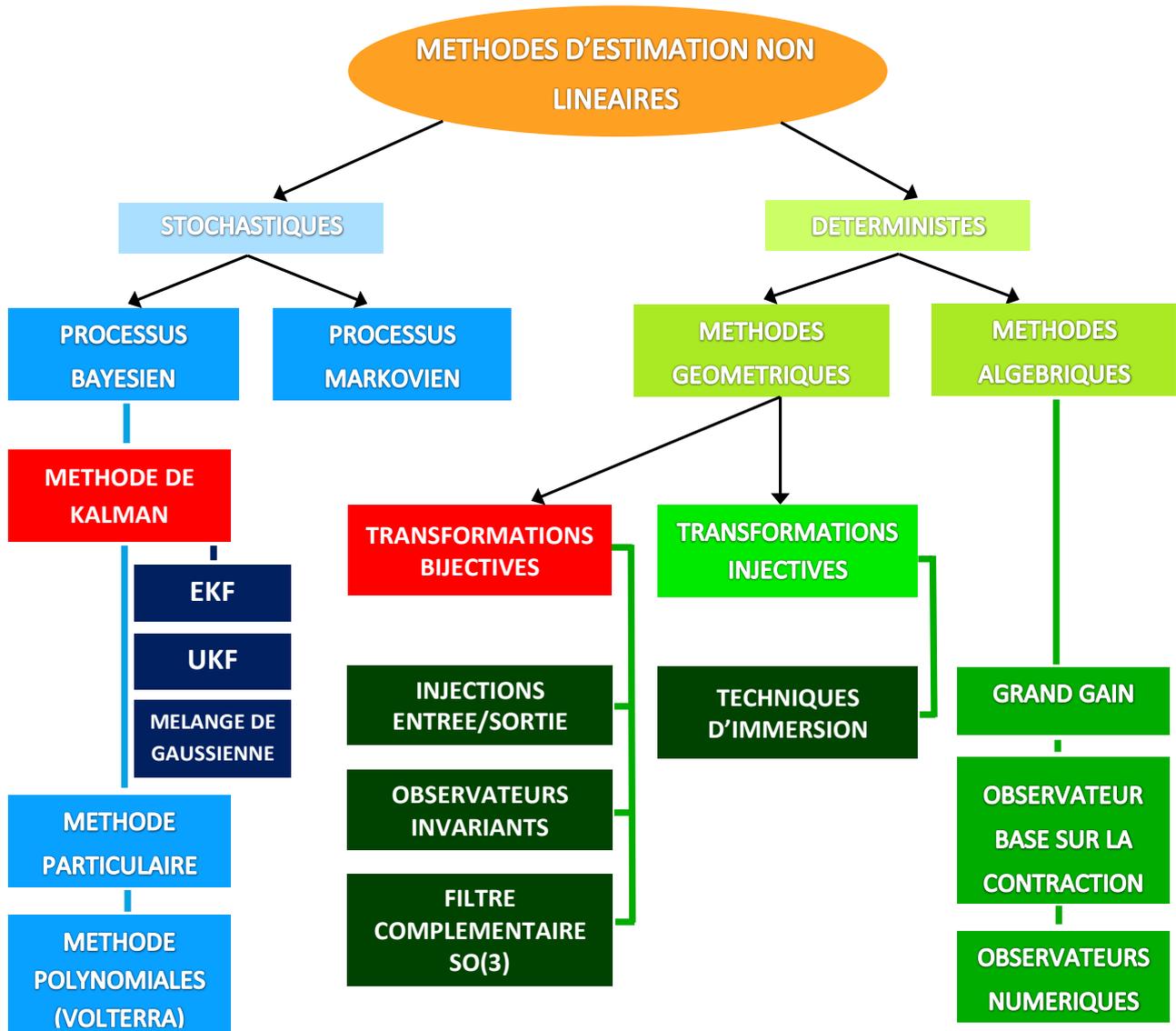


FIGURE 2.3 – *Classification des méthodes d'estimation*

Toutefois, l'énorme coût algorithmique de cette technique oriente les chercheurs vers d'autres études. Julier {Julier *et al.*, 1995} introduit le filtre dit « Sigma-point » essentiellement basé sur les approximations des moments d'une fonction non-linéaire aléatoire. Il montre l'intérêt de cette technique sur de nombreux systèmes issus du monde de l'ingénierie {Wan et Van der Merwe, 2001, chap. 7}{Crassidis et Markley, 2003}{Darling *et al.*, 2013}{Sarkka, 2007}{Xu *et al.*, 2008}. La description détaillée de cette méthode fera l'objet de la section 2.5.

La dernière décennie se caractérise essentiellement par l'essor de nouvelles techniques, remettant en cause la définition classique de l'erreur d'estimation d'état utilisée traditionnellement dans les méthodes de conception d'observateur non linéaire. Les premiers travaux basés sur une approche géométrique sont le fruit de {Maithripala *et al.*, 2005}{Mahony *et al.*, 2008} {Lagemann et Mahony, 2008} {Aghannan et Rouchon, 2002}. Ils exploitent principalement les groupes géométriques de Lie (quaternion, matrice de rotation, etc...). Prenant ses racines dans les travaux de Krener et Isidori, elle vise à utiliser l'invariance d'un système non linéaire vis-à-vis de certaines transformations géométriques (rotation, translation, etc) pour construire un observateur ayant une convergence bien meilleure que localement autour de tout point d'équilibre. Les nombreux résultats obtenus par Bonnabel {Bonnabel, 2007} {Bonnabel *et al.*, 2008} {Bonnabel *et al.*, 2009a} {Bonnabel *et al.*, 2009b} ont ainsi permis de proposer une théorie des observateurs invariants pour une classe importante de systèmes qui présentent des symétries. L'émergence de nouvelles applications dans le domaine de la robotique mobile et aérienne, a favorisé l'essor de cette approche bien adaptée pour le problème d'estimation d'attitude {Martin et Salaün, 2007} {Vasconcelos *et al.*, 2008}{Martin et Salaün, 2008} {Barczyk et Lynch, 2013}. Ainsi, dans {Bonnabel *et al.*, 2009b}, l'erreur invariante d'estimation est utilisée dans le schéma récursif du filtre de Kalman étendu pour élargir *a priori* son domaine de convergence. Cette hybridation aboutit à un filtre de Kalman étendu invariant (IEKF). D'autres études proposées par Diop et Fliess {1991} se basent sur de la dérivation numérique afin d'approcher le signal bruité par des représentations polynomiales et d'identifier algébriquement les coefficients de ces polynômes {Diop et Simeonov, 2009} {Diop, 2013}. Enfin, nous pouvons citer les travaux de Raïssi *et al.* {2010} qui ont développés des observateurs basés sur l'analyse par intervalles. La figure 2.3 propose un classement non-exhaustif des principales méthodes d'estimations stochastiques et déterministes.

## 2.3 Filtrage optimal des systèmes linéaires gaussiens

### 2.3.1 Algorithme du filtre de Kalman linéaire

S'appuyant sur l'ensemble des travaux publiés jusqu'au début des années 60, Kalman fut sans nul doute l'un des premiers chercheurs à mettre au point une technique d'estimation récurrente et à proposer des algorithmes de résolution du problème d'estimation en temps continu et discret, qui reposent sur des techniques d'espace d'état. Ses travaux apportent une solution au problème d'estimation dans l'incertain de l'état de systèmes dynamiques modélisés par des représentations d'état linéaires. L'estimation de l'état, solution du problème, est construite de manière itérative et minimise le critère de la covariance des erreurs d'estimation. L'optimisation qu'il réalise s'appuie sur le critère des moindres carrés aussi bien pour le domaine continu que discret. L'implantation pratique du filtrage de Kalman, même pour les systèmes continus, se fait en règle générale par le biais d'une synthèse discrète. C'est donc celle que nous allons présenter dans ce qui suit. Le principe de résolution s'appuie sur des notions proches du thème de la commande optimale.

Afin d'illustrer le filtrage de Kalman, considérons donc le cas simple du modèle discret d'un système dynamique d'entrée  $\mathbf{u}$  supposée connue, d'état  $\mathbf{x}$  et de sortie  $\mathbf{y}$  perturbés respectivement par un bruit blanc gaussien  $\mathbf{w}$  de matrice de covariance  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{v}$  de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , tous deux centrés sur zéro. Le modèle d'évolution de l'état du système  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est généralement issu d'une modélisation du phénomène physique qui le régit (lois de la mécanique, de la chimie, de l'électromagnétisme...) et complétée éventuellement mais à bon escient d'une procédure d'identification. La description mathématique de l'évolution de l'état du système est ensuite complétée par un modèle d'observation qui relie  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$ . Ces deux modèles, évolution et observation, sont conjointement représentés d'un point de vue mathématique par l'expression :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j^T] &= \mathbf{Q}_i \cdot \delta_{ij}, \quad E[\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_i \cdot \delta_{ij}, \\ E[\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j^T] &= 0, \quad E[\mathbf{v}_i] = 0, \quad E[\mathbf{w}_j] = 0, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Dans l'équation 2.9,  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. Pour faire le lien avec le cas d'un système continu dont les entrées déterministes  $\mathbf{u}$  et l'état  $\mathbf{x}$  sont échantillonnés à la cadence  $T$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_d &= e^{A \cdot T} \\
 \mathbf{B}_d &= \int_0^T B \cdot e^{A \cdot \nu} d\nu \\
 \mathbf{H}_d &= H, \quad \mathbf{R}_d = \frac{R}{T}, \quad \mathbf{Q}_d = \int_0^T e^{A \cdot \nu} \cdot Q \cdot e^{A^T \cdot \nu} d\nu
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dans l'équation 2.10, les matrices  $A, B, H, Q$  et  $R$  sont supposées ici être dépendantes du temps. Afin de dériver à partir de ce point, les équations du filtre estimateur Kalman utilisent alors certaines propriétés fondamentales inhérentes aux processus stochastiques gaussiens. De la sorte, une solution explicite aux équations 2.2 et 2.4 peut ainsi être obtenue. Ces propriétés consistent en ce que :

1. toute transformation affine d'une variable aléatoire gaussienne est une variable aléatoire gaussienne ;
2. la fonction caractéristique est aussi une gaussienne. Comme par ailleurs, la somme de formes quadratiques est aussi une forme quadratique, le produit d'exponentielles de formes quadratiques est une exponentielle d'une forme quadratique. Ainsi, la structure gaussienne se trouve conservée par multiplication et convolution ;
3. enfin, une densité de probabilité gaussienne est complètement caractérisée par ses deux premiers moments à savoir la moyenne et la variance.

La conséquence directe de l'application de ces propriétés est que les récursivités des équations 2.2 et 2.4 peuvent être reformulées en des équations récursives en la moyenne et la covariance associées aux densités de probabilité considérées. A chaque arrivée d'une nouvelle mesure, l'état est mis à jour selon un schéma spécifique de prédiction/correction. Par suite, en notant par  $\hat{\mathbf{x}}_{i|j}$ , l'estimé de l'état  $\mathbf{x}$  à l'instant  $iT$ , connaissant l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant  $jT$ ,  $\mathbf{z}^j = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j]$  et  $\mathbf{P}_{i|j}$  la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, on a théoriquement :

- d'un estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  connu, le filtre prédit d'abord l'état futur du système dénoté ici  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ , par l'intermédiaire du système. Par suite, on associe à cette prédiction une matrice de covariance de l'erreur de prédiction notée  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  telle que :

$$\text{Prédiction} \left\{ \begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= E[\mathbf{A}_d \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \mid \mathbf{z}^k] \\
 &= \mathbf{A}_d \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}_k \\
 \mathbf{P}_{k+1|k} &= E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^T \mid \mathbf{z}^k] \\
 &= E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] \\
 &= \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{P}_{k|k} \cdot \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}_d \\
 \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} &= \mathbf{H}_d \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}
 \end{aligned} \right. \tag{2.11}$$

Dans l'équation 2.11, la matrice de covariance prédite  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  est indépendante des observations  $\mathbf{z}^k$  réalisées sur le système, ce qui permet de calculer l'erreur quadratique moyenne commise *a priori* par l'opération de filtrage.

- l'état prédit  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  est ensuite corrigé grâce aux mesures disponibles  $\mathbf{z}_{k+1}$  faites à l'instant  $(k+1)T$  pour obtenir l'état estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ . Cette correction linéaire en les mesures est pondérée par le gain  $\mathbf{K}_{k+1}$  de manière à minimiser la covariance de l'erreur d'estimation. Cette pondération est déterminée à partir de la matrice de covariance liée aux erreurs entre les mesures brutes  $\mathbf{z}$  et les sorties prédites  $\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}$  notée  $\mathbf{P}_{\mathbf{zz},k+1|k}$  et de la matrice de covariance « croisée » entre les erreurs sur les sorties et les états,  $\mathbf{P}_{\mathbf{xz},k+1|k}$ . Les gains de correction  $\mathbf{K}_{k+1}$  sont également calculés hors ligne, à partir de  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  et de la matrice  $\mathbf{H}_d$  mais indépendamment de la réalisation du processus  $\mathbf{z}$ . De plus si la dynamique du système est nulle ( $\mathbf{Q}_d = 0$ ), c'est le cas par exemple de l'estimation de paramètres fixes, on constate que le gain de correction tend systématiquement vers 0 ainsi que la covariance de l'erreur du filtrage. Cela signifie que lorsqu'on estime des quantités fixes, au bout d'un certain temps, les nouvelles observations ne sont plus nécessaires à la correction.

$$\text{Correction} \left\{ \begin{array}{l}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\
 \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{xz},k+1|k} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{zz},k+1|k}^{-1} \\
 \mathbf{P}_{k+1|k+1} = E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^T | \mathbf{z}^{k+1}] \\
 \quad = E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})^T] \\
 \quad = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{zz},k+1|k} \cdot \mathbf{K}_{k+1}^T \\
 \mathbf{P}_{\mathbf{xz},k+1|k} = E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1})^T] \\
 \quad = \mathbf{P}_{k+1|k} \cdot \mathbf{H}_d^T \\
 \mathbf{P}_{\mathbf{zz},k+1|k} = E[(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1}) \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1})^T] \\
 \quad = \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{P}_{k+1|k} \cdot \mathbf{H}_d^T + \mathbf{R}_d
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

L'initialisation de l'algorithme est réalisée à partir d'un état  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  connu ou supposé quelconque et d'une matrice de covariance  $\mathbf{P}_{0|0}$  quantifiée en conséquence.

### 2.3.2 Extension aux modèles non linéaires

En reprenant les mêmes notations que précédemment, nous allons maintenant dériver les équations du filtre de Kalman qui permettent d'estimer les états non mesurables d'un système modéliser par une représentation d'état non linéaire discrète. La démarche usuelle pour appréhender un tel problème à l'aide des résultats obtenus dans le cas linéaire se décompose en deux

étapes. Premièrement, le système réel est décrit mathématiquement à partir d'une fonction non linéaire représentative de la dynamique de l'état telle que :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, k) \quad (2.13)$$

et à partir d'un ensemble de relations statistiques non linéaires qui modélisent les observations faites sur le système réel et donc potentiellement les capteurs, leurs imperfections ou/et leur dynamique. A noter que là encore, les bruits d'états et les bruits de mesure qui entrent dans le modèle sont supposés gaussiens, centrés et décorrélés. Un bruit de mesure supposé additif est également intégré à ce modèle d'observation tel que :

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{k}) + \mathbf{v}_k \quad (2.14)$$

Le caractère non linéaire du problème d'estimation constitue alors une difficulté majeure. En effet, l'application des fonctions non linéaire  $f$  et  $h$  ne permet plus de garantir le respect d'hypothèses gaussiennes sur les bruits propagés au travers du modèle. Les propriétés énoncées précédemment ne sont plus justifiées ici. Si le filtrage de Kalman linéaire peut s'accommoder de bruits colorés dont est connu une représentation markovienne, il ne peut fournir une solution au problème non linéaire précédent. Dès lors, le filtrage de Kalman étendu offre une solution sous-optimale au problème en procédant à une double linéarisation des relations contenues dans  $f$  et  $h$  relativement à  $\hat{\mathbf{x}}$ . En l'occurrence, plusieurs extensions du filtre de Kalman traditionnel permettent d'estimer l'état d'un système discret non linéaire en minimisant de façon sous-optimale un critère fondé sur la covariance de l'erreur d'estimation. Dans ce cas l'approximation qui est adoptée permet d'approcher les distributions associées aux erreurs d'état  $\mathbf{x}$  et de mesures  $\mathbf{y}$  par des lois gaussiennes rendant de nouveau applicable le filtre de Kalman linéaire.

## 2.4 Approximation du filtrage optimal par linéarisation : le filtre de Kalman étendu (EKF)

La méthode conjointement développée par Breakwell et Jazwinski s'appuie fortement sur les techniques de filtrage développées par Kalman et les adaptent aux systèmes non linéaires. Cette méthode reprend le schéma prédiction/correction utilisé par Kalman pour l'appliquer à l'idée de Breakwell, selon laquelle un problème d'estimation de l'état d'un système non linéaire soumis à des perturbations stochastiques peut être approché avec une certaine précision par un filtre de Kalman linéaire utilisant le modèle linéaire tangent du système non linéaire, calculé autour de la trajectoire estimée. En effet, il est légitime de penser que si les non linéarités du processus d'évolution (2.13) et d'observation (2.14) ne sont pas trop fortes, et que les bruits n'ont pas une variance trop importante, alors l'état vrai  $\mathbf{x}_k$  du système non linéaire peut être estimé localement à partir du modèle linéarisé en ayant un bon niveau de confiance quant à sa validité. Il en résulte que l'état estimé sera issu d'un calcul mêlant une prédiction qui s'appuiera

directement sur les équations non linéaires du système et une correction qui reprendra dans les grandes lignes celles du filtre de Kalman linéaire où les matrices  $\mathbf{A}_d$  et  $\mathbf{H}_d$  correspondront au modèle linéaire tangent du système non linéaire.  $\hat{\mathbf{x}}_k$  pourra alors être considéré comme une bonne estimation de  $\mathbf{x}_k$ . En conséquence, les densités de probabilité des erreurs d'estimation décrites initialement par Kalman, pourront être approchées localement par des densités de probabilité gaussiennes en supposant que l'erreur de prédiction

$$\epsilon_{k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, k) - f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}_k, k) \quad (2.15)$$

puisse être obtenue avec un bon niveau de représentativité à partir d'un développement en série de Taylor en  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , tronqué à un certain ordre (soit le premier ordre, soit le second). Le choix du point  $\hat{\mathbf{x}}_k$  au voisinage duquel est réalisée la linéarisation du modèle est très naturel. Sous l'hypothèse d'une contribution négligeable des termes d'ordre supérieur, la fonction  $f(\mathbf{x}_k)$  étant exploitée lors de l'étape de prédiction, il est fondé de linéariser celle-ci au voisinage du dernier état estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , celui-ci étant corrigé et remis à jour à chaque pas de calcul. Ce point constitue également le meilleur estimé connu possible de  $\hat{\mathbf{x}}_k$ . Ainsi, au premier ordre, l'équation 2.15 devient :

$$\epsilon_{k+1|k} \approx (\nabla f)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \epsilon_{k|k}$$

où  $(\nabla f)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$  est la matrice jacobienne de  $f$  calculée en  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ . Pour rappel :

$$\left[ (\nabla f)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \right]_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$$

Les formalisations mathématiques des filtres de Kalman linéaire et étendu du premier ordre sont très peu différentes : les matrices  $\mathbf{A}_d$  dans l'étape de prédiction et  $\mathbf{H}_d$  dans l'étape de correction sont remplacées par les matrices jacobienne  $(\nabla f)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$  et  $(\nabla h)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}$ . Cependant, la mise en œuvre du filtre EKF nécessite que le gain de correction et donc que les matrices de covariance soient calculées en ligne. En effet, les matrices jacobienes dépendent, dans le cas des systèmes discrets non linéaires, des estimations  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  et  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  respectivement. Ainsi, un certain nombre de variantes de cet algorithme peuvent-être imaginées dès lors qu'une approximation linéaire est réalisée. En effet, par exemple, un des principes de l'EKF étant de linéariser le modèle d'observation  $h(\mathbf{x}_k)$  au voisinage de la prédiction  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ , la valeur filtrée  $\hat{\mathbf{x}}_k$  est sensée être plus proche de l'état réel du système que  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ . On peut alors linéariser à nouveau ce modèle au voisinage de ce point en espérant commettre moins d'erreur et recalculer à nouveau la correction. Nous pouvons itérer ce processus jusqu'à ce que la variation sur l'estimé induite par l'estimateur ne soit plus significative. Par un procédé analogue, la précision de l'étape de prédiction peut-être également améliorée en recalculant le point au voisinage duquel se fait la linéarisation du modèle d'évolution  $f(\mathbf{x}_k)$ . Cette technique, baptisée filtre de Kalman étendu itératif, améliore les performances de l'estimation dans le cas de non linéarités qui évoluent rapidement. {Bell, 1994} a démontré, que cette formalisation itérative des équations de correction de l'état, est

équivalente à une maximisation de la vraisemblance (cf. Equation 2.6) du terme de correction de l'état prédit qui peut être accomplie à l'aide d'une méthode de Gauss-Newton. Cependant, l'EKF a certaines limites. Ainsi, malgré (ou, à cause de) sa simplicité, il est important de noter que :

- ▶ les approximations linéaires ou quadratiques des équations d'évolution (2.13) et d'observation (2.14) ne peuvent donner de bons résultats que si ces transformations restent valides. Par conséquent, l'utilisation de ce filtre reste réservée aux problèmes d'estimation pour lesquels la dynamique du système non linéaire faible (validité du modèle linéaire tangent) et les perturbations sont de variance limitée ;
- ▶ d'autre part, dans beaucoup de cas, le calcul des matrices jacobiniennes peut induire des erreurs numériques qui s'ajoutent aux erreurs de modélisation ainsi qu'aux erreurs d'hypothèses.

Pour améliorer la robustesse de l'estimation des points de vue de sa convergence et de la précision numérique du filtre implémenté, il faut se tourner vers des algorithmes plus récents, qui exploitent conjointement certaines factorisations matricielles et une approximation des matrices jacobiniennes ( $\nabla f$ ) et ( $\nabla h$ ) par différence finie centrée. Ces techniques aboutissent à une nouvelle formulation du filtrage de Kalman, proche de l'EKF, mais qui présentent l'avantage de ne calculer aucune dérivée numérique pour obtenir l'évolution de la matrice de covariance des erreurs d'estimation sur l'état. L'une d'elles s'appuie sur une formulation de type racine carrée des équations de l'EKF, réputée stable numériquement.

## 2.5 Approximation du filtrage optimal par discrétisation : le filtre de Kalman « Sigma-Point » (SPKF)

### 2.5.1 Prédiction et sigma-points

Les travaux méthodologiques conjointement menés à partir de 1995 par Julier et Uhlmann leur ont permis de mettre au point une technique originale d'estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires soumis à des perturbations aléatoires dont le principe repose sur la génération d'un ensemble de points représentatif des propriétés statistiques de l'erreur d'estimation sur l'état du système considéré. Cette approche de l'estimation par échantillonnage de l'espace d'état, couplée aux équations récurrentes du filtrage de Kalman, permet de construire dynamiquement une estimation de l'état du système (moment d'ordre 1 ou espérance conditionnelle) et de l'erreur commise (moment d'ordre 2 ou covariance de l'erreur) comme des barycentres associés à cet ensemble de points qui évolue au cours du temps. Les pondérations associées à chaque point d'échantillonnage au cours des calculs étant définis *a priori*. Par rapport à l'approche de Jazwinski qui cherche à estimer itérativement la moyenne de l'état estimé et la covariance de

l'erreur d'estimation sur l'état à partir d'une linéarisation des équations du modèle, la méthode proposée ici repose sur l'intuition *qu'il est plus facile d'avoir une approximation d'une distribution [...] que d'approcher une fonction non linéaire*. En d'autres termes, au lieu de considérer une approximation de la fonction non linéaire, l'approximation va porter sur les moments d'ordre un et deux associés respectivement à  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ . L'étape de prédiction cherche à déterminer

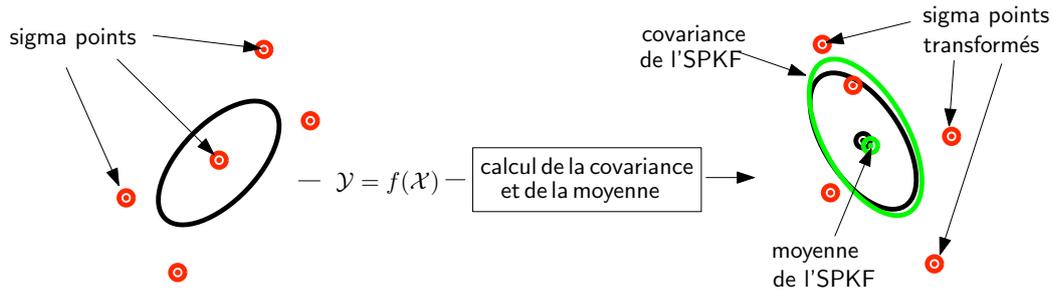


FIGURE 2.4 – *Principe de l'approche par sigma points*

l'état futur  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  et la matrice de covariance  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  à partir de  $\mathbf{P}_{k|k}$  selon les équations 2.11 retranscrites au cas non linéaire. Pour cela, un ensemble de  $p + 1$  vecteur(s) de l'espace d'état noté(s)  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$ ,  $i \in \llbracket 0; p \rrbracket$ ,  $p \in \mathbb{N}^+$  et appelés « *sigma points* », est choisi, de manière à ce que l'état moyen fournissant l'estimé et la covariance de l'erreur d'estimation puissent être déduits par les relations :

$$\sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \left( \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \left( \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right)^T = \mathbf{P}_{k|k}$$

Ces relations montrent que l'échantillonnage de l'espace d'état et le calcul des sommes pondérées visent à capter certaines propriétés (moyennes et covariance) des distributions associées à l'état et à l'erreur d'état. Les  $p + 1$  pondérations  $\mathbf{W}^i$  qui entrent en jeu peuvent être positives ou négatives. Afin que l'estimation soit sans biais, celles là doivent nécessairement vérifier :

$$\sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} = 1 \tag{2.16}$$

Par suite, le principe général de la méthode consiste à appliquer la transformation non linéaire  $f$  à chacun des  $p + 1$  sigma points, afin de produire un nuage d'éléments modifiés. Les propriétés statistiques de cet ensemble image forment des estimés des transformées de la moyenne de l'état et de la covariance de l'erreur par la non linéarité  $f$ . L'étape de prédiction consiste donc ici à calculer les moyennes et covariances associées aux  $p + 1$  images des sigma points obtenues par application de  $f$ . Les calculs menés au cours de cette étape sont résumés ci-après. La figure 2.4 illustre également le principe développé par Julier et Uhlmann.

1. Calcul de l'évolution des  $p + 1$  sigma points selon l'équation non linéaire du processus :

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k, k)$$

2. Calcul de la moyenne prédite à partir de ces  $p + 1$  points images :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}$$

3. Calcul de la covariance prédite à partir de ces  $p + 1$  points images :

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \left[ \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right] \left[ \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right]^T \quad (2.17)$$

4. Calcul de la mesure prédite à partir de ces  $p + 1$  points images :

$$\mathbf{z}_{k+1|k}^{(i)} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k, k)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \mathbf{z}_{k+1|k}^{(i)}$$

TABLE 2.1 – Procédure de prédiction basée sur une sélection de sigma points

### 2.5.2 Interprétation de l'approche par sigma points

Une analyse de l'algorithme SPKF reposant sur une utilisation implicite d'une technique connue sous le nom de régression linéaire statistique pondérée (Weighted Statistical Linear Regression, en anglais WSLR) permet d'interpréter et de mieux comprendre la technique d'échantillonnage par sigma points {Lefebvre *et al.*, 2002}. Cette technique recherche basiquement à déterminer une relation de cause à effet paramétrique (une régression) qui explique au mieux les observations ou échantillons disponibles. Cette relation (ou mesures) peut être linéaire ou non linéaire. Elle est généralement obtenue par minimisation d'un critère de type moindre carrée construit autour de  $p$  donnée(s) de référence. La particularité de la méthode WSLR consiste à pondérer chaque terme d'écart quadratique apparaissant dans le critère moindre carrée à optimiser. L'optimisation est ensuite menée avec comme variable de décision les paramètres de la régression. Si les données de référence sont illustratives d'une variable aléatoire (v.a.) alors le résultat produit par la méthode WSLR est équivalent à un modèle linéaire ou non linéaire relatif de cette v.a.. Dans le cas de la recherche d'une modélisation affine, on parle alors de linéarisation stochastique. Ce faisant, le résultat de cette approche permet d'obtenir une meilleure image de l'estimé d'un processus stochastique par exemple, d'un point de vue purement statistique,

que ne le ferait une approximation par développement en série de Taylor tronquée à un certain ordre. La proposition 1 suivante résume le principe du WSLR dans le cas de la recherche d'un modèle relatif affine à partir de données de référence qui assimilent aux images de sigma-points de l'algorithme UKF standard.

**Proposition 1**

Considérons l'ensemble des  $p+1$  sigma-points introduits précédemment :  $\{\mathbf{x}_{k|k}^{(i)} / i \in \llbracket 0; p \rrbracket\}$  définis chacun en un instant de temps  $k \in \mathbb{N}$ .

Considérons également la fonction non linéaire  $\mathbf{g}$ .

On notera par la suite  $\gamma_{k+1|k}^i$  l'image par  $\mathbf{g}$  du  $i$ -ième sigma-point  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$ . On a :

$$\forall i \in \llbracket 0; p \rrbracket, \gamma_{k+1|k}^i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k|k}^{(i)})$$

La recherche d'un modèle linéaire relatif expliquant au mieux l'action de la fonction  $\mathbf{g}$  en chaque sigma-point  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$  s'obtient par minimisation du critère quadratique pondéré  $J$  suivant :

$$J = \sum_{i=0}^p \mathbf{w}^{(i)} (\epsilon_k^{(i)})^T \epsilon_k^{(i)}$$

$$\begin{aligned} \text{où : } \forall i \in \llbracket 0; p \rrbracket, \epsilon_k^{(i)} &= \gamma_{k+1|k}^i - (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k}^{(i)} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}) - (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k}^{(i)} + \mathbf{b}) \end{aligned}$$

La solution est telle que :

$$(\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*) = \underset{(\mathbf{A}, \mathbf{b})}{\operatorname{argmin}} J$$

Remarque : Il peut faire sens d'adjoindre à la méthode WSLR la contrainte suivante :

$$\sum_{i=0}^p \mathbf{w}^{(i)} = 1$$

Dans le cas où ces sigma-points cherchent à représenter, à un instant donné, un processus stochastique, le problème s'apparente alors à celui du calcul d'une régression linéaire statistique qui respectera la distribution de l'état  $\mathbf{x}$  dès lors que les points de régression  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$  sont choisis de telle manière à ce qu'ils capturent la moyenne et la covariance de celui-ci sous l'hypothèse implicite que ce processus stochastique suit effectivement une loi gaussienne. Appliquée au problème d'estimation de l'état d'un système, il a été montré qu'en utilisant le critère des moindres carrés, la solution est donnée par  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy}}^T \mathbf{P}^{-1}$  et  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ .

Cette méthode, aussi appelée linéarisation stochastique, permet de mettre en exergue l'efficacité du filtrage sigma-points par rapport aux algorithmes d'estimation qui exploitent une

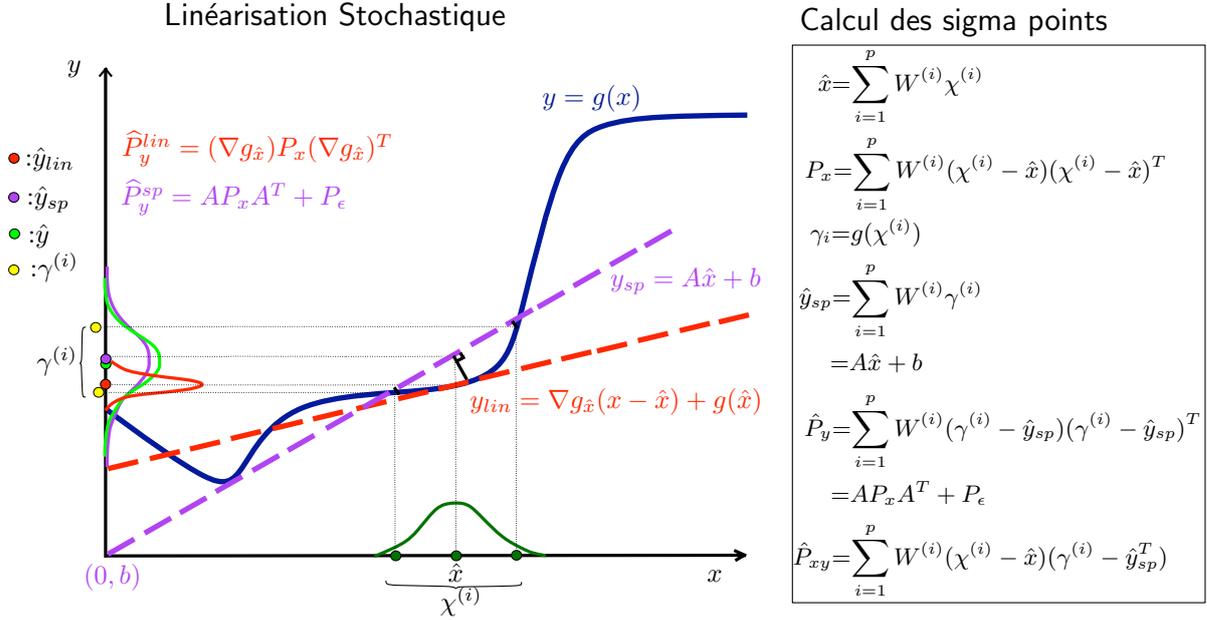


FIGURE 2.5 – Comparaison de l’approche sigma-points et EKF

technique de linéarisation classique basée sur un développement en série de Taylor au 1er ordre du modèle d’état non linéaire. La figure 2.5 fournit une représentation synthétique des étapes, implicites de l’approche par sigma-points et les compare à celles employées dans EKF. On y voit que la distribution de la v.a. gaussienne  $\mathbf{x}$ , graphiquement représentée en vert sur l’axe horizontal, subit une transformation arbitraire au travers d’une fonction non linéaire  $\mathbf{g}$  telle que  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Celle-ci s’applique à la valeur moyenne de l’état ainsi que sur celles situées à  $\pm 1$  écart-type comme indiqué en vert sur l’axe horizontal. Les images  $\gamma^{(i)}$  des sigma-points apparaissent en jaune sur l’axe vertical. Comme stipulé précédemment, une première étape d’approximation de la fonction  $\mathbf{g}$  en  $\hat{\mathbf{x}}$  consiste à tronquer son développement en série de Taylor en  $\hat{\mathbf{x}}$  à l’ordre 1 (droite en pointillé rouge) comme le fait la technique de l’EKF. Par suite, moyenne et covariance (en rouge) sont propagées à travers cette première approximation linéaire de la fonction  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Il en résulte que les deux premiers moments de la v.a. transformée sont imprécis au regard des supposées vraies quantités ici représentées en vert clair sur l’axe vertical.

La technique WSLR, à l’inverse, propage les sigma points représentatifs de la moyenne  $\mathcal{X}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}$  et des bornes  $\mathcal{X}^{(1)} = \hat{\mathbf{x}} - \sigma_{\mathbf{x}}$  et  $\mathcal{X}^{(2)} = \hat{\mathbf{x}} + \sigma_{\mathbf{x}}$  où  $\sigma_{\mathbf{x}}$  constitue l’écart-type de la distribution associée à  $\mathbf{x}$ . La propagation de ces points permet d’obtenir en jaune sur l’axe  $\mathbf{y}$  les sigma-points images (ou *a posteriori*)  $\gamma_i$ . On voit bien à ce stade que la droite  $y_{sp} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  obtenue grâce à la technique WSLR, et qui passe proche des points de coordonnées  $(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}}))$ ,  $(\mathcal{X}^{(1)}, \gamma^{(1)})$  et  $(\mathcal{X}^{(2)}, \gamma^{(2)})$  capture *in fine* mieux les vrais premiers moments de la v.a. contrairement à la linéarisation effectuée dans le cadre de l’EKF. Le résultat représenté en magenta montre clairement une différence par rapport à l’approximation issue de la série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre.

### 2.5.3 Scaled Unscented Kalman filter (UKF)

La méthode de sélection de l'ensemble des  $p + 1$  sigma points  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$  qui doit être effectuée à chaque instant d'échantillonnage  $kT$  revêt d'une importance toute particulière. Son but est de déterminer des échantillons de l'espace d'état dont la moyenne et la covariance statistiques soient des plus représentatives possibles de celles de la distribution associée à  $\mathbf{x}_k$ . Par ailleurs, en fonction de leur définition, des moments d'ordre supérieur de la distribution de  $\mathbf{x}_k$  pourront être également représentés fidèlement. Ainsi, de leur construction, va dépendre la précision des valeurs prédites pour l'état  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  et la covariance des erreurs d'estimation  $\mathbf{P}_{k+1|k}$ . Une première manière de choisir ces sigmas points particuliers est de les considérer symétriques autour d'un point moyen {Julier et Uhlmann, 2004}{Julier *et al.*, 2000}. Le fait de choisir  $2n + 1$  points de l'espace, avec  $n = \dim(\mathbf{x})$ , symétriques par rapport à  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  et tel que  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)}$  avec des pondérations identiques, induit que la moyenne, la covariance et les moments centrés d'ordre impair calculés à partir de ces points seront identiques aux quantités caractéristiques de la distribution associée à l'état vrai  $\mathbf{x}_k$ . Par contre, ce choix ne permet pas de restituer exactement les moments centrés d'ordre pair supérieur où égal à quatre de la distribution de  $\mathbf{x}_k$ . Pour surmonter ce problème, le premier poids  $\mathbf{W}^{(0)}$  peut être considéré comme un paramètre ajustable, permettant de minimiser les erreurs d'approximation commises sur les moments centrés de la distribution de  $\mathbf{x}_k$  pour des ordres strictement supérieurs à trois.

Une deuxième approche consiste à construire un ensemble de sigma points de taille minimale {Julier et Uhlmann, 2002}. En effet, la complexité algorithmique de l'UKF dépend directement du nombre de sigma points à considérer à chaque instant  $kT$ . Dans le cas où le modèle comporte un nombre élevé d'états et, qui plus est, lorsque l'implémentation en temps réel est visée, il peut être intéressant de trouver le nombre minimal de sigma points, à partir duquel une bonne représentativité de la distribution de  $\mathbf{x}_k$  peut être garantie. Comme le démontre Julier dans {Julier, 2003}, si l'on considère un espace de dimension  $n$ ,  $n + 1$  sigma points affinement indépendants (formant un *simplexe* dans cet espace) sont nécessaires et suffisants pour capturer une valeur et une dispersion données moyenne. Ainsi, sous certaines hypothèses sur l'état et la covariance à l'instant initial,  $n + 1$  est le nombre minimal de sigma points à déterminer à chaque instant  $kT$ . Les méthodes de construction et de sélection du nombre de sigma-points réalisent un compromis entre :

- ▶ **la charge calculatoire de l'algorithme d'estimation**, dont nous avons dit qu'elle dépendait étroitement du nombre de sigma points considérés à chaque pas de temps  $kT$  ;
- ▶ **la qualité de l'estimé renvoyé par la méthode**, qui dépend du maintien d'une certaine dispersion des sigma points dans l'espace d'état ;
- ▶ **et la représentativité de l'échantillonnage** vis-à-vis de la distribution initiale caractérisant  $\mathbf{x}_k$ , surtout en ce qui concerne les moments d'ordre supérieur à deux. De cela dépend la précision des valeurs prédites en moyenne et covariance.

La méthode connue sous le nom de Scaled Unscented Kalman Filter propose une manière intéressante de prendre en compte l'ensemble de ces critères dans la génération des sigma-points. Son principe consiste à sélectionner un ensemble de  $(2n + 1)$  points  $\mathcal{X}_{k|k}^{(i)}$ , aux quels sont associés les poids  $\mathbf{W}^{(i)}$  comme indiqué dans le tableau 2.2. Par souci de simplicité, nous avons adopté la notation  $\mathbf{A} \pm \mathbf{u}$  pour désigner l'addition d'un vecteur  $\mathbf{u}$  avec chaque colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ . Par ailleurs, la notation  $\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}}$  désigne la matrice racine carrée de la covariance de l'erreur d'état calculée à partir de la factorisation de Cholesky{Wan et Van der Merwe, 2000}{LaViola, 2004}.

Echantillons ( <i>Sigma Points</i> ) $i \in \{1, \dots, n\}$	Pondérations associées pour la moyenne $i \in \{1, \dots, n\}$	Pondérations associées pour la covariance $i \in \{1, \dots, n\}$
$\mathcal{X}_{k k}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k k}$	$\mathbf{W}_{(m)}^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda}$	$\mathbf{W}_{(c)}^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$
$\mathcal{X}_{k k}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k k} + \Delta_{k k}(i)$	$\mathbf{W}_{(m)}^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$	$\mathbf{W}_{(c)}^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$
$\mathcal{X}_{k k}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k k} - \Delta_{k k}(i)$	$\mathbf{W}_{(m)}^{(i+n)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$	$\mathbf{W}_{(c)}^{(i+n)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$
$\Delta_{k k} = \sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{k k}}$	$\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$	

 TABLE 2.2 – Des sigma points symétriques paramétrés en  $\alpha$  et en  $\beta$ 

Avec les paramètres à définir pour cet algorithme :

- **un facteur d'échelle**  $\alpha$  qui gère la dispersion des sigma points initiaux autour de  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ .  $\alpha$  est un réel positif, qui sera souvent choisi faible (par exemple  $10^{-1}$ ). Dans la littérature, il est souvent compris entre  $10^{-1}$  et 1 ;
- **un scalaire**  $\kappa$ , qui garantit que la covariance prédite soit semi-définie positive. L'inégalité  $n + \kappa > 0$ , permet de paramétrer les  $2n + 1$  sigma points.  $\kappa \in \mathbb{R}$  peut être choisi négatif. Auquel cas, la matrice de covariance prédite peut ne pas être semi-définie positive. Donc  $\kappa$  sera choisi supérieur ou égal à zéro pour garantir que la covariance prédite sera semi-définie positive ;
- **un réel**  $\beta$  choisi de manière à prendre en compte des informations sur les moments d'ordre supérieur à 3 de la distribution.  $\beta = 2$  est un choix optimal quand la distribution de  $\mathbf{x}_k$  est supposée gaussienne.

Par suite, les étapes de prédiction sur la moyenne et la covariance se font exactement de la même manière que dans la procédure décrite dans le tableau 2.1. L'étape de correction est très peu modifiée pour le scaled UKF puisqu'elle repose sur les mêmes équations (2.12) que celles définies dans le filtre de Kalman linéaire, à savoir :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \\
 \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^T | \mathbf{z}^{k+1}] \\
 &= E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})^T] \\
 &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{zz,k+1|k} \cdot \mathbf{K}_{k+1}^T
 \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{xz,k+1|k} \cdot \mathbf{P}_{zz,k+1|k}^{-1}$$

Seules, les covariances associées à la mesure, sont calculées différemment : elles s'obtiennent grâce aux sigma points :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{zz,k+1|k} &= V_{k+1} + \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \left[ \mathbf{z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right] \left[ \mathbf{z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right]^T \\
 \mathbf{P}_{xz,k+1|k} &= \sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} \left[ \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right] \left[ \mathbf{z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right]^T
 \end{aligned}$$

Il est à relever qu'aucun jacobien, et qu'aucun hessien ne sont calculés dans cet algorithme. C'est l'un des avantages considérables de ce type de méthode.

## 2.6 La logique floue

La logique floue apparaît pour la première fois en 1985 lorsque le professeur Lotfi A. Zadeh, de l'université de Berkley, publie un article intitulé Ensemble flous Zadeh {1965} dont l'objectif est de présenter la construction d'un formalisme permettant d'effectuer des raisonnements qualifiés et qualitatifs afin de traiter une information imprécise ou incertaine.

Zadeh fut rapidement suivi par de nombreux chercheurs tels que Kaufmann, Hamacher ou encore Weber inscrivant le développement de leur méthode dans le cadre de ce nouveau champ de recherche, portant sur le traitement de diverses formes de connaissances imparfaites. A cette époque, malgré de nombreux progrès dans le domaine de la théorie des systèmes non linéaires, l'approche algorithmique basée sur la modélisation mathématique des systèmes montre certaines limites. Ainsi, certains chercheurs se sont penchés sur la résolution par logique floue de problème en théorie du contrôle.

En 1975, le professeur Mandani développait le premier contrôleur flou sur la conduite d'un moteur à vapeur ; quatre ans plus tard, on trouve la première application dans un four à ciment. Ce fut la première véritable application industrielle de la logique floue. Dix ans après, l'essor de cette technique prit racine au Japon, où la recherche n'était pas seulement théorique mais également très applicative. A la fin des années 80, la logique floue entra dans une période faste avec les produits grand public tels que la machine à laver, les appareils photographiques et autres caméscopes estampillés « fuzzy logic ». Dans l'industrie, le traitement des eaux, les métros et les systèmes de ventilation sont aussi touchés. Aujourd'hui, la logique floue n'est plus

seulement appliquée aux procédés industriels mais aussi à des domaines très différents tels que la finance ou le diagnostic médical Nwogugu {2007}Steimann et Adlassnig {2001}.

L'utilisation de la logique floue pour les applications dans le contrôle-commande de procédé, appelée alors couramment « contrôleur flou » est bien connue des automaticiens. Tout comme un contrôleur (correcteur) classique, le contrôleur flou s'insère dans la boucle de régulation et calcule la commande à l'aide d'une base de règles floues, suivant une ou plusieurs consigne(s) et une ou plusieurs mesure(s) effectuée(s) sur le procédé. Les bases de règle floues sont intéressantes car elles permettent :

- ▶ de prendre en compte l'expertise humaine formulée en terme linguistique. Elle se base donc sur la capacité à traiter une information qualitative mais aussi quantitative, subjective, imprécise et incertaine ;
- ▶ de prendre en compte des variables que l'on sait difficilement intégrer dans une boucle de régulation ou d'estimation.

Dans notre cadre d'application, les règles floues permettront d'obtenir un ensemble de décisions floues pour le réglage de l'estimateur invariant développé au chapitre 4.

## 2.7 Théorie des observateurs invariants

De nombreux travaux de recherche sur les observateurs invariants non linéaires ont été menés durant ces dix dernières années notamment par P. Rouchon, S. Bonnabel et E. Salaün {Bonnabel *et al.*, 2008} {Bonnabel *et al.*, 2009a} {Martin et Salaün, 2010} dont les résultats ont permis d'élaborer une méthode constructive utilisant conjointement la géométrie différentielle et la théorie des groupes pour synthétiser des filtres non linéaires dédiés aux problèmes d'estimation non linéaire de l'état d'un système. La particularité de cette méthode est de préserver les propriétés physiques et de symétrie des systèmes. La conception de tels filtres requiert, au travers de différentes définitions de groupe, la recherche de transformations portant sur le modèle dynamique du système afin de formuler le problème en des termes mathématiques appropriés. Par la suite, la mise en place d'un cadre géométrique nécessitant à la fois la recherche d'un champ de vecteurs invariants et la définition d'une erreur invariante va permettre de finaliser l'élaboration de ce filtre. Par ailleurs, afin de régler la dynamique de celui-ci, il sera nécessaire de déterminer les gains via une linéarisation de l'erreur d'état devenue non linéaire. Désormais, la linéarisation ne se fera plus autour d'un point d'équilibre mais autour de l'élément neutre d'un groupe, ce qui permettra, comme nous le verrons, d'élargir le domaine de convergence de l'estimation et d'avoir une forme simplifiée de la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état. A travers les différentes définitions qui suivent, nous présentons ici le fil conducteur des principaux travaux de recherche menés autour de la synthèse de filtres invariants. Cette théorie sera appliquée dans ce chapitre sur un exemple académique simple (la voiture non-holonome) puis repris au travers de l'élaboration d'un système de navigation inertiel dans le chapitre 4. Tout d'abord, considérons la représentation d'état non linéaire suivante définie par :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans l'équation 2.18, le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  (resp. d'entrée  $\mathbf{u}$ )(resp. de sortie  $\mathbf{y}$ ) appartient à un ensemble ouvert  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^m$ )(resp.  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p, p \leq n$ ).

Etant donné cette représentation non linéaire, nous commençons par définir une structure de groupe sur laquelle nous allons construire différentes transformations dont les actions sur les ouverts précédemment définis vont laisser inchangée la dynamique (du système).

### Definition 1

**Groupe de transformation** : Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathcal{T}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ . Une action sur  $\mathcal{T}$  d'un groupe de transformation paramétré par  $G$ , noté  $(\theta_g)_{g \in G}$  et d'application identité  $\theta_e$  ( $e$ , est l'élément neutre de  $G$ ), et tel que  $(g, \xi) \in G \times \mathcal{T} \mapsto \phi_g(\xi) \in \mathcal{T}$ , est une carte différentiable qui vérifie :

- $\forall \xi \in \mathcal{T}, \theta_e(\xi) = \xi$  ;
- $\forall (g_1, g_2) \in G^2, \theta_{g_2} \circ \theta_{g_1}(\xi) = \theta_{g_2 g_1}(\xi)$ .

**Definition 2**

**Identification du groupe de Lie et de l'ouvert :** Soit  $(\theta_g)_{g \in G}$  un groupe de transformation de rang plein i.e.,  $\forall g \in G, \dim(\text{Im}(\theta_g)) = \dim(G) = r$ . Si  $\dim(G) = r = \dim(\mathcal{T}) = q$  alors  $G$  et  $\mathcal{T}$  peuvent être identifiés l'un à l'autre de sorte que l'application  $\theta$  paramétrisée sur  $G$  puisse s'assimiler à une multiplication à droite ou à gauche telle que :

$$\forall (g, \xi) \in (G \times \mathcal{T}), \theta_g(\xi) = \xi g^{-1} = R_{g^{-1}}(\xi) \quad \text{ou} \quad \theta_g(\xi) = g\xi = L_g(\xi)$$

A partir de la définition 2, il en résulte que  $(\theta_g)_{g \in G}$  est un difféomorphisme. Par ailleurs, nous considérerons uniquement dans la suite les actions de groupe de rang plein pour lesquelles  $rg(\theta_g) = \dim(G)$  et  $\dim(G) = \dim(M)$ . Dans ce cas là, la définition 2 signifie que nous pouvons identifier le groupe  $G$  à l'ouvert  $\mathcal{T}$ .

Par analogie, en considérant la représentation d'état 2.18 où le vecteur d'état (resp. d'entrée)(resp. de sortie) appartient à un ensemble ouvert  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^m$ )(resp.  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p, p \leq n$ ), nous considérons le groupe de transformation défini par une multiplication à droite sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  tel que :

$$\begin{aligned} \phi : G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) &\rightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) \\ (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) &\mapsto \phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u}), \rho_g(\mathbf{y})) = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

où  $(\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$  sont trois difféomorphismes paramétrisés par  $g \in G$  où le groupe de Lie  $G$  vérifie  $\dim(G) = \dim(\mathcal{X}) = n$ . Les coordonnées des transformations ci-dessus doivent être définies telles que leur action respective mais conjuguée sur les variables d'état, d'entrée et de sortie laisse l'entière dynamique du système inchangée, c'est à dire  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  and  $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  tel que :

**Definition 3**

**Système  $G$ -invariant et sortie équivariante :** La dynamique du système sera dite  $G$ -invariante si  $\exists (\varphi_g, \psi_g)_{g \in G}, \forall (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U}) :$

$$f(\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u})) = D\varphi_g(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

où  $D\varphi_g(\mathbf{x})$  désigne l'application dérivée de  $\varphi_g$  en  $\mathbf{x}$ . De plus, sa sortie sera dite  $G$ -equivariante si  $\exists (\rho_g)_{g \in G} G \times \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}, \forall (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U}) :$

$$h(\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u})) = \rho_g(h(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

La dernière définition signifie que les équations d'évolution et d'observation restent explicitement identiques à la suite de l'application des trois transformations. Basé sur la méthode du repère mobile de Cartan (cf. Annexe A), un ensemble complet de  $n$ -invariant(s) dans  $G$  peut être construit en considérant seulement l'action de groupe  $\psi_g$ .

**Definition 4**

**Equation de normalisation :** Pour deux points quelconques  $x, c \in \mathcal{T}$ , il existe  $g$  tel que  $\theta_g(x) = L_g(x) = gx = c$  ou  $\theta_g(x) = R_{g^{-1}}(x) = xg^{-1} = c$ . Ainsi l'existence d'un repère mobile noté par la suite  $\gamma$  en tout point  $x \in \mathcal{T}$  est garantie. En particulier, en choisissant  $c = e$ , nous en déduisons que  $\gamma(x) = x^{-1}$ . Cette procédure est appelée « normalisation ».

**Quelques explications sur les invariants  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$  :**

On considère le groupe de transformation composite défini par :

$$\begin{aligned} \phi : G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) &\rightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) \\ (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) &\mapsto \phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u}), \rho_g(\mathbf{y})) = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

tel que  $\dim(G) = \dim(\mathcal{X}) = n$  et  $\varphi_g$  de rang plein. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi : G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) &\rightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) \in \mathbb{R}^{n+m+p} \\ (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) &\mapsto \phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (g\mathbf{x}, \psi_g(\mathbf{u}), \rho_g(\mathbf{y})) = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

Considérons un point de coordonnées  $c \in \text{Im}(\varphi_g) \in \mathbb{R}^n$  et recherchons le paramètre  $g \in G$  tel que :

$$\phi_g^{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = \varphi_g(\mathbf{x}) = g\mathbf{x} = c$$

où  $\phi_g^{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$  désigne la restriction de  $\phi_g$  sur les composantes de l'état  $\mathbf{x}$  uniquement. Cette recherche, connue sous le nom de résolution des équations de normalisation, vise à déterminer la transformation locale, restreinte à  $\mathcal{X}$ , qui envoie  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  sur la section transverse  $\mathcal{C}$  aux orbites  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$  définie par  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ .

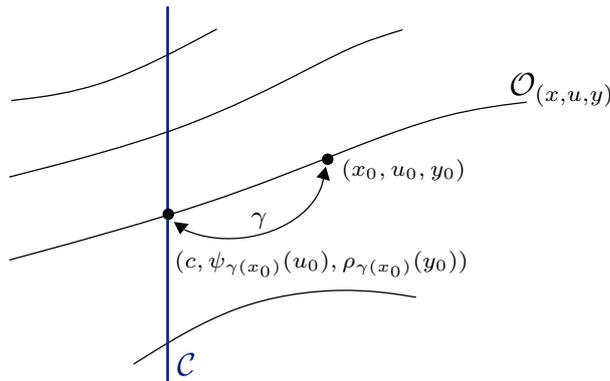


FIGURE 2.6 – Orbites du groupe de transformation

La régularité de  $\phi_g^{\mathbb{R}^n}$ , et donc de  $\varphi_g$  (difféomorphisme et donc inversible), permet, par application du théorème des fonctions implicites de garantir l'existence d'un fonction  $\gamma$  telle que :

$$g \cdot \mathbf{x} - c = 0 \Leftrightarrow g = \gamma(\mathbf{x})$$

$\gamma$  définit localement le repère mobile au point  $\mathbf{x}$ , qui envoie ce point sur la section transverse  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas précis où le groupe de Lie  $G$  et l'espace d'état  $\mathcal{X}$  peuvent être identifiés l'un à l'autre, le remplacement du paramètre  $g$  par  $\gamma(\mathbf{x})$  dans le triplet  $(g\mathbf{x}, \psi_g(\mathbf{u}), \rho_g(\mathbf{y}))$  définit un ensemble complet de  $m + p$  invariants fonctionnellement indépendants tels que :

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = \phi_{\gamma(\mathbf{x})}^{\mathbb{R}^{m+p}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\psi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{u}), \rho_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{y}))$$

L'invariance signifie que  $I(\phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) \forall g, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ . Afin de démontrer cette propriété pour  $I$ , repartons de :

$$\phi_g^{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = \varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = c$$

alors :

$$\forall g \in G, \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))}(\varphi_g(\mathbf{x})) = c = \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g}(\mathbf{x})$$

Le repère mobile étant unique, on a :

$$\forall g \in G, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g = \gamma(\mathbf{x})$$

Soit :

$$\begin{aligned} I(\phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})) &= \phi_{\gamma(\phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}))}^{\mathbb{R}^{m+p}}(\phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})) = \phi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g}^{\mathbb{R}^{m+p}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ &= \phi_{\gamma(\mathbf{x})}^{\mathbb{R}^{m+p}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\psi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{u}), \rho_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{y})) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

En particulier, si  $c = e$  (élément neutre) on obtient :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-1} \text{ et } I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\psi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{u}), \rho_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{y}))$$

Les  $m + p$  invariants fondamentaux ci-dessus vont servir de base à la construction d'observateurs invariants définis dans la suite.

### Definition 5

Un filtre invariant s'écrit :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i(I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), E) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.19)$$

où le gain matriciel  $\mathbf{K}_i$  dépend de la trajectoire du système seulement au travers de l'ensemble complet d'invariant connu  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{u})$ .  $w_i(\hat{\mathbf{x}}) := [D\varphi_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\hat{\mathbf{x}})]^{-1} \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_i$  est un vecteur invariant qui projette l'ensemble des termes de correction invariant sur chaque composante de l'équation d'évolution  $f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ , c'est-à-dire l'espace tangent.  $\partial/\partial \mathbf{x}_i$  est le  $i$ ème champ de vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Les propriétés de convergence de l'équation 2.19 dépendent des gains  $\mathbf{K}_i$  et de la façon dont l'erreur d'estimation sur l'état est définie. En effet, au lieu de considérer une erreur d'estimation d'état linéaire classiquement notée  $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ , la théorie des observateurs invariants définit une erreur d'estimation invariante sur l'état du système notée  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$ .

**Definition 6**

*La convergence asymptotique de  $\hat{\mathbf{x}}$  vers  $\mathbf{x}$  est équivalente à la stabilité de la dynamique de l'erreur d'état invariante qui est régie par l'équation très générale suivante :*

$$\dot{\eta} = \Upsilon(\eta, I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})) \tag{2.20}$$

*où  $\Upsilon$  est une fonction lisse (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Ainsi, il apparaît que  $\eta$  dépend de la trajectoire du système seulement au travers des invariants connus  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ .*

Cette méthode de construction est systématique pour le design des (pré)-observateurs appelés aussi observateurs candidats dont les termes de correction préservent les symétries du système originel. Néanmoins, les hypothèses nécessaires qui ont été formulées quant à la régularité et aux propriétés de l'action de groupe sur l'état, c'est à dire :  $\dim(\varphi_g) = \dim(G)$ , restent un verrou à lever afin que l'approche devienne complètement systématique. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, pour un cas particulier où la dynamique du système est invariante à gauche sur un groupe de Lie avec une sortie compatible à droite, une classe d'observateurs non linéaires localement convergents autour de toute trajectoire, et tel que le comportement global soit indépendant de la trajectoire du système, peut être définie.

**2.7.1 Un exemple jouet : la voiture non-holonome**

Considérons une voiture non-holonome (cf. Figure 2.7) possédant deux entrées de commande qui correspondent à l'accélération des roues avant (supposées motrices) et à la vitesse de rotation du volant. Nous adopterons la paramétrisation suivante pour le système :  $\delta$  désignera l'angle que forment les roues avant avec l'axe de la voiture ;  $\theta$  l'angle entre l'axe du véhicule et la direction horizontale ( $Ox$ ) et  $(x, y)$  désigneront les coordonnées du milieu de l'essieu arrière par rapport à un référentiel de référence. Pour conserver l'hypothèse de non-holonomie, nous supposerons que les deux roues motrices tournent à une même vitesse notée  $v$ . Ainsi, tout se passe comme s'il existait seulement deux roues virtuelles situées au centre des essieux. En utilisant la règle de composition des vitesses, une dynamique de la voiture peut s'écrire {Laumond, 2001} :

$$\mathcal{M} \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos(\delta) \cos(\theta) \\ v \cos(\delta) \sin(\theta) \\ \frac{v \sin(\delta)}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos(\theta) \\ u \sin(\theta) \\ uv \end{pmatrix} & \text{(équation d'évolution)} \\ h(x, y, \theta) = (x, y) & \text{(équation d'observation)} \end{cases} \tag{2.21}$$

où  $u$  est la vitesse et  $v$  une variable qui se déduit de l'angle de braquage  $\delta$  et de la longueur  $L$  telle que  $v = \tan(\delta/L)$ . Nous pouvons voir d'après la Figure 2.7 que, premièrement, la dynamique du système est indépendante de l'origine et de l'orientation du repère de référence choisi. Elle est donc invariante sous l'action du groupe  $SE(2)$  des rotations et translation du plan (voir Annexe A).

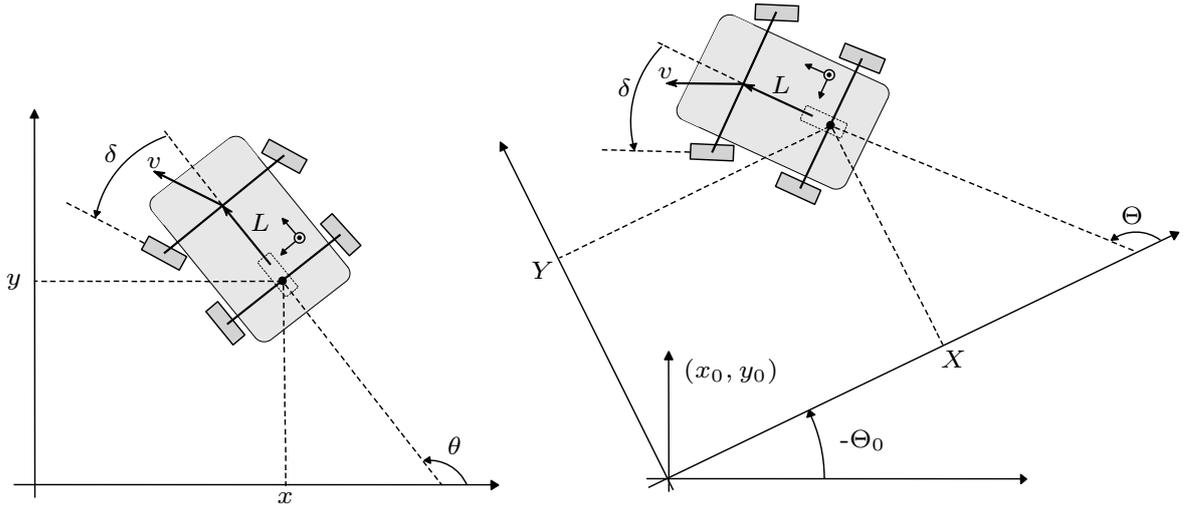


FIGURE 2.7 – La dynamique de la voiture est invariante sous l'action du groupe  $SE(2)$

L'espace d'état  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  coïncide topologiquement avec  $SE(2)$  comme cela est illustré par la figure 2.8 dans laquelle  $T(t)$  est la trajectoire de la voiture. Par suite, il apparaît que la dynamique fixée par les équations 2.21 est invariante par l'action d'un groupe de transformation qui peut ici s'apparenter à une multiplication à gauche. En effet, en identifiant  $G$  à  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ , pour tout vecteur  $(x_0 \ y_0 \ \theta_0)^T \in G$ , les applications  $\varphi_{(g_0)}(x)$  et  $\psi_{(g_0)}(x)$  définies ci-après correspondent à une action de  $G$  sur lui-même par multiplication à gauche qui laisse la dynamique inchangée.

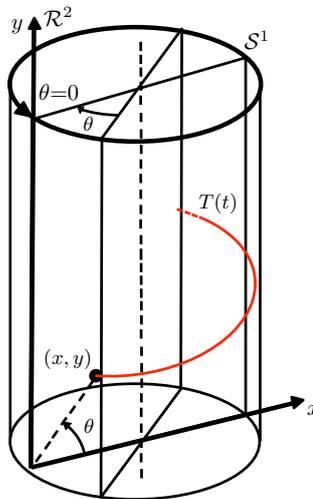


FIGURE 2.8 – L'espace d'état  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  coïncide topologiquement avec le groupe  $SE(2)$

En considérant le modèle explicite  $\mathcal{M}$  alors les variables transformées qui suivent (i.e.,  $\varphi_{(g_0)}(x)$  et  $\psi_{(g_0)}(x)$ ) permettent de conclure quant à la  $G$ -invariance de la dynamique du système.

On a :  $\forall g = (x_0 \ y_0 \ \theta_0) \in G$ ,

$$\varphi_g \left( x = (x \ y \ \theta)^T \right) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0 \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0 \\ \theta + \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Theta \end{pmatrix}$$

$$\psi_{(x_0, y_0, \theta_0)}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Par suite, la dynamique du système est en effet invariante au sens de la définition 3 car celle-ci peut s'écrire avec les nouvelles variables de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \overbrace{(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0)}^{\cdot} = \dot{x} \cos \theta_0 - \dot{y} \sin \theta_0 \\ &= u \cdot (\cos \theta \cdot \cos \theta_0 - \sin \theta \cdot \sin \theta_0) \\ &= u \cdot \cos(\theta + \theta_0) \\ &= U \cos \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \overbrace{(x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0 + y_0)}^{\cdot} = \dot{x} \sin \theta_0 - \dot{y} \cos \theta_0 \\ &= u \cdot (\cos \theta \cdot \sin \theta_0 - \sin \theta \cdot \cos \theta_0) \\ &= u \cdot \sin(\theta + \theta_0) \\ &= U \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\dot{\Theta} = \overbrace{(\theta + \theta_0)}^{\cdot} = \dot{\theta} = uv = UV$$

Par ailleurs, l'équation d'observation est  $G$ -compatible au sens de la définition 3 car pour tout  $(x_0 \ y_0 \ \theta_0)^T \in G$ , nous avons la variable transformée  $\rho_{(g_0)}(x)$  tel que :

$$\rho_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0 \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit avec les nouvelles variables de la manière suivante :

$$\rho_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0 \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0 \end{pmatrix} = h(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = h(X, Y)$$

Nous rajoutons désormais une remorque dont le point d'attache est le milieu de l'essieu arrière. En s'aidant de la figure 2.9 et de l'équation 2.21, une nouvelle représentation d'état du système peut être décrite mathématiquement comme suit :

$$\mathcal{M}^+ \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos(\delta) \cos(\theta) \\ v \cos(\delta) \sin(\theta) \\ \frac{v \sin(\delta)}{L} \\ \frac{v \cos(\delta) \sin(\theta - \theta_r)}{L_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos(\theta) \\ u \sin(\theta) \\ uw \\ u \sin(\theta - \theta_r) \end{pmatrix} & \text{(équation d'évolution)} \\ h(x, y, \theta) = (x, y) & \text{(équation d'observation)} \end{cases}$$

où le paramètre  $L_r$  représente la distance entre le point d'attache et le milieu de l'essieu de la remorque. On peut voir très clairement que les variables  $x_r, y_r, \delta_r, \dot{x}_r, \dot{y}_r, \dots$  peuvent être obtenues analytiquement à partir de la seule connaissance de l'état de la voiture et de l'angle  $\theta_r$ .

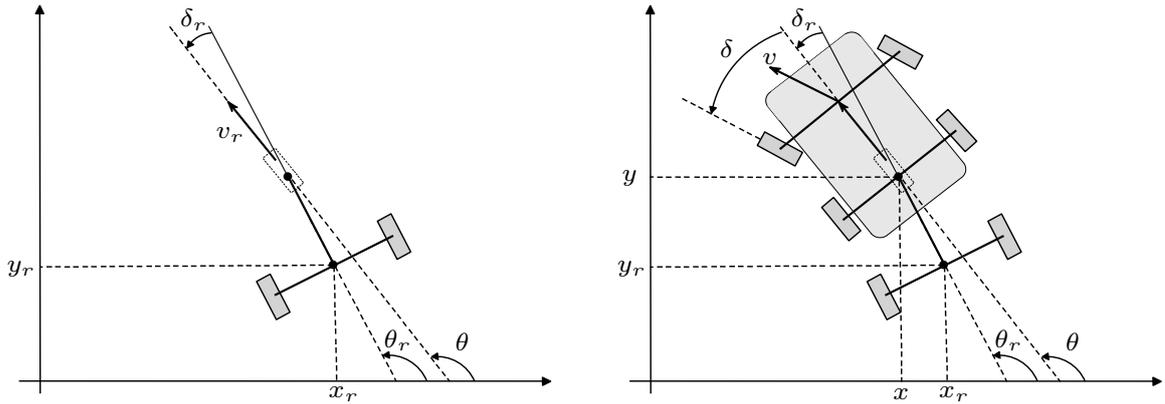


FIGURE 2.9 – Une voiture suivie d'une remorque

Ce nouveau modèle d'état noté  $\mathcal{M}^+$  n'est pas modifié par l'action du groupe  $SE(2)$ . En effet, nous pouvons pour tout  $(x_0 \ y_0 \ \theta_0)^T \in G$  trouver une application  $\varphi_{(x_0 \ y_0 \ \theta_0)}$  telle que la dynamique du modèle soit  $G$ -invariante :

$$\varphi_g \left( x = (x \ y \ \theta \ \theta_r)^T \right) = \begin{pmatrix} x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0 \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0 \\ \theta + \theta_0 \\ \theta_r + \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Theta \\ \Theta_r \end{pmatrix}$$

Bien que nous ayons rajouté une variable d'état  $\theta_r$ , la dynamique de l'équation d'évolution reste invariante au sens de la définition 3 et la dynamique de  $\theta_r$  s'écrit avec les nouvelles variables de la manière suivante :

$$\dot{\Theta}_r = \dot{\theta}_r = u \sin(\theta - \theta_r) = U \sin(\Theta - \Theta_r)$$

Ce nouveau groupe de transformation serait utilisable dans la construction d'un observateur invariant même si  $\dim(G) < \dim(\mathcal{X})$ . Nous allons appliquer maintenant la méthode de construction des observateurs invariants développée à la section précédente. Nous nous arrêterons à l'élaboration d'un observateur invariant candidat (encore appelé pré-observateur). Dans le chapitre 4, nous verrons l'utilité des propriétés de convergence de l'équation 2.19, ce qui permettra de régler le gain de correction  $K$ . L'idée directrice est ici de comprendre les étapes de la construction des pré-observateurs invariants sur un exemple pédagogique et d'analyser les propriétés de celui-ci pour l'estimation d'état dans un cas analytique. Pour cela, la synthèse s'effectuera sur l'exemple précédent de la voiture non-holonome simple.

### Construction d'une erreur de sortie invariante

Nous considérons donc le modèle 2.21,  $G$ -invariant et  $G$ -équivariant. Le groupe de transformation défini auparavant est tel que  $\dim(G) = \dim(\mathcal{X}) = n = 3$  ce qui permet d'identifier et d'assimiler  $G$  et  $\mathcal{X}$ . Les actions seront également de rang plein i.e., telles que  $\dim(\text{Im}(\varphi_g)) = \dim(G) = 3$ . Identifiant  $G$  à  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  à partir du cas particulier où  $g=x^{-1} = (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta)^T$ , nous obtenons, via les équations de normalisation (cf. Définition 4) :

$$\varphi_{x^{-1}}(x) = \begin{pmatrix} x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta) - x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin(-\theta) + y \cos(-\theta) + x \sin \theta - y \cos \theta \\ \theta - \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e \quad (2.22)$$

où  $e$  est l'élément neutre du groupe  $G$  muni de l'addition. Les résultats de l'équation de groupe 2.22 permettent ensuite de définir l'ensemble complet de  $m + p$  invariants fondamentaux à partir de la paramétrisation  $g = x^{-1} \in G$ .  $\psi_{x^{-1}}(u)$  fournira  $m$  invariant fondamentaux pour la dynamique du système et  $\rho_{x^{-1}}(y)$   $p$  invariant fondamentaux pour l'observation de celui-ci. Ainsi pour construire une erreur de sortie invariante, nous ne considérons plus l'erreur de sortie linéaire usuelle  $\hat{y} - y = h(\hat{x}, u) - y$  qui ne préserve pas la symétrie du système pour l'estimation, mais une erreur de sortie invariante construite autour de la transformation invariante de sortie  $\rho_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y)$  et de la solution de l'équation de normalisation notée  $\gamma$  (repère mobile) telle que :

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} -x \cos \theta - y \sin \theta & x \sin \theta - y \cos \theta & -\theta \end{pmatrix}^T$$

Une erreur de sortie invariante s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E &= \rho_{\gamma(x_0, y_0, \theta_0)}(\hat{x}, \hat{y}) - \rho_{\gamma(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} - x \\ \hat{y} - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, conformément aux symétries du système, l'erreur de sortie invariante peut être interprétée comme une erreur de sortie classique projetée dans un repère de Frenet (multiplication par une matrice de rotation). Ce résultat est le même que celui utilisé pour découpler les entrées/sorties d'une erreur de suivi de trajectoire. En effet, en considérant comme  $\hat{P}$  la position à estimer et  $P$  la position réelle (cf. Figure 2.10), nous obtenons comme sorties les deux erreurs suivantes :

$$e_{\parallel} = (\hat{P} - P) \cdot \vec{T} \quad \text{et} \quad e_{\perp} = (\hat{P} - P) \cdot \vec{N}$$

avec :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Nous retrouvons bien les mêmes erreurs de sorties invariantes.

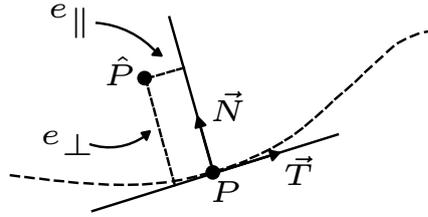


FIGURE 2.10 – Interprétation des erreurs invariantes entre la position réelle  $P$  et estimée  $\hat{P}$

### Construction d'un repère invariant

Un repère invariant en dimension 3 noté  $(w_1, w_2, w_3)$  est donné par l'image de la base canonique de  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  par l'application dérivée  $DL_{(x,y,\theta)}$ . Autrement dit, il nous faut calculer la différentielle de l'application  $\varphi_g(x, y, \theta)$  qui s'apparente ici à une multiplication à gauche pour chercher l'espace tangent à l'algèbre de Lie de  $SE(2)$  (cf. Annexe A).

$$DL_{(x,y,\theta)} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Ainsi, en inversant la matrice Jacobienne donnée par l'équation 2.23 pour  $\theta_0 = -\theta$  et en identifiant celle-ci à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , nous obtenons les trois champs de vecteurs invariants suivants :

$$w_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}; \quad w_2 = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}; \quad w_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

On peut remarquer que ce repère invariant correspond au repère de Frenet. Il n'est pas étonnant de trouver un tel repère étant donné la topologie des trajectoires du système sur laquelle agit le groupe de Lie  $SE(2)$ . En effet, dans un espace euclidien (non courbé), l'observateur qui viendrait naturellement pour estimer en l'absence de bruit la position  $\hat{P}$  serait l'observateur de Luenberger mais dans le cas où l'espace est une variété (par exemple riemannienne), on doit tenir compte des courbures (ou géodésiques) de celle-ci.

Dans notre exemple, pour tenir compte de la géodésique, notée  $\zeta$ , la méthode de construction remplace le terme d'erreur classique par un terme non linéaire invariant pour respecter les symétries et projette les gains de correction dans un repère lui-même invariant (repère de Frenet) pour garantir une symétrie de la dynamique par rapport aux rotations (cf. Figure 2.11).

