



**HAL**  
open science

# Calcul par intervalles et outils de l'automatique permettant la micromanipulation à précision qualifiée pour le microassemblage

Sofiane Khadraoui

► **To cite this version:**

Sofiane Khadraoui. Calcul par intervalles et outils de l'automatique permettant la micromanipulation à précision qualifiée pour le microassemblage. Sciences de l'ingénieur [physics]. Univ. de Franche-Comté, 2012. Français. NNT: . tel-01231015v1

**HAL Id: tel-01231015**

**<https://hal.science/tel-01231015v1>**

Submitted on 24 Nov 2015 (v1), last revised 10 Feb 2016 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année : 2012

# THÈSE

*présentée à*

**U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ**

*pour obtenir le*

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
DE FRANCHE-COMTÉ**

*en AUTOMATIQUE*

*(École Doctorale Sciences Physiques pour l'Ingénieur et Microtechniques)*

**Calcul par intervalles et outils de l'automatique permettant  
la micromanipulation à précision qualifiée pour le micro-  
assemblage**

*par*

**Sofiane KHADRAOUI**

Soutenue le 31 Janvier 2012

devant la Commission d'Examen :

Président de jury :

**Tanneguy REDARCE**

Professeur, INSA de Lyon

Rapporteurs :

**Nacim RAMDANI**

Professeur, Université d'Orléans

**Jean-Marc BIANNIC**

Ingénieur de Recherches à l'Onera, HDR

Examineurs :

**Dan POPA**

Professeur, UTA, Arlington TX, USA

**Yann LE GORREC**

Professeur, ENSMM de Besançon

Directeurs de thèse :

**Philippe LUTZ**

Professeur, Université de Besançon

**Micky RAKOTONDRABE**

Maître de Conférences, Université de Besançon



# Remerciements

Tout d'abord, mes plus sincères remerciements vont à mes chers parents, à ma chère sœur et à mes chers frères qui m'ont toujours encouragés dans la poursuite de mes études, ainsi que pour leur patience, leur aide et leur soutien tout au long de ces années d'études. Je tiens d'ailleurs à leur dédier ces travaux.

Les travaux de cette thèse ont été réalisés au sein du département 'Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques' (**AS2M**) de l'Institut **FEMTO-ST**<sup>1</sup> de Besançon. Je tiens donc à remercier tout particulièrement Monsieur Nicolas Chaillet, Professeur à l'Université de Franche-Comté et Directeur de l'institut et Monsieur Nouredine Zerhouni Professeur à l'École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques (**ENSMM**) et Directeur du département **AS2M**, de m'avoir accueilli et offert de très bonnes conditions pour effectuer ces travaux de thèse.

Ces travaux de recherche ont été effectués sous la direction de Monsieur Philippe Lutz, Professeur à l'Université de Franche-Comté, et de Monsieur Micky Rakotondrabe, Maître de conférences à l'Université de Franche-Comté. Je tiens à leur exprimer toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes sincères remerciements pour leur encadrement, leur confiance, leurs précieux conseils ainsi que pour l'autonomie de travail qu'ils m'ont donné.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Nacim Ramdani, Professeur à l'Université d'Orléans et à Monsieur Jean-Marc Biannic Ingénieur de Recherches à l'Office National d'Études et Recherches Aérospatiales (**ONERA**), pour m'avoir fait l'honneur de rapporter mes travaux de thèse ainsi que pour leurs remarques pertinentes et l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux de thèse.

Je tiens également à remercier tout particulièrement Monsieur Tanneguy Redarce, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (**INSA**) Lyon, d'avoir présidé ma soutenance de thèse ainsi que Monsieur Dan Popa, Professeur à l'Université de Texas à Arlington USA et Monsieur Yann Le Gorrec, Professeur à l'**ENSMM**, d'avoir accepté de juger mes travaux de recherche.

---

1. Franche-Comté Électronique, Mécanique, Thermique et Optique - Sciences et Technologies

Je ne saurais oublier de remercier mes Ex-Professeurs de l'Université de Tlemcen-Algérie qui ont contribué à ma formation en graduation et en post-graduation dans le domaine de l'automatique. Je dois beaucoup à Monsieur Brahim Cherki.

J'exprime tous mes remerciements aux personnels permanents et doctorants du département **AS2M** pour leur accueil, leur gentillesse, leur grande sympathie ainsi que pour la bonne ambiance partagée.

Je suis profondément reconnaissant et honoré par le soutien que j'ai reçu par l'ensemble de mes proches. Je tiens tout particulièrement à dédier cette thèse de doctorat à mes cousines : Hafida Memou, Rachida Kissar, Rafika Memou et sa fille Fatima-Zahra et à mes cousins : Abderrazek Memou, Lakhdar Khadraoui, Ahmed Memou et sa femme Samira Berramdane ainsi que leur fille Sondos.

J'adresse une pensée sympathique en dédiant cette thèse à Nawal Benmostefa et à tous mes amis, en particulier : Ali Sassane, Hedi Karray, Abed Malti, Boumediene Benyahia, Abdou Chikhaoui, Ismail Hamlili et Soufiane Taleb que j'ai eu la chance d'avoir à mes côtés, qui ont grandement contribué, de manière directe ou indirecte, à l'accomplissement de cette thèse et qui m'ont soutenu durant ces longues années d'études.

Enfin, je voudrais ajouter mes remerciements à tous ceux qui d'une façon ou d'une autre m'ont soutenu et aidé pour réaliser cette thèse.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Micromanipulation et micro-assemblage</b>	<b>5</b>
1.1 Contexte . . . . .	5
1.2 Problèmes liés à la micromanipulation et au micro-assemblage . . . . .	8
1.2.1 Problème de mesure . . . . .	8
1.2.2 Problème d'actionnement . . . . .	12
1.2.3 Synthèse . . . . .	13
1.3 Types et principes d'actionnement . . . . .	14
1.3.1 Micro-actionneurs électrostatiques . . . . .	14
1.3.2 Micro-actionneurs magnétostrictifs . . . . .	15
1.3.3 Micro-actionneurs thermiques . . . . .	16
1.3.4 Micro-actionneurs piézoélectriques . . . . .	18
1.3.5 Comparaison des différents types d'actionnement . . . . .	20
1.4 Micro-actionneurs piézoélectriques de structures poutres . . . . .	21
1.4.1 Principe d'actionnement des poutres piézoélectriques . . . . .	22
1.4.2 Modes de déformation . . . . .	23
1.4.3 Limites et défauts des poutres piézoélectriques . . . . .	24
1.5 État de l'art sur la commande des poutres piézoélectriques . . . . .	26
1.5.1 Commande en boucle ouverte . . . . .	27
1.5.2 Commande en boucle fermée . . . . .	28
1.5.3 Méthode proposée . . . . .	31
1.6 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Méthode d'encadrement des incertitudes paramétriques des systèmes</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Rappels sur l'arithmétique d'intervalles réels . . . . .	34
2.2.1 Intervalles et pavés . . . . .	34
2.2.2 Opérations algébriques et ensemblistes sur les intervalles . . . . .	36
2.2.3 Fonction d'inclusion . . . . .	37
2.2.4 Dépendance des variables . . . . .	37
2.2.5 Effet d'enveloppement . . . . .	38
2.3 Inversion ensembliste . . . . .	38

2.3.1	Problème d'inversion . . . . .	39
2.3.2	Résolution d'un problème d'inversion ensembliste . . . . .	39
2.4	Systèmes à incertitudes paramétriques . . . . .	41
2.4.1	Modèle intervalle . . . . .	41
2.4.2	Stabilité des systèmes à paramètres incertains . . . . .	42
2.4.3	Norme- $H_\infty$ d'un modèle intervalle . . . . .	46
2.5	Théorème d'inclusion des performances . . . . .	47
2.5.1	Inclusion des fonctions rationnelles . . . . .	47
2.5.2	Inclusion des fonctions de transfert intervalles . . . . .	48
2.5.3	Inclusion des performances des systèmes intervalles . . . . .	48
2.5.4	Exemple . . . . .	49
2.6	Conclusion . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Modélisation et dimensionnement des poutres piézoélectriques</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Modélisation linéaire des poutres piézoélectriques . . . . .	54
3.2.1	Modélisation statique des poutres piézoélectriques . . . . .	54
3.2.2	Modélisation dynamique des poutres piézoélectriques . . . . .	57
3.3	Validation et analyse des modèles théoriques . . . . .	60
3.3.1	Validation du modèle statique . . . . .	61
3.3.2	Validation du modèle dynamique . . . . .	62
3.3.3	Impact des caractéristiques géométriques sur le modèle d'une poutre piézoélectrique . . . . .	65
3.4	Conception et dimensionnement des poutres piézoélectriques . . . . .	69
3.4.1	Poutres piézoélectriques utilisées . . . . .	70
3.4.2	Problème 1 . . . . .	70
3.4.3	Problème 2 . . . . .	75
3.5	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Commande en position par intervalles des poutres piézoélectriques</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Modèle non-linéaire et linéarisation . . . . .	82
4.2.1	Modélisation de l'hystérésis . . . . .	84
4.2.2	Linéarisation du modèle d'hystérésis . . . . .	87
4.2.3	Modélisation de la partie dynamique . . . . .	89
4.3	Modèle intervalle des poutres piézoélectriques . . . . .	89
4.3.1	Modèle intervalle statique . . . . .	90
4.3.2	Modèle intervalle dynamique . . . . .	91
4.3.3	Écriture du modèle intervalle des poutres piézoélectriques . . . . .	91
4.4	Commande en déflexion des poutres piézoélectriques . . . . .	93
4.4.1	Cahier des charges . . . . .	93
4.4.2	Méthode de commande par inclusion des fonctions de transfert . . . . .	94
4.4.3	Méthode basée sur l'approche $H_\infty$ -standard combinée avec l'analyse par intervalles . . . . .	100

4.4.4	Commande en déflexion par la $\mu$ -synthèse . . . . .	113
4.4.5	Commande en déflexion par $H_\infty$ standard . . . . .	118
4.4.6	Conclusion et comparaison des résultats . . . . .	122
4.5	Conclusion . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Commande en force par intervalles des poutres piézoélectriques</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction . . . . .	127
5.2	Modélisation par intervalles du transfert tension-force . . . . .	128
5.2.1	Modèle non linéaire du transfert force-tension-déflexion . . . . .	128
5.2.2	Estimation de la force . . . . .	130
5.2.3	Modélisation du transfert force-tension . . . . .	130
5.2.4	Modèle intervalle linéaire . . . . .	131
5.2.5	Écriture du modèle intervalle à commander . . . . .	132
5.3	Commande en force des poutres piézoélectriques . . . . .	133
5.3.1	Cahier des charges . . . . .	134
5.3.2	Commande RST par intervalles du transfert tension-force . . . . .	134
5.3.3	Commande en force par la $\mu$ -synthèse . . . . .	142
5.4	Comparaison des résultats expérimentaux . . . . .	145
5.5	Conclusion . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Application à la commande hybride d'une micropince</b>	<b>149</b>
6.1	Introduction . . . . .	149
6.2	Développement de la micropince . . . . .	150
6.3	Modélisation et commande de la micropince . . . . .	151
6.3.1	Modélisation de la micropince . . . . .	151
6.3.2	Synthèse des lois de commande . . . . .	153
6.3.3	Commande de la micropince . . . . .	155
6.4	Réalisation d'une tâche de prise-dépose avec la micropince . . . . .	162
6.4.1	Séquence d'une tâche de prise-dépose . . . . .	162
6.4.2	Représentation de la séquence par automate hybride . . . . .	165
6.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	168
6.5	Conclusion . . . . .	171
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Normes</b>	<b>177</b>
A.1	Notions de normes . . . . .	177
A.2	Norme d'un scalaire . . . . .	177
A.3	Norme d'un vecteur . . . . .	178
A.4	Norme d'un signal scalaire . . . . .	178
A.5	Norme d'un signal vectoriel . . . . .	178
A.6	Norme d'une matrice . . . . .	179
A.7	Normes des systèmes . . . . .	180

<b>B Relations fondamentales de la piézoélectricité</b>	<b>183</b>
<b>C Résolution D-K itération</b>	<b>187</b>
<b>Références Bibliographiques</b>	<b>189</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>203</b>
<b>Liste des tables</b>	<b>209</b>

# Publications personnelles liées à cette thèse

## - Revue internationale avec comité de lecture

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Interval Modeling and Robust Control of Piezoelectric Microactuators", *IEEE - Transactions on Control Systems Technology (T-CST)*, DOI.10.1109/TCST.2011.2116789.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Design of RST-structured controller for parametric uncertain system using interval analysis : application to piezocantilever", *Asian Journal of Control (AJC)*, accepted, in press, 2012.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Combining  $H_\infty$  approach and interval tools to design a low order and robust controller for systems with parametric uncertainties : application to piezoelectric actuators", *International Journal of Control (IJC)*, DOI.10.1080/00207179.2011.644582, 2012.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Optimal design of piezoelectric actuators with guaranteed performances by using interval techniques", *under review*.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Interval force/position modeling and control of a microgripper devoted to automated pick-and-place tasks", *under review*.

Micky Rakotondrabe, Alexandru Ivan, **Sofiane Khadraoui**, Philippe Lutz and Nicolas Chaillet, "Complete self-sensing of displacement and force in piezoelectric actuators dedicated to controlled micropositioning tasks", *under review*.

## - Conférences internationales avec comité de lecture

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Combining  $H_\infty$  and interval techniques to design robust low order controllers : application to piezoelectric actuators", *ACC (American Control Conference)*, accepted, Montréal Canada, June 2012.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Robust automated pick-and-place tasks using piezoelectric microgripper with force/position interval control", talk at the workshop 'Automation of assembly and packaging at the micro/nano-scale', *IEEE - CASE (International Conference on Automation Science and Engineering)*, Trieste Italy, August 2011.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Modeling and Robust Deflection Control of Piezoelectric microActuators modeled by Zero-Order Numerator Interval System", *IFAC - WC (World Congress)*, Milano Italy, August 2011.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "PID-Structured Controller Design for Interval Systems : Application to Piezoelectric Microactuators", *ACC, (American Control Conference)*, 3477-3482, San Francisco CA USA, June-July 2011.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Robust control for a class of interval model : application to the force control of piezoelectric cantilevers", *IEEE - CDC (Conference on Decision and Control)*, 4257-4262, Atlanta Georgia USA, December 2010.

Micky Rakotondrabe, Ioan Alexandru Ivan, **Sofiane Khadraoui**, Cédric Clévy, Philippe Lutz and Nicolas Chaillet, "Dynamic displacement self-sensing and robust control of cantilevered piezoelectric actuators dedicated to microassembly tasks", *IEEE/ASME - AIM (International Conference on Intelligent Materials)*, 557-562, Montreal Canada, July 2010.

## - Communications nationale et internationales

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Interval control design and  $H_\infty$  based performances analysis for piezoelectric microactuators", *GT-MOSAR, (Workshop on Methods and Tools for the Synthesis and Analysis on Robustness)*, Paris France, January 2011.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Modélisation et Commande Robuste par Intervalle des Micropinces Piézoélectriques dédiées à la Micro-manipulation et au Microassemblage", Poster, *JJCR, (Journées des Jeunes Chercheurs en Robotique)*, Paris France, November 2010.

**Sofiane Khadraoui**, M. Rakotondrabe and P. Lutz, "Performances analysis of controlled interval systems using Hinf approach", *GT - MEA (National Workshop on Set Computation)*, Paris France, December 2010.

**Sofiane Khadraoui**, Micky Rakotondrabe and Philippe Lutz, "Robust control of parametric uncertain systems : application to the control of piezoelectric cantilevers", *SWIM (Small Workshop on Interval Methods)*, Nantes France, June 2010.

**Sofiane Khadraoui**, M. Rakotondrabe and P. Lutz, "Control of microsystems : introducing interval computation to account the model uncertainties", *LEA (Laboratoires Européens Associés)*, Arc-et-Senans France, September 2009.

**Sofiane Khadraoui**, M. Rakotondrabe and P. Lutz, "Design of a robust controller for guaranteed performances : application to piezoelectric cantilevers", *SWIM (Small Workshop on Interval Methods)*, Lausanne Suisse, June 2009.



# Introduction générale

L'essor considérable que connaît actuellement la miniaturisation des produits engendre une véritable révolution dans les milieux de la recherche et de l'industrie [Bry03]. Ces produits, appelés microsystèmes, sont largement utilisés dans différents domaines : médical, militaire, automobile, aérospatial, télécommunication, informatique, etc. Un fort accroissement du marché mondial des microsystèmes est prévu pour la période 2012 – 2016 comme indiqué sur la Figure 1 [sta11].

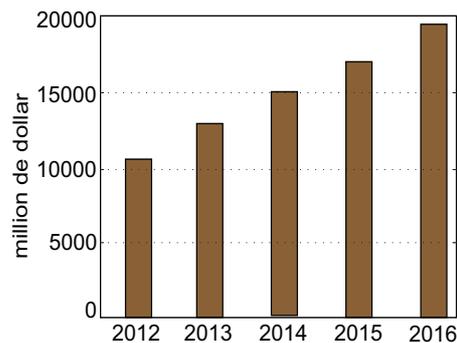


FIGURE 1 – Prévisions du marché des microsystèmes entre 2012 et 2016 [sta11].

Pour fabriquer les microsystèmes, on utilise souvent les techniques de microfabrications dont un grand nombre sont en salles blanches. Ces techniques permettent d'obtenir des microsystèmes très réduits dont les dimensions sont de l'ordre du micromètre. Cependant, lorsque les microsystèmes à développer sont "hybrides", c'est à dire composés de plusieurs matériaux et microstructures elles-mêmes issues de différentes techniques de microfabrication, il est souvent nécessaire d'utiliser l'assemblage. L'assemblage de microstructures, appelé micro-assemblage, permet donc le développement de microsystèmes de formes plus compliquées et en 3D que les techniques de microfabrications ne peuvent pas réaliser ou au prix d'études longues et coûteuses.

Afin de réaliser ces micro-assemblages, la solution robotique est bien adaptée. Elle doit cependant atteindre des précisions micrométriques, voire moins, en positionnement. Ceci représente un challenge que les robots utilisés pour l'assemblage de composants centimétriques et plus ne peuvent atteindre. En effet, les actionneurs classiques (moteurs électriques, vérins, etc.) sont caractérisés par les jeux mécaniques (dus aux articulations par exemple) qui sont une source d'imprécision. Des solutions spécifiques sont proposées

et sont basées sur l'utilisation de matériaux actifs. Les matériaux actifs permettent un développement de micro-actionneurs réduits en dimensions et hautement résolus. Parmi les matériaux actifs les plus utilisés pour le développement de micro-actionneurs, on trouve les matériaux piézoélectriques. Ces matériaux proposent une très haute résolution (souvent nanométrique), une large bande-passante (plus du kHz pour certains micro-actionneurs) et une grande densité de force qui sont très intéressantes pour le micro-assemblage et la micromanipulation.

Depuis plusieurs années, la commande des micro-actionneurs piézoélectriques a connu un grand intérêt. En effet, malgré leur haute résolution, ces micro-actionneurs, surtout ceux utilisés dans les applications de micro-assemblage et de micromanipulation, ont des comportements incertains rendant la synthèse des correcteurs délicate pour d'atteindre les performances requises. Ces comportements incertains sont particulièrement liés à leur forte sensibilité à l'environnement (variation de température, micro-objets manipulés, etc.), à leur plage d'utilisation qui mène à des nonlinéarités (hystérésis et dérive lente)

Par ailleurs, le développement des systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage est confronté à un manque de capteurs convenables permettant l'identification et la commande. En effet, les capteurs ayant les performances nécessaires (précisions sub-micrométriques et bande passante élevée) sont non-embarquables et chers (exemples : interféromètres, capteurs optiques par triangulation) ce qui ne les rend pas utilisables pour les applications considérées. De l'autre côté, les capteurs embarquables comme par exemple les jauges de déformation présentent en plus de leur fragilité des difficultés d'intégration au sein des micro-actionneurs.

Intrinsèquement, il est très difficile d'atteindre les précisions et les résolutions requises pour la micromanipulation et pour le micro-assemblage en présence de ces incertitudes. En effet, plus ces incertitudes sont négligées et plus les performances du système de manipulation s'en trouvent affectées. Dans ce contexte, il paraît indispensable d'utiliser des techniques adaptées de l'automatique afin d'assurer une micromanipulation et un micro-assemblage précis des objets de petites tailles. Ces techniques doivent être robustes vis-à-vis des incertitudes. Les approches habituelles de commande robuste telles que  $H_\infty$ ,  $\mu$ -synthèse, etc, ont été utilisées pour commander les actionneurs piézoélectriques. Cependant, l'utilisation de ces approches robustes mène souvent à des correcteurs d'ordre relativement élevé. Pour les actionneurs piézoélectriques, malgré la robustesse de ces correcteurs, leur implémentation dans un microcontrôleur pose un problème de commande, car ils sont coûteux en termes de temps de calcul. Pour cela, l'utilisation des correcteurs d'ordre réduit est indispensable. Une solution évidente consisterait à utiliser des méthodes de réduction d'ordre. Cependant, la réduction d'ordre est souvent accompagnée d'une dégradation des performances du système corrigé, en particulier lorsque les incertitudes sont non-négligeables.

Notre travail a consisté à proposer une nouvelle stratégie de modélisation et de commande permettant de réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage de façon garantie. Cette stratégie vise à combiner les outils de l'automatique avec les techniques du calcul par intervalles afin :

- de borner les incertitudes de modèle ;

- de dimensionner des actionneurs piézoélectriques ;
- et de synthétiser des correcteurs robustes d'ordre réduit.

Notre contribution s'intègre dans les travaux de recherche de l'équipe 'Système Automatisés de Micromanipulation et Microassemblage' (SAMMI) du département 'Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques' (AS2M) de l'Institut FEMTO-ST<sup>2</sup> de Besançon. Le présent document est structuré en six chapitres.

Le premier chapitre se concentre sur le contexte de la micromanipulation et du micro-assemblage en revue les difficultés limitant les performances souhaitées. Une description des différents type d'actionnement fréquemment utilisés est également présentée. Dans ce travail, nous nous focalisons particulièrement sur les systèmes de micromanipulation à base de poutres piézoélectriques. Nous donnons à la fin du chapitre un bref état de l'art sur la commande des poutres piézoélectriques.

Le second chapitre s'intéresse aux concepts de base de l'analyse par intervalles utilisés pour encadrer les incertitudes paramétriques des systèmes. Nous donnons d'abord les préliminaires mathématiques du calcul par intervalles. Puis, nous abordons la représentation des systèmes à incertitudes paramétriques. Nous proposons ensuite quelques théorèmes d'inclusion utiles pour la partie commande.

Dans une première partie du troisième chapitre, nous donnons la modélisation analytique des actionneurs piézoélectriques. Une étude de la variabilité du comportement des actionneurs piézoélectriques en fonction de leurs dimensions sera présentée. Dans le but d'améliorer les performances des actionneurs piézoélectriques, la deuxième partie du chapitre présente une méthode de dimensionnement de ces derniers en utilisant l'analyse par intervalles. Deux problèmes de dimensionnement seront ensuite exposés.

Les aspects de modélisation des non-linéarités et la commande en déflexion pour le micro-positionnement précis des actionneurs piézoélectriques forment le cœur du chapitre quatre. Dans un premier temps, nous donnons la modélisation de l'hystérésis et sa compensation par inversion du modèle de Bouc-Wen. Puis, nous présentons une description par intervalles du comportement dynamique des actionneurs piézoélectriques. Afin d'assurer un cahier des charges voulu en déflexion, nous proposons ensuite deux méthodes de synthèse de correcteur en utilisant les techniques du calcul par intervalles. Nous comparons ces dernières aux méthodes de commande robuste  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse des actionneurs piézoélectriques proposées antérieurement [Rak06b] [Rak09].

Au chapitre cinq, nous traitons la commande en force des actionneurs piézoélectriques. En raison du manque de capteur de force, nous rappelons une estimation non-linéaire de la force proposée dans des travaux précédents. Ensuite, nous présentons une modélisation par intervalles pour décrire le comportement en force. Pour la commande en force, nous développons une technique par intervalles appliquée à la synthèse d'un correcteur RST. Les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux obtenus avec la commande  $\mu$ -synthèse.

---

2. Franche-Comté Électronique, Mécanique, Thermique et Optique - Sciences et Technologies

Enfin, le chapitre six est consacré au développement et à la commande hybride d'une micropince. La micropince est basée sur les actionneurs piézoélectriques étudiés au chapitre trois. Pour la synthèse des lois de commande, nous mettons en œuvre les approches de commande par intervalles proposées aux chapitres quatre et cinq. Dans la seconde partie du chapitre, nous présentons la commande hybride (force/deflexion) de la micropince permettant l'automatisation des tâches de prise dépose.

# Chapitre 1

## Micromanipulation et micro-assemblage

### 1.1 Contexte

Ces dernières années, la miniaturisation des produits est devenue un sujet d'intérêt croissant dans les milieux scientifiques et industriels. Des composants microsystèmes ont été développés afin de réaliser des fonctions mécaniques, électroniques, thermiques, optiques, etc. Pour cela, les techniques de réalisation, notamment de microfabrication et de micro-usinage ont été inventées et perfectionnées. Ces produits miniatures trouvent leur place dans de nombreuses applications. Il s'agit principalement d'applications courantes telles que : les têtes d'impression à jet d'encre, les têtes de lecture de disques durs, les systèmes de communication sans fil, les systèmes de stockage de données, les micro-miroirs utilisés dans les systèmes de vidéo projection, etc. D'autres applications concernent les accéléromètres et les microcapteurs utilisés dans les domaines de l'électronique mobile (téléphonie, GPS, etc), de l'aérospatial et de l'automobile. De nouvelles applications apparaissent également dans le domaine médical tels que les microrobots explorateurs dans le corps humain (coloscopes intelligents).

La complexité croissante des produits miniatures conduit maintenant à utiliser les solutions d'assemblage (micro-assemblage) en plus des techniques de microfabrication. Il y a deux raisons pour ceci : 1) la mise au point d'un processus de microfabrication de type monolithique<sup>1</sup> peut devenir trop complexe mais les processus à mettre en œuvre peuvent être incompatibles ; 2) une structure assemblée permet d'accomplir certaines fonctionnalités complexes non réalisables par un système monolithique. La tendance à la réalisation de microsystèmes assemblés nécessite le développement d'outils particuliers de micromanipulation ou de micropositionnement qui sont adaptés à la manipulation de petits objets. Nous appelons micromanipulation la manipulation d'objets de tailles micrométriques<sup>2</sup> [Rég08] (Figure 1.1). D'une manière générale, la manipulation comprend des tâches de saisie, de maintien, de déplacement, de positionnement et de dépose

---

1. Un processus de microfabrication de composants formés d'un seul bloc.

2. micro-objets ayant des dimensions variant de  $1\mu m$  à  $1mm$ .

d'un objet. Les précisions de positionnement nécessaires pour réaliser des tâches de micromanipulation sont d'ordre sub-microniques. Ainsi, en plus des tâches de micromanipulation, l'assemblage comportant des tâches d'attachement permet d'aboutir au produit final (microsystème assemblé). Le micro-assemblage consiste à effectuer le positionnement relatif d'au moins deux microcomposants et de réaliser la liaison entre ces microcomposants. La [Figure 1.2](#) présente quelques exemples de microsystèmes résultant de l'assemblage de différents composants.

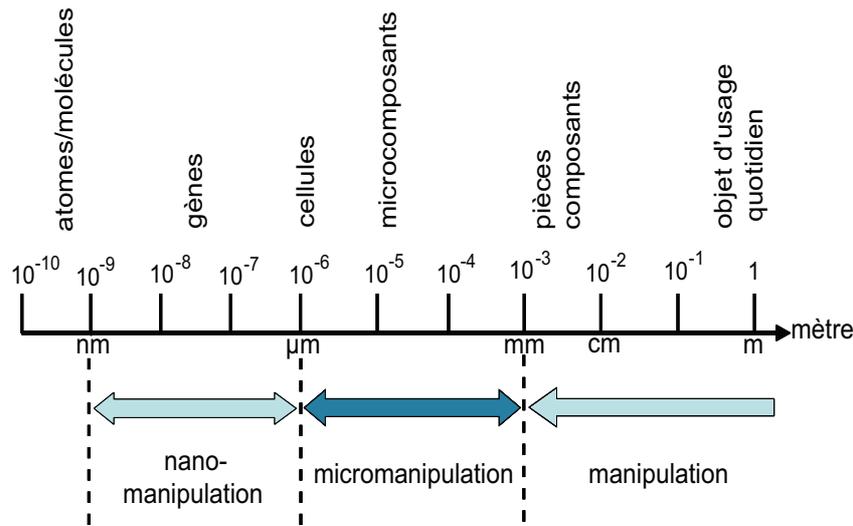


FIGURE 1.1 – Dimensions des micro-objets concernés par la micromanipulation.

Les opérations d'assemblage se font en suivant un ordre d'assemblage, appelé gamme [Coh98] [Böh99]. On trouve par exemple l'assemblage microcomposant par microcomposant dans lequel les microcomposants sont assemblés l'un après l'autre comme indiqué sur la [Figure 1.3-a](#). Malgré le débit limité, le système prise-dépose est l'une des approches les plus utilisées pour réaliser l'assemblage microcomposant par microcomposant. Il est cependant possible d'augmenter le débit d'assemblage en effectuant un assemblage par groupe. On peut distinguer deux cas : dans le premier cas, l'emplacement de tous les microcomposants est connu *a priori* (voir [Figure 1.3-b](#)), dans le second, les microcomposants sont distribués dans des lieux inconnus (voir [Figure 1.3-c](#)).

Il a été montré que le micro-assemblage représente jusqu'à 80% du coût total de la production des microsystèmes [Koe99]. Ainsi, les recherches et les études actuelles concernent le développement des techniques de micromanipulation et de micro-assemblage qui représentent des phases très importantes dans les applications requérant des résolutions très élevées et des mouvements répétables. Cependant, l'évolution des stratégies de micromanipulation et de micro-assemblage se heurte à plusieurs problèmes décrits ci-dessous.

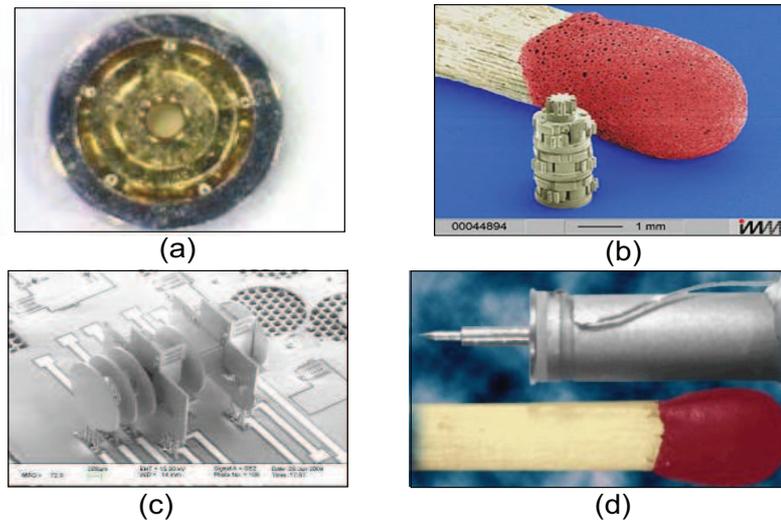


FIGURE 1.2 – Exemples de systèmes assemblés. a : roulement à billes miniature. b : système d’engrenage composé de trains épicycloïdaux miniatures (Institut für Mikro-technik Mainz). c : spectromètre de masse miniature de dimensions  $2 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  (Zyvox [Ude05]). d : nanomoteur (Klocke Nanotechnik [nan]).

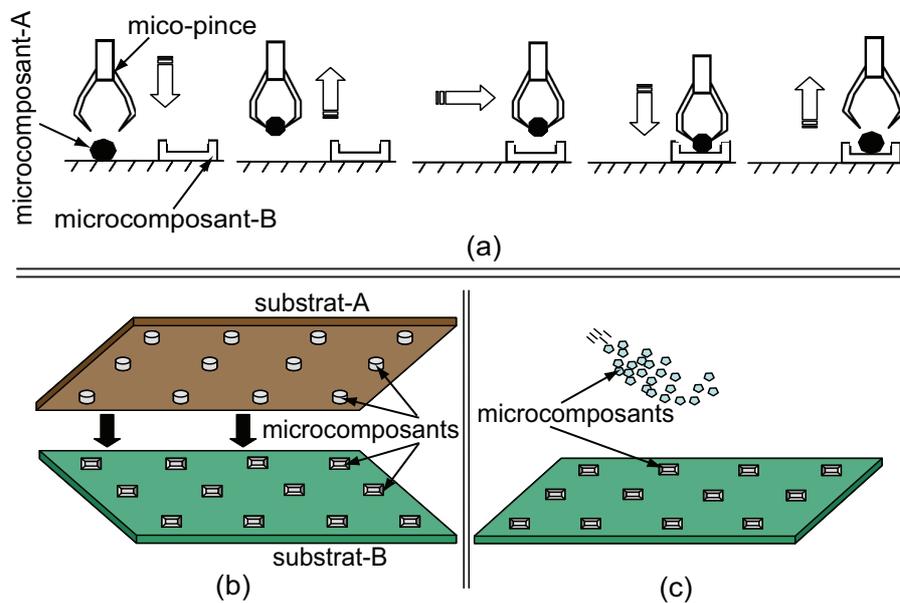


FIGURE 1.3 – a : assemblage composant par composant. b : assemblage par groupe (emplacement connu des composants). c : assemblage par groupe (emplacement inconnu des composants).

## 1.2 Problèmes liés à la micromanipulation et au micro-assemblage

Les niveaux de précision et de résolution requises pour réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage doivent être très élevés. Cependant, il est très délicat d'atteindre des précisions et des résolutions suffisantes dans le micromonde à cause des effets d'échelle<sup>3</sup> et des conditions physiques de manipulation [Tan01] [Shi00] [Zho01].

### 1.2.1 Problème de mesure

Afin de garantir une manipulation fiable d'objets microscopiques, il est nécessaire de percevoir ce qui se passe dans le micromonde. Néanmoins, compte tenu de la miniaturisation des systèmes, le micromonde devient inaccessible directement à l'opérateur. Il est alors indispensable de fournir à l'opérateur une information sur la position des micro-objets manipulés et/ou des préhenseurs pour assurer un positionnement précis. De plus, la fragilité à la fois des préhenseurs et de certains micro-objets<sup>4</sup> manipulés rend critique la phase de mise en contact des préhenseurs avec les objets. Pour cela, une information sur la force appliquée par les effecteurs des préhenseurs sur le micro-objet (force de préhension) est primordiale afin d'éviter tout risque d'endommagement ou de détérioration des micro-objets fragiles et inversement pour préserver ces préhenseurs.

#### 1.2.1.1 Mesure de position

Dans le micromonde, la mesure de la position des micro-objets et des préhenseurs ne peut être réalisée par les moyens conventionnels<sup>5</sup>. Pour cela, une perception des opérations de micromanipulation et de micro-assemblage peut être effectuée à l'aide d'un système de vision (caméra-microscope-écran) qui permet de faire un "zoom" sur le micromonde. L'utilisation de ces dispositifs de vision est particulièrement adaptée pour positionner les préhenseurs au voisinage des micro-objets manipulés. Cependant, l'utilisation des moyens de vision pose des problèmes d'encombrement et d'accès à l'environnement de travail. Ajoutons comme inconvénient leur coût assez élevé, leur profondeur de champ limitée et leur forte sensibilité à l'éclairage. Dans de bonnes conditions, avec ces systèmes de vision, on peut atteindre des précisions sous le  $\mu m$ . Des capteurs optiques tels que les capteurs laser par triangulation, les interféromètres, etc, sont également utilisés pour mesurer les positions des micro-objets et les positions des préhenseurs. La haute précision, la résolution et la large bande passante des capteurs optiques favorisent leur utilisation dans le micromonde. Cependant, ces derniers sont coûteux, volumineux et nécessitent une grande précision d'alignement optique. D'autres techniques de mesure sont basées sur la variation des propriétés du capteur telles que la variation de la résistance (jagues

---

3. Les effets d'échelle sont les phénomènes et les problèmes survenant quand on change de dimension en conservant les mêmes principes de fonctionnement.

4. Les micro-objets fragiles sont les cellules et organismes biologiques et les microcomposants optiques, etc.

5. Les dispositifs de mesure utilisés dans le macromonde.

à fil résistant, jauges piézorésistives, etc) ou de la capacitance. En effet, la variation de la résistance ou de la capacité de ces capteurs est proportionnelle à la déformation de leur structure. Ces capteurs sont souvent placés au niveau des surfaces des effecteurs des préhenseurs. Les capteurs à variation de la capacitance sont connus par leur précision et leurs dimensions convenables. Néanmoins, ils sont caractérisés par une faible résolution, une plage étroite de mesure et des non-linéarités. Enfin, d'autres limitations existent telles que la nécessité d'un circuit électronique complexe et des difficultés liées au processus de fabrication. Les capteurs à variation de la résistance sont très sensibles à la variation de la température ambiante. De plus, l'intégration des jauges à fil résistant sur les effecteurs des préhenseurs ayant des surfaces sous le  $mm^2$  est pratiquement difficile à réaliser.

Les avantages et les inconvénients de quelques capteurs utilisés pour la mesure de la position dans le micromonde sont résumés dans le [Tableau 1.1](#).

TABLE 1.1 – Quelques capteurs actuellement utilisés dans les applications du micromonde.

Type du capteur	Avantages	Inconvénients
Laser par triangulation	Haute précision et résolution bonne bande passante	Coûteux, grandes tailles plage de mesure limitée
Interféromètre	Résolution très élevée, haute précision, plage de mesure large	Coût très élevé, grandes tailles
piezoélectrique	Très large bande passante, haute précision	Non linéaire, haute sensibilité aux conditions environnementales
Capacitif intégré	Haute sensibilité, haute précision, dimensions convenables	Non linéaire
Traitement d'image	Plage de mesure large	Coût élevé, volumineux,

### 1.2.1.2 Mesure de force

La connaissance des forces permet d'améliorer les performances des tâches de micromanipulation tout en assurant des efforts de contact et de préhension suffisants sans toutefois endommager ou détruire l'effecteur ou l'objet. Un autre avantage est que cette information permet de contrôler l'effort d'insertion des micro-objets lors de l'assemblage. L'ordre de grandeur des forces à mesurer dans le micromonde dépend évidemment du type d'objets (biologique, artificiel), de la taille caractéristique et des tâches à réaliser. Généralement, la plage des forces concernées par les opérations de micromanipulation est comprise entre quelques microNewtons et quelques dizaines de milliNewtons [Fat97] [Tic04] [Rak06b]. La mesure de la force dans le micromonde peut être effectuée à l'aide des moyens de vision [Gre04] [Gre05]. Cependant, malgré l'évolution des dispositifs de vision, des contraintes de grandes tailles et coût élevé limitent leur utilisation dans le

micromonde. Il est également possible d'obtenir une information sur les forces de manipulation à partir de la déformation de la structure des préhenseurs [Bey07] [Lu06] [Nel98] [Zho00]. Dans ce cas, des jauges de déformation peuvent être utilisées pour mesurer la force de manipulation en les intégrant dans des structures de préhension. Néanmoins, leur inconvénient majeur est la haute sensibilité à la température ambiante. La Figure 1.4 montre un exemple d'utilisation de jauges de déformation sur les micro-pinces.

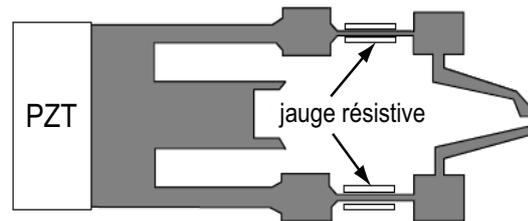


FIGURE 1.4 – Placement des jauges de déformation au sein d'un micropréhenseur.

La mesure de la force de micromanipulation a été également effectuée en utilisant les méthodes capacitives [Sun02] [Sun03]. Cette technique de mesure repose sur le principe électrostatique. La Figure 1.5 présente le schéma d'un capteur de force capacitif à deux degrés de liberté [Sun02]. Ce capteur est capable de mesurer des forces jusqu'à  $490 \mu N$  avec une résolution de  $0.01 \mu N$  le long de l'axe  $x$  et des forces maximales de  $900 \mu N$  avec une résolution de  $0.24 \mu N$  le long de l'axe  $y$ . Cependant, la nécessité d'un circuit électronique complexe est l'une des limitations principales des capteurs capacitifs.

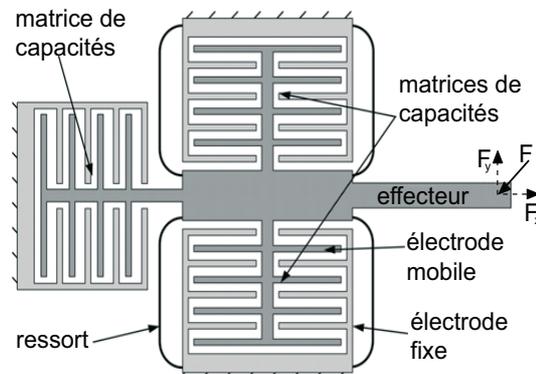


FIGURE 1.5 – Schéma d'un capteur de force capacitif [Sun02].

Les microscopes à force atomique AFM (Figure 1.6) ont été aussi utilisés pour réaliser la mesure de force dans le micromonde. La force appliquée en extrémité d'une poutre AFM peut être dérivée à partir de sa déflexion. Ce principe de mesure semble très intéressant dans les applications de nanomanipulation [Tor94] [Ara03]. Les limites de ce système sont la plage de force mesurée inférieure au milliNewton.

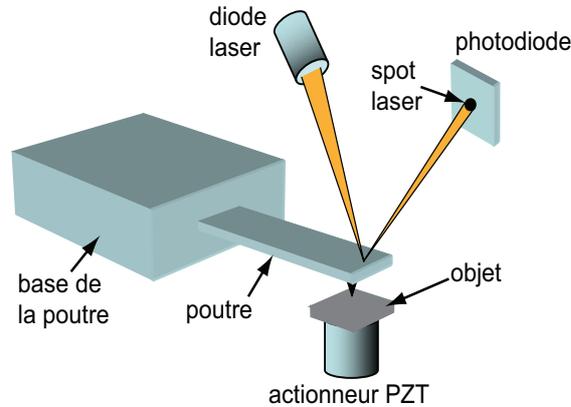


FIGURE 1.6 – Principe de mesure de force avec un AFM.

Les capteurs de force piézoélectriques occupent une place prépondérante dans les systèmes de micromanipulation. Leur principe de mesure repose sur l'effet piézoélectrique. En effet, lorsqu'un matériau piézoélectrique est soumis à une contrainte mécanique, des charges électriques proportionnelles à cette contrainte apparaissent sur la surface du matériau. Généralement, les capteurs de force piézoélectriques sont fabriqués en utilisant une couche de polyvinylidène fluorure (PVDF). Un capteur de force à base de PVDF ayant une résolution meilleure que le microNewton a été conçu et fabriqué par *Shen et al.* [She03] (Figure 1.7). Les capteurs piézoélectriques sont caractérisés par des non-linéarités et par la haute sensibilité aux conditions environnementales.

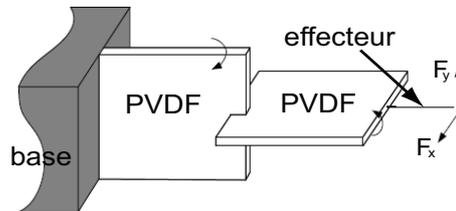


FIGURE 1.7 – Structure d'un capteur de force à deux axes.

On trouve également les capteurs de force magnétiques [Bou03] (Figure 1.8). Les fortes non-linéarités limitent les performances de ce type de capteur.

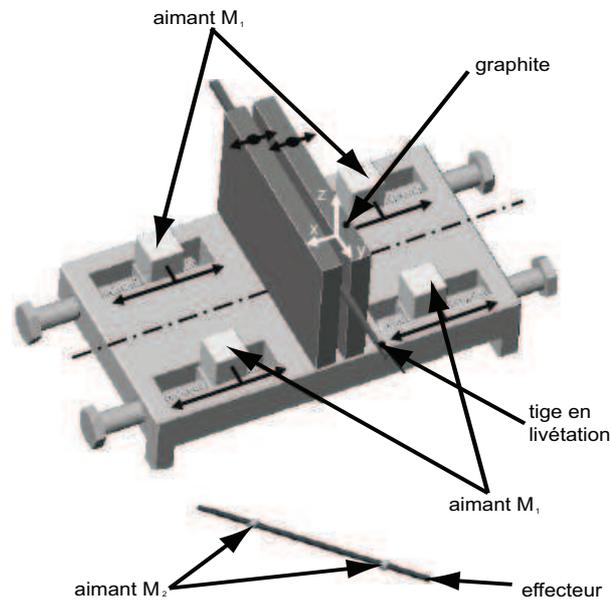


FIGURE 1.8 – Capteur de force magnétique [Bou03].

Compte tenu des objectifs de micromanipulation et de micro-assemblage et des caractéristiques du micromonde, l'utilisation de capteurs convenables et précis (capteurs de position et de force) est indispensable. Cependant, les tâches de mesure dans le micromonde représentent une complexité scientifique à lever pour assurer une automatisation complète des tâches de micromanipulation et de micro-assemblage. Jusqu'à présent, des capteurs permettant la mesure de la position ou de la force, ayant des dimensions appropriées, une grande précision et des hautes dynamiques n'existent pas. Les opérations de micromanipulation et de micro-assemblage sont donc confrontées à un manque de capteurs précis et facilement intégrables. Ceci représente un verrou technologique qui limite le développement des systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage automatisés. Par ailleurs, les amplitudes des signaux utiles (positions, forces) dans le micromonde sont très faibles et deviennent comparables aux bruits. L'ordre de grandeur typique pour les déplacements est de  $10\text{ nm}$  à  $100\text{ }\mu\text{m}$  tandis que les forces mises en œuvre ont des amplitudes inférieures à  $20\text{ mN}$ . Il en résulte un rapport signal/bruit très défavorable.

### 1.2.2 Problème d'actionnement

Contrairement aux systèmes robotiques traditionnels basés sur des articulations et des moteurs, les microrobots sont généralement fondés sur des structures déformables de manière à éviter les jeux et frottements inhérents aux mécanismes articulés. Ces structures déformables sont des éléments permettant la génération des mouvements. Un outil particulièrement utilisé pour la préhension des micro-objets est la micropinçe [Kel94] [Kel03] [Fed98]. Une micropinçe est composée de deux actionneurs symétriques dans laquelle chaque actionneur peut se déplacer dans une direction opposée à celle de l'autre

(mouvements d'ouverture et de fermeture) afin de saisir ou de relâcher un micro-objet. La conception d'une micropince a pour objectif de choisir la nature de l'énergie d'actionnement (électrique, thermique, magnétique, etc) et de formaliser les étapes nécessaires pour la réalisation des actionneurs afin d'atteindre certaines performances particulières telles que l'amplitude des déplacements à engendrer, les efforts à développer, la résolution, la rapidité, etc. Lors de cette phase de conception, il est important de prendre en compte des contraintes relatives aux propriétés et/ou formes des micro-objets manipulés, à la faisabilité et au coût de réalisation de l'actionneur.

Dans les applications de micromanipulation et de micro-assemblage, les actionneurs sont souvent réalisés en utilisant les matériaux actifs. En effet, ces derniers permettent d'accomplir des fonctions d'actionnement et/ou de mesure lorsqu'ils sont soumis à un changement environnemental : une contrainte, un champ électrique ou magnétique, une variation de température, etc. Ce type de matériau présente des caractéristiques remarquables telles que : une haute résolution et une large bande passante. Cependant, les matériaux actifs sont très sensibles aux conditions environnementales et possèdent des comportements non-linéaires et fortement hystérétiques. Cela complique la tâche de commande des préhenseurs et rend difficile l'obtention des niveaux de performances requis pour les opérations de micromanipulation et de micro-assemblage. D'autres structures d'actionnement ont été employées dans les systèmes de manipulation. Il s'agit par exemple de structures à actionneurs répartis comme les "smart surfaces" constituées d'une matrice d'actionneurs servant à véhiculer des micro-objets sur une surface [Fuk06] ou encore des structures flexibles à actionneurs répartis sur un treillis [Gro08]. Néanmoins, ces structures présentent une conception complexe et posent de nombreux problèmes de commande. Jusqu'à présent, l'absence d'actionneurs remplissant certains critères de performances et de contraintes relatifs à l'interaction du système avec son environnement tels que : la stationnarité, la linéarité, la résolution élevée, la haute sensibilité, la rapidité, la réversibilité, etc, représente une difficulté importante pour réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage.

### 1.2.3 Synthèse

À l'heure actuelle, les difficultés citées ci-dessus posent d'importants problèmes pour les systèmes de micromanipulation/micro-assemblage. Ceci en particulier, lorsqu'on voudrait pouvoir déplacer et positionner des micro-objets d'une manière précise et facile sans la mise en œuvre de systèmes de contrôle lourd tout en assurant une meilleure qualité des tâches de micromanipulation/micro-assemblage. Les préhenseurs (en particulier leurs actionneurs) représentent l'élément clé pour réussir ces tâches de manipulation. Ceci a mené la communauté de la microrobotique à étudier les techniques de conception des préhenseurs ainsi que le développement de leurs principes d'actionnement.

Dans la section suivante, nous nous attacherons à décrire les principes d'actionnement les plus développés dans les microsystèmes, leurs avantages et leurs inconvénients.

### 1.3 Types et principes d'actionnement

La conception des préhenseurs est généralement basée sur les besoins de micromanipulation ainsi que le choix du type d'actionnement à utiliser. Cette partie a pour but de décrire les différents actionneurs utilisés dans la réalisation des micropinces, leurs principes, leurs avantages et leur inconvénients.

Généralement, la sélection d'un actionneur se fait de manière à répondre à certains critères :

- mode d'alimentation de l'actionneur ;
- consommation ;
- amplitude de déformation ;
- dimensions du micro-actionneur ;
- réalisation technologique ;
- répétabilité, linéarité, précision et bande passante ;
- force et couple à développer ;
- rigidité ;
- coût.

Un micro-actionneur, par définition identique à celle d'un actionneur traditionnel, est un système simple ou complexe, qui transforme une énergie de type quelconque (électrique, thermique, chimique, etc.) en un travail mécanique (déplacement/force) [Fat97] [Gil94]. En microrobotique, le terme micro-actionneurs implique les actionneurs qui génèrent des micro-déplacements avec des résolutions micrométriques (ou submicrométriques). Les dimensions d'un micro-actionneur sont inférieures à quelques centimètres cube.

Selon les applications existantes dans le domaine de la microrobotique, on peut lister les technologies principales d'actionnement couramment utilisées dans la réalisation des micropinces :

- actionnement électrostatique ;
- actionnement magnétostrictif ;
- actionnement thermique ;
- actionnement piézoélectrique.

#### 1.3.1 Micro-actionneurs électrostatiques

Le principe de base de ce type d'actionnement consiste à générer une force d'attraction électrostatique. Cette force électrostatique est produite en présence d'une différence de potentiel entre deux électrodes conductrices séparées par un diélectrique (milieu non conducteur) (Figure 1.9-a). La force d'attraction fournie dépend de la distance séparant les deux électrodes, de leurs formes et surfaces, de la tension appliquée et des propriétés du matériau utilisé. Bien que plusieurs configurations soient envisageables en exploitant ce principe, les micro-actionneurs électrostatiques sont souvent construits en forme de peignes interdigités, dits "comb-drives". Cette forme contient deux électrodes interdigitées telle qu'une électrode est encastrée tandis que l'autre électrode est

mobile. Les peignes interdigités permettent de générer des mouvements translationnels et d'augmenter l'amplitude de la force pour une même tension de commande. Ce principe d'actionnement à peignes interdigités a été exploité pour réaliser des micropinces électrostatiques. La Figure 1.9-b présente une micropinçe à actionnement électrostatique réalisée et commercialisée par la société FEMTO TOOLS.

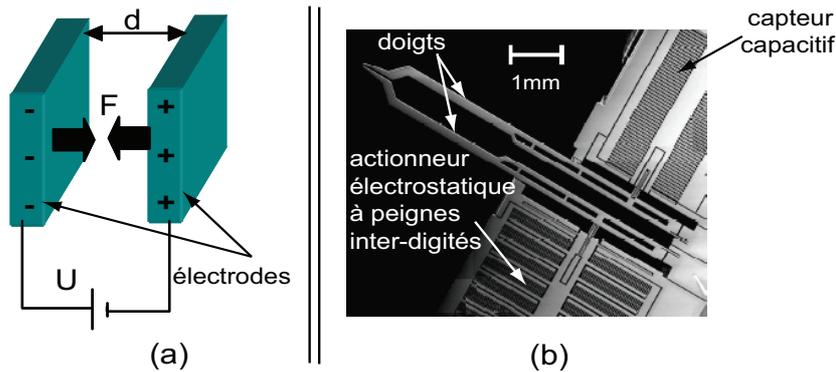


FIGURE 1.9 – a : électrodes soumises à une excitation électrique. b : micropinçe électrostatique à peignes interdigités réalisée par la société FEMTO TOOLS.

L'un des avantages de ce type d'actionnement est la faible consommation électrique au repos, le courant étant pratiquement nul. De plus, la vitesse de commutation semble être un atout important de l'actionnement électrostatique. Cependant, il nécessite l'emploi de tensions importantes, typiquement 40 V à 200 V pour produire quelques microns de déplacement. L'utilisation des tensions élevées (supérieures à une tension dite de claquage) peut entraîner des risques de détérioration de l'actionneur. Ainsi, des phénomènes de collage physico-chimique (les plaques arrivent en contact) peuvent apparaître lorsque les distances entre les peignes sont mal maîtrisées [And91].

### 1.3.2 Micro-actionneurs magnétostrictifs

Il s'agit des micro-actionneurs possédant la propriété de magnétostriction [Lac93]. En fait, l'aimantation d'un matériau magnétostrictif par un champ magnétique externe induit une déformation du matériau (variation de dimensions). Le champ magnétique est souvent généré par le passage d'un courant électrique dans une micro-bobine couplée avec un noyau ferromagnétique. Parmi les éléments purs à magnétostriction géante (généralement composés de fer et de terres rares), on trouve le Terbium (*Tb*) et le Dysprosium (*Dy*). On retrouve également le Terfenol-D (TER : terbium, FE : iron, NOL : Naval Ordnance Laboratory, D : Dysprosium) comme élément à magnétostriction géante. L'effet magnétostrictif est réversible, sous contraintes mécaniques, les propriétés magnétiques et résistives du matériau varient. Ceci implique la possibilité de réalisation de capteurs magnétostrictifs. Les matériaux magnétostrictifs sont capables de s'allonger ou de se contracter dans l'axe du champ (Figure 1.10-a). Cette propriété magnétostrictive donne lieu au développement des actionneurs appelés bi-matériaux [Mar97]. En

effet, la réalisation d'une structure poutre par collage de matériaux ayant des propriétés magnétostrictives différentes peut permettre selon la direction du champ magnétique l'obtention d'une déflexion d'un côté ou de l'autre (Figure 1.10-b). Ce principe illustré par la Figure 1.10-b peut être exploité pour réaliser des micropinces en utilisant deux poutres à base de matériaux magnétostrictifs.

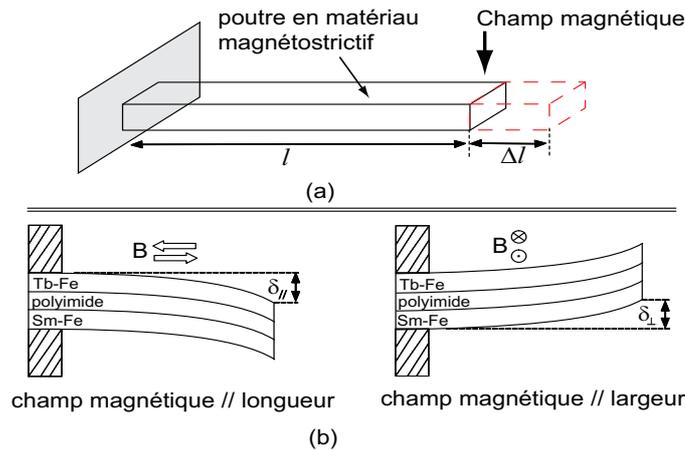


FIGURE 1.10 – a : principe d'un actionneur magnétostrictif. b : micro-actionneur de type bimorphe magnétostrictif.

L'avantage majeur de ce type d'actionnement est le contrôle à distance (sans contact). Cette propriété est appréciée notamment dans le cas où l'environnement de travail est confiné ou lorsque la tâche à réaliser nécessite une isolation galvanique (cas de la micromanipulation en biologie ou en médecine). Ainsi, ce principe d'actionnement permet de développer des forces relativement importantes. Cependant, la miniaturisation de micro-actionneurs basés sur ce principe n'est pas aisée à cause de la difficulté d'intégrer dans un faible volume au moins une micro-bobine et un noyau ferromagnétique. De plus, l'actionnement par champ magnétique en microrobotique pose d'importants problèmes de commande dus essentiellement au phénomène d'hystérésis.

### 1.3.3 Micro-actionneurs thermiques

Ce type d'actionnement utilise une énergie thermique pour engendrer des déformations. Le principe d'actionnement est généralement basé sur la transformation de phase du matériau ou sur la théorie de dilatation des solides ou des fluides (liquides ou gazeux). L'un des inconvénients des systèmes thermiques est leur faible bande passante. La rapidité de ces systèmes thermiques est proportionnelle au volume à chauffer. Dans le cas de gros volumes, le temps de chauffage est très lent. Comme dans le micromonde, le rapport entre le volume de matière à chauffer et les surfaces d'échange thermique devient très favorable, le temps de réponse est réduit et on trouve de nombreuses applications de ces actionneurs.

### 1.3.3.1 Micro-actionneurs à alliage à mémoire de forme (AMF)

Les alliages dits à mémoire de forme (Ni-Ti, Cu-Zn-Al et Cu-Al-Ni) peuvent être déformés de façon plastique sous l'effet mécanique ou thermique. Comme leur nom indique, ces matériaux possèdent la propriété de "mémoire" et peuvent retrouver leur forme initiale en les chauffant. Les AMFs (alliages à mémoire de forme) sont capables de générer des déformations de l'ordre de 6% sous l'action de la température. On trouve aussi les alliages à mémoire de forme magnétiques (AMFMs) apparus récemment et qui peuvent se déformer sous l'application d'un champ magnétique [Gau07]. Un exemple d'utilisation d'AMF est donné dans [Bel98]. Il s'agit d'une micropince basée sur le principe de transformation de phase du matériau, elle est utilisée pour manipuler des microlentilles de diamètre d'environ 250  $\mu m$ . Une micropince à AMF a également été développée dans [Koh00]. Cette dernière est capable d'engendrer des déplacements et des forces de l'ordre de 180  $\mu m$  et 17  $mN$  respectivement.

De manière générale, les AMFs sont avantageux en micro-actionnement car ils produisent des déplacements continus et une énergie massique très importante. Un autre point fort de ces micro-actionneurs est que leur actionnement peut se faire sur une plage réduite de variation de température autour de la température ambiante. Cependant, le phénomène thermomécanique à l'origine de la déformation confère à ces matériaux un temps de réponse toujours long<sup>6</sup>. Ceci rend ces micro-actionneurs peu exploitables à hautes fréquences. De plus, le comportement des AMFs est complexe et fortement hystérétique [Ben98] [Ara94], ce qui rend la synthèse des lois de commande complexe.

### 1.3.3.2 Micro-actionneurs à dilatation thermique du solide

La structure de base de ces actionneurs est formée de deux ou plusieurs couches collées entre elles. Ces dernières n'ayant pas les mêmes coefficients de dilatation thermique (par exemple de l'Aluminium et du Silicium), lorsque l'ensemble est porté à la même température, chaque couche s'allonge différemment provoquant une flexion globale de la structure [Kol99] [Rak10b] (Figure 1.11-a). Des micropinces peuvent être réalisées en exploitant ce principe [Rak11c]. En fait, les structures les plus utilisées dans les micro-systèmes sont fondées sur la dilatation thermique d'un même matériau en utilisant deux poutres ayant des sections différentes (Figure 1.11-b). Le principe de fonctionnement de cette dernière est basé sur la différence de géométrie des deux poutres réalisées dans le même matériau. Le passage d'un courant à travers la structure produit une flexion en raison du gradient de température obtenu. Une micropince électrothermique permettant la manipulation des cellules biologiques a été développée en utilisant ce dernier principe [Chr05] (voir Figure 1.11-c). D'autres exemples de micropince électrothermique sont donnés dans [Voi08] [And08].

Les micro-actionneurs à dilatation thermique peuvent être aisément fabriqués par micro-usinage (microfabrication). De plus, ils permettent de produire des forces et des déformations importantes. Cependant, leur inconvénient majeur est le temps de réponse assez long à cause des échanges thermiques.

6. La bande passante n'excède pas 1  $Hz$  pour un fil AMF de 150  $\mu m$  de diamètre.

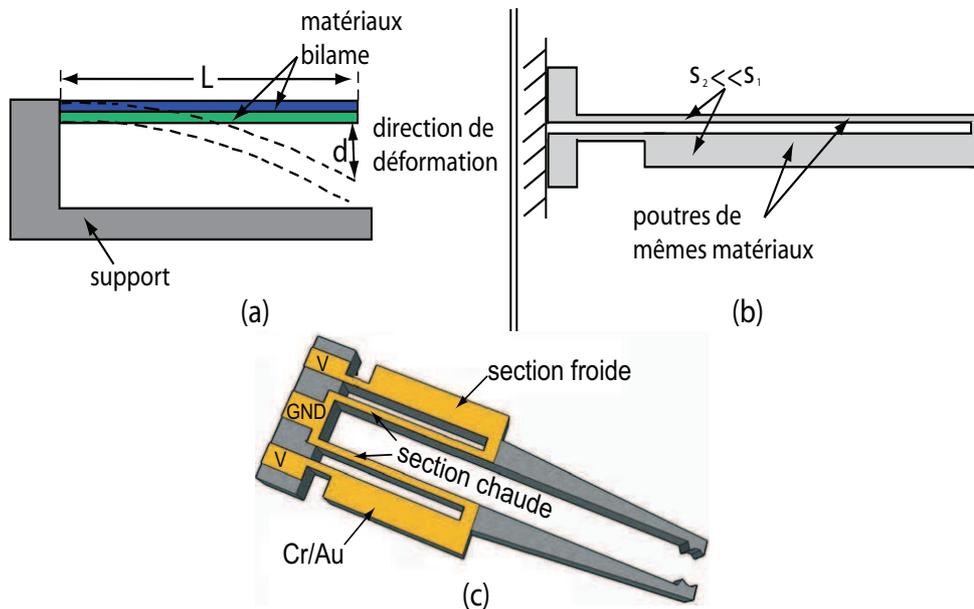


FIGURE 1.11 – a : principe d'un micro-actionneur thermique de type bilame. b : principe de micro-actionnement thermique exploitant la différence de géométrie. c : micropinçe électrothermique [Chr05].

### 1.3.4 Micro-actionneurs piézoélectriques

La Piézoélectricité a été découverte par Pierre et Jacques Curie en 1880. Le phénomène de la piézoélectricité peut être expliqué par l'apparition d'une polarisation du matériau (et donc des charges électriques) sous l'action d'une contrainte mécanique (Figure 1.12-a). C'est l'effet piézoélectrique direct. De même, il existe un effet inverse consistant en l'apparition d'une déformation du matériau suite à l'application d'une différence de potentiel (Figure 1.12-b). Ces matériaux piézoélectriques présentent donc un couplage électromécanique.

Il existe une variété de matériaux présentant l'effet piézoélectrique, les catégories principales sont :

- les monocristaux pour lesquels l'effet résulte directement de leur structure cristalline (quartz, tourmaline) ;
- les structure polycristalines, à savoir les céramiques telles que la famille des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou *Lead-Zirconate-Titanate* en anglais) ;
- les polymères tels que le polyfluorure de vinylidène (PVDF) ;
- les composites qui sont obtenus par mélange de différents matériaux piézoélectriques.

Plusieurs structures de micro-actionneurs piézoélectriques sont disponibles sur le marché parmi lesquels on trouve les formes : de disques, de tubes (cylindriques), d'ellipses et de poutres. Les structures les plus favorables des micro-actionneurs piézoélectriques sont les structures poutres composées de plusieurs couches piézoélectriques et

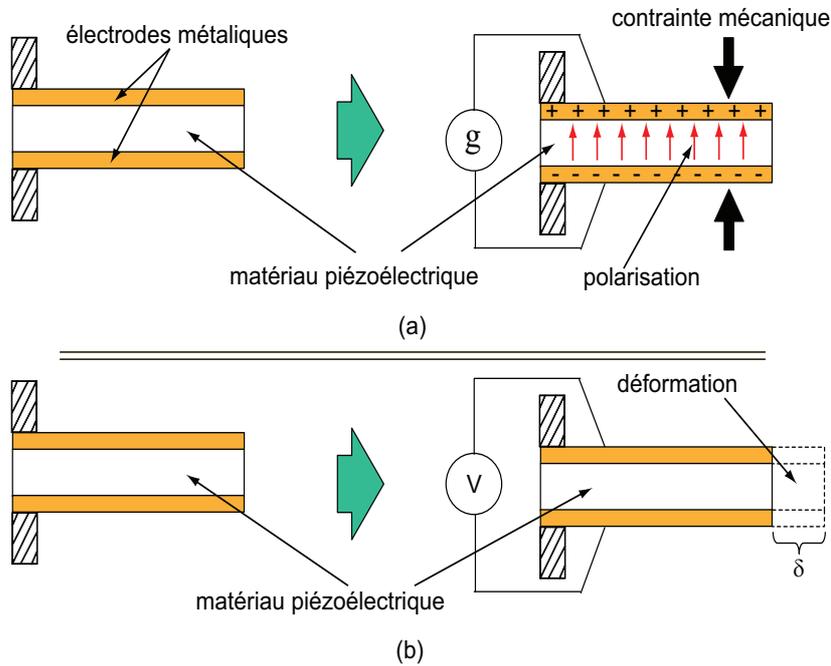


FIGURE 1.12 – a : effet piézoélectrique direct. b : effet piézoélectrique inverse.

passives. Lorsque la structure est soumise à une excitation électrique, une déflexion apparaît à son extrémité. Les micro-actionneurs piézoélectriques sont très utilisés dans les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage à cause de la haute résolution, la haute densité de force et la large bande passante (rapidité) du matériau piézoélectrique. Par ailleurs, ils peuvent assurer indifféremment les fonctions d'actionneur, de capteur ou d'actionneur et de capteur simultanément (appelé *mode de self-sensing*<sup>7</sup>). Leur utilisation en mode self-sensing permet d'éviter l'utilisation d'un capteur supplémentaire [Rak10c]. Cependant, l'inconvénient majeur du self-sensing est la précision et la bande passante limitées. La Figure 1.13 montre quelques exemples de micropinces piézoélectriques réalisées à l'institut FEMTO-ST [Had00b] [Agn03] [Agn05]. Elles sont utilisées pour effectuer des opérations de prise-dépose (pick-and-place) de micro-objets.

Malgré les propriétés remarquables des matériaux piézoélectriques, ils présentent quelques inconvénients notamment leur comportement non-linéaire et leur haute sensibilité à la température. Les forces fournies par les micro-actionneurs piézoélectriques sont relativement importantes, mais les déformations engendrées restent très faibles, typiquement environ 0.1% à 0.2%.

7. Le mode de self-sensing s'agit de faire fonctionner un élément piézoélectrique en modes actionneur et capteur simultanément en utilisant des circuits électroniques conçus à cet effet.

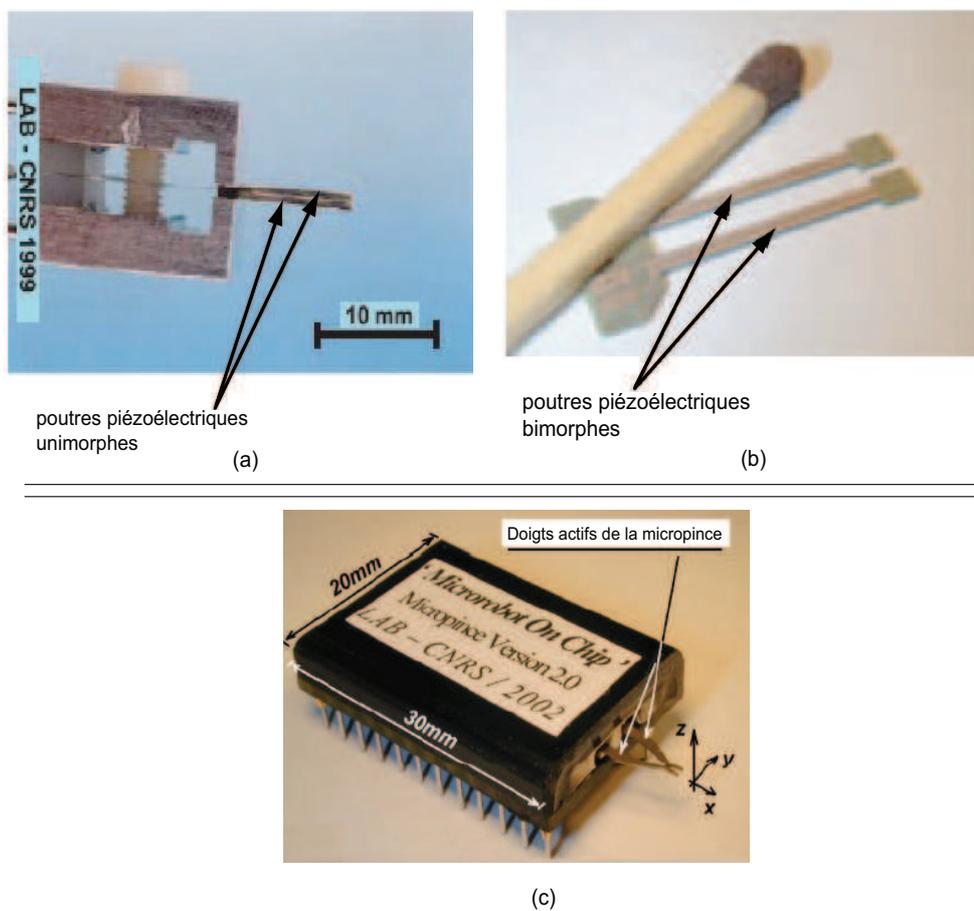


FIGURE 1.13 – a : une micropince à poutres piézoélectriques unimorphes [Had00b]. b : une micropince à poutres piézoélectriques bimorphes [Agn03]. c : une micropince MMOC à actionnement piézoélectrique intégré au niveau des doigts de préhension [Agn05].

