



**HAL**  
open science

# Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires

Manuel Fernando Cortez Estrella

► **To cite this version:**

Manuel Fernando Cortez Estrella. Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires. Mathématiques [math]. Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, France, 2015. Français. NNT : 2015LYO10198 . tel-01228211v1

**HAL Id: tel-01228211**

**<https://hal.science/tel-01228211v1>**

Submitted on 12 Nov 2015 (v1), last revised 12 Jun 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires



**Manuel Fernando Cortez**

Thèse de doctorat

# Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires

**Résumé :** Le sujet de cette thèse est la formation de singularités pour certaines équations d'évolution dispersives et/ou dissipatives non-linéaires. Notre travail est axé sur les problèmes de Cauchy, généralement avec des conditions aux limites périodiques ou dans tout  $\mathbb{R}^n$ . Notre objectif est de fournir les conditions nécessaires ou suffisantes (ou les deux) sur les données initiales  $u_0(x)$ , garantissant que la durée de vie  $T^*$  de la solution résultant de  $u_0$  est finie ou non. Nous étudions deux types d'équations : une équation parabolique non linéaires et une classe d'équations d'ondes dispersives.

La première équation étudiée est un modèle 1D de propagation d'ondes non-linéaires, qui apparaît par exemple dans l'étude des vagues dans un canal ou des déformations d'une barre hyper-élastique. L'une des contributions décisives de notre travail sera celle-ci : *la seule solution forte globale périodique du problème de Cauchy de la barre hyper-élastique qui s'annule en au moins un point est la solution identiquement nulle*. Nous établissons également l'analogie de ce résultat dans le cas des solutions non-périodiques définies sur toute la droite réelle, avec limite nulle à l'infini. Notre analyse repose sur l'application de nouveaux critères d'explosion "locaux en espace (*local-in-space blowup criteria*).

Une deuxième équation étudiée est une généralisation de l'équation de la barre hyper-élastique qui a été proposée par H. Holden et X. Raynaud. Cette généralisation peut couvrir de nombreux autres types d'équations avec des propriétés mathématiques intéressantes. Nous établirons alors des critères d'explosion *locaux en espace* pour les solutions de ce modèle. Plus précisément, il s'agira de critères qui ne font intervenir que les propriétés de la condition initiale  $u_0$  au voisinage d'un seul point. Ils simplifient et étendent de précédents critères d'explosion pour cette équation.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à une famille d'équations connue dans la littérature sous le nom *b-family equations*. L'un des cas les plus notables de cette famille d'équations est l'équation de Degasperis-Procesi. Pour cette famille, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux décrits précédemment.

Enfin, dans la dernière partie, il s'agit d'étudier le caractère bien posé, local ou global en temps, dans des espaces fonctionnels issus de l'analyse harmonique et ayant les bonnes propriétés d'invariance par rapport aux changements d'échelle. Nous étudions le problème de Cauchy non-linéaire de l'équation de la chaleur. Après avoir établi une extension du résultat d'Y. Meyer sur l'existence de solutions globales à données petites dans les espaces de Besov homogènes  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}$ , où  $3 < p < 9$  et  $\sigma = 1 - 3/p$ , nous prouvons que les données initiales  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , arbitrairement petites dans  $\dot{B}_9^{-2/3, \infty}(\mathbb{R}^3)$  peuvent produire des solutions qui explosent en temps fini. En outre, cette explosion peut se produire après un temps arbitrairement court.

**Mots clés :** Critères d'explosion ; L'équation de la barre hyper-élastique ; *b-family equations* ; L'équation de Camassa-Holm ; L'équation de Degasperis-Procesi ; L'équation de la chaleur non-linéaire.

**Image en couverture :** La Grande Vague de Kanagawa (estampe japonaise).

**Crédit image :** Peintre japonais Hokusai.



UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1  
INSTITUT CAMILLE JORDAN - UMR 5208  
ÉCOLE DOCTORALE INFOMATHS

## Thèse de l'Université de Lyon

pour l'obtention du

### Diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques  
(arrêté du 7 août 2006)

Présentée par  
Manuel Fernando CORTEZ

## Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires

Thèse dirigée par Lorenzo BRANDOLESE,  
soutenue publiquement le 15 octobre 2015,  
devant le Jury composé de :

Sylvie BENZONI	Université Lyon 1	Examineur
Lorenzo BRANDOLESE	Université Lyon 1	Directeur de thèse
Adrian CONSTANTIN	King's College London	Rapporteur
Raphaël DANCHIN	Université Paris-Est Créteil	Examineur
Luc MOLINET	Université de Tours	Rapporteur
Hatem ZAAG	Université Paris 13	Examineur



## Résumé :

Le sujet de cette thèse est la formation de singularités pour certaines équations d'évolution dispersives et/ou dissipatives non-linéaires. Notre travail est axé sur les problèmes de Cauchy, généralement avec des conditions aux limites périodiques ou dans tout  $\mathbb{R}^n$ . Notre objectif est de fournir les conditions nécessaires ou suffisantes (ou les deux) sur les données initiales  $u_0(x)$ , garantissant que la durée de vie  $T^*$  de la solution résultant de  $u_0$  est finie ou non. Nous étudions deux types d'équations : une équation parabolique non linéaires et une classe d'équations d'ondes dispersives.

La première équation étudiée est un modèle  $1D$  de propagation d'ondes non-linéaires, qui apparaît par exemple dans l'étude des vagues dans un canal ou des déformations d'une barre hyper-élastique. L'une des contributions décisives de notre travail sera celle-ci : *la seule solution forte globale périodique du problème de Cauchy de la barre hyper-élastique qui s'annule en au moins un point est la solution identiquement nulle*. Nous établissons également l'analogie de ce résultat dans le cas des solutions non-périodiques définies sur toute la droite réelle, avec limite nulle à l'infini. Notre analyse repose sur l'application de nouveaux critères d'explosion "locaux en espace" (*local-in-space blowup criteria*).

Une deuxième équation étudiée est une généralisation de l'équation de la barre hyperélastique qui a été proposée par H. Holden et X. Raynaud. Cette généralisation peut couvrir de nombreux autres types d'équations avec des propriétés mathématiques intéressantes. Nous établirons alors des critères d'explosion *locaux en espace* pour les solutions de ce modèle. Plus précisément, il s'agira de critères qui ne font intervenir que les propriétés de la condition initiale  $u_0$  au voisinage d'un seul point. Ils simplifient et étendent de précédents critères d'explosion pour cette équation.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à une famille d'équations connue dans la littérature sous le nom *b-family equations*. L'un des cas les plus notables de cette famille d'équations est l'équation de Degasperis-Procesi. Pour cette famille, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux décrits précédemment.

Enfin, dans la dernière partie, il s'agit d'étudier le caractère bien posé, local ou global en temps, dans des espaces fonctionnels issus de l'analyse harmonique et ayant les bonnes propriétés d'invariance par rapport aux changements d'échelle. Nous étudions le problème de Cauchy non linéaire de l'équation de la chaleur. Après avoir établi une extension du résultat d'Y. Meyer sur l'existence de solutions globales à données petites dans les espaces de Besov homogènes  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ , où  $3 < p < 9$  et  $\sigma = 1 - 3/p$ , nous prouvons que les données initiales  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , arbitrairement petites dans  $\dot{B}_9^{-2/3, \infty}(\mathbb{R}^3)$  peuvent produire des solutions qui explosent en temps fini. En outre, cette explosion peut se produire après un temps arbitrairement court.

## Abstract :

The subject of this thesis is the formation of singularities for some nonlinear evolution equations of dissipative and/or dispersive type. Our work is focused on the Cauchy problems, usually with periodic boundary conditions or on the whole  $\mathbb{R}^n$ . Our aim is to provide the necessary or sufficient conditions (or both) on the initial data  $u_0(x)$ , ensuring that the lifetime  $T^*$  of the solution resulting from  $u_0$  is finite or not. We study two types of equations : a nonlinear parabolic equation and a class of dispersive wave equations.

In the first case, we study a one-dimensional model which describe the propagation of nonlinear waves in a channel or the deformations of a hyper-elastic rod. One decisive contributions of our work will be this : *the only global strong periodic solution of the rod equation vanishing in at least one point is the identically zero solution*. We also establish the analogue of this result in the case of non-periodic solutions defined on the whole real line which vanish at infinity. Our analysis is based on the application of new *local-in-space* blowup criteria.

The second equation that we consider is a generalization of the rod equation which was proposed by H. Holden and X. Raynaud. This generalization covers many other equations with interesting mathematical properties. We will establish criteria for the blowup in finite time that involve only the properties of the data  $u_0$  in a neighborhood of a single point, thus simplifying and extending earlier blowup criteria for this equation.

After, we study family of equations known in the literature as the “*b-family*” equations. One of the most notable cases of this family of equations is the Degasperis-Procesi equation. For this family we obtain similar results as those described above.

Finally, the last part, we study the well-posedness, locally or globally in time of the nonlinear heat equation, in functional spaces having appropriate invariance properties relative to scale changes. After extending Y. Meyer’s result establishing the existence of global solutions, under a smallness condition of the initial data in the homogeneous Besov spaces  $\dot{B}_p^{-\sigma,\infty}(\mathbb{R}^3)$ , where  $3 < p < 9$  and  $\sigma = 1 - 3/p$ , we prove that initial data  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , arbitrarily small in  $\dot{B}_9^{-2/3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ , can produce solutions that explode in finite time. In addition, the blowup may occur after an arbitrarily short time.

---

## Remerciements

---

L'étude présentée dans cette thèse n'aurait pu aboutir sans le soutien de plusieurs personnes auxquelles j'exprime toute ma gratitude.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse Lorenzo Brandolese, qui m'a initié à la recherche. Son soutien constant, sa patience et ses encouragements m'ont vraiment permis de m'épanouir scientifiquement pendant ces années. Je suis profondément reconnaissant envers Adrian Constantin et Luc Molinet qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'à Sylvie Benzoni, Raphaël Danchin et Hatem Zaag de faire partie de mon jury.

Ce rapport a été préparé à l'université Lyon 1, dans l'ambiance agréable et l'environnement stimulant de l'Institut Camille Jordan. Je voudrais remercier les nombreux collègues et amis que j'ai dans l'Institut, pour les discussions enrichissantes que j'ai eues avec eux, ou simplement pour les moments de détente. En particulier Agathe, Niccoló et Julien qui sont bien plus que des collègues de bureau. Merci également aux occupants du bureau 111A : Blanche, François, Thomas, Haydar, Benoît. Comment ne pas remercier les autres doctorants du labo : Luigia, Rudy, Bérénice, Adriane,...

Je souhaite exprimer ici ma reconnaissance à Rolando Saenz et Diego Chamorro pour leur soutien sans faille dès mes premiers pas dans l'étude des mathématiques.

Cette a été pris en charge financièrement par le SENESCYT (*Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación*).

No sería capaz de dejar de mencionar a los panas de siempre que a pesar de la distancia, han estado apoyándome en esta etapa de mi vida : Leo, Borchis, Cocos, Edy. Al Pato Guerrero alias la bestia por los recuerdos que dejó marcado tanto en mi mente como en mi rostro (por suerte nunca vivimos en la misma ciudad). A la Andre Delgado por sus lecciones de francés y su devoción por llevarme la contraria.

También a los enfermos de la secta de la Condamine (Mateo, Martin, Pavo, Gabos...) que han hecho de esta estancia en Lyon, un recuerdo que me acompañará el resto de mis días y en especial a un grande que nos dejo muy temprano, nuestro Dr. Tortuga Freddy. A mis amigos latinoamericanos : Oscar, Rafael, Patricio, Nicolas, Jorge, Pablo, Agustin.

Y para finalizar quiero dar las gracias a mi familia, principalmente a las mujeres que son parte de ella y de ese grupo destacar a mi Madre el soporte donde se posan todos mis males y todas mis virtudes. A mi padre, el hombre en el que me reflejo y mis hermanos (Belen, Jayson y Frank).



*“Cualquier destino, por largo y complicado que sea,  
consta en realidad de un solo momento :  
el momento en que el hombre sabe para siempre  
quién es”.*

Jorge Luis Borges.

<b>Résumé - Abstract</b>		<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>		<b>v</b>
<b>1 Quelques équations dispersives non linéaires</b>		<b>1</b>
1.1	Présentation des problèmes étudiés et aperçu des résultats . . . . .	4
1.2	Vagues permanentes et de rupture dans les barres hyperélastiques et anneaux . . . . .	6
1.2.1	Motivations physiques et présentation du modèle . . . . .	6
1.2.2	Cadre théorique et aperçu des résultats . . . . .	7
1.2.3	Méthode de preuves . . . . .	9
1.2.4	Énoncé des théorèmes principaux . . . . .	9
1.3	Problèmes d’explosion de la solution pour une classe d’équations d’ondes non linéaires dispersives . . . . .	12
1.3.1	Présentation du problème . . . . .	12
1.3.2	Résultats précédents . . . . .	12
1.3.3	Contributions principales . . . . .	13
1.3.4	Variantes et corollaires . . . . .	15
1.4	Explosion des solutions périodiques pour le <i>b-family equations</i> . . . . .	17
1.4.1	Contributions principales . . . . .	17
<b>2 L’équation de la chaleur non linéaire, le cas critique</b>		<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.1.1	Analyse de Fujita et ses développements . . . . .	28
2.2	Comportement asymptotique à l’explosion de la solution . . . . .	30
2.2.1	Introduction aux différents types de comportements asymptotiques par rapport à l’énergie. . . . .	31
2.2.2	Cas sous-critique de l’énergie . . . . .	31
2.2.3	Cas critique de l’énergie . . . . .	33
2.2.4	Cas sur critique de l’énergie . . . . .	33
2.3	Un cas modèle d’énergie sur-critique : l’équation de la chaleur cubique dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	34
2.3.1	Comparaison de l’équation de la chaleur non-linéaire critique et de l’équation de Navier-Stokes . . . . .	35
2.4	Présentation des principaux résultats . . . . .	36
2.4.1	Cadre théorique et notations . . . . .	36

2.4.2	Énoncé du théorème principal . . . . .	38
2.4.3	Méthode de preuve et quelques commentaires . . . . .	39
2.5	Questions ouvertes et perspectives . . . . .	40
<b>3</b>	<b>On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations</b>	<b>83</b>
<b>5</b>	<b>The <math>b</math>-family equations</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Blow-up for the periodic $b$ -family equations . . . . .	105
5.3	estimates of $\beta_b$ . . . . .	112
5.3.1	Estimate 1 . . . . .	113
5.3.2	Estimate 2 . . . . .	113
5.3.3	Estimate 3 . . . . .	115
5.3.4	Numerical Analysis of $\beta_b$ . . . . .	116
<b>6</b>	<b>slowly oscillating solution of the cubic heat equation</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	Preliminaries . . . . .	124
6.3	Quick overview of the main results . . . . .	124
6.4	Proof of Theorem 6.3.1 . . . . .	126
6.5	Proof of main Theorem and some comments . . . . .	128

---

## Quelques équations dispersives non linéaires

---

Dans ce chapitre, on va s'intéresser au problème de Cauchy pour certaines équations dispersives non linéaires. Ce type d'équations interviennent naturellement dans de nombreux phénomènes physiques relatifs à la propagation d'ondes dans des milieux généralement dispersifs. L'étude mathématique de ces équations a fait l'objet de recherches intensives ces dernières années et ceci a conduit à l'introduction de nouveaux outils pour mieux comprendre le comportement local et global de leurs solutions. Un modèle bien connu de ce type de problème est l'équation de Korteweg de Vries (*KdV*) qui a été développée par D.J. Korteweg et Hendrik de Vries [57], qui avait pour objet l'explication d'un phénomène d'hydrodynamique observé une soixantaine d'années auparavant par l'ingénieur Scott Russell. En 1840, celui-ci publia un article où il décrit son observation, datant de 1834, de la propagation d'une onde d'un type nouveau dans un canal d'eau peu profond. Il décrit celle-ci en ces mots : *a large solitary progressive wave*. Il en fit une description plus élégante quatre ans plus tard dans l'article qui le rendit célèbre : *"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horse back, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in winding of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation..."*. La description mathématique de ce phénomène d'hydrodynamique est donnée par l'équation :

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0. \tag{1.1}$$

C'est une équation d'évolution non linéaire qui possède des solutions de type "ondes solitaires",

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - \epsilon) \right],$$

où l'amplitude  $\frac{c}{2}$  est égale à la moitié de la vitesse et  $\epsilon$  est une phase. L'équation *KdV* est obtenue comme un modèle asymptotique des équations d'Euler à surface libre dans le régime dit de l'eau peu profonde  $\mu = h^2/\lambda^2 \ll 1$ , où  $h$  et  $\lambda$  désignent respectivement la profondeur

moyenne du liquide et la longueur d'onde caractéristique. Il modélise des vagues de petite amplitude, c'est-à-dire des ondes telles que le paramètre adimensionnel  $\epsilon = a/h$ , vérifie  $\epsilon = O(\mu)$ , où  $a$  est l'amplitude. Ces vagues de petite amplitude possèdent des effets non linéaires et dispersifs. Pour les vagues de grande amplitude, les effets non linéaires deviennent prépondérants et le déferlement peut éventuellement se produire. L'équation *KdV* fut peu étudiée jusqu'en 1965, quand Zabusky et Kruskal [82] trouvèrent une analogie entre l'équation *KdV* (1.1) et la limite continue des équations de Fermi, Pasta et Ulam. Ce modèle avait été introduit, en 1950, pour décrire la répartition de l'énergie dans les modes excités d'un cristal non conducteur. Ils remarquèrent que leurs données évoluent comme une série de pulsations, et que chacune de ces pulsations avait une vitesse proportionnelle à son amplitude. Compte tenu de l'évolution du système à long terme Zabusky et Kruskal découvrirent que les grandes pulsations dépassent les plus petites en les laissant inchangées. À cause de cette propriété (collision élastique) habituellement associée à des particules, on donna à ces ondes le nom de *solitons*. Dans le cas des vagues à la surface des fluides, nous entendons par *soliton* une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif.

Un autre fait exceptionnel est qu'il existe des solutions de cette équation comportant plusieurs solitons pouvant se croiser sans perdre leur identité propre, c'est-à-dire leur forme et leur taille. On connaît aussi des transformations mathématiques qui permettent de fabriquer une nouvelle solution en transformant une ancienne. Connues sous le nom de transformations de Bäcklund [34], ces transformations peuvent être répétées à l'infini et produire une suite de solutions de plus en plus complexes en partant d'une solution extrêmement simple. Et cette surprise n'est pas la seule : on a réussi à mettre au point une théorie mathématique totalement stupéfiante qui permet de résoudre *KdV*. On parle alors de système complètement intégrable. Les systèmes complètement intégrables sont des équations possédant tellement de propriétés remarquables et de symétries cachées, que leur nombre est assez limité.

Comme nous l'avons dit précédemment, l'équation modélise la propagation des vagues de petite amplitude dans l'eau peu profonde, c'est pour cette raison que l'équation *KdV* n'est pas appropriée à la description des phénomènes de déferlement (*breaking mechanisms*), car ses solutions restent lisses pour tout temps.

Un effort considérable a été fait sur une modélisation réaliste de vagues de plus grande amplitude (éventuellement ne vérifiant plus le scaling de *KdV*  $\epsilon = O(\mu)$ , pour  $\mu \rightarrow 0$ ), avec la motivation de prendre en compte les effets de déferlement. On pourra consulter pour cela la monographie [78]. Ces travaux aboutissent à la recherche de Roberto Camassa et Darryl Holm en 1993 [9, 10], avec une équation obtenue en utilisant un développement asymptotique directement dans l'hamiltonien pour les équations d'Euler dans le régime d'eau peu profonde. Cette équation a suscité un intérêt considérable au cours des 20 dernières années, non seulement en raison de sa pertinence hydrodynamique (elle a été la première équation capable de capturer les deux types d'ondes : solitons et vagues déferlantes), mais aussi en raison de sa structure mathématique très riche. De plus, elle reste pertinente pour des vagues dont l'amplitude vérifie une relation de scaling  $\epsilon = O(\sqrt{\mu})$ , pour  $\mu \rightarrow 0$ .

L'équation de Camassa-Holm est généralement écrite comme

$$u_t + \kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

où  $u$  peut être interprétée comme une vitesse horizontale de l'eau à une certaine profondeur et  $\kappa$  est le paramètre de dispersion. Dans le régime d'eau peu profonde  $\kappa$  est proportionnel à la racine carrée de la profondeur d'eau et ne peut pas être nul ou négatif. Cela dit, dans beaucoup de travaux on suppose  $\kappa = 0$  : c'est restrictif seulement si l'on impose un certain comportement à l'infini. En effet on peut faire le changement de variable  $u(t, x) = v(t, x - \kappa t) + \kappa$ , c'est-à-dire que si  $u(t, x)$  est solution de l'équation de Camassa-Holm non dispersive, alors  $v(t, x - \kappa t) + \kappa$

est solution de l'équation (1.2).

Semblable à l'équation  $KdV$ , l'équation de Camassa-Holm a la particularité d'avoir des solitons lisses (si  $\kappa \neq 0$ ). Dans le cas particulier où  $\kappa = 0$ , l'équation de Camassa-Holm a des solutions  $u_c(t, x) = ce^{-|x-ct|}$ , qui sont des solitons avec un pic pointu, dites *peakons*. Il ne s'agit pas de solutions au sens classiques, à cause de la discontinuité de la dérivée première, mais bien des solutions de l'équation dans un sens faible approprié. Les interactions entre les multi-solitons (*multi-peakons*) sont étudiées dans [9, 10].

Les problèmes de Cauchy périodique et non périodique sont localement bien posés dans l'espace  $H^s$ , avec  $s > \frac{3}{2}$ , ou plus généralement des espaces de Besov  $B_{p,r}^s$  avec  $s > \max(3/2, 1 + 1/p)$ . D'un autre côté, des contre-exemples au caractère (uniformément) bien posé dans l'espace  $H^s$  ( $s < 3/2$ ) ont été mis en évidence par Himonas et Misiolek [45]. Ainsi,  $H^{3/2}$  semble être l'espace critique pour le caractère bien posé du problème local. L'analyse de ce problème dans les espaces de Besov, et en particulier sa structure d'équation de transport, permet d'en dire un peu plus : en effet, l'équation (1.2) est localement bien posée dans  $B_{2,1}^{3/2}$  mais pas dans  $B_{2,\infty}^{3/2}$ , (voir [27]). On remarquera au passage les injections de Sobolev :

$$B_{2,1}^{3/2} \subset H^{3/2} \subset B_{2,\infty}^{3/2}.$$

En fait, le problème de Cauchy est même bien posé dans l'espace des fonctions lipschitziennes, muni de la topologie de  $H^1$  (voir [43]).

Contrairement à beaucoup d'équations, aucune condition de petitesse n'est en mesure de garantir l'existence globale des solutions fortes. En effet des données initiales arbitrairement petites peuvent donner lieu à des solutions qui, tout en restant bornées, deviennent singulières, au sens que  $\|u_x\|_\infty$  explose en un temps fini. En revanche, l'existence globale peut être assurée à l'aide d'une condition de signe sur le potentiel  $u_0 - u_{0,xx}$ , où  $u_0$  est la condition initiale associée à la solution de (1.2).

Le problème de Cauchy périodique pour l'équation de Camassa-Holm non dispersive, est connu pour correspondre à un flot géodésique sur le groupe de difféomorphisme du cercle (voir [58]). L'existence locale des géodésiques avec les propriétés de la fonction exponentielle de Riemann ont été étudiés dans [19, 20]. D'autre part, une version multidimensionnelle de l'équation (1.2) avec  $\kappa = 0$  apparaît dans l'étude de la dynamique d'une classe de fluides non-newtoniens, fluides de second degré (voir [8]). L'équation (1.2) intervient aussi lors de la modélisation des vibrations à l'intérieur des barres hypers élastiques (voir [24, 25]). Dans ce dernier cas, les "solitons pointus" (*peakons*), correspondent à des solutions physiques.

Une particularité de l'équation de Camassa-Holm, par rapport à l'équation  $KdV$ , est de posséder des solutions qui explosent en temps fini avec une explosion du type "vague qui se brise", c'est-à-dire que la solution reste bornée tandis que sa pente tend vers  $-\infty$  en un point  $(x, t)$ .

L'équation de Camassa-Holm apparait donc naturellement dans des nombreuses situations physiques. Mais en réalité, cette équation avait été écrite pour la première fois en 1981 dans un contexte bien différent : elle figure en effet comme l'une des 12 équations intégrables classées par Fokas et Fuchssteiner [36], satisfaisant les propriétés assez abstraites d'une certaine classe d'opérateurs non linéaires.

C'est une démarche semblable (consistant en l'application de leur méthode dite de l'intégrabilité asymptotique) qu'a conduit Degasperis et Procesi, en 1999, à trouver une nouvelle équation intégrable (voir [28]) :

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x - 3u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

Tout comme l'équation de Camassa-Holm, l'équation est (1.3) est un modèle d'eau peu profonde physiquement pertinent : dans cette interprétation, l'inconnue  $u$  exprime une vitesse horizontale à une certaine profondeur fixée (voir [13, 21]).

Les résultats d'existence locale des solution sont les même que pour Camassa–Holm. En particulier, cette équation est localement bien posé dans  $H^s$ , avec  $s > \frac{3}{2}$ . Les problèmes de Cauchy, périodique ou non, ont été étudiés dans [72, 81]. Cette solution peut exploser en un temps fini ou sinon être globale. Des critères d'explosion en temps fini de la solution du problème 1.3 sur  $\mathbb{R}$ , figurent dans [28, 62, 83, 85] et, pour le tore, dans [81, 83]. Pour les critères d'existence globale on pourra voir [62, 72, 83]. Bien que les propriétés des articles ci-dessus soient parfaitement analogues à celles connues pour l'équation de Camassa–Holm (dans le cas  $\kappa = 0$ ), les deux équations sont vraiment différentes. Une différence est le fait que l'équation de Degasperis-Procesi permet non seulement des solitons de type (*peakon*) comme solutions ( $u(t, x) = ce^{-|x-ct|}$ ,  $c > 0$ ), mais aussi des solitons discontinus (dits *shock peakons*) ( $u = \frac{1}{t+k} \text{sign}(x)e^{-|x|}$ ). Pour plus de détails, voir [31, 42, 64].

## 1.1 Présentation des problèmes étudiés et aperçu des résultats

L'équation de Camassa-Holm (sans terme de dispersion, c'est-à-dire avec  $\kappa = 0$ ) est un cas particulier de l'équation suivante :

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = \gamma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.4)$$

Cette équation a été présentée par H. H. Dai. (voir [24]), et décrit en général la propagation des ondes non linéaires à l'intérieur des barres d'hyper-élastiques cylindriques, lorsque le diamètre est petit par rapport à la longueur axiale. Par la suite, nous appellerons (1.4) l'équation de la barre hyper-élastique (*hyper-elastic rod equation*). Nous compléterons cette équation par des conditions au bord nulles à l'infini ou périodiques en espace. Dans les deux cas, il est possible de réécrire le problème de Cauchy associé à l'équation (1.4) sous la forme faible suivante :

$$\begin{cases} u_t + \gamma uu_x = -\partial_x p * \left( \frac{3-\gamma}{2} u^2 + \frac{\gamma}{2} u_x^2 \right), & t \in (0, T), x \in \mathbb{A}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $p(x)$  est la solution fondamentale de l'opérateur  $1 - \partial_x^2$  dans  $\mathbb{A}$ . Si  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , alors le noyau  $p$  est donnée par l'expression

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

tandis que dans le cas du tore  $\mathbb{A} = \mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,

$$p(x) = \frac{\cosh(x - [x] - 1/2)}{2 \sinh(1/2)}, \quad (1.6)$$

où  $[\cdot]$  désigne la partie entière.

L'une des contributions décisives de notre travail sera celle-ci : *la seule solution forte globale du problème de Cauchy périodique pour l'équation (1.11) qui s'annule en au moins un point  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$  est la solution identiquement nulle*. Cette conclusion est valable à condition que le paramètre physique  $\gamma \in \mathbb{R}$  du modèle (lié au tenseur des déformations de Finger) soit en dehors d'un certain voisinage de l'origine. Il s'agit là d'une restriction dont nous ne savons pas si l'on peut se passer, mais qui nous permet de prendre en compte la presque totalité de matériaux hyper-élastiques listés dans [24]. En particulier, notre résultat s'applique pour l'équation de Camassa-Holm ( $\gamma = 1$ ).

Nous établissons également l'analogie de ce résultat dans le cas des solutions non-périodiques définies sur toute la droite réelle, avec limite nulle à l'infini. Notre analyse repose sur l'application de nouveaux critères d'explosion "locaux en espace" (*local-in-space blowup criteria*) pour

l'équation (1.11) en temps fini et sur des estimations de convolution faisant intervenir des inégalités de Poincaré pondérées.

Une généralisation de (1.11) a été proposée par H. Holden et X. Raynaud (voir [46]) :

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]_x = 0. \quad (1.7)$$

On travaille sous les hypothèses que  $f$  est strictement convexe ou concave et  $g$  est localement uniformément lipschitzienne. L'équation (1.7) est souvent désignée comme l'équation généralisée de la barre hyper-élastique. Lorsque  $f(u) = \frac{\gamma}{2}u^2$  et  $g(u) = \frac{3-\gamma}{2}u^2$ , l'équation (1.4) devient l'équation de la barre hyper-élastique. Cette généralisation peut couvrir de nombreux autres types d'équations avec des propriétés mathématiques intéressantes (ce point sera abordé plus en détail dans la section 1.3). Comme ci-dessus, on peut réécrire le problème de Cauchy associé à l'équation (1.7) sous la forme faible suivante :

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x + \partial_x p * \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right] = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Nous établirons alors des critères d'explosion *locaux en espace* pour les solutions de ce modèle (Théorème 1.6). Plus précisément, il s'agira de critères qui ne font intervenir que les propriétés de la condition initiale  $u_0$  au voisinage d'un seul point. Ils simplifient et étendent de précédents critères d'explosion pour cette équation. Une conséquence de ce théorème sera que les solutions globales doivent satisfaire des propriétés très strictes. En effet, nous verrons que la solution doit exploser si  $u_0(x) = c + o(e^{-\beta|x|})$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . L'explosion en temps fini doit également se produire s'il existe  $x_1 < x_2$  tels que  $u(t, x_1) > c > u(t, x_2)$ . Ici, les constantes  $\beta > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$  sont celles du Théorème 1.6.

L'équation de Degasperis-Procesi n'est pas incluse dans le modèle (1.23). Nous nous sommes alors intéressés à une famille d'équations, introduite dans [29, 48], et connue dans la littérature sous le nom de *b-family equations* :

$$u_t - u_{txx} + (b+1)uu_x - bu_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0. \quad (1.9)$$

Pour  $b = 2$ , (1.9) est l'équation de Camassa-Holm et pour  $b = 3$ , (1.9) est l'équation de Degasperis-Procesi (DP). Ces sont les deux seules valeurs de  $b$  qui rendent l'équation complètement intégrable, en accord avec les différents tests d'intégrabilité utilisés, voir [48, 50, 67]. L'intérêt hydrodynamique de (1.9), au delà des cas  $b = 2, 3$ , est décrit dans [51, 54].

Dans la section 1.4 nous verrons que les techniques introduites dans l'analyse du le modèle (1.11), convenablement adaptées, nous renseignent sur la formation de singularité pour cette équation. Ce sera le cas si le paramètre  $b$  appartient à un certain intervalle (contenant  $[2, 3]$ ), que nous ne connaissons pas avec précision, mais que nous pourrons estimer numériquement. Dans cette plage, nous obtenons ainsi des critères d'explosion à la fois plus forts et naturels que les critères précédemment connus.

Dans les sections suivantes nous fournirons des énoncés plus précis de ces résultats.



## 1.2 Vagues permanentes et de rupture dans les barres hyperélastiques et anneaux

Voir aussi l'article [4], *On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings*. En collaboration avec Lorenzo Brandolese, *Journal of Functional Analysis*, **266**, N. 12, (2014) pp. 6954-6987.

### 1.2.1 Motivations physiques et présentation du modèle

Cette section est consacrée à l'étude des solutions périodiques de l'équation de la barre hyperélastique. Une première motivation provient de l'étude de la réponse d'anneaux hyperélastiques sous l'action d'un étirement radial initial. Comme les ondes dispersives non linéaires se propageant à l'intérieur pourraient éventuellement conduire à des fissures, un problème important est la détermination des conditions qui permettent de prévenir leur formation (un objectif principal de la présente section est la description précise des mécanismes de fissure à l'intérieur de ces anneaux). Une deuxième raison pour étudier des solutions périodiques est que des ondes périodiques surgissent spontanément dans les barres hyper-élastiques rectilignes. En effet, il a été récemment observé que des ondes solitaires se propageant à l'intérieur d'une barre de longueur idéalement infinie peuvent soudainement se stabiliser en des ondes de période finie lorsque leur amplitude est grande (voir [25]). Une troisième motivation vient de l'étude des ondes en eau profonde à l'intérieur des canaux dont on a déjà parlé dans l'introduction de ce chapitre.

La propagation d'ondes non-linéaires à l'intérieur de barres cylindriques composées d'un matériau hyperélastique compressible isotrope, en supposant que le diamètre soit négligeable par rapport à l'échelle de la longueur axiale, est décrite par l'équation unidimensionnelle (voir [24]) :

$$v_\tau + \sigma_1 v v_\xi + \sigma_2 v_{\xi\xi} \tau + \sigma_3 (2v_\xi v_{\xi\xi} + v v_{\xi\xi\xi}) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tau > 0.$$

Ici  $v(\tau, \xi)$  représente l'étirement radial (*radial stretch*) par rapport à un état de repos, tandis que  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  et  $\sigma_3 \leq 0$  sont des constantes physiques dépendant du matériau. Les transformations d'échelle

$$\tau = \frac{3\sqrt{-\sigma_2}}{\sigma_1} t, \quad \xi = \sqrt{-\sigma_2} x,$$

avec  $\gamma = 3\sigma_3/(\sigma_1\sigma_2)$  et  $u(t, x) = v(\tau, \xi)$ , nous permettent de réduire l'équation ci-dessus à

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = \gamma(2u_x u_{xx} + u u_{xxx}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.10)$$

Le paramètre réel  $\gamma$  est ainsi lié au tenseur des déformations de Finger de la matière. L'étude des matériaux compressibles spéciaux [25, 26] conduit à des valeurs de  $\gamma$  de allant -29,4760 à 3,4174, mais nous allons considérer  $\gamma$  sans aucune restriction. Notons que lorsque  $\gamma$  est égal à 1, on retrouve l'équation de Camassa-Holm non dispersive.

Soit  $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le tore. Le problème périodique de Cauchy pour l'équation de la barre hyperélastique s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_t + \gamma u u_x = -\partial_x p * \left( \frac{3-\gamma}{2} u^2 + \frac{\gamma}{2} u_x^2 \right), & t \in (0, T), x \in \mathbb{S}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous renvoyons à [25] pour plus de détails sur le contexte physique et la dérivation mathématique du modèle. La fonction  $p$  dans (1.11) est le noyau de l'opérateur de convolution  $(1 - \partial_x^2)^{-1}$ . C'est une fonction 1-périodique continue donnée par l'expression (1.6). Par ailleurs, l'équation

de Camassa-Holm est une réexpression du flot géodésique sur le groupe de difféomorphismes du cercle, voir la discussion [20, 56].

Le cas de l'équation de Camassa-Holm est particulier, car (1.10) hérite alors d'une structure bi-hamiltonienne de dimension infinie et donc l'équation est complètement intégrable au sens de systèmes hamiltoniens (voir précédemment ou [22]). Pour ces raisons, de nombreux résultats importants pour l'équation de Camassa-Holm ne s'appliquent pas dans le cas général. Par exemple, dans le cas de l'équation de Camassa-Holm sur la droite réelle on peut donner une condition nécessaire et suffisante sur le potentiel initial  $y_0 = u_0 - u_{0,xx}$  pour avoir l'existence globale de la solution forte (voir [66]). Tandis que pour  $\gamma \neq 1$ , on connaît très peu de choses sur l'existence des solutions globales fortes : il peut même arriver (et on verra que c'est le cas pour  $\gamma = 3$ ) que toutes les solutions non nulles explosent en temps fini. Des solitons lisses qui sont des solutions fortes globales ont été construits au moins pour certains  $\gamma$  (voir [25, 59]). Ce sont essentiellement les seuls exemples connus de solutions globales lisses. Cependant, l'équation de Camassa-Holm et l'équation de la barre hyper-élastique partagent certaines caractéristiques importantes, notamment :

- Le caractère bien posé du problème de Cauchy, dans des espaces  $H^s$ ,  $s > 3/2$  (ou dans des espaces de Besov appropriés). Voir *e.g.* [23, 26, 60, 80]
- La décroissance exponentielle des solutions de type ondes solitaires. Voir *e.g.* [10, 24, 25, 59, 80].
- La vitesse de propagation infinie et les résultats sur la persistance dans les espaces pondérés. Voir [2, 44].
- L'existence globale des solutions faibles conservatives ou dissipatives. Voir [6, 7, 46, 47].

## 1.2.2 Cadre théorique et aperçu des résultats

Notre hypothèse de travail sera donc que  $u_0$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{S})$ , avec  $s > 3/2$ . Alors, pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , le problème de Cauchy pour l'équation de la barre hyper-élastique est localement bien posé, dans le sens qu'il existe un temps maximal  $0 < T^* \leq \infty$  et une solution unique  $u \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ . En outre, la solution  $u$  dépend continûment de la donnée initiale. Il est également connu que  $u$  admet plusieurs intégrales invariantes, parmi lesquels, la conservation de l'énergie

$$E(u) = \int_{\mathbb{S}} (u^2 + u_x^2) dx.$$

En particulier, en raison de la conservation de la norme- $H^1$ , la solution  $u(x, t)$  reste uniformément bornée jusqu'à l'instant  $T^*$ .

D'autre part, si  $T^* < \infty$  alors  $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{H^s} = \infty$  ( $s > 3/2$ ) et le scénario d'explosion (*wave-breaking mechanism*) est plus précisément celui-ci (voir [23]) :

$$T^* < \infty \iff \liminf_{t \rightarrow T^*} \left( \inf_{x \in \mathbb{S}} \gamma u_x(t, x) \right) = -\infty, \quad (1.12)$$

Notre premier théorème affirme, en gros, que si  $|\gamma|$  n'est pas trop petit, alors il existe une constante  $\beta_\gamma > 0$ , telle que si

$$u'_0(x_0) > \beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{si } \gamma < 0, \quad \text{ou} \quad u'_0(x_0) < -\beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{si } \gamma > 0, \quad (1.13)$$

dans au moins un point  $x_0 \in \mathbb{S}$ , alors la solution provenant de  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  doit exploser en temps fini. Notre second théorème quantifie le résultat ci-dessus : il précise ce qu'il faut entendre par " $|\gamma|$  pas trop petit", et répond à la question délicate de trouver des estimations précises pour  $\beta_\gamma$ .

Par exemple, dans le cas particulier d'équation de Camassa-Holm périodique, nous avons montré qu'une condition suffisante pour que la solution explose en temps fini est :

$$\exists x_0 \in \mathbb{S}: \quad u'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \frac{3}{2} - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \frac{3}{2}}} |u_0(x_0)|. \quad (1.14)$$

Un résultat analogue, mais moins précis, avait été établi récemment dans un article précédent [3], où il avait été traité le problème non périodique, sur la droite réelle. Nous profitons de la structure spécifique aux solutions périodiques afin d'apporter des améliorations sur les travaux antérieurs. Tout d'abord, le résultat analogue sur l'équation de la barre hyper-élastique dans  $\mathbb{R}$  (cas non périodique) avait pu être établi dans [3] seulement dans l'intervalle  $1 \leq \gamma \leq 4$ . En revanche, grâce à des estimations plus fortes du cas périodique, nous pouvons prendre en compte une plage bien plus grande de valeurs du paramètre  $\gamma$  : par exemple, des valeurs arbitrairement grandes ou même négatives de  $\gamma$ .

Le corollaire suivant du théorème 1.3 est donc spécifique à des solutions périodiques :

**Corollaire 1.1.** *Il existe une constante absolue  $\beta_\infty$  (on voit numériquement que  $\beta_\infty = 0.295\dots$ ) avec la propriété suivante. Si  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ , avec  $s > 3/2$ , est telle que pour un  $x_0 \in \mathbb{S}$ ,  $u'_0(x_0) > \beta_\infty |u_0(x_0)|$ , ou  $u'_0(x_0) < -\beta_\infty |u_0(x_0)|$ , alors les solutions (unique, mais dépendant de  $\gamma$ ) de l'équation de la barre hyper-élastique (1.11) émanant de  $u_0$  explosent en temps fini respectivement si  $\gamma \ll -1$  ou  $\gamma \gg 1$ . Dans les deux cas, le temps de vie maximale est  $T^* = O(\frac{1}{|\gamma|})$  lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ .*

Voici une seconde différence importante entre dans le comportement des solutions périodiques et non périodiques. Il peut arriver que deux données initiales  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  et  $\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$  coïncident dans un intervalle fini arbitrairement grand et que la solution périodique provenant de  $u_0$ , explose en temps fini, tandis que la solution périodique provenant de  $\tilde{u}_0$  s'annule à l'infini existe globalement. À titre de comparaison, le critère d'explosion dans [3] pour des solutions dans  $H^s(\mathbb{R})$  de l'équation de Camassa-Holm est  $\inf_{\mathbb{R}}(u'_0 + |u_0|) < 0$ . D'autre part, d'après (1.14), dans le cas périodique, la condition  $\inf_{\mathbb{S}}(u'_0 + 0.515 |u_0|) < 0$  serait suffisant pour la formation d'une singularité. En général, pour  $\gamma \in [1, 4]$ , le coefficient  $\beta_\gamma$  dans (1.13) est considérablement plus faible que le coefficient correspondant  $\beta_{\gamma, \mathbb{R}}$  calculé dans [3] pour le critère d'explosion des solutions non périodiques.

La caractéristique la plus importante de nos critères d'explosion (1.13)-(1.14) est qu'ils sont *locaux en variable d'espace* : autrement dit ils reposent sur les propriétés de la donnée initiale *au voisinage d'un seul point*. Leur validité est surprenante en raison du fait que l'équation (1.11) est non locale. Un grand nombre d'articles précédents abordait la question de l'explosion des solutions pour l'équation (1.11). Voir [9, 10, 15–17, 40, 49, 52, 76, 77, 84, 86, 87] (les références plus anciennes traitaient seulement l'équation de Camassa-Holm). Mais dans tous ces travaux, les critères d'explosion exigeaient de calculer certaines quantités globales associées à  $u_0$  — par exemple des normes de Sobolev (les conditions étaient alors de la forme  $u'_0(x_0) < -c_\gamma \|u_0\|_{H^1(\mathbb{S})}$ ) — ou nécessitaient d'autres conditions contraignantes sur  $u_0$  (antisymétrie, ou des conditions de signe sur le potentiel, etc.).

Nous finissons cette introduction en mentionnant une deuxième conséquence simple et intéressante de notre théorème principal (Théorème 1.3). Le résultat s'applique en particulier (et c'est nouveau) au cas  $\gamma = 1$ , de l'équation de Camassa-Holm.

**Corollaire 1.2.** *Soit  $u \in C([0, \infty[, H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, \infty[, H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , une solution globale de l'équation de la barre hyper-élastique (1.11) avec  $\gamma \leq \gamma_1^-$  or  $\gamma \geq \gamma_1^+$  (où  $\gamma_1^- = -1.036\dots$  et  $\gamma_1^+ = 0.269\dots$ ). Si  $u$  s'annule en un point  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}$ , alors  $u$  doit être la solution triviale :  $u(x, t) \equiv 0$  pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{S}$ .*

Le corollaire 1.2 améliore un résultat antérieur de A. Constantin et J. Escher [18], affirmant que la solution triviale est la seule solution globale de l'équation de Camassa-Holm périodique telle que *pour tout*  $t \geq 0$ ,  $\exists x_t \in \mathbb{S}$  tel que  $u(t, x_t) = 0$ . Essentiellement, nous changeons leur condition “ $\forall t \dots$ ”, par “ $\exists t \dots$ ”, qui est beaucoup plus facile à vérifier. Plus important encore, contrairement à [18], notre approche est plus robuste parce qu'il n'utilise qu'une petite partie des propriétés de l'équation. Il peut être surprenant que nos résultats *à priori* excluent un petit voisinage de l'origine pour le paramètre  $\gamma$ . En fait, une telle restriction pourrait être purement technique. Cependant, il faut observer que le cas  $\gamma = 0$  *doit être exclu*. La raison est que pour  $\gamma = 0$ , toutes les solutions provenant de  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  existent globalement. En effet, le scénario d'explosion (1.12) n'est jamais vérifié. Il convient de noter, que pour  $\gamma = 0$ , l'équation de la barre hyper-élastique se réduit à l'équation BBM, présentée par Benjamin, Bona et Mahony dans [1] comme un modèle pour les ondes de surface dans les canaux. Nous établirons un résultat similaire à celui du corollaire 1.2, pour solutions non périodiques qui s'annulent lorsque  $x \rightarrow \infty$  (voir le Corollaire 7.1 du chapitre 3).

### 1.2.3 Méthode de preuves

L'idée principale combine résultats obtenus dans [3, 15, 65]. Il consiste à étudier l'évolution de  $u + \beta u_x$  et  $u - \beta u_x$  le long de la trajectoire du flot de  $\gamma u$ , où  $\beta = \beta(\gamma)$  est à déterminer, afin d'obtenir un système d'inégalités différentielles. Une étape clé est l'estimation du terme non-local de convolution qui figure dans l'équation par une quantité locale. D'un point de vue technique, une partie importante du travail est l'étude d'une famille de problèmes de minimisation à deux paramètres. Ces problèmes de minimisation interviennent dans le calcul des meilleures constantes dans les estimations précitées.

Les outils du calcul variationnel avaient déjà été utilisés avec succès pour la détermination de critères d'explosion pour l'équation de la barre hyper-élastique (voir [76, 77, 84, 86, 87]). Cependant, notre approche est différente et nécessite la minimisation de fonctionnelles non coercitives.

### 1.2.4 Énoncé des théorèmes principaux

Nous commençons par quelques notations. Pour toutes constantes réelle  $\alpha$  et  $\beta$ , on définit  $I(\alpha, \beta) \geq -\infty$  comme

$$I(\alpha, \beta) = \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta p_x) (\alpha u^2 + u_x^2) dx : u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\}. \quad (1.15)$$

La proposition 3.3 du chapitre 3 caractérisera l'ensemble des paramètres  $(\alpha, \beta)$  pour lesquels la fonctionnelle apparaissant dans (1.15) est bornée inférieurement. Aussi, nous introduisons par  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , la quantité  $\beta_\gamma \in [0, +\infty]$ , définie par

$$\beta_\gamma = \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R}^+ : \beta^2 + I\left(\frac{3-\gamma}{\gamma}, \beta\right) - \frac{3-\gamma}{\gamma} \geq 0 \right\}, \quad (1.16)$$

avec la convention que  $\beta_\gamma = +\infty$ , si l'infimum est pris sur l'ensemble vide.