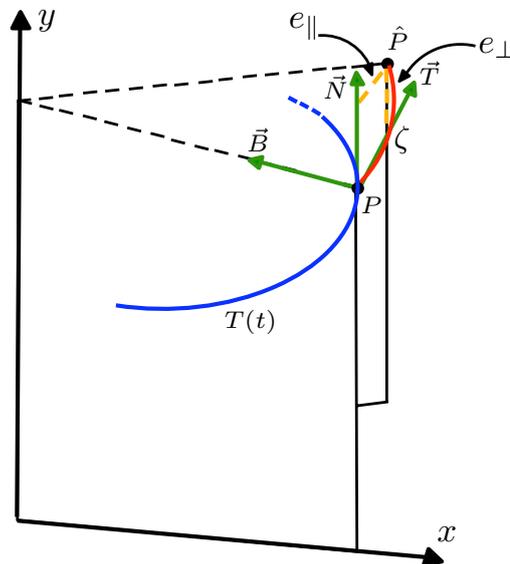


FIGURE 2.11 – *Interprétation du repère invariant construit sur le groupe  $SE(2)$*

### Pré-observateur invariant

Tout pré-observateur invariant s'écrira donc d'après la définition 5

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \hat{\theta} \\ u \sin \hat{\theta} \\ uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & -\sin \hat{\theta} & 0 \\ \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & -\sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} - x \\ \hat{y} - y \end{pmatrix}$$

où  $\bar{\mathbf{K}}$  est une matrice  $3 \times 2$  de gains dont les entrées dépendent ici uniquement de l'erreur de sortie invariante  $E$  construite précédemment.

## Chapitre 3

# Modèles pour la navigation inertielle

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Préambule : modélisation des mini-drones</b>	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>Dérivation d'un modèle pour la navigation</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Problème de la navigation inertielle dite « véritable »</b>	<b>71</b>
<b>3.4</b>	<b>Modélisation et identification des imperfections des capteurs inertiels</b>	<b>74</b>
3.4.1	La variance d'Allan	75
3.4.2	Modélisation des bruits caractéristiques	78
<b>3.5</b>	<b>La navigation inertielle du pauvre : l'AHRS</b>	<b>80</b>
3.5.1	Observabilité du modèle exploité par l'AHRS	81
3.5.2	Retour sur l'AHRS : prise en compte des erreurs de mesure	84
<b>3.6</b>	<b>L'AHRS augmenté d'un GPS et d'un baromètre : l'INS</b>	<b>86</b>
3.6.1	Observabilité des imperfections sur les mesures de l'INS	87

---

### 3.1 Préambule : modélisation des mini-drones

La représentation mathématique de la dynamique d'un système commandé, comme celle qui caractérise le vol d'un drone aérien, repose fréquemment sur la notion d'état. L'état d'un système correspond à un ensemble de grandeurs dont la connaissance à un instant donné permet de calculer et de prédire son évolution future. L'introduction et l'exploitation de cette notion est naturelle pour des systèmes dont les évolutions au cours du temps peuvent être décrites par des équations différentielles. En effet, la solution d'un système d'équation(s) différentielle(s) d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  dépend de la donnée de  $n$  condition(s) initiale(s) qui détermine(nt) ainsi l'état au cours du temps. Ainsi, modéliser un système dynamique à partir d'une représentation d'état, que celle-ci soit linéaire ou non, apparaît comme plus riche en comparaison d'autres types de modélisations (boîtes noires entrées/sorties notamment) puisque ce sont directement les lois de la

physique qui s'y trouvent formalisées. Le rôle d'un estimateur est donc de fournir une estimation précise des états non-mesurés, et donc non directement accessibles par la mesure, connaissant ses entrées et un certain nombre de mesures disponibles imparfaites.

Dans le cadre du développement d'un système de navigation précis pour un mini-drone aérien, le processus d'estimation s'intègre dans une structure complexe où chaque niveau doit être optimisé. La figure 3.1 positionne le système de Guidage, de Navigation et de Contrôle (GNC) dans cet ensemble et illustre la complexité de la problématique de l'estimation d'état pour un engin aérien autonome. Chaque module est indépendant mais influence significativement les qualités de vol de l'engin et sa capacité à suivre une trajectoire de référence. Ainsi, le module d'estimation s'intègre de la façon suivante : le système de navigation reçoit en entrée des mesures bruitées issues des capteurs et fusionne ces données sur la base d'un modèle dynamique du véhicule pour calculer une solution au problème d'estimation. L'état ainsi estimé peut être exploité soit pour générer une trajectoire de référence à suivre d'où est tiré un certain nombre de consignes pour le contrôle de l'engin (pilotage et guidage), soit pour restituer des paramètres de vol directement utilisés dans les boucles de contrôle de plus bas niveau. Ainsi, les différentes mesures fournies par les capteurs embarqués sont utilisées par un algorithme de filtrage avancé qui pondère ces données imparfaites avec celles prédites par un modèle. Généralement, les algorithmes d'estimation reposant sur une modélisation du système dynamique opèrent sur les principes de la mécanique selon deux types de technique de filtrage avancé :

- **le filtrage construit à partir d'un modèle générique** utilise comme connaissance *a priori* les lois classiques de la mécanique appliquées à un corps en mouvement sans se préoccuper de la cause de celui-ci. Il n'a donc besoin d'aucun modèle de la résultante des forces agissant sur le drone, considérée connue par ailleurs grâce aux mesures délivrées par un accéléromètre 3 axes. L'intérêt de ce type d'estimateur est de pouvoir s'appliquer à tout drone aérien, quelque soit sa configuration, sans aucune adaptation de l'algorithme puisqu'il ne repose pas sur un modèle détaillé des forces qui s'appliquent à celui-ci. Le modèle cinématique exploité, souvent formulé à l'aide de quaternions dans le cas des mini-drones du fait de leur agilité en vol, permet de calculer à tout instant la dérivée de l'état de l'engin en fonction d'un certain nombre de grandeurs mesurées et de la valeur de l'état à l'instant courant. Un tel modèle repose donc fortement sur la qualité et la disponibilité continue de mesures fournies par la chaîne de capteurs. La principale difficulté pour exploiter cette modélisation à des fins d'estimation réside dans la capacité à s'affranchir des imperfections liées aux mesures. Une première solution consiste à intégrer sur l'engin des capteurs toujours plus performants, qui respectent également les contraintes liées à la taille du mini-drone et qui ne grèvent pas le budget alloué au développement du système. Une autre solution consiste à réestimer ces imperfections en ligne, augmentant ainsi la difficulté du problème d'estimation du fait de l'accroissement de la dimension de l'état estimé. Cette solution pose également le problème de l'observabilité des états recherchés comme nous le verrons par la suite ;

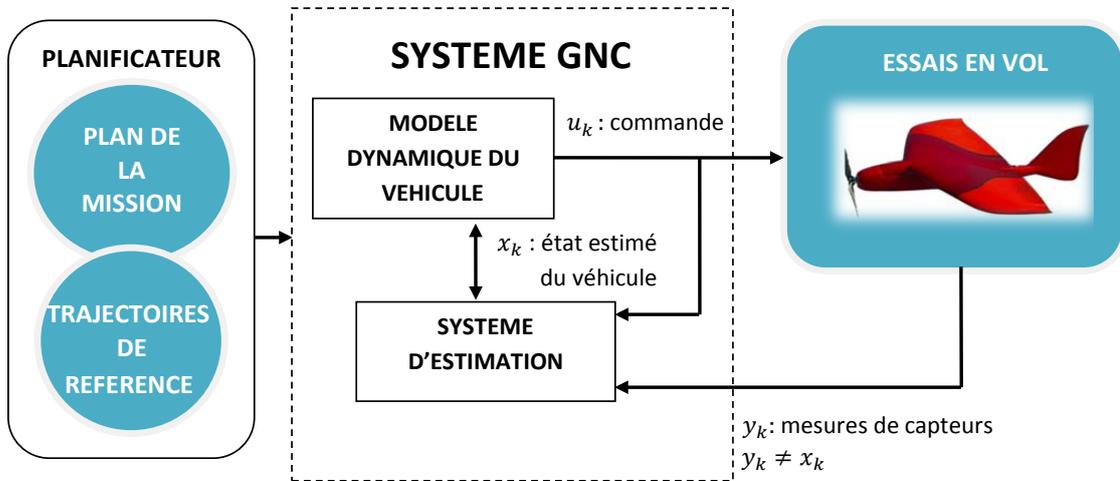


FIGURE 3.1 – *Système de Guidage, Navigation et Contrôle (GNC) pour un drone aérien*

- **le filtrage construit à partir d'un modèle spécifique** se fonde sur un modèle physique de la dynamique du véhicule dans lequel les causes du mouvement (forces externes qui s'appliquent) sont elles-mêmes modélisées. Dans le cas de la dynamique du vol des aéronefs, celles-ci englobent : - les efforts aérodynamiques ; - les forces de pesanteur ; - et les efforts propulsifs. La modélisation ainsi construite se veut paramétrique et nécessite une étape d'identification préalable à toute exploitation. Elle repose donc sur une forte connaissance *a priori*. Habituellement, cette dernière exploite soit des tests menés en soufflerie sur une maquette de l'engin, soit des données issues de codes de calcul de type CFD (Computational Fluid Dynamics) pour ce qui est de la composante aérodynamique (cf . Figure 3.2). Ce modèle de connaissance doit être le plus représentatif possible de la réalité tant pour être utilisé à des fins de simulation du comportement de l'aéronef que pour être exploité à des fins de prédiction dans n'importe quel type de schéma d'estimation embarqué basé modèle. Dériver un tel modèle n'est pas une chose aisée, d'autant plus lorsque celui-ci se doit d'être le plus représentatif possible du véhicule réel dans tout son domaine de fonctionnement. A



FIGURE 3.2 – *Flux d'air au dessus de l'aile d'un mini-drone (ENAC/ISAE)*

la différence d'une modélisation purement cinématique, ce type de modèle ne sera propre qu'à un seul type de mini-drone. De plus, il n'apparaît bien adapté qu'au mini-drone à voilure fixe (i.e. de type avion) et pas ou peu à la catégorie des quadri-rotors pour lesquels les phénomènes aérodynamiques instationnaires restent complexes à représenter. Vis-à-vis de la problématique d'estimation, et à la différence du filtrage fondé sur un modèle générique, cette catégorie de modélisation très physique et propre à chaque engin ajoute une difficulté supplémentaire liée aux erreurs de modélisation souvent délicates à traiter. En effet, leur nature, très différente de celles des erreurs de mesure (bruits aléatoires ou biais déterministes), peut entraîner une divergence de l'estimation. Une solution simple et usuelle consiste à leur associer une ou plusieurs variables d'état que l'on cherchera à estimer dans la mesure où le problème reste globalement observable, à l'instar de la seconde solution évoquée pour s'affranchir des erreurs de mesure. L'amélioration constante des moyens d'expérimentation et l'augmentation des capacités de calcul permettent aujourd'hui, de bâtir des modèles de connaissance prévisionnels de plus en plus fiables et précis. Néanmoins, disposer de ces modèles précis représente un investissement (temps, euros) important qu'il convient de mesurer avant de mettre en place une telle démarche de modélisation pour le développement de mini-drones qui doit rester à « bas coûts ».

Dans notre travail, nous nous sommes essentiellement intéressés aux différents filtres construits à partir d'un modèle générique. La conception d'une chaîne avionique complète (comprenant les aspects matériel et logiciel) de contrôle du mini-drone performante ne nécessite pas simplement de disposer de lois de commande qui le sont elles-mêmes mais également d'algorithmes de filtrage avancés qui pré-traitent efficacement les données issues directement des capteurs, voire même qui essaient de reconstruire des informations non mesurées ou de restituer des données manquantes. Ceci est d'autant plus vrai dans le cas des mini-drones équipés de matériels bas-coûts. En outre, tout système GNC au sens large cherche à s'appuyer sur une estimation précise de la position, de la vitesse, des angles d'attitude et des vitesses de rotation de l'aéronef.

## 3.2 Dérivation d'un modèle pour la navigation

Nous considérons le système dynamique  $(\Sigma)$  représenté mathématiquement par le modèle d'évolution et le modèle d'observation, suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \\ \mathbf{Z} = h(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \end{cases}$$

Dans la représentation d'état  $(\Sigma)$ ,  $\mathbf{X}$  correspond au vecteur d'état,  $\mathbf{Z}$  est le vecteur des sorties du modèle et  $\mathbf{U}$  représente le vecteur des entrées. Cette représentation mathématique générale abstrait aussi bien le modèle générique, ou le modèle spécifique qui peut être exploité pour la

construction d'estimateurs d'état améliorant les performances de la navigation des véhicules aériens. De ce fait, nous cherchons donc à construire un modèle le plus complet possible et suffisant qui soit capable notamment de représenter au mieux toutes les dynamiques utiles à la navigation d'un véhicule aérien c'est-à-dire son attitude, sa vitesse et sa position. Bien que les mini-drones soit composés en règle générale de parties mobiles comme les surfaces de contrôle par exemple qui conditionnent pour leur part leur pilotabilité et leur manoeuvrabilité, ils seront assimilés à un seul corps sur lequel agissent conjointement le poids et les forces aérodynamiques. Ainsi, le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) permet d'écrire :

$$m\dot{\vec{V}}_c = m\vec{g} + \vec{F} \quad (3.1)$$

$$\dot{\vec{\sigma}}_c = \vec{M}_c \quad (3.2)$$

Dans les équations 3.1 et 3.2 ,  $m$  désigne la masse du corps,  $\vec{V}_c$  le vecteur vitesse du centre de masse noté  $C$ ,  $\vec{g}$  le vecteur accélération de la pesanteur et  $\vec{F}$  la résultante des forces aérodynamiques.  $\vec{\sigma}_c$  est le moment cinétique en  $C$  de l'engin qui dépend essentiellement du vecteur vitesse de rotation  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{M}_c$  désigne le moment en  $C$  des forces extérieures qui s'appliquent sur lui. La dérivation des équations du modèle complet sera menée sous les deux hypothèses suivantes :

#### **Hypothèse 1**

**Drone à voilure fixe :** *Les surfaces de contrôle sont de masse négligeable par rapport à la masse de l'ensemble de l'engin.*

#### **Hypothèse 2**

**Drone à voilure tournante :** *Les parties en rotation ne modifient pas la position du centre de masse.*

#### **Hypothèse 3**

**Terre plate :** *Nous considérerons que la Terre est plate et que celle-ci ne tourne pas. Nous nous placerons systématiquement dans un repère supposé galiléen.*

La première hypothèse indique que le modèle de navigation est construit sur la base d'un système rigide pour lequel la masse est supposée invariante. Par ailleurs, la deuxième hypothèse implique que le domaine de vol est supposé représenter une partie infinitésimale lorsqu'elle est comparée aux dimensions de la Terre et que l'effet de sa rotation n'a aucune conséquence sur la dynamique du drone vue depuis le référentiel galiléen. Ainsi, le modèle complet sera obtenu en ajoutant aux équations 3.1 et 3.2, les relations cinématiques qui relient la position à la vitesse de translation, et l'orientation à la vitesse de rotation. L'orientation d'un mini-drone est définie à partir des angles qui permettent de passer du repère dit avion au repère accroché à la terre. Celle-ci peut être décrite soit par les angles d'Euler notés  $\varphi, \theta, \psi$  (gîtes, assiette, lacet) soit par l'intermédiaire des quaternions. Nous utiliserons dans la suite cette dernière représentation qui : - évite le problème des singularités propres aux angles d'Euler ; - permet d'obtenir une certaine robustesse face aux différentes erreurs numériques qui pourraient

apparaître lors des multiples changements de repère. L'annexe C rappelle certaines définitions ainsi que certaines propriétés liées aux quaternions. Le cadre de modélisation le plus général que nous serons amenés à considérer conduira à développer une solution au problème de l'estimation de la vitesse, de l'orientation et de la position du mini-drone. Ainsi, les équations de cette modélisation s'expriment comme :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q * \omega \quad (3.3)$$

$$\dot{V} = A + q * \frac{f}{m} * q^{-1} \quad (3.4)$$

$$\dot{X} = V \quad (3.5)$$

Dans l'équation 3.4, les forces extérieures appliquées au système sont projetées dans le repère terrestre (opération  $q * \frac{f}{m} * q^{-1}$ ). Ainsi, cette formulation des équations induit implicitement que la position, la vitesse et l'orientation de l'engin s'entendent être exprimées dans le repère terrestre. Il aurait été également possible de travailler à partir de ces mêmes équations différentielles où les grandeurs auraient été exprimées dans le repère avion. Les notations qui seront adoptées ici sont les suivantes :

- $q$  est le quaternion représentant l'orientation du corps par rapport au repère terrestre ;
- $\omega$  désigne le vecteur vitesse de rotation du mini-drone exprimé dans le repère avion ;
- $V$  correspond au vecteur vitesse sol de l'engin et est exprimé dans le repère terrestre ;
- $A = (0 \ 0 \ g)^T$  est le vecteur accélération de la pesanteur exprimé dans le repère terrestre (convention North-East-Down (NED)) ;
- $\frac{f}{m}$  s'assimile à l'accélération spécifique (i.e, non causée par les forces gravitationnelles) de l'engin exprimée dans le repère avion et induite par les forces extérieures.

Comme dit précédemment, les techniques d'estimation basées modèle peuvent s'appuyer sur deux types de représentation du système dynamique (générique ou spécifique), chacune disposant d'avantages et d'inconvénients. Par rapport au modèle proposé ci-dessus, quelques spécificités sont néanmoins à prendre en compte.

- les algorithmes d'estimation construits à partir d'un modèle spécifique de l'engin, et qui reposent sur les équations 3.3-3.5, nécessitent un modèle explicite des forces extérieures appliquées au système et notées  $f$  ;
- les algorithmes d'estimation construits à partir d'un modèle générique reposent sur une équation où la résultante des forces  $f$  est considérée connue grâce à un accéléromètre triaxial. Celui-ci est accroché en un point  $P$  de l'appareil et mesure  $\vec{a}$ , l'accélération spécifique dans le repère avion du mini-drone tel que  $\vec{a} := \dot{\vec{V}}_p - \vec{g}$  au point  $P$ . En effet, si l'accéléromètre est situé au centre de masse  $C$ , il mesure d'après 3.1  $\vec{a} = \dot{\vec{V}}_p - \vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$ ,

### 3.3 Problème de la navigation inertielle dite « véritable »

---

c'est à dire en fait  $\frac{f}{m}$ . En revanche, si  $P$  est différent de  $C$ , alors la mesure est plus difficile à exploiter puisque dans ce cas  $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{CP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{CP})$  et il devient nécessaire de prendre en compte l'équation des moments.

Ainsi, disposant de capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres qui délivrent  $a_m$  et  $\omega_m$  en axes avion) nous pouvons utiliser directement à la place des équations 3.3-3.5 les relations suivantes :

$$\mathcal{M}_s \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega \\ \dot{V} = A + q * a * q^{-1} \\ \dot{X} = V \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans l'équation 3.6,  $V$  désigne le vecteur vitesse du point  $P$  exprimé dans le repère terrestre (en lieu et place de  $\vec{V}_P$ ) ; en effet cette équation est simplement la projection de  $\vec{a} := \dot{\vec{V}}_P - \vec{g}$ .

### 3.3 Problème de la navigation inertielle dite « véritable »

Après avoir décrit une modélisation générique qui sera largement exploitée dans nos travaux, nous allons maintenant nous intéresser au problème mathématique de l'estimation de l'état du mini-drone à résoudre. Dans un premier temps, nous cherchons à savoir s'il est possible de mettre au point un estimateur fondé sur le modèle générique [vitesse/position/orientation] présenté à la section 3.2 qui fusionnerait uniquement les données issues des capteurs inertiels. L'approche classique pour construire un tel estimateur nécessite de mener une étude d'observabilité, ou plus précisément de détectabilité, du modèle, au regard de son vecteur d'état et de son vecteur de sortie (s'il en a un) afin d'établir si les variables d'état peuvent être reconstituées à partir des entrées connues du système et des mesures. Nous allons voir que pour construire un tel estimateur, il faut que le système ( $\Sigma$ ) vérifie certaines conditions.

#### Definition 7

**Observabilité d'un système dynamique :** Le système ( $\Sigma$ ) sera dit localement observable (i.e, autour d'un point situé sur une orbite  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$ ) s'il est possible d'exprimer l'état  $\mathbf{x}$  du système en fonction des signaux connus  $\mathbf{u}, \mathbf{y}$  et leurs dérivées successives, c'est-à-dire,

$$\mathbf{x} = \mathcal{M}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots).$$

Si le système n'est pas observable, il est possible localement de réécrire et d'isoler ses parties observables et non-observables par changement de coordonnées sur l'état tel que :

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}), \quad (3.9)$$

où 3.8 et 3.9 décrivent un sous-système observable. Par suite, la seule façon d'estimer la partie inobservable  $\mathbf{x}_1$  du système est alors, en supposant qu'un observateur fournit par ailleurs une estimation de  $\mathbf{x}_2$ , d'intégrer l'équation 3.7 à partir d'une condition initiale  $\hat{\mathbf{x}}_1(t=0)$  estimée tel que  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = f_1(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{u})$ . A noter que cette opération ne fonctionnera correctement que si la dynamique  $f_1$  est stable.

Si nous considérons maintenant la modélisation  $\mathcal{M}_s$ , il apparait que les mesures inertielles ( $a_m$  et  $\omega_m$ ) sont des entrées du modèle d'évolution ( $\dot{q}$  et  $\dot{V}$ ). Comme cette modélisation n'a pas de modèle d'observation, elle n'est pas observable au sens de la définition 7. La seule manière d'estimer l'état  $(q^T \ V)^T$  est de recopier les équations non linéaire du système modélisé<sup>3</sup> en substituant les vrais états par leurs estimés tel que :

$$\mathcal{O}_s \begin{cases} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} * \omega_m \\ \dot{\hat{V}} = A + \hat{q} * a_m * \hat{q}^{-1} \end{cases}$$

L'observateur élémentaire ainsi obtenu présente la particularité de ne pas faire intervenir des termes de corrections du fait que  $\mathcal{M}_s$  n'a pas de modèle d'observation. Ainsi, nous devons analyser son comportement en présence d'erreurs et notamment la détectabilité du système. Afin de simplifier l'analyse, nous étudions le système linéarisé issu de  $\mathcal{M}_s$  autour d'un point d'équilibre  $(\bar{q}^T \ \bar{\omega}_m^T \ \bar{V}^T \ \bar{a}_m^T)$ . Cette linéarisation permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} (\bar{q} * \delta \omega_m + \delta q * \bar{\omega}_m) \\ \delta \dot{V} &= \delta (q * a * q^{-1}) \\ &= \delta q * \bar{a}_m * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * \bar{a}_m * \delta q^{-1} + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \\ &= \delta q * \bar{a}_m * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * \bar{a}_m * \underbrace{(-\bar{q}^{-1} * \delta q * \bar{q}^{-1})}_{\delta q^{-1}} + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \end{aligned}$$

3. nous considérerons l'état lié à la position  $X$  uniquement dans la construction de l'observateur final, ce qui ne change en rien à la conclusion de l'analyse portant sur l'observabilité du modèle complet.

### 3.3 Problème de la navigation inertielle dite « véritable »

Si nous considérons maintenant un point d'équilibre autour de l'état  $(\bar{q}^T \ \bar{\omega}_m^T \ \bar{V}^T \ \bar{a}_m^T) = (\bar{q}^T \ 0 \ 0 \ \bar{a}_m^T)$ , on obtient (au passage on notera que dans ce cas  $\bar{a}_m = -\bar{q}^{-1} * A * \bar{q}$ )

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} \bar{q} * \delta \omega_m \\ \delta \dot{V} &= \delta q * (-\bar{q}^{-1} * A * \bar{q}) * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * (-\bar{q}^{-1} * A * \bar{q}) * \underbrace{\delta q^{-1}}_{-\bar{q}^{-1} * \delta q * \bar{q}^{-1}} + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \\ &= -\delta q * \bar{q}^{-1} * A + A * \delta q * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \\ &= -(\delta q * \bar{q}^{-1}) * A + A * (\delta q * \bar{q}^{-1}) + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \\ &= 2A \wedge (\delta q * \bar{q}^{-1}) + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \end{aligned}$$

En résumé :

$$\begin{cases} \delta \dot{q} = \frac{1}{2} \bar{q} * \delta \omega_m \\ \delta \dot{V} = 2A \wedge (\delta q * \bar{q}^{-1}) + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \end{cases}$$

Nous pouvons donc maintenant décliner le système linéaire des erreurs d'estimation en définissant  $(\delta \eta, \delta \nu) = (\delta \hat{q} - \delta q, \delta \hat{V} - \delta V)$ , ce dernier étant développé par la suite en trois sous-systèmes (horizontal, latéral, vertical) pour étudier plus précisément la détectabilité de l'estimateur. L'observateur linéarisé correspondant est donné par les équations :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\eta} &= \delta \dot{\hat{q}} - \delta \dot{q} = \frac{1}{2} \bar{q} * \delta \omega_m - \frac{1}{2} \bar{q} * \delta \omega_m = 0 \\ \delta \dot{\nu} &= 2A \wedge (\delta \hat{q} * \bar{q}^{-1}) + \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} - 2A \wedge (\delta q * \bar{q}^{-1}) - \bar{q} * \delta a_m * \bar{q}^{-1} \\ &= 2A \wedge ((\delta \hat{q} - \delta q) * \bar{q}^{-1}) \\ &= 2A \wedge (\delta \eta * \bar{q}^{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, nous arrivons au système d'équation différentielle suivant en faisant l'hypothèse que les quaternions sont de normes unitaires :

$$\begin{cases} \delta \dot{\eta} = 0 \\ \begin{pmatrix} \delta \dot{\nu}_1 \\ \delta \dot{\nu}_2 \\ \delta \dot{\nu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g\delta q_2 \\ 2g\delta q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \eta(t) = \text{constante} = \delta \eta_0 = \begin{pmatrix} \delta \hat{q}_0 - \delta q_0 \\ \delta \hat{q}_1 - \delta q_1 \\ \delta \hat{q}_2 - \delta q_2 \\ \delta \hat{q}_3 - \delta q_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta \nu_1 \\ \delta \nu_2 \\ \delta \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g\delta q_2^0 t + \delta \nu_1^0 \\ 2g\delta q_1^0 t + \delta \nu_2^0 \\ \delta \nu_3^0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.10)$$

L'équation 3.10 montre immédiatement que les composantes horizontale et latérale des erreurs sur la vitesse divergent linéairement au cours du temps et que l'erreur sur la vitesse verticale reste constante. Les erreurs en position quant à elles divergent toutes soit paraboliquement, soit

linéairement (pour l'erreur en position verticale). Ce constat deviendrait bien pire si l'on considérait dans les équations du modèle les imperfections des différentes mesures inertielles qui entrent en ligne de compte ( $a_m + \omega_m$ ). En effet, dans ce cas-là, nous aurions obtenu une divergence parabolique des erreurs sur la vitesse sur les composantes horizontale, latérale et une divergence linéaire de l'erreur sur la vitesse verticale. Les erreurs de positionnement divergeraient également selon des variations en  $t^3$  et  $t^2$ . Il est très simple de relever que les conclusions seraient totalement différentes si nous écrivions les équations du système (3.1 et 3.2), en tenant compte de la rondeur de la Terre<sup>4</sup>. En effet, dans ce cas là, l'estimateur obtenu produirait des erreurs d'estimation bornées sur les vitesses horizontale et latérale. Celles-ci oscillent avec une période d'environ 84minutes; ce que l'on appelle l'effet Schuler qui permet notamment de statuer sur la précision requise pour les capteurs (gyromètre et accéléromètre). Il en ressort notamment que les familles de capteurs « bas coût » sont à exclure pour ce type particulier d'estimateur car ils engendrent des erreurs trop importantes. Si le sous-système dans le plan horizontal présente des erreurs bornées, le cap et l'altitude divergent de façon linéaire et exponentielle respectivement. En effet, le modèle de gravité ( $g$  inversement proportionnel à  $z$ ) fait diverger exponentiellement la vitesse verticale; un recalage par un capteur d'altitude (un baroaltimètre) est donc indispensable pour que l'estimateur fonctionne.

Ce fonctionnement constitue là un véritable système de navigation inertielle. Néanmoins, nous ne bénéficions de l'effet Schuler que si les capteurs utilisés sont performants et stables de manière à ce que l'effet de leurs imperfections reste petit sur la période d'oscillation de cet effet (de l'ordre de 84 minutes). Malheureusement, les capteurs MEMS utilisés dans les mini-drones sont loin d'atteindre de telles performances. C'est la raison pour laquelle l'hypothèse Terre plate est suffisante pour développer un schéma d'estimation qui fusionnera plusieurs sources de mesure et procédera au recalage du modèle de prédiction par des termes de correction adaptés.

### 3.4 Modélisation et identification des imperfections des capteurs inertiels

Comme nous l'avons précédemment évoqué dans le chap 1, section 1.3, les capteurs inertiels, issus de la technologie MEMS disposent clairement d'un avantage significatif en termes de poids, de taille et de coût par rapport aux systèmes mécaniques ou optiques. Cependant, leurs caractéristiques en terme de précision ne sont pas parfaites. Cette imprécision est généralement causée par deux types d'erreur qui peuvent être de nature déterministe ou aléatoire. A l'apparition des premières technologies MEMS, les erreurs déterministes étaient plus fréquentes et d'une importance bien plus grande qu'aujourd'hui. En effet, pour la mise en œuvre d'un gyromètre trois axes, il devait y avoir trois circuits indépendants montés orthogonalement dans le système

---

4. En pratique, on considère même qu'elle est plutôt ellipsoïdale pour gagner en précision. De ce fait, l'hypothèse 3 est remise en cause en introduisant une latitude pour repérer un point à la surface de la terre et le champ de gravité est fonction de l'altitude

de navigation. Cette conception provoquait d'importants problèmes de déséquilibre entre les axes et donc des erreurs en terme de précision atteignable. Aujourd'hui, la quasi-totalité des gyromètres MEMS sont produits sur une seule et même puce électronique. Ainsi, les erreurs déterministes dues par exemple à un défaut d'alignement sont calibrées une fois pour toutes en usine mais sont souvent sous-estimées par rapport à leurs vraies valeurs comme cela est décrit dans {De Agostino *et al.*, 2013}. Les capteurs inertiels souffrent par ailleurs d'erreurs diverses de nature aléatoire. Ils fournissent des mesures de l'accélération et de la vitesse angulaire d'un objet. Ces mesures sont ensuite généralement intégrées pour obtenir notamment la position et la vitesse de l'objet. Toutefois, les valeurs de ces mesures ne sont pas vraiment illustratives du seul mouvement de l'objet car elles sont aussi perturbées par divers phénomènes aléatoires tels que l'apparition d'une dérive sur la mesure au cours du temps causée par des variations de température ou bien l'apparition de points aberrants imputée au bruit électronique ou encore l'apparition d'erreur liée au vieillissement du capteur.

Par conséquent, une modélisation précise des erreurs de nature aléatoire permettant de les prendre en compte est une des tâches principales dans la conception d'un schéma d'estimation performant. Plusieurs types de méthode existent pour identifier plus ou moins ces différentes erreurs caractéristiques des capteurs MEMS. La technique d'Allan utilisée dans cette thèse est la plus couramment appliquée pour modéliser et identifier les erreurs de celles-ci. Cette méthode développée à l'origine pour étudier la stabilité des oscillateurs de précision, est applicable de manière systématique à tous les systèmes inertiels et son résultat, calculé hors ligne, est simple d'interprétation. Toutefois, pour obtenir une précision suffisante, elle a besoin de traiter une importante quantité de données.

#### 3.4.1 La variance d'Allan

Le principe de cette méthode, très bien connue des métrologues, est de calculer à partir d'un enregistrement de multiples mesures bruitées issues d'un capteur, la variance du signal de sortie de ce dernier en fonction du temps. Ces données peuvent être vues comme un vecteur comprenant  $N$  données, échantillonné avec une période  $\tau_0$ . Ces données sont ensuite divisées en plusieurs groupes, appelés clusters, chacun représentant un historique temporel d'une durée égale à  $\tau$  secondes qui comprend exactement  $n$  échantillons ( $n < N/2$ ) (cf. Figure 3.3).

La méthode d'Allan calcule la variance du signal à différentes échelles de temps. Celle-ci est tout d'abord calculée pour le temps élémentaire  $\tau_0$  puis pour toutes les durées multiples de ce temps. Ce calcul exploite les échantillons regroupés en clusters présentés précédemment. Une moyenne des échantillons pour chaque clusters est tout d'abord déterminée avant de servir à un calcul de variance. Les résultats sont représentés sous la forme de diagrammes aux échelles logarithmiques en  $x$  et  $y$  et permettent de tracer les variations de l'écart-type normalisé par la valeur moyenne du signal en fonction de la largeur des clusters. Ainsi, ces résultats font apparaître les différentes imperfections (bruit, bruit périodique, dérive, etc) caractérisant le

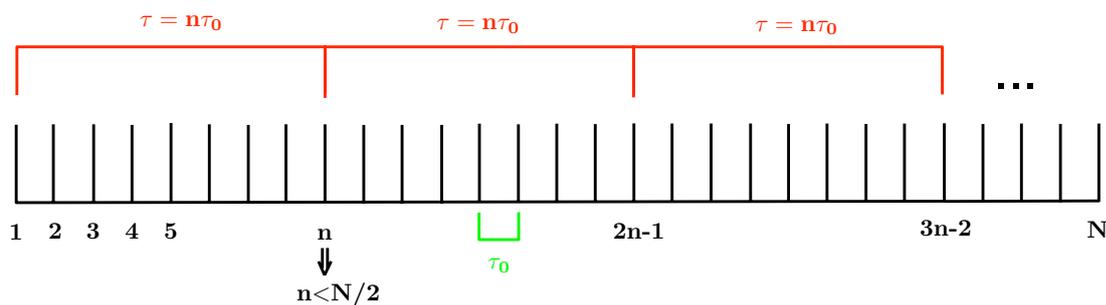


FIGURE 3.3 – Structure des données pour la méthode de la variance d'Allan

signal en fonction de la durée  $\tau$  pour laquelle la variance a été calculée (cf. Figure 3.4). Pour les capteurs inertiels gyroscopiques ou accélérométriques, les principales causes de bruit peuvent être classées en cinq catégories : Quantization Noise (QN), Angular Random Walk (ARW), Bias Instability (BI), Rate Random Walk (RRW) et Rate Ramp (RR).

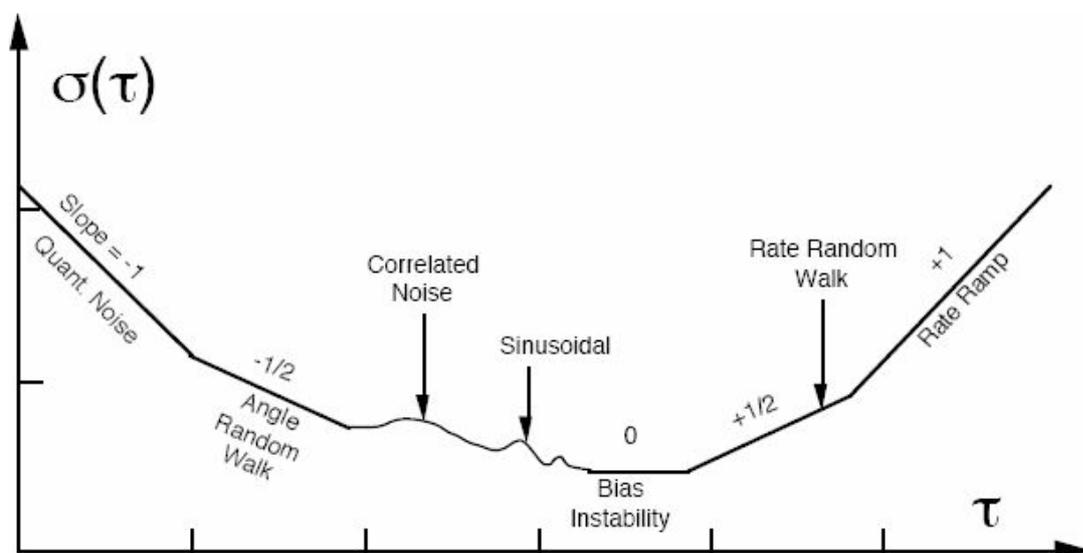


FIGURE 3.4 – Courbe typique de la variance d'Allan pour des capteurs inertiels MEMS

Afin de calculer les différentes variances caractérisant les multiples bruits présents dans le signal des capteurs inertiels, il est nécessaire de déterminer tout d'abord la moyenne de chacun des  $M$  groupes de  $r$  échantillons noté  $\Omega(t)$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket, \bar{\Omega}_k(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} \Omega_k(t) dt \quad (3.11)$$

Dans l'équation 3.11,  $\bar{\Omega}_k(t)$  représente la moyenne du signal pour le  $k^{ième}$  groupe de mesures. La variance d'Allan, contrairement à la variance classique, est une suite moyennée de variances terme à terme, calculée pour une suite d'échantillons  $\{s_i\}_{0 \leq i \leq N}$  comme :

$$\sigma_{Allan}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i)^2 \quad (3.12)$$

Par suite, on définit classiquement la suite des moyennes comme :

$$\eta_{k+1,k} = \bar{\Omega}_{k+1}(\tau) - \bar{\Omega}_k(\tau)$$

Enfin, la variance d'Allan se déduit en injectant dans 3.12 cette suite des moyennes en lieu et place des écarts  $s_{i+1} - s_i$  entre les échantillons i.e., tel que :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{N-1} \eta_{k+1,k}^2$$

Par suite, il est par ailleurs possible d'établir la relation qui relie cette variance d'Allan à la densité spectrale de puissance du signal. Nous avons :

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{+\infty} S(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (3.13)$$

La variance d'Allan peut-être approchée localement, sur un segment d'échelles de temps, à partir des termes ARW ou VRW qui représente le bruit de mesure HF affectant la sortie capteur et le RRW qui représente la fluctuation à long terme de l'offset du biais de mesure. Nous exploiterons donc ces deux termes pour modéliser les imperfections de l'accéléromètre et du gyromètre. La sortie des capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) peut donc être affectée de plusieurs types de bruit dont nous supposerons qu'ils sont statistiquement indépendants. De la sorte, la variance d'Allan  $\sigma^2(\tau)$  calculée précédemment peut être explicitée comme :

$$\sigma^2(\tau) = \sigma_{QN}^2(\tau) + \sigma_{ARW/VRW}^2(\tau) + \sigma_{BI}^2(\tau) + \sigma_{RRW}^2(\tau) + \sigma_{RR}^2(\tau)$$

Soit une somme de cinq contributions reflétant les différents types de bruit. Par la suite et à l'aide de l'équation 3.13, il est possible de calculer analytiquement chaque  $\sigma_x^2(\tau)$  composant la variance d'Allan du signal en définissant pour chaque type de bruit sa densité spectrale de puissance  $S(f)$ . Ainsi, il est possible d'établir que {Allan, 1966}{Allan, 1987} :

\*  $\sigma_{QN}(\tau) = Q \frac{\sqrt{3}}{\tau}$  où  $Q$  correspond à l'amplitude du bruit de quantification et qui peut se lire sur la courbe de  $\sigma^2(\tau)$  en  $\tau = 3^{1/2}$ . Cette source de bruit sera donc représentée par une pente de  $-1$  en échelle logarithmique ;

- \*  $\sigma_{ARW/VRW}(\tau) = \frac{Q}{\sqrt{\tau}}$  où  $Q$  correspond à la racine carrée de la densité spectrale du bruit blanc caractérisant le spectre de ce type d'erreur. L'ARW ou la VRW sera donc identifiée sur la courbe de  $\sigma^2(\tau)$  par l'enveloppe de pente  $-1/2$ ;
- \*  $\sigma_{BI}(\tau) \cong 0.6645 \cdot B$  où  $B$  désigne le coefficient d'instabilité du biais qui intervient dans l'expression de la densité spectrale associée à ce bruit<sup>5</sup>. Celle-ci est telle :

$$S(f) = \begin{cases} B^2/2\pi f & \text{pour } f \leq f_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La contribution de ce type de bruit sur la variance d'Allan est donc constante. Asymptotiquement elle correspondra à la plage constante de la courbe  $\sigma^2(\tau)$ ;

- \*  $\sigma_{RRW}(\tau) = K\sqrt{\frac{\tau}{3}}$  où  $K$  est égal à la racine carrée de la densité spectrale de bruit pour  $\omega = 1rad.s^{-1}$ . Sa valeur peut être lue sur le diagramme de  $\sigma^2(\tau)$  en  $\tau = 3$ . Cette source de perturbation conduira à ce qu'asymptotiquement  $\sigma^2(\tau)$  tangente une droite de pente  $+1/2$ ;
- \*  $\sigma_{RR}(\tau) = R\frac{\tau}{\sqrt{2}}$  où  $R$  désigne la pente de la dérive (erreur de traînage). La valeur de  $R$  est obtenue sur la courbe de  $\sigma^2(\tau)$  pour  $\tau = \sqrt{2}$ . Asymptotiquement, la variance d'Allan tangentera une droite de pente  $+1$  en échelles logarithmiques lorsque  $\tau \gg 1$ ;

### 3.4.2 Modélisation des bruits caractéristiques

Dans le prolongement de la présentation de la méthode de la variance d'Allan, nous cherchons ici à modéliser l'imperfection des capteurs inertiels de façon à représenter le mieux possible leurs défauts. Une modélisation générale peut-être décrite par la relation suivante {Wenger et Egziabher, 2003}{Bronz *et al.*, 2013} :

$$\zeta_m = (1 + S_f)\zeta_t + \nu_\zeta + b(t) \tag{3.14}$$

où  $\zeta_m$  correspond à la mesure délivrée par le capteur et  $\zeta_t$  est la « vraie » mesure à l'instant  $t$ .  $S_f$  est un facteur d'échelle qui sera considéré ici nul, i.e  $S_f = 0$ , ce qui suppose que les capteurs auront été calibrés avant toute utilisation.  $b(t)$  représente l'éventuel biais de mesure qui peut varier dans le temps et  $\nu_\zeta$  s'apparente au bruit HF supposé blanc de densité spectrale de puissance  $R$ . Le biais  $b(t)$  peut être lui-même modélisée comme une somme de deux contributions : l'une constante qui peut être déterminée hors ligne, en calculant la moyenne de la mesure du capteur sur une longue période de temps et l'autre qui varie lentement dans le temps.

5. La densité spectrale de puissance à un support borné et un spectre en  $1/f$

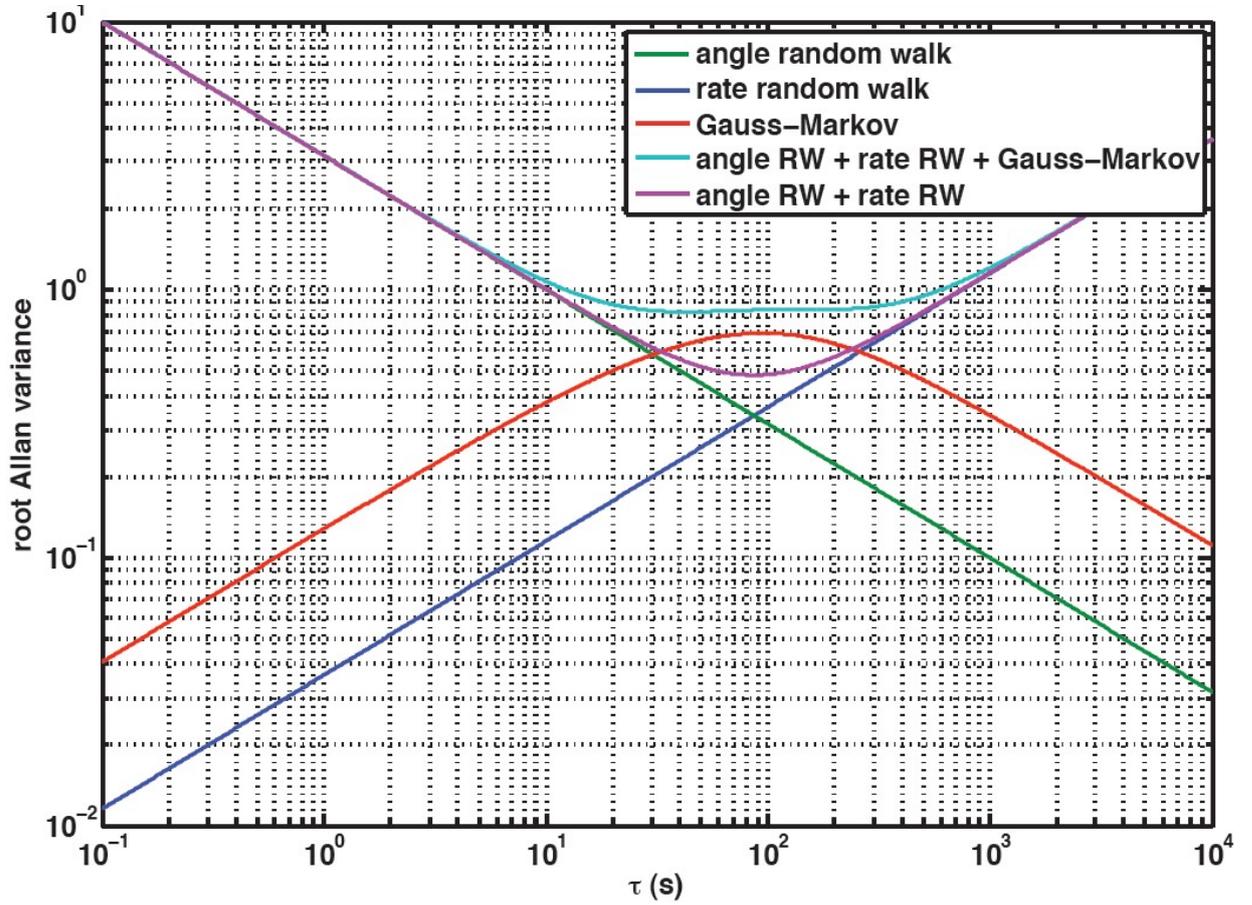


FIGURE 3.5 – Asymptotes de la variance d'Allan pour différents bruits

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$b(t) = b_0 + b_1(t)$$

où  $b_1(t)$  évolue selon un processus de Gauss-Markov tel que :

$$\dot{b}_1(t) = \frac{-b_1(t)}{\tau} + \nu_{\zeta b_1}$$

Dans l'expression précédente  $\tau$  est une constante de temps qui fixe la dynamique de cette marche aléatoire filtrée et  $\nu_{\zeta b_1}$  est le bruit blanc gaussien générateur de densité spectrale  $Q$  tel que  $E\{\nu_{\zeta b_1}(t_1)\nu_{\zeta b_1}(t_2)\} = Q\delta(t_1 - t_2)$ . Les trois paramètres de ce modèle peuvent être approchés par la variance d'Allan comme nous le montre la figure 3.5. Dans le cadre de notre application, nous nous placerons dans le cas particulier où  $\tau = \infty$ , ce qui simplifie le dernier modèle mais permet encore une approximation raisonnable des caractéristiques du modèle d'imperfection des capteurs inertiels.

### 3.5 La navigation inertielle du pauvre : l’AHRS

Si nous disposons, comme c’est le cas pour de nombreux mini-drones, uniquement de capteurs MEMS proprioceptifs de faible précision ne délivrant par conséquent aucune information sur la vitesse et la position de l’engin, alors il nous faut renoncer à estimer ces grandeurs toutefois utiles pour la navigation. Pour surmonter cette difficulté et pouvoir estimer *a minima* l’attitude de l’appareil à partir des équations de l’estimateur  $\mathcal{O}_s$ , il sera nécessaire de formuler une hypothèse supplémentaire sur l’accélération de l’engin ainsi que de disposer d’un capteur extéroceptif permettant de borner les erreurs d’estimation en cap. Pour ce faire, l’estimateur d’état non linéaire utilise trois capteurs triaxiaux qui délivrent un total de neuf mesures scalaires :

- ▶ trois d’entre elles sont associées aux trois magnétomètres (capteurs extéroceptifs) qui fournissent une mesure locale du champ magnétique terrestre  $B$ , supposé connu et constant<sup>6</sup> et exprimée dans le repère avion telle que  $y_B = q^{-1} * B * q$  où  $B = [B_x \ B_y \ B_z]^T$  puisse être considéré comme une sortie du modèle ;
- ▶ trois gyromètres permettent d’obtenir une mesure de la vitesse angulaire de l’engin selon les 3 axes, notée  $\omega_m \in \mathbb{R}^3$  et telle que  $\omega_m = [\omega_{mx} \ \omega_{my} \ \omega_{mz}]^T$  ;
- ▶ et finalement, trois accéléromètres donnent une mesure de l’accélération spécifique des mini-drones notée  $a_m \in \mathbb{R}^3$  telle que  $a_m = [a_{mx} \ a_{my} \ a_{mz}]^T$ .

Par suite, l’estimateur sera construit sous l’hypothèse suivante :

#### Hypothèse 4

**Accélérations du mini-drone :** Nous supposons dans la suite de cette section que l’accélération du mini-drone est telle que :  $\|\dot{V}\| \ll \|A\|$ . Ainsi, à partir des relations cinématiques précédemment vues, nous avons :

$$a = q^{-1} * (\dot{V} - A) * q \approx -q^{-1} * A * q$$

Connaissant parfaitement le vecteur  $A = [0 \ 0 \ g]^T$  supposé ici constant, la relation précédente qui découle de l’hypothèse formulée, permet, sous réserve de validité de cette dernière de faire émerger  $a$  comme une nouvelle sortie du modèle qui sera comparée à sa mesure  $a_m$  ; le tout étant exprimé dans le repère avion. Ainsi, le problème considéré se ramène à estimer l’orientation  $q$

6. le champ magnétique peut-être déterminé à partir d’un modèle magnétique terrestre ; par exemple celui-ci noté  $B$ , est égal à  $[0.5156 \ 0.0570 \ 0.8549]$  aux coordonnées locales de vol  $43.617\text{-}43^\circ\text{-}37'$  (N) et  $1.450\text{-}1^\circ\text{-}27'$  (E) des mini-drones de l’ENAC utilisés pour cette thèse.

sur la base du modèle  $\mathcal{M}_{ahrs}$  suivant :

$$\mathcal{M}_{ahrs} \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega_m \\ y = \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1} * A * q \\ q^{-1} * B * q \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.15)$$

Un dispositif estimant l'orientation à partir des capteurs inertiels faible précision et d'un magnétomètre est souvent dénommé en aéronautique par l'acronyme AHRS (Attitude and Heading Reference System).

**Remarque 1**

*Dans le cas où les mesures fournies par les capteurs inertiels seraient parfaites (c'est à dire ni bruitées, ni biaisées), l'état  $q$  serait obtenu de façon immédiate. En effet, les deux relations de sorties de l'équation 3.15 permettraient de connaître l'action de la matrice de rotation associée à  $q$ , sans même qu'il y ait besoin d'utiliser l'équation différentielle décrivant la dynamique  $\dot{q}$ . Par conséquent, l'attitude de l'engin serait complètement déterminée.*

**3.5.1 Observabilité du modèle exploité par l'AHRS**

Les différents capteurs embarqués dont nous disposons pour la conception d'un AHRS disposent de performances limitées et présentent donc des imperfections. D'une manière générale, les principales sources d'erreur inhérentes aux systèmes de navigation peuvent être répertoriées en trois grandes catégories :

1. les imperfections de bas niveau (bruits, biais, dérives, etc.) des instruments de mesure dont les principales caractéristiques ont été discutées au chapitre 1 ;
2. les possibles erreurs provenant de la calibration comme par exemple celles qui sont induites par les perturbations magnétiques environnantes ;
3. et les problèmes liés au modèle de gravité, utilisé dans les différentes modélisations pour la navigation.

Nous allons nous intéresser ici aux différentes erreurs liées aux imperfections intrinsèques des capteurs dont une modélisation peut être prise en compte dans un modèle global de l'AHRS pour améliorer la qualité de l'estimation. Les trois types d'instruments de mesure nécessaires à l'élaboration d'un tel dispositif présentent principalement deux défauts majeurs : l'instabilité du biais de mesure (exprimée en deg/h pour les gyromètres et en  $\mu g$  pour les accéléromètres), et l'instabilité du facteur d'échelle (cf. Equation 3.14). Ces défauts peuvent être considérés comme étant à peu près constants sur les durées d'expérimentation. Toutefois, il apparaît plus judicieux d'intégrer le fait qu'ils peuvent varier lentement dans le temps. Idéalement, on souhaiterait estimer ces erreurs en ligne en supplément des autres états de l'engin.

Afin de connaître le nombre d'imperfections susceptibles d'être modélisées sans introduire d'inobservabilité au sein du modèle global, nous procédons à une analyse d'observabilité au premier ordre des équations décrivant  $\mathcal{M}_{ahrs}$  en linéarisant celui-ci autour d'un point d'équilibre quelconque noté  $(\bar{q}, \bar{\omega})$ . Nous obtenons alors le modèle linéarisé qui suit :

$$\begin{cases} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2}(\bar{q} * \delta \omega + \delta q * \bar{\omega}) \\ \begin{pmatrix} \delta y_A \\ \delta y_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta q * A * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * A * (-\bar{q}^{-1} * \delta q * \bar{q}^{-1}) \\ \delta q * B * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * B * (-\bar{q}^{-1} * \delta q * \bar{q}^{-1}) \end{pmatrix} \end{cases}$$

En prenant pour  $(\bar{q}, \bar{\omega})$  les valeurs  $(1, 0)$ , nous arrivons au système linéarisé suivant en considérant que le quaternion  $q$  est de norme unitaire, en remarquant au passage que  $B_y \simeq 0$ , ce qui est vérifié en pratique (la déviation latérale du champ magnétique terrestre est nulle. Le phénomène de déclinaison magnétique est négligé du fait que le Nord géométrique est égal au Nord magnétique).

$$\begin{cases} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} \delta \omega \\ \begin{pmatrix} \delta y_A \\ \delta y_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta q * A + A * \delta q \\ \delta q * B + B * \delta q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A \times \delta q \\ 2B \times \delta q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g\delta q_2 \\ 2g\delta q_1 \\ 0 \\ -2B_z\delta q_2 \\ 2(B_z\delta q_1 - B_x\delta q_3) \\ 2B_x\delta q_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.16)$$

Le modèle obtenu comporte donc 4 états  $[q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  et 6 sorties, 3 pour  $y_A$  et 3 pour  $y_B$ . En réalité, nous supposons que l'état  $\delta q_0$  est relié aux autres par la relations  $\delta q_0 = \sqrt{1 - \delta q_1^2 - \delta q_2^2 - \delta q_3^2}$ . Ainsi, le modèle sera observable par définition si  $\delta q_1, \delta q_2$  et  $\delta q_3$  peuvent être exprimées en fonction de  $u$ , de  $y$  et de leurs dérivées successives ce qui est bien entendu le cas au 1<sup>er</sup> ordre au regard de l'équation 3.16. Ainsi, sur la base des 3 entrées du système contenues dans le vecteur  $\delta \omega_m$ , supposé connu et des 6 mesures associées aux vecteurs  $y_{Am}$  et  $y_{Bm}$  (soit 9 valeurs), il est possible de garantir que le système restera observable si et seulement si nous cherchons à réestimer, en intégrant dans l'état,  $9 - 3 = 6$  imperfections au maximum. Celles-ci prendront la forme de grandeur d'erreurs de mesure constantes ou lentement variantes dans le temps dont les dynamiques pourront être modélisées par des marches aléatoires. Le choix de ces 6 degrés de liberté est alors propre à chaque application. Nous verrons d'ailleurs que nous avons systématiquement cherché à estimer 3 biais de mesure additifs pour les gyromètres i.e. tels que  $\omega = \omega_m - \omega_b$ . Néanmoins, revenons pour l'heure à une recherche de 6 biais de mesure erronant les 6 composantes du vecteur de sortie complet  $(y_A^T \ y_B^T)^T$ . Nous allons démontrer que les relations de l'équation (3.16) permettent de statuer quant à l'observabilité de chacune de

ces erreurs. En effet, les 6 relations ne vont pas rendre possible l'estimation des 9 inconnues du problème, d'autant plus qu'il est impossible d'observer certains de ces biais du fait de la structure des équations. Il s'avère alors nécessaire de distinguer deux cas de figure pour conclure quant à l'observabilité du modèle selon les imperfections que l'on considère sur les deux vecteurs de mesures accélérométrique ( $y_A$ ) et magnétométrique ( $y_B$ ).

- **CAS 1 : maximum d'imperfections sur les magnétomètres** : Concernant ce cas, deux biais constants sur  $y_B$  et un sur  $y_A$  peuvent être estimés. En effet, si nous prenons le cas particulier de biais additifs sur les mesures tels que  $y_A = a_m = -a - a_b$  et  $y_B = b_m = b - b_b$ , nous obtenons les équations d'observations suivantes (choix ①) :

$$\delta y_A = \begin{pmatrix} \delta y_{A_x} \\ \delta y_{A_y} \\ \delta y_{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g\delta q_2 - \delta a_{b_x} \\ 2g\delta q_1 - \delta a_{b_y} \\ -\delta a_{b_z} \end{pmatrix}, \quad \delta y_B = \begin{pmatrix} \delta y_{B_x} \\ \delta y_{B_y} \\ \delta y_{B_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B_z\delta q_2 - \delta b_{b_x} \\ 2(B_z\delta q_1 - B_x\delta q_3) - \delta b_{b_y} \\ 2B_x\delta q_2 - \delta b_{b_z} \end{pmatrix}$$

- **Biais sur  $\delta y_B$**  :

Il apparaît clairement que le biais  $\delta b_{b_y}$  portant sur la mesure  $\delta y_{B_y}$  est inobservable quelques soient les choix formulés par ailleurs. En effet, nous avons :

$$\delta b_{b_y} = -2\delta y_{B_y}(B_z\delta q_1 - B_x\delta q_3)$$

Il n'est pas possible de reconstituer conjointement  $\delta q_3$  et  $\delta b_{b_y}$  à partir de la seule relation y compris dans le **CAS 2** où  $\delta a_{b_y}$  n'existe pas.

Choix ① : en revanche, nous constatons qu'il est possible d'exploiter les deux autres relations du modèle d'observation relatif à  $\delta y_{B_x}$  pour déterminer les biais  $\delta b_{b_x}$  et  $\delta b_{b_z}$ , sous réserve de ne pas considérer de biais sur  $\delta a_{b_x}$  sur la première composante de l'accélération. En effet, nous avons alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \delta b_{b_x} = -2B_z\delta q_2 - \delta y_{B_x} \\ \delta b_{b_z} = 2B_x\delta q_2 - \delta y_{B_z} \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $\delta q_2$  est calculé selon :

$$\delta q_2 = -\frac{\delta y_{A_x}}{2g}$$

- **Biais sur  $\delta y_A$**  : Poursuivant notre raisonnement, il apparaît également que le biais  $\delta a_{b_y}$  additionné à la mesure de la composante  $\delta y_{A_y}$ , ne peut être observable car nous obtenons le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 2B_z\delta q_1 - 2B_x\delta q_3 = \delta y_{B_y} \\ 2g\delta q_1 - \delta a_{b_y} = \delta y_{A_y} \end{cases} \quad (3.18)$$

Enfin, il apparaît que  $\delta a_{b_z}$  est l'unique biais qu'il sera possible d'estimer sur la mesure  $\delta y_A$ .

- **CAS 2 : maximum d'imperfections sur les accéléromètres :** Concernant ce cas deux biais constants sur  $y_A$  et un sur  $y_B$  peuvent être estimés. En effet, si nous reprenons l'analyse du **CAS 1** en intégrant les inobservabilités naturelles du système, on a (choix ②) :

$$\delta y_A = \begin{pmatrix} \delta y_{A_x} \\ \delta y_{A_y} \\ \delta y_{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g\delta q_2 - \delta a_{b_x} \\ 2g\delta q_1 - \delta a_{b_y} \\ -\delta a_{b_z} \end{pmatrix}, \quad \delta y_B = \begin{pmatrix} \delta y_{B_x} \\ \delta y_{B_y} \\ \delta y_{B_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B_z\delta q_2 - \delta b_{b_x} \\ 2(B_z\delta q_1 - B_x\delta q_3) - \delta b_{b_y} \\ 2B_x\delta q_2 - \delta b_{b_z} \end{pmatrix}$$

ou choix③  $\begin{pmatrix} -2B_z\delta q_2 - \delta b_{b_x} \\ 2(B_z\delta q_1 - B_x\delta q_3) - \delta b_{b_y} \\ 2B_x\delta q_2 - \delta b_{b_z} \end{pmatrix}$

- **Biais sur  $\delta y_A$  :** Nous constatons que nous pouvons observer  $\delta q_1, \delta q_2, \delta a_{b_x}$  et  $\delta a_{b_z}$  à partir des équations suivantes :

$$\text{choix②} \begin{cases} \delta q_1 &= -\frac{\delta y_{A_x}}{2g} \\ \delta q_2 &= -\frac{1}{2B_y}\delta y_{B_x} \\ \delta a_{b_z} &= -\delta y_{A_z} \\ \delta a_{b_x} &= -2g\delta q_2 - \delta y_{A_x} \end{cases} \quad \text{ou choix③} \begin{cases} \delta q_1 &= -\frac{\delta y_{A_x}}{2g} \\ \delta q_2 &= -\frac{\delta y_{B_z}}{2B_y} \\ \delta a_{b_z} &= -\delta y_{A_z} \\ \delta a_{b_x} &= -2g\delta q_2 - \delta y_{A_x} \end{cases}$$

- **Biais sur  $\delta y_B$  :** Le biais  $\delta b_{b_y}$  étant impossible à observer, il est possible de considérer soit un biais additif sur la composante  $\delta y_{B_x}$  ou un biais additif sur la composante  $\delta y_{B_z}$ .

### 3.5.2 Retour sur l'AHRS : prise en compte des erreurs de mesure

L'élaboration d'un AHRS performant nécessite généralement un travail d'analyse poussé (comme celui précédemment réalisé) pour définir quels biais de mesure vont être intégrés au processus d'estimation. Le choix des imperfections doit être le plus judicieux possible. A ce choix, peuvent s'ajouter diverses considérations par ailleurs comme celle consistant à découpler les effets du recalage du modèle de prédiction dans le schéma d'estimation. Ainsi, il est souvent souhaitable d'utiliser les mesures fournies par les magnétomètres, et qui sont facilement perturbées par l'environnement, pour estimer uniquement le cap de l'engin. Ainsi, en cas d'éventuelles perturbations du champ magnétique mesurées par le capteur (situation très fréquemment observée dans la pratique), seul cet angle d'attitude se trouvera faussé. L'attitude en roulis et tangage

de l'engin sera quant à elle préservée de ces erreurs fréquentes qui de plus peuvent être importantes. Ce découplage de l'estimation réalisé confère au mini-drone certaines garanties quant à la sécurisation de son vol. Il a été montré que ce découplage pouvait s'effectuer en utilisant non pas directement la mesure issue des magnétomètres dans les équations d'observation mais un produit vectoriel entre les mesures fournies par les accéléromètres et les magnétomètres tel que :  $y_A \times y_B = q^{-1} * C * q := y_c$  où  $C := A \times B$ . Cependant, ce faisant, il est possible de constater aisément que  $\langle A, C \rangle = 0$  ce qui induit mathématiquement une relation de dépendance entre ces mesures et donc entre les incertitudes de mesure qui pourraient être modélisées. Le nombre de composantes mesurées passe donc au total de 9 à 8 du fait de cette opération artificielle. Ainsi, seules 5 imperfections peuvent donc être réestimées au sein du schéma d'estimation, le modèle restant alors complètement observable. Par conséquent, dans le cas où 3 biais gyrométriques sont estimés ( $\omega_m$ ), il ne reste plus « que » 2 paramètres de défaut observables. Par ailleurs, 2 autres conclusions intéressantes peuvent être tirées : 1) il n'est possible d'estimer qu'une seule imperfection scalaire sur les mesures fournies par les accéléromètres si l'on ne veut plus dépendre des mesures fournies par les magnétomètres (la composante  $\delta q_2$  étant le lien) ; 2) l'estimateur ne dépend que de la composante longitudinale du champ magnétique terrestre.

Finalement, nous considérerons la modélisation des capteurs comme il suit : le gyroscope mesure  $\omega_m = \omega + \omega_b$  où  $\omega_b$  est un vecteur de biais constant ou lentement variable ; l'accéléromètre mesure  $a_m = a_s \cdot a$  où  $a_s > 0$  est un facteur d'échelle constant ; enfin le magnétomètre mesure  $y_B = b_s q^{-1} * B * q$  où  $b_s > 0$  est également un facteur d'échelle constant ou lentement variable. Nous obtenons ainsi le modèle complet de l'AHRS intégrant les imperfections des différents capteurs :

$$\mathcal{M}_{ahrs}^+ \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} q * (\omega_m - \omega_b) \\ \dot{\omega}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{b}_s = 0 \\ \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s q^{-1} * A * q \\ b_s q^{-1} * B * q \end{pmatrix} \end{cases} \begin{matrix} \text{(evolution)} \\ \text{(observation)} \end{matrix}$$

où  $\omega_m$  constitue l'entrée du modèle supposée connue  $a_m$  sera comparée à la sortie prédite  $y_A$  tout comme les mesures du magnétomètre avec  $y_B$ . Le modèle est bien observable dans son intégralité car toutes les variables d'état peuvent être reconstruites à partir de l'entrée et des mesures  $(\omega_m, y_A, y_B)$  et de leurs dérivées successives (i.e, au sens de la définition 7). En effet, à partir du modèle d'observation nous pouvons déterminer les valeurs de  $a_s$  et  $b_s$  tel que  $a_s = \frac{1}{g} \|y_A\|$  et  $b_s = \frac{1}{B_s g} \|y_B\|$ . Connaissant  $a_s$  et  $b_s$ , les états associés au quaternion  $q$  (i.e,  $q_1, q_2, q_3$ ) se déduisent des 6 relations de rotation du modèle d'observation. Puis, les équations d'évolution nous permettent de déduire les biais  $\omega_b$  par  $\omega_b = \omega_m - 2q^{-1}\dot{q}$ .

### 3.6 L’AHRS augmenté d’un GPS et d’un baromètre : l’INS

La volonté de ne pas grever le budget de développement d’un système de navigation performant nécessite l’utilisation de capteurs inertiels de type MEMS. Néanmoins, comme nous l’avons vu dans la section 1.3, dans le cas où nous n’avons pas d’autres choix que de faire appel à des capteurs inertiels, il est essentiel d’avoir recours à un dispositif supplémentaire (le magnétomètre) afin d’améliorer le cap de l’engin. D’un autre côté, la navigation d’un mini-drone demande absolument, que l’estimateur d’état prenne en compte la vitesse et la position du véhicule à l’aide d’autres capteurs extéroceptifs afin que l’utilisation de ces mesures supplémentaires puissent corriger le modèle de navigation précédemment décrit dans la section 3.2.

Une manière de formuler le problème est d’utiliser, en plus des magnétomètres, un système de positionnement par satellite (GPS) qui fournit une mesure de la vitesse de l’engin, notée  $y_V$ , et de sa position, notée  $y_X$ , toutes deux exprimées dans le repère terrestre. Le problème de la navigation inertielle dite véritable présenté lors de la section 3.3 a permis de mettre en exergue, à l’aide d’une étude de détectabilité menée autour du modèle linéarisé au premier ordre, que l’erreur commise sur la vitesse verticale divergeait linéairement. Ainsi, le fait qu’un système de mesure comme le système GPS fournisse entre autres une information verticale permet de supprimer cette divergence. Néanmoins, cette mesure est loin d’être parfaite et auto-suffisante du fait de son niveau de précision très relatif. De plus, il n’est pas rare de perdre le signal GPS dans certaines situations de vol. Dès lors, il s’avère nécessaire, et même quasi-indispensable, de procéder à une fusion élargie d’informations si tant est, qu’il est possible de bénéficier d’une redondance matérielle quelconque pour de telles cellules d’aéronef. Dans le cas de la position verticale (ou altitude), il est possible de disposer d’une autre source de mesure au travers d’un baro-altimètre qui fournit une mesure de l’altitude notée  $y_h = \langle X, e_3 \rangle$  celle-ci additionnée à la mesure de position du GPS  $y_X$  permet d’améliorer la précision de l’estimation de la position verticale de l’engin. Ainsi, l’estimateur d’état non linéaire utilise un GPS et un capteur de pression en plus des trois capteurs triaxiaux exploités dans l’AHRS. En résumé, l’INS repose sur 16 mesures scalaires qui correspondent :

- ▶ aux 6 données délivrées par le GPS : à savoir, les mesures des vecteurs vitesse et position de l’engin notées respectivement  $y_X = X \in \mathbb{R}^3$  et  $y_V = V \in \mathbb{R}^3$  ;
- ▶ et à la mesure de l’altitude fournie par un capteur de pression (ou baromètre) qui sera notée  $y_h = \langle X, e_3 \rangle$  et qui est donc utilisée en plus de la mesure GPS afin d’améliorer l’estimation de la position verticale.

A partir du modèle très général  $\mathcal{M}_s$  formulé au cours de la section 3.2, nous dérivons maintenant les équations du système complet de navigation et désignons par  $\mathcal{M}_{ins}$  la modélisation

telle que :

$$\mathcal{M}_{ins} \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega_m \\ \dot{V} = A + q * a_m * q^{-1} \\ \dot{X} = V \end{cases} \quad (\text{évolution})$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_V \\ y_X \\ y_h \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ X \\ \langle X, e_3 \rangle \\ q^{-1} * B * q \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{observation})$$

Un dispositif estimant l'orientation, la vitesse et la position à partir de capteurs de faible précision et d'un GPS est souvent désigné par l'acronyme INS (Inertial Navigation System).

### 3.6.1 Observabilité des imperfections sur les mesures de l'INS

Comme cela à été expliqué précédemment au cours de la section 3.5.1, une certaine liberté existe dans le nombre et le choix des imperfections qui peuvent être modélisées afin d'être ré-estimées. La contrainte étant alors de conserver un système d'équation  $\mathcal{M}_{ins}$  entièrement observable. La linéarisation du modèle  $\mathcal{M}_{ins}$  autour du point d'équilibre  $(\bar{q} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \ \omega = \vec{0} \ \dot{V} = \vec{0} \ \bar{X})^T$  donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \delta \dot{q} &= 0.5 \delta \omega \\ \delta \dot{V} &= 2A \wedge \delta q + \delta a \\ \delta \dot{X} &= \delta V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta X_x = \delta y_{Xx} \\ \delta X_y = \delta y_{Xy} \\ \delta X_z = \delta y_{Xz} \end{cases}, \begin{cases} \delta V_x = \delta y_{Vx} \\ \delta V_y = \delta y_{Vy} \\ \delta V_z = \delta y_{Vz} \end{cases}, \delta X_3 = \delta y_h, \begin{cases} -2B_z \delta q_2 &= \delta y_{Bx} \\ 2B_z \delta q_1 - 2B_x \delta q_3 &= \delta y_{By} \\ 2B_x \delta q_2 &= \delta y_{Bz} \end{cases}$$

Nous disposons donc d'un ensemble de 6 entrées mesurées, supposées connues, et de 10 mesures qui permettent de déduire certaines sorties du modèle. Un total de 9 variables d'état sont à estimer pour déterminer complètement l'orientation, la vitesse et la position de l'engin. Il est donc possible de chercher à réestimer  $16 - 9 = 7$  imperfections liées aux différents capteurs. Ce nombre peut être étendu à 10 si nous considérons que la position sera déduite par intégration temporelle de la vitesse directement (ceci revient à rajouter 3 biais additifs sur la mesure de

position fournie par le GPS). Il est intéressant de relever que l'état  $\delta X_z$  peut être déterminé soit à partir de la mesure  $\delta y_{Xz}$  issue du GPS ou de la mesure  $\delta y_h$  provenant du baromètre du fait de la redondance matérielle. Ainsi, il apparaît possible de recalibrer un éventuel biais sur la mesure barométrique à partir de l'exploitation de la mesure GPS. Cette hybridation permet d'atteindre une meilleure précision sur l'estimation de la position verticale du mini-drone et de corriger les potentielles erreurs sur son altitude qui peuvent par exemple être causées par une modification imprévue de la pression atmosphérique ou par le vent.

Les degrés de liberté ont été figés comme suit : sur la base des 4 capteurs triaxiaux et d'un capteur de pression, fournissant 16 mesures scalaires, le gyroscope mesure  $\omega_m = \omega + \omega_b$  où  $\omega_b$  est un biais vectoriel constant ou lentement évolutif ; l'accéléromètre mesure  $a_m = a_s \cdot a$  où  $a_s > 0$  est un facteur d'échelle quasi-constant ; le baromètre est entaché d'un biais de mesure scalaire noté  $h_b$ . Ainsi, nous obtenons le modèle complet de l'INS qui tient compte des imperfections présentes dans les capteurs embarqués.

$$\mathcal{M}_{ins}^+ \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2}q * (\omega_m - \omega_b) \\ \dot{V} = A + \frac{1}{a_s}q * a_m * q^{-1} & \text{(évolution)} \\ \dot{X} = V \\ \dot{\omega}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{h}_b = 0 \\ \begin{pmatrix} y_V \\ y_X \\ y_h \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ X \\ \langle X, e_3 \rangle - h_b \\ q^{-1} * B * q \end{pmatrix} & \text{(observation)} \end{cases}$$

où  $\omega_m$  et  $a_m$  sont des entrées imparfaites et bruitées mais supposées connues et  $[V^T \ X^T \ B^T]^T$  sont les sorties mesurées, elles aussi imparfaites et bruitées. Comme pour le modèle  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$ , le système est observable car toutes les variables d'état peuvent être reconstruites à partir des entrées et des sorties  $\omega_m, a_m, y_V, y_X, y_h, y_B$  et leurs dérivées. En effet, à partir de ces équations nous pouvons établir que  $a_s = \frac{\|a_m\|}{\|\dot{y}_V - A\|}$  et que  $\frac{a_m}{\|a_m\|} = q^{-1} * \frac{\dot{y}_V - A}{\|\dot{y}_V - A\|} * q$ . Connaissant les relations de rotation liant  $q$  à  $(\dot{y}_V - A)$  et  $B$ , nous pourrions alors exprimer  $q$  au sens de la définition 7. Par suite, les équations d'évolution du système nous permettent de trouver les biais sur les gyromètres tel que  $\omega_b = \omega_m - 2q^{-1}\dot{q}$  et le biais sur le baromètre tel que  $h_b = \langle y_X, e_3 \rangle - y_h$ .

# Chapitre 4

## Développement méthodologique: Algorithmes IUKF et $\pi$ -IUKF

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Systèmes invariants/équivalents</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>4.2</b>	<b>Observateurs invariants - AHRS/INS</b> . . . . .	<b>94</b>
4.2.1	AHRS: rappel de la modélisation . . . . .	94
4.2.2	Invariance des équations du modèle de l’AHRS . . . . .	95
4.2.3	Construction d’une erreur de sortie et d’un repère invariant . . . . .	97
4.2.4	Formulation de l’observateur invariant pour l’AHRS du pauvre . . . . .	99
4.2.5	Filtre invariant pour la problématique de l’INS . . . . .	100
4.2.6	Formulation de l’observateur invariant pour l’INS . . . . .	103
<b>4.3</b>	<b>Erreur d’estimation sur l’état invariante</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>4.4</b>	<b>Square-Root UKF</b> . . . . .	<b>107</b>
<b>4.5</b>	<b>1<sup>ère</sup> reformulation du filtrage de Kalman <i>unscented</i></b> . . . . .	<b>108</b>
4.5.1	Principes fondateurs . . . . .	108
4.5.2	Premiers résultats et analyse . . . . .	120
4.5.3	Résumé et pseudo-codes . . . . .	135
<b>4.6</b>	<b>2<sup>nde</sup> reformulation du filtrage de Kalman <i>unscented</i></b> . . . . .	<b>139</b>
4.6.1	Précédents travaux menés sur l’IEKF . . . . .	139
4.6.2	Algorithme $\pi$ -IUKF sur un groupe de Lie: formulation . . . . .	142

---

### Préambule

Le chapitre 3 a montré que l’établissement d’un modèle dynamique précis pour la navigation inertielle pouvait comporter plusieurs degrés de liberté, et qu’il est donc assujéti à un certain

nombre de choix de modélisation (concernant notamment les imperfections de mesure) pour garantir que le problème d'estimation de l'état du système sera observable.

Le présent chapitre a trait au développement de principes méthodologiques originaux qui ont permis d'élaborer deux algorithmes d'estimation non-linéaire pour les modèles  $\mathcal{M}_{ahrs}$  et  $\mathcal{M}_{ins}$ . Ceux-ci, fondés conjointement sur la théorie des observateurs invariants et les principes du filtrage de Kalman dit *unscented* (cf. chapitre 2), permettent de déterminer une correction spécifique de la prédiction fournie par n'importe quelle représentation d'état non-linéaire utilisée pour l'estimation, de sorte que la dynamique de l'observateur synthétisé vérifie aussi les propriétés de symétrie du système considéré.