### 1.3.5 Comparaison des différents types d'actionnement

Chaque type de micro-actionnement présenté précédemment a ses avantages et ses inconvénients. Le [Tableau 1.2](#) résume les caractéristiques de quelques micro-actionneurs fréquemment utilisés dans les applications de micromanipulation et de micro-assemblage.

TABLE 1.2 – Résumé comparatif des caractéristiques de quelques types d'actionnement.

Actionneur	Amplitude de déformation	Force engendrée	Temps de réponse	Mode d'actionnement
Magnétostrictif	importante	importante	rapide	sans contact
Électrostatique	importante	importante	rapide	par contact
Thermique	importante	très importante	lent	par contact
Piézoélectrique	très faible	très importante	très rapide	par contact

En fait, l'actionnement magnétostrictif permet de réaliser des déplacements à distance et sans contact. Cependant, l'exploitation de ce principe d'actionnement est souvent très contrainte par les dimensions réduites des microsystèmes. De même, il présente un effet d'hystérésis à cause des interactions magnétiques. Les micro-actionneurs électrostatiques sont connus par leur rapidité de commutation et leurs déformations importantes. Néanmoins, ils sont limités en quantité d'efforts fournis et leur actionnement nécessite des tensions élevées. Les phénomènes de collage physico-chimique et le champ électrostatique pouvant attirer des micro-objets (poussières par exemple) présents dans l'environnement de travail sont aussi des limitations de ce type d'actionnement. Quant aux micro-actionneurs thermiques, ils permettent de produire des efforts et des déplacements importants. Néanmoins, l'inconvénient majeur de l'actionnement thermique est la bande passante limitée. D'autres limitations sont liées aux non-linéarités. Les micro-actionneurs piézoélectriques sont capables de développer de grandes forces mais de très faibles déplacements. Une autre propriété remarquable de ces micro-actionneurs est la large bande passante permettant leur exploitation à haute fréquence. L'inconvénient majeur est leur comportement fortement non-linéaire dû aux phénomènes d'hystérésis et de dérive et la haute sensibilité à l'environnement.

Les différentes caractéristiques citées ci-dessus conduisent à des applications spécifiques de chacun de ces principes de micro-actionnement. Malgré son comportement non-linéaire, l'actionnement piézoélectrique est largement utilisé pour agir dans le micromonde en raison des propriétés favorables du matériau piézoélectrique.

Nous nous intéressons dans nos travaux aux micro-actionneurs piézoélectriques de structures poutres qui, comme on vient de le voir, possèdent des capacités intéressantes sur le plan de la résolution, de la rapidité et de la densité de force.

## 1.4 Micro-actionneurs piézoélectriques de structures poutres

Les structures les plus répandues des micro-actionneurs piézoélectriques sont les structures poutres. Elles peuvent être unimorphes, bimorphes ou multimorphes. Les structures unimorphes (Figure 1.14-a) sont formées d'une couche piézoélectrique (matériau actif) et d'une couche passive (souvent du Nickel ou du Cuivre). Contrairement aux unimorphes, les multimorphes (multicouches) sont composées de plusieurs couches

actives et/ou passives (Figure 1.14-b). Lorsque la poutre est basée sur deux couches piézoélectriques, il s'agit d'une poutre bimorphe.

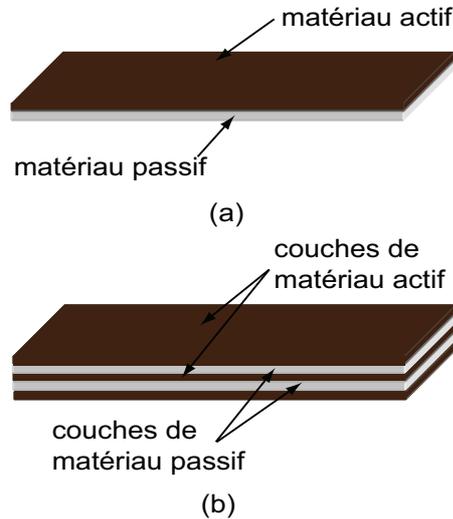


FIGURE 1.14 – a : poutre piézoélectrique unimorphe. b : poutre piézoélectrique multimorphe.

Dans les applications de manipulation, l'une des extrémités de la poutre est fixée par encastrement, tandis que l'autre est libre (Figure 1.15-a). Ainsi, un organe terminal (effecteur) est généralement attaché à l'extrémité libre de la poutre (Figure 1.15-b) afin d'adapter aux objets manipulés ou d'amplifier le déplacement.

#### 1.4.1 Principe d'actionnement des poutres piézoélectriques

Dans le cas d'une poutre unimorphe, la couche de matériau actif s'allonge ou se contracte sous l'action d'un champ électrique (effet piézoélectrique inverse), tandis que la couche passive ne se déforme pas (Figure 1.16-a). Or, les deux couches étant collées entre elles, ceci provoque une déflexion globale de la structure (Figure 1.16-b). Ce principe reste le même pour le cas des poutres piézoélectriques multimorphes. Les structures multimorphes ont l'avantage d'augmenter l'amplitude de déformation de la poutre en réduisant sensiblement les tensions d'alimentation et d'engendrer également des forces très importantes. En comparaison avec les poutres unimorphes, les bimorphes permettent d'avoir deux fois la déflexion lorsque la même amplitude de tension est appliquée [Pol00]. En d'autres termes, la tension nécessaire pour avoir une déflexion avec des structures unimorphes peut être réduite en utilisant des structures multimorphes. Cependant, il est plus difficile de fabriquer les poutres bimorphes ou multimorphes et leur connectique est également plus complexe<sup>8</sup>.

8. Souder des fils conducteurs pour assurer l'excitation électrique de la poutre devient une tâche difficile à réaliser sur des couches très minces.

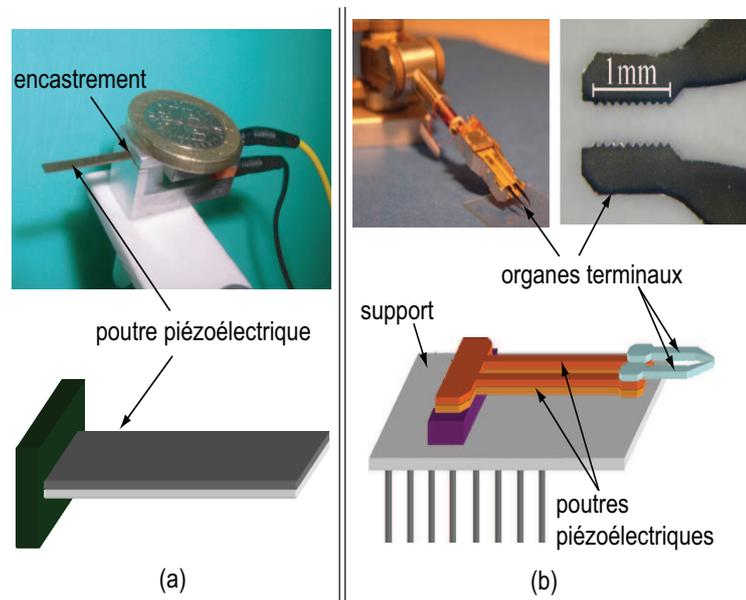


FIGURE 1.15 – a : poutre piézoélectrique encastree-libre. b : exemple d'emploi d'organes terminaux sur les poutres d'une micropinse [Agn03]

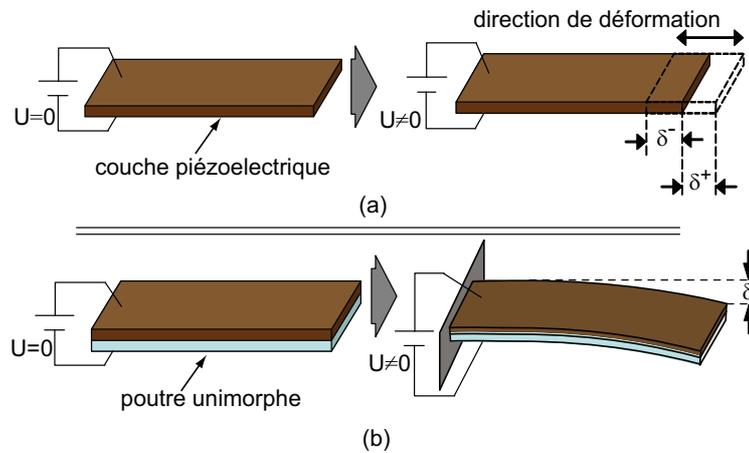


FIGURE 1.16 – a : déformation d'une couche piézoélectrique sous l'effet d'un champ électrique. b : poutre piézoélectrique unimorphe soumise à un champ électrique.

### 1.4.2 Modes de déformation

Le couplage entre la direction du champ électrique et la direction de déformations des poutres piézoélectriques peut se faire selon trois modes de déformations principaux : longitudinal, transversal et cisaillement. À partir de ces trois modes de déformations, il est possible de réaliser des combinaisons multiples de mouvements. La [Figure 1.17](#)

montre ces modes de déformations selon la façon d'appliquer le champ électrique et selon la polarisation initiale (permanente) du matériau :

- mode longitudinal : les déplacements produits sont parallèles à la direction du champ électrique (allongement de la poutre colinéaire au champ électrique) (Figure 1.17-a).
- mode transversal : les déformations sont perpendiculaires à l'axe du champ électrique appliqué (Figure 1.17-b).
- mode de cisaillement : dans ce cas, les déformations de cisaillement peuvent être obtenues lorsque le champ électrique appliqué est perpendiculaire à la direction de la polarisation (Figure 1.17-c).

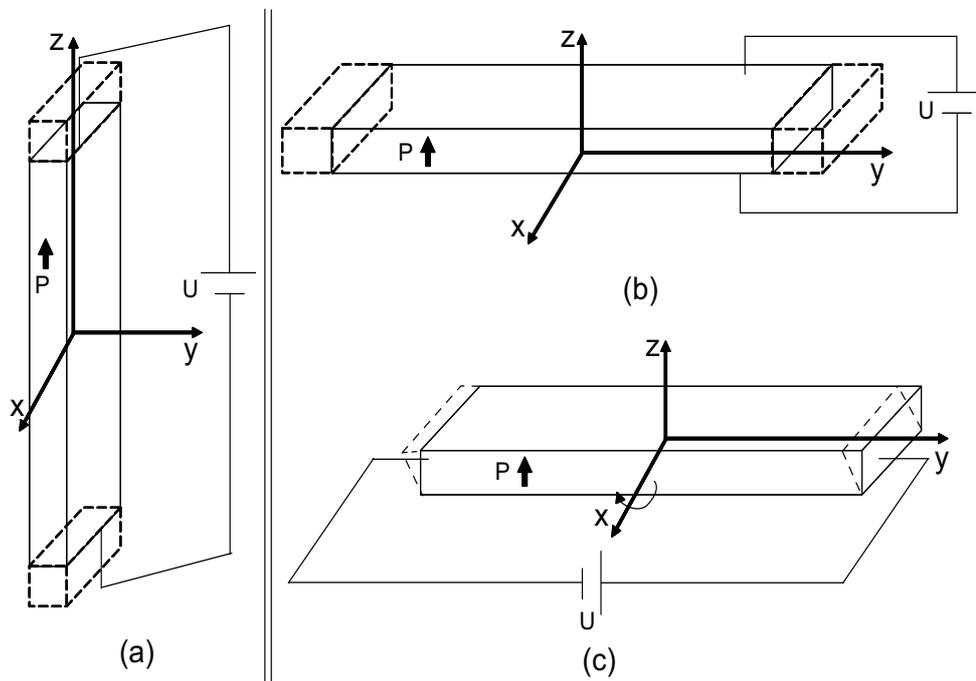


FIGURE 1.17 – Modes de déformation possibles d'une poutre piézoélectrique. a : mode longitudinal. b : mode transversal. c : mode de cisaillement.

### 1.4.3 Limites et défauts des poutres piézoélectriques

Nonobstant les différents avantages qu'offrent les poutres piézoélectriques, elles restent assujetties à quelques défauts et limites qu'il faut prendre en considération lors de la conception de la commande des micro-actionneurs piézoélectriques. L'un des inconvénients des poutres piézoélectriques est l'amplitude faible de la déformation. Pour remédier à cette limitation, il est souvent recommandé d'utiliser des structures empilées. D'autres défauts limitant les performances des micro-actionneurs piézoélectriques sont résumés dans les paragraphes suivants.

### 1.4.3.1 Phénomènes non-linéaires

Les matériaux piézoélectriques, en particulier les pi céramiques sont caractérisés par un comportement non-linéaire. Ces non-linéarités sont particulièrement :

- l’hystérésis : la déformation engendrée par une poutre piézoélectrique n’est pas strictement linéaire avec l’augmentation du champ électrique appliqué. Lorsque la tension appliquée devient importante (pratiquement supérieur à 15% du champ électrique maximal), la réponse en déflexion de la poutre est affectée d’un comportement hystérétique non-négligeable (Figure 1.18) [Zho01].

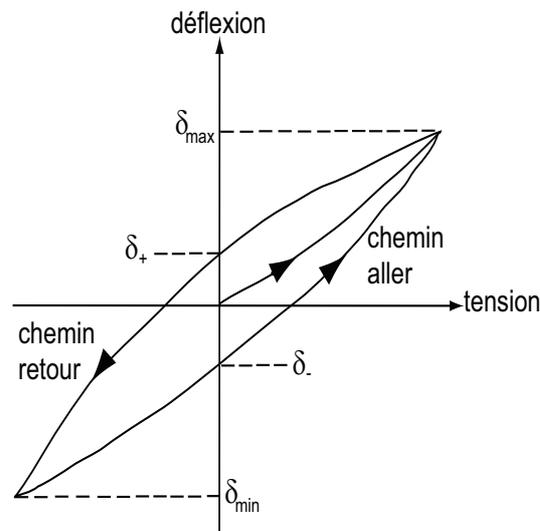


FIGURE 1.18 – Phénomène d’hystérésis

- la dérive lente : également appelée fluage (ou encore creep), lorsque un saut de tension est appliqué à une poutre piézoélectrique, une déformation lente peut être observée sur la réponse temporelle dès les premiers instants suivant le régime transitoire (Figure 1.19). Ce phénomène est représenté par une perte logarithmique de déflexion dans le temps [Kai88]. La dérive lente peut durer des dizaines de minutes.

### 1.4.3.2 Influence de la température

Les matériaux piézoélectriques (en particulier les céramiques PZT) sont également caractérisés par un coefficient de dilatation thermique qui est typiquement de  $7 \times 10^{-6} K^{-1}$ . Une variation de température de  $10\text{ }^{\circ}C$  peut engendrer une erreur de  $10\text{ }\mu m$  sur les déplacements des micro-actionneurs piézoélectriques classiques [Rak07a]. De plus, certains paramètres physiques du matériau, tels que les coefficients mécaniques et piézoélectriques, ont une grande sensibilité à la température (effet pyroélectrique) [Zho01].

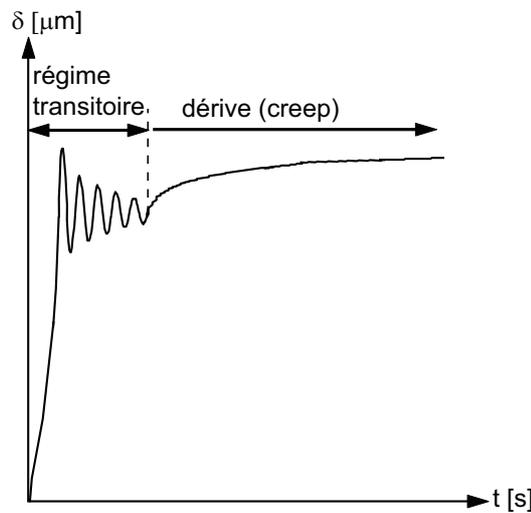


FIGURE 1.19 – Phénomène de dérive

### 1.4.3.3 Vieillessement

Généralement, les propriétés des poutres piézoélectriques évoluent graduellement dans le temps. Les paramètres physiques de la poutre ne demeurent stables que pour une période de fonctionnement donnée. En d'autres termes, une perte peut être observée sur les coefficients piézoélectriques après une période d'exploitation. Pratiquement, cette diminution des propriétés piézoélectriques avec le temps est de type logarithmique et est due à une ou plusieurs des conditions suivantes :

- application d'un effort mécanique élevé,
- application d'un champ électrique fort,
- haute température.

## 1.5 État de l'art sur la commande des poutres piézoélectriques

Prédire la variabilité du comportement des poutres piézoélectriques représente une tâche extrêmement difficile. Ceci a un impact important sur la construction de modèles représentatifs des poutres piézoélectriques. Généralement, une loi de commande calculée sur la base d'un modèle approximatif (nominal) pourrait ne pas assurer les performances de la boucle fermée (voire déstabiliser le système bouclé). Pour remédier à ce problème, des techniques de modélisation et de commande permettant de prendre en compte les phénomènes complexes dans les actionneurs piézoélectriques ont été développées.

Selon la littérature, les systèmes microrobotiques nécessitent la commande des déplacements (positions) des actionneurs et de la force de manipulation afin d'assurer une bonne manipulation et un positionnement précis. À la fois des propositions de commande en boucle fermée et en boucle ouverte ont été faites.

Les techniques de la commande en boucle fermée représentent la meilleure façon pour atteindre les performances requises. Elles permettent également une commande robuste qui prend en compte les variations des paramètres du modèle. Néanmoins, l'utilisation de la commande en boucle fermée dans les systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage est fortement limitée par la difficulté d'intégrer des capteurs précis et rapides. De ce fait, quelques études font appel aux techniques de la commande en boucle ouverte [Bor05] [Dev07]. Les techniques de commande en boucle ouverte n'ont pas besoin d'un retour d'information sur les sorties du système [Rak10a] [Rak11a]. Toutefois, ces techniques ne permettent pas de rejeter les perturbations et de prendre en compte les incertitudes de modèles.

### 1.5.1 Commande en boucle ouverte

La déflexion des poutres piézoélectriques peut être commandée en considérant soit la charge électrique soit la tension comme signal d'entrée. L'approche de commande en charge (Figure 1.20-a) est parfois adoptée en exploitant la linéarité de la relation charge-déflexion [Com81] [New82] [Mai95]. L'un des points forts de cette méthode est la simplicité du calcul de la loi de commande, mais elle nécessite un circuit électronique complexe pour assurer l'alimentation du système et la conversion de la charge en tension. La déflexion des poutres piézoélectriques est donc couramment commandée en utilisant la tension comme signal d'entrée (Figure 1.20-b). La différence par rapport à la commande en charge se trouve au niveau des non-linéarités caractérisant la méthode de commande en tension.

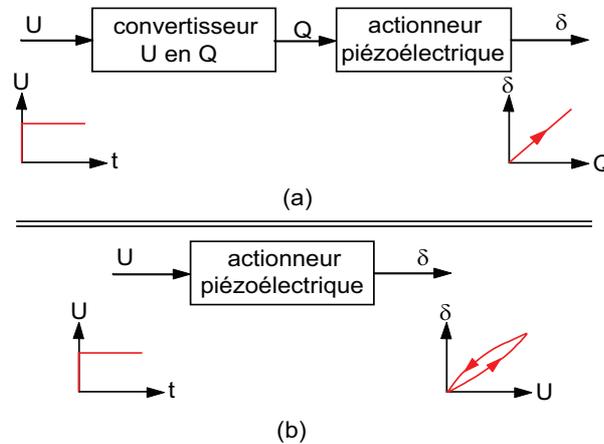


FIGURE 1.20 – a : commande en charge  $Q$  d'un actionneur piézoélectrique. b : commande en tension  $U$  d'un actionneur piézoélectrique.

Les approches existantes de commande des poutres piézoélectriques en boucle ouverte (commande en déflexion) sont souvent basées sur l'inversion de modèles non-linéaires. Les modèles inverses permettent de linéariser le modèle par une compensation des effets indésirables causés par les non-linéarités (dérive et hystérésis) [Rak10a]. Le principe de

cette commande en boucle ouverte consiste à mettre en cascade le système à commander (poutre) et l'inverse des deux modèles d'hystérésis et de dérive comme indiqué sur la Figure 1.21.

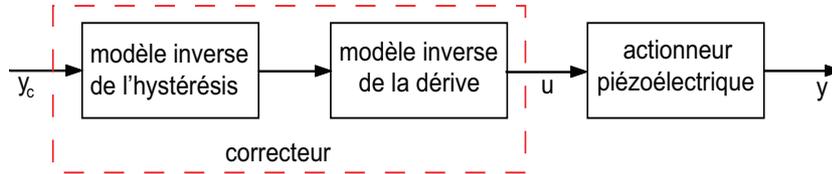


FIGURE 1.21 – Commande en boucle ouverte par inversion du modèle d'hystérésis et de dérive.

Il existe différentes techniques permettant de décrire le modèle d'hystérésis. Le modèle d'hystérésis le plus utilisé pour les matériaux piézoélectriques est l'opérateur de *Preisach* [May91a] [Mra02] [Gol97] [Ge97]. D'autres modèles d'hystérésis existent parmi lesquels on trouve le modèle de *Prandtl-Ishlinskii* [Tan06] [Kuh01] [Rak10a] et le modèle de *Bouc-Wen* [Bou67] [Wen76] [Rak11a]. Il a été démontré que le modèle de *Preisach* permet de modéliser précisément l'hystérésis pour différents types d'actionneurs, tels que les actionneurs électromagnétiques [Mit00], actionneurs à alliage à mémoire de forme [Gor97] et les actionneurs piézoélectriques [Cro01].

Différentes approches pour modéliser la dérive ont été proposées. L'une des approches consiste à décrire la dérive par une fonction logarithmique dépendante du temps [Jun00]. Les modèles basés sur une approximation logarithmique sont pratiquement non valides à cause de leurs sorties non-bornées (infinies) quand  $t \rightarrow \infty$ . Pour s'affranchir de ces difficultés de modélisation, des modèles ont été utilisés [Mok08] [Cro01] [Rak10a].

Le choix d'un modèle modélisant l'hystérésis ou la dérive dépend de sa simplicité et de la possibilité de son inversion analytique (en particulier l'inversion du modèle d'hystérésis). En effet, le modèle mathématique d'hystérésis présente parfois quelques conditions afin que l'opération inverse du modèle soit possible. La haute sensibilité aux perturbations (température et humidité) est l'un des inconvénients de la commande en boucle ouverte des poutres piézoélectriques. Si l'on ne peut pas garantir les performances dans ces conditions d'utilisation, la commande en boucle fermée permettra d'atteindre de meilleures performances de façon garantie.

### 1.5.2 Commande en boucle fermée

Dans le schéma de la Figure 1.22, on trouve des approches de commande prenant en compte ou non de l'hystérésis et de la dérive des actionneurs piézoélectriques.

Les correcteurs traditionnels PID sont largement utilisés dans de nombreuses applications microrobotiques [Kou82] [Cut91]. Ce type de correcteur est bien adapté aux applications de micropositionnement, dans le cas où ses paramètres sont correctement ajustés.

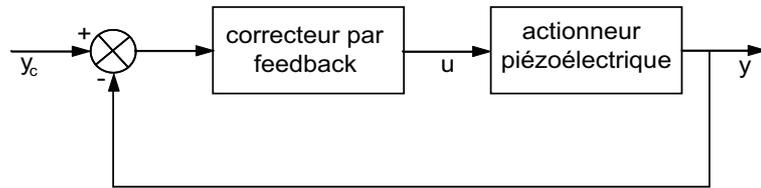


FIGURE 1.22 – Schème de commande en boucle fermée d'actionneurs piézoélectriques.

Les techniques de commande avancée telles que les lois de commande robuste ( $H_\infty$ ,  $\mu$ -synthèse) ont été également utilisées dans la commande des actionneurs piézoélectriques. L'avantage principal de ces approches est qu'elles permettent de prendre en compte les incertitudes liées au modèle. Une méthode pour modéliser l'hystérésis et pour commander les poutres piézoélectriques a été proposée dans [Rak09]. L'hystérésis est représenté par une approximation quadrilatérale, tandis que la dérive a été considérée comme une perturbation externe. Une loi de commande robuste  $H_\infty$  basée sur le modèle obtenu a donc été conçue. Dans [Rak06a], une approximation multi-linéaire a été utilisée pour modéliser l'hystérésis d'une poutre piézoélectrique unimorphe. Afin d'assurer les performances requises, un correcteur  $\mu$ -synthèse a été calculé. Tsai and Chen [Tsa03] proposent une méthode pour la synthèse d'une loi de commande robuste  $H_\infty$  pour commander la déflexion, dans laquelle, le modèle d'hystérésis utilisé est basé sur le prédicteur de Smith.

Une autre technique consiste à utiliser un correcteur feedback/feedforward comme sur la Figure 1.23. Le pré-compensateur a pour objectif de compenser d'abord les non-linéarités (hystérésis et dérive) tandis que l'ajout du correcteur par feedback permet ensuite d'améliorer la précision de l'asservissement des actionneurs piézoélectriques. Généralement, le pré-compensateur peut être obtenu par une simple inversion du modèle d'hystérésis et/ou de dérive. Par exemple, dans [Rak08], un pré-compensateur basé sur l'inverse du modèle de Prandtl-Ishlinskii est d'abord utilisé pour linéariser l'effet hystérétique piézoélectrique. Ensuite, un correcteur robuste par feedback de type  $H_\infty$  est conçu pour rejeter l'effet d'une perturbation thermique. Croft and Devasia proposent une méthode de commande des micro-actionneurs piézoélectriques basée sur le schéma de la Figure 1.23 [Cro98]. Cette dernière est basée sur l'inverse d'un modèle polynomial d'hystérésis et la conception d'un correcteur PD pour amortir les vibrations.

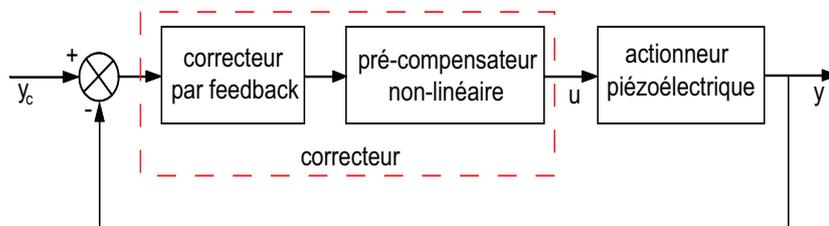


FIGURE 1.23 – Commande par compensation du modèle de l'actionneur piézoélectrique.

D'autres travaux adoptent la structure de commande feedback/feedforward donnée par la Figure 1.24. L'utilisation de cette structure permet d'assurer un bon suivi de trajectoire [Dew98] [Son05] [Ge96]. Le correcteur idéal feedforward permettant d'assurer un suivi parfait de la sortie ( $y = y_c$ ) est le modèle inverse de l'actionneur piézoélectrique.

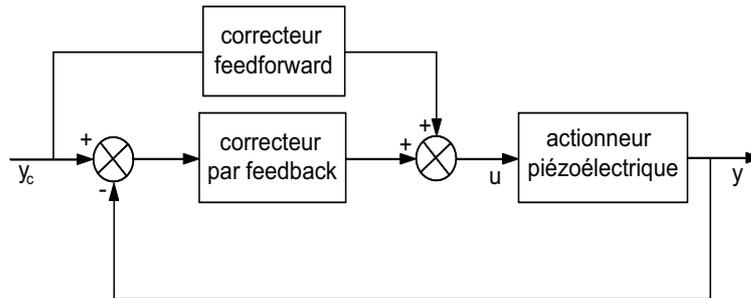


FIGURE 1.24 – Commande feedback/feedforward assurant un suivi de trajectoire.

La Figure 1.25 montre une autre possibilité d'avoir une commande feedback/feedforward. Le principe de cette dernière consiste tout d'abord à éliminer ou à réduire les effets d'hystérésis, de dérive et des incertitudes liées au modèle en utilisant une commande par feedback. Ensuite, le correcteur feedforward peut être construit à partir du système en boucle fermée linéarisé [Lea02] [Li07].

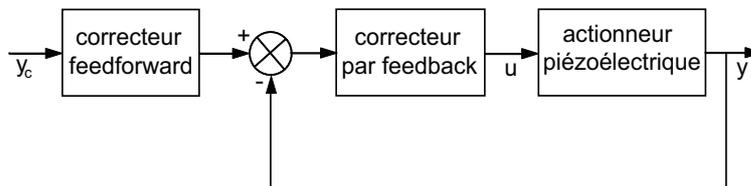


FIGURE 1.25 – Commande feedback/feedforward par compensation du système bouclé.

D'autres techniques existent pour commander les micro-actionneurs piézoélectriques telles que la synthèse de loi de commande par retour d'état [Oka90] et les méthodes adaptatives [Li93] [Kuh99]. Des approches de commande par modes glissants ont été également appliquées aux actionneurs piézoélectriques [Abi04]. Certaines sont basées sur les approches de la logique floue [Ste98].

D'après les travaux existants, les approches de commande robuste occupent une place très importante dans le micromonde à cause de leur efficacité et fiabilité à assurer le bon fonctionnement du système en présence des incertitudes. Ces méthodes de commande avancée permettent de fournir une solution et formulation précise au problème de synthèse de correcteur. Cependant, l'application de ces dernières mènent à des correcteurs d'ordre élevé. Pour les microsystèmes, il est difficile d'implémenter des correcteurs d'ordre élevé dans un microcontrôleur, car ils sont coûteux en terme de temps de calcul. L'utilisation des méthodes de réduction d'ordre peut résoudre ce problème. Cependant, il a été montré qu'avec les correcteurs obtenus après réduction, les performances de la

boucle fermée sont perdues en présence des incertitudes. Pour éviter cela, nous utilisons une méthode basée sur la théorie des intervalles.

### 1.5.3 Méthode proposée

Une méthode simple et garantie pour modéliser et/ou borner les incertitudes paramétriques consiste à considérer chaque quantité variable incertaine dans un intervalle où sa valeur exacte est incluse de façon certaine. Manipuler des données représentées par des intervalles est supporté par la théorie des ensembles et par l'outil de l'*Analyse par Intervalles*. Ceci offre une alternative intéressante aux méthodes ponctuelles (flottante).

D'après certaines études, la première formulation d'intervalle a été probablement abordée par Healt en 1897 pour encadrer la valeur de  $\pi$  [Hea97]. D'autres études indiquent que les techniques d'analyse par intervalles sont apparues dans les années 20 à partir des travaux de J. C. Burkill en 1924 [Bur24], de R. C. Young en 1931 [You31] et plus tard par T. Sunaga en 1958 [Sun58]. Cependant, l'arithmétique des intervalles a connu un réel développement suite aux travaux de thèse de Moore en 1962 [Moo62] et à la parution de son livre [Moo66] en 1966. L'objectif de ses travaux consiste à analyser et quantifier les erreurs d'arrondis dans le calcul numérique. Après cette période, des travaux intéressants ont été réalisés par Neumaier [Neu85] en 1985, sur la solution garantie d'un système d'équations linéaires et non linéaires, et Kearfott [Kea89] via un problème d'optimisation globale en 1989. En outre, avec la popularité de l'analyse par intervalles, de nombreuses applications basées sur les résultats de Moore sont apparues ces dernières années [Kea96] [Jau01].

Dans notre cas, l'analyse par intervalles nous permet de borner les incertitudes paramétriques des actionneurs piézoélectriques ; l'utilisation d'une fonction de transfert à paramètres intervalles représente une façon intéressante pour définir un comportement incertain [Kee94] [Lew94b] [Lew94a] [Sha91]. Par ailleurs, un tel modèle intervalle permet de modéliser une famille de poutres piézoélectriques. La conception d'une loi de commande basée sur ce modèle intervalle pourra donc être effectuée pour atteindre un cahier des charges pour toute poutre piézoélectrique ayant un modèle à l'intérieur du modèle intervalle. La commande par intervalles a été utilisée pour commander de nombreux systèmes [Kee94] [Li09] [Jau01]. L'avantage principal de la commande par intervalles est que la structure du correcteur peut être choisie *a priori*. Ce choix de structure permet de jouer sur l'ordre du correcteur et donc d'obtenir un correcteur d'ordre suffisamment réduit s'il existe.

## 1.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que les actionneurs, les micro-objets et les informations délivrées par les capteurs sont les éléments principaux des systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage.

Nous avons montré qu'il existe une grande diversité de micro-actionneurs permettant la réalisation de nombreux systèmes de préhension. Malheureusement, les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage sont confrontées à la difficulté d'intégrer

des capteurs précis et de dimensions compatibles avec le micromonde qui actuellement représente un verrou technologique.

L'actionneur représente l'élément principal dans les systèmes de manipulation. La sélection d'un type d'actionnement dépend des caractéristiques de l'actionneur choisi et des objectifs de micromanipulation souhaités. Dans nos travaux, nous nous focalisons sur les actionneurs piézoélectriques qui sont largement utilisés du fait de leurs excellentes propriétés en termes de haute résolution, de haute densité de force et de large bande passante. Cependant, certains phénomènes complexes de ces actionneurs piézoélectriques limitent certaines performances requises pour réussir les tâches de micromanipulation et micro-assemblage. Ceci mène à des comportements incertains de ces actionneurs qui empêchent d'obtenir des performances garanties. Pour réussir les tâches de micromanipulation, des stratégies adaptées de modélisation et de commande devraient être mises en place.

Les approches de commande d'actionneurs piézoélectriques sont nombreuses dont chacune présente des avantages et des inconvénients. L'un des inconvénients est lié au nombre élevé de degré de liberté des correcteurs dérivés qui empêche la satisfaction du compromis performances/robustesse.

Notre thèse vise à proposer une solution permettant :

- de borner les incertitudes liées au modèle ;
- de dériver des correcteurs robustes d'ordre réduit et facilement implémentables sous microcontrôleur dédiés à ces microsystemes ;
- et de dimensionner des actionneurs piézoélectriques pour développer des micro-pinces.

Nous proposons une approche par intervalles combinée avec les outils de l'automatique pour obtenir ces objectifs.

## Chapitre 2

# Méthode d'encadrement des incertitudes paramétriques des systèmes

### 2.1 Introduction

Les incertitudes liées aux modèles peuvent être classées en deux grandes catégories : les incertitudes non structurées (ou dynamiques) et les incertitudes structurées (ou paramétriques). La première catégorie concerne les dynamiques négligées dans un modèle, dont la structure est inconnue et l'ordre est susceptible de changer. La seconde catégorie est liée aux variations ou erreurs d'estimation sur certains paramètres du modèle. Les études s'intéressant à cette seconde catégorie d'incertitudes, dont l'effet sur le comportement du système est significatif, sont de plus en plus nombreuses. Il est donc essentiel de les prendre en compte durant la modélisation pour assurer une meilleure approximation de la réalité. Les approches probabilistes ont été développées pour représenter les incertitudes paramétriques par des lois de probabilité (densité de probabilité) [Ibr87] [Sch97] [Man99] [Cam00]. Cette représentation nous donne à la fois un ensemble qui contient certainement la valeur incertaine, mais aussi une information sur la manière dont est distribuée cette variable aléatoire dans cet ensemble. Néanmoins, avec ces approches probabilistes, il est souvent difficile de déterminer une loi de probabilité. Pour cela, il est intéressant d'utiliser d'autres techniques utilisant moins de calculs et nécessitant moins d'informations statistiques sur les variables.

Dans ce contexte, nous proposons d'utiliser les approches ensemblistes pour représenter les incertitudes paramétriques. Ces dernières permettent de borner les incertitudes par un ensemble. En comparaison avec la méthode probabiliste, l'approche ensembliste est plus pauvre, mais elle permet de manipuler facilement des variables incertaines. De plus, elle demande moins de connaissances et d'hypothèses que la méthode probabiliste. Les ensembles sont souvent caractérisés par leurs bornes comme par exemple : les ellipsoïdes, les pavés (produit cartésien de  $n$  intervalles), les parallélotopes, les polytopes, etc.

Depuis des années, l'automatique s'est intéressée à l'approche ensembliste, en particulier concernant :

- l'analyse de stabilité ;
- la synthèse de lois de commande ;
- la sûreté de fonctionnement ;
- le diagnostic ;
- l'estimation ;
- etc.

Dans le cas de notre contribution, l'approche ensembliste nous permet de traiter les incertitudes de modèle dues au comportement variable des poutres piézoélectriques se traduisant par des incertitudes sur les valeurs identifiées des paramètres. Une forme simple permettant de représenter de façon exacte les incertitudes paramétriques consiste à encadrer l'ensemble des valeurs possibles des paramètres par des vecteurs d'intervalles. Ces intervalles contiennent de façon garantie les valeurs exactes des variables incertaines. Dans la commande des systèmes à incertitudes, le caractère garanti (assurer la stabilité et les performances) est extrêmement important. Nous cherchons dans cette thèse à explorer cet outil du calcul par intervalles pour modéliser et commander les actionneurs piézoélectriques.

## 2.2 Rappels sur l'arithmétique d'intervalles réels

Plus de détails sur les préliminaires donnés dans cette partie se trouvent dans [Moo66] et [Jau01].

### 2.2.1 Intervalles et pavés

Le principe de base de l'arithmétique d'intervalles consiste à remplacer une valeur réelle point (flottante) d'une variable par un intervalle qui l'encadre. Cette représentation très puissante offre une alternative intéressante à l'arithmétique flottante.

**Définition 2.1.** *On appelle intervalle réel borné noté  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ , l'ensemble des nombres réels vérifiant :*

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (2.1)$$

*pour tout couple de réels flottants  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$ , avec  $\underline{x} \leq \bar{x}$*

Dans un intervalle  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ ,  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  s'appellent les bornes inférieure et supérieure respectivement.

On note  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles bornés fermés sur  $\mathbb{R}$ .

Par exemple, la valeur de  $\pi$  n'est connue qu'avec une certaine précision, elle peut être représentée par un intervalle qui contient certainement sa valeur exacte :

$$[\pi] = [3.14, 3.15]$$

**Remarque 2.1.** Dans le cas où  $\underline{x} = \bar{x}$ ,  $[x]$  est dit *intervalle dégénéré*. Un tel intervalle contient un seul nombre réel  $x$ . Par convention, un intervalle dégénéré  $[a] = [a, a]$  peut être représenté par un nombre réel  $a$ .

La taille (longueur) d'un intervalle  $[x]$  est donnée par :

$$w([x]) = \bar{x} - \underline{x} \quad (2.2)$$

Le centre d'un intervalle  $[x]$  est défini par :

$$mid([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2} \quad (2.3)$$

Le rayon de  $[x]$  est défini par :

$$rad([x]) = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2.** Notons qu'un intervalle  $[x]$  peut être également exprimé en fonction de son centre et de son rayon comme suit :

$$[x] = mid([x]) \pm rad([x]) \quad (2.5)$$

De même, on désigne par  $\mathbb{IR}^n$  l'ensemble des vecteurs d'intervalles appelés souvent boîtes ou pavés.

**Définition 2.2.** Un pavé (vecteur intervalle ou boîte) noté  $[\mathbf{x}]$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  défini par le produit cartésien de  $n$  intervalles comme suit :

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2] \times \dots \times [x_n] \quad (2.6)$$

ou encore

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \\ \vdots \\ [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n, \bar{x}_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_1] \\ \vdots \\ [x_i] \\ \vdots \\ [x_n] \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Quelques représentations graphiques des nombres intervalles et des pavés (cas de  $n = 2, 3$ ) sont données dans la [Figure 2.1](#).

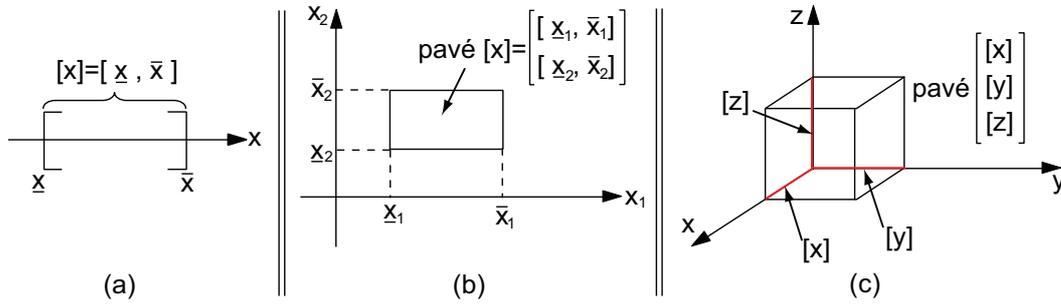


FIGURE 2.1 – Représentation graphique des intervalles et des pavés.

## 2.2.2 Opérations algébriques et ensemblistes sur les intervalles

Il est possible d'étendre les opérations mathématiques élémentaires aux intervalles. En fait, le résultat d'une opération entre deux intervalles est un intervalle qui contient le résultat de toutes les opérations possibles de toutes les paires de nombres incluses dans les deux intervalles.

**Définition 2.3.** *Considérons deux intervalles  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ ,  $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$  et un opérateur arithmétique  $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ , on peut écrire :*

$$[x] \diamond [y] = \{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\} \quad (2.8)$$

Les opérations classiques listées ci-dessus sont définies dans [Tableau 2.1](#).

TABLE 2.1 – Opérations classiques sur les intervalles [\[Moo66\]](#) [\[Jau01\]](#).

Operation	Definition
+	$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
-	$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$
*	$[x] * [y] = [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}, \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}]$
/	$[x]/[y] = [x] * [1/\bar{y}, 1/\underline{y}], 0 \notin [y]$

Les opérations théoriques sur les ensembles peuvent être aussi appliquées aux intervalles. En effet, l'intersection de deux intervalles  $[x] \cap [y]$  est un intervalle défini par :

1- si  $\bar{y} < \underline{x}$  ou  $\bar{x} < \underline{y}$  l'intersection est vide :

$$[x] \cap [y] = \emptyset \quad (2.9)$$

2- ailleurs :

$$[x] \cap [y] = [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}, \min\{\bar{x}, \bar{y}\}] \quad (2.10)$$

Dans ce dernier cas, l'union de  $[x]$  et  $[y]$  est aussi un intervalle :

$$[x] \cup [y] = [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\bar{x}, \bar{y}\}] \quad (2.11)$$

par ailleurs, dans le cas où  $[x] \cap [y] = \emptyset$ , on obtient l'intervalle appelé hull qui est défini comme suit :

$$[x] \sqcup [y] = [\min \{\underline{x}, \underline{y}\}, \max \{\bar{x}, \bar{y}\}] \quad (2.12)$$

Il est démontré que :  $[x] \cup [y] \subseteq [x] \sqcup [y]$  pour deux intervalles quelconques  $[x]$  et  $[y]$ .

**Remarque 2.3.** Un ensemble  $\mathbb{S}$  de forme quelconque peut être encadré par un pavé  $[x]$  (Figure 2.2-a). L'encadrement (pavé  $[x]$ ) réalisé contient tous les points de l'ensemble  $\mathbb{S}$  mais aussi d'autres points supplémentaires. Toutefois, il est possible d'approximer un ensemble  $\mathbb{S}$  par l'union finie de petits pavés (appelée sous-pavage). Ceci est représenté sur la Figure 2.2-b.

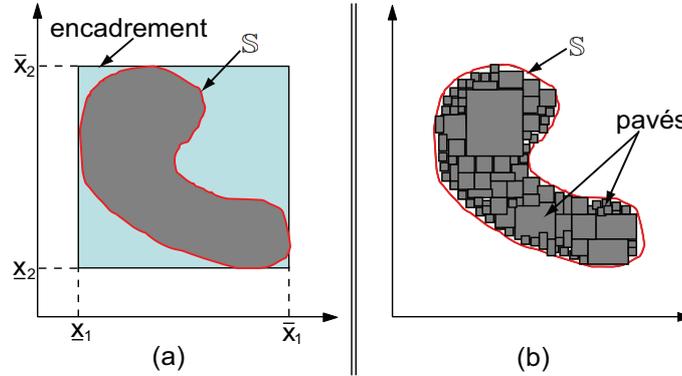


FIGURE 2.2 – a : encadrement d'un ensemble par un pavé. b : approximation d'un ensemble de  $\mathbb{R}^2$  par l'union de pavés de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$ .

### 2.2.3 Fonction d'inclusion

**Définition 2.4.** Soit une fonction  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Une fonction intervalle  $[\mathbf{f}]$  définie de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  est dite fonction d'inclusion de  $\mathbf{f}$  si :

$$\forall [x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m, \mathbf{f}([x]) \subset [\mathbf{f}]([x])$$

Notons que pour toute fonction  $\mathbf{f}$ , on peut trouver une fonction d'inclusion. Cette fonction d'inclusion n'est pas unique. La plus petite des fonctions d'inclusion de  $\mathbf{f}$  est unique et est appelée fonction d'inclusion minimale.

Généralement, le résultat issu d'une succession d'opérations sur des intervalles n'est pas minimal. Ceci est dû principalement à deux causes distinctes : la dépendance des variables et l'effet d'enveloppement.

### 2.2.4 Dépendance des variables

Ce problème est lié à la multi-occurrence de certaines variables dans une évaluation de fonction. En fait, lors d'un calcul par intervalles, chaque occurrence du même intervalle

est considérée comme étant un intervalle différent. En d'autres termes, l'égalité entre un intervalle et lui même est perdue. Ceci engendre une sur-approximation du résultat final.

**Exemple 2.1.** Soit  $[x] = [-1, 1]$ , alors  $[x] - [x] = [-1, 1] - [-1, 1] = [-2, 2] \neq \{0\}$

### 2.2.5 Effet d'enveloppement

De manière générale, l'image d'un pavé intervalles par rapport à une fonction n'est pas en général un pavé mais plutôt un ensemble [Neu93]. Donc, englober cette image résultante par un pavé fait introduire des valeurs supplémentaires dans le domaine calculé. Cette représentation par pavé conduit à une source de surestimation. Cela est souvent observé dans les algorithmes récursifs où la surestimation s'accumule au cours des itérations et conduit à des intervalles surestimés. Ceci les rend inexploitable en pratique. Cet effet s'appelle l'effet d'enveloppement (*wrapping effect*).

**Exemple 2.2.** Soit un pavé  $[x] = [-1, 1]$ , la Figure 2.3 présente la rotation de  $\frac{\pi}{4}$  du pavé  $[x]$ . On constate qu'après deux rotations successives de  $\frac{\pi}{4}$  du petit carré initial  $[x]$ , on ne retrouve plus ce petit carré mais un autre carré plus grand  $[x'']$ .

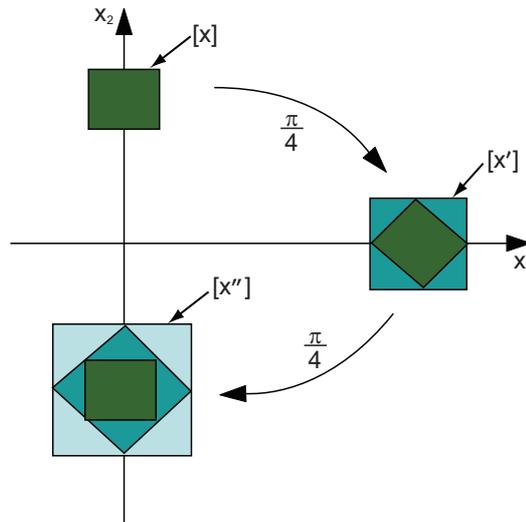


FIGURE 2.3 – Effet d'enveloppement

## 2.3 Inversion ensembliste

Il peut arriver que le problème de conception d'une loi de commande soit formulé par un système d'inégalités linéaires ou non-linéaires. De nombreuses méthodes existent pour résoudre un système d'inégalités. Dans le cas d'un système d'inégalités à coefficients

intervalles, la caractérisation de l'ensemble solution (image réciproque d'une fonction) d'un tel système est connue sous le nom de problème d'inversion ensembliste. L'une des méthodes garanties de résolution est basée sur l'analyse par intervalles dont le principe consiste à représenter les différentes inégalités par des inclusions. Ensuite, l'utilisation d'un algorithme basé sur les techniques d'intervalles permet de remonter à l'ensemble solution.

### 2.3.1 Problème d'inversion

Soit  $[f] : \mathbb{IR}^p \rightarrow \mathbb{IR}^n$  une fonction continue quelconque et soit un vecteur d'intervalles connus de  $[Y] \subseteq \mathbb{IR}^n$ . On souhaite caractériser l'ensemble  $S$  donné par :

$$S = [f]^{-1}([Y]) = \{[x] \subseteq \mathbb{IR}^p \mid [f]([x]) \subseteq [Y]\} \quad (2.13)$$

$S$  représente l'image réciproque de  $[x]$  par la fonction  $[f]$ . La caractérisation de l'ensemble  $S$  des solution de (2.13) est un problème d'inversion ensembliste.

### 2.3.2 Résolution d'un problème d'inversion ensembliste

Un problème d'inversion ensembliste (linéaire ou non linéaire) peut être résolu d'une manière garantie en utilisant l'algorithme SIVIA<sup>1</sup> (*Set Inversion Via Interval Analysis*) proposé par *Jaulin et Walter* [Jau93]. Cet algorithme permet d'approximer par un sous-pavage (lorsqu'au moins une solution existe) l'ensemble des solutions. Cette approximation est réalisée par un encadrement intérieur et extérieur,  $\underline{S}$  et  $\bar{S}$  respectivement. L'ensemble des solutions  $S$  peut être écrit sous la forme :

$$\underline{S} \subseteq S \subseteq \bar{S} \quad (2.14)$$

où

$$\bar{S} = \underline{S} \cup \Delta S \quad (2.15)$$

avec

- $\underline{S}$  représente l'ensemble des pavés prouvés solutions,
- $\Delta S$  permet de définir l'incertitude sur la caractérisation de  $S$ .  $\Delta S$  représente l'ensemble des pavés pour lesquels aucune conclusion n'a pu être établie.

**Remarque 2.4.** *Notons que dans le cas où :*

- $\bar{S} = \emptyset$ , on peut conclure que le problème (2.13) ne possède aucune solution,
- $\underline{S} \neq \emptyset$ , l'ensemble  $S$  n'est pas vide ; il existe au moins une solution vérifiant le problème d'inclusion (2.13).

L'algorithme SIVIA nécessite une boîte (pavé) initiale de recherche  $[x]_0$  (elle peut être choisie très large). Cette boîte initiale est censée contenir suffisamment l'ensemble des solutions  $S$  ou une partie de  $S$ . Le principe de l'algorithme SIVIA consiste à réaliser des bisections sur le pavé initial selon un test d'inclusion.

1. Cet algorithme a été inséré dans des solveurs tels que Proj2D, Chloé, etc.

### 2.3.2.1 Test d'inclusion

Un test d'inclusion permet de tester si tous les points ou une partie d'un pavé appartiennent ou non à un autre pavé définissant une propriété donnée. Soit  $t([\mathbf{x}])$  une fonction booléenne permettant de vérifier si  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subseteq [\mathbf{Y}]$ . On peut distinguer trois cas pour la fonction  $t([\mathbf{x}])$  définie comme suit :

$$t([\mathbf{x}]) = \begin{cases} 1 & \text{si } [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subseteq [\mathbf{Y}] \\ -1 & \text{si } [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{Y}] = \emptyset \\ 0 & \text{pour les autres cas} \end{cases} \quad (2.16)$$

Un pavé  $[\mathbf{x}]$  est dit :

1. faisable (acceptable) ( $[\mathbf{x}] \subseteq \underline{\mathbb{S}}$ ), si  $t([\mathbf{x}]) = 1$ , c'est à dire  $\forall x \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(x) \in [\mathbf{Y}]$ .
2. non faisable (inacceptable) ( $[\mathbf{x}] \not\subseteq \overline{\mathbb{S}}$ ), si  $t([\mathbf{x}]) = -1$ , c'est à dire  $\forall x \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(x) \notin [\mathbf{Y}]$
3. indéterminé (ambigu), si  $t([\mathbf{x}]) = 0$ , dans ce cas le pavé  $[\mathbf{x}]$  ne satisfait aucune des deux premières possibilités.

Dans le dernier cas (indéterminé), si la taille du pavé  $[\mathbf{x}]$  est supérieure à une certaine tolérance  $\epsilon$  fixée par l'utilisateur, on réalise une partition en deux du pavé afin d'effectuer à nouveau des tests d'inclusion sur les deux pavés générés.

### 2.3.2.2 Algorithme SIVIA

L'algorithme SIVIA avec le test d'inclusion est donné par le [Tableau 2.2](#) suivant :

TABLE 2.2 – Algorithme SIVIA pour résoudre un problème d'inversion ensembliste [Jau93].

	SIVIA(entrées : $[\mathbf{x}], t, \epsilon$ ; sorties : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$ )
1	si $t([\mathbf{x}]) = -1$ , rejeter $[\mathbf{x}]$ ;
2	si $t([\mathbf{x}]) = 1$ , alors $\underline{\mathbb{S}} := \underline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$ ; $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$ ;
3	si $w([\mathbf{x}]) < \epsilon$ alors $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$ ;
4	sinon bissecter $[\mathbf{x}]$ en $[\mathbf{x}_1]$ et $[\mathbf{x}_2]$ ; SIVIA(e : $[\mathbf{x}_1]$ , $t, \epsilon$ ; s : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$ ); SIVIA(e : $[\mathbf{x}_2]$ , $t, \epsilon$ ; s : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$ ).

**Remarque 2.5.** 1. Notons que les pavés de tailles plus petites que  $\epsilon$  sont stockés dans l'ensemble  $\Delta\mathbb{S}$  représentant l'incertitude sur la caractérisation de l'ensemble solution  $\mathbb{S}$ .

**Remarque 2.6.** 1. Généralement, on s'intéresse à chercher l'approximation intérieure  $\underline{\mathbb{S}}$  dont on est sûre que tous les points de l'ensemble (sous-pavage)  $\underline{\mathbb{S}}$  sont inclus dans l'ensemble des solutions  $\mathbb{S}$ , c'est à dire  $\underline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S}$ . Dans le cas où l'approximation intérieure n'existe pas ( $\underline{\mathbb{S}} = \emptyset$ ), il est possible de prendre des solutions (incertaines) à l'intérieur du sous-pavage  $\overline{\mathbb{S}}$ .

L'algorithme d'inversion ensembliste SIVIA trouve sa limite dans le cas où l'ensemble  $\mathbb{S} = [\mathbf{f}]^{-1}(\mathbf{Y})$  est de grande dimension (pratiquement, supérieure à 2). En effet, le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de variables et avec la précision souhaitée sur la caractérisation. Ajoutons comme causes supplémentaires possibles de l'augmentation du temps de calcul, le choix des fonctions d'inclusion et la stratégie de bisection.

## 2.4 Systèmes à incertitudes paramétriques

L'obtention d'une représentation mathématique (modèle) exacte d'un système réel est généralement impossible et très coûteuse. Par ailleurs, une description précise (si elle existe) est complexe et complique souvent la tâche de synthèse de correcteurs. Ainsi, les modèles utilisés ne sont qu'une représentation imparfaite de la réalité. Ils sont donc soumis à diverses incertitudes. Notre étude dans cette thèse considère les incertitudes paramétriques. L'analyse par intervalles est l'un des outils puissants permettant de borner les incertitudes paramétriques d'un système par des intervalles connus.

### 2.4.1 Modèle intervalle

Une représentation d'un système physique par un modèle nominal (modèle à paramètre point) n'est qu'une approximation de la réalité obtenue après des simplifications. Surtout, elle est centrée sur un point de fonctionnement du système en considérant les paramètres comme fixes dans le temps. En fait, l'utilisation d'une fonction de transfert classique n'est plus suffisante pour décrire le comportement incertain d'un système. Pour cela, les modèles intervalles permettant une description des variations du comportement d'un système apparaissent comme une alternative.

**Définition 2.5.** Un modèle intervalle SISO noté  $[G](p, [r], [q])$  représente une famille de systèmes. Ce modèle intervalle peut être modélisé par :

1) une fonction de transfert à coefficients bornés par des intervalles connus comme suit :

$$[G](p, [r], [q]) = \frac{\sum_{j=0}^m [q_j] p^j}{\sum_{i=0}^n [r_i] p^i} \quad (2.17)$$

$$= \left\{ \frac{\sum_{j=0}^m q_j p^j}{\sum_{i=0}^n r_i p^i} \mid q_j \in [\underline{q}_j, \overline{q}_j], r_i \in [\underline{r}_i, \overline{r}_i] \right\} \quad (2.18)$$

tels que :  $[\mathbf{r}] = [[r_0], \dots, [r_n]]$  et  $[\mathbf{q}] = [[q_0], \dots, [q_n]]$  sont deux boîtes de paramètres intervalles (pavés de nombres intervalles),  $p$  représente la variable de Laplace .

2) ou par une représentation d'état caractérisée par les matrices de réalisation suivantes :

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \dots & \dots \\ \vdots & [a_{ii}] & \\ \cdot & \dots & \dots \end{pmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} [b_1] \\ [b_i] \\ \vdots \end{pmatrix}; [\mathbf{C}] = ( [c_1] \ [c_i] \ \dots ); [\mathbf{D}] = 0 \quad (2.19)$$

où tous les éléments des différentes matrices sont des paramètres intervalles.

La réponse d'un système intervalle peut être définie par un tube de trajectoires, appelé souvent enveloppe englobante. Cette enveloppe englobe tous les comportements possibles du système réel dont la réponse réelle est comprise entre deux courbes (bornes supérieure et inférieure de la réponse du modèle intervalle).

### 2.4.2 Stabilité des systèmes à paramètres incertains

Soit l'asservissement de la Figure 2.4. Le système SISO  $G(p)$  est commandé par un correcteur  $C(p)$  pour assurer le bon fonctionnement de l'asservissement.

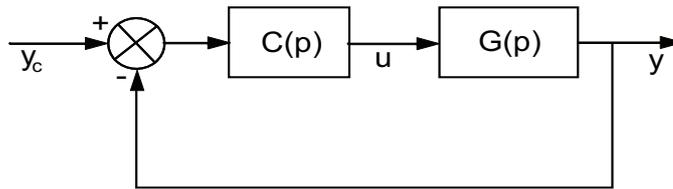


FIGURE 2.4 – Asservissement de système.

Dans la Figure 2.4 :

- $y_c$  est la consigne ;
- $u$  est le signal de commande ;
- et  $y$  est la sortie du système.

La stabilité représente un critère fondamental dans la conception, l'analyse et la commande des systèmes. D'une manière générale, on distingue deux type de stabilité : la stabilité BIBO (*bounded input/bounded output*) et la stabilité interne. Le premier type de stabilité s'intéresse au comportement externe du système. La stabilité BIBO est assurée si l'énergie des signaux en sortie  $y(t)$  est bornée pour une énergie bornée fournie en entrée  $y_c$ . En terme de fonction de transfert, elle correspond à la stabilité du système bouclé  $GK(1 + GK)^{-1}$ . Par contre, la stabilité interne exige que tous les signaux internes de la boucle soient à énergie bornée (finie). Généralement, elle nécessite la stabilité de trois fonctions de transfert en plus ( $S = (1 + GK)^{-1}$ ,  $KS$ ,  $GS$  et  $GKS$ ) par rapport à la stabilité BIBO. L'analyse de stabilité interne est généralement basée sur les représentations d'état de  $G$  et  $K$ .

Lorsque les propriétés d'un système physique sont décrites par un modèle nominal, l'étude de stabilité basée sur ce modèle est appelée la stabilité nominale. Or, un modèle nominal n'est qu'une représentation approximative de la réalité. Le modèle nominal est alors soumis à diverses incertitudes. Assurer la stabilité du modèle nominal bouclé n'est donc pas suffisant. Le développement de la théorie de commande cherche à garantir la stabilité des systèmes face aux différentes incertitudes paramétriques liées au modèle. Cette propriété est connue sous le nom de stabilité robuste [Bha95]. Selon la littérature, plusieurs techniques ont été développées dans ce contexte. Le théorème du petit gain joue un rôle très important dans la commande et l'analyse de la stabilité robuste des systèmes.

**Théorème 2.1. (Théorème du petit gain)** Soit la structure en boucle fermée donnée par la Figure 2.5 dans laquelle  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  sont deux systèmes interconnectés, d'entrées  $e_1$  et  $e_2$ , et de sorties  $y_1$  et  $y_2$  respectivement.

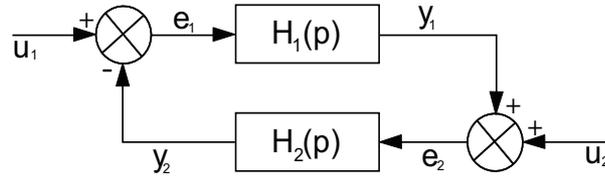


FIGURE 2.5 – Théorème du petit gain.

Supposons que  $H_1$  et  $H_2$  sont stables, si  $\|H_1\|_\infty \|H_2\|_\infty < 1$ , alors le système liant le vecteur  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  et le vecteur de signaux de sortie  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  est intérieurement stable.

Dans le Théorème 2.1,  $\|H_i\|_\infty$  ( $i = 1, 2$ ) désigne la norme- $H_\infty$  du système  $H_i(p)$ . Son expression est définie dans l'Annexe A.

Dans le cas d'un asservissement soumis à des incertitudes paramétriques, l'idée d'analyse de la stabilité robuste est résumée par le schéma de la Figure 2.6 obtenu après isolation de la matrice des incertitudes de la partie nominale du système. Cette matrice d'incertitudes (notée  $\Delta$ ) peut être donnée sous la forme suivante :

$$\Delta = \text{diag} \{ \partial_1 \cdot I_{n_1}, \dots, \partial_r \cdot I_{n_r} \}$$

où  $|\partial_i| \leq 1$  est la variation normalisée du  $i^{\text{ème}}$  paramètre de  $\Delta$ .  $M(p)$  représente une matrice de transfert nominale du système bouclé liant  $z$  et  $v$ .

La condition sur la stabilité du système interconnecté (Figure 2.6) est donnée par la seconde version du théorème du petit gain [Zam66]. La robustesse en stabilité basée sur la forme d'interconnection (Figure 2.6) a été également étudiée dans [Doy79] [You97] [Ala99a].

**Théorème 2.2. (Théorème du petit gain version 2)** Soit  $M(p)$  une matrice de transfert ( $p \times p$ ) stationnaire stable. Le système interconnecté illustré sur la Figure 2.6

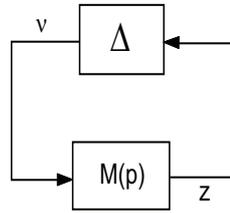


FIGURE 2.6 – Théorème du petit gain.

est bien-posé et intérieurement stable pour tout  $\Delta \in \mathbb{C}^{p \times p}$  avec  $\|\Delta\|_\infty < 1$  si et seulement si  $\|M(p)\|_\infty \leq 1$ .

Ce théorème est valable pour tout type d'incertitudes normalisées de façon que la norme- $H_\infty$  de la matrice des incertitudes soit inférieure ou égale à 1. Dans notre contribution, nous nous intéressons au cas des incertitudes paramétriques.

L'avantage du théorème du petit gain est l'analyse de la stabilité dans le cas des systèmes à incertains SISO (Single Input Single Output) et MIMO (Multiple Input Multiple Output). Cependant, ce dernier nécessite l'isolation de la matrice d'incertitude  $\Delta$  qui est une tâche complexe surtout dans le cas de plusieurs paramètres incertains. Dans le cas des systèmes SISO, d'autres approches d'analyse de stabilité de systèmes intervalles utilisent le polynôme caractéristique afin d'éviter ce problème. L'avantage de ces dernières est la simplicité de représentation des incertitudes paramétriques. Ainsi, la normalisation des incertitudes n'est pas nécessaire. Rappelons ces approches ci-dessous.

Soit un polynôme intervalle  $[A](p, [\mathbf{a}])$ , tel que  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  :

$$[A](p, [\mathbf{a}]) = [a_n]p^n + [a_{n-1}]p^{n-1} + \dots + [a_1]p + [a_0]$$

Généralement, la décision sur la stabilité d'un polynôme quelconque peut être obtenue en regardant ses racines. En fait, le polynôme intervalle  $[A](p, [\mathbf{a}])$  est stable si et seulement si toutes ses racines sont à partie réelle négative. Néanmoins, la caractérisation de l'ensemble de toutes les racines possibles d'un polynôme intervalle d'ordre élevé est très difficile à réaliser. Pour cela, la plus part des travaux existants sont basés sur l'application directe du critère algébrique de Routh-Hurwitz. Dans ces derniers, la stabilité d'un système donné est évaluée à partir des coefficients intervalles de son polynôme caractéristique [Jau01] [Wal94].

1. une condition nécessaire pour que  $[A](p, [\mathbf{a}])$  soit stable est que tous ses coefficients  $[a_i]$  ( $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) soient de même signe.
2. la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du polynôme  $[A](p, [\mathbf{a}])$  est donnée par le critère de Routh. Ce critère est basé sur le tableau de Routh ayant  $n + 1$  lignes (voir [Tableau 2.3](#)). Les éléments de la première et de la deuxième lignes sont les coefficients du polynôme  $[A](p, [\mathbf{a}])$ . Les  $n - 1$  lignes restantes sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned}
[b_1] &= \frac{[a_{n-1}][a_{n-2}] - [a_n][a_{n-3}]}{[a_{n-1}]}, & [b_2] &= \frac{[a_{n-1}][a_{n-4}] - [a_n][a_{n-5}]}{[a_{n-1}]}, & \dots \\
[c_1] &= \frac{[b_1][a_{n-3}] - [a_{n-1}][b_2]}{[b_1]}, & [c_2] &= \frac{[b_1][a_{n-5}] - [a_{n-1}][b_3]}{[b_1]}, & \dots \\
& \vdots & & \vdots & \ddots
\end{aligned}$$

TABLE 2.3 – Tableau de Routh.

$i \backslash j$	1	2	3	...	...
1	$[a_n]$	$[a_{n-2}]$	$[a_{n-4}]$	...	0
2	$[a_{n-1}]$	$[a_{n-3}]$	$[a_{n-5}]$	...	0
3	$[b_1]$	$[b_2]$	$[b_3]$	...	0
4	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$n + 1$					

Le polynôme  $[A](p, [\mathbf{a}])$  est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne du [Tableau 2.3](#) sont de même signe.

Parfois, pour des mesures de sécurité (marge de stabilité), on s'intéresse à l'étude de la  $\delta$ -stabilité d'un polynôme intervalle. La  $\delta$ -stabilité d'un polynôme intervalle  $[A](p, [\mathbf{a}])$  est assurée si et seulement si toutes ses racines sont à partie réelle inférieure à  $-\delta$ .

D'autres travaux s'intéressent à la vérification de stabilité via le critère de Routh-Hurwitz en utilisant quelques polynômes extrêmes particuliers. Après l'apparition du célèbre théorème de Kharitonov [\[Kha78\]](#), l'analyse de la stabilité d'un polynôme à paramètres incertains a attiré une attention considérable des chercheurs [\[Bia83\]](#) [\[Bar84\]](#). La stabilité robuste selon Kharitonov est satisfaite si quatre polynômes extrêmes, appelés polynômes de Kharitonov sont Hurwitz<sup>2</sup>.

**Théorème 2.3.** [\[Kha78\]](#) Soit  $[Q](p, [\mathbf{q}])$  un polynôme à  $n$  paramètres intervalles indépendants défini par :

$$[Q](p, [\mathbf{q}]) = [q_n]p^n + \dots + [q_1]p + [q_0] \quad (2.20)$$

tel que  $q_i \in [q_i, \bar{q}_i]$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Tous les polynômes dans  $Q$  sont stables si et seulement si les quatre polynômes suivants  $Q_1, Q_2, Q_3$  et  $Q_4$  le sont aussi :

2. C'est à dire leurs racines sont à partie réelle négative.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \underline{q}_n p^n + \underline{q}_{n-1} p^{n-1} + \bar{q}_{n-2} p^{n-2} + \bar{q}_{n-3} p^{n-3} + \underline{q}_{n-4} p^{n-4} + \dots \\
Q_2 &= \underline{q}_n p^n + \bar{q}_{n-1} p^{n-1} + \bar{q}_{n-2} p^{n-2} + \underline{q}_{n-3} p^{n-3} + \underline{q}_{n-4} p^{n-4} + \dots \\
Q_3 &= \bar{q}_n p^n + \underline{q}_{n-1} p^{n-1} + \underline{q}_{n-2} p^{n-2} + \bar{q}_{n-3} p^{n-3} + \bar{q}_{n-4} p^{n-4} + \dots \\
Q_4 &= \bar{q}_n p^n + \bar{q}_{n-1} p^{n-1} + \underline{q}_{n-2} p^{n-2} + \underline{q}_{n-3} p^{n-3} + \bar{q}_{n-4} p^{n-4} + \dots
\end{aligned}$$

En fait, le résultat de Kharitonov est basé sur l'hypothèse que les paramètres intervalles sont indépendants. L'application du théorème de Kharitonov dans le cas contraire (coefficients dépendants) conduit à un conservatisme sur les conclusions de la stabilité et la condition devient uniquement suffisante. Pour cette raison, une généralisation du théorème de Kharitonov a été proposée dans [Cha89] [Bar89] [Pet90]. Cette généralisation permet d'élargir la région de stabilité dans la commande des systèmes.

Les auteurs dans [Sma02] proposent une approche dans l'espace d'état basée sur l'analyse par intervalles pour analyser la stabilité d'un système bouclé. D'autres travaux pour analyser la stabilité robuste des matrices intervalles en utilisant la forme de *Lypunov* sont développées dans [Gar93]. L'analyse de stabilité robuste dans [Jau99] est basée sur l'inclusion de deux ensembles.

### 2.4.3 Norme- $H_\infty$ d'un modèle intervalle

La norme- $H_\infty$  est très utilisée dans les approches de commande robuste. En fait, elle représente un bon indicateur de performances. Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse au calcul de la norme- $H_\infty$  dans le cas des systèmes intervalles monovariables (SISO).

#### 2.4.3.1 Normes- $H_\infty$ des systèmes intervalles

Quelques méthodes de calcul de la norme- $H_\infty$  ont été développées pour s'adapter aux systèmes intervalles. Néanmoins, ces méthodes sont applicables au cas des systèmes intervalles monovariables. Leur principe de base consiste à exprimer la norme- $H_\infty$  d'un système intervalle uniquement par quelques fonctions de transfert particulières basées sur certains polynômes extrêmes. Dans [An00b] [An00a], une méthode a été proposée pour calculer la norme- $H_\infty$  d'un système intervalle pondéré par une fonction de transfert  $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  vérifiant les hypothèses suivantes :

1. toutes les racines du polynôme  $A(p)$  sont réelles, négatives et non répétées (chaque racine apparaît une seule fois),
2. quelques soient deux racines réelles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $A(p)$  telles que  $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ , il existe au moins une racine réelle  $\beta$  de  $B(p)$ , telle que  $-\alpha_1 < |\beta| < -\alpha_2$ .

Il a été démontré que cette norme peut être définie par la valeur maximale des normes- $H_\infty$  de 16 fonctions de transfert basées sur les polynômes de Kharitonov. Les 16 polynômes sont calculés par la combinaison des quatre polynômes du numérateur et du dénominateur.