Notre résultat principal d'explosion en temps fini de la solution de (1.11) est le théorème suivant :

**Théorème 1.3.** *Soit  $\gamma \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\beta_\gamma < +\infty$ . Soit  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  avec  $s > 3/2$  et supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{S}$ , tel que*

$$u'_0(x_0) > \beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{si } \gamma < 0, \quad \text{ou} \quad u'_0(x_0) < -\beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{si } \gamma > 0. \quad (1.17)$$

Alors la solution  $u$  de l'équation (1.11) dans  $C([0, T^*], H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*], H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , provenant de  $u_0$  explose en temps fini. De plus, le temps maximal  $T^*$  est estimé par

$$T^* \leq \frac{2}{\gamma \sqrt{u_0'(x_0)^2 - \beta_\gamma^2 u_0(x_0)^2}} \quad (1.18)$$

et pour un certain point  $x(t) \in \mathbb{S}$ , le taux d'explosion.

$$u_x(t, x(t)) \sim -\frac{2}{\gamma(T^* - t)} \quad \text{lorsque } t \rightarrow T^*. \quad (1.19)$$

**Remarque.** Le théorème 1.3 est significatif seulement si  $\gamma$  est tel que  $\beta_\gamma < +\infty$ . La validité d'une telle condition n'est pas *a priori* claire, et on pourrait même craindre que le théorème est vide. Une partie importante de notre étude a été consacrée à la question technique de garantir qu'on a bien  $\beta_\gamma < +\infty$  pour une vaste plage de paramètres, et ensuite de calculer la constante  $\beta_\gamma$ .

En vue du théorème suivant, nous introduisons le nombre complexe

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(3 - \gamma)/\gamma}, \quad \gamma \neq 0,$$

où  $\sqrt{1 + 4(3 - \gamma)/\gamma}$  désigne indifféremment l'une des deux racines carrées complexes. Nous considérons aussi les quatre constantes (qui seront construites dans (5.8) du chapitre 3) :

$$\begin{aligned} \gamma_1^- &= -1.036 \dots & \gamma_1^+ &= 0.269 \dots \\ \gamma_2^- &= -1.508 \dots & \gamma_2^+ &= 0.575 \dots \end{aligned}$$

**Théorème 1.4.** (i) Pour toute  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, +\infty)$ , on a  $\beta_\gamma < +\infty$ , et donc le théorème 1.3 s'applique à tel intervalle. Plus précisément, si  $\gamma \in (-\infty, \gamma_2^-] \cup [\gamma_2^+, \infty)$ , alors

$$\beta_\gamma \leq \sqrt{\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{2} - \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu}}. \quad (1.20)$$

et quand  $\gamma \in [\gamma_2^-, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, \gamma_2^+]$ , la constante  $\beta_\gamma$  peut être estimée comme dans l'inégalité (5.13) du chapitre 3 (dans (5.13),  $P_\nu$  dénote la fonction de Legendre du premier de degré  $\nu$ ).

(ii) La limite  $\beta_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \beta_\gamma$  existe et

$$\beta_\infty \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1 - \cosh \frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2})}{2 \sinh \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}} = 0.296 \dots \quad (1.21)$$

## Autres conséquences et quelques conclusions

Il est intéressant de noter qu'on a  $\beta_\gamma = 0$  si et seulement si  $\gamma = 3$ , comme on peut le vérifier directement des définitions (1.15)-(1.16). En particulier, on retrouve le résultat connu (voir [23]) que pour  $\gamma = 3$ , toute donnée initiale non nulle  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  (avec  $s > 3/2$ ) donne lieu à une solution qui explose en temps fini. De plus, le temps maximal  $T^*$  satisfait

$$T^* \leq \frac{2}{3} \sqrt{-\inf_{x \in \mathbb{S}} u_0'(x)}.$$

Les bornes supérieures (1.20)-(1.21) ne sont pas optimales mais, remarquablement, elles sont "presque précises", au sens qu'on peut calculer numériquement  $\beta_\gamma$  avec une précision

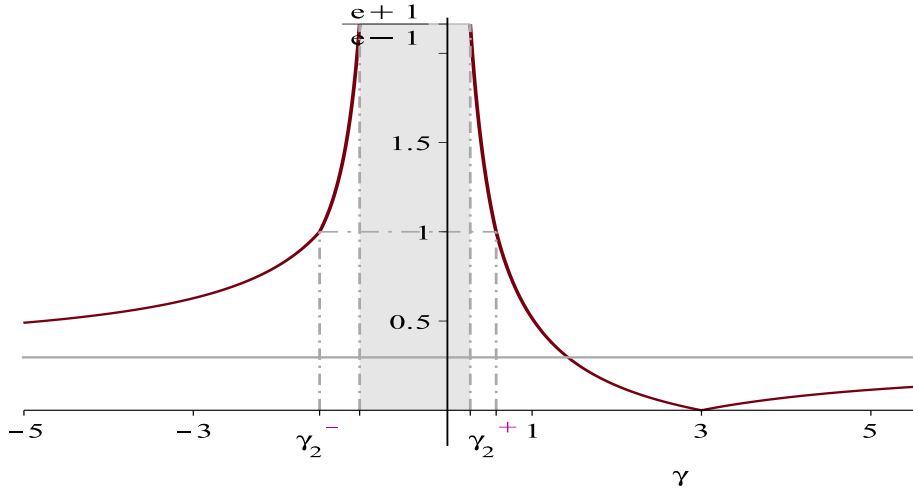


FIGURE 1.1 – L’estimation de la limite supérieure de  $\beta_\gamma$  donnée par le théorème 1.4. L’estimation est valable en dehors de l’intervalle  $[\gamma_1^-, \gamma_1^+]$  (région grise).

arbitrairement bonne. Nous constatons que l’erreur entre les bornes supérieures ci-dessus et la valeur numérique n’est que de l’ordre  $10^{-3}$ . Par exemple, on a trouvé  $\beta_\infty = 0.295\dots$ , qui est effectivement une estimation très proche de la borne (1.21). Par ailleurs, dans le cas particulier de l’équation de Camassa-Holm, nous trouvons numériquement que la constante est  $\beta_1 = 0.513\dots$ . Cela est cohérent (avec une erreur d’ordre  $10^{-3}$ ) avec l’estimation (1.20), que pour  $\gamma = 1$  fournit  $\beta_1 \leq 0.515\dots$ . Nous consacrerons l’annexe de notre article [4] à une discussion plus détaillée des résultats numériques. Cette analyse permettra également de montrer que la plage de validité du théorème 1.3 est légèrement plus grande que l’intervalle  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, \infty)$  prédit par le théorème 1.4.

## 1.3 Problèmes d'explosion de la solution pour une classe d'équations d'ondes non linéaires dispersives

Article [5], en collaboration avec Lorenzo Brandolese, *Journal of Differential Equations*, **256** N. 12 (2014), pp. 3981-3998 : *Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations*.

### 1.3.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous considérons l'équation d'ondes dispersives non linéaire sur la droite réelle

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]_x = 0. \quad (1.22)$$

La formulation non locale, formellement équivalente à (1.22) est

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x + \partial_x p * \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right] = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Ici  $p$  est toujours solution fondamentale de l'opérateur  $1 - \partial_x^2$ ,

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

Cet équation a été étudiée pour la première fois par H. Holden et X. Raynaud et elle est connue parfois sous le nom de *generalized hyper-elastic rod wave equation*, voir [46]. En effet, pour des choix appropriées des fonctions  $f$  et  $g$ , l'équation (1.22) contient comme cas particulier des modèles bien connus. Tout d'abord, l'équation de la barre hyper-élastique (1.10) étudiée dans la section précédente ou l'équation de Camassa–Holm (1.2) (avec ou sans terme de dispersion) sont des cas particuliers de l'équation décrite ci-dessus. Quand  $f(u) = \frac{u^{Q+1}}{Q+1}$  et  $g(u) = \kappa u + \frac{Q^2+3Q}{2(Q+1)} u^{Q+1}$ , on obtient l'équation introduite par S. Hakkaev et K. Kirchev, qui possède des propriétés mathématiques intéressantes (voir [41]).

### 1.3.2 Résultats précédents

Le problème (1.23) s'écrit donc sous la forme abstraite

$$\frac{du}{dt} + A(u) = H(u), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

avec  $A(u) = f'(u)\partial_x u$  et  $H(u) = -\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1} \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]$ . La théorie classique de Kato [55] peut être appliquée pour obtenir un résultat d'existence et unicité de solutions. Nous recueillons en un seul théorème les résultats principaux de l'étude récente de Tian, Yan et Zhang [75] sur le problème (1.23).

**Théorème 1.5** (Voir [75]).

1. Supposons que  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , avec  $s > 3/2$ . Alors il existe un temps  $T > 0$ , avec  $T = T(u_0, f, g)$  et une unique solution  $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}))$  du problème de Cauchy (1.23). Cette solution conserve l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}} (u^2 + (u_x)^2) = \int_{\mathbb{R}} (u_0^2 + (u_0')^2) = \|u_0\|_{H^1}^2.$$

De plus, la solution dépend continûment de la donnée initiale : la fonction  $u_0 \mapsto u$  est continue de  $H^s(\mathbb{R})$  à  $C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}))$ .

2. Supposons en outre que  $f'' \geq \gamma > 0$  :

i) (Scénario et taux d'explosion) Soit  $0 < T^* \leq \infty$ , le temps maximal de la solution dans  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ . On a  $T^* < \infty$  si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x) = -\infty.$$

Dans ce cas, le taux d'explosion  $\inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x)$  lorsque  $t \rightarrow T^*$  est  $O(\frac{1}{T^* - t})$ .

ii) (Critère d'explosion de la solution) Supposons qu'il existe un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$u'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{4 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \|u_0\|_{H^1}^2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v)}{\gamma}}. \quad (1.24)$$

Alors  $T^* \leq \frac{1}{\sqrt{2C_0\gamma}} \log \left( \frac{\sqrt{\gamma/2} u'_0(x_0) - \sqrt{C_0}}{\sqrt{\gamma/2} u'_0(x_0) + \sqrt{C_0}} \right) < +\infty$ , où la constante  $C_0 = C_0(\|u_0\|_{H^1}, f, g)$  est donnée par

$$C_0 \equiv 2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \frac{\|u_0\|_{H^1}^2}{2} \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v).$$

Dans le premier point, le temps d'existence  $T$  peut être pris indépendamment du paramètre  $s$  dans le sens suivant : si la donnée initiale  $u_0$  appartient à  $H^{s_1}(\mathbb{R})$  avec  $s_1 > 3/2$ , alors  $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T), H^{s_1}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T), H^{s_1-1}(\mathbb{R}))$ . Des résultats supplémentaires dans [75] comprennent des estimations pour une borne inférieure pour le temps d'existence  $T^*$  et la semi-continuité inférieure du temps d'existence de la solution de l'équation (1.23). Le lecteur peut consulter l'article [46] pour la construction des solutions faibles globales qui préservent l'énergie (*global conservative weak solutions*). Les articles [6, 7, 12] contiennent aussi des résultats sur les solutions faibles, pour plusieurs choix spécifiques des fonctions  $f$  et  $g$ .

### 1.3.3 Contributions principales

Un premier but de cette partie est d'établir un nouveau critère d'explosion pour l'équation (1.23), simplifiant considérablement le critère (1.24), et généralisant aussi le résultat de [3] dans le cas particulier de l'équation de la barre. Nous allons aussi couvrir le cas  $f(u) = u^2$  et  $g(u) = \kappa u + u^2$ , correspondant à l'équation de Camassa-Holm avec dispersion ( $\kappa > 0$ ) qui n'a pas été traité dans [3]. Notre deuxième objectif est de traiter des conditions aux limites plus générales afin d'y inclure le cas des solutions qui ne s'annulent pas forcément à l'infini. Contrairement au critère d'explosion ci-dessus, notre critère aura la particularité d'être *purement local* en la variable d'espace, au sens expliqué dans la section précédente. En gros, moyennant des conditions convenables pour  $f$  et  $g$ , nous obtiendrons l'explosion en temps fini dès que  $u_0$  vérifie une condition du type :

$$\text{il existe } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } u'_0(x_0) < -\beta |u_0(x_0) - c|,$$

où  $\beta$  et  $c$  sont deux constantes réelles qui dépendent de la forme des fonctions  $f$  et  $g$ . Nous obtenons en fait deux versions légèrement différentes lorsque la fonction  $g$  est bornée inférieurement, ou lorsque la fonction  $g$  est bornée supérieurement. Les deux cas s'avèrent intéressants physiquement. Comme nous le verrons ci-dessous, afin d'appliquer notre résultat d'explosion "local" ci-dessus, nous aurons besoin de restreindre un peu le choix des fonctions admissibles pour  $f$  et  $g$  par rapport au théorème 1.5. Mais une fois que  $f$  et  $g$  remplissent nos conditions d'admissibilité, les conditions sur la donnée initiale conduisant à l'explosion s'avère être bien plus générales que celles exigées par le théorème 1.5.

Voici le théorème principal de cette partie :



**Théorème 1.6.** Soit  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , avec  $s > 3/2$ . Soit  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $f'' \geq \gamma > 0$ . Le temps maximal  $T^*$  de la solution  $u$  de problème (1.23) dans  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$  doit être fini, si au moins l'une des deux conditions suivantes (1) ou (2) est remplie :

1. -  $\exists c \in \mathbb{R}$  telle que  $m = g(c) = \min_{\mathbb{R}} g$ .  
- La fonction  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g - m)}$  est  $K$ -Lipschitzienne, avec  $0 \leq K \leq 1$ ,  
-  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1)|u_0(x_0) - c|$ .
2. Ou, sinon,  
-  $\exists c \in \mathbb{R}$  telle que  $M = g(c) = \max_{\mathbb{R}} g$ .  
- La fonction  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\psi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(M - g)}$  est  $K$ -Lipschitzienne, avec  $0 \leq K \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$   
-  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2})|u_0(x_0) - c|$ .

Dans ces cas on a l'estimation

$$T^* \leq \frac{4}{\gamma \sqrt{4u'_0(x_0)^2 - (\sqrt{1 \pm 8K^2} - 1)^2 (u_0(x_0) - c)^2}} < +\infty, \quad (1.25)$$

où dans l'expression  $\pm 8K^2$  doit prendre le signe positif dans les conditions de la partie (1) et le signe négatif dans les conditions de la partie (2).

Voici une application de ceci à deux cas particuliers importants :

**Application à l'équation de Camassa–Holm.** Le cas  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  et  $g(u) = \kappa u + u^2$  correspond à l'équation de Camassa-Holm avec dispersion (1.2). Nous sommes dans le cas (1) du théorème 1.6, avec

$$c = -\kappa/2, \quad \phi(u) = \sqrt{u^2 + \kappa u + \kappa^2/4} \quad \text{et} \quad K = 1.$$

Nous obtenons alors immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 1.7.** Soit  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , avec  $s > 3/2$  telle que dans un certain point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$u'_0(x_0) < -|u_0(x_0) + \frac{\kappa}{2}|.$$

Alors la solution de l'équation de Camassa-Holm explose en temps fini.

**Application à l'équation classique de la barre.** Dans le cas  $f(u) = \frac{\gamma}{2}u^2$  et  $g(u) = \frac{3-\gamma}{2}u^2$ , correspondant à l'équation classique de la barre, les conditions de notre théorème sont satisfaites si et seulement si  $1 \leq \gamma \leq 4$ . Notamment, la situation (1) s'applique pour  $1 \leq \gamma \leq 3$  et la situation (2) s'applique pour  $3 \leq \gamma \leq 4$ . Explicitement dans ce cas, notre critère dit : s'il existe au moins un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  qui vérifie

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left| \sqrt{12 - 3\gamma} - \sqrt{\gamma} \right| |u_0(x_0)| \quad (1 \leq \gamma \leq 4),$$

alors  $u$  explose en temps fini. Cette conclusion nous permet de retrouver le résultat de [3].

### 1.3.4 Variantes et corollaires

Nous établissons également une variante du théorème 1.6 pour des solutions qui n'appartiennent pas à l'espace  $H^s(\mathbb{R})$  (voir le théorème 1.8). Cette variante s'appliquera alors à une large classe de solutions d'énergie infinie, ainsi qu'à des solutions qui ne s'annulent pas à l'infini et éventuellement avec comportement asymptotique différent lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Tout d'abord, il s'agit d'établir un cadre fonctionnel adéquat dans lequel on peut garantir l'existence locale et l'unicité de ces types de solutions. Ce problème a été abordé avec succès en [39], au moins dans le cas de l'équation de Camassa-Holm, lorsque les données initiales vérifient des conditions de convergence vers deux constantes  $c_+$  et  $c_-$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ . L'analyse de [39] pourrait être étendue à une classe plus générale d'équations.

Cependant, plutôt qu'adapter le cadre fonctionnel de [39], il convient ici de supposer *a priori* d'avoir une solution  $u \in C^1([0, T^*), C^2(\mathbb{R}))$  de l'équation de la barre hyper-élastique généralisée, écrite sous sa forme non-locale (1.23), pour un certain temps  $0 < T^* \leq +\infty$ . Pour que notre analyse soit valable, nous imposons de plus à cette solution de satisfaire aux conditions asymptotiques suivantes :

- (i) Nous supposons d'abord que  $u$  est telle que les intégrales dans le lemme 3.1 du chapitre 4 convergent, en particulier le terme de convolution en (1.23) ait un sens. Il s'agit là d'une condition très faible, qui nous permettrait de prendre en compte également des solutions non bornées, par exemple des solutions à croissance polynomiale lorsque  $g$  et  $f$  sont des polynômes.
- (ii) Nous supposons que l'application flot dans (3.7) du chapitre 4 est bien définie sur tout l'intervalle de temps  $[0, T^*)$ . Pour cette raison, on se limitera à considérer des solutions  $u$  telles que  $|f' \circ u|$  est uniformément bornée sur des intervalles de temps compacts, par une fonction affine de la variable  $x$ .

Les conditions ci-dessus, en particulier, couvrent notamment le cas physiquement intéressant des solutions (régulières sur  $[0, T^*)$ ) de (1.23), telles que  $u(t, \cdot)$  et  $u_x(t, \cdot)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ , uniformément bornée par rapport à  $t$  sur des intervalles de temps compacts. Par conséquent, nous obtenons la variante suivante du théorème 1.6 :

**Théorème 1.8.** *Soit  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $f'' \geq \gamma > 0$ . Soit  $u$  une solution de l'équation (1.23), avec  $u \in C([0, T^*), W^{1,\infty}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), C^2(\mathbb{R}))$ , et  $0 < T^* \leq \infty$ . On suppose qu'au moins l'une des deux conditions (1) ou (2) du théorème 1.6 soit remplie. Alors  $T^*$  est fini et vérifie l'estimation (1.25).*

*En particulier, si  $g$  est constant et  $u_0$  est non constante, alors  $u$  explose en temps fini.*

Une autre variante possible est obtenue en supposant que la fonction  $f$  soit strictement concave, plutôt que strictement convexe. Dans ce cas la condition pour l'explosion sera de la forme  $u'_0(x_0) > \beta|u_0(x_0) - c|$ .

Le résultat ci-dessus s'applique en particulier à des solutions périodiques. Par conséquent, l'énoncé du Théorème 1.8 reste valable pour des solutions  $u$  dans  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , avec  $s > 3/2$ , où  $\mathbb{S}$  est le cercle. Il convient de signaler, cependant, que les estimations du lemme 3.1 du chapitre 4 (qui sont optimales pour  $u \in H^s(\mathbb{R})$ ), ne sont plus optimales quand  $u \in H^s(\mathbb{S})$ . Améliorer ces estimations exigerait l'application de méthodes variationnelles, dans le même esprit que dans la section précédente. Pour cette raison, nous prévoyons que dans le cas de solutions périodiques, la constante de Lipschitz  $K$  apparaissant dans le théorème 1.6 puisse être prise plus grande qu'indiqué dans ce théorème. De même, l'estimation du coefficient  $\beta$  apparaissant dans (2.4) du chapitre 4 peut sans doute être améliorée dans ce cas.

Nous terminons avec trois corollaires simples de nos résultats d'explosion de la solution en temps fini. Le premier corollaire établit une relation entre le comportement à l'infini en variable d'espace et l'explosion en temps fini de la solution.

**Corollaire 1.9.** Soient  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  et les constantes  $c$  et  $K$  comme dans le théorème 1.6. Soit  $u \in C([0, T^*), W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  une solution de (1.23), régulière dans  $[0, T^*)$ . Si  $u_0 \neq c$  et

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x} (u_0(x) - c) \leq 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} e^{-\beta x} (u_0(x) - c) \geq 0. \quad (1.26)$$

où  $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8K^2} - 1)$  (dans le cas (1)), ou  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-8K^2})$  (dans le cas (2)), alors  $T^* < +\infty$ . En particulier, l'explosion en temps fini se produit lorsque  $u_0 \neq c$  et  $u_0(x) = c + o(e^{-\beta|x|})$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ .

Un résultat semblable à celui du corollaire 1.9 est apparu dans [2] dans le cas de l'équation de Camassa-Holm. Voir aussi [44] pour des résultats antérieures un peu moins précis, mais dans le même esprit (l'hypothèse de décroissance exponentielle étant remplacée dans [44] par une condition plus restrictive de support compact). Observons que les démonstrations données dans [2] ou [44] ne s'adaptent pas immédiatement à notre situation, parce qu'elles reposent sur un critère d'explosion de McKean qui est spécifique à l'équation de Camassa-Holm.

Le deuxième corollaire établit une relation entre l'explosion et les changements de signe pour  $u_0 - c$ .

**Corollaire 1.10.** Soient  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$  comme dans le corollaire 1.9 et soit  $u \in C([0, \infty), W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  une solution régulière globale de l'équation de la barre (1.22). Alors, pour tout  $t \geq 0$ , on a :

- i) Soit  $u(t, x) > c$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,
- ii) ou  $u(t, x) < c$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,
- iii) ou  $\exists x_t \in \mathbb{R}$  tel que  $u(t, \cdot) \leq c$  dans  $(-\infty, x_t]$  et  $u(t, x) \geq c$  dans  $[x_t, +\infty)$ . Dans ce cas, si  $x \mapsto u(t, x)$  est égal à  $c$  en deux points distincts de la ligne réelle, alors  $x \mapsto u(t, x) = c$  dans tout l'intervalle entre eux.

Dans le cas de l'équation de Camassa-Holm sans dispersion ( $\kappa = 0$ ), le corollaire 1.10 assure une condition suffisante, pour l'explosion en temps fini de la solution, est que la donnée initiale vérifie la condition de signe  $\exists x_1 < x_2$  tels que  $u_0(x_1) > 0 > u_0(x_2)$ . Ceci peut être comparé avec la condition d'explosion, du théorème de McKean, qui dit :  $\exists x_1 < x_2$  tels que  $y_0(x_1) > 0 > y_0(x_2)$ , où  $y_0 = u_0 - (u_0)_{xx}$  est le potentiel associé. Le théorème de McKean est plus précis, car il fournit une condition *nécessaire et suffisante* pour l'explosion en temps fini de la solution (voir [66]). Toutefois, comme on l'a déjà observé, les arguments de McKean s'appuient fortement sur les propriétés de persistance du signe du potentiel  $y$  pendant l'évolution du temps, qui cessent d'être vraies pour l'équation générale (1.23).

Pour le problème périodique associé à l'équation (1.23), l'étude du caractère bien posé dans  $C([0, T], H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{S}))$  avec  $s > 3/2$ , se fait exactement comme dans le cas de la droite réelle traitée dans [75]. Ceci conduit aussi aux lois de conservation pour ces solutions :  $\int_{\mathbb{S}} u(t) dx = \int_{\mathbb{S}} u_0 dx$  et, pour l'intégrale d'énergie,  $\int_{\mathbb{S}} (u^2 + u_x^2)(t) dx = \int_{\mathbb{S}} (u_0^2 + (u_0)_x^2) dx$  :

**Corollaire 1.11.** Sous les conditions du corollaire 1.9 pour  $f$  et  $g$ , la solution constante  $u \equiv c$  (où  $c = \arg \min g$ , ou  $c = \arg \max g$ ) est la seule solution globale régulière et périodique en variable d'espace de l'équation de la barre hyper-élastique généralisée (1.22) telle que  $u_0(x_0) = c$  en au moins un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

## 1.4 Explosion des solutions périodiques pour le $b$ -family equations

Prépublication arXiv :1407.4084v2 : *Blow-up for the periodic b-family equations.*

Nous allons maintenant nous concentrer sur le problème de Cauchy périodique relatif à la famille d'équations ( $b$ -family equations) :

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + (b+1)uu_x = bu_xu_{xx} + uu_{xxx}, & x \in \mathbb{S}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{S}, \end{cases} \quad (1.27)$$

où,  $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  désigne le tore à une dimension. Ici  $u(x, t)$  s'interprète comme une vitesse horizontale et  $b$  est un paramètre réel. La famille d'équations (1.27), peut être vue comme une famille d'équations asymptotiquement équivalentes, pour  $b \geq 1$ , avec une précision quadratique, d'ondes en eau peu profonde. Elles ont été obtenues pour la première fois à l'aide d'une transformation (de Kodama) appropriée, voir [28, 30]. Lorsque  $b = 2$  et  $b = 3$ , l'équation (1.27) n'est rien d'autre que l'équation de Camassa-Holm non-dispersive ( $\kappa = 0$ ) (1.2) ou l'équation de Degasperis Procesi (1.3), respectivement. Ces valeurs de  $b$  sont les seules pour lesquelles (1.27) est complètement intégrable. Le problème de Cauchy pour l'équation (1.27) est localement bien posée dans l'espace de Sobolev  $H^s$  pour tout  $s > \frac{3}{2}$ , [32, 62, 70, 71]. Le temps maximal de vie de la solution de (1.27) peut être choisie indépendamment de  $s$ . Dans [63], il est prouvé que la fonction qui associe  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  à la solution de l'équation (1.27), est Holder continue. Pour  $b = 2$  (l'équation de Camassa-Holm non-dispersive), J. Escher et J. Seiler [32] ont montré que le problème périodique de Cauchy (1.27) peut être interprété géométriquement comme une équation d'Euler sur le groupe de Lie  $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S})$ , qui est l'ensemble de tous les difféomorphismes réguliers qui préservent l'orientation sur le tore. La théorie de l'existence globale de la solution de (1.27) est discutée dans [32, 62, 71, 81].

### 1.4.1 Contributions principales

Nous nous intéressons à la détermination de critères d'explosion en temps fini de la solution, ainsi qu'à d'estimations sur le temps de vie de la solution de (1.27). Des critères d'explosion antérieurs pour (1.27), ont été déjà été mis en évidence par de nombreux auteurs, voir par exemple, [32, 60, 70, 71, 83]. Dans ces références, les conditions à imposer sur la donnée initiale  $u_0$ , qui mènent à l'explosion en temps fini de la solution, généralement impliquent le calcul de certaines quantités globales (comme la norme de Sobolev  $\|u_0\|_{H^1}$ , ou une d'autres expressions intégrales de  $u_0$ ).

Dans le même esprit que dans la section précédente, nous abordons ici le problème plus subtil de trouver un critère *local dans l'espace*, pour l'explosion en temps fini de la solution du problème périodique (1.27). Autrement dit, nous cherchons une condition d'explosion impliquant uniquement les propriétés de  $u_0$  au voisinage d'un seul point  $x_0 \in \mathbb{S}$ .

Il est commode de réécrire le problème périodique de Cauchy (1.27) dans la forme faible suivante (voir [71]) :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \partial_x p * \left[ \frac{b}{2}u^2 + \left(\frac{3-b}{2}\right)u_x^2 \right] = 0, & x \in \mathbb{S}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{S} \\ u(t, x) = u(t, x+1) & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

où

$$p(x) = \frac{\cosh(x - [x] - \frac{1}{2})}{2 \sinh(\frac{1}{2})},$$

est la solution fondamentale de l'opérateur  $1 - \partial_x^2$  et  $[\cdot]$  représente la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ , une application de la méthode de Kato [55] conduit au résultat suivant d'existence locale.

**Théorème 1.12** (Voir [71]). *Pour toute constante  $b$ , si  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ , alors il existe un temps maximal  $T^* = T^*(\|u_0\|_{H^s}) > 0$  et une unique solution  $u$  de (1.27), telle que*

$$u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S})). \quad (1.29)$$

*En outre, la solution dépend continûment de la donnée initiale, c'est-à-dire, la fonction  $u_0 \mapsto u(\cdot, u_0) : H^s(\mathbb{S}) \rightarrow C([0, T^*); H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*); H^{s-1}(\mathbb{S}))$  est continue.*

La durée de vie maximale de la solution dans le Théorème 1.12 est indépendante  $s$  dans le sens suivant : si  $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , solution de (1.27) et  $u_0 \in H^{s'}(\mathbb{S})$  pour quelque  $s' \neq s$  avec  $s' > \frac{3}{2}$ , alors  $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^{s'}(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s'-1}(\mathbb{S}))$  et avec le même  $T^*$ . En particulier, il en découle que si  $u_0 \in \cap_{s \geq 0} H^s$ , alors  $u \in C([0, T^*), H^\infty(\mathbb{S}))$ . Voir [70, 71].

Le théorème suivant précise l'éventuel scénario d'explosion, lorsque  $T^* < +\infty$  :

**Théorème 1.13** (Voir [70, 71]). *Soit  $b \in \mathbb{R}$  et  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ . Alors le temps de vie maximal  $T^*$  de la solution du Théorème 1.12 est fini si et seulement si*

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \inf \{ (2b - 1) \inf_{x \in \mathbb{R}} [u_x(t, x)] \} = -\infty \quad (1.30)$$

Avant de présenter notre contribution, nous passerons en revue quelques théorèmes d'explosion antérieurs :

**Théorème 1.14** (Voir [71]). *Soit  $\frac{5}{3} < b \leq 3$  et  $\int_{\mathbb{S}} (u_0')^3(x) dx < 0$ . Supposons que  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ , avec  $s > \frac{3}{2}$ ,  $u_0 \neq 0$ , et que la solution  $u(t, \cdot)$  correspondante à (1.27) possède un zéro pour tout  $t \geq 0$ , alors la solution  $u$  de (1.27) explose en temps fini.*

Le théorème suivant d'explosion en temps fini, utilise le fait que si  $u(t, x)$  est une solution de (1.27) avec donnée initiale  $u_0$ , alors  $-u(t, -x)$  est aussi une solution de (1.27) avec donnée initiale  $-u_0(-x)$ . Ainsi, en raison de l'unicité des solutions, la solution de (1.27) est impaire si la donnée initiale l'est.

**Théorème 1.15** (See [70]). *Soit  $1 < b \leq 3$  et  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ , avec  $s > \frac{3}{2}$ , et  $u_0$  impaire et non identiquement nulle. Si  $u_0'(0) \leq 0$ , alors la la solution correspondant à (1.27) explose en temps fini.*

## Notre théorème principal

Nous avons besoin d'introduire quelques notations.

**Définition 1.1.** *Pour toute constante réelle  $b \neq 1$  et  $\beta$ , soit  $J(b, \beta) \geq -\infty$ , définie par*

$$J(b, \beta) = \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta \partial_x p) \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) dx; u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\} \quad (1.31)$$

et

$$\beta_b = \inf \left\{ \beta > 0 : \beta^2 + \frac{2}{|b-1|} \left( J(b, \beta) - \frac{b}{2} \right) \geq 0 \right\}. \quad (1.32)$$

Observons que, *a priori*,  $0 \leq \beta_b \leq +\infty$ . En effet, l'ensemble dans (1.32) pourrait être vide. Avec les définitions ci-dessus, nous pouvons donner les principaux résultats de cette étude.

**Théorème 1.16.** *Soit  $b \in ]1, 3]$  telle que  $\beta_b < +\infty$ . Soit  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  avec  $s > \frac{3}{2}$ . On suppose qu'il existe au moins un point  $x_0 \in \mathbb{S}$  tel que*

$$u_0'(x_0) < -\beta_b |u_0(x_0)|. \quad (1.33)$$

*Alors la solution  $u$  de (1.27) dans  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$  provenant de la donnée initiale  $u_0$ , explose en temps fini. De plus, le temps maximal  $T^*$  vérifie*

$$T^* \leq \frac{2}{(b-1)\sqrt{(u_0'(x_0))^2 - \beta_b^2 u_0^2(x_0)}}. \quad (1.34)$$

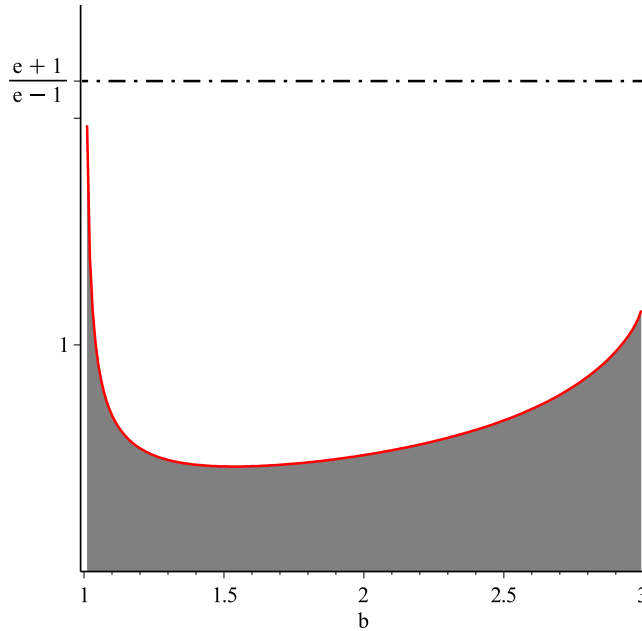


FIGURE 1.2 – Illustration de la fonction  $b \mapsto \beta_b$ . Cette approche numérique de  $\beta_b$  nous permet de dire : Si  $3 \geq b \geq \alpha_0 \approx 1.0012$ , alors le théorème 5.2.6 est valide (région grise).

*Remarque 1.1.* La restriction  $1 < b \leq 3$  est naturelle, mais la condition  $\beta_b < +\infty$  impose une restriction technique supplémentaire. Nous verrons plus tard qu'on a bien  $\beta_b < +\infty$ , dès que  $b$  se trouve dehors d'un très petit voisinage de 1 : en effet, à l'aide d'estimations numériques nous verrons que l'on a bien  $\beta_b < +\infty$  pour  $1.0013\dots < b \leq 3$ . En revanche, notre théorème sera en défaut pour  $b < 1.0012\dots$ . Voir aussi la figure 1.2.



- [1] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **272** (1972), no. 1220, 47–78.
- [2] L. Brandolese, *Breakdown for the Camassa–Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces*, Int. Math. Res. Not. **rnr218** (2011), 21 pages, DOI doi:10.1093/imrn/rnr218.
- [3] ———, *Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations*, Comm. Math. Phys. (to appear), arXiv:1210.7782.
- [4] Brandolese L. and Cortez M.F., *On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings*, J. Funct. Anal. **266** (2014).
- [5] ———, *Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations*, J. Diff. Equ. **256** (2014), no. 12.
- [6] A. Bressan and A. Constantin, *Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **183** (2007), no. 2, 215–239.
- [7] ———, *Global dissipative solutions of the Camassa–Holm equation*, Anal. Appl. **5** (2007), 1–27.
- [8] V. Busuioc, *On second grade fluids with vanishing viscosity*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), no. 12, 1241–1246.
- [9] R. Camassa and L. Holm, *An integrable shallow–water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Letters **71** (1993), 1661–1664.
- [10] R. Camassa, L. Holm, and J. M. Hyman, *A new integrable shallow–water equation*, Adv. Appl. Mech. **31** (1994), 1–33.
- [11] R. M. Chen, Y. Liu, and Z. Qiao, *Stability of solitary waves and global existence of a generalized two-component Camassa–Holm system*, Comm. Partial Differential Equations **36** (2011), no. 12, 2162–2188.
- [12] G. M. Coclite, H. Holden, and K. H. Karlsen, *Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2005), no. 4, 1044–1069 (electronic).
- [13] Adrian Constantin, *Nonlinear water waves with applications to wave-current interactions and tsunamis* **81** (2011).
- [14] A. Constantin, *Geometrical methods in hydrodynamics*, Journées équations aux dérivées partielles (2001), Art. 2, 14p.
- [15] ———, *Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 2, 321–362.
- [16] A. Constantin and J. Escher, *Global existence and blow-up for a shallow water equation*, Ann. Scuola Norm. Pisa **26** (1998), no. 2, 303–328.
- [17] ———, *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 229–243.
- [18] ———, *Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 475–504.
- [19] Constantin A. and Kolev B., *On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems*, Journal of Physics A: Mathematical and General **35** (2002), no. 32, R51.
- [20] A. Constantin and B. Kolev, *Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 4, 787–804.



- [21] A. Constantin and D. Lannes, *The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **192** (2009), no. 1, 165–186.
- [22] A. Constantin and H. McKean, *A shallow water equation on the circle*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 8, 949–982.
- [23] A. Constantin and W. A. Strauss, *Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods*, Phys. Lett. A **270** (2000), no. 3-4, 140–148.
- [24] H.-H. Dai, *Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod*, Acta Mech. **127** (1998), no. 1-4, 193–207.
- [25] H.-H. Dai and Y. Huo, *Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci. **456** (2000), 331–363.
- [26] R. Danchin, *A few remarks on the Camassa-Holm*, Diff. Int. Eq. **192** (2001), no. 14, 953–988.
- [27] ———, *A note on well-posedness for Camassa-Holm equation*, Journal of Differential Equations **192** (2003), no. 2, 429–444.
- [28] Degasperis A. and Procesi M., *Asymptotic integrability, in Symmetry and Perturbation Theory*, World Scientific **211** (1999), 23–37.
- [29] Degasperis A., Holm D.D, and Hone A.N.I, *A new integrable equation with peakon solutions*, Teoret. Mat. Fiz. **133** (2002), no. 2, 170–183.
- [30] Dullin H., Gottwald G.A., and Holm D.D., *On asymptotically equivalent shallow water wave equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena **190** (2004), no. 1, 1–14.
- [31] Escher J., Liu Y., and Yin Z., *Global weak solutions and blow-up structure for the Degasperis-Procesi equation*, Journal of Functional Analysis **241** (2006), no. 2, 457–485.
- [32] Escher J. and Yin Z., *Well-posedness, blow-up phenomena, and global solutions for the b-equation*, J. Reine Angew. Math. **624** (2008), no. 1, 51–80.
- [33] Escher J. and Seiler J., *The periodic b-equation and Euler equations on the circle*, arXiv preprint arXiv:1001.2987 (2010).
- [34] F. B. Estabrook and H. D. Wahlquist, *Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-de Vries Equation*, Phys. Rev. Lett. **31** (1973), no. 23, 1386–1390.
- [35] M Fisher and J. Schiff, *The Camassa Holm equation: conserved quantities and the initial value problem*, Physics Letters A **259** (1999), no. 5, 371–376.
- [36] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas, *Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*, Phys. D **4** (1981/82), no. 1, 47–66.
- [37] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Physical Review Letters **19** (1967), no. 19, 1095.
- [38] J. L. Gervais and A. Neveu, *Dual string spectrum in Polyakov’s quantization (II). Mode separation*, Nuclear Physics B **209** (1982), no. 1, 125–145.
- [39] K. Grunert, H. Holden, and X. Raynaud, *Global conservative solutions of the Camassa-Holm for initial data with nonvanishing asymptotics*, Discr. Cont. Dyn. Syst. **32** (2012), 4209–4227.
- [40] Zhengguang Guo and Yong Zhou, *Wave breaking and persistence properties for the dispersive rod equation*, SIAM J. Math. Anal. **40** (2009), no. 6, 2567–2580.
- [41] S. Hakkaev and K. Kirchev, *Local well-posedness and orbital stability of solitary wave solutions for the generalized Camassa-Holm equation*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 4-6, 761–781.
- [42] Henry D., *Infinite propagation speed for the Degasperis-Procesi equation*, Journal of mathematical analysis and applications **311** (2005), no. 2, 755–759.
- [43] De Lellis C., Kappeler T., and Topalov P., *Low-regularity solutions of the periodic Camassa-Holm equation*, Communications in Partial Differential Equations **32** (2007), no. 1, 87–126.
- [44] A. A. Himonas, G. Misiólek, G. Ponce, and Y. Zhou, *Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa-Holm equation*, Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 2, 511–522.
- [45] A. A. Himonas and G. Misiólek, *The Cauchy problem for an integrable shallow-water equation*, Differential Integral Equations **14** (2001), no. 7, 821–831.
- [46] H. Holden and X. Raynaud, *Global conservative solutions of the generalized hyperelastic-rod wave equation*, J. Differential Equations **233** (2007), no. 2, 448–484.
- [47] ———, *Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation. A Lagrangian point of view*, Comm. Part. Diff. Eq. **32** (2007), 1–27.

- [48] Andrew NW and Wang Hone Jing Ping, *Prolongation algebras and Hamiltonian operators for peakon equations*, Inverse Problems **19** (2003), no. 1, 129.
- [49] K. Hu and Z. Yin, *Blowup phenomena for a new periodic nonlinearly dispersive wave equation*, Math. Nachr. **283** (2010), no. 11, 1613–1628.
- [50] Rossen Ivanov, *On the integrability of a class of nonlinear dispersive wave equations*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **12** (2005), no. 4, 462–468.
- [51] Rossen I Ivanov, *Water waves and integrability*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **365** (2007), no. 1858, 2267–2280.
- [52] Jin. L., Y. Liu, and Y. Zhou, *Blow-up of solutions to a periodic nonlinear dispersive rod equation*, Doc. Math. **15** (2010), 267–283.
- [53] R. S. Johnson, *Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves*, J. Fluid Mech. **455** (2002), 63–82.
- [54] ———, *The classical problem of water waves: a reservoir of integrable and nearly-integrable equations*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **10** (2003), no. sup1, 72–92.
- [55] T. Kato, *Quasi-linear equation of evolution, with applications to partial differential equations, in : Spectral theory and differential equations*, Lecture Notes in Math. **448** (1075), 25–70.
- [56] B. Kolev, *Bi-Hamiltonian systems on the dual of the Lie algebra of vector fields of the circle and periodic shallow water equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **365** (2007), no. 1858, 2333–2357.
- [57] D. J. Korteweg and G. Vries, *Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **39** (1895), no. 240, 422–443.
- [58] Shinar Kouranbaeva, *The Camassa–Holm equation as a geodesic flow on the diffeomorphism group*, Journal of Mathematical Physics **40** (1999), no. 2, 857–868.
- [59] J. Lenells, *Traveling waves in compressible elastic rods*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **6** (2006), no. 1, 151–167 (electronic).
- [60] Y. A. Li and P. J. Olver, *Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation*, J. Differential Equations **162** (2000), no. 1, 27–63.
- [61] Y. Liu, *Global existence and blow-up solutions for a nonlinear shallow water equation*, Math. Ann. **335** (2006), no. 3, 717–735.
- [62] Liu Y. and Yin Z., *Global existence and blow-up phenomena for the Degasperis-Procesi equation*, Communications in mathematical physics **267** (2006), no. 3, 801–820.
- [63] Ming Chen. R., Liu Y., and Zhang P., *The Hölder continuity of the solution map to the b-family equation in weak topology*, Mathematische Annalen **357** (2013), no. 4, 1245–1289, DOI 10.1007/s00208-013-0939-9.
- [64] Lundmark H., *Formation and dynamics of shock waves in the Degasperis-Procesi equation*, Journal of Nonlinear Science **17** (2007), no. 3, 169–198.
- [65] H.P. McKean, *Breakdown of a shallow water equation*, Asian J. Math. **2** (1998), no. 4, 867–874. *Correction to “Breakdown of a shallow water equation”*, Asian J. Math. (1999), no 3.
- [66] ———, *Breakdown of the Camassa-Holm equation*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 3, 416–418.
- [67] Alexander V and Novikov Mikhailov Vladimir S, *Perturbative symmetry approach*, Journal of Physics A: Mathematical and General **35** (2002), no. 22, 4775–4790.
- [68] L. Molinet, *On well-posedness results for Camassa-Holm equation on the line: a survey*, J. Nonlinear Math. Phys. **11** (2004), no. 4, 521–533.
- [69] O. G. Mustafa, *Global conservative solutions of the hyperelastic rod equation*, Int. Math. Res. Not. IMRN **13** (2007), Art. ID rnm040, 26.
- [70] Ognyan C. and Sevdzhan H., *On the Cauchy problem for the periodic b-family equations and of the non-uniform continuity of Degasperis–Procesi equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **360** (2009), no. 1, 47–56.
- [71] Saha S., *Blow-Up results for the periodic peakon b-family of equations*, Comm. Diff. and Diff Eq., Vol 4, **162** (2013).
- [72] Yin Zhaoyang and others, *On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions*, Illinois Journal of Mathematics **47** (2003), no. 3, 649–666.
- [73] F. Serra Cassano, *A counterexample on the weighted Poincaré inequality*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **51** (1993), 65–72.

- [74] E. W. Stredulinsky, *Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1074, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [75] C. Tian, W. Yan, and H. Zhang, *The Cauchy problem for the generalized hyperelastic rod equation*, Math. Nachr. **287** (2014), 2116–2137.
- [76] E. Wahlén, *On the blow-up of solutions to the periodic Camassa-Holm equation*, NoDEA **13** (2007), 643–653.
- [77] ———, *On the blowup of solutions to a nonlinear dispersive rod equation*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), 1318–1324.
- [78] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original; A Wiley-Interscience Publication.
- [79] Yin Zhaoyang and others, *On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions*, Illinois Journal of Mathematics **47** (2003), no. 3, 649–666.
- [80] Z. Yin, *Well-posedness, global solutions and blowup phenomena for a nonlinearly dispersive wave equation*, J. Evol. Equ. **4** (2004), no. 3, 391–419.
- [81] Yin Zhaoyang, *Global weak solutions for a new periodic integrable equation with peakon solutions*, Journal of Functional Analysis **212** (2004), no. 1, 182–194.
- [82] N. Zabusky and M. Kruskal, *Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240–243, DOI 10.1103/PhysRevLett.15.240.
- [83] Zhenguang Guo, *Blow-up and global solutions to a new integrable model with two components*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **372** (2010), no. 1, 316–327.
- [84] Y. Zhou, *Wave breaking for a shallow water equation*, Nonlinear Anal. **57** (2004), no. 1, 137–152.
- [85] Yong Zhou, *Blow-up phenomenon for the integrable Degasperis–Procesi equation*, Physics Letters A **328** (2004), no. 2, 157–162.
- [86] Y. Zhou, *Local well-posedness and blow-up criteria of solutions for a rod equation*, Math. Nachr. **278** (2005), no. 14, 1726–1739.
- [87] ———, *Blow-up of solutions to a nonlinear dispersive rod equation*, Calc. Var. Part. Diff. Eq. **25** (2006), no. 1, 63–77.