A l'instar des travaux menés il y a quelques années autour de l'IEKF (*Invariant Extended Kalman Filter*), les gains de correction de cet estimateur, construit pour être invariant, sont obtenus en suivant les étapes de calcul propres au filtrage de type UKF (que celles-ci soient déclinées dans une forme factorisée ou non). Toutefois, l'intégration à la théorie des observateurs invariants d'une procédure de calcul des gains de correction qui suit un schéma algorithmique emprunté au filtrage de Kalman dit *unscented*, a nécessité un certain nombre de développements méthodologiques que ce chapitre décrit. Ces travaux de recherche ont conduit *in fine* à la mise au point de deux variantes algorithmiques de l'UKF baptisées IUKF (pour *Invariant Unscented Kalman Filter*) et  $\pi$ -IUKF {Condomines *et al.*, 2013}{Condomines *et al.*, 2014}. Des formes factorisées de type *Square-Root* (désignées par l'adjonction du court acronyme SR dans la suite) pour ces deux méthodes peuvent par ailleurs être facilement dérivées.

Les recherches menées autour des formulations des filtres (SR)IUKF et  $\pi$ -(SR)IUKF ont notamment permis de montrer qu'il était donc possible, à partir des principes de base du filtrage de Kalman par Sigma Points (SPKF), de synthétiser des filtres invariants pour l'estimation d'état de systèmes dynamiques non-linéaires caractérisés eux aussi par un domaine de convergence élargi. Par ailleurs, le fait de recourir à un calcul des gains qui se fonde sur une technique de type UKF présente le grand avantage de ne pas nécessiter de linéarisation explicite de la dynamique de l'erreur d'état invariante, qui représente en soi un point dur de l'approche IEKF, pour identifier les matrices  $\mathbf{A}(I)$  et  $\mathbf{C}(I)$  (qui dépendent des invariants du problème) nécessaires à l'application des principes du filtrage de Kalman étendu. Bien qu'une différentiation analytique de cette dynamique peut être obtenue dans certains cas particuliers de modélisation (essentiellement lorsque les mouvements du système obéissent à des relations cinématiques), levant ainsi la difficulté mentionnée précédemment, les développements théoriques entrepris au cours de cette thèse se justifient par le fait qu'ils visent à être largement appliqués, dans le futur, à tout type de système dynamique. Cette ambition couvre notamment le cas où le modèle de la dynamique du système ne permet plus, du fait de son niveau de complexité intrinsèque, de procéder à cette linéarisation de manière analytique. Nous pensons ici notamment au cas des mini-drones à voilure fixe pour lesquels des représentations numériques, sous la forme d'abaques tabulées par exemple, décrivant l'aérodynamique et la propulsion de tels engins, peuvent être avantageusement (car elles représentent une forte connaissance *a priori* du système) utilisées pour décrire de façon

---

plus complète la dynamique du vol de ces appareils. Le caractère non-différentiable et parfois extrêmement complexe de ces « briques » de base pour la modélisation rendent alors vaine la démarche qui consisterait à établir, à la main, selon une approche purement constructive, les équations différentielles linéaires vérifiées par l'erreur d'état invariante du problème d'estimation. Comparativement à l'IEKF, les approches proposées ici apparaissent de ce fait comme étant plus facilement applicables à n'importe quel type de modélisation dynamique du fait qu'elles reposent uniquement sur la donnée de la transformation de groupe composite  $\phi_g = \{\varphi_g, \psi_g, \rho_g\}$ .

## Organisation du chapitre

Le présent chapitre est structuré en six parties :

- Dans un premier temps, plusieurs résultats mathématiques de géométrie différentielle sont rappelés. Ils permettent de mieux appréhender les notions de symétrie et d'invariance pour les systèmes dynamiques qui seront largement utilisées dans la suite du chapitre.
- Les sections 2 et 3 détaillent les synthèses de deux estimateurs invariants qui permettent d'apporter une solution algorithmique extrêmement intéressante aux problèmes de la navigation inertielle pour l'AHRS et l'INS (cf. chapitre 3). Les équations des filtres obtenus expliciteront notamment les transformations de groupe qui ont été définies pour les modèles d'évolution et d'observation associés à  $\mathcal{M}_{ahrs}$  et à  $\mathcal{M}_{ins}$  afin de formuler, en des termes mathématiques appropriés, les problèmes d'estimation qui se posent. Par suite, ces transformations de l'état, de la commande et des sorties, qui formalisent les symétries et les invariances de la dynamique et de l'observation du système, permettent de définir :
  - ❶ un champ de vecteurs invariants (par application de la méthode du repère mobile d'E. Cartan) qui fixe le cadre géométrique à respecter pour l'estimation ;
  - ❷ une erreur de sortie adéquate (i.e. invariante) qui sera directement exploitée pour l'estimation de l'état. Nous verrons que la dynamique de l'estimateur pourra alors être fixée, et les gains calculés (soit analytiquement, soit au travers d'un EKF), en linéarisant, parfois jusqu'au second ordre, le jeu d'équations différentielles régissant les évolutions temporelles de l'erreur d'estimation sur l'état invariante. Le choix de l'utilisation d'une erreur d'estimation sur l'état invariante facilite grandement l'analyse de la convergence du filtre estimateur. Ainsi, étant donnée une dynamique désirée, cette opération de linéarisation permet de calculer des valeurs numériques pour les gains de correction qui confèrent au filtre la dynamique souhaitée et assurent, dans le même temps, une convergence étendue de l'erreur d'estimation sur l'état invariante. Au passage, il est à noter que la forme de l'équation différentielle suivie par la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante est particulière : elle correspond en effet à celle d'une équation autonome qui ne dépend donc que de l'erreur elle-même et des invariants fondamentaux du système. Ceci assure un plus large domaine de convergence de cette erreur. Malgré tout, la procédure de linéarisation précédemment évoquée peut s'avérer délicate à exécuter dans la pratique, notamment pour des systèmes dynamiques dont la modélisation est complexe. C'est pourquoi, il peut être préférable de calculer les gains de correction selon une

approche moins constructive mais plus systématique.

□ Avant de présenter les deux variantes algorithmiques qui s'affranchissent de cette étape de linéarisation, et permettent donc de concevoir plus facilement des filtres estimateurs invariants pour résoudre les problèmes d'estimation d'état pour les systèmes dynamiques, la section 4 présentera succinctement l'algorithme du (SR)-UKF et ses différentes étapes de calcul. Cet algorithme sert de base aux raisonnements qui sont menés dans la suite du chapitre. Au cours de cette section, les avantages et les inconvénients connus de cette technique d'estimation particulière seront listés et également discutés.

□ La cinquième partie de ce chapitre sera donc consacrée à la première tentative de reformulation du filtrage de Kalman dit *unscented* dans un cadre invariant. Nous y verrons notamment que les notions d'erreurs d'état et de sortie invariantes jouent un rôle prépondérant dans la redéfinition des différentes matrices de covariance à la base du filtrage de Kalman par Sigma Points. De même, la notion de repère mobile, défini et calculé en l'état prédit, interviendra directement dans les équations du filtre estimateur comme pour le cas de l'IEKF avec lequel une analogie peut être faite. L'algorithme résultant a été baptisé sous le nom d'IUKF et sa formulation peut être aisément factorisée dans une version de type *Square-Root* (comme pour l'UKF classique). Par suite, un ensemble complet de premiers résultats d'estimation pour le problème de l'AHRS, obtenus à partir de données simulées bruitées, permet de conclure quant au bien-fondé de cet algorithme et de son apport tant du point de vue théorique que pratique.

□ Enfin, consécutivement à ce premier galop d'essai visant une intégration des principes du filtrage de Kalman par Sigma Points à la théorie des observateurs invariants, nous détaillerons, dans une sixième section, les principes fondateurs de l'algorithme  $\pi$ -IUKF dans sa version factorisée. Nous verrons notamment dans cette partie que les propriétés d'invariance de l'algorithme présentées au cours de la section 5 peuvent être retrouvées en modifiant différemment l'algorithme de base du SRUKF du paragraphe 4. En effet, par la définition d'une quatrième transformation non-linéaire, dénommée  $\pi$ , et qui sera appliquée aux équations d'observation du modèle lors de l'étape de prédiction des sorties, il est possible de dériver encore plus simplement un estimateur invariant sans avoir à redéfinir l'ensemble des matrices de covariance comme cela est le cas pour l'IUKF standard (voir §4.5). Cette  $n$ -ième transformation peut s'interpréter comme une *condition de compatibilité* entre la dynamique du système d'une part (qui peut s'avérer être invariante à gauche ou à droite) et la dynamique propre de l'estimateur d'autre part (qui peut aussi obéir aux mêmes symétries que celles du système). Rappelons que l'observateur s'appuie toujours sur une copie de la dynamique du système considéré. Le  $\pi$ -IUKF se rapproche donc en soi beaucoup plus de la version originelle du SRUKF puisqu'il ne nécessite que très peu de modifications. Les expressions analytiques définissant l'application  $\pi$  seront données dans cette section pour l'AHRS et l'INS. Cet autre algorithme sera largement évalué au cours du chapitre 5 consacré aux résultats de la thèse.

▣ Les développements réalisés au cours de cette thèse ont fait l'objet de deux communications internationales dans des conférences à comité de lecture à l'AIAA-GNC et à l'IEEE-CDC.

## 4.1 Rappels de géométrie différentielle: symétries et systèmes invariants/équivariants

Le mot **symétrie** (apparu en 1529), et provenant du grec *symmetros* voulant dire « de même mesure que », est à l'origine un terme d'architecture qui désignait les parties d'un bâtiment qui participaient à la beauté des édifices. Son sens fut étendu au cours du XVII<sup>e</sup> siècle pour intégrer la notion de régularité de parties dans un ensemble et utilisé pour qualifier certaines œuvres d'art ou morceaux de musique. Au XVIII<sup>e</sup> siècle, Diderot spécialisera le mot pour désigner une distribution régulière d'éléments identiques de part et d'autre d'un axe. Il deviendra un terme scientifique en géométrie aux alentours de 1870 pour qualifier la similitude de deux figures relativement à un plan : les notions d'axe et de plan de symétrie étaient nées.

De nos jours, la notion de **symétrie** généralise deux concepts :

- la **redondance** de parties irréductibles au sein d'un ensemble ;
- et l'**invariance** qui, par un ensemble de transformations, superpose un objet sur lui-même.

Le développement de méthodes algébriques et numériques permettant une recherche systématique des groupes de symétrie a été un important centre d'intérêt pour de nombreux domaines de la physique et des mathématiques. Ces méthodes s'appuient sur les notions d'invariance, d'équivalence et d'indiscernabilité (cf. Olver {2003} et Olver {2008}) qui caractérisent la quasi-totalité des lois de la physique. Plus précisément, ces techniques de recherche se fondent sur une identification de transformations de groupe qui laissent inchangées les équations (différentielles) descriptives (de la dynamique) du système étudié.

Dans cette section, nous rappelons brièvement certains résultats issus de travaux de recherche récents qui ont trait à la détermination et à l'exploitation de groupes de symétrie pour les systèmes dynamiques. Tout d'abord, considérons la représentation d'état non-linéaire suivante définie par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.1)$$

Dans l'équation (4.1), le vecteur d'état (resp. d'entrée)(resp. de sortie) appartient à un ensemble ouvert  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ )(resp.  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq n$ ). Par ailleurs, considérons la transformation composite de groupe  $\phi_{g \in G}$  agissant sur le produit cartésien d'ensembles  $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  et définie telle que :

$$\begin{aligned} \phi_g : G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) &\longrightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}) \\ (g, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) &\longmapsto \phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = (\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u}), \rho_g(\mathbf{y})) = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

où  $G$  est un groupe muni d'une algèbre de Lie, c'est-à-dire qu'il s'apparente à une variété différentielle de dimension finie dont les opérations d'inversion et de multiplication sont différentiables.

Par ailleurs,  $(\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$  correspondent à trois difféomorphismes paramétrés par  $g \in G$ .

Dans le cas des systèmes dynamiques, la recherche de symétries consiste, en pratique, à déterminer trois transformations locales, définies sur chacun des ouverts, qui agissent séparément sur les variables permettant de modéliser le système (i.e. actions distinctes sur l'état, l'entrée et la sortie), tel que les équations d'évolution  $d\mathbf{x}/dt = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  et d'observation  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  restent inchangées sous l'effet de ces applications (i.e.  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  et  $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ). Ainsi, la dynamique du système sera dite  $G$ -invariante si :  $\exists(\varphi_g, \psi_g)_{g \in G}, \forall(g, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, f(\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u})) = D\varphi_g(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  et  $G$ -équivariante si de plus :  $\exists(\rho_g)_{g \in G}$  agissant sur  $\mathcal{Y}, \forall(g, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, h(\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u})) = \rho_g(h(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ . En d'autres termes, toutes les relations différentielles ( $f$ ) ou statiques ( $h$ ) restent explicitement identiques.

Dans notre cadre d'application relatif aux mini-drones, ces propriétés d'invariance des équations cinématiques peuvent s'interpréter physiquement. En effet, elles correspondent aux symétries de la dynamique du mouvement de l'engin qui s'avère être indépendante du repère (terrestre ou avion) dans lequel celle-ci est exprimée (symétries et invariances sous l'action du groupe des translations/rotations).

## 4.2 Observateurs invariants: problématiques AHRS/INS

### 4.2.1 AHRS: rappel de la modélisation

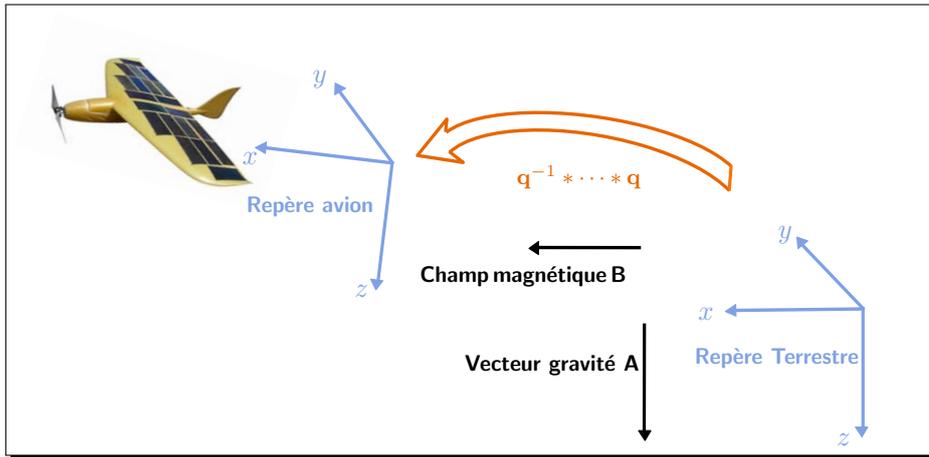


FIGURE 4.1 – AHRS - Illustration du passage entre les repères terrestre et avion

A partir de la méthode de construction présentée au cours du chapitre 2, nous allons définir la forme très générale d'un observateur invariant adapté au problème d'estimation de l'AHRS (cf. figure 4.1) dont le modèle, introduit lors du chapitre précédent, est rappelé ici. Rappelons tout d'abord que la représentation d'état non-linéaire correspondante à la modélisation  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  peut-être décrite sous une forme compacte telle que  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  et  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  avec

$\mathbf{x} = (q^T \ \omega_b^T \ a_s \ b_s)^T$ ,  $\mathbf{u} = (\omega_m)$  et  $\mathbf{y} = (y_A^T \ y_B^T)^T$  telle que :

$$\mathcal{M}_{ahrs}^+ \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2}q * (\omega_m - \omega_b) \\ \dot{\omega}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{b}_s = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(évolution)} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s q^{-1} * A * q \\ b_s q^{-1} * B * q \end{pmatrix} \quad \text{(observation)}$$

### 4.2.2 Invariance des équations du modèle de l'AHRS

En considérant les équations du modèle  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  données dans l'équation (4.2) et le groupe de Lie  $G = \mathbb{H}_1 \times \mathbb{R}^5$  (où  $\mathbb{H}_1$  est l'algèbre de Lie des quaternions de norme unitaire) agissant sur tout l'espace d'état sur lequel  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  est défini (on dit alors que le groupe est libre (cf. annexe A)), les transformations locales suivantes nous permettent de montrer que la dynamique du système considéré est bel et bien  $G$ -invariante et  $G$ -équivariante. On a  $\forall g = (q_0^T \ \omega_0^T \ a_0 \ c_0)^T \in G$  :

$$\textcircled{1} \ \varphi_g \left( \mathbf{x} = (q^T \ \omega_b^T \ a_s \ b_s)^T \right) = \begin{pmatrix} q * q_0 \\ q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0 \\ a_s \cdot a_0 \\ b_s \cdot b_0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \ \psi_g(\mathbf{u} = (\omega_m)) = q_0^{-1} * \omega_m * q_0 + \omega_0$$

$$\textcircled{3} \ \rho_g \left( \mathbf{y} = (y_A^T \ y_B^T)^T \right) = \begin{pmatrix} a_0 \cdot q_0^{-1} * y_A * q_0 \\ b_0 \cdot q_0^{-1} * y_B * q_0 \end{pmatrix}$$

Ces transformations sont géométriquement équivalentes soit à une rotation, soit à une translation, soit à la composition de ces deux applications. Elles font le lien entre les quantités  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  exprimées dans le repère terrestre avec celles exprimées dans le repère avion et illustrent l'invariance galiléenne du problème d'estimation posé. Afin de démontrer par le calcul l'invariance de la dynamique du système, considérons les nouvelles quantités  $Q = q * q_0$ ,  $\Omega_b = q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0$ ,  $\Omega_m = q_0^{-1} * \omega_m * q_0 + \omega_0$ ,  $\mathcal{A}_s = a_s \cdot a_0$  et  $\mathcal{B}_s = b_s \cdot b_0$ . De la sorte, nous pouvons aisément montrer que le système  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  est bien invariant par les transformations de groupe définies ci-dessus.

En effet :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= \overbrace{(q * q_0)}^{\cdot} = \left( \frac{1}{2} q * (\omega_m - \omega_b) \right) * q_0 = \frac{1}{2} (q * (\omega_m - \omega_b)) * q_0 \\
 &= \frac{1}{2} (q * \omega_m - q * \omega_b) * q_0 = \frac{1}{2} (q * \omega_m * q_0 - q * \omega_b * q_0) \\
 &= \frac{1}{2} (q * q_0 * q_0^{-1} * \omega_m * q_0 - q * q_0 * q_0^{-1} * \omega_b * q_0) \\
 &= \frac{1}{2} (q * q_0) * ((q_0^{-1} * \omega_m * q_0 + \omega_0) - (q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0)) \\
 &= \frac{1}{2} Q * ((q_0^{-1} * \omega_m * q_0 + \omega_0) - (q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0)) \\
 &= \frac{1}{2} Q * (\Omega_m - \Omega_b) \\
 \dot{\Omega}_b &= \overbrace{(q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0)}^{\cdot} = q_0^{-1} * \dot{\omega}_b * q_0 = 0 \\
 \dot{A}_s &= \overbrace{(a_s \cdot a_0)}^{\cdot} = \dot{a}_s \cdot a_0 = 0 \\
 \dot{B}_s &= \overbrace{(b_s \cdot b_0)}^{\cdot} = \dot{b}_s \cdot b_0 = 0
 \end{aligned}$$

Le calcul des différentes dérivées temporelles des images des composantes du vecteur d'état par l'application  $\varphi_g$  montre que nous obtenons les mêmes équations différentielles que pour le système initial. La dynamique du modèle de l'AHRs est donc bien  $G$ -invariante. De la même manière, nous allons établir par le calcul que les équations statiques associées au modèle d'observation sont  $G$ -équivalentes du fait qu'elles restent explicitement identiques à la suite de l'application de la transformation locale  $\rho_g$  définie précédemment. Le terme  $\rho_g(\mathbf{y})$  va pouvoir s'exprimer comme l'application de  $h$  aux nouvelles variables d'état et de commande introduites auparavant. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
 \rho_g(\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} a_0 \cdot q_0^{-1} * y_A * q_0 \\ b_0 \cdot q_0^{-1} * y_B * q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cdot q_0^{-1} * (a_s \cdot q^{-1} * A * q) * q_0 \\ b_0 \cdot q_0^{-1} * (b_s \cdot q^{-1} * B * q) * q_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_s \cdot a_0 \cdot \overbrace{(q * q_0)^{-1}}^{Q^{-1}} * A * \overbrace{(q * q_0)}^Q \\ b_s \cdot b_0 \cdot Q^{-1} * B * Q \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_s \cdot a_0 \cdot Q^{-1} * A * Q \\ b_s \cdot b_0 \cdot Q^{-1} * B * Q \end{pmatrix} \\
 &= h(\varphi_g(\mathbf{x}), \psi_g(\mathbf{u}))
 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Construction d'une erreur de sortie et d'un repère invariant

Si nous considérons le cas particulier  $g = \mathbf{x}^{-1} = ((q^{-1})^T (-q * \omega_b * q^{-1})^T a_s^{-1} b_s^{-1})^T$  dans les calculs précédents, nous obtenons :

$$\varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q * q^{-1} \\ q * \omega_b * q^{-1} - q * \omega_b * q^{-1} \\ a_s \cdot a_s^{-1} \\ b_s \cdot b_s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \vec{0} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e \quad (4.3)$$

Dans l'équation (4.3),  $e$  désigne l'élément neutre associé à la transformation locale  $\varphi_g$ . En effet, chaque composante du vecteur  $(\mathbf{1} \vec{0} 1 1)^T$  correspond à un élément neutre d'un sous-espace muni d'une opération spécifique i.e. :

- ➡  $\mathbf{1} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  est le quaternion neutre pour le produit hamiltonien de quaternions (\*);
- ➡  $\vec{0} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$  est l'élément neutre pour toute translation de l'espace i.e. pour  $\mathbb{R}^3$  muni de l'addition vectorielle (+);
- ➡ enfin, la constante 1 est l'élément neutre pour le produit de nombres scalaires réels (·).

L'équation (4.3) définit un vecteur d'invariants pour lequel  $\mathbf{x}^{-1} \in G$  apparaît comme le paramètre du groupe de Lie à choisir pour obtenir ces invariants. Ce résultat est connu sous le nom d'équations de normalisation (cf. annexe A) et permet de construire une erreur de sortie invariante notée  $\mathbf{E}$  ainsi qu'un repère invariant. Pour cela, nous utiliserons la notation suivante pour des raisons de commodité :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ -q * \omega_b * q^{-1} \\ a_s^{-1} \\ b_s^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Par suite, la forme générale d'un observateur invariant peut être définie de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{x}} = \overbrace{f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}^{\text{prediction G-invariante}} + \overbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{K}^{(i)} \left( \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}, \mathbf{E} := \left[ h \left( e, \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{u}) \right) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{y}) \right] \right)}^{\text{termes de correction invariants}} w_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.5)$$

Dans l'équation (4.5),  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  correspond au vecteur d'état estimé. Nous reconnaissons l'expression mathématique typique d'un estimateur d'état non-linéaire dans lequel le modèle de prédiction, dont la dynamique est ici  $G$ -invariante et sa sortie  $G$ -équivalente, est sommé

avec un terme de correction invariant. L'idée de la synthèse d'un estimateur invariant consiste à construire un terme de correction additif fondé sur des gains non-linéaires  $\mathbf{K}^{(i)}$  qui dépendent des invariants du système  $(e, \psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}, \rho_{\hat{\mathbf{x}}-1})$  sous une forme non-linéaire. Ceci permet de conférer à la dynamique de l'estimateur les mêmes propriétés de  $G$ -invariance que celles vérifiées par le système observé. Dans l'équation (4.5), une expression très générale de l'erreur de sortie invariante  $\mathbf{E}$  est donnée. Dans le cas de l'AHRS, plus de détails peuvent être fournis assez simplement du fait des diverses équations du modèle. On a en effet :

$$\mathbf{E} = h\left(e = \varphi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\hat{\mathbf{x}}), \psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{u})\right) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A - \hat{a}_s^{-1} \hat{q} * y_A * \hat{q}^{-1} \\ B - \hat{b}_s^{-1} \hat{q} * y_B * \hat{q}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_A \\ \mathbf{E}_B \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Il est facile de montrer que cette erreur de sortie non-linéaire donnée dans l'équation (4.6) est bien invariante. A titre d'exemple, nous détaillons ci-après les calculs permettant de le montrer pour l'erreur de sortie  $\mathbf{E}_A$  associée aux sorties accélérométriques ( $\forall g = (q_0^T \ \omega_0^T \ a_0 \ c_0)^T \in G$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}}), \rho_g(y_A)) &= \mathbf{E}_A(\overbrace{\hat{q} * q_0, q_0^{-1} * \hat{\omega}_b * q_0 + \omega_0, a_0 \cdot \hat{a}_s, c_0 \cdot \hat{c}_s}^{\varphi_g(\hat{\mathbf{x}})}, \overbrace{a_0 q_0^{-1} * y_A * q_0}^{\rho_g(y_A)}) \\ &= A - (a_0 \cdot \hat{a}_s)^{-1} (\hat{q} * q_0) * (a_0 q_0^{-1} * y_A * q_0) * (\hat{q} * q_0)^{-1} \\ &= A - \hat{a}_s^{-1} \hat{q} * y_A * \hat{q}^{-1} \\ &= \mathbf{E}_A(\hat{q}, \hat{\omega}_b, \hat{a}_s, \hat{c}_s, y_A) \\ &= \mathbf{E}_A(\hat{\mathbf{x}}, y_A) \end{aligned}$$

Par ailleurs, les vecteurs  $w_i(\hat{\mathbf{x}})$  forment un repère invariant c'est-à-dire, pour chaque  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ ,  $\{w_1(\hat{\mathbf{x}}) \dots w_n(\hat{\mathbf{x}})\}$  projette les termes de correction invariants sur chaque composante de  $f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ , soit sur l'espace tangent engendré par la fonctionnelle  $f$  en  $\hat{\mathbf{x}}$  (cf. annexe A). Dans notre cas, en considérant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et ses vecteurs  $(e_i)_{i \in [1;3]}$ , les expressions des vecteurs du repère invariant (aussi appelé base naturelle de l'espace tangent) sont obtenues à partir des 8 équations vectorielles évaluées au point  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{q}^T \ \hat{\omega}_b^T \ \hat{a}_s \ \hat{b}_s)$  :

$$\begin{aligned} &\text{matrice jacobienne de la} \\ &\text{transformation géométrique } \varphi_g(\mathbf{x}) \\ &\left[ D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} q \\ \omega_b \\ a_s \\ b_s \end{pmatrix} \right] \cdot w(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{i \in [1;3]}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{i \in [1;3]}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.7) \end{aligned}$$

En inversant la matrice jacobienne  $D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$  de l'équation (4.7) par application du théorème d'inversion locale tel que :  $[D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x})]^{-1} = D\varphi_{\gamma^{-1}(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ , nous obtenons le champ de vecteurs invariants suivant :

$$\begin{pmatrix} w_i^q(\mathbf{x}) \\ w_i^{\omega_b}(\mathbf{x}) \\ w^{a_s}(\mathbf{x}) \\ w^{b_s}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i * q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{i \in [1;3]}, \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q^{-1} * e_i * q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{i \in [1;3]}, \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_s \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

#### 4.2.4 Formulation de l'observateur invariant pour l'AHRS du pauvre

Cette formulation nécessite certaines hypothèses afin de pouvoir donner des expressions analytiques, puis des valeurs, aux gains qui la compose. En effet, si nous observons qu'aucune erreur n'entache l'estimation des sorties du système alors nécessairement, nous n'aurons pas besoin de corriger les équations de prédiction associées au modèle. De ce fait, le terme constant du développement en série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre des gains de l'équation (4.5), autour d'une erreur de sortie invariante nulle, est lui aussi nul. Ainsi, une linéarisation de ces gains, qui dépendent *a priori* non-linéairement des invariants du problème, permet d'écrire mathématiquement que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \begin{cases} \mathbf{K}^{(i)}(\psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{u}), \mathbf{E} = 0) = 0 \\ \forall \mathbf{E} \neq 0, \mathbf{K}^{(i)}(\psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \simeq \bar{\mathbf{K}}^{(i)}(\psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad (4.9)$$

Il en résulte directement que l'approximation linéaire de l'équation (4.5) peut-être facilement obtenue telle que :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{K}}^{(i)}(\psi_{\hat{\mathbf{x}}-1}(\mathbf{u}), \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.10)$$

Si nous combinons tous les résultats qui précèdent, l'équation (4.10) propre au cas de l'AHRS

peut-être détaillée comme il suit :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ahrs}^+} \begin{cases} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + \sum_{i=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow q}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow q}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_B) \cdot \mathbf{e}_i * \hat{q} \\ \dot{\hat{\omega}}_b = \hat{q}^{-1} * \left( \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow \omega_b}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow \omega_b}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_B \right) * \hat{q} \\ \dot{\hat{a}}_s = \hat{a}_s \cdot (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow a_s}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow a_s}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_B) \\ \dot{\hat{b}}_s = \hat{b}_s \cdot (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow b_s}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow b_s}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_B) \end{cases} \quad (4.11)$$

où les quantités  $\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow q}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow q}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow \omega_b}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow \omega_b}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow a_s}^{(1)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow a_s}^{(1)}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow b_s}^{(1)}$  et  $\bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow b_s}^{(1)}$  sont des matrices de gain ( $1 \times 3$ ) choisies arbitrairement pour déterminer les propriétés de convergence du schéma d'estimation. Dans la structure de l'observateur invariant de l'équation (4.11), nous avons identifié en vert les erreurs de sortie invariante et en bleu les vecteurs de base du repère invariant.

#### 4.2.5 Filtre invariant pour la problématique de l'INS

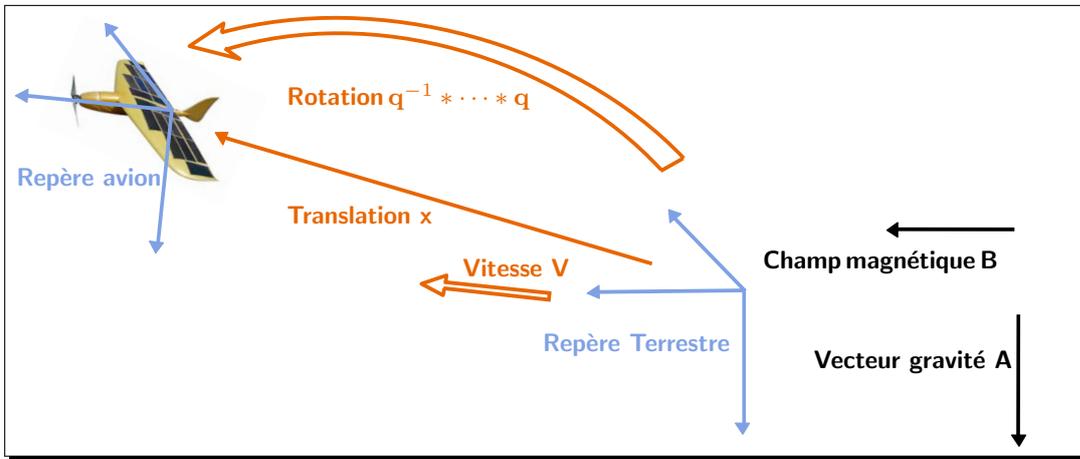


FIGURE 4.2 – INS - Illustration des transformations galiléennes invariantes

Nous allons maintenant nous intéresser au développement d'un observateur invariant pour résoudre la problématique d'estimation propre à l'INS. Dans ce problème, les mesures de vitesse et de position délivrées par un GPS et un baromètre viennent enrichir les mesures disponibles, en sus de celles déjà fournies par les accéléromètres et les magnétomètres. Grâce aux invariances galiléennes, les équations du modèle peuvent être exprimées indifféremment dans le repère avion ou dans le repère terrestre. Les équations du modèle de l'INS rappelées ci-contre correspondent à la description de la dynamique de l'engin et des mesures dans le repère terrestre. A l'instar de l'AHRS, la représentation d'état non linéaire correspondante au modèle  $\mathcal{M}_{ins}^+$  peut-être décrite sous une forme compacte telle que  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  et  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{x} = (q^T V^T X^T \omega_b^T a_s h_b)^T$ ,  $\mathbf{u} =$

$(\omega_m^T \ a_m^T)^T$  et  $\mathbf{y} = (y_V^T \ y_X^T \ y_h \ y_B^T)^T$  sont respectivement le vecteur des états, des entrées et des sorties du système. Pour rappel :

$$\mathcal{M}_{ins}^+ \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{2} q * (\omega_m - \omega_b) \\ \dot{V} = A + \frac{1}{a_s} q * a_m * q^{-1} \\ \dot{X} = V \\ \dot{\omega}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{h}_b = 0 \end{array} \right. \quad (\text{évolution}) \quad (4.12)$$

$$\left( \begin{array}{c} y_V \\ y_X \\ y_h \\ y_B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} V \\ X \\ X_z - h_b \\ q^{-1} * B * q \end{array} \right) \quad (\text{observation})$$

En considérant les équations de modélisation détaillées par l'équation (4.12) et le groupe de Lie  $G = \mathbb{H}_1 \times \mathbb{R}^{11}$  agissant sur tout l'espace d'état associé à la description de la dynamique du système, les transformations locales de groupe suivantes permettent de montrer que la modélisation IMS est également  $G$ -invariante et  $G$ -équivariante, au même titre que pour l'AHRS. Ainsi  $\forall g = (q_0^T \ V_0^T \ X_0^T \ \omega_0^T \ a_0 \ h_0)^T \in G$  :

$$\varphi_g(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{c} q * q_0 \\ V + V_0 \\ X + X_0 \\ q_0^{-1} * \omega_b * q_0 + \omega_0 \\ a_s \cdot a_0 \\ h_b + h_0 \end{array} \right) \quad (4.13)$$

$$\psi_g(\mathbf{u}) = \left( \begin{array}{c} q_0^{-1} * \omega_m * q_0 + \omega_0 \\ a_0 \cdot q_0^{-1} * a_m * q_0 \end{array} \right)$$

$$\rho_g(\mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c} y_V + V_0 \\ y_X + X_0 \\ y_h - h_0 + \langle X_0, e_3 \rangle \\ q_0^{-1} * y_B * q_0 \end{array} \right)$$

Tout comme la navigation inertielle du pauvre, ces transformations sont équivalentes soit à une rotation, soit à une translation, soit à la composition d'une rotation et d'une translation

qui ré-expriment les quantités vectorielles  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  le repère terrestre ou engin. La recherche des invariants du problème, par la méthode du repère mobile, vise à déterminer le paramétrage du groupe  $G$  qui envoie le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  vers l'élément neutre. Si nous considérons le cas particulier  $g = \mathbf{x}^{-1} = ((q^{-1})^T \quad -V^T \quad -X^T \quad -(q * \omega_b * q^{-1})^T \quad a_s^{-1} \quad -h_b + \langle X, e_3 \rangle)^T$ , nous obtenons :

$$\varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q * q^{-1} \\ V - V \\ X - X \\ q * \omega_b * q^{-1} - q * \omega_b * q^{-1} \\ a_s \cdot a_s^{-1} \\ h_b + \langle X, e_3 \rangle - (h_b + \langle X, e_3 \rangle) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e \quad (4.14)$$

La résolution des équations de normalisation permet de définir le repère mobile  $\gamma$  tel que :  $\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-1}$  où  $\mathbf{x}^{-1}$  constitue de nouveau le paramètre à choisir pour calculer les invariants. Par suite, considérant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(e_i)_{i \in [1;3]}$  et le modèle  $\mathcal{M}_{ins}^+$ , les expressions des vecteurs constituant le repère invariant sont obtenues à partir des 14 équations vectorielles instanciées au point  $(\hat{q}^T \quad \hat{V}^T \quad \hat{X}^T \quad \hat{\omega}_b^T \quad \hat{a}_s \quad \hat{h}_b)^T$  suivantes :

$$\left[ \begin{array}{c} D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})} \\ \begin{pmatrix} q \\ V \\ X \\ \omega_b \\ a_s \\ h_b \end{pmatrix} \end{array} \right] \cdot w_j(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ e_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ e_i \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ e_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i \in [1;3] \quad (4.15)$$

De la même manière que précédemment, en inversant la matrice jacobienne  $D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$  par application du théorème d'inversion locale tel que :  $[D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x})]^{-1} = D\varphi_{\gamma^{-1}(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ , nous obtenons le champ de vecteurs invariants suivant :

$$\begin{pmatrix} w_i^q(\mathbf{x}) \\ w_i^V(\mathbf{x}) \\ w_i^X(\mathbf{x}) \\ w_i^{\omega_b}(\mathbf{x}) \\ w_i^{a_s}(\mathbf{x}) \\ w_i^{h_b}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i * q \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ e_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ e_i \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ q^{-1} * e_i * q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ a_s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ h_b \end{pmatrix}, \quad i \in [1;3] \quad (4.16)$$

## 4.2.6 Formulation de l'observateur invariant pour l'INS

En suivant la méthodologie présentée précédemment, l'équation de référence (4.5), décrivant une structure possible pour tout observateur invariant, peut être explicitée ici dans le cas de l'INS comme il suit :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ins}^+} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow q}^{(ij)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow q}^{(ij)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow q}^{(ij)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow q}^{(ij)} \mathbf{E}_h \right) \cdot \mathbf{e}_i * \hat{q} \\ \dot{\hat{V}} = A + \frac{\hat{q} * a_m * \hat{q}^{-1}}{\hat{a}_s} + \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow V}^{(ij)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow V}^{(ij)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow V}^{(ij)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow V}^{(ij)} \mathbf{E}_h \right) \cdot \mathbf{e}_i \\ \dot{\hat{X}} = \hat{V} + \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow X}^{(ij)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow X}^{(ij)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow X}^{(ij)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow X}^{(ij)} \mathbf{E}_h \right) \cdot \mathbf{e}_i \\ \dot{\hat{\omega}}_b = \hat{q}^{-1} * \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow \omega_b}^{(ij)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow \omega_b}^{(ij)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow \omega_b}^{(ij)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow \omega_b}^{(ij)} \mathbf{E}_h \right) \cdot \mathbf{e}_i * \hat{q} \\ \dot{\hat{a}}_s = \hat{a}_s \cdot \left( \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow a_s}^{(j)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow a_s}^{(j)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow a_s}^{(j)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow a_s}^{(j)} \mathbf{E}_h \right) \\ \dot{\hat{h}}_b = \sum_{j=1}^3 (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow b_s}^{(j)} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow b_s}^{(j)} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow b_s}^{(j)} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow b_s}^{(j)} \mathbf{E}_h \end{array} \right.$$

où l'expression de l'erreur de sortie invariante  $\mathbf{E}$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_V \\ \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_B \\ \mathbf{E}_h \end{pmatrix} = h \left( e = \varphi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}), \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{u}) \right) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \hat{V} - y_v \\ \hat{X} - y_x \\ \langle \hat{X}, \mathbf{e}_3 \rangle - \hat{h}_b - y_h \\ B - \hat{q} * y_B * \hat{q}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Dans les équations du filtre, nous retrouvons les composantes du repère invariant en **bleu** et les différents gains matriciels  $\bar{\mathbf{K}}$  en **vert**. Les valeurs de ces matrices de gain peuvent être fixées arbitrairement pour imposer une dynamique souhaitée à l'estimateur. En effet, dans le cas de la synthèse d'observateurs invariants selon les principes de la méthode constructive, appliquée ici aux cas de l'AHRS et de l'INS, il est possible de dériver un ensemble de relations analytiques qui permettent de déduire directement, et donc analytiquement, des valeurs admissibles pour les gains. C'est en cela que l'approche issue de la littérature du domaine porte le qualificatif de constructive. Il en résulte immédiatement que la convergence des erreurs d'estimation peut être assurée (au sens des invariants du problème d'estimation) et que, conjointement, la dynamique de l'estimateur peut être choisie librement.

### 4.3 Erreur d'estimation sur l'état invariante

Les propriétés d'invariance d'un estimateur d'état, que l'on souhaite voir préserver les symétries intrinsèques au système, reposent essentiellement sur la notion d'erreur d'estimation sur l'état invariante et sur sa dynamique propre. En effet, il est possible de montrer que cette dernière dépend uniquement de l'erreur d'estimation sur l'état invariante elle-même et de l'ensemble complet d'invariants fondamentaux du système défini par  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \psi_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{u}) = \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{u})$ . Cette dynamique dépend des trajectoires suivies par le système et estimées du système uniquement au travers de la non-linéarité  $I$ . Il s'agit là d'une grande différence par rapport à la plupart des algorithmes d'estimation non linéaires conventionnels tels que l'EKF ou l'UKF pour lesquels la dynamique de l'erreur d'estimation dépend directement de la trajectoire suivie par l'engin. Ceci étend donc le domaine de convergence des observateurs invariants et en fait des estimateurs plus robustes.

Ainsi, pour un système dynamique qui suit une trajectoire de référence quasi-permanente, i.e. tels que les invariants fondamentaux  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$  ne dépendent pas du temps,  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = c$ , il peut être démontré que les matrices de gain  $\bar{\mathbf{K}}$  convergent vers des valeurs fixes pour toutes trajectoires  $\mathbf{x}'$  telles que  $I(\mathbf{x}', \mathbf{u}) = c$ . Par suite, il peut être démontré que, dans le cas simple de l'AHRS, et sous certaines conditions de découplage de l'estimation des composantes du vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  obéit à une équation dite *autonome* c'est-à-dire de la forme :  $\dot{\eta} = \Upsilon(\eta, c)$ . Un tel filtre sera caractérisé par un large domaine de convergence pour différents réglages des valeurs des gains. Pour l'AHRS, le vecteur des erreurs d'estimation sur l'état invariante  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  peut être défini par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ q * \hat{w}_b * q^{-1} - q * w_b * q^{-1} \\ \hat{a}_s / a_s \\ \hat{b}_s / b_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \vec{0} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} - \mathbf{1} \\ q * (\hat{w}_b - w_b) * q^{-1} \\ \hat{a}_s / a_s - 1 \\ \hat{b}_s / b_s - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \sim \mathbf{x}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

La dynamique de cette erreur d'estimation sur l'état invariante se déduit de l'équation (4.18) par dérivation temporelle telle que :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{1}{2} \alpha * \beta + (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow q} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow q} \cdot \mathbf{E}_B) * \alpha \\ \dot{\beta} = (\alpha^{-1} * I * \alpha) \times \beta + \alpha^{-1} * (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow \omega_b} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow \omega_b} \cdot \mathbf{E}_B) * \alpha \\ \dot{\mu} = -\mu \cdot (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow a_s} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow a_s} \cdot \mathbf{E}_B) \\ \dot{\nu} = -\nu \cdot (\bar{\mathbf{K}}_{A \rightarrow b_s} \cdot \mathbf{E}_A + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow b_s} \cdot \mathbf{E}_B) \end{cases} \quad (4.19)$$

### 4.3 Erreur d'estimation sur l'état invariante

Afin de régler les matrices de gain  $\bar{\mathbf{K}}$  des observateurs  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ahrs}^+}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ins}^+}$ , les équations de la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante (comme celles données dans (4.19)) doivent tout d'abord être linéarisées. Par suite, les termes de correction seront décomposés afin de permettre un découplage dans l'estimation des différents états du système. Ainsi, par exemple, dans le cas de l'AHRS, il est possible de procéder à un découplage de l'estimation entre les parties longitudinale et latérale du modèle. Cependant, la détermination des différents gains peut s'avérer être une étape très fastidieuse dans la construction d'un observateur invariant. Elle s'apparente assez fréquemment à une démarche de réglage « à la main », et revêt, par conséquent, un caractère non-systématique notamment pour des modélisations bien plus complexes que celles abordées dans le cadre de cette thèse. Y compris pour les modélisations cinématiques que nous manipulons dans ces travaux, ce réglage commence, d'ores et déjà, à être difficile. Si nous prenons le cas de l'observateur  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ins}^+}$ , le réglage direct et analytique de la dynamique de ce dernier nécessite le calcul du vecteur des erreurs d'estimation sur l'état invariante qui s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ \hat{V} - V \\ \hat{X} - X \\ q * \hat{w}_b * q^{-1} - q * w_b * q^{-1} \\ \hat{a}_s / a_s \\ \hat{h}_b - h_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} - \mathbf{1} \\ \hat{V} - V \\ \hat{X} - X \\ q * (\hat{w}_b - w_b) * q^{-1} \\ \hat{a}_s / a_s - 1 \\ \hat{h}_b - h_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \mu \\ \nu \\ \lambda \\ \zeta \end{pmatrix} \sim \mathbf{x}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante  $\dot{\eta}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  est ici donnée par le système intégro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \underbrace{\alpha e_i \alpha^{-1}} = -\alpha \nu \alpha^{-1} + 2(\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow q} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow q} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow q} \mathbf{E}_B) + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow q} \mathbf{E}_h \times \alpha e_i \alpha^{-1} \\ \dot{\beta} = \hat{I}_a - \lambda \alpha^{-1} * \hat{I}_a * \alpha + (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow V} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow V} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow V} \mathbf{E}_B + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow V} \mathbf{E}_h) \\ \dot{\mu} = \beta + (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow X} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow X} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow X} \mathbf{E}_B + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow X} \mathbf{E}_h) \\ \dot{\nu} = (\alpha^{-1} * I_\omega * \alpha) \times \nu + \alpha^{-1} * (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow \omega_b} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow \omega_b} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow \omega_b} \mathbf{E}_B + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow \omega_b} \mathbf{E}_h) * \alpha \\ \dot{\lambda} = -\lambda \cdot (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow a_s} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow a_s} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow a_s} \mathbf{E}_B + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow a_s} \mathbf{E}_h) \\ \dot{\zeta} = (\bar{\mathbf{K}}_{V \rightarrow h_b} \mathbf{E}_V + \bar{\mathbf{K}}_{X \rightarrow h_b} \mathbf{E}_X + \bar{\mathbf{K}}_{B \rightarrow h_b} \mathbf{E}_B + \bar{\mathbf{K}}_{h \rightarrow h_b} \mathbf{E}_h) \end{cases}$$

Pour pallier à la difficulté de régler les gains de correction « manuellement », l'état de l'art

du domaine rapporte qu'un algorithme de type EKF, généralisé, a été développé pour obtenir ces derniers. Celui-ci repose sur une linéarisation de la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante qui permet d'identifier des matrices d'évolution ( $\mathbf{A}(\hat{I})$ ) et d'observation ( $\mathbf{C}(\hat{I})$ ) dépendantes des invariants du problème d'estimation. Par suite, les équations du filtrage Kalman étendu peuvent être appliquées au système des erreurs invariante linéarisé de sorte que la résolution de l'équation de Riccati soit menée avec le couple ( $\mathbf{A}(\hat{I}), \mathbf{C}(\hat{I})$ ). Les gains déterminés sont ensuite utilisés pour corriger l'état prédit au sens de l'équation (4.10). La démarche suivie dans l'IEKF revient à formuler mathématiquement un EKF classique mais pour une erreur d'estimation sur l'état invariante. L'IEKF fournit une approximation, au 2<sup>nd</sup> ordre, de l'erreur d'estimation sur l'état invariante. Malgré ses nombreux avantages, cette technique peut être relativement complexe à exploiter du fait de la linéarisation qu'elle nécessite pour identifier les matrices  $\mathbf{A}(\hat{I})$  et  $\mathbf{C}(\hat{I})$ . Afin de s'affranchir de ce point dur, les recherches que nous avons menées ont conduit au développement de deux méthodes différentes pour l'estimation de l'état des systèmes dynamiques dans un cadre non linéaire. Tout comme pour l'IEKF, nous avons cherché à conférer à nos estimateurs les mêmes propriétés d'invariance que celles qui peuvent caractériser le système observé. Cependant, et afin de ne pas recourir à certains calculs jugés *a priori* trop complexes pour que les méthodes puissent être embarquées et intégrées au projet Paparazzi (comme la linéarisation à tout instant d'un modèle), nos travaux se sont penchés sur l'application des principes du filtrage de Kalman *unscented* à la théorie des observateurs invariants. La première méthode présentée dans la section qui suit a été baptisée IUKF (pour *Invariant Unscented Kalman Filter*), et la seconde  $\pi$ -IUKF. Le symbole  $\pi$  provient ici de la condition, dite de **compatibilité** et désignée par  $\pi$ , qu'il est nécessaire d'ajouter pour pouvoir hybrider les principes théoriques liés à la construction de tout observateur invariant et à l'UKF. Notons que des versions factorisées de l'IUKF et du  $\pi$ -IUKF existent également à la suite de nos travaux.



## 4.4 Algorithme Square-Root Unscented Kalman Filter

L'algorithme du SRUKF a servi de base aux développements méthodologiques de cette thèse. Nous en fournissons, ci-contre, un pseudo-code où chaque étape de la boucle principale est détaillée :

<b>Algorithme SRUKF pour l'estimation d'état avec bruits additifs</b>	
Description du procédé : $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$	
Modélisation des capteurs : $\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k$	
► Calcul des pondérations $W_m^{(j)}$ , $W_c^{(j)}$ , $j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ (cf. Scaled UKF)	
► Initialisations $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$ et $\hat{\mathbf{S}}_0 = \text{chol}(\mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T])$	
► Calcul des $(2n + 1)$ sigma points : $\boldsymbol{\chi}_{k k}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k k}$ , $\boldsymbol{\chi}_{k k}^{(1)}$ , $\dots$ , $\boldsymbol{\chi}_{k k}^{(2n)}$	
► Etape de prédiction :	
❶	$\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ , $\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(i)} = f(\boldsymbol{\chi}_{k k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(i)}$
❷	Décomposition QR de la covariance prédite des erreurs invariantes sur l'état :
	$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1 k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{ qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( (\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(1)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}) \dots (\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(2n)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}) \right) \mathbf{Q}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{ cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1 k}, (\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$
❸	$\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ , $\hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(i)} = h(\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(i)}$
❹	Décomposition QR de la covariance prédite des erreurs invariantes sur la sortie :
	$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1 k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{ qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( (\hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(1)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}) \dots (\hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(2n)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}) \right) \mathbf{R}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{ cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1 k}, (\hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$
❺	Prédiction de la covariance croisée des erreurs d'estimation invariantes :
	$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1 k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} (\boldsymbol{\chi}_{k+1 k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k})(\hat{\mathbf{y}}_{k+1 k}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k})$
► Etape de correction/filtrage :	
❶	Calcul des gains : $\mathbf{K}_{k+1} = (\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1 k} / \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1 k}^T) / \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1 k}$
❷	Calcul du nouvel état estimé :
	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1 k})$
❸	Mise à jour de la matrice $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx}}$ :
	$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1 k+1} = \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1 k}, \mathbf{K}_{k+1} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1 k}, -1 \right)$

Par rapport à l'algorithme standard de l'UKF, le SRUKF constitue une alternative très intéressante d'un point de vue numérique. En effet, l'étape la plus lourde numériquement dans

la mise en œuvre de l’UKF est le calcul, à chaque instant, des sigma points car il nécessite de déterminer la matrice racine carrée  $\hat{\mathbf{S}}_{k|k}$  de la covariance estimée des erreurs d’estimation sur l’état  $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$  telle que :  $\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \hat{\mathbf{S}}_{k|k} \hat{\mathbf{S}}_{k|k}^T$ . Pour ce faire, il est possible d’utiliser la factorisation de Cholesky qui permet de procéder à ce calcul. Toutefois, afin d’éviter un recours systématique à cette opération d’algèbre linéaire, le SRUKF propose d’actualiser directement cette matrice racine carrée en lieu et place des matrices de covariance. L’algorithme ne nécessite donc qu’une seule factorisation de Cholesky, appliquée à la matrice initiale  $\hat{\mathbf{P}}_0$ . La donnée de  $\hat{\mathbf{S}}_{k|k}$ , à chaque instant, facilite grandement le calcul des sigma points. En revanche, afin d’éviter le calcul de multiples produits matriciels puis leur décomposition de Cholesky aux étapes de prédiction et de correction, le SRUKF met à profit trois autres techniques, très puissantes numériquement, issues de l’algèbre linéaire : ❶ la décomposition QR (opérateur `qr`) ; ❷ la mise à jour de rang 1 du facteur de Cholesky (opérateur `cholupdate`) ; ❸ et la pseudo-inverse par moindres carrés (opérateur `/`).

## 4.5 Première tentative de reformulation du filtrage de Kalman *unscented* dans un cadre invariant: l’IUKF

### 4.5.1 Principes fondateurs

Lorsque la dynamique du système observé présente des propriétés d’invariance par symétries, les équations de base du SRUKF ne permettent pas de synthétiser un estimateur de l’état du système disposant de propriétés analogues. Pourtant, du point de vue de la convergence, il peut être très intéressant de chercher à conférer à tout filtre estimateur candidat les propriétés d’invariance du système, à l’instar de ce qui est fait pour les observateurs invariants et l’IEKF. Ainsi, nous souhaiterions modifier l’algorithme précédent afin que cela soit le cas également. Notre objectif consiste donc à adapter le SRUKF pour en faire un estimateur invariant. A partir des principes mis en œuvre et des multiples étapes de calcul qui fondent l’algorithme du SRUKF (cf. §4.4), une réécriture « naturelle » des équations, visant à adapter la méthode à un cadre invariant pour l’estimation, peut être obtenue simplement en redéfinissant les termes d’erreur utilisés dans la version standard présentée au cours de la section précédente. En effet, les termes d’erreur linéaires  $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  et  $\mathbf{z} - \hat{\mathbf{y}}$ , classiquement rencontrés en filtrage de Kalman, ne préservent en rien les symétries et les invariances du système. Ainsi, nous considérerons les erreurs d’état et de sortie invariantes suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} & \longrightarrow \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) - \varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{z} - \hat{\mathbf{y}} & \longrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \rho_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\hat{\mathbf{y}}) - \rho_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z}) \end{cases} \quad (4.21)$$

Dans l’équation (4.21),  $\mathbf{x}$  désigne l’état « vrai » du système.  $\hat{\mathbf{x}}$  correspond à l’estimé de cet état. Les notations  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\mathbf{z}$  indiquent respectivement la sortie estimée et le vecteur des mesures

bruitées.

**Remarque :** on peut vérifier aisément que ces erreurs sont invariantes. En effet,  $\forall g \in G$  on a :

$$\begin{aligned}
 \eta(\varphi_g(\mathbf{x}), \varphi_g(\hat{\mathbf{x}})) &= \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))}(\varphi_g(\mathbf{x})) - \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))}(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}})) \\
 &= \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g}(\mathbf{x}) - \varphi_{\gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ par définition de la loi de composition sur } G \\
 &= \varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) - \varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ car } \gamma(\varphi_g(\mathbf{x}))g = \gamma(\mathbf{x}) \rightsquigarrow \text{résultat du chapitre 2} \\
 &= \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \quad \square
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\rho_g(\mathbf{z}), \varphi_g(\hat{\mathbf{x}}), \rho_g(\hat{\mathbf{y}})) &= \rho_{\gamma(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}}))}(\rho_g(\hat{\mathbf{y}})) - \rho_{\gamma(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}}))}(\rho_g(\mathbf{z})) = \rho_{\gamma(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}})g}(\hat{\mathbf{y}}) - \rho_{\gamma(\varphi_g(\hat{\mathbf{x}})g}(\mathbf{z})) \\
 &= \rho_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\hat{\mathbf{y}}) - \rho_{\gamma(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z}) \\
 &= \mathbf{E}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \quad \square
 \end{aligned}$$

Dans le cas où l'action de groupe est de rang plein et transitive (i.e. telle que  $\dim(G) = \dim(\mathcal{X}) = n$ ), nous avons vu que  $G$  peut être identifié à l'espace d'état  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  de sorte que la transformation locale  $\varphi_g$  puisse être assimilée à une multiplication à gauche telle que  $\varphi_g(\mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x}$ . La résolution des équations de normalisation telle que  $\varphi_g(\mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x} = e$ , où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $G$ , conduit au repère mobile solution suivant :  $\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-1}$ . Dans ce cas, les erreurs de l'équation (4.21) deviennent :

$$\begin{cases} \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}) - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) = e - \mathbf{x}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\hat{\mathbf{y}}) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{z}) \end{cases} \quad (4.22)$$

**Illustration dans le cas de l'AHRS :** considérant ici uniquement les équations d'évolution associées au modèle  $\mathcal{M}_{ahrs}$ , la transformation de groupe  $\varphi_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}}(\mathbf{x})$  et l'inverse  $\mathbf{x}^{-1}$  définis tels que :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2}q * (w_m - w_b) \\ \dot{w}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{b}_s = 0 \end{cases}, \varphi_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q * q_0 \\ q_0^{-1} * w_b * q_0 + w_0 \\ a_0 a_s \\ b_0 b_s \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ -q * w_b * q^{-1} \\ 1/a_s \\ 1/b_s \end{pmatrix}$$

on en déduit l'expression analytique de  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  telle que :

$$\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = e - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ q * (\hat{w}_b - w_b) * q^{-1} \\ \hat{a}_s/a_s \\ \hat{b}_s/b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \hat{q} * q^{-1} \\ q * (w_b - \hat{w}_b) * q^{-1} \\ 1 - \hat{a}_s/a_s \\ 1 - \hat{b}_s/b_s \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Dans l'équation (4.23) précédente,  $\mathbf{1}=(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  désigne le quaternion de norme unité cor-

respondant à l'élément neutre pour le produit  $*$ .

**Illustration dans le cas de l'INS :** de la même manière, en considérant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{2}q * (w_m - w_b) \\ \dot{V} = A + \frac{1}{a_s}q * a_m * q^{-1} \\ \dot{X} = V \\ \dot{w}_b = 0 \\ \dot{a}_s = 0 \\ \dot{h}_b = 0 \end{array} \right. , \varphi_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q * q_0 \\ V + V_0 \\ X + X_0 \\ q_0^{-1} * w_b * q_0 + w_0 \\ a_0 a_s \\ h_b + h_0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ -V \\ -X \\ -q * w_b * q^{-1} \\ 1/a_s \\ -h_b \end{pmatrix}$$

nous obtenons :

$$\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = e - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ \hat{V} - V \\ \hat{X} - X \\ q * (\hat{w}_b - w_b) * q^{-1} \\ \hat{a}_s / a_s \\ \hat{h}_b - h_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{q} * q^{-1} \\ V - \hat{V} \\ X - \hat{X} \\ q * (w_b - \hat{w}_b) * q^{-1} \\ 1 - \hat{a}_s / a_s \\ h_b - \hat{h}_b \end{pmatrix}$$

Dès lors, la notion de matrice de covariance des erreurs d'estimation, dont le calcul dans l'algorithme du SRUKF peut être approché à partir de la donnée des  $(2n + 1)$  sigma points  $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$ ,  $i \in \llbracket 1; (2n + 1) \rrbracket$ , construits à chaque pas de temps  $k \in \mathbb{Z}^*$ , se trouve désormais modifiée pour être associée aux erreurs définies par l'équation (4.22). Nous parlerons alors de matrice de covariance des erreurs d'estimation invariantes. Il en résulte que l'étape de prédiction décrite dans l'algorithme présenté au cours de la section 4.21 devient (les modifications apportées à l'algorithme standard du SRUKF apparaissent en rouge dans ce qui suit) :

### ❶ Etape de prédiction ( $\forall k \geq 1$ )

► Mapping de  $f$  sur les  $(2n + 1)$  sigma points tel que :

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = [\mathbf{x}_{k+1|k}^{(0)} \quad \mathbf{x}_{k+1|k}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k+1|k}^{(2n)}] = f(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k)$$

► Calcul de l'état prédit tel que :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)}$$

► Décomposition QR de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur l'état invariante telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{k+1|k} = \text{qr} \left( \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(2)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdots \eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(2n)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \right) \sqrt{\mathbf{W}_k} \right] \right) \\ \mathbf{S}_{k+1|k} = \text{cholupdate} \left( \mathbf{S}_{k+1|k}, \eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(0)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$$

où :  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) = \varphi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}) - \varphi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) = e - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$

► Mapping de  $h$  sur les  $(2n + 1)$  sigma points contenus dans la matrice  $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}$  tel que :

$$\hat{\mathbf{Y}}_{k+1|k} = [\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(0)} \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(1)} \cdots \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(2n)}] = h(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k)$$

► Calcul de la sortie prédite tel que :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}$$


---

L'étape de décomposition de la matrice de covariance associée à l'erreur d'estimation sur l'état fait donc apparaître un ensemble de  $(2n + 1)$  erreurs invariantes calculées entre chaque sigma point et l'état prédit. La notion de covariance porte donc désormais sur l'erreur d'état invariante et non plus sur un terme d'erreur linéaire. Il s'agit de la principale nuance introduite avec le filtrage de Kalman *unscented* classique. Hormis cette modification majeure, l'étape de prédiction n'est que peu modifiée par rapport à sa version originale.

Par suite et de la même manière, l'étape de correction, au cours de laquelle sont calculés les gains, se trouve elle aussi modifiée telle que :

---

## ② Etape de correction ( $\forall k \geq 1$ )

► Décomposition QR de la matrice de covariance associée aux erreurs d'estimation sur la sortie invariantes telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k} = \text{qr} \left( \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(1)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(1)}) \cdots \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(2n)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(2n)}) \right) \sqrt{\mathbf{V}_{k+1}} \right] \right) \\ \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k} = \text{cholupdate} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k}, \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(0)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(0)}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) &= \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) - \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\ &= \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(h(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\ &= h(\varphi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}), \psi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\mathbf{u}_k)) - \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\ &= h(e, I(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \end{aligned}$$

► Calcul approché de la matrice de covariance croisée des erreurs d'estimation invariantes

---

entre l'état et la sortie tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{xy},k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} (e - \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) (h(e, I(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \rho_{\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}))^T \end{aligned}$$

► Calcul de la matrice des gains de correction tel que :

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_{\mathbf{xy},k+1|k} / \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k} \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$$

►► Calcul de l'état estimé à l'instant  $(k+1)$  connaissant la mesure  $\mathbf{z}_{k+1}$  tel que :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{z}_{k+1}) \cdot w(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot (\rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k})) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \end{aligned}$$

où :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,  $w_i(\mathbf{x}) = (D\varphi_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{x}))^{-1} \cdot \partial() / \partial x_i$ . Le terme  $\partial() / \partial x_i$  correspond au  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

► Mise à jour de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur l'état invariante telle que :

$$\mathbf{S}_{k+1|k+1} = \text{cholupdate}(\mathbf{S}_{k+1|k}, \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_{\mathbf{y},k+1|k}, -1)$$

Pour ce qui est de l'étape de correction, nous voyons que les modifications apportées à la version standard du SRUKF sont plus nombreuses. En effet, la redéfinition de la notion de matrice de covariance, associant celle-ci à des erreurs d'estimation désormais invariantes, modifie :

❶ le calcul de la covariance prédite relative à la sortie  $\mathbf{y}$  tel que :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y},k+1|k} \propto \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{Y}}_{k+1|k})$$

❷ et le calcul de la covariance croisée prédite entre les erreurs d'estimation portant sur l'état  $\mathbf{x}$  et la sortie  $\mathbf{y}$  tel que :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xy},k+1|k} \propto \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}), \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{Y}}_{k+1|k})$$

Il s'en suit naturellement que le gain de correction calculé pour l'estimation de l'état par une technique de type UKF dépendra, par transitivité, d'invariants fondamentaux pour le système considéré ( $\psi_{\mathbf{x}^{-1}}(u)$ ) et d'erreurs de sortie invariantes ( $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x}, \cdot)$ ).

Le cadre invariant défini pour le système considéré entraîne également une réécriture des équations de correction de l'état prédit. En effet, il apparaît que le terme de correction additif repose dorénavant sur : ► un gain qui dépend des invariants du problème d'estimation ; ► et une innovation invariante. De plus, ce terme correctif se retrouve projeté dans le repère invariant, de sorte que, la correction de l'état prédit soit réalisée, composante par composante, i.e. selon les directions des  $n$  vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  formée par le champ de vecteurs invariants  $\mathcal{B}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) = \{\omega_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})\}_{i \in [1;n]}$ .

Ce travail d'adaptation de la version standard du SRUKF constitue l'approche la plus naturelle pour dériver un estimateur invariant dont les termes de correction :

- sont calculés selon un schéma de type UKF, adapté au cadre invariant du problème d'estimation posé, qui échantillonne l'espace d'état à partir d'une technique SUT (*Scaled Unscented Transform*) classique, identique à celle communément exploitée pour le filtrage de Kalman par Sigma Points ;
- respectent les symétries propres au système du fait qu'ils sont construits à partir d'une innovation invariante et de gains dépendant des invariants fondamentaux et de l'erreur de sortie invariante.

Cette toute première tentative de formulation s'inspire grandement des travaux de recherche qui ont été réalisés autour du filtrage de Kalman étendu invariant (IEKF -{Bonnabel *et al.*, 2009b}). Il est à noter au passage que l'algorithme présenté précédemment repose sur un paramétrage multiple du groupe de transformations en définissant successivement chaque inverse de sigma point comme paramètre à considérer pour l'application composite  $\phi_g = (\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$ . Ceci revient à définir un ensemble de  $(2n + 1)$  repères mobiles, de dimension  $n$ , dans l'espace d'état qui envoient chaque sigma point vers l'élément neutre  $e$  par l'application locale  $\varphi_g$  qui, pour rappel, s'apparente à une action transitive de rang plein telle que  $\varphi_g(\mathbf{x}) = g \cdot \mathbf{x}$  (cf. figure 4.3).

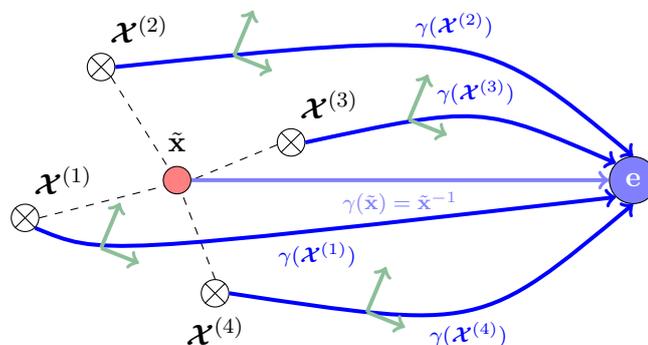


FIGURE 4.3 – Réseau des  $(2n + 1)$  repères invariants associés aux sigma points

L'algorithme qui vient d'être proposé est générique en ce sens qu'il ne se préoccupe ni de la forme des équations du modèle d'observation, ni de celle associée aux relations définissant la transformation de groupe  $\rho_g$ . Pour autant, dans certains cas, il peut être intéressant d'approfondir et de spécialiser plusieurs des calculs menés dans les différentes étapes décrites précédemment afin d'explicitier celles-ci. C'est ce que nous nous proposons de décrire maintenant pour le seul cas de l'AHRS pour lequel la modélisation et les transformations de groupe à considérer ont été données au cours des sections 4.2.1 et 4.2.2.

Ainsi, la reformulation énoncée et proposée auparavant définit un ensemble fini de  $(2n + 1)$  erreurs d'estimation sur l'état invariants  $\{\eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})/i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket\}$  qui peuvent être explicitées dans le cas simple de l'AHRS comme il suit (cf. résultats du §4.3, au signe près) :

$$\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \eta(\mathcal{X}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \hat{q}_{k+1|k} * q_{\mathcal{X}^{(i)}}^{-1} \\ q_{\mathcal{X}^{(i)}} * (w_{b,\mathcal{X}^{(i)}} - \hat{w}_{b,k+1|k}) * q_{\mathcal{X}^{(i)}}^{-1} \\ 1 - \hat{a}_{s,k+1|k}/a_{s,\mathcal{X}^{(i)}} \\ 1 - \hat{b}_{s,k+1|k}/b_{s,\mathcal{X}^{(i)}} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Dans l'équation (4.24), l'indice  $k + 1|k$  a été volontairement omis pour chacun des  $(2n + 1)$  sigma points afin d'alléger les notations. Il en sera de même pour certaines équations dans la suite.

De la même façon, le nouvel algorithme introduit un ensemble complet de  $(2n + 1)$  invariants fondamentaux tels que, pour l'AHRS, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, I(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) &= \psi_{\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)-1}}(w_m(k)) \\ &= q_{\mathcal{X}^{(i)}} * w_m(k) * q_{\mathcal{X}^{(i)}}^{-1} - q_{\mathcal{X}^{(i)}} * w_{b,\mathcal{X}^{(i)}} * q_{\mathcal{X}^{(i)}}^{-1} \\ &= q_{\mathcal{X}^{(i)}} * (w_m(k) - w_{b,\mathcal{X}^{(i)}}) * q_{\mathcal{X}^{(i)}}^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Par suite et toujours dans le cas de l'AHRS, les  $(2n + 1)$  erreurs de sortie invariants peuvent, quant à elles, s'exprimer simplement à partir du vecteur constant  $(A^T B^T)^T$ , de la transformation de groupe  $\rho_g$  et, comme nous allons le voir, des erreurs d'estimation sur l'état invariants telles

que  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}^{(i)}) &= h(e, I(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \rho_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\
 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \hat{\mathbf{y}}_{A, k+1|k} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \\ b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \hat{\mathbf{y}}_{B, k+1|k} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \left( \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} h_A(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}, \mathbf{u}_k) \right) * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \\ b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \left( \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} h_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}, \mathbf{u}_k) \right) * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.26) \\
 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \begin{pmatrix} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * (a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}}^{-1} * A * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}}) * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \\ b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * (b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} \cdot q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}}^{-1} * B * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}}) * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \begin{pmatrix} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} \cdot (q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1})^{-1} * A * (q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1}) \\ b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} \cdot (q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1})^{-1} * B * (q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)}} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e-\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left[ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right] \text{ car : } \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} = 1 \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Dans la relation (4.26) précédente,  $h_A(\cdot)$  et  $h_B(\cdot)$  désignent les restrictions du modèle d'observation aux calculs des sorties associées à l'accélération d'une part et au champ magnétique d'autre part. Le résultat (4.27) montre que les erreurs invariantes de prédiction sur la sortie peuvent s'écrire comme une somme pondérée d'écart, eux-mêmes invariants, entre le vecteur constant  $(A^T \ B^T)^T$  et son image par l'application  $\rho_g$  paramétrée sur le groupe de Lie par les éléments  $e - \eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})$ , avec  $i$  donné dans  $\llbracket 0; 2n \rrbracket$  et  $\forall j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ . Cette expression repose sur le calcul des  $(2n+1)$  vecteurs d'erreur invariante entre les sigma points  $\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})$  avec le cas particulier où :  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}) = \vec{0}$ . L'algorithme nécessite donc la détermination de  $(2n+1) \times (2n+1) - (2n+1) = 4n^2 + 2n$  termes  $\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})$  si l'on élimine tous les cas particuliers indiqués qui sont triviaux. Dans le cas simple de l'AHRS où  $n = 9$ , l'approche du SRIUKF requiert donc le calcul de 342 vecteurs d'erreur invariante entre les sigma points lors de chaque itération. L'équation (4.27) peut être réécrite afin d'éliminer le cas particulier où  $j = i$  dans la somme pondérée. Nous obtenons alors  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left[ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right] &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left[ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right] \quad (4.28) \\
 \text{car : } \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\eta(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\vec{0}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_e \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble de ces calculs montrent que, de manière implicite, et dans le cas de l'AHRs, étant donné un ensemble de  $(2n + 1)$  sigma points, le calcul des erreurs d'estimation invariantes sur la sortie requiert en fait le calcul d'un nombre potentiellement important d'erreurs d'estimation invariantes entre les sigma points. La figure 4.4 tente d'illustrer ce point propre au cas de l'AHRs et de le comparer avec la démarche plus générale présentée au début de cette sous-section (algorithme du (SR)-IUKF générique) qui peut, pour sa part, être appliquée à tout type de modélisation.

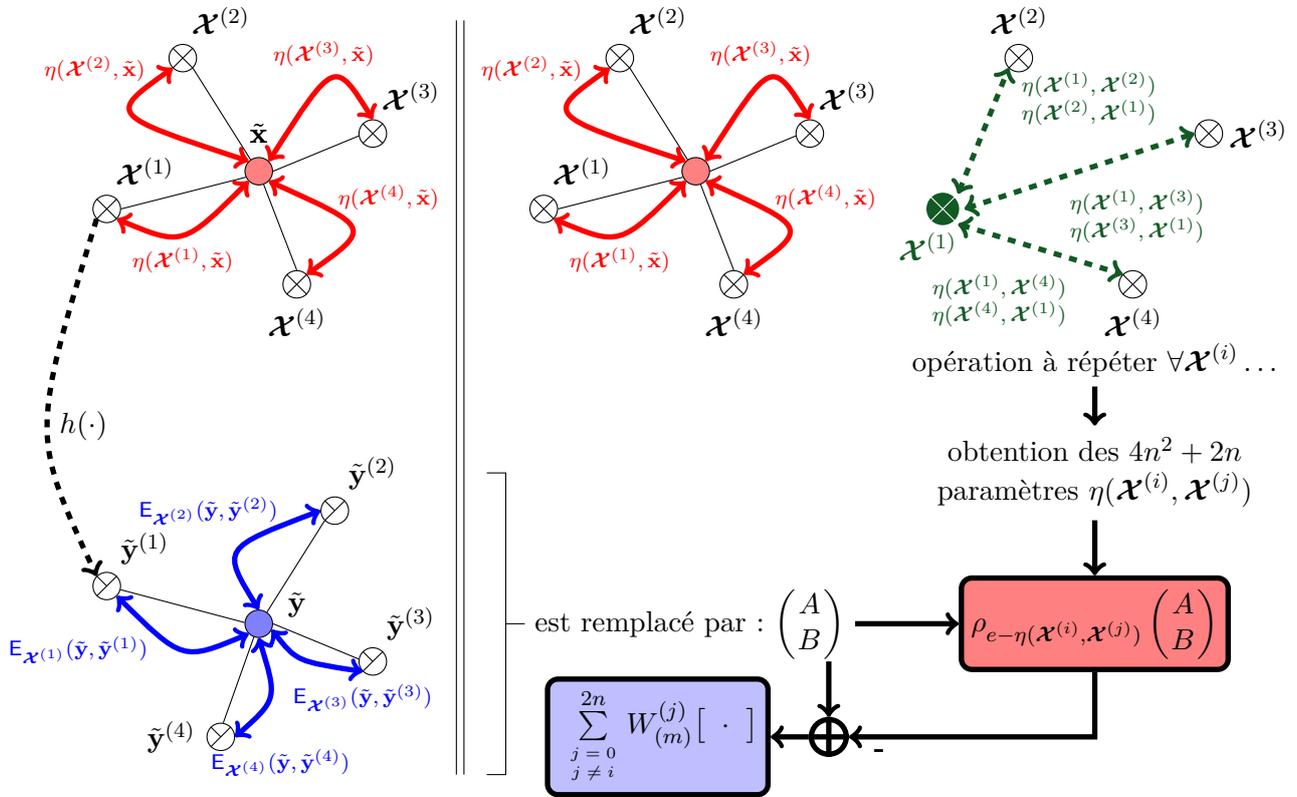


FIGURE 4.4 – Comparatif SRIUKF standard vs. SRIUKF appliquée au cas de l'AHRs. Paramétrage par les sigma points  $\{\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{x}^{(i)})/i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket\}$

Par suite, il est également très intéressant de relever que le paramètre  $g$  associé à la transformation de groupe composite  $\phi_g = (\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$ , qui ici est multiple, puisque chaque sigma point  $\mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)}$ ,  $i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  sert de paramétrage local pour le calcul des erreurs invariantes, peut aussi être choisi constant et égal à  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ , sans que cela ne modifie sensiblement les performances de l'algorithme d'estimation. En effet, les premières versions de codage de l'algorithme (SR)-IUKF ont montré que nous obtenions alors des résultats similaires. Dans le cas où

$g = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ , les erreurs de prédiction sur la sortie invariantes s'expriment comme ( $i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}^{(i)}) &= \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\hat{\mathbf{y}}^{(i)}) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\
 &= \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(h(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \\
 &= \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(h(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}, \mathbf{u}_k)) - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &= h(\varphi_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}), I(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k)) - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &= h(e - \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}), I(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k)) - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Or, étant données les équations du modèle d'observation pour l'AHRs, nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 h(e - \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}), \psi_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{-1}}(\mathbf{u}_k)) &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} \cdot \hat{a}_{s, k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} * A * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \\ b_{s, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} \hat{b}_{s, k+1|k}^{-1} \cdot \hat{q}_{k+1|k} * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}}^{-1} * B * q_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}} * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \end{pmatrix}} \\
 &= \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

L'injection du résultat de l'équation (4.29) dans le calcul qui le précède donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}^{(i)}) &= \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left[ \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \rho_{e-\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right] \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme dans le cas précédent du paramétrage multiple, il apparaît que le calcul des erreurs de prédiction sur la sortie invariantes se ramène à une somme pondérée d'erreurs de sortie toujours invariantes. Les particularités du résultat viennent ici du fait que chaque erreur élémentaire admet comme argument d'entrée le vecteur constant  $(A^T \ B^T)^T$ , qui constitue un invariant du problème d'estimation, et que le paramétrage du groupe de Lie varie selon l'indice  $j$  de la somme pondérée, i.e. au gré du sigma considéré pour chaque calcul élémentaire. Nous noterons au passage qu'en substituant  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  par  $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$  dans l'équation (4.30) nous retrouvons *stricto sensu* le résultat de l'équation (4.28).