Soit un système intervalle  $[G](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}]) = \frac{[Num](p, [\mathbf{b}])}{[Den](p, [\mathbf{a}])}$  et une fonction de pondération satisfaisant les hypothèses précédentes, si le système pondéré  $W(p)[G](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}])$  est

propre et strictement stable, alors la valeur maximale de sa norme- $H_\infty$  est donnée par la formule suivante :

$$\|W(p)[G](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}])\|_\infty = \max_{i,j=1,2,3,4} \left( \left\| \frac{B(p) Num_i(p)}{A(p) Den_j(p)} \right\|_\infty \right) \quad (2.21)$$

tels que  $Num_i(p)$  et  $Den_j(p)$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) sont les polynômes de Kharitonov correspondants au numérateur  $[Num](p, [\mathbf{b}])$  et au dénominateur  $[Den](p, [\mathbf{a}])$  respectivement.

Ce résultat est très utile dans la théorie de la commande robuste  $H_\infty$  nécessitant le calcul de la norme- $H_\infty$  d'une fonction de transfert pondérée  $WG(p)$ . Selon ces travaux, la méthode proposée reste valable pour tout système intervalle pondéré par un scalaire  $K[G](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}])$ .

*Long Wang* [Wan02] a développé une approche pour calculer la valeur maximale de la norme- $H_\infty$  de la fonction de sensibilité d'un système intervalle. Cette méthode est basée sur le même principe que la méthode précédente, mais l'auteur a pu réduire le calcul de la norme en utilisant uniquement 12 fonctions de transfert basées sur les polynômes de Kharitonov du numérateur et dénominateur de la fonction de sensibilité. Selon *Long Wang*, la valeur maximale de la norme- $H_\infty$  de la fonction de sensibilité  $[S](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}]) = \frac{[Den](p, [\mathbf{a}])}{[Den](p, [\mathbf{a}]) + [Num](p, [\mathbf{b}])}$  d'un système intervalle  $[G](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}])$  est donnée par :

$$\|[S](p, [\mathbf{a}], [\mathbf{b}])\|_\infty = \max_{i,j} \left( \left\| \frac{Den_j(p)}{Den_j(p) + Num_i(p)} \right\|_\infty \right) \quad (2.22)$$

avec :  $ij = \{11, 22, 33, 44, 12, 24, 43, 31, 21, 42, 34, 13\}$ .

## 2.5 Théorème d'inclusion des performances

Dans cette partie, nous proposons quelques théorèmes d'inclusion des fonctions de transfert intervalles, inclusion de leurs performances ainsi que leurs démonstrations. Ces théorèmes seront utiles pour nos méthodes de conception de lois de commande proposées dans les chapitres à venir.

### 2.5.1 Inclusion des fonctions rationnelles

Le théorème suivant issu des travaux de *Boche* [Boc66], est un résultat très intéressant pour l'inclusion des fonctions intervalles. Il est aussi appelé théorème du confinement (containment theorem).

**Théorème 2.4. (théorème de confinement)** *Soit une expression rationnelle  $[F](\mathbf{x})$  dépendante des variables intervalles  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ . Considérons une boîte de variables intervalles  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$ . Si  $\mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}$ , c'est à dire  $y_1 \subseteq x_1, \dots, y_n \subseteq x_n$  est satisfait, alors  $[F](\mathbf{y}) \subseteq [F](\mathbf{x})$  l'est aussi.*

*Preuve* : Voir [Boc66].

### 2.5.2 Inclusion des fonctions de transfert intervalles

Le théorème suivant est une conséquence directe du [Théorème 2.4](#).

**Théorème 2.5.** *Soit deux modèles intervalles stables  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$  définis comme indiqué dans la [Définition 2.5](#) et ayant les mêmes structures (les mêmes degrés à leurs numérateurs, idem pour leurs dénominateurs), alors :*

$$\text{Si } \begin{cases} [\alpha] \subseteq [\gamma] \\ [\beta] \subseteq [\lambda] \end{cases} \Rightarrow [G_1](p, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_2](p, [\gamma], [\lambda])$$

*Preuve :* Notons que la variable de Laplace peut être représentée par un intervalle complexe dégénéré  $p = [p, p] = [p]$ . La démonstration est basée sur le [Théorème 2.4](#), avec  $[F](\mathbf{x}) = [G_2](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[F](\mathbf{y}) = [G_1](p, [\alpha], [\beta])$  où  $\mathbf{x} = [[p], [\gamma], [\lambda]]$  et  $\mathbf{y} = [[p], [\alpha], [\beta]]$ . D'après le [Théorème 2.4](#) on a :

$$[\mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{x}] \Rightarrow [F](\mathbf{y}) \subseteq [F](\mathbf{x})$$

qui conduit pour tout  $p$  à :

$$\begin{cases} [\alpha] \subseteq [\gamma] \\ [\beta] \subseteq [\lambda] \end{cases} \Rightarrow [G_1](p, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_2](p, [\gamma], [\lambda])$$

### 2.5.3 Inclusion des performances des systèmes intervalles

Dans la conception d'une loi de commande par intervalles, on utilise souvent la notion d'inclusion de performances. Le théorème suivant nous permet de définir l'inclusion des réponses temporelles et fréquentielles des fonctions de transfert intervalles. En fait, ces réponses définissent les performances temporelles et fréquentielles décrites par les systèmes intervalles.

**Théorème 2.6.** *Considérons deux fonctions de transfert intervalles  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$  ayant les mêmes structures. Si  $[\alpha] \subseteq [\gamma]$  et  $[\beta] \subseteq [\lambda]$  sont vérifiés, alors les réponses temporelle et fréquentielle de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  sont bornées par celles de  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .*

*Preuve :* La démonstration du théorème est décomposée en deux parties : inclusion des performances temporelles et inclusion des performances fréquentielles.

1. preuve de l'inclusion des performances temporelles : en utilisant le [Théorème 2.6](#), si les inclusions  $[\alpha] \subseteq [\gamma]$  et  $[\beta] \subseteq [\lambda]$  sont vérifiées, alors on a :

$$[G_1](s, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_2](s, [\gamma], [\lambda]) \quad (2.23)$$

Comme  $e^{pt}$  est un intervalle complexe dégénéré pour tout  $p$  (variable de Laplace) et tout  $t$  (variable de temps), l'inclusions [\(2.23\)](#) est équivalente à :

$$[G_1](p, [\alpha], [\beta])e^{pt} \subseteq [G_2](p, [\gamma], [\lambda])e^{pt} \quad (2.24)$$

Selon les propriétés des intervalles (voir [Moo66]), l'intégration de chaque terme dans (2.24) ne modifie pas l'inclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [G_1](p, [\alpha], [\beta]) e^{pt} dp \subseteq \int_{-\infty}^{+\infty} [G_2](p, [\gamma], [\lambda]) e^{pt} dp \quad (2.25)$$

Il est possible de réécrire (2.25) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} [G_1](p, [\alpha], [\beta]) e^{pt} dp \subseteq \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} [G_2](p, [\gamma], [\lambda]) e^{pt} dp \quad (2.26)$$

Les deux termes donnés par (2.26) décrivent les réponses temporelles  $[g_1](t)$  et  $[g_2](t)$  de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$  respectivement. On déduit :

$$[g_1](t) \subseteq [g_2](t) \quad (2.27)$$

2. preuve de l'inclusion des performances fréquentielles : cette démonstration est évidente lorsqu'on utilise le Théorème 2.6. En fait, l'inclusion (2.23) est valable pour tout  $p$ . Dans le cas où  $p = jw$ , l'inclusion (2.23) devient :

$$[G_1](jw, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_2](jw, [\gamma], [\lambda]) \quad (2.28)$$

qui représente l'inclusion des réponses fréquentielles des deux termes.

**Remarque 2.7.** Une preuve détaillée du théorème de l'inclusion des performances est donnée dans [Rak11b].

#### 2.5.4 Exemple

Soit une fonction de transfert intervalle stable  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  définie comme suit :

$$[G_1](p, [\alpha], [\beta]) = \frac{[0.6, 0.8]}{[0.11, 0.25]p^2 + [0.6, 0.9]p + 1} \quad (2.29)$$

tels que  $[\alpha] = [0.6, 0.8]$  et  $[\beta] = [[0.11, 0.25], [0.6, 0.9]]$ .

Considérons une autre fonction de transfert intervalle  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$  incluse dans  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  (2.29), c'est à dire  $[G_2](p, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_1](p, [\alpha], [\beta])$ . On choisit :

$$[G_2](p, [\gamma], [\lambda]) = \frac{[0.68, 0.74]}{[0.15, 0.19]p^2 + [0.7, 0.8]p + 1} \quad (2.30)$$

Tout d'abord, nous vérifions l'inclusion des réponses temporelles des deux modèles (2.29) et (2.30). La Figure 2.7 présente les réponses indicielles de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .

D'après la Figure 2.7, on constate que la réponse indicielle de  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$  est incluse dans celle de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$ .

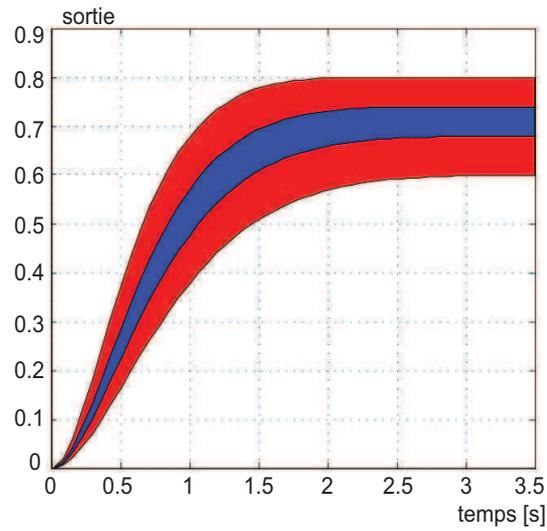


FIGURE 2.7 – Inclusion des réponses indicielles de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .

Ensuite, on trace les magnitudes des deux fonctions de transfert sur la Figure 2.8. Comme  $[G_2](p, [\alpha], [\beta]) \subseteq [G_1](p, [\gamma], [\lambda])$ , l'enveloppe de la magnitude de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  contient l'enveloppe de la magnitude de  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .

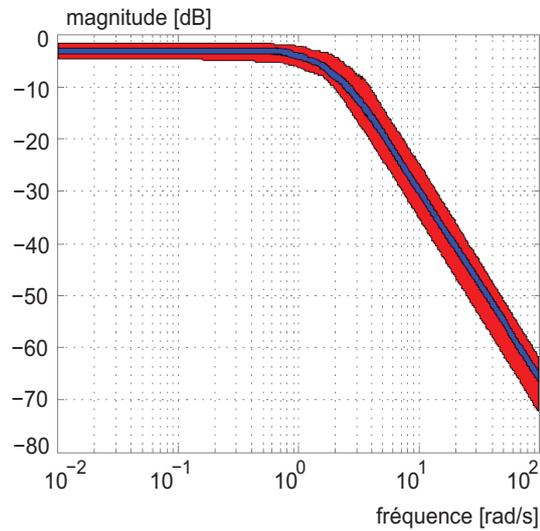


FIGURE 2.8 – Inclusion des réponses fréquentielles de  $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$  et  $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode permettant de prendre en compte les bornes supérieure et inférieure caractérisant les incertitudes paramétriques dans les systèmes. Cette approche est basée sur l'analyse par intervalles et consiste à supposer la variation de chaque paramètre incertain dans un intervalle. La représentation des systèmes à paramètres incertains par un modèle intervalle montre l'intérêt d'exploiter cet outil.

Dans une première partie de ce chapitre, nous avons rappelé brièvement quelques notions préliminaires sur l'arithmétique d'intervalles. Ensuite, nous avons vu que l'approche ensembliste offre la possibilité d'analyse de la stabilité robuste. Par cette approche, il est également possible d'évaluer la valeur maximale de la norme- $H_\infty$  d'un système intervalle utilisée dans la théorie de la commande robuste. Nous avons présenté quelques théorèmes d'inclusion concernant l'inclusion des fonctions de transfert et de leurs performances. Ces théorèmes d'inclusion des performances seront utilisés dans la conception d'une loi de commande robuste par intervalles.

Dans les chapitres suivants, nous exploitons l'approche ensembliste pour dimensionner des poutres piézoélectriques et borner les incertitudes paramétriques liées aux modèles de poutres piézoélectriques dans un objectif de concevoir des lois de commande robuste permettant de répondre aux exigences de micromanipulation et de micro-assemblage.



## Chapitre 3

# Modélisation et dimensionnement des poutres piézoélectriques

### 3.1 Introduction

Une bonne connaissance du comportement des poutres piézoélectriques est toujours nécessaire pour le calcul du correcteur pour leurs commandes. Pour cela, il est important de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu lors de leur fonctionnement. De nombreuses méthodes ont été développées pour modéliser le comportement statique et dynamique de ces poutres piézoélectriques en utilisant les équations fondamentales de la piézoélectricité. Les modèles proposés dans ces travaux permettent d'estimer la déflexion des poutres piézoélectriques suite à une excitation extérieure (électrique, mécanique, thermique, etc) et les fréquences de résonance des différents modes de vibration.

Nous avons vu dans le premier chapitre que les poutres piézoélectriques sont un des constituants essentiels des systèmes microrobotiques. Dans les systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage, on a généralement besoin d'élargir la plage des déflexions et d'avoir de hautes fréquences de résonance tout en gardant les dimensions de ces systèmes adaptées au micromonde. Nous concevrons des poutres piézoélectriques qui permettent de répondre à ce besoin. Cela consistera à donner les dimensions (longueur, largeur et épaisseur) de la poutre et à choisir les matériaux des différentes couches.

Ce chapitre s'intéresse dans un premier temps à modéliser de façon analytique le comportement statique et dynamique des poutres piézoélectriques multimorphes. Ensuite, nous dérivons les modèles statique et dynamique des unimorphes et des bimorphes. En utilisant ces deux types de poutres, nous comparons les résultats analytiques et expérimentaux. Puis, nous abordons une analyse des variations du comportement des poutres en fonction de leurs caractéristiques géométriques. Ceci permet de cibler les paramètres géométriques les plus influents sur lesquels le dimensionnement sera basé. Nous proposons également deux problèmes typiques de conception de poutres piézoélectriques. L'objectif des problèmes de conception présentés est celui de l'amélioration des performances (suivant un cahier des charges) de poutres piézoélectriques. Nous montrons

dans ce chapitre comment formuler le problème de conception avec les techniques par intervalles. Une résolution est ensuite proposée.

## 3.2 Modélisation linéaire des poutres piézoélectriques

La piézoélectricité est la propriété remarquable de certains matériaux de convertir de manière réversible une énergie mécanique en une énergie électrique (effet piézoélectrique direct et inverse). Dans cette partie, nous donnons des compléments concernant les modèles statique et dynamique des poutres piézoélectriques unimorphes et multimorphes.

### 3.2.1 Modélisation statique des poutres piézoélectriques

Le modèle statique des poutres piézoélectriques peut être décrit par les équations constitutives de la piézoélectricité [IEE88] [Ike90]. Entre autres, ces équations décrivent la relation entre une excitation électrique et la déflexion à l'extrémité des poutres.

#### 3.2.1.1 Modèle tension-déflexion des poutres multimorphes

Le comportement statique des poutres piézoélectriques multimorphes a été largement étudié notamment dans [Bal07] [Wei99] [DeV97]. Les équations statiques modélisant le comportement d'une poutre piézoélectrique proposées dans ces travaux sont basées sur des approches énergétiques. Ces équations sont données en fonction des propriétés physiques et des dimensions géométriques de la structure. Dans cette étude, on adopte la description du comportement statique des poutres multimorphes présentée par *Ballas* [Bal07]. Cette description est plus générale, car elle fournit des relations liant les paramètres extensifs tels que la déflexion  $\delta$  à l'extrémité de la poutre, la pente  $\alpha$  de la poutre, le volume  $V$  déplacé par la poutre et la charge sur les électrodes  $Q$ , aux paramètres intensifs tels que la force extérieure  $F$  appliquée à l'extrémité de la poutre (force perpendiculaire à la poutre), le moment extérieur  $M$ , la tension  $U$  entre les électrodes et la charge de pression  $p$  pour tout point  $x$  le long de la poutre (voir la [Figure 3.1-b](#)). Dans cette partie, nous nous intéressons particulièrement à la description du modèle statique tension-déflexion, c'est à dire  $(U, \delta)$ .

Soit une poutre piézoélectrique de section rectangulaire encastree-libre composée de  $n$  couches collées entre elles comme indiquées sur la [Figure 3.1-a](#). La largeur et l'épaisseur de la  $i^{\text{ème}}$  couche sont notées respectivement  $w_i$  et  $h_i$ , tandis que la longueur  $L$  est supposée identique pour toutes les couches. On notera  $s_{11,i}$  et  $d_{31,i}$  respectivement la souplesse à champ électrique constant et la constante piézoélectrique de la  $i^{\text{ème}}$  couche.

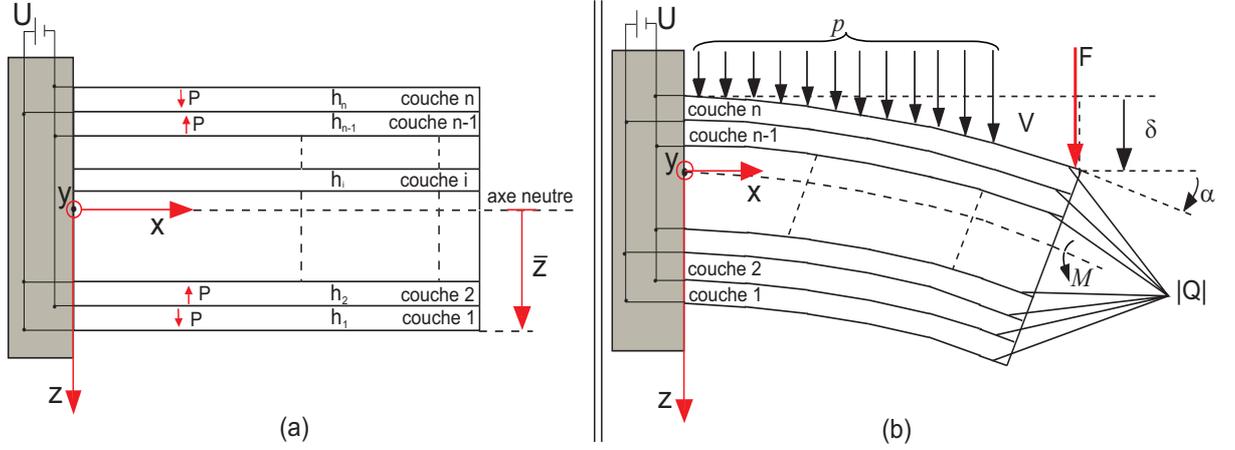


FIGURE 3.1 – a : poutre piézoélectrique multimorphe encastree-libre. b : poutre piézoélectrique multimorphe soumise à des excitations extérieures.

La position de l'axe neutre, notée  $\bar{z}$  joue un rôle important dans la description du modèle statique, elle est définie par la distance de l'axe neutre et la surface inférieure de la poutre comme suit [Bal07] :

$$\bar{z} = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i \sum_{j=1}^i h_j}{2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} h_i} \quad (3.1)$$

Le modèle décrivant le comportement statique des poutres multimorphes proposé par *Ballas* est basé sur les relations fondamentales de la piézoélectricité données en [Annexe B](#). Pour une tension  $U$ , la déflexion statique de tout point  $x$  de la longueur d'une poutre multimorphe composée de  $n$  couches est régie par la formule suivante [Bal07] :

$$\delta(x) = \frac{m_{piezo} x^2}{2C} U \quad (3.2)$$

où

$$m_{piezo} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{w_i d_{31,i}}{s_{11,i} h_i} \left[ 2\bar{z} h_i - 2h_i \sum_{j=1}^i h_j + h_i^2 \right] \quad (3.3)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} \left[ 3h_i \left( \bar{z} - \sum_{j=1}^i h_j \right) \left( \bar{z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j \right) + h_i^3 \right]$$

La relation (3.2) représente une formulation plus générale pour décrire le comportement statique des poutres piézoélectriques multicouches. Un autre avantage de cette

formulation est qu'elle permet la dérivation de la déflexion de n'importe quel point  $x \in [0, L]$  le long de la poutre.

### 3.2.1.2 Dérivation du modèle tension-déflexion des unimorphes et des bimorphes

Nous dérivons maintenant les modèles tension-déflexion des poutres unimorphes et bimorphes en se basant sur le modèle général proposé par *Ballas* (3.2). Soit une poutre piézoélectrique unimorphe constituée d'une couche piézoélectrique et d'une autre couche de matériau passif comme indiquée sur la *Figure 3.2*. Les deux couches collées entre elles ont la même longueur  $L$  (le long de l'axe  $x$ ) et la même largeur  $w = w_1 = w_2$  (le long de l'axe  $y$ ), leurs épaisseurs sont respectivement  $h_1 = h_{mp}$  et  $h_2 = h_p$  pour la couche passive et la couche piézoélectrique. On note par  $s_{11,2} = s_{11}^{mp}$  et  $s_{11,1} = s_{11}^{mp}$ , les souplesses des matériaux actif et passif respectivement. La constante piézoélectrique est notée  $d_{31}$ .

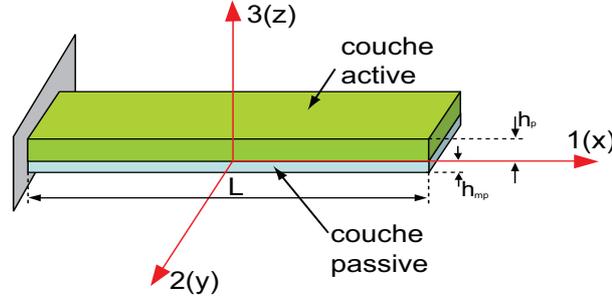


FIGURE 3.2 – Dimensions d'une poutre piézoélectrique unimorphe.

Dans le cas d'une unimorphe piézoélectrique, le modèle tension-déflexion est décrit par la formule (3.2) dans laquelle les paramètres  $m_{piezo}$  et  $C$  sont déterminés pour  $n = 2$ . Nous obtenons :

$$m_{piezo} = \frac{-wd_{31}h_{mp}(h_p + h_{mp})}{2(s_{11}^{mp}h_p + s_{11}^p h_{mp})} \quad (3.4)$$

$$C = \frac{w \left( (s_{11}^p)^2 h_{mp}^4 + s_{11}^{mp} s_{11}^p (4h_p h_{mp}^3 + 6h_p^2 h_{mp}^2 + 4h_{mp} h_p^3) + (s_{11}^{mp})^2 h_p^4 \right)}{12s_{11}^{mp} s_{11}^p (s_{11}^{mp} h_p + s_{11}^p h_{mp})}$$

Après avoir remplacé  $m_{piezo}$  et  $C$  dans (3.2), on obtient :

$$\delta(x) = \frac{-3d_{31}s_{11}^{mp} s_{11}^p h_{mp} (h_p + h_{mp}) x^2}{(s_{11}^p)^2 h_{mp}^4 + s_{11}^{mp} s_{11}^p (4h_p h_{mp}^3 + 6h_p^2 h_{mp}^2 + 4h_{mp} h_p^3) + (s_{11}^{mp})^2 h_p^4} U \quad (3.5)$$

On note que *Smits et Choi* ont également proposé une relation liant la déflexion d'un unimorphe à la tension appliquée [*Smi91a*]. Leur résultat est identique à (3.5) lorsqu'on utilise  $x = L$ .

De même, dans le cas d'une poutre bimorphe composée de deux couches piézoélectriques ( $n = 2$ ) ayant une largeur  $w$  et des épaisseurs identiques  $h_p$ , nous déduisons à partir des relations (3.3) les paramètres  $m_{piezo}$  et  $C$  :

$$m_{piezo} = \frac{-wd_{31}h_p}{s_{11}^p}$$

$$C = \frac{2wh_p^3}{3s_{11}^p}$$
(3.6)

Ceci conduit à une déflexion totale de la poutre bimorphe décrite par la relation suivante :

$$\delta(x) = \frac{-3d_{31}x^2}{4h_p^2}U$$
(3.7)

Ce résultat (3.7) issu du modèle de *Ballas* est identique au résultat présenté dans les travaux [Smi91b] lorsque  $x = L$ .

### 3.2.2 Modélisation dynamique des poutres piézoélectriques

Le modèle dynamique des poutres piézoélectriques est régi par des équations différentielles partielles. Ces équations différentielles peuvent être dérivées en utilisant une approche Hamiltonienne. Le comportement dynamique des poutres piézoélectriques est généralement décrit par leurs modes propres et coefficients d'amortissement. Les modes propres d'une poutre piézoélectrique encastree-libre unimorphe ou multimorphe ont été déjà étudiés dans de nombreux travaux [Smi94] [Bal07] [Wan98]. Quant au coefficient d'amortissement, à l'heure actuelle, il n'existe pas encore de méthode analytique pour le calculer, mais sa valeur peut être déterminée expérimentalement.

La déflexion d'une poutre piézoélectrique peut être régie par l'équation différentielle partielle suivante [Sad98] [Smi00] :

$$C \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} + r_a \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} = U(t)$$
(3.8)

tels que :  $r_a = \frac{dr}{dx}$  est le coefficient de frottement relative à la longueur de la poutre.  
 $\mu \equiv \frac{m}{l} = \sum_{i=1}^n \rho_i h_i w_i$  où  $m$  et  $\rho_i$  designent respectivement la masse totale relative à la longueur et la densité de la  $i^{\text{ème}}$  couche.  $C$  a été défini dans (3.3).

#### 3.2.2.1 Fréquences de résonance des poutres piézoélectriques multimorphes

Une façon classique pour représenter les structures vibratoires est de considérer ses modes<sup>1</sup>. En effet, la dynamique d'une poutre piézoélectrique est caractérisée par la superposition des vibrations de ses modes propres. En théorie, une poutre piézoélectrique

---

1. Représentation modale.

possède une infinité de modes propres de vibration. En pratique, on s'intéresse souvent à quelques modes seulement. On peut considérer alors un nombre fini de modes dominants pour décrire la dynamique d'une poutre.

*Ballas* [Bal07] présente une méthode pour calculer les modes propres d'une poutre piézoélectrique multimorphe<sup>2</sup>. Dans ses travaux, l'équation différentielle homogène suivante est considérée :

$$C \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} + r_a \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

Or, la valeur de l'amortissement des poutres piézoélectriques est pratiquement négligeable, celui-ci traduit une faible valeur du coefficient  $r_a$ . Ainsi, afin de déterminer les modes propres, l'amortissement est supposé nul. Ceci conduit donc au problème de résolution du système conservatif suivant :

$$C \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

La solution de (3.10) est basée sur la séparation d'Ansatz en choisissant comme solution pour la fonction de la déflexion  $\delta(t, x)$  [Smi00] [Lan98] [Bur93] :

$$\delta(x, t) = X(x)\phi(t) = X(x)\phi_0 e^{j\omega t} \quad (3.11)$$

Après avoir introduit l'équation (3.11) dans l'équation (3.10), cette dernière peut être reformulée comme suit [AH03] [Tan03] :

$$\frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} - k^4 X(x) = 0 \quad (3.12)$$

On désigne par  $k$  le nombre d'onde, tel que [Tan03] :

$$k^4 = \frac{w^2}{C} \mu \quad (3.13)$$

À partir de (3.13), on peut dériver la pulsation de résonance  $w$  :

$$w = k^2 \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (3.14)$$

Le calcul de la pulsation de résonance nécessite la connaissance du paramètre  $k$  qui est difficile à déterminer. *Ballas* propose d'utiliser la transformée de Laplace<sup>3</sup> de la relation (3.12) en prenant en considération la règle de la dérivée. Dans le cas d'une poutre piézoélectrique encastree-libre, la solution générale de (3.12) nécessite la résolution du problème donné par l'équation suivante [Bal07] :

$$1 + \cos(kL)\cosh(kL) = 0 \quad (3.15)$$

2. La méthode reste valable pour les poutres unimorphes et bimorphes

3. La variable  $x$  est concernée par la transformée de Laplace.

où  $L$  est la longueur de la poutre.

Ce problème est obtenu en considérant les conditions aux limites suivantes :

1. conditions aux limites du côté encastré c'est à dire  $x = 0$  :

$$\delta(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\frac{d\delta}{dx}(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{dX}{dx}(0) = 0$$

2. la force et le moment à l'extrémité de la poutre (c'est à dire  $x = L$ ) sont nuls :

$$M(L, t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0$$

$$F(L, t) = 0 \Rightarrow \frac{d^3 X}{dx^3}(L) = 0$$

La relation (3.15) est connue sous le nom *équation caractéristique d'une barre encastrée-libre*. Une solution analytique de cette équation caractéristique est impossible. Une infinité de solution existe pour cette équation. La résolution numérique de (3.15) conduit à  $m$  racines caractéristiques  $k_m L$  telles que  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ . L'indice  $m$  correspond physiquement au mode vibratoire approprié. Le [Tableau 3.1](#) présente les cinq premières solutions  $kL$  de l'équation caractéristique (3.15) [Tan03] [Soe93].

TABLE 3.1 – Solutions de l'équation caractéristique (3.15).

$m$	1	2	3	4	5	...
$k_m L$	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955	14.137	...

Les pulsations de résonance des modes d'une poutre piézoélectrique encastrée-libre sont obtenues par le moyen des racines caractéristiques  $k_m L$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) données par le [Tableau 3.1](#) en prenant en compte la longueur  $L$ . La  $m^{\text{ème}}$  pulsation de résonance  $w_m$  peut être déduite à partir de l'équation (3.14) comme suit :

$$w_m = \frac{(k_m L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (3.16)$$

La fréquence de résonance de chaque mode  $m$  est inversement proportionnelle au carré de la longueur de la poutre  $L$ . Elle est donnée par :

$$f_m = \frac{(k_m L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (3.17)$$

On s'intéresse souvent au premier mode appelé mode primaire (ou encore mode d'excitation) dont sa fréquence de résonance  $f_1$  est définie par la formule suivante :

$$f_1 = \frac{(1.8751)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (3.18)$$

Il est possible d'exprimer les fréquences  $f_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) des autres modes en fonction de la fréquence  $f_1$  du premier mode (3.18) sous la forme suivante :

$$f_m = \frac{(k_m L)^2}{(1.8751)^2} f_1 \quad (3.19)$$

### 3.2.2.2 Application aux poutres piézoélectriques unimorphes et bimorphes

Les fréquences de résonance des différents modes d'une poutre piézoélectrique unimorphe peuvent être dérivées directement à partir de la formule (3.17) dont le paramètre  $C$  est défini dans (3.4), et  $\mu = w(\rho_{mp}h_{mp} + \rho_p h_p)$ . Après calcul, on obtient :

$$f_m = \frac{(k_m L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{(s_{11}^p)^2 h_{mp}^4 + s_{11}^{mp} s_{11}^p (4h_p h_{mp}^3 + 6h_p^2 h_{mp}^2 + 4h_{mp} h_p^3) + (s_{11}^{mp})^2 h_p^4}{12s_{11}^{mp} s_{11}^p (s_{11}^{mp} h_p + s_{11}^p h_{mp}) (\rho_{mp} h_{mp} + \rho_p h_p)}}} \quad (3.20)$$

où  $\rho_p$  et  $\rho_{mp}$  sont respectivement les densités correspondantes aux couches piézoélectrique et passive.  $k_m L$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) prend les valeurs données dans le [Tableau 3.1](#). La fréquence de résonance  $f_1$  du premier mode peut être déduite à partir de (3.20) en mettant  $k_m L = 1.8751$ . Cette dernière a été calculée dans [\[Wan98\]](#).

Identiquement au cas unimorphe, l'utilisation de l'équation (3.17) permet de définir les fréquences de résonance d'un bimorphe piézoélectrique en remplaçant  $C$  par la formule définie dans (3.6) et  $\mu = 2w\rho_p h_p$ . Ces fréquences sont décrites par :

$$f_m = \frac{(k_m L)^2 h_p}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{1}{3\rho_p s_{11}^p}} \quad (3.21)$$

où  $k_m L$  est défini dans le [Tableau 3.1](#) pour  $m = 1, 2, \dots$

## 3.3 Validation et analyse des modèles théoriques

Afin de valider les modèles analytiques (statique et dynamique) des poutres unimorphes et bimorphes présentés dans la section précédente, nous avons procédé à des expérimentations sur des poutres piézoélectriques développées et déjà existantes au département AS2M de l'institut FEMTO-ST. Ces poutres sont à base de matériau piézoélectrique de type PZT (*Lead zirconate titanate*). La couche passive des unimorphes est à base de Nickel. Les valeurs des coefficients utiles des deux matériaux sont résumées dans le [Tableau 3.2](#).

Les modèles statiques et dynamiques présentés précédemment dépendent non seulement des propriétés physiques des matériaux utilisés, mais aussi des caractéristiques géométriques (longueur, largeur et épaisseur) des lames collées. Pour cela, nous considérons les propriétés géométriques comme des variables pour valider et analyser le comportement des modèles analytiques. Les épaisseurs des couches piézoélectriques et passives des poutres utilisées sont respectivement 200  $\mu m$  et 100  $\mu m$ . Ces poutres piézoélectriques

TABLE 3.2 – Caractéristiques physiques du PZT et du Nickel.

matériaux	souplesse $s_{11}$	coefficient piézoélectrique $d_{31}$	densité $\rho$
PZT (PIC151)	$15 \times 10^{-12} \text{ m/N}$	$-210 \times 10^{-12} \text{ m/V}$	$7800 \text{ kg/m}^3$
Nickel	$5 \times 10^{-12} \text{ m/N}$	0	$8900 \text{ kg/m}^3$

font  $18 \text{ mm}$  de longueur,  $1 \text{ mm}$  de largeur pour les bimorphes et  $2 \text{ mm}$  de largeur pour les unimorphes<sup>4</sup>.

### 3.3.1 Validation du modèle statique

Sur la base des modèles statiques (3.5) et (3.7), il est possible d'estimer la déflexion résultante des poutres unimorphes et bimorphes suite à l'application d'une tension. Nous comparons les modèles théoriques aux résultats expérimentaux des poutres unimorphes et bimorphes pour différentes dimensions géométriques de la poutre. La largeur d'une poutre piézoélectrique étant considérée identique pour toutes ses couches, sa déflexion devient indépendante de la largeur  $w = w_i$  (voir les équations 3.5 et 3.7). Ceci nous a conduit à une comparaison basée sur la longueur et l'épaisseur de la poutre. La longueur  $L$  est définie comme la distance entre le point d'encastrement et l'extrémité de la poutre, c'est à dire la longueur active.

Afin de comparer la déflexion analytique à la déflexion mesurée par expérimentation, un signal sinusoïdal d'amplitude  $40 \text{ V}$  et de fréquence  $2 \text{ Hz}$  est d'abord appliqué à une poutre piézoélectrique unimorphe et ce pour des longueurs différentes. La déflexion à l'extrémité d'une poutre piézoélectrique soumise à une tension électrique est mesurée par un capteur de déplacement optique (produit de *Keyence*) selon le principe montré sur la Figure 3.3. Ce capteur a une résolution de  $10 \text{ nm}$ .

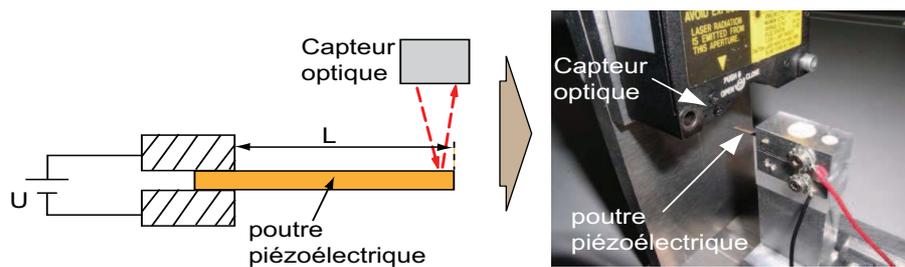


FIGURE 3.3 – Principe de mesure de la déflexion d'une poutre piézoélectrique soumise à une excitation électrique.

La Figure 3.4 montre la déflexion d'une poutre unimorphe "PZT-Nickel" en fonction de la tension appliquée, comparée aux résultats théoriques obtenus à partir de l'équation (3.5) pour différentes longueurs  $L = \{10 \text{ mm}, 12 \text{ mm}, 14 \text{ mm}, 16 \text{ mm}\}$ .

4. La largeur d'une poutre piézoélectrique est supposée identique pour toutes ses couches.

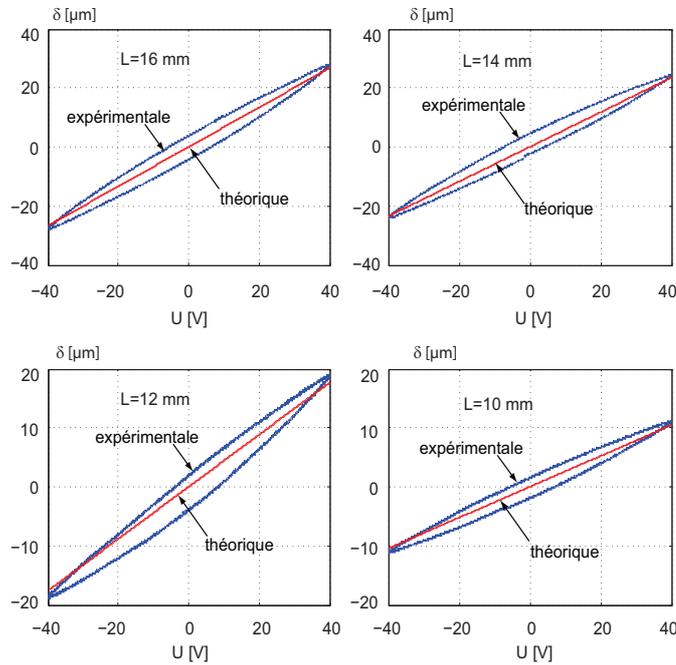


FIGURE 3.4 – Mesures expérimentales d’une poutre unimorphe PZT-Nickel comparées aux résultats de simulation.

Le modèle statique donné par (3.5) établit une relation linéaire qui lie la déflexion à l’extrémité d’une poutre unimorphe et la tension appliquée, alors que expérimentalement cette relation est non linéaire. En effet, les courbes expérimentales de la déflexion font apparaître un effet d’hystérésis (Figure 3.4). Or les équations constitutives de la piézoélectricité (voir Annexe B) ne prennent pas en compte les non-linéarités. Malgré tout, selon la Figure 3.4, la relation analytique définie par (3.5) permet d’estimer la plage de la déflexion produite pour une tension d’amplitude donnée. En effet, le gain statique coïncide avec l’axe principal de l’hystérésis.

Ensuite, on réalise les mêmes expérimentations sur une poutre bimorphe en appliquant une tension sinusoïdal d’amplitude  $40\text{ V}$  et de fréquence  $2\text{ Hz}$ . Les résultats analytiques et expérimentaux sont tracés sur la Figure 3.5.

De même, on constate d’après la Figure 3.5 que les poutres piézoélectriques bimorphes présentent un effet d’hystérésis. Le modèle théorique des bimorphes décrit par (3.7) est une approximation linéaire qui ne prend pas en compte l’hystérésis. Comme pour le modèle analytique des unimorphes, ce dernier peut être utilisé malgré tout pour calculer la plage de la déflexion correspondant à une tension d’amplitude connue.

### 3.3.2 Validation du modèle dynamique

Comme vu à la section précédente, le comportement dynamique des poutres piézoélectriques a été décrit par des fréquences de résonance calculées analytiquement. Par

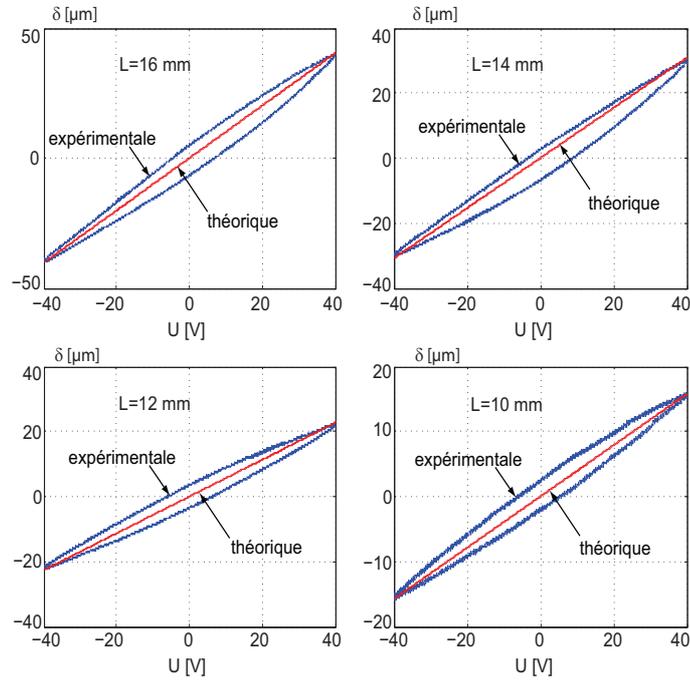


FIGURE 3.5 – Résultats de simulation et expérimentaux d’une poutre piézoélectrique bimorphe.

ailleurs, l’amortissement ne peut être exprimé par une relation analytique, mais il est possible de le déterminer expérimentalement. Nous comparons ici les fréquences de résonance des poutres unimorphes et bimorphes calculées théoriquement aux fréquences de résonance obtenues expérimentalement. Pour cela, le calcul des fréquences des différents modes s’appuie sur les relations (3.20) et (3.21). Afin de déterminer les valeurs des fréquences de résonance expérimentalement, une analyse harmonique a été effectuée en appliquant un signal sinusoïdal de faible amplitude, c’est à dire 1 V, et pour différentes fréquences. En fait, l’utilisation d’une faible amplitude permet d’éviter la détérioration de la poutre au voisinage de la fréquence de résonance.

De la même manière que la comparaison faite pour le modèle statique, on effectue une comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales avec les mêmes poutres unimorphes et bimorphes utilisées précédemment et ce pour différentes longueurs. En pratique, on s’intéresse souvent aux premiers modes. Dans notre cas, on s’intéresse au premier et au second mode. Commençons par calculer analytiquement et expérimentalement les fréquences de résonance d’une poutre piézoélectrique unimorphe. Après application d’un signal sinusoïdal pour différentes fréquences, les magnitudes expérimentales de l’unimorphe piézoélectrique “PZT-Nickel” pour différentes longueurs de la poutre  $L = 16 \text{ mm}$ ,  $L = 14 \text{ mm}$ ,  $L = 12 \text{ mm}$  et  $L = 10 \text{ mm}$  sont illustrées sur la Figure 3.6.

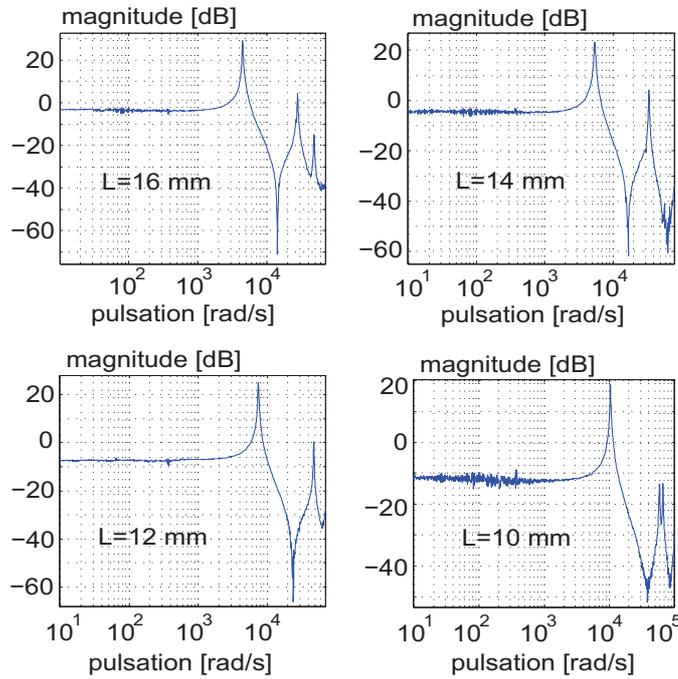


FIGURE 3.6 – Magnitudes expérimentales de l’unimorphe piézoélectrique PZT-Nickel pour différentes longueurs.

Les valeurs expérimentales des fréquences de résonance de chaque mode et de chaque longueur peuvent être déterminées à partir de la [Figure 3.6](#). Les valeurs obtenues sont résumés dans le [Tableau 3.3](#).

Les fréquences de résonance du premier et du second mode d’une poutre unimorphe pour les mêmes longueurs que précédemment peuvent être calculées en utilisant la formule (3.20). Les résultats obtenus sont donnés également sur le [Tableau 3.3](#).

TABLE 3.3 – Comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales d’une poutre unimorphe.

Méthode	fréquence	$L = 16 \text{ mm}$	$L = 14 \text{ mm}$	$L = 12 \text{ mm}$	$L = 10 \text{ mm}$
Analytique	mode 1	685.41 Hz	895.23 Hz	1.218 kHz	1.754 kHz
	mode 2	4.295 kHz	5.61 kHz	7.636 kHz	10.996 kHz
Expérimentale	mode 1	707.2 Hz	871.56 Hz	1.174 kHz	1.631 kHz
	mode 2	4.412 kHz	5.384 kHz	7.551 kHz	10.588 kHz

D’après les résultats illustrés par le [Tableau 3.3](#), on constate que les valeurs des fréquences de résonance calculées analytiquement et celles obtenues expérimentalement sont proches.

De manière identique à celle utilisée pour le cas d'unimorphe, on calcule les deux premières fréquences de résonance (analytiquement et expérimentalement) d'une poutre bimorphe en utilisant les mêmes longueurs  $L = 16 \text{ mm}$ ,  $L = 14 \text{ mm}$ ,  $L = 12 \text{ mm}$  et  $L = 10 \text{ mm}$ . Les résultats théoriques et expérimentaux sont résumés dans le [Tableau 3.4](#).

TABLE 3.4 – Comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales d'un bimorphe.

Méthode	fréquence	$L = 16 \text{ mm}$	$L = 14 \text{ mm}$	$L = 12 \text{ mm}$	$L = 10 \text{ mm}$
Analytique	mode 1	737.91 Hz	963.8 Hz	1.311 kHz	1.89 kHz
	mode 2	4.624 kHz	6.04 kHz	8.221 kHz	11.84 kHz
Expérimentale	mode 1	721.41 Hz	925.18 Hz	1.198 kHz	1.731 kHz
	mode 2	4.636 kHz	5.887 kHz	7.703 kHz	11.13 kHz

On constate que les résultats théoriques obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux. Ces résultats de la comparaison confirment la validité des relations théoriques concernant les fréquences de résonance des poutres piézoélectriques.

### 3.3.3 Impact des caractéristiques géométriques sur le modèle d'une poutre piézoélectrique

Dans cette partie, on analyse les influences majeures des caractéristiques géométriques des poutres piézoélectriques sur les performances. Cette analyse concerne en particulier l'impact des longueurs et des épaisseurs des différentes couches sur l'amplitude de la déflexion ainsi que sur les fréquences de résonance. On s'intéresse dans cette étude aux poutres piézoélectriques unimorphes. Pour cela, nous nous basons sur les modèles proposés (3.5) et (3.20) des unimorphes. Notons qu'il est possible d'effectuer cette analyse pour d'autres structures de poutres bimorphes ou multimorphes.

#### 3.3.3.1 Impact des longueurs et des épaisseurs sur l'amplitude de la déflexion

Commençons tout d'abord par la relation (3.5) liant la déflexion à l'extrémité d'une poutre piézoélectrique unimorphe à sa longueur. Cette relation peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\delta(x) = \frac{-3d_{31}s_{11}^{mp}s_{11}^p \frac{h}{h_p} \left(\frac{h}{h_p} - 1\right) x^2}{h_p^2 \left[ (s_{11}^p)^2 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^4 + s_{11}^{mp}s_{11}^p \left( 4 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^3 + 6 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^2 + 4 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right) \right) + (s_{11}^{mp})^2 \right]} U \quad (3.22)$$

avec  $h = h_{mp} + h_p$  est l'épaisseur totale de la poutre.

Selon la relation (3.22), la déflexion résultante d'une poutre unimorphe suite à l'application d'une différence de potentiel est proportionnelle au carré de la longueur de la poutre. La Figure 3.7 montre les tracés de la déflexion d'une poutre unimorphe "PZT-Nickel" en fonction de la longueur lorsqu'une tension d'amplitude 40 V est appliquée et ce pour trois valeurs du rapport  $\frac{h_p}{h}$ . L'épaisseur de la couche piézoélectrique a été fixée à 200  $\mu m$ .

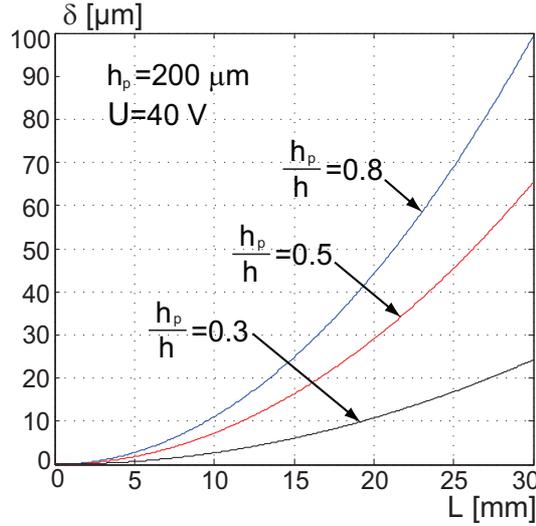


FIGURE 3.7 – Tracé de la déflexion en fonction de la longueur d'une poutre unimorphe.

D'après les courbes de la Figure 3.7, pour une valeur donnée  $\frac{h_p}{h}$ , une déflexion plus grande peut être obtenue en utilisant une poutre de longueur plus grande. Cependant, en microrobotique la longueur est contrainte par les dimensions souhaitées finales du microrobot/microsystème. Ainsi, comme illustré sur la Figure 3.7, lorsque la couche piézoélectrique est plus épaisse par rapport à la couche passive, c'est à dire  $\frac{h_p}{h} > 0.5$ , la déflexion engendrée devient plus grande.

Étudions maintenant l'impact des épaisseurs de la couche active  $h_p$  et de la couche passive  $h_{mp}$  sur l'amplitude de la déflexion. Nous proposons d'effectuer cette analyse en utilisant comme variable le rapport  $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$ . Partant de la relation (3.5), nous exprimons la déflexion en fonction du rapport  $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$  comme suit :

$$\delta(t) = \frac{-3d_{31}s_{11}^{mp}s_{11}^p t(t+1)L^2}{h_p^2((s_{11}^p)^2 t^4 + 4s_{11}^{mp}s_{11}^p t^3 + 6s_{11}^{mp}s_{11}^p t^2 + 4s_{11}^{mp}s_{11}^p t + (s_{11}^{mp})^2)} U \quad (3.23)$$

Ensuite, on trace la déflexion  $\delta$  (3.23) à l'extrémité de la même poutre unimorphe "PZT-Nickel" en fonction du rapport  $t$  pour quelques valeurs de  $h_p \in \{200 \mu m, 250 \mu m, 300 \mu m\}$ .

Ces valeurs correspondent à des épaisseurs de plaques piézoélectriques disponibles dans le commerce. La Figure 3.8 présente le résultat obtenu lorsqu'une tension de 40 V est appliquée à la poutre. La longueur de la poutre est  $L = 16 \text{ mm}$ .

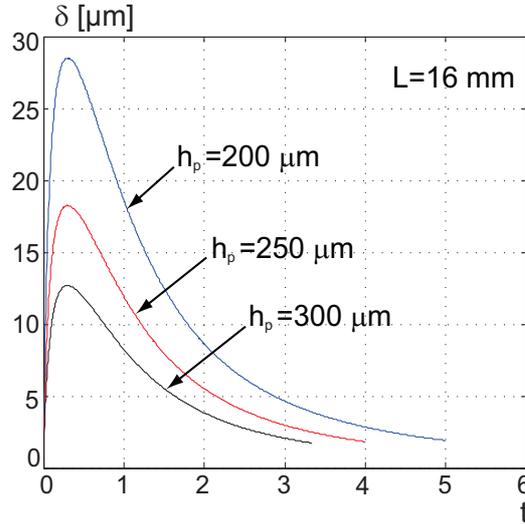


FIGURE 3.8 – Déflexion d'une poutre piézoélectrique unimorphe en fonction du rapport  $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$ .

Lorsqu'une poutre piézoélectrique composée d'une seule couche active est soumise à une excitation électrique, elle se dilate ou se contracte sans fléchissement. Ceci peut être expliqué sur la courbe (Figure 3.8) par une déflexion nulle pour un rapport  $t = 0$ , c'est à dire  $h_{mp} = 0$ . Une déflexion maximale peut être obtenue pour  $t = 0.3$ . Lorsque le rapport  $t > 0.3$ , la déflexion décroît de manière exponentielle. Elle devient approximativement nulle pour des valeurs plus grandes de  $t$  (l'épaisseur de la couche passive devient trop grande par rapport à celle de la couche piézoélectrique).

### 3.3.3.2 Impact des longueurs et des épaisseurs sur les fréquences de résonance

De la même manière que précédemment, on trace les fréquences de résonance d'une poutre unimorphe en fonction de sa longueur et en fonction du rapport des épaisseurs de ses couches (active et passive). Comme les fréquences de résonance des autres modes peuvent être déduites de façon directe à partir du premier mode (voir 3.19), nous limitons notre étude ici à la fréquence de résonance du premier mode.

La Figure 3.9 présente l'évolution de la fréquence de résonance du premier mode d'une poutre unimorphe en fonction de la longueur. Les courbes illustrées sur la figure correspondent à trois valeurs du rapport  $\frac{h_p}{h}$ . Dans cette étude, une couche piézoélectrique

d'épaisseur  $h_p = 200 \mu m$  a été considérée. Les calculs ont été effectués en utilisant la formule suivante obtenue après développement de la relation (3.20), avec  $k_m L = 1.8751$ .

$$f_1 = \frac{(1.8751)^2 h_p}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{(s_{11}^p)^2 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^4 + s_{11}^{mp} s_{11}^p \left[4 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^3 + 6 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)^2 + 4 \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)\right] + (s_{11}^{mp})^2}{12 s_{11}^{mp} s_{11}^p \left(s_{11}^{mp} + s_{11}^p \left(\frac{h}{h_p} - 1\right)\right) \left(\rho_{mp} \left(\frac{h}{h_p} - 1\right) + \rho_p\right)}} \quad (3.24)$$

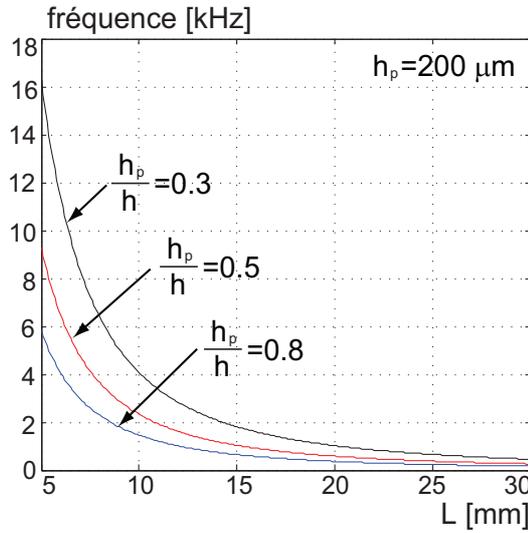


FIGURE 3.9 – Fréquence de résonance du premier mode d'une poutre unimorphe en fonction de la longueur.

La fréquence de résonance du premier mode (3.24) est inversement proportionnelle au carré de la longueur de la poutre. On constate d'après la Figure 3.9 qu'une augmentation de la longueur  $L$  réduit la fréquence de résonance du premier mode. L'accroissement de la fréquence de résonance peut se faire en diminuant la longueur. Par ailleurs, une fréquence de résonance plus grande peut être obtenue en utilisant une poutre unimorphe dont l'épaisseur de la couche passive est plus grande (c'est à dire lorsque  $\frac{h_p}{h} < 0.5$ ).

Traitons maintenant l'effet de la variation du rapport  $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$  sur la fréquence de résonance. La fréquence de résonance du premier mode exprimée en fonction du rapport  $t$  est donnée par :

$$f_1 = \frac{(1.8751)^2 h_p}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{(s_{11}^p)^2 t^4 + 4 s_{11}^{mp} s_{11}^p t^3 + 6 s_{11}^{mp} s_{11}^p t^2 + 4 s_{11}^{mp} s_{11}^p t + (s_{11}^{mp})^2}{12 s_{11}^{mp} s_{11}^p (s_{11}^p t + s_{11}^{mp}) (\rho_{mp} t + \rho_p)}} \quad (3.25)$$

L'évolution de la fréquence de résonance calculée selon la relation (3.25), en fonction du rapport  $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$  pour trois valeurs de  $h_p \in \{200 \mu m, 250 \mu m, 300 \mu m\}$  est illustrée sur la Figure 3.10. La poutre unimorphe considérée est composée du PZT et de Nickel dont la longueur est  $L = 16 \text{ mm}$ .

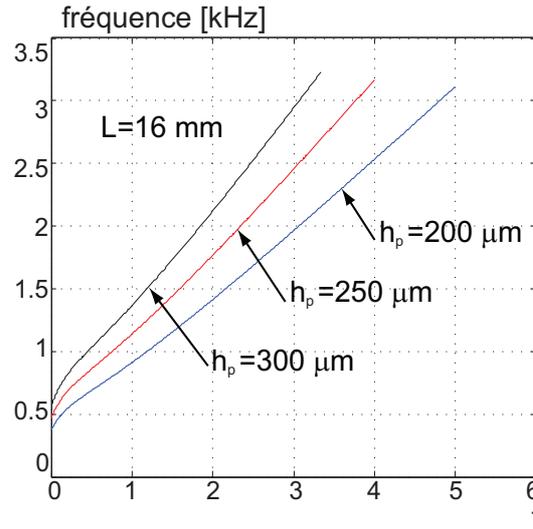


FIGURE 3.10 – Fréquence de résonance d'une poutre unimorphe en fonction du rapport  $t$ .

D'après la Figure 3.10, on constate que la relation liant la fréquence de résonance et l'épaisseur  $h_{mp}$  (le rapport  $t$  pour une valeur donnée de  $h_p$ ) est approximativement linéaire. Lorsque  $t = 0$  (pas de couche passive  $h_{mp} = 0$ ), on constate une fréquence de résonance  $f_0$ . Cette dernière correspond à la fréquence de résonance mécanique de la couche piézoélectrique. En augmentant le rapport  $t$ , la fréquence de résonance augmente. Ceci s'explique par le fait que la couche du Nickel devient plus rigide par rapport à la couche piézoélectrique.

### 3.4 Conception et dimensionnement des poutres piézoélectriques

Nous avons vu ci-dessus que les modèles des poutres piézoélectriques présentés permettant de prédire leurs comportements statique et dynamique. Ces modèles dépendent des caractéristiques physiques et géométriques de la poutre. Un dimensionnement de la structure d'une poutre piézoélectrique peut être effectué en utilisant le modèle analytique couplé à un calcul numérique. En effet, un tel dimensionnement permet de déduire les dimensions possibles permettant la réalisation des poutres piézoélectriques assurant au mieux un cahier des charges donné. Des méthodes d'optimisation ont été utilisées

pour dimensionner les actionneurs piézoélectriques réalisés par assemblage de plusieurs poutres [Gro08] mais elles présentent un niveau de complexité élevé.

Nous proposons dans nos travaux d'utiliser les techniques du calcul par intervalles pour la conception des poutres piézoélectriques. L'utilisation de ces techniques permet de déterminer de manière garantie les dimensions à donner aux poutres piézoélectriques afin de répondre à un besoin particulier.

### 3.4.1 Poutres piézoélectriques utilisées

Dans cette partie, on souhaite dimensionner des poutres piézoélectriques unimorphes. Ce choix est lié à la simplicité de leur fabrication comparativement aux poutres bimorphes et multimorphes. Pour la conception des poutres unimorphes, nous considérons des matériaux actif et passif existant dans le commerce. En effet, nous avons choisi le matériau PZT de référence PIC151 de la société *Physike Instrumente* (PI) pour les couches piézoélectriques. La couche passive est à base de Nickel et provient de la société *Goodfellow*. Enfin, le produit de référence "EPO-TEK H22" de la société *PI* est utilisé pour coller les couches PZT-Nickel. La structure collée peut être découpée aux dimensions souhaitées par le moyen d'une scie à wafer ou d'un procédé d'usinage laser. La [Figure 3.11](#) présente quelques poutres piézoélectriques unimorphes.

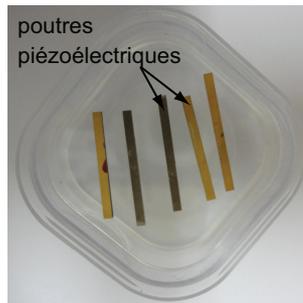


FIGURE 3.11 – Poutres piézoélectriques unimorphes

Nous proposons ci-dessus de traiter deux problèmes de conception qui nous semblent représentatifs de l'amélioration d'un système existant. La conception ou le dimensionnement conduit à des résultats garantis puisqu'on utilise l'analyse par intervalles.

## 3.4.2 Problème 1

### 3.4.2.1 Formulation du problème

Dans les systèmes microrobotiques, l'objectif est souvent la miniaturisation des produits. Partant de ce principe, on souhaite ici concevoir des poutres unimorphes ayant des dimensions (longueur, largeur et épaisseur) plus petites par rapport à celles d'une autre poutre unimorphe tout en assurant de meilleures performances (voir [Figure 3.12](#)). Le but est d'augmenter l'amplitude de déflexion et la fréquence de résonance. D'après l'analyse présentée précédemment, la diminution de la longueur d'une poutre unimorphe

permet d'accroître la fréquence de résonance des modes de vibration. Cependant, ceci réduit l'amplitude de sa déflexion. Toutefois, il est possible de compenser ceci par un paramétrage des épaisseurs des deux couches piézoélectrique et passive sans trop perturber la fréquence de résonance.

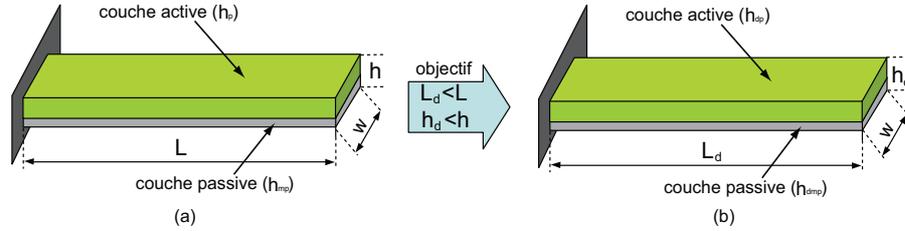


FIGURE 3.12 – a : poutre piézoélectrique unimorphe. b : nouvelle poutre unimorphe dimensionnée.

Nous disposons d'une poutre piézoélectrique unimorphe  $P_1$  (PZT-Nickel) de longueur  $L$ , de largeur  $w$  et d'épaisseur  $h = h_p + h_{mp}$ , où  $h_p$  et  $h_{mp}$  désignent les épaisseurs de ses couches piézoélectrique et passive respectivement. On note  $\delta(L)$  et  $f_1(L)$  la déflexion maximale lorsqu'une tension  $U$  est appliquée et la fréquence de résonance du premier mode de vibration respectivement.  $\delta(L)$  et  $f_1(L)$  sont décrites par les formules (3.5) et (3.20) respectivement. On souhaite réaliser une poutre piézoélectrique unimorphe  $P_2$  (PZT-Nickel) de longueur  $L_d = \frac{L}{\alpha}$  ( $\mathbb{R} \ni \alpha > 1$ ), de largeur  $w$  identique à celle de la première (c'est à dire la poutre  $P_1$ ) et d'épaisseur totale  $h_d < h$ , dont les épaisseurs des couches piézoélectrique et passive sont  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$ . On note  $\delta_d(L_d)$  et  $f_{1d}(L_d)$  la déflexion maximale et la fréquence de résonance du premier mode respectivement de la poutre  $P_2$ .

Notre problème est formulé comme suit :

Supposons que  $\alpha$  est connu, trouver les épaisseurs  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  telles que :

- l'amplitude de déflexion réalisée par la poutre  $P_2$  soit supérieure à celle de la poutre  $P_1$  lorsque la même tension  $U$  est appliquée aux deux poutres, c'est à dire  $\delta_d(L_d, h_{dp}, h_{dmp}) \geq \delta(L)$ , avec  $L_d = \frac{L}{\alpha}$  ;
- la fréquence de résonance du premier mode de vibration de la poutre  $P_2$  soit grande par rapport à celle de la poutre  $P_1$ , c'est à dire  $f_{1d}(L_d, h_{dp}, h_{dmp}) \geq f_1(L)$  ;
- l'épaisseur  $h_d$  de la poutre  $P_2$  soit strictement inférieure à celle de la poutre  $P_1$ , c'est à dire  $h_d = h_{dp} + h_{dmp} \leq h$ .

En utilisant les relations (3.5) et (3.20), toutes ces exigences peuvent être traduites par les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_{piezo}(h_{dp}, h_{dmp}) \left(\frac{L}{\alpha}\right)^2}{2C(h_{dp}, h_{dmp})} U \geq \frac{m_{piezo}(h_p, h_{mp}) L^2}{2C(h_p, h_{mp})} U \\ \frac{(1.8751)^2}{2\pi \left(\frac{L}{\alpha}\right)^2} \sqrt{\frac{C(h_{dp}, h_{dmp})}{w(\rho_{mp}h_{dmp} + \rho_p h_{dp})}} \geq \frac{(1.8751)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{C(h_p, h_{mp})}{w(\rho_{mp}h_{mp} + \rho_p h_p)}} \\ h_{dp} + h_{dmp} \leq h \end{array} \right. \quad (3.26)$$

tels que les paramètres  $m_{piezo}(x, y)$  et  $C(x, y)$  peuvent être calculés à partir des relations (3.4) en remplaçant  $h_p$  et  $h_{mp}$  par  $x$  et  $y$  respectivement.

Les inégalités (3.26) peuvent être réécrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_{piezo}(h_{dp}, h_{dmp})}{\alpha^2 C(h_{dp}, h_{dmp})} \geq \frac{m_{piezo}(h_p, h_{mp})}{C(h_p, h_{mp})} \\ \alpha^4 \frac{C(h_{dp}, h_{dmp})}{w(\rho_{mp}h_{dmp} + \rho_p h_{dp})} \geq \frac{C(h_p, h_{mp})}{w(\rho_{mp}h_{mp} + \rho_p h_p)} \\ h_{dp} + h_{dmp} \leq h \end{array} \right. \quad (3.27)$$

### 3.4.2.2 Résolution du problème ensembliste

Plusieurs méthodes existent pour résoudre ce système d'inégalités (3.27). Une méthode garantie pour résoudre ce problème consiste à transformer les différentes inégalités sous forme d'inclusions. Les épaisseurs des couches de la poutre  $P_2$  à fabriquer ne doivent pas être nulles. Comme  $h_{dp} + h_{dmp} = h_d$ , les conditions suivantes sont considérées :

$$0 < h_{dp} < h \wedge 0 < h_{dmp} < h \quad (3.28)$$

D'après (3.28), les paramètres  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  peuvent être représentés par des intervalles  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$ . Posons  $[\theta] = [[h_{dp}], [h_{dmp}]]$ . Notre problème peut donc être reformulé comme suit.

Soit  $\Theta$  l'ensemble des paramètres  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$  satisfaisant le système d'inégalités (3.27), chercher les valeurs admissibles de  $\theta$  telles que :

$$\Theta := \{\theta \in \mathbf{D} \text{ t.q. } H(\theta) \in [\mathbf{Y}]\} \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{D}$  est le domaine de définition de  $\theta$ .  $H(\theta)$  et  $[\mathbf{Y}]$  sont définis comme suit :

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{m_{piezo}([h_{dp}], [h_{dmp}])}{\alpha^2 C([h_{dp}], [h_{dmp}])} - \frac{m_{piezo}(h_p, h_{mp})}{C(h_p, h_{mp})} \\ \alpha^4 \frac{C([h_{dp}], [h_{dmp}])}{w(\rho_{mp}[h_{dmp}] + \rho_p[h_{dp}])} - \frac{C(h_p, h_{mp})}{w(\rho_{mp}h_{mp} + \rho_ph_p)} \\ h - [h_{dp}] - [h_{dmp}] \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

et

$$[\mathbf{Y}] = \begin{pmatrix} [0, +\infty] \\ [0, +\infty] \\ [0, +\infty] \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Ce problème est appelé un problème d'inversion ensembliste qui peut être résolu en utilisant l'algorithme de SIVIA présenté au chapitre précédent. Cet algorithme permet de caractériser l'ensemble solution  $\Theta$  par une approximation intérieure  $\underline{\Theta}$  et une approximation extérieure  $\overline{\Theta}$ , telle que  $\underline{\Theta} \subseteq \Theta \subseteq \overline{\Theta}$ . Nous avons vu au chapitre précédent que le calcul par intervalles présente une sur-estimation du résultat issu d'une succession d'opérations mathématiques qui est due aux effets de dépendance et d'enveloppement. Afin de réduire la multi-occurrence des paramètres intervalles  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$ , on écrit les termes intervalles dans (3.29) sous la forme suivante :

$$\frac{m_{piezo}([h_{dp}], [h_{dmp}])}{C([h_{dp}], [h_{dmp}])} = \frac{-6d_{31}s_{11}^{mp}s_{11}^p[h_{dmp}]\left(1 + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]}\right)}{[h_{dp}]^3 \left( (s_{11}^{mp})^2 + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 4s_{11}^{mp}s_{11}^p + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 6s_{11}^{mp}s_{11}^p + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 4s_{11}^{mp}s_{11}^p + (s_{11}^p)^2 \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \right) \right) \right) \right) \right)}$$

$$\frac{C([h_{dp}], [h_{dmp}])}{w(\rho_{mp}[h_{dmp}] + \rho_p[h_{dp}])} = \frac{[h_{dp}]^2 \left( (s_{11}^{mp})^2 + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 4s_{11}^{mp}s_{11}^p + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 6s_{11}^{mp}s_{11}^p + \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \left( 4s_{11}^{mp}s_{11}^p + (s_{11}^p)^2 \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \right) \right) \right) \right)}{12s_{11}^{mp}s_{11}^p \left( \rho_p + \rho_{mp} \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \right) \left( s_{11}^{mp} + s_{11}^p \frac{[h_{dmp}]}{[h_{dp}]} \right)}$$

### 3.4.2.3 Exemple d'application

Prenons une poutre piézoélectrique unimorphe  $P_1$  (PZT-Nickel) dont les caractéristiques physiques sont illustrées dans le [Tableau 3.2](#). Cette poutre possède une longueur  $L = 20 \text{ mm}$ , une largeur  $w = 1 \text{ mm}$  et des épaisseurs  $h_p = 450 \text{ }\mu\text{m}$  et  $h_{mp} = 200 \text{ }\mu\text{m}$  des deux couches formant une épaisseur totale  $h = 650 \text{ }\mu\text{m}$ . On souhaite calculer l'ensemble admissible des épaisseurs  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  correspondant aux couches active et passive d'une poutre piézoélectrique unimorphe  $P_2$  ayant une largeur  $w = 1 \text{ mm}$ , une longueur<sup>5</sup> connue  $L_d = L/2 = 10 \text{ mm}$  ( $\alpha = 2$ ) et qui assure les critères présentés précédemment (voir § 3.4.2.1). Ceci peut être traduit par la résolution du problème (3.29) pour  $\alpha = 2$  et dont les termes intervalles sont définis ci-dessus.