---

L'équation de la chaleur non linéaire, le cas critique

---

## 2.1 Introduction

### Motivations physiques

L'objet de cette section sera l'étude du problème de Cauchy pour certaines équations paraboliques sémi-linéaires de la forme

$$\partial_t u - \Delta u = P(D)F(u), \quad (2.1)$$

où  $P(D)$  est un opérateur pseudo-différentiel et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non-linéaire de classe  $C^1$ . Les équations de ce type décrivent de nombreux phénomènes physiques : en mécanique des fluides, en physique des plasmas (MHD) etc. Une des variantes de ce problème est le système de Keller-Segel qui est couramment utilisé en chimiotactisme, dans le but d'étudier le mouvement de colonies de certains micro-organismes pouvant émettre une substance chimique, et qui sont attirés par une forte concentration de celle-ci (voir [15, 31]). En plus, dans le cas limite, le système de Keller-Segel est utilisé aussi en astrophysique, comme modèle décrivant l'interaction gravitationnelle de particules, par exemple dans les nébuleuses (voir [15]). Un autre cas particulier bien étudiée est

$$\partial_t u = \Delta u + f(u), \quad (2.2)$$

pour différents choix de  $f$ . Si on considère un ouvert convexe borné et régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et si l'on ajoute des conditions aux limites de type Dirichlet, l'équation (2.2) généralise de nombreux phénomènes rencontrés en combustion (voir [7, 32–34]), en biologie (voir [62, 63]), en médecine (voir [20, 46, 52]), en chimie (voir [8, 29]).

Il existe une vaste bibliographie pour le cas  $f(u) = |u|^\alpha u$ , où  $\alpha > 0$ , et le problème de Cauchy considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + |u|^\alpha u & x \in \mathbb{R}^n \quad t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette équation et ses variantes se retrouvent en physique lorsque l'on décrit la compétition d'un phénomène de diffusion (pris en compte par le terme  $\partial_t u = \Delta u$ ) et d'un phénomène non linéaire (le terme  $|u|^\alpha u$ ). Le problème de Cauchy (local en temps) pour (6.1) peut être résolu dans une grande classe d'espaces fonctionnels (voir Ball [2], Friedman [24, 25], Henry [28], Pazy [65],

Weissler [80]). Par exemple, pour des données initiales  $u_0 \in H^s \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , avec  $s \in [0, 2]$ , le problème (2.3) possède une solution unique  $u \in C([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ , où on a les 2 cas suivant : soit  $T = +\infty$ , soit

$$T < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = +\infty.$$

Les résultats classiques montrés par Weissler au début des années quatre-vingts sont : si on considère  $u_0 > 0$ , alors il n'y a pas de solution positive globale pour  $n\alpha = 2$ , et toute solution locale dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$  explose en temps fini. De plus si  $n\alpha > 2$ , on a l'existence globale de la solution pour  $p = \frac{\alpha n}{2}$  avec une hypothèse de petitesse sur la condition initiale  $u_0$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

La méthode de Weissler a été reprise par la suite par des nombreux autres, et notamment par T. Kato dans le cadre des équations de Navier-Stokes.

On peut définir la quantité suivante :

$$E(t) = E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{\alpha + 2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+2} dx. \quad (2.4)$$

La quantité  $E(t)$  (usuellement appelée l'énergie du système) décroît au cours du temps. Dans la formule de l'énergie (2.4), le premier terme correspond à la partie cinétique, et le second à la partie potentielle de l'énergie.

Dans ce paragraphe, nous rappelons un argument simple qui est à la base de nombreux résultats d'explosion en temps fini. Il s'applique aux données initiales qui changeant de signe et, plus généralement, à n'importe quel solution de (2.3) avec la donnée initiale  $u_0$  dans  $C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Si  $\alpha > 1$  et  $\Omega$  est domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = -I(u(t)), \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx, \quad (2.6)$$

où  $E(u(t))$  est l'énergie définie dans (2.4) et

$$I(t) = I(u(t)) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx, \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

L'identité (2.5) (respectivement, (2.6)) est obtenue en multipliant l'équation (2.3) (avec conditions de Dirichlet homogènes) par  $u$  (respectivement,  $u_t$ ) et intégrant par parties. Notez que

$$I(u(t)) = 2E(u(t)) - \frac{\alpha}{\alpha + 2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx \quad (2.9)$$

$$= (\alpha + 2)E(u(t)) - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.10)$$

Si  $E(u_0) < 0$ , alors la solution correspondante de (2.3) (avec conditions de Dirichlet homogènes dans  $\Omega$ ) explose. En effet, il résulte de (2.5) et de (2.7) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = -4E(u(t)) + \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx. \quad (2.11)$$

En supposant  $E(u_0) < 0$ , on déduit de (2.6) que  $E(u(t)) \leq E(u_0) < 0$ , de sorte que (2.11) donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx \geq \frac{2\alpha}{\alpha + 2} |\Omega|^{-\frac{2}{\alpha}} \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{\alpha+2}{2}},$$

pour tout  $0 < t < T^*$ , où  $T^*$  est le temps maximal de vie. On en conclut que ci-dessus que  $T^* < +\infty$ . Ceci est en fait l'argument de Ball [2]. Levine a obtenue un argument original qui s'applique dans tout domaine, borné ou non (Voir [44]).

**Théorème 2.1.** (Voir [44]) Soit  $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et soit  $u$  la solution correspondante de (2.3) définie sur l'intervalle maximal  $[0, T^*)$ . Si  $E(u_0) < 0$ , alors  $T^* < +\infty$ .

*Démonstration.* Il résulte de (2.5), la deuxième identité en (2.9) et (2.6) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq -2(\alpha + 2)E(u(t)) \quad (2.12)$$

$$= -2(\alpha + 2)E(u_0) + 2(\alpha + 2) \int_0^t \int_{\Omega} |u_s|^2 dx ds. \quad (2.13)$$

En supposant par l'absurde que  $u$  est globale, on déduit de (2.13) que

$$\|u(t)\|_{L^2} \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

En outre, si on écrit

$$f(t) = \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

Il résulte de (2.13) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} f f'' &\geq 2(\alpha + 2) \left( \int_0^t \int_{\Omega} |u_s|^2 dx ds \right) \left( \int_0^t \int_{\Omega} |u|^2 dx ds \right) \\ &\geq 2(\alpha + 2) \left( \int_0^t \int_{\Omega} |u u_s| dx ds \right)^2 \geq \left( \int_0^t \left| \int_{\Omega} u_s u dx \right| ds \right)^2 \\ &\geq \frac{\alpha + 2}{2} \left( \int_0^t \frac{d}{ds} \int_{\Omega} |u|^2 dx ds \right)^2, \end{aligned}$$

ce qui signifie

$$f f'' \geq \frac{\alpha + 2}{2} (f'(t) - f'(0))^2 \quad (2.15)$$

Comme  $f'(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  par (2.14) on déduit de (2.15) que pour  $t$  suffisamment grand, on a

$$f f'' \geq \frac{\alpha + 4}{4} f'^2$$

de sorte que

$$(f^{-\frac{\alpha}{4}})'' \leq 0 \quad (2.16)$$

Donc, les équations (2.14) et (2.16) sont clairement incompatibles.  $\square$

Il est pratique de réécrire le problème de Cauchy (2.3) dans la forme *mild* suivante :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} |u|^\alpha u(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

où  $e^{t\Delta}$  ( $t \geq 0$ ) désigne le semi-groupe de la chaleur. Nous avons  $e^{t\Delta} f = G_t * f$ , où

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Grâce aux travaux de F. Weissler, H. Brezis et T. Cazenave [11, 79], nous avons les énoncés suivants :

- Lorsque  $p > \frac{n\alpha}{2}$ ,  $p \geq \alpha + 1$ , il existe une constante  $T = T(u_0)$  et une solution unique  $u \in C([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$ . De plus  $u(t) \in L_{loc}^\infty(]0, T[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$ .
- Lorsque  $p = \frac{n\alpha}{2} = p_0$ ,  $p \geq \alpha + 1$ , il existe une constante  $T = T(u_0)$  et une solution unique  $u \in C([0, T], L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^\infty(]0, T[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$ .
- Quand  $\alpha + 1 < p < \frac{n\alpha}{2}$ , il n'y a pas de théorie générale pour l'existence d'une solution. De plus, A. Haraux et F. Weissler [26] ont montré qu'il existe une solution appartenant à l'espace  $C([0, T], L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^\infty(]0, T[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$ , positive, provenant de la donnée initiale 0. Il n'y a donc pas unicité.

Il est possible d'identifier trois grandes orientations dans la recherche concernant le problème d'explosion en temps fini de la solution de (2.3) : les conditions suffisantes d'explosion en temps fini, l'analyse de Fujita et le comportement asymptotique quand la solution explose. Dans la suite, on donnera un aperçu de quelques travaux importants traitant ces questions.

### 2.1.1 Analyse de Fujita et ses développements

Pour de nombreuses équations d'évolution, on ne peut garantir l'existence de solutions globales régulières que sous des hypothèses de données initiales petites. La question cruciale est alors de trouver les conditions de petitesse optimales. Quand on ne parvient pas à démontrer que les solutions existent pour tout temps, on s'attend à trouver un temps d'existence maximal  $T^* < +\infty$  et certains espaces de Banach  $E$  tels que la norme  $\|u(t, \cdot)\|_E$  est finie pour  $t \in [0, T^*)$  mais n'est pas bornée quand  $t \uparrow T^*$ .

Dans cette partie, nous étudions ces questions pour le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^{\alpha+1} & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, t) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Les premiers travaux dans ce cas particulier sont dus à Hiroshi Fujita en 1966. Fujita a montré dans [21, 22] que si la donnée initiale  $u_0$  est une fonction positive de classe  $C^2(\mathbb{R}^n)$  ayant ses dérivées d'ordre 0, 1 et 2 bornées sur  $\mathbb{R}^n$ , alors on a la condition nécessaire suivante pour que  $u$  soit unique dans  $C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T))$  :

$$\exists M > 0, \exists 0 < \beta < 2 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |u_0(x)| \leq Me^{|x|^\beta},$$

c'est-à-dire que  $u_0$  ne doit pas croître trop vite. Ainsi, en ce qui concerne la question de l'existence de solutions globales régulières sous des hypothèses de données initiales petites, Fujita a conclu qu'il existe deux types de situations : si  $\alpha < \frac{2}{n}$ , alors aucune solution positive non-triviale de ce problème ne peut être globale ("cas d'explosion"), tandis que pour  $\alpha > \frac{2}{n}$ , il existe des solutions positives non-triviales globales sous des hypothèses de données initiales petites.

Pendant les années soixante-dix et quatre-vingts, les travaux de K. Hayakawa [27] et F. Weissler [79, 80] ont complété l'étude de Fujita en démontrant que l'exposant critique  $\alpha = \frac{2}{n}$  appartient au cas d'explosion.

Au début des années quatre-vingt dix, C. Bandle et H. Levine étudient les solutions classiques du problème (2.18) avec une condition de Dirichlet homogène au bord de  $\Omega$ , un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^n$  et qui vérifient la condition suivante sur l'ordre de croissance :

$$\forall k > 0, |u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad |\nabla u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |x| \rightarrow 0.$$

Remarquons qu'un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n > 2$ , est un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\overline{\Omega}^c$  soit un domaine borné non vide, et lorsque  $n = 1$ ,  $\Omega$  est le complémentaire d'un intervalle

compact. De manière équivalente au problème précédent, Bandle et Levine ont montré des résultats similaires à ceux de Fujita avec le même exposant critique  $\alpha = \frac{2}{n}$  pour le problème (2.18) avec condition de Dirichlet homogène au bord de  $\Omega$  (voir [3, 4]). Il ne fallut pas longtemps avant que le cas critique ne soit résolu par Ryuichi Suzuki [73]. Il a prouvé que l'exposant critique appartient au cas d'explosion lorsque  $n \geq 3$ .

Les résultats de Fujita et de Bandle-Levine sur les solutions du problème de Cauchy et le problème avec condition de Dirichlet homogène au bord, ont été généralisés par K. Mochizuki et R. Suzuki en 1997. Ils ont travaillé avec un concept de solutions faibles qui correspond à des fonctions continues bornées vérifiant les deux problèmes au sens des distributions, avec l'espace test  $C^2(\mathbb{R}^n)$  ou  $C^2(\overline{\Omega})$ . Dans [60], ces auteurs démontrent que le phénomène de Fujita s'étend à ces solutions faibles avec le même exposant critique  $\alpha = \frac{2}{n}$ , qui appartient au cas d'explosion lorsque  $n \geq 3$ . Il est naturel pour ce genre de problèmes de se demander si les résultats relatifs au problème (2.18) avec condition de Dirichlet au bord restent valables avec des conditions au bord de Neumann. Au début de ce siècle, H. Levine et Q. Zhang ont répondu à cette question (voir [45]). Ils considèrent une condition initiale  $u_0$  dans  $C^2(\Omega)$  et des solutions faibles au sens des distributions avec l'espace test  $C^2(\Omega)$  et qui ne sont soumises à aucune restriction sur l'ordre de croissance. Ils ont montré que le phénomène de Fujita s'applique aux solutions du problème (2.18) avec des conditions de Neumann, et que l'exposant critique  $\alpha = \frac{2}{n}$  appartient au cas d'explosion lorsque  $n \geq 3$ .

Dans la dernière partie de ce bref résumé, on s'intéresse au cas (2.18) avec des conditions au bord dynamiques. Bien que ce type de conditions au bord aient été moins considéré dans la littérature mathématique, elles apparaissent naturellement dans beaucoup de modèles physiques de transfert thermique, dans un solide en contact avec un fluide mobile, dans les phénomènes de diffusion, dans un milieu biphasique (problème de Stefan), dans les problèmes de la dynamique liquide, etc (voir [1, 9, 14, 16, 18, 30]).

En 2006, C. Bandle, J. Below et W. Reichel étudient le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^{\alpha+1} & x \in \overline{\Omega} \quad t > 0, \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & x \in \partial\Omega \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, t) \geq 0 & x \in \overline{\Omega}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $\Omega$  désigne un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^n$  et  $\sigma$  une constante. Dans [6], les auteurs ont montré que dans le cas  $\sigma > 0$ , toute solution explose en temps fini lorsque  $\alpha < \frac{2}{n}$  et pour  $\alpha \leq \frac{2}{n}$ , si  $n \geq 3$ . Tandis que pour  $\alpha > \frac{2}{n}$  et  $\sigma > 0$ , ils construisent une (sur-)solution régulière et globale du problème (2.19) sous des hypothèses de données initiales petites lorsque le complémentaire de  $\Omega$  est étoilé par rapport à l'origine avec

$$\min\{|x \cdot \nu(x)| : x \in \partial\Omega\} > \sigma n.$$

Au cours des dernières années, J. F. Rault a généralisé les résultats de [6] en considérant le problème (2.19) avec  $\sigma$  une fonction de  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty)$  vérifiant la propriété de dissipativité suivante :

$$\sigma(x, t) \geq 0 \quad \partial\Omega \times (0, +\infty).$$

Comme on travaille avec des solutions régulières, on a besoin que  $\sigma \in C^1(\partial\Omega \times (0, +\infty))$ . En outre, Rault a considéré des données initiales  $u_0 \neq 0$  telles que

$$u_0 \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < \|u_0\|_{L^\infty} < \infty, \quad u_0 \geq 0, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u = 0.$$



Dans [64], Rault utilise des principes de comparaison pour répondre affirmativement à la question de savoir si le phénomène de Fujita est encore vérifié pour les conditions aux bords dynamiques précédentes. C'est-à-dire que toutes les solutions positives non-triviales du problème (2.19) explosent en temps fini dès que  $0 < \alpha < \frac{2}{n}$  (si  $n \geq 3$ , on peut prendre  $\alpha = \frac{2}{n}$ ), tandis que pour  $\alpha > \frac{2}{n}$ , le problème (2.19) admet des solutions positives globales non-triviales lorsque la donnée initiale  $u_0$  est suffisamment petite. La réponse donnée par Rault est complète pour toutes les dimensions différentes de 2. En effet, ce cas est spécial puisque, même dans le cas des conditions de Dirichlet, la question de situer l'exposant critique dans le cas d'explosion (comme c'est le cas pour toute autre dimension, ou pour le cas de  $\mathbb{R}^n$  tout entier) est encore ouverte. Et pour conclure, dans [68] Rault, adoptant les mêmes techniques de comparaison, montre que le phénomène de Fujita est aussi vérifié pour les conditions au bord de Robin

$$\partial_\nu u + \alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad \text{et avec} \quad \alpha \geq 0.$$

où  $\nu$  est le vecteur unitaire normal extérieur,  $\partial_\nu$  est la dérivée normale extérieure et  $\alpha$  est une fonction continue non négative sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ .

Bien que ceci ne fasse pas partie de notre recherche, nous pouvons dire que les techniques utilisées dans ces articles peuvent s'appliquer pour un opérateur elliptique de second ordre plus général que le laplacien (voir [3, 5, 66]).

## 2.2 Comportement asymptotique à l'explosion de la solution

Dans cette partie, on peut considérer sans perte de généralité  $u \in H_0^1 \cap L^\infty$  (voir Friedman [24], Henry [28], Pazy [65], Weissler [80]). On peut alors définir  $T^* > 0$  comme le temps maximal d'existence de la solution de (2.3). Sur le comportement asymptotique de la solution et en prenant comme références les travaux de Matano et Merle dans [50, 51], on peut définir deux types d'explosion en temps fini de la solution : Soit  $u$  une solution de (2.3) explosant en temps fini  $T^*$ . On dit que l'explosion associée à  $u$  est de type *I* si

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(T^* - t)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.20)$$

Dans le cas contraire, nous dirons qu'il s'agit d'une explosion de type *II*. Par exemple si  $u = c(T^* - t)^{-\frac{1}{\alpha}}$  est solution de l'EDO  $\frac{d}{dt}u = u^{\alpha+1}$ , alors  $u$  est solution stationnaire en espace de (6.1) et son comportement asymptotique est de type *I*. L'estimation (2.20) est optimale pour cette solution.

D'autre part, dans la théorie locale, si  $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ , on dit qu'un point  $x_0 \in \Omega$  est un *point d'explosion* de  $u$  si  $u(x, t)$  n'est pas localement bornée au voisinage de  $(x_0, T^*)$ , autrement dit s'il existe  $(x_n, t_n) \rightarrow (x_0, T^*)$  telle que  $|u(x_n, t_n)| \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . L'ensemble de tous les points d'explosion est appelé *ensemble d'explosion* de  $u$ .

L'analyse du comportement près de l'explosion repose sur l'introduction des variables auto-similaires suivantes

$$y = \frac{x - x_0}{\sqrt{T^* - t}}, \quad s = -\log(T^* - t), \quad \omega_{x_0}(y, s) = (T^* - t)^{\frac{1}{\alpha}} u(x, t). \quad (2.21)$$

Comme  $u(x, t)$  vérifie (2.3), nous avons que  $\omega_{x_0}$  vérifie :  $\forall s \geq -\log T^*, \forall y \in W_{x_0, s} = (\Omega - x_0)e^{\frac{s}{2}}$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \Delta \omega - \frac{1}{2} y \cdot \nabla \omega - \frac{\omega}{\alpha} |\omega|^\alpha. \quad (2.22)$$

L'étude de  $u(t)$  au voisinage de  $(x_0, T^*)$  est équivalente à l'étude du comportement asymptotique de  $\omega_{x_0}(\cdot, s)$  quand  $s \rightarrow +\infty$ .

### 2.2.1 Introduction aux différents types de comportements asymptotiques par rapport à l'énergie.

Pour comprendre le concept de *cas sous-critique*, *cas critique* et *cas sur-critique* nous introduisons la définition d'espace invariant par un changement d'échelle.

**Définition 2.1.** Une équation aux dérivées partielles d'évolution est dite invariante par changement d'échelle s'il existe deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  tels que pour tout  $\lambda > 0$ , on ait le résultat suivant : si la condition initiale  $u_0(x)$  génère une solution  $u(t, x)$ , alors la solution associée à la condition initiale remise à l'échelle  $\lambda^\gamma u_0(\lambda x)$  est  $\lambda^\gamma u(\lambda^\beta t, \lambda x)$ .

Dans le cas de (2.3), un calcul immédiat fournit que  $\gamma = \frac{2}{\alpha}$  et  $\beta = 2$ . On retiendra donc que si  $u$  est une solution de (2.3) sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ , alors

$$u_{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} u_0(\lambda x) \quad \text{donne} \quad u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad (2.23)$$

qui est une solution de (2.3) sur  $[0, \lambda^{-2}T] \times \mathbb{R}^n$ . Dans ce cas, nous dirons qu'un espace de Banach  $E$  est *invariant par changement d'échelle* (*scaling invariant space*) pour (2.3), si

$$\|u(t, \cdot)\|_E = \|u_\lambda(t, \cdot)\|_E.$$

Les espaces invariants par ce changement d'échelle sont appelés espaces critiques pour l'équation de la chaleur non linéaire (2.3). Les espaces invariants par ce changement d'échelle jouent un rôle essentiel dans des questions comme le caractère bien posé, l'existence globale ou l'explosion en temps fini de la solution.

Pour l'équation (2.3), l'espace de Lebesgue critique est  $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $p_0 = \frac{n\alpha}{2}$  et l'espace de Sobolev homogène invariant par le changement d'échelle de (2.3) est  $\dot{H}^{s_0}$ , où  $s_0 = \frac{n}{2} - \frac{2}{\alpha}$ .

*Remarque 2.1.* On note

$$2^* = \begin{cases} +\infty & n \in \{1, 2\} \\ \frac{2n}{n-2} & n \geq 3, \end{cases}$$

l'exposant de Sobolev. Si  $n \geq 3$ , on peut voir que, lorsque l'exposant de la non-linéarité est égal à  $2^* - 2$ , alors le terme cinétique et le terme de potentiel dans l'énergie ont un poids équivalent. Cette valeur correspond donc à un exposant critique et on notera alors  $\alpha_c = 2^* - 2 = \frac{4}{n-2}$ . Dans ce cas, l'espace de Sobolev homogène invariant par le changement d'échelle de (2.3) est  $\dot{H}^1$ .

En conséquence, nous pouvons distinguer trois cas :

$$\begin{aligned} \alpha < \alpha_c & \quad \text{énergie sous critique} \\ \alpha = \alpha_c & \quad \text{énergie critique} \\ \alpha > \alpha_c & \quad \text{énergie sur-critique.} \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Cas sous-critique de l'énergie

Revenons à l'équation (2.22) avec la même notation. Giga et Kohn [36, 37] ont démontré que si  $n \leq 2$  ou si  $0 < \alpha < \frac{12}{3n-4} < \alpha_c$ , alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$0 < \epsilon_0 \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \|\omega\|_{L^\infty(W_{x_0, s})} \leq \frac{1}{\epsilon_0}. \quad (2.25)$$

Les auteurs déduisent de ceci l'inégalité suivante en termes de  $u$ ,

$$\epsilon_0 \leq \lim_{t \rightarrow T^*} (T^* - t)^{\frac{1}{\alpha}} \|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon_0}.$$

Ceci revient à dire qu'il n'existe pas de solution de (2.3) avec une explosion de type II. Ce résultat a été étendu dans [38] de manière à couvrir tous les cas sous-critiques. Un autre résultat important, toujours dans le cas sous-critique a été trouvé par Gidas et Spruck [35] sur le problème elliptique

$$\Delta u + u^{\alpha+1} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n, \quad u \geq 0 \text{ et } u(0) > 0. \quad (2.26)$$

Ces auteurs ont prouvé, grâce à l'inégalité (2.25), un théorème du type Liouville qui permet de dire que l'unique solution du problème est la solution nulle. Ainsi, si  $\alpha < \alpha_c$ , il n'existe aucune solution stationnaire positive autre que la fonction nulle pour le problème de Cauchy (2.3).

D'autre part, si  $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ , Merle et Zaag dans [56, 57] ont montré le théorème suivant, dans le cas sous-critique :

**Théorème 2.2.** *Soit  $u(t)$  une solution de l'équation (2.3) qui explose au temps  $T^*$ . Supposons de plus que  $u(0) \geq 0$  et  $u(0) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors*

$$(T^* - t)^{\frac{1}{\alpha}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \kappa = (\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \text{quand } t \rightarrow T^*$$

et

$$(T^* - t)^{\frac{1}{\alpha}+1} \|\Delta u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + (T^* - t)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow T^*,$$

ou de façon équivalente : pour tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\omega_{x_0}(s)\|_{L^\infty} \rightarrow \kappa \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty,$$

et

$$\|\Delta \omega_{x_0}(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla \omega_{x_0}(s)\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty.$$

Sur un sous-ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  suffisamment régulier, le résultat reste valable pour le problème (2.3) avec condition de Dirichlet sur le bord. Habituellement les résultats précédents utilisaient la positivité (principe du maximum) ou se plaçaient dans une dimension particulière. Ainsi, les estimations obtenues n'étaient souvent pas uniformes par rapport à la donnée initiale ou par rapport au point d'explosion. Dans l'article de Merle et Zaag, l'intérêt est que les estimations sont uniformes pour les solutions explosives notamment en norme  $L^\infty$ . Pour cela, ils utilisent un théorème du type Liouville.

*Remarque 2.2.* Les outils utilisés dans cette démonstration se sont avérés très efficaces dans d'autres situations, en particulier pour l'équation de Schrödinger non linéaire critique ([54]), l'équation semilinéaire des ondes (voir [58]) ou l'équation de KdV généralisée (voir [48, 49]).

On conclut ce résumé des résultats de Merle et Zaag avec une estimation du module de continuité du temps d'explosion (voir [55]).

**Théorème 2.3.** *Si  $u(t)$  et  $u_h(t)$  sont deux solutions de (2.3) avec pour données initiales respectives  $u_0$  et  $u_0 + h$  appartenant à  $L^\infty \cap W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}^n)$ , qui explosent respectivement en  $T^*$  et  $T_h^*$ , alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta(\epsilon) > 0$  tel que*

$$\|h\|_{L^\infty} < \eta(\epsilon) \Rightarrow |T^* - T_h^*| \leq C(\epsilon) \|h\|_{L^\infty} |\ln(\|h\|_{L^\infty})|^{\frac{n+2}{2}+\epsilon}. \quad (2.27)$$

Ce travail suggère que l'on puisse arriver à une estimation du type  $|T^* - T_h^*| \leq C \|h\|_{L^\infty}$ . Au cours des dernières années, les outils développés par de R. Schweyer ont conduit à des avancées sur la description de la dynamique explosive.

### 2.2.3 Cas critique de l'énergie

Ici on suppose que  $\alpha = \alpha_c$ , ie où l'énergie associée au problème de Cauchy (2.3) définie par (2.4) est laissée invariante par le changement d'échelle (2.23). On se trouve donc en dimension supérieure ou égale à 3 ( $\alpha_c < \infty$ ). Dans ce cas particulier des solutions radiales stationnaires de (2.3) sont connues explicitement (voir [71]). De plus, en suivant les travaux de Matano et Merle ([50, 51]), à partir d'une donnée initiale  $u_0$  radiale, positive et bornée, il est possible de montrer que si la solution de l'équation (2.3) associée à cette donnée initiale explose en temps fini alors cette explosion est de type *I*.

Concernant les explosions de type *II*, Filippas, Herrero et Velázquez ont montré dans [19] que, pour des solutions changeant de signe, il existe la possibilité d'une explosion de type *II*. Indiquons que les solutions obtenues par ces auteurs dépendent fortement de la dimension de l'espace sur lequel on travaille.

Plus récemment, Schweyer a étudié le phénomène d'explosion de type *II* dans l'article [70]. Ce résultat est intéressant dans le sens où l'équation étudiée par cet auteur est très proche du travail réalisé dans cette thèse. En effet, le modèle considéré est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - u^3 = 0 & x \in \mathbb{R}^4 \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce résultat est le premier résultat rigoureux dans le domaine énergie critique, décrivant précisément une dynamique de type *II*. Remarquons que l'on retrouve la vitesse prédite dans [19].

Comme nous aurons l'occasion de le voir, nos recherches vont se focaliser sur cette même équation avec néanmoins une différence importante qui se situe dans la dimension de l'espace : nous allons travailler sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  ce qui a comme conséquence de nous placer dans un régime sur critique.

### 2.2.4 Cas sur critique de l'énergie

Dans cette situation, lorsque  $\alpha > \alpha_c$ , la situation est nettement plus complexe et les résultats existants ne sont que pour les solutions radiales. En effet, en suivant les travaux de Joseph, Lundgren, Matano et Merle [40, 50, 51], nous pouvons voir qu'il existe une dichotomie dans le cadre sur critique. Plus en détail, ces auteurs ont introduit un paramètre noté  $\alpha_{JL}$ , qui dépend uniquement de la dimension, tel que si  $\alpha + 1 < \alpha_{JL}$  alors pour les solutions radiales, l'explosion de type *II* est impossible. En revanche, si  $\alpha + 1 > \alpha_{JL}$  alors ce type de solutions admettent une explosion de type *II*.

## 2.3 Un cas modèle d'énergie sur-critique : l'équation de la chaleur cubique dans $\mathbb{R}^3$

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^3 & x \in \mathbb{R}^3 \quad t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $0 < T \leq \infty$  et  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. L'équation de la chaleur non-linéaire (2.29) est un cas particulier de l'équation (2.3) ( $\alpha = 2$ ). Un simple calcul montre que si la fonction  $u(t, x)$  satisfait l'équation (2.29), alors  $\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$  la vérifie aussi (avec  $u_{0, \lambda} = \lambda u_0(\lambda x)$ ) sur  $[0, \lambda^{-2} T]$ . Par conséquent, l'espace de Lebesgue invariant par ce changement d'échelle est  $L^3(\mathbb{R}^3)$ . Avant de poursuivre notre recherche, nous allons préciser l'importance de ces espaces. L'équation (2.29) admet des familles de solutions obtenues par dilatations les unes des autres. Ainsi, si  $u$  est solution de l'équation (2.29), les fonctions  $u_\lambda$  définies par

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

sont aussi solutions de (2.29). On peut alors définir le concept de solution auto-similaire pour l'équation (2.29).

**Définition 2.2.** *On dit que  $u(t, x)$  est une solution auto-similaire de l'équations de (2.29) si, pour tout  $\lambda > 0$*

$$u(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x).$$

*En d'autres termes, s'il existe une fonction  $U : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} U \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

*Remarque 2.3.* Si  $u(x, t)$  vérifie (2.29), alors  $U(y)$  vérifie l'équation suivante

$$\Delta U + \frac{1}{2} \nabla U \cdot y + U^3 + \frac{U}{2} = 0.$$

De la même manière on peut dire qu'une solution de (2.29)  $u(t, x)$  est auto-similaire si elle est invariante par le changement d'échelle de l'équation (2.29). Au moins formellement, une solution auto-similaire sera issue de données initiales auto-similaires (pour le scaling propre aux données initiales). En conséquence, il est naturel de chercher les solutions dans des espaces dont les normes sont invariantes par ce changement d'échelle.

Les espaces invariants par ce changement d'échelle sont appelés espaces invariants pour l'équation de la chaleur cubique (2.29). Cette fois-ci, l'espace d'énergie  $H^1(\mathbb{R}^3)$  n'est pas invariant : dans la classe des espaces de Sobolev, en dimension 3, ce rôle est joué par l'espace  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . On trouve d'autres exemples d'espaces invariants pour (2.29) dans la classe des espaces de Besov. Un autre espace invariant important est celui de Koch et Tataru,  $BMO^{-1}$  (cet espace intervient surtout dans la théorie des équations de Navier–Stokes, qui ont les même loi d'échelle. Voir la section suivante). Les inclusion entre ces espaces, pour  $3 < p < +\infty$  sont les suivantes :

$$\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_p^{-1+3/p, \infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow BMO^{-1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{-1, \infty}(\mathbb{R}^3).$$

L'espace  $\dot{B}_\infty^{-1, \infty}$  est le plus grand espace fonctionnel invariant par translation ayant la même homogénéité que  $L^3(\mathbb{R}^3)$ . Dans la suite, nous travaillerons seulement dans les espaces de Banach

invariants par ce changement d'échelle. Dans cette partie de la thèse, nous nous intéressons aux questions portant sur les conditions suffisantes d'explosion ou d'existence globale de la solution sous des hypothèses de données initiales petites, dans des espaces critiques "peu réguliers". Nous travaillons ici avec les solutions communément connues dans la littérature comme solutions *mild*, c'est-à-dire des fonctions  $u(x, t)$  qui vérifient la formulation intégrale formellement équivalente au problème (2.29), qui est la suivante :

$$u(t, x) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}u^3(\tau, x) d\tau, \quad (2.30)$$

où  $e^{t\Delta}$  ( $t \geq 0$ ) désigne le semi-groupe de la chaleur. La proposition suivante précise un cadre où les deux formulations différentielle (2.29) et intégrale (2.30) sont équivalentes.

**Proposition 2.4.** (Voir [69]) *Soit  $u \in L^3([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes*

1.  $u$  satisfait  $\partial_t u = \Delta u + u^3$  au le sens des distributions ;
2. il existe  $u_0 \in \mathcal{S}'$  telle que  $u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}u^3(\tau) d\tau$ .

*Remarque 2.4.* La dernière proposition montre que si la donnée initiale  $u_0$  est dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$ , alors une solution classique de (2.29) vérifie l'équation au sens des distributions et est une solution *mild* avec la donnée  $u_0$  est équivalente dans le sens des distributions à une *mild* solution de (2.29) avec la donnée  $u_0$ . Désormais, toutes les solutions considérées seront des solutions *mild*.

Nous allons continuer avec un théorème fondamental sur une condition suffisante pour l'explosion de la solution de (2.29).

**Théorème 2.5.** (Voir [2, 44]) *Si  $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_0 \neq 0$  et*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^2,$$

*alors la solution  $u(x, t)$  de (2.29) explose en temps fini.*

### 2.3.1 Comparaison de l'équation de la chaleur non-linéaire critique et de l'équation de Navier-Stokes

Dans cette section, nous ouvrons une courte digression pour illustrer quelques similitudes entre l'équation de la chaleur non-linéaire et de l'équation de Navier-Stokes. Rappelons que le problème de Cauchy de l'équation de Navier-Stokes incompressible dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$  est

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = -\nabla p & x \in \mathbb{R}^3 \quad t > 0, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $u = u(t, x)$  est un vecteur à 3 composantes représentant la vitesse du fluide et  $p = p(t, x)$  est une fonction réelle représentant la pression du fluide. Ces deux inconnues dépendent du temps  $t > 0$  et de la variable d'espace  $x$ . De même que pour l'équation de la chaleur non-linéaire, on peut réécrire le système (2.31) sous la forme intégrale suivante

$$u(t, x) = u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds, \quad (\text{NS})$$

où  $\operatorname{div} u_0 = 0$ ,  $e^{t\Delta}$  est le semigroupe de la chaleur, et  $\mathbb{P}$  est le projecteur (de Leray-Hopf) sur le champ des vecteurs de divergence nulle, défini par

$$\mathbb{P}f = f - \nabla\Delta^{-1}(\operatorname{div} f).$$

Nous pouvons voir que dans la formule intégrale de l'équation de Navier-Stokes incompressible, le terme de la pression  $p(x, t)$  a disparu. En effet, la pression peut être recalculée à partir du champ de vitesse  $u(x, t)$  (voir [78]). L'équation (NS) possède exactement la même loi d'échelle que l'équation (2.30). Pour les deux équations, l'on sait établir l'existence globale des solutions dans certains espaces de Besov homogènes avec conditions initiales petites (voir [12, 53]), et l'unicité de celles-ci dans un sous-espace convenable de  $C_t(L^3(\mathbb{R}^3))$ , où ces solutions sont construites. L'unicité des solutions mild est en faite vraie même dans  $C_t(L^3(\mathbb{R}^3))$  dans le cas des solutions de Navier–Stokes (voir [23]), mais pas dans le cas de l'équation (2.30). Ce dernier résultat de non-unicité est due à E. Terraneo qui étend à l'espace tout entier une construction d'une solution radiale sur une boule de Ni et Sack [47]. De manière générale, l'équation de Navier-Stokes a été largement étudiée car elle est une des principales équations de la mécanique des fluides. Un certain nombre de méthodes développées pour cette équation (comme ceux décrits dans le livre [12]) peuvent être transposées au cas de l'équation (2.30). Bien entendu, dans d'autres cas, les résultats pour les équations de Navier-Stokes ne s'adaptent pas facilement à l'équation de la chaleur cubique (2.29) (comme nous le verrons dans la section des questions ouvertes).

## 2.4 Présentation des principaux résultats

Dans cette section nous présentons notre le résultat principal relatif à l'équation de la chaleur non-linéaire, qui est un résultat d'explosion pour les solutions de (2.29). Pour mieux l'apprécier, il conviendra tout d'abord établir une petite généralisation d'un théorème d'Y. Meyer sur l'existence globale des solutions (à données petites) de cette équation. Ensuite nous allons discuter quelques questions et perspectives laissées ouvertes par notre recherche.

Tout d'abord, nous posons le cadre mathématique précis pour l'étude du problème de Cauchy de l'équation de la chaleur non-linéaire (2.29).

### 2.4.1 Cadre théorique et notations

Dans ce qui suit, nous dirons qu'étant donné un espace de Banach  $\mathcal{Z}$ , le problème de Cauchy (2.29) est bien posé dans  $\mathcal{Z}$ , s'il existe un espace de Banach  $Y \subset C([0, T], \mathcal{Z})$  tel que pour toute  $u_0 \in \mathcal{Z}$ , il existe une solution unique  $u \in Y$  de (2.29) et la fonction  $u_0 \mapsto u = \Phi(u_0)$  est continue de  $\mathcal{Z}$  dans  $C([0, T], \mathcal{Z})$ . Dans le cas contraire, nous dirons que le problème de Cauchy est mal posé dans  $\mathcal{Z}$ .

Commençons par regrouper les théorèmes de Weissler, Brezis et Cazenave [11, 79, 80] en un seul énoncé :

**Théorème 2.6.** [Weissler-Brezis-Cazenave] Soit  $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ . Il existe une constante  $T = T(u_0) > 0$  et une unique solution  $u$  de (2.29) dans  $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3))$  telle que :

(i)  $u(t, x)$  est la solution classique du problème de Cauchy (6.5).

(ii)  $\sup_{0 < t < T} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} < +\infty$ .

(iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} = 0$ ,

où  $3 < p < 9$  et  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$ . En outre, pour un approprié  $\epsilon > 0$  et pour toutes les données initiale  $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\|u_0\|_{L^3} \leq \epsilon$ , la solution est globale :  $u \in C([0, \infty[, L^3(\mathbb{R}^3))$ .

*Remarque 2.5.* Si on considère  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^3(\mathbb{R}^3)$  alors la solution unique  $u(t, x)$  provenant de la donnée initiale  $u_0$  vérifie :  $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) \forall t \in [0, T]$ . Ceci est facile à voir, en utilisant par exemple les arguments de [77, 79, 80]). Cette observation nous sera utile dans nos calculs sur la transformée de Fourier de la solution.

La méthodologie générale qui sera utilisée à travers cette section consiste à chercher des solutions  $u(t, x)$  appartenant à l'espace de Banach  $\mathcal{W} = C_b([0, \infty); \mathcal{Z})$ , où  $\mathcal{Z}$  est un espace de Banach approprié de fonctions de  $x$ . La norme de  $u(\cdot, t)$  dans  $\mathcal{W} = C_b([0, \infty); \mathcal{Z})$  est notée par  $\|u\|_{\mathcal{W}}$  et définie comme

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{Z}}. \quad (2.32)$$

Cette norme sera appelée la norme naturelle. Pour démontrer notre Théorème (2.7), on commence par supposer l'existence et l'unicité d'une solution locale provenant d'une donnée initiale  $u_0$  et pour cela nous avons besoin du théorème de Weissler. Ensuite, nous utilisons l'argument suivant de point fixe :

Soit  $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$  un espace de Banach et

$$B : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W},$$

un opérateur trilinéaire tel que

$$\|B(x, y, z)\|_{\mathcal{W}} \leq C_0 \|x\|_{\mathcal{W}} \|y\|_{\mathcal{W}} \|z\|_{\mathcal{W}}.$$

Si  $\|x_0\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} C_0^{-1/2}$ , alors l'équation

$$x = x_0 + B(x, x, x) \quad x \in \mathcal{W},$$

a une solution unique qui satisfait  $\|x\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} C_0^{-1/2}$  et cette solution est la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par

$$x_{n+1} = x_0 + B(x_n, x_n, x_n),$$

et la fonction définie  $\Psi$  comme

$$\Psi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n,$$

est analytique dans la boule  $\|x\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} C_0^{-1/2}$ .

Si  $\mathcal{W} := C_b([0, \infty); \mathcal{Z})$ , avec  $\mathcal{Z} = L^3(\mathbb{R}^3)$ , l'argument du point fixe dans  $\mathcal{Z}$  ne fonctionne pas. Weissler propose de remplacer  $\mathcal{W}$  par l'espace de Banach  $Y \subset \mathcal{W}$  constitué de toutes les fonctions telles que

$$\begin{cases} u(\cdot, t) \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3)) \\ t^{\frac{\sigma}{2}} u(\cdot, t) \in C([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^3)) \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u\|_p = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u\|_p = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$  et  $p$  est fixé dans  $]3, 9[$ . Trois normes distinctes seront utilisées. Comme ci-dessus, la norme naturelle est

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_3.$$



La deuxième norme est la norme faible qui est définie par

$$\|u\|_Y = \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}.$$

La troisième norme  $\|u\|_*$  est nommée la norme forte et est définie par

$$\|u\|_* = \|u\|_{\mathcal{W}} + \|u\|_Y.$$

Nous introduisons la norme  $\|\cdot\|_*$ , car l'argument de point fixe pour le théorème 2.7 utilise cette norme.

Ensuite, on considère l'espace linéaire  $\mathcal{H}$  des solutions de l'équation linéaire de la chaleur avec  $u(0, \cdot) \in \dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ . Alors les trois normes précédentes sont équivalentes sur  $\mathcal{H}$ .

Comme nous l'avons dit précédemment, le premier point de notre recherche est l'existence globale de la solution  $u(t, x)$  pour (2.29) avec sur l'hypothèse de petitesse sur la condition initiale  $u_0$  dans un certain espace homogène de Besov. Nous avons alors le théorème suivant

**Théorème 2.7.** [53] *Soit  $3 < p < 9$  et  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$ . Soit  $\|\cdot\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}}$  la norme dans l'espace de Besov homogène  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ . Il existe un nombre strictement positif  $\eta$  tel que, si la condition initiale  $u_0(x)$  satisfait  $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$  et  $\|u_0\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}} \leq \eta$ , alors il existe une solution globale  $u(x, t) \in C([0, \infty), L^3(\mathbb{R}^3)) \cap Y$  de (6.5), où  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  est l'espace de Banach tel que*

$$\|u\|_Y = \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} < \infty.$$

En raison de l'inclusion continue  $L^3 \subset \dot{B}_p^{-\sigma, \infty}$ , des petites données dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  donnent lieu à une solution globale. La caractéristique intéressante du théorème (2.7) est que la norme  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}$  peut être petite même lorsque la norme  $L^3$  est grande : cela est typiquement le cas des données rapidement oscillantes (voir [12, 53]).

*Remarque 2.6.* Si on considère  $u_0$  en plus comme dans le Théorème 2.7 et  $\widehat{u}_0(\xi)$  positive, alors la solution unique  $u(t, x)$  de (2.29) provenant de la donnée initiale  $u_0$  a sa transformée de Fourier positive.

*Remarque 2.7.* Notre version du Théorème 2.7 est plus générale que celle du Théorème de Meyer, qui avait été établi seulement pour  $p = 6$  dans [53]. En fait, la preuve de [53] se généralise sans difficulté à  $3 < p < 9$  parce que l'intégrale  $\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{p}} \tau^{-\frac{3\sigma}{2}} d\tau$  est finie pour  $3 < p < 9$ .

*Remarque 2.8.* Dans [59], Miao, Yuan et Zhang ont généralisé ce résultat. Ils ont étudié le problème de Cauchy de l'équation de la chaleur non linéaire (2.3) dans des espaces de Besov homogènes  $\dot{B}_r^{s, p}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $s < 0$ . L'estimation non linéaire est établie au moyen de la trichotomie de Littlewood-Paley et est utilisée pour prouver l'existence globale de solutions pour des petites données initiales dans l'espace de Besov homogène  $\dot{B}_r^{s, p}(\mathbb{R}^n)$  et avec  $s = \frac{n}{p} - \frac{2}{b}$ , avec  $b > 0$ . En particulier, lorsque  $r = \infty$  et quand la donnée initiale  $u_0$  satisfait  $\lambda^{\frac{2}{b}} u_0(\lambda x) = u_0(x)$  pour tout  $\lambda > 0$ , le résultat principal dans [59] conduit à l'existence de solutions globales auto-similaires du problème (2.3).

## 2.4.2 Énoncé du théorème principal

Notre résultat principal affirme ceci : *des données initiales  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  (la classe de Schwartz) arbitrairement petites dans  $\dot{B}_9^{-2/3, \infty}(\mathbb{R}^3)$  peuvent produire des solutions qui explosent en temps fini. De plus, l'explosion peut se produire après un temps arbitrairement court.*

Donc, si l'on cherche à obtenir des solutions globales, on ne peut (quasiment) pas affaiblir la condition de petitesse  $\|u_0\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}}$  du Théorème 2.7 : la restriction  $p < 9$  de ce théorème se révèle

ainsi optimale. Bien entendu, il découle de notre théorème (et des injections entre les espaces de Besov) que la petitesse de  $\|u_0\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}$  n'est pas non plus suffisante pour éviter l'explosion. Ceci répond à une question posée par Y. Meyer dans [53], qui a été la motivation principale de ce chapitre.

Sous cette forme, notre résultat est une sorte d'analogue à celui de J. Bourgain et N. Pavlovic [10], relatif au caractère mal posé des équations de Navier–Stokes dans  $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$  (Yoneda [81] a ensuite généralisé leur résultat au cas des espaces de Besov  $\dot{B}_q^{-1,\infty}$  avec  $q > 2$ ). En effet Bourgain, Pavlovic et Yoneda ont mis en évidence un phénomène “d'inflation de norme” : pour tout  $\delta > 0$ , ils construisent des solutions de Navier–Stokes telles que  $\|u_0\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} < \delta$ , mais  $\|u(t)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} > 1/\delta$ , pour un certain  $t$  vérifiant  $0 < t < \delta$ .

Dans le cas de l'équation de la chaleur cubique, notre conclusion est alors plus forte que dans le cas de Navier–Stokes : en effet, la norme de Besov ne se limite pas à devenir de grande taille, mais *elle devient infinie* en un temps court. Notre démonstration s'inspire d'un argument de Montgomery-Smith [61], où l'auteur construit une solution explosive pour un modèle scalaire de l'équation de Navier–Stokes.

Plus précisément, nous obtenons alors le théorème suivant.

**Théorème 2.8.** *Soit  $\delta > 0$ . Alors il existe  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  telle que la solution unique de (2.29)  $u$  provenant de  $u_0$  et appartenant à  $C([0, T^*], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty([0, T^*], L^\infty(\mathbb{R}^3))$  vérifie que  $T^* < \delta$ , où  $T^*$  est le temps maximal d'existence. En outre,  $\forall 3 < q \leq \infty$ , nous pouvons choisir  $u_0$  de la manière suivante*

$$\|u_0\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},q}} \leq \delta.$$

*Remarque 2.9.* Nos données initiales sont typiquement de petite norme dans  $\|u_0\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},q}}$  pour  $q > 3$ , mais de grande norme dans le cas limite  $q = 3$ . Nous laissons alors ouverte la question suivante : une condition de petitesse sur  $u_0$  dans  $\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},3}$ , donne-t-elle l'existence d'une solution globale de (2.29) ?