L'intérêt de ce dernier paramétrage réside dans l'avantage calculatoire que le résultat présenté dans l'équation (4.30) confère à l'algorithme du (SR)-IUKF. En effet, comparativement au cas précédent, seules les erreurs d'estimation sur l'état invariantes, entre l'état prédit et chaque sigma point, sont requises pour déterminer celles portant sur les sorties prédites. Or, il se trouve

que l'ensemble  $\{\eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{x}^{(i)})/i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket\}$  est déjà calculé dans l'étape de prédiction pour déterminer la matrice de covariance des erreurs d'estimation sur l'état invariante. Cette formulation ne nécessite donc pas la détermination des  $4n^2 + 2n$  erreurs d'état invariante entre les sigma points. La figure 4.5 résume les calculs de cette autre formulation du (SR)-IUKF, au paramétrage différent, et les compare à ceux de la version générique détaillée précédemment.

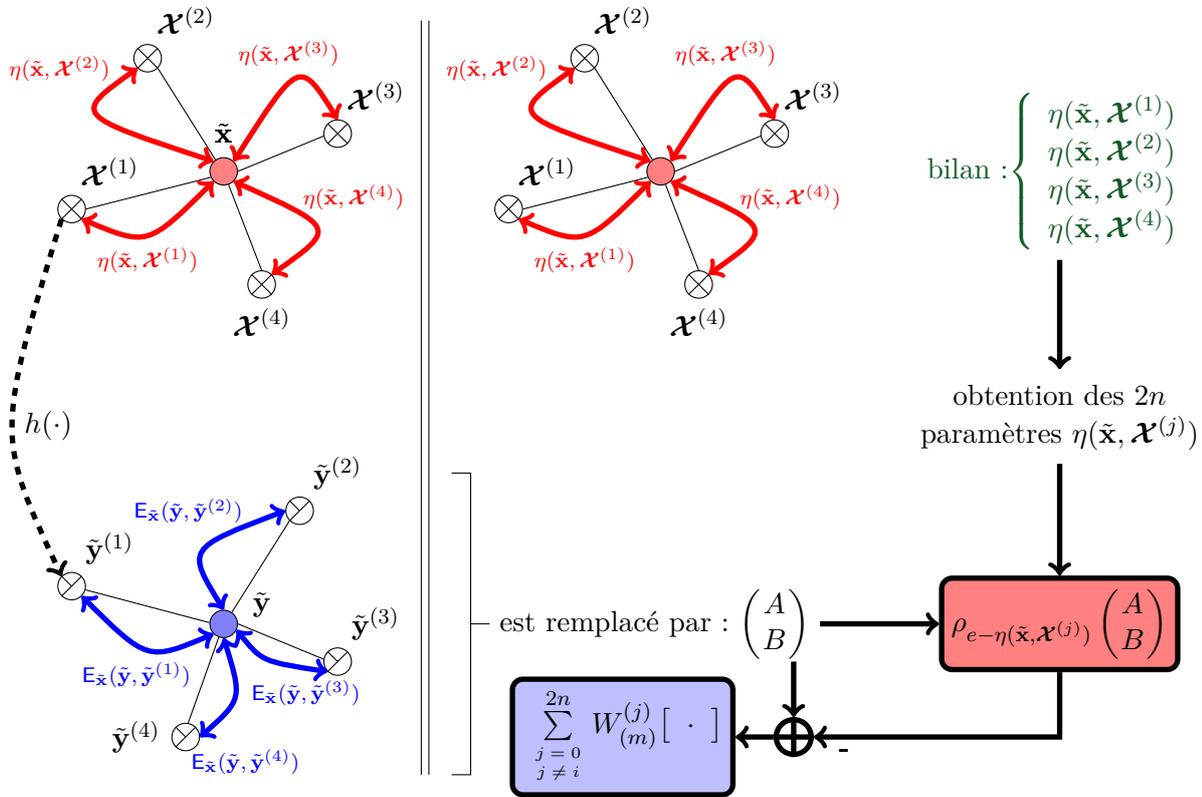


FIGURE 4.5 – Comparatif SRIUKF standard vs. SRIUKF appliqué au cas de l’AHRS. Paramétrage par l’état prédit  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket} W_{(m)}^{(j)} \mathbf{x}_{k+1|k}^{(j)}$

Le résultat de l'équation (4.30) permet de ré-exprimer les équations du filtre de Kalman *unscented* invariant pour le problème de l'AHRS tel que :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{z}_{k+1}) \cdot w(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \right) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \rho_{e^{-\eta}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{e^{-\eta}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right)}_{\text{somme pondérée d'innovations invariantes}} \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{e^{-\eta}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\
 &= \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \left[ \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(j)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{e^{-\eta}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) \cdot w_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \right]
 \end{aligned}$$

L'état estimé est donc calculé, à chaque instant, comme la correction de la prédiction fournie par la dynamique invariante, à gauche ou à droite, du système, par une somme pondérée de termes d'innovation invariants sur le groupe de Lie paramétré directement ou indirectement par  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ . Plus précisément, le détail des équations du filtre peut être établi tel que (on pose  $\tilde{x} = \hat{x}_{k+1|k}$  où  $x \in \{q, \omega_b, a_s, b_s\}$ ) :

$$\begin{aligned}
 \square \hat{q}_{k+1|k+1} &= \tilde{q} + \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \rho_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}^{-1}(\mathbf{z}_{k+1}) - \rho_{e^{-\eta}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}^{(j)})} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) * \tilde{q} \\
 &= \tilde{q} + \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \begin{aligned} &[\tilde{a}_s^{-1} \tilde{q} * \mathbf{z}_{k+1}^{1:3} * \tilde{q}^{-1} - \dots \\ &[\tilde{b}_s^{-1} \tilde{q} * \mathbf{z}_{k+1}^{4:6} * \tilde{q}^{-1} - \dots \\ &a_{s, \boldsymbol{\chi}^{(j)}} \tilde{a}_s^{-1} \tilde{q} * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}^{-1} * A * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}} * \tilde{q}^{-1}] * \tilde{q} \\ &b_{s, \boldsymbol{\chi}^{(j)}} \tilde{b}_s^{-1} \tilde{q} * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}^{-1} * B * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}} * \tilde{q}^{-1}] * \tilde{q} \end{aligned} \right) \\
 &= \tilde{q} + \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \begin{aligned} &\tilde{a}_s^{-1} \tilde{q} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - a_{s, \boldsymbol{\chi}^{(j)}} q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}^{-1} * A * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}] \\ &\tilde{b}_s^{-1} \tilde{q} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - b_{s, \boldsymbol{\chi}^{(j)}} q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}^{-1} * B * q_{\boldsymbol{\chi}^{(j)}}] \end{aligned} \right) \\
 &= \tilde{q} + \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \begin{aligned} &\tilde{a}_s^{-1} \tilde{q} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - h^{1:3}(\boldsymbol{\chi}^{(j)}, \mathbf{u}_k)] \\ &\tilde{b}_s^{-1} \tilde{q} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - h^{4:6}(\boldsymbol{\chi}^{(j)}, \mathbf{u}_k)] \end{aligned} \right) \\
 &= \tilde{q} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \begin{aligned} &\tilde{a}_s^{-1} \tilde{q} * \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - h^{1:3}(\boldsymbol{\chi}^{(j)}, \mathbf{u}_k)] \\ &\tilde{b}_s^{-1} \tilde{q} * \sum_{j=0}^{2n} W_{(m)}^{(j)} [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - h^{4:6}(\boldsymbol{\chi}^{(j)}, \mathbf{u}_k)] \end{aligned} \right) \\
 \hat{q}_{k+1|k+1} &= \hat{q}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \begin{aligned} &\hat{a}_{s, k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{1:3}] \\ &\hat{b}_{s, k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{4:6}] \end{aligned} \right) \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

L'équation (4.31) laisse apparaître que dans le cas simple de l'AHRs, pour lequel de nombreux calculs analytiques peuvent être développés, les termes de correction invariants correspondent à une transformation géométrique des termes d'innovation linéaires classiquement rencontrés dans le domaine du filtrage de Kalman. De même, il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \square \hat{\omega}_{b,k+1|k+1} &= \hat{\omega}_{b,k+1|k} + \hat{q}_{k+1|k}^{-1} * \sum_{i=5}^7 \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \begin{pmatrix} \hat{a}_{s,k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{1:3}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \\ \hat{b}_{s,k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{4:6}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \end{pmatrix} * \hat{q}_{k+1|k} \\ \square \hat{a}_{s,k+1|k+1} &= \hat{a}_{s,k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}^{(8)} \begin{pmatrix} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{1:3}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \\ \hat{a}_{s,k+1|k} \hat{b}_{s,k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{4:6}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \end{pmatrix} \\ \square \hat{b}_{s,k+1|k+1} &= \hat{b}_{s,k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}^{(9)} \begin{pmatrix} \hat{b}_{s,k+1|k} \hat{a}_{s,k+1|k}^{-1} \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{1:3} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{1:3}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \\ \hat{q}_{k+1|k} * [\mathbf{z}_{k+1}^{4:6} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{4:6}] * \hat{q}_{k+1|k}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 4.5.2 Premiers résultats et analyse

Les données d'entrée ayant servi de référence pour cette première évaluation des approches de type IUKF développées dans cette thèse correspondent à celles issues d'une simulation d'un modèle dynamique décrivant le mouvement de chute libre d'un *parafoil*, développé à l'ONERA dans le cadre du projet FAWOPADS qui vise à mettre au point des algorithmes de pilotage, guidage et navigation pour des parachutes automatiques (cf. figure 4.6). Ces données simulées ont permis de valider facilement les principes méthodologiques développés au cours de cette thèse, de régler certains paramètres des méthodes et de tirer les premières conclusions sur les algorithmes d'estimation présentés au cours de cette section. Elles ont été traitées sans et avec bruit. Afin de rendre plus lisible les différents tracés qui apparaissent ci-après, nous avons sélectionné les courbes de l'estimation de l'état du système correspondant au cas sans bruit. Toutefois, et afin de constater les effets d'une addition de bruits (pseudo-blancs gaussiens ou colorés) sur les différentes mesures qui entrent dans l'estimateur, les résultats du cas avec bruit relatifs aux écarts-types théoriques et aux gains du filtrage de Kalman invariant sont donnés à la fin de ce paragraphe.



FIGURE 4.6 – Modèle de parafoil MP-360 de chez Onyx avec sa charge utile

L'horizon temporel de la simulation de référence sélectionnée pour valider nos algorithmes est d'un peu plus de 100 secondes. La dynamique simulée du système de parachute est relativement forte comme l'illustreront les figures retraçant les évolutions temporelles de l'attitude de référence de l'engin. En effet, nous y observerons des variations d'angle de gîte, de cap et d'assiette de

plusieurs dizaines de degrés. Bien qu'elles ne soient pas ici représentées, les variations de la vitesse du drone sont également importantes, remettant ainsi en cause l'hypothèse selon laquelle  $\dot{V} = 0$ ; hypothèse sur laquelle repose la modélisation  $\mathcal{M}_{ahrs}$ . Il sera donc intéressant d'observer les effets sur l'estimation de l'erreur commise en supposant que  $\dot{V} = 0$ . L'analyse des données simulées montrent que  $\dot{V}$  est différente de zéro pour  $t \in [5; 40]$ . Enfin, les résultats et estimations obtenus en appliquant l'algorithme du (SR)-IUKF aux données sont systématiquement comparés avec ceux fournis par un algorithme UKF standard.

► **Estimation de l'attitude:** les figures 4.7 et 4.8 fournissent respectivement les estimés UKF et IUKF des angles d'attitude de l'engin, et les comparent dans les deux cas aux pseudo-mesures associées qui ont été reconstruites à partir de la donnée des composantes du vecteur d'état servant de référence correspondantes au quaternion du système. Les angles estimés collent quasi-parfaitement dans les deux cas aux valeurs de référence. Que cela soit pour l'UKF ou l'IUKF, l'attitude du *parafoïl* selon les trois axes est très correctement restituée. Relevons également au passage, que l'erreur sur l'état initial qui a été introduite dans la simulation, est corrigée très rapidement, au bout de quelques pas de calcul seulement (temps caractéristique  $< 0.5$  sec.). Les tracés des erreurs d'estimation (selon une échelle logarithmique en ordonnée) montrent cependant que l'estimateur IUKF converge mieux et plus rapidement vers les vraies valeurs des paramètres de vol. En effet, les amplitudes de ces erreurs sont plus faibles dans le cas de l'IUKF. Par ailleurs, l'analyse comparée de ces graphes d'erreurs tend à prouver que les résidus d'estimation sur l'état sont plus stables au cours du temps dans le cas de l'IUKF, étant donné qu'il est possible d'observer une lente et légère décroissance de ceux-ci dans le cas de l'UKF. Les estimés délivrés par notre approche IUKF semblent donc être de meilleure qualité au regard de ceux produits par un algorithme d'estimation de type UKF standard.

► **Estimation de l'état associé au quaternion:** ayant observé une adéquation quasi-parfaite des grandeurs estimées avec les valeurs de référence pour les angles d'attitude, il apparaît normal de constater qu'il en va de même pour les composantes du quaternion. Que ce soit pour l'UKF ou l'IUKF, le quaternion estimé est semblable en tout point à la référence (cf. figures 4.9 et 4.10). Le fait notable concerne ici les courbes à  $\pm 1$  écart-type (théorique i.e. calculé par l'algorithme) tracées en pointillés noirs pour chaque composante de l'état associé au quaternion. Les figures 4.9 et 4.10 illustrent très clairement des différences entre l'approche de type UKF et l'IUKF. En effet, pour un même réglage des matrices de covariance estimées pour les bruits d'évolution et de mesure ( $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ ), le niveau d'incertitude déterminé par l'UKF apparaît très fluctuant, voire même divergent pour l'estimation de l'état  $q_3$ . A l'opposé, les écarts-types théoriques calculés par l'IUKF, après un régime transitoire de quelques secondes, convergent vers des valeurs quasi-constantes autour de chaque état moyen ( $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3 | \mathbf{z}$ ), étant données les observations  $\mathbf{z}$ . Les effets liés à la non-exactitude du modèle de l'AHRs utilisé (dynamique  $\dot{V}$  négligée) se font ici très légèrement ressentir dans les tracés de ces écarts-types qui varient de façon insignifiante sur l'intervalle de temps  $[5; 40]$ . Ils seront plus visibles dans les figures qui suivent et notamment dans la figure 4.13.

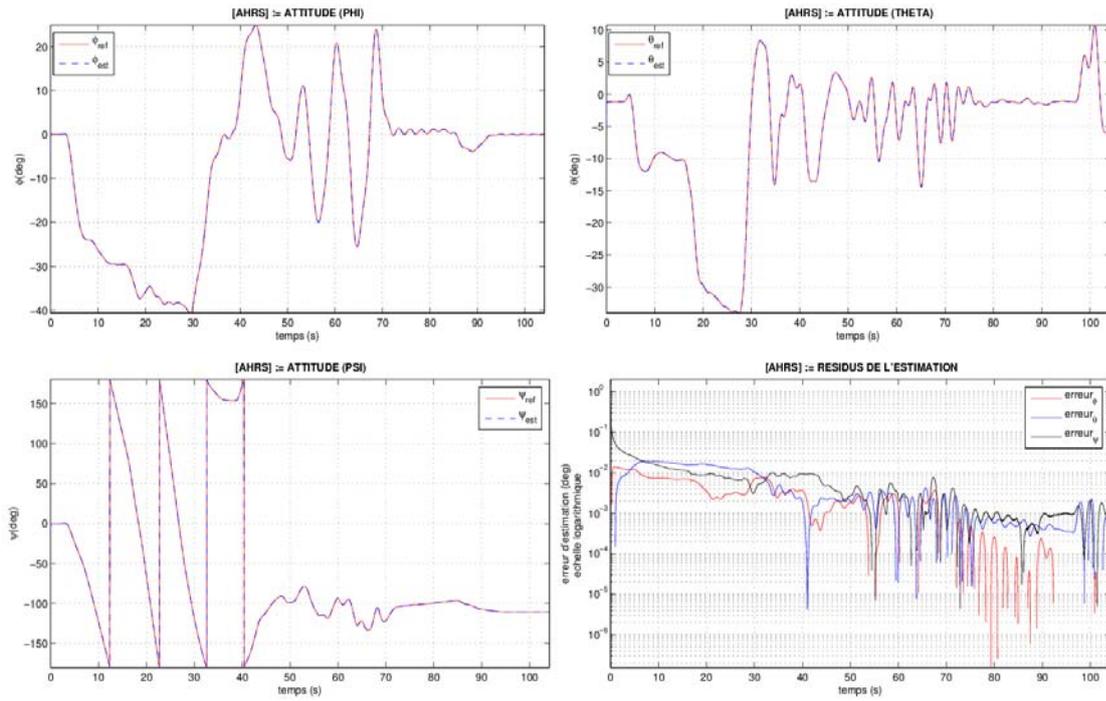


FIGURE 4.7 – UKF : estimation de l'attitude ( $\phi, \theta, \psi$ ) et erreurs d'estimation

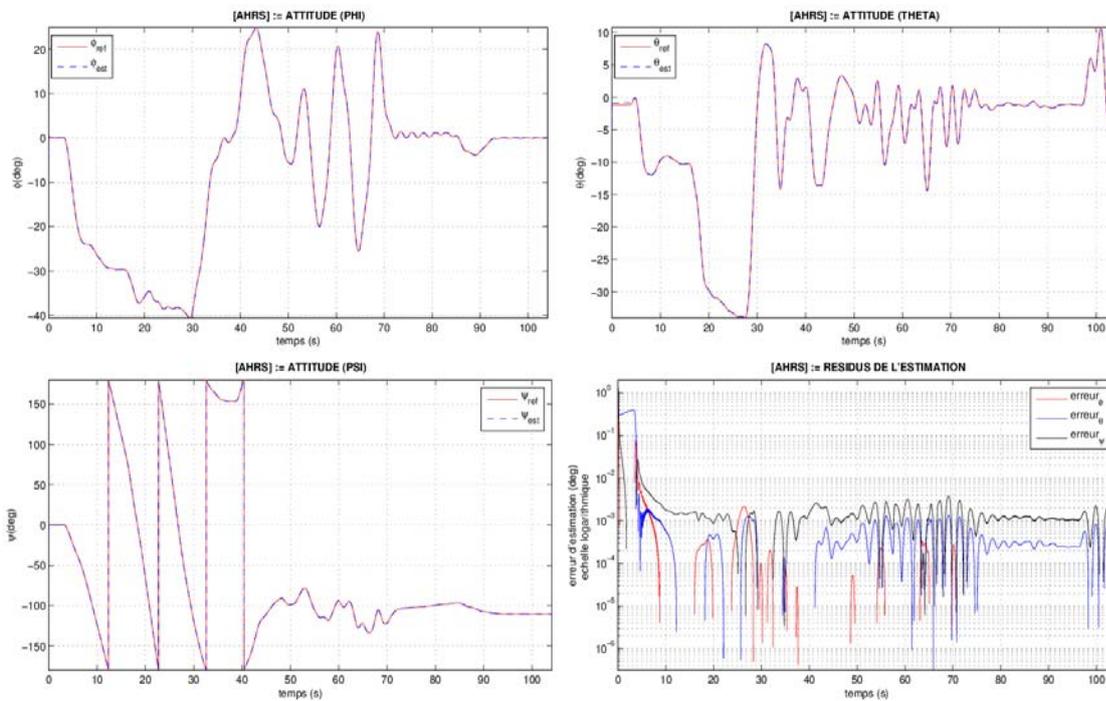


FIGURE 4.8 – IUKF : estimation de l'attitude ( $\phi, \theta, \psi$ ) et erreurs d'estimation

4.5 1<sup>ère</sup> reformulation du filtrage de Kalman *unscented*

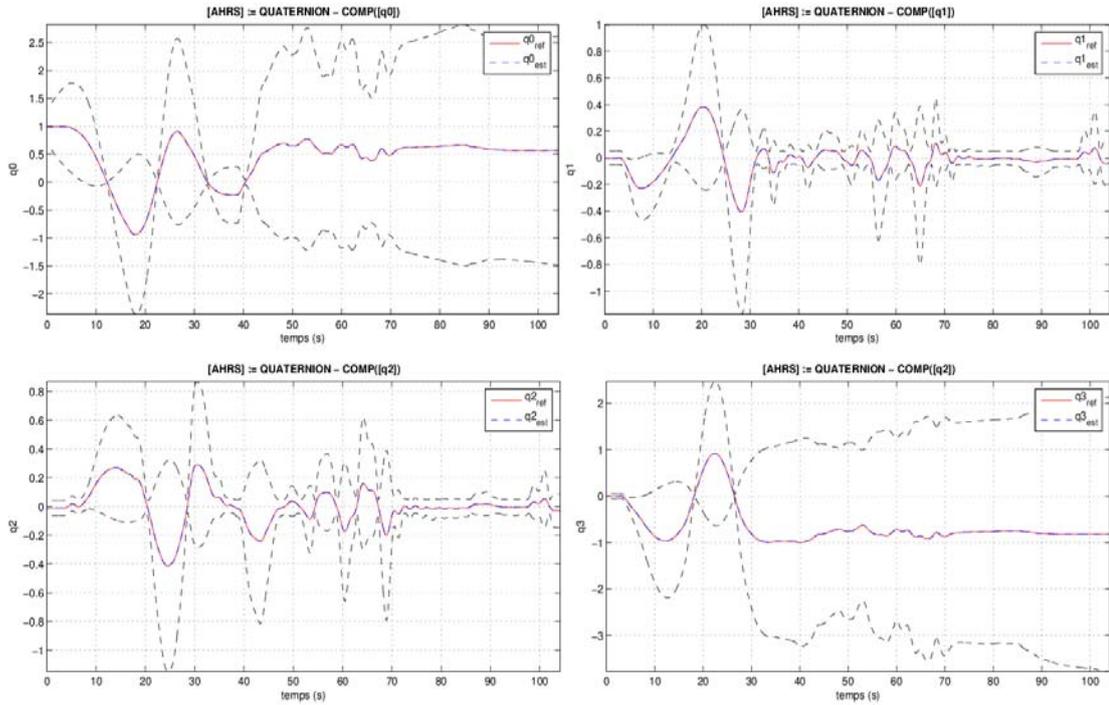


FIGURE 4.9 – UKF : estimation des états associés au quaternion  $q$  et tracés des écarts-types

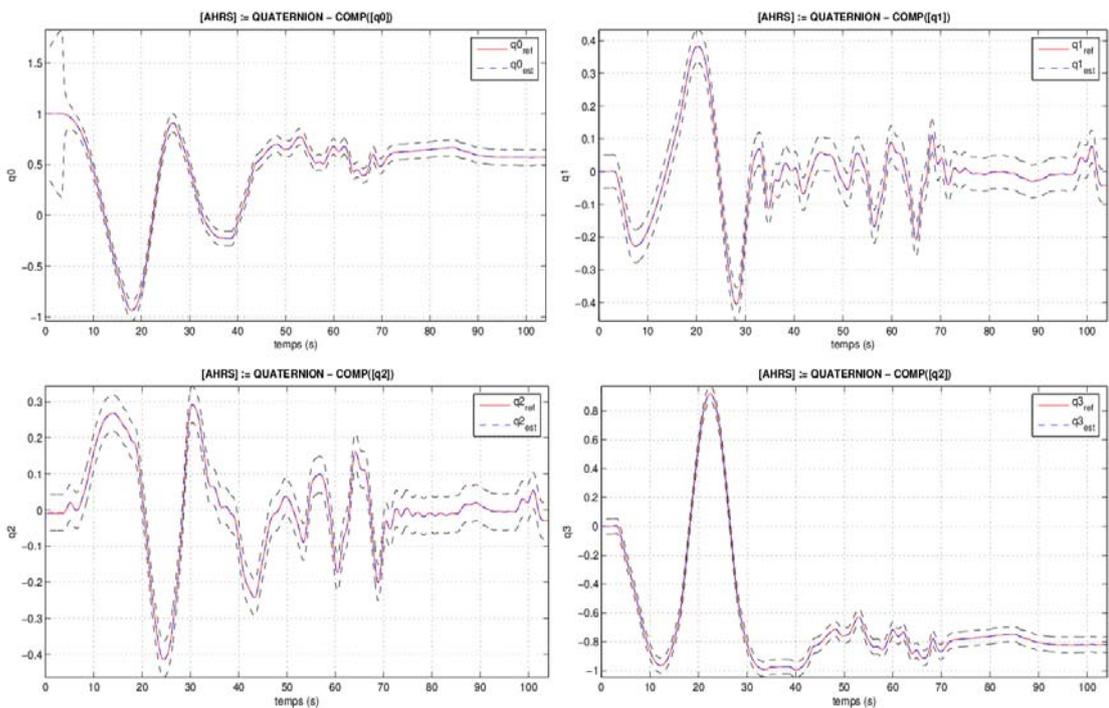


FIGURE 4.10 – IUKF : estimation des états associés au quaternion  $q$  et tracés des écarts-types

► **Au sujet des imperfections de mesure :** un jeu de trois biais additifs (état :  $\omega_b = (0.02 \ 0.2 \ -0.1)^T$ ) et de deux facteurs d'échelle (états :  $(a_s, b_s) = (0.9, 1.2)$ ) ont été introduits pour « polluer » les données simulées qui servent d'entrées aux deux schémas d'estimation évalués dans cette section. Ce faisant, l'observabilité du problème d'estimation posé peut être vérifiée et la capacité de l'algorithme employé à estimer de telles imperfections testées. Les figures 4.11 et 4.12 concatènent les résultats obtenus pour l'UKF et l'IUKF. Nous constatons que, quelque soit l'algorithme considéré, les vraies valeurs des différentes imperfections sont estimées sans erreur. Les écarts-types théoriques calculés par les deux algorithmes sont par ailleurs quasi-identiques entre l'UKF et sa version invariante développée dans ces travaux de thèse. Ces résultats montrent également que le problème est bien observable comme le laissait entendre l'analyse de détectabilité/d'observabilité réalisée au cours du chapitre 3. Nous relèverons au regard de ces différents tracés que, comme pour les composantes du quaternion, certains effets parasites, induits par l'inexactitude de la modélisation mise en œuvre pour le traitement des données (pour lesquelles  $\dot{V} \neq 0$ ), peuvent aussi s'observer sur les écarts-types théoriques calculés par l'IUKF et associés aux états liés aux biais des gyromètres  $\omega_b = (b\omega_p, b\omega_q, b\omega_r)$ . Toutefois, ces effets apparaissent ici plus prononcés puisqu'ils engendrent des variations plus importantes des écarts-types estimés au cours du temps. Les pics visibles sur les courbes en pointillés noirs correspondent aux maxima de  $\|\dot{V}\|$ . La convergence des estimés apparaît légèrement plus rapide pour l'IUKF que pour l'UKF.

► **Comparaison des covariances estimées et des erreurs d'estimation sur l'état :** la figure 4.13 compare les écarts-types théoriques déterminés par l'UKF d'une part et l'IUKF d'autre part pour toutes les composantes du vecteur d'état. Les résultats permettent de valider les principes théoriques discutés précédemment puisqu'il apparaît ici clairement que les propriétés des observateurs invariants sont vérifiées par l'IUKF. La constance des écarts-types théoriques, et donc des covariances estimées (comme celle des gains d'ailleurs), sur la trajectoire définie par  $I = \psi_{\hat{x}}^{-1}(u = \omega_m)$  est illustrative du caractère invariant du schéma d'estimation mis au point. Ainsi, l'IEKF de la littérature dispose bien d'un « équivalent » fondé sur les principes de la SUT, l'IUKF, comme il a été montré jadis que l'EKF disposait d'un « équivalent » reposant sur ces mêmes principes, l'UKF. Ce qui a donc été établi pour le filtrage de Kalman (lien entre EKF et UKF) reste vrai y compris dans un cadre invariant. Les propriétés d'invariance de l'IUKF nouvellement développé sont également observables lorsque l'on compare les erreurs d'estimation commises sur l'état du système observé. Le traitement de données simulées nous permet de calculer ces erreurs. Ainsi, les figures 4.14 et 4.15 tracent, au cours du temps, la norme des erreurs d'estimation pour respectivement les états  $q$ ,  $\omega_b$ ,  $a_s$  et  $b_s$ . Ces calculs ont été menés en faisant varier l'état initial  $\hat{x}_0$  pour chacun des deux algorithmes (UKF et IUKF) ; la norme de l'erreur d'estimation initiale sur l'état étant maintenue constante quelque soit le cas de figure. Les résultats illustrent les propriétés d'invariance de l'IUKF puisque son comportement vis-à-vis des erreurs d'estimation est globalement le même quelque soit la condition initiale estimée considérée, ce qui n'est pas le cas de l'UKF classique. Pour chacune des trajectoires générées à

partir des différentes conditions initiales, la dynamique de convergence de l'estimé IUKF vers l'état vrai est identique. De tous ces résultats accumulés jusqu'à présent, il ressort que le filtrage de Kalman invariant introduit dans cette thèse permet, à l'instar des observateurs invariants déjà existants dans la littérature, de caractériser avec précision l'incertitude sur l'état estimé. La relative constance de celle-ci en fait une information potentiellement très utile à exploiter dans le cadre d'autres problématiques (commande robuste, FDIR, etc.).

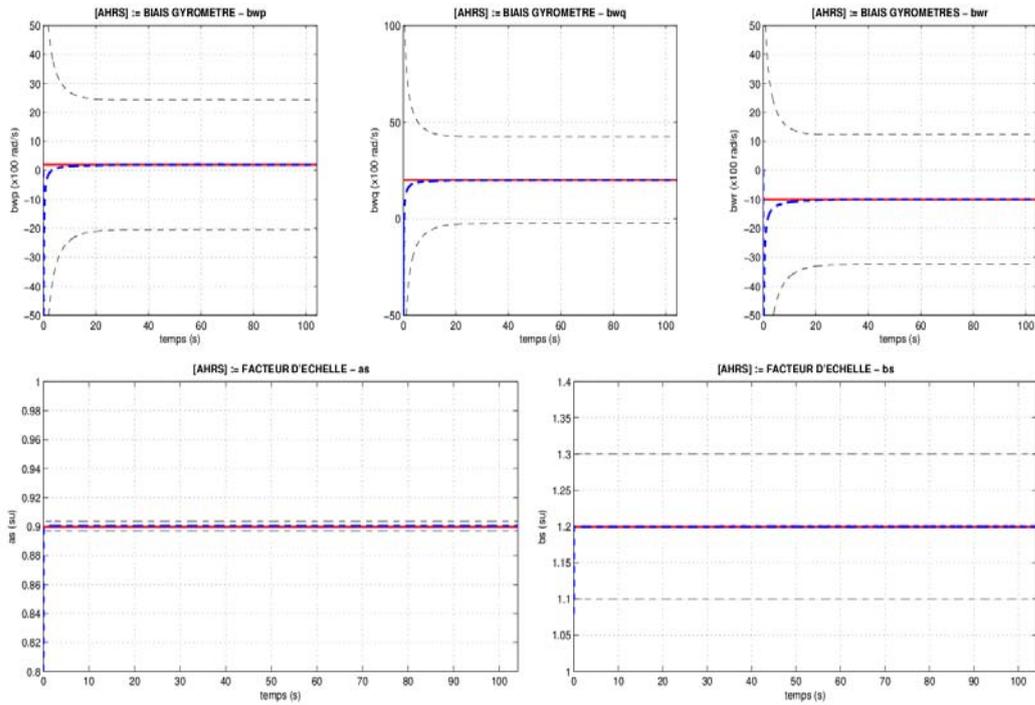


FIGURE 4.11 – UKF : estimation des imperfections : biais  $\omega_b$  et facteurs d'échelle ( $a_s, b_s$ )

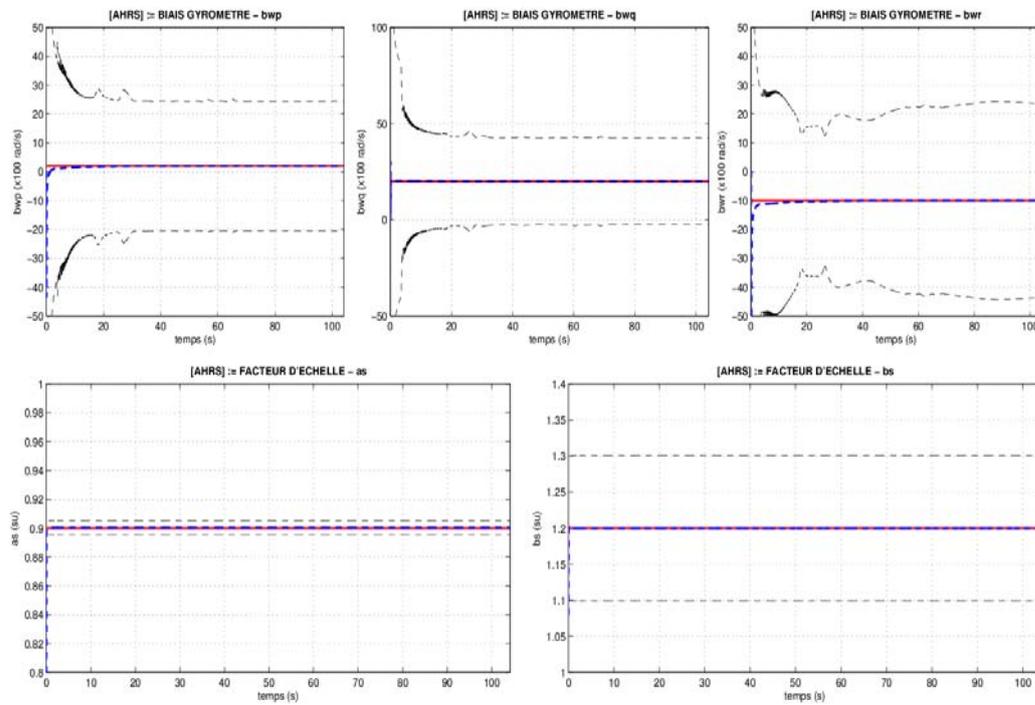


FIGURE 4.12 – IUKF : estimation des imperfections : biais  $\omega_b$  et facteurs d'échelle ( $a_s, b_s$ )

4.5 1<sup>ère</sup> reformulation du filtrage de Kalman *unscented*

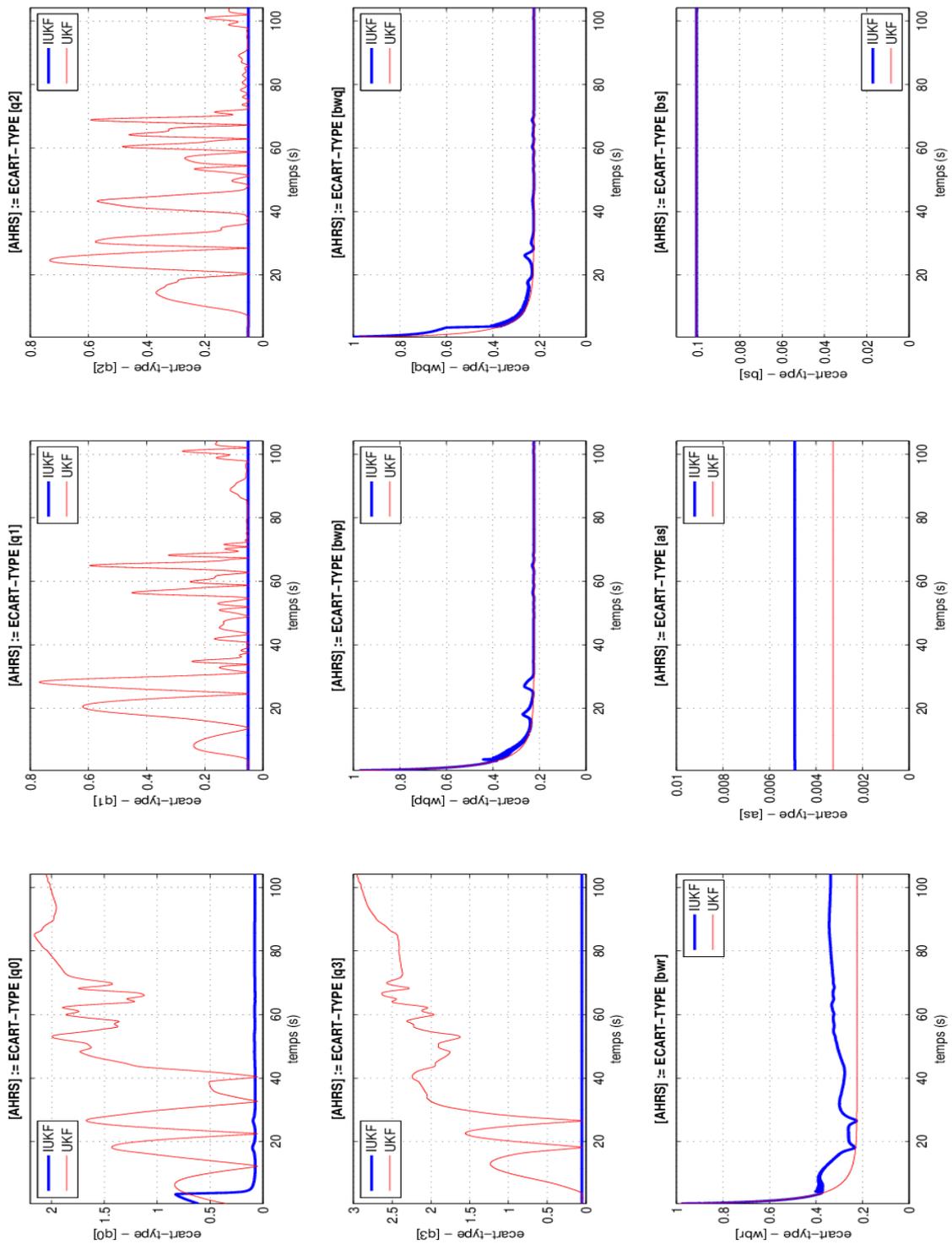


FIGURE 4.13 – Comparaison des écarts-types théoriques calculés par l'UKF et l'IUKF

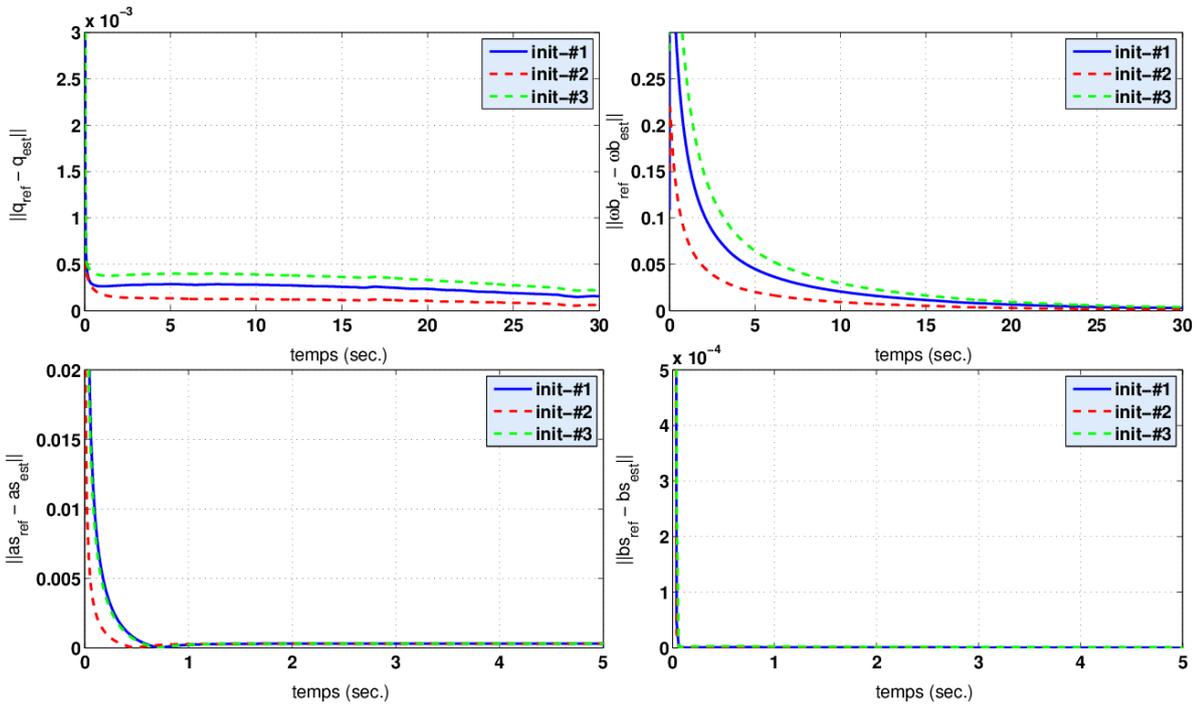


FIGURE 4.14 – UKF : erreur d'estimation sur l'état :  $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

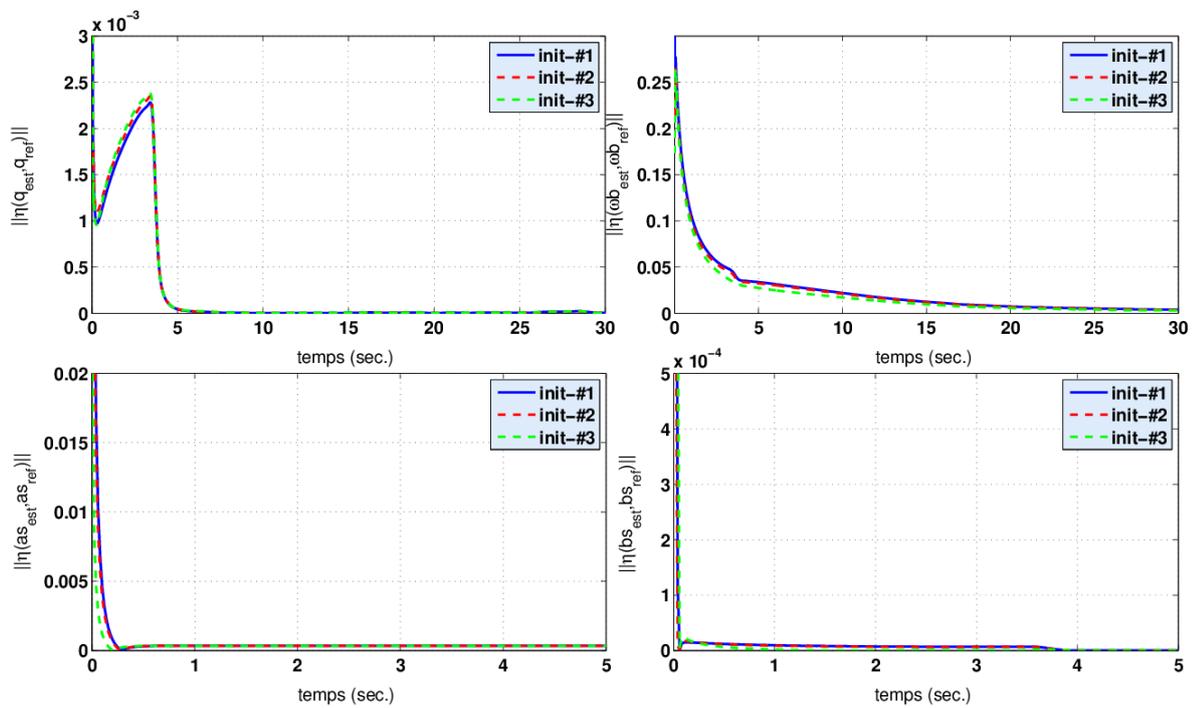


FIGURE 4.15 – IUKF : erreur d'estimation invariante sur l'état :  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$

► **Comparaison des gains de correction:** les figures 4.16 et 4.17 dessinent les variations temporelles de tous les gains de correction, état par état, pour l’UKF et l’IUKF. Les différentes échelles en ordonnée sont identiques pour un état donné entre les deux cas ce qui facilite la lecture des résultats. Une nouvelle fois, la relative constance des gains de Kalman caractérisant l’IUKF apparaît comme remarquable. Elle est l’illustration du cadre invariant introduit pour l’estimation de l’état du système. Les nombreuses et fréquentes fluctuations des gains de l’UKF sont quasiment annulées lorsque l’on passe à la version invariante du filtrage. Toutefois, nous constatons l’existence de variations pour certains gains de correction de l’IUKF (courbe violette des tracés  $q_0$ ,  $b\omega_p$ ,  $b\omega_q$  et  $b\omega_r$ ) probablement dues à des erreurs numériques et à l’inexactitude du modèle considéré (hypothèse  $\dot{V} = 0$  non vérifiée).

► **Résultats dans le cas bruité:** les figures 4.18, 4.19 et 4.20 dressent un comparatif entre l’UKF et l’IUKF dans le cas du traitement de données simulées bruitées. La simulation de référence intègre désormais les effets d’un ensemble de bruits colorés additifs perturbant les mesures  $\omega_m$ ,  $y_{Am}$  et  $y_{Bm}$ . La figure 4.18 compare les écarts-types théoriques calculés par chacune des méthodes. Les figures 4.19 et 4.20 permettent de mettre en perspective les gains de correction. Les mêmes conclusions que dans le cas non-bruité peuvent être tirées. Ces figures montrent également que l’IUKF est doté de très bonnes propriétés de filtrage des perturbations haute fréquence en comparaison de l’UKF.



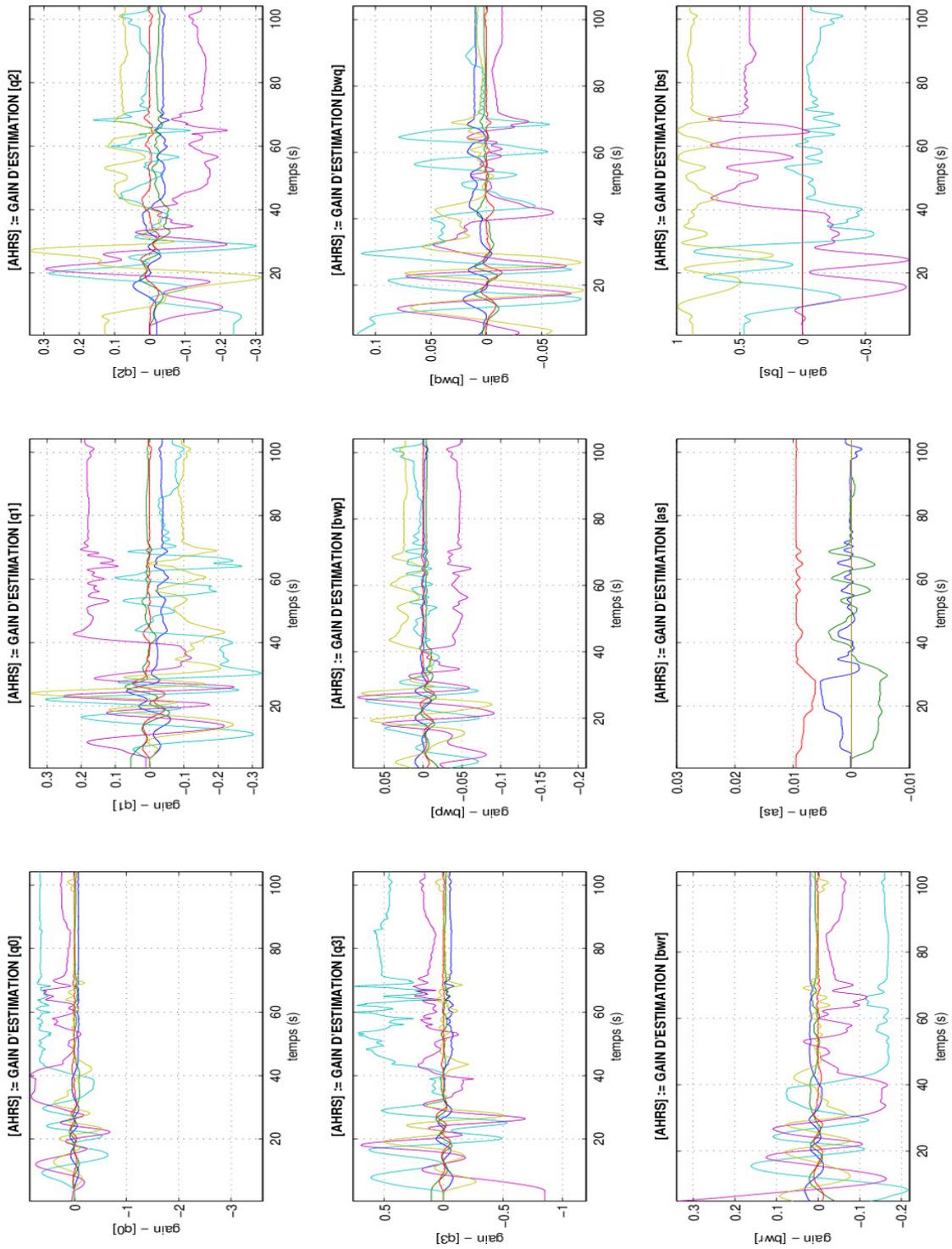


FIGURE 4.16 – UKF : gains de correction calculés

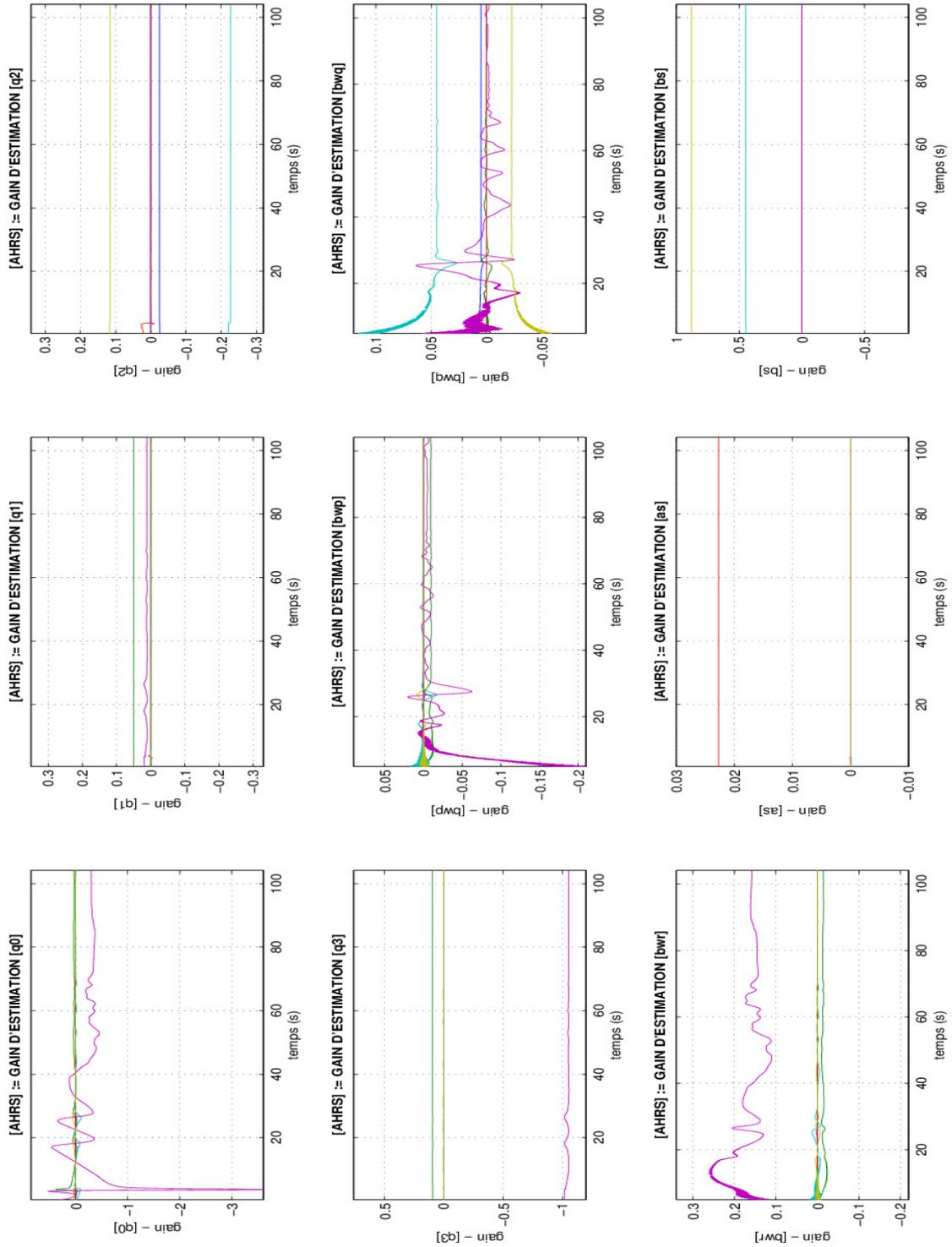


FIGURE 4.17 – *IUKF* : gains de correction calculés

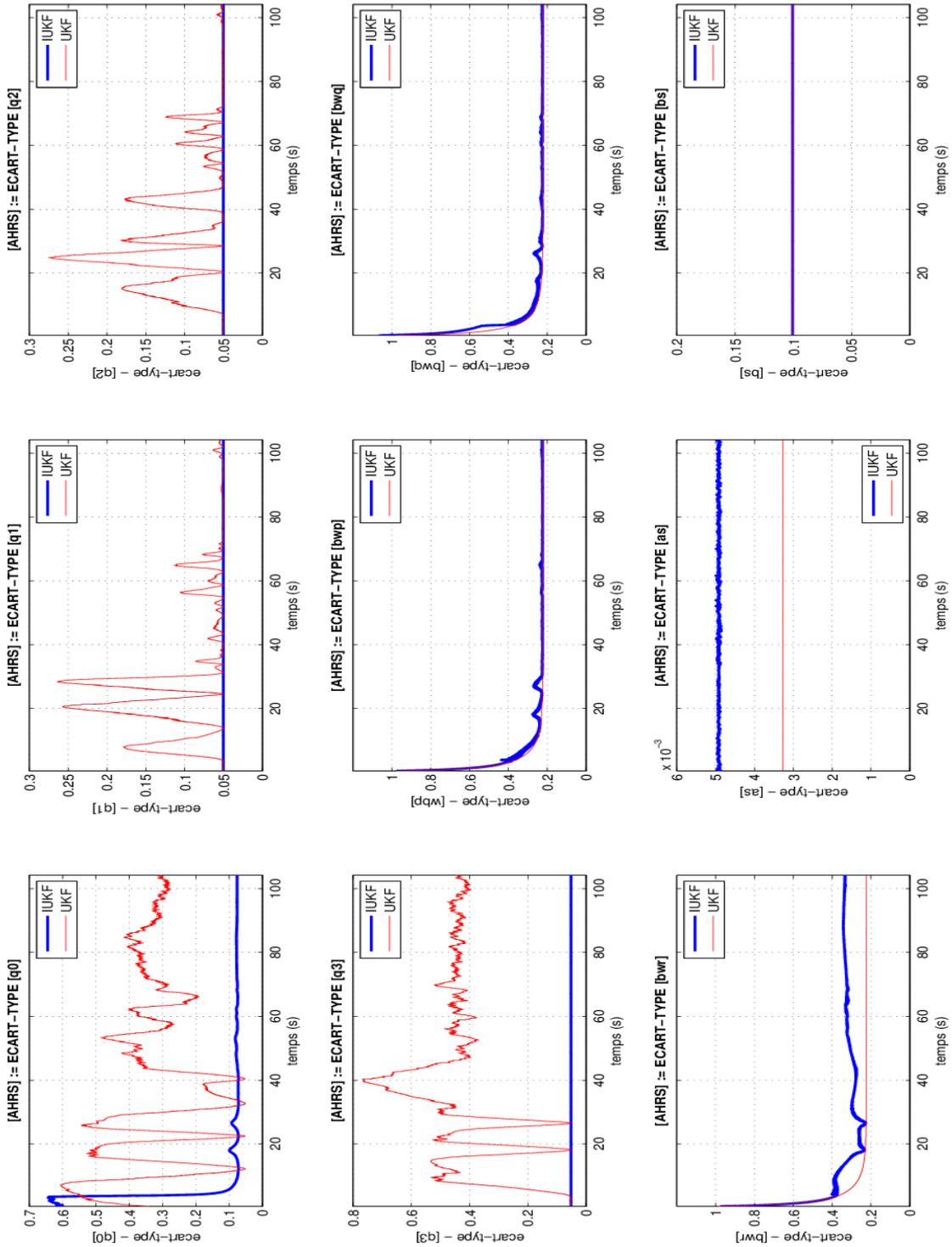


FIGURE 4.18 – Cas bruité - Comparaison des écarts-types théoriques UKF vs. IUKF

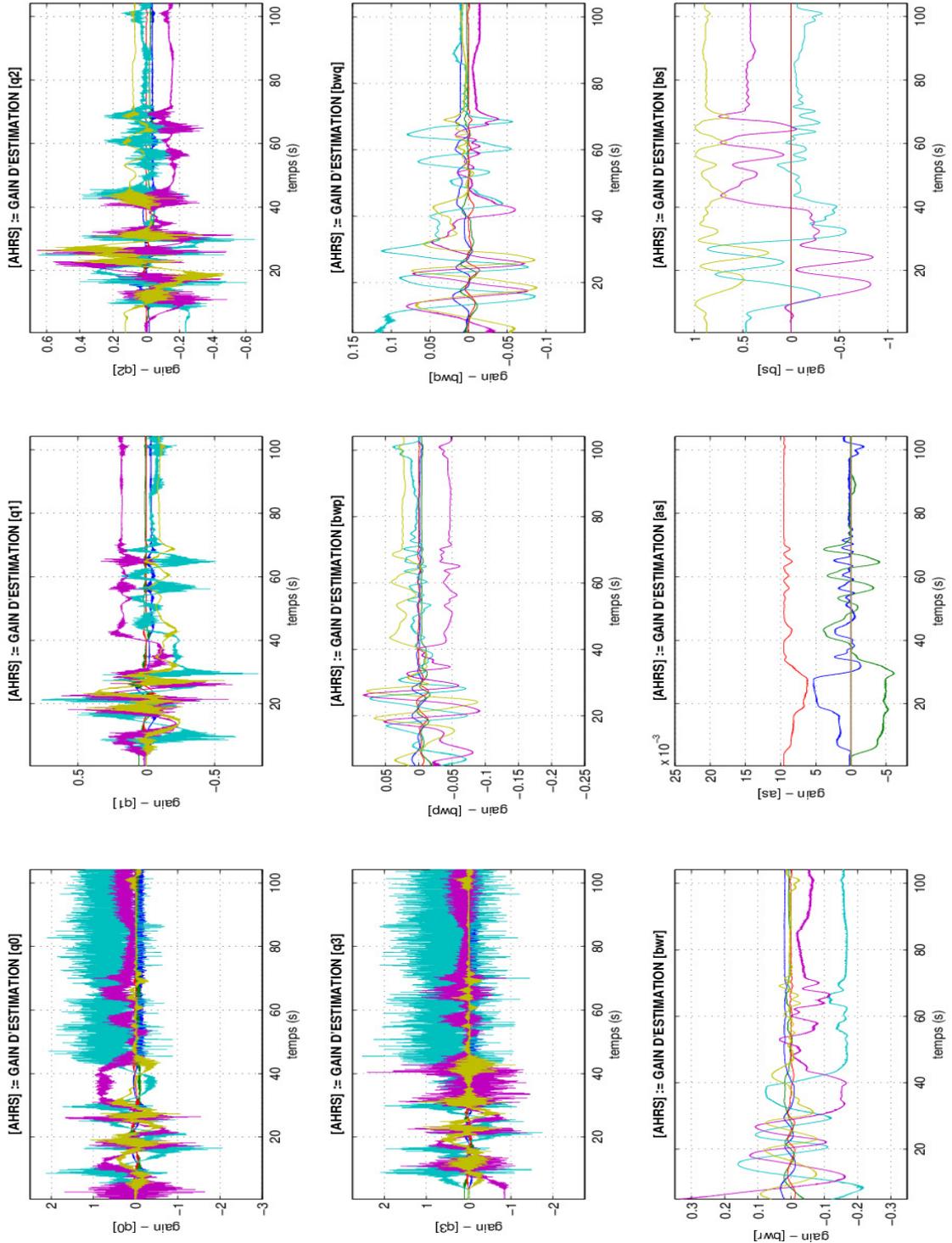


FIGURE 4.19 – *Cas bruité - UKF : gains de correction calculés*

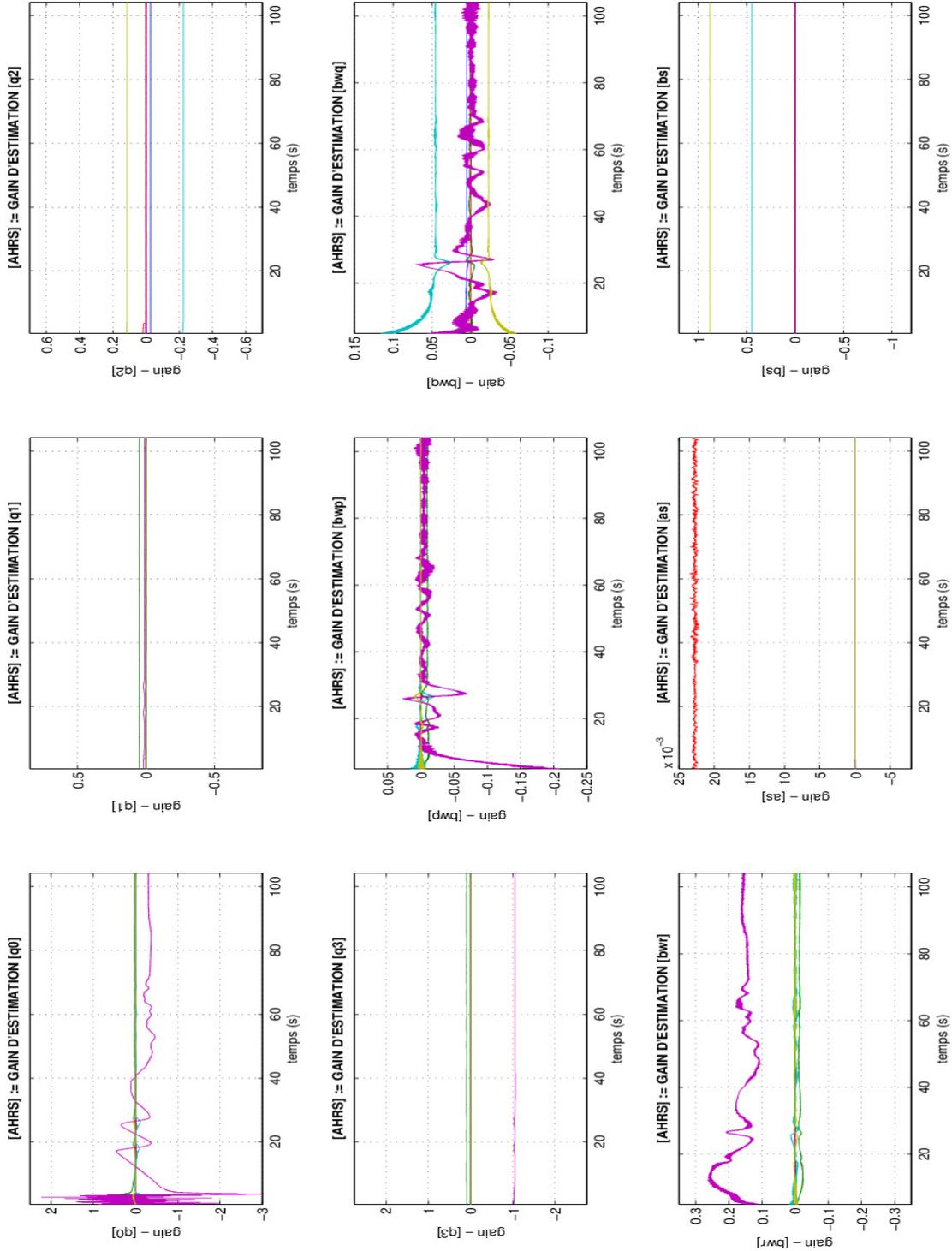


FIGURE 4.20 – Cas bruité - IUKF : gains de correction calculés

### 4.5.3 Résumé et pseudo-codes

La figure 4.21 tente de résumer la démarche de construction d'estimateurs d'état invariants suivie au cours de ces travaux. Le schéma de principe proposé fait la part des choses entre :

- la **modélisation étendue** de la dynamique du système d'une part, qui comprend, certes, la définition de la représentation d'état mais également celle du groupe de transformations. A partir de celles-ci, il est possible d'obtenir les invariants fondamentaux et le repère invariant associés au système considéré ;
- la **définition du filtre estimateur** et de sa structure, aussi appelée pré-observateur invariant candidat. Cette définition repose sur les invariants fondamentaux du système ainsi que sur la notion de repère invariant ;
- et enfin, le **calcul des gains de correction** qui apparaissent dans la structure de l'estimateur. Ceux-ci peuvent déterminés à partir de techniques classiques telles que celles s'inspirant du filtrage de Kalman. L'état de l'art du domaine rapporte qu'il est possible de calculer ces gains par l'intermédiaire d'un filtre de Kalman étendu adapté au cadre invariant mais au prix d'une linéarisation de l'erreur d'estimation invariante sur l'état. Cette thèse propose d'aborder cette question du calcul des gains par le biais du filtrage de Kalman *unscented* et y apporte deux réponses algorithmiques : le (SR)-IUKF et le  $\pi$ -(SR)IUKF.

Les pseudo-codes de l'IUKF et de sa variante factorisée, le SR-IUKF, sont fournis ci-après.

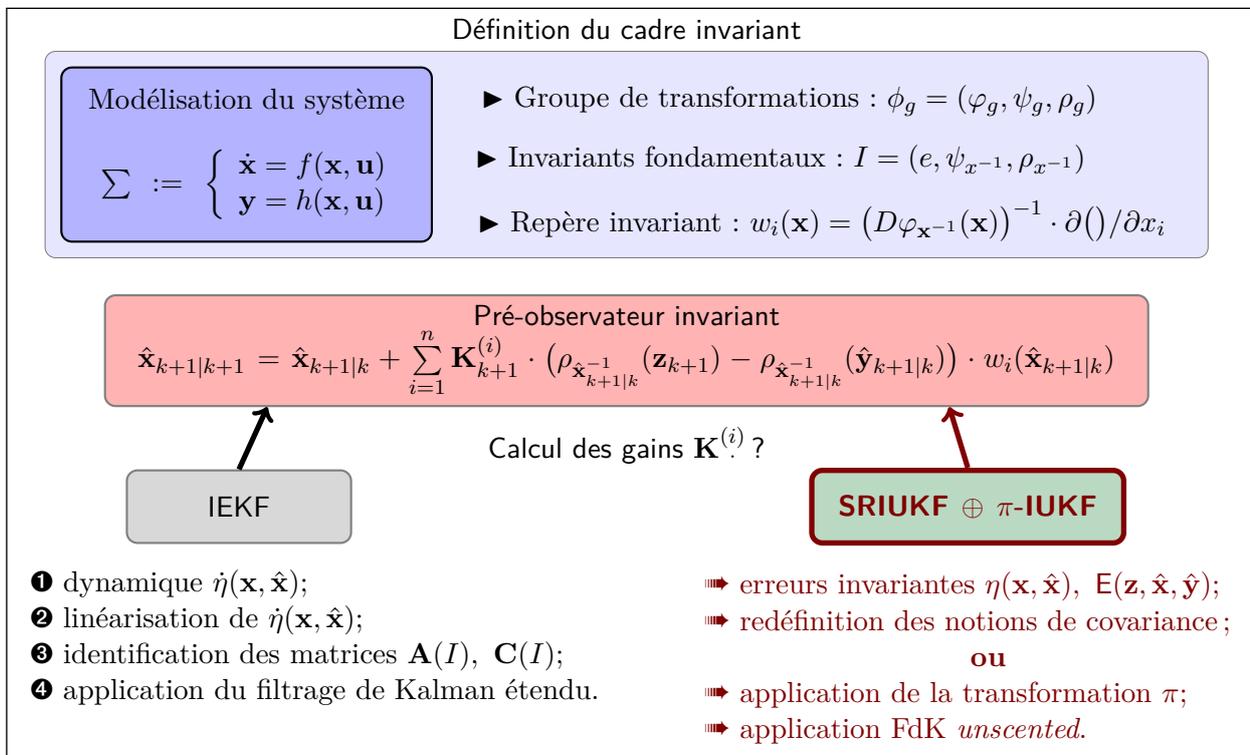


FIGURE 4.21 – Principes de synthèse d'estimateurs invariants

---

**Algorithme IUKF pour l'estimation d'état avec bruits additifs**


---

 Description du procédé :  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$ 

 Modélisation des capteurs :  $\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k$ 

 Recherche de la transformation de groupe composite :  $\phi_g = (\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$ 


---

 ► Calcul des pondérations  $W_m^{(j)}$ ,  $W_c^{(j)}$ ,  $j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  (cf. Scaled UKF)

 ► Initialisations  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0]$  et  $\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{E}[\eta(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0)\eta^T(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0)]$ 


---

 ► Calcul des  $(2n + 1)$  sigma points :  $\boldsymbol{\chi}_{k|k}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{k|k}^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{k|k}^{(2n)}$ 

► Etape de prédiction :

 ❶  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)} = f(\boldsymbol{\chi}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}$ 

❷ Prédiction de la covariance des erreurs d'estimation invariantes sur l'état :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xx},k+1|k} = \begin{cases} \mathbf{Q} + \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \eta^T(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \rightsquigarrow \text{paramètres } \boldsymbol{\chi}^{(i)} \\ \mathbf{Q} + \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}) \eta^T(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}) \rightsquigarrow \text{paramètre } \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \end{cases}$$

 ❸  $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)} = h(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}$ 

❹ Prédiction de la covariance des erreurs d'estimation invariantes sur la sortie :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{yy},k+1|k} = \begin{cases} \mathbf{R} + \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \\ \mathbf{R} + \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \end{cases}$$

❺ Prédiction de la covariance croisée des erreurs d'estimation invariantes :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1|k} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \\ \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{k+1|k}^{(i)}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \end{cases}$$

► Etape de correction/filtrage :

 ❶ Calcul des gains :  $\mathbf{K}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1|k} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{yy},k+1|k}^{-1}$ 

❷ Calcul du nouvel état estimé :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{z}_{k+1}) \cdot w(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$$

 ❸ Mise à jour de la covariance  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xx}}$  :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xx},k+1|k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xx},k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{zz},k+1|k} \mathbf{K}_{k+1}^T$$


---

**Algorithme SR-IUKF pour l'estimation d'état avec bruits additifs**

 Description du procédé :  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$ 

 Modélisation des capteurs :  $\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k$ 

 Recherche de la transformation de groupe composite :  $\phi_g = (\varphi_g, \psi_g, \rho_g)$ 

 ► Calcul des pondérations  $W_m^{(j)}$ ,  $W_c^{(j)}$ ,  $j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$  (cf. Scaled UKF)

 ► Initialisations  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0]$  et  $\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{E}[\eta(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0)\eta^T(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0)]$ 

 ► Calcul des  $(2n + 1)$  sigma points :  $\mathcal{X}_{k|k}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ,  $\mathcal{X}_{k|k}^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{X}_{k|k}^{(2n)}$ 

► Etape de prédiction :

$$\textcircled{1} \forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)} = f(\mathcal{X}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}$$

 $\textcircled{2}$  Décomposition QR de la covariance prédite des erreurs invariantes sur l'état :

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \dots \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(2n)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \right) \mathbf{Q}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k}, \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(0)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}), W_{(c)}^{(0)} \right) \rightsquigarrow \text{paramètres } \mathcal{X}^{(i)} \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(1)}) \dots \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(2n)}) \right) \mathbf{Q}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k}, \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(0)}), W_{(c)}^{(0)} \right) \rightsquigarrow \text{paramètre } \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)} = h(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{(m)}^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}$$

 $\textcircled{4}$  Décomposition QR de la covariance prédite des erreurs invariantes sur la sortie :

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(1)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(1)}) \dots \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(2n)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(2n)}) \right) \mathbf{R}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k}, \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(0)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(0)}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{qr} \left[ \sqrt{W_{(c)}^{(1)}} \left( \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(1)}) \dots \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(2n)}) \right) \mathbf{R}^{1/2} \right] \\ \textcircled{2} \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k}, \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(0)}), W_{(c)}^{(0)} \right) \end{cases}$$

 $\textcircled{5}$  Prédiction de la covariance croisée des erreurs d'estimation invariantes :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1|k} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \\ \sum_{i=0}^{2n} W_{(c)}^{(i)} \eta(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^{(i)}) \end{cases}$$

► Etape de correction/filtrage :

$$\textcircled{1} \text{ Calcul des gains : } \mathbf{K}_{k+1} = (\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1|k} / \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k}^T) / \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k}$$

 $\textcircled{2}$  Calcul du nouvel état estimé :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{z}_{k+1}) \cdot w(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$$

 $\textcircled{3}$  Mise à jour de la matrice  $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx}}$  :

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k+1} = \text{cholupdate} \left( \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{xx},k+1|k}, \mathbf{K}_{k+1} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{yy},k+1|k}, -1 \right)$$

## 4.6 Seconde reformulation du filtrage de Kalman *unscented* dans un cadre invariant: le $\pi$ -IUKF

### 4.6.1 Précédents travaux menés sur l'IEKF

La démarche mise en place par S. Bonnabel et P. Rouchon dans le développement de l'IEKF (en anglais *Invariant Extended Kalman Filter*) consiste à retrouver une formulation de l'EKF classique en intégrant la théorie des observateurs invariants, c'est-à-dire retrouver les matrices linéarisées de la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante associée au système considéré. La notion de covariance qui constitue l'inconnue de l'équation de Riccati à résoudre se trouve redéfinie et correspond désormais à une matrice de covariance pour les erreurs invariantes. Pour mémoire, nous rappelons ci-après les équations de l'EKF « standard » dans le cas d'une dynamique continue :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y}_m - h(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1} \quad (4.33)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{M}\mathbf{M}^T \quad (4.34)$$

Le calcul des gains de correction pour l'estimateur invariant à partir des principes de l'EKF débute tout d'abord par une linéarisation, au second ordre, de l'erreur d'estimation sur l'état invariante,  $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\hat{\mathbf{x}}) - \varphi_{\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x})$ , pour identifier les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$ . La donnée de celles-ci permet ensuite d'obtenir la matrice des gains  $\mathbf{K}$ , par les équations (4.32) à (4.34), et donc de connaître la dynamique de l'erreur linéarisée  $\Delta\dot{\eta} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\Delta\eta$ . Cela permet donc *in fine* d'écrire les équations de l'IEKF de la manière suivante :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \underbrace{DL_{\hat{\mathbf{x}}}}_{\substack{\text{repère invariant} \\ \text{au point } \hat{\mathbf{x}} \sim w(\hat{\mathbf{x}})}} \cdot \mathbf{K}(t) \cdot \overbrace{(\rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{z}) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(h(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})))}^{\mathbf{E}} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1} \quad (4.36)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)(\mathbf{N}\mathbf{N}^T)^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{M}\mathbf{M}^T \quad (4.37)$$

Dans l'équation (4.35),  $DL_{\hat{\mathbf{x}}}$  signifie que l'invariance est considérée à gauche sur le groupe de Lie  $G$  mais nous pourrions tout aussi bien considérer une invariance à droite  $DR_{\hat{\mathbf{x}}}$  (cf. annexe A). A noter que l'élaboration d'observateurs invariants sur un groupe de Lie fait ici l'hypothèse que l'action du groupe est libre<sup>7</sup> sur l'espace d'état, et que celle-ci a la même dimension que  $\mathcal{X}$ . Il n'y a donc qu'une seule orbite et l'action de groupe est dite transitive : les observateurs invariants développés pour les problématiques AHRS et INS obéissent à cette hypothèse.