Les plages des valeurs initiales des paramètres  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$  sont connues de manière exacte. Elle sont définies selon (3.28) par le pavé  $[h_{dp}] \times [h_{dmp}] = ]0, 650 \text{ }\mu\text{m}[ \times$

5. Longueur donnée par la distance entre l'extrémité de la poutre et le point d'encastrement.

$]0, 650 \mu m[$ . Comme les valeurs des épaisseurs ne doivent pas être nulles, on considère le pavé initial  $[h_{dp}]_0 \times [h_{dmp}]_0 = [10 \mu m, 640 \mu m] \times [10 \mu m, 640 \mu m]$ . On s'intéresse ici à l'approximation intérieure pour laquelle l'ensemble  $\underline{\Theta}$  est garanti d'être à l'intérieur de l'ensemble cherché  $\Theta$ , c'est à dire  $\underline{\Theta} \subset \Theta$ . L'algorithme SIVIA génère le sous-pavage illustré sur la [Figure 3.13](#). Les calculs ont été effectués en utilisant une précision  $\epsilon = 1 \mu m$ .

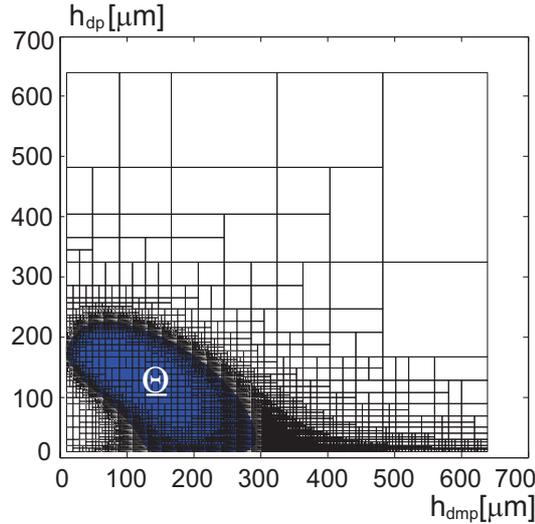


FIGURE 3.13 – Ensemble des pavés  $[h_{dp}] \times [h_{dmp}]$  générés par l'algorithme SIVIA.

#### 3.4.2.4 Analyse des résultats

Le résultat obtenu ([Figure 3.13](#)) est indépendant de l'hystérésis caractérisant le comportement des poutres piézoélectriques. Un choix quelconque des valeurs des épaisseurs  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  à l'intérieur de l'ensemble solution assure le cahier des charges. En effet, la déflexion de la poutre  $P_1$  atteint approximativement  $8.5 \mu m$  pour une tension d'amplitude  $40 V$ . La fréquence de résonance du premier mode est de  $951.67 Hz$ . Dans notre cas, la poutre dimensionnée possède une longueur  $L_d = \frac{L}{2} = 10 mm$ , et une épaisseur totale  $h_d = h_{dp} + h_{dmp}$  dont les épaisseurs  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  prennent des valeurs à l'intérieur du sous-pavage  $\underline{\Theta}$  présenté sur la [Figure 3.13](#). Nous avons fabriqué une poutre piézoélectrique en utilisant une couche active d'épaisseur  $h_{dp} = 200 \mu m \in \underline{\Theta}$  et une autre passive d'épaisseur  $h_{dmp} = 100 \mu m \in \underline{\Theta}$ . La déflexion expérimentale résultante suite à l'application d'une tension d'amplitude  $40 V$  à cette dernière est donnée par la [Figure 3.14-a](#). Une analyse harmonique a été également effectuée sur la poutre fabriquée  $P_2$ . La [Figure 3.14-b](#) montre le résultat obtenu.

Les résultats sont résumés et comparés dans le [Tableau 3.5](#).

D'après le [Tableau 3.5](#), on remarque que la déflexion  $\delta$  réalisée (lorsque  $U = 40 V$ ) par la poutre dimensionnée ( $P_2$ ) est strictement supérieure à celle obtenue par la

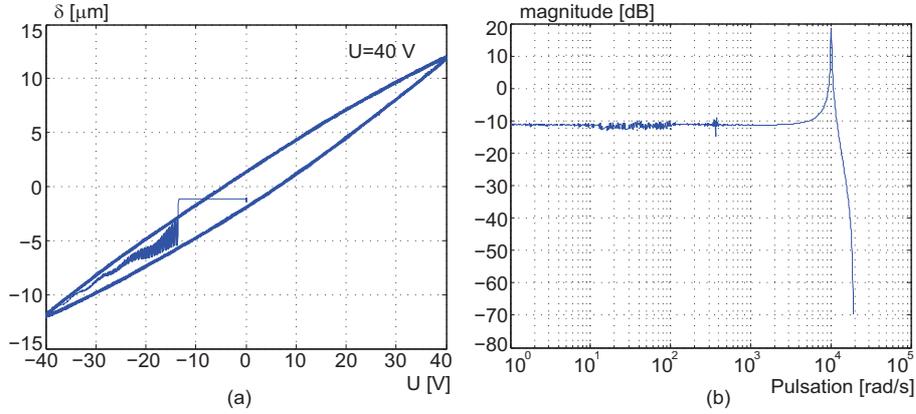


FIGURE 3.14 – a : déflexion expérimentale  $\delta$  de la poutre  $P_2$ . b : réponse fréquentielle de la poutre  $P_2$ .

TABLE 3.5 – Comparaison des résultats obtenus.

Poutre	longueur $L$	épaisseur de la couche active	épaisseur de la couche passive	deflexion	fréquence de résonance
Poutre $P_1$	$L = 20 \text{ mm}$	$h_p = 450 \text{ }\mu\text{m}$	$h_{mp} = 200 \text{ }\mu\text{m}$	$\delta \approx 8.5 \text{ }\mu\text{m}$	$f_1 = 951.67 \text{ Hz}$
$P_2$ dimensionnée par intervalles	$L_d = 10 \text{ mm}$	$h_{dp} = 200 \text{ }\mu\text{m}$	$h_{dmp} = 100 \text{ }\mu\text{m}$	$\delta \approx 12 \text{ }\mu\text{m}$	$f_1 = 1641 \text{ Hz}$

poutre unimorphe  $P_1$ . Ainsi, la condition sur la fréquence de résonance de la poutre dimensionnée est vérifiée,  $f_1 \approx 1641 \text{ Hz} > 951.67 \text{ Hz}$ . Les exigences du cahier des charges sont donc respectées.

### 3.4.3 Problème 2

Soit une poutre piézoélectrique bimorphe formée de deux couches de matériaux piézoélectrique PZT, et ayant des dimensions géométriques  $L \times w \times 2h_p$ . Comme pour le problème 1, dans un objectif de miniaturisation des dimensions, on souhaite réaliser une poutre piézoélectrique unimorphe (PZT-Nickel) de dimensions  $L_d \times w_d \times (h_{dp} + h_{dmp})$  capable d'assurer de meilleures performances par rapport à celles du bimorphe (voir [Figure 3.15](#)). On choisit pour cette poutre unimorphe une épaisseur strictement inférieure à celle de la poutre bimorphe, c'est à dire  $h_{dp} + h_{dmp} = \frac{2h_p}{\alpha}$ , avec  $\alpha > 1$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Les largeurs des deux poutres (unimorphe et bimorphe) sont supposées identiques, c'est à dire  $w = w_d$ .

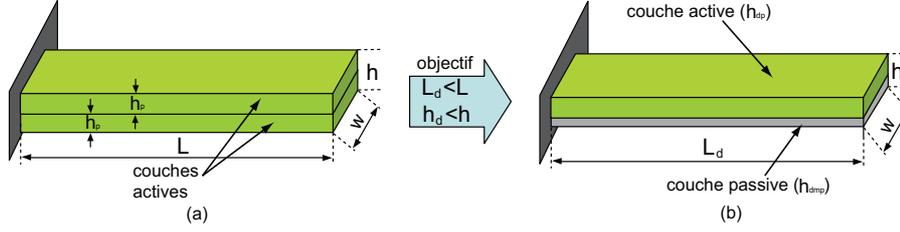


FIGURE 3.15 – a : poutre piézoélectrique bimorphe. b : nouvelle poutre unimorphe dimensionnée.

### 3.4.3.1 Écriture des inclusions du problème d'inversion ensembliste

De la même manière que le cas précédent, le problème peut être traité en utilisant les techniques du calcul par intervalles. Notre objectif principal consiste à déterminer les dimensions d'une poutre piézoélectrique unimorphe (PZT-Nickel) telles que :

- la pente tension-déflexion (c'est à dire le gain statique) de la poutre unimorphe soit supérieure à celle de la poutre bimorphe ;
- la fréquence de résonance de la poutre unimorphe soit plus grande que celle de la poutre bimorphe ;
- la longueur de la poutre unimorphe soit inférieure à celle de la poutre bimorphe, c'est à dire  $L_d < L$ .

La déflexion et la fréquence de résonance d'une poutre bimorphe sont définies respectivement par les relations (3.7) et (3.21). Dans le cas d'une poutre unimorphe, elles sont données selon les relations (3.5) et (3.20). Comme les largeurs des couches d'une poutre sont identiques, la déflexion et la fréquence de résonance sont indépendantes de la largeur  $w$  de la poutre. Il reste donc à chercher l'ensemble des paramètres longueur/épaisseurs ( $[L_d]$ ,  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$ ). Afin de minimiser le nombre des variables, on propose d'utiliser le rapport  $[t] = [h_{dmp}]/[h_{dp}]$  à la place des paramètres  $[h_{dp}]$  et  $[h_{dmp}]$ .

Posons  $[\theta] = [[L_d], [t]]$  et soit  $\Theta$  l'ensemble solution caractérisant les valeurs admissibles des paramètres  $[L_d]$  et  $[t]$ . En utilisant les relations (3.7) et (3.20), (3.23) et (3.25), notre problème ensembliste peut être formulé comme suit :

$$\Theta := \left\{ \theta \in [\theta] \left| \begin{array}{l} \frac{\alpha^2 s_{11}^{mp} s_{11}^p [t] ([t]+1)^3 L_d^2}{(s_{11}^{mp})^2 + [t] (4s_{11}^{mp} s_{11}^p + [t] (6s_{11}^{mp} s_{11}^p + [t] (4s_{11}^{mp} s_{11}^p + (s_{11}^p)^2 [t])))} - L^2 \subseteq [0, +\infty] \\ \left( \frac{2/\alpha}{[L_d]^2 ([t]+1)} \sqrt{\frac{(s_{11}^{mp})^2 + [t] (4s_{11}^{mp} s_{11}^p + [t] (6s_{11}^{mp} s_{11}^p + [t] (4s_{11}^{mp} s_{11}^p + (s_{11}^p)^2 [t])))}{12s_{11}^{mp} s_{11}^p (s_{11}^{mp} + s_{11}^p [t]) (\rho_{mp} [t] + \rho_p)}} \right. \\ \left. - \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{1}{3s_{11}^p \rho_p}} \right) \subseteq [0, +\infty] \\ [L_d] \subseteq [0, L] \end{array} \right. \right\} \quad (3.32)$$

Comme dans le cas précédent, le problème d'inversion ensembliste (3.32) peut être résolu en utilisant l'algorithme SIVIA.

### 3.4.3.2 Exemple d'application

Prenons une poutre piézoélectrique bimorphe ayant les dimensions suivantes :

- longueur :  $L = 20 \text{ mm}$
- épaisseur de la couche active :  $h_p = 375 \text{ }\mu\text{m}$

Les propriétés physiques du matériau piézoélectrique utilisé avaient été regroupées dans le [Tableau 3.2](#). Dans cet exemple, nous traitons le problème (3.32) pour  $\alpha = 2.5$ , c'est à dire l'épaisseur totale de la poutre unimorphe souhaitée est fixée à  $h_d = \frac{2h_p}{\alpha} = 300 \text{ }\mu\text{m}$ . De même, nous nous intéressons à la recherche de l'ensemble d'approximation intérieure  $\Theta$ . La résolution du problème (3.32) a été effectuée en choisissant un pavé initial  $[L_d]_0 \times [t]_0 = [0, 20 \text{ mm}] \times [0.01, 4]$  et une précision  $\epsilon = 0.01$ . L'image réciproque du problème (3.32) est représentée par le soupavage illustré sur la [Figure 3.16](#).

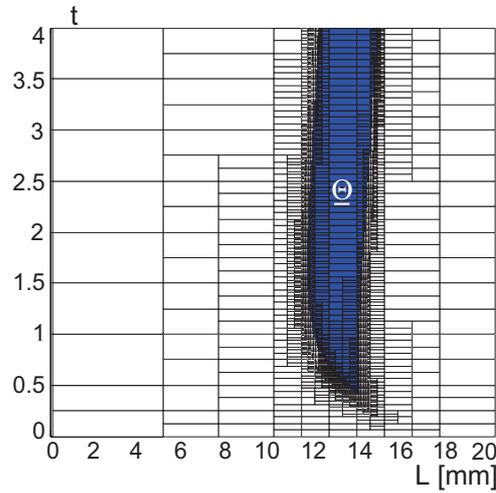


FIGURE 3.16 – Ensemble solution des paramètres  $L_d$  et  $t$ .

Toutes les valeurs des paramètres  $L_d$  et  $t$  à l'intérieur de l'ensemble solution  $\Theta$  satisfont les contraintes du problème (3.32). Afin de calculer les paramètres  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$ , on doit résoudre le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} h_{dp} + h_{dmp} = \frac{2h_p}{\alpha} \\ h_{dmp} = h_{dp}t \end{cases} \quad (3.33)$$

qui a comme solution :

$$\begin{cases} h_{dp} = \frac{2h_p}{\alpha(t+1)} \\ h_{dmp} = \frac{2h_p t}{\alpha(t+1)} \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $t$  prend des valeurs à l'intérieur de l'ensemble solution, c'est à dire  $t \in \underline{\Theta}$ .

### 3.4.3.3 Analyse des résultats

Nous avons choisi une longueur  $L = 13.5 \text{ mm}$  et un rapport  $t = 0.5$  pour la poutre unimorphe. En utilisant les formules (3.34) avec  $t = 0.5$  et  $h_p = 375 \text{ }\mu\text{m}$ , on obtient les épaisseurs des deux couches de la poutre unimorphe  $h_{dp}$  et  $h_{dmp}$  :

$$\begin{cases} h_{dp} = 200 \text{ }\mu\text{m} \\ h_{dmp} = 100 \text{ }\mu\text{m} \end{cases} \quad (3.35)$$

Enfin, la poutre unimorphe à fabriquer doit avoir des épaisseurs identiques à celles de la poutre fabriquée précédemment (problème 1) mais de longueur  $L = 13.5 \text{ mm}$ . Après avoir fabriqué cette poutre unimorphe, nous avons effectué une analyse de ses comportements statique et dynamique. Les résultats expérimentaux obtenus sont présentés sur la Figure 3.17. La déflexion résultante (lorsque la tension appliquée  $U = 40 \text{ V}$ ) et la fréquence de résonance du premier mode de la poutre bimorphe sont  $17.92 \text{ }\mu\text{m}$  et  $885.5 \text{ Hz}$  respectivement.

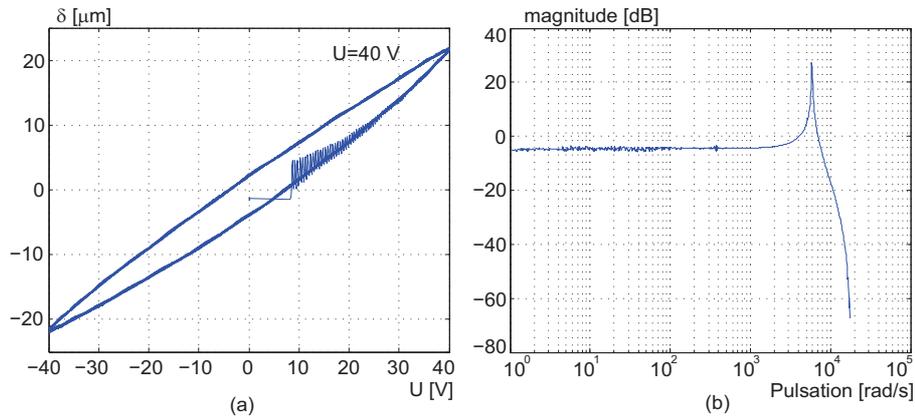


FIGURE 3.17 – a : déflexion expérimentale  $\delta$  de la poutre unimorphe ( $L = 13.5 \text{ mm}$ ). b : réponse fréquentielle de la poutre unimorphe ( $L = 13.5 \text{ mm}$ ).

On regroupe les résultats obtenus dans le [Tableau 3.6](#). Comme indiqué dans ce tableau, les déflexions et fréquences de résonance de la poutre unimorphe sont supérieures à celles de la poutre bimorphe. Notre cahier des charges est donc bien respecté.

TABLE 3.6 – Comparaison des résultats obtenus.

Poutre	longueur $L$	épaisseur de la couche active	épaisseur de la couche passive	deflexion	fréquence de résonance
Poutre bimorphe	$L = 20 \text{ mm}$	$h_p = 375 \text{ }\mu\text{m}$	–	$\delta = 17.92 \text{ }\mu\text{m}$	$f_1 = 885.5 \text{ Hz}$
Poutre unimorphe	$L_d = 13.5 \text{ mm}$	$h_{dp} = 200 \text{ }\mu\text{m}$	$h_{dmp} = 100 \text{ }\mu\text{m}$	$\delta \approx 21.5 \text{ }\mu\text{m}$	$f_1 = 930.64 \text{ Hz}$

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le dimensionnement des poutres piézoélectriques. Ce dernier est utile pour choisir les meilleures poutres qui permettent de répondre à un besoin particulier. Pour cela, nous avons d'abord procédé à une description des modèles statique et dynamique des poutres piézoélectriques, en particulier des unimorphes et des bimorphes. Ces derniers dépendent des caractéristiques géométriques des poutres piézoélectriques et des matériaux constituant leurs couches. Afin de valider ces modèles, des expérimentations ont été réalisées en utilisant des poutres unimorphes et bimorphes existantes. Les expérimentations effectuées ont montré que les modèles élaborés sont suffisants pour estimer la déflexion maximale et les fréquences de résonance des poutres. Nous avons également effectué une analyse descriptive de l'effet des paramètres dimensionnels sur l'amplitude de la déflexion et sur les fréquences de résonance des unimorphes. Ensuite, dans le but d'augmenter leur plage de déflexion et d'avoir de hautes fréquences de résonance tout en réduisant les dimensions des structures, nous avons effectué un dimensionnement de ces poutres. Deux problèmes de dimensionnement des unimorphes piézoélectriques ont été présentés. L'outil du calcul par intervalles a été utilisé pour résoudre ces problèmes et déterminer les dimensions possibles qu'on peut donner aux unimorphes afin de satisfaire un cahier des charges. Enfin, quelques poutres unimorphes ont été fabriquées et testées expérimentalement. Les résultats expérimentaux obtenus ont montré la satisfaction du cahier des charges.



## Chapitre 4

# Commande en position par intervalles des poutres piézoélectriques

### 4.1 Introduction

Les poutres piézoélectriques sont fréquemment utilisées dans la réalisation des systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage. Ces poutres piézoélectriques sont caractérisées par un comportement non-linéaire (hystérésis et dérive) et par leur sensibilité aux conditions environnementales (évolution de la température ambiante, vibrations, etc.). De plus, dans la commande des systèmes de préhension, on a généralement besoin de changer les actionneurs piézoélectriques. Or, chaque changement d'actionneur est accompagné par un changement du comportement du système, car la différence sur leurs dimensions engendre une variation non-négligeable sur les paramètres du modèle. Pour la commande du système, une solution consisterait à effectuer une identification et une synthèse de correcteur à chaque changement de poutre, mais ceci n'est pas souhaitable dans la pratique. Il est souhaitable d'avoir un seul correcteur capable de maintenir les performances pour plusieurs poutres.

Les approches habituelles de commande robuste  $H_\infty$ ,  $\mu$ -synthèse, etc, sont souvent utilisées pour compenser le comportement incertain des poutres piézoélectriques. Ces approches ont prouvé leur efficacité dans plusieurs applications (les systèmes SISO et MIMO). Cependant, ces techniques produisent souvent des correcteurs d'ordre relativement élevé (supérieur à l'ordre du système lui même). Ces derniers sont coûteux en calcul et ne sont pas adaptés aux micro-systèmes embarqués [Rak06b]. L'utilisation des méthodes de réduction d'ordre peut résoudre ce problème. Dans le cas des poutres piézoélectriques, cette réduction d'ordre est souvent accompagnée d'une dégradation des performances du système corrigé. Plus récemment, de nouvelles techniques de synthèse de lois de commande robuste  $H_\infty$  avec contrainte d'ordre ont été apparues [Apk06]. Dans ces travaux, on propose d'utiliser une autre méthode de synthèse de correcteur basée sur l'utilisation de l'analyse par intervalles. L'analyse par intervalles permet de borner

les variations des paramètres du modèle des poutres piézoélectriques de façon naturelle et plus simple. Le modèle final est donc décrit par un transfert dont les paramètres sont des intervalles. La synthèse du correcteur consiste ensuite à combiner l'arithmétique des intervalles avec une méthode linéaire de commande. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet à l'utilisateur de choisir l'ordre et la structure du correcteur afin de sélectionner des correcteurs d'ordre suffisamment réduit.

Les techniques du calcul par intervalles ont été appliquées dans le domaine de l'automatique en particulier pour l'estimation garantie, l'étude de stabilité et la conception des lois de commande. Le problème d'estimation garantie de paramètres en présence des incertitudes de modèle a été étudié dans [Bra07] [Jau00] [Jau93]. L'analyse de stabilité avec un correcteur donné a été présentée dans [Jau01] [Wal94] [Kha79]. Quant à la conception de correcteur, [Sma02] a proposé une approche dans l'espace d'état pour synthétiser un correcteur qui assure la stabilité d'un système intervalle. Par ailleurs, la synthèse d'un correcteur PID assurant des performances robustes a été abordée dans [Bon04]. Néanmoins, son application numérique devient très délicate pour des systèmes d'ordre élevé (numériquement, la méthode est limitée pour des modèles du second ordre). *Chen et Wang* [Che00] ont développé une méthode de conception d'une loi de commande robuste pour un système intervalle en utilisant deux correcteurs : un correcteur robuste stabilisant le système bouclé et un pré-filtre utilisé pour assurer les performances souhaitées. Les auteurs dans [Li09] ont suggéré un algorithme de commande d'un système intervalle basé sur la prédiction qui a été efficacement appliqué à un procédé de soudage.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la commande en déflexion des poutres piézoélectriques. La première partie sera consacrée à la modélisation du transfert tension-déflexion en tenant compte de l'hystérésis. L'inverse de l'opérateur d'hystérésis sera calculé par la suite afin de linéariser le modèle. Puis, nous élaborons un modèle intervalle permettant de décrire le comportement d'une famille de poutres piézoélectriques similaires ayant des longueurs différentes. Ensuite, nous proposons deux méthodes de synthèse de correcteurs basées sur la combinaison de l'analyse par intervalles et d'une théorie linéaire de commande. Ces dernières seront appliquées à deux poutres piézoélectriques de longueur différente. Enfin, nous présentons une comparaison des méthodes de commande proposées avec les approches habituelles de commande robuste  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse afin de montrer la robustesse de chacune vis-à-vis des incertitudes paramétriques dues à une variation sur la longueur des poutres piézoélectriques.

## 4.2 Modèle non-linéaire et linéarisation

Comme cela a été indiqué au [Chapitre 1](#), les poutres piézoélectriques sont caractérisées par leur haute résolution (micro/nanométrique), leur large bande passante (temps de réponse de l'ordre de quelques dizaines de milliseconde) et par la densité de force importante qu'elles offrent. Ces propriétés favorables leur permettent une large utilisation dans les applications de micromanipulation et de micro-assemblage [Cra87]. Cependant, les poutres piézoélectriques sont très sensibles aux conditions environnementales telles que : la température, les vibrations, etc. Ainsi, comme nous avons vu au [Chapitre 3](#), les petites

différences sur les dimensions des poutres piézoélectriques mènent à des modèles dont les paramètres sont complètement différents. De plus, les poutres sont caractérisées par un comportement non-linéaire (l'hystérésis et la dérive). Ces propriétés conduisent à des difficultés réelles tant sur le plan théorique qu'applicatif. Les techniques de modélisation et de commande de ces systèmes doivent être développées afin de réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage. Cependant, une modélisation complète qui prend en compte l'ensemble des phénomènes physiques de ces poutres piézoélectriques est très complexe. Pour cela, on cherche souvent à élaborer un modèle ayant le plus faible degré de complexité. Un tel modèle représentatif est calculé selon l'objectif recherché. Dans cette étude, notre modèle décrivant le comportement des poutres piézoélectriques doit :

- être simple et ne pas compliquer la synthèse de la loi de commande ;
- prendre en compte des phénomènes non-linéaires mis en jeu ;
- mener à une consommation de calcul plus faible.

L'hystérésis influence de façon significative le comportement des poutres piézoélectriques tandis que la dérive est peu influente. Par ailleurs, la dérive peut être prise en compte comme perturbation fictive [Rak06b]. Elle n'est donc pas prise en compte dans le modèle. Dans un premier temps, nous proposons de modéliser l'hystérésis des poutres piézoélectriques. Ensuite, pour pouvoir calculer une loi de commande, une linéarisation du modèle d'hystérésis est nécessaire. Elle sera faite par une compensation de l'hystérésis par une inversion de son modèle.

Nous avons utilisé des poutres unimorphes dont les dimensions sont calculées en effectuant un dimensionnement comme présenté au chapitre précédent. Leurs dimensions obtenues sont  $L \times w \times h = 18 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 0.45 \text{ mm}$ . Les épaisseurs des matériaux constituant leurs couches piézoélectrique et passive sont respectivement  $h_p = 250 \text{ }\mu\text{m}$  et  $h_{mp} = 200 \text{ }\mu\text{m}$  comme indiquée sur la Figure 4.1. La couche piézoélectrique est faite de PZT-PIC151 tandis que la couche passive est faite de Cuivre.

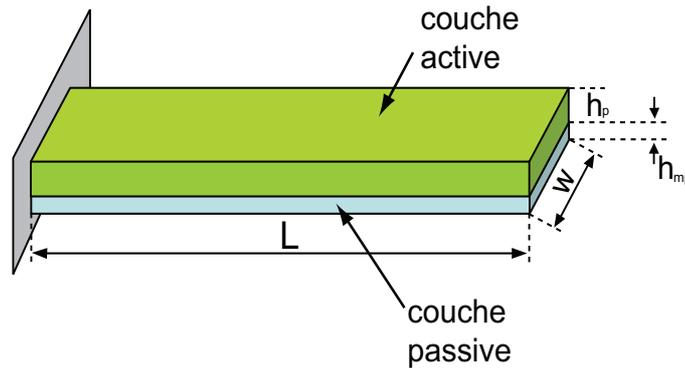


FIGURE 4.1 – Dimensions d'une poutre piézoélectrique unimorphe.

### 4.2.1 Modélisation de l'hystérésis

D'après les études menées par les travaux [May91b] [Rak06b], le comportement statique des poutres piézoélectriques présente un hystérésis statique dont la forme change en fonction de la fréquence ou du taux du signal d'alimentation  $U$ . Un tel hystérésis s'appelle hystérésis dynamique (rate-dependent hystérésis). Il a été montré dans [Rak06b] qu'un hystérésis dynamique  $H_d(U)$  modélisant le comportement des poutres piézoélectriques est équivalent à la mise en série d'un opérateur d'hystérésis statique  $H_s(U)$ <sup>1</sup> et d'une partie dynamique  $D(p)$  (opérateur linéaire où  $p$  est la variable de *Laplace*) comme indiqué sur la Figure 4.2.

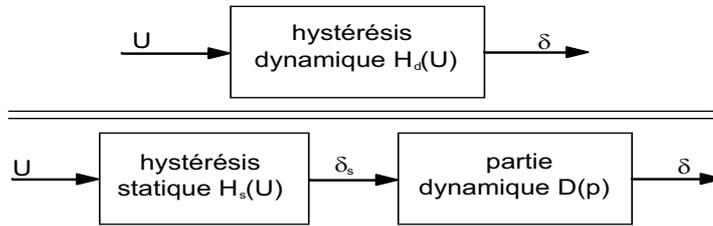


FIGURE 4.2 – Représentation de l'hystérésis dynamique  $H_d(U)$  par la mise en série d'un hystérésis  $H_s(U)$  et d'une partie dynamique  $D(p)$  linéaire.

#### 4.2.1.1 Modélisation de l'hystérésis statique

Il existe de nombreux modèles décrivant l'hystérésis des poutres piézoélectriques, parmi lesquels, on trouve les modèles basés sur l'opérateur de *Preisach* [Dub05] [May91a] [Mra02] ou de *Prandtl-Ishlinskii* [Tan06] [Rak10a] et les modèles utilisant la notion de '*tuning voltage*' tel que le modèle de *Bouc-Wen* [Bou67] [Wen76] [Rak11a]. Les approches basées sur l'opérateur de *Preisach* ou de *Prandtl-Ishlinskii* permettent une modélisation précise de l'hystérésis. Cependant, la complexité du modèle hystérétique, du calcul du compensateur et de son implémentation limitent l'utilisation de ces approches. C'est pourquoi, on s'intéresse ici à l'approche utilisant le modèle de *Bouc-Wen* à cause de son intérêt en terme de simplicité du calcul et d'implémentation.

Le modèle statique de *Bouc-Wen* adapté aux poutres piézoélectriques s'exprime par les relations suivantes [Ha05] [Lin06] :

$$\begin{cases} \delta_s(t) = d_p U(t) - h(t) & \delta_s(t_0) = \delta_{s_0} \\ \frac{dh}{dt} = d_p A_{bw} \frac{dU}{dt} - B_{bw} \left| \frac{dU}{dt} \right| h - C_{bw} \frac{dU}{dt} |h| & h(t_0) = h_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où les paramètres  $A_{bw}$ ,  $B_{bw}$  et  $C_{bw}$  déterminent la forme de l'hystérésis.  $\delta_s$ <sup>2</sup> est la déflexion résultante suite à l'application d'une tension électrique  $U$ .  $h$  est une variable

1. Hystérésis modélisant le comportement statique.  
2.  $s$  en indice désigne la déflexion statique.

interne de l'hystérésis. Le coefficient  $d_p > 0$  dépend du gain statique de la poutre piézoélectrique et est donc en fonction des dimensions géométriques de la poutre (modèle statique tension-déflexion).

Notons que dans ce chapitre, nous utilisons des poutres piézoélectriques ayant des longueurs différentes. La valeur de  $d_p$  correspondante à ces dernières n'est donc pas la même car un changement de longueur engendre une variation du gain  $d_p$  (voir [Chapitre 3](#)). Dans ce cas, il n'est pas possible de linéariser directement le modèle (4.1) à cause de l'incertitude sur  $d_p$ . On propose alors d'isoler  $d_p$  de l'équation d'hystérésis en utilisant le changement de variable suivant :

$$h(t) = d_p z(t) \quad (4.2)$$

Après avoir remplacé  $h(t)$ , les relations (4.1) deviennent :

$$\begin{cases} \delta_s(t) = d_p (U(t) - z(t)) & \delta_s(t_0) = \delta_{s_0} \\ \frac{dz}{dt} = A_{bw} \frac{dU}{dt} - B_{bw} \left| \frac{dU}{dt} \right| z - C_{bw} \frac{dU}{dt} |z| & z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $z(t)$  est la nouvelle variable interne de l'hystérésis. Les paramètres  $A_{bw}$ ,  $B_{bw}$  et  $C_{bw}$  déterminent la forme d'hystérésis tandis que  $d_p$  définit l'amplitude de la déflexion et est fonction de la longueur des poutres piézoélectriques utilisées.

Cette dernière description (4.3) de l'hystérésis statique est utile pour la linéarisation du modèle. Elle consiste à mettre en série le gain  $d_p$  et la partie décrivant la forme d'hystérésis comme indiquée sur la [Figure 4.3](#). Dans la [Figure 4.3](#),  $H(U)$  est un opérateur non-linéaire caractérisant l'équation différentielle non-linéaire de (4.3).

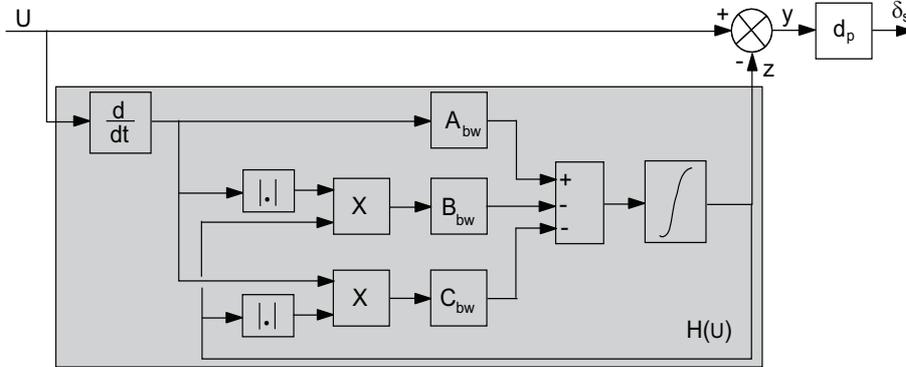


FIGURE 4.3 – Schéma simulink correspondant au modèle d'hystérésis statique.

#### 4.2.1.2 Identification du modèle d'hystérésis statique

Notre objectif à ce stade, est d'identifier et de valider le modèle (4.3) caractérisant le comportement hystérétique statique des poutres piézoélectriques. L'identification ainsi

que la validation sont données de manière expérimentale en utilisant deux poutres unimorphes de longueurs différentes  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$ . Ces dernières seront utilisées le long de ce chapitre.

Dans un premier temps, une tension sinusoïdale  $U$  d'amplitude  $40 \text{ V}$  est appliquée aux deux poutres piézoélectriques. Cette amplitude correspond à la plage de déflexion qui est maximale pour l'utilisation. Comme nous étudions le modèle statique, la fréquence doit être assez faible  $f = 2 \text{ Hz}$ . La Figure 4.4 illustre les déflexions expérimentales correspondantes aux deux poutres utilisées en fonction du signal d'entrée appliqué  $U$ .

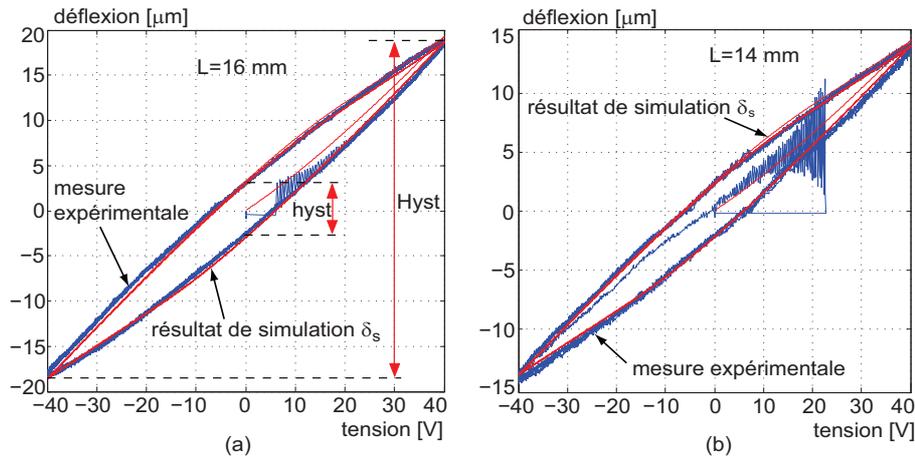


FIGURE 4.4 – a : comparaison des hystérésis statique théorique et expérimental de la poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : comparaison des hystérésis statique théorique et expérimental de la poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

L'hystérésis que présentent les deux poutres utilisées est non-négligeable. Il peut être exprimé en pourcentage comme suit :

$$H\% = 100 \frac{Hyst}{hys} \approx 17.56\% \quad (4.4)$$

où  $hys$  et  $Hyst$  sont l'écart entre les courbes d'aller et de retour à l'origine  $0 \text{ V}$  et l'étendue de mesure de la sortie (déflexion) respectivement.

L'identification des différents paramètres du modèle (4.3) se fait expérimentalement en utilisant les résultats expérimentaux tracés sur la Figure 4.4. De nombreuses études ont été faites pour faciliter la recherche des paramètres du modèle de *Bouc-Wen* [Bab81]

[Erl04] [Won94a] [Won94b]. En utilisant la méthode des moindres carrés, les valeurs optimales des paramètres  $d_p$ ,  $A_{bw}$ ,  $B_{bw}$  et  $C_{bw}$  obtenues sont données par :

$$\begin{aligned} \text{Poutre } (L = 16 \text{ mm}) & \left\{ \begin{array}{l} d_p = 0.6 \text{ } \mu\text{m}/\text{V} \\ A_{bw} = 0.4 \text{ } \mu\text{m}/\text{V} \\ B_{bw} = C_{bw} = 0.02 \text{ V}^{-1} \end{array} \right. \\ \text{Poutre } (L = 14 \text{ mm}) & \left\{ \begin{array}{l} d_p = 0.45 \text{ } \mu\text{m}/\text{V} \\ A_{bw} = 0.4 \text{ } \mu\text{m}/\text{V} \\ B_{bw} = C_{bw} = 0.02 \text{ V}^{-1} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Après avoir simulé le modèle (4.3) en utilisant les paramètres de chaque poutre, nous traçons les résultats obtenus sur la Figure 4.4. On constate que les courbes expérimentales et de simulation sont pratiquement superposées. D'après (4.5), les valeurs des paramètres  $A_{bw}$ ,  $B_{bw}$  et  $C_{bw}$  sont indépendantes de la longueur des poutres piézoélectriques utilisées.

#### 4.2.2 Linéarisation du modèle d'hystérésis

Pour pouvoir appliquer ensuite les approches de commande linéaire et avoir un correcteur d'ordre faible, il est nécessaire de linéariser le modèle d'hystérésis statique (4.3). La linéarisation du modèle d'hystérésis d'une poutre piézoélectrique consiste à placer un compensateur devant le système comme indiquée sur la Figure 4.5. Ce dernier peut être obtenu en inversant le modèle d'hystérésis (4.3). La linéarité du système final ainsi obtenu dépend donc de l'exactitude du modèle d'hystérésis.

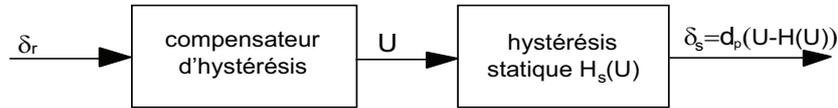


FIGURE 4.5 – Compensation d'hystérésis statique.

Notre objectif dans cette partie est de linéariser le modèle d'hystérésis correspondant aux deux poutres piézoélectriques précédentes. Comme le paramètre  $d_p$  prend deux valeurs différentes (voir 4.5), notre compensateur doit être indépendant de  $d_p$ . Pour cela, on cherche à assurer la linéarité de la relation qui lie la sortie  $\delta_s$  au signal d'entrée  $\delta_r$  (voir Figure 4.5), telle que :

$$\delta_s = d_p \delta_r \quad (4.6)$$

D'après les travaux présentés dans [Rak11a], la sortie  $U$  du compensateur peut être exprimée comme suit :

$$U = \delta_r + H(U) \quad (4.7)$$

Le calcul du compensateur (4.7) ne nécessite aucune opération d'inversion ou d'autres calculs supplémentaires car  $H(U)$  est déjà connu durant la modélisation de l'hystérésis

(voir Figure 4.3). La structure de la compensation d'hystérésis utilisant la relation (4.7) est illustrée sur la Figure 4.6.

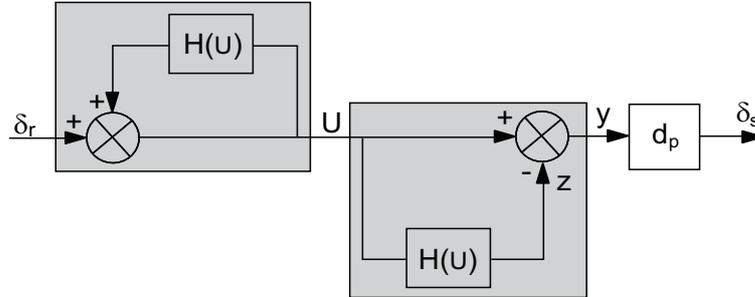


FIGURE 4.6 – Linéarisation par inversion d'opérateur d'hystérésis, ( $\delta_s = d_p \delta_r$ ).

Les mêmes poutres piézoélectriques unimorphes utilisées précédemment sont considérées pour valider la compensation d'hystérésis. Cette validation est basée sur la structure du compensateur donnée par la Figure 4.6, l'opérateur non linéaire  $H(U)$  et les valeurs identifiées (4.5). Après l'application d'une entrée de référence sinusoïdale  $\delta_r$  d'amplitude  $40\text{ V}$  et de fréquence  $2\text{ Hz}$ , on obtient les réponses expérimentales ( $\delta_s = f(\delta_r)$ ) représentées sur les Figures 4.7-a et 4.7-b correspondant respectivement aux poutres utilisées de longueur  $L = 16\text{ mm}$  et  $L = 14\text{ mm}$ .

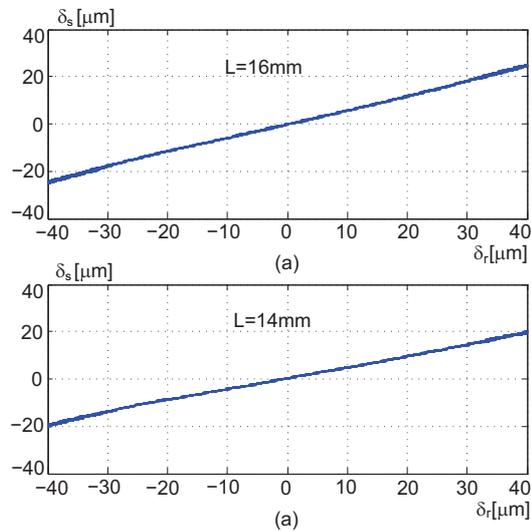


FIGURE 4.7 – Résultats expérimentaux obtenus après linéarisation.

D'après la Figure 4.7, les hystérésis initialement d'environ 17.56% (voir Figure 4.4) ont été réduits de façon significative en utilisant le compensateur (4.7). Les pentes des deux droites de la Figure 4.7 sont  $0.62\ \mu\text{m}/\text{V}$  et  $0.5\ \mu\text{m}/\text{V}$  correspondantes aux deux poutres de longueur  $L = 16\text{ mm}$  et  $L = 14\text{ mm}$  respectivement.

### 4.2.3 Modélisation de la partie dynamique

Il a été vérifié que la mise en série d'une partie dynamique  $D(p)$  ( $D(p=0) = 1$ ) et du modèle d'hystérésis statique (4.3) permet de décrire le comportement hystérétique des poutres piézoélectriques [Rak06b]. La partie dynamique  $D(p)$  représente la partie transitoire des réponses en échelon des poutres piézoélectriques. En effet, lorsqu'une tension rectangulaire d'amplitude et de fréquence quelconques (fixes ou variables) est appliquée à une poutre piézoélectrique, les parties transitoires sont similaires (la dynamique  $D(p)$  est invariante) [Rak06b]. Compte tenu de l'invariance des parties transitoires,  $D(p)$  peut être identifiée à partir de n'importe quel échelon appliqué à la poutre. Néanmoins, cette invariance de la dynamique  $D(p)$  est valable uniquement pour des dimensions géométriques de la poutre données. En effet, dès que les dimensions de la poutre changent, la dynamique change aussi. Cela a été abordé au Chapitre 3 où une variation des géométries d'une poutre piézoélectrique permet de modifier sa fréquence de résonance.

Nous vérifions cette influence des dimensions géométriques sur la dynamique  $D(p)$  à travers un exemple. Pour cela, on applique un échelon d'amplitude 40 V aux deux poutres piézoélectriques précédentes de longueurs différentes ( $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$ ). On s'intéresse dans cette étude à la fréquence de résonance du premier mode. Pour cela, on utilise une fonction de transfert d'ordre deux pour  $D(p)$ . Après identification sous Matlab (System Identification Toolbox) en utilisant la méthode d'erreur de sortie (Output error), on obtient les deux transferts  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$  correspondants aux cas de  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$  respectivement.

$$\begin{aligned}
 D_1(p) &= \frac{3.533 \times 10^{-8}p^2 + 2.152 \times 10^{-4}p + 1}{3.374 \times 10^{-8}p^2 + 8.171 \times 10^{-6}p + 1} \\
 D_2(p) &= \frac{3.336 \times 10^{-8}p^2 + 1.679 \times 10^{-4}p + 1}{2.119 \times 10^{-8}p^2 + 4.607 \times 10^{-6}p + 1}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

La Figure 4.8 présente les réponses expérimentales à un échelon comparées aux résultats de simulation dans les deux cas  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$ . Après ajustement des gains statiques des deux transferts  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$ , on remarque que les sorties simulées coïncident avec les mesures expérimentales de façon satisfaisante.

## 4.3 Modèle intervalle des poutres piézoélectriques

D'après l'étude menée au Chapitre 3, les dimensions géométriques des poutres piézoélectriques influencent leurs modèles statique et dynamique. Ceci a également été vu dans la section précédente sur les valeurs du gain statique  $d_p$  et les parties dynamiques  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$  des deux poutres de longueurs différentes. Une meilleure façon pour représenter la variation des comportements statique et dynamique des poutres piézoélectriques est d'utiliser les techniques du calcul par intervalles. Nous proposons d'élaborer un modèle intervalle décrivant le comportement de toute poutre piézoélectrique dont la longueur est comprise entre deux valeurs. Nous prendrons 14 mm et 16 mm pour ces valeurs afin d'illustrer notre approche.

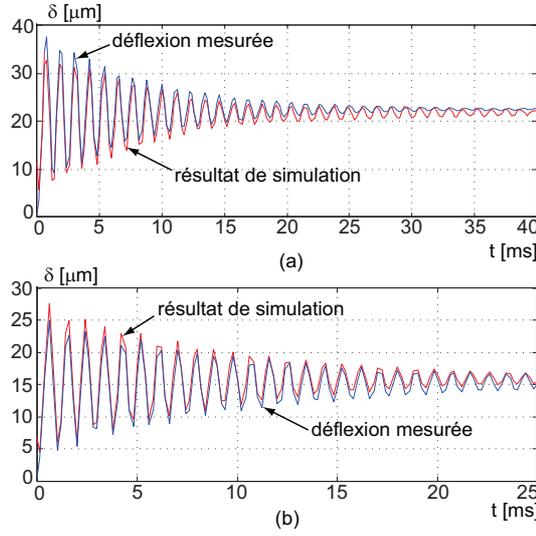


FIGURE 4.8 – Comparaison des résultats expérimentaux et de simulation. a : résultats avec la poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

### 4.3.1 Modèle intervalle statique

Nous avons vu à la section précédente que le modèle statique linéaire d'une poutre piézoélectrique est donné par un gain  $d_p$  (voir 4.6). En fait, ce gain varie en fonction des caractéristiques dimensionnelles de la poutre piézoélectrique. D'après l'étude du Chapitre 3, on peut définir le gain statique  $d_p$  d'un ensemble de poutres piézoélectriques ayant des dimensions géométriques différentes entre une borne inférieure  $\underline{d}_p$  et une borne supérieure  $\bar{d}_p$ .  $\underline{d}_p$  correspond au gain statique de la poutre engendrant la plus petite déflexion tandis que  $\bar{d}_p$  est le gain statique de la poutre qui engendre la plus grande déflexion. Les deux bornes  $\underline{d}_p$  et  $\bar{d}_p$  définissent l'intervalle du gain statique  $[d_p]$ . La relation linéaire (4.6) devient donc :

$$\delta_s = [d_p]U_r \quad (4.9)$$

tel que :  $[d_p] = [\underline{d}_p, \bar{d}_p]$ .

Dans le cas d'un ensemble de poutres piézoélectriques unimorphes ayant des longueurs entre  $14 \text{ mm}$  et  $16 \text{ mm}$ , les valeurs des deux bornes  $\underline{d}_p$  et  $\bar{d}_p$  sont déterminées à partir des relations (4.5). Par la suite, le gain statique intervalle sera noté  $[K]$ . Il est défini comme suit :

$$[K] = [d_p] = [0.45, 0.66] \text{ } \mu\text{m/V} \quad (4.10)$$

L'intervalle  $[K]$  (4.10) correspond au gain statique de toute poutre composée du même matériau et ayant une longueur  $L$ , telle que  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$ .

### 4.3.2 Modèle intervalle dynamique

Quant à la dynamique des poutres piézoélectriques ayant des dimensions géométriques différentes, les parties transitoires peuvent être décrites par un modèle dynamique intervalle  $[D](p)$  incluant toutes les fonctions de transfert  $D(p)$  possibles. Ce modèle dynamique intervalle  $[D](p)$  est défini par une paire de fonctions de transfert  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$  dont les coefficients des transferts  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$  définissent les bornes inférieure et supérieure du modèle intervalle. Dans notre étude,  $D_1(p)$  et  $D_2(p)$  décrivent les parties dynamiques des deux poutres de longueur  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$  respectivement.

Considérons les relations (4.8), on peut réécrire les deux modèles identifiés  $D_i(p)$  ( $i = 1, 2$ ) comme suit :

$$D_i(p) = \frac{b_{2i}p^2 + b_{1i}p + 1}{a_{2i}p^2 + a_{1i}p + 1} \quad (4.11)$$

tels que les coefficients des deux fonctions de transfert sont donnés selon les relations (4.8).

Le modèle intervalle dynamique  $[D](p)$  peut être dérivé à partir des deux modèles à paramètres scalaires  $D_i(p)$  ( $i = 1, 2$ ) en considérant chaque paramètre de  $D_1(p)$  et le paramètre correspondant dans  $D_2(p)$  comme des bornes inférieure et supérieure du paramètre intervalle dans  $[D](p)$ . Ainsi,  $[D](p)$  s'écrit comme suit :

$$[D](p) = \frac{[b_2]p^2 + [b_1]p + 1}{[a_2]p^2 + [a_1]p + 1} \quad (4.12)$$

tels que les paramètres intervalles  $[b_2]$ ,  $[b_1]$ ,  $[a_1]$  et  $[a_2]$  sont indépendants et sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} [b_2] &= [\min(b_{21}, b_{22}), \max(b_{21}, b_{22})] \\ [b_1] &= [\min(b_{11}, b_{12}), \max(b_{11}, b_{12})] \\ [a_2] &= [\min(a_{21}, a_{22}), \max(a_{21}, a_{22})] \\ [a_1] &= [\min(a_{11}, a_{12}), \max(a_{11}, a_{12})] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Après l'application numérique, on obtient  $[D](p)$  :

$$[D](p) = \frac{[3.336, 3.533] \times 10^{-8}p^2 + [1.679, 2.152] \times 10^{-4}p + 1}{[2.119, 3.374] \times 10^{-8}p^2 + [4.607, 8.171] \times 10^{-6}p + 1} \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Écriture du modèle intervalle des poutres piézoélectriques

Partant du gain statique  $[K]$  défini dans (4.10) et du modèle intervalle dynamique (4.14), nous dérivons le modèle intervalle linéarisé qui représente une famille de poutres piézoélectriques ayant une longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$  comme suit :

$$\delta = [K][D](p)U_r \quad (4.15)$$

Après avoir remplacé les termes  $[K]$  et  $[D](p)$ , notre modèle intervalle  $[G_\delta](p)$  s'écrit :

$$[G_\delta](p) = [0.45, 0.66] \frac{[3.336, 3.533] \times 10^{-8} p^2 + [1.679, 2.152] \times 10^{-4} p + 1}{[2.119, 3.374] \times 10^{-8} p^2 + [4.607, 8.171] \times 10^{-6} p + 1} \quad (4.16)$$

Notre objectif est d'avoir une marge de robustesse plus grande. Pour cela, on propose d'élargir les paramètres intervalles du modèle  $[G](p)$  (4.16). Ceci permet également d'être sûr de contenir réellement les modèles des poutres étudiées. Cependant, lorsque la taille des intervalles dans le modèle est trop large, il est difficile de trouver un correcteur qui assure les performances de la boucle fermée, voire qui assure la stabilité. Un compromis est donc à faire. Après quelques essais, on propose d'élargir chaque intervalle des paramètres du modèle (4.16) de 10%. 10% représente la valeur presque maximale permise dans cette application. Enfin, le modèle intervalle étendu que nous utilisons pour la synthèse de la loi de commande est donné par la formule suivante :

$$[G_\delta](p) = [0.439, 0.67] \frac{[3.326, 3.542] \times 10^{-8} p^2 + [1.655, 2.175] \times 10^{-4} p + 1}{[2.056, 3.436] \times 10^{-8} p^2 + [4.428, 8.349] \times 10^{-6} p + 1} \quad (4.17)$$

Ce modèle (4.17) a été calculé en supposant une variation sur la longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$  des poutres piézoélectriques. La Figure 4.9 récapitule les étapes utilisées pour l'établissement de ce modèle (4.17).

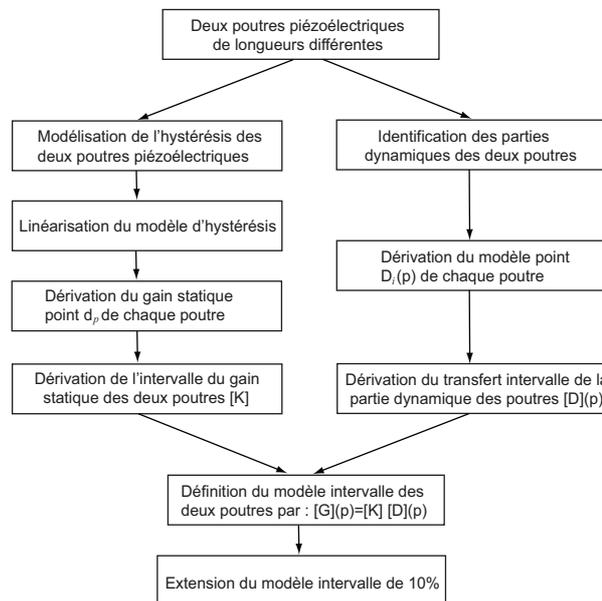


FIGURE 4.9 – Dérivation d'un modèle intervalle de deux poutres piézoélectriques de longueurs différentes.

Notons qu'il est possible de dériver un modèle intervalle pour un ensemble de poutres piézoélectriques ayant des dimensions différentes (longueur, largeur et épaisseur) en suivant les mêmes étapes.

Le schéma du système à commander est représenté par la [Figure 4.10](#).

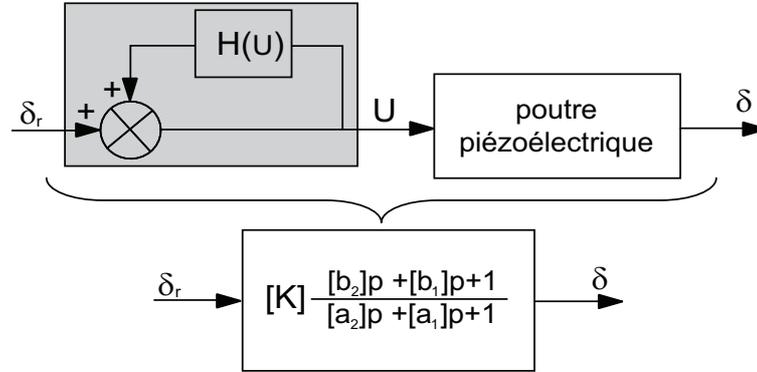


FIGURE 4.10 – Système linéarisé à commander  $[G_\delta](p) = [K][D](p)$ .

## 4.4 Commande en déflexion des poutres piézoélectriques

L'objectif de cette section est de synthétiser un contrôleur pour la déflexion des poutres piézoélectriques ayant des modèles à l'intérieur du modèle intervalle (4.17). La dérivation du contrôleur est basée sur la combinaison d'une méthode de commande linéaire avec l'outil des intervalles. Nous proposons deux méthodes de commande par intervalles.

Ensuite, ces dernières seront comparées aux méthodes habituelles de synthèse robuste  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse. Cette comparaison se fait dans le cadre d'un exemple, c'est à dire la commande de poutres ayant une longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$ . Considérons d'abord un cahier des charges pour la synthèse du contrôleur.

### 4.4.1 Cahier des charges

Généralement, les systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage nécessitent la génération de mouvements très précis. En effet, la précision de positionnement doivent être micrométrique (voir submicrométrique). De plus, le comportement des poutres piézoélectriques utilisées dans les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage doit être sans dépassement (ou avec un dépassement très réduit). Cela permet d'assurer une meilleure qualité des tâches. Enfin, le contrôleur synthétisé devrait avoir un ordre suffisamment réduit. Le cahier des charges choisi pour la synthèse est donc comme suit :

- le dépassement initial d'environ 65% doit être supprimé  $D\% = 0$  ;
- le temps de réponse doit être inférieur ou égal à 8 ms, ( $tr_{5\%} \leq 8 \text{ ms}$ ) ;
- l'erreur statique doit être inférieure ou égale à 1%, ( $|\epsilon| \leq 1\%$ ) ;
- enfin, le correcteur synthétisé doit être d'ordre relativement faible.

Prenant en compte la bande passante des poutres piézoélectriques et le temps de réponse voulu, nous choisissons comme période d'échantillonnage  $T_s = 0.2 \text{ ms}$ .

## 4.4.2 Méthode de commande par inclusion des fonctions de transfert

### 4.4.2.1 Principe

Soit un système intervalle monovariante  $[G](p, [a], [b])$  commandé par un correcteur  $[C](p)$  comme indiqué sur la [Figure 4.11](#). Ce correcteur doit assurer des performances pour le système bouclé quelque soit la variation des paramètres  $a_i$  et  $b_j$  d'un système  $G(p)$  dans leurs intervalles  $[a_i]$  et  $[b_j]$  respectivement. On note par  $[H_{cl}](p, [q], [w])$  la fonction de transfert de la bouclé fermée.

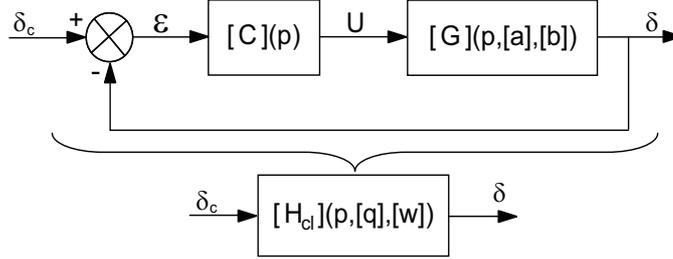


FIGURE 4.11 – Système en boucle fermée  $[H_{cl}](p, [q], [w])$ .

Dans la suite, la fonction de transfert  $[G](p, [a], [b])$  est donnée par :

$$[G](p, [a], [b]) = \frac{1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j}{\sum_{i=0}^n [a_i]p^i} \quad (4.18)$$

telles que  $[a] = [[a_0], \dots, [a_n]]$ ,  $[b] = [[b_1], \dots, [b_m]]$  et  $m \leq n$ .

Notons qu'il est toujours possible de se ramener à cette forme de représentation.

De même, considérons un correcteur  $[C](p, [\theta])$  d'ordre préalablement connu ( $l \leq k$ ) comme suit :

$$[C](p, [\theta]) = \frac{\sum_{j=0}^l [d_j]p^j}{\sum_{i=1}^k [c_i]p^i} \quad (4.19)$$

où  $[\theta] = [[c], [d]]$  est un vecteur intervalle (ou pavé) contenant les paramètres du contrôleur. Comme la structure du correcteur peut être choisie par l'utilisateur, il est toujours possible d'imposer l'ordre du correcteur en modifiant  $l$  et  $k$ .

Partant du modèle intervalle  $[G](p, [a], [b])$  (4.18) et le transfert du contrôleur  $[C](p, [\theta])$  (4.19), le modèle de la boucle fermée s'écrit :

$$[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta]) = \frac{1}{\frac{1}{[C](p, [\theta])[G](p, [a], [b])} + 1} \quad (4.20)$$

Notons que la forme d'écriture de  $[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta])$  donnée par (4.20) a été choisie afin d'éviter la multi-occurrence des transferts  $[G](p, [a], [b])$  et  $[C](p, [\theta])$ . Après avoir remplacé  $[G](p, [a], [b])$  et  $[C](p, [\theta])$ , on obtient :

$$[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta]) = \frac{\left(1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j\right) \sum_{j=0}^l [d_j]p^j}{\sum_{i=0}^n [a_i]p^i \sum_{j=1}^k [c_j]p^j + \left(1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j\right) \sum_{j=0}^l [d_j]p^j} \quad (4.21)$$

Après développement de (4.21), le modèle  $[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta])$  peut se réécrire comme suit :

$$[H_{cl}](p, [h], [f]) = \frac{\sum_{j=0}^e [f_j]s^j}{\sum_{i=0}^r [h_i]s^i} \quad (4.22)$$

où  $e = m + l$  et  $r = n + k$ . Les pavés  $[f]$  et  $[h]$  sont fonction des pavés du système  $[a]$ ,  $[b]$  et des pavés du correcteur  $[c]$  et  $[d]$ . En particulier, les deux paramètres intervalles  $[f_0]$  et  $[h_0]$  dans (4.22) dépendent uniquement de l'intervalle  $[d_0]$  du correcteur. Durant l'implémentation du correcteur, les paramètres  $[c]$  et  $[d]$  doivent être choisis scalaires. Ceci nous a permis d'écrire le transfert en boucle fermée sous la forme suivante en divisant le numérateur et le dénominateur de  $[H_{cl}](p, [h], [f])$  par  $[d_0] = d_0 \neq 0$  :

$$[H_{cl}](p, [q], [w]) = \frac{1 + \sum_{j=1}^e [w_j]s^j}{1 + \sum_{i=1}^r [q_i]s^i} \quad (4.23)$$

tels que :  $[q_i] = \frac{[h_i]}{[d_0]}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) et  $[w_j] = \frac{[f_j]}{[d_0]}$  ( $j = 1, \dots, e$ ).

L'objectif principal consiste à calculer l'ensemble des paramètres du contrôleur (4.19) qui assure un cahier des charges donné. En d'autres termes, les performances réalisées par un tel correcteur doivent appartenir à un ensemble de performances souhaitées. En fait, les performances d'un cahier des charges peuvent être traduites par un modèle intervalle, appelé modèle intervalle de référence et noté  $[H]$ . D'après le [Théorème 2.6](#) présenté au [Chapitre 2](#), ceci se traduit par  $[H_{cl}](p, [q], [w]) \subseteq [H](p)$ .

Soit  $\Theta$  l'ensemble des paramètres du correcteur assurant  $[H_{cl}](p, [q], [w]) \subseteq [H](p)$ , chercher les valeur admissibles de  $\theta$  telles que :

$$\Theta := \{\theta \in \mathbf{D} \text{ t.q. } [H_{cl}](p, \theta) \subseteq [H](p)\} \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{D}$  est le domaine de définition de  $\theta$  (ou domaine de recherche *a priori*).

L'objectif est donc de déterminer cet ensemble  $\Theta$ . Cependant, afin de pouvoir appliquer l'inclusion paramètre par paramètre, le modèle de référence  $[H]$  doit avoir la même structure que le transfert  $[H_{cl}]$ . Considérons le modèle intervalle de référence suivant :

$$[H](p, [s], [x]) = \frac{1 + \sum_{j=1}^e [x_j] p^j}{1 + \sum_{i=1}^r [s_i] p^i} \quad (4.25)$$

où les boîtes de paramètres intervalles  $[s]$  et  $[x]$  sont connues, et peuvent être dérivées à partir des performances du cahier des charges.

Selon les **Théorèmes 2.5** et **2.6**, si les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} [q_i] &\subseteq [s_i], & \text{for } i = 1, \dots, r \\ [w_j] &\subseteq [x_j], & \text{for } j = 1, \dots, e \end{aligned} \quad (4.26)$$

sont vérifiées, alors l'inclusion  $[H_{cl}] \subseteq [H]$  est satisfaite, et par conséquent les performances de  $[H]$  contiennent les performances de  $[H_{cl}]$ . Dans ce cas, le correcteur calculé  $[C]$  assure effectivement les performances pour n'importe quel système  $G$  à paramètres point (scalaire) appartenant au modèle intervalle  $[G]$ .

Le problème du calcul de l'ensemble  $\Theta$  défini par (4.24) peut être réduit au problème suivant [Kha] :

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbf{D} \mid \begin{array}{l} [q_i](\theta) \subseteq [s_i], \forall i = 1, \dots, n+k \\ [w_j](\theta) \subseteq [x_j], \forall j = 1, \dots, m+l \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

La recherche de l'ensemble des paramètres du contrôleur assurant (4.27) est appelé un problème d'inversion ensembliste qui peut être résolu en utilisant l'algorithme de SIVIA [Jau93] présenté au **Chapitre 2**. Le **Tableau 4.1** présente l'algorithme de SIVIA récursif permettant de résoudre le problème de commande (4.27).

TABLE 4.1 – Algorithme SIVIA permettant la résolution du problème (4.27).

	SIVIA(in : $[q], [w], [s], [x], [\theta], \epsilon$ ; inout : $\underline{\Theta}, \overline{\Theta}$ )
1	if $[[q](\theta), [w](\theta)] \cap [[s], [x]] = \emptyset$ return ;
2	if $[[q](\theta), [w](\theta)] \subset [[s], [x]]$ then $\{\underline{\Theta} := \underline{\Theta} \cup \theta; \overline{\Theta} := \overline{\Theta} \cup \theta\}$ return ;
4	if $width([\theta]) < \epsilon$ then $\{\overline{\Theta} := \overline{\Theta} \cup \theta\}$ ; return ;
5	bisect $[\theta]$ into $L([\theta])$ and $R([\theta])$ ;
6	SIVIA( $[q], [w], [s], [x], L([\theta]), \epsilon; \underline{\Theta}, \overline{\Theta}$ ); SIVIA( $[q], [w], [s], [x], R([\theta]), \epsilon; \underline{\Theta}, \overline{\Theta}$ ).

$\underline{\Theta}$  et  $\overline{\Theta}$  représentent respectivement l'approximation intérieure et extérieure de l'ensemble solution  $\Theta$ .

**Remarque 4.1.** *Le nombre des paramètres inconnus (voir (4.19)) est  $l + k + 1$ , tandis que le nombre d'inclusions est  $r + e$ . Comme  $e = m + l$  et  $r = n + k$ , on peut écrire  $r + e > l + k + 1$ . Il y a en fait plus de contraintes que de variables. Pour cela, l'ensemble solution  $\Theta$  est donné par l'intersection des ensembles solution de chaque inclusion dans (4.27) comme suit :*

$$\Theta = \bigcap_{i=1}^{r+e} (\text{set\_sol})_i \quad (4.28)$$

tel que :  $(\text{set\_sol})_i$  est l'ensemble solution de la  $i^{\text{ème}}$  inclusion.

#### 4.4.2.2 Application à la commande en déflexion des poutres piézoélectriques

Appliquons maintenant cette méthode pour commander la déflexion des poutres piézoélectriques modélisées par un modèle intervalle linéaire (4.17). Rappelons que ce dernier décrit le comportement d'une famille de poutres piézoélectriques et de longueur comprise entre 14 mm et 16 mm. Selon les performances données au § 4.4.1, le correcteur doit annuler l'erreur statique. Pour cela, on considère une structure de correcteur contenant un intégrateur. Nous choisissons une structure *PI* (Proportionnelle Intégrale) pour notre correcteur en raison de son ordre réduit, des propriétés intéressantes de robustesse qu'il offre et de sa grande utilisation dans le monde industriel :

$$[C](p, [K_p], [K_i]) = [K_p] + \frac{[K_i]}{p} \quad (4.29)$$

où  $[K_p]$  et  $[K_i]$  sont respectivement les gains de l'action proportionnelle et de l'action intégrale.

En se basant sur le modèle (4.17) et le correcteur (4.29), le système intervalle en boucle fermée s'écrit :

$$[H_{cl}](p) = \frac{\frac{[K_p][b_2]}{[K_i]}p^3 + \left(\frac{[K_p][b_1]}{[K_i]} + [b_2]\right)p^2 + \left(\frac{[K_p]}{[K_i]} + [b_1]\right)p + 1}{\frac{[K_p][b_2] + [a_2]/[K]}{[K_i]}p^3 + \left(\frac{[K_p][b_1] + [a_1]/[K]}{[K_i]} + [b_2]\right)p^2 + \left(\frac{[K_p] + 1/[K]}{[K_i]} + [b_1]\right)p + 1} \quad (4.30)$$

Le modèle intervalle de référence décrivant le comportement souhaité est dérivé selon le transfert de la boucle fermée (4.30) et les exigences du cahier des charges. Comme le dépassement n'est pas permis (voir la § 4.4.1), une fonction de transfert du premier ordre peut être utilisée pour le modèle intervalle de référence :

$$[H](p, [K_e], [\tau]) = \frac{[K_e]}{[\tau]p + 1} \quad (4.31)$$

où les paramètres intervalles  $[K_e]$  et  $[\tau]$  définissent respectivement l'erreur statique et le temps de réponse, avec :

- $[K_e] = 1 + \varepsilon = [0.99, 1.01]$ ,
- $[\tau] = \frac{[tr_{5\%}]}{3} = [0, 2.66 \text{ ms}]$ .

Cependant, il faudrait que le modèle intervalle de référence ait la même structure que la boucle fermée afin d'appliquer l'inclusion paramètre par paramètre comme requis dans (4.27). Pour cela, ajoutons au modèle (4.31) quelques pôles et zéros loins de l'axe imaginaire :

$$[H](p, [K_e], [\tau]) = \frac{[K_e] \left( \frac{[\tau]}{10} p + 1 \right)^3}{([\tau]p + 1) \cdot \left( \frac{[\tau]}{10} p + 1 \right)^2} \quad (4.32)$$

$[H](p, [K_e], [\tau])$  peut se réécrire sous la forme :

$$[H](p, [K_e], [\tau]) = [K_e] \frac{0.001[\tau]^3 s^3 + 0.03[\tau]^2 s^2 + 0.3[\tau]s + 1}{0.01[\tau]^3 s^3 + 0.21[\tau]^2 s^2 + 1.2[\tau]s + 1} \quad (4.33)$$

Si les paramètres intervalles  $[K_p]$  et  $[K_i]$  vérifient les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{[K_p][b_2]}{[K_i]} &\subseteq 0.001[K_e][\tau]^3 \\ \frac{[K_p][b_1]}{[K_i]} + [b_2] &\subseteq 0.03[K_e][\tau]^2 \\ \frac{[K_p]}{[K_i]} + [b_1] &\subseteq 0.3[K_e][\tau] \\ 1 &\subseteq [K_e] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\frac{[K_p][b_2] + [a_2]/[K]}{[K_i]} \subseteq 0.01[\tau]^3$$

$$\frac{[K_p][b_1] + [a_1]/[K]}{[K_i]} + [b_2] \subseteq 0.21[\tau]^2$$

$$\frac{[K_p] + 1/[K]}{[K_i]} + [b_1] \subseteq 1.2[\tau]$$

alors, le correcteur défini dans (4.29) assure les performances requises (§ 4.4.1) pour le modèle intervalle (4.17).