En revanche, comme nous l'avons déjà dit au début de cette section, l'application de ce théorème avec  $q = \infty$  montre l'optimalité de la restriction  $p < 9$  dans le résultat d'existence globale du Théorème 2.7.

### 2.4.3 Méthode de preuve et quelques commentaires

Pour démontrer le Théorème 2.8, nous considérons une condition initiale  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ , ce qui implique que la solution vérifie  $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$  pour  $t \in [0, T^*]$ . On utilise alors la transformée de Fourier de la solution  $\widehat{u}(\xi, t)$  et sous certaines conditions, nous montrons l'explosion en temps fini de  $\widehat{u}(\xi, t)$  dans  $L_\xi^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Ce fait nous permet de montrer l'explosion en temps fini de  $u(x, t)$  dans  $L^1(\mathbb{R}^3)$ .

À notre connaissance, notre résultat d'explosion en temps fini de la solution (2.29) est le seul qui utilise la positivité de la transformée de Fourier héritée de sa condition initiale  $u_0$ .

Ici, comme dans l'article de Montgomery-Smith [61], nous prouvons qu'il existe une donnée initiale  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  (et donc dans chaque espace de Triebel-Lizorkin, Besov, Lebesgue ou de Sobolev) telle qu'il existe  $0 < T^* < \infty$  tel que la solution  $u(T^*, \cdot)$  provenant de la donnée initiale  $u_0$  n'est dans aucun espace de Triebel-Lizorkin ou Besov (et donc aucun espace de Lebesgue ou de Sobolev). L'aspect crucial de notre approche est qu'il permet d'obtenir des solutions explosives issues de données initiales arbitrairement petites dans  $\dot{B}_9^{-\sigma,q}$ .

La partie la plus délicate consiste alors à préparer la donnée initiale. Notre point de départ sera donc une donnée initiale  $u_{0,N}$  pour  $N$  un entier, telle que l'on ait l'estimation suivante :

$\|u_{0,N}\|_{\dot{B}_9^{-\sigma,q}} \leq \delta$  avec  $q > 3$  pour un certain  $\delta > 0$  fixé arbitrairement petit. Indiquons au passage que lorsque  $q = 3$  notre construction ne nous permet pas d'obtenir cette majoration.

A partir de cette donnée initiale nous construisons, en utilisant un formalisme mild, une solution associée  $u_N(x, t)$  et on vérifie que cette solution satisfait la majoration

$$\widehat{u}_N(\xi, t) \geq \tau_N(t)(\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w})(\xi + e_1)$$

, où  $(\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w})(\cdot + e_1) := \omega$  a le support dans  $B_1(0)$  et  $\tau_N(t)$  est une fonction telle que  $\tau_N(t) \rightarrow +\infty$  si  $N \rightarrow +\infty$ .

Une fois que nous avons cette solution, nous nous plaçons au temps  $\delta/2$ ; ainsi pour  $N$  assez grand nous avons  $\widehat{u}_N(\xi, \delta/2) \geq A \widehat{\omega}(\xi)$ , où  $\omega$  a sa transformée de Fourier positif et est paire et vérifie de plus certaines propriétés particulières qui seront explicitées par la suite. On notera ce  $N$  par  $N^*$ .

Arrivés à ce stade, on définit  $\bar{u}_{0,N^*} = u_{N^*}(x, \delta/2)$  et on remarque alors que, par construction, nous avons  $\widehat{\bar{u}}_{0,N^*}(\xi) \geq A \widehat{\omega}(\xi)$ . Ici, il est alors possible de voir -par un lemme technique- que la solution de l'équation (2.29) associée à la donnée initiale  $\bar{u}_{0,N^*}$  admet un temps d'existence  $T < \delta/2$ , ce qui prouve que le temps maximal d'existence est alors  $\delta$ .

## 2.5 Questions ouvertes et perspectives

Nous présentons un problème de recherche inspiré par notre travail précédent. Le problème est lié à une conjecture sur le caractère bien posé de l'équation de la chaleur cubique. Pour l'équation (2.29), on considère la classe des espaces de Banach  $\mathcal{Z}$  tels que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  invariants par translations et par le changement d'échelle  $\|\lambda u_0(\lambda \cdot)\| = \|u_0\|$ , avec des inclusions continues. À l'intérieur de cette classe, y a-t-il un espace maximal pour la résolubilité globale de l'équation (2.29) à donnée petites? Autrement dit, quels sont les espaces critiques  $\mathcal{Z}$  pour lesquels une condition de petitesse du type  $\|u_0\|_{\mathcal{Z}} < \epsilon$  (avec  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ) garantit que  $T^* = \infty$ ?

D'après le Théorème 2.7, nous savons que si  $\mathcal{Z} = L^3(\mathbb{R}^3)$ , ou  $\mathcal{Z} = \dot{B}_q^{-\sigma,\infty}(\mathbb{R}^3)$ , où  $3 < q < 9$ ,  $\sigma = 1 - \frac{3}{q}$  et si  $\epsilon$  est suffisamment petit alors le problème de Cauchy (2.29) admet une solution globale.

Notons que dans le cas des équations de Navier-Stokes que la réponse à cette question est essentiellement connue : l'espace maximal est l'espace  $BMO^{-1}$  de Koch et Tataru [42] (du moins, la maximalité de l'espace de Koch–Tataru est établie au moins de manière heuristique). Mais pour l'équation de la chaleur cubique ce problème est toujours ouvert, et ceci même au niveau heuristique. Cette thèse apporte néanmoins deux indications partielles. On doit alors s'attendre que si un tel espace fonctionnel  $\mathcal{Z}$  existe, alors

- $\bigcup_{3 < q < 9} \dot{B}_q^{-\sigma,\infty}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{Z}$  (compte tenu du Théorème 2.7)
- $\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},\infty}(\mathbb{R}^3) \not\subset \mathcal{Z}$  (compte tenu du Théorème 2.8).

Pour aller plus loin, et en transposant à l'équation de la chaleur cubique la discussion de Koch–Tataru, il semble raisonnable de penser que l'espace maximal  $\mathcal{Z}$  puisse être défini par la norme

$$\|v\|_{\mathcal{Z}} = \|v\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} + \sup_{x \in \mathbb{R}^3, R > 0} R^{-\frac{2}{3}} \left( \int_0^{R^2} \int_{B(x,R)} |e^{t\Delta} v(y)|^3 dy dt \right)^{1/3}.$$

En effet, cette norme vérifie 3 conditions essentielles : (i) les propriétés d'invariance souhaitées, (ii) la compatibilité avec la partie linéaire de l'équation et (iii) la compatibilité avec les conditions  $L_{loc}^3$  requises pour donner un sens à la nonlinéarité.

Cependant, pour le moment nous ne savons pas comment appliquer l'argument du point fixe dans un tel espace. La principale difficulté est d'établir la validité de l'estimation trilinéaire.

D'autre part, revenons à l'équation générale (2.1)

$$\partial_t u - \Delta u = P(D)F(u),$$

où  $P(D)$  est un opérateur pseudo-différentiel et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non-linéaire de classe  $C^1$ . La méthode utilisée dans la démonstration du Théorème 2.8 peut être généralisée à certaines équations de la forme (2.1). Dans cette direction, Pierre Gilles Lemarié-Rieusset dans [43] a étudié les équations semi-linéaires paraboliques sur  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  du type :

$$\partial_t u - (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u^2,$$

avec  $0 < \alpha < n + 2\beta$  et  $0 < \beta < \alpha$ . En réalité, Lemarié-Rieusset a travaillé sur une non-linéarité quadratique plus générale que  $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u^2$ . Ses résultats d'explosion sont comparables aux notres.



- [1] Aiki T., *Multi-dimensional two-phase Stefan problems with nonlinear dynamic boundary conditions.*, Nonlinear analysis and applications (Warsaw) (1994), 1–25.
- [2] JM Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations.*, The Quarterly Journal of Mathematics **28** (1977), no. 4, 473–486.
- [3] Bandle C. and Levine H., *Fujita type results for convective-like reaction diffusion equations in exterior domains*, ZAMP **40** (1989), no. 5, 665–676.
- [4] ———, *On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains*, Trans. Am. Math. Soc. **316** (1989), no. 2, 595–622.
- [5] Bandle C., Levine H., and Zhang Q.S, *Critical Exponents of Fujita Type for Inhomogeneous Parabolic Equations and Systems*, J. of Math. Anal. and Appl. **251** (2000), no. 2, 624–648.
- [6] Bandle C., von Below J., and Reichel W., *Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up*, Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni **17** (2006), no. 1, 35–67.
- [7] J. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from Combustion theory.*, Applied Math. Sci. Series **83** (1989).
- [8] M. Betterton and M. Brenner, *Collapsing bacterial cylinders.*, Physical Review E **64** (2001), no. 6, 061904.
- [9] Bejenaru I., Diaz J., and Vrabie I., *An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic system with dynamic boundary conditions.*, Electronic J. Diff. Eq. **50** (2001), 1–19.
- [10] J. Bourgain and N. Pavlović, *Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D*, Journal of Functional Analysis **255** (2008), no. 9, 2233–2247.
- [11] Brezis H. and Cazenave T., *A nonlinear heat equation with singular initial data*, Journal D’Analyse Mathématique **68** (1996), no. 1, 277–304.
- [12] Cannone. M., Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes avec une préface de Yves Meyer., 1994, pp. 146 p. Thèse de doctorat dirigée par Meyer, Yves Mathématiques appliquées Paris 9 1994.
- [13] L. Corrias, B. Perthame, and H. Zaag, *Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions*, Milan Journal of Mathematics **72** (2004), no. 1, 1–28.
- [14] Cortez F. and Aníbal Rodríguez-Bernal, *PDEs in moving time dependent domains*, Without Bounds: A Scientific Canvas of Nonlinearity and Complex Dynamics., 2013, pp. 559–577.
- [15] Chavanis P., Ribot M., Rosier C., and Sire C., *On the analogy between self-gravitating Brownian particles and bacterial populations*, arXiv preprint cond-mat/0407386 (2004).
- [16] Dalsen V. and Grobbelaar M., *On B-evolution theory and dynamic boundary conditions on a portion of the boundary*, Appl. Anal. **40** (1991), 151–172.
- [17] M. A. Ebde and H. Zaag, *Construction and stability of a blow up solution for a nonlinear heat equation with a gradient term*, SeMA Journal **55** (2011), no. 1, 5–21.
- [18] Escher J., *Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions.*, Comm. Part. Diff. Equat. **18** (1993), 1309–1364.
- [19] Filippas S., Herrero M., and Velázquez J., *Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **456** (2000), no. 2004, 2957–2982.

- [20] Fisher. R.A, *The wave of advance of advantageous genes*, Annals of Eugenics **7** (1937), 355–369.
- [21] Fujita. H, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo **13** (1966), 109–124.
- [22] Fujita H., *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations*, Proc. Symp. Pure Math. XVII Am. Math. Soc. **18** (1970), 105–113.
- [23] Furioli. G, Lemarié-Rieusset. P. G., and Terraneo. E., *Unicité dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes.*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 605-667.
- [24] Friedman. A, *Remarks on nonlinear parabolic equations.*, Proc. Sympos. Appl. Math **Vol. XVII** (1965), no. 17, 3–23.
- [25] ———, *Partial differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Co **Vol. XVII** (1976), 3–23.
- [26] Haraux A. and Weissler F., *Non-uniqueness for a semilinear initial value problem*, Indiana University Mathematics Journal **31** (1982), no. 2, 167–189.
- [27] Hayakawa K., *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proceedings of the Japan Academy **49** (1973), no. 7, 503–505.
- [28] Henry D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* **840** (1985).
- [29] M. Herrero and J. Velázquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model.*, Math. Ann. **306** (1996), no. 3, 583–623.
- [30] Hintermann. T, *Evolution problem with dynamical boundary conditions.*, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect A. **113** (1989), 43–60.
- [31] Dirk and others Horstmann, *From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences*, arXiv preprint cond-mat/0407386 (2003).
- [32] V. Galaktionov, S. Kurdyumov, and A. Samarskiĭ, *On approximate self-similar solutions of a class of quasilinear heat equations with a source*, Mathematics of the USSR-Sbornik **52** (1984), no. 1, 163-188.
- [33] V. Galaktionov and J. Vazquez, *Regional Blow-Up in a Semilinear Heat Equation with Convergence to a Hamilton-Jacobi Equation*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 5, 1254–1276.
- [34] V. Galaktionov, S. Kurdyumov, P. Mikhailov, and A. Samarskii, *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, SIAM Review **38** (1996), no. 4, 692-694.
- [35] Gidas B. and Spruck J., *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics **34** (1981), no. 4, 525–598.
- [36] Giga Y. and Kohn V., *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics **38** (1985), no. 3, 297–319.
- [37] ———, *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 1, 1–40.
- [38] Giga Y., Matsui S., and Sasayama S., *Blow up rate for semilinear heat equation with subcritical nonlinearity*, preprint (2003).
- [39] P. Groisman, J. Rossi, and H. Zaag, *On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem* (2003).
- [40] Joseph DD. and Lundgren TS., *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **49** (1973), no. 4, 241–269.
- [41] S. Khenissy, Y Rebai, and H. Zaag, *Continuity of the blow-up profile with respect to initial data and to the blow-up point for a semilinear heat equation.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **28** (2011), no. 1, 1–26.
- [42] Koch H. and Tataru D., *Well-posedness for the Navier-Stokes Equations*, Advances in Mathematics **157** (2001), no. 1, 22–35.
- [43] Lemarié-Rieusset P. G., *Sobolev multipliers, maximal functions and parabolic equations with a quadratic nonlinearity.*, Preprint, Univ. Evry (2013).
- [44] Levine H. A, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $Pu_t = Au + \phi(u)$* , Archive for Rational Mechanics and Analysis **51** (1973), no. 5, 371–386.
- [45] H. A. Levine and Q. S. Zhang, *The critical Fujita number for a semilinear heat equation in exterior domains with homogeneous Neumann boundary values*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **130** (2000), no. 12, 591–602.
- [46] Nagasawa M. and Pavlović N., *A limit theorem of a pulse-like wave form for a Markov process*, Proceedings of the Japan Academy **44** (1968), no. 6, 491–494.
- [47] Wei-Ming Ni and Paul Sacks, *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **287** (1985), no. 2, 657-671.

- [48] Martel Y. and Merle F., *A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de-Vries*, J. Math. Pures Appl. **79** (2000), no. 4, 339–425.
- [49] ———, *Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation*, Ann. of Math. **155** (2002), no. 1, 235–280.
- [50] Matano H. and Merle F., *On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation.*, Communications on pure and applied mathematics **57** (2004), no. 11, 1494–1541.
- [51] ———, *Classification of type I and type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation.*, Journal of Functional Analysis **256** (2009), no. 4, 992–1064.
- [52] H. McKean, *Application of brownian motion to the equation of kolmogorov-petrovskii-piskunov*, Communications on Pure and Applied Mathematics **28** (1975), no. 3, 323–331.
- [53] Y. Meyer, *Oscillating Patterns in Some Nonlinear Evolution Equations*, Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, 2006, pp. 101–187.
- [54] Merle F. and Rhaepael P., *On universality of blow-up profile for  $L^2$  critical nonlinear Schrödinger equation*, Inventiones mathematicae **156** (2004), no. 3, 565–672.
- [55] Merle F. and Zaag H., *Stability of the blow-up profile for equations of the type  $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$* , Duke Math. J. **86** (1997), no. 1, 143–195.
- [56] ———, *Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations.*, Communications on pure and applied mathematics **51** (1998), no. 02, 139–196.
- [57] ———, *A Liouville theorem for vector-valued nonlinear heat equations and applications.*, Mathematische Annalen **316** (2000), no. 1, 103–137.
- [58] ———, *Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation*, Amer. J. Math **125** (2003), no. 2, 1147–1164.
- [59] Miao C., Yuan B., and Zhang B., *Strong solutions to the nonlinear heat equation in homogeneous Besov spaces.*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications **67** (2007), no. 5, 1329–1343.
- [60] Mochizuki K. and Suzuki R., *Critical exponent and critical blow-up for quasilinear parabolic equations*, Israel Journal of Mathematics **98** (1997), no. 1, 141–156.
- [61] Stephen Montgomery-Smith, *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** (2001), no. 10, 3025–3029.
- [62] J. Murray, *Mathematical biology*, Interdisciplinary Applied Mathematics **17** (2002), no. third ed.
- [63] C.V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press (1992), 2233–2247.
- [64] Rault J-F., *The Fujita phenomenon in exterior domains under dynamical boundary conditions.*, Asymptotic Analysis **66** (2010), no. 1, 1–8.
- [65] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* (1983).
- [66] Pinsky R., *The Fujita exponent for semilinear heat equations with quadratically decaying potential or in an exterior domain*, Journal of Differential Equations **246** (2009), no. 6, 2561–2576.
- [67] Planchon. F, *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes*, PhD thesis, Ecole Polytechnique. (1996).
- [68] Rault J-F., *The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions*, Comptes Rendus Mathématique **349** (2011), no. 19, 1059–1061.
- [69] Ruf B. and Terraneo E., *The Cauchy problem for a semilinear heat equation with singular initial data*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl **50** (2002), 295–309.
- [70] Schweyer R, *Type II blow-up for the four dimensional energy critical semi linear heat equation.*, Journal of Functional Analysis **263** (2012), no. 12, 3922–3983.
- [71] ———, *Study of the existence and the stability of the blow-up dynamics for critical parabolic problems.*, Université Paul Sabatier - Toulouse III **Theses** (2013).
- [72] P. Souplet, *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source*, Journal of Differential Equations **153** (1999), no. 2, 374–406.
- [73] Suzuki R., *Critical Blow-Up for Quasilinear Parabolic Equations in Exterior Domains*, Tokyo Journal of Mathematics **12** (1996), no. 2, 397–409.
- [74] Elide Terraneo, *Non-uniqueness for a critical non-linear heat equation*, Proceedings of the American Mathematical Society (2002).
- [75] J. L. Vazquez and E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, Journal of Functional Analysis **173** (2000), no. 1, 103–153.



- [76] Velázquez, *Higher-dimensional blow up for semilinear parabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 9-10, 1567–1596.
- [77] F. Vigneron, *Spatial decay of the velocity field of an incompressible viscous fluid in  $\mathbb{R}^d$* , Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **63** (2005), no. 4, 525–549.
- [78] Wayne C., *Infinite dimensional dynamical systems and the Navier-Stokes equation*, Hamiltonian Dynamical Systems and Applications, 2008, pp. 103-141.
- [79] Fred B Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in  $L^p$* , Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 79-102.
- [80] ———, *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel Journal of Mathematics **38** (1981), no. 1-2, 29–40.
- [81] Yoneda T., *Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near.*, Journal of Functional Analysis **258** (2010), no. 10, 3376–3387.

## CHAPTER 3

---

On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings

---



Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

Journal of Functional Analysis

[www.elsevier.com/locate/jfa](http://www.elsevier.com/locate/jfa)



## On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings <sup>☆</sup>



Lorenzo Brandolese <sup>\*</sup>, Manuel Fernando Cortez

*Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 bd. du 11 novembre, Villeurbanne Cedex F-69622, France*

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 29 November 2013  
Accepted 23 February 2014  
Available online 27 March 2014  
Communicated by C. De Lellis

#### Keywords:

Rod equation  
Compressible rod  
Camassa–Holm  
Shallow water  
Wave-breaking  
Blowup  
Minimization  
Weighted Poincaré inequality

### ABSTRACT

We prove that the only global strong solution of the periodic rod equation vanishing in at least one point  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$  is the identically zero solution. Such conclusion holds provided the physical parameter  $\gamma$  of the model (related to the Finger deformation tensor) is outside some neighborhood of the origin and applies in particular for the Camassa–Holm equation, corresponding to  $\gamma = 1$ . We also establish the analogue of this unique continuation result in the case of non-periodic solutions defined on the whole real line with vanishing boundary conditions at infinity. Our analysis relies on the application of new local-in-space blowup criteria and involves the computation of several best constants in convolution estimates and weighted Poincaré inequalities.

© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

<sup>☆</sup> The authors are supported by the French ANR Project DYFICOLTI (Dynamique des fluides, couches limites, tourbillons et interfaces) 2013–2017. The second author is also supported by the *Secretaría Nacional de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación*.

<sup>\*</sup> Corresponding author.

*E-mail addresses:* [brandolese@math.univ-lyon1.fr](mailto:brandolese@math.univ-lyon1.fr) (L. Brandolese), [cortez@math.univ-lyon1.fr](mailto:cortez@math.univ-lyon1.fr) (M.F. Cortez).

*URL:* <http://math.univ-lyon1.fr/~brandolese> (L. Brandolese).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2014.02.039>

0022-1236/© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

**1. Introduction**

*1.1. Motivations*

This paper is devoted to the study of periodic solutions of the rod equation. A first physical motivation comes from the study of the response of hyper-elastic rings under the action of an initial radial stretch. As the nonlinear dispersive waves propagating inside it could eventually lead to cracks, an important problem is the determination of conditions that must be fulfilled in order to prevent their formation. The main issue of the present paper will be a precise description of crack mechanisms inside such rings.

A second reason for studying periodic solutions is that periodic waves spontaneously arise also in hyper-elastic rods: indeed, it has been recently observed that the solitary waves propagating inside an ideally infinite length rod can suddenly feature a transition into waves with finite period as their amplitude increases, see [16].

Our third motivation comes from the study of shallow water waves inside channels. Indeed, the Camassa–Holm equation (at least in the dispersionless case) is a particular case, corresponding to  $\gamma = 1$ , of the rod equation below: if the motion of small amplitude waves is usually modeled by the KdV equation, larger amplitude waves, and in particular breaking waves, are more accurately described by the Camassa–Holm equation. In fact, both the KdV and the Camassa–Holm equation can be rigorously derived as an asymptotic model from the free surface Euler equations for irrotational inviscid flows, in the so-called shallow water regime  $\mu = h^2/\lambda^2 \ll 1$ , where  $h$  and  $\lambda$  denote respectively the average elevation of the liquid over the bottom and the characteristic wavelength. The Camassa–Holm equation models small, but finite, amplitude waves, *i.e.* waves such that the dimensionless amplitude parameter  $\epsilon = a/h$  satisfies  $\epsilon = O(\sqrt{\mu})$ , where  $a$  is the typical amplitude, whereas the derivation of KdV would require the more stringent scaling  $\epsilon = O(\mu)$ . The Camassa–Holm equation thus better captures the genuinely nonlinear behavior of larger amplitude waves and, contrary to KdV, admits both permanent solutions and solutions that blow up in finite time. For a detailed discussion on these issues, see [7,11,14,23].

Let  $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  be the unit circle. The Cauchy problem for the periodic rod equation is written as follows:

$$\begin{cases} u_t + \gamma uu_x = -\partial_x p * \left( \frac{3-\gamma}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}u_x^2 \right), & t \in (0, T), x \in \mathbb{S}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

The real parameter  $\gamma$  is related to the Finger deformation tensor of the material. Both positive and negative values  $\gamma$  are admissible. We refer to [16] for more details on the physical background and the mathematical derivation of the model.

The function  $p$  in (1.1) is the kernel of the convolution operator  $(1 - \partial_x^2)^{-1}$ . It is the continuous 1-periodic function given by

$$p(x) = \frac{\cosh(x - [x] - 1/2)}{2 \sinh(1/2)}, \quad (1.2)$$

where  $[\cdot]$  denotes the integer part.

The Camassa–Holm case  $\gamma = 1$  is somewhat particular, as in this case (1.1) inherits a bi-Hamiltonian structure and the equation is completely integrable, in the sense of infinite-dimensional Hamiltonian systems: in suitable variables (action-angle), the flow is equivalent to a linear flow at constant speed on the Jacobi variety associated to a (mostly infinite-dimensional) torus, cf. the discussion in [8]. Moreover, the Camassa–Holm equation is a re-expression of geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle, see the discussion in [13,24]. For these reasons, many important results valid for the Camassa–Holm equation do not go through in the general case. For example, in the case of the Camassa–Holm equation on the real line, a striking necessary and sufficient condition for the global existence of strong solution can be given in terms on the initial potential  $y_0 = u_0 - u_{0,xx}$ , see [28]. On the other hand, very little is known on the global existence of strong solutions when  $\gamma \neq 1$ : it can even happen (when  $\gamma = 3$ ) that all nonzero solutions blow up in finite time. Smooth solitary waves that are global strong solutions were constructed at least for some  $\gamma$ , see [16,25]. These are essentially the only known examples of global smooth solutions.

Our working assumption will be that  $u_0$  belongs to the Sobolev space  $H^s(\mathbb{S})$ , for some  $s > 3/2$ . Then, for any  $\gamma \in \mathbb{R}$ , the Cauchy problem for the rod equation is locally well-posed, in the sense that there exist a maximal time  $0 < T^* \leq \infty$  and a unique solution  $u \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ . Moreover, the solution  $u$  depends continuously on the initial data. It is also known that  $u$  admits several invariant integrals, among which the energy integral,

$$E(u) = \int_{\mathbb{S}} (u^2 + u_x^2) dx.$$

In particular, because of the conservation of the Sobolev  $H^1$ -norm, the solution  $u(x, t)$  remains uniformly bounded up to the time  $T^*$ . On the other hand, if  $T^* < \infty$  then  $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{H^s} = \infty$  ( $s > 3/2$ ) and the precise blowup scenario, often named wave breaking mechanism, is the following:

$$T^* < \infty \quad \iff \quad \liminf_{t \rightarrow T^*} \left( \inf_{x \in \mathbb{S}} \gamma u_x(t, x) \right) = -\infty. \quad (1.3)$$

See, e.g. [15].

## 1.2. Quick overview of the main results

We will state our two main theorems in the next section after preparing some notations. Loosely, the first theorem asserts that if  $|\gamma|$  is *not too small*, then there exist a constant  $\beta_\gamma > 0$  such that if

$$u'_0(x_0) > \beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{if } \gamma < 0, \quad \text{or} \quad u'_0(x_0) < -\beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{if } \gamma > 0 \quad (1.4)$$

in at least one point  $x_0 \in \mathbb{S}$ , then the solution arising from  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  must blow up in finite time.

Our second theorem quantifies the above result: it precises what “ $|\gamma|$  not too small” means, addressing also the delicate issue of finding sharp estimates for  $\beta_\gamma$ . For example, in the particular case of the periodic *Camassa–Holm* equation we get that a sufficient condition for the blowup is:

$$\exists x_0 \in \mathbb{S}: \quad u'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \frac{3}{2} - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \frac{3}{2}}} |u_0(x_0)|. \quad (1.5)$$

An analogue but weaker result was recently established in our previous paper [3], where we dealt with non-periodic solutions on the whole real line with vanishing boundary conditions as  $x \rightarrow \infty$ . In the present paper, we take advantage of the specific structure of periodic solutions in order to make improvements on our previous work in two directions.

First of all, the analogue blowup result for the rod equation on  $\mathbb{R}$  could be established in [3] only in the range  $1 \leq \gamma \leq 4$  in the non-periodic case. But the relevant estimates on the circle that we will establish turn out to be much stronger. They allow us to cover blowup results of periodic solutions *e.g.* for arbitrary large  $\gamma$  (or  $\gamma$  negative and arbitrary small). The following corollary of [Theorem 2.1](#) is therefore specific to periodic solutions:

**Corollary 1.1.** *There exists an absolute constant  $\beta_\infty$  (it can be checked numerically that  $\beta_\infty = 0.295\dots$ ) with the following property. If  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ , with  $s > 3/2$ , is such that for some  $x_0 \in \mathbb{S}$ ,  $u'_0(x_0) > \beta_\infty |u_0(x_0)|$ , or otherwise  $u'_0(x_0) < -\beta_\infty |u_0(x_0)|$ , then the solutions (unique, but depending on  $\gamma$ ) of the rod equation (1.1) arising from  $u_0$  blow up in finite time respectively if  $\gamma \ll -1$  or  $\gamma \gg 1$ . In both cases, the maximal existence time is  $T^* = O(\frac{1}{|\gamma|})$  as  $\gamma \rightarrow \infty$ .*

There is a second important difference between in the behavior of periodic and non-periodic solutions. It can happen that two initial data  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  and  $\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$  agree on an arbitrarily large finite interval, and that periodic solution arising from  $u_0$  blows up, whereas the solution arising from  $\tilde{u}_0$  and vanishing at infinity exists globally. As a comparison, the blowup criterion in [3] for solutions in  $H^s(\mathbb{R})$  of the Camassa–Holm equation reads  $\inf_{\mathbb{R}}(u'_0 + |u_0|) < 0$ ; on the other hand, according to (1.5), in the periodic case the condition  $\inf_{\mathbb{S}}(u'_0 + 0.515|u_0|) < 0$  would be enough for the development of a singularity. In general, for  $\gamma \in [1, 4]$ , the coefficient  $\beta_\gamma$  in (1.4) is considerably lower than the corresponding coefficient  $\beta_{\gamma, \mathbb{R}}$  computed in [3] for the blowup criterion of non-periodic solutions.

The most important feature of our blowup criteria (1.4)–(1.5) is that they are *local-in-space*. This means that these criteria involve a condition *only on a small neighborhood*

of a single point of the datum. Their validity is somewhat surprising, as Eq. (1.1) is non-local. A huge number of previous papers addressed the blowup issue of solutions to Eq. (1.1) (see, e.g. [6,7,9–11,18,21,22,26,31–35]; the older references only dealt with the Camassa–Holm equation). But the corresponding blowup criteria systematically involved the computation of some global quantities of  $u_0$ : typically, conditions of the form  $u'_0(x_0) < -c_\gamma \|u_0\|_{H^1(\mathbb{S}^1)}$  or some other integral conditions on  $u_0$ , or otherwise antisymmetry conditions, etc.

The main idea (inspired to us combining those of [3,9,27]) will be to study the evolution of  $u + \beta u_x$  and  $u - \beta u_x$  along the trajectories of the flow map of  $\gamma u$ , for an appropriate parameter  $\beta = \beta(\gamma)$  to be determined in order to optimize the blowup result. The main technical issue of the present paper will be the study of a two-parameters family of minimization problems. Such minimization problems arise when computing the best constants in the relevant convolution estimates. Calculus of variation tools have been already successfully used for the study of blowup criteria of the rod equation, see, e.g., [31–35]. The difference with respect to these papers is that our approach requires the minimization of non-coercive functionals. Once such minima are computed, the proof of the blowup can follow the steps of [3].

We finish this introduction by mentioning a second simple consequence of our main Theorem 2.1, that seems to be of independent interest. Its result applies in particular to the case  $\gamma = 1$ . It is a new result (at best of our knowledge) also for the Camassa–Holm equation.

**Corollary 1.2.** *Let  $u \in C([0, \infty[, H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, \infty[, H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , be a global solution of the rod equation (1.1) with  $\gamma \leq \gamma_1^-$  or  $\gamma \geq \gamma_1^+$  (where  $\gamma_1^- = -1.036\dots$  and  $\gamma_1^+ = 0.269\dots$ ). If  $u$  vanishes at some point  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}$ , then  $u$  must be the trivial solution:  $u(x, t) \equiv 0$  for all  $t \geq 0$  and  $x \in \mathbb{S}$ .*

Corollary 1.2 improves an earlier result by A. Constantin and J. Escher [12], asserting that the trivial solution is the only global solution of the periodic Camassa–Holm equation such that for all  $t \geq 0$ ,  $\exists x_t \in \mathbb{S}$  such that  $u(t, x_t) = 0$ . Basically, we manage to replace their condition “ $\forall t\dots$ ” by the much weaker one “ $\exists t\dots$ ”. More importantly, unlike [12], our approach will make use of only few properties of the equation, and is more suitable for generalizations.

It might be surprising that our results *a priori* excludes a small neighborhood of the origin for the parameter  $\gamma$ . In fact, such restriction might be purely technical. However, one should observe that  $\gamma = 0$  must be excluded. The reason is that for  $\gamma = 0$  all solutions arising from  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  are global in time. Indeed, the blowup scenario (1.3) is never fulfilled. It is worth noticing that for  $\gamma = 0$  the rod equation reduces to the BBM equation introduced by Benjamin, Bona and Mahony in [1] as a model for surface wave in channels.

We will establish a result similar to that of Corollary 1.2 for non-periodic solutions vanishing for  $x \rightarrow \infty$  (see Corollary 7.1 at the end of the paper for the precise statement).

In this case, we will need that the global solution  $u$  is such that  $u(t_0, x_1) = u(t_0, x_2) = 0$  in at least two different points, or otherwise that  $u(t_0, \cdot)$  decays sufficiently fast as  $x \rightarrow \infty$  to conclude that  $u(t, x) \equiv 0$  for all  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .

### 1.3. Organization of the paper

In Section 2 we state our main results, [Theorem 2.1](#) and [Theorem 2.2](#). The first theorem is proved in Section 3. In Section 4 we study a minimization problem that will play an important role for the proof of [Theorem 2.2](#), given in Section 5. [Corollary 1.1](#) will immediately follow from assertion (ii) of this theorem. We will study in more detail the Camassa–Holm equation in Section 6. [Corollary 1.2](#) is established in Section 7 where we also provide some new results for non-periodic solutions. An appendix showing the agreement between our theorems and some numerical results concludes the paper.

## 2. The main results

We start preparing some notations. For any real constant  $\alpha$  and  $\beta$ , let  $I(\alpha, \beta) \geq -\infty$  defined by

$$I(\alpha, \beta) = \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta p_x)(\alpha u^2 + u_x^2) \, dx : u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\}. \quad (2.1)$$

[Proposition 3.3](#) below will characterize the set of parameters  $(\alpha, \beta)$  for which the functional appearing in (2.1) is bounded from below as well as the subset for which the infimum is achieved.

We also introduce, for  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , the quantity  $\beta_\gamma \in [0, +\infty]$  defined by

$$\beta_\gamma = \inf \{ \beta \in \mathbb{R}^+ : \beta^2 + I(\frac{3-\gamma}{\gamma}, \beta) - \frac{3-\gamma}{\gamma} \geq 0 \}, \quad (2.2)$$

with the usual convention that  $\beta_\gamma = +\infty$  if the infimum is taken on the empty set.

Our main result is the following blowup theorem:

**Theorem 2.1.** *Let  $\gamma \in \mathbb{R}^*$  be such that  $\beta_\gamma < +\infty$ . Let  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  with  $s > 3/2$  and assume that there exists  $x_0 \in \mathbb{S}$ , such that*

$$u'_0(x_0) > \beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{if } \gamma < 0, \quad \text{or} \quad u'_0(x_0) < -\beta_\gamma |u_0(x_0)| \quad \text{if } \gamma > 0. \quad (2.3)$$

*Then the corresponding solution  $u$  of Eq. (1.1) in  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$  arising from  $u_0$  blows up in finite time. Moreover, the maximal time  $T^*$  is estimated by*

$$T^* \leq \frac{2}{\gamma \sqrt{u'_0(x_0)^2 - \beta_\gamma^2 u_0(x_0)^2}} \quad (2.4)$$



and, for some  $x(t) \in \mathbb{S}$ , the blowup rate is

$$u_x(t, x(t)) \sim -\frac{2}{\gamma(T^* - t)} \quad \text{as } t \rightarrow T^*. \tag{2.5}$$

**Theorem 2.1** is meaningful only if  $\gamma$  is such that  $\beta_\gamma < +\infty$ . The validity of such condition is *a priori* not clear, as it might happen that the set in Eq. (2.2) is empty. An important part of the present paper will be devoted to the technical issue of discussing the validity of the condition  $\beta_\gamma < +\infty$  and next estimating  $\beta_\gamma$ . This will be done by establishing some sharp estimates on  $I(\alpha, \beta)$ .

In order to state our next theorem, let us introduce the complex number

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(3 - \gamma)/\gamma}, \quad \gamma \neq 0,$$

where  $\sqrt{1 + 4(3 - \gamma)/\gamma}$  denotes any of the two complex square roots. We also consider the four constants (that will be constructed in (5.8) below):

$$\begin{aligned} \gamma_1^- &= -1.036\dots, & \gamma_1^+ &= 0.269\dots, \\ \gamma_2^- &= -1.508\dots, & \gamma_2^+ &= 0.575\dots \end{aligned}$$

**Theorem 2.2.**

- (i) For any  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, +\infty)$ , we have  $\beta_\gamma < +\infty$ , so that *Theorem 2.1* applies in such range. More precisely, if  $\gamma \in (-\infty, \gamma_2^-] \cup [\gamma_2^+, \infty)$ , then

$$\beta_\gamma \leq \sqrt{\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{2} - \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu}}. \tag{2.6}$$

If otherwise  $\gamma \in [\gamma_2^-, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, \gamma_2^+]$ , then  $\beta_\gamma$  can be estimated as in inequality (5.13) below (in (5.13),  $P_\nu$  denotes Legendre function of the first kind of degree  $\nu$ ).

- (ii) The limit  $\beta_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \beta_\gamma$  does exist and

$$\beta_\infty \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1 - \cosh \frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2})}{2 \sinh \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}} = 0.296\dots \tag{2.7}$$

It is worth observing that we have  $\beta_\gamma = 0$  if and only if  $\gamma = 3$ . This can be checked directly from the definitions (2.1)–(2.2). Accordingly, the right-hand side in (2.6) vanishes for  $\gamma = 3$ . In particular, we recover the known fact (see [15]) that for  $\gamma = 3$  any nonzero initial datum  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  (with  $s > 3/2$ ) gives rise to a solution that blows up in finite time. Moreover, the maximal time  $T^*$  satisfies

$$T^* \leq \frac{2}{3}\sqrt{-\inf_{x \in \mathbb{S}} u_0'(x)}.$$

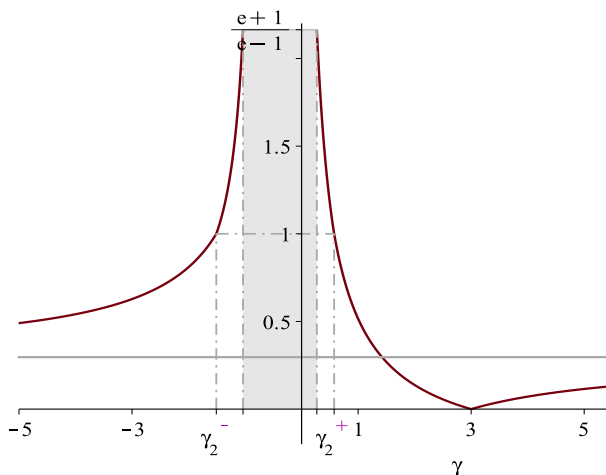


Fig. 1. The upper-bound estimate of  $\beta_\gamma$  given by Theorem 2.2. The estimate is valid outside the interval  $[\gamma_1^-, \gamma_1^+]$  (gray region).

The upper bounds (2.6)–(2.7) are not optimal but, strikingly, they are *almost sharp*. Indeed we can compute the numerical approximation of  $\beta_\gamma$  with arbitrary high precision. We find that the error between the above bounds and the numerical value is only of order  $10^{-3}$ . For example, we find  $\beta_\infty = 0.295\dots$  that is indeed very close to the bound (2.7). Moreover, in the Camassa–Holm case, we find numerically that  $\beta_1 = 0.513\dots$ . This is in good agreement with estimate (2.6), that for  $\gamma = 1$  provided us with the bound  $\beta_1 \leq 0.515\dots$

We will devote the appendix to a more detailed discussion of the numerical results. Such analysis will also show that the effective range of applicability of Theorem 2.1 is slightly larger than the range  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, \infty)$  predicted by Theorem 2.2. The reader should compare Fig. 1 with Fig. 9 at the end of the paper: the former plot is obtained analytically and the latter numerically.

This paper does not address the problem of the continuation of the solution after the blowup as this issue is extensively studied in the literature. See, e.g. [4,5,20,29].

### 3. First properties of $I(\alpha, \beta)$ and proof of Theorem 2.1

For any real  $\beta$ , let us consider the 1-periodic function

$$\omega(x) = p(x) + \beta p'(x), \tag{3.1}$$

where  $p$  is the kernel introduced in (1.2) and  $p'$  denotes the distributional derivative on  $\mathbb{R}$ , that agrees in this case with the classical a.e. pointwise derivative on  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

We would like to make use of  $\omega$  as a weight function. The non-negativity condition  $\omega \geq 0$  is equivalent to the inequality  $\cosh(1/2) \geq \pm\beta \sinh(1/2)$ , i.e., to the condition

$$-\frac{e+1}{e-1} \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}. \tag{3.2}$$

Throughout this section, we will work under the above condition on  $\beta$ .

Let us introduce the weighted Sobolev space

$$E_\beta = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(0, 1): \|u\|_{E_\beta}^2 \equiv \int_0^1 \omega(x)(u^2 + u_x^2)(x) \, dx < \infty \right\}, \tag{3.3}$$

where the derivative is understood in the distributional sense. Notice that  $E_\beta$  agrees with the classical Sobolev space  $H^1(0, 1)$  when  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ , as in this case  $\omega$  is bounded and bounded away from 0, and the two norms  $\|\cdot\|_{E_\beta}$  and  $\|\cdot\|_{H^1}$  are equivalent: in particular, in this case if  $u \in E_\beta$  then  $u = \tilde{u}$  a.e., where  $\tilde{u} \in C([0, 1])$ . The situation is different for  $\beta = \pm \frac{e+1}{e-1}$  as  $E_\beta$  is strictly larger than  $H^1(0, 1)$  in this case. Indeed, we have

$$\omega(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(x), \quad x \in (0, 1) \quad (\text{if } \beta = \frac{e+1}{e-1}). \tag{3.4}$$

An element  $u$  of  $E_{(e+1)/(e-1)}$ , after modification on a set of measure zero, agrees with a function  $\tilde{u}$  that is continuous on  $(0, 1]$ , but may be unbounded for  $x \rightarrow 0^+$  (for instance,  $|\log(x/2)|^{1/3} \in E_{(e+1)/(e-1)}$ ). In the same way,

$$\omega(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(1-x), \quad x \in (0, 1) \quad (\text{if } \beta = -\frac{e+1}{e-1}). \tag{3.5}$$

After modification on a set of measure zero, the elements of  $E_{-(e+1)/(e-1)}$  are continuous on  $[0, 1)$ , but may be unbounded for  $x \rightarrow 1^-$ .

Let us consider the closed subspace  $E_{\beta,0}$  of  $E_\beta$  defined as the closure of  $C_c^\infty(0, 1)$  in  $E_\beta$ . Notice that, with slightly abusive notation, consisting in identifying  $u$  with its continuous representative  $\tilde{u}$  we have:

$$E_{\beta,0} = H_0^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1): u(0) = u(1) = 0\}, \quad \text{if } |\beta| < \frac{e+1}{e-1}. \tag{3.6}$$

On the other hand, in the limit cases for  $\beta$  we have the following:

**Lemma 3.1.**

- If  $u \in E_{(e+1)/(e-1),0}$ , then  $u(x) = O(\sqrt{|\log x|})$  as  $x \rightarrow 0^+$  and  $u(1) = 0$ .
- If  $u \in E_{-(e+1)/(e-1),0}$ , then  $u(x) = O(\sqrt{|\log(1-x)|})$  as  $x \rightarrow 1^-$  and  $u(0) = 0$ .

**Proof.** We consider only the case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$  as in the other case the proof is similar. The condition  $u(1) = 0$  follows from the fact that  $\omega$  is bounded and bounded away from the origin in a left neighborhood of 1. Moreover.

$$|u(x)| = \left| \int_x^1 u'(y) dy \right| \leq \left( \int_0^1 \omega(y) u'(y)^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_x^1 \frac{1}{\omega(y)} dy \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{E_\beta} \sqrt{|\log x|}. \quad \square$$

The elements of  $E_{\beta,0}$  satisfy to the weighted Poincaré inequality below:

**Lemma 3.2.** For all  $-\frac{e+1}{e-1} \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$ , there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\forall v \in E_{\beta,0}: \int_0^1 \omega(x) v(x)^2 dx \leq C \int_0^1 \omega(x) v_x(x)^2 dx. \quad (3.7)$$

**Proof.** The validity of such inequality is obvious for  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ . Indeed, in this case there exist two constants  $c_1$  and  $c_2$  such that on the interval  $(0, 1)$  we have  $0 < c_1 \leq \omega(x) \leq c_2$  and the validity of (3.7) is reduced to that of the classical Poincaré inequality without weight.

In the limit case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$ , we can observe that, from (3.4), the only zero of the function  $\omega(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(x)$  in the closure of  $(0, 1)$  is of order one. Then the weight  $\omega(x)$  satisfies the necessary and sufficient condition for the weighted Poincaré inequality to hold, see [30]. For reader's convenience we prove directly inequality (3.7) exhibiting an explicit constant. Recall that  $v(x) = O(|\log(x)|^{1/2})$  as  $x \rightarrow 0^+$ . In particular, for all  $v \in E_{(e+1)/(e-1),0}$ , we have  $[\omega(x)v(x)^2]_{0^+}^{1^-} = 0$ . Then integrating by parts and next using the Cauchy–Schwarz inequality we obtain, for  $v \in E_{(e+1)/(e-1),0}$ :

$$\frac{1}{4} \left( \int_0^1 \cosh v^2 \right)^2 = \left( \int_0^1 \sinh v v_x \right)^2 \leq \left( \int_0^1 \sinh v^2 \right) \left( \int_0^1 \sinh v_x^2 \right).$$

Next observe that

$$\forall x \in (0, 1), \quad \cosh(x) \geq \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} \sinh(x).$$

Combining these two estimates, we obtain

$$\int_0^1 \sinh(x) v(x)^2 dx \leq \frac{4(e^2 - 1)^2}{(e^2 + 1)^2} \int_0^1 \sinh(x) v_x(x)^2 dx. \quad (3.8)$$

Then (3.7) holds, e.g., with  $C = \frac{4(e^2-1)^2}{(e^2+1)^2}$ . In the other limit case  $\beta = -\frac{e+1}{e-1}$ ,  $\omega(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(1-x)$ . Therefore, we can reduce to the previous case with a change of variables.  $\square$

The constant in (3.8) is far from being optimal. In fact, we will find the best constant in Remark 4.1, as a byproduct of the analysis performed Section 4.

This being observed, let us go back to our minimization problem

$$I(\alpha, \beta) = \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta p') (\alpha u^2 + u_x^2) \, dx : u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\}. \quad (3.9)$$

**Proposition 3.3.** *We have*

$$I(\alpha, \beta) > -\infty \iff \begin{cases} -\frac{e+1}{e-1} \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}, \\ \alpha > -1/C(\beta), \end{cases}$$

where  $C(\beta) > 0$  is the best constant in the weighted Poincaré inequality (3.7). Moreover, if  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ , then  $I(\alpha, \beta)$  is in fact a minimum and there is only one minimizer  $u \in H^1(0, 1)$  with  $u(0) = u(1) = 1$ .