Considérons connue une erreur d'estimation sur l'état invariante  $\eta$  vérifiant :  $\dot{\eta} = Dg_{ut}(\eta)$

---

7. hypothèse de rang plein.

où  $Dg_{ut}$  est un champ de vecteur. Puisque  $G$  constitue une variété différentiable, il est possible d'identifier un morceau de l'algèbre de Lie de  $G$  à un voisinage  $U$  centré sur l'élément neutre  $e$  du groupe grâce à l'application exponentielle. Ainsi, une erreur  $\eta$  petite, proche de  $e$ , peut être assimilée à un élément de l'algèbre de Lie, noté  $\xi$ , dans le sens où il est possible d'écrire  $\eta_t = \exp(\epsilon \xi_t)$  où  $\epsilon \in \mathbb{R}$  est tel que  $\epsilon \ll 1$ . Jusqu'aux termes d'ordre 2 en  $\epsilon$ , nous avons donc l'équation de l'erreur d'estimation sur l'état invariante  $\eta_t$  linéarisée dans l'espace tangent à  $e$  qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\xi = [\xi, f(e, \hat{I})] - \frac{\partial f}{\partial u}(e, \hat{I}) \frac{\partial \psi}{\partial g}(e, \hat{I}) \xi - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \mathbf{E}}(\hat{I}, 0) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(e, \hat{I}) \xi \right) w_i \quad (4.38)$$

où  $[ \ , \ ]$  désigne le crochet de Lie. Les matrices  $\mathbf{A}(t)$  et  $\mathbf{C}(t)$  peuvent être identifiées grâce à l'équation (4.38) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\hat{I}) : \xi &\mapsto [\xi, f(e, \hat{I})] - \frac{\partial f}{\partial u}(e, \hat{I}) \frac{\partial \psi}{\partial h}(e, \hat{I}) \xi \\ \mathbf{C}(\hat{I}) &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(e, \hat{I}), \quad M = M(e), \quad N = N(e). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Il a été montré (cf. Barrau et Bonnabel {2014}) que l'approximation en série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de l'équation (4.38), ré-écrite sous la forme  $\dot{\xi} = Dg_{ut}(\xi, e)$ , est représentative du comportement global de la dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état invariante. Ce résultat a amené l'énoncé du théorème qui suit :

### Theorem 1

Considérons l'erreur d'estimation sur l'état invariante  $\eta_t^i$ , définie pour une dynamique invariante à droite ou à gauche, l'exposant ( $i$ ) désignant indifféremment  $L$  ou  $R$ . Soit  $\xi_0^i \in \mathbb{R}^{\dim(g)}$  tel que  $\eta_0^i = \exp(\xi_0)$ . Si  $\xi_t^i$  est défini pour  $t > 0$  par une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\frac{d}{dt}\xi_t^i = A_t^i \xi_t^i \text{ où } : A_t^i := Dg_{ut}^i(e)$$

alors nous avons :

$$\forall t \geq 0, \eta_t^i = \exp(\xi_t^i) \quad (4.40)$$

Le théorème 1 est démontré intégralement dans Barrau et Bonnabel {2014}. Il est extrêmement important car il garantit que l'étape de prédiction effectuée par n'importe quel filtre de Kalman exploitant une erreur d'état invariante<sup>8</sup>, et donc implicitement une carte exponentielle de l'espace géométrique, sera menée de façon à respecter l'évolution vraie en terme de covariance de l'erreur sur l'état estimé.

La figure 4.22 fournit une représentation schématique de l'étape de prédiction d'un filtre de Kalman non linéaire discret. L'illustration représente le cas où l'état vit sur une variété (par exemple, le groupe  $\text{SO}(\mathbb{R}^n)$ ). Sur le schéma représenté au milieu de cette figure, la distribution

8. On peut écrire  $\eta = x^{-1}\hat{x}$  pour une dynamique invariante à gauche ou  $\eta = \hat{x}x^{-1}$  pour une dynamique invariante à droite.

d'une variable aléatoire supposée gaussienne  $\hat{\mathbf{x}}_{t_0}$ , définie par une matrice de covariance  $\mathbf{P}$  donnée, et graphiquement représentée par l'ensemble des points tracés en noir, subit une transformation portée par l'espace tangent au travers d'une équation d'évolution (encore appelé « flot »). Dans le cas où un système de coordonnées arbitraire est utilisé pour représenter  $\hat{\mathbf{x}}_{t_0}$ , la transformation portée par l'espace tangent à l'instant  $t_1$  ne conserve pas la distribution gaussienne de l'état initial à cause de la non-linéarité du flot, comme nous le voyons très clairement sur le graphique de droite. Dès lors que nous utilisons un système de coordonnées local permettant de caractériser parfaitement l'espace tangent de la variété, en utilisant une exponentielle comme solution sur un groupe de Lie de l'erreur d'estimation sur l'état invariante, la distribution du nuage de points reste gaussienne et la matrice de covariance devient à  $t_1$ ,  $\mathbf{F}_{t_1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{t_1}^T$  (équivalent de l'équation 4.37 pour le cas discret).

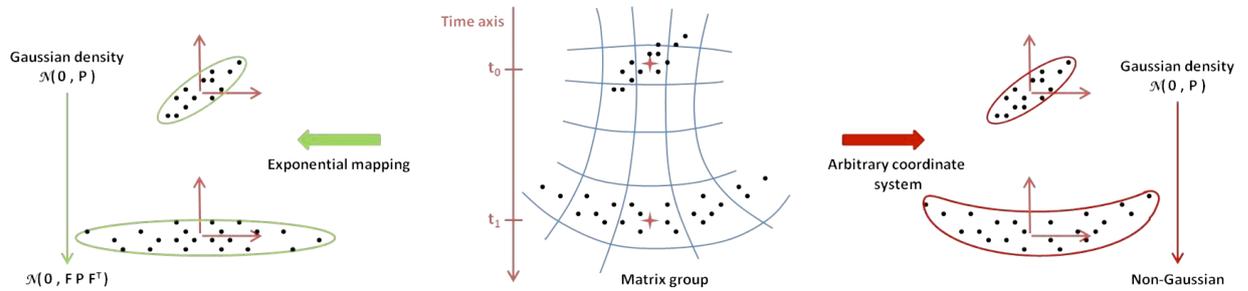


FIGURE 4.22 – Illustration de la propriété log-linéaire de l'erreur de propagation (extrait de {Barrau et Bonnabel, 2014})



### 4.6.2 Algorithme $\pi$ -IUKF sur un groupe de Lie: formulation

Dans cette section, nous proposons une autre modification de l'UKF classique, qui a été présentée au cours du chapitre 2, pour des systèmes dynamiques possédant des symétries. Comme nous l'avons mentionné en introduction, l'UKF présente l'avantage de calculer une solution approchée au problème d'estimation non linéaire optimal de l'état d'un système dynamique, en temps discret, sans recourir à une quelconque linéarisation d'équations différentielles. La technique dénommée « approche par sigma point » (en anglais, *Sigma Point Approach* - SPA) est habituellement utilisée pour déterminer l'approximation du processus aléatoire gaussien  $x_{k|k}$ , au cours du temps, sur lequel sont appliquées des transformations non linéaires tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) & \text{tel que : } \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$  sont des bruits blancs gaussiens. Rappelons que le but de la technique SPA est de définir, au cours du temps, un nombre fini de sigma points  $\mathcal{X}_{k|k}$  qui capturent la vraie moyenne  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  et la vraie covariance  $\mathbf{P}_{k|k}$  de la distribution de probabilité caractérisant  $\mathbf{x}_{k|k}$ . Dans le cas gaussien, cet ensemble de points doit représenter précisément les deux premiers moments de la variable aléatoire. Ces sigma points sont ensuite propagés à travers les fonctions non linéaires  $f$  et  $h$ , apparaissant dans l'équation (4.41). Cette propagation fournit un nuage de points modifiés par rapport à la répartition initiale des sigma points. La moyenne  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  et la covariance  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  estimées associées aux points transformés sont ensuite calculées par rapport à la statistique de ce nouvel ensemble de points. L'UKF peut être considéré comme une simple extension de la technique SPA qui permet donc de calculer les approximations du problème d'estimation dans le cas où :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k \quad (4.42)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.43)$$

Comme cela est présenté dans la référence , nous considérerons que les bruits d'évolution et d'observation ( $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{v}$ ) entrent dans le système de façon invariante. Ces bruits peuvent être considérés comme des entrées exogènes qui ne remettent pas en cause l'existence même de symétries propres au système. Afin donc de préserver celles-ci, leurs insertions respectives dans les équations d'évolution et d'observation du système se fait au travers de termes  $G$ -invariant/équivalent. C'est pourquoi certaines opérations, telle que la multiplication à droite par un quaternion  $\cdot *q$ , apparaîtront dans les équations différentielles discrètes de l'estimateur.

L'exploitation des principes de l'UKF dans un cadre d'estimation invariant et non linéaire exige la définition d'une condition particulière sur les équations d'observations, appelée « **condition de compatibilité** », qui correspond à l'application d'une fonction non linéaire, notée  $\pi$ , au vecteur de sortie prédit. En effet, une mesure non-modifiée n'a pas de sens dans une version mo-

difiée de l'UKF telle que nous la proposons, du fait que nous souhaitons exploiter une erreur de sortie invariante en lieu et place d'une erreur de sortie linéaire classique. Rappelons que de plus, un repère invariant sera utilisé dans les équations du filtrage pour projeter les différents termes de correction de manière à ce que les symétries du système soient respectées. L'idée à la base de notre algorithme du  $\pi$ -IUKF consiste à définir et à relier le nouveau vecteur de sortie transformé par l'application  $\pi$  au difféomorphisme local  $\rho_g$  et au champ de vecteurs invariants. Ce champ des vecteurs invariants constitue une base de l'espace tangent, noté  $TG(e)$ , qui doit être choisie lors de la construction du repère invariant selon la méthode du repère mobile. Cette construction permet notamment d'identifier localement cette base au sous-groupe des quaternions de norme unité. Par ailleurs, la sortie invariante se trouve déjà utilisée pour former l'innovation invariante qui sert de base à la structure de tout estimateur  $G$ -invariant (cf. équation (4.5)). Il en résulte que la transformation  $\pi$  peut être interprétée comme une application locale qui construit un vecteur de nouvelles sorties prédites dont l'action coïncide avec le groupe  $\rho$  en l'identité  $e$ . Les composantes de la transformée peuvent être exprimées dans la base naturelle  $w_i^q(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$  de  $TG(e)$ . En effet, nous avons :

$$\pi(h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k)) = \sum_{i=1}^3 \rho_{\gamma(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})}(h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k)) \cdot w_i^q(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot e_i \quad (4.44)$$

Cette condition de compatibilité garantit que l'étape de prédiction de la sortie sera accomplie de manière à respecter les symétries du système. Il en résulte naturellement que les gains de l'algorithme du SRUKF présenté au §4.4 dépendront bien des invariants connus  $I(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$  puisque, de par cette transformation supplémentaire,  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{y}\mathbf{y},k+1|k}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{xy},k+1|k}$  en dépendront elles-mêmes du fait du résultat (4.44). Il est à noter que dans l'algorithme proposé du  $\pi$ -IUKF le calcul des matrices de covariance reste basé sur une erreur systématiquement linéaire. Par conséquent, le  $\pi$ -IUKF repose quasi-exclusivement sur les mêmes étapes de calcul que l'UKF classique. Outre l'étape de prédiction de la sortie qui est modifiée par l'introduction de la transformation  $\pi$ , notre nouvel algorithme utilise, dans les équations du filtrage, un terme de correction adapté géométriquement qui exploite une erreur de sortie invariante, en lieu et place d'un terme de correction linéaire reposant sur une innovation linéaire. Il est à noter que, malgré tout, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur l'état du système doit être initialisée sur la base de valeurs correspondantes à une erreur d'estimation invariante  $\eta(\hat{x}_0, x_0)$ . En pratique cela ne change pas grand chose puisque généralement  $\hat{\mathbf{P}}_0$  est pris  $\gg 1$ . En résumé, les équations différentielles stochastiques descriptives du  $\pi$ -IUKF sont établies en modifiant l'étape de prédiction des sorties du modèle (introduction de la transformation  $\pi$ ) puis en changeant les équations du filtrage dans l'étape de correction.

### **Proposition 2**

*Si une application  $\pi$  obéissant à la relation (4.44) peut être construite analytiquement alors les gains de correction de l'équation (4.5) peuvent être calculés à partir d'une technique UKF par échantillonnage des distributions stochastiques des erreurs d'estimation sur l'état et la*

sortie, sans perte des symétries du problème.

Il s'ensuit que l'équation (4.44) peut être explicitée pour les modèles  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  et  $\mathcal{M}_{ins}^+$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi(h_{ahrs}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})) &= \begin{pmatrix} \hat{a}_{s_{k+1|k}} \cdot \sum_{i=1}^3 (A * \hat{q}_{k+1|k}) \cdot e_i \\ \hat{b}_{s_{k+1|k}} \cdot \sum_{i=1}^3 (B * \hat{q}_{k+1|k}) \cdot e_i \end{pmatrix} \\ \pi(h_{ins}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 (\hat{V}_{k+1} * \hat{q}_{k+1}) \cdot e_i \\ \sum_{i=1}^3 (\hat{X}_{k+1} * \hat{q}_{k+1}) \cdot e_i \\ \langle \hat{X}_{k+1} * \hat{q}_{k+1}, e_3 \rangle - \hat{h}_b \\ \sum_{i=1}^3 (B * \hat{q}_{k+1}) \cdot e_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

L'algorithme  $\pi$ -IUKF, dont le pseudo-code se trouve à la fin de ce chapitre, nécessite la définition de quatre paramètres de réglage :

- ❶ le scalaire  $\lambda$  qui permet de capturer les moments de la distribution de la variable aléatoire  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ .  $(\hat{\mathbf{P}})_{k|k}^{1/2}$  est une notation qui désigne la matrice racine carrée de la matrice de covariance considérée i.e.  $(\hat{\mathbf{P}})_{k|k}^{1/2} = \hat{\mathbf{S}}_{k|k}$  tel que :  $\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \hat{\mathbf{S}}_{k|k} \hat{\mathbf{S}}_{k|k}^T$  ;
- ❷ les pondérations  $W_{(m)}^{(j)}$  et  $W_{(c)}^{(j)}$  associées aux distributions de la moyenne et de la covariance tel que :  $\sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_{(m,c)}^{(j)} = 1$  ;
- ❸ enfin,  $\mathbf{W}_k$  et  $\mathbf{V}_k$ , les matrices de covariance estimées associées aux bruits qui pondèrent leurs effets dans la modélisation.

A noter que nous avons utilisé une forme de type « racine carrée » de la méthode UKF (SRUKF). Pour des raisons de commodité, l'addition d'un vecteur quelconque  $\mathbf{u}$  à chaque colonne d'une matrice  $\mathbf{M}$  sera notée  $\mathbf{M} \pm \mathbf{u}$ . La technique SRUKF permet d'augmenter l'efficacité calculatoire ainsi que la stabilité numérique. Elle se base sur trois techniques issues de l'algèbre :  $\blacktriangleright$  la décomposition QR (notée  $\text{qr}\{\cdot\}$ ) ;  $\blacktriangleright$  la mise à jou de rang 1 du facteur de Cholesky (commande MATLAB<sup>TM</sup> `cholupdate`) ;  $\blacktriangleright$  enfin, la résolution d'un système linéaire par une technique des moindres carrés (commande MATLAB<sup>TM</sup> `\`).

**Le pseudo-code pour l'algorithme  $\pi$ -IUKF avec des bruits additifs :**

► Initialisation :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \quad S_0 = \text{chol}\left\{\mathbb{E}[\eta(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0)\eta(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0)^T]\right\}$$

► Pour  $kT = 1, \dots, \infty$  :

❶ Calcul des sigma-points :

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} & \underbrace{\chi_{k|k}^{(1)} \cdots \chi_{k|k}^{(n)}}_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \sqrt{n+\lambda}\sqrt{P_{k|k}}} & \underbrace{\chi_{k|k}^{(n+1)} \cdots \chi_{k|k}^{(2n)}}_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \sqrt{n+\lambda}\sqrt{P_{k|k}}} \end{array} \right]$$

❷ Equations de prédiction :

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1|k} = \left[ \chi_{k+1|k}^{(0)} \cdots \chi_{k+1|k}^{(2n+1)} \right] = f(\boldsymbol{\chi}_{k|k}, \mathbf{u}_k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{(m)}^{(i)} \chi_{k+1|k}^{(i)}$$

$$S_{k+1|k} = \text{qr}\left\{ \left[ \sqrt{\mathcal{W}_{(c)}^{(1)}} \left( \left[ \chi_{k+1|k}^{(1)} \cdots \chi_{k+1|k}^{(2n)} \right] - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right) \quad \sqrt{\mathbf{W}_k} \right] \right\}$$

$$S_{k+1|k} = \text{cholupdate}\{S_{k+1|k}, \chi_{k+1|k}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathcal{W}_{(c)}^{(0)}\}$$

❸ Equations de correction :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^i = \left[ y_{k+1|k}^{(0)} \cdots y_{k+1|k}^{(2n+1)} \right] = \pi(h(\boldsymbol{\chi}_{k+1|k}, \mathbf{u}_k))$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{(m)}^{(i)} \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)}$$

$$S_{y,k+1|k} = \text{qr}\left\{ \left[ \sqrt{\mathcal{W}_{(c)}^{(1)}} \left[ \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}^i(:, 2:2n+1) - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right] \quad \sqrt{\mathbf{V}_{k+1}} \right] \right\}$$

$$S_{y,k+1|k} = \text{cholupdate}\{S_{y,k+1|k}, \mathbf{y}_{k+1|k}^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}, \mathcal{W}_{(c)}^{(0)}\}$$

$$P_{xy,k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{(c)}^{(i)} \left[ \chi_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right] \left[ \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right]^T$$

❹ Calcul des gains du filtre de Kalman :

$$\bar{\mathbf{K}}_{k+1} = (P_{xy,k+1|k} / S_{z,k+1|k}^T) / S_{z,k+1|k}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \bar{\mathbf{K}}_{k+1}(\pi, E) \cdot E \cdot w_i^q(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$$

$$U = \bar{\mathbf{K}}_{k+1} S_{y,k+1|k}$$

$$S_{k+1|k+1} = \text{cholupdate}\{S_{k+1|k}, U, -1\}$$



# Chapitre 5

## Validation méthodologique, expérimentations et résultats

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Validation sur données simulées . . . . .</b>	<b>148</b>
5.1.1	Présentation des données . . . . .	148
5.1.2	Etude des deux algorithmes UKF sur le modèle AHRS . . . . .	152
5.1.3	Les propriétés d'invariance du $\pi$ -IUKF appliqué à l'AHRS . . . . .	157
5.1.4	Etude des deux algorithmes UKF sur le modèle INS . . . . .	159
5.1.5	Les propriétés d'invariance du $\pi$ -IUKF appliqué à l'INS . . . . .	166
<b>5.2</b>	<b>Validation sur données réelles . . . . .</b>	<b>168</b>
5.2.1	Outils et dispositifs expérimentaux utilisés . . . . .	168
5.2.2	Identification préliminaire des imperfections sur les capteurs inertiels . .	171
5.2.3	Procédure de calibration des capteurs embarqués sur l'Apogee . . . . .	173
5.2.4	Mise en œuvre expérimentale du $\pi$ -IUKF sur un modèle AHRS . . . . .	177
5.2.5	Observateur invariant sur données réelles : méthode de réglage . . . . .	180
5.2.6	Validation de l'INS sur données réelles . . . . .	184
5.2.7	Analyse des performances en vitesse et position de l'INS . . . . .	188
<b>5.3</b>	<b>Implémentation de l'observateur invariant pour le modèle INS . .</b>	<b>190</b>

---

Ce chapitre présente un ensemble complet de résultats obtenus à partir des différentes méthodes algorithmiques précédemment présentées et dont les tests ont été réalisés en simulation puis sur données réelles. Une fois les performances évaluées, nous avons cherché à étudier et à comparer différents comportements caractéristiques ou non des propriétés d'invariance. Ces résultats valident l'approche qui transpose le cadre générique des observateurs invariants au cas de l'estimation non linéaire de l'état d'un système dynamique par une technique de type UKF.

La première partie propose une comparaison des performances du nouvel algorithme  $\pi$ -IUKF avec l'algorithme UKF fondé sur la version racine carrée du *scaled* UKF (SRUKF), qui a été détaillé dans la section 4.4. Cette analyse est effectuée à l'aide de données simulées, d'abord sur le modèle complet de l'AHRs puis étendue au cas d'un modèle complet de type INS, tous deux intégrant les imperfections des différents capteurs.

La seconde partie du chapitre aborde, toujours en se basant sur ces deux modèles de navigation, plusieurs résultats expérimentaux issus de l'estimation sur données réelles des trois principaux algorithmes présentés dans ce mémoire : le SRUKF, le  $\pi$ -IUKF et l'observateur invariant. Concernant ce dernier estimateur, nous proposons une méthodologie permettant d'obtenir un réglage facile des gains qui régissent sa dynamique. Ce réglage sera obtenu en construisant une base de connaissance, dans laquelle le comportement des différentes variables d'état en fonction des gains du système sera connu *a priori* grâce à une expertise de l'observateur obtenue à la suite d'une multitude de simulations réalisées sur données réelles. Cette base de connaissance sera par la suite agrégée et représentée graphiquement par une technique dérivée de la logique floue.

La dernière partie de ce mémoire sera consacrée à une étude comparative des performances pour la navigation des trois algorithmes. Pour cela, un dispositif de localisation très précis appelé DGPS (Differential Global Positioning System), fournira des mesures de position et de vitesse du drone qui nous permettront de comparer les résultats afin de conclure sur l'algorithme donnant le meilleur estimé. L'ensemble des algorithmes d'estimation a été codé dans l'environnement de programmation MATLAB/SIMULINK. Par ailleurs, le code embarqué de l'observateur invariant est d'ores et déjà intégré à l'avionique des mini-drones de l'ENAC.

## 5.1 Validation sur données simulées

Nous proposons dans cette partie d'évaluer les performances d'estimation du nouvel algorithme  $\pi$ -IUKF avec l'algorithme standard du SRUKF, tous deux appliqués sur les modèles de navigation présentés aux sections 3.5.2 et 3.6.1. Pour cela, nous avons traité des données issues d'une simulation représentative du largage aérien d'un colis sous une voile de parachute (cf. §4.5.2).

### 5.1.1 Présentation des données

Le développement des nouvelles technologies présentées au chapitre 2 amène aujourd'hui de nouvelles perspectives pour les opérations de largage aérien dans de multiples applications. L'ONERA<sup>9</sup> travaille entre autre sur ce sujet et s'intéresse au cas d'un parachute similaire à ceux utilisés dans le domaine sportif, auquel un système de guidage serait ajouté afin d'effectuer

---

9. Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales

un largage précis d'une charge à partir d'un avion. Un dispositif de mesure inertiel comprenant une triade de capteurs composée d'un accéléromètre, d'un magnétomètre et d'un gyromètre, est embarqué sur cette charge afin de fournir des données inertielles très précises permettant l'étude des différents algorithmes d'estimation présentés dans ce mémoire. En plus de l'emport d'un capteur inertiel à hautes performances, un système de positionnement par GPS permet de connaître la vitesse de la charge. Nous nous sommes donc procurés des mesures échantillonnées à une fréquence de  $50\text{Hz}$ , regroupées dans une matrice de 12 valeurs non-bruitées et non-baisées qui caractérisent la navigation de ce colis, à savoir :

- ▶ la vitesse angulaire de la charge selon les 3 axes  $\omega_m = (\omega_{mx} \ \omega_{my} \ \omega_{mz})^T$  ;
- ▶ l'accélération spécifique de la charge selon les 3 axes  $a_m = (a_{mx} \ a_{my} \ a_{mz})^T$  ;
- ▶ une mesure locale du champ magnétique terrestre exprimée dans le repère de la charge  $y_B = (B_{mx} \ B_{my} \ B_{mz})^T$  ;
- ▶ et les vitesses de la charge exprimées dans le repère terrestre  $(V_x \ V_y \ V_z)^T$  ;

La première étape de notre travail consiste à valider, à partir des données d'entrée fournies par l'ONERA, les modèles  $\mathcal{M}_{ahrs}$  et  $\mathcal{M}_{ins}$  du chapitre 3. Nous avons donc obtenu à partir d'une intégration temporelle des équations des deux modèles, une reconstitution correcte de l'état représentant l'attitude et la navigation complète de la charge. A noter que cette reconstitution est utilisée comme référence pour évaluer les performances des algorithmes d'estimation. Afin de représenter les imperfections de chaque capteur, des bruits blancs gaussiens ont par la suite été ajoutés sur ces mesures de référence pour étudier les différentes méthodes algorithmiques dans des conditions plus réalistes. Ces mesures bruitées sont en partie représentées sur la figure 5.1

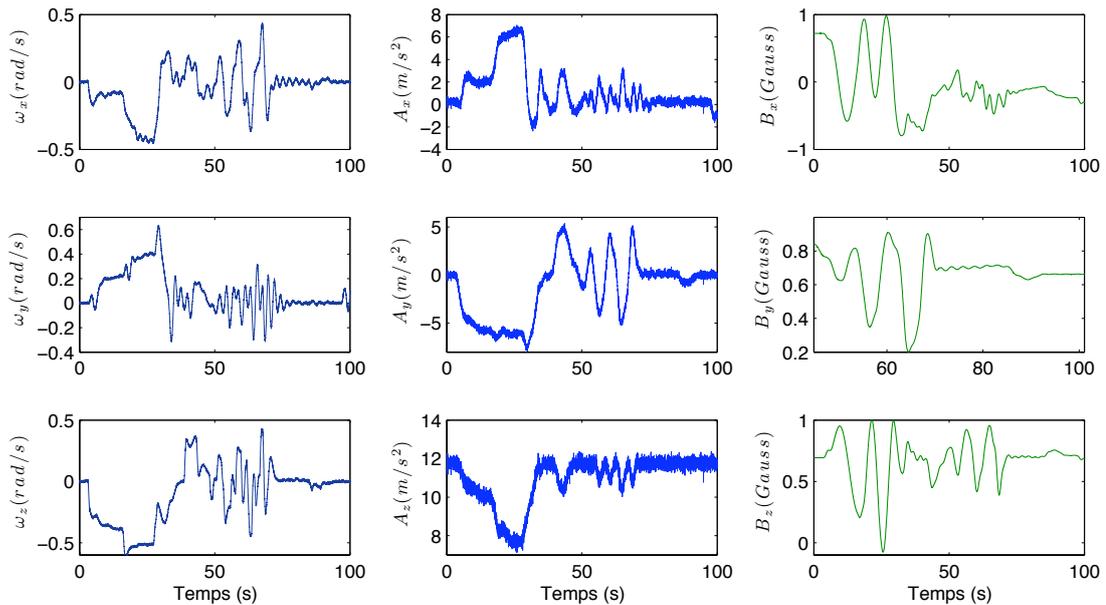


FIGURE 5.1 – Mesures simulées issues des capteurs : vitesse angulaire- accélération totale- champ magnétique terrestre

avec des valeurs d'écart-type issues d'un environnement de simulation pour mini-drones appelé Aviones {Randal, 2007}. Les données numériques associées à ces imperfections sont données dans le tableau 5.1. Par ailleurs, il sera indispensable de considérer, vis à vis de la formulation du  $\pi$ -IUKF, que les termes de perturbation seront introduits à l'intérieur des modèles  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  et  $\mathcal{M}_{ins}^+$  de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_{ahrs}^+ \begin{cases} q_{k+1} = \frac{1}{2}q_k * (\omega_{m_k} - \omega_{b_k}) + W_{q_k} w_{q_k} * q_k \\ w_{b_{k+1}} = q_k^{-1} * W_{w_k} w_{w_k} * q_k \\ a_{s_{k+1}} = a_{s_k} W_{a_k} w_{a_k} \\ b_{s_{k+1}} = b_{s_k} W_{b_k} w_{b_k} \\ \begin{pmatrix} z_{A_{k+1}} \\ z_{B_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{s_{k+1}} q_{k+1}^{-1} * (A + V_{A_{k+1}} v_{A_{k+1}}) * q_{k+1} \\ b_{s_{k+1}} q_{k+1}^{-1} * (B + V_{B_{k+1}} v_{B_{k+1}}) * q_{k+1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{M}_{ins}^+ \begin{cases} q_{k+1} = \frac{1}{2}q_k * (\omega_{m_k} - \omega_{b_k}) + W_{q_k} w_{q_k} * q_k \\ V_{k+1} = A + \frac{1}{a_{s_k}} q_k * a_{m_k} * q_k^{-1} + W_{V_k} w_{V_k} \\ X_{k+1} = V_k + W_{X_k} w_{X_k} \\ w_{b_{k+1}} = q_k^{-1} * W_{w_k} w_{w_k} * q_k \\ a_{s_{k+1}} = a_{s_k} W_{a_k} w_{a_k} \\ h_{b_{k+1}} = h_{b_k} W_{b_k} w_{b_k} \\ \begin{pmatrix} z_{V_{k+1}} \\ z_{X_{k+1}} \\ z_{h_{k+1}} \\ z_{B_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{k+1} + V_{V_{k+1}} v_{V_{k+1}} \\ X_{k+1} + V_{X_{k+1}} v_{X_{k+1}} \\ \langle X_{h_{k+1}} | e_3 \rangle - h_{b_{k+1}} + V_{h_{k+1}} v_{h_{k+1}} \\ q_{k+1}^{-1} * (B + V_{B_{k+1}} v_{B_{k+1}}) * q_{k+1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.2)$$

Dans les équations (5.1) et (5.2),  $W_{q_k}, W_{V_k}, W_{X_k}, W_{w_k}, W_{a_k}$  et  $W_{b_k}$  (resp.  $V_{A_k}, V_{B_k}, V_{V_k}$  et  $V_{X_k}$ ) font référence à des termes de pondération associés aux matrices de covariance des bruits sur les états et sur les mesures. Dans notre cadre d'application, les résultats présentés en simulation ont été obtenus avec un réglage défini par une matrice de covariance des bruits de mesure  $V_k$ , choisie équivalente aux vraies valeurs des bruits des capteurs présentés dans le tableau 5.1 et une matrice de covariance des bruits sur les états égale à :  $W_{q_k} = 0.001I_3, W_{V_k} = 0.01I_3, W_{X_k} = 0.01I_3, W_{w_k} = 0.001I_3, W_{a_k} = 0.001I_3$  et  $W_{b_k} = 0.001I_3$ . Par ailleurs, un terme invariant défini par  $\lambda(1 - \|\hat{q}_k\|^2)\hat{q}_k$  avec  $\lambda = 1$  sera ajouté sur la relation cinématique du modèle de prédiction des deux algorithmes tel que :

$$\dot{\hat{q}}_{k+1} = \frac{1}{2}\hat{q}_k * (\omega_{m_k} - \hat{\omega}_{b_k}) + K_{q_k} E * \hat{q}_k + \lambda(1 - \|\hat{q}_k\|^2)\hat{q}_k$$

Ce terme invariant permet de compenser les erreurs numériques éventuelles sur les quaternions. Enfin, pour être cohérent avec les modèles  $\mathcal{M}_{ahrs}^+$  et  $\mathcal{M}_{ins}^+$ , un vecteur de biais additif sera introduit sur la mesure  $\omega_m$  tel que  $\omega_b = (0.1rad/s \ 0.05rad/s \ 0.02rad/s)$  et deux facteurs d'échelle seront intégrés avec pour notations respectives  $a_s, b_s$  pour l'AHRs et  $a_s, h_b$  pour l'INS.

PARAMÈTRE	VALEUR	UNITÉ
$\sigma_{gyro,x}$	0.005	radian/secondes
$\sigma_{gyro,y}$	0.005	radian/secondes
$\sigma_{gyro,z}$	0.005	radian/secondes
$\sigma_{acc,x}$	0.005	mètre/secondes
$\sigma_{acc,y}$	0.005	mètre/secondes
$\sigma_{acc,z}$	0.005	mètre/secondes
$\sigma_{mag,x}$	0.005	Gauss
$\sigma_{mag,y}$	0.005	Gauss
$\sigma_{mag,z}$	0.005	Gauss
$\sigma_{GPS,px}$	1	mètre
$\sigma_{GPS,py}$	1	mètre
$\sigma_{GPS,pz}$	1	mètre
$\sigma_{GPS,vx}$	0.5	mètre/secondes
$\sigma_{GPS,vy}$	0.5	mètre/secondes
$\sigma_{GPS,vz}$	0.5	mètre/secondes

TABLE 5.1 – *Caractéristiques des bruits considérés pour les mesures de chaque capteur.*

Les différents algorithmes proposés au chapitre 4 doivent être initialisés à partir d'un état  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  que nous choisissons de calculer à partir des premières mesures disponibles. Il a donc été nécessaire d'évaluer les composantes du quaternion ainsi que les vitesses linéaires à l'état initial. Par conséquent, le quaternion initial a été calculé à partir des mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre selon les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varphi &= \arctan2(-a_{my}, -a_{mz}) \\ \theta &= \arcsin\left(\frac{-a_{mx}}{\|a_{mx}\|}\right) \\ \psi &= \arctan2((B_z \cdot \sin(\varphi) - B_y \cdot \cos(\varphi)), \dots \\ &B_x \cdot \cos(\theta) + (B_y \cdot \sin(\varphi) + B_z \cos(\varphi)) \cdot \sin(\theta)) \end{cases}$$

Ces valeurs sont ensuite converties en le quaternion correspondant par :

$$\begin{cases} q_0 &= \cos(\psi/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos(\varphi/2) + \sin(\psi/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \sin(\varphi/2) \\ q_1 &= \cos(\psi/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \sin(\varphi/2) + \sin(\psi/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\varphi/2) \\ q_2 &= \sin(\psi/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \sin(\varphi/2) + \cos(\psi/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\varphi/2) \\ q_3 &= \sin(\psi/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos(\varphi/2) + \cos(\psi/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \sin(\varphi/2) \end{cases}$$

Enfin, pour définir les états initiaux correspondants aux vitesses linéaires de la charge, nous utilisons les mesures GPS au premier instant.

### 5.1.2 Etude des deux algorithmes UKF sur le modèle AHRS

#### Validation sans erreur sur l'état initial

Les algorithmes sont tout d'abord testés en supposant l'état initial connu et représenté par le vecteur  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  tel que  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = (0.99 \ 0 \ -0.0103 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$ . Afin d'avoir une simulation plus réaliste, nous ajoutons les biais  $\omega_b$  présentés précédemment ainsi que les facteurs d'échelle  $a_s = 1.2$  et  $b_s = 0.9$ . Enfin, nous choisissons de définir la covariance de l'erreur d'estimation pour les deux algorithmes à partir des écarts types suivants :  $\sqrt{P_0} = \text{diag}(0.0001I_4 \ 0.002I_3 \ 0.001I_2)$  où  $I_n$  est la matrice identité  $n \times n$ . Pour avoir un résultat plus intuitif, nous avons procédé à une transformation mathématique nous permettant ainsi le passage des quaternions vers les angles d'Euler. Ainsi, la figure 5.2 illustre l'estimation réalisée sur les angles d'attitudes  $(\varphi, \theta, \psi)$ . Ce premier résultat nous permet de conclure que l'erreur d'estimation sur l'algorithme  $\pi$ -IUKF est minime malgré les bruits ajoutés sur les modèles d'évolution et d'observation. Par ailleurs, on observe que l'évolution de l'erreur d'estimation sur le cap pour le  $\pi$ -IUKF est légèrement plus importante entre 20 et 30 secondes que pour l'UKF mais ceci sera sans conséquence sur l'attitude du micro-drone au regard de la petite amplitude de celle-ci.

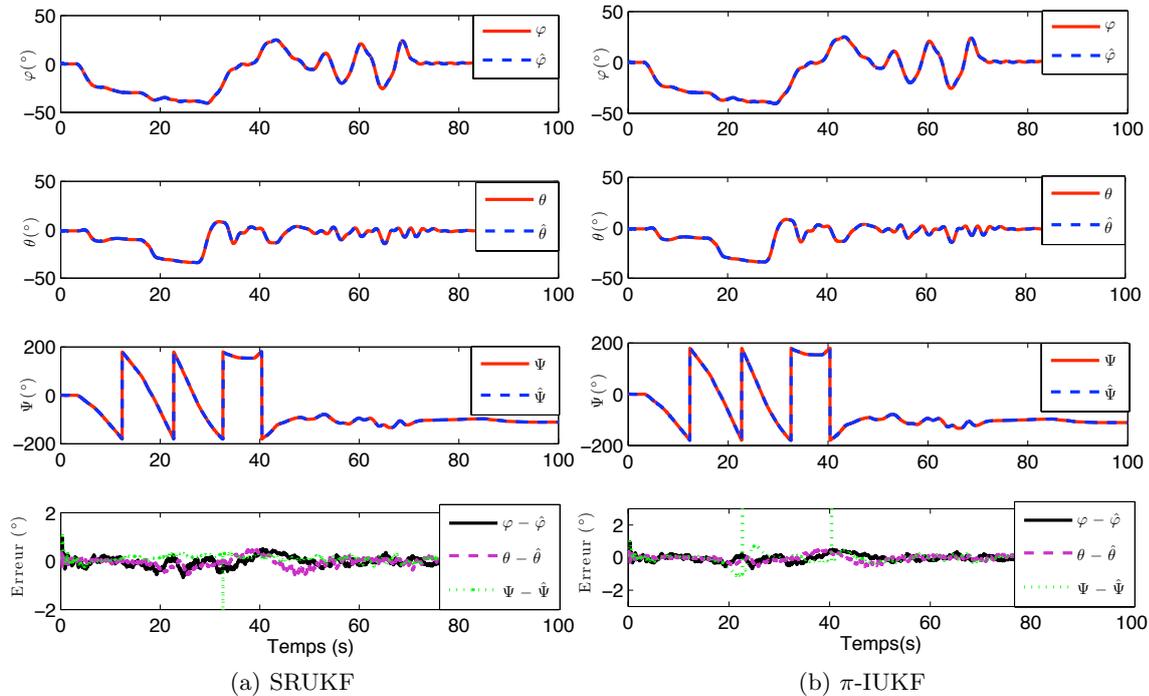


FIGURE 5.2 – Résultat de l'estimation des angles d'attitude  $(\varphi, \theta, \psi)$

A partir de cette première simulation, nous voulons maintenant vérifier la validité du modèle AHRS sur l'intégralité du temps de largage de la charge. La figure 5.3 présente la norme de l'accélération  $\dot{V}$  pour laquelle l'hypothèse 4 décrite à la section 3.5 ( $\dot{V} \neq 0$ ) se révèle être partiellement fausse. En effet, nous pouvons observer que la norme de l'accélération évoluant entre 20 et 35 secondes augmente et diminue assez fortement. Cette phase de décélération est la conséquence directe du déploiement du parachute quelques minutes après son largage. Sur la figure 5.4, nous observons une légère perturbation inconsistante des valeurs de biais et des facteurs d'échelle entre 20 et 40 secondes. Cette durée correspond à la phase pendant laquelle l'accélération est la plus forte où l'hypothèse  $\dot{V} \neq 0$ . A noter tout de même que cette phase de forte accélération rejait sur les biais du fait que ces quantités sont estimées durant la phase pendant laquelle le système évolue, ce qui ne sera pas le cas en pratique. Il apparaît sur la figure 5.4a une légère erreur sur les valeurs finales des estimés et notamment sur  $\hat{a}_s$  où l'erreur est la plus importante. Malgré cela, nous avons tout de même une convergence rapide de l'estimation des valeurs de biais qui sont, pour les deux algorithmes, représentatives de celles ajoutées aux mesures.

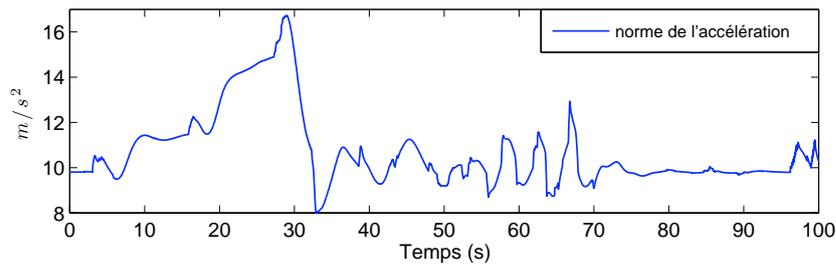


FIGURE 5.3 – Norme de l'accélération  $y_A$  (localement  $\dot{V} \neq 0$ )

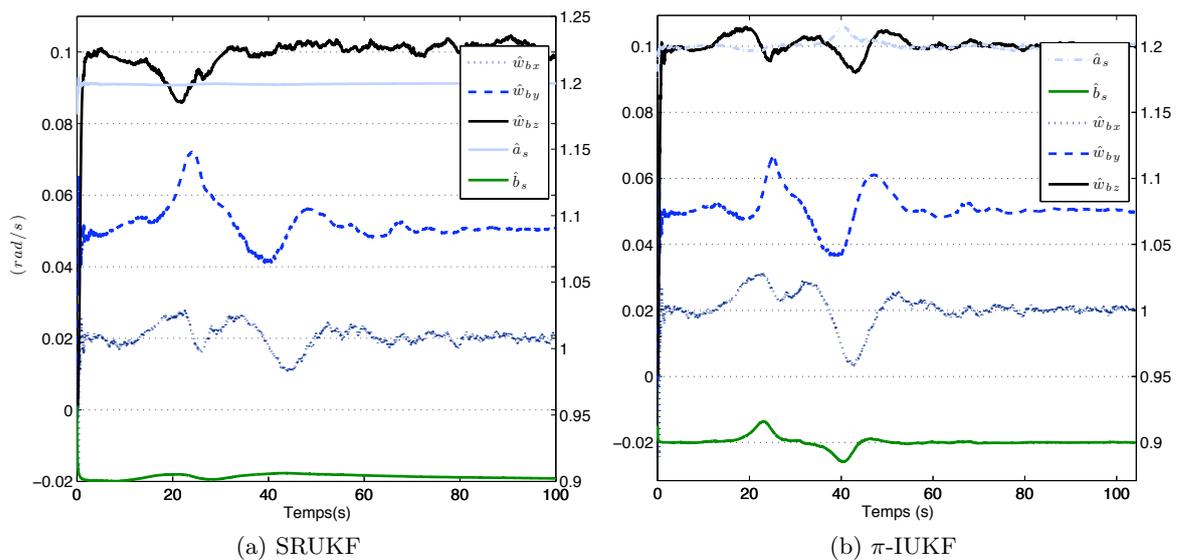


FIGURE 5.4 – Biais et facteurs d'échelles influencés localement par  $\dot{V} \neq 0$

### Performances des deux algorithmes

Les performances des deux algorithmes sont évaluées plus précisément à partir des erreurs d'estimation sur les attitudes et les biais. La figure 5.6 présente les résultats obtenus avec pour chacun des tracés, la moyenne des erreurs, les valeurs théoriques et statistiques des écarts-types. Concernant ce dernier point, nous avons choisi de travailler avec le critère donné par l'équation (5.3).

$$\text{CRITÈRE : } J(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^{n+k} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)^2}{n}} \quad (5.3)$$

Ce critère est établi en utilisant la moyenne quadratique glissante appelée RMSD (*Root Mean Square Deviation*) et permet de quantifier la différence entre les quaternions et les biais de référence fournis par le modèle théorique et ceux estimés par chaque méthode. Ces résultats font apparaître une distinction très nette sur la figure 5.6 entre la convergence des matrices de covariance du SRUKF et du  $\pi$ -IUKF. En particulier, la figure 5.6a, illustre le fait que la matrice de covariance du premier quaternion converge vers une valeur aberrante du fait que la structure du SRUKF ne préserve pas la norme unitaire, ce qui n'est pas le cas pour le  $\pi$ -IUKF. Par rapport aux propriétés de convergence de l'observateur invariant présentées au chapitre 4, le nouvel algorithme converge bien vers des valeurs constantes sur tous les tracés temporels des matrices de covariance. Enfin, la convergence vers zéro des erreurs d'estimation montre la capacité du  $\pi$ -

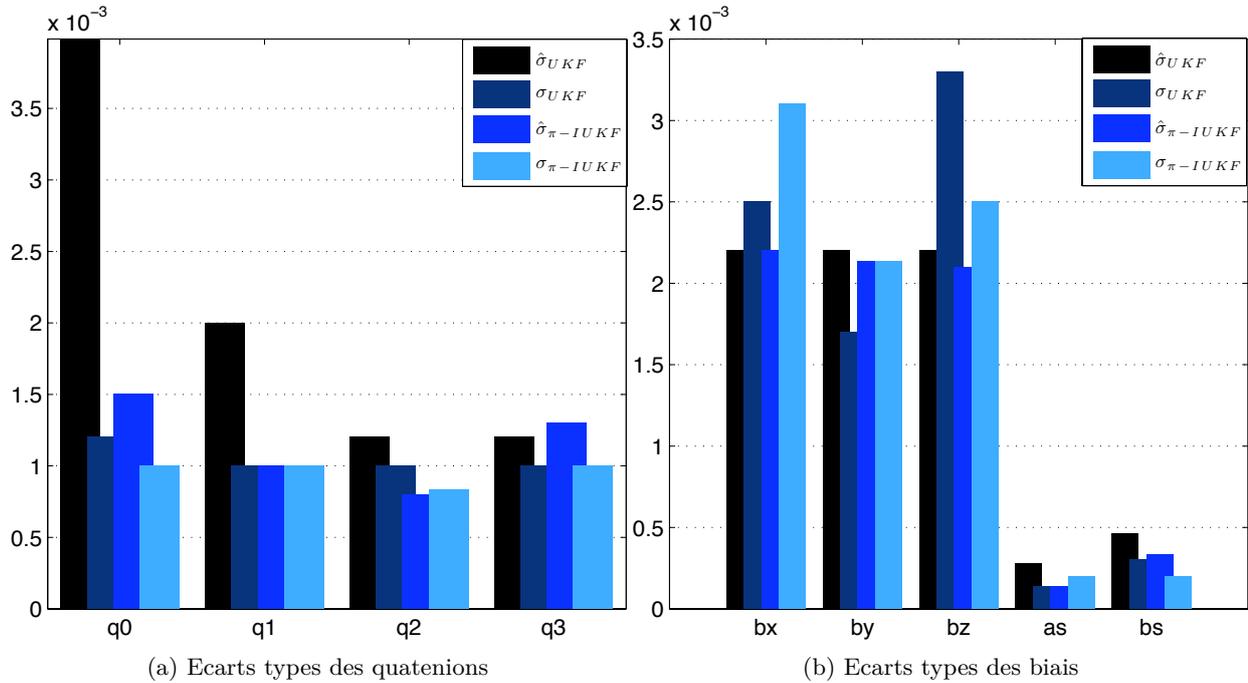
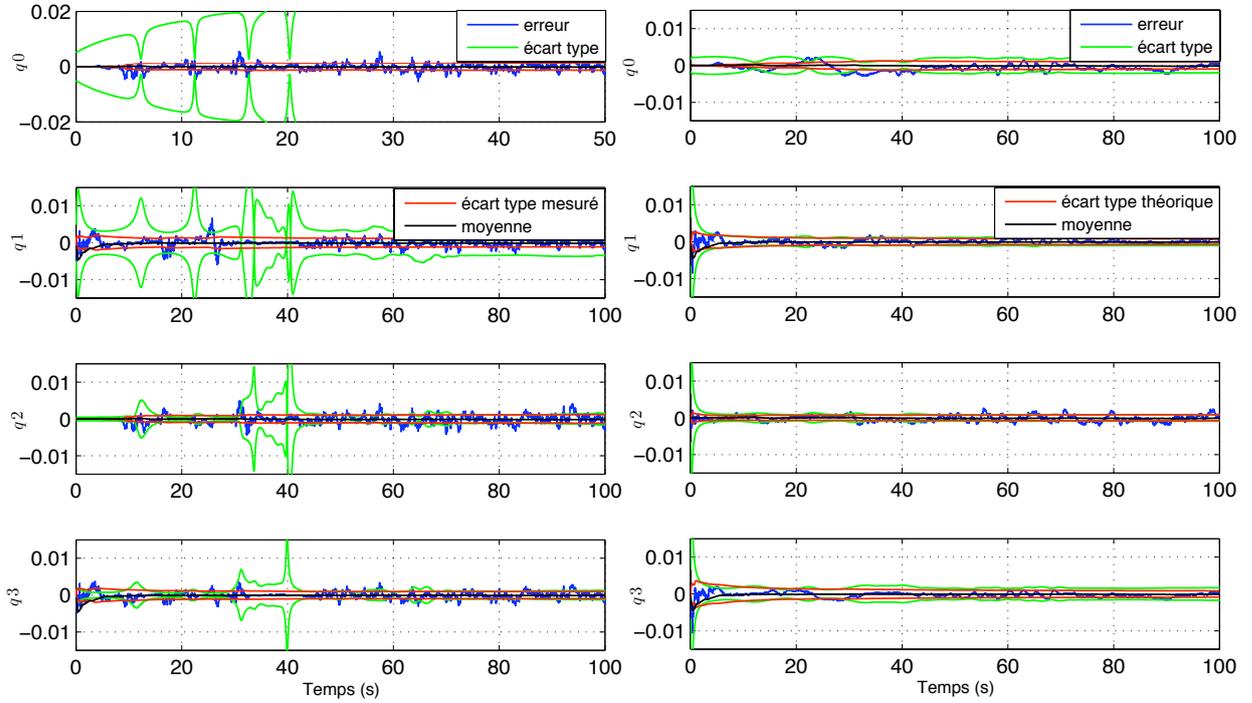


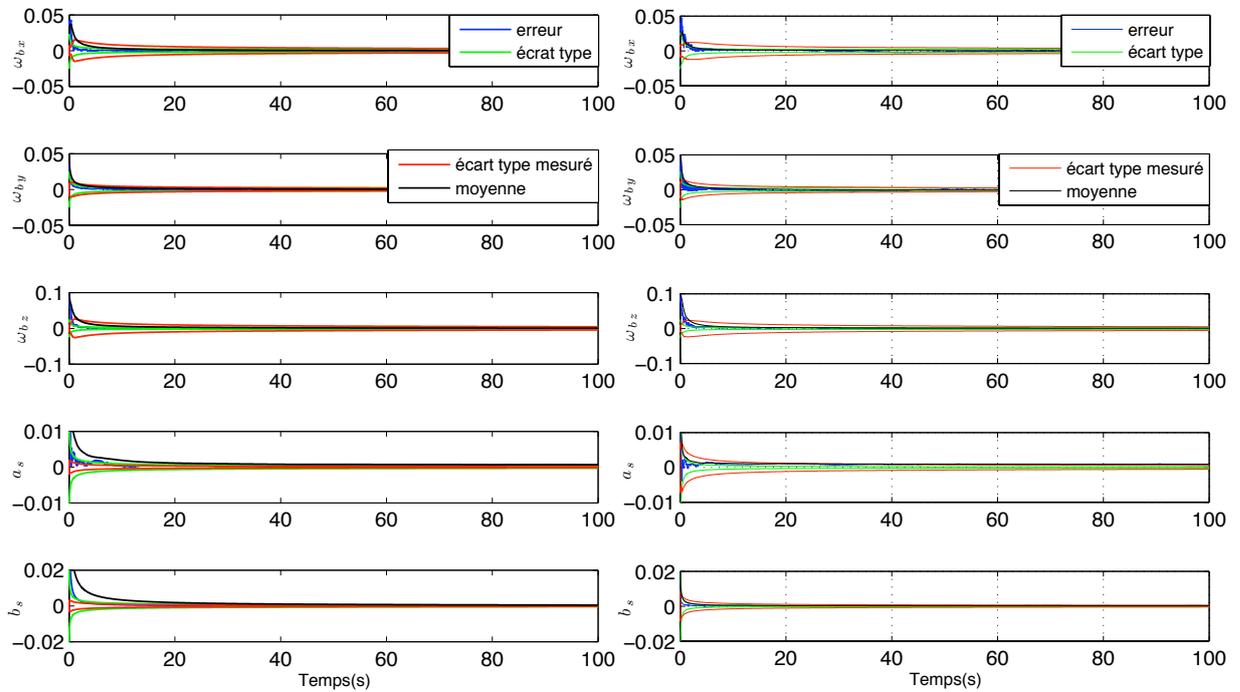
FIGURE 5.5 – Comparaison des écarts types théoriques/mesurés pour le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

## 5.1 Validation sur données simulées



(a) Résultats fournis par le SRUKF sur les quaternions

(b) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les quaternions



(c) Résultats fournis par le SRUKF sur les biais

(d) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les biais

FIGURE 5.6 – Résultats fournis par le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

IUKF à reconstruire l'attitude du modèle de référence. La figure 5.5, compare les valeurs liées aux erreurs de covariance estimées par les deux algorithmes ( $\hat{\sigma}_{UKF}$  et  $\hat{\sigma}_{\pi-IUKF}$ ) avec celles mesurées par le critère  $J$  ( $\sigma_{UKF}$  et  $\sigma_{\pi-IUKF}$ ). Nous retrouvons quasiment les mêmes performances entre les deux algorithmes. Néanmoins, il est intéressant de constater que les valeurs des écarts types estimées par le  $\pi$ -IUKF sont plus proches des valeurs réelles comparativement au SRUKF.

### Introduction d'une erreur initiale

Nous introduisons maintenant une erreur sur le vecteur d'état initial  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  en appliquant une rotation d'un angle de  $120^\circ$  par rapport à la vraie orientation du système tels que les quaternions à l'instant initial s'écrivent de la manière suivante :

	VRAI SYSTÈME	ETAT INITIAL
$q_0$	0.99	$\cos(\pi/3)$
$q_1$	0	$\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$
$q_2$	-0.0103	$-\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$
$q_3$	0	$\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$

Nous choisissons de définir la covariance de l'erreur d'estimation pour les deux algorithmes à partir des écarts types suivants :  $\sqrt{P_0} = \text{diag}(0.01I_4 \ 0.002I_3 \ 0.001I_2)$ . L'objectif ici est d'illustrer la capacité du nouvel algorithme à estimer l'attitude loin de la vraie condition initiale. Les courbes d'évolution temporelles des angles d'Euler théoriques ( $\varphi, \theta, \psi$ ) sont représentées sur la figure 5.7 et font apparaître une convergence plus rapide pour l'algorithme  $\pi$ -IUKF. Bien que les algorithmes SRUKF et  $\pi$ -IUKF aient été initialisés loin de leurs vraies valeurs, la convergence de leurs états estimés vers ceux réels est assurée dans un temps court, acceptable dans le cadre de notre application (i.e. pour l'attitude d'un mini-drone).

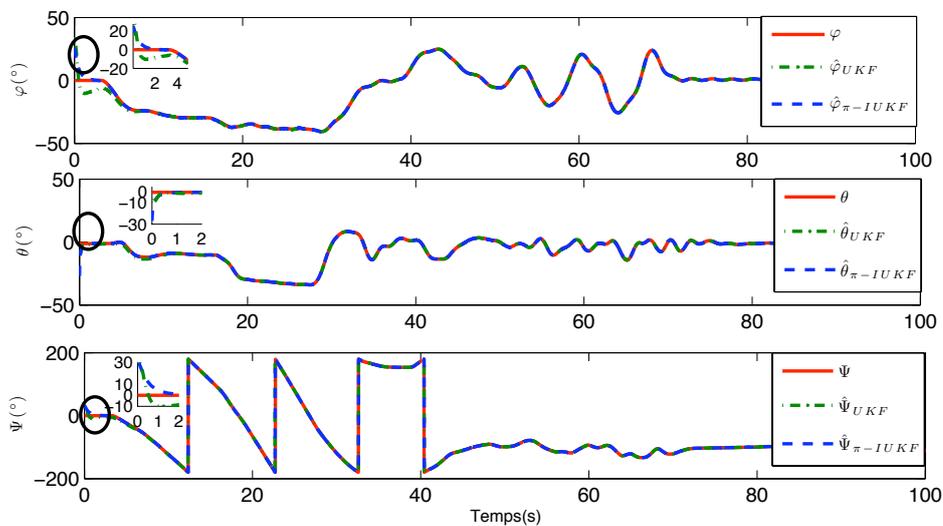


FIGURE 5.7 – Résultats sur la convergence du SRUKF et du  $\pi$ -IUKF

### 5.1.3 Les propriétés d'invariance du $\pi$ -IUKF appliqué à l'AHRs

Bien que nous ayons un bon comportement de la part du  $\pi$ -IUKF par rapport à sa capacité à reconstituer l'état, nous devons nous assurer que les propriétés d'invariance sont les mêmes que celles de l'algorithme IEKF {Bonnabel *et al.*, 2009b}. En effet, le  $\pi$ -IUKF peut être vu comme un observateur invariant à gauche tel que les gains correspondent à un filtre UKF pour le calcul de l'erreur. Il est donc intéressant de remarquer que le quaternion estimé  $\hat{q}(t)$  et donc la convergence (et les gains) ne dépendent plus de la trajectoire bien que la dynamique soit non linéaire. Afin d'illustrer la première propriété d'invariance liée à la convergence de l'état, nous conservons les réglages de la section précédente et nous prenons des conditions initiales telle que l'orientation estimée diffère de la vraie orientation d'un angle de  $60^\circ$ . Cela s'écrit grâce aux quaternions :

	VRAI SYSTÈME	ETAT INITIAL
$q_0$	0.99	$\cos(\pi/6)$
$q_1$	0	$\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$
$q_2$	-0.0103	$-\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$
$q_3$	0	$\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$

Dans un premier temps, nous représentons sur la figure 5.8, les résultats de la convergence de  $\hat{q}$  vers  $q$  pour le  $\pi$ -IUKF. Par ailleurs, nous illustrons la norme de l'erreur d'estimation d'état linéaire entre  $q$  et  $\hat{q}$  calculé à partir du SRUKF et l'erreur d'estimation d'état invariante calculé à partir du  $\pi$ -IUKF pour lequel la norme des éléments du groupe  $\eta = \hat{q} \cdot q^{-1}$  converge vers 1 quand la norme de l'erreur d'estimation l'erreur tend vers 0, tel que  $\|\hat{q} \cdot q^{-1} - 1\|$ .

Dans un second temps, nous prenons des conditions initiales différentes sur le système théorique tel que nous ayons une norme de l'erreur d'état à l'instant identique à celle précédemment obtenue, par exemple nous pouvons prendre les valeurs suivantes :

	VRAI SYSTÈME	ETAT INITIAL
$q_0$	0.5	$\cos(\pi/6)$
$q_1$	0.5	$\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$
$q_2$	0.5	$-\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$
$q_3$	0.5	$\sin(\pi/6)/\sqrt{3}$

tel que  $\|\hat{q}(0) \cdot q^{-1}(0) - 1\| = 1$  et  $\|q(0) - \hat{q}(0)\| = 0.5176$ . Ainsi, nous constatons sur la figure 5.9 que l'erreur d'état invariante a le même comportement malgré une trajectoire différente, ce qui n'est pas le cas pour l'erreur d'état classique calculée sur la base de l'algorithme SRUKF.

Nous étudions à présent une deuxième propriété d'invariance du filtre  $\pi$ -IUKF liée à la convergence des gains  $\mathbf{K}$ . En considérant les mêmes paramètres de réglage que ceux retenus pour obtenir les résultats d'estimation sur les angles d'Euler, représentés sur la figure 5.2, nous traçons l'évolution temporelle des gains obtenus par l'UKF et le  $\pi$ -IUKF sur toute la trajectoire

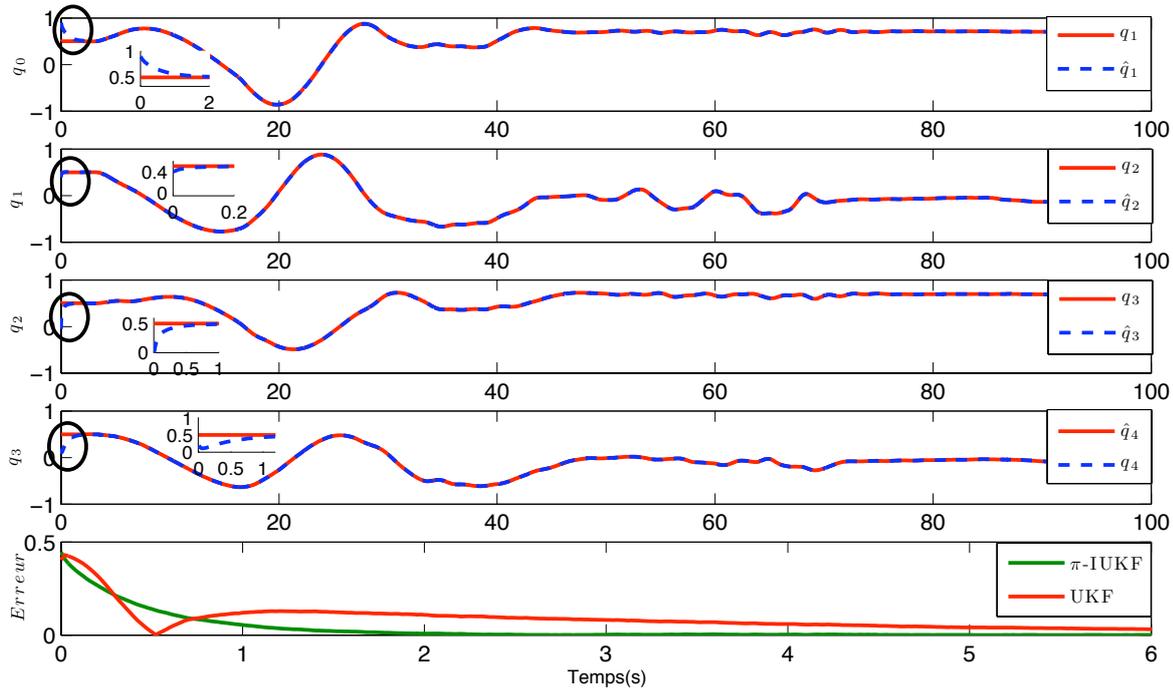


FIGURE 5.8 – Résultats de l'estimation d'attitude  $\hat{q}$  (pointillés bleus) fournis par le  $\pi$ -IUKF et représentation de l'erreur d'estimation linéaire (SRUKF) et invariante ( $\pi$ -IUKF)

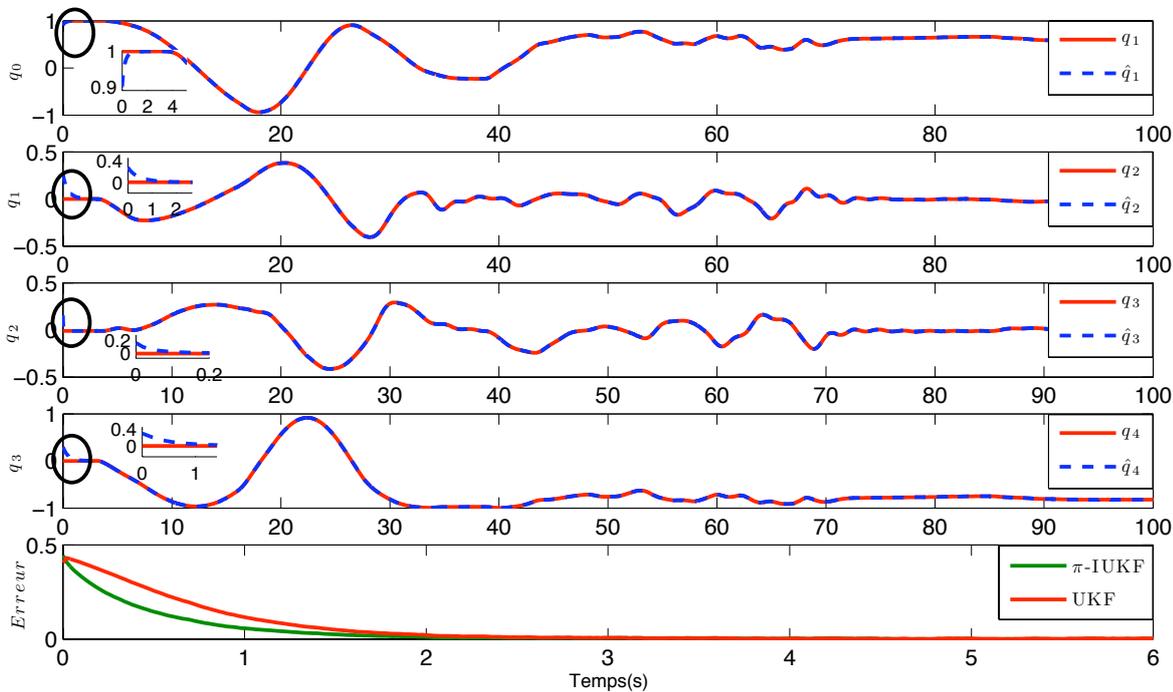


FIGURE 5.9 – Résultats de l'estimation d'attitude  $\hat{q}$  (pointillés bleus) fournis par le  $\pi$ -IUKF et représentation de l'erreur d'estimation linéaire (SRUKF) et invariante ( $\pi$ -IUKF). La seule différence avec la figure 5.8 est que la condition initiale  $q_0$  est différente

du système. La figure 5.10 compare les valeurs des gains matriciels obtenues par l'algorithme UKF avec les valeurs établies par l'algorithme  $\pi$ -IUKF. Les coefficients de correction du  $\pi$ -IUKF deviennent constants après quelques secondes  $t < 5$  sec sur toute la trajectoire alors que ceux du SRUKF ont une évolution irrégulière causée par une erreur d'estimation loin de son point d'équilibre correspondant. Après un temps  $t > 75$  sec, les trajectoires du système deviennent des trajectoires permanentes (quasi-constantes) tout comme les coefficients constants des gains du SRUKF.

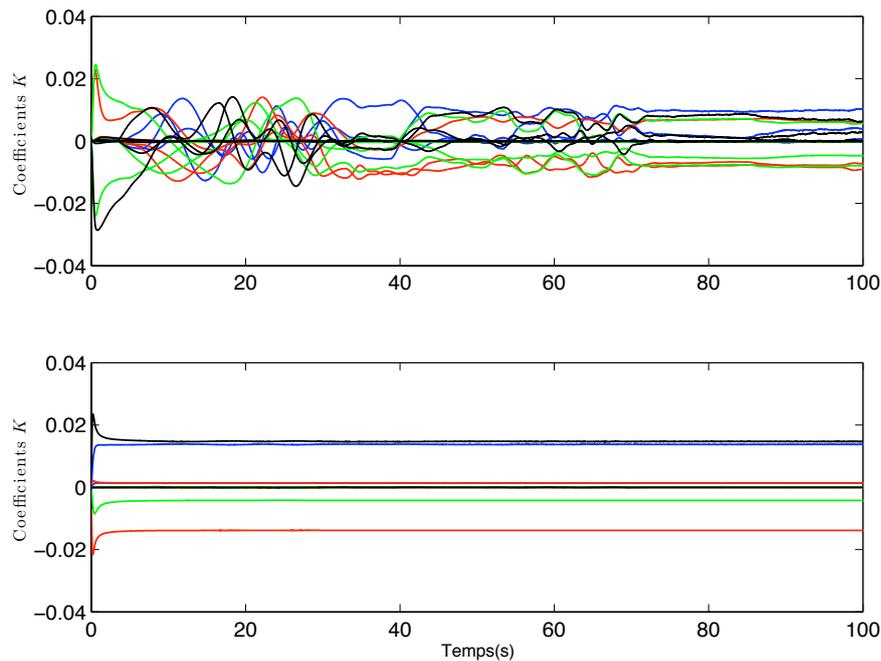


FIGURE 5.10 – Résultats de convergence des gains de corrections  $K$  obtenus avec le SRUKF (en haut) et le  $\pi$ -IUKF (en bas)

Les simulations ci-dessus montrent que la convergence du  $\pi$ -IUKF est loin d'être locale. Elle montre bien que le  $\pi$ -IUKF permet de calculer des valeurs numériques pour les gains de correction qui confèrent au filtre la dynamique souhaitée et assurent, dans le même temps, une convergence étendue de l'erreur d'estimation sur l'état invariante.

#### 5.1.4 Etude des deux algorithmes UKF sur le modèle INS

##### Validation avec conditions initiales connues

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus en appliquant les deux algorithmes UKF sur le modèle INS. La figure 5.11 représente l'estimation réalisée sur les angles d'attitude  $(\varphi, \theta, \psi)$  respectivement par l'UKF et le  $\pi$ -IUKF. Nous observons que l'erreur sur  $\theta$  et  $\psi$  est plus importante entre 60 et 80 secondes pour l'UKF que pour le  $\pi$ -IUKF. Ce premier résultat nous permet de conclure que le  $\pi$ -IUKF arrive à reconstituer l'attitude avec une erreur d'estimation petite malgré les forts bruits ajoutés sur modèle d'évolution et d'observation (cf. tableau 5.1).

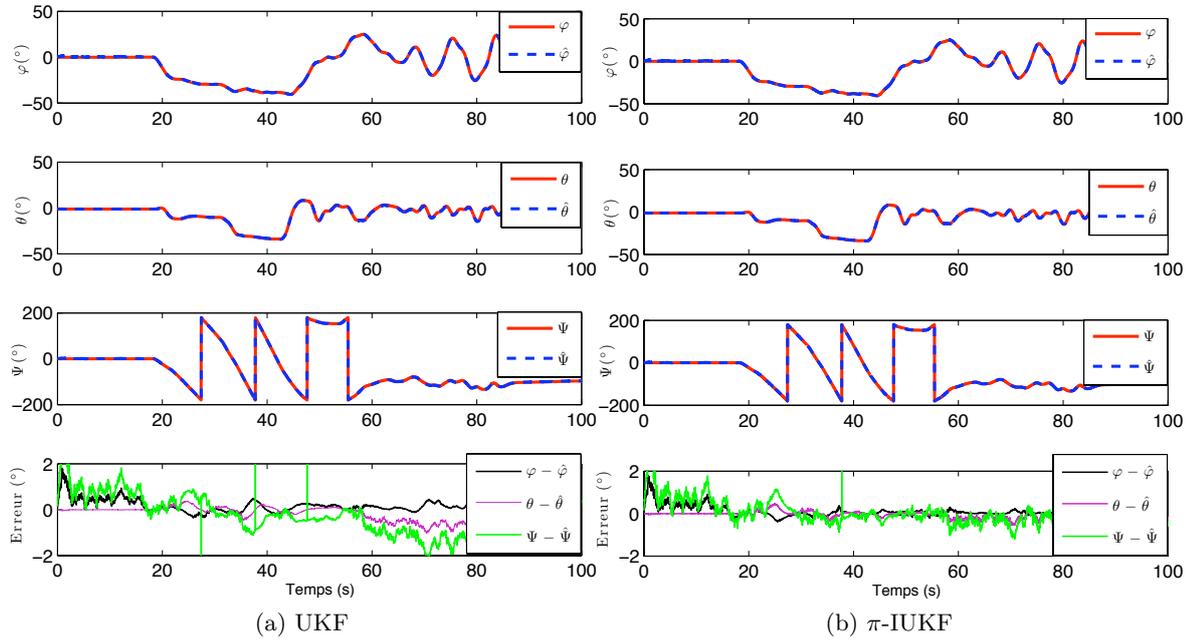


FIGURE 5.11 – Résultats d'estimation sur l'attitude ( $\varphi, \theta, \psi$ )

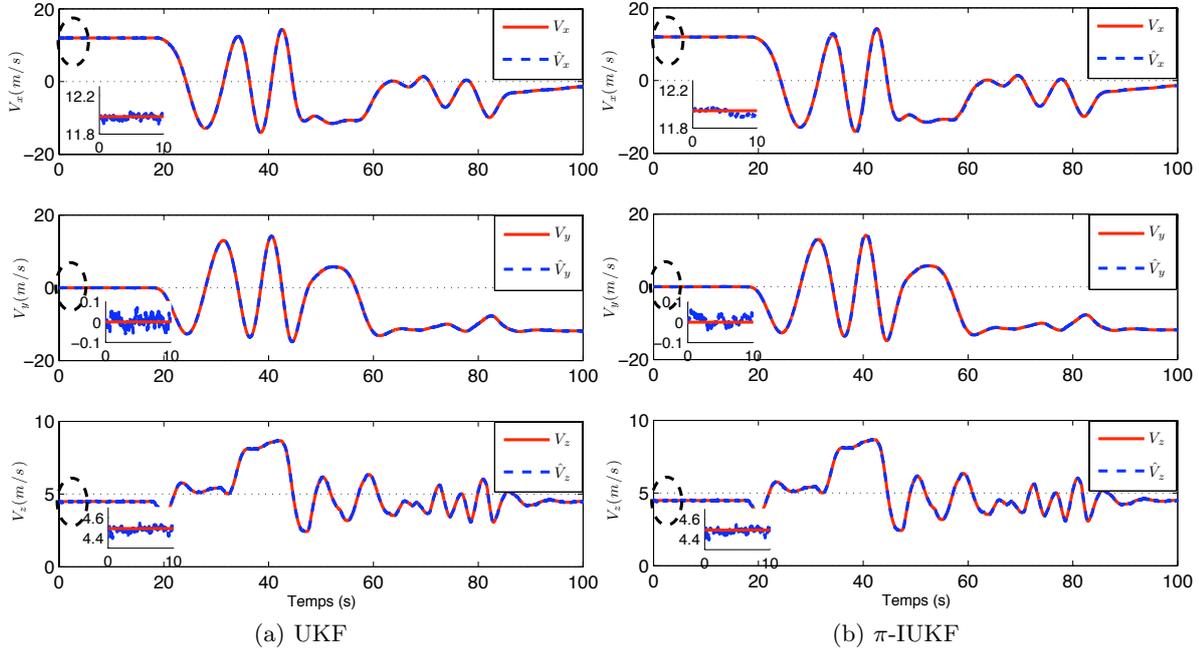


FIGURE 5.12 – Résultats de l'estimation des vitesses ( $V_x, V_y, V_z$ )

Les figures 5.12 et 5.13 illustrent la reconstitution des vitesses et des positions par les deux algorithmes. Premièrement, nous pouvons constater que l'amplitude sur les données de vitesse ( $\pm 20m/s$ ) et de position ( $\pm 500m$ ) sera bien cohérente avec les capacités de vol d'un mini-drone

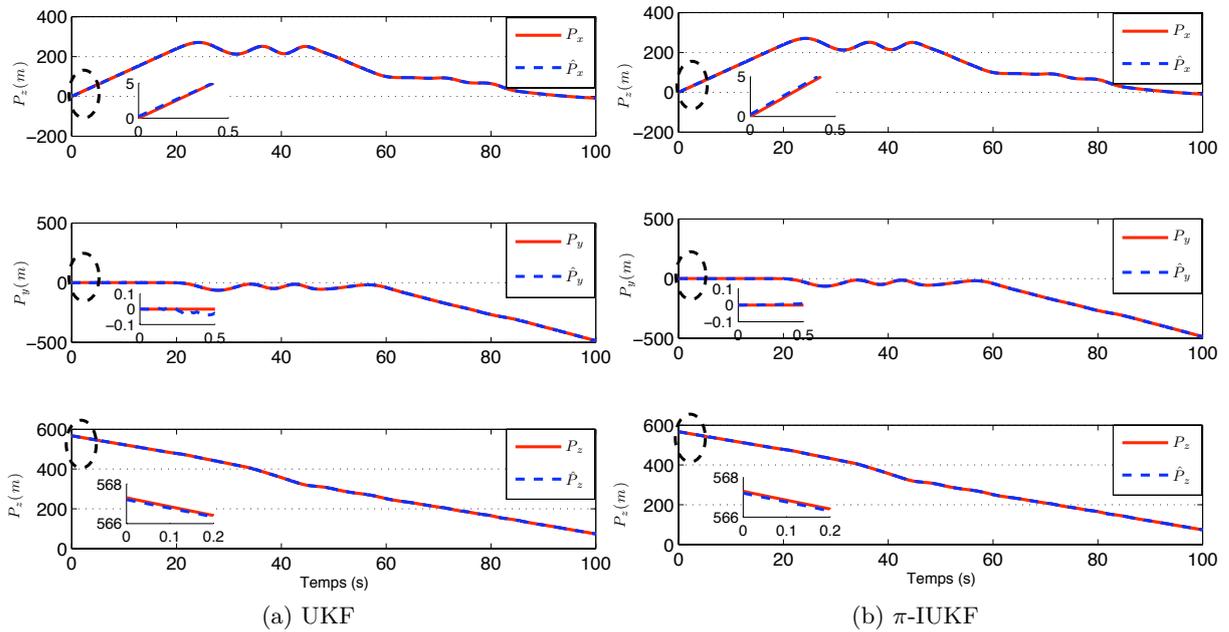


FIGURE 5.13 – Résultats de l'estimation des positions ( $P_x, P_y, P_z$ )

à aile fixe. Un grossissement sur les 10 premières secondes sur les vitesses, nous permet de voir *a priori* que les performances d'estimation sont légèrement meilleures avec le  $\pi$ -IUKF. Cela restera à confirmer dans une étude plus fine des performances. Par ailleurs, un grossissement sur la première demi-seconde, nous permet de voir que la position en  $y$  met plus de temps à converger pour l'UKF que pour le  $\pi$ -IUKF. L'estimation des positions s'effectue correctement pour les deux algorithmes. Ces deux derniers résultats nous confirment la capacité de l'algorithme  $\pi$ -IUKF à reconstituer correctement la position et la vitesse de la charge malgré de forts bruits entrant dans le modèle d'évolution et d'observation de l'INS.