On s'intéresse ici à la recherche de l'approximation intérieure  $\underline{\Theta}$ . Après l'application de l'algorithme de SIVIA, on obtient le sous pavage représenté sur la Figure 4.12. L'ensemble solution  $\underline{\Theta}$  a été obtenu en utilisant comme espace de recherche initial le pavé  $[K_{p0}] \times [K_{i0}] = [0, 1] \times [0.1, 1000]$  et une précision de calcul  $\epsilon = 0.01$ .

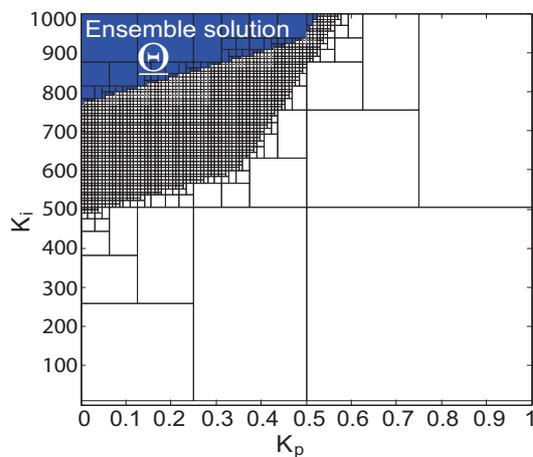


FIGURE 4.12 – Ensemble solution des paramètres du correcteur assurant les performances.

**Remarque 4.2.** Si le problème d'inversion ensembliste n'est pas faisable, c'est à dire  $\underline{\Theta} = \emptyset$ , la boîte initiale (espace de recherche) des paramètres du contrôleur devrait être modifiée (un choix d'une boîte initiale large est possible) et/ou il faudrait modifier la structure (jouer sur l'ordre) du contrôleur et/ou dégrader les exigences du cahier des charges.

Un correcteur intervalle  $[C](p)$  n'est pas directement implémentable. Cependant, tout correcteur point  $C(p) \in [C](p)$  est implémentable et assure les performances. Afin d'implémenter le correcteur  $C(p, K_p, K_i) = C(p)$ , on choisit donc des paramètres  $K_p$  et  $K_i$  quelconque à l'intérieur de l'ensemble  $\underline{\Theta}$ . Dans cette application, on testera deux correcteurs. On choisit :

$$\begin{aligned} C_1(p) &= \frac{0.1p + 900}{p} \\ C_2(p) &= \frac{0.3p + 1000}{p} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Les deux correcteurs (4.35) ont été testés chacun sur chacune des deux poutres piézoélectriques de longueur  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$  utilisées dans la partie modélisation. La Figure 4.13 montre les réponses expérimentales obtenues après l'application d'un échelon de référence de  $40 \mu\text{m}$ . Comme indiqué sur la Figure 4.13, les deux correcteurs ont joué leur rôle et satisfont les performances requises pour la boucle fermée. Les performances expérimentales obtenues avec les deux correcteurs sont résumées dans le Tableau 4.2.

Nous avons également effectué une analyse de suivi de trajectoire avec les deux poutres en utilisant un correcteur ( $C_1(p)$  ou  $C_2(p)$ ). Pour cela, une trajectoire de référence aléatoire est appliquée à l'entrée du système bouclé. L'utilisation du correcteur  $C_1(p)$  permet d'avoir les résultats expérimentaux illustrés sur la Figure 4.24. Comme

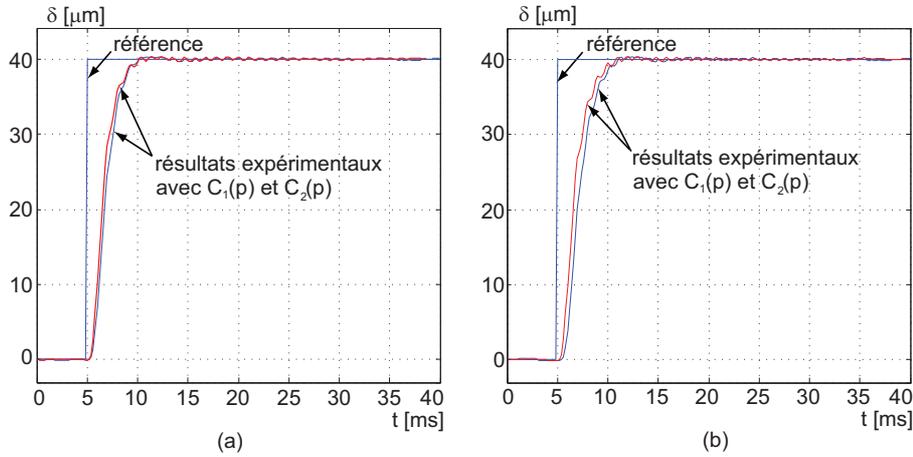


FIGURE 4.13 – Résultats expérimentaux obtenus avec les deux correcteurs (4.35). a : résultats avec la poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

TABLE 4.2 – Performances expérimentales des boucles fermées.

Correcteur	Poutre avec $L = 16 \text{ mm}$			Poutre avec $L = 14 \text{ mm}$		
	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$
$C_1(p)$	$4 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$\approx 4.7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$
$C_2(p)$	$4 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$\approx 4.7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$

montré sur cette Figure 4.24, le signal d'entrée et le signal de sortie sont superposés et les erreurs entre la référence appliquée à l'entrée du système et la déflexion mesurée de chaque poutre sont pratiquement inférieures à  $1.5 \mu\text{m}$  (voir Figure 4.15). Le correcteur  $C_1(p)$  assure un bon suivi de trajectoire pour les deux poutres piézoélectriques utilisées.

#### 4.4.3 Méthode basée sur l'approche $H_\infty$ -standard combinée avec l'analyse par intervalles

Dans cette partie, nous synthétisons un correcteur intervalle mais au lieu d'utiliser le théorème d'inclusion comme la méthode précédente, nous combinons l'approche  $H_\infty$  avec l'analyse par intervalles. Reprenons le schéma de la boucle fermée représenté sur la Figure 4.11, où  $[G](p, [a], [b])$  est défini par le transfert intervalle (4.18). L'objectif principal consiste à synthétiser un correcteur  $[C](p, [\theta])$  (4.19) assurant un critère  $H_\infty$  qui définit les performances souhaitées.

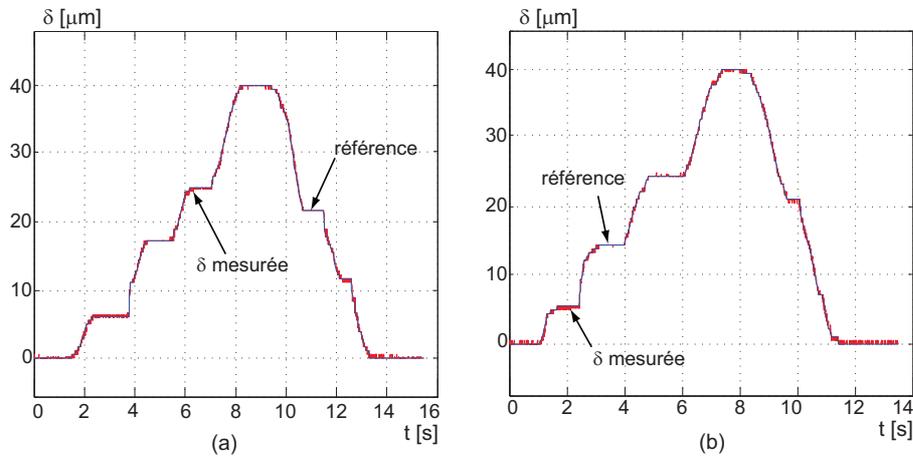


FIGURE 4.14 – Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur  $C_1(p)$ . a : poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

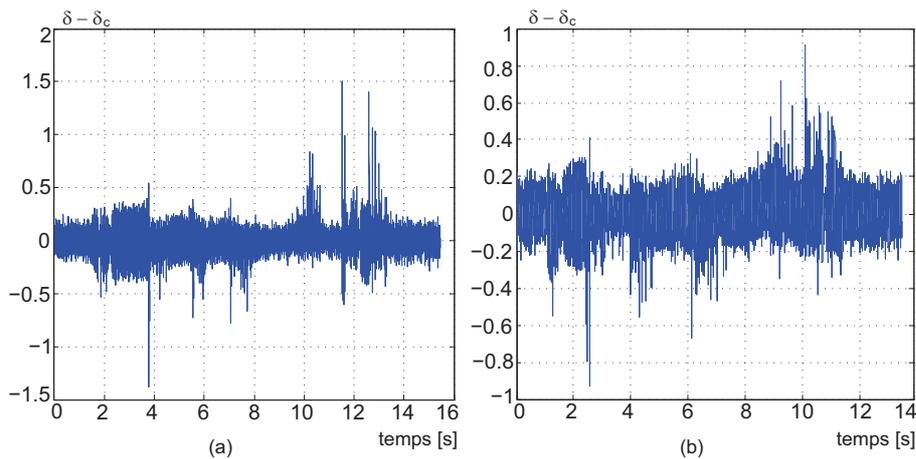


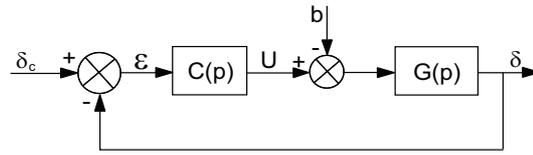
FIGURE 4.15 – Erreur de suivi de trajectoire en utilisant le correcteur  $C_1(p)$ . a : poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

#### 4.4.3.1 Rappels sur la commande $H_\infty$ standard

Pour simplifier le principe de l'approche, nous nous sommes limités au cas des systèmes monovariables, mais, toutefois la synthèse  $H_\infty$  permet de traiter des problèmes multivariables. Considérons le système de commande de la Figure 4.16, dans lequel un système monovariante  $G(p)$  est commandé par un correcteur  $C(p)$ .

Dans ce schéma, les signaux considérés sont :

- $\delta_c$  qui représente la consigne ou la référence,
- $\delta$  qui désigne la sortie du système,
- $u$  qui est la commande en sortie du correcteur,

FIGURE 4.16 – Un système  $G$  commandé par un contrôleur  $C$ .

- $\epsilon$  qui représente l'erreur,
- et  $b$  qui est une perturbation en entrée du système.

Les relations reliant les signaux de sortie  $\delta$ ,  $\epsilon$  et  $u$  et les signaux d'entrée  $\delta_c$  et  $b$  sont données par :

$$\begin{aligned} \delta &= CG(1 + CG)^{-1}\delta_c + G(1 + CG)^{-1}B \\ E &= (1 + CG)^{-1}\delta_c - G(1 + CG)^{-1}B \\ U &= C(1 + CG)^{-1}\delta_c - CG(1 + CG)^{-1}B \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ces relations font intervenir plusieurs fonctions de transfert :

- la fonction de sensibilité  $S(p) = (1 + C(p)G(p))^{-1} = \frac{\epsilon}{\delta_c}$ ,
- la fonction de transfert  $S(p)G(p) = \frac{\delta}{b}$ ,
- la fonction de transfert  $C(p)S(p) = \frac{U}{\delta_c}$ ,
- et la fonction de sensibilité complémentaire  $C(p)S(p)G(p) = \frac{\delta}{\delta_c}$ .

Dans les approches de commande robuste  $H_\infty$ , la synthèse du correcteur se fait dans le domaine fréquentiel [Zho98]. Lorsque les performances sont données dans le domaine temporel, il est nécessaire de les traduire dans le domaine fréquentiel. Les performances temporelles du système bouclé de la Figure 4.16 peuvent être déterminées à partir des diagrammes de Bode des quatre fonctions de transfert  $S(jw)$ ,  $S(jw)G(jw)$ ,  $C(jw)S(jw)$  et  $C(jw)S(jw)G(jw)$ . Afin d'atteindre certains objectifs pour le système bouclé, on peut utiliser des gabarits fréquentiels (Figure 4.17). Ces gabarits dépendent des filtres  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  et  $W_3(p)$  décrivant les performances voulues.

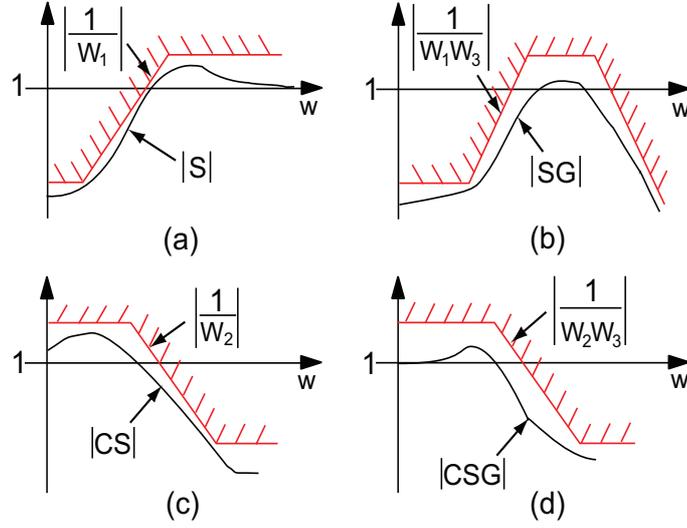


FIGURE 4.17 – Gabarits fréquentiels et fonctions de transfert du système bouclé.

Lorsque les performances désirées sont connues (c'est à dire  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  et  $W_3(p)$  sont connues), le problème de la commande robuste  $H_\infty$  cherche à calculer un correcteur  $C(p)$  assurant les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 |S(p)| &\leq \left| \frac{\gamma}{W_1(p)} \right| \\
 |S(p)G(p)| &\leq \left| \frac{\gamma}{W_1(p)W_3(p)} \right| \\
 |C(p)S(p)| &\leq \left| \frac{\gamma}{W_2(p)} \right| \\
 |C(p)S(p)G(p)| &\leq \left| \frac{\gamma}{W_2(p)W_3(p)} \right|
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

où  $\gamma > 0$  représente un niveau de performance. Si  $\gamma \leq 1$ , les performances nominales sont assurées.

D'après les propriétés de la norme- $H_\infty$ , les inégalités (4.37) mènent aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \|W_1(p)S(p)\|_\infty &\leq \gamma \\
 \|W_1(p)S(p)G(p)W_3(p)\|_\infty &\leq \gamma \\
 \|W_2(p)C(p)S(p)\|_\infty &\leq \gamma \\
 \|W_2(p)C(p)S(p)G(p)W_3(p)\|_\infty &\leq \gamma
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Pour faire apparaître les fonctions de pondérations (filtres)  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  et  $W_3(p)$ , on considère le schéma de la Figure 4.18-a. Le principe de l'approche de commande  $H_\infty$  [Zho96] [Bal01] est basé sur une forme de systèmes interconnectés (appelée forme standard) représentée sur la Figure 4.18-b. Cette dernière est obtenue à partir de la

Figure 4.18-a en considérant le vecteur de signaux pondérés  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  comme sortie du système et  $w = \begin{pmatrix} \delta_c \\ d \end{pmatrix}$  comme vecteur de signaux d'entrée.

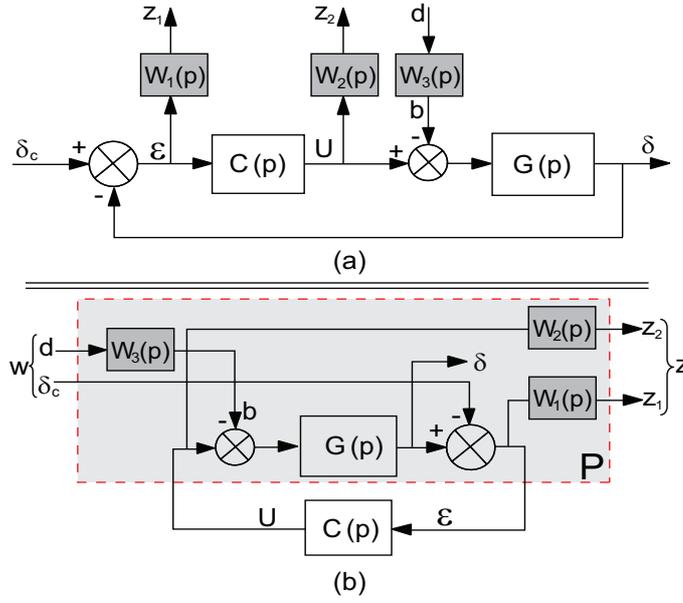


FIGURE 4.18 – Forme  $H_\infty$  standard.

Dans cette forme standard, le nouveau système  $P$ , appelé système augmenté contient le système  $G$  augmenté des pondérations fréquentielles  $W_i(p)$ . Le système augmenté  $P$  décrit les relations entre  $(w, u)$  et  $(z, \epsilon)$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} Z(p) \\ E(p) \end{pmatrix} = P(p) \begin{pmatrix} W(p) \\ U(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(p) & P_{12}(p) \\ P_{21}(p) & P_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(p) \\ U(p) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

La matrice de transfert liant le vecteur de sortie  $Z(p)$  au vecteur d'entrée  $W(p)$  est donnée par ce qu'on appelle la transformation linéaire fractionnaire (LFT : Linear Fractional Transformation), d'où :

$$F_l(P, C) = P_{11} + P_{12}C(I - P_{22}C)^{-1}P_{21} \quad (4.40)$$

À partir du schéma de la Figure 4.18-b, la transformation linéaire fractionnaire  $F_l(P, C)$  est donnée par :

$$F_l(P, C) = \begin{pmatrix} W_1S & W_1SGW_3 \\ W_2CS & W_2CSGW_3 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Le problème  $H_\infty$  standard consiste à chercher le correcteur  $C(p)$  qui stabilise le système bouclé de la [Figure 4.18-a](#) et qui assure la contrainte suivante :

$$\|F_l(P, C)\|_\infty \leq \gamma \quad (4.42)$$

Le correcteur qui assure la plus petite valeur possible de  $\gamma$ , notée  $\gamma_{opt}$  est dit "correcteur optimal".

Pour résoudre ce problème, une autre phase, dite de conception, consiste alors à mettre en œuvre un ou plusieurs algorithmes de résolution du problème  $H_\infty$  standard. Une des méthodes la plus utilisée est l'algorithme de *Glover-Doyle* [[Glo88](#)] [[Doy89](#)] qui repose sur la résolution d'une série d'équations de *Riccati*. Dans cette approche, la valeur optimale de  $\gamma$  est recherchée par dichotomie.

#### 4.4.3.2 Combinaison de l'approche $H_\infty$ avec l'analyse par intervalles

Considérons la synthèse de correcteur pour le système intervalle  $[G](p, [a], [b])$  basée sur l'approche  $H_\infty$ . Comme le système à commander est décrit par un modèle intervalle  $[G](p, [a], [b])$ , le système augmenté est aussi un système intervalle  $[P](p, [a], [b])$ . Dans notre cas, nous considérons le problème  $H_\infty$  sous-optimal qui consiste à déterminer pour une valeur donnée de  $\gamma > 0$  le correcteur  $[C](p, [\theta])$  ([4.19](#)) tel que :

$$\|F_l([P](p, [a], [b]), [C](p, [\theta]))\|_\infty \leq \gamma \quad (4.43)$$

Le système augmenté  $[P](p, [a], [b])$  contient le système intervalle  $[G](p, [a], [b])$  et les différentes fonctions de pondérations  $W_i(p)$  décrivant les performances désirées.

Dans notre étude, nous ne considérons pas le filtre  $W_3$ , car nous ne nous intéressons pas au rejet de perturbation. Considérons à cette fin le schéma de la [Figure 4.19](#), dans lequel le signal d'erreur  $\epsilon$  est pondéré par un filtre  $W_1(p)$  et la commande  $u$  est pondérée par le transfert  $W_2(p)$ .

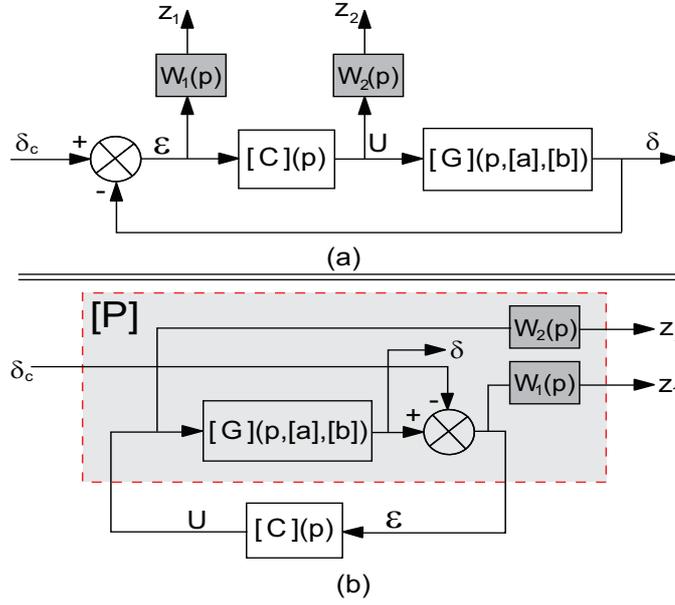
En considérant  $\delta_c$  comme entrée et  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  comme signal à surveiller, la transformation linéaire fractionnaire  $F_l([P](p, [a], [b]), [C](p, [\theta]))$  correspondant au schéma de la [Figure 4.19](#) est donnée par :

$$F_l([P](p, [a], [b]), [C](p, [\theta])) = \begin{pmatrix} W_1(p)[S](p) \\ W_2(p)[C](p, [\theta])[S](p) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

où la fonction de sensibilité  $[S](p)$  dépend des paramètres du système  $[a]$  et  $[b]$  et des paramètres du correcteur  $[\theta]$ , avec  $[S](p) = (1 + [C](p, [\theta])[G](p, [a], [b]))^{-1}$ .

On obtient à présent le critère suivant :

$$\begin{cases} |[S](p)| \leq \left| \frac{\gamma}{W_1(p)} \right| \\ |[C](p, [\theta])[S](p)| \leq \left| \frac{\gamma}{W_2(p)} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|W_1(p)[S](p)\|_\infty \leq \gamma \\ \|W_2(p)[C](p, [\theta])[S](p)\|_\infty \leq \gamma \end{cases} \quad (4.45)$$

FIGURE 4.19 – Forme  $H_\infty$  standard pour un modèle intervalle.

Dans ce cas, si  $\gamma \leq 1$ , alors les performances robustes sont respectées. Enfin, notre problème peut être formulé comme suit :

trouver les valeurs admissibles des paramètres  $\theta$  du correcteur qui assure pour une valeur  $0 < \gamma \leq 1$  le critère  $H_\infty$  ci-dessus :

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbf{D} \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \|W_1(p)[S](p)\|_\infty \leq \gamma \\ \|W_2(p)C(p, \theta)[S](p)\|_\infty \leq \gamma \end{array} \right. \right\} \quad (4.46)$$

où  $\mathbf{D}$  est le domaine de définition de  $\theta$  (ou domaine de recherche *a priori*).

La synthèse du correcteur  $C(p, [\theta])$  est basée sur le calcul des normes- $H_\infty$  des fonctions de transfert intervalles  $W_1(p)[S](p)$  et  $W_2(p)[C](p, [\theta])[S](p)$ . Ces dernières ( $\|W_1(p)[S](p)\|_\infty$  et  $\|W_2(p)[C](p, [\theta])[S](p)\|_\infty$ ) peuvent être calculées en utilisant les méthodes présentées au Chapitre 2 [An00b] [An00a] [Wan02].

Il reste à résoudre le problème de minimisation de la norme- $H_\infty$  défini dans (4.46). Les méthodes présentées dans [Wan02] [An00b] [An00a] permettent uniquement d'évaluer la valeur maximale de la norme- $H_\infty$  des systèmes intervalles. Dans notre cas, nous avons besoin de la valeur minimale afin de tester l'existence ou non d'un correcteur. Cependant, jusqu'à présent il n'existe pas de méthodes pour déterminer la borne inférieure. Pour cela, on propose d'utiliser l'algorithme décrit par l'organigramme de la Figure 4.20 qui permet de caractériser l'ensemble solution du problème (4.46).

Cet algorithme permet d'effectuer dans un premier temps un test sur le pavé initial. Ce pavé initial est dit acceptable si les conditions (4.45) sont satisfaites. À l'inverse si ces conditions ne sont pas vérifiées, aucune décision n'est possible. Dans ce cas, le pavé est partitionné. Les deux pavés générés sont testés, puis l'algorithme se propage tant que la

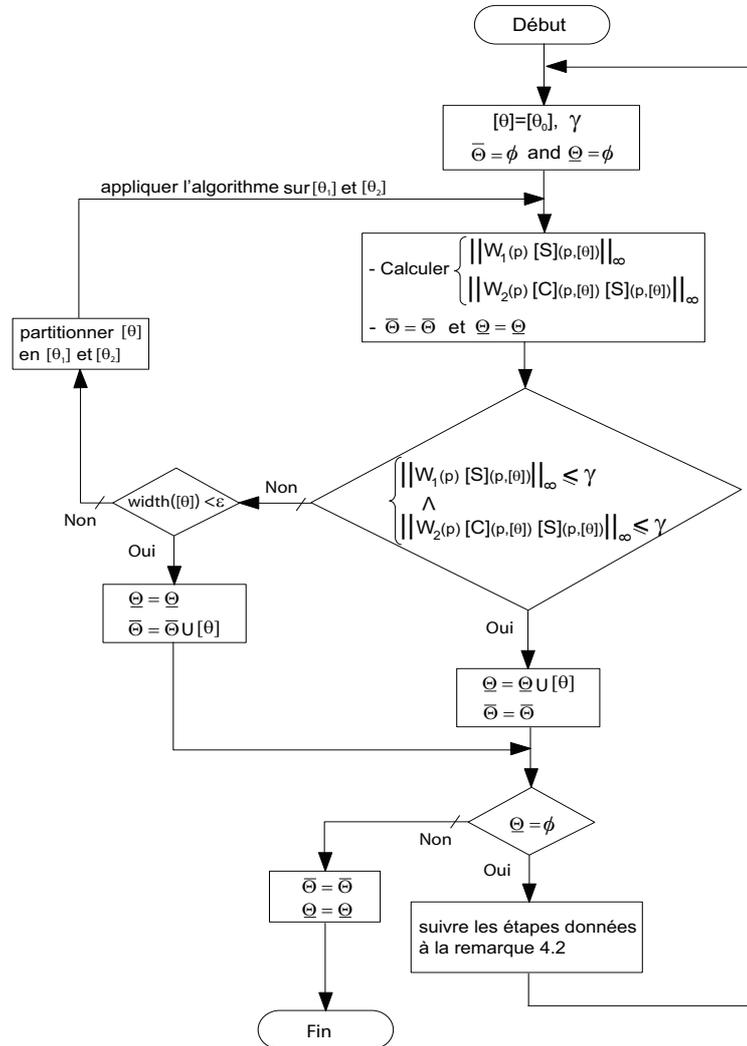


FIGURE 4.20 – Organigramme représentant l’algorithme de résolution du problème (4.46).

taille des pavés est supérieure à une certaine précision choisie par l’utilisateur. L’inconvénient majeur de cet algorithme (voir Figure 4.20) est le nombre élevé de bisections, ce qui augmente le temps de calcul.

L’encadrement intérieur  $\underline{\Theta}$  obtenu contient les pavés pour lesquels les conditions sur la norme- $H_\infty$  (4.45) sont remplies. L’ensemble  $\bar{\Theta}$  généré par l’algorithme représente le complément de  $\underline{\Theta}$  dans le pavé initial considéré  $[\theta]_0$ , c’est à dire  $\bar{\Theta} = [\theta]_0 \setminus \underline{\Theta}$ . Cet ensemble correspond aux pavés pour lesquels aucune conclusion ne peut être établie.

### 4.4.3.3 Application aux poutres piézoélectriques

Appliquons maintenant cette méthode à la commande de la déflexion des poutres piézoélectriques. Le modèle intervalle linéaire correspondant à une poutre piézoélectrique de longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$  est donné par la relation (4.17). Notre objectif est de synthétiser un correcteur PI (Proportionnel-Intégral) qui assure les performances présentées au § 4.4.1. De plus, on souhaite limiter le signal de la commande  $u$  afin d'éviter tout endommagement des poutres piézoélectriques. Pour cela, la commande devrait être limitée à  $100 \text{ V}$  pour une consigne maximale de  $40 \text{ }\mu\text{m}$ . Les performances du cahier des charges peuvent être traduites par des fonctions de pondération  $W_1(p)$  et  $W_2(p)$  (voir Figure 4.19). Le filtre  $W_1(p)$  peut être obtenu selon la formule suivante :

$$W_1(p) = \frac{\frac{1}{w_p}p + 1}{\frac{|\epsilon|}{w_z}p + |\epsilon|} \quad (4.47)$$

où

$$w_z = \frac{3}{tr_{5\%} \sqrt{\left(\frac{1}{|\epsilon|}\right)^2 - 1}} \text{ et } w_p = w_z \sqrt{\left(\frac{1 + D\%}{|\epsilon|}\right)^2 - 1}.$$

$tr_{5\%}$ ,  $\epsilon$ , et  $D\%$  sont respectivement le temps de réponse, l'erreur statique et le dépassement voulus. Après calcul, on obtient :

$$W_1(p) = \frac{0.002667p + 1}{0.002667p + 0.01} \quad (4.48)$$

Le transfert  $W_2(p)$  est choisi scalaire comme suit :

$$W_2(p) = \frac{U^{max}}{y_c^{max}} = \frac{100}{40} = 2.5 \text{ V}/\mu\text{m} \quad (4.49)$$

Dans notre cas, nous imposons  $\gamma = 1$ . L'objectif en utilisant  $\gamma = 1$ , étant de chercher directement le correcteur  $[C](p, [\theta])$  qui assure les performances. Notre problème consiste donc à calculer l'ensemble  $\Theta$  des paramètres du correcteur  $[C](p, [\theta])$  (4.19) qui assure le critère  $H_\infty$  suivant :

$$\Theta := \left\{ \theta \in [\theta] \mid \left\{ \begin{array}{l} \|W_1(p)[S](p)\|_\infty \leq 1 \\ \|W_2(p)[C](p, [\theta])[S](p)\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (4.50)$$

telle que la fonction de sensibilité  $[S](p)$  est définie par :

$$[S](p) = \frac{\frac{[a_2]}{[K]}p^3 + \frac{[a_1]}{[K]}p^2 + \frac{1}{[K]}p}{\underbrace{\frac{[a_2]}{[K]}p^3 + \frac{[a_1]}{[K]}p^2 + \frac{1}{[K]}p}_{[f](p)} + \underbrace{[K_p][b_2]p^3 + ([K_i][b_2] + [K_p][b_1])p^2 + ([K_p] + [K_i][b_1])p + [K_i]}_{[g](p)}} \quad (4.51)$$

$[f](p)$  et  $[g](p)$  sont respectivement les polynômes intervalles du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert en boucle ouverte  $[C](p, [\theta])[G](p, [a], [b])$ .

On choisit un pavé initial  $[K_{p0}] \times [K_{i0}] = [0, 1.2] \times [0.1, 1200]$  pour résoudre le problème de commande (4.50). L'algorithme de SIVIA récursif (voir la Figure 4.20) génère le sous-pavage  $\underline{\Theta}$  présenté sur la Figure 4.12.

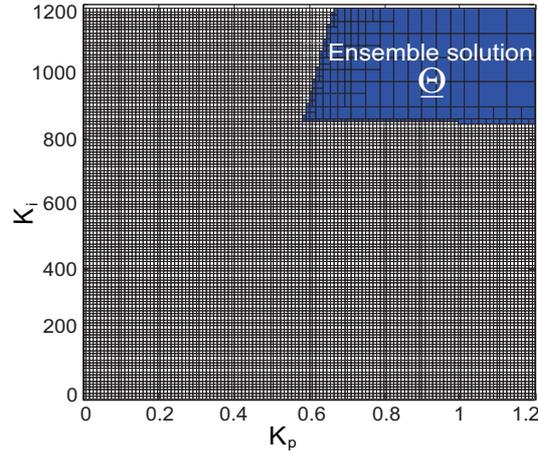


FIGURE 4.21 – Valeurs admissibles des paramètres  $[K_p]$  et  $[K_i]$  du correcteur PI qui assure les performances robustes.

La Remarque 4.2 est utile dans le cas où l'ensemble généré est vide  $\underline{\Theta} = \emptyset$ . En comparaison avec la méthode basée sur l'inclusion des fonctions de transfert, cette méthode présente un temps de calcul de l'ensemble solution très grand à cause du nombre élevé de bisections réalisées. Cela est principalement dû d'une part à l'absence de méthodes permettant d'évaluer la borne inférieure de la norme- $H_\infty$  d'un système intervalle et d'autre part à la surestimation de la borne supérieure de la norme- $H_\infty$  des systèmes intervalles lors de l'application des méthodes présentées dans [Wan02] [An00b] [An00a].

Le correcteur à implémenter doit être à paramètres point (scalaires)  $C(p, K_p, K_i) = C(p)$ . Les paramètres  $K_p$  et  $K_i$  à utiliser prennent donc des valeurs à l'intérieur de l'ensemble solution  $\underline{\Theta}$ . On choisit deux correcteurs comme suit :

$$\begin{aligned} C_1(p) &= \frac{0.8p + 900}{p} \\ C_2(p) &= \frac{p + 1000}{p} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Soit  $[S_i] = (1 + C_i[G])^{-1}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  les fonctions de sensibilité obtenues avec les correcteurs implémentés  $C_i(p)$  (4.52). La Figure 4.22 montre les magnitudes des transferts intervalles  $[S_i](p)$  et  $C_i(p)[S_i](p)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) comparées à celles de leurs gabarits correspondants. On constate d'après la Figure 4.22 que les inégalités (4.45) sont satisfaites.

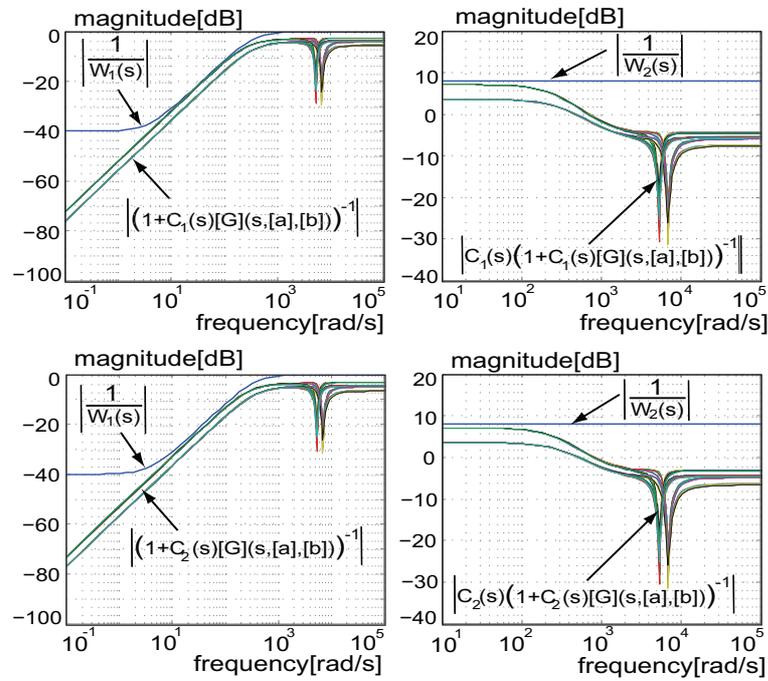


FIGURE 4.22 – Magnitudes des fonctions  $[S_i](p)$  et  $C_i(p)[S_i](p)$  comparées aux magnitudes  $\left| \frac{1}{W_1(p)} \right|$  et  $\left| \frac{1}{W_2(p)} \right|$  respectivement.

Les normes- $H_\infty$  des fonctions de transfert  $W_1(p)[S_i](p)$  et  $W_2(p)C_i(p)[S_i](p)$  (pour  $i = 1, 2$ ) sont :

$$\begin{aligned} \|W_1(p)[S_1](p)\|_\infty &= 0.94 < 1 \\ \|W_1(p)[S_2](p)\|_\infty &= 0.856 < 1 \\ \|W_2(p)C_1(p)[S_1](p)\|_\infty &= 0.91 < 1 \\ \|W_2(p)C_2(p)[S_2](p)\|_\infty &= 0.91 < 1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Les deux correcteurs  $C_i(p)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) ont été appliqués aux deux poutres piézoélectriques de longueurs  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$ . Les réponses à un échelon d'amplitude  $40 \mu\text{m}$  sont illustrées sur la Figure 4.23. Les deux correcteurs ont joué leur rôle et assurent les performances requises. On résume les résultats obtenus dans le Tableau 4.3. Les expérimentations réalisées ont montré que la tension de commande maximale appliquée aux poutres piézoélectriques ne dépasse pas  $97 \text{ V}$ .

TABLE 4.3 – Performances temporelles obtenues avec les deux correcteurs (4.52).

Correcteur	Poutre $L = 16 \text{ mm}$			Poutre $L = 14 \text{ mm}$		
	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$
$C_1(p)$	$5.2 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$\approx 7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$
$C_2(p)$	$5.2 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$\approx 7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$

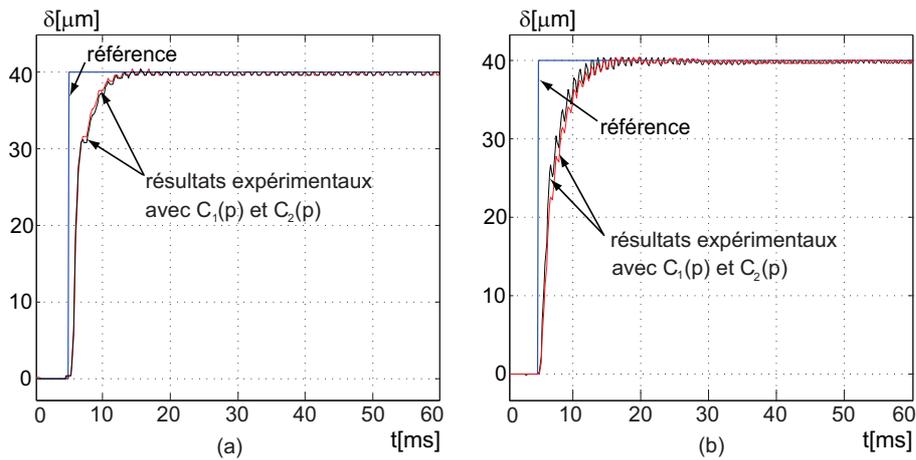


FIGURE 4.23 – Réponses expérimentales obtenues avec les correcteurs  $C_i(p)$  (4.52). a : résultats avec la poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

Une analyse de suivi de trajectoire a été effectuée sur les deux poutres piézoélectriques utilisées. Les résultats expérimentaux obtenus avec le correcteur  $C_1(p)$  sont illustrés sur la Figure 4.24. On constate d'après la Figure 4.25 que la différence entre le signal de référence appliqué à l'entrée du système et la déflexion expérimentale est au dessous de  $1.5 \mu m$  pour les deux poutres de longueurs  $L = 16 \text{ mm}$  et  $L = 14 \text{ mm}$ .

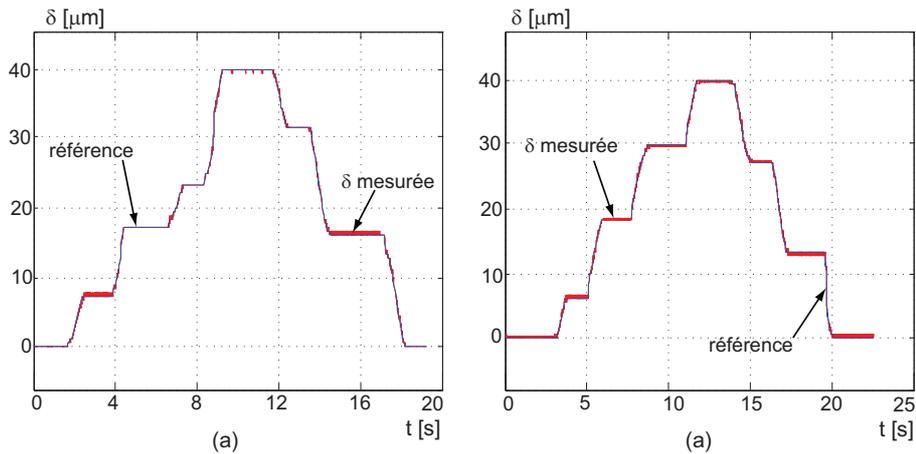


FIGURE 4.24 – Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur  $C_1(p)$  (4.52). a : poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

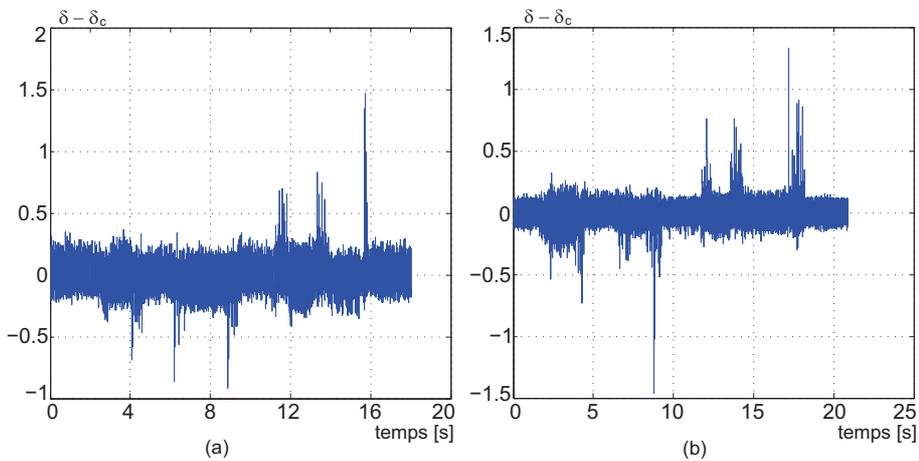


FIGURE 4.25 – Erreur de suivi de trajectoire en utilisant le correcteur  $C_1(p)$  (4.52). a : poutre de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

#### 4.4.4 Commande en déflexion par la $\mu$ -synthèse

Dans cette section, nous appliquons la commande robuste classique  $\mu$ -synthèse pour commander la déflexion des poutres piézoélectriques dont le comportement est décrit par un transfert à l'intérieur du modèle intervalle  $[G_\delta](p)$  (4.17).

##### 4.4.4.1 Rappels sur la $\mu$ -synthèse

La  $\mu$ -synthèse qui est basée sur le calcul des valeurs singulières structurées présente une approche intéressante pour assurer la stabilité et les performances robustes pour les systèmes incertains [Doy89] [Duc93] [Duc99] [Saf89] [Ala99b]. Lorsqu'il est possible de formuler *a priori* les incertitudes sur le modèle, la  $\mu$ -synthèse permet de trouver un correcteur optimal  $K(p)$  et la valeur optimale  $\gamma$  qui assurent les performances correspondantes dans le domaine d'incertitude ainsi formulé. Les incertitudes (toute sorte d'incertitude) sont rassemblées dans une matrice  $\Delta(p)$  ayant la structure générale suivante :

$$\Delta = \text{diag} \{ \Delta_1(p), \dots, \Delta_q(p), \partial_1 I_{r1}, \dots, \partial_r I_{rr}, \epsilon_1 I_{c1}, \dots, \epsilon_c I_{cc} \} \quad (4.54)$$

où l'incertitude  $\Delta$  doit être normalisée, c'est à dire  $\|\Delta\|_\infty < 1$

Le système nominal augmenté  $P(p)$  est connecté par LFT-inférieure au correcteur  $K(p)$  et connecté par LFT-supérieure à un bloc d'incertitude  $\Delta(p)$ , comme le montre la Figure 4.26-a.

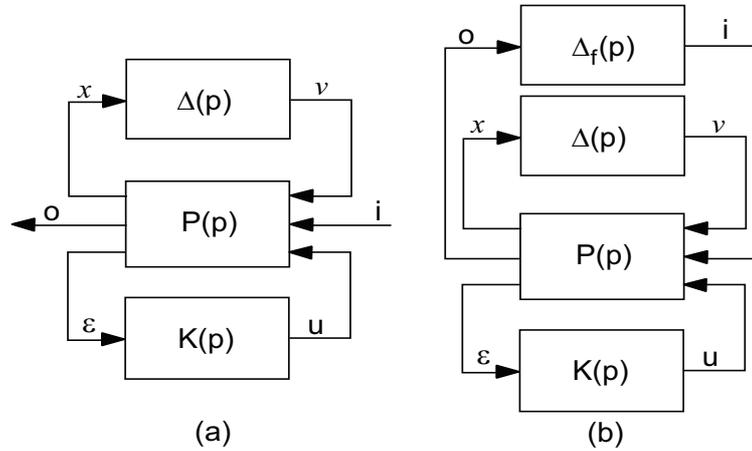


FIGURE 4.26 – Problème de la synthèse robuste.

Supposons que le niveau de performance  $\gamma$  à satisfaire est égal à un (il est toujours possible de se ramener à ce cas en intégrant  $\gamma$  dans  $P(p)$ ) [Duc99]. Alors le problème est le suivant :

$\forall \Delta(p)$  du type (4.54) tel que  $\|\Delta(p)\|_\infty < 1$ , déterminer  $K(p)$  tel que la norme- $H_\infty$  du transfert liant l'entrée  $i$  et la sortie  $o$  soit inférieure à un.

Ce problème est équivalent selon le théorème du petit gain [Doy85] [Zho96], à la recherche du correcteur  $K(p)$  qui stabilise le modèle de la Figure 4.26-b pour toute incertitude fictive et non-structurée  $\|\Delta_f(p)\|_\infty < 1$ .

Ce dernier problème (Figure 4.26-b) est équivalent au problème de  $\mu$ -synthèse qui consiste à trouver un correcteur  $K(p)$  qui assure :

$$\forall w, \mu_{\overline{\Delta}'}(Fl(P(jw), K(jw))) \leq 1 \quad (4.55)$$

où  $\mu_A(B)$  désigne la valeur singulière structurée de  $B$  relative à l'ensemble  $A$ . L'ensemble  $\overline{\Delta}'$  est défini comme suit :

$$\overline{\Delta}' = \{ \Delta' = \text{diag} \{ \Delta, \Delta_f \} \text{ avec } \Delta \in \overline{\Delta} \text{ et } \Delta_f \in \mathbb{C}^{n_f \times n_f} \} \quad (4.56)$$

L'approche par  $D-K$  itération (voir Annexe C) est l'une des méthodes permettant de donner une solution approchée de ce problème de  $\mu$ -synthèse [Doy85] [Zho96].

#### 4.4.4.2 Application à la commande des poutres piézoélectriques

L'application de la méthode nécessite d'isoler l'incertitude des différents paramètres de la relation (4.17). Pour cela, on utilise pour la représentation des intervalles leur centre et leur rayon. Réécrivons les paramètres du modèle (4.17) comme suit :

$$\begin{aligned} [K] &= \widehat{K} + \eta \delta_K \\ [b_2] &= \widehat{b}_2 + \beta_2 \delta_{b_2} \\ [b_1] &= \widehat{b}_1 + \beta_1 \delta_{b_1} \\ [a_1] &= \widehat{a}_1 + \alpha_1 \delta_{a_1} \\ [a_2] &= \widehat{a}_2 + \alpha_2 \delta_{a_2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \delta_{\{K, b_2, b_1, a_1, a_2\}} \leq 1 \\ \widehat{K} = \text{mid}([K]) = 0.555 \\ \widehat{b}_2 = \text{mid}([b_2]) = 3.434 \times 10^{-8} \\ \widehat{b}_1 = \text{mid}([b_1]) = 1.915 \times 10^{-4} \\ \widehat{a}_1 = \text{mid}([a_1]) = 6.389 \times 10^{-6} \\ \widehat{a}_2 = \text{mid}([a_2]) = 2.746 \times 10^{-8} \\ \eta = \text{rad}([K]) = 0.1155 \\ \beta_2 = \text{rad}([K]) = 0.108 \times 10^{-8} \\ \beta_1 = \text{rad}([K]) = 0.26 \times 10^{-4} \\ \alpha_1 = \text{rad}([K]) = 1.96 \times 10^{-6} \\ \alpha_2 = \text{rad}([K]) = 0.69 \times 10^{-8} \end{array} \right. \quad (4.58)$$

La sortie  $y$  du modèle intervalle s'exprime comme suit :

$$y = [K][D](p)u \quad (4.59)$$

où  $u$  est le signal de commande.  $[K]$  et  $[D](p)$  ont été identifiés précédemment.

Considérons le signal  $w$  tel que :

$$w = [K]u = (\widehat{K} + \eta\delta_K)u = \widehat{K} \left( 1 + \frac{\eta}{\widehat{K}} \delta_K \right) u \quad (4.60)$$

La sortie du système  $y$  peut s'écrire en fonction du signal  $w$  comme suit :

$$y = [D](p)w = \frac{(\widehat{b}_2 + \beta_2\delta_{b_2})p^2 + (\widehat{b}_1 + \beta_1\delta_{b_1})p + 1}{(\widehat{a}_2 + \alpha_2\delta_{a_2})p^2 + (\widehat{a}_1 + \alpha_1\delta_{a_1})p + 1} w \quad (4.61)$$

À partir de (4.61), on peut écrire :

$$(\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1)y = (\widehat{b}_2p^2 + \widehat{b}_1p + 1)w + (\beta_2\delta_{b_2}p^2 + \beta_1\delta_{b_1}p)w - (\alpha_2\delta_{a_2}p^2 + \alpha_1\delta_{a_1}p)y \quad (4.62)$$

La relation (4.62) est équivalente à :

$$y = G_m(p)w + (G_c(p)\delta_{b_2} + G_d(p)\delta_{b_1})w + (G_a(p)\delta_{a_2} + G_b(p)\delta_{a_1})y \quad (4.63)$$

tels que :

$$\begin{aligned} G_m(p) &= \frac{\widehat{b}_2p^2 + \widehat{b}_1p + 1}{\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1} \\ G_a(p) &= \frac{-\alpha_2p^2}{\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1} \\ G_b(p) &= \frac{-\alpha_1p}{\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1} \\ G_c(p) &= \frac{\beta_2p^2}{\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1} \\ G_d(p) &= \frac{\beta_1p}{\widehat{a}_2p^2 + \widehat{a}_1p + 1} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Afin de traduire les performances désirées, un filtre  $W_1(p)$  a été mis en place au signal d'erreur  $\epsilon$ . Afin de prendre en compte une condition sur la limitation de la commande, le signal de commande  $u$  peut être pondéré par un filtre  $W_2$ . Le schéma avec pondérations pour la commande  $\mu$ -synthèse donné par la Figure 4.27 est obtenu selon les relations (4.60) et (4.63).

Le schéma de la Figure 4.27 peut être mis sous la forme donnée par la Figure 4.28 en mettant  $G_n(p) = \widehat{K}G_m(p)$ ,  $W_{a_2}(p) = G_a(p)$ ,  $W_{a_1}(p) = G_b(p)$ ,  $W_{b_2}(p) = \widehat{K}G_c(p)$ ,  $W_{b_1}(p) = \widehat{K}G_d(p)$  et  $W_K(p) = \frac{\eta}{\widehat{K}}$ .

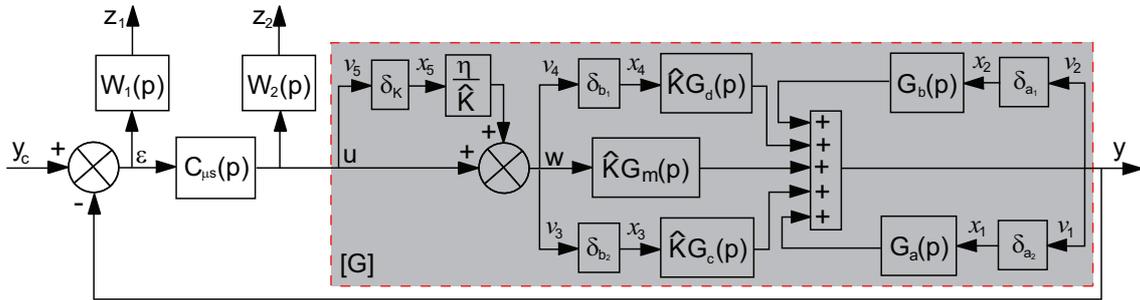


FIGURE 4.27 – Schéma avec pondérations pour la commande  $\mu$ -synthèse.

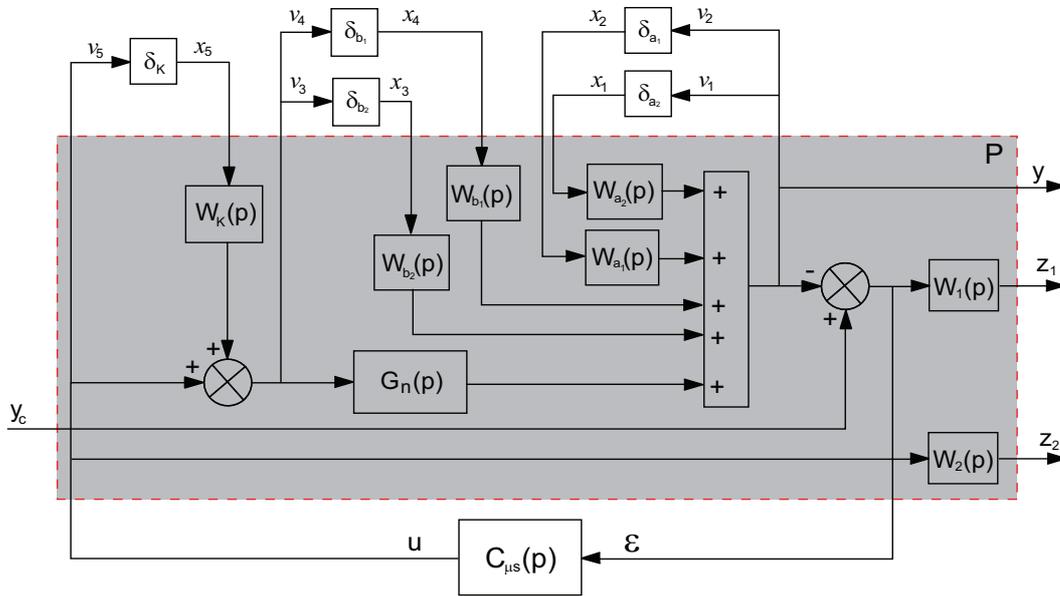


FIGURE 4.28 – Schéma avec pondérations pour la commande  $\mu$ -synthèse.

Posons  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ .

La matrice de transfert  $M(p)$  liant les signaux  $\begin{pmatrix} x \\ y_c \\ u \end{pmatrix}$  avec le vecteur de signaux  $\begin{pmatrix} v \\ y \\ z_1 \\ z_2 \\ \epsilon \end{pmatrix}$  est définie comme suit :

$$M(p) = \begin{pmatrix} W_{a_2} & W_{a_1} & W_{b_2} & W_{b_1} & G_n W_K & | & 0 & G_n \\ W_{a_2} & W_{a_1} & W_{b_2} & W_{b_1} & G_n W_K & | & 0 & G_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_K & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_K & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ \hline W_{a_2} & W_{a_1} & W_{b_2} & W_{b_1} & G_n W_K & | & 0 & G_n \\ -W_1 W_{a_2} & -W_1 W_{a_1} & -W_1 W_{b_2} & -W_1 W_{b_1} & -W_1 G_n W_K & | & W_1 & -W_1 G_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & W_2 \\ -W_{a_2} & -W_{a_1} & -W_{b_2} & -W_{b_1} & -G_n W_K & | & 1 & -G_n \end{pmatrix}$$

Les mêmes fonctions de pondération  $W_1$  (4.48) et  $W_2$  (4.49) calculées précédemment ont été utilisées pour la synthèse du correcteur  $C_{\mu s}$ .

Le calcul du correcteur a été réalisé avec la *Mu-Analysis and Synthesis Toolbox* de Matlab en utilisant l'algorithme D-K itération (voir [Annexe C](#)). L'algorithme  $\mu$ -synthèse génère un correcteur d'ordre 11 et une valeur optimale  $\gamma = 4.0104$ . Le correcteur obtenu est donné par le transfert suivant :

$$C_{\mu s}(p) = \frac{(p + 2.78 \times 10^4)(p^2 + 414.2p + 5.61 \times 10^6)(p^2 + 511.8p + 4.4 \times 10^7)(p^2 + 332.6p + 3.64 \times 10^7)^3}{9.784(p + 3.75)(p^2 + 201.4p + 3.622 \times 10^7)(p^2 + 7289p + 5.25 \times 10^7)(p^2 + 332.6p + 3.64 \times 10^7)^3} \quad (4.65)$$

On constate que deux polynômes identiques stables apparaissent dans le numérateur et le dénominateur du correcteur synthétisé et peuvent être simplifiés. Après simplification, le correcteur devient :

$$C_{\mu s}(p) = \frac{0.1022(p + 2.786 \times 10^4)(p^2 + 414.2p + 5.61 \times 10^6)(p^2 + 511.8p + 4.4 \times 10^7)}{(p + 3.75)(p^2 + 201.4p + 3.622 \times 10^7)(p^2 + 7289p + 5.25 \times 10^7)} \quad (4.66)$$

Le correcteur  $C_{\mu s}(p)$  a été appliqué aux deux poutres piézoélectriques de longueurs  $L = 14 \text{ mm}$  et  $L = 16 \text{ mm}$ . Les résultats expérimentaux obtenus à un échelon de référence d'amplitude  $40 \mu\text{m}$  sont présentés sur la [Figure 4.29](#).

D'après la [Figure 4.29](#), on constate qu'il n'y a pas de dépassement sur les comportements obtenus. Cependant, le correcteur  $C_{\mu s}(p)$  n'assure pas les temps de réponse requis. On obtient  $tr_1 \approx 15.6 \text{ ms}$  et  $tr_2 \approx 24.7 \text{ ms}$  pour les poutres de longueurs  $L = 16$

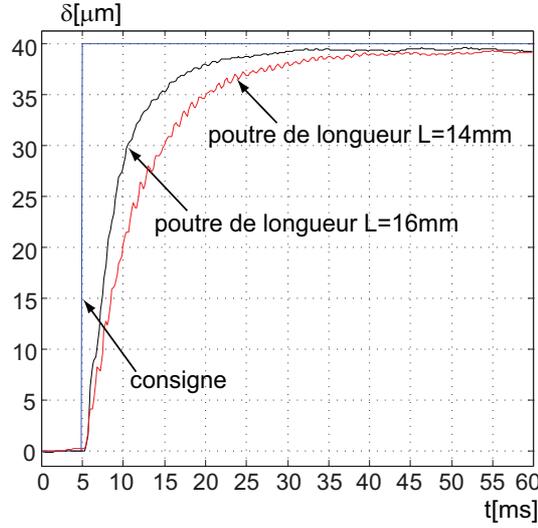


FIGURE 4.29 – Les résultats expérimentaux obtenus avec le correcteur  $\mu$ -synthèse en utilisant les deux poutres de longueur différente.

$mm$  et  $L = 14 mm$  respectivement. De même, les erreurs statiques obtenues sont approximativement de l'ordre de  $\epsilon_{1,2} = 2.12\% > 1\%$  et ne respectent pas le cahier des charges.

#### 4.4.5 Commande en déflexion par $H_\infty$ standard

Identiquement aux méthodes de commande précédente, nous synthétisons un correcteur  $H_\infty$  pour commander la déflexion des poutres piézoélectriques (de longueur  $14 mm \leq L \leq 16 mm$ ) modélisées par le modèle intervalle  $[G_\delta](p)$  (4.17).

Reprenons le schéma de la Figure 4.28, dont  $G_n(p)$  représente le modèle nominal. Les transferts  $W_{a_2}$ ,  $W_{a_1}$ ,  $W_{b_2}$ ,  $W_{b_1}$  et  $W_K$  désignent les fonctions de pondérations permettant la normalisation des incertitudes  $\delta_K$ ,  $\delta_{b_2}$ ,  $\delta_{b_1}$ ,  $\delta_{a_2}$  et  $\delta_{a_1}$  respectivement. D'après le schéma de la Figure 4.28, on constate trois formes d'incertitudes :

- incertitude à forme multiplicative directe en entrée  $\delta_K$  ;
- incertitude à forme additive  $\delta_{b_2}$  et  $\delta_{b_1}$  ;
- incertitude à forme multiplicative inverse en sortie  $\delta_{a_2}$  et  $\delta_{a_1}$ .

Posons :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{a_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{b_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_K \end{pmatrix}$$

Notre objectif est de trouver un correcteur  $H_\infty$  stabilisant le système bouclé et assurant la norme- $H_\infty$  de la matrice de transfert liant les signaux  $\begin{pmatrix} x \\ y_c \end{pmatrix}$  et le vecteur de signaux  $\begin{pmatrix} v \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  inférieure à 1 pour toute incertitude  $\Delta$  ( $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ).

Afin de formuler le problème  $H_\infty$ , il est nécessaire de mettre le schéma de la [Figure 4.28](#) sous la forme standard du problème de sensibilité mixte. Pour cela, en plus des filtres  $W_1$  et  $W_2$ , on utilise les fonctions de pondération  $W_{a_2}$ ,  $W_{a_1}$ ,  $W_{b_2}$ ,  $W_{b_1}$  et  $W_K$  sur les différents signaux de la boucle fermée. Le signal sur lequel on applique chaque pondération peut être déterminé à partir de la condition de stabilité correspondante à chaque forme d'incertitude. Ces conditions sur la stabilité peuvent être obtenues selon le théorème du petit gain. Les conditions de stabilité des trois formes d'incertitude de la [Figure 4.28](#) sont données par le [Tableau 4.4](#) :

TABLE 4.4 – Condition de stabilité correspondante à chaque forme d'incertitude.

Forme d'incertitude	Condition de stabilité
multiplicative inverse en sortie $\delta_{a_2}$ et $\delta_{a_1}$	$\ (1 + CG_n)^{-1}W_i\ _\infty \leq 1, (i \in \{a_2, a_1\})$
additive $\delta_{b_2}$ et $\delta_{b_1}$	$\ C(1 + CG_n)^{-1}W_i\ _\infty \leq 1, (i \in \{b_2, b_1\})$
multiplicative directe en entrée $\delta_K$	$\ C(1 + CG_n)^{-1}G_nW_K\ _\infty \leq 1$

D'après le [Tableau 4.4](#), les pondérations  $W_{a_2}$  et  $W_{a_1}$  doivent être appliquées au signal d'erreur  $\epsilon$  (sortie de la fonction de sensibilité  $(1 + CG_n)^{-1}$ ). Ainsi, on applique les filtres  $W_{b_2}$  et  $W_{b_1}$  au signal de commande  $u$  (sortie du transfert  $C(1 + CG_n)^{-1}$ ), tandis que la sortie du transfert  $C(1 + CG_n)^{-1}G_n$  (la sortie du système  $y$ ) est pondérée par la pondération  $W_K$ . La mise en place des différentes fonctions de pondération est illustrée sur le schéma-bloc de la [Figure 4.30](#), dans lequel on considère un signal externe  $y_c$  (signal de référence) et un vecteur de signaux à surveiller  $z$  de 7 composantes  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$  et  $z_7$ .

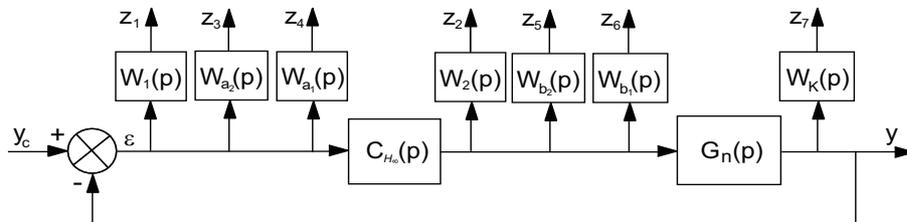


FIGURE 4.30 – Mise en place des pondérations.

Afin de réduire le nombre de signaux à surveiller, nous traçons sur la [Figure 4.31](#), les magnitudes des gabarits correspondants aux pondérations appliquées au signal d'erreur  $\epsilon$  et au signal de commande  $u$ .

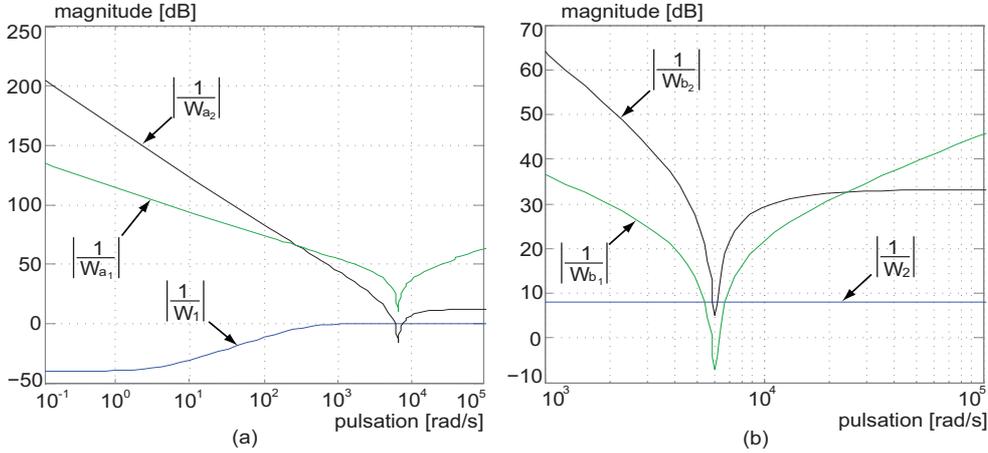


FIGURE 4.31 – a : comparaison de la magnitude des gabarits  $\frac{1}{W_1}$ ,  $\frac{1}{W_{a_2}}$  et  $\frac{1}{W_{a_1}}$ . b : magnitudes des gabarits  $\frac{1}{W_2}$ ,  $\frac{1}{W_{b_2}}$  et  $\frac{1}{W_{b_1}}$

Selon la comparaison des magnitudes illustrée par la [Figure 4.31](#), la synthèse du correcteur assurant la stabilité robuste et les performances peut se faire en utilisant uniquement les filtres  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_{a_2}$ ,  $W_{b_1}$  et  $W_K$ . Ceci nous a mené à considérer le schéma de la [Figure 4.32-a](#) qui peut se mettre sous la forme standard de la commande  $H_\infty$  donnée par la [Figure 4.32-b](#).

La transformation linéaire fractionnaire correspondante au schéma de la [Figure 4.32-b](#) est donnée par la matrice de transfert liant le vecteur des signaux pondérés  $z$  au signal de référence  $y_c$  comme suit :

$$F_l(P, C_\infty) = \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 C_\infty S \\ W_{a_2} S \\ W_{b_1} C_\infty S \\ W_K C_\infty S G_n \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

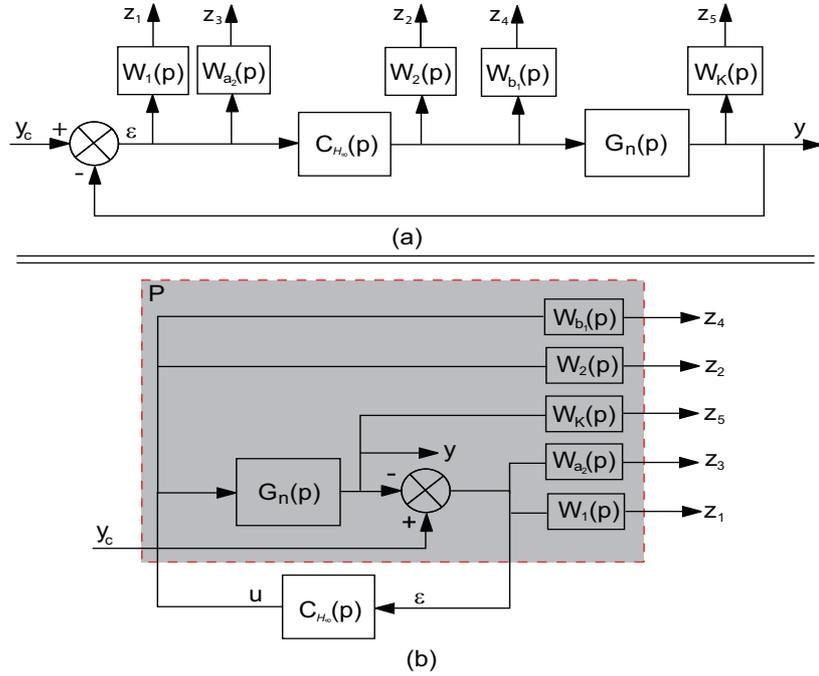
où  $S = (1 + C_\infty G_n)^{-1}$  est la fonction de sensibilité.

Notre problème  $H_\infty$  peut alors être défini ainsi :

**Problème  $H_\infty$  standard** :  $P(p)$  étant donné, trouver le correcteur  $C_\infty(p)$  stabilisant le système bouclé et qui assure :

$$\|F_l(P, C_\infty)\|_\infty \leq \gamma \quad (4.68)$$

où  $\gamma > 0$  représente un niveau de performance.

FIGURE 4.32 – a : mise en place des pondérations. b : forme standard de commande  $H_\infty$ 

Notons que toutes les fonctions de pondération sont connues. Les calculs ont été effectués sous Matlab ("Robust Control Toolbox"). La structure du correcteur obtenu est d'ordre 7 (4.69) dans laquelle 2 pôles et 2 zéros stables sont identiques. La valeur optimale de  $\gamma$  est 0.7522.

$$C_{H_\infty}(p) = \frac{4.079(p + 2415)(p^2 + 1571p + 3.389 \times 10^7)(p^2 + 232.6p + 3.641 \times 10^7)^2}{(p + 3.75)(p^2 + 3316p + 2.473 \times 10^7)(p^2 + 232.6p + 3.641 \times 10^7)^2} \quad (4.69)$$

Après simplification des pôles et des zéros stables identiques,  $C_{H_\infty}(p)$  devient d'ordre 3 :

$$C_{H_\infty}(p) = \frac{4.079(p + 2415)(p^2 + 1571p + 3.389 \times 10^7)}{(p + 3.75)(p^2 + 3316p + 2.473 \times 10^7)} \quad (4.70)$$

Ce dernier correcteur a été testé sur les deux poutres de longueur  $L = 16mm$  et  $L = 14mm$ . Les résultats expérimentaux obtenus sont tracés sur la Figure 4.33.