**Proof.** Putting  $u = v + 1$  and observing that  $\int_0^1 \omega(x) \, dx = 1$ , we see that

$$I(\alpha, \beta) = \alpha + \inf \{ J(v) : v \in H_0^1(0, 1) \}, \quad (3.10)$$

where

$$J(v) = \int_0^1 \omega(x) (\alpha v^2 + v_x^2 + 2\alpha v) \, dx. \quad (3.11)$$

Assume that  $I(\alpha, \beta) > -\infty$ . Then  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ , otherwise we would get a contradiction by taking a sequence of the form  $\chi(x) \cos(nx)$  with  $\chi$  smooth and such that  $\text{supp}(\chi) \subset \text{supp}(\omega^-) \cap (0, 1)$ , where  $\omega^-$  denotes the negative part of  $\omega$ . To prove the second inequality  $\alpha > -1/C(\beta)$ , we only have to treat the case  $\alpha < 0$ . Applying the inequality

$$\int_0^1 \omega (\alpha n^2 v^2 + n^2 v_x^2 + 2\alpha n v) \geq I(\alpha, \beta) - \alpha$$

valid for all  $v \in H_0^1(0, 1)$  and all  $n \in \mathbb{N}$  and letting  $n \rightarrow \infty$ , we get

$$\int_0^1 \omega v^2 \leq -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 \omega v_x^2.$$

Then we get  $\alpha \geq -1/C(\beta)$ . But in fact the inequality is strict, as otherwise we could take a sequence  $(v_n)$  such that  $(-\alpha \int_0^1 \omega v_n^2) / (\int \omega v_{x,n}^2) \rightarrow 1$  and  $\int \alpha \omega v_n \rightarrow -\infty$  to get a contradiction.

Conversely, assume that  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ . By the weighted Poincaré inequality (3.7), the map  $v \mapsto \int_0^1 \omega v_x^2$  defines on  $E_{\beta,0}$  an equivalent norm. As  $\alpha < -1/C(\beta)$ , the symmetric bilinear form  $B(v_1, v_2) = \int_0^1 \omega(\alpha v_1 v_2 + v_1' v_2')$  is coercive on the Hilbert space  $E_{\beta,0}$ . Applying the Lax–Milgram theorem yields the existence and the uniqueness of a minimizer  $\bar{v} \in E_{\beta,0}$  for the functional  $J$ . But  $H_0^1(0, 1) \subset E_{\beta,0}$ , so in particular, we get  $I(\alpha, \beta) > -\infty$ . Moreover, if  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ , then recalling  $E_{\beta,0} = H_0^1$  we see that  $I(\alpha, \beta)$  is in fact a minimum, achieved at  $\bar{u} = 1 + \bar{v} \in H^1$ .  $\square$

The next proposition provides some useful information on  $I(\alpha, \beta)$ .

**Proposition 3.4.** *The function  $(\alpha, \beta) \mapsto I(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , defined for all  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , is concave with respect to each one of its variables and is even with respect to the variable  $\beta$ . Moreover,*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall |\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}, \quad -\infty \leq I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) \leq I(\alpha, \beta) \leq I(\alpha, 0) \leq \alpha. \quad (3.12)$$

**Proof.** The concavity property follows from the fact that  $I(\alpha, \beta)$  is defined as an infimum of affine functions of the variables  $\alpha$  and  $\beta$ . To prove that  $I(\alpha, \beta) = I(\alpha, -\beta)$ , we can observe that

$$(p + \beta p')(x) = (p - \beta p')(1 - x)$$

and conclude making the change of variable  $y = 1 - x$  inside the integral in (3.9).

To prove the last inequality in (3.12), consider the constant function  $u \equiv 1$  and observe that  $I(\alpha, 0) \leq \alpha \int_0^1 (p + \beta p')(x) dx = \alpha$ . The other inequalities follow from the concavity and parity properties of the map  $\beta \mapsto I(\alpha, \beta)$ . The result of Proposition 3.3 is also needed for the second inequality.  $\square$

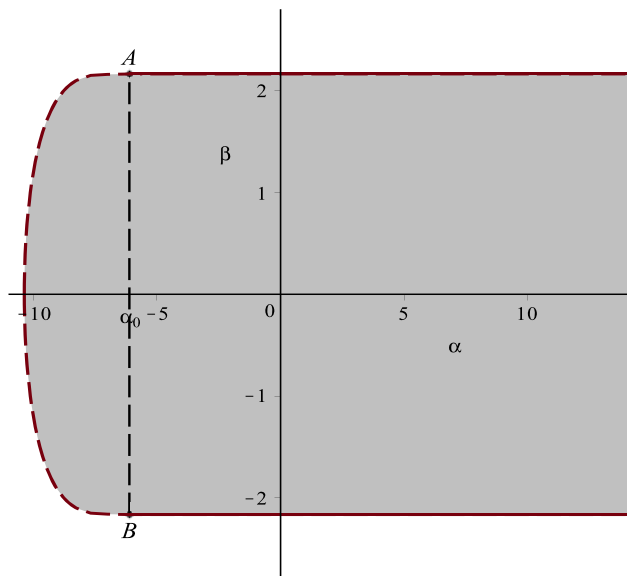
Next lemma motivates the introduction of the quantity  $I(\alpha, \beta)$  in relation with the rod equation.

**Lemma 3.5.** *For any  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  and all  $u \in H^1(\mathbb{S})$  the following convolution estimate holds:*

$$\forall x \in \mathbb{S}, \quad (p + \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2)(x) \geq I(\alpha, \beta) u(x)^2 \quad (3.13)$$

and  $I(\alpha, \beta)$  is the best possible constant.

**Remark 3.6.** This lemma is interesting when  $I(\alpha, \beta) > -\infty$ , but its statement is true also when  $I(\alpha, \beta) = -\infty$ . (See Fig. 2.) In this case the sentence “ $-\infty$  is the best possible constant” should be understood as a negative result: the convolution estimate (3.13) breaks down whenever  $(\alpha, \beta)$  does not fulfill the conditions of Proposition 3.3.



**Fig. 2.** The set of points  $(\alpha, \beta)$  such that  $I(\alpha, \beta) > -\infty$  (gray region). The infimum is achieved in  $H_0^1$  on its interior and in the larger space  $E_{\beta,0}$  on the upper and lower boundaries  $\beta = \pm \frac{e+1}{e-1}$ . The abscissa  $\alpha_0 = -1/C(\mp \frac{e+1}{e-1})$  of the vertical dashed segment is the largest zero of a suitable Legendre function (see Section 4.2).

**Proof.** Let  $\delta = \delta(\alpha, \beta)$  be some (possibly negative) constant. Because of the invariance under translations, we have that

$$(p + \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2) \geq \delta u^2 \tag{3.14}$$

holds true for all  $u \in H^1(\mathbb{S})$  if and only if

$$(p + \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2)(1) \geq \delta u^2(1)$$

holds true for all  $u \in H^1(\mathbb{S})$ . But on the interval  $(0, 1)$ ,  $(p + \beta p')(1 - x) = (p - \beta p')(x)$ . Hence,

$$(p + \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2)(1) = \int_0^1 (p - \beta p')(x) (\alpha u^2 + u_x^2)(x) dx.$$

Normalizing to obtain  $u(1) = 1$  (and hence  $u(0) = 1$  by the periodicity) we get that the best constant  $\delta$  in inequality (3.14) satisfies  $\delta = I(\alpha, -\beta) = I(\alpha, \beta)$ .  $\square$

**Proof of Theorem 2.1.** Let  $s > 3/2$ . By the result of [15] we know that there exists a unique solution  $u$  of the rod equation (1.1), defined in some nontrivial interval  $[0, T)$ , and such that  $u \in C([0, T), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ . Moreover, the map  $u_0 \mapsto u$

is continuous from  $H^s(\mathbb{S})$  to  $C([0, T], H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{S}))$ . Owing to this well-posedness result, we can reduce to the case  $s \geq 3$ . Indeed, if  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  with  $3/2 < s < 3$ , we can approximate  $u_0$  in the  $H^s(\mathbb{S})$ -norm using a sequence of data  $(u_0)_n$  belonging to  $H^3(\mathbb{S})$  and satisfying condition (2.3). The relevant estimates, including that of  $T^*$ , will pass to the limit as  $n \rightarrow \infty$ .

If, by contradiction,  $T^* = +\infty$ , then  $T > 0$  can be taken arbitrarily large. As in [9,27], the starting point is the analysis of the flow map  $q(t, x)$ , defined by

$$\begin{cases} q_t(t, x) = \gamma u(t, q(t, x)), & t \in (0, T), x \in \mathbb{R}, \\ q(0, x) = x. \end{cases} \tag{3.15}$$

For any  $x \in \mathbb{S}$ , the map  $t \mapsto q(t, x)$  is well defined and continuously differentiable in the whole time interval  $[0, T)$ . It is worth pointing out that for  $\gamma = 1$ , (3.15) is the equation defining the geodesic curve of diffeomorphisms, issuing from the identity in the direction of  $u_0$ , cf. the discussion in [13,24]. However, no such geometric interpretation is available for  $\gamma \neq 1$ .

From the rod equation

$$u_t + \gamma u u_x = -\partial_x p * \left( \frac{3-\gamma}{2} u^2 + \frac{\gamma}{2} u_x^2 \right), \tag{3.16}$$

differentiating with respect to the  $x$  variable and applying the identity  $\partial_x^2 p * f = p * f - f$ , we get

$$\begin{aligned} u_{tx} + \gamma u u_{xx} &= \frac{3-\gamma}{2} u^2 - \frac{\gamma}{2} u_x^2 - p * \left( \frac{3-\gamma}{2} u^2 + \frac{\gamma}{2} u_x^2 \right) \\ &= \frac{3}{2(\alpha+1)} [\alpha u^2 - u_x^2 - p * (\alpha u^2 + u_x^2)]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Here we set

$$\alpha = \frac{3-\gamma}{\gamma}. \tag{3.18}$$

Let us introduce the two  $C^1$ -functions of the time variable, depending on  $\beta$ ,

$$f(t) = (-u_x + \beta u)(t, q(t, x_0)) \quad \text{and} \quad g(t) = -(u_x + \beta u)(t, q(t, x_0)).$$

Computing the time derivative using the definition of the flow  $q$ , next using Eqs. (3.16)–(3.17), we get

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= [(-u_{tx} - \gamma u u_{xx}) + \beta(u_t + \gamma u u_x)](t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{3}{2(\alpha+1)} [-\alpha u^2 + u_x^2 + (p - \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2)](t, q(t, x_0)), \end{aligned} \tag{3.19}$$



and

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{3}{2(\alpha + 1)} [-\alpha u^2 + u_x^2 + (p + \beta p') * (\alpha u^2 + u_x^2)](t, q(t, x_0)). \tag{3.20}$$

Let us first consider the case  $\gamma > 0$ . Then  $\alpha > -1$ . From the definition of  $\beta_\gamma$  in (2.2) and the condition  $\beta_\gamma < \infty$ , we deduce that there exist  $\beta \geq 0$  such that

$$\beta^2 \geq \alpha - I(\alpha, \beta). \tag{3.21}$$

Applying the convolution estimate (3.13) and recalling  $I(\alpha, -\beta) = I(\alpha, \beta)$ , we get, for all  $\beta \geq 0$  satisfying (3.21),

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &\geq \frac{3}{2(\alpha + 1)} [u_x^2 - (\alpha - I(\alpha, -\beta))u^2](t, q(t, x_0)) \\ &\geq \frac{3}{2(\alpha + 1)} [u_x^2 - \beta^2 u^2](t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{3}{2(\alpha + 1)} f(t)g(t). \end{aligned}$$

In the same way,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &\geq \frac{3}{2(\alpha + 1)} [u_x^2 - (\alpha - I(\alpha, \beta))u^2](t, q(t, x_0)) \\ &\geq \frac{3}{2(\alpha + 1)} [u_x^2 - \beta^2 u^2](t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{3}{2(\alpha + 1)} f(t)g(t). \end{aligned}$$

The assumption  $u'_0(x_0) < -\beta_\gamma |u(x_0)|$  guarantees that we may choose  $\beta$  satisfying (3.21), with  $\beta - \beta_\gamma > 0$  is small enough in a such way that  $u'_0(x_0) < -\beta |u_0(x_0)|$  For such a choice of  $\beta$  we have

$$f(0) > 0 \quad \text{and} \quad g(0) > 0.$$

The blowup of  $u$  will rely on the following basic property:

**Lemma 3.7.** *Let  $0 < T^* \leq \infty$  and  $f, g \in C^1([0, T^*), \mathbb{R})$  be such that, for some constant  $c > 0$  and all  $t \in [0, T^*)$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &\geq cf(t)g(t), \\ \frac{dg}{dt}(t) &\geq cf(t)g(t). \end{aligned} \tag{3.22}$$

If  $f(0) > 0$  and  $g(0) > 0$ , then

$$T^* \leq \frac{1}{c\sqrt{f(0)g(0)}} < \infty.$$

**Proof.** Let

$$\tau = \inf \{t \in [0, T^*): f(t) = 0 \text{ or } g(t) = 0\}.$$

The positivity of  $f(0)$  and  $g(0)$  implies that  $\tau > 0$ . Observe that we cannot have  $\tau < T^*$ . Indeed, otherwise (exchanging if necessary  $f$  with  $g$ ) we would get  $f(\tau) = 0$  and  $f, g \geq 0$  on  $[0, \tau]$ . The differential inequality on  $f$  implies that  $f$  is monotone increasing on  $[0, \tau]$  leading to the contradiction  $0 = f(\tau) \geq f(0) > 0$ . Hence,  $f$  and  $g$  are both monotone strictly increasing and positive in the whole interval  $[0, T^*)$ .

Now take  $h(t) = \sqrt{f(t)g(t)}$ . Using again assumption (3.22), next the arithmetic–geometric mean inequality we find, on  $[0, T^*)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &\geq \frac{c}{2\sqrt{fg}}fg(f+g), \\ &\geq cfg = ch^2, \end{aligned}$$

with  $h(0) = \sqrt{f(0)g(0)}$ . Substituting  $v = 1/f$ , we find that  $T^* \leq \frac{1}{c\sqrt{h(0)}}$ .  $\square$

Estimate (2.4) immediately follows in the case  $\gamma > 0$ . When  $\gamma < 0$  the proof is the same, excepted for the fact that, as  $\alpha < -1$ , the inequalities must be reversed.

Let us establish the blowup rate (2.5). More precisely, we prove that

$$\lim_{t \rightarrow (T^*)^-} (T^* - t)u_x(t, q(t, x_0)) = -\frac{2}{\gamma}.$$

We will obtain such blowup rate adapting the arguments of [9]. Namely, by Lemma 3.7 and the fact that, for some constant  $c > 0$ , we have the estimate  $\|u(t)\|_\infty \leq c\|u_0\|_{H^1}$ , we see that  $m(t) \equiv -\gamma u_x(t, q(t, x_0)) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow T^*$ . But  $m$  satisfies the equation

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt}(t) &= \frac{3}{2(\alpha+1)}(-\alpha u^2 + u_x^2 - p * (\alpha u^2 + u_x^2))(t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{3m(t)^2}{2(\alpha+1)} + R(t), \end{aligned}$$

where  $R(t) = \frac{3}{2(\alpha+1)}(-\alpha u^2 - p * (\alpha u^2 + u_x^2))(t, q(t, x_0))$ . Using again  $\|u(t)\|_\infty \leq c\|u_0\|_{H^1}$  and observing that  $\|p * (\alpha u^2 + u_x^2)\|_\infty \leq c(\alpha)\|u_0\|_{H^1}^2$  by Young inequality, we get that  $|R(t)|$  is uniformly bounded on  $(0, T^*)$  by a constant depending only on  $\alpha$  and  $\|u_0\|_{H^1}$ .

Let  $\epsilon > 0$ . Taking  $0 < t_0 < T^*$  such that  $t_0$  is close enough to  $T^*$  in a such way that  $-\epsilon \leq R(t)/m(t)^2 \leq \epsilon$  on  $(t_0, T^*)$ , we deduce that, on such interval,

$$\frac{3}{2(\alpha + 1)} - \epsilon \leq \frac{d}{dt} \left( \frac{-1}{m(t)} \right) \leq \frac{3}{2(\alpha + 1)} + \epsilon.$$

Now integrating these inequalities on  $(t, T^*)$  we get the blowup rate (2.5) with  $x(t) = q(t, x_0)$ .  $\square$

**4. The minimization problem in the limit case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$  and in the case  $\beta = 1$**

*4.1. The limit case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$*

We will start considering the limit case

$$\beta = \frac{e + 1}{e - 1}.$$

In this case, according to formula (3.1), the weight function becomes

$$\omega(x) = \frac{2e}{(e - 1)^2} \sinh(x), \quad x \in (0, 1). \tag{4.1}$$

Because of Proposition 3.4, we are led to assume also

$$\alpha > -1/C\left(\frac{e+1}{e-1}\right). \tag{4.2}$$

We start observing that

$$I\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right) \geq \tilde{I}\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right),$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{I}\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right) &\equiv \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta p') (\alpha u^2 + u_x^2) dx : u \in E_{(e+1)/(e-1)} \text{ and } u(1) = 1 \right\} \\ &= \alpha + \inf \{ J(v) : v \in E_{(e+1)/(e-1),0} \} \end{aligned}$$

and the functional  $J$  is given by (3.11). Indeed, the inequality  $I\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right) \geq \tilde{I}\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right)$  follows from the inclusion  $H_0^1(0, 1) \subset E_{(e+1)/(e-1),0}$ .

The unique minimizer  $v \in E_{(e+1)/(e-1),0}$  of the functional  $J$  (whose existence was obtained in the proof of Proposition 3.3) satisfies the Euler–Lagrange equation complemented with the right-boundary condition

$$\begin{cases} (\omega v_x)_x - \alpha \omega v = \alpha \omega & \text{in } x \in (0, 1), \\ v(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Problem (4.3) is undetermined, but we will see that among its solutions only one belongs to  $E_{(e+1)/(e-1),0}$ .

4.2. The case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$  and  $\alpha > -1/C(\frac{e+1}{e-1})$

The Euler–Lagrange equation (4.3) reads

$$\sinh(x)v_{xx}(x) + \cosh(x)v_x(x) - \alpha \sinh v(x) = \alpha \sinh(x), \quad \text{for } x \in (0, 1). \tag{4.4}$$

To find the general solution, consider the change of unknown  $v(x) = f(y(x))$ , with  $y = \cosh(x)$ . Then Eq. (4.4) can be rewritten in the  $y$  variable as

$$(1 - y^2)f_{yy} - 2yf_y(y) + \alpha f(y) = -\alpha, \quad \text{with } y \in (1, \cosh 1). \tag{4.5}$$

The constant function  $y \mapsto -1$  is a particular solution. Substituting  $\alpha = \nu(\nu + 1)$ , we recognize the usual form of a non-homogeneous second order Legendre ODE. We thus set

$$\nu(\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha} \in \{z \in \mathbb{C}: \Im(z) \geq 0\}, \tag{4.6}$$

where the complex square root is taken in  $\{z \in \mathbb{C}: \Im(z) \geq 0\}$ . The general solution of Eq. (4.5) is thus

$$f_{\lambda,\mu} = -1 + \lambda P_{\nu(\alpha)}(y) + \mu Q_{\nu(\alpha)}(y), \quad y \in (1, \cosh 1), \tag{4.7}$$

where  $P_\nu$  and  $Q_\nu$  are the two associate Legendre functions respectively of the first and of the second kind, of degree  $\nu$ . We recall that  $Q_\nu$  has a logarithmic singularity at  $1^+$ , whereas  $P_\nu$  is bounded as  $y \rightarrow 1^+$ . Moreover,  $P_\nu$  is a polynomial when  $\nu$  is an integer. Notice that the function  $P_{\nu(\alpha)}(\cosh)$  does belong to  $E_{(e+1)/(e-1)}$ , but  $Q_{\nu(\alpha)}(\cosh)$  does not, because  $Q_{\nu(\alpha)}(\cosh x) \neq O(\sqrt{|\log(x)|})$  as  $x \rightarrow 0^+$ .

Hence, the only solution  $\bar{v} = v_{\lambda,\mu}$  of (4.4), such that  $\bar{v} \in E_{(e+1)/(e-1),0}$  is obtained taking  $\mu = 0$  and  $\lambda = 1/P_{\nu(\alpha)}(1)$ . Thus,

$$\bar{v}(x) = -1 + \frac{P_{\nu(\alpha)}(\cosh x)}{P_{\nu(\alpha)}(\cosh 1)}, \quad x \in (0, 1). \tag{4.8}$$

Expression (4.8) makes sense provided the denominator is nonzero. Therefore, we can recast condition (4.2) on  $\alpha$ , guaranteeing that  $I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) > -\infty$ , in the following equivalent form:

$$\alpha > \alpha_0 \simeq -6.113,$$

where  $\alpha_0$  is the largest zero of the function  $\alpha \mapsto P_{\nu(\alpha)}(\cosh 1)$  (see Figs. 3–4). The representation of  $P_\nu(z)$  as a hyper-geometric series, convergent for  $|\frac{1}{2} - \frac{z}{2}| < 1$ , is

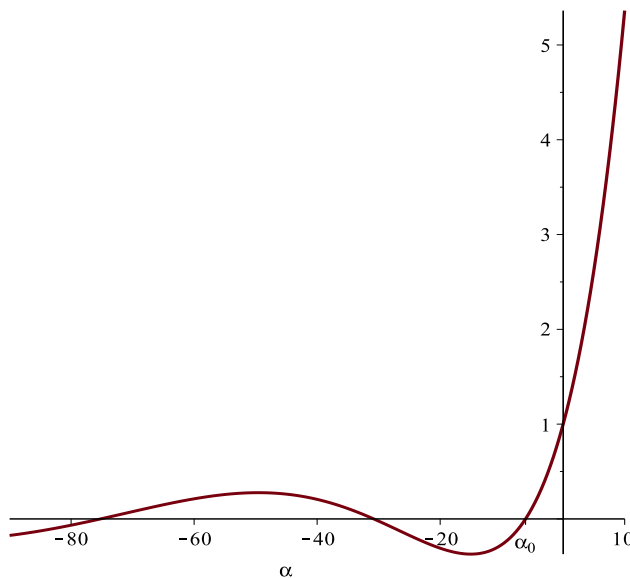


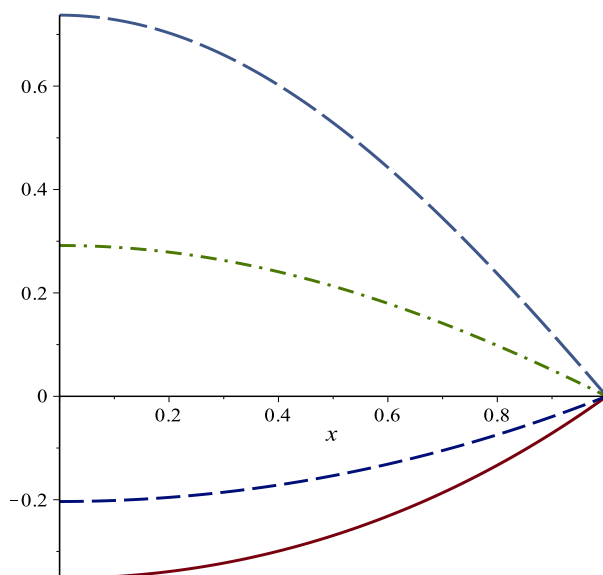
Fig. 3. The function  $\alpha \mapsto P_{\nu(\alpha)}(\cosh 1)$  and its largest zero  $\alpha_0$ .

$$P_\nu(z) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1, \frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(-\nu + k)\Gamma(\nu + 1 + k)}{(k!)^2\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)^k.$$

Such representation holds true for  $z = \cosh 1$ , but computing  $\alpha_0$  analytically seems to be difficult. On the other hand,  $\alpha_0$  can be estimated via Newton’s method.

For  $\alpha > \alpha_0 = -1/C(\frac{e+1}{e-1})$ , using that  $\bar{v}$  solves (4.3),  $\bar{v}_x(0^+) = 0$ , and  $\int_0^1 \omega = 1$ , we have

$$\begin{aligned} I\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right) &\geq \alpha + J(\bar{v}) = \alpha + \int_0^1 \omega(\alpha\bar{v}^2 + \bar{v}_x^2 + 2\alpha\bar{v}) \\ &= \alpha + \int_0^1 [(\omega\bar{v}_x)_x\bar{v} + \omega\bar{v}_x^2 + \alpha\omega\bar{v}] \\ &= \alpha + [\omega\bar{v}_x\bar{v}]_{0^+}^{1^-} + \alpha \int_0^1 \omega\bar{v} \\ &= \int_0^1 (\omega\bar{v}_x)_x = (\omega\bar{v}_x)(1^-) \\ &= \frac{(e + 1)^2}{2e} \frac{P'_{\nu(\alpha)}}{P_{\nu(\alpha)}}(\cosh 1). \end{aligned} \tag{4.9}$$



**Fig. 4.** A few minimizers as given by formula (4.9), for  $\alpha = 2, 1, -1, -2$  (from bottom to top).

**Remark 4.1.** Incidentally, we proved that  $c = -(1/\alpha_0) \simeq 0.164$  is the best constant in the weighted Poincaré inequality below (valid for all  $v \in C^1([0, 1])$  such that  $v(1) = 0$ ),

$$\int_0^1 \sinh(x)v(x)^2 dx \leq c \int_0^1 \sinh(x)v_x(x)^2 dx.$$

4.3. The case  $\beta = 1$

The computation of  $I(\alpha, \beta)$  in the case  $0 \leq \beta < \frac{e+1}{e-1}$  is different than that of the previous section, as standard variational methods apply in the usual Sobolev space  $H_0^1(0, 1)$ . Moreover, in the case  $\beta = 1$ , the associated Euler–Lagrange boundary value problem can be explicitly solved. According to Proposition 3.3, the computation below will be valid for  $\alpha > -1/C(1)$ . As a byproduct of our calculations, we will find the explicit expression

$$C(1) = 4/(1 + 4\pi^2)$$

for the weighted Poincaré inequality.

Recall that  $I(\alpha, \beta) = \alpha + \inf\{J(v) : v \in H_0^1(0, 1)\}$ , where  $J(v)$  was introduced in (3.11) and the weight function

$$\omega(x) = p(x) + \beta p'(x) = \frac{(1 + \beta)e^x + (1 - \beta)e^{1-x}}{2(e - 1)}, \quad x \in (0, 1) \tag{4.10}$$

is positive and bounded away from 0 on the interval  $(0, 1)$ . The unique minimizer  $\bar{v} \in H_0^1$  is the solution of

$$\begin{cases} \omega v_{xx} + \omega_x v_x - \alpha \omega v = \alpha \omega, & x \in (0, 1), \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

For  $\beta = 1$ , the weight  $\omega$  reduces to  $\omega(x) = e^x/(e - 1)$ . Thus, the general solution of Eq. (4.11) for such choice of  $\omega$  (at least for  $\alpha \neq -1/4$ ) is

$$v(x) = -1 + \lambda e^{\nu(\alpha)x} + \mu e^{\overline{\nu(\alpha)}x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

where the complex number  $\nu(\alpha)$  is understood as in (4.6). To simplify further the result let us set

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha} \in \{z \in \mathbb{C}: \Im(z) \geq 0\}. \tag{4.13}$$

Imposing the boundary conditions  $v(0) = v(1) = 0$  we finally get the expression of minimizer of  $I(\alpha, 1)$ :

$$\bar{v}(x) = -1 + \frac{\sqrt{e} \sinh(\mu(\alpha)x) + \sinh(\mu(\alpha)(1 - x))}{e^{x/2} \sinh(\mu(\alpha))}.$$

The minimum  $I(\alpha, 1)$  is thus given by

$$\begin{aligned} I(\alpha, 1) &= \alpha + J(\bar{v}) = \omega(1)\bar{v}_x(1) - \omega(0)\bar{v}_x(0) \\ &= -\frac{1}{2} + \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

The above expression makes sense provided  $\sinh(\mu(\alpha)) \neq 0$ , *i.e.* for  $\alpha \neq -\frac{1}{4} - k^2\pi^2$ , with  $k \in \mathbb{Z}$ . But  $\alpha = -1/4$  is in fact a removable singularity in (4.14). The restriction to be imposed on  $\alpha$  is thus  $\alpha > -\frac{1}{4} - \pi^2$ .

**5. Proof of Theorem 2.2**

We are now in the position of proving Theorem 2.2.

**Proof of Theorem 2.2.** Let us recall the definition of  $\beta_\gamma$ ,

$$\beta_\gamma = \inf\{\beta \in \mathbb{R}^+: \beta^2 + I(\alpha, \beta) - \alpha \geq 0\}, \tag{5.1}$$

where the one-to-one relation between  $\alpha$  and  $\gamma$  is

$$\alpha = \frac{3 - \gamma}{\gamma} \quad \text{or} \quad \gamma = \frac{3}{1 + \alpha}. \tag{5.2}$$

Using the results of the previous section we can now give explicit bounds from below for  $I(\alpha, \beta)$  that can be used for the estimate of  $\beta_\gamma$ .

Using the concavity properties of the function  $\beta \mapsto I(\alpha, \beta)$  we see that, for any fixed  $\alpha > \alpha_0$ , the infimum  $I(\alpha, \beta)$  is bounded from below by piecewise affine function of the  $\beta$  variable. Namely,

$$\begin{cases} I(\alpha, \beta) \geq I(\alpha, 1), & \text{if } 0 \leq \beta \leq 1 \\ I(\alpha, \beta) \geq \frac{e-1}{2}(I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) - I(\alpha, 1))\beta + \frac{e+1}{2}I(\alpha, 1) - \frac{e-1}{2}I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}), & \\ \text{if } 1 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

We denote by  $R(\alpha, \beta)$ , the function defined by the right-hand in (5.3), for  $\alpha > \alpha_0$  and  $0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$ . The condition  $\alpha > \alpha_0$  ensures that  $I(\alpha, 1) \geq I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) > -\infty$ , so that  $R(\alpha, \beta)$  is finite.

The first issue is to find the condition on  $\alpha$  guaranteeing  $\beta_\gamma < +\infty$ . Owing to the lower bound (5.3), a sufficient condition for this is that  $\alpha$  is chosen in a such way that

$$\exists \beta \text{ such that } 0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}: \quad \beta^2 + R(\alpha, \beta) - \alpha \geq 0. \quad (5.4)$$

But condition (5.4) is equivalent to the following one:

$$1 + I(\alpha, 1) - \alpha \geq 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2 + I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) - \alpha \geq 0. \quad (5.5)$$

Indeed, one implication is obvious and the converse one easily follows applying to the  $\beta$ -variable the elementary properties of quadratic polynomials. Let us make more explicit the last condition: because of the definition of  $I(\alpha, \beta)$  and Proposition 3.4, the two functions  $\alpha \mapsto I(\alpha, \frac{e+1}{e-1})$  and  $\alpha \mapsto I(\alpha, 1)$  are both increasing, concave and vanishing at  $\alpha = 0$ . Therefore, there exist  $\alpha_1^- < 0 < \alpha_1^+$  such that

$$\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2 + I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) - \alpha \geq 0 \quad \iff \quad \alpha_1^- \leq \alpha \leq \alpha_1^+. \quad (5.6)$$

For the same reason, there exist  $\alpha_2^- < 0 < \alpha_2^+$  such that

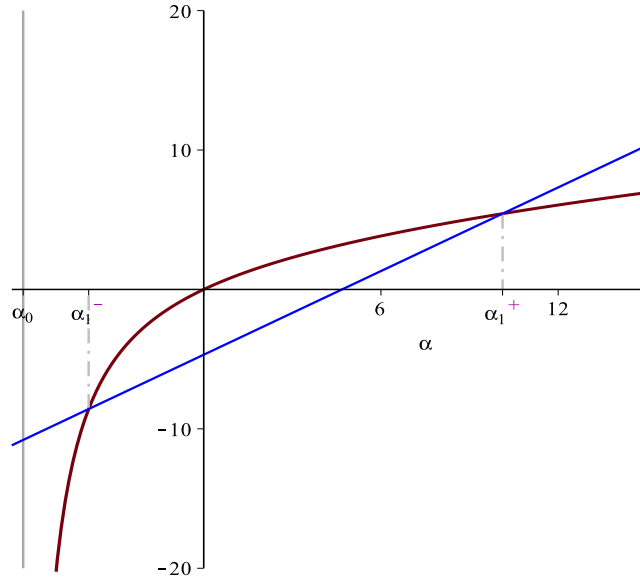
$$1 + I(\alpha, 1) - \alpha \geq 0 \quad \iff \quad \alpha_2^- \leq \alpha \leq \alpha_2^+. \quad (5.7)$$

The above zeros can be easily estimated via Newton’s method. We find in this way

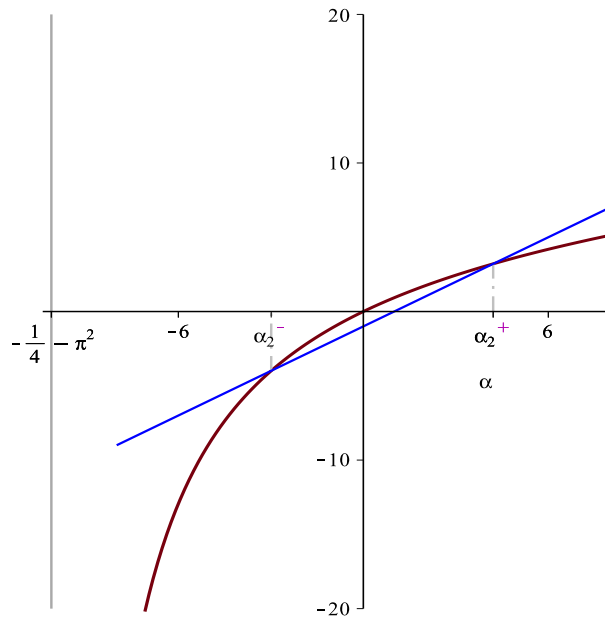
$$\alpha_1^- < \alpha_2^- < 0 < \alpha_2^+ < \alpha_1^+,$$

see also Figs. 5–6.





**Fig. 5.** The plot of  $\alpha \mapsto I(\alpha, \frac{e+1}{e-1})$  (see Eq. (4.9)) and of the straight line  $\alpha \mapsto \alpha - (\frac{e+1}{e-1})^2$ , intersecting the curve at  $\alpha_1^-$  and  $\alpha_1^+$ .



**Fig. 6.** Plot of  $\alpha \mapsto I(\alpha, 1)$  (see Eq. (4.14)) and of the straight line  $\alpha \mapsto \alpha - 1$ , intersecting the curve at  $\alpha_2^-$  and  $\alpha_2^+$ .

According to (5.2), let us introduce the four constants

$$\begin{aligned} \gamma_1^- &= \frac{3}{1+\alpha_1^-} = -1.036\dots, & \gamma_1^+ &= \frac{3}{1+\alpha_1^+} = 0.269\dots, \\ \gamma_2^- &= \frac{3}{1+\alpha_2^-} = -1.508\dots, & \gamma_2^+ &= \frac{3}{1+\alpha_2^+} = 0.575\dots \end{aligned} \tag{5.8}$$

In particular, for  $\alpha_1^- \leq \alpha \leq \alpha_1^+$ , we find that the set in (5.1) is nonempty: this means that in the range  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, +\infty)$  we get  $\beta_\gamma < +\infty$ , and Theorem 2.1 and Corollary 1.2 apply.

On the other hand, under the more restrictive condition  $\alpha_2^- \leq \alpha \leq \alpha_2^+$ , we can make use of inequality (5.7) to get the estimate

$$\beta_\gamma \leq \sqrt{\alpha - I(\alpha, 1)} \leq 1. \tag{5.9}$$

Now recalling the expression of  $I(\alpha, 1)$  computed in (4.14) we obtain the explicit estimate, valid for  $\gamma \in (-\infty, \gamma_2^-] \cup [\gamma_2^+, +\infty)$ :

$$\beta_\gamma \leq \sqrt{\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{2} - \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu}}, \tag{5.10}$$

where  $\mu$  is the complex number

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(3 - \gamma)/\gamma}.$$

The choice between the two complex square roots of  $1 + 4(3 - \gamma)/\gamma$  does not affect the result and the radical in (5.10) (or in (5.13) below) is nonnegative because of the last inequality in (3.12). Observe that taking here  $\gamma = 1$  gives the blowup criterion (1.5) for the Camassa–Holm equation.

If otherwise  $\alpha \in [\alpha_1^-, \alpha_1^+] \setminus [\alpha_2^-, \alpha_2^+]$  then, from the inequality (5.3)  $I(\alpha, \beta) \geq R(\alpha, \beta)$ , we obtain the bound  $\beta_\gamma \leq \tilde{\beta}_\gamma$ , where  $\tilde{\beta}_\gamma$  is the only zero of the quadratic polynomial  $\beta \mapsto \beta^2 + R(\alpha, \beta) - \alpha$  inside the interval  $[1, \frac{e+1}{e-1}]$ . Thus, letting

$$\begin{aligned} b &\equiv \frac{e-1}{2} (I(\alpha, \frac{e+1}{e-1}) - I(\alpha, 1)) \\ &= -\frac{e-1}{2} \left( \frac{(e+1)^2}{2e} \frac{P'_{-1/2+\mu}}{P_{-1/2+\mu}}(\cosh 1) + \frac{1}{2} - \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu} \right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

and

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{e+1}{2} I(\alpha, 1) - \frac{e-1}{2} I\left(\alpha, \frac{e+1}{e-1}\right) - \alpha \\ &= \frac{e+1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \mu \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \mu - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \mu} \right) \\ &\quad - \frac{e-1}{2} \left( \frac{(e+1)^2}{2e} \cdot \frac{P'_{-1/2+\mu}}{P_{-1/2+\mu}}(\cosh 1) \right), \end{aligned} \tag{5.12}$$

we get the estimate, valid for  $\gamma \in [\gamma_2^-, \gamma_1^-] \cup \gamma \in [\gamma_1^+, \gamma_2^+]$ :

$$\beta_\gamma \leq -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}. \tag{5.13}$$

By our construction, for  $\gamma = \gamma_2^-$  or  $\gamma = \gamma_2^+$ , the equality holds in (5.10) and in (5.13) and we have in this case  $\beta_{\gamma_2^-} = \beta_{\gamma_2^+} = 1$ .

The limit  $\beta_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \beta_\gamma$  is obtained taking  $\alpha = -1$  in (5.1). Going back to the estimate (5.10), letting  $\gamma \rightarrow \infty$  we get

$$\beta_\infty \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1 - \cosh \frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2})}{2 \sinh \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}}} - \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

The three claims of Theorem 2.2 are now established.  $\square$

### 6. The case of the Camassa–Holm equation

In the case of the Camassa–Holm equation ( $\alpha = 2$ ), it is remarkable that the Euler–Lagrange equation

$$(\omega_x v_x)_x - 2\omega v = 2\omega, \quad x \in (0, 1), \tag{6.1}$$

associated with the minimization of  $I(2, \beta)$  can be explicitly solved for any  $\beta$ .

Indeed, observing that from (4.10) we have  $\omega = \omega_{xx}$ , on  $(0, 1)$ , the associate homogeneous equation  $(\omega v_x)_x - 2\omega v = 0$  clearly possess  $v(x) = \omega_x(x)$  as a solution. We can compute a second independent solution of this homogeneous equation of the form  $v(x) = \omega_x f(x)$ . Then  $f$  must satisfy  $f_{xx} + (\frac{2\omega}{\omega_x} + \frac{\omega_x}{\omega})f_x = 0$ , provided  $\omega\omega_x \neq 0$ . Thus,  $f_x(x) = \frac{1}{\omega\omega_x^2}$  in intervals where  $\omega_x \neq 0$ . Observe that

- if  $\beta > \frac{e-1}{e+1}$ , then  $\omega_x > 0$  on the interval  $(0, 1)$ ,
- if  $0 < \beta < \frac{e-1}{e+1}$ , then  $\omega_x \neq 0$  for  $x \in (0, 1)$  and  $x \neq x_\beta \equiv \frac{1}{2} \log(\frac{(1-\beta)e}{1+\beta})$ .

On the other hand, using again  $\omega = \omega_{xx}$  and integration by parts in the indefinite integrals below we see that, for  $x \neq x_\beta$  and an arbitrary constant  $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \omega_x(x) \int \frac{1}{\omega\omega_x^2} &= -\omega_x(x) \int \frac{1}{\omega^2} \cdot \left(\frac{1}{\omega_x}\right)_x \\ &= -\frac{1}{\omega(x)^2} + C\omega_x(x) - 2\omega_x(x) \int \frac{1}{\omega^3}. \end{aligned}$$

The expression on the right-hand side is well defined on the whole interval  $(0, 1)$ , for all  $0 \leq \beta < \frac{e-1}{e+1}$ . Therefore, the general solution of (6.1) is

$$v(x) = -1 + \omega_x(x) \left( \lambda + 2\mu \int \frac{1}{\omega^3} \right) + \frac{\mu}{\omega(x)^2}, \quad x \in (0, 1). \tag{6.2}$$

We compute  $\int \frac{1}{\omega^3}$  making the change of variables  $y = e^x$ :

$$\int \frac{1}{\omega(x)^3} dx = \frac{(e-1)^3}{(1+\beta)^3} \left[ \int \frac{8y^2}{(y^2+B)^3} dy \right]_{y=e^x},$$

with

$$B = \frac{e(1-\beta)}{1+\beta}.$$

The last integral can be easily computed distinguishing the cases  $B > 0$ ,  $B = 0$  and  $B < 0$ . For example, in the case  $B > 0$ , that corresponds to  $0 < \beta < 1$ , we have

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\omega(x)^3} dx &= \frac{(e-1)^3}{(1+\beta)^3} \left( \frac{y(y^2-B)}{B(y^2+B)^2} + B^{-3/2} \arctan(t/\sqrt{B}) \right) \\ &= \frac{2 \sinh(1/2)^2}{1-\beta^2} \cdot \frac{\omega_x(x)}{\omega(x)^2} + \frac{8 \sinh(1/2)^3}{(1-\beta^2)^{3/2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{e(1-\beta)}} e^x\right). \end{aligned}$$

The minimizer  $\bar{v}$  of  $I(\alpha, \beta)$ , with  $0 \leq \beta < \frac{e+1}{e-1}$  is obtained choosing in the above expression the coefficients  $\bar{\lambda}$  and  $\bar{\mu}$  solving the linear system

$$\begin{cases} \omega_x(0)\bar{\lambda} + \frac{1}{\omega(0)}\bar{\mu} = 1, \\ \omega_x(1)\bar{\lambda} + (2\omega_x(1)(\frac{1}{\omega(1)^2} + \int_0^1 \frac{1}{\omega^3}))\bar{\mu} = 1. \end{cases}$$

Once  $\bar{v}$  is computed as indicated, the minimum is given, for  $0 \leq \beta < \frac{e+1}{e-1}$ , by

$$\begin{aligned} I(2, \beta) &= 2 + J(\bar{v}) = \omega(1)\bar{v}_x(1) - \omega(0)\bar{v}_x(0) \\ &= \omega(1)^2 \left( \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \int_0^1 \frac{1}{\omega^3} \right) - \bar{\lambda}\omega(0). \end{aligned} \tag{6.3}$$

The explicit expression of  $I(2, \beta)$  is thus easily written in terms of elementary functions. We do not reproduce the complete formula here as it is too long to be really useful. We just provide here a few particular values and its plot in the interval  $[0, \frac{e+1}{e-1}]$  (see Fig. 7).

$$\begin{aligned} I(2, 0) &= 1 + \frac{\arctan(\sinh \frac{1}{2})}{\sinh \frac{1}{2} + \arctan(\sinh \frac{1}{2})(\sinh \frac{1}{2})^2} = 1.737\dots, \\ I(2, 1) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{1}{2} \cosh \frac{3}{2} - 1}{\sinh \frac{1}{2} \sinh \frac{3}{2}} = 1.734\dots, \\ I(2, \frac{e+1}{e-1}) &= \frac{(e+1)^2}{e^2+1} = 1.648\dots \end{aligned} \tag{6.4}$$

The value of  $I(2, 0)$  was computed also in [32] or [35].

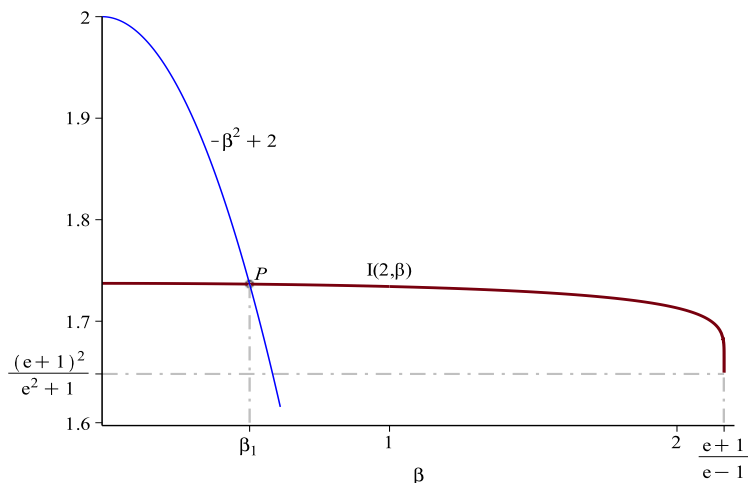


Fig. 7. The plot of  $I(2, \beta)$  and the construction of  $\beta_1 = 0.513\dots$

**Remark 6.1.** The last formula in (6.4), in fact, is obtained in a slight different way, as in our previous computations we excluded the limit case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$ . Of course, this formula agrees with that obtained from the more general one (4.9) for  $\alpha = 2$ , as  $\nu(2) = 1$  and  $P_1(y) = y$ . But we can easily prove it without relying on the more complicated approach used to get (4.9). Indeed, when  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$ , we can write the general solution of (6.1) as

$$v_{\lambda,\mu}(x) = -1 + \lambda \cosh(x) + \mu \left( 1 + \frac{1}{2} \cosh(x) \log \left( \frac{\cosh(x) - 1}{\cosh(x) + 1} \right) \right), \quad x \in (0, 1). \tag{6.5}$$

The appropriate boundary condition for  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$  is  $v_{\lambda,\mu} \in E_{(e+1)/(e-1),0}$ . The only possibility to achieve this is to choose  $\mu = 0$  (recall that the elements of  $E_{(e+1)/(e-1),0}$  are  $O(\sqrt{|\log(x)|})$  as  $x \rightarrow 0+$ ). The remaining condition  $v(1) = 0$  requires  $\lambda = 1/\cosh(1)$ . The minimizer of the functional  $J$  in the case  $\alpha = 2$  and  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$ , is then

$$\bar{v}(x) = -1 + \frac{\cosh(x)}{\cosh(1)}. \tag{6.6}$$

This indeed leads to the last formula in (6.4).