### Performances des deux algorithmes

Les performances des deux algorithmes sont évaluées plus précisément à partir des erreurs d'estimation sur l'attitude, les vitesses, les positions d'une part et les biais sur les gyromètres, accéléromètres et baromètre d'autre part. Nous choisissons de définir la covariance de l'erreur d'estimation pour les deux algorithmes à partir des écarts types suivants :  $\sqrt{P_0} = \text{diag}(0.0001I_4, 0.002I_3, 0.001I_3, 0.01I_3, 0.05I_2)$ . Les figures 5.15 et 5.16 présentent les résultats obtenus avec pour chacun des tracés, la moyenne des erreurs et les valeurs théoriques et statistiques des écarts-types, calculées à partir de l'équation 5.3. Les figures 5.14a et 5.14b comparent les valeurs liées aux erreurs de covariance estimées par les deux algorithmes avec celles mesurées par le critère  $J$  de l'équation 5.3.

Ces résultats font apparaître quasiment les mêmes comportements que nous avons illustrés

pour le modèle de l’AHRS. En particulier, la norme unitaire du quaternion n’est pas préservée par la structure de l’algorithme SRUKF ce qui donne une covariance aberrante sur la composante  $q_0$ . A noter de légères variations sur les covariances du  $\pi$ -IUKF qui s’expliquent par le fait que l’erreur d’état invariante n’est plus autonome comme c’est le cas pour le modèle de l’AHRS. Les figures 5.14a et 5.14b permettent d’illustrer le fait que l’écart-type estimé par le  $\pi$ -IUKF est plus proche de l’écart type réel comparativement au SRUKF. D’une manière générale, les performances des deux algorithmes sont comparables et fournissent une très bonne estimation des attitudes, des biais, des positions et des vitesses.

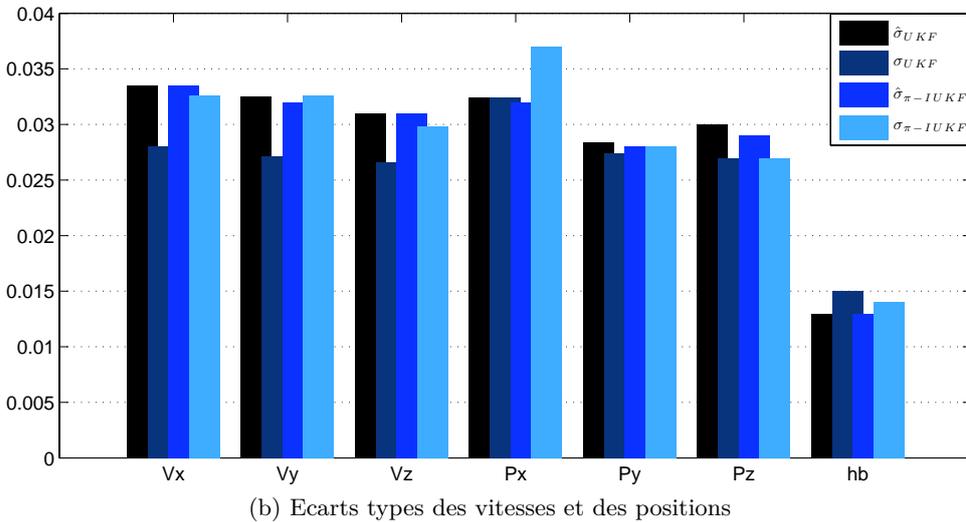
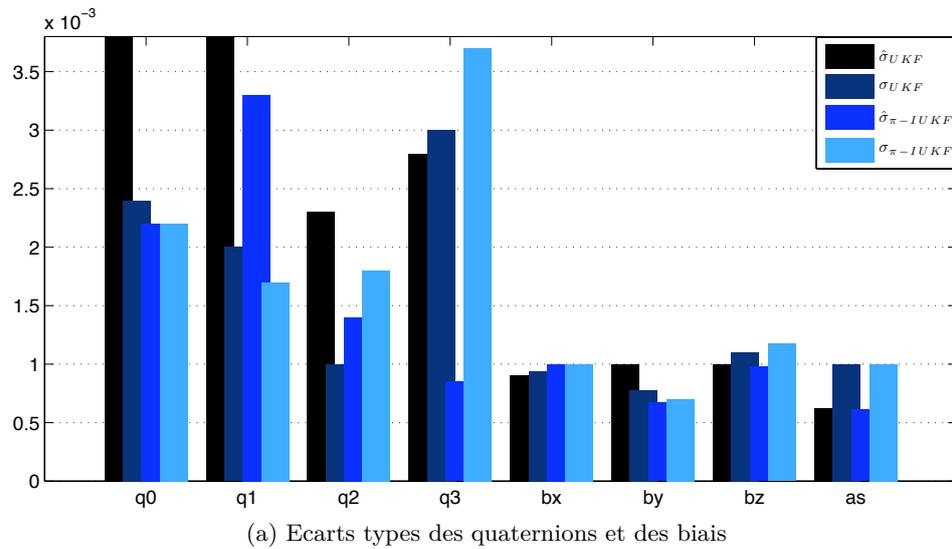
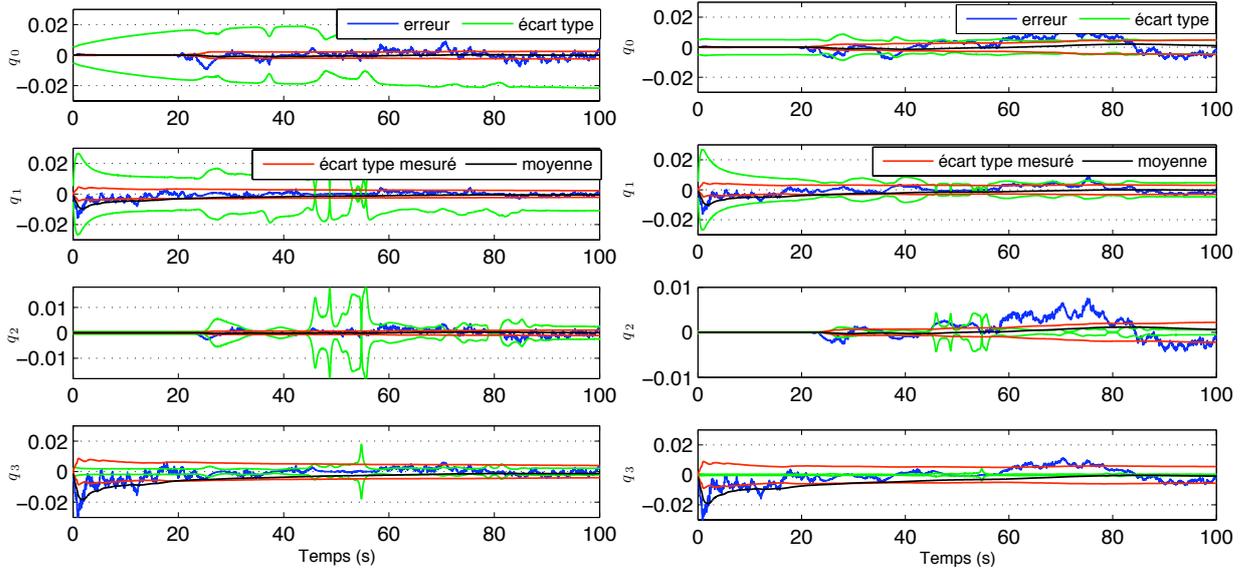
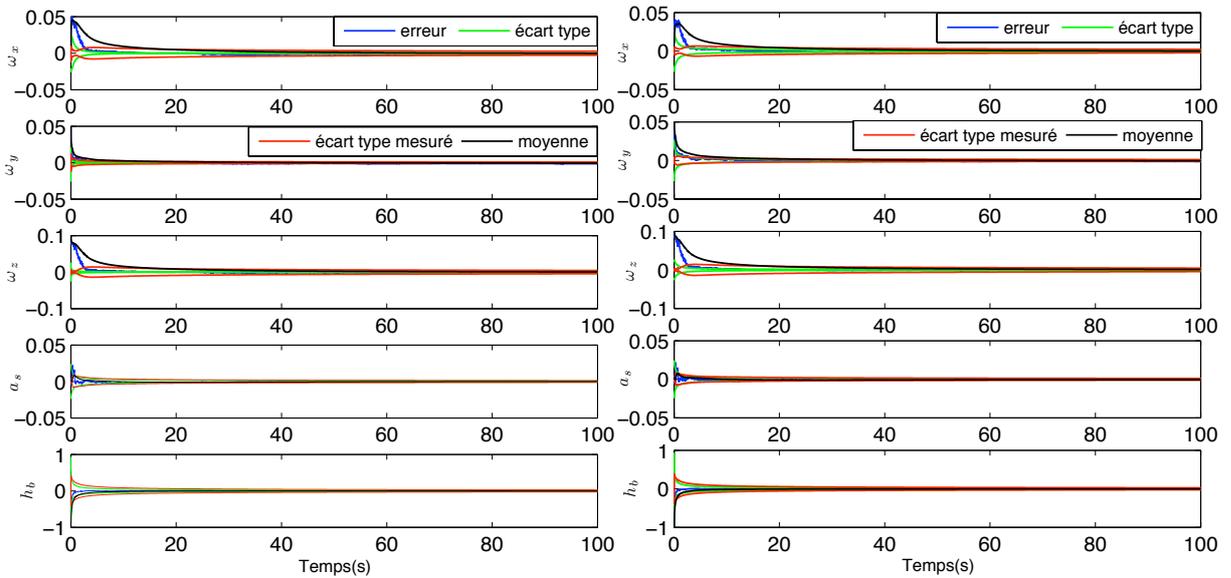


FIGURE 5.14 – Comparaison des écarts types théoriques/mesurés pour le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

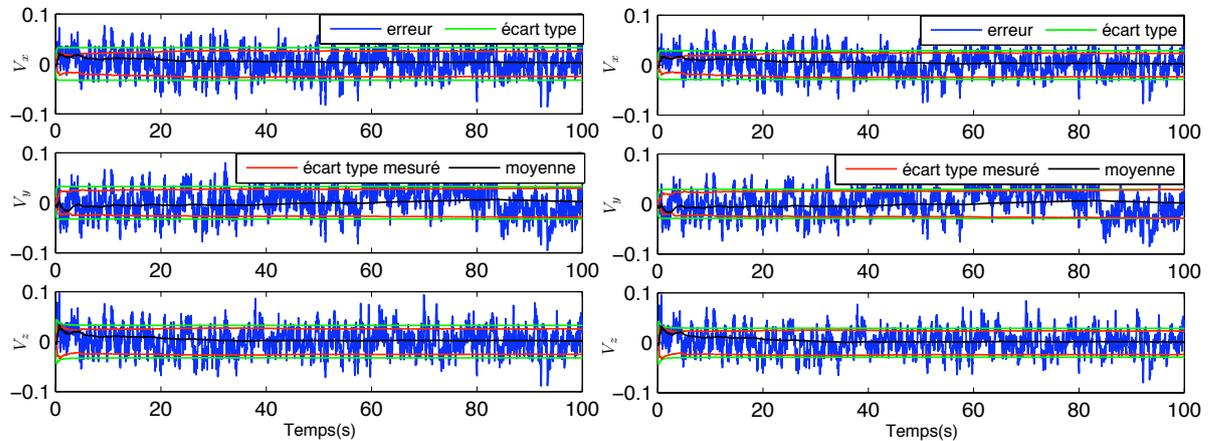
### 5.1 Validation sur données simulées



(a) Résultats fournis par le SRIUKF sur les quaternions (b) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les quaternions



(c) Résultats fournis par le SRIUKF sur les biais (d) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les biais



(e) Résultats fournis par le SRIUKF sur les vitesses (f) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les vitesses

FIGURE 5.15 – Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF et le SRUKF

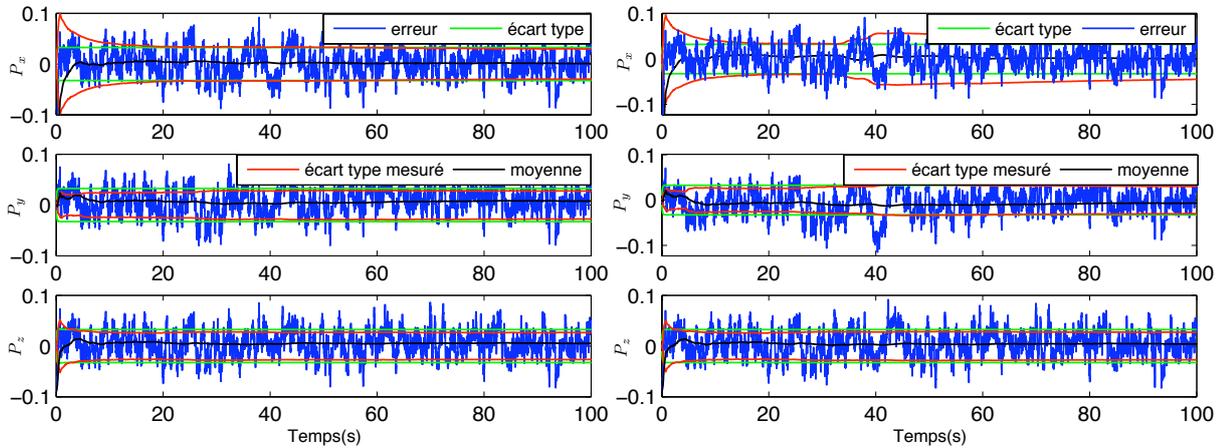

 (a) Résultats fournis par le SRUKF sur les positions (b) Résultats fournis par le  $\pi$ -IUKF sur les positions

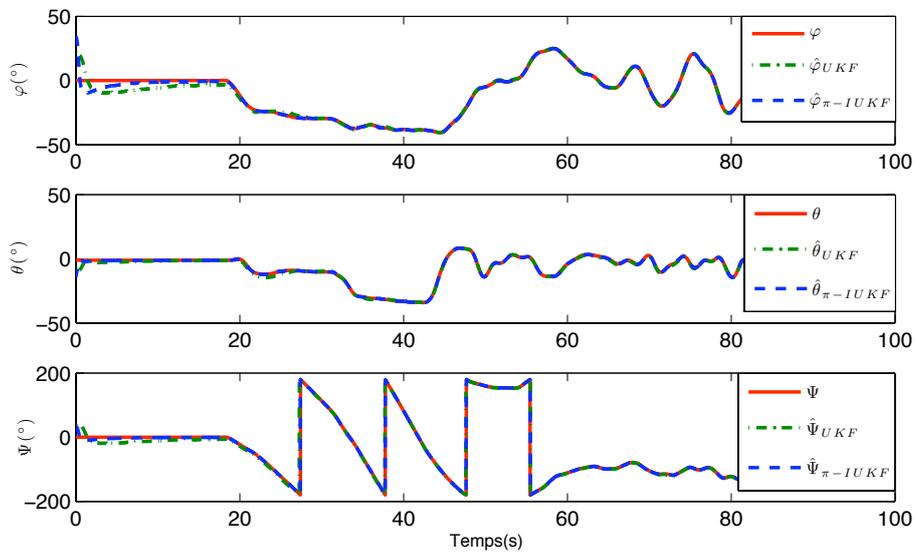
 FIGURE 5.16 – Résultats comparés entre le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

### Introduction d'une erreur initiale sur le vecteur d'état

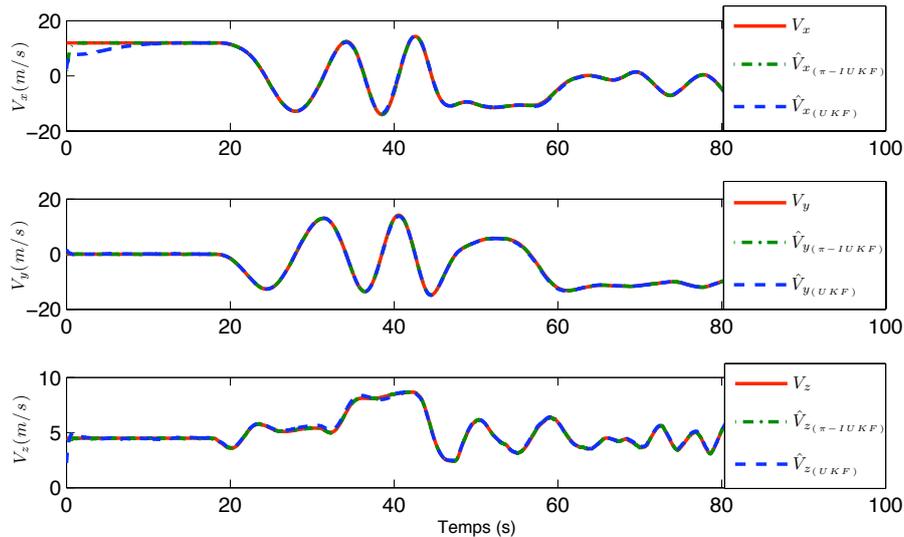
Nous allons à présent introduire une erreur initiale sur le vecteur d'état  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  comme nous l'avons fait pour le modèle de l'AHRS. Pour étudier la convergence de l'état estimé dans des conditions réalistes, nous supposons que le système ne bouge pas pendant une dizaine de secondes. En plus d'une rotation d'angle de  $120^\circ$ , par rapport à la vraie orientation du système, nous supposons que les vitesses à l'instant initial sont loin de leur vraie valeur. Pour finir, en pratique les coordonnées d'un vol peuvent être bien différentes de celles intégrées dans l'algorithme du fait de la précision des cartes de terrain. Pour représenter cette erreur impactant principalement en  $X$  et en  $Y$ , nous supposons que les positions sont à quelques mètres du vrai état. Nous choisissons de définir la covariance de l'erreur d'estimation pour les deux algorithmes à partir des écarts types suivants :  $\sqrt{P_0} = \text{diag}(0.01I_4, 4, 0.8, 0.8, 15, 15, 0.1, 0.002I_3, 0.001I_2)$ . Nous pouvons résumer toutes les conditions initiales dans le tableau suivant :

	VRAI SYSTÈME	ETAT INITIAL
$q_0$	0.99	$\cos(\pi/3)$
$q_1$	0	$\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$
$q_2$	-0.0103	$-\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$
$q_3$	0	$\sin(\pi/3)/\sqrt{(3)}$
$V_x$	14.78	2
$V_y$	0	2
$V_z$	4.75	2
$P_x$	0	50
$P_y$	0	50
$P_z$	567	567

Sur la figure 5.17a, nous constatons que la convergence sur l'angle d'attitude  $\varphi$  est nettement meilleure sur le  $\pi$ -IUKF. Nous passons d'un temps inférieur à 5 secondes pour le  $\pi$ -IUKF à un temps supérieur à 15 secondes pour le SRUKF malgré le fait que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation soit la même. Sur les autres angles d'attitude, les convergences sont comparables. Les vitesses et les positions sont représentées par les figures 5.17b et 5.18. Ces figures illustrent encore une convergence nettement meilleure pour le  $\pi$ -IUKF. Outre le fait que la convergence des deux algorithmes soit effectuée en un temps relativement court, la reconstitution de l'état s'effectue correctement pour les deux algorithmes malgré des valeurs initiales loins de leurs « vraies » valeurs.

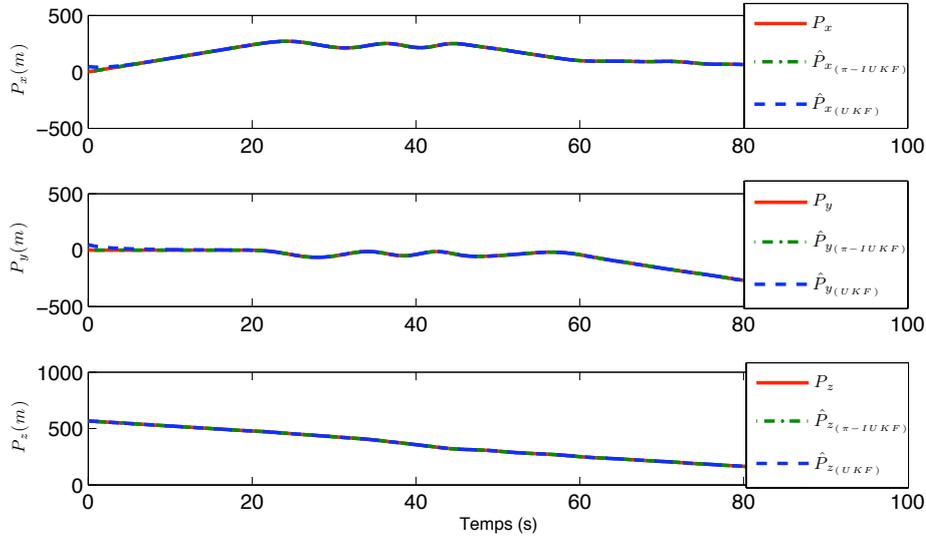


(a) Résultats de l'estimation de l'attitude ( $\varphi, \theta, \psi$ )



(b) Résultats de l'estimation de la vitesse ( $V_x, V_y, V_z$ )

FIGURE 5.17 – Résultats de l'estimation fournis par le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF


 FIGURE 5.18 – Résultats de l'estimation des positions  $(P_x, P_y, P_z)$ 

### 5.1.5 Les propriétés d'invariance du $\pi$ -IUKF appliqué à l'INS

Les propriétés d'invariance obtenues lors de la section précédente sont à mettre en regard de celles que l'on pourrait espérer avec le modèle de l'INS. La section 5.3.1 nous a permis de constater que ces propriétés peuvent être déduites de la manière dont convergent les gains sur l'évolution temporelle des trajectoires du système. Ainsi, nous nous intéressons à l'évolution temporelle des gains obtenus par l'UKF et le  $\pi$ -IUKF dans le cas où le modèle correspond à l'INS. La figure 5.19 compare pour chaque variable d'état, les valeurs des gains matriciels obtenues par le SRUKF avec les valeurs établies par le  $\pi$ -IUKF. En ce qui concerne les quaternions, nous ne retrouvons pas exactement les mêmes propriétés que dans le cas de l'AHRS mais on observe aux travers des gains que les propriétés d'invariance permettent une convergence plus étendue de l'erreur d'estimation de l'état invariante comparativement au SRUKF. A partir du moment où les trajectoires du système deviennent constantes ( $t > 80s$ ), nous retrouvons des gains constants aussi bien pour le SRUKF que pour le  $\pi$ -IUKF. Les figures 5.19b et 5.19c illustrent bien que l'erreur d'état invariante n'est plus autonome comme c'est le cas pour le modèle AHRS.

Pour les deux modèles, les résultats en simulation ne permettent pas de mettre en évidence ni de fortes incohérences sur le  $\pi$ -IUKF quant à la manière dont convergent les covariances des erreurs d'estimation, ni de meilleures performances du  $\pi$ -IUKF par rapport à l'algorithme SRUKF. Néanmoins, nous avons constaté dans les sections 5.1.3 et 5.1.5 que le  $\pi$ -IUKF a un avantage, et non des moindres, par rapport à l'UKF en terme de convergence. Les différents résultats d'estimation en simulation ont été encourageants et nous ont permis de passer à des cas expérimentaux.

## 5.1 Validation sur données simulées

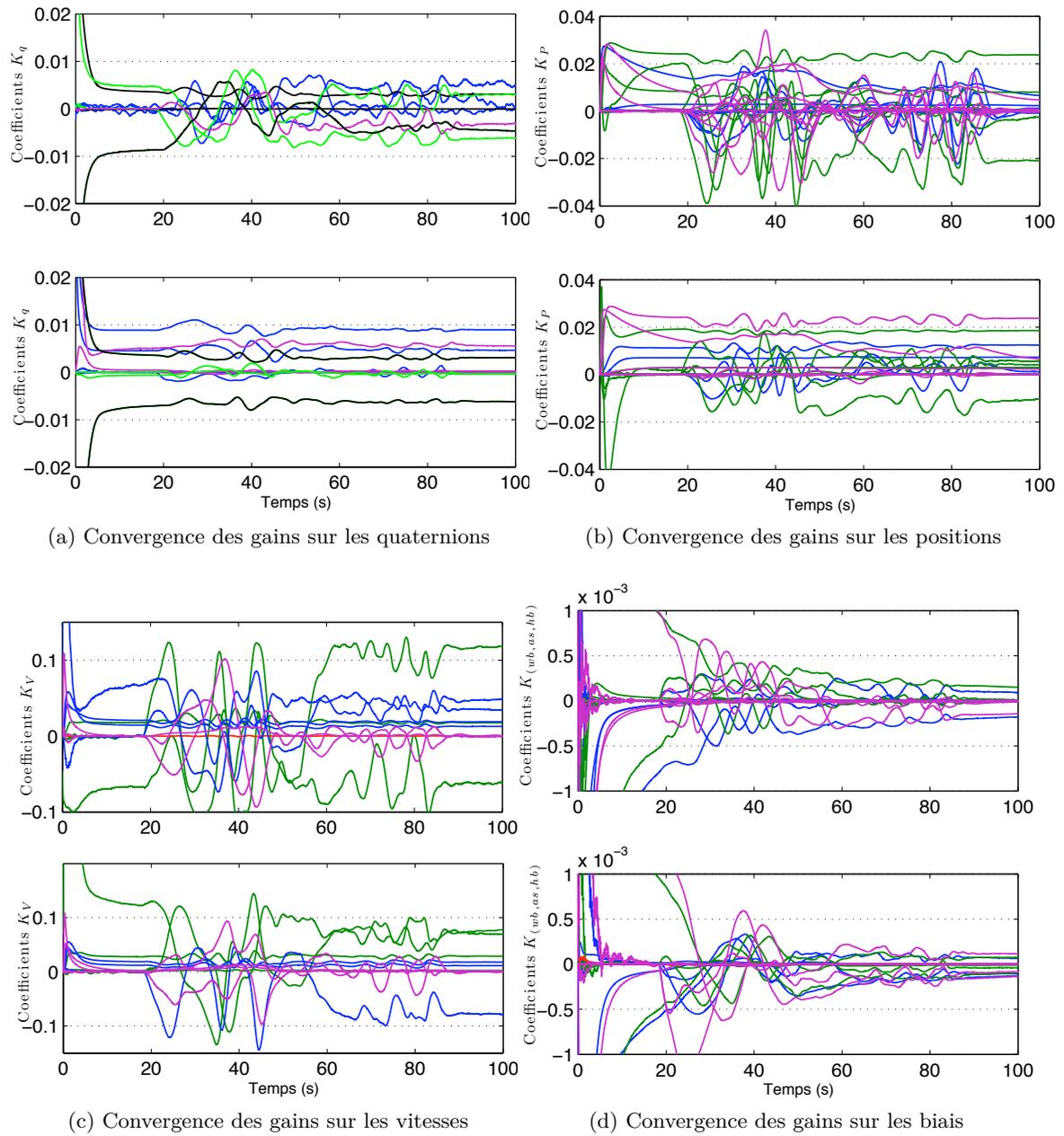


FIGURE 5.19 – Résultats de la convergence des coefficients  $K$  fournis par le SRUKF (vignette du haut) et le  $\pi$ -IUKF (vignette du bas)

## 5.2 Validation sur données réelles

Dans cette section, nous proposons une validation expérimentale des performances d'estimation de la navigation d'un mini-drone, basée soit sur le modèle complet d'un AHRS ou bien sur le modèle complet d'un INS. Pour ce faire, nous disposons d'une centrale inertielle élaborée à l'ENAC, qui fournit en sortie les mesures d'accélération, de champ magnétique, d'altitude et de vitesse angulaire. En complément de la centrale inertielle, nous utilisons deux antennes de géolocalisation, un GPS Ublox 6H de faible précision minuscule d'une antenne passive qui sera utilisée pour la navigation du mini-drone ( en vitesse et position) et un GPS Ublox 6T muni d'une antenne active Novatel de haute précision nous permettant d'obtenir, après post-traitement des codes et des phases (cf. Chapitre 1) par le logiciel RTKLIB , des vitesses et des positions du micro-drone que nous considérerons comme une référence de comparaison.

Après avoir illustré les performances globales du  $\pi$ -IUKF sur le modèle d'un AHRS, nous proposons, dans une première partie d'illustrer par un essai expérimental préliminaire les performances de l'observateur invariant sur le modèle d'un INS. Au cours de ce premier essai, nous proposons une méthode permettant d'obtenir un réglage facile des gains qui régissent la dynamique de l'observateur en procédant à une technique dérivée de la logique floue. Dans un deuxième essai, nous validons nos algorithmes au cours du vol d'un micro-drone. Nous consacrons la seconde et dernière partie de ce chapitre à une analyse de performance des estimations de position et de vitesse en comparant les différents algorithmes aux mesures fournies par le DGPS.

### 5.2.1 Outils et dispositifs expérimentaux utilisés

Afin de valider expérimentalement les performances des trois algorithmes proposés dans le chapitre 4, nous avons opté pour l'utilisation de mesures inertielles, magnétiques et altimétriques réelles, mesurées directement sur le mini-drone. Ces données sont fournies à partir d'une carte

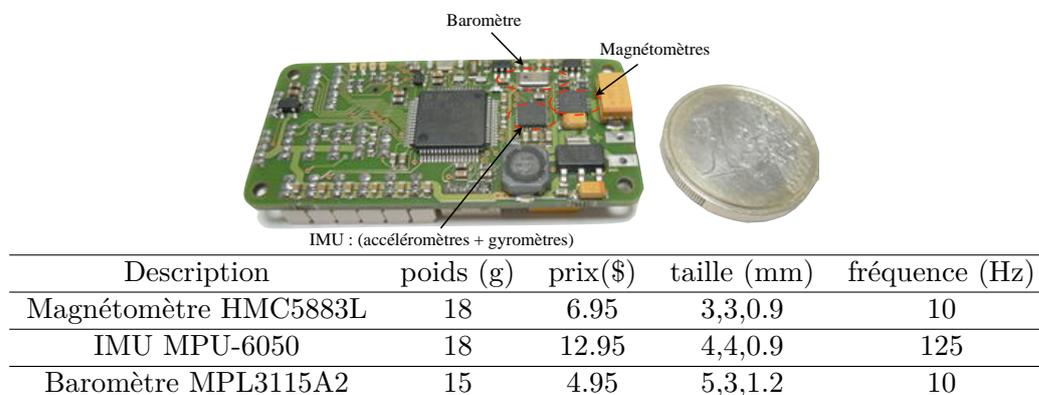


FIGURE 5.20 – Carte autopilote Apogee

auto-pilote *Paparazzi*<sup>10</sup>, dénommée Apogee, représentée sur la figure 5.20, disposant d'une IMU, d'un magnétomètre ainsi que d'un baromètre. L'étude menée à la fin du chapitre 2 autour des capteurs MEMS à bas-coût, nous a permis de choisir les différents modèles des capteurs proposés dans le tableau de la figure 5.20. Enfin, l'antenne Novatel représentée sur la figure 5.21 devra être positionnée sur un drone de moyenne taille du fait de son poids qui avoisine les 150 g.



FIGURE 5.21 – Antenne Novatel.

En plus des différentes sorties permettant le contrôle de l'appareil, l'Apogee a l'avantage de disposer d'une mini carte SD permettant l'acquisition en temps réel des données numériques de sortie à savoir l'accélération, la vitesse angulaire échantillonnée à une fréquence de 125hz pour les mesures inertielles et 10hz pour les deux autres mesures. Comme le représente la figure 5.22, cette unité d'acquisition sera placée au centre de l'appareil et connectée à un GPS fournissant une mesure de la position et de la vitesse à une fréquence de 5hz. Les résultats présentés dans la suite

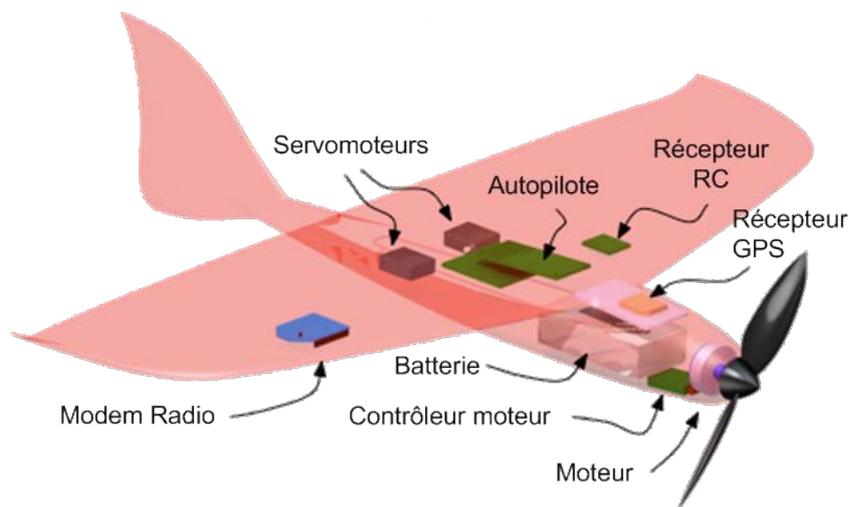
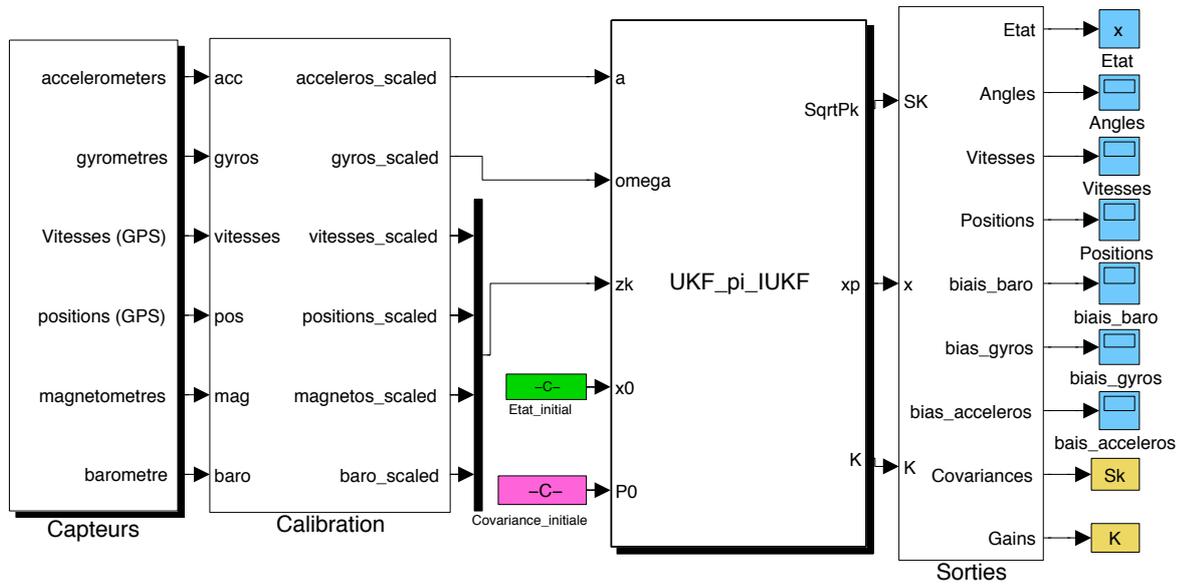


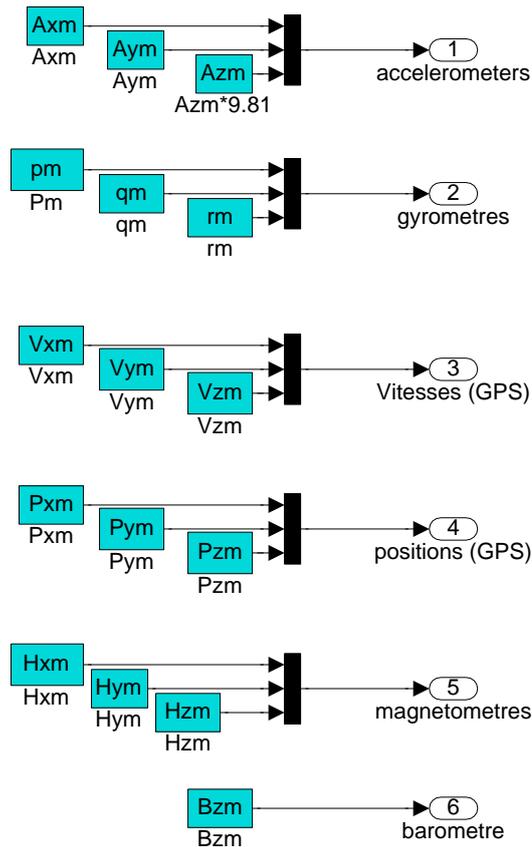
FIGURE 5.22 – Descriptif des différents composants embarqués sur un mini-drone à aile fixe

de ce mémoire ont donc été réalisés dans l'environnement de simulation MATLAB/SIMULINK à partir de données réelles fournies par la carte. La figure 5.23, présente le modèle Simulink dans lequel les mesures physiques sont par la suite calibrées puis envoyées au filtre dont l'état de sortie est représenté par le vecteur «  $x$  ».

10. [www.wiki.paparazziuav.org](http://www.wiki.paparazziuav.org)



(a)



(b)

FIGURE 5.23 – Schéma Simulink représentant l'acquisition et la calibration des mesures ainsi qu'une vue d'ensemble des entrées/sorties des filtres SRUKF et  $\pi$ -IUKF.

### 5.2.2 Identification préliminaire des imperfections sur les capteurs inertiels

Dans le prolongement de la méthode de la variance d'Allan présentée lors du chapitre 3, nous cherchons ici à identifier l'imperfection des capteurs inertiels de façon à représenter le mieux possible leurs défauts. En effet, comme il a été présenté à la section 5.1.1, les deux modèles AHRS et INS ont sur leurs équations d'évolution et d'observation des bruits additifs pour lesquels nous devons déterminer précisément les densités spectrales  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  associées respectivement aux bruits sur les états et sur les sorties du modèle. Afin d'extraire ces caractéristiques, nous avons procédé à un enregistrement de 20 heures de données statiques sur les accéléromètres et les gyromètres à une fréquence de  $100\text{hz}$  pour extraire graphiquement la variance d'Allan. Pour les autres capteurs tel que le baromètre, le magnétomètre et le GPS, nous avons déterminé les écarts types à partir d'un enregistrement plus court qui nous a permis de tracer la distribution gaussienne des bruits. Dans un premier temps, la covariance sur les bruits de mesure  $R$  est classiquement identifiée pour chaque capteur à partir du critère établi dans l'équation 5.3. Ces valeurs sont données dans les tableaux 5.2 et 5.3 et montrent que la densité spectrale  $\mathbf{R}$  (en  $\mu g$  ou  $^\circ/s/\sqrt{\text{Hz}}$ ) donnée par le constructeur est soit sur- ou sous-évaluée par rapport à leurs vraies valeurs. A noter que l'écart-type des mesures fournies par les magnétomètres et le baromètre, a été évalué respectivement à  $0.0031\text{Gauss}$  et  $0.8\text{m}$ . Sur la figure 5.25, nous pouvons remarquer que les bruits sont tous de densité quasi-gaussienne ce qui respecte bien les hypothèses énoncées au chapitre 2 sur le filtre de Kalman.

	Biais statique	$\sigma$	$R(\text{mesurée})$	$R(\text{fabricant})$	$Q$
$a_{xm}$	0.142	0.0319	325	400	$3.3e^{-4}$
$a_{ym}$	-0.3	0.0985	1000	400	$3.2e^{-4}$
$a_{zm}$	0.19	0.049	500	400	$5.2e^{-4}$
$\omega_{xm}$	-1.55	0.0825	0.0083	0.0224	$1.4e^{-4}$
$\omega_{ym}$	-1.13	0.1673	0.0167	0.0224	$2.66e^{-4}$
$\omega_{zm}$	-1.7	0.2214	0.0221	0.0224	$3.16e^{-4}$

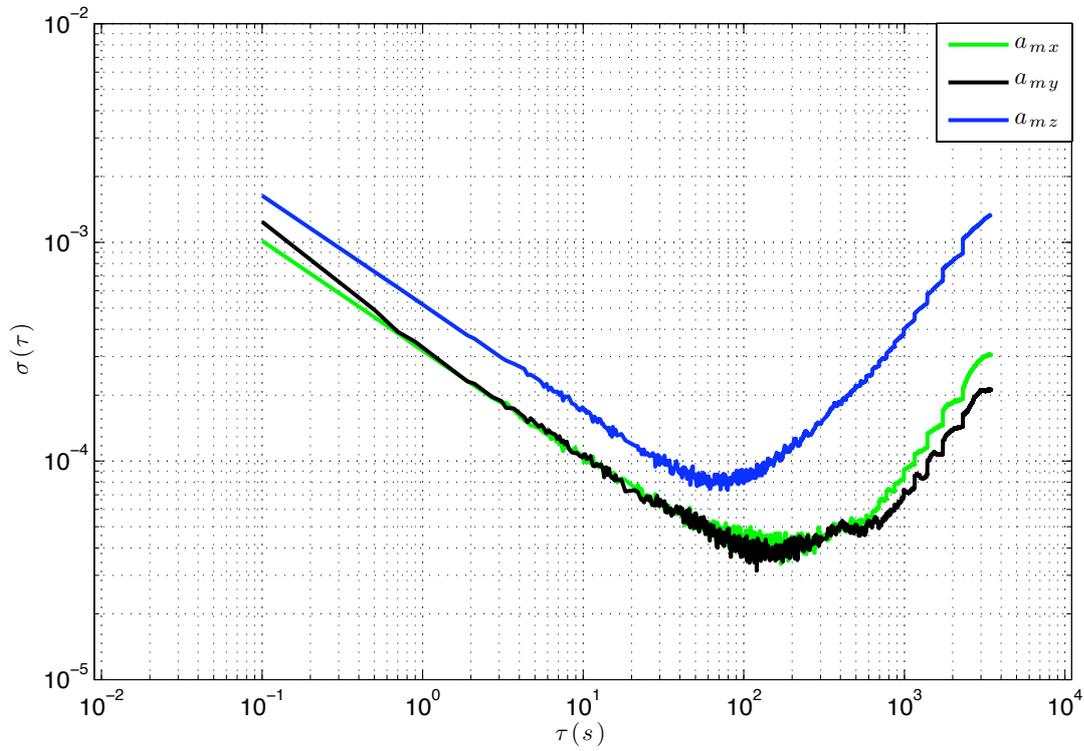
TABLE 5.2 – Variance et biais statiques des mesures fournies par l'Apogee.

GPS	$\sigma$
X	0.88 m
Y	1.45 m
Z	20.29 m
$V_X$	0.248 m/s
$V_Y$	0.146 m/s
$V_Z$	0.280 m/s

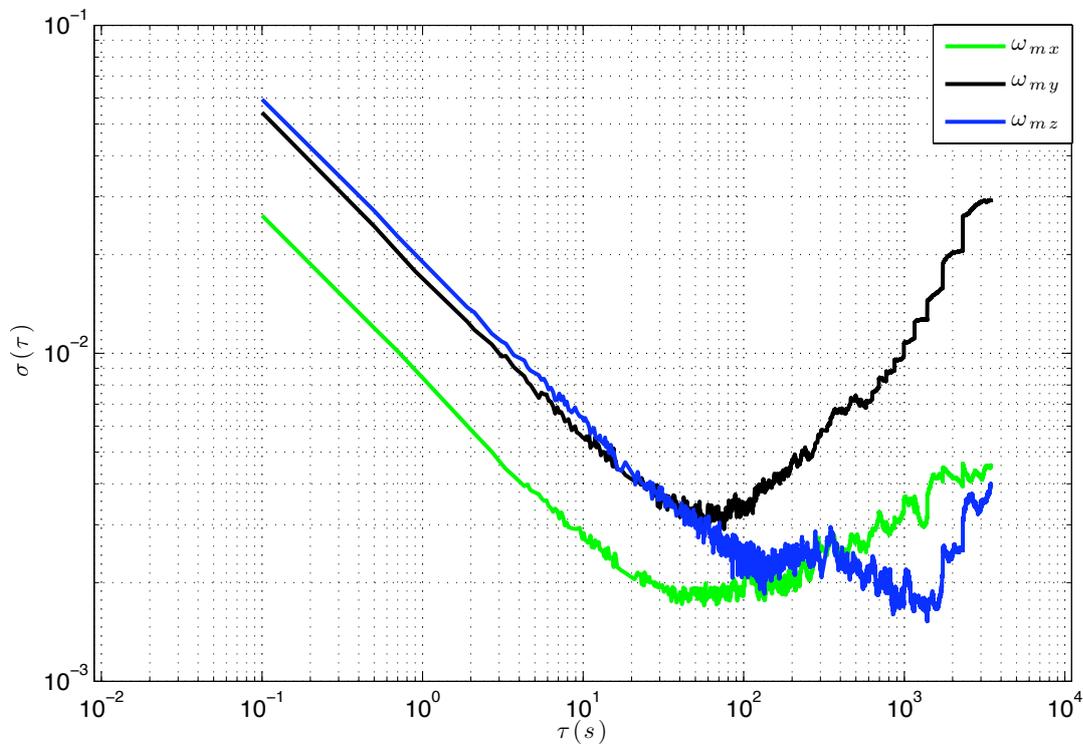
TABLE 5.3 – variances des mesures du GPS.

Nous procédons dans un deuxième temps à l'étude de la variance d'Allan pour déterminer les valeurs de  $\mathbf{Q}$  associées à la densité spectrale du bruit sur l'état pour les capteurs inertiels. Les équations de la variance d'Allan présentées au cours du chapitre 3 permettent d'extraire à partir d'un tracé temporel les différentes variances présentées dans le signal bruité. Ainsi, en prenant le point caractéristique  $\tau = 1$ , nous trouvons directement  $\sigma_{ARW/VRW} = \mathbf{Q}$  identifié sur la courbe par l'enveloppe de pente  $-1/2$ . Les figures 5.24a et 5.24b présentent le tracé temporel des différentes variances d'Allan pour les 3 axes du gyroscope et de l'accéléromètre. Ces valeurs seront prises en compte dans le réglage du SRUKF et du  $\pi$ -IUKF dans toute la suite de notre

étude sur données réelles.



(a) Variance d'Allan pour les mesures de l'accéléromètre



(b) Variance d'Allan pour les mesures du gyromètre

FIGURE 5.24 – Variance d'Allan pour chaque axe de l'accéléromètre et du gyromètre

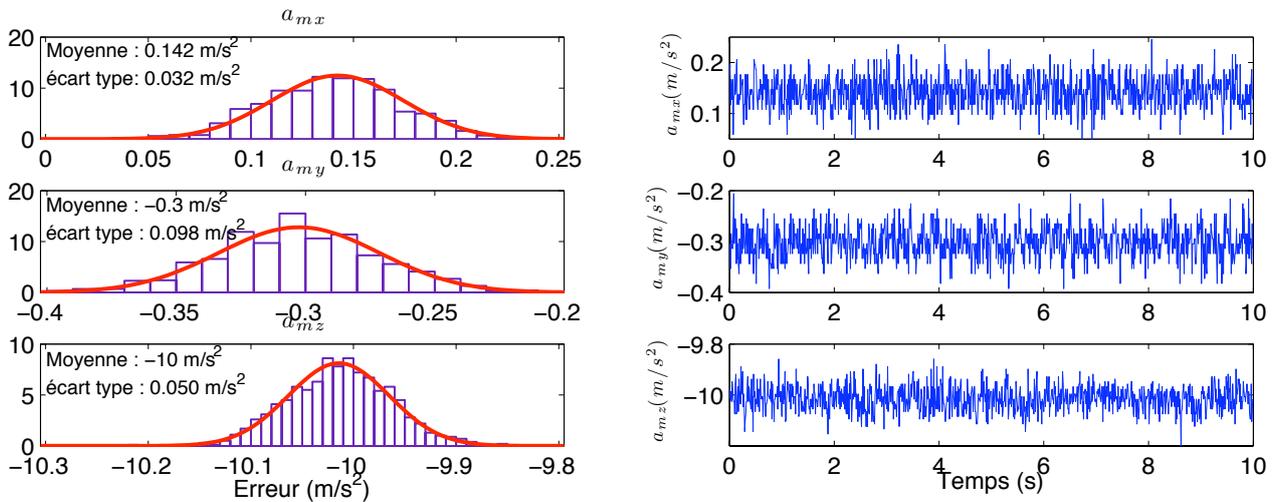
Comme nous l'avons vu au travers des différentes analyses de la variance d'Allan, les imperfections des capteurs inertiels telles que les bruits, peuvent être caractérisées sur toute la plage de fréquence aussi bien à court terme qu'à long terme. Toutefois, cette technique reste insuffisante pour identifier les bruits haute fréquence tels que les vibrations lors des manoeuvres en vol. Dans la littérature, la méthode la plus courante reste le débruitage par ondelette {Alpert, 1992} pour améliorer le rapport signal sur bruit. Néanmoins, dans notre cadre d'application, il nous est impossible d'utiliser une telle technique du fait qu'elle engendre des calculs trop onéreux. Pour étudier ce problème, nous avons fait une analyse en fréquence grâce à une étude du spectre de Fourier du signal, calculé sur des données réelles à partir des bruits enregistrés sur les gyromètres et les accéléromètres au cours des différentes phases de vol (attente, décollage, vol en palier et atterrissage). La figure 5.26 présente l'évolution des mesures de vitesse angulaire et des mesures d'accélération enregistrées par la mini carte SD au cours du vol que nous avons analysé. Nous avons identifié 4 phases : 1) l'attente, 2) le décollage 3) le vol en palier 4) l'atterrissage, le tout sur une durée de 400 secondes. A noter que ces phases sont bien distinctes à travers les bruits sur la mesure de l'accéléromètre  $a_{mx}$ . La figure 5.27 illustre cette analyse effectuée sur un axe, avec une fréquence d'échantillonnage de 250hz et permet de déterminer la bande de fréquence utile en dehors de toute vibration causée par l'engin. Ainsi, à partir de l'analyse des trois axes des accéléromètres et des gyromètres, nous avons réglé le filtre passe-bas interne à chaque capteur inertiel à une fréquence de coupure de 20Hz.

### 5.2.3 Procédure de calibration des capteurs embarqués sur l'Apogee

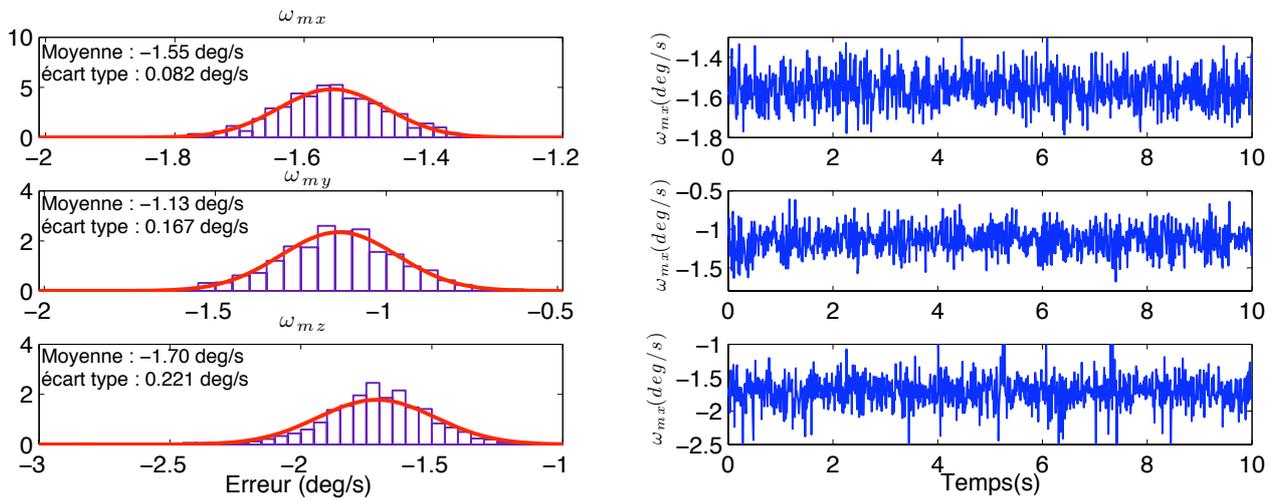
Avant de procéder à une reconstitution de l'état sur données réelles, il est nécessaire de déterminer les valeurs de calibration qui nous permettront pour chacun des capteurs d'avoir des valeurs cohérentes sur leurs sorties. Cette étape permet aussi de cibler un ensemble de caractéristiques propres à l'environnement comme par exemple le champ magnétique du lieu où l'on se trouve. Ce processus consistera donc à trouver pour chaque capteur de l'IMU un ensemble de biais déterministes et de facteurs d'échelle. Pour cela, une modélisation générale peut être décrite pour chaque axe du capteur par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \zeta_{m_x} \\ \zeta_{m_y} \\ \zeta_{m_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{f_x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{f_y} & 0 \\ 0 & 0 & S_{f_z} \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \zeta_{t_x} \\ \zeta_{t_y} \\ \zeta_{t_z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \quad (5.4)$$

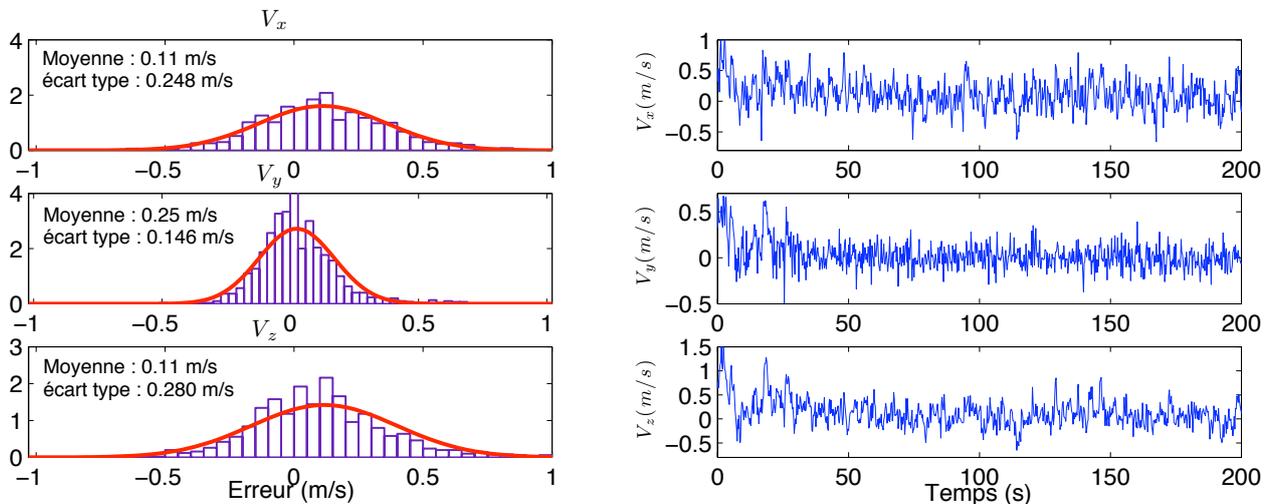
où  $\zeta_m$  correspond à la mesure délivrée par le capteur et  $\zeta_t$  est la « vraie » mesure à l'instant  $t$ .  $S_f$  et  $b$  seront respectivement un facteur d'échelle et un biais déterministe à déterminer pour chaque composante de la mesure.



(a) Distributions et écarts types des bruits de mesure de l'accéléromètre



(b) Distributions et écarts types des bruits de mesure du gyromètre



(c) Distributions et écarts types des bruits de mesure de la vitesse

FIGURE 5.25 – Distributions et écarts types des bruits de mesure

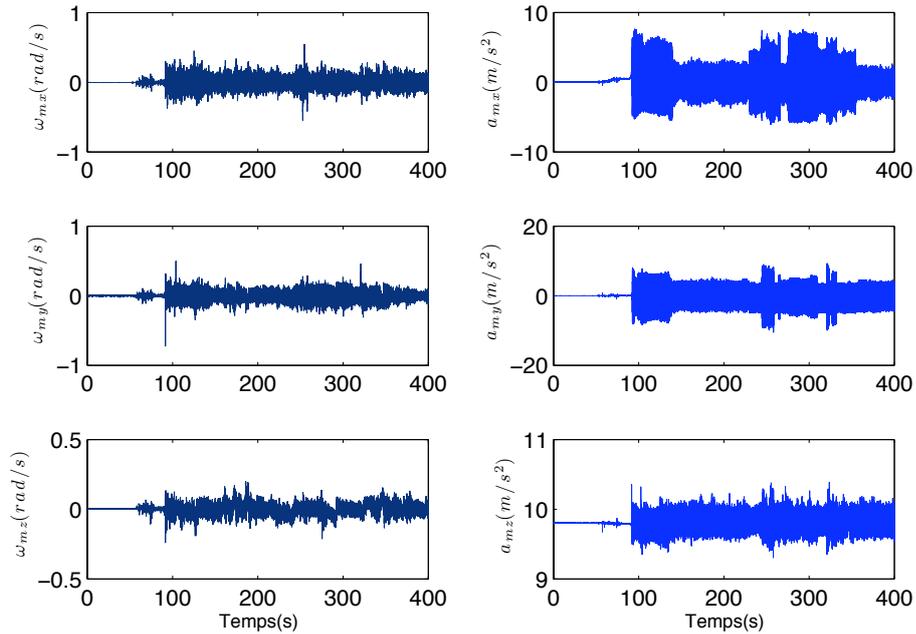


FIGURE 5.26 – Mesure de vitesse angulaire et d'accélération

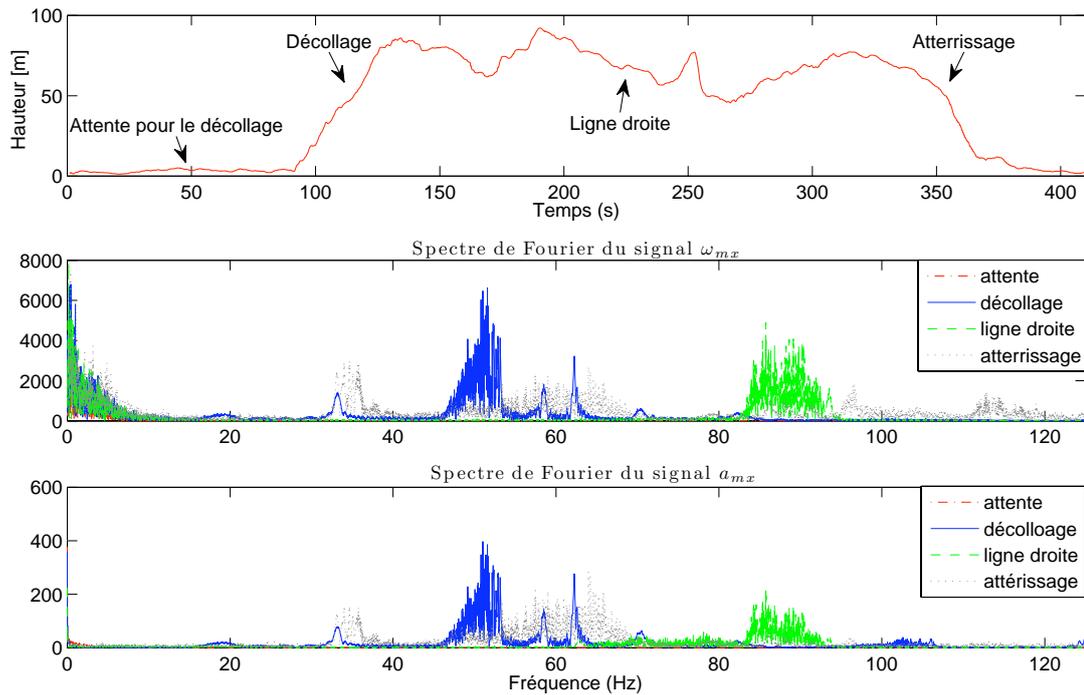


FIGURE 5.27 – Spectre de Fourier des signaux  $\omega_{m_x}$  et  $a_{m_x}$  étudié lors de plusieurs phases de vol

### Calibration des accéléromètres

Le principe de calibration des accéléromètres est effectué de la façon suivante. A partir de l'équation 5.4, nous pouvons projeter le vecteur accélération  $A$  du repère terrestre dans le repère

de l'avion de la manière suivante :

$$q^{-1} * A * q = \begin{pmatrix} S_{f_{ax}} & 0 & 0 \\ 0 & S_{f_{ay}} & 0 \\ 0 & 0 & S_{f_{az}} \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \zeta_{tax} \\ \zeta_{tay} \\ \zeta_{taz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{pmatrix} \right] \quad (5.5)$$

où  $A$  est le vecteur d'accélération de la pesanteur exprimé dans le repère terrestre tel que  $A = (0 \ 0 \ -9.81)^T$ . Nous pouvons remarquer que l'équation 5.5 effectue un changement d'orientation du véhicule tout en conservant la norme des vecteurs qui la composent. Ainsi, en prenant la norme de cette équation, le processus de calibration consiste à évaluer une équation scalaire qui ne dépend plus de l'orientation du véhicule. Nous avons donc la relation suivante qui contient 6 variables de calibration :

$$9.81^2 = (S_{f_{ax}}(\zeta_{tax} - b_{ax}))^2 + (S_{f_{ay}}(\zeta_{tay} - b_{ay}))^2 + (S_{f_{az}}(\zeta_{taz} - b_{az}))^2 \quad (5.6)$$

A partir d'un nombre important de mesures prises dans toutes les positions du drone, nous pouvons trouver l'ensemble des 6 variables qui composent la calibration et pour lesquelles nous avons une norme proche de la moyenne du vecteur gravité. Cette opération sera effectuée par un algorithme d'optimisation implémenté en langage Python dans *Paparazzi*.

### Calibration des magnétomètres et des gyromètres

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 3, le champ magnétique terrestre est différent selon l'endroit où l'on se trouve sur Terre. A cause de cela, une calibration du magnétomètre doit être effectuée à chaque endroit où l'on aura l'intention de voler. Pour les magnétomètres, ce n'est pas seulement la norme à l'initialisation qui nous intéresse mais la valeur de chaque composante. A partir d'un nombre important de mesures prises en orientant le drone dans toutes les positions, le même algorithme d'optimisation que celui utilisé pour calibrer les accéléromètres permet graphiquement de replacer les points de mesure sur la sphère unité (cf. Figure 5.28). Ainsi, nous pouvons obtenir le facteur d'échelle et les biais à appliquer à l'ensemble des composantes.

Pour finir, la calibration des gyromètres consistera uniquement à déterminer les valeurs de biais déterministes de chaque composante notée  $b_{g(x,y,z)}$  tel que :

$$b_{mg(x,y,z)} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \zeta_{mg}(k) \quad (5.7)$$

où  $N_s$  représente le nombre d'échantillons et  $\zeta_{mg(x,y,z)}(k)$  représente la mesure à l'instant  $k$  d'une composante  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

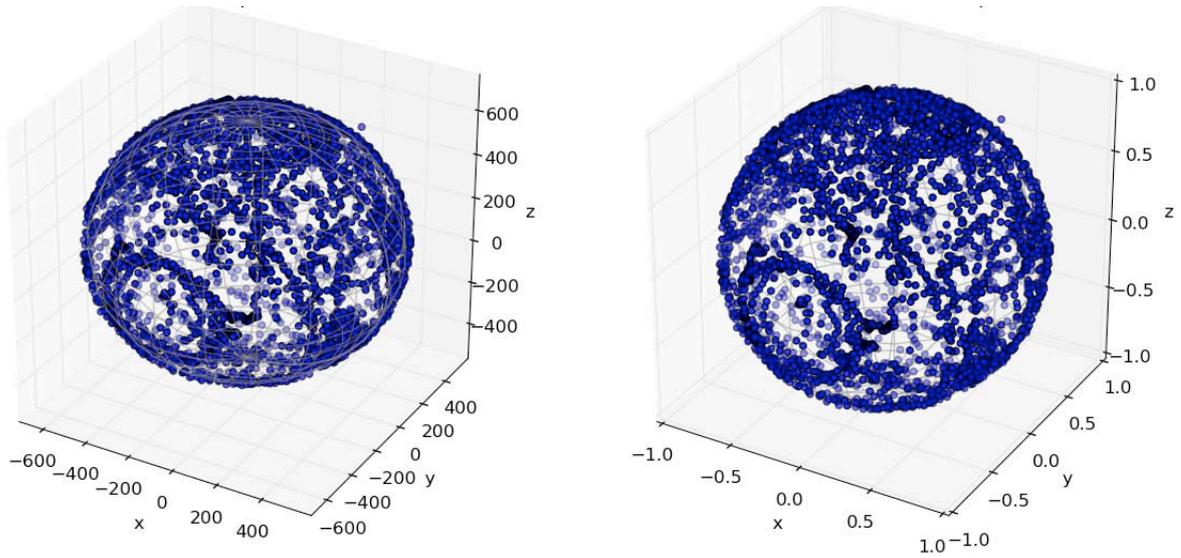


FIGURE 5.28 – Calibration des magnétomètres

#### 5.2.4 Mise en œuvre expérimentale du $\pi$ -IUKF sur un modèle AHRS

Afin d'examiner les performances globales du SRUKF et du  $\pi$ -IUKF sur données réelles, nous avons choisi un vol dont l'amplitude des angles d'attitude, de la position et de la vitesse soit suffisamment grande pour évaluer les techniques d'estimation proposées. Ce vol sera composé de quatre phases : 1) une attente ( $0 < t < 50s$ ), 2) un décollage ( $72s < t < 80s$ ), 3) un hippodrome ( $80 < t < 120s$ ), 4) un atterrissage ( $120 < t < 140s$ ), le tout sur une durée de 140 secondes.

Nous procédons tout d'abord à l'étude de la convergence des biais dans la phase d'attente où le drone est au repos, moteur éteint, pendant 50 secondes en l'orientant dans l'espace de façon quelconque. Les mesures inertielles et magnétiques enregistrées durant cette période sont fournies aux différents filtres proposés dans la section précédente pour reconstruire l'attitude de l'avion. La figure 5.29 décrit les différentes convergences entre le biais estimé et le biais réel que nous avons pu extraire des données enregistrées. Cette figure confirme les résultats déjà obtenus dans la section 5.1.2 et donne des valeurs d'estimation du biais, pour les deux filtres, correctes après un transitoire qui est un peu plus perturbé pour le filtre SRUKF.

Lors de la deuxième période de ce vol, nous considérons une situation dynamique dans laquelle l'avion est pris en main entre 54 et 60 secondes et où le moteur est allumé quelques secondes avant que l'avion ne soit lancé à  $t = 72$  secondes ; par suite, l'avion effectue un hippodrome entre 80 et 120 secondes pour finalement atterrir et toucher le sol à  $t = 140$  secondes. Les performances globales de l'estimation de l'attitude sont tracées sur la figure 5.30 pour le filtre SRUKF et  $\pi$ -IUKF. Nous remarquons, à partir de cette figure, que les estimations fournies par les deux algorithmes sont très proches durant toute la phase dynamique. Nous retrouvons bien les points caractéristiques de cette phase, à savoir le pic du décollage à  $t = 72$  secondes représenté

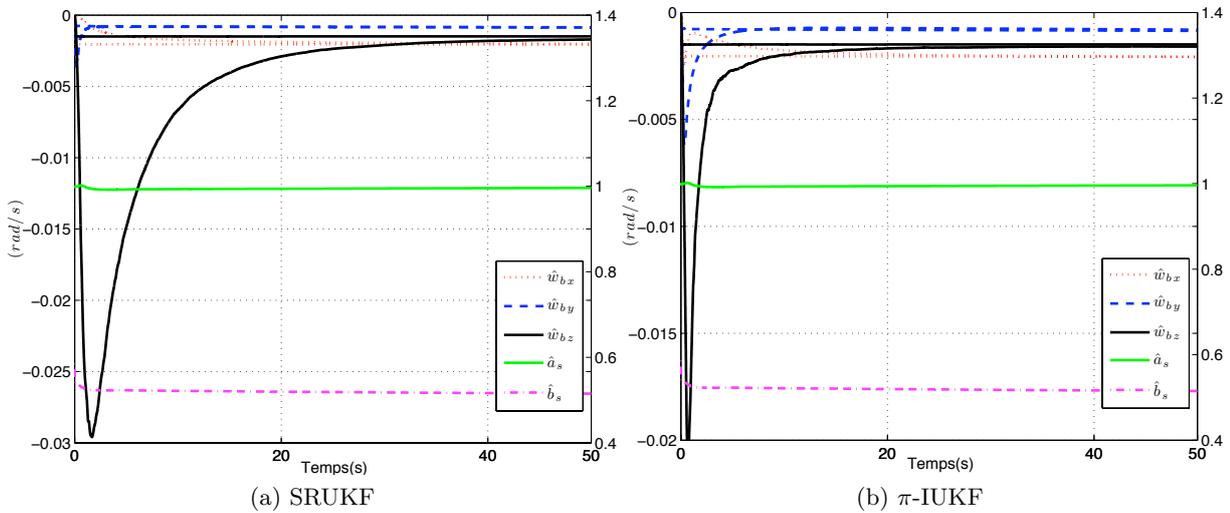


FIGURE 5.29 – Résultats de la convergence des biais et des facteurs d'échelles fournis par le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

sur les axes de roulis et de tangage, le changement de cap effectué sur toute la trajectoire de l'hippodrome et enfin l'atterrissage qui se termine avec un lacet pratiquement identique à celui du décollage, ce qui signifie bien que l'avion est revenu en position initiale.

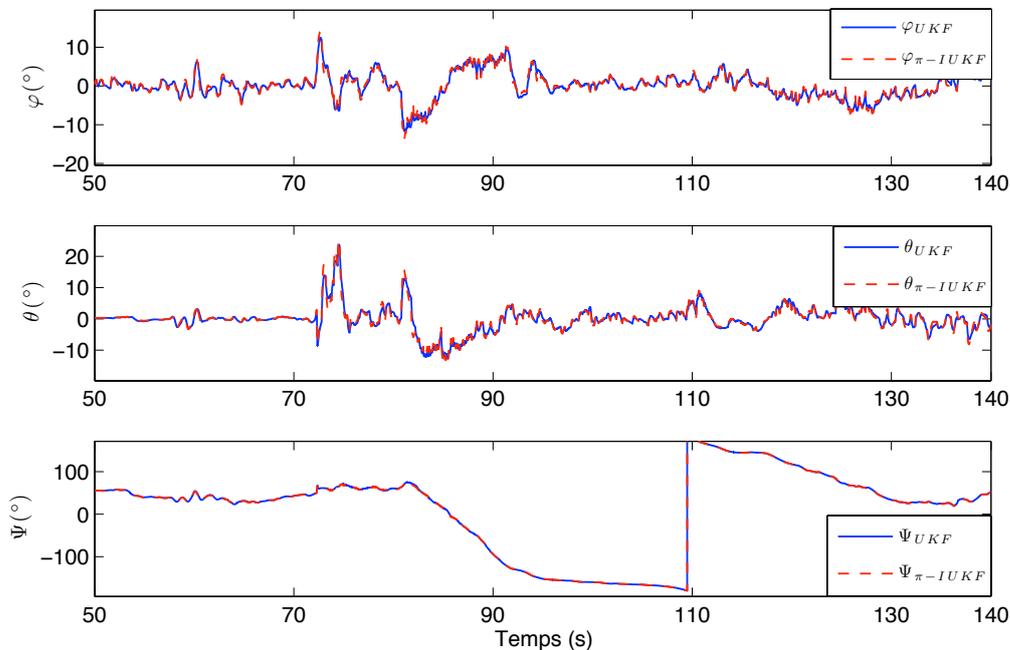


FIGURE 5.30 – Résultats de l'estimation des angles d'attitude

Nous étudions à présent la convergence des gains du filtre  $\pi$ -IUKF et UKF pour valider, sur données réelles, les propriétés d'invariance de notre nouvel algorithme. La figure 5.31 donne

les différents coefficients matriciels  $\mathbf{K}$  obtenus par le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF. Ces résultats font apparaître les propriétés d'invariance du  $\pi$ -IUKF que nous retrouvons tout comme à la section 5.1.3.

Tout d'abord, nous avons des gains constants pour les deux filtres sur la phase d'attente qui est une trajectoire permanente. Nous pouvons voir très clairement que les coefficients calculés par les deux algorithmes présentent des variations dans la phase d'allumage des moteurs entre 55 et 60 secondes ce qui a pour effet de rendre les bruits instationnaires et induire une perte des propriétés d'invariance pendant une courte durée. Par la suite, les coefficients de l'UKF varient au cours du temps alors que ceux du  $\pi$ -IUKF restent constants sur l'ensemble des trajectoires quasi-permanentes définies par  $I(\hat{x}, u) = e$ .

Cela est illustratif d'une part, de performances comparables pour les deux filtres dans la reconstruction de l'orientation de l'engin lors des différentes phases de vol et d'autre part, la capacité du nouvel algorithme à converger sur un domaine plus large que celui de l'UKF. En outre, grâce aux propriétés d'invariance du nouvel algorithme, nous pourrions dans un travail futur extraire des gains constants, les caractéristiques de chaque variable d'état nous permettant ainsi de faire de la détection de panne.