D'après la Figure 4.33, on constate que le cahier des charges n'est pas respecté. Les réponses expérimentales présentent un dépassement de l'ordre de 7%. L'erreur statique obtenue avec la poutre de longueur  $L = 16 mm$  est d'environ 1.5%, tandis que celle obtenue avec l'autre poutre est pratiquement négligeable. La condition sur le temps de réponse est vérifiée dans les deux cas. Le temps de réponse obtenu avec les deux poutres est d'environ 6.4 ms.

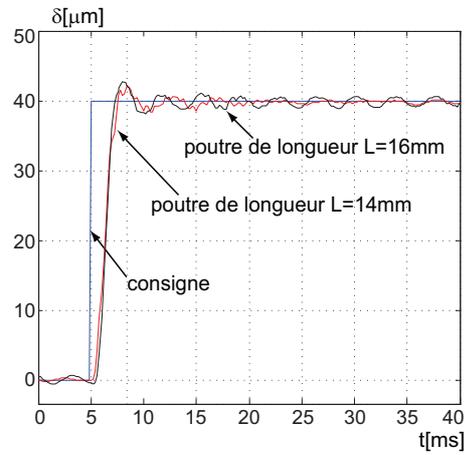


FIGURE 4.33 – Réponses expérimentales obtenues avec le correcteur  $C_{H_\infty}$

#### 4.4.6 Conclusion et comparaison des résultats

Dans cette partie, nous comparons les performances apportées par les méthodes de commande par intervalles proposées et les méthodes habituelles de commande robuste  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse. Cette comparaison est donnée à travers notre exemple traité lors de ce chapitre, c'est à dire un cas particulier de commande de poutres piézoélectriques de longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$ . Pour cela, nous traçons sur la Figure 4.34, les réponses temporelles expérimentales obtenues avec les correcteurs  $C_{IPP}(p) = C_1(p)$  (4.35-a),  $C_{IH_\infty}(p)$  (4.52-b),  $C_{H_\infty}(p)$  et  $C_{\mu s}(p)$ , respectivement synthétisés par la méthode basée sur les théorèmes d'inclusion, par la méthode  $H_\infty$  combinée avec l'analyse par intervalles, par l'approche de commande  $\mu$ -synthèse et par l'approche  $H_\infty$ .

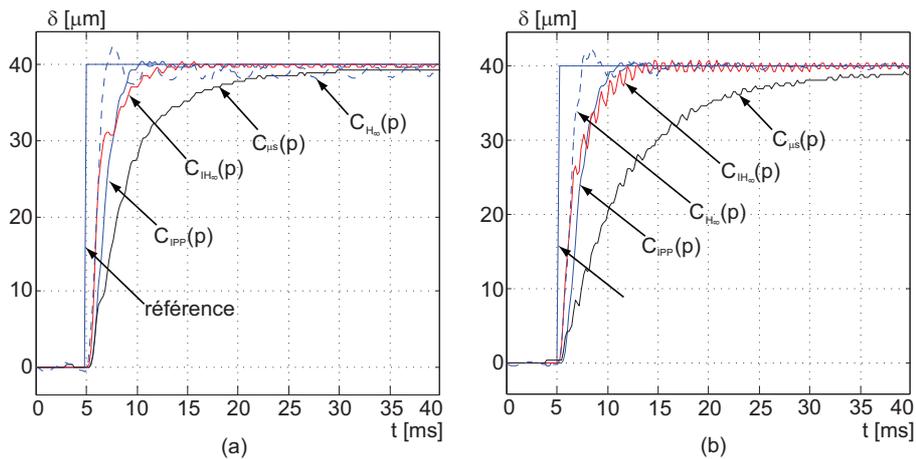


FIGURE 4.34 – Comparaison des réponses temporelles obtenues avec les différents correcteurs. a : poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre piézoélectrique de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

Une analyse harmonique de chacune des huit (quatre pour  $L = 16 \text{ mm}$  et quatre pour  $L = 14 \text{ mm}$ ) boucles fermées a également été effectuée pour comparer les performances apportées par chaque loi de commande. Les magnitudes expérimentales des différents systèmes bouclés sont illustrées sur la [Figure 4.36](#).

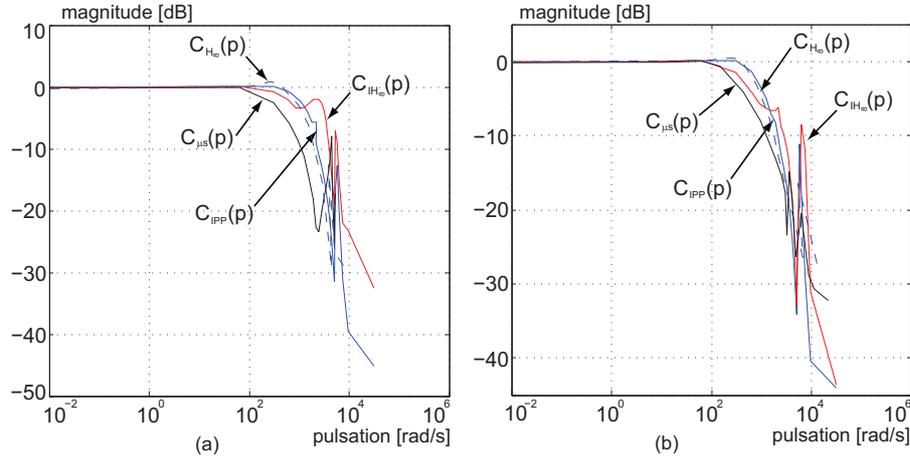


FIGURE 4.35 – Comparaison des magnitudes expérimentales. a : poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre piézoélectrique de longueur  $L = 14 \text{ mm}$ .

Le [Tableau 4.5](#) résume les différentes performances obtenues avec les correcteurs implémentés. Dans le [Tableau 4.5](#), les paramètres :

- $tr_{5\%}$  indique le temps de réponse à 5% ;
- $D$  est le dépassement ;
- $\epsilon$  désigne l'erreur statique ;
- $BP$  est la bande passante à  $-3 \text{ dB}$ .

TABLE 4.5 – Performances de la boucle fermée réalisées par les quatre correcteurs.

Correcteur	Poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$				Poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$			
	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$	$BP$	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$	$BP$
$C_{IPP}(p)$	$4 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$\approx 170 \text{ Hz}$	$4.7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$142 \text{ Hz}$
$C_{IH_\infty}(p)$	$5.2 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$128 \text{ Hz}$	$7 \text{ ms}$	$\approx 0\%$	$0\%$	$67 \text{ Hz}$
$C_{H_\infty}(p)$	$6.2 \text{ ms}$	$\approx 7\%$	$\approx 1.5\%$	$156 \text{ Hz}$	$6.8 \text{ ms}$	$\approx 6.7\%$	$\approx 0\%$	$134 \text{ Hz}$
$C_{\mu_s}(p)$	$15.6 \text{ ms}$	$0\%$	$\approx 2.12\%$	$\approx 55 \text{ Hz}$	$24.7 \text{ ms}$	$0\%$	$\approx 2.12\%$	$41 \text{ Hz}$

D'après le [Tableau 4.5](#), les correcteurs synthétisés en utilisant les méthodes d'intervalles ( $C_{IPP}(p)$  et  $C_{IH_\infty}(p)$ ) assurent les performances en termes de temps de réponse ( $tr_{5\%} < 8 \text{ ms}$ ), dépassement ( $D \approx 0$ ) et erreur statique ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Avec les correcteurs  $C_{H_\infty}(p)$  et  $C_{\mu_s}(p)$ , la stabilité de la boucle fermée est assurée mais les performances sont perdues vis-à-vis de l'incertitude considérée. De plus, les bandes passantes obtenues avec

le correcteur  $C_{IPP}(p)$  en utilisant les deux poutres sont plus larges que celles avec les correcteurs  $C_{IH_\infty}(p)$ ,  $C_{H_\infty}(p)$  et  $C_{\mu s}(p)$ .

Afin d'apprécier les marges de stabilité, on étudie l'allure des diagrammes de *Bode* des transferts en boucle ouverte  $[L_i](jw) = C_i(jw)[G](jw, [a], [b])$ .  $[G]$  représente le modèle intervalle (4.17) tandis que  $C_i(p) \in \{C_{IPP}(p), C_{IH_\infty}(p), C_{\mu s}(p), C_{H_\infty}(p)\}$  est le correcteur implémenté. L'analyse des marges de stabilité permet d'étudier la robustesse en stabilité d'un asservissement. Nous déterminons les marges de gain et de phase.

Nous traçons les diagrammes de *Bode* des transferts intervalles  $[L_i](p)$  correspondants aux quatre correcteurs. Les résultats de simulation de  $[L_i](p)$  en utilisant les quatre correcteurs  $C_i(p)$  sont présentés sur la Figure 4.36. Le diagramme de *Bode* de chaque transfert intervalle  $[L_i](p)$  est tracé en utilisant le diagramme de *Bode* de plusieurs transferts inclus dans le transfert intervalle  $[L_i](p)$  considéré. Les marges obtenues sont regroupées dans le Tableau 4.6.

TABLE 4.6 – Marge de gain et marge de phase obtenues avec les différents correcteurs.

Correcteur	Marge de gain (dB)	Marge de phase (°)
$C_{IPP}(p)$	$\infty$	[97.4,101.3] à $w \in [400, 610]$ rad/s
$C_{IH_\infty}(p)$	$\infty$	[122.5,145.6] à $w \in [495, 965]$ rad/s
$C_{H_\infty}(p)$	$\infty$	$\infty$
$C_{\mu s}(p)$	$\infty$	[92.6,93.5] à $w \in [160, 240]$ rad/s

Dans notre cas de commande de poutres piézoélectriques ayant des longueurs différentes, l'étude de la robustesse en stabilité et en performance montre que le correcteur établi par les méthodes d'intervalles offre de meilleures qualités par rapport aux méthodes habituelles de commande robuste  $H_\infty$ -standard et  $\mu$ -synthèse.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté la commande en déflexion des poutres piézoélectriques avec les modélisations nécessaires. Le comportement des poutres piézoélectriques étant hystérique dans le domaine (grande déflexion) étudié, il était nécessaire de linéariser d'abord le modèle obtenu. Cette linéarisation a été basée sur l'inversion du modèle de *Bouc-Wen* décrivant l'hystérésis. Nous avons ensuite établi un modèle intervalle qui prend en compte les incertitudes paramétriques liées à la variation de la longueur d'un ensemble de poutres. Puis, deux méthodes de commande par intervalles ont été proposées pour commander la déflexion. Ces dernières ont permis la dérivation de correcteur d'ordre réduit. La robustesse des correcteurs synthétisés vis-à-vis des incertitudes paramétriques a été testée expérimentalement en utilisant deux poutres piézoélectriques de longueur différentes. Les performances obtenues avec les deux méthodes proposées ont été comparées à celles atteintes par les commandes robustes  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse. Dans notre

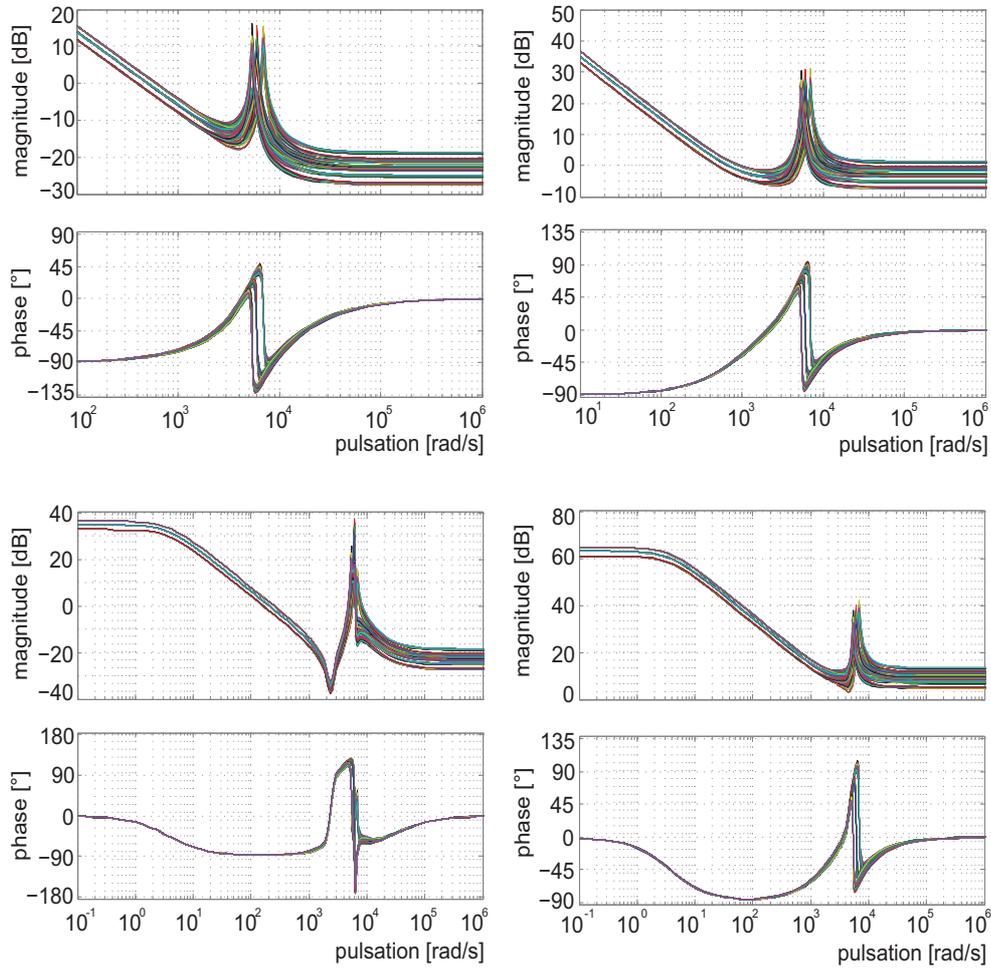


FIGURE 4.36 – Diagrammes de *Bode* des transfert en boucle ouverte. a : résultat de simulation avec  $C_{IPP}(p)$ . b : simulation avec  $C_{IH_\infty}(p)$ . c : simulation avec  $C_{\mu s}(p)$ . d : simulation avec  $C_{H_\infty}(p)$ .

application de commande des poutres piézoélectriques, les résultats expérimentaux obtenus avec la commande par intervalles sont meilleures par rapport à ceux obtenus avec les commandes  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse.



## Chapitre 5

# Commande en force par intervalles des poutres piézoélectriques

### 5.1 Introduction

La réalisation des tâches de micromanipulation et de micro-assemblage nécessite l'utilisation des préhenseurs pour la saisie, le transport et le positionnement des micro-objets. Durant la manipulation des micro-objets, en particulier les objets fragiles (cellules biologiques, microcomposants optiques, etc), la commande uniquement en déflexion des actionneurs des préhenseurs n'est pas suffisante. En fait, lorsque la force exercée sur les micro-objets devient importante, elle peut engendrer un endommagement des objets manipulés. Pour cela, la commande de la force appliquée par les actionneurs des préhenseurs sur les micro-objets est indispensable afin d'assurer le bon déroulement de la tâche de micromanipulation et afin d'éviter la destruction des objets manipulés ou inversement éviter la destruction des actionneurs. Dans le cas de manipulation d'objets par une micropince piézoélectrique (voir [Figure 5.1](#)), la première poutre piézoélectrique est commandée en déflexion, tandis que la seconde est commandée en force pour assurer le maintien du micro-objet et pour éviter de l'endommager [\[Rak07b\]](#) [\[Rak07c\]](#).

Souvent, les objets à manipuler sont de différents types et caractéristiques (dimensions, propriétés physiques, etc). Également il a été montré que le modèle de force dépend des caractéristiques de l'objet [\[Rak07c\]](#) [\[Rak06b\]](#). Chaque changement d'objet manipulé devrait donc être accompagné d'une nouvelle identification suivie d'une synthèse de correcteur pour assurer les performances voulues en force. Cependant, cela n'est pas souhaitable à cause du temps couronné et donc à la faible production dans le cas de micro-assemblage ou de micromanipulation de moyenne ou grande série.

Dans ce chapitre, nous utilisons des objets ayant des souplesses<sup>1</sup> différentes. Pour cela, nous introduisons l'analyse par intervalles pour caractériser la plage de variation de

---

1. La souplesse, ou la compliance, est l'inverse de la raideur.

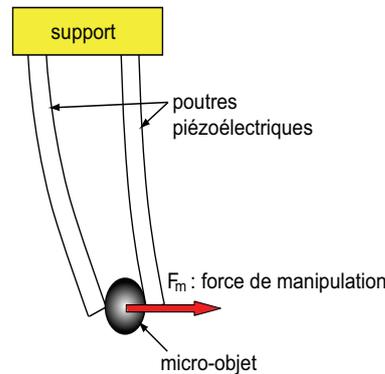


FIGURE 5.1 – Une micropince manipulant un micro-objet.

la souplesse des objets utilisés. Puis, nous proposons une méthode de commande robuste utilisant les techniques du calcul par intervalles. Afin d'illustrer notre approche, nous donnons une application considérant deux objets de souplesses différentes. Nous nous basons sur les techniques d'intervalles pour synthétiser un correcteur RST assurant la robustesse vis-à-vis des incertitudes liées à la souplesse des objets utilisés. Un correcteur par  $\mu$ -synthèse est également calculé pour commander la force en présence de ces incertitudes. Basée sur les résultats expérimentaux obtenus avec les correcteurs synthétisés, une comparaison des performances dans ce cas particulier est enfin présentée.

## 5.2 Modélisation par intervalles du transfert tension-force

La connaissance de la force exercée par une poutre piézoélectrique sur un micro-objet permet de maîtriser la force afin d'éviter tout endommagement ou destruction du micro-objet manipulé. La synthèse de loi de commande pour cette force de manipulation nécessite un modèle qui lie le signal de force et le signal de commande et qui prend en compte les caractéristiques du micro-objet. La commande en boucle fermée nécessite ensuite la mesure de la force. En effet, il est difficile d'intégrer des capteurs de force à l'extrémité des effecteurs du fait de leurs faibles dimensions. Pour cela, la solution souvent utilisée consiste à estimer la force à partir de la déflexion de la poutre piézoélectrique et de la tension appliquée (Figure 5.2). Après avoir modélisé, nous utilisons un estimateur de force développé dans les travaux existants.

### 5.2.1 Modèle non linéaire du transfert force-tension-déflexion

Soit une poutre piézoélectrique manipulant un micro-objet comme indiquée sur la Figure 5.3. Les variables considérées sont comme suit :

- $F$  est la force appliquée par la poutre piézoélectrique sur le micro-objet ;
- $\delta$  représente la déflexion de la poutre piézoélectrique ;
- $U$  est la tension appliquée à la poutre piézoélectrique.

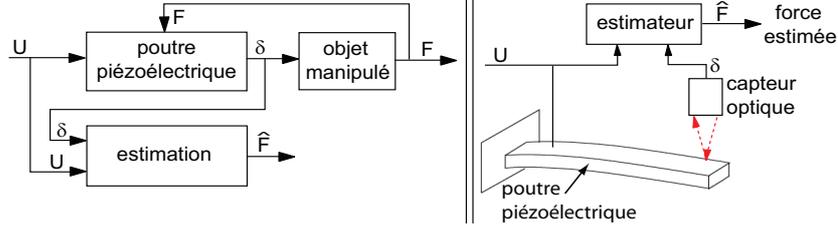


FIGURE 5.2 – Principe d'estimation de la force appliquée par une poutre piézoélectrique.

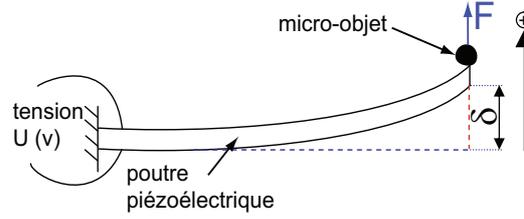


FIGURE 5.3 – Une poutre piézoélectrique manipulant un micro-objet.

Lorsque la poutre piézoélectrique est en contact avec le micro-objet, la relation non-linéaire statique liant la force  $F$ , la déflexion  $\delta$  et la tension appliquée  $U$  s'exprime par [Rak07b] [Rak07c] [Pon05] :

$$\delta = H_s(U) - s_p F \quad (5.1)$$

où  $s_p > 0$  est appelée la susceptibilité élastique de la poutre piézoélectrique. Elle correspond à la souplesse de cette dernière.  $H_s(U)$  est l'opérateur modélisant l'hystérésis statique de la poutre piézoélectrique (4.3) défini au Chapitre 4. L'effet de la dérive n'est pas considéré dans la relation (5.1).

Il a été démontré dans [Had00a] [Rak06b] que la partie dynamique  $D(p)$  de  $(U, \delta)$  et celle de  $(F, \delta)$  sont identiques :

$$\delta = (H_s(U) - s_p F) D(p) \quad (5.2)$$

tel que :

$$D(0) = 1 \quad (5.3)$$

Après avoir remplacé  $H_s(U)$  par le modèle de *Bouc-Wen* déjà présenté au Chapitre 4, (5.2) devient :

$$\begin{cases} \delta = (d_p(U - z) - s_p F) D(p) \\ \frac{dz}{dt} = A_{bw} \frac{dU}{dt} - B_{bw} \left| \frac{dU}{dt} \right| z - C_{bw} \frac{dU}{dt} |z| \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $z$  est une variable interne d'hystérésis. Les paramètres  $A_{bw}$ ,  $B_{bw}$  et  $C_{bw}$  définissent la forme de l'hystérésis.

### 5.2.2 Estimation de la force

Pour la commande, on a besoin d'un retour d'information sur la force de manipulation. Cependant, nous ne disposons pas de capteur de force. Pour cela, nous effectuons une estimation de la force comme présentée dans [Rak07d]. L'ensemble des équations d'estimation de la force est dérivé à partir des équations (5.4) comme suit :

$$\begin{cases} \hat{F} = \frac{1}{s_p} [d_p(U - z) - \delta D^{-1}(p)] \\ \frac{dz}{dt} = A_{bw} \frac{dU}{dt} - B_{bw} \left| \frac{dU}{dt} \right| z - C_{bw} \frac{dU}{dt} |z| \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\hat{F}$  est la force estimée.

La précision sur l'estimation de la force dépend de la modélisation de l'hystérésis. De plus, cette estimation de force nécessite l'inversion de la partie dynamique  $D(p)$  qui doit être bicausale et bistable<sup>2</sup>.

Le schéma simulink correspondant au modèle (5.5) est illustré sur la Figure 5.4 :

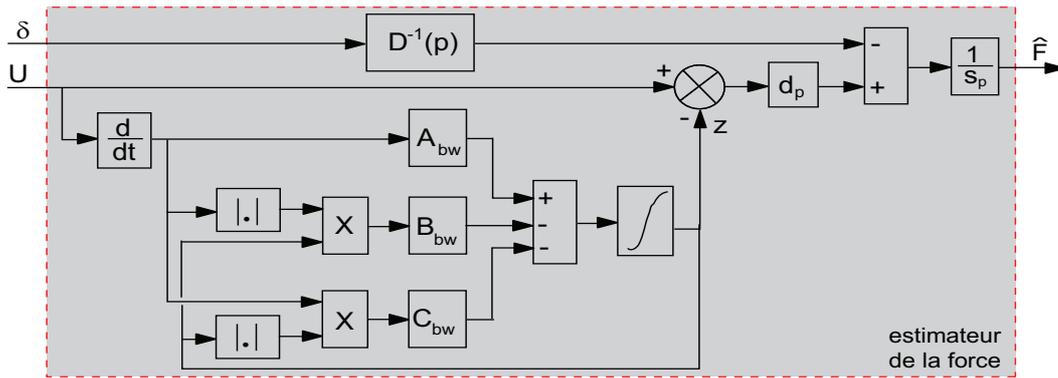


FIGURE 5.4 – Schéma-bloc d'estimation non-linéaire de la force.

### 5.2.3 Modélisation du transfert force-tension

Reprenons l'expression (5.2) de la déflexion  $\delta$  en fonction de la force  $F$  et de la tension  $U$ . D'après [Rak06b] [Rak07c], la déflexion  $\delta$  peut être exprimée en fonction de la force  $F$  et les caractéristiques du micro-objet :

$$\delta \approx s_o D_o(p) F \quad (5.6)$$

où  $s_o > 0$  et  $D_o(p)$  représentent respectivement la souplesse (ou compliance) et la partie dynamique du micro-objet manipulé.

<sup>2</sup>.  $D(p)$  est bicausale (resp. bistable) s'il est causal (resp. stable) et son inverse est également causal (resp. stable).

En utilisant les relations (5.2) et (5.6), on peut donc déduire la force appliquée au micro-objet :

$$F = \frac{1}{s_o D_o(p) + s_p D(p)} H_s(U) D(p) \quad (5.7)$$

Dans notre étude, on néglige la caractéristique dynamique  $D_o(p)$  du micro-objet, c'est à dire  $D_o(p) = 1$ . Cette hypothèse est valable pour les micro-objets dont la masse est négligeable et la souplesse  $s_o$  n'est pas très grande [Rak07c]. La relation (5.7) devient :

$$F = \frac{1}{s_o + s_p D(p)} H_s(U) D(p) \quad (5.8)$$

Un modèle linéaire liant la force appliquée par une poutre piézoélectrique au micro-objet et la tension appliquée peut être obtenu en introduisant un opérateur inverse d'hystérésis statique. Soit  $\Gamma^{-1}(\cdot)$  un opérateur inverse de l'hystérésis statique  $H_s(\cdot)$ , tel que :

$$\Gamma^{-1}(U) H_s(U) = d_p y_r \quad (5.9)$$

où  $d_p$  est le gain statique du transfert tension-déflexion. Le signal de commande du système  $U$  devient  $y_r$  (la nouvelle entrée du système linéaire).

La compensation d'hystérésis par inversion du modèle permet d'avoir le modèle linéaire tension-force suivant :

$$F = \frac{1}{s_o + s_p D(p)} d_p D(p) y_r \quad (5.10)$$

Cette étude de compensation est celle présentée au [Chapitre 4](#).

#### 5.2.4 Modèle intervalle linéaire

Lorsque les micro-objets manipulés ont les mêmes caractéristiques, le modèle liant la force et l'entrée de commande reste inchangé car  $s_o$  est similaire pour tous les objets. Or, dans les applications de micromanipulation, les micro-objets manipulés n'ont pas forcément les mêmes caractéristiques ni géométriques ni physiques. Les paramètres du modèle ne sont plus donc constants et leurs valeurs changent lors du changement de type d'objet manipulé. Dans notre cas, lorsque la plage de compliance des micro-objets manipulés est connue, il est possible de représenter la valeur de  $s_o$  entre une borne inférieure  $\underline{s}_o$  et une borne supérieure  $\bar{s}_o$ . La borne inférieure désigne la compliance de l'objet le plus rigide tandis que la borne supérieure définit la compliance de l'objet le plus flexible. La plage de variation de la compliance ainsi obtenue peut être représentée mathématiquement par un intervalle comme suit :

$$[s_o] = [\underline{s}_o, \bar{s}_o] \quad (5.11)$$

Après avoir remplacé  $[s_o]$ , (5.10) devient :

$$F = \frac{1}{[s_o] + s_p D(p)} d_p D(p) y_r \quad (5.12)$$

qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$F = \frac{d_p}{\frac{[s_o]}{D(p)} + s_p} y_r \quad (5.13)$$

Enfin, afin d'avoir un modèle tension-force qui prend en compte à la fois les caractéristiques des micro-objets manipulés et les incertitudes liées aux paramètres de modèles des poutres piézoélectriques, on propose de borner par des intervalles également le gain statique  $d_p$ , la susceptibilité élastique de la poutre piézoélectrique  $s_p$  et la partie dynamique  $D(p)$ . Le modèle considéré est donc donné par :

$$[G](p) = \frac{F}{Y_r} = \frac{[K']}{\frac{[s_o]}{[D](p)} + [s_p]} \quad (5.14)$$

où  $[K'] = [d_p]$  est le gain statique du modèle intervalle linéaire tension-déflexion.

### 5.2.5 Écriture du modèle intervalle à commander

Pour illustrer notre démarche, nous utilisons deux objets de compliance connue. Ils ont une structure de poutre comme indiquée sur la Figure 5.5 et sont considérés comme des étalons au laboratoire. La première poutre est rigide avec une compliance  $s_{or} = 3.271 \mu\text{m}/\text{mN}$ , tandis que la seconde est flexible avec une compliance  $s_{of} = 6.0748 \mu\text{m}/\text{mN}$ . Ceci conduit à fixer l'intervalle  $[s_o]$  :

$$[s_o] = [3.271, 6.0748] \mu\text{m}/\text{mN} \quad (5.15)$$

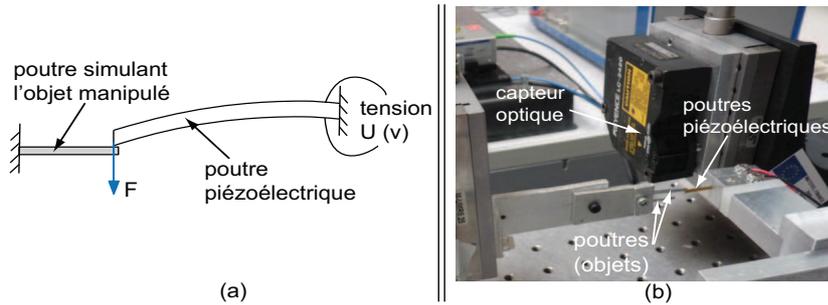


FIGURE 5.5 – Une poutre piézoélectrique exerçant une force sur un objet étalon de structure poutre.

Dans cette partie, nous choisissons les mêmes poutres utilisées que celles dans la commande en déflexion au [Chapitre 4](#), dont le modèle tension-déflexion  $[K'] [D](p)$  (4.16) a déjà été identifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K'] = [0.45, 0.66] \mu m/V \\ [D](p) = \frac{[d_4]p^2 + [d_3]p + 1}{[d_2]p^2 + [d_1]p + 1} = \frac{[3.336, 3.533] \times 10^{-8}p^2 + [1.679, 2.152] \times 10^{-4}p + 1}{[2.119, 3.374] \times 10^{-8}p^2 + [4.607, 8.171] \times 10^{-6}p + 1} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

tel que le transfert  $[K'] [D](p)$  décrit le comportement dynamique d'une poutre piézoélectrique ayant une longueur  $14mm \leq L \leq 16mm$ .

Après avoir remplacé les différents termes dans (5.14), on obtient le modèle intervalle final tension-force :

$$[G_F](p, [a], [b]) = \frac{F}{U} = [K] \frac{[b_2]p^2 + [b_1]p + 1}{[a_2]p^2 + [a_1]p + 1} \quad (5.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} [K] &= \frac{[K']}{[s_o] + [s_p]} = [0.0544, 0.1416] \\ [b_2] &= [d_4] = [3.336, 3.533] \times 10^{-8} \\ [b_1] &= [d_3] = [1.679, 2.152] \times 10^{-4} \\ [a_2] &= \frac{[s_o][d_2] + [s_p][d_4]}{[s_o] + [s_p]} = [1.394, 6.077] \times 10^{-8} \\ [a_1] &= \frac{[s_o][d_1] + [s_p][d_3]}{[s_o] + [s_p]} = [0.298, 1.123] \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (5.18)$$

De même que le transfert tension-déflexion, nous avons choisi d'étendre les paramètres intervalles du modèle (5.17) afin d'augmenter la marge de stabilité et d'élargir l'ensemble des objets à manipuler. Chaque paramètre du modèle (5.17) a été élargi de 10%. Finalement, le modèle intervalle tension-force étendu que nous considérons pour la synthèse de la loi de commande est donné par :

$$[G_F](p, [a], [b]) = \frac{F}{U} = [0.05, 0.146] \frac{[3.326, 3.542] \times 10^{-8}p^2 + [1.655, 2.175] \times 10^{-4}p + 1}{[1.159, 6.311] \times 10^{-8}p^2 + [0.256, 1.164] \times 10^{-4}p + 1} \quad (5.19)$$

### 5.3 Commande en force des poutres piézoélectriques

Dans cette partie, nous synthétisons des lois de commande permettant la commande de la force appliquée par une poutre piézoélectrique sur un objet rigide et sur un autre flexible telle que leur compliance est contenue dans l'intervalle  $[s_o]$  imposé au § 5.2.5.

La synthèse du correcteur est basée sur le modèle intervalle défini dans (5.19). Afin de dériver le correcteur, nous envisageons d'utiliser une méthode basée sur l'analyse par intervalles et une autre méthode de synthèse robuste  $\mu$ -synthèse. Ensuite, dans le cadre de notre exemple (incertitudes supposées sur la souplesse de l'objet et sur la longueur de la poutre piézoélectrique), nous présentons une comparaison des performances obtenues avec les deux méthodes. Nous considérons tout d'abord un cahier des charges pour la synthèse du correcteur.

### 5.3.1 Cahier des charges

Afin d'éviter des difficultés en phase d'implémentation, le correcteur synthétisé devrait avoir un ordre suffisamment réduit. Nous considérons le cahier des charges suivant pour le calcul du correcteur :

- un dépassement nul ou négligeable  $D\% = 0$  ;
- un temps de réponse  $tr_{5\%} \leq 8 \text{ ms}$  ;
- une erreur statique bornée  $|\epsilon| \leq 1\%$  ;
- le correcteur synthétisé doit avoir un ordre suffisamment réduit.

### 5.3.2 Commande RST par intervalles du transfert tension-force

L'objectif ici est de synthétiser un correcteur robuste de type RST assurant les exigences du cahier des charges ci-dessus quelque soit le transfert tension-force à l'intérieur du modèle intervalle  $[G_F](p, [a], [b])$  (5.19). Le correcteur RST a été choisi en raison de sa structure générale<sup>3</sup>. La dérivation du correcteur RST est basée sur la méthode d'inclusion paramètre par paramètre déjà utilisée au Chapitre 4 pour la déflexion.

#### 5.3.2.1 Principe

Soit un système intervalle  $[G](s, [a], [b])$  commandé par un correcteur *RST* comme indiqué sur la Figure 5.6. L'objectif consiste à trouver les différents polynômes  $[R]$ ,  $[S]$  and  $[T]$  du correcteur qui assure pour le système bouclé  $[H_{cl}](s, [a], [b])$  des performances robustes.

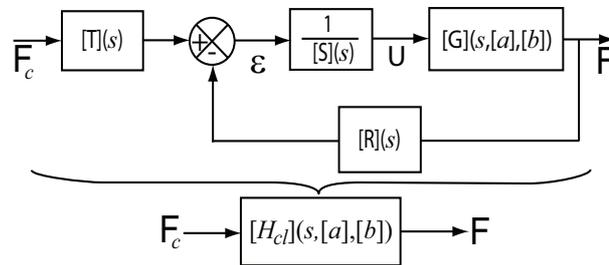


FIGURE 5.6 – Commande RST d'un système intervalle.

3. Le correcteur PID est un cas particulier du correcteur RST lorsque  $R(s) = T(s)$  et  $\frac{R}{S} = PID$ .

De même, le système à commander est décrit par le transfert  $[G](s, [a], [b])$  comme suit :

$$[G](p, [a], [b]) = \frac{1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j}{\sum_{i=0}^n [a_i]p^i} \quad (5.20)$$

où  $[a] = [[a_0], \dots, [a_n]]$ ,  $[b] = [[b_0], \dots, [b_m]]$  et  $m \leq n$ .

Comme la commande par intervalles donne la possibilité à l'utilisateur de choisir l'ordre du correcteur, la structure du correcteur RST peut être choisie de telle façon à avoir un correcteur d'ordre suffisamment réduit. On choisit un ordre 1 pour chaque polynôme R, S et T comme suit :

$$\begin{aligned} [R](p) &= [r_1]p + [r_0] \\ [T](p) &= [t_1]p + [t_0] \\ [S](p) &= p \end{aligned} \quad (5.21)$$

$[t_1], [t_0], [r_1], [r_0]$  sont les paramètres intervalles du correcteur. Le choix du polynôme  $[S](p) = p$  permet d'avoir une action intégrale dans le correcteur RST et donc d'assurer l'annulation de l'erreur statique.

**Remarque 5.1.** *Si le calcul du correcteur RST n'est pas faisable (le correcteur avec la structure choisie n'assure pas les performances requises), on peut augmenter le degré de l'un ou des polynômes  $[R]$ ,  $[S]$  and  $[T]$  puis effectuer de nouveau la synthèse du correcteur.*

Considérons un vecteur intervalle  $[\theta] = [[t_1], [t_0], [r_1], [r_0]]$ . Selon la [Figure 5.6](#), le transfert en boucle fermée  $[H_{cl}](s, [a], [b], [\theta])$  peut être exprimé en fonction du modèle intervalle (5.20) et du correcteur RST (5.21) :

$$[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta]) = \frac{[T](p)}{\frac{[S](p)}{[G](p, [a], [b])} + [R](p)} \quad (5.22)$$

Après avoir remplacé les différents polynômes,  $[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta])$  devient :

$$[H_{cl}](p, [a], [b], [\theta]) = \frac{([t_1]p + [t_0]) \left( 1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j \right)}{\sum_{i=0}^n [a_i]p^{i+1} + ([r_1]p + [r_0]) \left( 1 + \sum_{j=1}^m [b_j]p^j \right)} \quad (5.23)$$

(5.23) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$[H_{cl}](p, [q], [w]) = [w_0] \frac{1 + \sum_{j=1}^e [w_j]p^j}{1 + \sum_{i=1}^r [q_i]p^i} \quad (5.24)$$

où  $e = m + 1$  and  $r = n + 1$ . Les vecteurs des paramètres intervalles  $[q]$  et  $[w]$  dépendent des vecteurs  $[a]$ ,  $[b]$  et  $[\theta]$ .

Soit  $[H](p, [h], [x])$  le modèle intervalle de référence décrivant les performances requises pour la boucle fermée. Ce dernier peut être défini comme suit :

$$[H](p, [h], [x]) = [x_0] \frac{1 + \sum_{j=1}^e [x_j] p^j}{1 + \sum_{i=1}^r [h_i] p^i} \quad (5.25)$$

Basé sur le [Théorème 2.6](#) de l'inclusion des performances présenté au [Chapitre 2](#), le problème de synthèse du correcteur est formulé comme suit :

$[x]$  et  $[h]$  étant donnés, trouver l'ensemble  $\Theta$  des paramètres du correcteur RST défini par :

$$\Theta := \left\{ \theta \in [\theta] \mid \begin{array}{l} [w_j](\theta) \subseteq [x_j], \forall j = 0, \dots, m + 1 \\ [q_i](\theta) \subseteq [h_i], \forall i = 1, \dots, n + 1 \end{array} \right\} \quad (5.26)$$

De la même façon que dans la commande en déflexion, ce problème peut être résolu en utilisant l'algorithme récursif (SIVIA) illustré par le [Tableau 4.1](#).

### 5.3.2.2 Application à une poutre piézoélectrique

Nous appliquons maintenant la méthode présentée pour commander la force appliquée par une poutre piézoélectrique sur des objets ayant des compliances à l'intérieur de l'intervalle  $s_o \in [3.271, 6.0748] \mu m / mN$ . Le modèle utilisé pour le calcul de l'ensemble des paramètres du correcteur est défini par la relation (5.19). Le système intervalle en boucle fermée peut être exprimé par le transfert suivant :

$$[H_{cl}](p, [q], [w]) = [w_0] \frac{[w_3] p^3 + [w_2] p^2 + [w_1] p + 1}{[q_3] p^3 + [q_2] p^2 + [q_1] p + 1} \quad (5.27)$$

où les paramètres intervalles  $q_i$  et  $w_j$  (pour  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 0, 1, 2, 3$ ) sont en fonction des paramètres intervalles  $[a]$  et  $[b]$  du modèle (5.19) et des paramètres  $[\theta]$  du correcteur RST (5.21) :

$$\begin{aligned}
[w_3] &= \frac{[t_1][b_2]}{[t_0]} \\
[w_2] &= \frac{[t_1][b_1]}{[t_0]} + [b_2] \\
[w_1] &= \frac{[t_1]}{[t_0]} + [b_1] \\
[w_0] &= \frac{[t_0]}{[r_0]} \\
[q_3] &= \frac{[a_2]/[K] + [r_1][b_2]}{[r_0]} \\
[q_2] &= \frac{[a_1]/[K] + [r_1][b_1]}{[r_0]} + [b_2] \\
[q_1] &= \frac{1/[K] + [r_1]}{[r_0]} + [b_1]
\end{aligned} \tag{5.28}$$

De même que dans la commande en déflexion (voir § 4.4.2.2), on dérive le modèle intervalle de référence à partir du cahier des charges :

$$[H](p) = [K_e] \frac{0.001[\tau]^3 p^3 + 0.03[\tau]^2 p^2 + 0.3[\tau]p + 1}{0.01[\tau]^3 p^3 + 0.21[\tau]^2 p^2 + 1.2[\tau]p + 1} \tag{5.29}$$

où les paramètres intervalles  $[K_e]$  et  $[\tau]$  peuvent être calculés à partir des performances demandées dans le cahier des charges suivant :

- $[K_e] = 1 + \varepsilon = [0.99, 1.01]$ ,
- $[\tau] = \frac{[tr_{5\%}]}{3} = [0, 2.66ms]$ .

Enfin, notre problème de commande consiste à chercher l'ensemble  $\Theta$  des paramètres du correcteur RST défini par :

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbf{D} \left| \begin{array}{l} \frac{[t_1][b_2]}{[t_0]} \subseteq 0.001[\tau]^3 \quad (\text{inclusion 1}) \\ \frac{[t_1][b_1]}{[t_0]} + [b_2] \subseteq 0.03[\tau]^2 \quad (\text{inclusion 2}) \\ \frac{[t_1]}{[t_0]} + [b_1] \subseteq 0.3[\tau] \quad (\text{inclusion 3}) \\ \frac{[a_2]/[K] + [r_1][b_2]}{[r_0]} \subseteq 0.01[\tau]^3 \quad (\text{inclusion 4}) \\ \frac{[a_1]/[K] + [r_1][b_1]}{[r_0]} + [b_2] \subseteq 0.21[\tau]^2 \quad (\text{inclusion 5}) \\ \frac{1/[K] + [r_1]}{[r_0]} + [b_1] \subseteq 1.2[\tau] \quad (\text{inclusion 6}) \\ \frac{[t_0]}{[r_0]} \subseteq [K_e] \quad (\text{inclusion 7}) \end{array} \right. \right\} \quad (5.30)$$

où  $\mathbf{D}$  est le domaine de définition de  $\theta$  (ou domaine de recherche *a priori*).

Comme notre objectif principal est de trouver au moins un correcteur RST qui assure les performances du cahier des charges, on propose de résoudre le problème (5.30) de la manière suivante :

- l'intégrateur utilisé dans le correcteur RST n'est pas suffisant pour annuler l'erreur statique à cause de la structure des polynômes  $[R]$  et  $[T]$ . Pour cela, l'annulation de l'erreur statique peut être réalisée en choisissant  $t_0 = r_0$ . Ce choix permet d'assurer la dernière inclusion  $\frac{[t_0]}{[r_0]} \subseteq [K_e]$  ;
- ensuite, on résoud indépendamment les inclusions 4 à 6 de (5.30). Ceci permet de caractériser le sous-ensemble des paramètres  $[r_0]$  et  $[r_1]$  ;
- enfin, la résolution des trois premières inclusions en choisissant une valeur  $t_0 = r_0$  à l'intérieur du sous-ensemble  $[r_1] \times [r_0]$  génère les valeurs admissibles du paramètre  $[t_1]$ .

Les inclusions 4 à 6 de (5.30) dépendent de deux paramètres  $[r_1]$  et  $[r_0]$ . Soit  $\Omega_{r_0, r_1}$  un sous-ensemble défini par :

$$\Omega_{r_0, r_1} := \left\{ (r_0, r_1) \in \tilde{\mathbf{D}} \left| \begin{array}{l} \frac{[a_2]/[K] + [r_1][b_2]}{[r_0]} \subseteq 0.01[\tau]^3 \\ \frac{[a_1]/[K] + [r_1][b_1]}{[r_0]} + [b_2] \subseteq 0.21[\tau]^2 \\ \frac{1/[K] + [r_1]}{[r_0]} + [b_1] \subseteq 1.2[\tau] \end{array} \right. \right\} \quad (5.31)$$

où  $\tilde{\mathbf{D}}$  est le domaine de définition des paramètres  $r_0$  et  $r_1$ .

Ce dernier problème (5.31) donné en fonction de deux paramètres  $[r_0]$  et  $[r_1]$  peut être résolu en utilisant l'algorithme de SIVIA. Avant d'appliquer cet algorithme, on choisit un espace de recherche (pavé initial)  $[r_0]_0 \times [r_1]_0 = [5000, 10000] \times [0.01, 10]$ . On s'intéresse ici à la recherche de l'approximation intérieure  $\underline{\Omega}_{r_0, r_1}$ . La Figure 5.7 présente le sous-pavage correspondant à quelques valeurs admissibles des paramètres  $[r_0]$  et  $[r_1]$  qui assurent les inclusions (5.31).

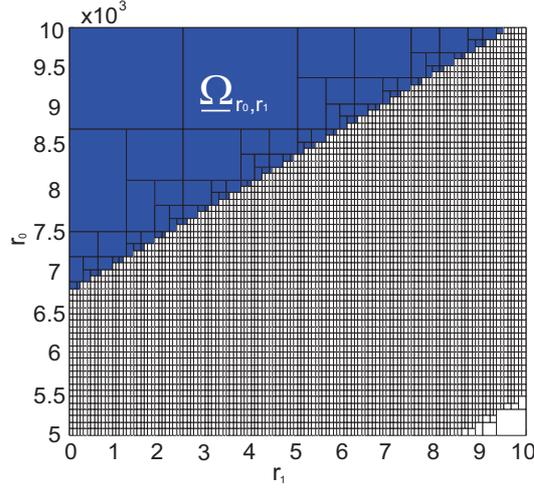


FIGURE 5.7 – Ensemble solution des paramètres  $r_0$  et  $r_1$ .

Posons  $[t] = \frac{[t_1]}{[t_0]}$ , la résolution des trois premières inclusions de (5.30) revient à résoudre un système d'inégalité linéaire défini par des inclusions suivantes :

$$\begin{cases} [t][b_2] \subseteq 0.001[\tau]^3 \\ [t][b_1] + [b_2] \subseteq 0.03[\tau]^2 \\ [t] + [b_1] \subseteq 0.3[\tau] \end{cases} \quad (5.32)$$

Après résolution, on obtient l'intervalle  $[t]$  vérifiant les inclusions (5.32) :

$$[t] = [0, 5.352 \times 10^{-4}] \quad (5.33)$$

Un choix d'une valeur  $t_0 = r_0 \in \Omega_{r_0, r_1}$  et d'une valeur  $t \in [0, 5.352 \times 10^{-4}]$  permet de calculer la valeur correspondante au paramètre  $t_1$  selon la relation suivante :

$$t_1 = t_0 t \quad (5.34)$$

Enfin, on définit le sous-ensemble  $\Gamma \subset \Theta$  correspondant aux paramètres du correcteur RST calculé comme suit :

$$\Gamma := \{ \{r_0 = t_0, r_1\} \in \underline{\Omega}_{r_0, r_1}, t_1 \in [0, 5.352 \times 10^{-4}]t_0 \} \quad (5.35)$$

Un choix arbitraire des paramètres  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $r_0$  et  $r_1$  à l'intérieur de l'ensemble  $\Gamma$  vérifie les conditions définies dans (5.30). Le correcteur correspondant à ce choix assure les performances requises quelque soit la compliance de l'objet utilisé à l'intérieur de l'intervalle  $s_o \in [3.271, 6.0748] \mu m/mN$  et quelque soit la longueur de la poutre piézo-électrique entre 14 mm et 16 mm. En implémentation, on choisit deux correcteurs point RST quelconques dont leurs paramètres appartiennent à l'ensemble calculé  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} C_1(p) : & \begin{cases} R_1(p) = p + 7500 \\ S_1(p) = p \\ T_1(p) = 7500 \end{cases} \\ C_2(p) : & \begin{cases} R_2(p) = 4p + 8500 \\ S_2(p) = p \\ T_2(p) = 1.7p + 8500 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Afin d'avoir un correcteur causal, la structure de la boucle fermée illustrée sur la Figure 5.6 a été transformée comme indiquée sur la Figure 5.8.

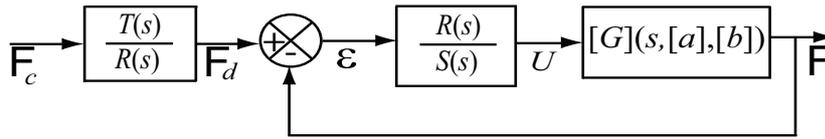


FIGURE 5.8 – Système intervalle commandé par un correcteur RST.

Les deux actionneurs piézoélectriques de longueur  $L = 14 \text{ mm}$  et  $L = 16 \text{ mm}$  sont commandés en utilisant le correcteur  $C_1(p)$  puis le correcteur  $C_2(p)$ . Chaque commande d'actionneur est effectuée en utilisant les deux objets (rigide et flexible). Ceci mène à effectuer huit expérimentations. Les résultats expérimentaux obtenus sont illustrés sur les Figures 5.9 et 5.10. D'après ces dernières, on constate que les deux correcteurs assurent des dépassements et des erreurs statiques négligeables pour les huit expérimentations effectuées. Les temps de réponse obtenus sont regroupés dans le Tableau 5.1.

TABLE 5.1 – Temps de réponse obtenus avec les correcteurs  $C_1(p)$  et  $C_2(p)$ .

Correcteur	poutre avec $L = 16mm$		poutre avec $L = 14mm$	
	objet rigide	objet flexible	objet rigide	objet flexible
$C_1(p)$	4.116ms	5.4ms	4.49ms	6.85ms
$C_2(p)$	4.22ms	5.8ms	5.5ms	7.15ms

On a également effectué une analyse de suivi de trajectoire. Pour cela, nous avons choisi d'appliquer une trajectoire de référence aléatoire à l'entrée du système bouclé avec le correcteur  $C_1(p)$  en utilisant la poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16mm$ . Cette analyse a été effectuée sur les deux objets (rigide et flexible). Les résultats expérimentaux

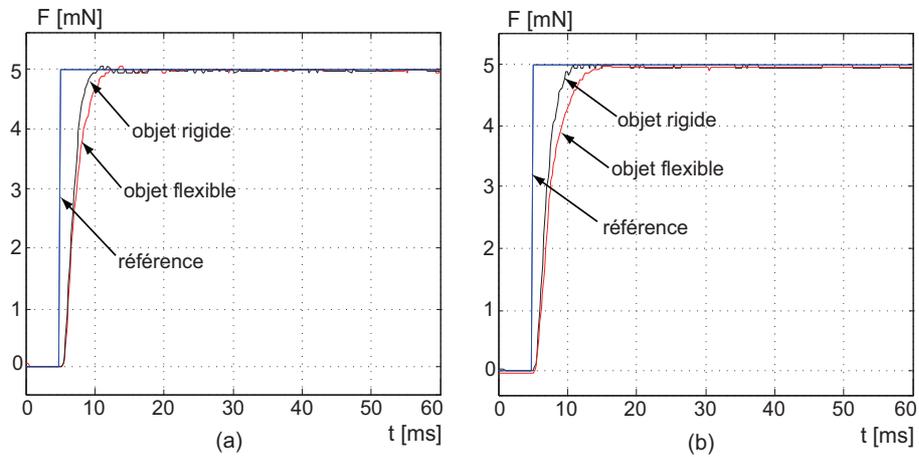


FIGURE 5.9 – Résultats expérimentaux avec  $C_1(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16\text{mm}$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 14\text{mm}$ .

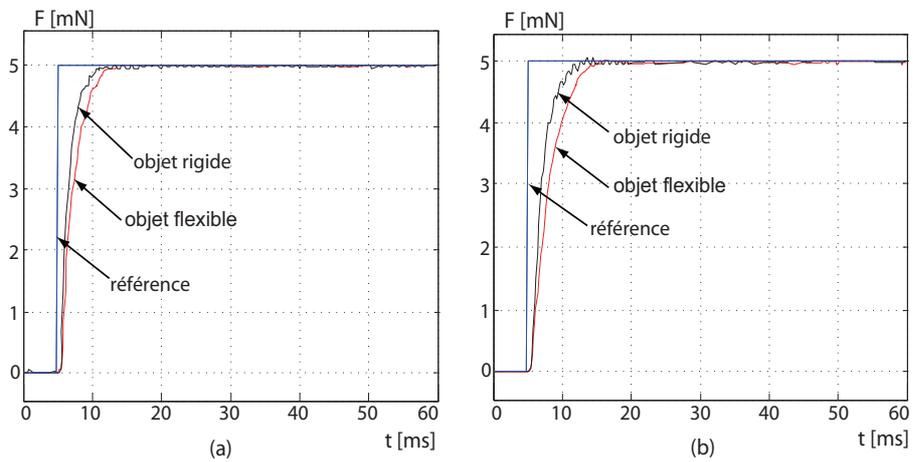


FIGURE 5.10 – Résultats expérimentaux avec  $C_2(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16\text{mm}$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 14\text{mm}$ .

obtenus sont tracés sur la Figure 5.11. D'après les courbes de la Figure 5.11, on constate que les erreurs entre le signal de référence appliqué à l'entrée du système bouclé et le signal de force en sortie sont pratiquement négligeables. Ceci confirme que le correcteur  $C_1(p)$  assure un bon suivi de trajectoire pour les deux objets utilisés.

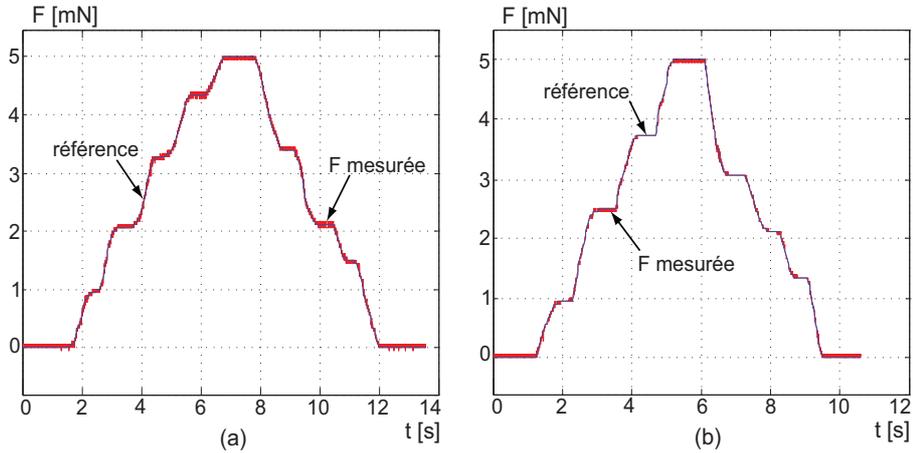


FIGURE 5.11 – Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur  $C_1(p)$ . a : résultats avec l'objet flexible. b : résultats avec l'objet rigide.

### 5.3.3 Commande en force par la $\mu$ -synthèse

Dans cette partie, nous synthétisons un correcteur par la  $\mu$ -synthèse pour commander la force appliquée par une poutre piézoélectrique (de longueur  $14 \text{ mm} \leq L \leq 16 \text{ mm}$ ) sur des objets ayant une souplesse  $s_o \in [3.271, 6.0748] \mu\text{m}/\text{mN}$ . Rappelons que le comportement en force a déjà été décrit par un modèle intervalle  $[G_F](p, [a], [b])$  (5.19).

Afin isoler les incertitudes paramétrique, on utilise le même principe qu celui présenté au § 4.4.4.2. Le schéma du système bouclé avec les pondérations qu'on utilise ici est donné par la Figure 5.12 .

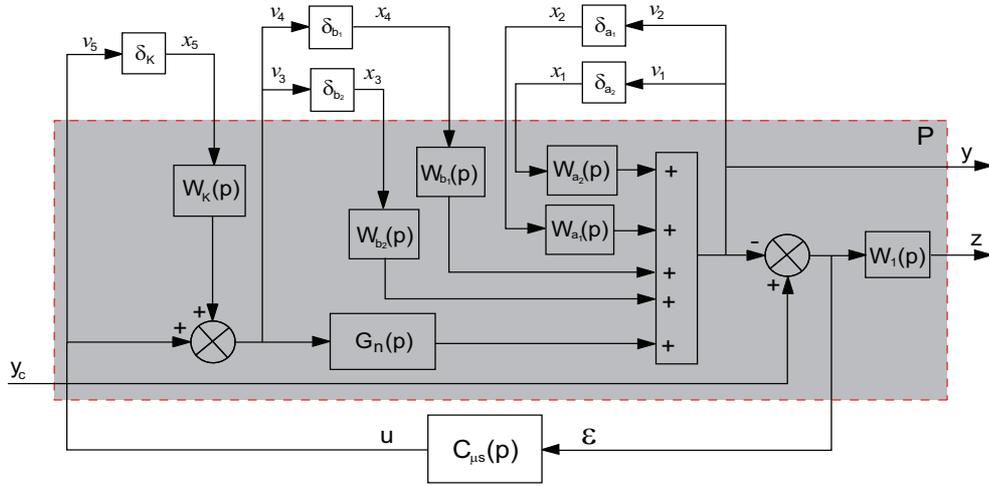


FIGURE 5.12 – Schéma de la boucle fermée avec les pondérations.

Les différentes incertitudes considérées sont normalisées  $-1 \leq \delta_{\{K, b_2, b_1, a_1, a_2\}} \leq 1$ . Les transferts donnés sur la Figure 5.12 sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 G_n(p) &= \hat{K} \frac{\hat{b}_2 p^2 + \hat{b}_1 p + 1}{\hat{a}_2 p^2 + \hat{a}_1 p + 1} \\
 W_{a_2}(p) &= \frac{-\alpha_2 p^2}{\hat{a}_2 p^2 + \hat{a}_1 p + 1} \\
 W_{a_1}(p) &= \frac{-\alpha_1 p}{\hat{a}_2 p^2 + \hat{a}_1 p + 1} \\
 W_{b_2}(p) &= \hat{K} \frac{\beta_2 p^2}{\hat{a}_2 p^2 + \hat{a}_1 p + 1} \\
 W_{b_1}(p) &= \hat{K} \frac{\beta_1 p}{\hat{a}_2 p^2 + \hat{a}_1 p + 1} \\
 W_K(p) &= \frac{\eta}{\hat{K}}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{K} = \text{mid}([K]) = 0.098 \\ \widehat{b}_2 = \text{mid}([b_2]) = 3.4345 \times 10^{-8} \\ \widehat{b}_1 = \text{mid}([b_1]) = 1.915 \times 10^{-4} \\ \widehat{a}_1 = \text{mid}([a_1]) = 0.71 \times 10^{-4} \\ \widehat{a}_2 = \text{mid}([a_2]) = 3.735 \times 10^{-8} \\ \eta = \text{rad}([K]) = 0.048 \\ \beta_2 = \text{rad}([b_2]) = 0.108 \times 10^{-8} \\ \beta_1 = \text{rad}([b_1]) = 0.26 \times 10^{-4} \\ \alpha_1 = \text{rad}([a_1]) = 0.453 \times 10^{-4} \\ \alpha_2 = \text{rad}([a_2]) = 2.5757 \times 10^{-8} \end{array} \right. \quad (5.38)$$

En partant du cahier des charges énoncé au § 5.3.1, on propose d'appliquer un filtre  $W_1(p)$  au signal d'erreur  $\epsilon$ . Sa fonction de transfert peut être calculée en utilisant la relation (4.47) :

$$W_1(p) = \frac{0.002667p + 1}{0.002667p + 0.01} \quad (5.39)$$

Le calcul du correcteur a été effectué sous Matlab ( *$\mu$ -Analysis ans Synthesis Toolbox*) en utilisant l'algorithme D-K itération. Le correcteur obtenu correspond à une valeur optimale  $\gamma = 3.778$  et à une structure d'ordre 21. Le numérateur et le dénominateur de ce dernier possèdent quatre pôles et quatre zéros stables identiques qui peuvent être simplifiés. Après avoir simplifié ces pôles et zéros, le transfert du correcteur  $C_{\mu s}(p)$  est finalement donné par :

$$C_{\mu s}(p) = \frac{Num_c(p)}{Den_c(p)} \quad (5.40)$$

tels que :

$$Num_c(p) = 0.5248(p + 2.243 \times 10^4)(p + 1289)(p + 279.6)(p^2 + 1187p + 3.659 \times 10^5)(p^2 + 1920p + 9.831 \times 10^5)(p^2 - 1306p + 2.518 \times 10^6)(p^2 + 2379p + 2.363 \times 10^7)(p^2 + 718.7p + 2.278 \times 10^7)(p^2 + 660.1p + 3.12 \times 10^7)(p^2 + 2416p + 3.283 \times 10^7).$$

$$Den_c(p) = (p + 1138)(p + 273.6)(p + 3.751)(p^2 + 1911p + 9.142 \times 10^5)(p^2 + 1009p + 2.644 \times 10^5)(p^2 + 1824p + 1.819 \times 10^7)(p^2 + 4379p + 2.408 \times 10^7)(p^2 - 115.6p + 2.324 \times 10^7)(p^2 + 3514p + 3.665 \times 10^7)(p^2 + 544.6p + 3.638 \times 10^7).$$

Malgré un ordre élevé de 17, ce correcteur a été implémenté en utilisant les deux objets (flexible et rigide) et les deux poutres piézoélectriques de longueur  $L = 16mm$  et  $L = 14mm$ . Les résultats obtenus sont tracés sur la Figure 5.13.

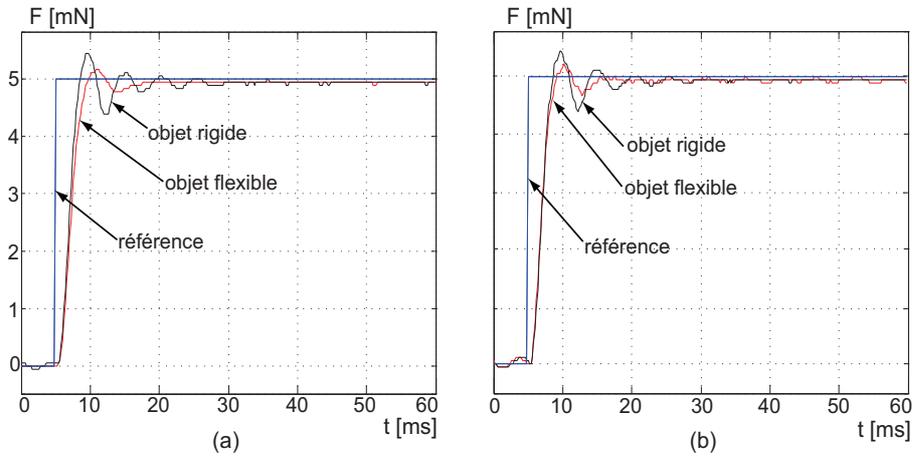


FIGURE 5.13 – Résultats expérimentaux avec  $C_{\mu s}(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 16mm$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur  $L = 14mm$ .

D'après la [Figure 5.13](#), les comportements obtenus présentent des dépassements non-négligeables, en particulier lorsque l'objet rigide est utilisé (dépassement de l'ordre de 9.8%). Les temps de réponse réalisés par le correcteur  $C_{\mu s}(p)$  sont d'environ 4ms et 8ms avec les deux objets flexible et rigide respectivement.

## 5.4 Comparaison des résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous comparons les résultats expérimentaux obtenus avec les deux méthodes de commande pour commander des poutres piézoélectriques de longueur comprise entre 14 mm et 16 mm et/ou des objets manipulés de souplesse  $s_o \in [3.271, 6.0748] \mu m/mN$ . La loi de commande RST synthétisée par intervalles assure les performances du cahier des charges en terme de dépassement, temps de réponse et erreur statique vis-à-vis des incertitudes paramétriques considérées sur la poutre piézoélectrique et vis-à-vis de la compliance des objets utilisés. Les temps de réponse et les erreurs statiques obtenus avec la commande robuste  $\mu$ -synthèse sont respectés mais les réponses à un échelon présentent un dépassement. Les performances temporelles (temps de réponse  $tr_{5\%}$ , dépassement  $D\%$  et erreur statique  $\epsilon$ ) réalisées par les correcteurs implémentés sont regroupées dans le [Tableau 5.2](#).

TABLE 5.2 – Performances de la boucle fermée réalisées par les correcteurs  $C_1$  et  $C_2$  calculés par intervalles et le correcteur  $C_\mu$  de la  $\mu$ -synthèse.

Méthode	Correcteur	objet	Poutre $L = 16 \text{ mm}$			Poutre $L = 14 \text{ mm}$		
			$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$	$tr_{5\%}$	$D$	$\epsilon$
intervalle	$C_1(p)$	rigide	4.12 ms	$\approx 0\%$	0%	4.49 ms	$\approx 0\%$	0%
		flexible	5.4 ms	$\approx 0\%$	0%	6.85 ms	$\approx 0\%$	0%
	$C_2(p)$	rigide	4.22 ms	$\approx 0\%$	0%	5.5 ms	$\approx 0\%$	0%
		flexible	5.8 ms	$\approx 0\%$	0%	7.15 ms	$\approx 0\%$	0%
$\mu$ -synthèse	$C_{\mu s}(p)$	rigide	8 ms	9.6%	0%	8.2 ms	9.8%	0%
		flexible	3.69 ms	3.7%	0%	5.11 ms	4.6%	0%

Nous avons également effectué une analyse harmonique des différentes boucles fermées en utilisant les correcteurs  $C_1(p)$ ,  $C_2(p)$  et  $C_{\mu s}(p)$ . Nous nous limitons dans cette analyse au cas d'une poutre piézoélectrique ayant une longueur  $L = 16\text{mm}$ . Les Figures 5.14 et 5.15 présentent les magnitudes expérimentales obtenues en utilisant les deux objets rigide et flexible respectivement.

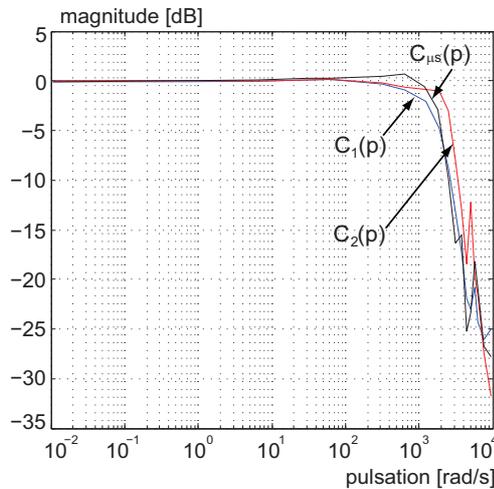


FIGURE 5.14 – Magnitudes expérimentales des systèmes en boucle fermée obtenues avec l'objet rigide.

D'après la Figure 5.14, lorsque l'objet rigide est utilisé, les bandes passantes obtenues avec les correcteurs  $C_1(p)$ ,  $C_2(p)$  et  $C_{\mu s}(p)$  sont de  $231\text{Hz}$ ,  $397\text{Hz}$  et  $300\text{Hz}$  respectivement. Ainsi, un pic obtenu avec le correcteur  $C_{\mu s}(p)$  et qui dépasse  $0\text{dB}$  se trouve à  $200\text{Hz}$ . En utilisant l'objet flexible (Figure 5.15), le correcteur  $C_{\mu s}(p)$  offre une meilleure bande passante ( $200\text{Hz}$ ), tandis que les bandes passantes obtenues avec les deux correcteurs  $C_1(p)$  et  $C_2(p)$  sont approximativement de  $134\text{Hz}$  et  $119\text{Hz}$  respectivement.

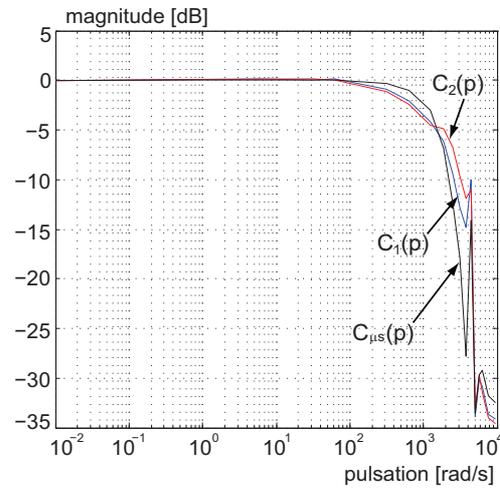


FIGURE 5.15 – Magnitudes expérimentales des systèmes en boucle fermée obtenues avec l’objet flexible.

## 5.5 Conclusion

L’étude menée dans ce chapitre a été consacrée à la commande en force appliquée par une poutre piézoélectrique sur des micro-objets. Cette commande en force est nécessaire afin de réussir la tâche de micromanipulation et afin d’éviter la destruction des objets manipulés. Durant la modélisation pour la commande, nous avons vu que le modèle tension-force dépend des caractéristiques du micro-objet manipulé et du modèle tension-déflexion des poutres piézoélectriques. Les techniques du calcul par intervalles ont été introduites pour caractériser la plage de variation des caractéristiques des micro-objets et des caractéristiques dimensionnelles de la poutre piézoélectrique. Ceci a permis d’établir un modèle à paramètres intervalles. Ensuite, nous avons proposé une méthode de synthèse d’un correcteur RST en utilisant l’inclusion paramètre par paramètre. Nous avons également testé une loi de commande  $\mu$ -synthèse pour contrôler la force de manipulation. La structure du correcteur RST intervalle est plus simple et d’ordre réduit par rapport à celle de la commande  $\mu$ -synthèse. Dans le cadre de cette application, une comparaison des deux méthodes de commande a été présentée à la fin du chapitre. Il a été montré que les performances voulues en force sont atteintes avec le correcteur RST. La commande  $\mu$ -synthèse assure toujours la stabilité mais pas les performances.



## Chapitre 6

# Application à la commande hybride d'une micropince

### 6.1 Introduction

Les tâches de prise-dépose (pick-and-place) sont couramment utilisées dans les applications de micromanipulation et de micro-assemblage. La micropince piézoélectrique à deux effecteurs est l'un des systèmes les plus utilisés pour réaliser ces tâches. Afin de réaliser la tâche de prise-dépose au mieux, nous souhaitons contrôler en position et en force la prise du micro-objet. Pour cela, un actionneur de la micropince est commandé en déflexion, tandis que l'autre est commandé en force [Rak07b] (voir Figure 6.1). Ce chapitre porte dans un premier temps sur la réalisation d'une micropince basée sur des poutres piézoélectriques dimensionnées. Ensuite, nous donnons les modèles intervalles de déflexion et de force en suivant les mêmes étapes de modélisation présentées aux Chapitres 4 et 5. Pour la commande de la micropince, nous synthétisons pour chaque poutre piézoélectrique une loi de commande par intervalles en utilisant les méthodes proposées aux chapitres précédents. Nous effectuons par la suite des expérimentations avec les correcteurs calculés. Enfin, nous présentons une commande hybride de la micropince permettant l'automatisation d'une tâche prise-dépose.