In view of the application of Theorem 2.1, it is interesting to make the numerical study of the zeros of the function  $\beta \mapsto \beta^2 + I(2, \beta) - 2$ , on the interval  $[0, \frac{e+1}{e-1}]$ . The only zero is  $\beta_1 = 0.513\dots$ . According to Theorem 2.1, solutions of Camassa–Holm blowup provided  $u'_0(x_0) < -\beta_1|u_0(x_0)|$ . On the other hand, Theorem 2.2 predicted  $\beta_1 \leq 0.515\dots$  (see criterion (1.5)). This is another confirmation that the estimate provided by Theorem 2.2 is almost sharp.

To go one step further, one might ask what is the *best constant*  $\beta_1^*$  with the property that if

$$\inf_{x \in \mathbb{S}} (u'_0(x) + \beta_1^* |u_0(x)|) < 0,$$

then the solution of the Camassa–Holm equation arising from  $u_0$  blows up in finite time. We do not know how to exactly compute  $\beta_1^*$  in the periodic case. However, the following estimates hold:

$$0.462 \dots = \frac{e-1}{e+1} \leq \beta_1^* \leq \beta_1 = 0.513 \dots$$

To establish the lower bound, we can make use of a property specific of the case  $\gamma = 1$ . Namely, the fact that if the initial potential  $y_0 = u_0 - u_{0,xx}$  has a constant sign then the corresponding solution exist globally. See [9,17]. Let us take a sequence  $y_0^n$  of smooth, periodic, non-negative functions converging in the distributional sense to a Dirac comb. Then the corresponding initial data  $u_0^n = p * y_0^n$  give rise to global smooth periodic solutions. But  $\frac{u_{0,x}^n(0)}{u_0^n(0)} \rightarrow -\frac{\sinh(1/2)}{\cosh(1/2)} = -\frac{e-1}{e+1}$ . Therefore, a condition of the form  $u'_0(x_0) < -c|u_0(x_0)|$ , in general, does not imply the blowup, unless  $c \geq \frac{e-1}{e+1}$ .

**7. Proof of Corollary 1.2 and the case of non-periodic solutions**

**Proof of Corollary 1.2.** We assume that  $\gamma \geq \gamma_1^+$ , so in particular that  $\gamma > 0$ . In the case  $\gamma \leq \gamma_1^-$  the proof is similar. From the assumption of the corollary,  $T^* = +\infty$ . Then Theorems 2.1–2.2 apply, implying that for all  $t \geq 0$ , and all  $x \in \mathbb{R}$  we have  $u_x(t, x) \geq -\beta_\gamma |u(t, x)|$ . If  $[a, b]$  is an interval where  $u(t, x) \geq 0$  for all  $x \in [a, b]$ , then we have

$$\begin{aligned} - \int_a^b \beta_\gamma e^{\beta_\gamma x} u(t, x) \, dx &\leq \int_a^b e^{\beta_\gamma x} u_x(t, x) \, dx \\ &= e^{\beta_\gamma b} u(t, b) - e^{\beta_\gamma a} u(t, a) - \beta_\gamma \int_a^b e^{\beta_\gamma x} u(t, x) \, dx. \end{aligned}$$

This implies that  $e^{\beta_\gamma a} u(t, a) \leq e^{\beta_\gamma b} u(t, b)$ .

If  $u(t, \cdot) \leq 0$  on  $[a, b]$ , then applying again Theorem 2.1 we have  $u_x(t, x) \geq \beta_\gamma u(t, x)$ . This in turn implies

$$\begin{aligned} \int_a^b \beta_\gamma e^{-\beta_\gamma x} u(t, x) \, dx &\leq \int_a^b e^{-\beta_\gamma x} u_x(t, x) \, dx \\ &= e^{-\beta_\gamma b} u(t, b) - e^{-\beta_\gamma a} u(t, a) + \beta_\gamma \int_a^b e^{-\beta_\gamma x} u(t, x) \, dx. \end{aligned}$$

We then conclude that  $e^{-\beta_\gamma a}u(t, a) \leq e^{-\beta_\gamma b}u(t, b)$ .

Summarizing, we proved that  $x \mapsto e^{\beta_\gamma x}u(x, t)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \geq 0$  and  $x \mapsto e^{-\beta_\gamma x}u(x, t)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \leq 0$ . The condition  $u(x_0, t_0) = 0$  together with the periodicity of  $u$  imply that  $u(\cdot, t_0) \equiv 0$  and so  $u \equiv 0$  because of the conservation of the  $H^1$ -norm.  $\square$

As a consequence of this Corollary, we can deduce that if  $u_0$  is not identically zero, but  $\int_{\mathbb{S}} u_0 = 0$ , then the corresponding solution must blow up in finite time. Indeed, the zero-mean condition implies of course that  $u_0$  must vanish in some point  $x_0 \in \mathbb{S}$ . We recover in this way a known conclusion for the Camassa–Holm equation (see [12]), extended for the rod equation (at least for  $\gamma$  outside a neighborhood of the origin) in [21].

7.1. A digression on non-periodic solutions

The above proof applies also global solutions  $u \in C([0, \infty), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, \infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$  of the rod equation (1.1). Notice that in this case the kernel  $p$  of  $(1 - \partial_x^2)^{-1}$  is given by

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Indeed, let us recall that by the result in [3], if  $\gamma \in [1, 4]$  and  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , with  $s > 3/2$ , is such that

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{such that} \quad u'_0(x_0) < -\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{\gamma} - \frac{\sqrt{12 - 3\gamma}}{2\sqrt{\gamma}}} |u(x_0)| \tag{7.1}$$

then the unique local-in-time solution  $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}))$  must blow up in finite time. In the Camassa–Holm case  $\gamma = 1$  the above coefficient equals  $-1$  and is known to be optimal, see [17]. Reproducing the proof of Corollary 1.2 in the case of non-periodic solution, taking

$$\beta_\gamma = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{\gamma} - \frac{\sqrt{12 - 3\gamma}}{2\sqrt{\gamma}}} \tag{7.2}$$

we get the following result.

**Corollary 7.1.** *Let  $\gamma \in [1, 4]$  and  $s > 3/2$ . Let  $u \in C([0, +\infty), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, +\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ , be a global solution of the rod equation (1.1) (with  $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$  and  $x \in \mathbb{R}$ ).*

- i) For all  $t \geq 0$ , either  $u(t, x) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$ , or  $u(t, x) < 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$ , or  $\exists x_t \in \mathbb{R}$  such that  $u(t, \cdot) \leq 0$  in  $(-\infty, x_t]$  and  $u(t, x) \geq 0$  in  $[x_t, +\infty)$ . In the latter case, if  $x \mapsto u(t, x)$  vanishes at two distinct points of the real line, then  $x \mapsto u(t, x)$  must vanish in the whole interval between them.
- ii) If, at some time  $t_0 \geq 0$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta_\gamma x} u(t_0, x) \leq 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} e^{-\beta_\gamma x} u_0(t_0, x) \geq 0,$$

where  $\beta_\gamma$  is given by Eq. (7.2), then  $u$  is the identically zero solution.

In particular, if  $0 \neq u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  is such that  $u_0(x) = o(e^{-\beta_\gamma |x|})$  for  $|x| \rightarrow \infty$ , then the corresponding solution of the rod equation must blow up in finite time.

Indeed, all these claims follow from the fact that if  $u$  is a global solution than  $x \mapsto e^{\beta_\gamma x} u(x, t)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \geq 0$  and  $x \mapsto e^{-\beta_\gamma x} u(x, t)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \leq 0$ , as seen before.

**Remark 7.2.** In the last conclusion of the corollary we recover the known fact that solutions of the Camassa–Holm equation arising from compactly supported data (see [19]), or more in general (see [2]) from data decaying faster than peakons — solitons with profile  $ce^{-|x|}$  — feature a wave breaking phenomenon after some time. The proofs given in [2,19] relied on McKean’s necessary and sufficient condition [28] for wave breaking and were not suitable for the generalization to  $\gamma \neq 1$ . Moreover, the sign condition on global solutions  $u$  contained in the first item of our corollary is in the same spirit as the sign condition on the associated potential  $u - u_{xx}$  provided by McKean’s theorem.

The method that we used in our previous paper [3] in the non-periodic case looks simpler than that of the present paper. Indeed, in [3] we relied on elementary estimates for bounding from below the convolution term  $p * (\alpha u^2 + u_x^2)$  without making use of variational methods. On the other hand, the result obtained therein is much weaker as the range of applicability for the parameter  $\gamma$  is considerably narrower. We point out that applying the variational method of the present paper in the non-periodic case we can recover, but not improve, the results in [3]. Indeed, the main issue is the study of the minimization problem (the analogue of (2.1) but now with  $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ):

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} (p + \beta p_x) (\alpha u^2 + u_x^2) \, dx : u \in H^1(\mathbb{R}), u(0) = 1 \right\}. \quad (7.3)$$

The analogue of Proposition 3.3 and Proposition 3.4 in our present setting is provided by the following one:



**Proposition 7.3.** *We have*

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) > -\infty \iff \alpha \geq -\frac{1}{4} \text{ and } -1 \leq \beta \leq 1. \tag{7.4}$$

Moreover, the function  $\beta \mapsto I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$  is constant on the interval  $[-1, 1]$  and under the above restrictions on  $\alpha$  and  $\beta$  we have

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha}. \tag{7.5}$$

The proof of this proposition, that we only sketch, relies on the identity  $p(x) + \beta p'(x) = \frac{1+\beta}{2}e^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} + \frac{1-\beta}{2}e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ , implying that

$$I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = \inf \left\{ \int_0^{\infty} e^{-x} (\alpha u^2 + u_x^2) dx : u \in H^1(\mathbb{R}^+), u(0) = 1 \right\}.$$

For  $\alpha > 0$ , one easily find solving the associate Euler–Lagrange equation the minimizer  $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^+)$  given by  $\bar{u}(x) = \exp(x(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha}))$  and the minimum by formula (7.5).

For  $-\frac{1}{4} \leq \alpha < 0$ ,  $\bar{u}$  does not belong to  $H^1(\mathbb{R}^+)$ . However, the inequality  $I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha}$  does hold, as proved in [3]. To see that equality (7.5) remains true in this case, we can construct a minimizing sequence taking  $u_{\ell} = \bar{u}$  on  $[0, \ell]$  and  $u_{\ell}(x) = C_{\ell} \exp(-\sqrt{-\alpha}x)$  for  $x \geq \ell$ , with  $C_{\ell}$  chosen in a such way that  $u_{\ell}$  is continuous. In this way,  $\int_{\ell}^{+\infty} e^{-x} (\alpha u^2 + u_x^2) dx \rightarrow 0$  and letting  $\ell \rightarrow \infty$  we find  $\int_0^{\ell} e^{-x} (\alpha u^2 + u_x^2) dx \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha}$ .

For  $\alpha < -1/4$ , we choose  $b > 1/2$  such that  $\alpha + b^2 < 0$ . Considering now continuous functions on  $\mathbb{R}^+$  of the form  $u_{\ell}(x) = e^{bx}$  on  $[0, \ell]$  and  $C_{\ell} \exp(-\sqrt{-\alpha}x)$  for  $x \geq \ell$  and letting  $\ell \rightarrow \infty$  we easily see that  $I(\alpha, \beta) = -\infty$  in this case.

Notice that the condition  $\alpha \geq -1/4$  gives the restriction  $\gamma \leq 4$ . On the other hand, the formula  $\beta_{\gamma} = \inf\{\beta \geq 0: \beta^2 + I_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) - \alpha \geq 0\}$  immediately gives  $\beta_{\gamma} = +\infty$  if  $\gamma < 1$ . We recover in this way that we must restrict ourselves to  $\gamma \in [1, 4]$  and that  $\beta_{\gamma}$  is given by formula (7.2) in the non-periodic case.

**Acknowledgments**

The authors are grateful to the referee for his useful suggestions and for pointing out a few relevant geometrical interpretations of the model studied in the present paper.

**Appendix A. Numerical analysis**

In this appendix we briefly revisit Theorem 2.1 using a numerical approach. Rather than obtaining estimates for  $\beta_{\gamma}$  by making use of some exact formulas, as we did in Theorem 2.2, we can evaluate  $\beta_{\gamma}$  numerically. In order to achieve this, we need first to

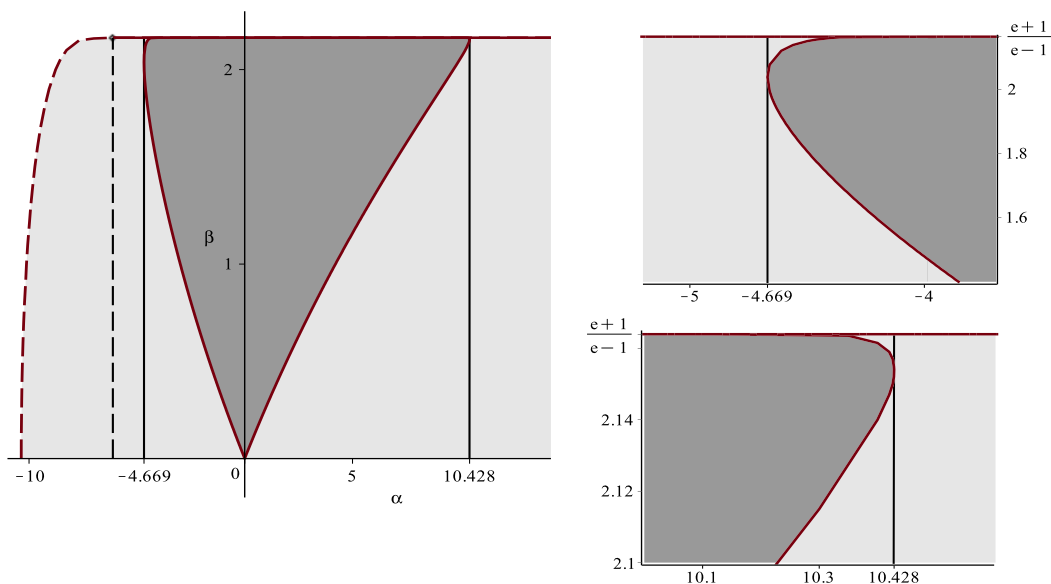


Fig. 8. Set of points  $(\alpha, \beta)$  such that  $\beta \geq 0$  and  $\beta^2 + I(\alpha, \beta) - \alpha \geq 0$  (dark gray region). Right: two zooms on the upper-left and upper-right corners.

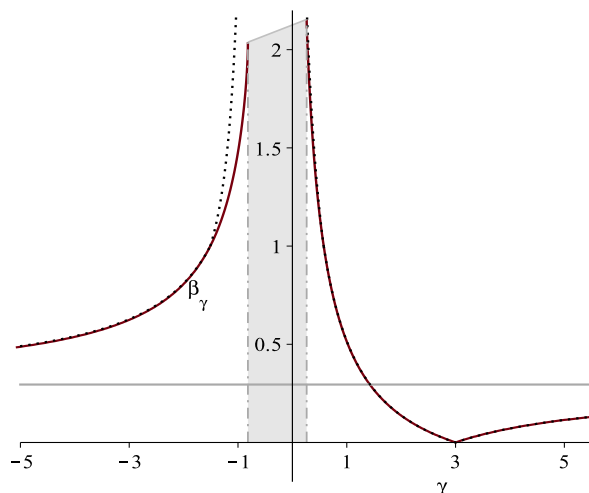
approximate  $I(\alpha, \beta)$ . This can be done by approaching the solutions of the boundary value problem (4.11), for any fixed  $\alpha$  and  $\beta$ , with  $0 \leq \beta < \frac{e+1}{e-1}$ . This can be done with arbitrary high precision applying *e.g.* a finite difference technique with Richardson extrapolation. In order to get an error smaller than 0.001 we needed a large number of grid points (a few thousands), especially when  $\beta$  is getting close to the critical value  $\frac{e+1}{e-1}$ .

The following table provides the values of  $\beta_\gamma$  computed numerically, corresponding to the values of  $\gamma$  listed in [16] and associated with known hyper-elastic materials. Only in one case ( $\gamma = -0.539$ ) our theorems are not applicable.

$\gamma$	-29.476	-4.891	-2.571	-1.646	-0.539	1.010	1.236	1.700	2.668	3.417
$\beta_\gamma$	0.326	0.492	0.684	0.933	n.a.	0.507	0.375	0.207	0.035	0.035

Fig. 8 illustrates the set of points  $(\alpha, \beta)$  such that  $\beta \geq 0$  and  $\beta^2 + I(\alpha, \beta) - \alpha \geq 0$ . It turns out that this set is nonempty (approximately) for  $\alpha \in [-4.669, 10.428]$ . Recalling the definition of  $\beta_\gamma$  given in (5.1)–(5.2), we see that Theorem 2.1 can be applied for  $\gamma \in (-\infty, -0.817\dots] \cup [0.262\dots, +\infty)$ , which is a range slightly larger than the range  $\gamma \in (-\infty, \gamma_1^-] \cup [\gamma_1^+, \infty)$ , predicted by Theorem 2.2. Relying in this numerical analysis, we claim that Corollary 1.2 remains true in such a larger range.

Fig. 9 provides the plot of the function  $\gamma \mapsto \beta_\gamma$  as computed numerically. The curve is very close to that in Fig. 1 (reproduced here through a dotted line) and the two curves almost overlap, in particular for  $\gamma > \gamma_1^+$  or  $\gamma < \gamma_2^+$  (only when  $\gamma \in [\gamma_2^-, \gamma_1^-]$  the difference between the two curves becomes visible).



**Fig. 9.** The plot of  $\beta_\gamma$  in the interval  $\gamma \in (-\infty, -0.817] \cup [0.262, +\infty)$  (continuous line) and the upper estimate of  $\beta_\gamma$  provided by [Theorem 2.2](#) (dotted line).

## References

- [1] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 272 (1220) (1972) 47–78.
- [2] L. Brandolese, Breakdown for the Camassa–Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces, *Int. Math. Res. Not.* 2012 (22) (2012) 5161–5181.
- [3] L. Brandolese, Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations, arXiv:1210.7782, *Comm. Math. Phys.* (2014), <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-014-1958-4>, in press.
- [4] A. Bressan, A. Constantin, Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183 (2) (2007) 215–239.
- [5] A. Bressan, A. Constantin, Global dissipative solutions of the Camassa–Holm equation, *Anal. Appl.* 5 (2007) 1–27.
- [6] R. Camassa, L. Holm, An integrable shallow-water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 1661–1664.
- [7] R. Camassa, L. Holm, J.M. Hyman, A new integrable shallow-water equation, *Adv. Appl. Mech.* 31 (1994) 1–33.
- [8] A. Constantin, H. McKean, A shallow water equation on the circle, *Comm. Pure Appl. Math.* 52 (8) (1999) 949–982.
- [9] A. Constantin, Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50 (2) (2000) 321–362.
- [10] A. Constantin, J. Escher, Global existence and blow-up for a shallow water equation, *Ann. Sc. Norm. Pisa* 26 (2) (1998) 303–328.
- [11] A. Constantin, J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, *Acta Math.* 181 (2) (1998) 229–243.
- [12] A. Constantin, J. Escher, Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 51 (1998) 475–504.
- [13] A. Constantin, B. Kolev, Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle, *Comment. Math. Helv.* 78 (4) (2003) 787–804.
- [14] A. Constantin, D. Lannes, The hydrodynamical relevance of the Camassa–Holm and Degasperis–Procesi equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 192 (1) (2009) 165–186.
- [15] A. Constantin, W.A. Strauss, Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods, *Phys. Lett. A* 270 (3–4) (2000) 140–148.

- [16] H.-H. Dai, Y. Huo, Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 456 (2000) 331–363.
- [17] R. Danchin, A few remarks on the Camassa–Holm, *Differential Integral Equations* 192 (14) (2001) 953–988.
- [18] Zhengguang Guo, Yong Zhou, Wave breaking and persistence properties for the dispersive rod equation, *SIAM J. Math. Anal.* 40 (6) (2009) 2567–2580.
- [19] A.A. Himonas, G. Misiolek, G. Ponce, Y. Zhou, Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa–Holm equation, *Comm. Math. Phys.* 271 (2) (2007) 511–522.
- [20] H. Holden, X. Raynaud, Global conservative solutions of the generalized hyperelastic-rod wave equation, *J. Differential Equations* 233 (2) (2007) 448–484.
- [21] K. Hu, Z. Yin, Blowup phenomena for a new periodic nonlinearly dispersive wave equation, *Math. Nachr.* 283 (11) (2010) 1613–1628.
- [22] L. Jin, Y. Liu, Y. Zhou, Blow-up of solutions to a periodic nonlinear dispersive rod equation, *Doc. Math.* 15 (2010) 267–283.
- [23] R.S. Johnson, Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves, *J. Fluid Mech.* 455 (2002) 63–82.
- [24] B. Kolev, Bi-Hamiltonian systems on the dual of the Lie algebra of vector fields of the circle and periodic shallow water equations, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 365 (1858) (2007) 2333–2357.
- [25] J. Lenells, Traveling waves in compressible elastic rods, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 6 (1) (2006) 151–167 (electronic).
- [26] Y. Liu, Global existence and blow-up solutions for a nonlinear shallow water equation, *Math. Ann.* 335 (3) (2006) 717–735.
- [27] H.P. McKean, Breakdown of a shallow water equation, *Asian J. Math.* 2 (4) (1998) 867–874; H.P. McKean, Correction to “Breakdown of a shallow water equation”, *Asian J. Math.* (3) (1999).
- [28] H.P. McKean, Breakdown of the Camassa–Holm equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 57 (3) (2004) 416–418.
- [29] O.G. Mustafa, Global conservative solutions of the hyperelastic rod equation, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (13) (2007), Art. ID rnm040, 26.
- [30] E.W. Stredulinsky, *Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1074, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [31] E. Wahlén, On the blowup of solutions to a nonlinear dispersive rod equation, *J. Math. Anal. Appl.* 323 (2006) 1318–1324.
- [32] E. Wahlén, On the blow-up of solutions to the periodic Camassa–Holm equation, *NoDEA* 13 (2007) 643–653.
- [33] Y. Zhou, Wave breaking for a shallow water equation, *Nonlinear Anal.* 57 (1) (2004) 137–152.
- [34] Y. Zhou, Local well-posedness and blow-up criteria of solutions for a rod equation, *Math. Nachr.* 278 (14) (2005) 1726–1739.
- [35] Y. Zhou, Blow-up of solutions to a nonlinear dispersive rod equation, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 25 (1) (2006) 63–77.



---

Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations

---



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

ScienceDirect

J. Differential Equations 256 (2014) 3981–3998

Journal of  
Differential  
Equations

[www.elsevier.com/locate/jde](http://www.elsevier.com/locate/jde)

# Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations <sup>☆</sup>

Lorenzo Brandolese <sup>\*</sup>, Manuel Fernando Cortez

Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS UMR 5208 Institut Camille Jordan, 43 bd. du 11 novembre,  
Villeurbanne Cedex F-69622, France

Received 7 March 2014

Available online 28 March 2014

## Abstract

In this paper we consider the nonlinear dispersive wave equation on the real line,  $u_t - u_{txx} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + [g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2]_x = 0$ , that for appropriate choices of the functions  $f$  and  $g$  includes well known models, such as Dai's equation for the study of vibrations inside elastic rods or the Camassa–Holm equation modelling water wave propagation in shallow water. We establish a *local-in-space* blowup criterion (*i.e.*, a criterion involving only the properties of the data  $u_0$  in a neighborhood of a *single point*) simplifying and extending earlier blowup criteria for this equation. Our arguments apply both to the finite and infinite energy cases, yielding the finite time blowup of strong solutions with possibly different behavior as  $x \rightarrow +\infty$  and  $x \rightarrow -\infty$ .

© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

**Keywords:** Rod equation; Camassa–Holm; Shallow water; Wave breaking

<sup>☆</sup> The authors are supported by the French ANR Project DYFICOLTI “Dynamique des fluides, couches limites, tourbillons et interfaces”. The second author is also supported by the *Secretaría Nacional de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación*.

<sup>\*</sup> Corresponding author.

E-mail addresses: [brandolese@math.univ-lyon1.fr](mailto:brandolese@math.univ-lyon1.fr) (L. Brandolese), [cortez@math.univ-lyon1.fr](mailto:cortez@math.univ-lyon1.fr) (M.F. Cortez).

URL: <http://math.univ-lyon1.fr/~brandolese> (L. Brandolese).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.03.008>

0022-0396/© 2014 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

The experimental observation by the naval architect Scott Russel of solitary waves propagating in channels at different speeds, and interacting in a nonlinear way before recovering their initial shape, motivated the studies on the mathematical modelling of water wave motion at the end of the XIX century. The first works can be retraced back to Boussinesq, Rayleigh, Korteweg and de Vries. The celebrated KdV equation allows for a first mathematical description of such phenomena. This equation can be derived as an asymptotic model from the free surface Euler equations in the so-called shallow water regime  $\mu = h^2/\lambda^2 \ll 1$ , where  $h$  and  $\lambda$  denote respectively the average elevation of the liquid over the bottom and the characteristic wavelength. It models small amplitude waves, *i.e.* waves such that the dimensionless amplitude parameter  $\epsilon = a/h$  satisfies  $\epsilon = O(\mu)$ , where  $a$  is the typical amplitude.

Such small amplitude waves feature both nonlinear and dispersive effects. For larger amplitude waves nonlinear effects become preponderant and wave breaking can eventually occur. As the KdV equation is no longer suitable for the description of breaking mechanisms — its solutions remain smooth for all time — a considerable effort was made toward the modelling of larger amplitude, possibly breaking waves, see, *e.g.*, the monograph [37]. Such studies culminated with the derivation in 1993, by Camassa and Holm, [8,9] of an equation obtained from the vertically averaged water wave system, written in Lie–Poisson Hamiltonian form, by an asymptotic expansion preserving the Hamiltonian structure. The scaling of validity of the Camassa–Holm equation is  $\mu \ll 1$  and  $\epsilon = O(\sqrt{\mu})$ : such scaling includes that of KdV allowing higher order accuracy. Alternative rigorous derivations of the Camassa–Holm equation are also available, see [14,28]. Such equation attracted a considerable interest in the past 20 years, not only due its hydrodynamical relevance (it was the first equation capturing both soliton-type solitary waves as well as breaking waves) but also because of its extremely rich mathematical structure. In fact, the Camassa–Holm equation was written for the first time in a different context, as one of the 12 integrable equations classified by Fokas and Fuchssteiner [21] and obtained from a nonlinear operator satisfying suitable defining properties, applying a recursive operator that is a hereditary symmetry.

The Camassa–Holm equation is usually written as

$$u_t + \kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1)$$

where  $u$  can be interpreted as a horizontal velocity of the water at a certain depth and  $\kappa$  is the dispersion parameter.

The dispersionless case  $\kappa = 0$  is of mathematical interest as in this case the equation possess soliton solutions (often named *peakons*) peaked at their crest, of the form  $u_c(t, x) = ce^{-|x-ct|}$ . Multi-peakon interactions are studied in [8,9]. For  $\kappa > 0$  the equation admits smooth solitons.

In the shallow water interpretation, however,  $\kappa$  is proportional to the square root of the water depth and cannot be zero. On the other hand, the same equation, with  $\kappa = 0$  appears, *e.g.*, in the study of the dynamics of a class of non-Newtonian, second-grade fluids (see [7]), or when modelling vibrations inside hyper-elastic rods. In the latter case peakons correspond to physical solutions. More in general, the propagation of nonlinear waves inside cylindrical hyper-elastic rods, assuming that the diameter is small when compared to the axial length scale, is described by the one dimensional equation (see [18]),

$$v_\tau + \sigma_1 v v_\xi + \sigma_2 v_{\xi\xi\tau} + \sigma_3 (2v_\xi v_{\xi\xi} + v v_{\xi\xi\xi}) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tau > 0.$$



Here  $v(\tau, \xi)$  represents the radial stretch relative to a pre-stressed state,  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  and  $\sigma_3 \leq 0$  are physical constants depending on the material. The scaling transformations

$$\tau = \frac{3\sqrt{-\sigma_2}}{\sigma_1}t, \quad \xi = \sqrt{-\sigma_2}x,$$

with  $\gamma = 3\sigma_3/(\sigma_1\sigma_2)$  and  $u(t, x) = v(\tau, \xi)$ , allow us to reduce the above equation to

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = \gamma(2u_xu_{xx} + uu_{xxx}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.2)$$

Notice that when the physical parameter  $\gamma$  (related to the Finger deformation tensor) is equal to 1, one recovers the dispersionless Camassa–Holm equation. Several positive or negative values of  $\gamma$  correspond to known hyper-elastic materials.

Common important features of the Camassa–Holm and the rod equation include:

- The conservation of the energy integral  $\int(u^2 + u_x^2)$  for classical and sufficiently decaying solutions.
- The local well-posedness theory: the Cauchy problems for Eqs. (1.1) and (1.2) are well-posed in the Sobolev space  $H^s(\mathbb{R})$  for  $s > 3/2$  (or in suitable Besov spaces), locally in time. See, e.g., [17,20,32,38].
- Wave breaking scenario: the maximal existence time  $T^*$  such that the solution belongs to  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$  is finite if and only if  $u_x$  is unbounded from below (or from above when  $\gamma < 0$ ) near the blowup time. Up to the time  $T^*$ , the solution remains uniformly bounded. See [8,17,38].
- Finite time blowup criteria on the initial data and upper bound estimates on  $T^*$ . See [12,17,34,33,38–40].
- Exponentially decaying solitary wave solutions. See, e.g. [9,18,19,31,38].
- Infinite propagation speed and persistence results in weighted spaces. See [2,25].
- The existence of global conservative or dissipative weak solutions. See [5,6,26,27].

Beside such common features, the Camassa–Holm equation is considerably better understood than the rod equation. Indeed, contrary to the rod equation with  $\gamma \neq 1$ , Eq. (1.1) possess a bi-hamiltonian structure that makes the equation formally integrable via the inverse scattering method. Elegant geometric interpretations (see [13,15,30,35]) are available: for example, Eq. (1.1) gives rise to a geodesic flow of a right invariant metric on the Bott–Virasoro group. This equation also admits infinitely many conservation laws. Moreover, it has solitary waves interacting like solitons that are orbitally stable, see [16]. The global existence of strong solutions of the Camassa–Holm equation can be obtained putting suitable sign conditions on the associated initial potential  $y_0 = u_0 - (u_0)_{xx}$ , see [11,34]. When  $\gamma \neq 1$ , as the sign of the potential is no longer conserved by the flow, such global existence criterion is no longer valid. In fact, we know of no general condition on the initial datum guaranteeing that the corresponding solution of the rod equation remains in  $H^s$  ( $s > 3/2$ ) for all time. The value of the parameter  $\gamma$  plays a crucial role: two limit situations occur when  $\gamma = 0$  and  $\gamma = 3$ . In the latter case *any* non-zero solution eventually develops a singularity (see [17]). On the other hand, when  $\gamma = 0$ , no blowup can occur. (When  $\gamma = 0$ , the rod equation boils down to the BBM equation, a model for the unidirectional evolution of long waves, [1].) Physically, the formation of a singularity corresponds to a formation of a crack inside the rod. Both behaviors in the two limit cases  $\gamma = 0$  and  $\gamma = 3$  are not physically

realistic for real rods, but it is interesting to observe that there are known materials such that  $\gamma$  is indeed close to 3 (e.g.,  $\gamma = 2.668$ ) and others such that  $\gamma$  is close to zero (e.g.  $\gamma = -0.539$ ). We refer to [19] for a list of physically acceptable values of  $\gamma$  (ranging from  $-29.476$  to  $3.417$ ).

## 2. Blowup for the generalized hyper-elastic rod equation

In this paper we will consider the Cauchy problem for a nonlinear dispersive wave equation including both (1.1) and (1.2) as a particular case:

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]_x = 0. \quad (2.1)$$

Eq. (2.1) is often referred as the *generalized hyper-elastic rod wave equation*, see [26]. The Camassa–Holm equation corresponds to the choice  $f(u) = u^2/2$ ,  $g(u) = \kappa u + u^2$  and the rod equation to the choice  $f(u) = \frac{\gamma}{2}u^2$  and  $g(u) = \frac{3-\gamma}{2}u^2$ . When  $f(u) = \frac{u^{Q+1}}{Q+1}$  and  $g(u) = \kappa u + \frac{Q^2+3Q}{2(Q+1)}u^{Q+1}$  one recovers from (2.1) another class of equations with interesting mathematical properties, studied in [24].

From now on, we will study the Cauchy problem for the generalized rod equation, written in the non-local form, formally equivalent to (2.1):

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x + \partial_x p * \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right] = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Here

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

is the fundamental solution of the operator  $1 - \partial_x^2$ . The problem (2.2) is thus written in the abstract form

$$\frac{du}{dt} + A(u) = H(u), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

with  $A(u) = f'(u)\partial_x$  and  $H(u) = -\partial_x(1 - \partial_x^2)^{-1}[g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2]$ . The local existence theory can be developed applying classical Kato's approach [29]. For reader's convenience we collect in a single theorem the main results of the recent paper of Tian, Yan and Zhang [36] on the problem (2.2).

**Theorem 2.1.** (See [36].)

- (1) Assume that  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Let  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > 3/2$ . Then there exist  $T > 0$ , with  $T = T(u_0, f, g)$  and a unique solution  $u$  to the Cauchy problem (2.2) such that  $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}))$ . The solution has constant energy integral

$$\int_{\mathbb{R}} (u^2 + (u_x)^2) = \int_{\mathbb{R}} (u_0^2 + (u_0')^2) = \|u_0\|_{H^1}^2.$$

Moreover, the solution depends continuously on the initial data: the mapping  $u_0 \mapsto u$  is continuous from  $H^s(\mathbb{R})$  to  $C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}))$ .

(2) Assume in addition that  $f'' \geq \gamma > 0$ :

i) (Blowup scenario and rate) Let  $0 < T^* \leq \infty$  be the maximal time of the solution in  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ . Then  $T^* < \infty$  if and only if

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x) = -\infty.$$

In this case, the blowup rate of  $\inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x)$  as  $t \rightarrow T^*$  is  $O(\frac{1}{T^* - t})$ .

ii) (Blowup criterion) Assume that there exists a point  $x_0 \in \mathbb{R}$  such that

$$u'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{4 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \|u_0\|_{H^1}^2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v)}{\gamma}}. \tag{2.3}$$

Then  $u$  blows up in finite time and  $T^* \leq \frac{1}{\sqrt{2C_0\gamma}} \log(\frac{\sqrt{\gamma/2}u'_0(x_0) - \sqrt{C_0}}{\sqrt{\gamma/2}u'_0(x_0) + \sqrt{C_0}})$ , where  $C_0 = C_0(\|u_0\|_{H^1}, f, g)$  is given by

$$C_0 \equiv 2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \frac{\|u_0\|_{H^1}^2}{2} \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v).$$

In the first item, the existence time  $T$  can be taken independent on the parameter  $s$  in the following sense: if  $u_0$  also belongs to  $H^{s_1}(\mathbb{R})$  with  $s_1 > 3/2$ , then we have also  $u \in C([0, T], H^{s_1}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], H^{s_1-1}(\mathbb{R}))$ . Additional results in [36] include lower bound estimates for the existence time  $T^*$  and the lower semi-continuity of the existence time. Let us also mention the construction of global conservative weak solutions for such equation [26] (see also [5,6,10] for earlier results on weak solutions for more specific choices of the functions  $f$  and  $g$ ).

### 2.1. Main results

The purpose of this paper is to establish a new blowup criterion for Eq. (2.2), considerably simplifying (2.3), and extending our previous result established in [3] in the special case of the classical rod equation. Our second goal is to handle more general boundary conditions in order to encompass the case of solutions not necessarily vanishing at infinity. In particular, in the present paper we will be able to cover the case  $f(u) = u^2$  and  $g(u) = \kappa u + u^2$  corresponding to the Camassa–Holm equation with dispersion ( $\kappa > 0$ ), a case that was not covered in [3]. Contrary to previously known blowup criteria, like those in [9,11,12,17,32,36,38,39], our criterion has the specific feature of being *purely local* in the space variable: indeed our blowup condition only involves the values of  $u_0(x_0)$  and  $u'_0(x_0)$  in a single point  $x_0$  of the real line. On the other hand, for earlier criteria, checking the blowup conditions involved the computation of global quantities (typically, the  $\|u_0\|_{H^1}$  norm, as in criterion (2.3) above) or other global conditions like antisymmetry assumptions or sign conditions on the associated potential.

As we shall see, in order to establish such blowup result we will need to restrict the choice of the admissible functions  $f$  and  $g$ . On the other hand, when available, our criterion is applicable

to a wider class of initial data. We are now in the position of establishing our theorem. Roughly speaking, under appropriate conditions on  $f$  and  $g$ , we get the finite time blowup as soon as

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{such that } u'_0(x_0) < -\beta|u_0(x_0) - c|, \quad (2.4)$$

where  $\beta$  and  $c$  are two real constants depending on the shape of the functions  $f$  and  $g$ .

We obtain two slightly different versions when  $g$  is bounded from below, or when  $g$  is bounded from above. Both cases turn out to be physically interesting.

**Theorem 2.2.** *Let  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , with  $s > 3/2$ . Let  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  with  $f'' \geq \gamma > 0$ . The maximal time  $T^*$  of the solution  $u$  to problem (2.2) in  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$  must be finite, if at least one of the two following conditions (1) or (2) is fulfilled:*

- (1) –  $\exists c \in \mathbb{R}$  such that  $m = g(c) = \min_{\mathbb{R}} g$ .  
 – The map  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  given by  $\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g - m)}$  is  $K$ -Lipschitz with  $0 \leq K \leq 1$ .  
 –  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  such that  $u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1)|u_0(x_0) - c|$ .
- (2) Or, otherwise,  
 –  $\exists c \in \mathbb{R}$  such that  $M = g(c) = \max_{\mathbb{R}} g$ .  
 – The map  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  given by  $\psi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(M - g)}$  is  $K$ -Lipschitz with  $0 \leq K \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ .  
 –  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  such that  $u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2})|u_0(x_0) - c|$ .

More precisely, the following upper bound estimate for  $T^*$  holds:

$$T^* \leq \frac{4}{\gamma \sqrt{4u'_0(x_0)^2 - (\sqrt{1 \pm 8K^2} - 1)^2(u_0(x_0) - c)^2}}, \quad (2.5)$$

where in the term  $\pm 8K^2$  one has to take the positive sign under the conditions of Part (1) and the negative sign under the conditions of Part (2).

We will also establish a variant of this theorem for solutions that are not in  $H^s(\mathbb{R})$ . See [Theorem 4.1](#) below. This variant will apply to a large class of infinite energy solutions, as well as to solutions with non-vanishing and possibly different asymptotics as  $x \rightarrow +\infty$  and  $x \rightarrow -\infty$ . Another possible variant is obtained assuming that  $f$  is strictly concave, rather than strictly convex: in this case the blowup condition on  $u_0$  should be of the form:  $u'_0(x_0) > \beta|u_0(x_0) - c|$ .

**Remark 2.3** (Application to the Camassa–Holm equation). The case  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  and  $g(u) = \kappa u + u^2$  corresponds to the Camassa–Holm equation with dispersion (1.1). Situation (1) of [Theorem 2.2](#) applies (with  $c = -\kappa/2$ ,  $\phi(u) = \sqrt{u^2 + \kappa u + \kappa^2/4}$  and  $K = 1$ ).

We then immediately get the following corollary:

**Corollary 2.4.** *Let  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , with  $s > 3/2$  be such that at some point  $x_0 \in \mathbb{R}$  we have*

$$u'_0(x_0) < -\left|u_0(x_0) + \frac{\kappa}{2}\right|.$$

*Then the corresponding solution of the Camassa–Holm equation breaks down in finite time.*

This corollary could be also obtained from the special case  $\kappa = 0$  (established in [3]) via the change of unknown  $v(t, x) = u(t, x - \frac{\kappa}{2}t) + \frac{\kappa}{2}$ . Indeed, if  $u$  solves Eq. (1.1), then  $v$  solves the Camassa–Holm equation without dispersion. However, one should check that the proof of [3] does indeed go through when applied to  $v$ , which requires slight changes (the point is that the solution  $v$  does not vanish as  $x \rightarrow \infty$  as it was required in [3]).

**Remark 2.5** (Application to the classical rod equation). In the case  $f(u) = \frac{\gamma}{2}u^2$  and  $g(u) = \frac{3-\gamma}{2}u^2$ , corresponding to the classical rod equation, the conditions of our theorem are satisfied if and only if  $1 \leq \gamma \leq 4$ . Namely, situation (1) applies for  $1 \leq \gamma \leq 3$  and situation (2) applies for  $3 \leq \gamma \leq 4$ . Making explicit our blowup condition in this case, we see that solutions of the classical rod equation break down in finite time as soon as, at some point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , we have

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}|\sqrt{12-3\gamma} - \sqrt{\gamma}| |u_0(x_0)| \quad (1 \leq \gamma \leq 4). \tag{2.6}$$

This conclusion allows us to recover the result in [3]. Outside the range  $1 \leq \gamma \leq 4$  it seems difficult to get purely “local-in-space” blowup criteria in the same spirit as in Theorem 2.2. But non-local-in-space blowup conditions involving the computation of the  $\|u_0\|_{H^1}$  as in (2.3) still apply outside the above range for the parameter  $\gamma$ , see, e.g., [17,23].

Next section will be devoted to the proof of Theorem 2.2. The most immediate application of this theorem is that one can recover earlier blowup criteria, like that in (2.3), by a simple application of Sobolev imbedding theorems. In the last section we discuss some further consequences of Theorem 2.2 by establishing three corollaries. Such theorem and its variant, Theorem 4.1, imply that global solutions must satisfy quite stringent properties, including a not too fast decay of  $u(t, x) - c$  as  $|x| \rightarrow \infty$ , and sign restrictions for  $u(t, x) - c$ . Namely, we prove that the finite time blowup must occur if  $u_0(x) = c + o(e^{-\beta|x|})$  as  $|x| \rightarrow \infty$ . The finite time blowup must occur also if there exist  $x_1 < x_2$  such that  $u(t, x_1) > c > u(t, x_2)$ . Here, the constants  $\beta > 0$  and  $c \in \mathbb{R}$  are as in Theorem 2.2.

### 3. The proof of Theorem 2.2

**Proof of Theorem 2.2.** We can assume, without restriction, that  $s \geq 3$ . Indeed, if  $3/2 < s < 3$ , and  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  satisfies a condition of the form (2.4), then we can approximate  $u_0$  with a sequence of data belonging to  $H^3(\mathbb{R})$  and satisfying the same condition (2.4), and next use the well-posedness result recalled in Theorem 2.1. In what follows we then consider a solution  $u \in C([0, T^*) \cap H^3) \cap C^1([0, T^*), H^2)$ .

We start with a useful lemma:

**Lemma 3.1.** Let  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}$  denote one of the two indicator functions  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$  or  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}$ .

(1) If  $f$  and  $g$  satisfy the condition as in Theorem 2.2(1) then the following estimate holds:

$$(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}) * \left( g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right) \geq \frac{\alpha}{2}(g(u) - m) + \frac{m}{2} \tag{3.1}$$

with

$$\alpha = \frac{1}{4K^2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1). \tag{3.2}$$

(2) If  $f$  and  $g$  satisfy the condition as in [Theorem 2.2\(2\)](#), then we have:

$$(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}) * \left( g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right) \geq \frac{\alpha}{2}(g(u) - M) + \frac{M}{2} \tag{3.3}$$

with

$$\alpha = \frac{1}{4K^2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2}). \tag{3.4}$$

In the case  $g = m = M$  be a constant function (this corresponds to  $K = 0$ ), the right-hand side of the above convolution estimates reads  $(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}) * (g + \frac{f''(u)}{2}u_x^2) \geq g/2$ .

**Proof.** Let us consider the case of the indicator function  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ .

Under the conditions of [Theorem 2.2\(1\)](#) for  $f$  and  $g$ , we see that  $g - m \geq 0$  and that the zeros of  $g - m$  are of order at least two. Then  $\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g - m)}$  is differentiable, and by the Lipschitz condition  $|\phi'| \leq K$ . This in turn implies

$$(g')^2 \leq 4\gamma K^2(g - m).$$

Consider the quadratic polynomial in  $\lambda$ ,

$$P(\lambda) = \frac{\gamma}{2}\lambda^2 - \alpha g'(u)\lambda + b(g(u) - m),$$

where  $\alpha$  and  $b$  are constants to be determined below. We have  $P \geq 0$  on the real line if and only if  $\alpha^2(g'(u))^2 \leq 2\gamma b(g(u) - m)$ . We then choose

$$b = 2\alpha^2 K^2,$$

thus ensuring that indeed  $P \geq 0$ . Recalling  $f''(u) \geq \gamma$  and using the fact that  $P(u_x(\xi)) \geq 0$  for all real  $\xi$ , we now deduce that

$$\begin{aligned} (p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}) * \left( b(g(u) - m) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right)(x) &= \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^\xi \left( b(g(u) - m) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right)(\xi) d\xi \\ &\geq \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^\xi (\alpha g'(u)u_x)(\xi) d\xi \\ &= \alpha \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^\xi \frac{d}{d\xi} [g(u) - m](\xi) d\xi \\ &= \frac{\alpha}{2}(g(u) - m)(x) - \alpha(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}) * (g(u) - m)(x). \end{aligned}$$

Hence,

$$(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}) * \left( (b + \alpha)(g(u) - m) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right) (x) \geq \frac{\alpha}{2}(g(u) - m)(x). \tag{3.5}$$

In order to get the first estimate of the lemma we need

$$b + \alpha = 1.$$

This boils down to the equation  $2K^2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ . Taking the largest real root we obtain expression (3.2) for  $\alpha$ . Now observing that  $(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}) * m = m \int_{\mathbb{R}} p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} = m/2$ , leads to estimate (3.1).

The reasoning when  $f$  and  $g$  satisfy the conditions of Theorem 2.2(2) is entirely analogous: one has  $(g')^2 \leq 4\gamma K^2(M - g)$ . We can thus consider the same polynomial as before, but choosing now  $b = -2\alpha^2 K^2$ . Reproducing the same computation as above (with  $M$  instead of  $m$ ) we find as before the relation  $\alpha + b = 1$ . Eliminating  $b$  gives the equation  $2K^2\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ . We thus need  $0 \leq K \leq 1/\sqrt{8}$  for this equation to admit real roots. Choosing now the smallest root gives (3.4) and estimate (3.3).

The convolution estimate involving  $p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}$  can be proved in a similar way. Indeed, under, e.g. the assumptions of Theorem 2.2(1) we have, for any  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{P}(\lambda) = \frac{\gamma}{2}\lambda^2 + \alpha g'(u)\lambda + b(g(u) - m) \geq 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned} (p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}) * \left( b(g(u) - m) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right) (x) &= \frac{e^x}{2} \int_x^\infty e^{-\xi} \left( b(g(u) - m) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right) (\xi) d\xi \\ &\geq \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} e^{-\xi} (-\alpha g'(u)u_x) (\xi) d\xi \\ &= \frac{\alpha}{2}(g(u) - m)(x) - \alpha(p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}) * (g(u) - m)(x), \end{aligned}$$

and we can proceed as in the previous case.  $\square$

Let us go back to the proof of Theorem 2.2. Taking the space derivative in Eq. (2.2), and recalling that  $(1 - \partial_x^2)p$  equals the Dirac mass at the origin, we get

$$u_{tx} + f'(u)u_{xx} = -\frac{f''(u)}{2}u_x^2 + g(u) - p * \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2 \right]. \tag{3.6}$$

We now consider the flow map, defined by

$$\begin{cases} q_t(t, x) = f'(u(t, q(t, x))), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ q(0, x) = x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.7}$$

where  $u$  is the solution of the problem (2.2) given by Theorem 2.1. Notice that the assumptions made on  $f$  and  $u$  imply that  $q \in C^1([0, T^*) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  is well defined on the whole time interval  $[0, T^*)$ .