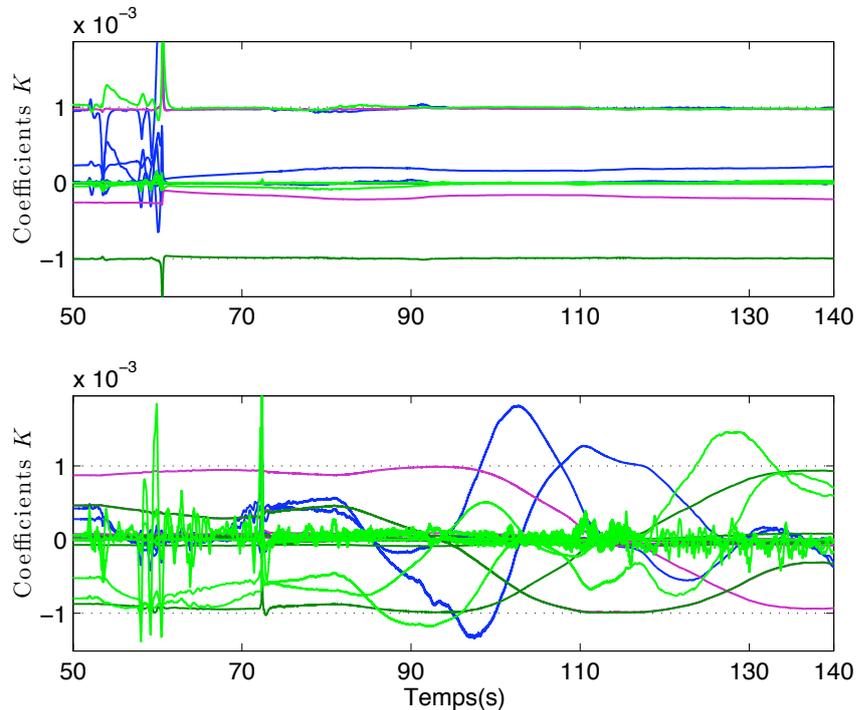


FIGURE 5.31 – Résultats de la convergence des coefficients  $K$  obtenus avec le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF

### 5.2.5 Observateur invariant sur données réelles : méthode de réglage

La présente section propose une méthode de réglage de l'observateur invariant dans le cas où celui-ci est appliqué pour le modèle de l'INS. Comme il a été présenté dans le chapitre 3, le réglage de l'observateur invariant peut s'effectuer à partir d'une étude poussée de la linéarisation des équations d'erreur invariante sur l'état, nous permettant d'obtenir les différents termes matriciels qui régissent la dynamique de chaque sous-système de l'INS. Cette dynamique est assurée localement asymptotiquement convergente vers la « vraie » dynamique, du moment que les gains sont sélectionnés strictement supérieurs à zéro. A partir des équations de l'observateur  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ins}^+}$  présentées dans le chapitre 3, nous devons trouver pour les trois sous-systèmes supposés découplés, 11 gains de réglage déterminant la dynamique de l'observateur. Nous rappelons la forme compacte des équations de l'observateur (en temps continue) qui s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{ins}^+} \begin{cases} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + (L_V E_V + L_B E_B) * \hat{q} \\ \dot{\hat{V}} = \frac{1}{\hat{a}_s} \hat{q} * a_m * \hat{q}^{-1} + A + (M_V E_V + M_h E_h) \\ \dot{\hat{X}} = \hat{V} + (N_X E_X + N_h E_h) \\ \dot{\hat{\omega}}_b = \hat{q}^{-1} * (O_V E_V + O_B E_B) * \hat{q} \\ \dot{\hat{a}}_s = \hat{a}_s (R_V E_V + R_h E_h) \\ \dot{\hat{h}}_b = (S_h E_h) \end{cases}$$

où l'erreur de sortie invariante  $\mathbf{E}$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} E_V \\ E_X \\ E_h \\ E_B \end{pmatrix} = h \left( e = \varphi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{x}), \psi_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{u}) \right) - \rho_{\hat{\mathbf{x}}^{-1}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \hat{V} - y_v \\ \hat{X} - y_x \\ \langle \hat{X}, e_3 \rangle - \hat{h}_b - y_h \\ B - \hat{q} * y_B * \hat{q}^{-1} \end{pmatrix}$$

Toutefois, en pratique, les sous-systèmes de l'INS ne sont pas complètement découplés et le réglage devient alors quasi-impossible étant donné le nombre de variables à considérer. Pour pallier à ce problème, le réglage sera obtenu en construisant une base de connaissance dans laquelle le comportement des différentes variables d'état du système en fonction des réglages des gains sera connu *a priori* grâce à une expertise effectuée hors ligne sur l'observateur, elle-même obtenue à partir d'une multitude de simulations réalisées sur données réelles.

Cette base de connaissance sera par la suite agrégée et représentée graphiquement par une technique dérivée de la logique floue. L'essentiel des éléments permettant de comprendre la logique floue est donnée en annexe B. Ainsi, par exemple, la figure 5.32 illustre quelques évolutions temporelles des angles d'Euler pour différentes simulations effectuées en modifiant les gains de l'observateur invariant. On voit très clairement sur cette figure que l'attitude devient de plus

en plus bruitée, entraînant même des oscillations sur le lacet lorsque les gains sont vraiment très mal réglés. Il est important de noter que le choix du réglage pour une variable d'état n'est pas uniquement le résultat d'une modification d'un gain mais bel et bien le réglage de plusieurs gains modifiés en parallèle du fait du couplage inhérent aux différents sous-systèmes. Ces différentes simulations ne sont donc que des briques qu'il faudra assembler à partir de la logique floue de sorte que l'on ait un résultat satisfaisant pour l'utilisateur. L'appréciation du choix de ces différents réglages sera donc laissée à l'utilisateur du mini-drone qui pourra les modifier en fonction du comportement de l'engin en vol.

Nous avons donc établi à partir de plusieurs dizaines de simulations sur l'observateur invariant, 5 ensembles de décisions floues associés aux gains  $L_v, L_b, M_v, N_x, N_h, O_v, O_b$  représentent 32 règles d'inférence, permettant l'agrégation des conclusions. Ces tableaux sont représentés sur la figure 5.33 avec les acronymes (TL, L, N, B, TB) associés aux termes linguistiques (Très Lent, Lent, Nominal, Bruité, Très Bruité). Les différentes surfaces de réglage représentées sur les figures 5.35 et 5.34 sont le résultat de l'agrégation des ensembles flous obtenus par chacune des règles. Nous pouvons observer que les figures 5.35c et 5.35d donnent un résultat différent pour un même réglage des gains  $O_b$  et  $L_b$ . Il a donc été tout naturel de représenter la surface totale de réglage admissible (cf. Figure 5.35e) en agrégeant ces deux surfaces. Sur la figure 5.34, nous avons représenté le point nominal du réglage par un petit carré. Il est important de préciser que ce point nominal n'est uniquement valable que pour les caractéristiques des capteurs utilisés lors des différentes simulations. Cependant, un capteur fournissant une mesure bruitée différente ne modifierait pas la surface de réglage mais uniquement son point nominal.

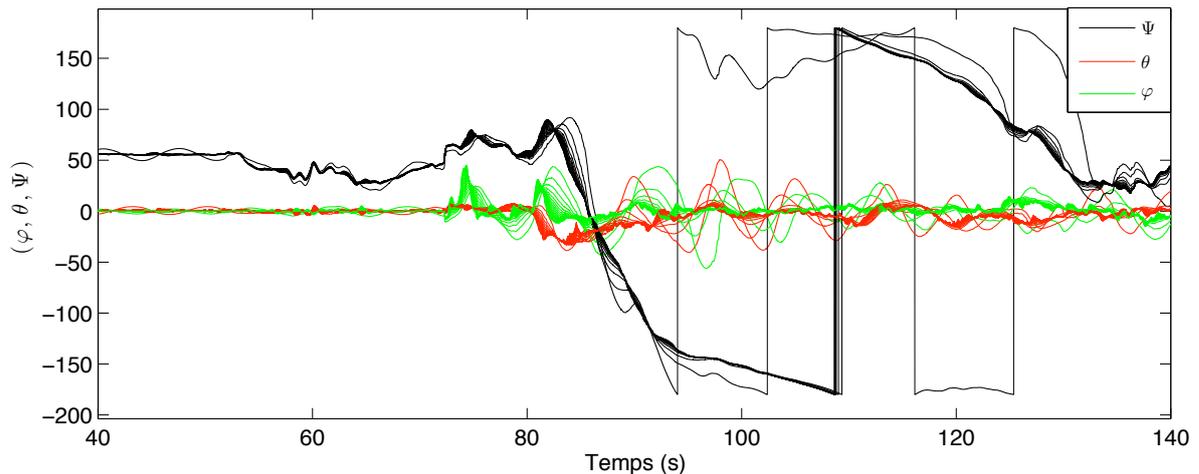


FIGURE 5.32 – Evolutions temporelles des angles d'Euler pour différents gains

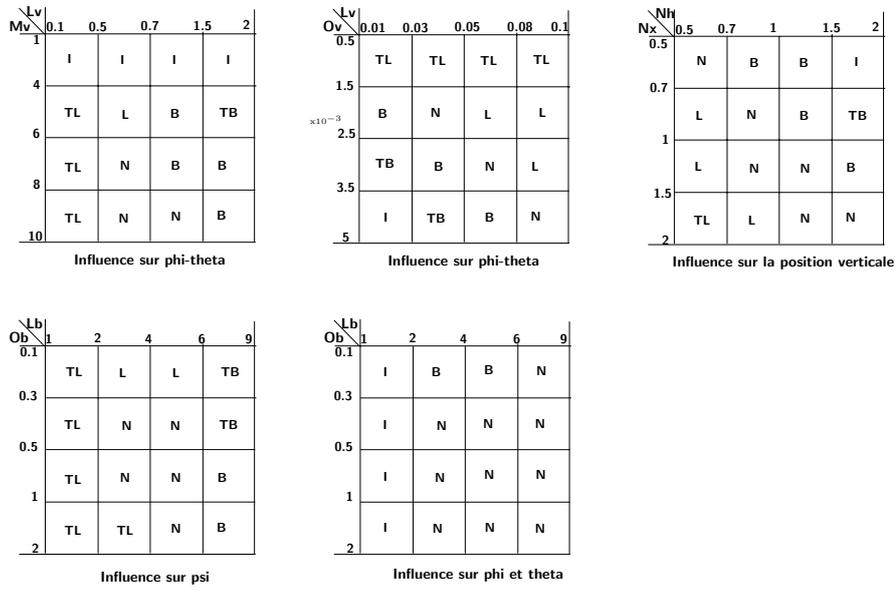


FIGURE 5.33 – Base de connaissance

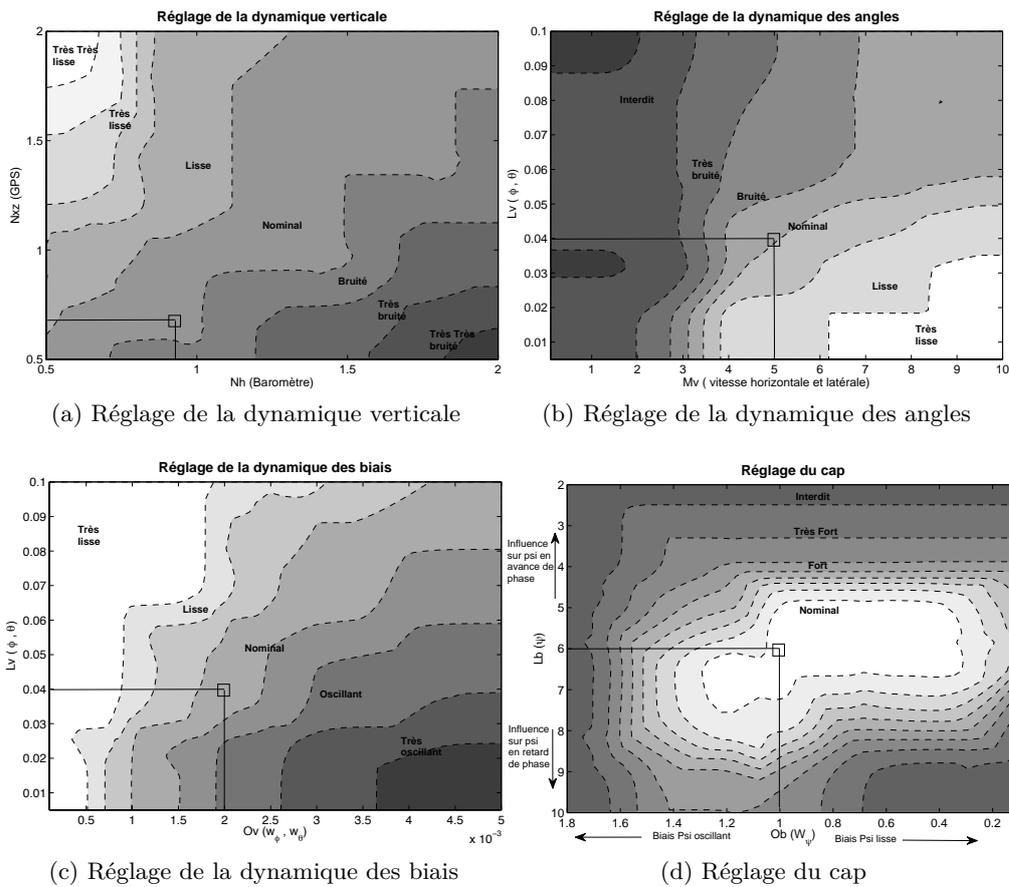
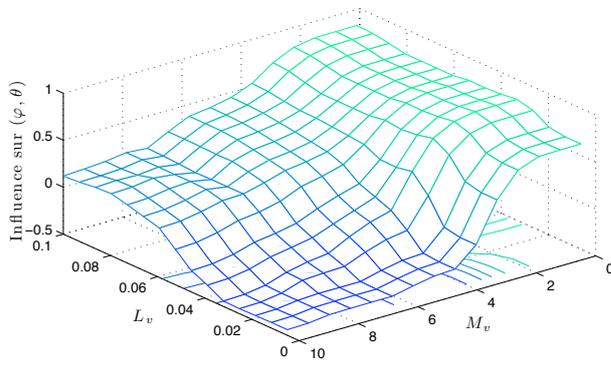
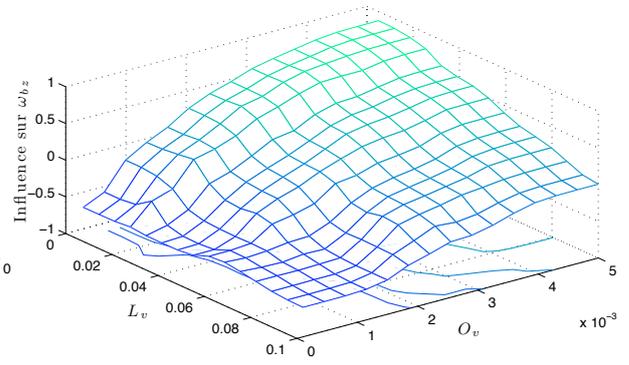


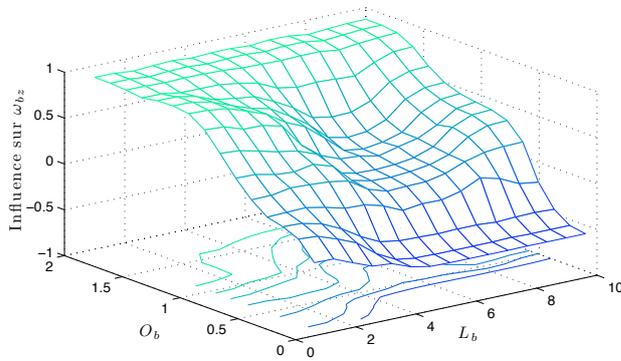
FIGURE 5.34 – Les différents réglages des gains de l'observateur invariant



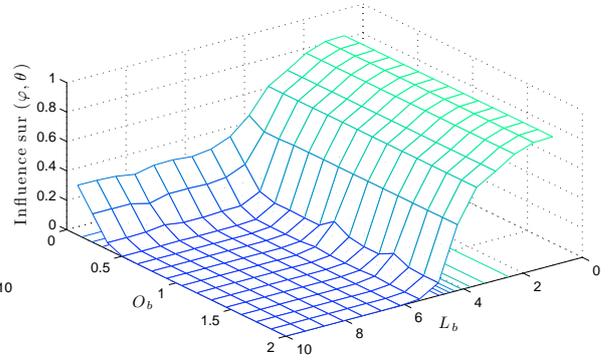
(a) Surface de réglage de la dynamique des angles



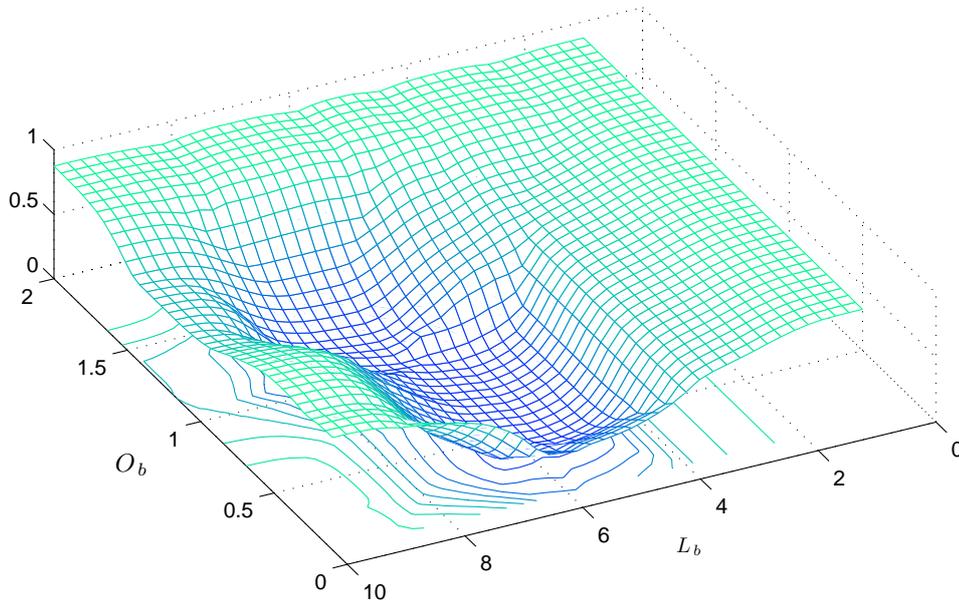
(b) Surface de réglage de la dynamique des biais



(c) Surface de réglage de la dynamique des angles



(d) Surface de réglage de la dynamique des angles



(e) Surface de réglage du cap

FIGURE 5.35 – Les différentes surfaces de réglage pour les gains de l'observateur invariant

### 5.2.6 Validation de l'INS sur données réelles

Nous établissons dans cette section une étude comparative entre les performances d'estimation de l'attitude et de la navigation obtenues à partir de l'UKF et du  $\pi$ -IUKF. Ces deux approches utiliseront donc un modèle complet d'INS comportant 15 variables d'état. Dans un premier temps, nous étudierons les performances globales des deux algorithmes pour valider en situation réelle la qualité de l'estimation. Par ailleurs, nous présenterons la convergence des gains des deux algorithmes afin d'examiner sur données réelles les propriétés d'invariance du  $\pi$ -IUKF pour le problème de l'INS. Nous proposons dans un deuxième temps de regarder plus finement les performances d'estimation de la vitesse et de la position des trois algorithmes qui ont été proposés grâce à une comparaison des estimées avec des données de référence fournies par une antenne DGPS. De la même façon que nous avons procédé pour l'AHRS, nous allons étudier dans un premier temps la convergence des biais dans la phase d'attente où le drone est laissé immobile, moteur éteint pendant 50 secondes, en l'orientation dans l'espace de façon quelconque. La figure 5.36 présente les différentes convergences entre le biais estimé et le biais réel que nous avons pu extraire des données enregistrées. A noter que le biais sur le baromètre sera présenté durant la phase dynamique du vol. Ce résultat montre que le transitoire est beaucoup plus bruité lorsque les algorithmes sont appliqués au modèle de l'INS que de l'AHRS mais la convergence est beaucoup plus rapide (environ 20 secondes). Les performances globales d'estimation des angles d'attitude sont tracées sur la figure 5.37 pour le filtre SRUKF et le  $\pi$ -IUKF. Cette figure montre que les estimations réalisées par les deux algorithmes sont très proches dans toute la phase dynamique du système. Toutefois, nous avons des résultats légèrement différents par rapport à l'estimation des angles d'attitude sur le modèle de l'AHRS. Cette différence peut être la cause d'imperfection non modélisée dans le système.

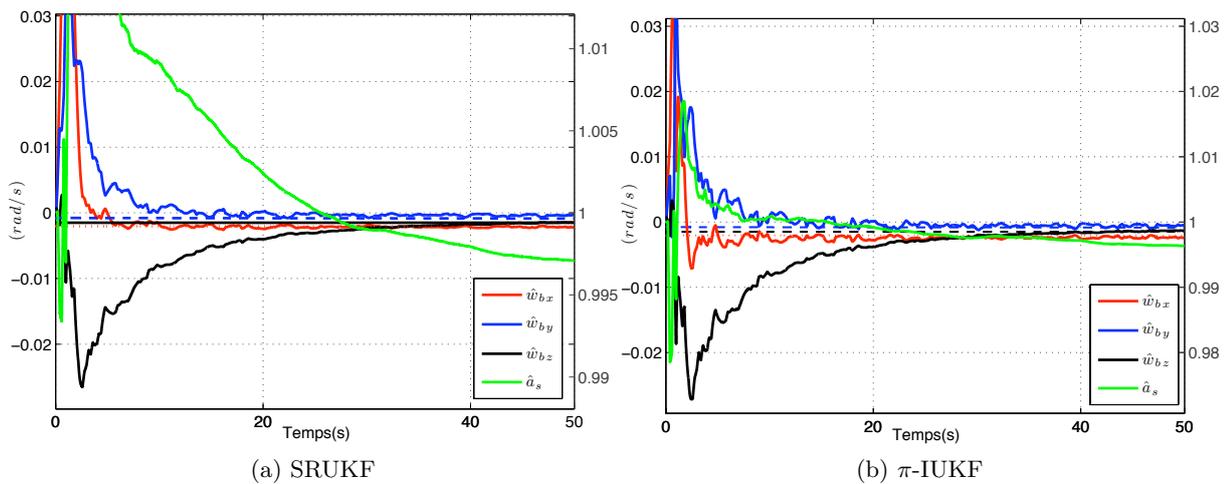


FIGURE 5.36 – Résultats de la convergence des biais du SRUKF et du  $\pi$ -IUKF

Les figures 5.39 et 5.40 représentent les gains obtenus par le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF. Plus

précisément, la figure 5.39 détaille les coefficients représentant les quaternions et permet de constater que les valeurs sur les quatre composantes ne sont pas toutes quasi-constantes comme nous avons illustré à la section 5.1.5. Cette différence peut se traduire par le fait que sur les données réelles, nous avons des bruits instationnaires ce qui ne satisfait plus dans ce cas-là les hypothèses sur l'introduction invariante des bruits dans le système  $G$ -invariant. En effet, comme l'on peut très bien le voir sur la figure 5.26, nous avons des variations d'amplitude de bruit suivant les différentes phases de vol qui sont directement répercutées sur l'ensemble des gains. En conclusion, ces changements de gain sont dus à la fois à une erreur d'estimation sur l'état qui n'est plus autonome comme c'est le cas pour un modèle AHRS et à des bruits instationnaires qui ne sont visibles que dans le cas expérimental.

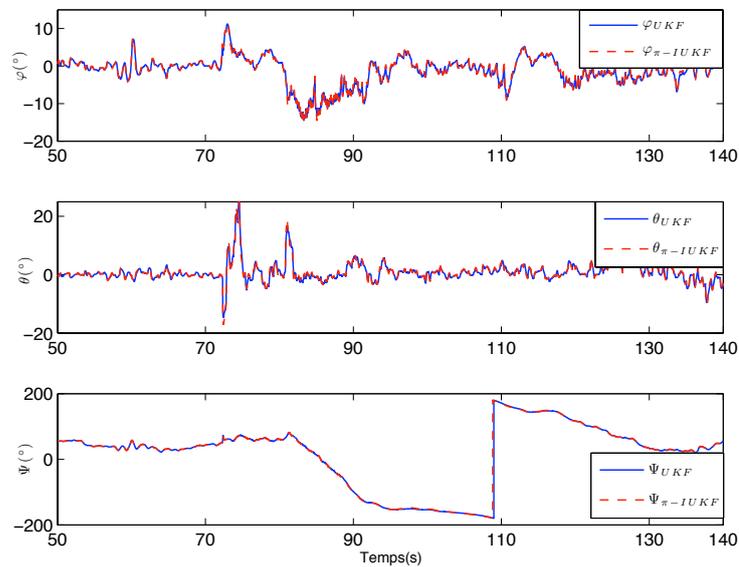


FIGURE 5.37 – Résultats de l'estimation des angles d'attitudes

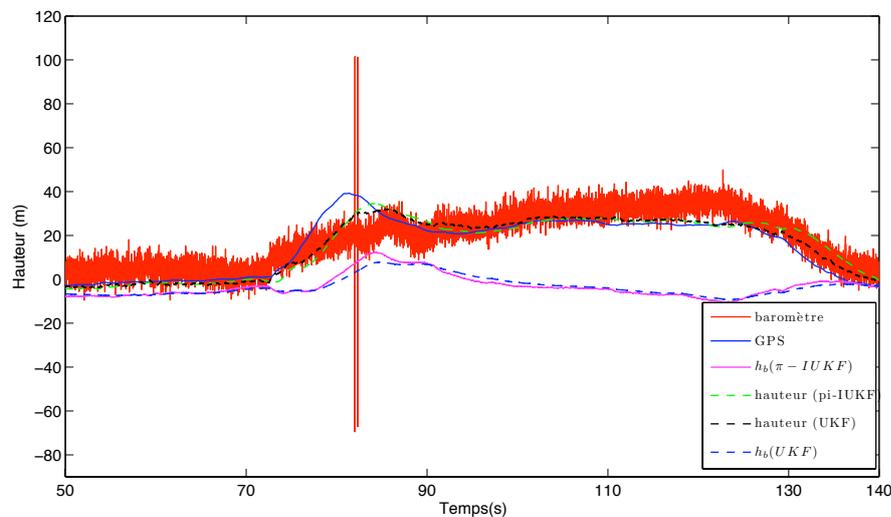


FIGURE 5.38 – Résultats de l'estimation de l'altitude

La figure 5.38 représente la mesure d'altitude fournie par le baromètre, le GPS et la fusion des deux. Elle illustre un cas que seul l'expérimentation peut mettre en exergue lors d'un vol réel. En effet, nous observons dans un premier temps sur cette même figure la mesure du baromètre qui est très bruitée et la mesure du GPS qui donne une altitude particulièrement bonne. Nous observons comme il a été décrit dans la section précédente les différentes phases de vol de l'engin. Ainsi, pendant la montée en altitude de l'engin à  $t = 85s$ , nous observons que le baromètre fournit une fausse mesure et la mesure du GPS semble indiquer une augmentation brutale de l'altitude. Nous remarquons dans ce cas-là que les biais des deux algorithmes réagissent pour compenser la différence entre la mesure du baromètre et du GPS car le baromètre lui ne semble pas indiquer que l'avion prend de l'altitude. Ce résultat nous montre premièrement, que l'utilisation des deux

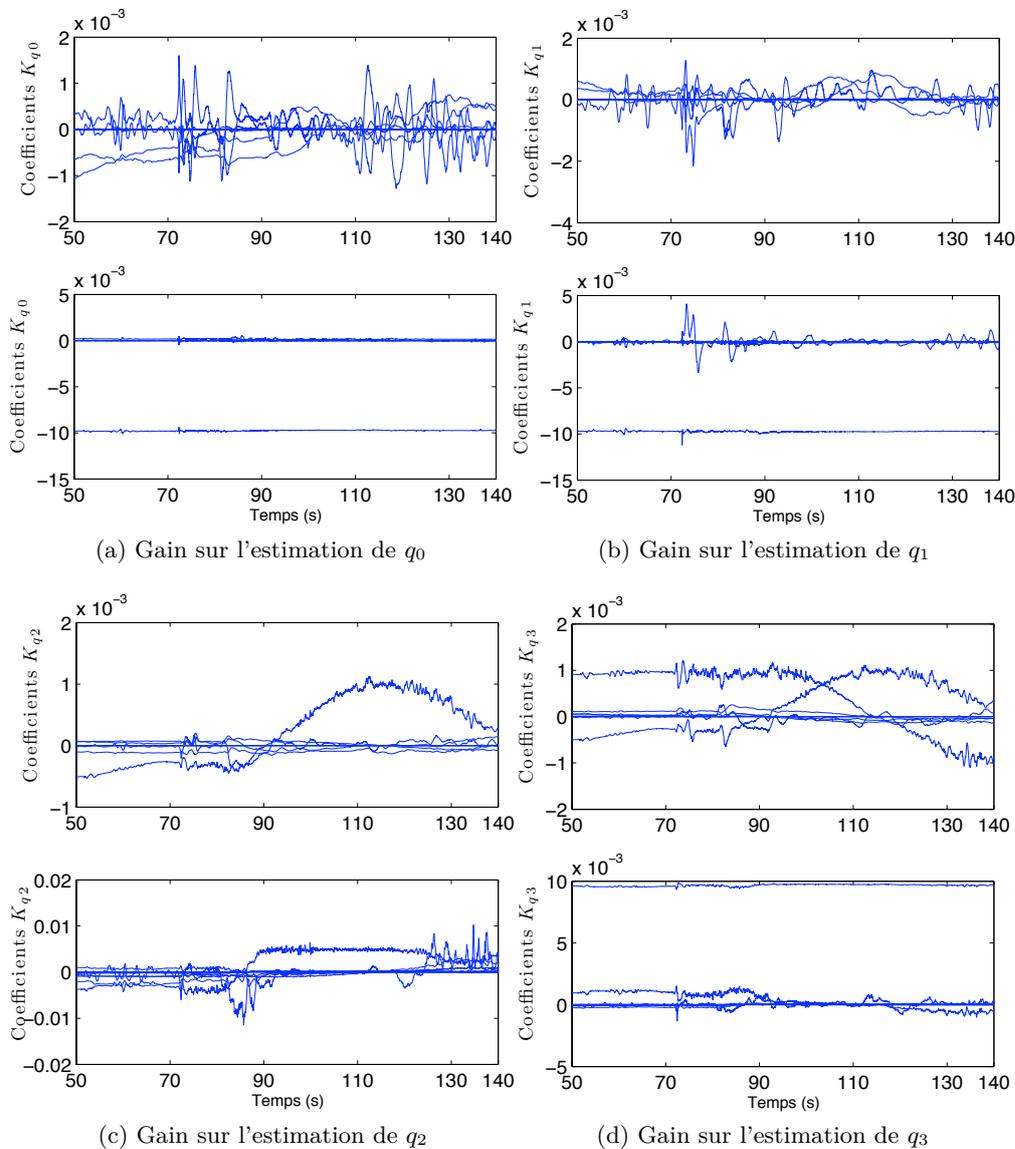


FIGURE 5.39 – Résultats de la convergence des gains sur l'estimation des quaternions

algorithmes SRUKF et  $\pi$ -IUKF permet de ne pas mettre en péril l'avion du fait de la valeur fautive sur le baromètre, source d'une possible divergence des estimés ou d'une perte de contrôle de l'appareil dans le cas où seule la mesure du baromètre serait considérée. Deuxièmement, une question se pose : qui dit vrai ? Le baromètre ou le GPS ? Nous avons donc eu recours à l'utilisation d'une antenne de haute précision pour obtenir des mesures de position et de vitesse de référence afin d'étudier plus finement les performances des deux algorithmes.

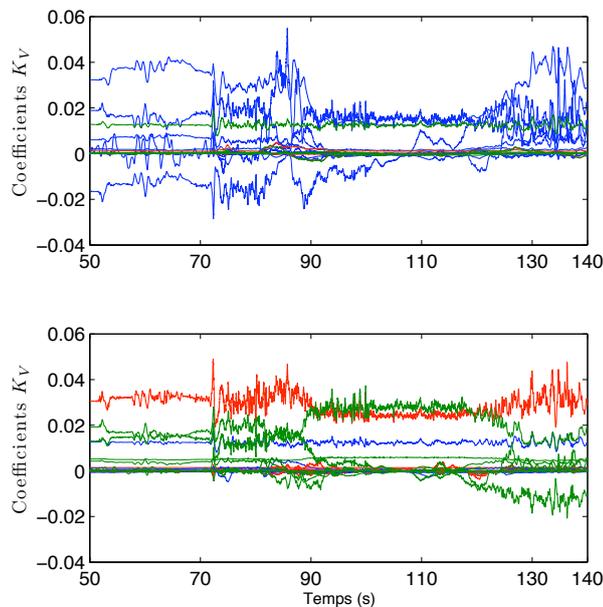
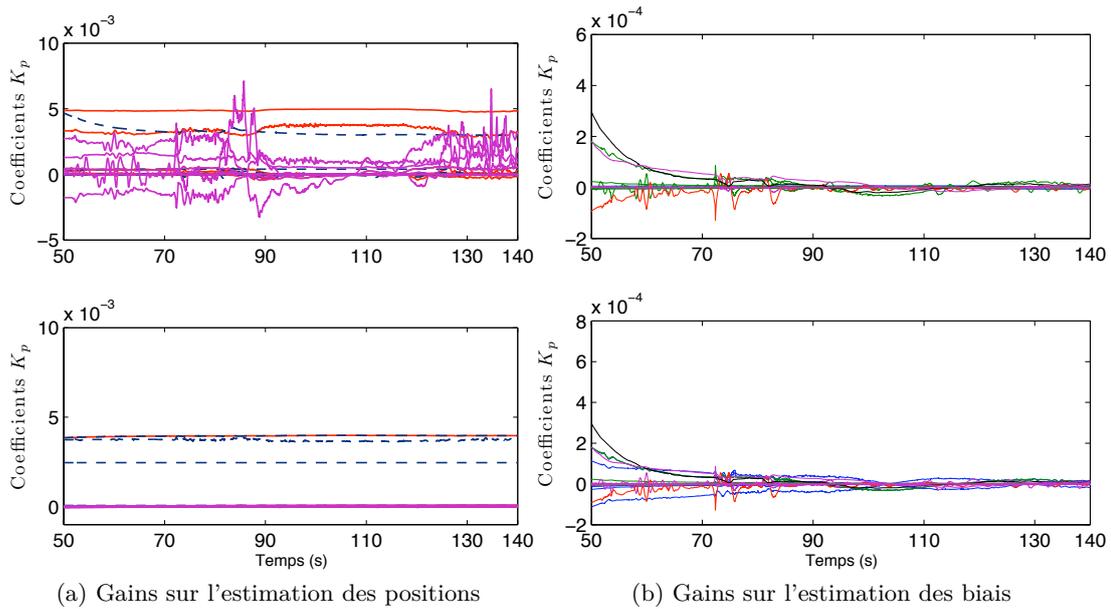


FIGURE 5.40 – Résultats de la convergence des gains sur la vitesse, la position et les biais

### 5.2.7 Analyse des performances en vitesse et position de l'INS

Nous proposons dans cette section de regarder plus finement les performances de l'estimation de la vitesse et de la position pour les trois algorithmes qui ont été proposés grâce à une comparaison des estimés sur la base de données de référence fournies par un DGPS. Comme nous l'avons décrit au début de la section expérimentale, l'antenne utilisée pour obtenir des mesures de référence est de marque Novatel et pèse 150 g. Il ne sera donc possible de l'utiliser que sur un drone de taille moyenne. Pour cela, nous avons intégré cette antenne sur un avion à aile fixe, nommé Twinstar, représenté sur la figure 5.41.



FIGURE 5.41 – Un Twinstar équipé d'une antenne Novatel

Grâce à la carte autopilote Apogee, nous avons eu la possibilité d'enregistrer en même temps les données GPS fournies par l'antenne Ublox et celles fournies par l'antenne Novatel. Après le vol, un traitement supplémentaire sur les mesures de l'antenne Novatel a été nécessaire afin d'obtenir des données de position très précises, relativement à un repère local et ainsi faire du DGPS à partir d'une station dont nous connaissons très précisément les coordonnées. La figure 5.42b représente l'altitude du vol, effectuée d'une manière classique avec les quatre phases de vol décrites dans section 5.2.2 (attente, décollage, hippodrome et atterrissage). Ainsi, nous retrouvons les performances d'estimation des trois algorithmes, l'observateur invariant réglé à partir des surfaces représentées sur la figure 5.35, le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF. Tout d'abord, cette figure illustre la précision médiocre du GPS ( $\pm 20m$ ). Les algorithmes fusionnent cette mesure et la mesure du baromètre.

Nous observons donc la capacité des trois algorithmes à reconstituer une estimation sans bruit mais avec tout de même une erreur importante sur l'altitude. L'estimation du  $\pi$ -IUKF montre de meilleurs résultats sur l'estimation de l'altitude que ceux fournis par les deux autres algorithmes.

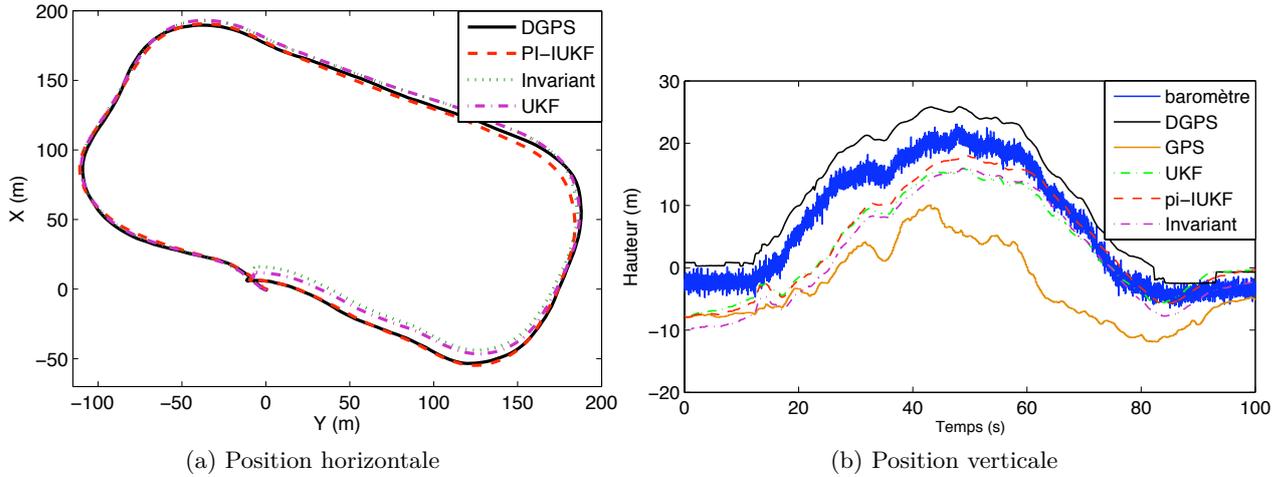


FIGURE 5.42 – La position horizontale et verticale du Twinstar

La figure 5.42a permet d’obtenir une vision en 2 dimensions de la position  $X, Y$ . Le drone décolle dans la direction  $X > 0$  et  $Y < 0$  puis effectue un hippodrome et atterrit en direction de  $X < 0$  et  $Y > 0$ . Sur cette figure, nous pouvons distinguer une importante différence dans la phase finale entre le  $\pi$ -IUKF et les deux autres algorithmes. Cette différence est principalement due à des effets non modélisés comme la vibration de l’engin lorsqu’il réduit les gaz. Les figures 5.42a et 5.43 comparent les trois principaux algorithmes étudiés dans ce mémoire (l’observateur invariant, le SRUKF et le  $\pi$ -IUKF) et permettent de constater que les performances d’estimation du  $\pi$ -IUKF en position et en vitesse sont comparables sinon meilleures aux autres algorithmes. Ce résultat n’est pas étonnant étant donné les conclusions des précédentes comparaisons en simulation. Dans la section 5.3, nous présentons le code en langage C de l’observateur invariant qui à été implémenté dans *Paparazzi*. Celui-ci ne prend que 35% d’instruction machine sur un micro processeur STM32 fabriqué par STMicroelectronics.

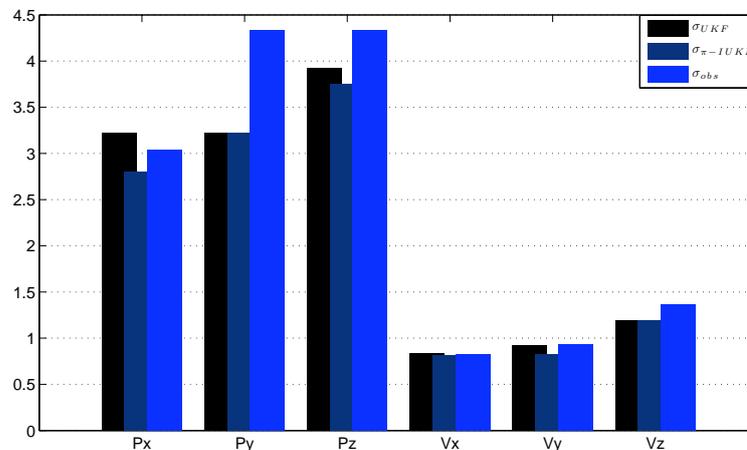


FIGURE 5.43 – Performance des trois algorithmes

### 5.3 Implémentation de l'observateur invariant pour le modèle INS

```

/*
 * Copyright (C) 2012-2013 Jean-Philippe Condomines, Gautier Hattenberger
 *
 * This file is part of paparazzi.
 * paparazzi is free software; you can redistribute it and/or modify
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by
 * the Free Software Foundation; either version 2, or (at your option)
 * any later version.
 *
 * paparazzi is distributed in the hope that it will be useful,
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
 * GNU General Public License for more details.
 *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License
 * along with paparazzi; see the file COPYING. If not, see
 * <http://www.gnu.org/licenses/>.
 *
 *Compute dynamic mode
 *
 * x_dot = evolution_model + (gain_matrix * error)
 */
static inline void invariant_model(float* o, const float* x,
const int n, const float* u, const int m __attribute__((unused))) {

    /* dot_q = 0.5 * q * (x_rates - x_bias) + LE * q + (1 - ||q||^2) * q */
    RATES_DIFF(rates_unbiased, c->rates, s->bias);
    /* qd = 0.5 * q * rates_unbiased = -0.5 * rates_unbiased * q */
    float_quat_derivative(&s_dot.quat, &rates_unbiased, &(s->quat));

    float_quat_vmul_right(&tmp_quat, &(s->quat), &ins_impl.corr.LE);
    QUAT_ADD(s_dot.quat, tmp_quat);

    float norm2_r = 1. - FLOAT_QUAT_NORM2(s->quat);
    QUAT_SMUL(tmp_quat, s->quat, norm2_r);

```

```

QUAT_ADD(s_dot.quat, tmp_quat);

/* dot_V = A + (1/as) * (q * am * q-1) + ME */
struct FloatQuat q_b2n;
float_quat_invert(&q_b2n, &(s->quat));
float_quat_vmult((struct FloatVect3*)&s_dot.speed, &q_b2n, &(c->accel));
VECT3_SMUL(s_dot.speed, s_dot.speed, 1. / (s->as));
VECT3_ADD(s_dot.speed, A);
VECT3_ADD(s_dot.speed, ins_impl.corr.ME);

/* dot_X = V + NE */
VECT3_SUM(s_dot.pos, s->speed, ins_impl.corr.NE);

/* bias_dot = q-1 * (OE) * q */
float_quat_vmult(&tmp_vect, &(s->quat), &ins_impl.corr.OE);
RATES_ASSIGN(s_dot.bias, tmp_vect.x, tmp_vect.y, tmp_vect.z);

/* as_dot = as * RE */
s_dot.as = (s->as) * (ins_impl.corr.RE);

/* hb_dot = SE */
s_dot.hb = ins_impl.corr.SE;

// set output
memcpy(o, &s_dot, n*sizeof(float));

/** Compute correction vectors
 * E = ( ? - y )
 * LE, ME, NE, OE : ( gain matrix * error )
 */
static inline void error_output(struct InsFloatInv * _ins) {

    struct FloatVect3 YBt, I, Ev, Eb, Ex, Itemp, Ebtemp, Evtemp;
    float Eh;
    float temp;

    // test accel sensitivity
    if (fabs(_ins->state.as) < 0.1) {
        // too small, don't do anything to avoid division by 0
        return;
    }

```

```

}

/* YBt = q * yB * q-1 */
struct FloatQuat q_b2n;
float_quat_invert(&q_b2n, &(_ins->state.quat));
float_quat_vmult(&YBt, &q_b2n, &(_ins->meas.mag));

float_quat_vmult(&I, &q_b2n, &(_ins->cmd.accel));
VECT3_SMUL(I, I, 1. / (_ins->state.as));

/*----- E = ( ? - y ) -----*/
/* Eb = ( B - YBt ) */
VECT3_DIFF(Eb, B, YBt);

// pos and speed error only if GPS data are valid
// or while waiting first GPS data to prevent diverging
if ((gps.fix == GPS_FIX_3D && ins.status == INS_RUNNING
#if INS_UPDATE_FW_ESTIMATOR
    && state.utm_initialized_f
#else
    && state.ned_initialized_f
#endif
) || !ins_gps_fix_once) {
    /* Ev = ( V - YV) */
    VECT3_DIFF(Ev, _ins->state.speed, _ins->meas.speed_gps);
    /* Ex = ( X - YX) */
    VECT3_DIFF(Ex, _ins->state.pos, _ins->meas.pos_gps);
}
else {
    FLOAT_VECT3_ZERO(Ev);
    FLOAT_VECT3_ZERO(Ex);
}
/* Eh = < X,e3 > - hb - YH */
Eh = _ins->state.pos.z - _ins->state.hb - _ins->meas.baro_alt;

/*-----Gains-----*/
/**** LvEv + LbEb = -lvIa x Ev + lb < B x Eb, Ia > Ia *****/
VECT3_SMUL(Itemp, I, -_ins->gains.lv/100.);
VECT3_CROSS_PRODUCT(Evtemp, Itemp, Ev);

```

```

VECT3_CROSS_PRODUCT(Ebtemp, B, Eb);
temp = VECT3_DOT_PRODUCT(Ebtemp, I);
temp = (_ins->gains.lb/100.) * temp;

VECT3_SMUL(Ebtemp, I, temp);
VECT3_ADD(Evtemp, Ebtemp);
VECT3_COPY(_ins->corr.LE, Evtemp);

/***** MvEv + MhEh = -mv * Ev + (-mh * <Eh, e3>) *****/
_ins->corr.ME.x = (-_ins->gains.mv) * Ev.x + 0.;
_ins->corr.ME.y = (-_ins->gains.mv) * Ev.y + 0.;
_ins->corr.ME.z = ((-_ins->gains.mvz) * Ev.z) + ((-_ins->gains.mh) * Eh);

/***** NxEx + NhEh = -nx * Ex + (-nh * <Eh, e3>) *****/
_ins->corr.NE.x = (-_ins->gains.nx) * Ex.x + 0.;
_ins->corr.NE.y = (-_ins->gains.nx) * Ex.y + 0.;
_ins->corr.NE.z = ((-_ins->gains.nxz) * Ex.z) + ((-_ins->gains.nh) * Eh);

/***** OvEv + ObEb = ovIa x Ev - ob < B x Eb, Ia > Ia *****/
VECT3_SMUL(Itemp, I, _ins->gains.ov/1000.);
VECT3_CROSS_PRODUCT(Evtemp, Itemp, Ev);

VECT3_CROSS_PRODUCT(Ebtemp, B, Eb);
temp = VECT3_DOT_PRODUCT(Ebtemp, I);
temp = (_ins->gains.ob/1000.) * temp;

VECT3_SMUL(Ebtemp, I, temp);
VECT3_ADD(Evtemp, Ebtemp);
VECT3_COPY(_ins->corr.OE, Evtemp);
/* a scalar */
/***** RvEv + RhEh = rv < Ia, Ev > + (-rhEh) *****/
_ins->corr.RE = ((_ins->gains.rv/100.) * VECT3_DOT_PRODUCT(Ev, I)) +
((-_ins->gains.rh/10000.) * Eh);
/***** ShEh *****/
_ins->corr.SE = (_ins->gains.sh) * Eh;

```



## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

La thèse a eu pour objectif d'apporter une ou plusieurs solutions algorithmiques à la problématique de l'estimation d'état d'un mini-drone en vol qui soit compatible avec les exigences d'embarquabilité inhérentes au système *Paparazzi*. L'état de l'art nous a permis d'orienter nos travaux de recherche vers des méthodes d'estimation non linéaire à base de modèles qui répondent aux exigences du problème. Nous avons donc choisi de détailler plus particulièrement deux techniques d'estimation : le filtrage de Kalman et les observateurs invariants. La technique du filtrage de Kalman dit *unscented* développée par Julier et Uhlmann, s'est révélée particulièrement intéressante d'un point de vue numérique. Les derniers mois de ce travail furent consacrés à une implémentation de cet algorithme dans un autopilote *Paparazzi* et ont permis d'évaluer la charge calculatoire à 60% d'instruction machine sur un micro processeur STM32 fabriqué par STMicroelectronics. Ce résultat, acceptable en termes de temps de calcul, a montré qu'il sera à l'avenir possible d'implémenter sur cible les autres solutions algorithmiques développées dans ce mémoire.

L'état de l'art nous a également conduits vers l'étude de différents concepts théoriques gravitant autour des observateurs invariants. Les notions de géométrie différentielle, utiles à la compréhension méthodologique de ce type d'estimateur, se sont révélées particulièrement difficiles à appréhender. De ce fait, nous avons cherché le plus possible à les vulgariser. Au-delà du cadre purement théorique des observateurs invariants, se dégage en fait une méthode simple pour la construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires comportant des symétries, en témoigne l'exemple de la voiture non-holonome. Cependant, cette méthode ne permet pas de trouver de manière systématique les différentes symétries utiles à cette construction. Dans notre cadre d'application, les propriétés d'invariance des équations cinématiques ont pu s'interpréter physiquement grâce au groupe de Lie et à l'aide de la dynamique du mouvement de l'engin. Néanmoins, cette interprétation peut s'avérer plus compliquée pour des modèles dynamiques de système avec un haut niveau de complexité intrinsèque. Nous pensons ici notamment au modèle non linéaire de la dynamique du vol.

Les travaux menés tout au long de cette thèse ont permis de mettre au point deux algorithmes d'estimation non linéaire qui hybrident la théorie des observateurs invariants avec celle du filtrage de Kalman *unscented* : l'IUKF et le  $\pi$ -IUKF. A partir des principes mis en œuvre et des multiples étapes de calcul qui fondent l'algorithme de l'UKF, une réécriture des équations, visant à adapter la méthode à un cadre invariant pour l'estimation, a pu être obtenue simplement :

- soit en redéfinissant les erreurs utilisées dans la version standard pour élaborer l'IUKF ;
- soit en utilisant une condition de compatibilité pour élaborer le  $\pi$ -IUKF.

Ces deux estimateurs ont permis d'apporter une solution algorithmique extrêmement intéressante aux problèmes rencontrés en navigation inertielle. Le choix de l'utilisation d'une erreur d'estimation sur l'état invariante facilite grandement l'analyse de la convergence du filtre estimateur. Ainsi, étant donné une dynamique désirée, les deux méthodes permettent de calculer des valeurs numériques par les gains de correction, de manière systématique, et de sorte à ce qu'ils confèrent aux filtres la dynamique souhaitée et assurent, dans un même temps, une convergence étendue de l'erreur d'estimation portant sur l'état invariante. En effet, nous avons vu au travers de nombreux résultats sur données simulées et mesures réelles que l'erreur d'état invariante dépendait de la trajectoire estimée uniquement au travers d'invariants que l'on peut comparer à une fonction non linéaire.

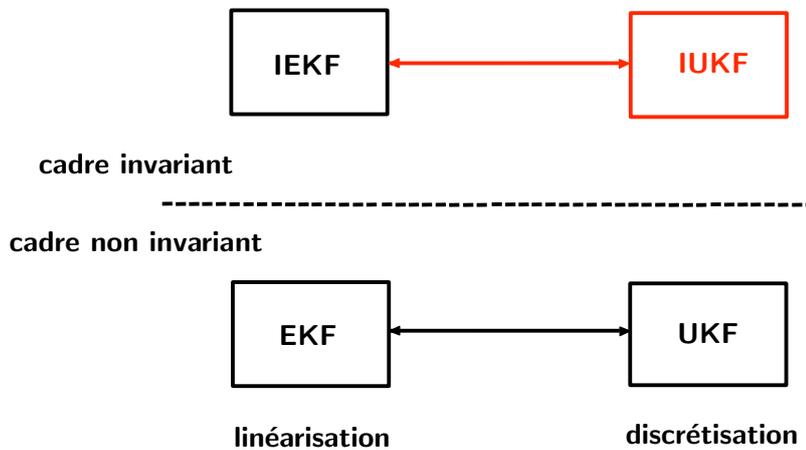


FIGURE 6.1 – Nouvelle formulation de l'UKF dans un cadre invariant

Ainsi, lorsque le système suit des trajectoires estimées quasi-permanentes, les valeurs numériques des gains de correction et les erreurs de covariance sur l'état affluent vers des valeurs constantes. Ces résultats ont montré que c'était particulièrement vrai pour le cas de l'AHRS dont l'erreur d'état invariante devenait autonome. A l'inverse, les résultats montrent pour le cas de l'INS, qu'il n'est possible d'avoir des gains de valeurs constants que pour des trajectoires permanentes particulières. Ainsi, Bonnabel *et al.* {2008} ont montré que ces trajectoires devenaient permanentes lorsque le mini-drone effectuait un mouvement hélicoïdal uniformément accéléré

le long d'un axe de rotation et un mouvement de translation rectiligne accéléré. Enfin, pour les deux modèles de navigation, il est important de noter que les propriétés d'invariance sont légèrement modifiées lorsque les bruits entrant dans le système sont instationnaires comme nous l'avons vu au travers des résultats sur données réelles. Une solution qui permettrait de pallier à cette difficulté serait d'atténuer de façon mécanique les vibrations en mettant la carte autopilote sur ressort vis-à-vis de la structure de l'avion.

Si les développements théoriques entrepris au cours de cette thèse ont fournis de premiers résultats prometteurs, les perspectives d'amélioration méthodologiques et applicatives restent nombreuses. Ainsi, d'un point de vue **méthodologique**, la formulation du SRIUKF sur un modèle complet de navigation inertielle doit être évaluée afin de déterminer, comme cela a été fait pour le  $\pi$ -IUKF, si cet algorithme est potentiellement plus efficace que l'UKF classique. De plus, nous devons évaluer les performances entre le SRIUKF et le  $\pi$ -IUKF et déterminer la formulation qui sera la mieux adaptée pour être implémentée sur un mini-drone. Par ailleurs, les travaux doivent être poursuivis afin d'utiliser les différents concepts développés pour améliorer la conception de boucle de commande et faire de la détection de panne. En effet, les erreurs de covariance d'état fournies par les filtres estimateurs étant constantes dans le cas de l'AHRS, nous pourrions envisager deux possibilités :

- utiliser cette information pour améliorer le contrôle des systèmes non linéaires (paramétrisation de Youla, LQG,  $H_\infty$ ...). Le cas d'un système basé sur un contrôleur LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne) serait bien adapté car la distribution des bruits sur les variables d'état est gaussienne. Par ailleurs, nous pourrions prendre en compte dans le cas d'une synthèse d'un contrôleur robuste, des incertitudes constantes sur les variables d'états estimées en utilisant une forme standard  $M - \Delta$  (cf. Figure 6.2) ;

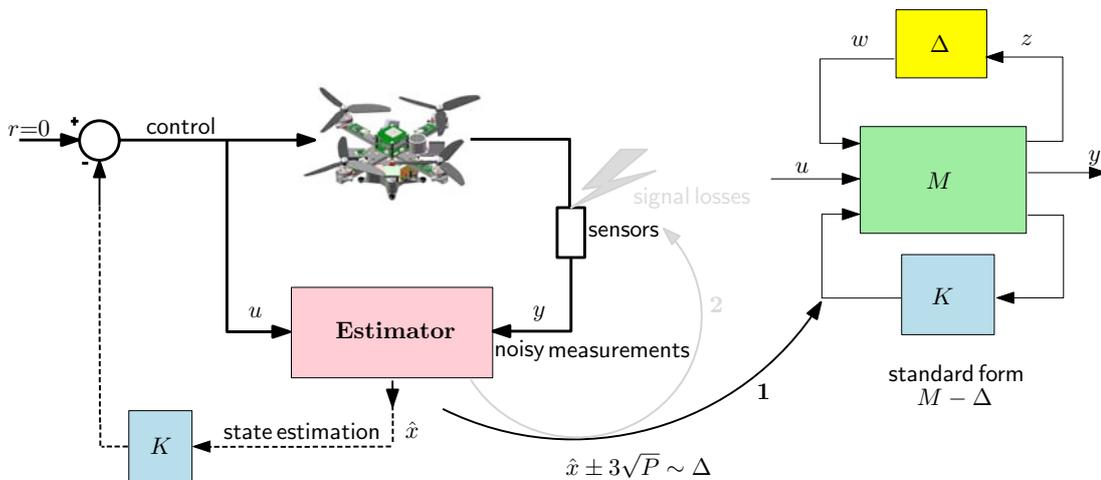


FIGURE 6.2 – Amélioration du contrôle des systèmes non linéaires

- avoir un système en boucle fermée robuste aux potentiels défauts qui pourraient survenir lors des vols du mini-drone. Nous pensons notamment aux défauts sur les mesures accélémétriques et gyrométriques. Ces mesures interviennent en outre dans les équations d'observation de l'AHRs. Dans ce cas, nous pourrions faire du contrôle actif de la qualité des estimées à partir des covariances des erreurs d'état afin de détecter d'éventuelle(s) panne(s) (cf. Figure 6.3).

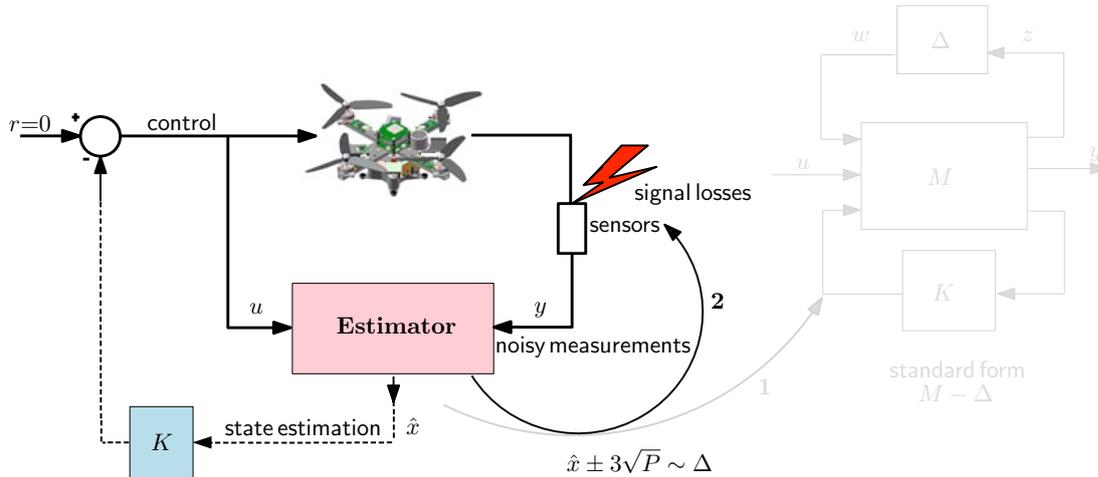


FIGURE 6.3 – Boucle de contrôle robuste vis-à-vis de potentielles pannes

D'un point de vue **applicatif**, nous avons d'ores et déjà implémenté l'observateur invariant sur le système *Paparazzi*. Les méthodes de réglage présentées au chapitre 5 nous ont permis d'obtenir un estimateur réglé de façon à ce que le comportement du mini-drone en vol soit satisfaisant. Par ailleurs, nous avons évalué la charge calculatoire à 35% d'instruction machine sur un micro processeur STM32 fabriqué par STMicroelectronics. Bien qu'il prenne moins de temps de calcul que l'UKF, cet observateur n'est pas en mesure de satisfaire nos perspectives d'amélioration méthodologique du fait qu'il ne fournit pas d'estimation des covariances de l'erreur d'état. Par ailleurs, les progrès significatifs de la miniaturisation et l'augmentation continue des capacités de calcul embarqué, nous laisse penser que dans moins de deux ans, la charge calculatoire de l'algorithme UKF sera comparable à ce que l'observateur invariant l'est aujourd'hui. Ainsi, nos futurs travaux porteront sur l'implémentation des algorithmes  $\pi$ -IUKF et IUKF en reprenant le code déjà réalisé pour l'UKF.

---

## Liste des publications

- ➡ BRONZ, M., CONDOMINES, J.P. et HATTENBERGER, G. (2013)  
Development of an 18cm micro air vehicle.  
*International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (IMAV)*
- ➡ CONDOMINES, J.P., CÉDRIC, S. et HATTENBERGER, G. (2013)  
Nonlinear state estimation using an invariant unscented Kalman filter.  
*AIAA Guidance, Navigation and Control (GNC) Conference, 19 août 2013, Boston, Etats-Unis*
- ➡ CONDOMINES, J.P., CÉDRIC, S. et HATTENBERGER, G. (2014)  
Pi-invariant unscented Kalman filter for sensor fusion.  
*IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 17 décembre 2014, Los Angeles, Etats-Unis*



## Annexe A

# Notions de géométrie différentielle et théorie des groupes

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Variété, difféomorphisme . . . . .</b>	<b>202</b>
A.1.1	Exemple illustratif . . . . .	202
A.1.2	Exemple illustratif . . . . .	203
<b>A.2</b>	<b>Topologie et espace d'état . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>A.3</b>	<b>Vecteur tangent à une variété et champs de vecteurs . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>A.4</b>	<b>Groupes de Lie . . . . .</b>	<b>208</b>
A.4.1	Notion de groupe . . . . .	208
A.4.2	Transformations et actions de groupe . . . . .	209
A.4.3	Représentation du flot d'un champ de vecteur . . . . .	212
<b>A.5</b>	<b>Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie . . . . .</b>	<b>213</b>
<b>A.6</b>	<b>Méthode du repère mobile de Cartan . . . . .</b>	<b>214</b>
A.6.1	Un exemple dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	214
A.6.2	Le cas général . . . . .	215

---

Cette annexe rappelle de façon intuitive certaines notions de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes, nécessaires pour comprendre la méthodologie sous-jacente intervenant dans la construction des observateurs invariants : variété, sous-variété, champ de vecteurs et groupe de Lie.

## A.1 Variété, difféomorphisme

La notion de variété peut être appréhendée intuitivement comme la généralisation des propriétés métriques et différentielles des surfaces « usuelles » de l'espace euclidien à des espaces « courbés » considérés comme espace de référence et non plus comme plongés dans un espace plus vaste de dimension supérieure. La sphère, le tore ou encore le parabolioïde hyperbolique sont des variétés de dimensions 2 au sens où elles sont caractérisées par la possibilité de représenter le voisinage de chaque point de leur surface au moyen d'un système de 2 coordonnées locales (ainsi pour une sphère, il faudra préciser latitude et longitude). En outre, les variétés permettent de définir une topologie ou espace topologique sur lequel une classification des objets mathématiques est possible. Par exemple, de par leur aspect global, une sphère et un tore ne se ressemblent pas. Bien que le tore ait la même dimension que la sphère, il n'est pas possible de faire correspondre de façon régulière les points de ces deux objets mathématiques. Cette impossibilité d'ordre topologique a des conséquences sur l'aspect global des champs de vecteurs tangents. Ainsi, il est possible de construire sur le tore un champ régulier de vecteurs tangents ne s'annulant jamais, alors que c'est impossible pour la sphère (problème dit du « hérisson » {Berger et Gostiaux, 1972}).

Une variété sera pour nous un espace mathématique sur lequel nous pourrions étudier et représenter les propriétés géométriques propres à la dynamique d'un système physique (rotation, translation, homothétie,...), afin de trouver des relations d'invariances pour construire un type d'observateur appelé « invariant ». Afin d'appliquer les propriétés mathématiques classiques à l'ensemble des résultats obtenus dans cette espace, nous considérerons les variétés comme différentiables, également dites différentielles (smooth manifold pour exprimer qu'elles sont suffisamment lisses).

De façon plus rigoureuse, toutes variétés  $\mathcal{M}$  s'apparentent à des sous-ensembles ouverts (sous-espace topologique) notés  $U_\alpha \subset \mathcal{X}$  d'un espace Euclidien de  $\mathbb{R}^m$  ; en effet, l'exemple le plus simple d'une variété est un sous-ensemble ouvert  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$  de l'espace Euclidien. On peut définir une carte (où système de coordonnées locales) notée  $\Sigma_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  dont les coordonnées standards  $x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  sur  $V_\alpha$  fournissent des coordonnées en tout point de  $\mathcal{X}$ . Ainsi, une carte de recouvrement composite  $\Sigma_{\beta\alpha} = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha^{-1} : V_\alpha \mapsto V_\beta$  supposée continue, définit le changement de coordonnée locale  $x_\beta = \Sigma_{\beta\alpha}(x_\alpha)$  sur  $\mathcal{X}$ . Pour bien comprendre cela, prenons un exemple utilisé dans de nombreux domaines comme la cartographie : la projection stéréographique.

### A.1.1 Exemple illustratif

Considérons une sphère de dimension  $n$ , sous-espace topologique compact  $\mathbb{S}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  (cf. Figure A.1). En d'autres mots, une sous-variété analytique de dimension  $n - 1$ . Prenons deux points  $N = (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$  que nous appellerons respectivement le pôle Nord

et le pôle Sud et notons  $p_N : \mathbb{S}^n - \{N\} \mapsto \mathbb{R}^n$  et  $p_S : \mathbb{S}^n - \{S\} \mapsto \mathbb{R}^n$  les applications, appelées projection stéréographique de  $N$  et de  $S$  respectivement, qui à un point  $x$  de la sphère, différent du pôle concerné, associent le point d'intersection, avec l'hyperplan d'équation  $x_0 = 0$  (identifié avec  $\mathbb{R}^n$ ), de la droite passant par le pôle concerné et  $x$ . Nous pouvons immédiatement voir que géométriquement ces applications sont continues, bijectives, et d'inverses continus (il est d'usage de dire difféomorphique). On peut remarquer qu'une carte de recouvrement composite  $p_S \circ p_N^{-1}$  nous donne  $x \mapsto x/\|x\|^2$  (car  $\|p_N(x)\| = \tan(\alpha)$  et  $\|p_S(x)\| = \tan(\pi/2 - \alpha)$ , donc  $\|p_N(x)\| = 1/\|p_S(x)\|$ ).

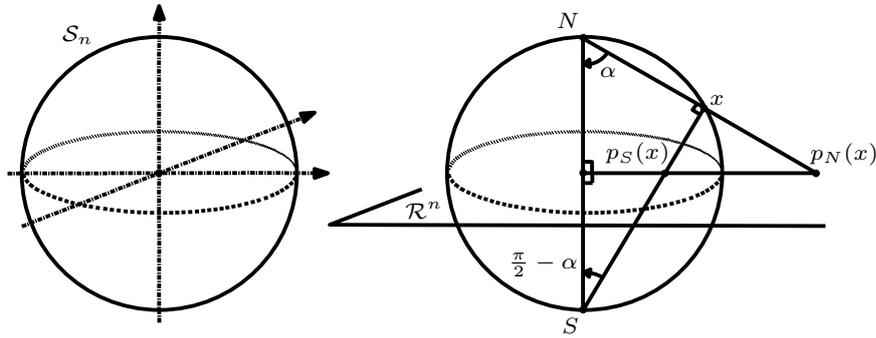


FIGURE A.1 – Sous-espace topologique compact  $\mathbb{S}^n$  d'un espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des variétés utilisé dans l'élaboration et l'étude des observateurs invariants seront dites algébriques, admettant ainsi une équation polynomiale de type  $f(x, y, z, \dots) = 0$ . Dans ce cadre là, le concept de difféomorphisme (application différentiable bijective continue et inversible, d'un espace topologique dans un autre) local sera essentiel pour pouvoir décrire les variétés indépendamment du choix de leurs coordonnées.

Ainsi, les résultats méthodologiques développés dans cette thèse ne seront valables que dans le cas où l'on considère une solution locale à l'espace topologique décrivant la dynamique du système considéré. Afin d'obtenir une telle solution, prenons l'exemple d'une fonction quelconque notée  $\varphi$  avec  $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k, n > k$ . Un ensemble de niveaux  $S = \{\varphi(x) = c\}$  est dit régulier s'il est non vide et que la matrice Jacobienne  $D\varphi = \partial\varphi^i/\partial x^j$  est de rank  $k$  maximal n'importe où sur  $S$ . Chaque niveau régulier de  $S$  forme ainsi une sous-variété analytique  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m = n - k$ . Ainsi, le théorème des fonctions implicites nous permet de trouver une solution locale autour de  $(x_1, \dots, x_k)$  tel que  $x_i = \varphi_i(x_{k+1}, \dots, x_n), i = 1, \dots, k$ , fournit une paramétrisation locale de l'ensemble des niveaux par un système de  $n - k$  coordonnées locales. Illustrons ce théorème avec l'exemple suivant :

### A.1.2 Exemple illustratif

Considérons l'équation d'un cercle représenté par la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2$  où  $R$  est un réel positif. On reconnaît là, une sous-variété (ou va-

riété plongée) analytique de dimension 1. En effet, localement le cercle ressemble à une ligne ; il a donc une dimension, c'est à dire qu'une seule coordonnée suffit pour décrire un petit arc de cercle. Prenons la partie supérieure du cercle ( $x_2 > 0$ , partie en jaune sur la figure A.2) sur laquelle on peut décrire n'importe quel point par la coordonnée  $x_1$ .

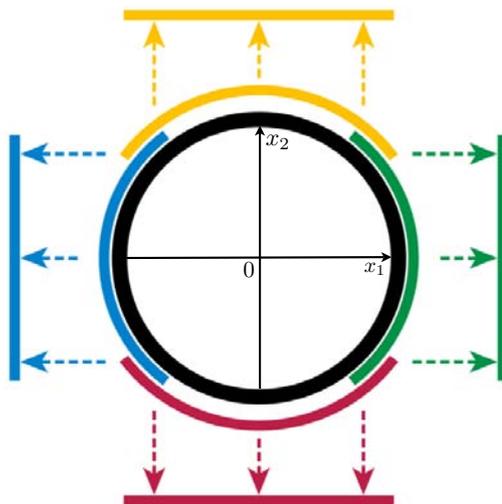


FIGURE A.2 – Représentation des quatres cartes du cercle  $S^1$

Nous retrouvons là une carte représentée par l'homéomorphisme local (difféomorphisme non différentiable)  $\chi_{haut}$ , qui relie la partie jaune du cercle à l'intervalle ouvert  $] -R, R[$  en représentant chaque point du cercle par sa première coordonnée  $\chi_{haut}(x_1, x_2) = x_1$ . De manière similaire, il existe des cartes pour les parties inférieures, gauche et droite du cercle. La solution triviale de l'équation  $\varphi = 0$  est donnée par  $x_1 = \pm \sqrt{R^2 - x_2^2}$  pour  $|x_2| \leq R$  qui définit donc un changement de coordonnées locales pour chaque carte de recouvrement composite. Le théorème des fonctions implicites confirme l'existence d'une solution locale autour d'un point  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  tel que  $x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 = R^2$  (avec par exemple  $x_{1,0} = R, x_{2,0} = 0$ ), puisque l'application linéaire tangente de  $\varphi$  en ce point :  $D\varphi(x_{1,0}, x_{2,0}) = (2x_{1,0}, 2x_{2,0}) \neq (0, 0)$  et donc est de rang 1. A noter que l'utilisation de ce théorème sera repris à la fin de cette annexe pour déterminer une solution locale à la méthode du repère mobile d'Elie Cartan.

## A.2 Topologie et espace d'état

L'utilisation de variétés et en particulier de variétés d'état, nous permet d'avoir une vision globale des comportements d'un système physique sur de grands intervalles de temps. Elle permet de structurer l'espace des configurations d'un système en prenant en compte l'ensemble des positions que celui-ci est a priori susceptible d'adopter. Plus encore, elle s'applique à l'étude d'ensembles intéressants qui ont à la fois une structure algébrique et une structure de variété dite compatible (l'étude des rotations dans un espace à 3 dimensions forme une variété de dimension

2 et un groupe). Enfin, cette généralisation géométrique permet d'étudier et de développer certaines méthodes indépendantes des coordonnées choisies sur l'espace de configuration. Comme nous l'avons dit précédemment, une variété peut être vue comme des sous-ensembles globalement cohérents d'ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , correspondant au moyen de coordonnées locales, à des petits morceaux (voisinages) de la variété. La notion de variété différentiable a pour origine l'étude des courbes (variété de dimension 1) et des surfaces (variété de dimension 2). La figure A.3 rappelle les prototypes les plus classiques de variétés en dimension 1 et 2 :

- ▶ le cercle noté  $S^1$  est le prototype des courbes fermées (orbites périodiques) et donc apparaît très souvent au cours de l'étude des comportements périodiques. On donne ici la représentation dans le plan  $\mathbb{R}^2$  dont les coordonnées usuelles sont notées  $x$  et  $y$ .
- ▶ le cylindre noté  $S^1 \times \mathbb{R}$  est la variété d'état naturelle du pendule plan : à chacun des points  $(\theta, \omega)$  du cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$  est associé un vecteur vitesse, tangent au cylindre (cf. Figure A.4) au point considéré. Le pendule est alors caractérisé par l'angle  $\theta$  par rapport à la verticale descendante, défini à  $2\pi$  près, appartenant bien à  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi(\mathbb{Z})$  et par sa vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La dynamique est alors déterminée par un champ de vecteurs tangents au cylindre.
- ▶ le tore noté  $T^2 = S^1 \times S^1$  est la variété d'état qui apparaît naturellement lors de l'étude du double pendule dans le plan formé de deux oscillateurs linéaires découplés de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . En effet, supposons que l'espace des phases n'est plus le plan habituel mais le tore  $T^2$ . On peut identifier un ouvert de  $T^2$  à une petite portion du plan. Il est alors clair que le régime asymptotique du système est un balayage au cours du temps de tout l'espace des phases par des hélices tracées sur ce tore (cf. Figure A.5).

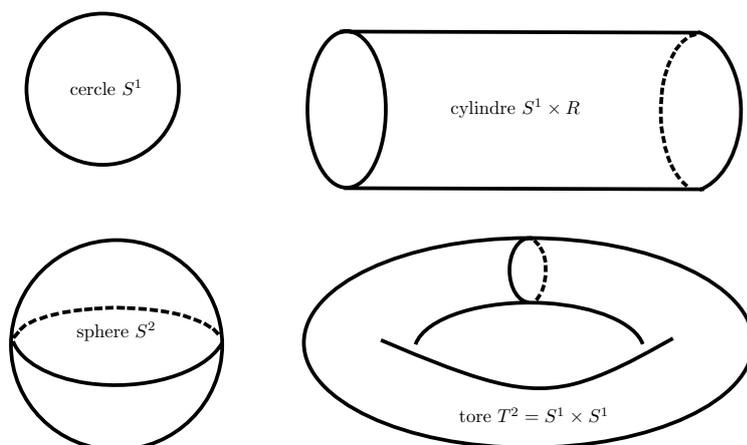


FIGURE A.3 – *Espaces d'état les plus courants qui sont simplement connexes de la droite  $\mathbb{R}$  ou du plan  $\mathbb{R}^2$*

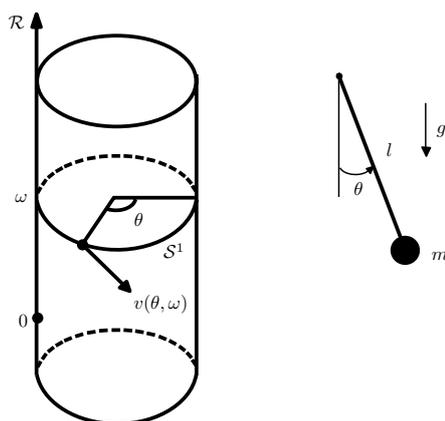


FIGURE A.4 – *L'espace d'état du pendule est le cylindre,  $(\theta, \dot{\theta} = \omega) \in \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ , et le vecteur vitesse  $v(\theta, \omega)$  est tangent au cylindre*

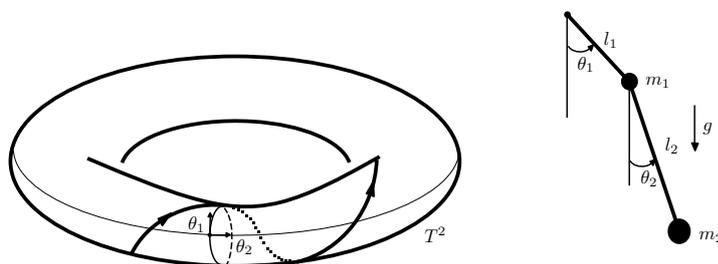


FIGURE A.5 – *Les trajectoires de  $\dot{\theta}_1 = \omega_1, \theta \in \mathcal{S}^1$  et  $\dot{\theta}_2 = \omega_2, \theta_2 \in \mathcal{S}^1$  sont des hélices tracées sur un tore paramétré par les deux angles, latitude et longitude,  $\theta_1$  et  $\theta_2$*

### A.3 Vecteur tangent à une variété et champs de vecteurs

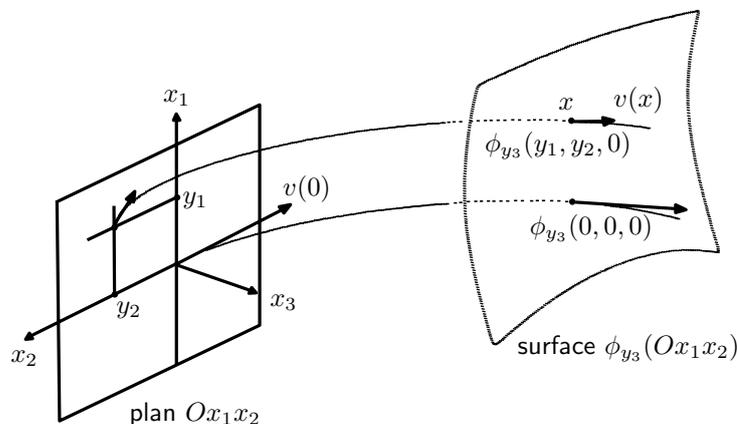


FIGURE A.6 – Théorème du redressement dans  $\mathbb{R}^3$ , le changement de coordonnées,  $x \rightarrow y$ , définit par  $x = (x_1, x_2, x_3) = \phi_{y_3}(y_1, y_2, 0)$ , transforme le champ  $v$  en un champ constant.