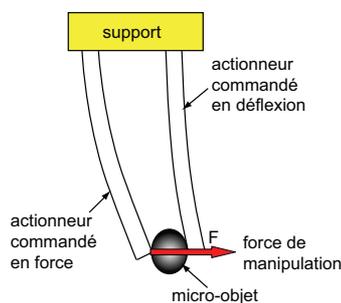


FIGURE 6.1 – Micropince piézoélectrique.

## 6.2 Développement de la micropince

Notre objectif est de concevoir une structure microrobotique à base d'actionneurs piézoélectriques capables de réaliser des tâches de prise-dépose. Il s'agit d'une micropince faite de deux actionneurs de serrage identiques et à fonctionnement indépendant. Les actionneurs formant notre micropince sont des unimorphes piézoélectriques (Figure 6.2). Les dimensions de ces actionneurs sont  $L \times w \times h = 18 \text{ mm} \times 2 \text{ mm} \times 0.3 \text{ mm}$  obtenues après un dimensionnement (voir Section 3.4). Les matériaux constituant leurs couches sont du PZT et du Nickel, dont les épaisseurs correspondantes sont de  $200 \mu\text{m}$  et de  $100 \mu\text{m}$  respectivement.

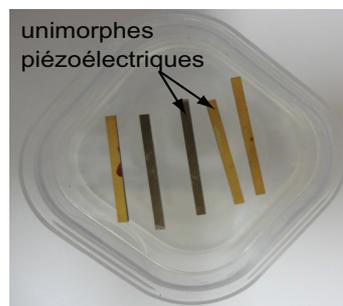


FIGURE 6.2 – Photographie d'unimorphes piézoélectriques.

Pour la réalisation de notre micropince, on propose de coller deux unimorphes piézoélectriques similaires sur un circuit imprimé double face comme indiqué sur la Figure 6.3-a. Le collage est fait en utilisant la colle conductrice "EPO-TEK H22" de la société *Physike Instrumente* pour faciliter les connections électriques. Chaque actionneur piézoélectrique de la micropince peut être commandé indépendamment de l'autre. La Figure 6.3-b présente une photographie de la micropince réalisée.

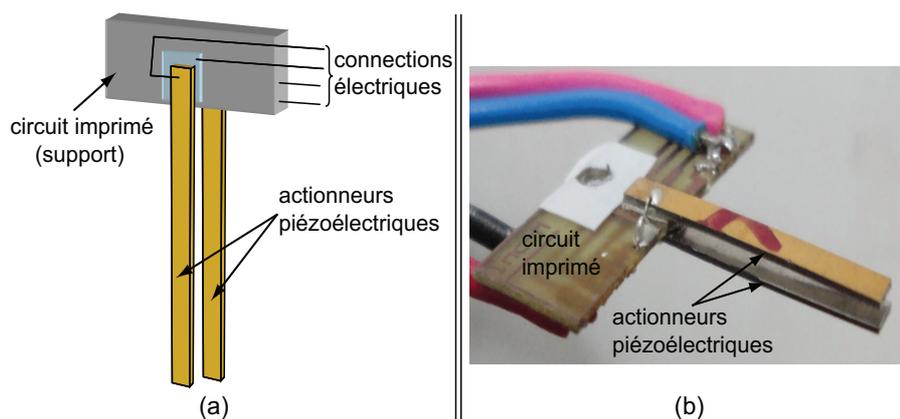


FIGURE 6.3 – a : structure de la micropince à base d'actionneurs piézoélectriques. b : prototype de notre micropince piézoélectrique.

La micropince fabriquée possède un écart (gap) de  $350 \mu m$  entre ses deux actionneurs piézoélectriques, ce qui permet de manipuler des objets de natures différentes dans une large gamme de dimension. De plus, des organes terminaux peuvent être fixés à l'extrémité des actionneurs dans le but d'adapter la forme de la zone de prise avec les caractéristiques des objets. Lorsque des tensions positives ou négatives sont appliquées aux actionneurs piézoélectriques, la micropince s'ouvre ou se ferme autour de sa position initiale permettant ainsi la prise-dépose de l'objet manipulé. Afin d'améliorer les performances des tâches, on se propose de commander chaque actionneur. Cette commande a été étudiée dans le [Chapitre 4](#) pour l'actionneur utilisé en déflexion et dans le [Chapitre 5](#) pour l'actionneur utilisé en force. Dans ce [Chapitres 6](#), nous étudions la supervision des deux actionneurs pour effectuer une tâche complète.

## 6.3 Modélisation et commande de la micropince

### 6.3.1 Modélisation de la micropince

Il existe deux approches permettant la modélisation des micropinces. La première approche consiste à utiliser une matrice de transfert liant les deux tensions  $U_\delta$  et  $U_F$  appliquées aux actionneurs, la sortie déflexion  $\delta$  et la sortie force  $F$  (voir [Figure 6.4-a](#)). Ce modèle considéré comme multivariable, décrit de manière plus précise le comportement de la micropince, en particulier le couplage entre ces différentes variables. En effet, ce dernier prend en compte l'influence de la déflexion d'un actionneur sur celle de l'autre. L'utilisation d'un correcteur multivariable permet donc de garantir des performances robustes. Cependant, cet type de modélisation est complexe, car il nécessite une connaissance précise des couplages entre les actionneurs. La seconde approche est basée sur la modélisation de chaque actionneur piézoélectrique indépendamment de l'autre [[Rak07b](#)] (voir [Figure 6.4-b](#)). Pour cela, un actionneur est modélisé en déflexion, tandis que l'autre est modélisé en force. L'avantage de cette approche est la simplicité de dérivation des deux modèles. Les perturbations dues à l'influence de la déflexion d'un actionneur sur celle de l'autre peuvent être rejetées par les correcteurs robustes utilisés. Dans notre étude, on utilise la seconde approche à cause de sa simplicité et la dérivation facile des lois de commande. Par ailleurs, les synthèses de lois de commande pour ces actionneurs indépendants ont été déjà présentées aux [Chapitres 4 et 5](#).

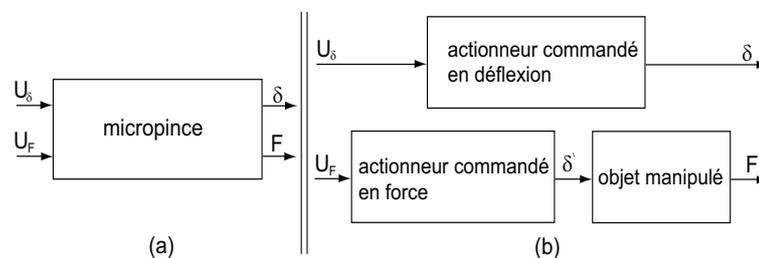


FIGURE 6.4 – a : micropince modélisée par un système multivariable. b : micropince modélisée par deux systèmes monovariables indépendants.

### 6.3.1.1 Modèle intervalle tension-déflexion

Les deux actionneurs piézoélectriques constituant la micropinçe étant similaires, nous ne ferons qu'un seul modèle intervalle décrivant le comportement tension-déflexion des deux actionneurs. Une loi de commande basée sur ce modèle intervalle permet d'assurer le comportement voulu en déflexion pour les deux actionneurs. La dérivation du modèle intervalle linéaire (tension-déflexion) est basée sur la modélisation présentée au [Chapitre 4](#).

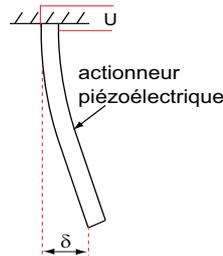


FIGURE 6.5 – Actionneur piézoélectrique d'un micropinçe.

Après avoir effectué les calculs, nous obtenons le modèle intervalle  $[G_\delta](p)$  décrivant le comportement tension-déflexion des deux actionneurs de la micropinçe :

$$[G_\delta](p) = [1.0735, 1.2165] \frac{[1.399, 1.421] \times 10^{-4} p + 1}{[5.942, 7.088] \times 10^{-8} p^2 + [5.276, 5.904] \times 10^{-6} p + 1} \quad (6.1)$$

### 6.3.1.2 Modèle intervalle tension-force

Le modèle intervalle tension-force peut être dérivé en se basant sur la modélisation détaillée au [Chapitre 5](#). La [Figure 6.6](#) présente un actionneur piézoélectrique exerçant une force sur un objet.

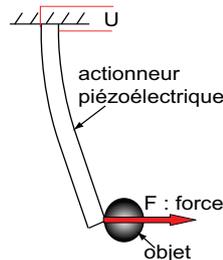


FIGURE 6.6 – Un actionneur piézoélectrique poussant un objet.

Nous choisissons ici de manipuler deux objets ayant des souplesses différentes. Nous considérons comme objets, une résistance CMS (objet rigide) de souplesse négligeable et un objet en polystyrène (objet souple) ayant une souplesse d'environ  $3.738 \mu m/mN$  (voir [Figure 6.7](#)). L'épaisseur des deux objets est d'environ  $350 \mu m$ .

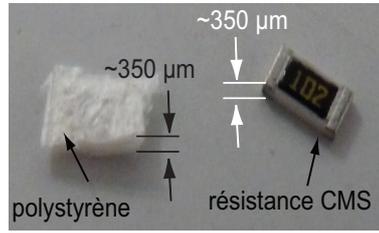


FIGURE 6.7 – Les objets à manipuler.

Dans un objectif d'avoir un intervalle de souplesse ayant une largeur réduite, nous utilisons la souplesse de la poutre piézoélectrique à la place de la celle de l'objet rigide. Ceci est valable tant que la souplesse de l'objet manipulé est inférieure à celle de la poutre piézoélectrique. En fait, lorsqu'un objet rigide est pris par une micropince, la force appliquée par un actionneur est transférée directement par le biais de l'objet rigide vers l'autre actionneur de la micropince. Dans ce cas, on manipule une poutre piézoélectrique au lieu de l'objet rigide. Pour cela, la borne inférieure de  $[s_o]$  est la même que la souplesse de la poutre piézoélectrique. La souplesse des deux poutres piézoélectriques est  $s_p = 1.93 \mu m/mN$ . L'intervalle de la souplesse devient donc :

$$[s_o] = [1.93, 3.738] \mu m/mN \quad (6.2)$$

Enfin, le modèle intervalle tension-force que nous utilisons pour la conception de la loi de commande en force est comme suit :

$$[G_F](p) = [0.1825, 0.308] \frac{[1.399, 1.421] \times 10^{-4} p + 1}{[1.865, 6.8] \times 10^{-8} p^2 + [4.935, 7.778] \times 10^{-5} p + 1} \quad (6.3)$$

### 6.3.2 Synthèse des lois de commande

La commande de la micropince nécessite le calcul de deux correcteurs assurant des performances pour la déflexion et pour la force de manipulation. Pour cela, la synthèse des deux correcteurs est basée sur l'une des méthodes de commande par intervalles présentées aux chapitres précédents.

#### 6.3.2.1 Commande en deflexion

Considérons le schéma de la [Figure 6.8](#), dans lequel la déflexion d'un actionneur piézoélectrique ayant un modèle tension-déflexion à l'intérieur du modèle intervalle  $[G_\delta](p)$  (6.1) est asservie par un correcteur  $C_\delta(p)$ .

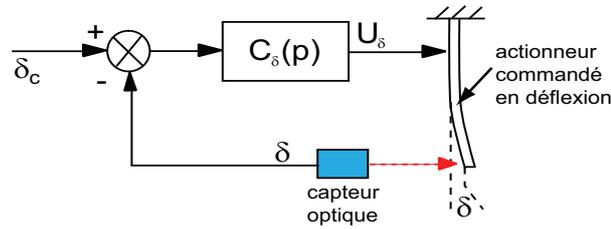


FIGURE 6.8 – Commande en déflexion d'un actionneur piézoélectrique.

En utilisant la méthode de commande basée sur les théorèmes d'inclusion (voir [Chapitre 4](#)), nous synthétisons un correcteur  $C_\delta(p)$  qui assure pour le modèle tension-déflexion  $[G_\delta](p)$ , le cahier des charges suivant :

- dépassement négligeable,
- temps de réponse  $tr_{5\%} \leq 20 \text{ ms}$ ,
- erreur statique bornée  $|\epsilon| \leq 1\%$ .

Le calcul mène à un correcteur intervalle  $[C](p)$ , dans lequel, nous choisissons un correcteur point implémentable comme suit :

$$C_\delta(p) = \frac{0.2p + 200}{p} \quad (6.4)$$

### 6.3.2.2 Commande en force

Le schéma concernant la commande en force est donné par la [Figure 6.9](#). Le comportement en force a été décrit par un modèle intervalle tension-force  $[G_F](p)$  défini dans ([6.3](#)). L'estimateur de force est utilisé en raison d'absence de capteur de force adéquat.

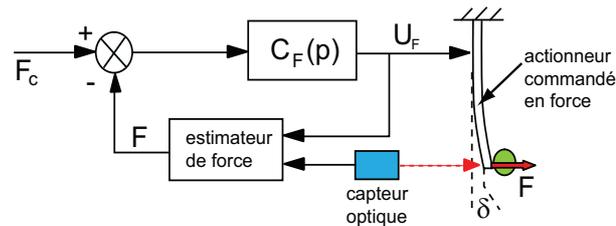


FIGURE 6.9 – Schéma de principe de la commande en force.

De même, nous avons conçu un autre correcteur  $C_F(p)$  pour commander la force de manipulation en utilisant la méthode d'inclusion présentée au [Chapitre 4](#). Ce correcteur permet d'assurer le cahier des charges suivant :

- dépassement négligeable ;
- temps de réponse  $tr_{5\%} \leq 8 \text{ ms}$  ;
- erreur statique bornée  $|\epsilon| \leq 1\%$ .

Nous avons choisi un temps de réponse plus rapide qu'en déflexion afin d'assurer toujours le maintien de l'objet entre les deux actionneurs de la micropince. En d'autres termes, si une consigne de déflexion est appliquée, la loi de commande en force doit réagir d'une manière plus rapide par rapport à celle du système de déflexion afin d'éviter un relâchement de l'objet.

Après avoir effectué les calculs, nous obtenons le correcteur suivant :

$$C_F(p) = \frac{0.2p + 1500}{p} \quad (6.5)$$

**Remarque 6.1.** *Comme nous avons utilisé un modèle(intervalle) pour les deux actionneurs piézoélectriques de la micropince, chacun de ceux-ci peut être commandé indifféremment en déflexion ou en force en utilisant les deux correcteurs (6.4) et (6.5) respectivement.*

### 6.3.3 Commande de la micropince

#### 6.3.3.1 Matériels mis en œuvre

Les matériels et logiciels d'expérimentation (Figure 6.10) sont composés de :

- la micropince et son support ;
- deux capteurs optiques de résolution 10 nm utilisés pour la mesure des déflexions des deux actionneurs piézoélectriques de la micropince ;
- deux amplificateurs de tensions pouvant fournir  $\pm 200 V$  ;
- une carte dSPACE et un PC avec le logiciel Matlab/Simulink permettent l'acquisition des données mesurées et la génération de la commande calculée.

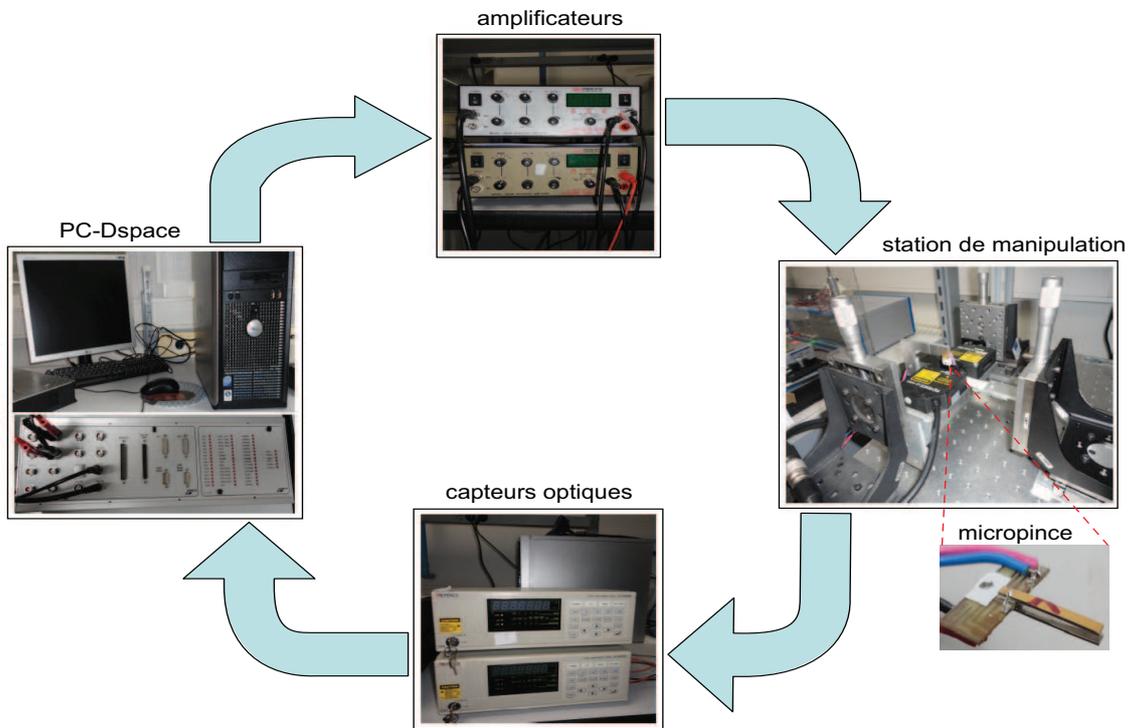


FIGURE 6.10 – Schéma de l'installation.

Les deux lois de commande synthétisées précédemment ont été implémentées. La Figure 6.11 montre le schéma de principe de l'expérimentation [Rak07b] [Rak11c]. Comme il n'existe pas de capteur de force adéquat, on utilise la même structure de l'estimateur de force présenté au Chapitre 5.

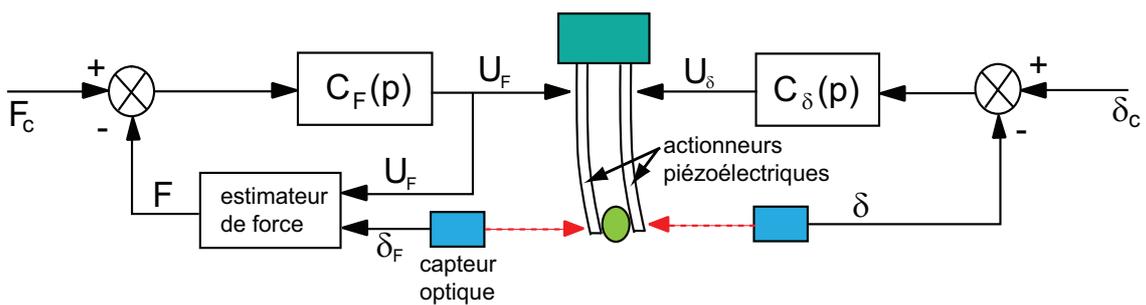


FIGURE 6.11 – Schéma de principe de la commande de la micropince piézoélectrique.

Afin de montrer la robustesse des correcteurs utilisés, nous avons réalisé deux régulations : une régulation en déflexion et une régulation en force. Rappelons que toutes les expérimentations ont été faites en utilisant les deux types d'objets indiqués précédemment : la résistance CMS et l'objet polystyrène.

La taille de ces objets est approximativement  $350 \mu m$ , ce qui rend les écarts ( $\Delta\delta_i \approx 0$ ) entre les actionneurs et l'objet à manipuler négligeables (voir Figure 6.12). Ceci permet dans un premier temps de faciliter sa mise en place entre les deux actionneurs.

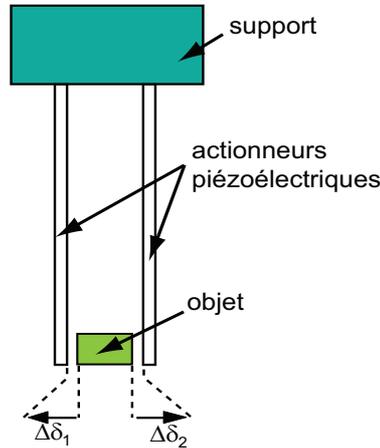


FIGURE 6.12 – Écarts  $\Delta\delta_i$  entre les actionneurs et les extrémités de l'objet.

### 6.3.3.2 Régulation en déflexion

Après avoir implémenté les deux correcteurs (6.4) et (6.5) en utilisant la résistance CMS comme objet à manipuler, on obtient les résultats illustrés sur la Figure 6.13. Dans l'état initial, la déflexion et la force sont nulles. Puis, à l'instant  $t = 42 \text{ ms}$ , un échelon de déflexion d'amplitude  $20 \mu m$  est appliqué à l'entrée  $\delta_c$ . Un effet est observé sur la réponse en force mais ce dernier est rapidement rejeté. Ensuite, une série d'échelons en force est appliquée à l'entrée  $F_c$ . De même, à chaque échelon en force appliqué, on constate une influence sur la déflexion de manipulation mais avec des amplitudes différentes. Ceci est dû au changement du point de fonctionnement lors de la commande en force. Les effets observés sur la réponse de déflexion ont été rapidement rejetés par le correcteur  $C_\delta(p)$  pour la déflexion. Enfin, à l'instant  $t = 540 \text{ ms}$  la consigne de déflexion est remise à zéro. L'influence de la déflexion sur le comportement de la force est considérable (une variation d'environ  $2.5 \text{ mN}$ ) à cause du modèle utilisé qui ne prend pas en compte le couplage entre les actionneurs de la micropinçe.

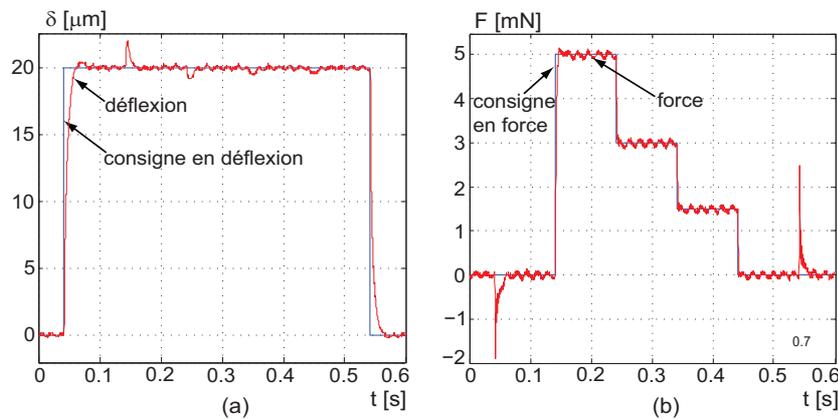


FIGURE 6.13 – Régulation en déflexion avec l'objet rigide (résistance CMS). a : réponse en déflexion. b : réponse en force.

Afin d'évaluer les réponses temporelles, un zoom est réalisé sur chaque sortie (voir la Figure 6.14). On constate d'après la Figure 6.14 que les exigences du cahier des charges (performances souhaitées en déflexion et en force) sont respectées. En effet, les temps de réponse obtenus sont respectivement d'environ 14.4 ms et 4.1 ms pour la déflexion et pour la force. Enfin, les dépassements et les erreurs statiques obtenus sont négligeables.

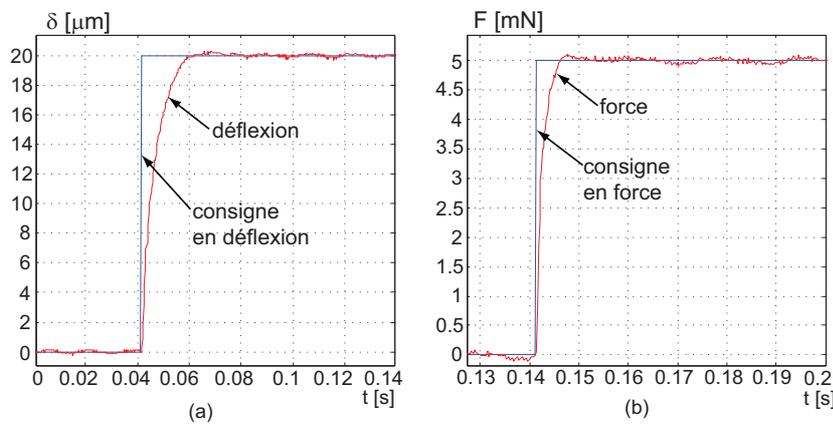


FIGURE 6.14 – a : zoom réalisé sur la réponse de déflexion. b : zoom réalisé sur la réponse de force.

On réalise maintenant les mêmes expérimentations que précédemment avec l'objet souple (polystyrène). Les résultats obtenus sont tracés sur la Figure 6.15. On remarque que les deux correcteurs ont joué leur rôle en termes de performances et de rejet de perturbation. L'amplitude des pics observés sur la déflexion lors de l'application d'une série d'échelons en force est faible (inférieure à 1  $\mu\text{m}$ ). Ceci peut être traduit par un faible couplage du transfert force-déflexion. Par contre, l'influence de la déflexion sur la force est significative (2 mN) car le couplage du transfert déflexion-force est important.

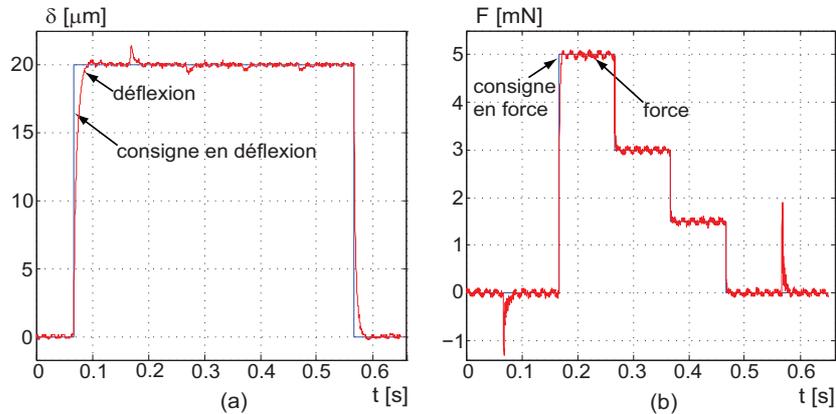


FIGURE 6.15 – Régulation en déflexion avec l'objet souple (polystyrène). a : réponse en déflexion. b : réponse en force.

Pour analyser les performances des systèmes bouclé, nous effectuons un zoom sur les réponses de la Figure 6.15. Dans ce cas de manipulation d'objet souple, les deux correcteurs utilisés assurent les performances voulues pour la déflexion et pour la force (voir Figure 6.16). En effet, les temps de réponse obtenus sont de 16.3 ms et de 4.1 ms pour la commande en déflexion et pour la commande en force respectivement. Les dépassements et les erreurs statiques sont négligeables.

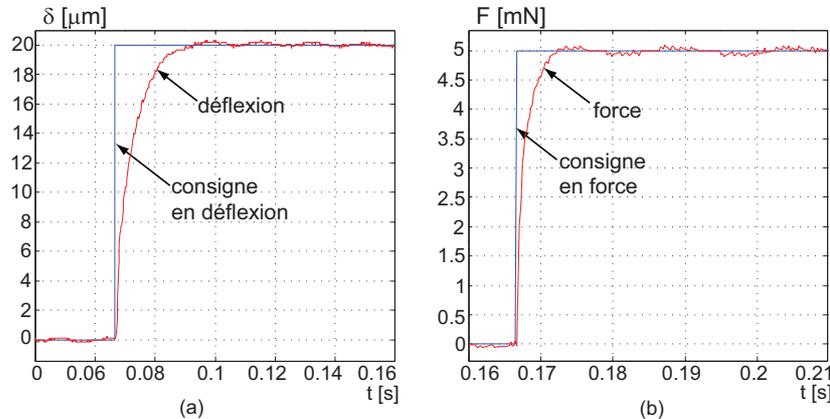


FIGURE 6.16 – a : zoom réalisé sur la réponse de déflexion. b : zoom réalisé sur la réponse de force.

### 6.3.3.3 Régulation en force

Nous considérons maintenant la variation de la déflexion comme une perturbation. Les résultats obtenus avec l'objet rigide (résistance CMS) sont présentés sur la Figure 6.17. La déflexion et la force appliquée à la résistance CMS sont initialement nulles

(position de repos). À l'instant  $t = 96 \text{ ms}$ , nous avons appliqué une consigne de force d'amplitude  $5 \text{ mN}$ . Cette force est transférée par le biais de l'objet vers l'actionneur commandé en déflexion. Ceci engendre une petite variation ( $1.5 \mu\text{m}$ ) sur la déflexion qui est rapidement rejetée (voir la Figure 6.17-b). Ensuite, une succession d'échelons négatifs et positifs est appliquée à l'entrée déflexion  $\delta_c$ . D'après la Figure 6.17-a, un effet est observé sur le comportement en force. Bien que l'amplitude des échelons en déflexion appliqués (entre les instants  $396 \text{ ms}$  et  $846 \text{ ms}$ ) est la même, les pics observés sur la réponse de la force sont différents. Ceci est dû au changement du point de fonctionnement. Lorsque l'amplitude de la déflexion devient grande, l'effet sur la force est significatif. Ceci est constaté particulièrement aux instants  $245.8 \text{ ms}$  et  $995.8 \text{ ms}$ . Le correcteur  $C_F(p)$  a joué son rôle en réagissant rapidement et rejetant les perturbations. Enfin, les deux sorties (déflexion et force) sont remises à zéro (état de repos).

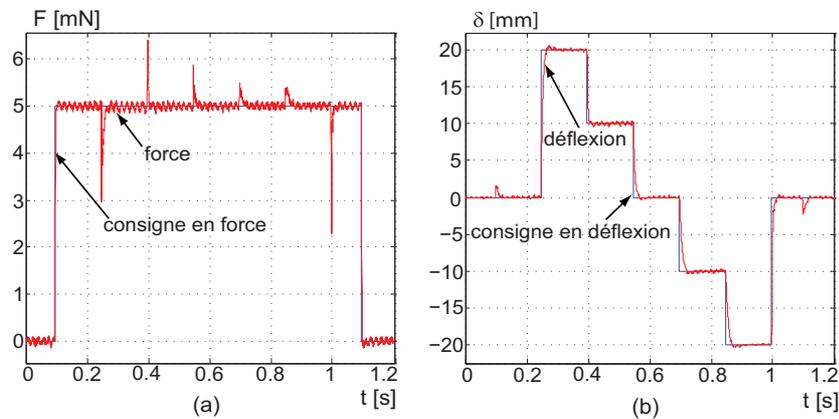


FIGURE 6.17 – Régulation en force avec l'objet rigide (résistance CMS). a : réponse en déflexion. b : réponse en force.

Pour analyser les performances temporelles, un zoom est effectué sur les courbes de la Figure 6.17. Les comportements obtenus en déflexion et en force correspondent bien au cahier des charges. En effet, les temps de réponse réalisés par les deux actionneurs commandés sont respectivement de  $13.7 \text{ ms}$  et de  $3.8 \text{ ms}$  et les erreurs statiques tendent vers zéro.

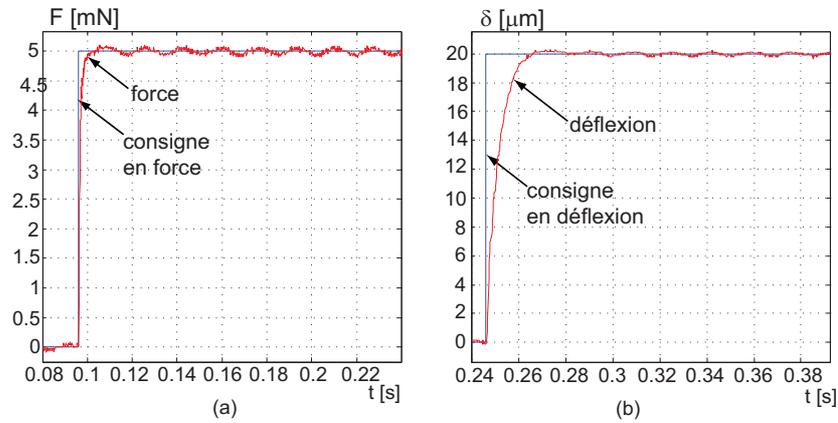


FIGURE 6.18 – a : zoom réalisé sur le comportement en force. b : zoom réalisé sur le comportement en déflexion.

On a également effectué une régulation en force en utilisant l'objet de polystyrène. Les résultats expérimentaux obtenus sont tracés sur la Figure 6.19. Au repos, la déflexion et la force sont nulles. À l'instant  $82.4 \text{ ms}$ , un échelon en force d'amplitude  $5 \text{ mN}$  est appliqué à l'entrée  $F_c$ . Cela a engendré une variation sur la déflexion de l'autre actionneur qui est rapidement rejetée par le correcteur  $C_\delta(p)$ . Ensuite, une série d'échelons positifs et négatifs en déflexion est appliquée à l'entrée  $\delta_c$ . De même, cela influence la sortie de la force. L'ordre de grandeur de la variation de la force dépend de l'amplitude d'échelon en déflexion appliqué. En effet, plus l'amplitude d'échelon en déflexion est grande, plus l'effet sur la sortie de la force est significatif. Cela est constaté en particulier aux instants  $232.4 \text{ ms}$  et  $982.4 \text{ ms}$  où une chute de la force d'environ  $2 \text{ mN}$  est observée avant que le correcteur  $C_F(p)$  réagisse et rejette la perturbation. Enfin, la force et la déflexion sont remises à zéros (état initial).

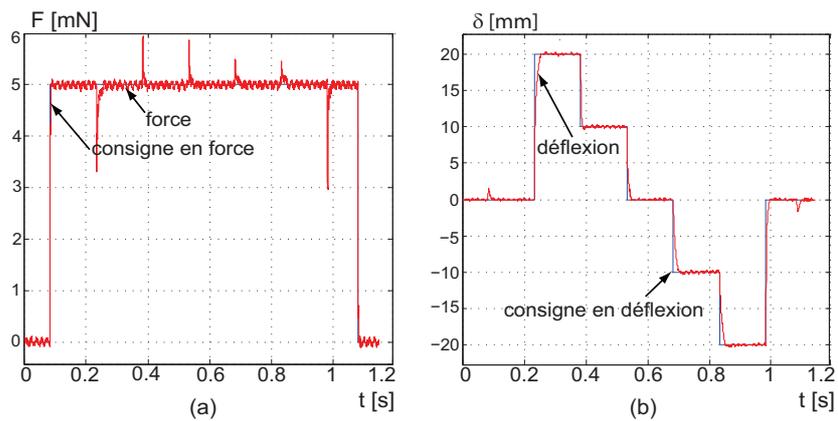


FIGURE 6.19 – Régulation en force avec l'objet souple (polystyrène). a : réponse en déflexion. b : réponse en force.

La Figure 6.20 présente les réponses en déflexion et en force après avoir effectué un zoom sur les courbes de la Figure 6.19. D'après la Figure 6.20, le cahier des charges est respecté. En effet, les dépassements et les erreurs statiques sont pratiquement négligeables. Les temps de réponse obtenus sont  $3.2\text{ ms}$  et  $16.9\text{ ms}$  pour les comportements en force et en déflexion respectivement.

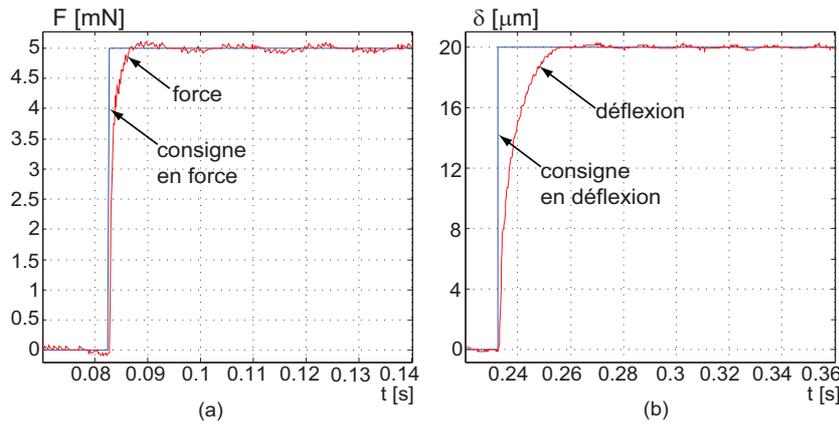


FIGURE 6.20 – a : zoom réalisé sur le comportement en force. b : zoom réalisé sur le comportement en déflexion.

## 6.4 Réalisation d'une tâche de prise-dépose avec la micropince

Notre objectif dans cette partie est de réaliser des tâches de prise-dépose (pick-and-place) automatisées. Les objets manipulés possèdent une taille strictement inférieure au gap de la micropince (voir Figure 6.12). On utilise toujours les deux correcteurs synthétisés précédemment  $C_\delta(p)$  et  $C_F(p)$ . Par la suite, on adopte les notations  $P_\delta$  et  $P_F$  pour identifier respectivement l'actionneur commandé en déflexion et l'actionneur commandé en force.

### 6.4.1 Séquence d'une tâche de prise-dépose

Une tâche de prise-dépose se déroule selon la séquence de la Figure 6.21.

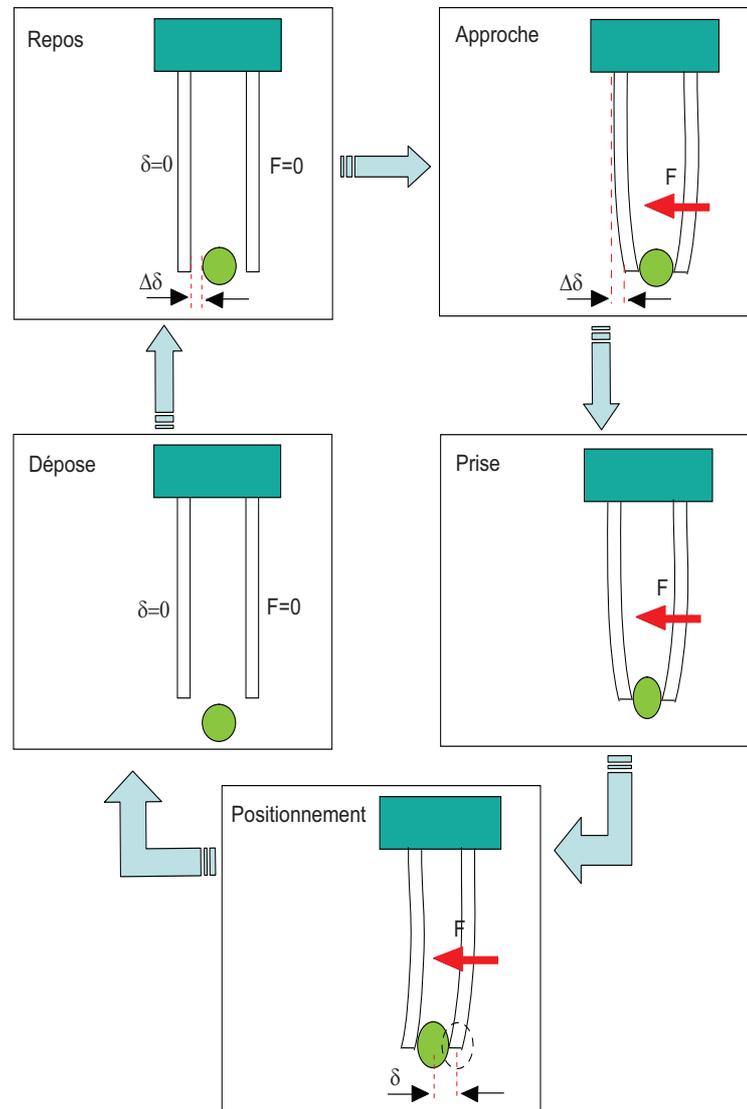


FIGURE 6.21 – Déroulement d'une tâche de prise dépose.

Cette séquence peut être détaillée ci-dessous en considérant chaque tâche élémentaire comme une étape :

### Étape 1 : position initiale(repos).

Les deux actionneurs piézoélectriques de la micropince sont initialement à leur position de repos, durant laquelle l'objet se trouve entre eux-ci mais sans contact. Dans cette étape, les sorties de déflexion et de force sont nulles, c'est à dire  $\delta = 0$  et  $F = 0$ . Les valeurs des déflexions et des forces données par la suite se réfèrent à ces valeurs de repos.

### Étape 2 : approche.

Les deux actionneurs piézoélectriques s'approchent et s'arrêtent jusqu'au contact de l'objet. L'approche des deux actionneurs vers l'objet est effectuée en commandant l'actionneur  $P_\delta$  en déflexion et l'actionneur  $P_F$  en force. La consigne en déflexion, notée  $\delta_{ap}$  à appliquer à l'actionneur  $P_\delta$  est l'écart entre l'actionneur  $P_\delta$  et l'objet. Or, cet écart est généralement inconnu. Lorsque la position de l'objet est connue (l'objet est généralement positionné au milieu du gap), la consigne  $\delta_{ap}$  peut être déterminée à partir de la taille de l'objet et le gap de la micropince. Pour assurer le contact de l'actionneur  $P_F$  avec l'objet, une force de faible amplitude, notée  $F_{ap}$  est appliquée comme consigne pour l'actionneur  $P_F$ . L'étape approche est souvent réalisée en utilisant des consignes en déflexion et en force en rampe jusqu'à la valeur souhaitée (voir [Figure 6.22](#)), ce qui permet d'éviter un choc brusque au moment du contact.

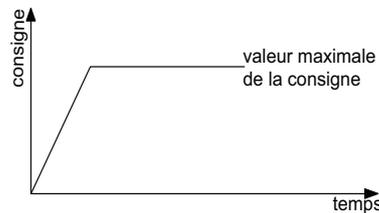


FIGURE 6.22 – Consigne en rampe jusqu'à une valeur souhaitée.

### Étape 3 : prise.

Lorsque les deux sorties atteignent leurs consignes à une erreur statique près, c'est à dire  $|\delta - \delta_{ap}| \leq \epsilon_\delta$  et  $|F - F_{ap}| \leq \epsilon_F$ , une force de saisie donnée, notée  $F_{pr}$  est appliquée à l'entrée du système bouclé avec l'actionneur  $P_F$  afin de réaliser une prise de l'objet tandis que l'autre actionneur ( $P_\delta$ ) est toujours régulé en déflexion pour garder sa position d'équilibre  $\delta_{ap}$ .

### Étape 4 : positionnement.

Une fois la force de prise  $F$  souhaitée est atteinte à une erreur statique près, c'est à dire  $|F - F_{pr}| \leq \epsilon_F$ , l'actionneur  $P_\delta$  est commandé en position afin d'effectuer un transport de l'objet à un lieu de dépose. La consigne de déflexion utilisée ici est notée  $\delta_{po}$ . L'actionneur  $P_F$  est toujours régulé en force pour assurer le maintien de l'objet.

### Étape 5 : dépose.

Lorsque la déflexion de l'actionneur  $P_\delta$  arrive à la position de dépose (à une erreur statique près  $|\delta - \delta_{po}| \leq \epsilon_\delta$ ), une consigne en déflexion  $\delta_{dp} = 0$  et une consigne en force  $F_{dp} = 0$  sont appliquées aux systèmes bouclés avec les actionneurs  $P_\delta$  et  $P_F$  respectivement. Ceci permet l'écartement des deux actionneurs afin de relâcher l'objet maintenu.

### 6.4.2 Représentation de la séquence par automate hybride

Tout système impliquant des phénomènes continus et discrets (ou événementiel) peut être vu comme un système dynamique hybride. Dans notre étude, la séquence de prise-dépose ainsi que les systèmes continus bouclés peuvent être facilement représentés par un automate hybride [Hen98]. Il est donc nécessaire d'utiliser une commande hybride permettant la gestion de la séquence des tâches et les commandes des systèmes continus de chaque tâche. Selon la définition d'un automate hybride donnée dans [Sim00] [Bra98], notre automate hybride noté  $\mathbb{H}$ , peut être défini par le 8-uplet :

$$H = (Q, X, \Sigma, A, Inv, f, q_0, x_0) \quad (6.6)$$

où :

- $Q$  est l'ensemble fini des sommets (appelés aussi places ou situations), tels que :

$$Q = \{q_{repos}, q_{approche}, q_{prise}, q_{positionnement}, q_{dépose}\} \quad (6.7)$$

Ces sommets représentent les états discrets.

- $X$  est l'espace d'état à composantes continues (ensemble fini de variables réelles) :

$$X = \{\delta, F/\delta \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{R}^+\} \quad (6.8)$$

où

$\delta$  et  $F$  sont respectivement la déflexion de l'actionneur  $P_\delta$  et la force appliquée par l'actionneur  $P_F$  au micro-objet.

- $\Sigma$  est un ensemble fini d'événements. Dans notre cas, cet ensemble est défini par un seul élément, c'est le départ-cycle  $dcy$  donné par l'utilisateur pour lancer le cycle :

$$\Sigma = \{dcy\} \quad (6.9)$$

- $A$  est un ensemble fini d'arcs (dits aussi transitions discrètes). Une transition est définie par un quintuplet de la forme  $(q_i, G, \sigma, J, q_{i+1})$  notée  $q_i \xrightarrow{G, \sigma, J} q_{i+1}$ . Les sommets  $q_i$  et  $q_{i+1}$  sont les sommets source et destination respectivement de la transition.  $G$  est la garde que doivent satisfaire les états  $X \in G$  pour pouvoir franchir la transition.  $\sigma \in \Sigma$  est l'événement qui peut être reçu ou généré lors du franchissement.  $J \in X$  est l'ensemble des états à réinitialiser lors du passage au sommet  $q_{i+1}$  (franchissement de la transition). Nous avons :

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (q_{repos}, [], dcy, [], q_{approche}), \\ (q_{approche}, |\delta - \delta_{ap}| \leq \epsilon_\delta \wedge |F - F_{ap}| \leq \epsilon_F, [], [], q_{prise}), \\ (q_{prise}, |F - F_{pr}| \leq \epsilon_F, [], [], q_{positionnement}), \\ (q_{positionnement}, |\delta - \delta_{po}| \leq \epsilon_\delta, [], [], q_{dépose}), \\ (q_{dépose}, |\delta - \delta_{dp}| \leq \epsilon_\delta \wedge |F - F_{dp}| \leq \epsilon_F, [], [], q_{repos}) \\ \} \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Dans (6.10),  $\square$  désigne que  $G$ ,  $\sigma$  ou  $J$  n'existe pas (ensemble vide).

- $Inv = \{Inv(q_i) \subset X/q_i \in Q\}$  est une collection d'ensemble appelée invariants de la place  $q_i$ . Lorsque le système est dans la place  $q_i$ , l'état continu doit vérifier  $x \in Inv(q_i)$ . Nous avons :

$$Inv = \{Inv(q_{repos}), Inv(q_{approche}), Inv(q_{prise}), Inv(q_{positionnement}), Inv(q_{dépose})\} \quad (6.11)$$

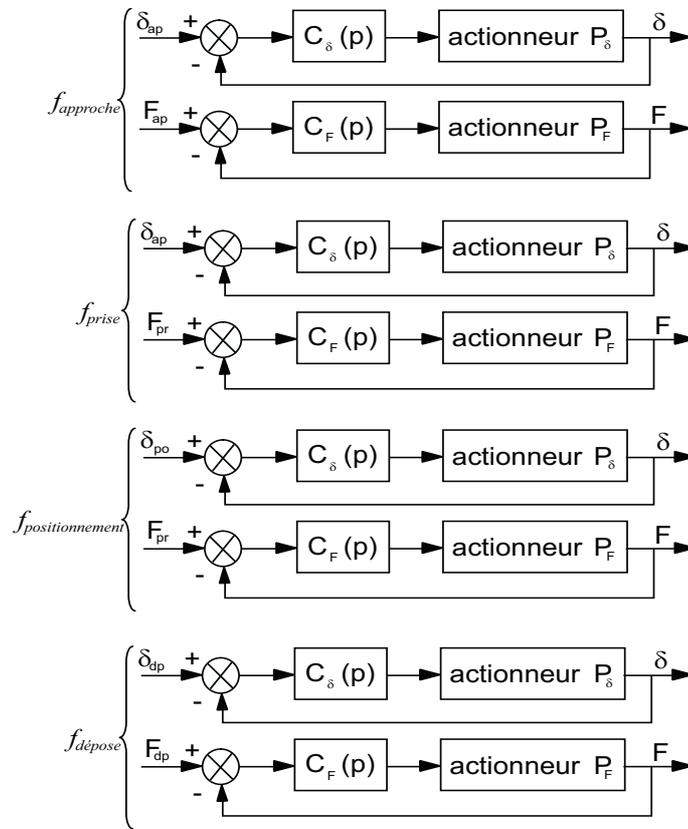
tels que :

$$\begin{aligned} Inv(q_{repos}) &= (|\delta| \leq \epsilon_\delta, |F| \leq \epsilon_F) \\ Inv(q_{approche}) &= (0 \leq \delta \leq \delta_{ap}, 0 \leq F \leq F_{ap}) \\ Inv(q_{prise}) &= (|\delta - \delta_{ap}| \leq \epsilon_\delta, F_{ap} \leq F \leq F_{pr}) \\ Inv(q_{positionnement}) &= (\delta_{ap} \leq \delta \leq \delta_{po}, |F - F_{pr}| \leq \epsilon_F) \\ Inv(q_{dépose}) &= (|\delta| \leq \epsilon_\delta, |F| \leq \epsilon_F) \end{aligned} \quad (6.12)$$

- $f$  est un ensemble de fonctions vectorielles telles que, à un sommet  $q_i$ , l'évolution des variables continues est décrite par des équations différentielles  $\dot{x} = f_{q_i}(x)$ . Dans notre cas, ces équations différentielles décrivent le comportement des systèmes en boucle fermée (commande en déflexion et commande en force). Ici, nous n'écrivons pas les fonctions différentielles pour chaque sommet mais nous les représentons directement par les schémas fonctionnels des systèmes bouclés. On a donc :

$$f = \{f_{repos}, f_{approche}, f_{prise}, f_{positionnement}, f_{dépose}\} \quad (6.13)$$

Les composantes du vecteur  $f$  décrivent les trajectoires différentielles des différents sommets de l'automate. La Figure 6.23 montre les schémas des systèmes bouclés correspondants à chaque composante du vecteur  $f$  donné dans (6.13).

FIGURE 6.23 – Schémas correspondants à chaque composante du vecteur  $f$ .

–  $q_0$  est le sommet initial, tel que :

$$q_0 = q_{repos} \quad (6.14)$$

–  $x_0$  est l'état continu initial :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

À partir des éléments ci-dessus, on construit le schéma de la [Figure 6.24](#) décrivant le cycle repos-approche-prise-positionnement-dépose automatisé.

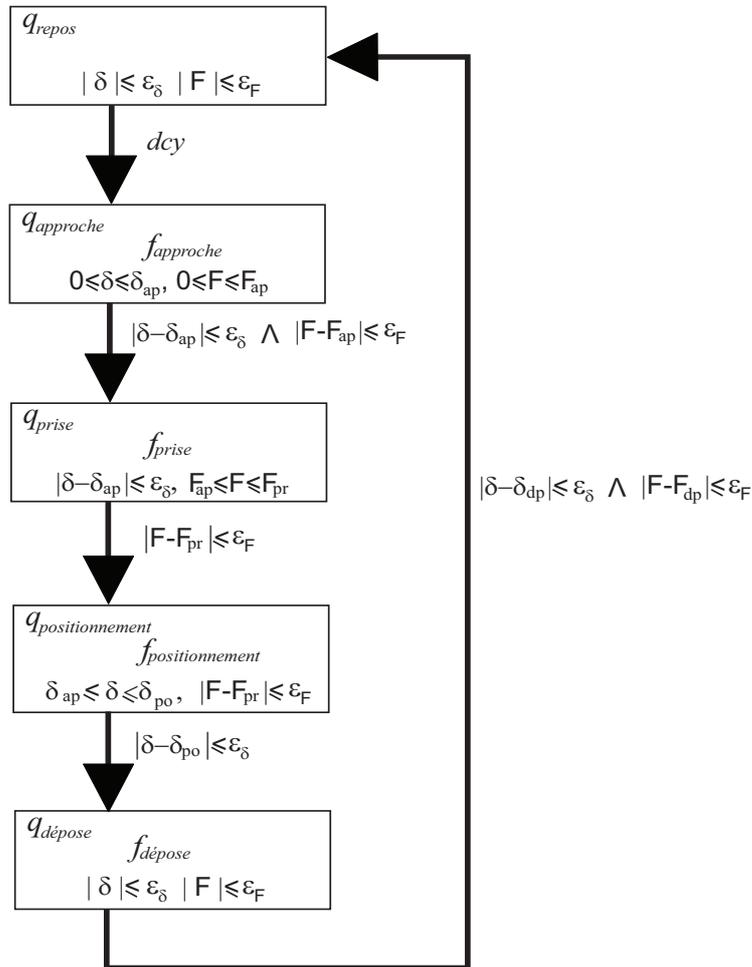


FIGURE 6.24 – Automate représentant le cycle repos-approche-prise-positionnement-dépose automatisé.

### 6.4.3 Résultats expérimentaux

L'objectif ici est de réaliser une tâche de prise-dépose en se basant sur l'automate donné par la Figure 6.24. Afin de bien observer les comportements en déflexion et en force (en particulier leurs régimes permanents) durant la tâche, nous proposons d'associer aux conditions de franchissement des transitions  $q_{approche} \rightarrow q_{prise}$ ,  $q_{prise} \rightarrow q_{positionnement}$  et  $q_{positionnement} \rightarrow q_{dépose}$ , un événement  $p \in G$  à générer par l'utilisateur. L'événement  $p$  permet également de visualiser le déroulement de chaque étape de la tâche. En effet, le déclenchement de ces transitions ne peut donc se produire que si les conditions de franchissement correspondantes (voir Figure 6.24) sont validées et que l'événement associé  $p$  est vrai.

Dans ce cas, l'ensemble d'arcs  $A$  de l'automate  $\mathbb{H}$  devient :

$$\begin{aligned}
 A = \{ & \\
 & (q_{repos}, \square, dcy, \square, q_{approche}), \\
 & (q_{approche}, |\delta - \delta_{ap}| \leq \epsilon_\delta \wedge |F - F_{ap}| \leq \epsilon_F, p, \square, q_{prise}), \\
 & (q_{prise}, |F - F_{pr}| \leq \epsilon_F, p, \square, q_{positionnement}), \\
 & (q_{positionnement}, |\delta - \delta_{po}| \leq \epsilon_\delta, p, \square, q_{dépose}), \\
 & (q_{dépose}, |\delta - \delta_{dp}| \leq \epsilon_\delta \wedge |F - F_{dp}| \leq \epsilon_F, p, \square, q_{repos}) \\
 & \}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Dans toutes les étapes du cycle, les conditions de transitions choisies sont  $\epsilon_\delta = 0.1 \mu m$  pour la déflexion de l'actionneur  $P_\delta$  et  $\epsilon_F = 0.3 mN$  pour la force de l'actionneur  $P_F$ . Ces conditions tiennent compte de la précision des capteurs utilisés. Les expérimentations ont été faites en utilisant un objet rigide de taille  $2 mm \times 1 mm \times 0.25 mm$ . À chaque expérimentation, on positionne l'objet au milieu de la micropinçe de manière à avoir des écarts entre les extrémités de l'objet et les actionneurs de la micropinçe de l'ordre de  $50 \mu m$ . La commande hybride de la micropinçe est réalisée en utilisant la carte dSPACE et le Toolbox Statflow de Matlab/Simulink.

Initialement, les deux actionneurs piézoélectriques sont en position de repos ( $\delta = 0$  et  $F = 0$ ). Après avoir mis en fonctionnement l'automate (transition *dcy* validée), les deux actionneurs de la micropinçe s'approchent simultanément de l'objet (voir Figure 6.25-a). La commande en déflexion et la commande en force dans cette étape ont été réalisées en utilisant des consignes en rampe jusqu'à une valeur souhaitée. Les valeurs maximales de ces consignes appliquées sont  $\delta_{ap} = 50 \mu m$  et  $F_{ap} = 1 mN$ . Lorsque la phase approche est terminée (c'est à dire les conditions  $|\delta - 50| \leq 0.1 \mu m \wedge |F - 1| \leq 0.3 mN$  et l'événement  $p$  sont vrais), l'actionneur  $P_F$  est commandé en appliquant un échelon d'amplitude  $F_{pr} = 5 mN$ . Ceci permet d'effectuer une prise de l'objet (voir Figure 6.25-b).

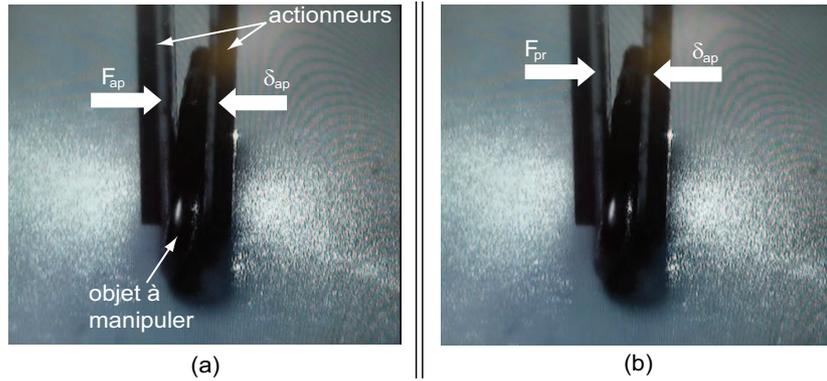


FIGURE 6.25 – a : approche des deux actionneurs piézoélectriques. b : prise de l'objet.

Lorsque l'objet est pris, on effectue une manipulation de ce dernier en appliquant une série d'échelons positifs et négatifs au système bouclé avec l'actionneur  $P_\delta$  (voir Figure 6.26-a). Les échelons appliqués ont des amplitudes  $10 \mu m$  et sont superposés à la composante continue  $50 \mu m$ . Après avoir manipulé l'objet, la déflexion de l'actionneur

$P_\delta$  est remise à sa position de prise pour déposer l'objet sur le lieu de prise. Lors de cette manipulation, l'actionneur  $P_F$  est toujours régulé en force ( $F = 5 \text{ mN}$ ). Enfin, arrivé sur le lieu de dépose (voir Figure 6.26-b), l'objet est relâché en réinitialisant les consignes des actionneurs à zéro, c'est à dire  $\delta_{dp} = 0$  et  $F_{dp} = 0$ .

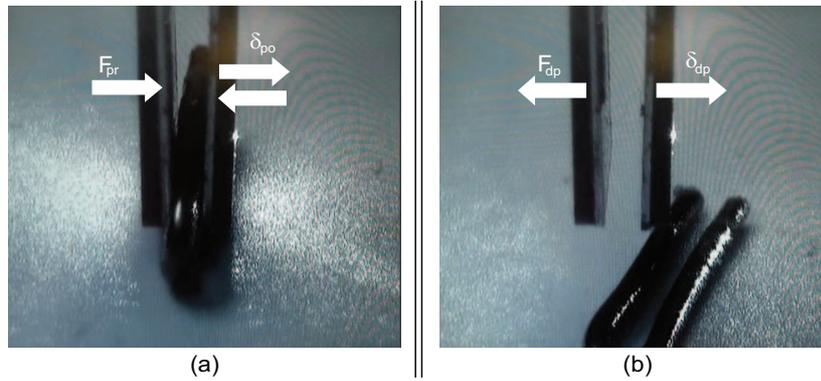


FIGURE 6.26 – a : manipulation de l'objet. b : dépose de l'objet.

La Figure 6.27 illustre l'évolution de la déflexion de l'actionneur  $P_\delta$  et la force appliquée par l'actionneur  $P_F$  à un objet rigide durant le cycle prise-dépose automatisé. D'après la Figure 6.27, on constate que les correcteurs utilisés assurent une meilleure qualité de la tâche de prise-dépose. En effet, les comportements obtenus sont sans dépassement. Ainsi, lorsqu'une consigne de déflexion est appliquée, un effet est observé sur la réponse de la force et vice versa. Ces effets sont rapidement rejetés par les correcteurs utilisés.

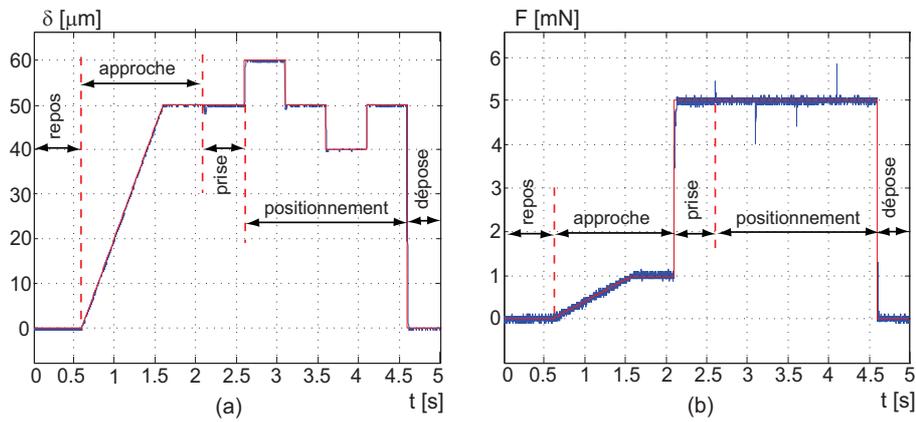


FIGURE 6.27 – Résultats expérimentaux du cycle prise-dépose automatisé obtenus avec l'objet rigide. a : évolution de la déflexion. b : évolution de la force.

## 6.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté une application des techniques d'intervalles pour commander une micropince piézoélectrique. À cet effet, une micropince à base d'actionneurs piézoélectriques de type poutres unimorphes a été d'abord réalisée. Ensuite, nous avons effectué une modélisation par intervalles de chaque actionneur de la micropince basée sur les propositions du [Chapitres 4 et 5](#). Puis, en utilisant une des méthodes de commande par intervalles proposée au [Chapitre 4](#), nous avons calculé indépendamment deux correcteurs pour la commande en déflexion et la commande en force. Les résultats expérimentaux ont montré que les performances des systèmes bouclés en utilisant les deux correcteurs correspondent au cahier des charges.

Nous avons également présenté dans ce chapitre une commande hybride de la micropince en utilisant les mêmes correcteurs calculés. Cette dernière permet de réaliser une tâche de prise-dépose automatisée. Une tâche de prise-dépose consiste à saisir fermement un objet, le déplacer et le déposer en une autre position. Nous avons détaillé et modélisé les opérations à exécuter dans chaque étape du cycle de prise-dépose en utilisant les automates hybrides.

L'application donnée dans ce chapitre via la commande d'une micropince réelle a montré la robustesse et l'efficacité des méthodes de synthèse de correcteur par intervalles proposées aux [Chapitres 4 et 5](#) pour la commande des actionneurs piézoélectriques. L'intérêt de l'utilisation de l'analyse par intervalles se traduit par sa simplicité de représentation des incertitudes paramétriques liées au modèle des actionneurs piézoélectriques. Un autre avantage est la dérivation de correcteurs d'ordre réduit permettant leur implémentation dans un microcontrôleur et d'aller vraiment vers les microsystèmes embarqués. Cela favorise son utilisation dans la commande des microsystèmes.



# Conclusion et perspectives

## 1. Conclusion

La tendance à la miniaturisation et à l'intégration de plusieurs fonctions (électrique, mécanique, thermique, magnétique, etc) à réaliser conduit à des microsystemes en trois dimensions et constitués de composants provenant de processus de (micro)fabrication parfois incompatibles. La microrobotique est une réponse aux difficultés de réalisation de ces microsystemes qui peuvent être 3D et hybrides. Afin de contribuer aux challenges de la micromanipulation et du micro-assemblage, nous avons proposé dans nos travaux de fournir des outils de dimensionnement et de commande des actionneurs piézoélectriques pouvant être mise en œuvre dans une pince.

Nos contributions reposent sur la combinaison des outils de l'automatique (modélisation et commande) et les outils du calcul par intervalles. La méthode proposée permet de dimensionner des actionneurs piézoélectriques de façon garantie vis-à-vis de quelques performances souhaitées, de borner les incertitudes paramétriques liées aux modèles de ces actionneurs et de dériver des lois de commande robuste d'ordre réduit. Nous rappelons ci-après les contributions principales de nos travaux de thèse.

### **Dimensionnement des actionneurs piézoélectriques**

Les actionneurs piézoélectriques, de structure poutre, sont les éléments principaux des systemes de micromanipulation et de micro-assemblage, nous proposons d'abord une analyse de leurs comportements statique et dynamique à partir de modèles analytiques issues des équations fondamentales de la piézoélectricité. Les performances étudiées dépendent fortement de quelques caractéristiques géométriques des actionneurs considérés. Les modèles employés pour ces analyses sont par la suite combinés avec les outils du calcul par intervalles pour effectuer un dimensionnement optimal et garanti des actionneurs.

### **Commande des actionneurs piézoélectriques**

Les actionneurs piézoélectriques étudiés dans le cadre des travaux de cette thèse sont utilisés pour manipuler ou assembler des micro-objets (micromanipulation et micro-

assemblage) et nécessitent la prise en compte des signaux de déplacement (positionnement précis) et de force (prise en compte de la force de micromanipulation).

Les modèles des actionneurs piézoélectriques sont caractérisés par des non-linéarités lorsque ceux-ci travaillent en larges déformations pour réaliser de grandes déplacements. Nous avons d'abord modélisé l'hystérésis et sur sa compensation en se basant sur des travaux antérieure. Nous avons ensuite introduit l'analyse par intervalles pour décrire le comportement incertain des actionneurs piézoélectriques. Nous avons, à ce sujet, établi un modèle intervalle de manière à borner les incertitudes paramétriques liées à une variation géométrique (la longueur) des actionneurs piézoélectriques. Dans le souci d'atteindre les performances d'un cahier des charges en présence de ces incertitudes paramétriques, des méthodes de synthèse de lois de commande robuste basées sur les techniques d'intervalles ont été proposées. Lors de leurs applications à la commande des actionneurs piézoélectriques, nous avons comparé les résultats obtenus avec nos propositions avec ceux obtenus par les approches robustes  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse. Cette comparaison a montré que les correcteurs synthétisés par les méthodes d'intervalles permettent d'obtenir une meilleure robustesse en performances vis-à-vis de la variation de la longueur.

Nous avons également procédé à la modélisation du comportement en force. Il a été montré que ce dernier dépend à la fois des caractéristiques des objets manipulés et du modèle tension-déplacement des actionneurs piézoélectrique utilisés. L'élaboration d'un modèle intervalle a permis de borner les incertitudes paramétriques liées au changement d'objet manipulé ou liées au modèle des actionneurs piézoélectriques eux-mêmes. Nous avons ensuite proposé une méthode de synthèse d'un correcteur RST combiné avec les outils de l'intervalle pour la force. La robustesse du correcteur dérivé est validée sur différents objets manipulés.

### **Commande hybride d'une micropince piézoélectrique**

La dernière partie de notre travail a consisté à réaliser d'abord une micropince à partir de deux actionneurs piézoélectriques précédemment dimensionnés. Cette micropince est ensuite utilisée pour des tâches de prise-dépose d'objets ayant des caractéristiques différentes. Chaque actionneur de la micropince est commandée en position ou en force en utilisant les techniques de commande proposées. Afin d'automatiser les tâches de prise dépose, nous avons utilisé une représentation par système hybride pour décrire les opérations nécessaires et pour gérer chaque actionneur commandé. Les résultats obtenus ont montré la robustesse des correcteurs synthétisés vis-à-vis des incertitudes paramétriques des actionneurs et de perturbations, entre autres, vis à vis du couplage entre eux.

## **2. Perspectives**

Bien que la modélisation et la commande par intervalles proposées dans cette thèse permettent d'atteindre les performances requises pour réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage, des perspectives s'ouvrent dont trois à court terme. La première consiste à prendre en compte les dynamiques hautes fréquences que nous avons négligées. La seconde est liée à la sélection de correcteurs optimaux à partir d'un

ensemble de correcteurs candidats. Enfin, la dernière perspective consiste à synthétiser des correcteurs en utilisant l'analyse par intervalles pour le cas des systèmes intervalles multivariés.

### Intégration des dynamiques hautes fréquences

Lors de la modélisation des actionneurs piézoélectriques, les modes hautes fréquences sont souvent négligés afin d'obtenir un modèle simplifié facilitant la tâche de conception d'une loi de commande. Cependant, les dynamiques hautes fréquences négligées dans un modèle peuvent parfois avoir une influence sur la stabilité et sur les performances voulues en boucle fermée. Il serait donc intéressant de prendre en compte ces dynamiques négligées lors de la modélisation et la commande [Bal78]. Les dynamiques hautes fréquences sont souvent modélisées par la multiplication avec une fonction de transfert du modèle nominal. Dans le cas des modèles intervalles, on pourrait avoir la forme suivante :

$$[G](p) = [G'](p)[G_d](p) \quad (6.17)$$

où

- $[G](p)$  est le modèle qui prend en compte les incertitudes paramétriques et les dynamiques hautes fréquences ;
- $[G'](p)$  est un transfert modélisant les incertitudes paramétriques ;
- et  $[G_d](p)$  représente la partie décrivant les dynamiques hautes fréquences.

### Choix d'un correcteur optimal

Les approches de commande par intervalles proposées dans cette thèse conduisent à la dérivation d'un ensemble de correcteurs assurant des performances robustes pour les actionneurs piézoélectriques utilisés dans les applications de micromanipulation et de micro-assemblage. Dans cette étude, les paramètres des correcteurs à implémenter ont été choisis arbitrairement à l'intérieur d'un ensemble solution. Cette sélection arbitraire de correcteurs pourrait ne pas être le choix optimal permettant d'assurer le meilleur comportement (éviter par exemple le choix des correcteurs qui assurent des réponses avec des sous-oscillations). Pour cela, il est intéressant d'avoir des critères sur lesquels on déduit un correcteur optimal. L'utilisation des méthodes d'optimisation pourrait être envisagée pour répondre à cela.

### Commande par intervalles des systèmes multivariés

Au cours des travaux de cette thèse, nous avons traité le problème de synthèse de correcteur par intervalles pour des systèmes monovariés à incertitudes paramétriques. Néanmoins, beaucoup de systèmes de micromanipulation et de micro-assemblage développés ou en cours de développement sont à plusieurs degrés de libertés couplés. C'est pourquoi l'utilisation d'une matrice de transfert permettant une description plus précise du système est intéressante. À l'heure actuelle, il n'existe pas de méthodes traitant la synthèse de correcteur pour un système intervalle multivariable. Cela reste donc un champ ouvert .