We now proceed putting the conditions of Theorem 2.2(1). From (3.6), the uniform convexity condition  $f'' \geq \gamma > 0$ , and summing up the two convolution estimates for  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$  and  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}$  in (3.1), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u_x(t, q(t, x))] &= [u_{tx} + f'(u)u_{xx}](t, q(t, x)) \\ &= -\frac{f''(u)}{2}u_x^2 + g(u) - p * \left(g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2\right) \\ &\leq \left[-\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1 - \alpha)(g(u) - m)\right](t, q(t, x)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

By the definition of  $\alpha$  (3.2) we see that  $0 < \alpha \leq 1$ . We can express  $K$  in terms of  $\alpha$  as

$$2K^2 = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}. \quad (3.9)$$

The Lipschitz condition on

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g - m)}$$

provides the estimate  $\phi(u) \leq K|u - c|$ . We thus obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u_x(t, q(t, x))] &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1 - \alpha)\gamma\phi(u)^2 \\ &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1 - \alpha)K^2\gamma(u - c)^2 \\ &= \frac{\gamma}{2} \left( \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}(u - c)^2 - u_x^2 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Let us set

$$\beta := \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 2K^2\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1). \quad (3.11)$$

Next introduce

$$A(t, x) = (\beta(u - c) - u_x)(t, q(t, x)) \quad (3.12)$$

and

$$B(t, x) = (\beta(u - c) + u_x)(t, q(t, x)) \quad (3.13)$$



We then obtain from (3.10)

$$\frac{d}{dt}[u_x(t, q(t, x))] \leq \frac{\gamma}{2}(AB)(t, x). \tag{3.14}$$

On the other hand, the kernel  $p$  satisfies the identity (both in the distributional and a.e. point-wise sense)

$$\partial_x p = p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} - p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}.$$

Then we get, recalling the inequality  $f'' \geq \gamma$ ,

$$\begin{aligned} A_t(t, x) &= \beta(u_t + f'(u)u_x) - (u_{tx} + f'(u)u_{xx}) \\ &= \frac{f''(u)}{2}u_x^2 - g(u) + (p - \beta\partial_x p) * \left(g(u) + \frac{f''(u)}{2}u_x^2\right) \\ &\geq \frac{\gamma}{2}u_x^2 - g(u) + (1 + \beta)p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} * \left(g(u) + \frac{f''(u)}{2}\right) \\ &\quad + (1 - \beta)p\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} * \left(g(u) + \frac{f''(u)}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

We now would like to apply the convolution estimates (3.1). This can be done, provided we have  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Such additional condition is equivalent to  $\alpha \geq 1/2$  and this last condition is ensured by the restriction  $0 \leq K \leq 1$  made in the assumptions of Theorem 2.2(1). Now applying estimates (3.1) and reproducing the same calculations as in (3.10) gives

$$\begin{aligned} A_t(t, x) &\geq \frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha - 1)(g(u) - m) \\ &= \frac{\gamma}{2}u_x^2 - (1 - \alpha)\gamma\phi(u)^2 \\ &\geq \frac{\gamma}{2}(u_x^2 - \beta^2(u - c)^2) \\ &= -\frac{\gamma}{2}(AB)(t, x). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Similar computations yield the estimate

$$\begin{aligned} B_t(t, x) &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1 - \alpha)(g(u) - m) \\ &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1 - \alpha)\gamma\phi(u)^2 \\ &\leq \frac{\gamma}{2}(\beta^2(u - c)^2 - u_x^2) \\ &= \frac{\gamma}{2}(AB)(t, x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

By our assumption on the initial datum made in Part (1) of [Theorem 2.2](#),

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}(\sqrt{1+8K^2}-1)|u_0(x_0)-c|.$$

According to the definition of  $\beta$  [\(3.11\)](#), this can be re-expressed as

$$u'_0(x_0) < -\beta|u_0(x_0)-c|,$$

or, equivalently, as

$$A(0, x_0) > 0 \quad \text{and} \quad B(0, x_0) < 0.$$

Let

$$\tau = \sup\{t \in [0, T^*): A(\cdot, x_0) > 0 \text{ and } B(\cdot, x_0) < 0 \text{ on } [0, t]\}.$$

By continuity,  $\tau > 0$ . If  $\tau < T^*$ , then at least one of the inequalities  $A(\tau, x_0) \leq 0$  and  $B(\tau, x_0) \geq 0$  must hold true. This contradicts the fact that on the interval  $[0, \tau[$ , we have  $(AB)(\cdot, x_0) < 0$ , hence  $A(\tau, x_0) \geq A(0, x_0) > 0$  by [\(3.16\)](#) and  $B(\tau, x_0) \leq B(0, x_0) < 0$  by [\(3.17\)](#). Thus  $\tau = T^*$ . Summarizing, we can say that during the whole existence time  $[0, T^*)$ :

$$\begin{cases} A(\cdot, x_0) \text{ is positive and increasing,} \\ B(\cdot, x_0) \text{ is negative decreasing,} \\ AB(\cdot, x_0) \text{ negative and decreasing.} \end{cases} \quad (3.18)$$

We are now in the position of proving that  $T^* < \infty$ : let us consider

$$h(t) = \sqrt{-(AB)(t, x_0)}.$$

Computing the time derivative of  $h$ , next applying the differential inequalities [\(3.16\)](#) and [\(3.17\)](#) and the geometric–arithmetic mean inequality  $\frac{A-B}{2}(t, x_0) \geq h(t)$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= -\frac{A_t B + A B_t}{2\sqrt{-AB}}(t, x_0) \\ &\geq \frac{\gamma(-AB)(A-B)}{4\sqrt{-AB}}(t, x_0) \\ &\geq \frac{\gamma}{2}h^2(t). \end{aligned}$$

But  $h(0) = \sqrt{-AB(0, x_0)} > 0$ . Hence the solution blows up in finite time and  $T^* < \frac{2}{\gamma h(0)}$ . Recalling the definitions of  $A, B$  we thus get the estimate for  $T^*$

$$T^* \leq \frac{2}{\gamma \sqrt{u'_0(x_0)^2 - \beta^2(u_0(x_0) - c)^2}}$$

that agrees with that given in [\(2.5\)](#)

The necessary changes to deal with the conditions of Part (2) of the theorem are slight. First of all, the relation between  $K$  and  $\alpha$  is now

$$2K^2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2},$$

instead of (3.9). On the other hand, owing to (3.4), we now have  $\alpha \geq 1$ . Then we can replace estimates (3.8)–(3.10) with

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u_x(t, q(t, x))] &= [u_{tx} + f'(u)u_{xx}](t, q(t, x)) \\ &\leq \left[ -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha - 1)(M - g(u)) \right](t, q(t, x)) \\ &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha - 1)\gamma\psi(u)^2 \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \left( \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2}(u - c)^2 - u_x^2 \right). \end{aligned}$$

As the coefficient  $\beta$  now given by  $\beta := 2K^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2})$ , the required condition  $-1 \leq \beta \leq 1$  does not bring any additional restriction on the Lipschitz constant  $K$ . The last part of the proof proceeds in the same manner.  $\square$

**Remark 3.2.** In some cases, the equality holds in (3.1) and (3.3) for some specific choices of the function  $u$ . This happens (e.g. in the case (1)) when the functions  $g$  and  $f$  are such that

$$2\alpha^2(\phi')^2 = (1 - \alpha)f'' \text{ in all points where } \phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g - m)} \text{ does not vanish.} \quad (3.19)$$

Indeed, such condition tells us that the discriminants of  $P$  and  $\tilde{P}$  vanish. In this case, take  $u$  such that, at some point  $x_0$ ,

$$\begin{cases} u_x(t, \xi) = \frac{\alpha g'(u(t, \xi))}{f''(u(t, \xi))}, & \text{if } \xi < x_0, \\ u_x(t, \xi) = -\frac{\alpha g'(u(t, \xi))}{f''(u(t, \xi))}, & \text{if } \xi > x_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Then we have  $P(u_x(t, x_0)) = \tilde{P}(u_x(t, x_0)) = 0$ . This in turn implies that the equality holds at the point  $x_0$  in (3.1). In the particular case of the Camassa–Holm equation,  $f(u) = u^2/2$ ,  $g(u) = u^2$  and  $\alpha = 1/2$ . Thus condition (3.19) is satisfied. Next imposing the continuity of  $u$ , the system (3.20) boils down to the differential equations defining the peaked solitons  $u_c(x, t) = ce^{|x-ct|}$ .

#### 4. Further consequences and conclusions

We established the finite time blowup for solutions of the generalized rod equation

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[ g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]_x = 0,$$

under appropriate conditions on the functions  $f$  and  $g$ , provided the initial datum  $u_0$  ( $s > 3/2$ ), satisfies

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{such that } u'_0(x_0) < -\beta |u_0(x_0) - c|,$$

where  $\beta$  and  $c$  are two real constants depending on the shape of the functions  $f$  and  $g$ .

In stating [Theorem 2.2](#), we considered for simplicity solutions  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ . These are known to uniquely exist provided the initial datum is such that  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , with  $s > 3/2$ . In particular, such solutions are of finite energy and vanish as  $|x| \rightarrow \infty$ .

However, a closer look to the proof of [Theorem 2.2](#) reveals that our arguments go through also in the case of *infinite energy solutions*, possibly *non-vanishing* at infinity. Of course, the problem arises of finding a suitable functional setting in order to get the local existence and the uniqueness of this type of solutions. This problem has been successfully addressed in [\[22\]](#), at least in the Camassa–Holm case and for solutions admitting possibly distinct limits as  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Rather than restating [Theorem 2.2](#) relying on well-posedness results more general than those in the  $H^s$ -setting, let us assume that we are given *a priori* a solution  $u \in C^1([0, T^*), C^2(\mathbb{R}))$  of the generalized rod equation, written in its non-local form [\(2.2\)](#), for some  $0 < T^* \leq +\infty$ . We need to put also two *a priori* growth conditions on  $u$ :

- (i) We first assume that  $u$  is such that the integrals in [Lemma 3.1](#) converge (in particular the convolution term in [\(2.2\)](#) makes sense): this is a very mild condition, that would allow us to take into account also unbounded solutions (e.g. solutions with polynomial growth, when  $g$  and  $f$  are polynomials).
- (ii) We assume that the flow map in [\(3.7\)](#) is well defined on the whole time interval  $[0, T^*)$ : this leads us to restrict ourselves to solutions  $u$  such that  $|f' \circ u|$  is bounded, uniformly on compact time intervals, by an affine function of the  $x$  variable.

The above conditions, in particular, encompass the case of smooth solutions  $u$  to [\(2.2\)](#), such that both  $u(t, \cdot)$  and  $u_x(t, \cdot)$  are bounded on  $\mathbb{R}$  (uniformly with respect to  $t$  on compact time intervals).

Hence, we obtain the following variant of [Theorem 2.2](#):

**Theorem 4.1.** *Let  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  with  $f'' \geq \gamma > 0$ . Let  $u \in C([0, T^*), W^{1,\infty}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T^*), C^2(\mathbb{R}))$ , with  $0 < T^* \leq \infty$ , be a solution of the Cauchy problem for the generalized rod equation [\(2.2\)](#). Assume that at least one of the conditions (1) or (2) of [Theorem 2.2](#) is fulfilled. Then  $T^* < \infty$  and  $T^*$  is bounded from above by [\(2.5\)](#).*

*In particular, if  $g$  is constant and  $u_0$  is non-constant, then  $u$  blows up in finite time.*

The very last statement of [Theorem 4.1](#) generalizes the known fact, [\[17\]](#), that for the classical rod equation in the limit case  $\gamma = 3$  (that corresponds to  $g \equiv 0$ ), any nonzero initial data gives rise to a solution that blows up.

The above discussion applies in particular to periodic solutions: hence, the statement of [Theorem 2.2](#) remains valid for solutions  $u \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , with  $s > 3/2$ , where  $\mathbb{S}$  denotes the one-dimensional torus. It should be pointed, however, that the estimates of [Lemma 3.1](#) (that are optimal for  $u \in H^s(\mathbb{R})$ , at least for a few specific choices of  $f$  and  $g$ ) are no longer optimal when  $u \in H^s(\mathbb{S})$ . Improving such estimates would require the application of variational methods. Therefore, we expect that in the case of the torus, the restriction on the Lipschitz constant  $K$  appearing in [Theorem 2.2](#) could be relaxed and the estimate on the coefficient  $\beta$  appearing in [\(2.4\)](#) improved. See [\[4\]](#) for results in this direction in the case of the classical period rod equation.

We finish this paper establishing three simple corollaries of our blowup results. The first corollary establishes a relation between the behavior at the spatial infinity and the blow up.

**Corollary 4.2.** *Let  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  with  $f'' \geq \gamma > 0$  be such that at least one of the two following conditions is satisfied (the maps  $\phi$  and  $\psi$  are as in [Theorem 2.2](#)):*

- (1)  $\min_{\mathbb{R}} g = g(c)$  and  $\phi$  is  $K$ -Lipschitz with  $0 \leq K \leq 1$ , or otherwise
- (2)  $\max_{\mathbb{R}} g = g(c)$  and  $\psi$  is  $K$ -Lipschitz with  $0 \leq K \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ .

*If  $u \in C([0, T^*), W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  is a smooth solution of the generalized rod equation [\(2.1\)](#) arising from an initial datum  $u_0 \not\equiv c$  such that*

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x} (u_0(x) - c) \leq 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} e^{-\beta x} (u_0(x) - c) \geq 0, \tag{4.1}$$

*where  $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1)$  (in the case (1)), or  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2})$  (in the case (2)), then  $u$  must blow up in finite time.*

*In particular, a blow up occurs if  $u_0 \not\equiv c$  is such that  $u_0(x) = c + o(e^{-\beta|x|})$  for  $|x| \rightarrow \infty$ .*

A result in the same direction as in [Corollary 4.2](#) appeared in [\[2\]](#) in the case of the Camassa–Holm equation (see also [\[25\]](#) for earlier results in the same spirit), where well-posedness issues in weighted spaces were thoroughly discussed. However, the proof given in [\[2\]](#) does not go through for [Eq. \(2.2\)](#), as it deeply relies on McKean’s necessary and sufficient condition for the global existence of solutions of the Camassa–Holm equations.

The second corollary establishes a relation between blow up and sign changes for  $u_0 - c$ .

**Corollary 4.3.** *Let  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  as in [Corollary 4.2](#) and let  $u \in C([0, \infty), W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  be a global smooth solution of the rod equation [\(2.1\)](#). Then, for all  $t \geq 0$ ,*

- i) *either  $u(t, x) > c$  for all  $x \in \mathbb{R}$ ,*
- ii) *or  $u(t, x) < c$  for all  $x \in \mathbb{R}$ ,*
- iii) *or  $\exists x_t \in \mathbb{R}$  such that  $u(t, \cdot) \leq c$  in  $(-\infty, x_t]$  and  $u(t, x) \geq c$  in  $[x_t, +\infty)$ . In this case, if  $x \mapsto u(t, x)$  is equal to  $c$  at two distinct points of the real line, then  $x \mapsto u(t, x)$  must be constant  $= c$  in the whole interval between them.*

Our last corollary is a unique continuation result valid for *periodic* solutions. Let  $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  denote the one-dimensional torus. The local-in-time well posedness result of periodic solutions in  $C([0, T], H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{S}))$  for  $s > 3/2$ , together with the mean  $\int_{\mathbb{S}} u(t) dx = \int_{\mathbb{S}} u_0 dx$  and the energy  $\int_{\mathbb{S}} (u^2 + u_x^2)(t) dx = \int_{\mathbb{S}} (u_0^2 + (u_0)_x^2) dx$  conservation laws, can be established following the steps of [36].

**Corollary 4.4.** *Under the conditions of Corollary 4.2 for  $f$  and  $g$ , the identically constant solution  $u \equiv c$  (where  $c = \arg \min g$ , or  $c = \arg \max g$ ) is the only global, smooth and spatially periodic solution of the generalized rod equation (2.1) with time-independent energy, such that  $u_0(x_0) = c$  for some  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Proof of Corollaries 4.2, 4.3 and 4.4.** If  $u$  is a global smooth solution in  $C([0, \infty), W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  of the generalized rod equation (2.1) then, by Theorem 4.1, for all  $t \geq 0$  and for all  $x \in \mathbb{R}$  we must have  $u_x(t, x) \geq \beta|u(t, x) - c|$ , with  $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8K^2} - 1)$  (in the case (1)), or  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 8K^2})$  (in the case (2)).

If  $[a, b]$  is an interval where  $u(t, x) \geq c$  for all  $x \in [a, b]$ , then we have

$$\begin{aligned} - \int_a^b \beta e^{\beta x} (u(t, x) - c) dx &\leq \int_a^b e^{\beta x} u_x(t, x) dx \\ &= e^{\beta b} (u(t, b) - c) - e^{\beta a} (u(t, a) - c) - \beta \int_a^b e^{\beta x} (u(t, x) - c) dx. \end{aligned}$$

This implies that  $e^{\beta a} (u(t, a) - c) \leq e^{\beta b} (u(t, b) - c)$ .

If  $u(t, \cdot) \leq c$  on  $[a, b]$ , then applying again Theorem 4.1 we have  $u_x(t, x) \geq \beta_\gamma (u(t, x) - c)$ . This in turn implies

$$\begin{aligned} \int_a^b \beta e^{-\beta x} (u(t, x) - c) dx &\leq \int_a^b e^{-\beta x} u_x(t, x) dx \\ &= e^{-\beta b} (u(t, b) - c) - e^{-\beta a} (u(t, a) - c) + \beta \int_a^b e^{-\beta x} (u(t, x) - c) dx. \end{aligned}$$

We then conclude that  $e^{-\beta a} (u(t, a) - c) \leq e^{-\beta b} (u(t, b) - c)$ .

Summarizing, we proved that  $x \mapsto e^{\beta x} (u(x, t) - c)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \geq c$  and  $x \mapsto e^{-\beta x} (u(x, t) - c)$  is monotone increasing in any interval where  $u(\cdot, t) \leq c$ .

Corollaries 4.2, 4.3 and 4.4 now easily follow from these monotonicity properties. Indeed, if  $u_0(x_0) > c$  at some point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , then for all  $x > x_0$ , we have  $u_0(x) - c > e^{-\beta(x-x_0)} (u_0(x_0) - c)$ , hence  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x} (u_0(x) - c) > 0$ . In the same way, we see that if  $u_0(x_0) < c$ , at some point  $x_0$ , then  $\limsup_{x \rightarrow -\infty} e^{-\beta x} (u_0(x) - c) < 0$ . The claim of Corollary 4.2 immediately follows. On the other hand, if we exclude the two situations i) and ii) in Corollary 4.3, then

$u(t, x_t) = c$  at some point  $x_t \in \mathbb{R}$ ; in the interval  $(-\infty, x_t]$  we must have  $u(t, x) \leq c$ : otherwise, if  $u - c$  is strictly positive at some point  $x' < x_t$ , then we would get, for all  $x \geq x'$ ,  $u(t, x) - c > e^{-\beta(x-x')}(u(t, x') - c)$  and in particular  $u(t, x_t)$  could not be equal to  $c$ . In the same way, we see that we must have  $u(t, x) \geq c$  in the interval  $[x_t, \infty)$ . Such argument proves also that as soon  $u(t, \cdot)$  vanishes at two points  $x_t < y_t$ , then  $u(t, \cdot)$  must vanish in the whole interval  $[x_t, y_t]$ . The claim of [Corollary 4.3](#) follows. In the periodic case, if  $u$  is a global smooth solution such that  $u_0(x_0) = c$  at some point  $x_0$ , then by [Corollary 4.3](#)  $u_0 \equiv c$ . Inside the class of energy-preserving solutions, this in turn implies that  $u \equiv c$ . [Corollary 4.4](#) is thus established.  $\square$

In the special case of the Camassa–Holm equation without dispersion ( $\kappa = 0$ ), [Corollary 4.3](#) ensures that a sufficient condition for the breakdown is that the initial data satisfy the sign condition  $\exists x_1 < x_2$  such that  $u_0(x_1) > 0 > u_0(x_2)$ . This should be compared with the blowup condition of McKean’s theorem, that reads:  $\exists x_1 < x_2$  such that  $y_0(x_1) > 0 > y_0(x_2)$ , where  $y_0 = u_0 - (u_0)_{xx}$  is the associated potential. McKean’s theorem is more precise, as it provides a *necessary and sufficient* condition for the wave-breaking of the dispersionless Camassa–Holm equation, see [\[34\]](#). However, as already observed, McKean’s arguments deeply rely on the persistence properties of the sign of the potential  $y$  during the evolution — a byproduct of the bi-hamiltonian structure — that are no longer valid for the general equation [\(2.2\)](#).

## References

- [1] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 272 (1220) (1972) 47–78.
- [2] L. Brandolese, Breakdown for the Camassa–Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 22 (2012) 5161–5181.
- [3] L. Brandolese, Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations, *Comm. Math. Phys.* (2014), <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-014-1958-4>, in press, arXiv:1210.7782.
- [4] L. Brandolese, M.F. Cortez, On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings, *J. Funct. Anal.* (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2014.02.039>, in press, arXiv:1311.5170.
- [5] A. Bressan, A. Constantin, Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183 (2) (2007) 215–239.
- [6] A. Bressan, A. Constantin, Global dissipative solutions of the Camassa–Holm equation, *Anal. Appl.* 5 (2007) 1–27.
- [7] V. Busuioc, On second grade fluids with vanishing viscosity, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 328 (12) (1999) 1241–1246.
- [8] R. Camassa, L. Holm, An integrable shallow–water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 1661–1664.
- [9] R. Camassa, L. Holm, J.M. Hyman, A new integrable shallow–water equation, *Adv. Appl. Mech.* 31 (1994) 1–33.
- [10] G.M. Coclite, H. Holden, K.H. Karlsen, Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation, *SIAM J. Math. Anal.* 37 (4) (2005) 1044–1069.
- [11] A. Constantin, Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50 (2000) 321–362.
- [12] A. Constantin, J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, *Acta Math.* 181 (2) (1998) 229–243.
- [13] A. Constantin, B. Kolev, Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle, *Comment. Math. Helv.* 78 (4) (2003) 787–804.
- [14] A. Constantin, D. Lannes, The hydrodynamical relevance of the Camassa–Holm and Degasperis–Procesi equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 192 (1) (2009) 165–186.
- [15] A. Constantin, H. McKean, A shallow water equation on the circle, *Comm. Pure Appl. Math.* 52 (8) (1999) 949–982.
- [16] A. Constantin, W.A. Strauss, Stability of peakons, *Comm. Pure Appl. Math.* 53 (5) (2000) 603–610.
- [17] A. Constantin, W.A. Strauss, Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods, *Phys. Lett. A* 270 (3–4) (2000) 140–148.
- [18] H.-H. Dai, Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney–Rivlin rod, *Acta Mech.* 127 (1–4) (1998) 193–207.

- [19] H.-H. Dai, Y. Huo, Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 456 (2000) 331–363.
- [20] R. Danchin, A few remarks on Camassa–Holm equation, *Differential Integral Equations* 14 (2001) 953–988.
- [21] B. Fuchssteiner, A.S. Fokas, Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries, *Phys. D* 4 (1) (1981/1982) 47–66.
- [22] K. Grunert, H. Holden, X. Raynaud, Global conservative solutions of the Camassa–Holm for initial data with non-vanishing asymptotics, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 32 (2012) 4209–4227.
- [23] Zhengguang Guo, Yong Zhou, Wave breaking and persistence properties for the dispersive rod equation, *SIAM J. Math. Anal.* 40 (6) (2009) 2567–2580.
- [24] S. Hakkaev, K. Kirchev, Local well-posedness and orbital stability of solitary wave solutions for the generalized Camassa–Holm equation, *Comm. Partial Differential Equations* 30 (4–6) (2005) 761–781.
- [25] A.A. Himonas, G. Misiołek, G. Ponce, Y. Zhou, Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa–Holm equation, *Comm. Math. Phys.* 271 (2) (2007) 511–522.
- [26] H. Holden, X. Raynaud, Global conservative solutions of the generalized hyperelastic-rod wave equation, *J. Differential Equations* 233 (2) (2007) 448–484.
- [27] H. Holden, X. Raynaud, Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation. A Lagrangian point of view, *Comm. Partial Differential Equations* 32 (2007) 1–27.
- [28] R.S. Johnson, Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves, *J. Fluid Mech.* 455 (2002) 63–82.
- [29] T. Kato, Quasi-linear equation of evolution, with applications to partial differential equations, in: *Spectral Theory and Differential Equations*, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 448, 1975, pp. 25–70.
- [30] B. Kolev, Bi-Hamiltonian systems on the dual of the Lie algebra of vector fields of the circle and periodic shallow water equations, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 365 (1858) (2007) 2333–2357.
- [31] J. Lenells, Traveling waves in compressible elastic rods, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 6 (1) (2006) 151–167 (electronic).
- [32] Y.A. Li, P.J. Olver, Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *J. Differential Equations* 162 (1) (2000) 27–63.
- [33] Y. Liu, Global existence and blow-up solutions for a nonlinear shallow water equation, *Math. Ann.* 335 (3) (2006) 717–735.
- [34] H.P. McKean, Breakdown of the Camassa–Holm equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 57 (3) (2004) 416–418.
- [35] G. Misiołek, A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott–Virasoro group, *J. Geom. Phys.* 24 (3) (1998) 203–208.
- [36] C. Tian, W. Yan, H. Zhang, The Cauchy problem for the generalized hyperelastic rod equation, *Math. Nachr.* (2014), in press.
- [37] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, *Pure Appl. Math.* (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, Reprint of the 1974 original, A Wiley–Interscience Publication.
- [38] Z. Yin, Well-posedness, global solutions and blowup phenomena for a nonlinearly dispersive wave equation, *J. Evol. Equ.* 4 (3) (2004) 391–419.
- [39] Y. Zhou, Wave breaking for a shallow water equation, *Nonlinear Anal.* 57 (1) (2004) 137–152.
- [40] Y. Zhou, Local well-posedness and blow-up criteria of solutions for a rod equation, *Math. Nachr.* 278 (14) (2005) 1726–1739.





## 5.1 Introduction

The bi-Hamiltonian structure of certain evolution equations leads to various remarkable features such as infinitely many symmetries and conserved quantities, and in some cases to the exact solvability of these equations [29, 33]. Examples include the KdV equation [7] and the Benjamin-Ono equation [1]. Years later, R. Camassa and D. Holm [5] in their studies of completely integrable dispersive shallow water equation tackled the following equation,

$$u_t + ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = uu_{xxx} + 2u_xu_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (\text{C-H})$$

where  $u$  can be interpreted as a horizontal velocity of the water at a certain depth and  $k$  as the dispersion parameter. The equation (C-H) also has been derived independently by B. Fuchssteiner and A. Fokas in [21]. When  $k = 0$  (dispersionless case), the equation (C-H) possess soliton solutions peaked at their crest (often named peakons) [2, 5, 6]. Equation (C-H) is obtained by using an asymptotic expansion directly in the Hamiltonian for Euler's equation in the shallow water regime. Like the KdV equation, the Camassa-Holm equation (C-H) describes the unidirectional propagation of waves at the surface of shallow water under the influence of gravity [5, 7]. The equation (C-H) is physically relevant as it also describes the nonlinear dispersive waves in compressible hyperelastic rods [2, 3, 24]. It is convenient to rewrite the Cauchy problem associated with the dispersionless case of (C-H) in the following weak form:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \partial_x p * \left( u^2 + \frac{u_x^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{A}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{A}, \end{cases} \quad (5.1)$$

where  $p(x)$  is the fundamental solution of the operator  $1 - \partial_x^2$  in  $\mathbb{A}$ . If  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , we refer (6.2) as the non-periodic Camassa-Holm equation and  $p = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  in this case. If otherwise that  $\mathbb{A} = \mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  is unit circle, we refer (6.2) as the periodic Camassa-Holm equation, and  $p = \frac{\cosh(x-[x]-\frac{1}{2})}{2 \sinh(\frac{1}{2})}$  in this case. It is know that both the non-periodic and periodic Camassa-Holm equations are locally well-posed (in the sense Harmard) in the Sobolev space  $H^s$ , with  $s > \frac{3}{2}$ . See [14, 25, 34]. There is an abundance of the literature about the issue of the finite time blowup (see [2–4, 9, 17, 22, 26, 66]) and the related issue of the global existence of strong solutions ([10, 17, 22]).

On the other hand, Degasperis and Procesi [28], in their search of new integrability properties inside a wide class of equations, were led to consider the following integrable equation:

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (\text{D-P})$$

As before, it is convenient to rewrite the Cauchy problem, using the same notations

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \partial_x p * \left(\frac{3}{2}u^2\right) = 0, & x \in \mathbb{A}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{A}. \end{cases} \quad (5.2)$$

A few years later, equation (5.2) as been proved to be relevant in shallow water dynamics, see [11, 12, 30]. Both the Camassa–Holm equation and the the Degasperis-Procesi equation (D-P) possess a bi-Hamiltonian structure (see[28]). The local well-posedness in  $H^s$ , with  $s > \frac{3}{2}$  for the Cauchy non periodic problem was elaborated in [72], and [81] for the Cauchy periodic problem. With respect to blow-up criteria on the line we refer to [28, 62, 83, 85] and, for the unit tours, to [81, 83]. For the existence globally of the solution, see [62, 72, 83]. Despite sharing some properties with the Camassa-Holm equation, the Degasperis-Procesi has its own peculiarities. A specific feature is that (D-P) admits, beside peakons (i.e., soliton solutions of the form  $u(t, x) = ce^{-|x-ct|}$ ,  $c > 0$ ) also shock peakon solitons (i.e., solutions at the form  $u = \frac{1}{t+k} \text{sign}(x)e^{-|x-ct|}$ ,  $k > 0$ ). For more details see [31, 42, 64]. After these premises, we will now focus on the Cauchy problem for the spatially periodic  $b$ -family equations:

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} + uu_{xxx}, & x \in \mathbb{S}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{S}, \end{cases} \quad (5.3)$$

where  $\mathbb{S}$  is the unit tours. Here  $b$  is a real parameter, and  $u(x, t)$  stands for a horizontal velocity. The  $b$ -family equations can be derived as the family of asymptotically equivalent shallow water wave equations that emerges at quadratic-order accuracy for any  $b \neq 1$  by an appropriate Kodama transformation [28, 30]. Again, when  $b = 2$  and  $b = 3$  (5.3) became (C-H) and (D-P) respectively. These values are the only values for which (5.3) is completely integrable. The Cauchy problem for the  $b$ -equation is locally well posed in the Sobolev space  $H^s$  for any  $s > \frac{3}{2}$ , [32, 62, 70, 71]. In [63] it is proved that the solution map of the  $b$ -family equations is Holder continuous as a map from bounded sets of  $H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > \frac{3}{2}$  with the  $H^r(\mathbb{R})$  ( $0 \leq r < s$ ) topology, to  $C([0, T], H^r(\mathbb{R}))$ . J. Escher and J. Seiler [32] showed that the periodic  $b$ -family equation can be realized as Euler equation on the Lie group  $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S})$  of all smooth and orientation-preserving diffeomorphisms on the unit tours, if  $b = 2$  (C-H equation). The global existence theory of the solution of (5.3) is discussed in [32, 62, 71, 81]. In this paper we rather focus on blow-up criteria as well in estimates about the lifespan of the solutions. The blowup problem for the  $b$ -family equations has been already treated, e.g. in [26, 32, 70, 71, 83]: in these references the condition on the initial datum  $u_0$  leading to the blowup typically involves the computation of some global quantities (the Sobolev norm  $\|u_0\|_{H^1}$ , or some other integral expressions of  $u_0$ ). Motivated by the recent paper [2] (where earlier blowup results for the Camassa–Holm equations were unified in a single theorem) we address the more subtle problem of finding a local-in-space blowup criterion for the  $b$ -family equation, i.e., a blowup condition involving only the properties of  $u_0$  in a neighborhood of a single point  $x_0 \in \mathbb{S}$ .

Loosely, the contribution of this paper can be stated as follows: if the parameter  $b$  belongs to a suitable range (including the physically relevant cases  $b = 2$  and  $b = 3$ ), then then there exists a constant  $\beta_b > 0$  such that if

$$|u'_0(x_0)| \leq -\beta_b |u_0(x_0)|,$$

in at least one point  $x_0 \in \mathbb{S}$ , then the solution arising  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  ( $s > \frac{3}{2}$ ) must blow-up in finite time.

This paper is organized as follows. In the next section we start by introducing the relevant notations and function spaces, recalling a few basic results. Then we precisely state and prove our main theorem. An important part of our work will be devoted to the computations of sharp bounds for the constant  $\beta_b$  and the lifespan of the solution. The smallest  $b > 0$  to which our main theorem applies is computed numerically in the last part of the paper.

## 5.2 Blow-up for the periodic $b$ -family equations

It is convenient to rewrite the periodic Cauchy problem (5.3) in the following weak form (see [71]):

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \partial_x p * \left[ \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right] = 0, & x \in \mathbb{S}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{S} \\ u(t, x) = u(t, x + 1) & t \geq 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

where

$$p(x) = \frac{\cosh(x - [x] - \frac{1}{2})}{2 \sinh(\frac{1}{2})}, \quad (5.5)$$

is the fundamental solution of the operator  $1 - \partial_x^2$  and  $[\cdot]$  stands for the integer part of  $x \in \mathbb{R}$ . If  $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{S})) \cap C^1((0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$ , with  $s > \frac{3}{2}$  satisfies (5.4) then we call  $u$  a strong solution to (5.4). If  $u$  is a strong solution on  $[0, T)$  for every  $T > 0$ , then is called global strong solution of (5.4).

If  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ , an application of Kato's method [24] leads to the following local well-posedness result:

**Theorem 5.2.1** (See [71]). *For any constant  $b$ , given  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ , then there exists a maximal time  $T^* = T^*(\|u_0\|_{H^s}) > 0$  and a unique strong solution  $u$  to (5.4), such that*

$$u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S})). \quad (5.6)$$

Moreover, the solution depends continuously on the initial data, i.e. the mapping  $u_0 \mapsto u(\cdot, u_0) : H^s(\mathbb{S}) \rightarrow C([0, T^*]; H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*]; H^{s-1}(\mathbb{S}))$  is continuous.

*Remark 5.2.2.* The maximal lifespan of the solution in Theorem 5.2.1 may be chosen independently of  $s$  in the following sense: If  $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$  to (5.4) and  $u_0 \in H^{s'}(\mathbb{S})$  for some  $s' \neq s$ ,  $s' > \frac{3}{2}$ , then  $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T^*), H^{s'}(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s'-1}(\mathbb{S}))$  and with same  $T^*$ . In particular, if  $u_0 \in \cap_{s \geq 0} H^s$ , then  $u \in C([0, T^*), H^\infty(\mathbb{S}))$ . See [70, 71].

Moreover, by using the Theorem 5.2.1 and energy estimates, the following precise blow-up scenario of the solution to (5.4) can be obtained.

**Theorem 5.2.3** (See [70, 71]). *Assume  $b \in \mathbb{R}$  and  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ . Then blow up of the strong solution  $u = u(\cdot, u_0)$  in finite time occurs if only if*

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{(2b - 1) \inf_{x \in \mathbb{R}} [u_x(t, x)]\} = -\infty \quad (5.7)$$

Before presenting our contribution, we will review a few known blow-up theorems with respect to (5.4).

**Theorem 5.2.4** (See [71]). *Let  $\frac{5}{3} < b \leq 3$  and  $\int_{\mathbb{S}} (u_0')^3(x) dx < 0$ . Assume that  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ , and the corresponding solution  $u(t)$  (5.4) has a zero for any time  $t \geq 0$ . Then, the solution  $u(t)$  of the (5.4) blows-up finite time.*

The next blow-up theorem uses the fact that if  $u(t, x)$  is a solution to (5.4) with initial datum  $u_0$ , then  $-u(t, -x)$  is also a solution to (5.4) with initial datum  $-u_0(-x)$ . Hence due to the uniqueness of the solutions, the solution to (5.4) is odd as soon as the initial datum  $u_0(x)$  is odd.

**Theorem 5.2.5** (See [70]). *Let  $1 < b \leq 3$  and  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$   $s > \frac{3}{2}$  be odd and nonzero. If  $u_0'(0) \leq 0$ , then the corresponding solution of (5.4) blow-up in finite time.*

## Notations

For any real  $\beta$ , let us consider the 1-periodic function

$$w(x) = p(x) + \beta \partial_x p(x) \quad (5.8)$$

where  $p$  is the kernel introduced in (5.4) and  $\partial_x p$  denotes the distributional derivative on  $\mathbb{R}$ , that agrees in this case with the classical i.e pointwise derivative on  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Notice that the non-negativity condition  $w \geq 0$  is equivalent to the inequality  $\cosh(1/2) \geq \pm \beta \sinh(1/2)$ , i.e., to the condition

$$-\frac{e+1}{e-1} \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}.$$

Throughout this section, we will work under the above condition on  $\beta$ . Let us now introduce the following weighted Sobolev space:

$$E_\beta = \{u \in L^1_{loc}(0, 1) : \|u\|_{E_\beta}^2 = \int_0^1 w(x)(u^2 + u_x^2)(x) dx < \infty\}, \quad (5.9)$$

where the derivative is understood in the distributional sense. Notice that  $E_\beta$  agrees with the classical Sobolev space  $H^1(0, 1)$  when  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ , as in this case  $w$  is bounded and bounded away from 0, and the two norms  $\|\cdot\|_{E_\beta}$  and  $\|\cdot\|_{H^1}$  are equivalent. The situation is different for  $\beta = \pm \frac{e+1}{e-1}$  as  $E_\beta$  is strictly larger than  $H^1(0, 1)$  in this case. Indeed, we have

$$w(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(x), \quad x \in (0, 1), \quad \left(\text{if } \beta = \frac{e+1}{e-1}\right); \quad (5.10)$$

The elements of  $E_{(e+1)/(e-1)}$ , after modification on a set of measure zero, are continuous on  $(0, 1]$ , but may be unbounded for  $x \rightarrow 0^+$  (for instance,  $|\log(x/2)|^{1/3} \in E_{(e+1)/(e-1)}$ ). In the same way,

$$w(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh(1-x), \quad x \in (0, 1), \quad \left(\text{if } \beta = -\frac{e+1}{e-1}\right); \quad (5.11)$$

after modification on a set of measure zero, the elements of  $E_{-(e+1)/(e-1)}$  are continuous on  $[0, 1)$ , but may be unbounded for  $x \rightarrow 1^-$ .

Let us now introduce the closed subspace  $E_{\beta,0}$  of  $E_\beta$  defined as the closure of  $C_c^\infty(0, 1)$  in  $E_\beta$ . The elements of  $E_{\beta,0}$  satisfy the weighted Poincaré inequality below:

**Lemma 5.1.** For all  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ , there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\forall v \in E_{\beta,0}, \quad \int_0^1 w(x) v^2(x) dx \leq C \int_0^1 w(x) v_x^2(x) dx. \quad (5.12)$$

*Proof.* This demonstration is found in [4]. □

We need some notations.

**Définition 5.1.** For any real constant  $b \neq 1$  and  $\beta$ , let  $J(b, \beta) \geq -\infty$ , be defined by

$$J(b, \beta) = \inf \left\{ \int_0^1 (p + \beta \partial_x p) \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) dx; u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\} \quad (5.13)$$

and

$$\beta_b = \inf \left\{ \beta > 0 : \beta^2 + \frac{2}{|b-1|} \left( J(b, \beta) - \frac{b}{2} \right) \geq 0 \right\}. \quad (5.14)$$

Notice that a priori  $0 \leq \beta_b \leq +\infty$ , as the set on the right-hand side could be empty.

## Main results

Let us now formalize the goal of this paper.

**Theorem 5.2.6.** Let  $b \in ]1, 3]$  be such that  $\beta_b$  is finite. Let  $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$  be with  $s > \frac{3}{2}$  and assume that there exists  $x_0 \in \mathbb{S}$ , such that

$$u_0'(x_0) < -\beta_b |u_0(x_0)|. \quad (5.15)$$

then the corresponding solution  $u$  of (5.4) in  $C([0, T^*), H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T^*), H^{s-1}(\mathbb{S}))$  arising from  $u_0$  blows up in finite time. Moreover, the maximal time  $T^*$  verifies

$$T^* \leq \frac{2}{(b-1) \sqrt{(u_0'(x_0))^2 - \beta_b^2 u_0^2(x_0)}}. \quad (5.16)$$

*Remark 5.2.7.* Notice that the Theorem 5.2.6 relies on the condition that  $\beta_b$  is finite. In section 2, we will prove that one indeed has  $\beta_b < +\infty$ , as soon as  $b$  is outside a very small neighborhood of 1. On the other hand, as we will see later on, for  $1 < b < 1.0012\dots$ ,  $\beta_b = +\infty$  and Theorem 5.2.6 does not apply in such range.

For the proof of Theorem 5.2.6, we need the following propositions.

**Proposition 5.2.1.** We have

$$J(b, \beta) > -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}, \\ b \leq 3, \\ \frac{b}{3-b} > -\frac{1}{C_\beta}, \end{cases} \quad (5.17)$$

where  $C_\beta > 0$  is the best Poincaré constant in inequality (5.12).

*Proof.* Putting  $u = v + 1$  and observing that  $\int_0^1 w(x) dx = 1$ , we see that

$$J(b, \beta) = \frac{b}{2} + \inf\{T(v) : v \in H_0^1(0, 1)\}, \quad (5.18)$$

where

$$T(v) = \int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2}(v^2 + 2v) + \left( \frac{3-b}{2} \right) v_x^2 \right) (x) dx. \quad (5.19)$$

Assume that  $J(b, \beta) > -\infty$ . In order to show  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ , we refer to the proof of proposition 3.3. in [4]. In order to prove  $b \leq 3$ , we consider  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$  and

$$u_n(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(n2\pi x) \Rightarrow u_n'(x) = n\pi \cos(n2\pi x). \quad (5.20)$$

For each  $n \in \mathbb{N}$   $u_n \in H^1(0, 1)$ ,  $u_n(1) = u_n(0) = 1$ . Thus there is a constant  $c_1 > 0$  independent of  $n$ , such that

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{b}{2} \int_0^1 w(x) u_n^2(x) dx \leq c_1,$$

and

$$\frac{3-b}{2} \int_0^1 w(x) (u_n')^2(x) dx \rightarrow -\infty,$$

because  $b > 3$  and then  $J(b, \beta) = -\infty$ . In order to prove the third inequality, we only have to treat the case  $b < 0$ . Applying the inequality

$$\int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2}(n^2 v^2 + 2nv) + \left( \frac{3-b}{2} \right) n^2 v_x^2 \right) (x) dx \geq J(b, \beta) - \frac{b}{2}, \quad (5.21)$$

valid for all  $v \in H_0^1(0, 1)$  and all  $n \in \mathbb{N}$  and letting  $n \rightarrow \infty$ , we get

$$\int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2} v^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) v_x^2 \right) (x) dx \geq 0.$$

We deduce:

$$\int_0^1 w(x) v^2(x) dx \leq -\frac{3-b}{b} \int_0^1 w(x) v_x^2(x) dx.$$

Then we get  $\frac{b}{3-b} \geq -\frac{1}{C_\beta}$ . But the equality case  $\frac{b}{3-b} = -\frac{1}{C_\beta}$  can be excluded, as otherwise we could find a sequence  $v_n$  such that  $((b/2) \int_0^1 \omega v_n^2) / ((3-b) \int_0^1 \omega (v_n)_x^2)$  converges to 1 and such that  $\int b \omega v_n \rightarrow -\infty$ : for such a sequence we have  $T(v_n) \sim \int_0^1 b \omega v_n \rightarrow -\infty$ , contradicting the assumption  $J(b, \beta) > -\infty$ .

Conversely, assume that  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ . By the weighted Poincaré inequality (5.12), we can consider an equivalent norm in  $E_{\beta,0}$ :

$$\|v\|_{E_{\beta,0}} = \int_0^1 w(x) v_x(x) dx. \quad (5.22)$$

Since  $\frac{b}{3-b} > -\frac{1}{C_\beta}$ , the symmetric bilinear form

$$B(u, v) = \int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2} uv + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x v_x \right) (x) dx, \quad (5.23)$$

is coercive on the Hilbert space  $E_{\beta,0}$ . Applying the Lax-Milgram theorem yields the existence and uniqueness of a minimizer  $\hat{v} \in E_{\beta,0}$  for the functional  $T$ . But  $H_0^1(0, 1) \subset E_{\beta,0}$ , so in particular, we get  $J(b, \beta) > -\infty$ . Moreover, if  $|\beta| < \frac{e+1}{e-1}$ , then recalling  $E_{\beta,0} = H_0^1(0, 1)$  we see that  $J(b, \beta)$  is in fact a minimum, achieved at  $\hat{u} = 1 + \hat{v} \in H^1(0, 1)$ .  $\square$

The next lemma provides some useful information about  $J(b, \beta)$ .

**Lemma 5.2.** *The function  $(b, \beta) \mapsto J(b, \beta) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  defined for all  $(b, \beta) \in \mathbb{R}^2$  is concave with respect to each one of its variables, and is even with respect to the variable  $\beta$ . Also for all  $b \in \mathbb{R}$  and  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ ,  $-\infty \leq J(b, \frac{e+1}{e-1}) \leq J(b, \beta) \leq J(b, 0) \leq \frac{b}{2}$ .*

*Proof.* The proof is similar to that of the proposition 3.4. in [4] □

The next lemma motivates the introduction of quantity the  $J(b, \beta)$  in relation with the  $b$ -family equations.

**Proposition 5.2.2.** *Let  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  and  $u \in H^1(\mathbb{S})$ , we get*

$$\forall x \in \mathbb{S}, \quad (p + \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) (x) \geq J(b, \beta) u^2(x).$$

*Proof.* Let  $\alpha = \alpha(b, \beta)$  be some constant. Because of the invariance under translation, we get that the inequality

$$(p + \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) (x) \geq \alpha u^2(x), \quad (5.24)$$

holds true for all  $u \in H^1(\mathbb{S})$  and all  $x \in \mathbb{S}$  if and only if the inequality

$$(p + \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) (1) \geq \alpha u^2(1), \quad (5.25)$$

holds true for all  $u \in H^1(\mathbb{S})$ . But on the interval  $]0, 1[$ ,  $(p + \beta \partial_x p)(1-x) = (p - \beta \partial_x p)(x)$ . Then we get

$$(p + \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) (1) = \int_0^1 (p - \beta \partial_x p) \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) (x) dx. \quad (5.26)$$

Normalizing to obtain  $u(1) = 1$ , we get that the best constant  $\alpha$  in inequality (5.24) satisfies  $\alpha = J(b, -\beta) = J(b, \beta)$ . □

The next proposition provides a first lower bound estimate of  $J(b, \beta)$ , when  $b \in [-1, 3]$ .