Lorsque nous parlons de champ de vecteurs, nous ne nous imaginons pas (ou très peu) que la notion de groupe  $y$  est intimement liée. Et pourtant, nous allons commencer dans cette section par « mettre un pied » dans la théorie des groupes via la notion de champ de vecteurs tangents à une variété.

Un vecteur tangent à une variété  $\mathcal{M}$  en un point  $x \in \mathcal{M}$  est défini géométriquement par la tangente à une courbe (lisse) passant par  $x$ . Dans des coordonnées locales, le vecteur tangent  $v|_x$  de la courbe paramétrisée par  $x = \phi(t)$  est déterminé par l'application linéaire tangente  $v|_x = D\phi(t)$ . Ainsi, une collection de tous les vecteurs tangents forment l'espace tangent de  $\mathcal{M}$  en  $x$  et chaque espace tangent noté  $TM|_x$  est un espace vectoriel de même dimension que  $\mathcal{M}$ . Plus particulièrement, l'espace tangent à un ouvert  $\mathcal{X}$  au point  $x \in \mathcal{X}$  est défini comme l'espace vectoriel  $TX|_x = \ker D\phi(x)$ . D'un point de vue différentiel, si on note  $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^m(x))$  les composantes de  $\xi$ , nous pouvons écrire qu'un champ de vecteurs dans ses coordonnées locales est défini par :

$$v = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

La courbe paramétrisée  $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$  est appelée courbe intégrale du champ de vecteur  $v$  à l'unique condition que les vecteurs tangents  $v|_x$  de cette courbe coïncident avec le champ de vecteur  $v$  en chaque point. Cette dernière condition nécessite donc que la paramétrisation  $x = \phi(t)$  obéisse à une équation différentielle du premier ordre  $dx^i/dt = \xi^i(x)$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Les théorèmes standards d'unicité et d'existence d'une solution pour les systèmes différentiels du premier ordre impliquent que pour chaque point  $x \in M$ , il passe une unique courbe intégrale maximale ; que nous noterons  $\phi(t) = \exp(t\xi)x$  pour décrire la courbe intégrale maximale passant à travers  $x = \exp(0\xi)x$  à  $t = 0$ . Nous introduisons là une première sorte de groupe de transfor-

mation générée par un champ de vecteurs : les flots. Nous parlerons dans la suite de « générateur infinitésimal » plutôt que de champs de vecteurs du flot. Un flot décrit donc le mouvement d'un point le long d'une courbe, c'est-à-dire un mouvement avec un seul degré de liberté.

Pour finir, on peut classifier localement à un difféomorphisme près (par exemple avec un changement local de coordonnées) les champs de vecteurs en dehors de leur singularité, c'est à dire à des points où ils s'annulent. Ainsi, à tout champ de vecteur lisse ou analytique  $v$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  et  $x_0 \in \mathcal{U}$  un point où ce champ ne s'annule pas, i.e.  $v(x_0) \neq 0$ , on peut "redresser"  $v$  localement (théorème du redressement). C'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local autour de  $y = (y_1, \dots, y_n) = f(x)$  qui transforme  $dx^i/dt = \xi^i(x)$  pour  $i = 1, \dots, m$  dans la forme normale suivante :  $(dy_1/dt = 0, dy_{n-1}/dt = 0, \dots, dy_n/dt = 1)$ . Pour le comprendre, il suffit d'introduire un hyperplan ne contenant pas  $v(0)$ , passant par 0 et dont la direction est définie par les vecteurs  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  associés aux  $n - 1$  premières coordonnées de  $x$  (voir figure A.6). Le changement de coordonnées,  $x \rightarrow y$ , définit par  $x = (x_1, x_2, x_3) = \phi_{y_3}(y_1, y_2, 0)$ , transforme le champ  $v$  en un champ constant.

## A.4 Groupes de Lie

Nous nous intéressons ici à un des espaces topologiques les plus couramment utilisé : les groupes de symétries et plus particulièrement les groupes de Lie agissant sur des variétés en dimension finie. La remarquable théorie des groupes, remonte à l'ouvrage fondamental du mathématicien Sophus Lie au siècle dernier. Lors d'un séjour en France, Sophus Lie découvrit les travaux de Galois portant sur la résolution d'équation algébrique par la théorie des groupes, laissant invariant l'ensemble de ses racines interposées. Quelques années plus tard, il eut une révélation : par un procédé en quelque sorte similaire à la théorie de Galois, il comprit qu'en utilisant les groupes de symétries continues, il devait être possible d'étudier les équations différentielles. Jusqu'à ce jour, toute la théorie qui en résulte, notamment la notion de générateur infinitésimal d'un groupe continu, a engendré des conséquences énormes et profondes dans tous les domaines des mathématiques et de la physique moderne. Puisque les groupes de Lie seront une des pierres angulaires de notre problème, il sera essentiel que nous acquérions une connaissance de base de ces objets mathématiques fondamentaux.

### A.4.1 Notion de groupe

Tout d'abord, nous rappelons qu'un groupe est un ensemble noté  $G$  qui associe une opération de multiplication binaire  $g \cdot h$  pour les éléments de groupe  $g, h \in G$ . Un groupe doit aussi contenir un (unique) élément identité, noté  $e$ , et chaque élément  $g$  du groupe a un inverse  $g^{-1}$  tel que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . L'exemple le plus simple est l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , l'addition étant l'opération de groupe. L'élément identité est 0, et l'inverse de  $x$  est  $-x$ . L'ensemble des nombres réels exclus de zero, i.e.  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$  et l'ensemble des réels positifs  $\mathbb{R}^+$  formant eux aussi des

groupes quand l'opération de groupe est donnée par la multiplication. Dans ce cas là, l'élément identité est le nombre 1.

Intéressons-nous maintenant aux groupes de Lie. Ces groupes sont des types particuliers de groupe topologique. Cela signifie que le groupe est doté d'une topologie de telle manière que la multiplication et l'inversion soient des applications continues. Il porte également la structure d'une variété analytique, de telle manière que la loi de groupe  $(g, h) \mapsto g \cdot h$  et l'inversion  $g \mapsto g^{-1}$  soient des cartes analytiques. Nous pouvons citer quelques exemples de groupes qui appartiennent aux groupes de Lie, avec entre autre, le groupe de rotations  $SO(2)$ , le groupe d'homothéties, le groupe euclidien  $SE(2, \mathbb{R})$ . Ainsi, un groupe de Lie de dimension  $r$  fait souvent référence à un groupe de Lie à  $r$ -paramètre (ou coordonnées locales  $g = (g_1, \dots, g_r)$ ). Nous avons déjà rencontré un groupe à un-paramètre de difféomorphisme : le flot d'un champ de vecteurs  $v$  sur un ouvert  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Comme nous l'avons déjà mentionné, c'est bien un groupe local à un paramètre  $t \cdot x = \exp(t\xi)x$ .

#### A.4.2 Transformations et actions de groupe

Un important domaine de la théorie des invariants est décrit par des actions de groupe agissant sur des variétés ou des ouverts analytiques. Dans ce cas, cette structure supplémentaire nous fournit de puissants et nouveaux outils d'analyse qui ne seraient pas disponibles en considérant d'autres actions générales de groupe. Au travers de ces actions de groupe, nous allons décrire une algèbre sur laquelle, champs de vecteurs et formes différentielles vont pouvoir s'appliquer. L'algèbre de Lie ou groupe de Lie "infinitésimaux" vont jouer un rôle crucial dans la théorie générale des groupes de Lie. En outre, les méthodes infinitésimales de Lie sont utilisées dans certaines applications pour permettre de remplacer les transformations de groupe nonlinéaire compliquées par un simple équivalent infinitésimal. Un exemple très intéressant sur la recherche des groupes de symétrie dans les équations de la chaleur peut-être trouvé dans {Olver, 2008}. Dans cet exemple, les conditions d'invariance infinitésimale forment un système d'équation différentielle linéaire partielle, permettant d'appliquer directement les méthodes analytiques pour reconstruire les invariants requis. L'étape clef étant d'identifier les générateurs infinitésimaux d'action de groupe de transformation comme certains opérateurs différentiels qui agissent tels des fonctions définies sur l'espace.

Commençons par nous intéresser aux manipulations que l'on peut faire sur un groupe, c'est à dire une transformation de groupe. D'une manière générale, un groupe de transformation est une application analytique d'un ouvert  $\mathcal{W}$  vers un ouvert  $\mathcal{U}$  tel que :

$$\varphi : \begin{cases} (G, \mathcal{W}) & \longrightarrow \mathcal{U} \\ (g, x) & \longmapsto \varphi(g, x) =: g \cdot x \end{cases}$$

Nous considérerons par la suite un groupe d'action « local », c'est à dire que pour un  $x \in \mathcal{X}$ , la transformation  $g \cdot x$  est seulement définie pour les éléments du groupe  $g$  suffisamment proches

de l'identité  $e$ . Ainsi, pour un groupe local de transformation, l'application  $\varphi$  est définie sur un ouvert  $\mathcal{W}$  tel que  $\{e\} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \subseteq G \times \mathcal{U}$  et doit vérifier les propriétés suivantes :

- ▶ Composition : si  $(h, x), (g, h \cdot x)$  et  $(g \cdot h, x)$  sont dans  $\mathcal{W}$ , alors  $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$  ;
- ▶ Element identité : pour tout  $x$  dans  $\mathcal{U}$ ,  $e \cdot x = x$  ;
- ▶ Inverse : l'élément du groupe inverse  $g^{-1}$  détermine l'inverse de la transformation défini par l'élément du groupe  $g$ .

Pour tout  $g \in G$ , on définit les applications multiplications à gauche  $L_g : G \rightarrow G$  et à droite  $R_g : G \rightarrow G$  par  $\forall h, L_g(h) = g \cdot h$  et  $R_g(h) = h \cdot g$ . La manipulation des transformations de groupe peut devenir très compliquée lorsqu'on est peu familier avec cette notion. Prenons donc un exemple simple mais pertinent : le groupe affine (réel)  $A(1)$  qui est défini comme le groupe de transformation  $x \rightarrow ax + b$  sur la ligne  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, le groupe affine est paramétrisé par la paire  $(a, b)$  dont les éléments  $a$  et  $b$  sont des réels. La loi de multiplication de groupe est donnée par  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$  et l'élément identité est  $e = (1, 0)$  c'est à dire que  $(a, b) \cdot (c, d)|_{c=1, d=0} = (a, b)$ . Les cartes de multiplication à droite et à gauche sont donc données par  $R_{(a,b)}(c, d) = (c, d) \cdot (a, b) = (ac, bc + d)$ ,  $L_{(a,b)}(c, d) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$ . Nous pouvons vérifier que l'action à droite «  $R$  » est canoniquement associée à l'action à gauche «  $L$  » en définissant  $L_{(a,b)}(c, d) = R_{(a,b)^{-1}}(c, d)$ . Un autre exemple important est donné par le groupe euclidien  $SE(2)$  agissant sur lui-même à droite par composition de translation ( $x \rightarrow x + b$ ) et de rotation (groupe des rotations). On parle aussi d'automorphisme de groupe. Le groupe euclidien à une caractéristique qui comme les groupes des isométries sont des transformations qui préservent leurs normes. Pour tout  $(x_0, y_0, \theta_0) \in G$  l'application  $\varphi(x_0, y_0, \theta_0)$  correspondant à un automorphisme de  $G$  à droite, à la loi de multiplication suivante :

$$R_{(a_0, b_0, \theta_0)}(a, b, \theta) = \varphi_{(a_0, b_0, \theta_0)}(a, b, \theta) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta_0 + b \sin \theta_0 + a_0 \\ -a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0 + b_0 \\ \theta + \theta_0 \end{pmatrix}$$

à ne pas confondre avec le groupe euclidien  $E(2)$  agissant sur le plan affine  $\mathbb{R}^2$  par composition de translation et de rotation autour de l'origine. On dit aussi que c'est un produit semi-direct du groupe des rotations  $U(1)$  par le groupe des translations sur le plan  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $(x, y, \theta) \in G$  l'application  $\varphi(x, y, \theta)$  correspondant à l'action de  $G$  sur le plan affine avec la loi de multiplication suivante :

$$\varphi_{(a, b, \theta)}(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ x \sin \theta + y \cos \theta + b \\ \theta + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Pour finir, on peut classifier les groupes de Lie par rapport à leurs propriétés algébriques. Les différents groupes de Lie ainsi que leurs algèbres sont décrits dans le tableau A.1.

Groupe de Lie	Description	Remarques	Algèbre de Lie	Description	dim/ $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$	espace Euclidien muni de l'addition	abélien, non compact	$\mathbb{R}^n$	le crochet de Lie est nul	$n$
$\mathbb{S}^1$	cercle unité des nombres complexes de module 1	espace homéomorphe à un cercle du plan Euclidien	$\mathbb{R}$	le crochet de Lie est nul	1
$\mathbb{S}^3$	Sphère représentée par les quaternions de module 1	simplement connexe, compact, isomorphe à $SO(3)$	$\mathbb{R}^3$	quaternion de partie réelle nulle, le crochet de Lie étant le produit vectoriel	3
$\mathbb{H}^\times$	quaternions non nuls munis de la multiplication	simplement connexe, non compact	$\mathbb{H}$	quaternion dont le crochet de Lie est le commutateur	4
$GL(n, \mathbb{R})$	groupe général linéaire : matrices réelles $(n \times n)$ , inversibles	non compact	$M(n, \mathbb{R})$	matrices $(n \times n)$ avec le crochet de Lie comme commutateur	$n^2$
$SL(n, \mathbb{R})$	groupe spécial linéaire : matrices réelles avec déterminant unitaire	non compact si $n > 1$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	matrices carrées de trace nulle, le crochet de Lie étant le commutateur	$n^2 - 1$
$O(n, \mathbb{R})$	groupe orthogonal : matrices orthogonales réelles	il s'identifie canoniquement au groupe des matrices orthogonales	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$	matrices antisymétriques carrées, le crochet de Lie étant le commutateur	$n(n - 1)/2$
$SO(n, \mathbb{R})$	groupe spécial orthogonal : matrices orthogonales réelles de déterminant unitaire	correspond au groupe $SE(3)$ avec une origine fixe, compact	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$	matrices antisymétriques carrées réelles	$n(n - 1)/2$
$U(n)$	groupe unitaire : matrices unitaires $(n \times n)$ complexes	isomorphe à $\mathbb{S}^1$ pour $n = 1$	$\mathfrak{u}(n)$	matrices carrées complexes $A$ vérifiant $A = -A^*$	$n^2$

TABLE A.1 – *Tableau des différents groupes de Lie.*

### A.4.3 Représentation du flot d'un champ de vecteur

Après ces quelques exemples de transformation de groupe, revenons un instant sur l'utilisation et la représentation du flot d'un champ de vecteurs. Cette notion nous sera utile par la suite pour bien comprendre l'approche de E.Cartan sur la méthode de normalisation décrite à la fin de cette annexe. La description du flot étant liée au générateur infinitésimal d'un groupe de transformation, regardons un exemple pour comprendre le passage entre groupe de transformation et générateurs infinitésimaux : la translation à droite. La translation à droite coïncide avec le groupe de Lie  $G = \mathbb{R}$  tel que  $x \rightarrow x + t$ . Le générateur infinitésimal noté  $\xi$  associé à cette action est donné par l'opérateur  $v_\xi$  de l'équation différentielle du premier ordre  $\dot{x} = F(x)$  telle que pour chaque fonction lisse  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$v_\xi(F(x)) = \frac{d}{dt}F(e^{-t \cdot \xi})|_{t=0}.$$

On reconnaît bien là le flot associé au générateur infinitésimal (§1.5.3) qui représente cette action par changement infinitésimal  $v_\xi(F(x))$  en  $F(x)$ . En d'autres termes,  $\bar{F}(x) = e^{t\xi} \cdot F(x)$  est la fonction transformée tel que le développement en série de Taylor nous donne :

$$\bar{F}(x) = F(e^{-t \cdot \xi} \cdot x) = F(x) + t \cdot v_\xi(F(x)) + \dots$$

Dans notre cas, nous avons le développement suivant :  $F(x + t) = e^{(t\partial/\partial x)}F(x)$ . Donc une translation est générée par différenciation (le lecteur pourra trouver plus de détails dans {Olver, 2003}). Le flot peut-être reconstruit directement à partir du générateur infinitésimal en résolvant une équation différentielle du premier ordre dont les courbes intégrales sont les orbites notées  $\mathcal{O}_x = \{e^{-t\xi} \cdot x | t \in \mathbb{R}\}$  et qui représentent l'ensemble des flots à travers  $x \in \mathcal{X}$ . Par ailleurs, voici une autre définition rencontrée dans la littérature pour définir une orbite : passant par  $x$ , une orbite est l'ensemble de tous les points  $g \cdot x$  images de l'action du groupe  $G$ .

Les flots et donc les orbites seront pour nous des objets qui nous permettront de juger qualitativement de la pertinence d'un groupe de transformation. Effectivement, définissons le sous-groupe isotopique suivant :  $G_x = \{g | g \cdot x = x\}$  pour  $x \in \mathcal{M}$ , c'est à dire l'ensemble des éléments qui laissent  $x$  invariant sous leurs actions. Un groupe de transformation pourra avoir les propriétés suivantes :

- ▶ Un groupe est dit libre si et seulement si un élément du groupe  $g \in G$  qui fixe un point  $x \in \mathcal{M}$  est l'identité ;  $G_x = \{e\}$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$  ;
- ▶ Un groupe est dit localement libre si et seulement si toutes les orbites ont la même dimension que  $G$  ;  $G_x \subset G$  est discret pour tout  $x \in \mathcal{M}$  ;
- ▶ Un groupe est dit régulier si et seulement si ces orbites forment un feuillage régulier.

## A.5 Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie

Comme nous l'avons vu précédemment,  $L_g : h \mapsto g \cdot h$  et  $R_g : h \mapsto h \cdot g$  indiquent les cartes de multiplication à droite et à gauche. Un champ de vecteurs  $v$  est appelé invariant à droite si  $DL_g(v) = v$ , et invariant à gauche si  $DR_g(v) = v$  pour tout  $g \in G$ . Autrement dit, pour tout  $h, g \in G$ , on doit avoir  $(DR_g)|_h(v(h)) = v(h \cdot g)$  pour la multiplication à droite et de même pour la multiplication à gauche on doit avoir  $(DL_g)|_h(v(h)) = v(g \cdot h)$ . On voit ainsi que chaque champ de vecteurs invariants à droite (respectivement à gauche) est uniquement déterminé par sa valeur en l'identité  $e$  i.e,  $v|_g = DR_g(v|_e)$ . Ainsi, nous pouvons identifier l'algèbre de Lie à droite (respectivement à gauche) avec l'espace tangent à  $G$  en l'élément identité,  $TG|_e$ . Pour s'en convaincre, revenons sur l'exemple du groupe affine  $A(1)$ . Une base  $\partial_a|_e, \partial_b|_e$ , de  $TA(1)|_e$  pour le groupe de transformation à droite  $R_{(a,b)}(c, d) = (ac, bc + d)$  est donnée par la paire de champ de vecteurs invariants à droite soit :

$$v_1 = DR_{(a,b)}[\partial_a|_e] = a\partial_a + b\partial_b \quad ; \quad v_2 = DR_{(a,b)}[\partial_b|_e] = \partial_b \quad (\text{A.1})$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser la notion de champ de vecteurs invariants dans d'autres chapitres pour la construction des observateurs invariants. Quand un groupe de Lie agit sur lui-même par la multiplication à droite ou à gauche, l'existence de champs de vecteurs invariants, c'est à dire, l'algèbre de Lie, a été développée précédemment. Pour des actions plus générales de groupe, un champ de vecteurs invariants  $w$  est caractérisé par la condition  $Dg(w|_x) = w|_{g \cdot x}$  pour tous éléments du groupe  $g \in G$  et pour tout  $x$  dans le domaine de  $g$ . Le critère d'invariance infinitésimal pour un tel champ de vecteurs est géré par le crochet de Lie (voir {Olver, 2003} pour plus d'informations). Par rapport à la situation où nous avons des fonctions invariantes ou des champs de vecteurs invariants sur des groupes de Lie, l'existence d'un champ de vecteurs sur un groupe de transformation générique n'est pas une chose facile. Pour s'en convaincre, prenons par exemple le groupe des translations agissant sur  $\mathbb{R}$ ,  $(x \rightarrow x + b)$ . Pour ce groupe, chaque multiple constant de la translation du champ de vecteurs  $\partial/\partial x$  est un champ de vecteurs invariants. En effet, un champ de vecteurs quelconque est donné par  $u(x)\partial/\partial x$ . Par définition, pour que ce champ de vecteurs soit invariant à droite, il faut que  $u(x + t) = u(x)$  quelque soit  $t$ . Donc tout champ de vecteurs invariants à droite doit être proportionnel au champ de vecteurs constants  $\partial/\partial x$ . En revanche, pour d'autres groupes de transformation comme les groupes "affine" ou "projection", il n'est pas possible de garantir l'existence de tous les champs de vecteurs invariants. En effet, le seul cas dans lequel un nombre déterminé de champ de vecteurs invariants est disponible, est celui où le groupe agit librement, c'est à dire que la dimension de l'espace sur lequel agit le groupe est assez large ( $m < r = \dim(G)$ ). Dans ce cas, nous avons la garantie d'avoir la collection maximale de tous les champs de vecteurs invariants. Dans le cas où le groupe ne pourrait pas agir librement, une astuce (lourde à mettre en œuvre) est d'utiliser une procédure de prolongation naturelle afin d'augmenter la dimension de l'espace sur lequel agit le groupe.

## A.6 Méthode du repère mobile de Cartan

Nous terminons cette partie par une méthode clef utilisée dans les groupes de transformations de Lie : la normalisation. La méthode de normalisation est le coeur de l'approche utilisée par Cartan pour les repères mobiles et les problèmes d'équivalence.

### A.6.1 Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

L'idée de base est simple, nous allons considérer une variété notée  $\Sigma$  qui s'apparente aux sous-ensembles ouverts  $U_\alpha \subset \mathcal{X}$  d'un espace Euclidien de  $\mathbb{R}^3$  avec un groupe de transformation  $G$  à deux paramètres agissant sur  $\Sigma$  et dont les orbites de ce groupe sont des plans (nous nous plaçons dans les coordonnées du redressement). La technique de normalisation repose sur l'idée suivante : sous la condition de régularité et de liberté du groupe de transformation évoquée à la fin de la section A.4.3, nous pouvons définir un jeu de coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tel que présenté sur la figure A.7 ; les directions  $\xi_f = (\xi_1, \xi_2)$  permettent de parcourir une orbite, tandis que la direction transverse  $\xi_b = \xi_3$  détermine sur quelle orbite nous nous trouvons. Ainsi pour savoir si deux points  $P$  et  $S$  sont sur la même orbite, c'est à dire s'il existe un élément  $g \in G$  tel que l'on peut écrire sous une forme compacte  $S = \varphi_{g(P)}(P)$ , il suffit de vérifier que les deux points ont la même coordonnée  $\xi_3$ . Nous pouvons reformuler ce problème comme la recherche d'une fonction invariant de  $\xi_3$ .

Nous supposons donc un jeu de coordonnées noté respectivement  $(p_1, p_2, p_3)$  pour les coordonnées d'un point  $P$  ; respectivement  $(s_1, s_2, s_3), (r_1, r_2, r_3)$  les coordonnées de  $S, R$  dans un référentiel donné. Comme dit précédemment, si  $P$  et  $S$  appartiennent à la même orbite, il existe un élément  $g \in G$  tel que :

$$\begin{aligned} s_1 &= (\varphi_{g(P)}(P))_1 \\ s_2 &= (\varphi_{g(P)}(P))_2 \\ s_3 &= (\varphi_{g(P)}(P))_3 \end{aligned}$$

Tout le problème ici est de se ramener au cas local des paramètres du groupe  $g$ , c'est à dire trouver les fonctions invariantes du groupe local de transformation. Pour trouver les fonctions invariantes, nous devons éliminer les deux paramètres associés à  $g$ . Pour cela, nous introduisons un troisième point  $R$ , qui se trouve sur la même orbite que  $P$ , que nous allons prendre comme référence et dont sa coordonnée en  $\xi_3$  fait partie du groupe de coordonnée paramétré par la section transversale à toutes les orbites tel que  $K = \{\xi_3^1 = c_1, \dots, \xi_3^r = c_r\}$  où l'indice  $r := \dim(G)$ . On peut alors déterminer localement l'élément  $g(P)$  du groupe vérifiant  $R = \varphi_{g(P)}(P)$ .

Cet élément est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} r_1 &= (\varphi_{g(P)}(P))_1 \\ r_2 &= (\varphi_{g(P)}(P))_2 \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites rappelé à la section A.1 (le rang de ce système par rapport aux deux paramètres associés à  $G$  doit être 2), nous avons ainsi l'application  $\gamma : \Sigma \rightarrow G$  que l'on appelle le « repère mobile » :

$$g(P) = \gamma(P, r_1, r_2),$$

Ainsi, une fonction invariante s'écrit comme la normalisation du groupe de transformation par le repère mobile, c'est à dire :

$$I(P) = (\varphi_{\gamma(P, r_1, r_2)}(P))_3,$$

La propriété d'invariance veut dire que  $I(\varphi_g(P)) = I(P)$ , ainsi comme R et S sont sur la même orbite  $R = \varphi_{\gamma(S, r_1, r_2)}(S)$ .

### A.6.2 Le cas général

Considérons un groupe  $G$  agissant régulièrement sur une variété  $\Sigma$  de dimension  $n$  avec des orbites de dimension  $r$  tel que  $r \leq s$ . Dans les coordonnées locales  $\xi$  sur  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , notons  $(\phi_g)_g \in G$  la transformation associée à l'élément  $G$ . Comme dans la section 1.6, pour trouver l'existence d'une solution locale, nous supposerons que  $\partial_g \phi_g$  est de rang plein  $r := \dim(G)$  au point  $(e, z^0) \in G \times \Sigma$ . On peut alors décomposer  $\phi_g$  en  $(\phi_g^a, \phi_g^b)$  dont les composantes sont de dimensions respectives  $r$  et  $n - r$ , et de sorte que  $\phi_g^a$  soit inversible par rapport à  $g$  autour de  $(e, z^0)$ . Les équations de normalisation s'obtiennent en fixant :

$$\phi_g^a(z) = c,$$

où  $c$  est une constante appartenant à l'image de  $\phi^a$ . Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une solution locale (le repère mobile  $\gamma : \Sigma \rightarrow G$ ) tel que  $g = \gamma(z)$ , qui est l'unique élément qui envoie  $z$  sur la section transverse. Ainsi, un ensemble complet  $I$  de  $n - r$  invariants fonctionnellement indépendants est obtenu en substituant  $g = \gamma(z)$  dans les autres composantes de la transformation,

$$I(z) := \phi_{\gamma(z)}^b(z)$$

La méthode du repère mobile nous permet ainsi de trouver un ensemble complet d'invariants locaux  $I(z) \in \mathbb{R}^n$  de la réduction de l'action du groupe à son action sur l'espace d'état  $\mathcal{X}$ .

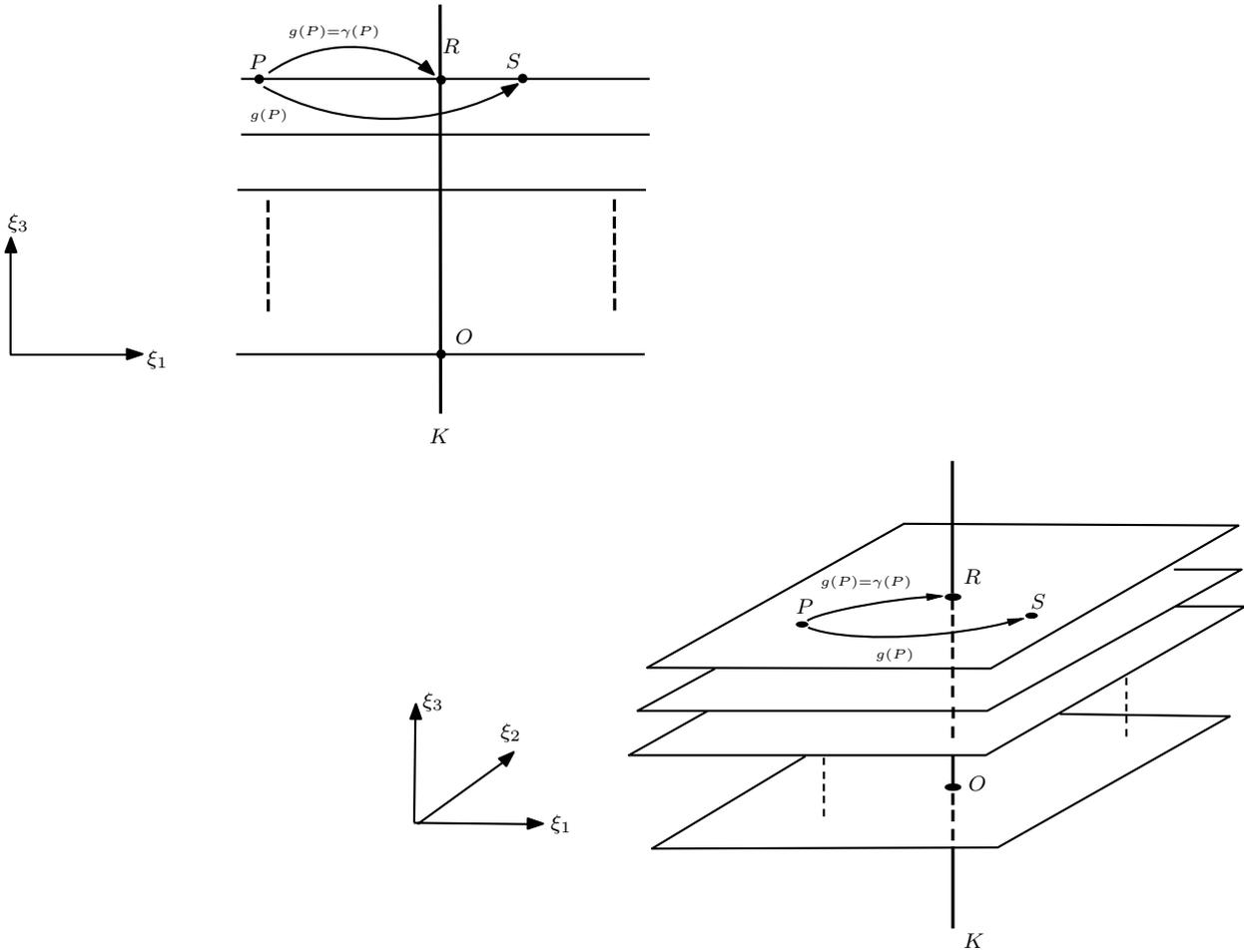


FIGURE A.7 – Orbits du groupe de transformation  $G$  agissant sur  $\Sigma$  dans les coordonnées du redressement. Cas 2D et 3D

# Annexe B

## Notions de logique floue

### Sommaire

---

B.1 Fuzzification . . . . .	217
B.2 Opérateurs logiques flous et inférences . . . . .	220

---

Les décisions floues s’obtiennent à partir d’un traitement flou, détaillé par le schéma bloc de la figure B.1. Avant d’aller plus loin dans le détail du fonctionnement du traitement flou, il convient de se familiariser avec un vocabulaire qui lui est propre et dont les principaux termes sont définis dans la tableB.1.

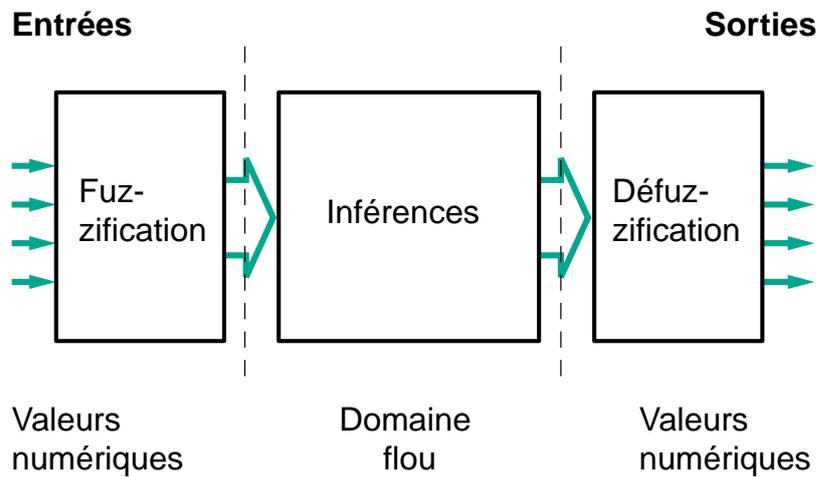


FIGURE B.1 – Vue globale du traitement flou

### B.1 Fuzzification

La fuzzification est une étape qui permet de passer du domaine réel (une mesure par exemple) au domaine du flou à travers un ensemble flou et une fonction d’appartenance. Un ensemble flou

DESIGNATION	DEFINITION
Base de connaissance	Ensemble des fonctions d'appartenance et des règles d'un système flou contenant l'expertise, la connaissance de l'opérateur, de l'expert, etc.
Conclusion	Une conclusion de règle est une proposition associant une variable linguistique et un terme linguistique écrite après le "alors" de la règle.
Défuzzification	Transformation, après inférence, d'un ensemble flou d'une variable linguistique de sortie en valeur numérique.
Degré d'appartenance	Un élément $x$ appartient à un ensemble flou $A$ avec un degré d'appartenance compris entre 0 et 1, donné par la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ .
Degré de vérité	Le degré de vérité, ou encore degré d'activation, d'une règle prend une valeur $y$ comprise entre 0 et 1 déduite des degrés d'appartenance des prédicats de la règle. Il influe directement sur la valeur des conclusions de cette même règle.
Ensemble flou	Un ensemble flou est défini par une fonction d'appartenance qui peut prendre toutes les valeurs réelles comprises entre 0 et 1.
Fonction d'appartenance	Fonction $\mu_A(x)$ qui à toute valeur d'entrée $x$ fait correspondre son degré d'appartenance à l'ensemble $A$ . Cette valeur graduelle est comprise entre 0 et 1.
Fuzzification	Transformation d'une valeur numérique en degré d'appartenance flou par évaluation d'une fonction d'appartenance.
Inférence	Cycle de calcul des degrés de vérité de toutes les règles de la base ainsi que de tous les ensembles flous des variables linguistiques se trouvant dans les conclusions de ces règles.
Prédicat	Appelé encore prémisse ou condition, un prédicat de règle est une proposition associant une variable linguistique et un terme linguistique écrite entre le "si" et le "alors" de la règle.
Terme linguistique	Terme associé à une fonction d'appartenance caractérisant une variable linguistique.
Variable linguistique	Variable numérique appliquée en entrée, pour fuzzification, ou en sortie, après défuzzification, d'un module de logique floue.

TABLE B.1 – *Vocabulaire de la logique floue*

$A$  est un ensemble affecté d'une fonction d'appartenance notée  $\mu_A(x)$  prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ . L'ensemble flou  $A$ , lui-même sous ensemble flou de  $X$  (discret et fini), est noté :

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

où  $\mu_A(x)$  est la fonction d'appartenance<sup>11</sup> de  $x$  et  $X$  l'univers du discours.

Pour bien comprendre ce concept, supposons que nous ayons à définir l'ensemble des personnes de « taille moyenne ». En logique classique, nous conviendrons par exemple que les personnes de taille moyenne sont celles dont la taille est comprise entre 1.60m et 1.80m. La fonction caractéristique de l'ensemble (cf. Figure B.2a) donne « 0 » pour les tailles hors de l'intervalle  $[1.60\text{m}; 1.80\text{m}]$  et « 1 » dans cet intervalle. En revanche, l'ensemble flou des personnes de « taille moyenne » sera défini par une fonction d'appartenance  $\mu$  qui diffère d'une fonction caractéristique par le fait qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0,1]$ . A chaque taille possible (variable  $x$  dans l'équation ci-dessus) correspondra un degré d'appartenance  $\mu$  à l'ensemble flou des tailles moyennes comprises entre 0 et 1 (cf. Figure B.2b). Par ailleurs, nous pouvons définir plusieurs ensembles flous sur une même variable avec par exemple les ensembles « taille petite », « taille moyenne » et « taille grande » dont chacun est explicité par une fonction d'appartenance (cf. Figure B.3a). Ces ensembles peuvent théoriquement prendre n'importe quelle forme mais en pratique nous les définirons convexes, normalisés et continus par morceaux. L'exemple ci-dessus montre bien la gradualité de la représentation par logique floue, plus proche

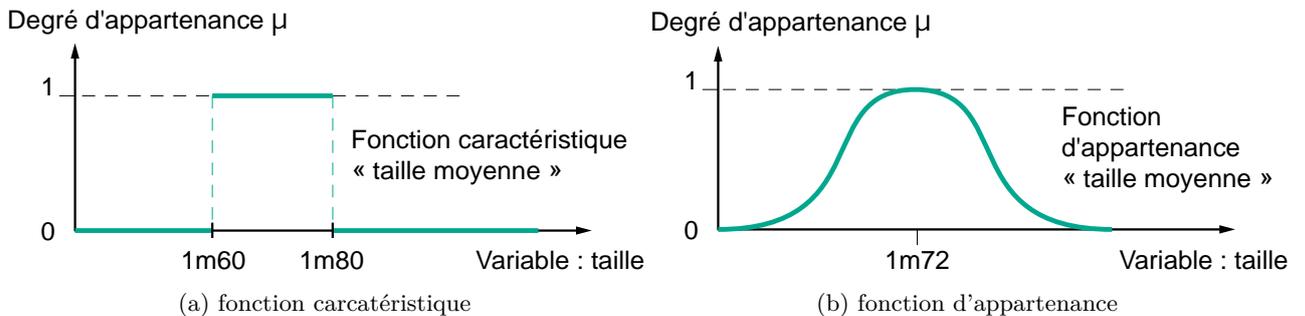


FIGURE B.2 – Différence entre logique « classique » et logique « floue »

du raisonnement de l'être humain ; avantage qui ce fait évidemment au détriment de la simplicité de la représentation. Ainsi, une personne qui mesure 1.80m appartient à l'ensemble « taille grande » avec un degré d'appartenance de 0.3 et à l'ensemble « taille moyenne » avec un degré de 0.7. Si nous faisons le parallèle avec la logique classique, le passage de moyen à grand serait tellement brusque qu'une personne de 1.80m serait considérée de taille moyenne alors qu'une personne de 1.81m serait grande, ce qui choque l'intuition. A partir d'une variable linguistique (par exemple : taille), la fuzzification consistera donc à :

- passer d'une variable numérique (par exemple 1.60m) à une variable symbolique (par

11. Nous noterons  $\mu$  au lieu de  $\mu_A(x)$  pour alléger les notations.

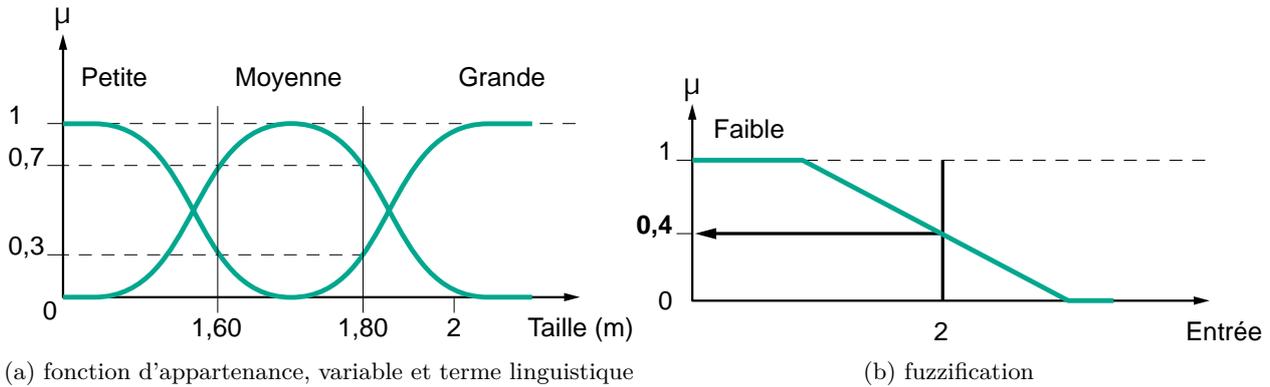


FIGURE B.3 – Mise en forme du problème pour la fuzzification

exemple 1.60m correspond à (petit(0.3), moyen(0.7), grand(0.0)) que l'on qualifie aussi de terme linguistique ;

- construire une proposition floue appelée aussi proposition élémentaire de la forme : « taille est 1.60 » où taille est une variable linguistique.

Par exemple (cf. Figure B.3b), la valeur courante de la variable « Entrée » est 2, le degré d'appartenance à la fonction d'appartenance « entrée Faible » est égal à 0.4 qui est le résultat de la fuzzification. Inversement, on peut aussi dire que la proposition « entrée Faible » est vraie à 0.4 et dans ce cas, on parle de degré de vérité de la proposition.

## B.2 Opérateurs logiques flous et inférences

La logique floue est munie d'un ensemble d'opérateurs permettant d'écrire des combinaisons logiques entre notions floues, c'est à dire de faire des calculs sur des degrés de vérité. Comme pour la logique classique, nous allons définir des opérateurs ET, OU, négation. Parmi les nombreuses variantes de ces opérateurs, nous utiliserons ceux dits de Zadeh qui se basent sur les notions d'union et d'intersection. Désormais, le degré de vérité d'une propriété  $A$  sera noté  $\mu(A)$ .

Ainsi, Zadeh définit l'opérateur logique correspondant à l'intersection des ensembles vérifiant la proposition  $A$  ET  $B$  par le minimum des degrés de vérité de  $A$  et de  $B$ , c'est à dire  $\mu(A \text{ ET } B) = \min(\mu(A), \mu(B))$ . Par ailleurs, l'opérateur logique correspondant à l'union des ensembles vérifiant la proposition  $A$  OU  $B$  est calculé par le maximum des degrés de vérité de  $A$  et de  $B$ , c'est à dire  $\mu(A \text{ OU } B) = \max(\mu(A), \mu(B))$ . Enfin, l'opérateur logique correspondant au complément d'un ensemble s'écrira comme la négation de cet ensemble tel que  $\mu(\bar{A}) = 1 - \mu(A)$ . Comme il a été dit précédemment, la logique floue a pour objectif de formaliser et de mettre en oeuvre le raisonnement d'un être humain. Pour ce faire, l'outil le plus utilisé dans les applications de logique floue est la base de règles floues.

Grâce à l'ensemble des opérateurs définis par Zadeh, il est possible de décrire une base de règles floues composée de règles qui sont généralement utilisées en parallèle, mais qui peuvent

également être enchainées dans certaines applications. Une règle est du type : Si « prédicat » ALORS « conclusion ». Par exemple : Si « température élevée ET pression forte » ALORS « ventilation forte et soupape grande ouverte ». Afin de décrire les concepts utilisés par une base de règles floues, nous utiliserons le mécanisme d'inférence de Mandani qui comprend des règles linguistiques faisant appel à des fonctions d'appartenance. Ce mécanisme se détaille en quatre étapes :

1. **la fuzzification** qui consiste à évaluer les fonctions d'appartenance utilisées dans les prédicats des règles afin de passer du domaine réel au domaine flou (cf. Figure B.4) ;

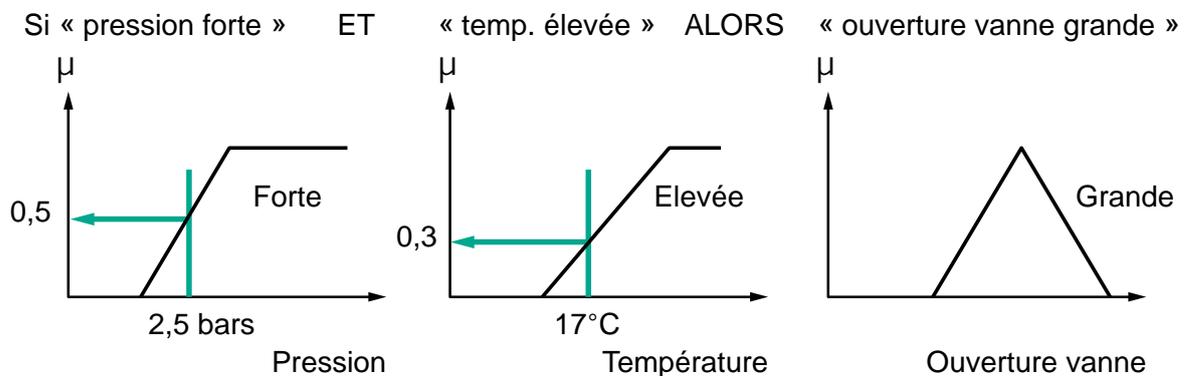


FIGURE B.4 – Fuzzification

2. **l'activation d'une règle** qui s'effectue par l'évaluation du prédicat de chaque règle via les combinaisons logiques des propositions du prédicat. Dans l'illustration de la figure B.5, le « ET » est réalisé en effectuant le minimum entre les degrés de vérité des propositions.

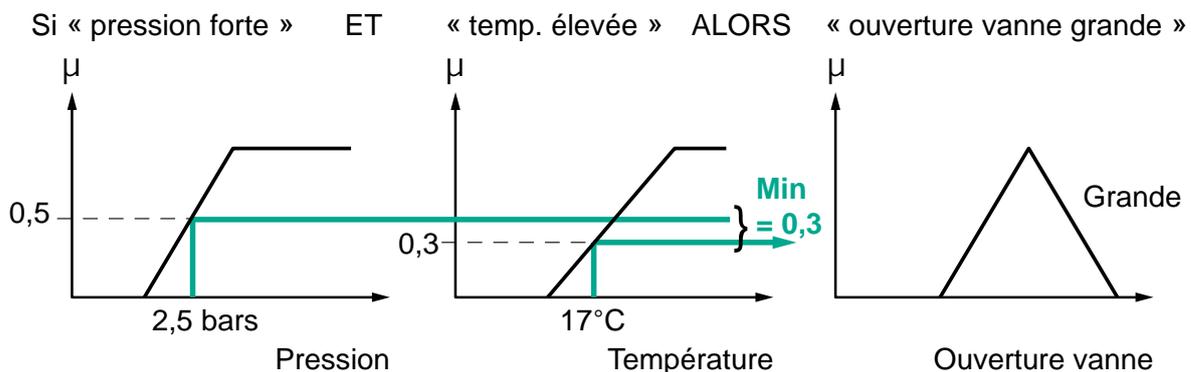


FIGURE B.5 – Activation

3. **l'implication** qui est calculé à partir de la conclusion de la règle. Pour ce faire, il existe plusieurs opérateurs d'implication mais le plus utilisé est celui de Mandani :

$$\mu_{A \rightarrow B} = \min(\mu(A), \mu(B)).$$

Ainsi, l'ensemble flou de conclusion est construit en réalisant le minimum entre le degré d'activation et la fonction d'appartenance comme l'illustre la figure B.6.

**Remarque 2**

*On utilisera pas de clause « OU » dans les conclusions, car elles introduiraient une incertitude dans la connaissance (l'expertise ne permettrait pas de déterminer quelle décision prendre). Cette incertitude n'est pas prise en compte par le mécanisme d'inférence de Mandani, qui ne permet de gérer que des imprécisions.*

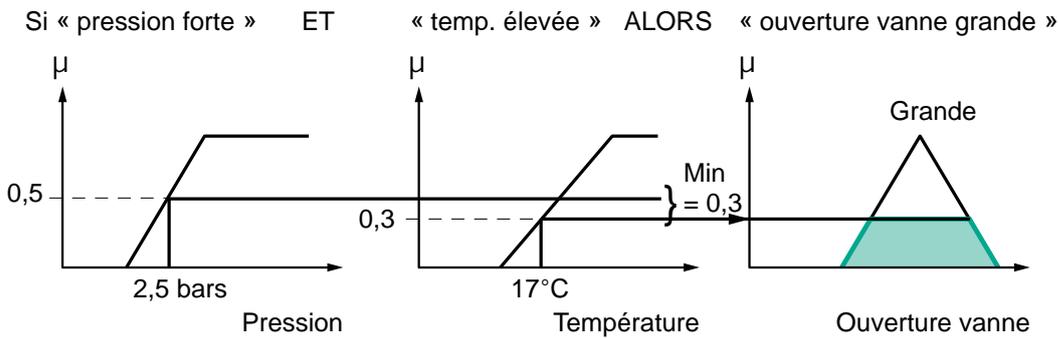


FIGURE B.6 – *Implication*

4. **l'agrégation** qui est construit à partir d'agrégation des ensemble flous obtenus par chacune des règles concernant cette sortie. Dans l'exemple suivant, nous présentons le cas où deux règles agissent sur une sortie. On considère que les règles sont liées par un « OU » logique ce qui correspond donc au calcul du maximum entre les fonctions d'appartenance résultantes pour chaque règle (cf. Figure B.7).

L'agrégation est l'étape finale qui nous permettra de trouver un ensemble de décision flou. Si nous comparions un ensemble de décisions d'un système flou avec celui basé sur de la logique classique, nous verrions que ce dernier ne peut générer que des surfaces linéaires. Ainsi, toute la puissance de la logique floue sera d'utiliser un système d'inférence dont les décisions floues sont sans discontinuité, flexible et non linéaire. Un ensemble de décisions floues pour le réglage de l'estimateur invariant développé au chapitre 4 sera obtenu à partir du traitement flou décrit précédemment. Pour ce faire, nous utiliserons une expertise des différents réglages de l'observateur obtenu à partir d'un nombre conséquent de simulation sur données réelles. Ainsi, nous obtiendrons une base de règle floues écrite textuellement à l'aide de tableaux tel que chaque règle soit dépendante des entrées et sorties du système.

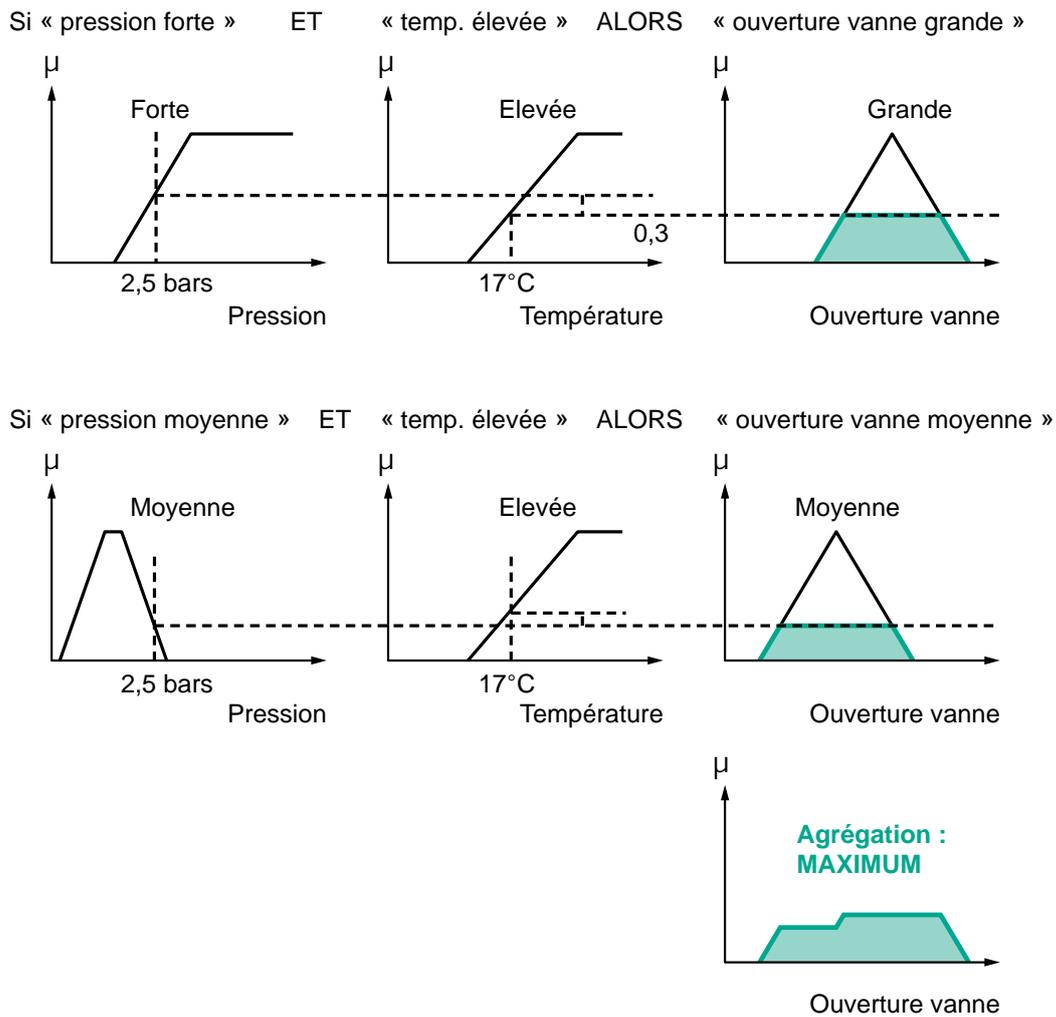


FIGURE B.7 – Agrégation



## Annexe C

# Quaternions et rotations

Un quaternion de norme unitaire permet une paramétrisation globale de l'orientation et de la rotation d'un corps rigide en trois dimensions. En effet, un quaternion de norme unitaire s'écrit de la manière suivante :

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$$

Pour tout vecteur  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ , l'action de l'opérateur  $q^{-1} * \mathbf{p} * q = R_q \cdot \mathbf{p}$  est associée à une matrice de rotation  $R_q \in SO(3)$  qui s'interprète comme une rotation autour de l'axe  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$  avec un angle  $\theta$ .

Mais comment un quaternion peut-il vivre dans  $\mathbb{R}^4$  tout en opérant sur un vecteur qui vit dans  $\mathbb{R}^3$ ? En fait, un vecteur  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  peut-être vu comme un quaternion pur dont la partie réelle est nulle  $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ . Ainsi, quand la partie réelle est un scalaire  $p_0 \in \mathbb{R}$ , le quaternion  $p$  s'écrit de la manière suivante :

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons utiliser le produit vectoriel pour écrire le produit (non commutatif) de deux quaternions sous une forme compacte tel que :

$$p * q \doteq \begin{pmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

L'élément unité du quaternion est noté  $e \doteq (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  et  $(p * q)^{-1} = q^{-1} * p^{-1}$ .

Enfin, dans ce mémoire nous utilisons très souvent les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} p \times q &\doteq \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2}(p * q - q * p) \\ (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}(p * q - q * p) * r. \end{aligned}$$



# Bibliographie

- AGHANNAN, N. et ROUCHON, P. (2002). On invariant asymptotic observers. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1479–1484.
- ALDON, M. J. (2001). *Capteurs et Méthodes pour la Localisation des Robots Mobiles*. S7852. Techniques de l’Ingénieur.
- ALLAN, D. (1966). Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2):221–230.
- ALLAN, D. W. (1987). Time and frequency (time-domain) characterization, estimation, and prediction of precision clocks and oscillators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 34(6):647–654.
- ALPACH, D. L. et SORENSON, H. W. (1972). Nonlinear bayesian estimation using gaussian sum. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4):439–448.
- ALPERT, B. K. (1992). *Wavelets and other bases for fast numerical linear algebra*. C.K. Chui, Wavelets : A tutorial in theory and applications.
- BAR-ITZHACK, I. Y. (1996). Request : A recursive quest algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(5):1034–1038.
- BARCZYK, M. et LYNCH, A. F. (2013). Invariant observer design for a helicopter uav aided inertial navigation system. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 21(3):791–806.
- BARRAU, A. et BONNABEL, S. (2014). The invariant extended kalman filter as a stable observer. *arxiv : 1410.1465*.
- BELL, B. (1994). The iterated kalman smoother as a gauss-newton method. *SIAM Journal of Optimization*, 4:626–636.
- BERGER, M. et GOSTIAUX, B. (1972). *Géométrie Différentielle*. Armand Colin, Paris.
- BESANÇON, G., ZHANG, Q. et HAMMOURI, H. (2004). High-gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems. In *Proceedings of NOLCOS, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*.

- BESTLE, D. et ZEITZ, M. (1983). Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems. *International journal of Control*, 38:419–431.
- BIJKER, J. et STEYN, W. (2008). Kalman filter configurations for a low-cost loosely integrated inertial navigation system on an airship. *Control Engineering Practice*, 16(12):1509–1518.
- BIRK, J. et ZEITZ, M. (1988). Extended luenberger observer for nonlinear multi-variable systems. *International journal of Control*, 47(6):1823–1836.
- BONNABEL, S. (2007). Left-invariant extended kalman filter and attitude estimation. *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1027–1032.
- BONNABEL, S., MARTIN, P. et ROUCHON, P. (2008). Symmetry-preserving observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11):2514–2526.
- BONNABEL, S., MARTIN, P. et ROUCHON, P. (2009a). Non-linear symmetry-preserving observers on lie groups. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7):1709–1713.
- BONNABEL, S., MARTIN, P. et SALAÜN, E. (2009b). Invariant extended kalman filter : Theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1297–1304.
- BREAKWELL, J. V. (1967). Estimation with slight non-linearity.
- BRONZ, M., CONDOMINES, J. P. et HATTENBERGER, G. (2013). Development of an 18 cm micro air vehicle. *International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (IMAV)*.
- CONDOMINES, J. P., CÉDRIC, S. et HATTENBERGER, G. (2013). Nonlinear state estimation using an invariant unscented kalman filter. *AIAA Guidance, Navigation and Control (GNC) Conference*, pages 1–15.
- CONDOMINES, J. P., CÉDRIC, S. et HATTENBERGER, G. (2014). Pi-invariant unscented kalman filter for sensor fusion. *53 rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1035–1040.
- CRASSIDIS, J. L. et MARKLEY, F. L. (2003). Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(4):536–542.
- CYGANEK, B. et SIEBERT, J. P. (2009). *An Invitation to 3-D Vision Vision Techniques and Algorithms*. Wiley.
- DARLING, J. E., BALAKRISHNAN, S. N. et D’SOUZA, C. (2013). Sigma point modified state observer for nonlinear unscented estimation. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*.
- DE AGOSTINO, M., MANZINO, A. M. et PIRAS, M. (2013). Performance comparison of different mems-based imus. *In Position Location and Navigation Symposium (PLANS) IEEE*.

- 
- DE LAUBIER, A. (2008). *Etalonnage et mise en œuvre d'une centrale inertielle pour la localisation 6D d'un robot mobile*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, Clermont-Ferrand.
- DIOP, S. (2013). On a differential algebraic approach of control observation problems. *archives-ouvertes*.
- DIOP, S. et FLIESS, M. (1991). Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 714–710.
- DIOP, S. et SIMEONOV, I. (2009). On the biomass specific growth rates estimation for anaerobic digestion using differential algebraic techniques. *Bioautomation*, 13(3):47–56.
- FARRELL, J. A. (2008). *Aided Navigation GPS with High Rate Sensors*. McGraw-Hill, New York, USA.
- FARRELL, J. A. et BARTH, M. (1998). *The Global Positioning System and Inertial Navigation*. McGraw-Hill, New York, USA.
- FARUQI, F. et TURNER, K. (2000). Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems. *Applied Mathematics and Computation*, 115(2-3):213–227.
- FARZA, M., SAAD, M. et ROSSIGNO, L. (2004). Observer design for a class of mimo nonlinear. *Automatica*, 40(1):135–143.
- FISHER, R. A. (1922). *On the Mathematical Foundations of Theoretical Statics*. Philosophical Transactions of the Royal Society-London.
- GAUTHIER, J. P., HAMMOURI, H. et OTHMAN, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- GORDON, N. J., SALMOND, D. J. et SMITH, A. F. M. (1993). Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEEE Proceedings on Radar and Signal Processing*, 140(2):107–113.
- GREWAL, M. S., WEILL, L. R. et ANDREWS, A. P. (2001). *Global positioning systems, inertial navigation, and intergration*. John Wiley and Sons, Inc.
- HATTENBERGER, G., BRONZ, M. et GORRAZ, M. (2014). Using the paparazzi uav system for scientific research. *IMAV 2014 : International Micro Air Vehicle Conference and Competition*, pages 12–15.
- HIGGINS, W. T. (1975). A comparison of complementary and kalman filtering. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 11:321–325.
- JAZWINSKI, A. H. (1970). *Stochastic processes and Filtering theory*. New York Academic.

- 
- JULIER, S. J. (2003). The spherical simplex unscented transformation. *Proceedings of the American Control Conference*, 3:2430–2434.
- JULIER, S. J. et UHLMANN, J. K. (2002). Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 887–891.
- JULIER, S. J. et UHLMANN, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92:401–422.
- JULIER, S. J., UHLMANN, J. K. et DURRANT-WHYTE, H. F. (1995). A new approach for filtering nonlinear systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1628–1632.
- JULIER, S. J., UHLMANN, J. K. et DURRANT-WHYTE, H. F. (2000). A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transaction Automatic Control*, 45(3):477–482.
- KALMAN, R. E. (1960a). A new approach to linear filtering. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*.
- KALMAN, R. E. (1960b). A new approach to linear filtering. transactions of the asme. *Journal of Basic Engineering*, 82:35–45.
- KAZANTZIS, N. et KRAVARIS, C. (1998). Nonlinear observer design using lyapunov’s auxiliary theorem. *Systems and Control Letters*, 34(5):241–247.
- KELLER, H. (1987). Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical. *International journal of Control*, 46(6):1915–1930.
- KOLMOGOROV, A. (1922). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*. Springer.
- KOU, S. R., ELLIOTT, D. L. et TARN, T. J. (1975). Exponential observers for nonlinear dynamic exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Information and Control*, 29(204-216).
- KRENER, A. J. et ISIDORI, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3(1):47–52.
- LAGEMANN, C. J. T. et MAHONY, R. (2008). Observer design for invariant systems with homogeneous observations. *arxiv*.
- LAUMOND, J. P. (2001). *La robotique mobile*. Hermès.
- LAVIOLA, J. J. (2004). A comparison of unscented and extended kalman filtering for estimating quaternion motion. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2190–2195.
- LAWRENCE (1998). *Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control*. Springer-Verlag.

- 
- LEFEBVRE, T., BRUYNINCKX, H. et DE SCHUTTER, J. (2002). A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1406–1409.
- LEFFERTS, E. J., MARKLEY, F. L. et SHUSTER, M. D. (1982). Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 5(5):417–429.
- LEVINE, J. et MARINO, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters. *Systems and Control Letters*, 7:133–142.
- LIM, H. et PARK, J. (2012). Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *IEEE Robotics and Automation*, vol.19(No,2):1070–9932.
- LUENBERGER, D. G. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602.
- MA, Y., SOATTO, S., KOSECKA, J. et SASTRY, S. (2004). *An Invitation to 3-D Vision : From Images to Geometric Models*. Springer.
- MAHONY, R., HAMEL, T. et PFLIMLIN, J.-M. (2008). Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group. *IEEE Transaction Automatic Control*, 53:1203–1218.
- MAITHRIPALA, D., DAYAWANSA, W. P. et BERG, J. M. (2005). Intrinsic observer-based stabilization for simple mechanical systems on lie groups. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44:1691–1711.
- MANECY, A., VIOLLET, S. et MARCHNAD, N. (2012). Bio-inspired hovering control for an aerial robot equipped with a decoupled eye and a rate gyro. *Proceedings of the IEEE/RJS International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1110–1117.
- MARKLEY, F. L., BERMAN, N. et SHAKED, U. (1993). Hinfity-type filter for spacecraft attitude estimation. *AAS/GSFC International Symposium on Space Flight Dynamics*.
- MARTIN, P. et SALAÜN, E. (2007). Invariant observers for attitude and heading estimation from low-cost inertial and magnetic sensors. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1039–1045.
- MARTIN, P. et SALAÜN, E. (2008). An invariant observer for earth-velocity-aided attitude heading reference systems. *17th World Congres. The International of Automatic Control*.
- MARTIN, P. et SALAÜN, E. (2010). Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system. *Control Engineering Practice*, pages 712–722.
- MEHRA, R. K. (1970). On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(2):175–184.

- MOOSE, R. L. (1975). An adaptive state estimation solution to the maneuvering target problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20:359–362.
- MOOSE, R. L., SISTANIZADEH, M. K. et SKAGFJORD, G. (1987). Adaptive state estimation for a system with unknown input and measurement bias. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 12(1).
- MURRELL, J. W. (1978). Precision attitude determination for multission spacecraft. *AIAA Guidance and Control Conference*.
- NAGPAL, K. M. et KHARGONEKAR, P. P. (1991). Filtering and smoothing in an hinfy setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36(2):152–166.
- NWOGUGU, M. (2007). Decision-making, risk and corporate governance – a critique of methodological issues in bankruptcy/recovery prediction models. *Mathematics and Computation*, (185):178–196.
- OLVER, P. J. (2003). *Classical Invariant Theory*. Cambridge university press.
- OLVER, P. J. (2008). *Equivalence, Invariance and symmetry*. Cambridge university press.
- PICARD, J. (1991). Efficiency of the extended kalman filter for nonlinear systems with small noise. *Applied Mathematics and Computation*, 51(3):359–410.
- PSIAKI, M. L. (2000). Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation. *Journal of Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(2):206–214.
- RAÏSSI, T., VIDEAU, G. et ZOLGHADRI (2010). interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3):518–527.
- RANDAL, R. W. (2007). Estimation for micro air vehicles. *Studies in Computational Intelligence*, 70:173–199.
- RESPONDEK, W. et KRENER, A. J. (1985). Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2):197–216.
- RUFFIER, F. et FRANCESCHINI, N. (2004). Visually guided micro-aerial vehicle : Automatic take off, terrain following, landing and wind reaction. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3:2339–2346.
- RUFFIER, F., SERRES, J., PORTELLI, G. et FRANCESCHINI, N. (2009). Boucles visuo-motrices biomimétiques pour le pilotage automatique de micro-aéronefs. *Proceedings of the 7ème Journées Nationales de la Recherche en Robotique*.
- SARKKA, S. (2007). On unscented kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9):1631–1641.

- 
- SEDLAK, J. et CHU, D. (1993). Kalman filter estimation of attitude and gyro bias with the quest observation model. *AAS/GSFC International Symposium on Space Flight Dynamics*.
- SHUSTER, M. D. (1989). A simple kalman filter and smoother for spacecraft attitude. *Journal of the Astronautical Sciences*, 38(3):377–393.
- SHUSTER, M. D. et OH, S. D. (1981). Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*, 4(1).
- SMITH, R. H. (1995). An hinfty-type filter for gps-based attitude estimation. *AAS/AIAA Space Flight, Mechanics Conference*.
- STEIMANN, F. et ADLASSNIG, K. P. (2001). Fuzzy medical diagnosis. <http://cite-seer.nj.nec.com/160037.html>.
- THAU, F. E. (1973). Observing the state of nonlinear dynamic systems. *International journal of Control*, 17(3):471–479.
- TITTERTON, D. H. et WESTON, J. L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology*. The institution of Electrical Engineers.
- TRUCCO, E. et VERRI, A. (1998). *Introductory Technique for 3-D Computer Vision*. Prentice Hall.
- VASCONCELOS, J., SILVESTRE, C. et OLIVEIRA, P. (2008). A nonlinear observer for rigid body attitude estimation using vector observations. *17th World Congres. The International of Automatic Control*, pages 8599–8604.
- VITERBI, A. (1967). Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. *IEEE Transactions on information Theory*, pages 260–269.
- WAN, E. et Van der MERWE, R. (2000). The unscented kalman filter for nonlinear estimation. *Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control (AS-SPCC)*, pages 153–158.
- WAN, E. et Van der MERWE, R. (2001). *The Unscented Kalman Filter, Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley and Sons.
- WENGER, L. et EGZIABHER, D. G. (2003). Systems concepts and performances analysis of multi-sensor navigation system for uav applications. *In 2nd AIAA Unmanned Unlimited Systems Conference*.
- XU, J., WANG, S., DIMIROVSKI, G. et JING, Y. (2008). Stochastic stability of the continuous-time unscented kalman filter. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5110–5115.
- ZADEH, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.

ZEITZ, M. (1988). Comments on comparative study of nonlinear state observation techniques. *International journal of Control*, 46(5):1823–1836.

**Title :** Nonlinear state estimation for guidance and navigation of unmanned aerial vehicles flying in a complex environment

## Abstract

This thesis presents the study of an algorithmic solution for state estimation problem of unmanned aerial vehicles, or UAVs. The necessary resort to multiple miniaturized low-cost and low-performance sensors integrated into mini-RPAS, which are obviously subjected to hard space requirements or electrical power consumption constraints, has led to an important interest to design nonlinear observers for data fusion, unmeasured systems state estimation and/or flight path reconstruction. Exploiting the capabilities of nonlinear observers allows, by generating consolidated signals, to extend the way mini-RPAS can be controlled while enhancing their intrinsic flight handling qualities. That is why numerous recent research works related to RPAS certification and integration into civil airspace deal with the interest of highly robust estimation algorithm. Therefore, the development of reliable and performant aided-INS for many nonlinear dynamic systems is an important research topic and a major concern in the aerospace engineering community.

First, we have proposed a novel approach for nonlinear state estimation, named pi-IUKF (Invariant Unscented Kalman Filter), which is based on both invariant filter estimation and UKF theoretical principles. Several research works on nonlinear invariant observers have been led and provide a geometrical-based constructive method for designing filters dedicated to nonlinear state estimation problems while preserving the physical properties and systems symmetries. The general invariant observer guarantees a straightforward form of the nonlinear estimation error dynamics whose properties are remarkable. The developed pi-IUKF estimator suggests a systematic approach to determine all the symmetry-preserving correction terms, associated with a nonlinear state-space representation used for prediction, without requiring any linearization of the differential equations. The exploitation of the UKF principles within the invariant framework has required the definition of a compatibility condition on the observation equations. As a first result, the estimated covariance matrices of the pi-IUKF converge to constant values due to the symmetry-preserving property provided by the nonlinear invariant estimation theory. The designed pi-IUKF method has been successfully applied to some relevant practical problems such as the estimation of Attitude and Heading for aerial vehicles using low-cost AH reference systems (i.e., inertial/magnetic sensors characterized by low performances).

In a second part, the developed methodology is used in the case of a mini-RPAS equipped with an aided Inertial Navigation System (INS) which leads to augment the nonlinear state space representation with both velocity and position differential equations. All the measurements are provided on board by a set of low-cost and low-performance sensors (accelerometers, gyrometers, magnetometers, barometer and even Global Positioning System (GPS)). Our designed pi-IUKF estimation algorithm is described and its performances are evaluated by exploiting successfully real flight test data. Indeed, the whole approach has been implemented onboard using a data logger based on the well-known Paparazzi system. The results show promising perspectives and demonstrate that nonlinear state estimation converges on a much bigger set of trajectories than for more traditional approaches.

**Keywords:** Nonlinear state estimation, unmanned aerial vehicles, data fusion, invariance and symmetry, unscented Kalman filter, invariant unscented Kalman filter, navigation system.



**Titre :** Développement d'un estimateur d'état non linéaire embarqué pour le pilotage-guidage robuste d'un micro-drone en milieu complexe

## Résumé

Le travail effectué au cours de cette thèse tente d'apporter une solution algorithmique à la problématique de l'estimation de l'état d'un mini-drone en vol qui soit compatible avec les exigences d'embarquabilité inhérentes au système. Il a été orienté vers les méthodes d'estimation non linéaire à base de modèles.

Les algorithmes d'estimation, d'état ou de paramètres, et de contrôle apparaissent primordiaux, lorsque la technologie des capteurs et des actionneurs, pour des raisons de coût et d'encombrement essentiellement, ne permet pas de disposer de capacités illimitées. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des micro- et des mini-drones. L'estimation permet de fusionner en temps réel les informations imparfaites provenant des différents capteurs et de fournir une estimation, par exemple de l'état du drone (orientation, vitesse, position) au calculateur embarqué où sont implémentés les algorithmes de commande de l'engin. Ce contrôle de l'appareil doit garantir sa stabilité en boucle fermée quelque soit l'ordre de consigne fourni directement par l'opérateur ou par tout système automatique de gestion du vol et assurer que celle-ci soit correctement recopiée. Estimation et commande participent donc grandement au succès de toute mission.

Une dimension extrêmement importante qui a conditionné les travaux entrepris tout au long de cette thèse concerne la capacité d'emport des mini-drones que nous considérons. En effet, celle-ci, relativement limitée, et couplée à la volonté de ne pas grever les budgets de développement de tout mini-drone, autorise uniquement l'intégration de matériels dits bas-coûts. Malgré les progrès significatifs de la miniaturisation et l'augmentation continue des capacités de calcul embarqué (loi de Moore), les mini-drones d'intérêt considérés ici n'embarquent donc que des capteurs aux performances limitées dans un contexte où cette catégorie d'engins autonomes est amenée à être de plus en plus fréquemment exploitée pour remplir des missions elles-mêmes toujours plus nombreuses. Celles-ci requièrent notamment que de tels drones puissent de manière sûre s'insérer et partager l'espace aérien civil moyennant le passage d'une certification de leur vol au même titre que pour les avions de transport des différentes compagnies aériennes. Dès lors, face à cet enjeu de sécurisation des vols de mini-drones, la consolidation de la connaissance de l'état de l'aéronef par des techniques d'estimation devient un tâche essentielle pour en assurer le contrôle, y compris en situations dégradées (pannes capteurs, perte occasionnelle de signaux, bruit et perturbations environnantes, imperfections des moyens de mesure, etc). Tenter de répondre à cet enjeu conduit naturellement le chercheur à s'attaquer à des problèmes relativement nouveaux, en tout cas pas forcément aussi proches de ceux qui se posent dans le secteur de l'aéronautique civile ou militaire, où le système avionique est sans commune mesure avec celui sur lequel nous avons travaillé dans cette thèse.

Ce travail à tout d'abord consisté à définir une modélisation dynamique descriptive du vol des mini-drones étudiés, suffisamment générique pour être appliquée à différents types de mini-drones (voilure fixe, multirotor, etc). Par la suite, deux algorithmes d'estimation originaux, dénommés IUKF et  $\pi$ -IUKF, exploitant ce modèle, ont été développés avant d'être testés en simulation puis sur données réelles pour la version  $\pi$ -IUKF. Ces deux méthodes transposent le cadre générique des observateurs invariants au cas de l'estimation non linéaire de l'état d'un système dynamique par une technique de type Unscented Kalman Filter (UKF) qui appartient à la classe plus générale des algorithmes de filtrage non linéaire de type Sigma Point (SP). La solution proposée garantit un plus grand domaine de convergence de l'estimé que les techniques plus traditionnelles. Elle sera à l'avenir intégrée à l'avionique des mini-drones de l'ENAC et le code informatique est d'ores et déjà disponible sous Paparazzi.

**Mots-clés:** Estimation d'état non linéaire, systèmes avioniques embarqués bas-coûts, fusion de données, invariance et symétrie, filtre de Kalman sigma-point invariant, système de navigation.