# Annexe A

## Normes

### A.1 Notions de normes

Il est très utile d'avoir un paramètre donnant une mesure totale de la taille d'un scalaire, d'un vecteur, d'une matrice, d'un signal ou d'un système. Ce paramètre est appelé '*norme*', notée  $\|\cdot\|$ . Par définition, une norme sur un espace vectoriel quelconque  $E$ , est une fonction  $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , donnée par :

$$v \mapsto \|v\|$$

et elle possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall v \in E, \|v\| \geq 0$
2.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3.  $\forall v, e \in E, \|v + e\| \leq \|v\| + \|e\|$
4.  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall v \in E, \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

Selon la littérature, il existe plusieurs types de normes (normes elliptiques, normes Frobenius, etc). Les normes principales couramment utilisées sont les normes naturelles ou les normes-p notées  $\|v\|_p$ .

### A.2 Norme d'un scalaire

Soit  $s \in \mathbb{C}$ , alors :

$$\forall p, \|s\|_p = \|s\| = |s| \tag{A.1}$$

où la fonction  $|\cdot|$  représente le module. elle devient la valeur absolue dans le cas des nombres réels.

### A.3 Norme d'un vecteur

Soit  $v \in \mathbb{C}^n$ , alors :

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n |v|^p \right)^{1/p} & \text{pour } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{i=1, \dots, n} (|v_i|) & \text{pour } p = +\infty \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En particulier, pour tout vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  :  
la norme-2 appelée aussi norme Euclidienne est définie par :

$$\|v\|_2 = (vv^T)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \quad (\text{A.3})$$

la norme- $\infty$  est donnée par :

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} (|v_i|) \quad (\text{A.4})$$

### A.4 Norme d'un signal scalaire

Un signal scalaire, par exemple temporel défini sur  $[a, b]$ , noté  $y(t)$  peut être représenté par un vecteur de dimension infinie. La somme dans (A.2) est remplacée par une intégrale à cause de la continuité du domaine  $[a, b]$ . On obtient ainsi la norme-p d'un signal scalaire :

$$\|y(t)\|_p = \begin{cases} \left( \int_0^{+\infty} |y(t)|^p dt \right)^{1/p} & \text{pour } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_t (|y(t)|) & \text{pour } p = +\infty \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

### A.5 Norme d'un signal vectoriel

Soit  $y(t)$  un vecteur de signaux défini comme suit :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Le calcul de la norme-p du vecteur de signaux  $y(t)$  est basé sur les normes-p de ses éléments  $\|y_i(t)\|_p$ . Cette norme-p notée  $\|y(t)\|_p$  est donnée par :

$$\|y(t)\|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n (\|y_i(t)\|_p)^p \right)^{1/p} & \text{pour } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{i=1\dots n} (\|y_i(t)\|_\infty) & \text{pour } p = +\infty \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

## A.6 Norme d'une matrice

Pour toute matrice  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , sa norme notée  $\|M\|$  possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|M\| \geq 0 \\ \|M\| = 0 \Leftrightarrow M = 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|\alpha \cdot M\| = |\alpha| \cdot \|M\| \\ \forall M_1, M_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|M_1 + M_2\| \leq \|M_1\| + \|M_2\| \\ \forall M_1, M_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|M_1 \cdot M_2\| \leq \|M_1\| \cdot \|M_2\| \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

La norme matricielle peut être calculée à partir de normes naturelles de vecteurs et est définie par la formule suivante :

$$\|M\|_p = \max_{v \neq 0} \frac{\|M \cdot v\|_p}{\|v\|_p} = \max_{\|v\|_p=1} \|M \cdot v\|_p, \forall v \in \mathbb{C}^n \quad (\text{A.8})$$

D'après la définition, le calcul de la norme matricielle semble compliqué à cause de la nécessité de connaître tous les vecteur  $v$  ayant une norme-p unitaire.

En particulier, on peut définir :

La norme-2  $\|M\|_2 = \bar{\sigma}(M) = \sqrt{\lambda_{\max}(M^* \cdot M)}$ , où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de  $M^* \cdot M$ .

$$\text{La norme-}H_\infty \text{ est définie par : } \|M\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \max \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n |m_{1j}| \\ \sum_{j=1}^n |m_{2j}| \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n |m_{nj}| \end{pmatrix}$$

## A.7 Normes des systèmes

Une loi de commande a généralement pour objectif d'assurer la stabilité et de répondre à certaines exigences relatives à la taille des signaux ou des matrices de transfert. L'un des objectifs d'une loi de commande est de réduire l'impact des perturbations affectant la commande ou la sortie sur le comportement du système, ou encore à minimiser l'effet du bruit sur les mesures. Parfois, on souhaite aussi maintenir la puissance délivrée par les actionneurs. Ces objectifs de performance peuvent être interprétés par le moyen de normes de systèmes.

Soit un système monovarié stable ayant une fonction de transfert  $G(p)$  (Fig. A.1). La transformée de Laplace  $G(p)$  notée  $g(t)$  représente la réponse impulsionnelle du système.

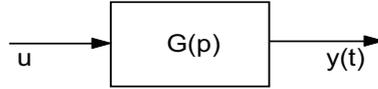


FIGURE A.1 – Système monovarié

La norme-2 du système  $G(p)$  peut être expliquée par l'énergie de la sortie du système  $y(t)$  (l'énergie du signal  $g(t)$ ) lorsque un signal de dirac est appliqué en entrée. D'après le théorème de Parseval, on a  $\|G(p)\|_2 = \|g(t)\|_2$ . La norme  $\|G(p)\|_2$  est finie si et seulement si le système  $G(p)$  est strictement propre. Elle est définie par :

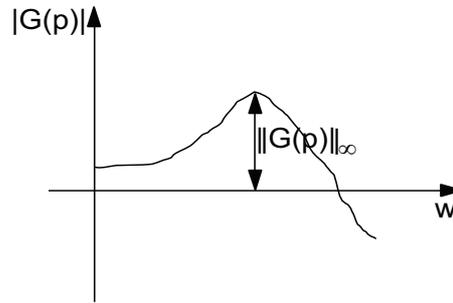
$$\|G(p)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 dw} \quad (\text{A.9})$$

Contrairement à la norme-2 qui fournit le gain moyen du système, la norme- $H_\infty$  du système  $G(p)$  mesure la valeur maximale de son module  $|G(jw)|$  lorsqu'on parcourt la pulsation  $w$  (Fig. A.2). En d'autres termes, elle représente le plus grand facteur par lequel le système amplifie tout signal sinusoïdal appliqué à son entrée. Elle est donnée par :

$$\|G(p)\|_\infty = \sup_{w \geq 0} |G(jw)| \quad (\text{A.10})$$

Dans le cas d'un système multivarié  $G(p)$ , stable et ayant comme entrée  $u(t)$  et sortie  $y(t)$ , avec :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; G(p) = \begin{pmatrix} G_{11}(p) & G_{12}(p) & \cdots \\ G_{21}(p) & G_{22}(p) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

FIGURE A.2 – Norme- $H_\infty$  graphiquement sur diagramme de Bode

La norme-2 est une généralisation de (A.9) du cas monovariante, et est :

$$\|G(p)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(G^*(jw).G(jw))dw} \quad (\text{A.11})$$

De même que dans le cas monovariante, la norme  $\|G(p)\|_2$  n'est finie que si  $G(p)$  est strictement propre.

Dans le cas d'un système multivariable, la norme- $H_\infty$  d'un système multivariable  $G(p)$  est définie d'une manière analogue en utilisant ces modules. Il se trouve que les valeurs singulières  $\sigma_i(p)$  d'un système multivariable représentent ses modules. Il suffit donc de s'exprimer la norme  $\|G(p)\|_\infty$  en fonction de ses valeurs singulières  $\sigma_i(jw)$ , telles que :  $\bar{\sigma}(jw) \geq \sigma_2(jw) \geq \dots \geq \sigma_{n-1}(jw) \geq \underline{\sigma}(jw) \geq 0$ . Pour toute matrice de transfert stable  $G(p)$ , on définit :

$$\|G(p)\|_\infty = \sup_{w \geq 0} (\bar{\sigma}(jw)) \quad (\text{A.12})$$

où  $\bar{\sigma}$  désigne la valeur singulière supérieure.



## Annexe B

# Relations fondamentales de la piézoélectricité

Les équations générales<sup>1</sup> couramment utilisées pour décrire le comportement linéaire des matériaux piézoélectriques sont dérivées d'une manière directe en utilisant la loi de *Hook* et de *Maxwell*. Lors de l'application d'un champ électrique ou d'une contrainte mécanique sur un matériau piézoélectrique selon une direction, des déformations ou des déplacements électriques apparaissent sur toutes les directions orthogonales. La convention généralement utilisée consiste à définir un système d'axes  $Oxyz$  (ou  $O123$ ) orthonormé [IEE88] (Fig. B.1). Le matériau est polarisé selon l'axe  $Oz$  (ou 3) (axe de polarisation). Les indices 1, 2 et 3 de la Fig. B.1 correspondent respectivement aux directions des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  pour les composantes normales et les indices 4, 5 et 6 aux plans  $yOz$ ,  $xOz$  et  $xOy$  pour les composantes tangentielles ou de cisaillement.

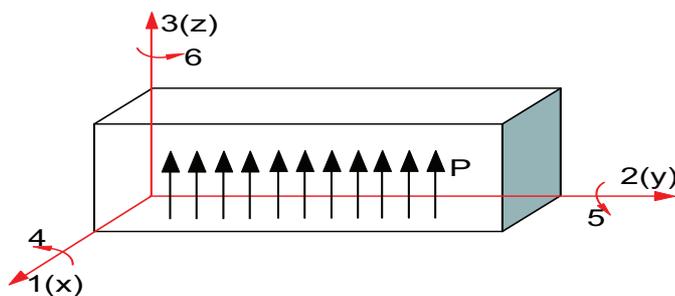


FIGURE B.1 – Système d'axes pour les équations de fonctionnement piézoélectrique [IEE88].

1. l'effet pyroélectrique n'est pas considéré dans ces relations fondamentales de la piézoélectricité.

Un matériau piézoélectrique met en jeu les interactions entre les phénomènes mécaniques et électriques. D'après la loi de *Hook* définissant l'équation mécanique<sup>2</sup> commune qui s'applique aux métaux et aux plastiques, on peut écrire [Lan90] :

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}T_j \\ T_j &= c_{ij}S_i \end{aligned} \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.1})$$

où  $S_i$ ,  $T_j$ ,  $s_{ij}$  et  $c_{ij}$  représentent respectivement les composants de la déformation, de la contrainte, de la souplesse (compliance) et de la rigidité (constante élastique) du matériau.

Quant aux propriétés électriques des matériaux piézoélectriques, la loi du comportement reliant les composants de l'induction électrique (déplacement électrique)  $D_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) aux composants du champ électrique  $E_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) est définie par les relations suivantes [Uch00] :

$$\begin{aligned} D_m &= \epsilon_{mn}E_n \\ E_n &= \beta_{mn}D_m \end{aligned} \quad \text{avec } m, n = \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.2})$$

où  $\epsilon_{mn}$  et  $\beta_{mn}$  sont respectivement les composants de la constante diélectrique du matériau (permittivité relative) et de l'impermittivité relative.

Par définition, l'effet piézoélectrique direct est l'apparition de charges électriques sur les surfaces du matériau sous l'action de contrainte mécanique. Ceci est traduit par une relation linéaire qui lie les composants de charge électrique  $D_m$  aux composants du tenseur de contrainte  $T_j$ . L'effet piézoélectrique inverse est défini par une déformation de la forme géométrique du matériau après l'application d'un champ électrique. Donc les composants du tenseur de déformation  $S_i$  sont proportionnels aux composants du champ électrique  $E_n$ . On obtient ainsi les deux relations suivantes [Bri07] :

$$\begin{aligned} D_m &= d_{mj}T_j \\ S_i &= d_{in}E_n \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Les composants  $d_{mj}$  et  $d_{in}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ;  $m, n = \{1, 2, 3\}$ ) constituent la matrice de la constante piézoélectrique tel que  $d_{mj} = d_{in}^t$ <sup>3</sup>. Dans la suite, les indices  $i, j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et les indices  $m, n = \{1, 2, 3\}$ .

Dans un matériau piézoélectrique, les phénomènes électriques et mécaniques interagissent et sont connus sous le nom effets électromécaniques. Les relations fondamentales décrivant la piézoélectricité sont obtenues en utilisant les équations précédentes (B.1), (B.2) et (B.3) comme suit [Ike90] :

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}^E T_j + d_{mj}^t E_n \\ D_m &= d_{mj} T_j + \epsilon_{mn}^T E_n \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La présence de la piézoélectricité modifie les constantes élastiques et de souplesse ainsi que les permittivités et les impermittivités pour lesquelles il faut distinguer les modules de rigidité et de souplesse à champ ou à induction constante (ou nulle) et également les

2. la relation linéaire entre la contrainte et la déformation.

3.  $t$  en exposant représente la transposée au sens matriciel.

permittivités et les impermittivités à contrainte ou à déformation constante (ou nulle) [Bri07]. L'exposant <sup>E</sup> (resp. <sup>T</sup>) dans (B.4) indique que les composantes de souplesse  $s_{ij}$  (resp. permittivité  $\epsilon_{mn}$ ) sont mesurés ou calculés à champ électrique (resp. à contrainte) constant ou nul.

En effet, l'équation (B.4) est une forme parmi quatre formes matricielles possibles pour définir comment les variables mécaniques (contrainte  $T_j$ , déformation  $S_i$ ) et électriques (déplacement  $D_m$  et champ électrique  $E_n$ ) des matériaux piézoélectriques interagissent [Ber64]. Ces quatre formes sont résumées dans [Tableau B.1](#) selon le couple de variables choisies.

TABLE B.1 – Équations fondamentales de la piézoélectricité.

Couple de variables choisies	Équation du comportement
$(T_j, E_n)$	$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mj}^t E_n$ $D_m = d_{mj} T_j + \epsilon_{mn}^T E_n$
$(T_j, D_m)$	$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{mj}^t D_m$ $E_n = -g_{mj} T_j + \beta_{mn}^T D_m$
$(S_i, E_n)$	$T_j = c_{ij}^E S_i - e_{mj}^t E_n$ $D_m = e_{mj} S_i + \epsilon_{mn}^S E_n$
$(S_i, D_m)$	$T_j = c_{ij}^D S_i - h_{mj}^t D_m$ $E_n = -h_{mj} S_i + \beta_{mn}^S D_m$

De façon similaire les exposants <sup>D</sup> (resp. <sup>S</sup>) dans le [Tableau B.1](#) indiquent que la mesure des différentes grandeurs considérées ( $s_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $\epsilon_{mn}$  et  $\beta_{mn}$ ) est effectuée à induction électrique (resp. déformation) constante ou nulle.

Selon le [Tableau B.1](#), trois types de coefficients interviennent :

- coefficients purement électriques : les constantes diélectriques  $\epsilon_{mn}^T$ ,  $\epsilon_{mn}^S$ ,  $\beta_{mn}^T$ , et  $\beta_{mn}^S$ ,
- coefficients purement mécaniques : les composantes de la constante élastique et de la souplesse  $s_{ij}^E$ ,  $s_{ij}^D$ ,  $c_{ij}^E$  et  $c_{ij}^D$ ,
- coefficients mixtes traduisant le couplage entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques : les matrices de constantes piézoélectriques  $d_{mj}$ ,  $g_{mj}$ ,  $e_{mj}$  et  $h_{mj}$ .

**Remarque B.1.** *La connaissance des coefficients d'un seul couple de variables dans le [Tableau B.1](#) permet de déduire les coefficients des trois couples de variables restants.*

Les cristaux piézoélectriques tels que les PZT présentent une propriété de symétrie. Cette propriété conduit à des expressions simplifiées des coefficients mécaniques et

diélectriques des équations électromécaniques (B.4). Voici un exemple de cristal piézo-électrique de classe 6mm (système hexagonal) :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

(B.5)

## Annexe C

# Résolution D-K itération

Les propriétés de la valeur singulière structurée permettent d'écrire l'inégalité suivante :

$$\forall w, \mu_{\overline{\Delta'}}(F_l(P(jw), K(jw))) \leq \sigma(D(jw).F_l(P(jw), K(jw)).D^{-1}(jw)) \quad (\text{C.1})$$

où le multiplicateur  $D(jw)$ , appelé matrice de scalage, est n'importe quelle matrice inversible qui commute avec toute matrice  $\Delta'$  élément de l'ensemble  $\overline{\Delta'}$ . Un problème plus réaliste est donc le suivant :

**Problème C.1.** Déterminer un correcteur  $K(p)$  et une matrice  $D(jw) \in \mathbb{R}H_\infty$  tels que :

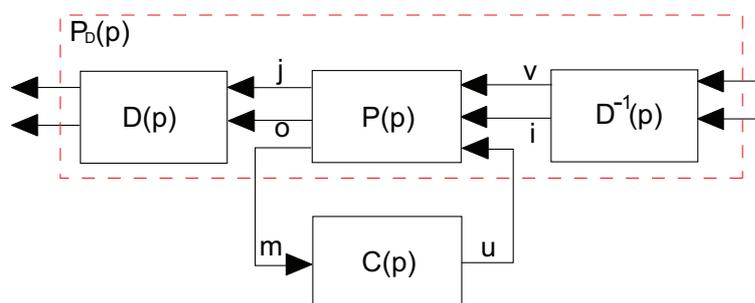
1.  $D^{-1}(jw) \in \mathbb{R}H_\infty$  commute avec toute matrice  $\Delta'$  élément de l'ensemble  $\overline{\Delta'}$  ;
- 2.

$$\|D(jw).F_l(P(jw), K(jw)).D^{-1}(jw)\|_\infty < 1 \quad (\text{C.2})$$

La condition (C.2) assure que :

$$\forall w, \mu_{\overline{\Delta'}}(F_l(P(jw), K(jw))) \leq \sigma(D(jw).F_l(P(jw), K(jw)).D^{-1}(jw)) \leq 1 \quad (\text{C.3})$$

La résolution du **Problème C.1** par D-K itération [Doy85] [Zho96] se fait par une minimisation alternative. Ceci consiste à chercher  $K(p)$  à  $D(p)$  fixé puis chercher  $D(p)$  à  $K(p)$  fixé et ainsi de suite jusqu'à convergence. Lorsque  $D(p)$  est fixé, le problème se réduit à un simple problème  $H_\infty$  standard qui peut être résolu en utilisant l'algorithme de Glover-Doyle (voir la Fig. C.1). L'algorithme de résolution du problème de  $\mu$ -synthèse par D-K itération est disponible sous Matlab sous la commande *dkit* de *Robust Control Toolbox*.

FIGURE C.1 – Problème  $H_\infty$  standard.

# Références bibliographiques

- [Abi04] K. Abidi, A. Sabanovic, and S. Yesilyurt. Sliding mode control based disturbance compensation and external force estimation for a piezoelectric actuator. *IEEE Int. Workshop on Advance Motion Control*, pages 529–534, March 2004.
- [Agn03] Joël Agnus. Contribution à la micromanipulation : étude, réalisation, caractérisation et commande d'une micropince piézoélectrique. *Thèse de doctorat, LAB - CNRS Université de Franche-Comté*, 2003.
- [Agn05] J. Agnus, P. Nectoux, and N. Chaillet. Overview of microgrippers and design of a micromanipulation station based on a mmoc microgripper. *In Proceedings of the IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA)*, pages 117–123, 2005.
- [AH03] M. Abu–Hilal. Forced vibration of euler-bernoulli beams by means of dynamic green functions. *Journal of Sound and Vibration*, 267 :191–207, 2003.
- [Ala99a] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. Robustesse et commande optimale. *Cépadués–Editions*, France 1999.
- [Ala99b] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. Robustesse et commande optimale. *Cépadués éditions*, I.S.B.N. : 2.85428.516.6 1999.
- [An00a] Sen-Jian An, Xiheng Hu, Branka Vucetic, and Wanquan Liu. Vertex results for parametric shifted  $H_\infty$  performance of weighted interval plants. *IEEE Conference on Decision and Control*, 5 :4195–4196, 2000.
- [An00b] Sen-Jian An, Lin Huang, and Enping Wang. On the parametric  $H_\infty$  problems of weighted interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :332–335, 2000.
- [And91] K. M. Anderson and J. Edward Colgate. A model of the attachment/detachment cycle of electrostatic micro actuators. *ASME Micromechanical Sensors, Actuators, and Systems*, pages 255–268, Atlanta, USA 1991.
- [And08] K. N. Andersena, K. Carlsona, D. H. Petersena, K. Møllhavea, V. Eichhornb, S. Fatikowb, and P. Bøggilda. Electrothermal microgrippers for pick-and-place operations. *Proceedings of the Micro- and Nano-Engineering*, 85 :1128–1130, 2008.
- [Apk06] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, 2006.

- [Ara94] K. Arai, S. Aramaki, and K. Yanagisawa. Continuous system modeling of shape memory alloy (sma) for control analysis. *5<sup>th</sup> International Symposium on Micro Machine and Human Science*, pages 97–99, October 1994.
- [Ara03] F. Arai, M. Nakajima, L. Dong, and T. Fukuda. The piconewton order force measurement with a calibrated carbon nanotube probe. *In Proc. of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pages 691–696, 2003.
- [Bab81] T. Baber and Y. K. Wen. Random vibration of hysteresis degrading systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107(6) :1069–1087, 1981.
- [Bal78] M. J. Balas. Active control of flexible systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 25(3) :416–436, 1978.
- [Bal01] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith.  $\mu$  –synthesis and synthesis toolbox. *The Mathworks User’s Guide–3*, 2001.
- [Bal07] R.G. Ballas. Piezoelectric multilayer beam bending actuators : Static and dynamic behavior and aspects of sensor integration. *Springer*, 2007.
- [Bar84] B. R. Barmish. Invariance of the strict hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 29(10) :935–936, 1984.
- [Bar89] B. R. Barmish. A generalization of kharitonov’s four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 34 :157–165, 1989.
- [Bel98] Y. Bellouard, R. Clavel, R. Gotthardt, J. E. Bidaux, and T. Sidler. A new concept of monolithic shape memory alloy micro-devices used in microrobotics. *Actuator, 16th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, June 1998.
- [Ben98] H. Benzaoui. Modélisation thermomécanique et commande d’actionneurs en alliages à mémoire de forme pour la microrobotique. *Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté*, 1998.
- [Ber64] D. A. Berlincourt, D. R. Curran, and H. Jaffe. Piezoelectric and piezomagnetic materials. *Physical acoustics, Academic Press*, New-York, 1964.
- [Bey07] F. Beyeler, A. Neild, S. Oberti, D. J. Bell, Y. Sun, J. Dual, and B. J. Nelson. Monolithically fabricated microgripper with integrated force sensor for manipulating microobjects and biological cells aligned in an ultrasonic field. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 16 :7–15, 2007.
- [Böh99] K. F. Böhringer, R. S. Fearing, and K. Y. Goldberg. Microassembly. *in Handbook of Industrial Robotics, ed. S. Y. Nof, New York, NY : Wiley & Sons*, pages 1045–1068, 1999.
- [Bha95] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. Robust control the parametric approach. *Prentice Hall*, 1995.
- [Bia83] S. Bialas. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrice. *International Journal of Control*, 37(4) :717–722, 1983.

- [Boc66] R. Boche. Complex interval arithmetic with some applications. *Lockheed Missiles and Space Company*, 4-22-66-1 :Sannyvale California, 1966.
- [Bon04] J. Bondia, M. Kieffer, E. Walter, J. Monreal, and J. Pic´o. Guaranteed tuning of pid controllers for parametric uncertain systems. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2948–2953, 2004.
- [Bor05] B. Borovic, A. Q. Liu, D. Popa, H. Cai, and F. L. Lewis. Open-loop versus closed-loop control of mems devices : choices and issues. *Journal of Micro-mechanics and Microengineering*, pages 1917–1924, 2005.
- [Bou67] R. Bouc. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Nonlinear Oscillations Conference*, Prague 1967.
- [Bou03] M. Boukallel. étude, conception et réalisation d’un capteur de micro et nano-forces : application à la caractérisation de l’élasticité des ovocytes. *Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté*, 2003.
- [Bra98] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. K. Mitter. A unified framework of hybrid control : model and optimal control theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(1) :31–45, 1998.
- [Bra07] I. Braems, N. Ramdani, M. Kieffer, L. Jaulin, E. Walter, and Y. Candau. Guaranteed characterization of thermal conductivity and diffusivity in presence of model uncertainty. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(8) :895–910, 2007.
- [Bri07] M. Brissaud. Matériaux piézoélectriques. *presse polytechniques et universitaires romandes*, 2007.
- [Bry03] J. Bryzek and E. Abbott. Control issues for mems. *IEEE Conference on Decision and Control*, 3 :3039–3047, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [Bur24] J. C. Burkill. Functions of intervals. *Proceedings of the london Mathematical Society*, 22 :375–446, 1924.
- [Bur93] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. Höhere mathematik für ingenieure, band 3. 3. Auflage. B. G. Teubner, pages 237–244, 1993.
- [Cam00] S. Cambier and G. Coffignal. Approche probabiliste pour la prise en compte de la dispersion de paramètres mécaniques application à la fatigue vibratoire de réseaux de tuyauteries. *Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers, Paris*, 2000.
- [Cha89] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya. A generalization of kharitonov’s theorem : robust stability of interval plants. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 34(3) :306–311, 1989.
- [Che00] C.-T. Chen and M.-D. Wang. A two-degrees-of-freedom design methodology for interval process systems. *Computers and Chemical Engineering*, 23 :1745–1751, 2000.
- [Chr05] N. Chronis and L. P. Lee. Electrothermally activated su-8 microgripper for single cell manipulation in solution. *Microelectromechanical Systems, Journal of*, 14(4) :857–863, 2005.

- [Coh98] M. B. Cohn, K. F. Böhlinger, J. M. Noworolski, A. Singh, C. G. Keller, K. Y. Goldberg, and R. T. Howe. Microassembly technologies for mems. *Spie - the international Society for Optical Engineering*, (3511) :2–16, 1998.
- [Com81] R. H. Comstock. Charge control actuators to reduce hysteresis effects. *United States Patent, brevet N°US 4.263.527*, 1981.
- [Cra87] E. F. Crawley and J. De Luis. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal*, 25(10) :1373–1385, 1987.
- [Cro98] D. Croft and S. Devasia. Hysteresis and vibrations compensation for piezoactuator. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5) :710–717, 1998.
- [Cro01] D. Croft, G. Shed, and S. Devasia. Creep, hysteresis and vibration compensation for piezoactuators : atomic force microscopy application. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 123(1) :35–43, 2001.
- [Cut91] J. F. Cuttino, A. C. Miller, and D. E. Schinstock. Performance optimization of a fast tool servo for single-point diamond turning machines. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 4(2) :169–179, 1991.
- [DeV97] D.L. DeVoe and A.P. Pisano. Modeling and optimal design of piezoelectric cantilever microactuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 6(3) :266–270, 1997.
- [Dev07] S. Devasia, E. E. Eleftheriou, and R. Moheimani. A survey of control issues in nanopositioning. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(15) :802–823, 2007.
- [Dew98] J. S. Dewey, K. Leang, and S. Devasia. Experimental and theoretical results in output-trajectory redesign for flexible structures. *ASME Journal of dynamic systems, measurement and control*, 120(4) :456–461, 1998.
- [Doy79] J. C. Doyle. Robustness of multiloop linear feedback systems. *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 12–19, 1979.
- [Doy85] J. C. Doyle. Structured uncertainty in control systems design. *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1985.
- [Doy89] J. Doyle, K. Glover, P. K. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 1989.
- [Dub05] A. Dubra, J. Massa, and C. L. Paterson. Preisach classical and nonlinear modeling of hysteresis in piezoceramic deformable mirrors. *Optics Express*, 13(22) :9062–9070, 2005.
- [Duc93] G. Duc. Robustesse des systèmes linéaires multivariables. *Polycopie de l'Ecole Supérieure d'Electricité*, 1993.
- [Duc99] G. Duc and S. Font. Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse. *Hermès*, ISBN 2-7462-0041-4 1999.
- [Erl04] S. Erlicher and N. Point. Thermodynamic admissibility of bouc-wen type hysteresis models. *Comptes Rendus Mécanique*, 332(1), 2004.

- [Fat97] S. Fatikow and U. Rembold. *Microsystem technology and microrobotics*. Springer, 1997.
- [Fed98] J. T. Feddema and R. W. Simon. Visual servoing and cad-driven microassembly. *Special Issue on Visual Servoing, IEEE Robotics and Automation Magazine*, 5(4) :17–24, December 1998.
- [Fuk06] Y. Fukuta, Y. A. Chapuis, Y. Mita, and H. Fujita. Design, fabrication and control of mems based actuator arrays for air-flow distributed micromanipulation. *Journal of Micro-Electro-Mechanical Systems*, 15(4) :912–926, 2006.
- [Gar93] F. Garofalo, G. Celentano, and L. Glielmo. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38(2) :281–284, 1993.
- [Gau07] Jean-Yves Gauthier. Modélisation des alliages à mémoire de forme magnétiques pour la conversion d'énergie dans les actionneurs et leur commande. *Thèse de doctorat, LAB - CNRS Université de Franche-Comté*, 2007.
- [Ge96] P. Ge and M. Jouaneh. Tracking control of a piezoceramic actuator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3) :209–216, 1996.
- [Ge97] P. Ge and M. Jouaneh. Generalized preisach model for hysteresis nonlinearity of piezoceramic actuators. *Precision Engineering*, 20 :99–111, 1997.
- [Gil94] R. G. Gilberston and J. D. Busch. A survey of micro-actuators technologies for future spacecraft missions. *Practical robotic interstellar flight : Are we ready?*, August 1994.
- [Glo88] K. Glover and J. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems Control Letters*, 11, 1988.
- [Gol97] M. Goldfarb and N. Celanovic. A lumped parameter electromechanical model for describing the nonlinear behavior of piezoelectric actuators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119 :478–485, 1997.
- [Gor97] R. B. Gorbet. Control of hysteresis systems with preisach representations. *PhD. Dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo, Canada*, 1997.
- [Gre04] M. A. Greminger and B. J. Nelson. Vision-based force measurement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26 :290–298, 2004.
- [Gre05] M. A. Greminger and B. J. Nelson. A deformable object tracking algorithm robust to occlusions and spurious edges. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1264–1269, 2005.
- [Gro08] M. Grossard. Contribution à la conception optimale et la commande de systèmes mécatroniques flexibles à actionnement piézoélectrique intégré. application en microrobotique. *Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté*, 2008.

- [Ha05] J. Ha, R. Fung, and C. Yang. Hysteresis identification and dynamic responses of the impact drive mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 283 :943–956, 2005.
- [Had00a] Y. Haddab, N. Chaillet, and A. Bourjault. A microgripper using smart piezoelectric actuators. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems (IROS), Takamatsu Japan*, 2000.
- [Had00b] Yassine Haddab. Conception et réalisation d’un système de micromanipulation contrôlé en effort et en position pour la manipulation d’objets de taille micrométrique. *Thèse de doctorat, LAB - CNRS Université de Franche-Comté*, 2000.
- [Hea97] T. L. Heath. The work of archimedes. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1897.
- [Hen98] T. A. Henzinger, P.-H. Ho, and H. Wong-Toi. Algorithm analysis of nonlinear hybrid systems. *IEEE Trans. on Automatic Control, Special issue on hybrid control systems*, pages 540–555, 1998.
- [Ibr87] R. A. Ibrahim. Structural dynamics with parameter uncertainties. *Applied Mechanics Reviews*, 40(3) :309–328, 1987.
- [IEE88] IEEE Standard On Piezoelectricity, 176-1987, January 1988.
- [Ike90] T. Ikeda. Fundamentals of piezoelectricity. *Oxford Science*, 1990.
- [Jau93] L. Jaulin and E. Walter. Set-inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4) :1053–1064, 1993.
- [Jau99] L. Jaulin and J. Burger. Proving set inclusion via intervals : Application to parametric robust stability. *Automatica*, 35(4) :627–632, 1999.
- [Jau00] L. Jaulin. Interval constraint propagation with application to bounded error estimation. *Automatica*, 36 :1547–1552, 2000.
- [Jau01] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. Applied interval analysis. *Springer*, 2001.
- [Jun00] H. Jung, J.Y. Shim, and D. Gweon. New open-loop actuating method of piezoelectric actuators for removing hysteresis and creep. *Review of Scientific Instruments*, 71(9) :3436–3440, 2000.
- [Kai88] H. Kaizuka and B. Siu. A simple way to reduce hysteresis and creep when using piezoelectric actuators. *Journal of Applied Physics*, 27(5) :773–776, 1988.
- [Kea89] R. B. Kearfott. Interval arithmetic methods for nonlinear systems and nonlinear optimization : an introduction review. *Impact of Recent Computer Advances on Operations Research*, pages 533–542, North-Holland, New York, NY, 1989.
- [Kea96] R. B. Kearfott and V. Kreinovich. Application of interval computations. *Applied optimization*, Dordrecht, Netherlands 1996.

- [Kee94] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Control system design for parametric uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4 :87–100, 1994.
- [Kel94] C. G. Keller and M. Ferrari. Milli-scale polysilicon structures. *in Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head, SC*, pages 132–137, June 1994.
- [Kel03] C. G. Keller. Photo gallery, mems precision instruments. *Available from World Wide Web*, (<<http://www.memspi.com/gallery.html>>), 2003.
- [Kha] S. Khadraoui, M. Rakotondrabe, and P. Lutz. Interval modeling and robust control of piezoelectric microactuators. *IEEE - Transactions on Control Systems Technology (T-CST)*, (10.1109/TCST.2011.2116789 (à apparaître)).
- [Kha78] V. L. Kharitanov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14(11) :2086–2088, 1978.
- [Kha79] V.L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Journal of Differential Equations*, 14 :1483–1485, 1979.
- [Koe99] S. Koelemeijer and J. Jacot. Cost efficient assembly of microsystems. *Manufacturing of Microsystems, MstNews, The World's Knowledge*, pages 30–32, January 1999.
- [Koh00] M. Kohla, E. Justa, W. Pfleginga, and S. Miyazaki. Sma microgripper with integrated antagonism. *Sensors and Actuators A : Physical*, 83(1) :208–213, 2000.
- [Kol99] E. S. Kolesar, P. B. Allen, J. T. Howard, J. M. Wilken, and N. C. Boydston. Thermally-actuated cantilever beam for achieving large in-plane mechanical deflections. *Thin Solid Films*, pages 295–302, 1999.
- [Kou82] E. Kouno. A fast response piezoelectric actuator for servo correction of systematic errors in precision machining. *Annals of the CIRP*, 33(1) :369–372, 1982.
- [Kuh99] K. Kuhnen and H. Janocha. Adaptive inverse control of piezoelectric actuators with hysteresis operators. *Proceeding of European Control Conference (ECC)*, Karlsruhe, Germany 1999.
- [Kuh01] K. Kuhnen and H. Janocha. Inverse feedforward controller for complex hysteretic nonlinearities in smart-material systems. *Control and intelligent systems*, 29(3) :74–83, 2001.
- [Lac93] E. Tremolet De Lacheisserie. Magnetostriction : The and application. *CRC Press*, Boca Raton, Fl, USA 1993.
- [Lan90] L. Landau, E. Lifchitz, and L. Pitaevskii. Théorie de l'élasticité. *Physique théorique*, 1990.
- [Lan98] C. B. Lang and N. Pucker. Mathematische methoden in der physik. *Akademischer Verlag*, pages 469–481, 1998.

- [Lea02] K. Leang and S. Devasia. Hysteresis, creep, and vibration compensation for piezoactuators : Feedback and feedforward control. *Proceeding of 2<sup>nd</sup> IFAC Conf. Mechatronic Systems*, pages 283–289, 2002.
- [Lew94a] J. S. Lew, L. H. Keel, and J. N. Juang. Quantification of parametric uncertainty via an interval model. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(6) :1212–1218, 1994.
- [Lew94b] J. S. Lew, T. L. Link, E. Garcia, and L. H. Keel. Interval model identification for flexible structures with uncertain parameters. *ASME Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 42–47, 1994.
- [Li93] C. J. Li, H. S. M. Beigi, S. Li, and J. Liang. Nonlinear piezo-actuator control by learning self tuning regulator. *Journal of dynamic systems, measurement and control*, 115 :720–723, 1993.
- [Li07] Y. Li and J. Bechhoefer. Feedforward control of a closed-loop piezoelectric translation stage for atomic force microscope. *Revue of Scientific Instruments*, 78 :1–8, 2007.
- [Li09] K. Li and Y. Zhang. Interval model control of consumable double-electrode gas metal arc welding process. *IEEE - Transactions on Automation Science and Engineering (T-ASE)*, 7(4) :826–839, 2009.
- [Lin06] C. Lin and S. Yang. Precise positioning of piezoactuated stages using hysteresis observer based control. *Mechatronics*, 16(7) :417–426, 2006.
- [Lu06] Zhe Lu, P. C. Y. Chen, and Wei Lin. Force sensing and control in micromanipulation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C : Applications and Reviews*, 36(6) :713–724, 2006.
- [Mai95] J. A. Main, E. Garcia, and D. V. Newton. Precision position control of piezoelectric actuators using charge feedback. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(5) :1068–1073, 1995.
- [Man99] C. S. Manohar and R. A. Ibrahim. Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations. *Applied Mechanics Reviews*, 52(5) :177–197, 1999.
- [Mar97] Madou Marc. Fundamentals of microfabrication. *Crc press edition*, 1997.
- [May91a] I. Mayergoyz. Mathematical models of hysteresis. *Springer–Verlag*, Berlin, Germany 1991.
- [May91b] I. D. Mayergoyz. Mathematical models of hysteresis. *Méthodes numériques en électromagnétisme, EYROLLES*, pages (ISSN 0399–4198), 1991.
- [Mit00] S. Mittal and C. Menq. Hysteresis compensation in electromagnetic actuators through preisach model inversion. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 5(4) :394–409, 2000.
- [Mok08] B. Mokaberi and A. A. G. Requicha. Compensation of scanner creep and hysteresis for afm nanomanipulation. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, pages 197–208, 2008.

- [Moo62] R. E. Moore. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing. *PhD. Dissertation, Department of Computer Science, Stanford University*, 1962.
- [Moo66] R. E. Moore. Interval analysis. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J.*, 1966.
- [Mra02] R. B. Mrad and H. Hu. A model for voltage to displacement dynamics in piezoceramic actuators subject to dynamic voltage excitations. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 7(4) :479–489, 2002.
- [nan] <http://www.nanomotor.de>.
- [Nel98] B. J. Nelson, Y. Zhou, and B. Vikramaditya. Sensor-based microassembly of hybrid mems devices. *IEEE Control Systems*, pages 1115–1120, December 1998.
- [Neu85] A. Neumaier. Interval interaction for zeros of systems of equations. *BIT*, 25 :256–273, 1985.
- [Neu93] A. Neumaier. The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence region. *Computing Supplementum*, 9 :175–190, 1993.
- [New82] C. V. Newcomb. Improving the linearity of piezoelectric ceramic actuators. *Electronics Letters*, 18(11) :442–444, 1982.
- [Oka90] Y. Okazaki. A micro-positioning tool post using a piezoelectric actuator for diamond turning machines. *Precision Engineering*, 12 :151–156, 1990.
- [Pet90] I.R. Petersen. A new extension to kharitonov’s theorem. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 35(7) :825–528, 1990.
- [Pol00] D. L. Polla and W. P. Robbins. Ferroelectric devices for microelectromechanical systems (mems) applications. *Handbook of Thin Film Devices*, Academic press :203–226, London 2000.
- [Pon05] J. L. Pons. Emerging actuator technologies : a micromechatronic approach. *Wiley*, ISBN 0-470-09197-5 2005.
- [Rak06a] M. Rakotondrabe, Y. Haddab, and P. Lutz. Plurilinear modeling and discrete  $\mu$ -synthesis control of a hysteretic and creeped unimorph piezoelectric cantilever. *IEEE - International Conference on Automation, Robotics, Control and Vision (ICARCV)*, pages 57–64, Grand Hyatt, Singapour 2006.
- [Rak06b] Micky Rakotondrabe. Développement et commande modulaire d’une station de micro-assemblage. *Thèse de doctorat, LAB - CNRS Université de Franche-Comté*, 2006.
- [Rak07a] M. Rakotondrabe, C. Clévy, and P. Lutz.  $h_\infty$  deflection control of a unimorph piezoelectric cantilever under thermal disturbance. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1190–1195, 2007.
- [Rak07b] M. Rakotondrabe, C. Clévy, and P. Lutz. Modelling and robust position/force control of a piezoelectric microgripper. *IEEE - International Conference on Automation Science and Engineering, (CASE)*, pages 39–44, Scottsdale AZ USA,, 2007.

- [Rak07c] M. Rakotondrabe, Y. Haddab, and P. Lutz. Modelling and  $h_\infty$  force control of a nonlinear piezoelectric cantilever. *IEEE/RSJ - IROS, (International Conference on Intelligent Robots and Systems)*, pages 3131–3136, 2007.
- [Rak07d] M. Rakotondrabe, Y. Haddab, and P. Lutz. Nonlinear modelling and estimation of force in a piezoelectric cantilever. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pages 1–6, Zurich Switzerland, 2007.
- [Rak08] M. Rakotondrabe, M. C. Diouf, and P. Lutz. Robust feedforward-feedback control of a hysteretic piezocantilever under thermal disturbance. *IFAC - WC, (World Congress)*, pages 13725–13730, Seoul Corea, July 2008.
- [Rak09] M. Rakotondrabe, Y. Haddab, and P. Lutz. Quadrilateral modelling and robust control of a nonlinear piezoelectric cantilever. *IEEE - Transactions on Control Systems Technology (T-CST)*, 17(3) :528–539, 2009.
- [Rak10a] M. Rakotondrabe, C. Clévy, and P. Lutz. Complete open loop control of hysteretic, creeped and oscillating piezoelectric cantilever. *IEEE - Transactions on Automation Science and Engineering (T-ASE)*, 7(3) :440–450, 2010.
- [Rak10b] M. Rakotondrabe and A. Ivan. Development and dynamic modeling of a new hybrid thermo-piezoelectric micro-actuator. *IEEE - Transactions on Robotics (T-RO)*, 26(6) :1077–1085, 2010.
- [Rak10c] M. Rakotondrabe, I. A. Ivan, S. Khadraoui, C. Clevy, P. Lutz, and N. Chaillet. Dynamic displacement selfsensing and robust control of cantilever piezoelectric actuators dedicated for microassembly. *IEEE ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, (557–562), Montreal Canada, July 2010.
- [Rak11a] M. Rakotondrabe. Bouc-wen modeling and inverse multiplicative structure to compensate hysteresis nonlinearity in piezoelectric actuators. *IEEE - Transactions on Automation Science and Engineering (T-ASE)*, 8(2) :428–431, 2011.
- [Rak11b] M. Rakotondrabe. Performances inclusion for stable interval systems. *American Control Conference (ACC)*, pages 4367–4372, San Francisco CA USA,, 2011.
- [Rak11c] M. Rakotondrabe and A. Ivan. Development and force/position control of a new hybrid thermo-piezoelectric microgripper dedicated to micromanipulation tasks. *IEEE - Transactions on Automation Science and Engineering (T-ASE)*, 8(4) :824–834, 2011.
- [Rég08] S. Régnier and N. Chaillet. La microrobotique – applications à la micromanipulation. *Hermès, Lavoisier*, 2008.
- [Sad98] J. E. Sader. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *Journal of Applied Physics*, 84(1) :64–76, 1998.

- [Saf89] M. G. Safonov, D. J. N. Limebeer, and R. Y. Chiang. Simplifying the  $H_\infty$  theory via loop–shifting, matrix-pencil and descriptor concept. *International Journal Control*, 50(6) :2467–2488, 1989.
- [Sch97] G. I. Schüller. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4) :197–321, 1997.
- [Sha91] B. Shafai and G. Sotirov. Interval identification and robust control design : A new perspectives. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Design Methods for Control Systems*, pages 246–251, Zurich, Switzerland 1991.
- [She03] Y. T. Shen, N. Xi, W. J. Li, and J.D. Tan. A high sensitivity force sensor for microassembly : design and experiments. *IEEE/ASME Conference on advanced intelligent mechatronics*, pages 703–708, 2003.
- [Shi00] E. Shimada, J. A. Thompson, J. Yan, R. Wood, and R. S. Fearing. Prototyping millirobots using dextrous microassembly and folding. *Proceeding of the ASME IMECE/DSCD*, 69(2) :933–940, Orlando, USA 2000.
- [Sim00] S. Simic, K. H. Johansson, S. Sastry, and J. Lygeros. Towards a geometric theory of hybrid systems. *Hybrid Systems : Computation and Control N. Lynch, B. H. Krogh (Eds)*, pages 421–436, Springer, 2000.
- [Sma02] Y. Smagina and I. Brewerb. Using interval arithmetic for robust state feedback design. *Systems and Control Letters*, 46 :187–194, 2002.
- [Smi91a] J. G. Smits and W.–S Choi. The constituent equations of piezoelectric heterogeneous bimorphs. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 38(3) :256–270, 1991.
- [Smi91b] J. G. Smits, S. I Dalkeb, and T. K. Cooney. The constituent equations of piezoelectric bimorphs. *Sensors and actuators A : Physical*, 28(1) :41–61, 1991.
- [Smi94] J. G. Smits and A. Ballato. Dynamic admittance matrix of piezoelectric cantilever bimorphs. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 3(3) :105–112, 1994.
- [Smi00] S. T. Smith. Flexures – elements of elastic mechanisms. *Taylor & Francis Group*, pages 124–129, 2000.
- [Soe93] W. Soedel. Vibrations of shells and plates. *2nd ed. Marcel Dekker*, New York, 1993.
- [Son05] G. Song, J. Zhao, X. Zhou, and J. A. De Abreu–Garcia. Tracking control of a piezoceramic actuator with hysteresis compensation using inverse preisach model. *IEEE/ASME Transaction On Mechatronics*, 10(2) :198–209, 2005.
- [sta11] Status of the mems industry 2011. *Yole Développement*, 2011.
- [Ste98] Y. Stepanenko and C. Y. Su. Intelligent control of piezoelectric actuators. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 4 :4234–4239, Tampa, Florida USA, December 1998.

- [Sun58] T. Sunaga. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. *Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs*, 2 :29–46, 1958.
- [Sun02] Y. Sun, B. J. Nelson, D. P. Potasek, and E. Enikov. A bulk microfabricated multiaxis capacitive cellular force sensor using transverse comb drives. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 12(6) :832–840, 2002.
- [Sun03] Y. Sun, D. P. Potasek, D. Piyabongkarn, R. Rajamani, and B. Nelson. Actively servoed multi-axis microforce sensors. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 16 :294–299, Taipei (Taiwan) 2003.
- [Tan01] T. Tanikawa, M. Kawai, N. Koyachi, T. Arai, T. Ide, S. Kaneko, R. Ohta, and T. Hirose. Force control system for autonomous micromanipulation. *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 610–615, Seoul, Korea 2001.
- [Tan03] Y. Tang. Numerical evaluation of uniform beam modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(12) :1475–1477, 2003.
- [Tan06] U. X. Tan, T. L. Win, and W. T. Ang. Modeling piezoelectric actuator hysteresis with singularity free prandtl-ishlinskii model. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, pages 251–256, Kunming, China, December 2006.
- [Tic04] M. Tichem, D. Lang, and B. Karpuschewski. A classification scheme for quantitative analysis of micro–grip principles. *Assembly Automation*, 24(1) :88–93, 2004.
- [Tor94] A. Torii, M. Sasaki, K. Hane, and S. Okuma. Adhesive force distribution of microstructures investigated by an atomic force microscope. *Sensors and Actuators A*, 44 :153–158, 1994.
- [Tsa03] M. S. Tsai and J. S. Chen. Robust tracking control of a piezoactuator using a new approximate hysteresis model. *Journal of dynamic systems, measurement and control*, 125 :96–102, 2003.
- [Uch00] K. Uchino. *Ferroelectric devices*. Copyright by Marcel Dekker, Inc., 2000.
- [Ude05] T. Udeshi and K. Tsui. Assembly sequence planning for automated micro assembly. *In International Symposium on Assembly and Task Planning*, pages 98–105, 2005.
- [Voi08] R. Voicu, R. Muller, and L. Eftime. Design optimization for an electrothermally actuated polymeric microgripper. *In Symposium on Design, Test, Integration and Packaging (DTIP) of MEMS/MOEMS*, pages 182–186, 2008.
- [Wal94] E. Walter and L. Jaulin. Guaranteed characterization of stability domains via set inversion. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39(4) :886–889, 1994.
- [Wan98] Q.–M. Wanga and L. E. Cross. Performance analysis of piezoelectric cantilever bending actuators. *Ferroelectrics*, 215 :187–213, 1998.

- [Wan02] L. Wang.  $H_\infty$  performance of interval systems. *eprint arXiv :math/0211013*, 1 :1–8, 2002.
- [Wei99] M. S. Weinberg. Working equations for piezoelectric actuators and sensors. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8(4) :529–533, 1999.
- [Wen76] Y. K. Wen. Method for random vibration of hysteresis systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2) :249–263, 1976.
- [Won94a] C. W. Wong, Y.Q. Ni, and J. M. Ko. Steady state oscillation of hysteretic differential model. **I**-response analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(11) :2271–2298, 1994.
- [Won94b] C. W. Wong, Y.Q. Ni, and J. M. Ko. Steady state oscillation of hysteretic differential model. **II**-performance analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(11) :2299–2325, 1994.
- [You31] R. C. Young. The algebra of many-valued quantities. *Math. ann.*, 104 :260–290, 1931.
- [You97] P. M. Young. Robustness analysis with full-structured uncertainties. *Automatica*, 33(12) :2131–2145, 1997.
- [Zam66] G. Zames. On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems, part I and II. *IEEE Transaction Automatic Control*, 11 :228–238 (part I) and 465–476 (part II), 1966.
- [Zho96] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. Robust and optimal control. *Prentice-Hall*, 1996.
- [Zho98] K. Zhou. Essentials of robust control. *Prentice-Hall : Englewood Cliffs NJ*, 1998.
- [Zho00] Y. Zhou and B. J. Nelson. The effect of material properties and gripping force on micrograsping. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1115–1120, April 2000.
- [Zho01] Q. Zhou, A. Aurelian, C. del Corral, P. J. Esteban, P. Kallio, B. Chang, and H. N. Koivo. A microassembly station with controlled environment. *SPIE Conference on Microrobotics and microassembly*, pages 252–260, Boston, USA 2001.



# Table des figures

1	Prévisions du marché des microsystèmes entre 2012 et 2016 [sta11]. . . . .	1
1.1	Dimensions des micro-objets concernés par la micromanipulation. . . . .	6
1.2	Exemples de systèmes assemblés. a : roulement à billes miniature. b : système d'engrenage composé de trains épicycloïdaux miniatures (Institut für Mikrotechnik Mainz). c : spectromètre de masse miniature de dimensions $2 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$ (Zyvex [Ude05]). d : nanomoteur (Klocke Nanotechnik [nan]). . . . .	7
1.3	a : assemblage composant par composant. b : assemblage par groupe (emplacement connu des composants). c : assemblage par groupe (emplacement inconnu des composants). . . . .	7
1.4	Placement des jauges de déformation au sein d'un micropréhenseur. . . . .	10
1.5	Schéma d'un capteur de force capacitif [Sun02]. . . . .	10
1.6	Principe de mesure de force avec un AFM. . . . .	11
1.7	Structure d'un capteur de force à deux axes. . . . .	11
1.8	Capteur de force magnétique [Bou03]. . . . .	12
1.9	a : électrodes soumises à une excitation électrique. b : micropince électrostatique à peignes interdigités réalisée par la société FEMTO TOOLS. . . . .	15
1.10	a : principe d'un actionneur magnétostrictif. b : micro-actionneur de type bimorphe magnétostrictif. . . . .	16
1.11	a : principe d'un micro-actionneur thermique de type bilame. b : principe de micro-actionnement thermique exploitant la différence de géométrie. c : micropince électrothermique [Chr05]. . . . .	18
1.12	a : effet piézoélectrique direct. b : effet piézoélectrique inverse. . . . .	19
1.13	a : une micropince à poutres piézoélectriques unimorphes [Had00b]. b : une micropince à poutres piézoélectriques bimorphes [Agn03]. c : une micropince MMOC à actionnement piézoélectrique intégré au niveau des doigts de préhension [Agn05]. . . . .	20
1.14	a : poutre piézoélectrique unimorphe. b : poutre piézoélectrique multimorphe. . . . .	22
1.15	a : poutre piézoélectrique encastree-libre. b : exemple d'emploi d'organes terminaux sur les poutres d'une micropince [Agn03] . . . . .	23

1.16	a : déformation d'une couche piézoélectrique sous l'effet d'un champ électrique. b : poutre piézoélectrique unimorphe soumise à un champ électrique.	23
1.17	Modes de déformation possibles d'une poutre piézoélectrique. a : mode longitudinal. b : mode transversal. c : mode de cisaillement.	24
1.18	Phénomène d'hystérésis	25
1.19	Phénomène de dérive	26
1.20	a : commande en charge $Q$ d'un actionneur piézoélectrique. b : commande en tension $U$ d'un actionneur piézoélectrique.	27
1.21	Commande en boucle ouverte par inversion du modèle d'hystérésis et de dérive.	28
1.22	Schème de commande en boucle fermée d'actionneurs piézoélectriques.	29
1.23	Commande par compensation du modèle de l'actionneur piézoélectrique.	29
1.24	Commande feedback/feedforward assurant un suivi de trajectoire.	30
1.25	Commande feedback/feedforward par compensation du système bouclé.	30
2.1	Représentation graphique des intervalles et des pavés.	36
2.2	a : encadrement d'un ensemble par un pavé. b : approximation d'un ensemble de $\mathbb{R}^2$ par l'union de pavés de $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$ .	37
2.3	Effet d'enveloppement	38
2.4	Asservissement de système.	42
2.5	Théorème du petit gain.	43
2.6	Théorème du petit gain.	44
2.7	Inclusion des réponses indicielles de $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$ et $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .	50
2.8	Inclusion des réponses fréquentielles de $[G_1](p, [\alpha], [\beta])$ et $[G_2](p, [\gamma], [\lambda])$ .	50
3.1	a : poutre piézoélectrique multimorphe encastrée-libre. b : poutre piézoélectrique multimorphe soumise à des excitations extérieures.	55
3.2	Dimensions d'une poutre piézoélectrique unimorphe.	56
3.3	Principe de mesure de la déflexion d'une poutre piézoélectrique soumise à une excitation électrique.	61
3.4	Mesures expérimentales d'une poutre unimorphe PZT-Nickel comparées aux résultats de simulation.	62
3.5	Résultats de simulation et expérimentaux d'une poutre piézoélectrique bimorphe.	63
3.6	Magnitudes expérimentales de l'unimorphe piézoélectrique PZT-Nickel pour différentes longueurs.	64
3.7	Tracé de la déflexion en fonction de la longueur d'une poutre unimorphe.	66
3.8	Déflexion d'une poutre piézoélectrique unimorphe en fonction du rapport $t = \frac{h_{mp}}{h_p}$ .	67
3.9	Fréquence de résonance du premier mode d'une poutre unimorphe en fonction de la longueur.	68
3.10	Fréquence de résonance d'une poutre unimorphe en fonction du rapport $t$ .	69
3.11	Poutres piézoélectriques unimorphes	70

3.12	a : poutre piézoélectrique unimorphe. b : nouvelle poutre unimorphe dimensionnée. . . . .	71
3.13	Ensemble des pavés $[h_{dp}] \times [h_{dmp}]$ générés par l'algorithme SIVIA. . . . .	74
3.14	a : déflexion expérimentale $\delta$ de la poutre $P_2$ . b : réponse fréquentielle de la poutre $P_2$ . . . . .	75
3.15	a : poutre piézoélectrique bimorphe. b : nouvelle poutre unimorphe dimensionnée. . . . .	76
3.16	Ensemble solution des paramètres $L_d$ et $t$ . . . . .	77
3.17	a : déflexion expérimentale $\delta$ de la poutre unimorphe ( $L = 13.5 \text{ mm}$ ). b : réponse fréquentielle de la poutre unimorphe ( $L = 13.5 \text{ mm}$ ). . . . .	78
4.1	Dimensions d'une poutre piézoélectrique unimorphe. . . . .	83
4.2	Représentation de l'hystérésis dynamique $H_d(U)$ par la mise en série d'un hystérésis $H_s(U)$ et d'une partie dynamique $D(p)$ linéaire. . . . .	84
4.3	Schéma simulink correspondant au modèle d'hystérésis statique. . . . .	85
4.4	a : comparaison des hystérésis statique théorique et expérimental de la poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : comparaison des hystérésis statique théorique et expérimental de la poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	86
4.5	Compensation d'hystérésis statique. . . . .	87
4.6	Linéarisation par inversion d'opérateur d'hystérésis, ( $\delta_s = d_p \delta_r$ ). . . . .	88
4.7	Résultats expérimentaux obtenus après linéarisation. . . . .	88
4.8	Comparaison des résultats expérimentaux et de simulation. a : résultats avec la poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	90
4.9	Dérivation d'un modèle intervalle de deux poutres piézoélectriques de longueurs différentes. . . . .	92
4.10	Système linéarisé à commander $[G_\delta](p) = [K][D](p)$ . . . . .	93
4.11	Système en boucle fermée $[H_{cl}](p, [q], [w])$ . . . . .	94
4.12	Ensemble solution des paramètres du correcteur assurant les performances. . . . .	99
4.13	Résultats expérimentaux obtenus avec les deux correcteurs (4.35). a : résultats avec la poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	100
4.14	Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur $C_1(p)$ . a : poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	101
4.15	Erreur de suivi de trajectoire en utilisant le correcteur $C_1(p)$ . a : poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	101
4.16	Un système $G$ commandé par un contrôleur $C$ . . . . .	102
4.17	Gabarits fréquentiels et fonctions de transfert du système bouclé. . . . .	103
4.18	Forme $H_\infty$ standard. . . . .	104
4.19	Forme $H_\infty$ standard pour un modèle intervalle. . . . .	106
4.20	Organigramme représentant l'algorithme de résolution du problème (4.46). . . . .	107
4.21	Valeurs admissibles des paramètres $[K_p]$ et $[K_i]$ du correcteur PI qui assure les performances robustes. . . . .	109

4.22	Magnitudes des fonctions $[S_i](p)$ et $C_i(p)[S_i](p)$ comparées aux magnitudes $\left \frac{1}{W_1(p)}\right $ et $\left \frac{1}{W_2(p)}\right $ respectivement. . . . .	110
4.23	Réponses expérimentales obtenues avec les correcteurs $C_i(p)$ (4.52). a : résultats avec la poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : résultats avec la poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	111
4.24	Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur $C_1(p)$ (4.52). a : poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	112
4.25	Erreur de suivi de trajectoire en utilisant le correcteur $C_1(p)$ (4.52). a : poutre de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	112
4.26	Problème de la synthèse robuste. . . . .	113
4.27	Schéma avec pondérations pour la commande $\mu$ -synthèse. . . . .	116
4.28	Schéma avec pondérations pour la commande $\mu$ -synthèse. . . . .	116
4.29	Les résultats expérimentaux obtenus avec le correcteur $\mu$ -synthèse en utilisant les deux poutres de longueur différente. . . . .	118
4.30	Mise en place des pondérations. . . . .	119
4.31	a : comparaison de la magnitude des gabarits $\frac{1}{W_1}$ , $\frac{1}{W_{a_2}}$ et $\frac{1}{W_{a_1}}$ . b : magnitudes des gabarits $\frac{1}{W_2}$ , $\frac{1}{W_{b_2}}$ et $\frac{1}{W_{b_1}}$ . . . . .	120
4.32	a : mise en place des pondérations. b : forme standard de commande $H_\infty$ . . . . .	121
4.33	Réponses expérimentales obtenues avec le correcteur $C_{H_\infty}$ . . . . .	122
4.34	Comparaison des réponses temporelles obtenues avec les différents correcteurs. a : poutre piézoélectrique de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre piézoélectrique de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	122
4.35	Comparaison des magnitudes expérimentales. a : poutre piézoélectrique de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : poutre piézoélectrique de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	123
4.36	Diagrammes de <i>Bode</i> des transfert en boucle ouverte. a : résultat de simulation avec $C_{IPP}(p)$ . b : simulation avec $C_{IH_\infty}(p)$ . c : simulation avec $C_{\mu s}(p)$ . d : simulation avec $C_{H_\infty}(p)$ . . . . .	125
5.1	Une micropince manipulant un micro-objet. . . . .	128
5.2	Principe d'estimation de la force appliquée par une poutre piézoélectrique. . . . .	129
5.3	Une poutre piézoélectrique manipulant un micro-objet. . . . .	129
5.4	Schéma-bloc d'estimation non-linéaire de la force. . . . .	130
5.5	Une poutre piézoélectrique exerçant une force sur un objet étalon de structure poutre. . . . .	132
5.6	Commande RST d'un système intervalle. . . . .	134
5.7	Ensemble solution des paramètres $r_0$ et $r_1$ . . . . .	139
5.8	Système intervalle commandé par un correcteur RST. . . . .	140
5.9	Résultats expérimentaux avec $C_1(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 16 \text{ mm}$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 14 \text{ mm}$ . . . . .	141

5.10	Résultats expérimentaux avec $C_2(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 16mm$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 14mm$ . . . . .	141
5.11	Suivi de trajectoire en utilisant le correcteur $C_1(p)$ . a : résultats avec l'objet flexible. b : résultats avec l'objet rigide. . . . .	142
5.12	Schéma de la boucle fermée avec les pondérations. . . . .	143
5.13	Résultats expérimentaux avec $C_{\mu s}(p)$ . a : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 16mm$ . b : réponses avec une poutre piézoélectrique de longueur $L = 14mm$ . . . . .	145
5.14	Magnitudes expérimentales des systèmes en boucle fermée obtenues avec l'objet rigide. . . . .	146
5.15	Magnitudes expérimentales des systèmes en boucle fermée obtenues avec l'objet flexible. . . . .	147
6.1	Micropinçe piézoélectrique. . . . .	149
6.2	Photographie d'unimorphes piézoélectriques. . . . .	150
6.3	a : structure de la micropinçe à base d'actionneurs piézoélectriques. b : prototype de notre micropinçe piézoélectrique. . . . .	150
6.4	a : micropinçe modélisée par un système multivariable. b : micropinçe modélisée par deux systèmes monovariables indépendants. . . . .	151
6.5	Actionneur piézoélectrique d'un micropinçe. . . . .	152
6.6	Un actionneur piézoélectrique poussant un objet. . . . .	152
6.7	Les objets à manipuler. . . . .	153
6.8	Commande en déflexion d'un actionneur piézoélectrique. . . . .	154
6.9	Schéma de principe de la commande en force. . . . .	154
6.10	Schéma de l'installation. . . . .	156
6.11	Schéma de principe de la commande de la micropinçe piézoélectrique. . . . .	156
6.12	Écarts $\Delta\delta_i$ entre les actionneurs et les extrémités de l'objet. . . . .	157
6.13	Régulation en déflexion avec l'objet rigide (résistance CMS). a : réponse en déflexion. b : réponse en force. . . . .	158
6.14	a : zoom réalisé sur la réponse de déflexion. b : zoom réalisé sur la réponse de force. . . . .	158
6.15	Régulation en déflexion avec l'objet souple (polystyrène). a : réponse en déflexion. b : réponse en force. . . . .	159
6.16	a : zoom réalisé sur la réponse de déflexion. b : zoom réalisé sur la réponse de force. . . . .	159
6.17	Régulation en force avec l'objet rigide (résistance CMS). a : réponse en déflexion. b : réponse en force. . . . .	160
6.18	a : zoom réalisé sur le comportement en force. b : zoom réalisé sur le comportement en déflexion. . . . .	161
6.19	Régulation en force avec l'objet souple (polystyrène). a : réponse en déflexion. b : réponse en force. . . . .	161
6.20	a : zoom réalisé sur le comportement en force. b : zoom réalisé sur le comportement en déflexion. . . . .	162

6.21	Déroulement d'une tâche de prise dépose. . . . .	163
6.22	Consigne en rampe j'usqu'à une valeur souhaitée. . . . .	164
6.23	Schémas correspondants à chaque composante du vecteur $f$ . . . . .	167
6.24	Automate représentant le cycle repos-approche-prise-positionnement-dépose automatisé. . . . .	168
6.25	a : approche des deux actionneurs piézoélectriques. b : prise de l'objet. . .	169
6.26	a : manipulation de l'objet. b : dépose de l'objet. . . . .	170
6.27	Résultats expérimentaux du cycle prise-dépose automatisé obtenus avec l'objet rigide. a : évolution de la déflexion. b : évolution de la force. . . . .	170
A.1	Système monovariante . . . . .	180
A.2	Norme- $H_\infty$ graphiquement sur diagramme de Bode . . . . .	181
B.1	Système d'axes pour les équations de fonctionnement piézoélectrique [IEE88]. . . . .	183
C.1	Problème $H_\infty$ standard. . . . .	188

# Liste des tableaux

1.1	Quelques capteurs actuellement utilisés dans les applications du micro-monde. . . . .	9
1.2	Résumé comparatif des caractéristiques de quelques types d'actionnement. . . . .	21
2.1	Opérations classiques sur les intervalles [Moo66] [Jau01]. . . . .	36
2.2	Algorithme SIVIA pour résoudre un problème d'inversion ensembliste [Jau93]. . . . .	40
2.3	Tableau de Routh. . . . .	45
3.1	Solutions de l'équation caractéristique (3.15). . . . .	59
3.2	Caractéristiques physiques du PZT et du Nickel. . . . .	61
3.3	Comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales d'une poutre unimorphe. . . . .	64
3.4	Comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales d'un bimorphe. . . . .	65
3.5	Comparaison des résultats obtenus. . . . .	75
3.6	Comparaison des résultats obtenus. . . . .	79
4.1	Algorithme SIVIA permettant la résolution du problème (4.27). . . . .	96
4.2	Performances expérimentales des boucles fermées. . . . .	100
4.3	Performances temporelles obtenues avec les deux correcteurs (4.52). . . . .	111
4.4	Condition de stabilité correspondante à chaque forme d'incertitude. . . . .	119
4.5	Performances de la boucle fermée réalisées par les quatre correcteurs. . . . .	123
4.6	Marge de gain et marge de phase obtenues avec les différents correcteurs. . . . .	124
5.1	Temps de réponse obtenus avec les correcteurs $C_1(p)$ et $C_2(p)$ . . . . .	140
5.2	Performances de la boucle fermée réalisées par les correcteurs $C_1$ et $C_2$ calculés par intervalles et le correcteur $C_\mu$ de la $\mu$ -synthèse. . . . .	146
B.1	Équations fondamentales de la piézoélectricité. . . . .	185



## Résumé

Les systèmes micromécatroniques intègrent dans un volume très réduit des fonctions de natures différentes (électrique, mécanique, thermique, magnétique ou encore optique). Ces systèmes sont des produits finaux ou sont intégrés dans des systèmes de taille macroscopique. La tendance à la miniaturisation et à la complexité des fonctions à réaliser conduit à des microsystèmes en trois dimensions et constitués de composants provenant de processus de (micro)fabrication parfois incompatibles. L'assemblage microbotique est une réponse aux challenges de leur réalisation. Pour assurer les opérations d'assemblage avec des précisions et des résolutions élevées, des capteurs adaptés au micromonde et des outils particuliers de manipulation doivent être utilisés. Les éléments principaux constituant les systèmes de micromanipulation sont les micro-actionneurs. Ces derniers sont souvent faits à base de matériaux actifs parmi lesquels les matériaux piézoélectriques. Les actionneurs piézoélectriques sont caractérisés par leur très haute résolution (souvent nanométrique), leur grande bande-passante (plus du kHz pour certains micro-actionneurs) et leur grande densité de force. Tout ceci en fait des actionneurs particulièrement intéressants pour le micro-assemblage et la micromanipulation. Cependant, ces actionneurs présentent, en plus de leur comportement non-linéaire, une forte dépendance à l'environnement et aux tâches considérées. De plus, ces tâches de micro-manipulation et de micro-assemblage sont confrontées à un manque de capteurs précis et compatibles avec les dimensions du micromonde. Ceci engendre des incertitudes sur les paramètres du modèle élaboré lors de l'identification. En présence du verrou technologique lié à la réalisation des capteurs et des propriétés complexes des actionneurs, il est difficile d'obtenir les performances de haut niveau requises pour réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage. C'est notamment la mise au point d'outils de commande convenables qui permet d'atteindre les niveaux de précision et de résolution nécessaires.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans ce cadre. Afin de réussir les tâches de micromanipulation et de micro-assemblage, plusieurs méthodes de commande prenant en compte des incertitudes liées au modèle, comme les approches de commande robustes de type H-inf ont déjà été utilisées pour commander les actionneurs piézoélectriques. L'un des inconvénients majeurs de ces méthodes est la dérivation de régulateurs d'ordre élevé qui sont coûteux en calcul et peuvent difficilement être embarqués dans les microsystèmes. Afin de prendre en compte les incertitudes paramétriques des modèles des systèmes à commander, nous proposons une solution alternative basée sur l'utilisation du calcul par intervalles. Ces techniques du calcul par intervalles sont combinées avec les outils de l'automatique pour modéliser et commander les microsystèmes. Nous chercherons également à montrer que l'utilisation de ces techniques permet d'associer la robustesse et la simplicité des correcteurs dérivés

## Abstract

Micromechatronic systems integrate in a very small volume functions with different natures. The trend towards miniaturization and complexity of functions to achieve leads to 3-dimensional microsystems. These 3-dimensional systems are formed by microrobotic assembly of various microfabricated and incompatible components. To achieve the assembly operations with high accuracy and high resolution, adapted sensors for the microworld and special tools for the manipulation are required. The microactuators are the main elements that constitute the micromanipulation systems. These actuators are often based on smart materials, in particular piezoelectric materials. The piezoelectric materials are characterized by their high resolution (nanometric), large bandwidth (more than kHz) and high force density. This why the piezoelectric actuators are widely used in the micromanipulation and microassembly tasks. However, the behavior of the piezoelectric actuators is non-linear and very sensitive to the environment. Moreover, the development of the micromanipulation and the microassembly tasks is limited by the lack of precise and compatible sensors with the microworld dimensions. In the presence of the difficulties related to the sensors realization and the complex characteristics of the actuators, it is difficult to obtain the required performances for the micromanipulation and the microassembly tasks. For that, it is necessary to develop a specific control approach that achieves the wanted accuracy and resolution.

The works in this thesis deal with this problematic. In order to success the micromanipulation and the microassembly tasks, robust control approaches such as  $H_\infty$  have already been tested to control the piezoelectric actuators. However, the main drawbacks of these methods is the derivation of high order controllers. In the case of embedded microsystems, these high order controllers are time consuming which limit their embedding possibilities. To address this problem, we propose in our work an alternative solution to model and control the microsystems by combining the interval techniques with the automatic tools. We will also seek to show that the use of these techniques allows to derive robust and low-order controllers.