**Proposition 5.2.3.** *Let  $-1 \leq b \leq 3$  and  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ . Then, if  $u \in H^1(0, 1)$  such that  $u(1) = u(0)$ , we get*

$$(p \pm \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) \geq \begin{cases} \delta_b u^2, & \text{if } |\beta| \leq 1 \\ \frac{\delta_b}{2} [(e+1) - |\beta|(e-1)] u^2, & \text{if } 1 \leq |\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}, \end{cases}$$

where

$$\delta_b = \frac{\sqrt{3-b}}{4} \left( \sqrt{3(1+b)} - \sqrt{3-b} \right). \quad (5.27)$$

*Remark 5.2.8.* Notice that  $\delta_b \geq 0$  if and only if for  $0 \leq b \leq 3$ .

*Proof.* It is sufficient to consider the case  $0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$ . We make the convolution estimates for  $(p + \beta \partial_x p)$ , the convolution estimates for  $(p - \beta \partial_x p)$  being similar. First observe that:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{2}-[x]}}{4 \sinh \frac{1}{2}} + \frac{e^{-x+\frac{1}{2}+[x]}}{4 \sinh \frac{1}{2}} = p_1(x) + p_2(x). \quad (5.28)$$



We start with the estimate of  $p_1 * (a^2 u^2 + u_x^2)(1)$ , with  $a \in \mathbb{R}$  to be determined later. We get

$$\begin{aligned}
p_1 * (a^2 u^2 + u_x^2)(1) &= \frac{1}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}-\xi} (a^2 u^2 + u_x^2)(\xi) d\xi \\
&\geq \frac{-a}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}-\xi} (2uu_x)(\xi) d\xi \\
&= \frac{-a}{4 \sinh(\frac{1}{2})} (e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}) u^2(1) - \frac{1}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}-\xi} a u^2 d\xi \\
&= \frac{a}{2} u^2(1) - p_1 * (a u^2)(1).
\end{aligned}$$

Hence

$$p_1 * ((a^2 + a)u^2 + u_x^2)(1) \geq \frac{a}{2} u^2(1),$$

and because of the invariance under translations, we get

$$p_1 * ((a^2 + a)u^2 + u_x^2) \geq \frac{a}{2} u^2. \quad (5.29)$$

Similarly:

$$\begin{aligned}
p_2 * (a^2 u^2 + u_x^2)(1) &= \frac{1}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\xi-\frac{1}{2}} (a^2 u^2 + u_x^2)(\xi) d\xi \\
&\geq \frac{a}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\xi-\frac{1}{2}} (2uu_x)(\xi) d\xi \\
&= \frac{a}{4 \sinh(\frac{1}{2})} (e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{-1}{2}}) u^2(1) - \frac{1}{4 \sinh(\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{\xi-\frac{1}{2}} a u^2 d\xi \\
&= \frac{a}{2} u^2(1) - p_2 * (a u^2)(1).
\end{aligned}$$

Hence, again using the invariance under translations, we get

$$p_2 * ((a^2 + a)u^2 + u_x^2) \geq \frac{a}{2} u^2. \quad (5.30)$$

Choose  $a$  such that  $a^2 + a = \frac{b}{3-b}$ . This is indeed possible if  $-1 \leq b < 3$  (if  $b = 3$ , the proposition is trivial and there is nothing to prove). We get:

$$p_1 * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) \geq \frac{\delta_b}{2} u^2, \quad (5.31)$$

$$p_2 * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) \geq \frac{\delta_b}{2} u^2. \quad (5.32)$$

Now, from the identity  $p = p_1 + p_2$  and  $\partial_x p = p_1 - p_2$ , that holds both in the distributional and in the a.e. pointwise sense, we get

$$p + \beta \partial_x p = (1 + \beta) p_1 + (1 - \beta) p_2. \quad (5.33)$$

If  $0 \leq \beta \leq 1$ , then from (5.31) and (5.33), we deduce

$$(p + \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} u_x^2 \right) \right) \geq [(1 + \beta) + (1 - \beta)] \frac{\delta_b}{2} u^2 = \delta_b u^2. \quad (5.34)$$

We proved as follows. From

$$p_2(x) \leq e p_1(x), \quad \forall x \in (0, 1), \quad (5.35)$$

we get, for  $1 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$

$$\begin{aligned} p + \beta \partial_x p &= (1 + \beta)p_1 - (\beta - 1)p_2, \\ &\geq [(e + 1) - \beta(e - 1)]p_1. \end{aligned} \quad (5.36)$$

We deduce, using (5.31):

$$\forall 1 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}, \quad (p + \beta \partial_x p) \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} u_x^2 \right) \right) \geq [(e + 1) - \beta(e - 1)] \frac{\delta_b}{2} u^2. \quad (5.37)$$

□

*Remark 5.2.9.* If  $-1 \leq b \leq 3$ , then it follows by the preceding proposition that  $|\beta| \leq 1$ , then  $J(b, \beta) \geq \delta_b$ , and if  $1 \leq |\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$  then  $J(b, \beta) \geq \frac{\delta_b}{2} [(e + 1) - |\beta| (e - 1)]$ .

*Proof of Theorem 5.2.6.* By the well-posedness result in  $H^s(\mathbb{S})$ , with  $s > 3/2$ , the density of  $H^3(\mathbb{S})$  in  $H^s(\mathbb{S})$  and a simple approximation argument, we only need to prove Theorem 5.2.6 assuming  $u_0 \in H^3(\mathbb{S})$ . We thus obtain a unique solution of (5.4), defined in some nontrivial interval  $[0, T[$ , and such that  $u \in C([0, T[, H^3(\mathbb{S})) \cap C^1([0, T[, H^2(\mathbb{S}))$ . The starting point is the analysis of the flow map  $q(t, x)$  of (5.4)

$$\begin{cases} q_t(t, x) = u(t, q(t, x)) & x \in \mathbb{S}, \quad t \in [0, T^*), \\ q(0, x) = x, & x \in \mathbb{S}. \end{cases} \quad (5.38)$$

As  $u \in C^1([0, T[, H^2(\mathbb{S}))$ , we can see that  $u$  and  $u_x$  are continuous on  $[0, T[ \times \mathbb{S}$  and  $x \mapsto u(t, x)$  is Lipschitz, uniformly with respect to  $t$  in any compact time interval in  $[0, T[$ . Then the flow map  $q(t, x)$  is well defined by (5.38) in the time interval  $[0, T[$  and  $q \in C^1([0, T[ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Differentiating (5.4) with respect to the  $x$  variable and applying the identity  $\partial_x^2 p * f = p * f - f$ , we get:

$$u_{tx} + uu_{xx} = \frac{b}{2} u^2 - \left( \frac{b-1}{2} \right) u_x^2 - p * \left[ \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right].$$

Let us introduce the two  $C^1$  functions of the time variable depending on  $\beta$ . The constant  $\beta$ , will be chosen later on

$$f(t) = (-u_x + \beta u)(t, q(t, x_0)) \quad \text{and} \quad g(t) = -(u_x + \beta u)(t, q(t, x_0)).$$

Using (5.38) and differentiating with respect to  $t$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= [(-u_{tx} - uu_{xx}) + \beta(u_t + uu_x)](t, q(t, x_0)) \\ &= -\frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{b-1}{2} \right) u_x^2 + (p - \beta \partial_x p) * \left[ \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right](t, q(t, x_0)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= [(-u_{tx} - uu_{xx}) - \beta(u_t + uu_x)](t, q(t, x_0)) \\ &= -\frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{b-1}{2} \right) u_x^2 + (p + \beta \partial_x p) * \left[ \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right](t, q(t, x_0)). \end{aligned}$$

Let us first consider  $b \in ]1, 3]$ . Recall that we work under the condition  $\beta_b < \infty$ . By the definition of  $\beta_b$  (5.14) we deduce that there exists  $\beta \geq 0$  such that

$$\beta^2 \geq \frac{2}{b-1} \left( \frac{b}{2} - J(b, \beta) \right). \quad (5.39)$$

Applying the convolution estimate of (5.2.2) and the fact that  $J(b, \beta) = J(b, -\beta)$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &\geq \left( \frac{b-1}{2} \right) u_x^2 + \left( J(b, -\beta) - \frac{b}{2} \right) u^2(t, q(t, x_0)) \\ &\geq \frac{b-1}{2} (u_x^2 - \beta^2 u^2)(t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{b-1}{2} [f(t)g(t)] \end{aligned}$$

In the same way,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &\geq \left( \frac{b-1}{2} \right) u_x^2 + \left( J(b, \beta) - \frac{b}{2} \right) u^2(t, q(t, x_0)) \\ &\geq \frac{b-1}{2} (u_x^2 - \beta^2 u^2)(t, q(t, x_0)) \\ &= \frac{b-1}{2} [f(t)g(t)]. \end{aligned}$$

The assumption  $u'_0(x_0) < -\beta_b |u_0(x_0)|$  guarantees that we may choose  $\beta$  satisfying (5.39) with  $\beta - \beta_b > 0$  small enough so that

$$u'_0(x_0) < -\beta |u_0(x_0)|.$$

For such a choice of  $\beta$  we have  $f(0) > 0$  and  $g(0) > 0$ .

We now make use of the following result:

**Lemma 5.3** (See [4]). *Let  $0 < T^* \leq \infty$  and  $f, g \in C^1([0, T^*[, \mathbb{R})$  be such that, for some constant  $c > 0$  and all  $t \in [0, T^*[$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &\geq cf(t)g(t) \\ \frac{dg}{dt}(t) &\geq cf(t)g(t). \end{aligned}$$

If  $f(0) > 0$  and  $g(0) > 0$ , then

$$T^* \leq \frac{1}{c\sqrt{f(0)g(0)}}.$$

The blow-up of  $u$  then follows immediately from our previous estimates applying the above lemma.  $\square$

### 5.3 estimates of $\beta_b$

Theorem 5.2.6 is meaningful only if  $b \in (1, 3]$  is such that  $\beta_b < \infty$ . We recall here that  $\beta_b$  is defined by Eq. (5.14):

$$\beta_b = \inf \left\{ \beta > 0 : \beta^2 + \frac{2}{|b-1|} \left( J(b, \beta) - \frac{b}{2} \right) \geq 0 \right\}.$$

Next, we propose three lower bound estimates for the convolution term

$$(p \pm \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right),$$

or —what is equivalent, owing to Proposition 5.2.2— three lower bound estimates for  $J(b, \beta)$ . Such estimates will allow us to determinate sufficient conditions on  $b \in (1, 3]$  in order to  $\beta_b$  to be finite and will provide upper bounds for  $\beta_b$ .

Estimate 1 and Estimate 2 below are presented mainly for pedagogical purposes, as they are self-contained. But these two estimates will be later on improved by Estimate 3, which is more technical and deeply relies on a few involved computations made in [4]. We point out however that Estimate 1 suffices to claim that Theorem 5.2.6 is not vacuous.

### 5.3.1 Estimate 1

Let  $0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$  and  $1 < b \leq 3$ . We start considering the obvious estimate

$$(p \pm \beta \partial_x p) * \left( \frac{b}{2} u^2 + \left( \frac{3-b}{2} \right) u_x^2 \right) \geq 0.$$

Thanks to definition (5.14), we see that a sufficient condition on  $b$  which entails  $\beta_b < \infty$ , is the existence of a constant  $\beta$  satisfying

$$\sqrt{\frac{b}{b-1}} \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}. \quad (5.40)$$

This holds when  $b \geq \frac{(e+1)^2}{4e} \equiv \alpha$ . In this case, the corresponding bound for  $\beta_b$  is

$$\beta_b \leq \sqrt{\frac{b}{b-1}} < +\infty, \quad \text{for } \frac{(e+1)^2}{4e} \leq b \leq 3. \quad (5.41)$$

(See Figure 5.1-(A)).

### 5.3.2 Estimate 2

Proposition 5.2.3 provides a better sufficient condition ensuring that  $\beta_b < +\infty$ . Namely:

$$\exists 0 \leq \beta \leq 1 \quad \text{such that} \quad \beta^2 + \frac{2}{b-1} \left( \delta_b - \frac{b}{2} \right) \geq 0, \quad (5.42)$$

or

$$\exists 1 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1} \quad \text{such that} \quad \beta^2 + \frac{2}{b-1} \left( [(e+1) - \beta(e-1)] \frac{\delta_b}{2} - \frac{b}{2} \right) \geq 0, \quad (5.43)$$

where  $\delta_b$  is as (5.27). The study of the function  $b \mapsto \sqrt{\frac{2}{b-1}} \left( \frac{b}{2} - \delta_b \right)$  in the interval  $(1, 3]$  however reveals that condition (5.42) is satisfied only for  $b = 2$ . We have  $\delta_2 = \frac{1}{2}$  and so  $\beta = 1$ . The corresponding estimate for  $\beta_2$  is then  $\beta_2 \leq 1$ . This situation corresponds to the Camassa–Holm equation. We thus recover the result in [2]. (See Figure 5.1-(B).) On the other hand, solving (5.43) is possible if and only if the largest real zero  $\phi(b)$  of the quadratic polynomial  $\beta \mapsto P_b(\beta) = \beta^2 + \beta \delta_b \left( \frac{e+1}{b-1} \right) + \left( \delta_b \left( \frac{e+1}{b-1} \right) - \frac{b}{b-1} \right)$  is inside the interval  $[1, \frac{e+1}{e-1}]$ .

A simple computation shows that this is indeed the case when  $\alpha \leq b \leq 3$ . Here  $\alpha = \frac{(e+1)^2}{4e}$  is the same as in Estimate 1. For  $\alpha \leq b \leq 3$ , now we get the bound

$$\beta_b \leq \phi(b) < +\infty, \quad (5.44)$$

that considerably improves our earlier estimate (5.41). See Figure 5.1-(B).

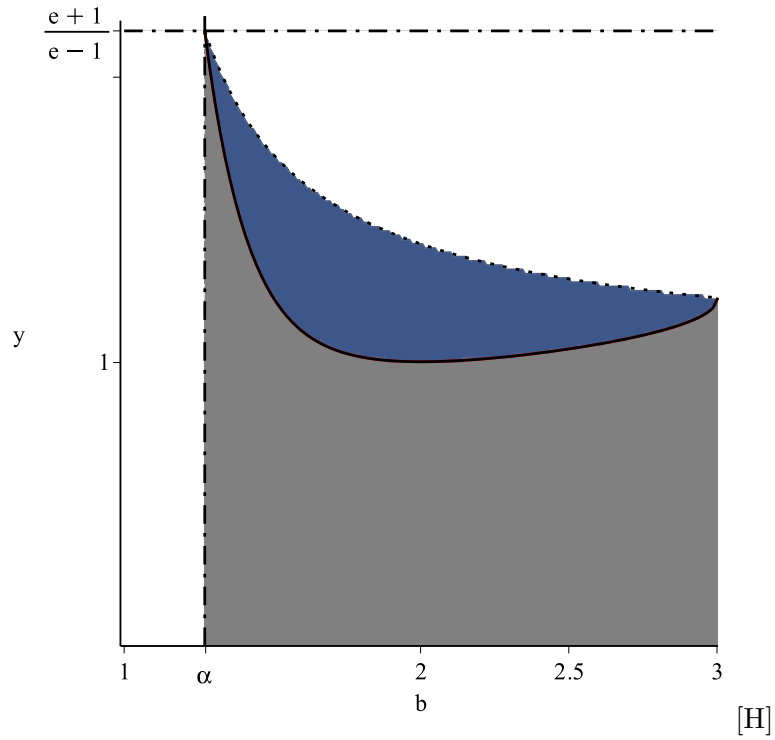


Figure 5.1 – First and Second estimate of  $\beta_b$ .

**(A)** The plot of the function  $b \mapsto \sqrt{\frac{b}{b-1}}$ , providing the bound (5.41). The upper-bound estimate of  $\beta_b$  given by Eq.(5.41), showing that Theorem 5.2.6 applies for  $b \in [\alpha, 3]$ , where  $\alpha = \frac{(e+1)^2}{4e}$  (blue and gray region).

**(B)** The function  $b \mapsto \phi(b)$ , providing the bound (5.44). The upper-bound estimates of  $\beta_b$  given by Eq.(5.44) and the Theorem 5.2.6 are valid inside the interval  $[\alpha, 3]$  (grey region).

### 5.3.3 Estimate 3

This part relies on the properties of  $J(b, \beta)$  which are described in Lemma 5.2 and the computations made in [4]

Let  $I(\alpha, \beta)$  as in [4, Section 2]. For  $b \in (1, 3]$ , and  $|\beta| \leq \frac{e+1}{e-1}$ , the relation between  $I$  and  $J$  is the following:

$$J(b, \beta) = \begin{cases} \frac{3-b}{2} I\left(\frac{b}{3-b}, \beta\right), & \text{if } b \neq 3 \\ \frac{3}{2} \inf \left\{ \int_0^1 w(x) u^2 dx; u \in H^1(0, 1), u(0) = u(1) = 1 \right\}, & \text{if } b = 3. \end{cases}$$

where  $I(\alpha, \beta)$  is as in [4]. If  $b \neq 3$ , borrowing the computation made in [4], we get

$$\begin{aligned} J\left(b, \frac{e+1}{e-1}\right) &= \frac{3-b}{2} I\left(\frac{b}{3-b}, \frac{e+1}{e-1}\right) \\ &= \frac{3-b}{4e} (e+1)^2 \frac{P'_{v(b)}}{P_{v(b)}}(\cosh 1) \end{aligned}$$

where

$$v(b) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{b}{3-b}\right)} \in \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}.$$

and  $P_{v(b)}$  is Legendre function of the first kind, of the degree  $v(b)$ , arising when solving the Euler–Lagrange equation associated with the minimization problem of  $I(\alpha, \frac{e+1}{e-1})$ . The reason for considering here the limit case  $\beta = \frac{e+1}{e-1}$  is twofold: on one hand, in this case the weight function has a simpler expression, namely  $w(x)$  becomes in this case

$$w(x) = p(x) + \frac{e+1}{e-1} \partial_x p(x) = \frac{2e}{(e-1)^2} \sinh x, \quad x \in (0, 1);$$

this allow to reduce the Euler-Lagrange equation to a linear second order ordinary differential equation of Legendre type. See [4] for more details. On the other hand, by Lemma 5.2, we have  $J(b, \beta) \geq J\left(b, \frac{e+1}{e-1}\right)$  for all  $0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$ .

Now, for  $0 \leq \beta \leq \frac{e+1}{e-1}$ , we have

$$\beta^2 + \frac{2}{b-1} \left( J(b, \beta) - \frac{b}{2} \right) \geq \beta^2 + \frac{2}{b-1} \left( \frac{3-b}{4e} (e+1)^2 \frac{P'_{v(b)}}{P_{v(b)}}(\cosh 1) - \frac{b}{2} \right). \quad (5.45)$$

Computing the Legendre function shows that the right hand-side of the above expression is nonnegative when  $\gamma \leq b \leq 3$ , with  $\gamma \approx 1.012$ . See Figure 5.2. Therefore, in the range  $b \in [\gamma, 3]$  we have  $\beta_b < +\infty$

$$\beta_b \leq \sqrt{\frac{2}{b-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{3-b}{4e} (e+1)^2 \frac{P'_{v(b)}}{P_{v(b)}}(\cosh 1) \right)}, \quad \text{for } \gamma \leq b \leq 3, \quad (5.46)$$

and Theorem 5.2.6 applies in such range.

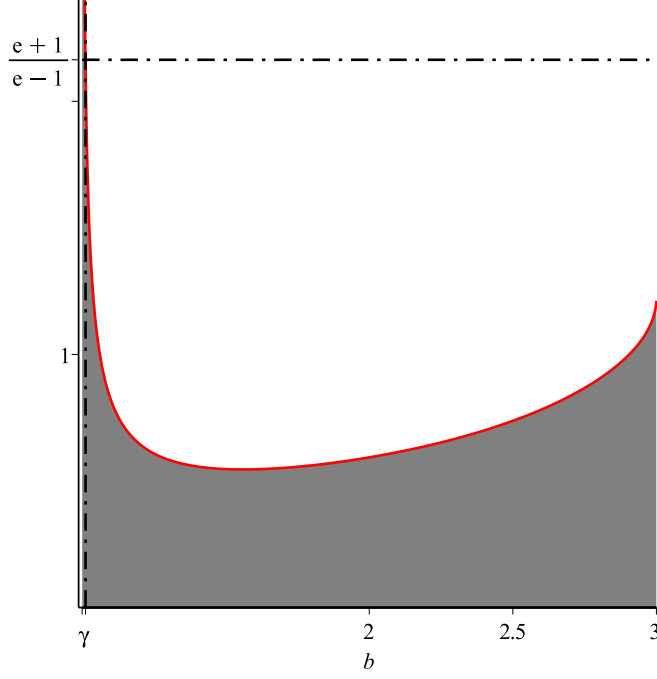


Figure 5.2 – The function  $b \mapsto \sqrt{\frac{2}{b-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{3-b}{4e} (e+1)^2 \frac{P'_{v(b)}}{P_{v(b)}} (\cosh 1) \right)}$ , providing the bound (5.46). The upper-bound estimates of  $\beta_b$  given by Eq.(5.46) and the Theorem 5.2.6 are valid inside the interval  $[\gamma, 3]$  (grey region)

### 5.3.4 Numerical Analysis of $\beta_b$

In this last part we compute numerically  $\beta_b$ . We need first to compute numerically  $J(\beta, b)$ . Recall that

$$J(b, \beta) = \frac{b}{2} + \inf \{T(v) : v \in H_0^1(0, 1)\},$$

where

$$T(v) = \int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2}(v^2 + 2v) + \left( \frac{3-b}{2} \right) v_x^2 \right) (x) dx. \quad (5.47)$$

The Euler-Lagrange equation associated with the above minimization problem is

$$(3-b)w(x)v_{xx} + (3-b)w_x v_x - b w v - b w = 0. \quad (5.48)$$

Let  $\bar{v}$  be the solution such that  $\bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0$ , i.e  $\bar{v}$  is the minimiser :

$$J(b, \beta) = \frac{b}{2} + \int_0^1 w(x) \left( \frac{b}{2}\bar{v}^2 + b\bar{v} + \left( \frac{3-b}{2} \right) \bar{v}_x^2 \right) (x) dx. \quad (5.49)$$

On the other hand, multiplying (5.48) by  $\bar{v}$  and integrating with respect to the spatial variable, we get

$$\int_0^1 (3-b)w\bar{v}_{xx}\bar{v} dx + \int_0^1 (3-b)w_x\bar{v}\bar{v}_x dx - \int_0^1 b w(\bar{v}^2 + \bar{v}) dx = 0.$$

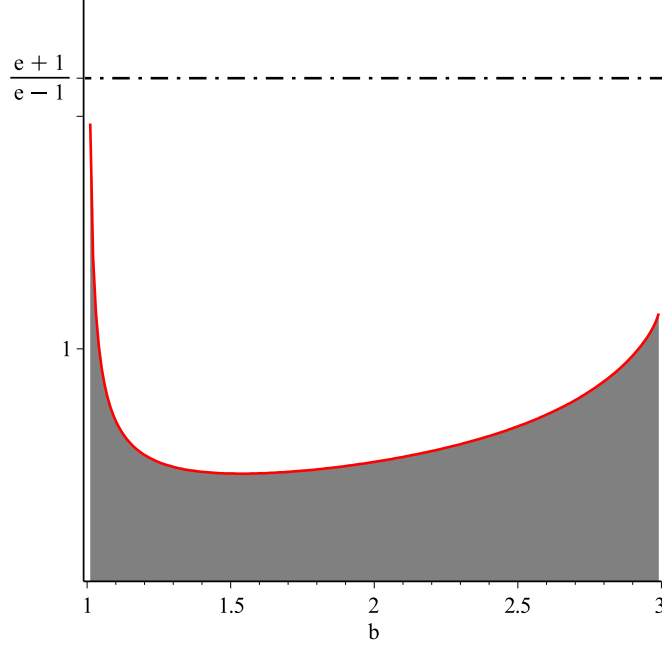


Figure 5.3 – The plot of the function  $b \mapsto \beta_b$ . This numerical approach of  $\beta_b$ , allows us to say: if  $3 \geq b \geq \alpha_0 \approx 1.0012$ , then the Theorem 5.2.6 is valid (gray region).

Integrating by parts  $\int_0^1 (3-b)w_x \bar{v} \bar{v}_x dx$ , and using that  $\bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0$ , we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3-b)w \bar{v}_x^2 + \int_0^1 b(w \bar{v}^2 + \bar{v}) dx &= 0 \\ \int_0^1 b w \bar{v} dx &= \int_0^1 w (b(\bar{v}^2 + 2\bar{v}) + (3-b)\bar{v}_x^2) dx. \end{aligned}$$

Thus, using  $\int_0^1 w dx = 1$  and  $(3-b)(wv_{xx} + w_x v_x) = bw(v+1)$ , we get

$$\begin{aligned} J(b, \beta) &= \frac{b}{2} + \int_0^1 \frac{b}{2} w \bar{v} dx \\ &= \frac{3-b}{2} \int_0^1 [w \bar{v}_x]_x dx \\ &= \frac{3-b}{2} [(w \bar{v}_x)(1^-) - (w \bar{v}_x)(0^+)]. \end{aligned}$$

The above solution  $\bar{v}$  of the minimization problem, depending on the parameters  $b$  and  $\beta$ , cannot be computed analytically, but it can be computed numerically with the standard numerical schemes for linear ODEs, with an arbitrary good precision. This allow to compute numerically the above function  $J(b, \beta)$ . This being done, a simple algorithm allows to compute numerically the quantity  $\beta_b$  (with an arbitrary good precision). Such numerical computations illustrate that in fact  $\beta_b < +\infty$  for  $1.0012 \dots \leq b \leq 3$ , which is (slightly !) better than the range  $1.012 \leq b \leq 3$  obtained via Estimate 3. The actual value of  $\beta_b$  is actually slightly smaller than its upper bound computed in (5.46). See Figure 5.3 and 5.4. We summarize in the last picture all our previous estimates and numerical approximate of  $\beta_b$ .



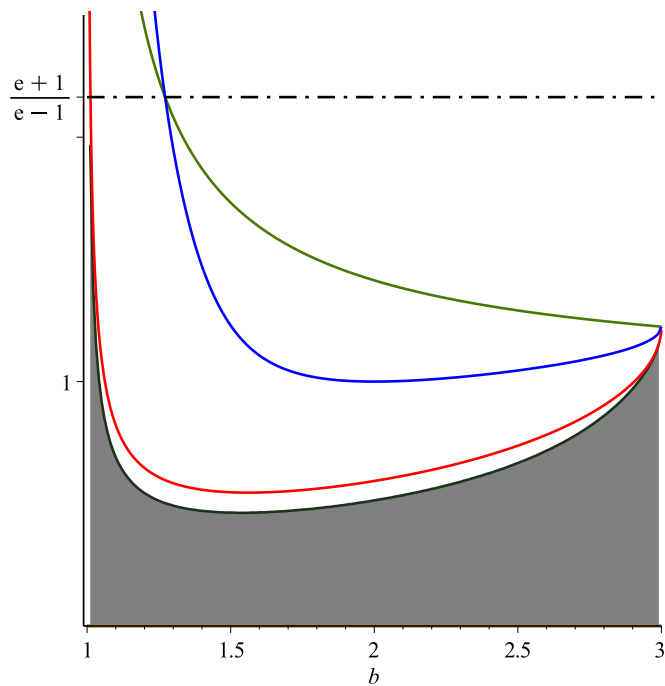


Figure 5.4 – In this plot we can see the different estimates that we have worked out (green curve first estimate, blue curve second estimate and red curve third estimates), as well as the numerical approach of  $\beta_b$ .

---

## Bibliography

---

- [1] T.B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29** (1967), 559–562.
- [2] Brandolese L., *Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations*, Comm. Math. Phys. **330** (2014), 401–414.
- [3] Brandolese L. and Cortez M.F., *Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations*, Journal of Differential Equations **256** (2014), no. 12, 3981–3998.
- [4] Brandolese L. and Cortez M.F., *On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings*, J. Funct. Anal. **266** (2014).
- [5] Camassa R. and Holm L., *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Physical Review Letters **71** (1993), 1661–1664.
- [6] Camassa R., Holm L., and Hyman J.M., *A new integrable shallow water equation*, Adv. Appl. Mech **31** (1994), 1–31.
- [7] Caudrey P.J., Dodd R.K., and Gibbon J.D., *A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **351** (1976), no. 1666, 407–422.
- [8] Constantin A. and Escher J., *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 229–243.
- [9] Constantin A., *Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: A geometric approach*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), 321–362.
- [10] Constantin A. and Molinet L., *Global weak solutions for a shallow water equation.*, Comm. Math. Phys. **211** (2000), 45–61.
- [11] Constantin A. and Lannes D., *The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations*, Arch. Ration. Mech. Anal **192** (2009), no. 2, 165–186.
- [12] Adrian Constantin, *Nonlinear water waves with applications to wave-current interactions and tsunamis* **81** (2011).
- [13] H.-H. Dai, *Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod*, Acta Mech. **127** (1998), no. 1-4, 193–207.
- [14] Danchin R., *A few remarks on Camassa-Holm equation*, Diff. Int. Equ. **14** (2001), 953–988.
- [15] Degasperis A. and Procesi M., *Asymptotic integrability, in Symmetry and Perturbation Theory*, World Scientific **211** (1999), 23–37.
- [16] Dullin H., Gottwald G., and D. Holm, *Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and other asymptotically equivalent equations for shallow water waves*, Fluid Dynamics Research **33** (2003), no. 1, 73–95.
- [17] Dullin H., Gottwald G.A., and Holm D.D., *On asymptotically equivalent shallow water wave equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena **190** (2004), no. 1, 1–14.
- [18] Escher J., Liu Y., and Yin Z., *Global weak solutions and blow-up structure for the Degasperis-Procesi equation*, Journal of Functional Analysis **241** (2006), no. 2, 457–485.
- [19] Escher J. and Yin Z., *Well-posedness, blow-up phenomena, and global solutions for the b-equation*, J. Reine Angew. Math. **624** (2008), no. 1, 51–80.
- [20] Escher J. and Seiler J., *The periodic b-equation and Euler equations on the circle*, arXiv preprint arXiv:1001.2987 (2010).

- [21] Fuchssteiner B. and Fokas A.S., *Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*, Physica D: Nonlinear Phenomena **4** (1981), no. 1.
- [22] Gui G. and Liu Y., *On the global existence and wave-breaking criteria for the two-component Camassa–Holm system*, Journal of Functional Analysis **258** (2010), no. 12, 4251–4278.
- [23] Henry D., *Infinite propagation speed for the Degasperis–Procesi equation*, Journal of mathematical analysis and applications **311** (2005), no. 2, 755–759.
- [24] Kato T., *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Spectral Theory and Differential Equations, Lecture Notes in Math. Springer Verlag, Berlin **448** (1975), 25–27.
- [25] Lellis C., Kappeler T, and Topalov P., *Low-regularity solutions of the periodic Camassa–Holm equation*, Communications in Partial Differential Equations **32** (2007), no. 1, 87–126.
- [26] Li Y.A. and Olver P.J., *Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation*, J. Diff. Eq. **162** (2000), 27–63.
- [27] Liu Y. and Yin Z., *Global existence and blow-up phenomena for the Degasperis–Procesi equation*, Communications in mathematical physics **267** (2006), no. 3, 801–820.
- [28] Lundmark H., *Formation and dynamics of shock waves in the Degasperis–Procesi equation*, Journal of Nonlinear Science **17** (2007), no. 3, 169–198.
- [29] Magri F., *A Simple Model of the integrable Hamiltonian Equation*, J.Math.Phys. **19** (1978), 1156–1162.
- [30] McKean H.P., *Breakdown of the Camassa–Holm equation*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 3, 416–418.
- [31] Ming Chen. R., Liu Y., and Zhang P., *The Hölder continuity of the solution map to the b-family equation in weak topology*, Mathematische Annalen **357** (2013), no. 4, 1245–1289, DOI 10.1007/s00208-013-0939-9.
- [32] Ognyan C. and Sevdzhan H., *On the Cauchy problem for the periodic b-family equations and of the non-uniform continuity of Degasperis–Procesi equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **360** (2009), no. 1, 47–56.
- [33] Olver P.J., *On the Hamiltonian structure of evolution equations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1980, pp. 71–88.
- [34] Rodríguez-Blanco G., *On the Cauchy problem for the Camassa–Holm equation*, Nonlinear Anal. **46** (2001), no. 3, 309–327.
- [35] Saha S., *Blow-Up results for the periodic peakon b-family of equations*, Comm. Diff. and Diff Eq., Vol 4, **162** (2013).
- [36] Yin Zhaoyang and others, *On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions*, Illinois Journal of Mathematics **47** (2003), no. 3, 649–666.
- [37] Yin Zhaoyang, *Global weak solutions for a new periodic integrable equation with peakon solutions*, Journal of Functional Analysis **212** (2004), no. 1, 182–194.
- [38] Zhengguang Guo, *Blow-up and global solutions to a new integrable model with two components*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **372** (2010), no. 1, 316–327.
- [39] Yong Zhou, *Blow-up phenomenon for the integrable Degasperis–Procesi equation*, Physics Letters A **328** (2004), no. 2, 157–162.

---

slowly oscillating solution of the cubic heat equation

---

### 6.1 Introduction

A well-studied evolution equation is  $\partial_t u = \Delta \phi(u) + f(u)$ , for various choices of  $\phi$  and  $f$  (see [2, 24, 25, 28, 32, 34, 80]). An extensive bibliography exists for the particular case, when  $\phi(u) = u$  and  $f(u) = |u|^\alpha u$ , where  $\alpha > 0$ . Then, we have the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + |u|^\alpha u & x \in \mathbb{R}^n \quad t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.1)$$

where  $0 < T \leq \infty$ ,  $\alpha > 0$  and  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a real function.

The Duhamel formulation of (6.1) reads

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} |u|^\alpha u(\tau) d\tau, \quad (6.2)$$

where,  $e^{t\Delta}$  ( $t \geq 0$ ) denotes the heat semigroup. We have  $e^{t\Delta} f = G_t * f$ , where

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

By standard results, Cauchy problem (6.1) is well-posed in many Banach spaces. In particular, thanks to the work of F. Weissler, H. Brezis and T. Cazenave [11, 79, 80], we know the following statements.

- When  $p > \frac{n\alpha}{2}$ ,  $p \geq \alpha + 1$ , there exists a constant  $T = T(u_0)$  and a unique solution  $u(t) \in C([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$ . Also  $u(t) \in L_{loc}^\infty([0, T[, L^\infty)$ .
- When  $p = \frac{n\alpha}{2} = p_0$ ,  $p \geq \alpha + 1$ , there exists a constant  $T = T(u_0)$  and a unique solution  $u(t) \in C([0, T], L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^\infty([0, T[, L^\infty)$ .
- When  $\alpha + 1 < p < \frac{n\alpha}{2}$ , there is no general theory of existence. Besides, A. Haraux and F. Weissler [26] showed that there is a solution belonging to the space  $C([0, T], L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^\infty([0, T[, L^\infty)$ , positive, arising from the initial data 0, thus there is no uniqueness.

We will be interested in the issues of the blowup in finite time and of the global existence of the solutions. The first works related to these kinds of questions are due to Hiroshi Fujita in 1966. Fujita has shown that for the positive solutions of (6.1), if the initial data  $u_0$  is of class  $C^2(\mathbb{R}^n)$

with its derivatives of order 0, 1 and 2 bounded on  $\mathbb{R}^n$ , then we have the following necessary condition for that  $u$  to be unique in  $C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  :

$$\exists M > 0, \exists 0 < \beta < 2 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |u_0(x)| \leq M e^{|x|^\beta}.$$

This means that  $u_0$  should not grow too fast (see [21, 22]).

In regards to the question of the existence of regular global solutions under small initial data assumptions, Fujita concluded that there are two types of situations: if  $\alpha < \frac{2}{n}$ , then no nontrivial positive solution of this problem which can be global (Fujita phenomenon), while for  $\alpha > \frac{2}{n}$ , there are global non-trivial solutions in positive small initial data assumptions. Years later, K. Hayakawa [27] and F. Weissler [79, 80] completed the study Fujita demonstrating that the Fujita critical exponent  $\alpha = \frac{2}{n}$  verifies The Fujita phenomenon. On the other hand, in the case of a homogeneous Dirichlet condition in an exterior smooth domain  $\Omega$ , Bandle et Levine studied the classical positive solutions which satisfy the following condition on the order of growth:

$$\forall k > 0, |u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad |\nabla u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad |x| \rightarrow 0.$$

Equivalently to the previous problem, Bandle and Levine showed similar results to those of Fujita with Dirichlet boundary conditions for the problem (6.1) (see [3, 4]). It was not long before the Fujita critical case was resolved by Ryuichi Suzuki [73]. He proved that the Fujita critical exponent  $\alpha = \frac{2}{n}$  verifies The Fujita phenomenon, when  $n \geq 3$ .

H. Levine and Q. Zhang addressed the same problems in the case of Neumann boundary conditions (see [45]). They considered an initial condition  $u_0$  in  $C^2(\Omega)$  and weak solutions in the sense of distributions with the test space  $C^2(\Omega)$  which are not subject to any restriction on the growth order. They showed similar results to those of Fujita and that for the Fujita critical exponent  $\alpha = \frac{2}{n}$ , the solution verifies The Fujita phenomenon. Similar results with Robin boundary conditions has been shown by Rault in [68].

To motivate our results, we introduce the concept of a scale-invariant space. Let  $\lambda > 0$ , then we define

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} u(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{and} \quad u_{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} u_0(\lambda x). \quad (6.3)$$

For every solution  $u(t, x)$  of (6.1),  $u_\lambda(t, x)$  is also a solution of (6.1) for which the initial condition is  $u_{0,\lambda}(x)$ . In this case we say that a Banach space  $E$  is *scale-invariant space*, if

$$\|u(t, \cdot)\|_E = \|u_\lambda(t, \cdot)\|_E. \quad (6.4)$$

The spaces which are invariant under such a scaling are called invariant spaces for this class of non-linear heat equation. It is known that the *scale-invariant space* plays an essential role in questions like: well-posedness, global existence or blow-up of the solution. The critical Lebesgue is  $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ , with  $p_0 = \frac{n\alpha}{2}$ . Notice that  $p_0 \geq 1$  if and only if  $\alpha$  is larger or equal to the Fujita critical exponent.

The purpose of the present paper is to study the borderline cases of explosion and global existence for solutions of a particular case of (6.1), in a scale-invariant Banach space. Actually, we consider the cubic heat equation

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^3 & x \in \mathbb{R}^3 \quad t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.5)$$

where  $0 < T \leq \infty$ , where  $u = u(x, t)$  is a real value function of  $(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  and  $t \geq 0$ . One rewrites Equation (6.5) in the equivalent Duhamel formulation

$$u(t, x) = u(t) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} u^3(\tau, x) d\tau. \quad (6.6)$$

The following proposition shows the equivalence between differential (6.5) and integral formulation (6.6).

**Proposition 6.1.1.** *Let  $u \in L^3([0, T], L^3_{loc}(\mathbb{R}^3))$ . Then the following statements are equivalent*

1.  $u$  satisfies  $\partial_t u = \Delta u + u^3$  in the sense of distributions;
2. there exists  $u_0 \in \mathcal{S}'$  such that  $u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}u^3(\tau) d\tau$ .

*Remark 6.1.1.* The last proposition shows that if the initial data  $u_0 \in L^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$ , then a classical solution of (6.5) is equivalent in the sense of distributions to a mild solution of (6.5) with the initial data  $u_0$ . In the following, we always talk about the existence of a mild solution of (6.5).

In the case of equation (6.5) the only Lebesgue space invariant under this scaling (6.3) is  $L^3(\mathbb{R}^3)$ . Other examples of invariant spaces for (6.5) that will play an important role later on are:

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^3 \hookrightarrow \dot{B}_p^{-1+3/p, \infty} \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{-1, \infty}, \quad \text{for } 3 < p < \infty. \quad (6.7)$$

Problem (6.5) shares some similarities with the incompressible Navier-Stokes equation. Recall that the Cauchy problem of the incompressible Navier-Stokes equation in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$  is

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = -\nabla p & x \in \mathbb{R}^3 \quad t > 0, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (6.8)$$

where  $u = u(t, x)$  is a vector with 3 components representing the velocity of an incompressible fluid and  $p(t, x)$  is a function representing the pressure. Similarly to the equation (6.5), we can rewrite the system (6.8) in the following integral form

$$u(t, x) = u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds, \quad (\text{NS})$$

where,  $\operatorname{div} u_0 = 0$ ,  $e^{t\Delta}$  is the heat semigroup, and  $\mathbb{P}$  is the Leray-Hopf projection operator into divergence free vector, defined by

$$\mathbb{P}f = f - \nabla \Delta^{-1}(\operatorname{div} f).$$

We can see that in the integral formula for the incompressible Navier-Stokes equation the term pressure  $p(x, t)$  is gone. Indeed, the pressure can be recalculated from the velocity field  $u(x, t)$  (see [78]).

The equation (NS) has exactly the same scaling law that equation (6.6). For both equations, it is possible to establish the global existence of solutions in certain homogeneous Besov spaces with small initial conditions(see [53]), and the uniqueness of them in a suitable subspace of  $C_t(L^3(\mathbb{R}^3))$ , where these solutions are built. A number of methods developed to this equation (as those described in the book [12]) can be transposed to the case of equation (6.6). Of course, in other cases, the results for the Navier-Stokes equations do not easily fit into the equation of the cubic heat (6.5).

This paper is organized as follows. In the next section we start by introducing the relevant notations and function spaces, recalling a few basic results. In the Section 3 will give the statements of our results. First an extension of a theorem by Meyer on the existence of global solutions under small initial data assumptions. Next we state the main theorem (6.3.2). In section 4 we give the proof of the Meyer theorem and some comments. In the last section we prove main theorem and some comments.

## 6.2 Preliminaries

First, we set the precise mathematical framework for the study of the Cauchy problem for the equation of the nonlinear heat (6.5).

In the following theorem we called some of the results of [11, 79, 80].

**Theorem 6.2.1.** [Weissler-Brezis-Cazenave [11, 79, 80]] *Let  $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ . There exists a constant  $T = T(u_0)$  and a unique of (6.5) in  $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3))$ , such that*

$$(ii) \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} < +\infty,$$

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} = 0,$$

where  $3 < p < 9$  and  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$ .

*Remark 6.2.2.* If in addition, we consider  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^3(\mathbb{R}^3)$ , the unique Weissler's solution  $u(t, x)$  arising from  $u_0$  verifies:  $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) \forall t \in [0, T]$ . This observation readily follows from Weissler method and will be implicitly in some of our calculations, for example when we use the Fourier transform of the solution.

Before stating our results, we define the inhomogeneous and homogeneous Besov spaces which play an important role in our estimates. Recall the Littlewood-Paley decomposition. Let  $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  such that:

$$\begin{aligned} \text{supp } \widehat{\varphi} &\subset \{|\xi| \leq 5/6\} \quad \text{and} \quad \text{supp } \widehat{\psi} \subset \{3/5 \leq |\xi| \leq 5/3\} \quad \psi_j = 2^{nj} \psi(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z} \\ 1 &= \widehat{\varphi}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \\ 1 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

where  $\widehat{f}$  denotes the Fourier transform of  $f$ .

**Définition 6.1.** *The inhomogeneous and homogeneous Besov spaces  $B_p^{s,q}$  and  $\dot{B}_p^{s,q}$  are defined as follows (at least for  $s < 0$ , which will be our case):*

$$\begin{aligned} \dot{B}_p^{s,q} &= \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3); \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} < \infty\}, \quad \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3); \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} < \infty\}, \\ \|f\|_{B_p^{s,q}} &= \|\varphi * f\|_p + \left( \sum_{j=0}^{\infty} \|2^{js} \psi_j * f\|_p^q \right)^{1/q} \\ \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} &= \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|2^{js} \psi_j * f\|_p^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

for  $s \leq 0$   $1 \leq p, q \leq \infty$ .

## 6.3 Quick overview of the main results

In this section, we will give the main result of the blow-up of the solution of (6.5). But first, we will give an extension of Meyer theorem to the case of global solutions of the nonlinear heat

equation with a smallness assumption on the initial condition.

The general methodology that will be used throughout this section is to look for the solutions  $u(t, x)$  belonging to the Banach space  $\mathcal{X} = C_b([0, \infty); \mathcal{Z})$ , where  $\mathcal{Z}$  is a suitable functional Banach spaces.

The norm of  $u(\cdot, t)$  in  $\mathcal{X} = C_b([0, \infty); \mathcal{Z})$  is denoted by  $\|u\|_{\mathcal{X}}$  and defined as

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{Z}}. \quad (6.9)$$

This norm will be called the natural norm. To prove our Theorem (6.3.1), we first assume the existence and uniqueness of a local solution from initial data  $u_0$  and for this we need the Weissler Theorem. If  $\mathcal{Z}$  is simply  $L^3(\mathbb{R}^3)$ , the standard fixed point argument is not valid in  $\mathcal{X}$ . Weissler proposes to replace  $\mathcal{X}$  by the Banach space  $Y \subset \mathcal{X}$  consisting of all functions such that

$$\begin{cases} u(\cdot, t) \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3)) \\ t^{\frac{\sigma}{2}} u(\cdot, t) \in C([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^3)) \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u\|_p = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u\|_p = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

where  $3 < p < 9$  and  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$ . Three distinct norms will be used. As above, natural norm is

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_3.$$

The second norm is called the strong norm and is defined by

$$\|u\|_* = \|u\|_{\mathcal{X}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}.$$

The third norm is the weak norm that is defined by

$$\|u\|_Y = \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}.$$

Then, we consider the linear space  $\mathcal{H}$  of all solutions  $u(x, t)$ , of the linear heat equation  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ . Then the previous three norms are equivalent on  $\mathcal{H}$ .

The first problem is show to the global existence of the solution  $u(t, x)$  for (6.5) under a condition of smallness on the initial data  $u_0(x)$  in homogeneous Besov spaces  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ , where  $3 < p < 9$  and  $\sigma = 1 - 3/p$ . Actually, our theorem is merely an extension of a theorem of Meyer [53] who did this for  $p = 6$ , and it is based on a fixed-point theorem adapted for our case and the fact that the integral  $\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{p}} \tau^{-\frac{3\sigma}{2}}$  is finite for  $3 < p < 9$ . We will prove in section 6.4 the following theorem.

**Theorem 6.3.1.** *Let  $3 < p < 9$  and let  $\|\cdot\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}}$  denote the norm in the homogeneous Besov space  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ , with  $\sigma = 1 - \frac{3}{p}$ . There exists a positive number  $\eta$  such that, if the initial condition  $u_0(x)$  satisfies  $u_0(x) \in L^3(\mathbb{R}^3)$  and  $\|u_0(x)\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}} \leq \eta$ , then there exists a global solution  $u(x, t) \in C([0, \infty), L^3(\mathbb{R}^3)) \cap Y =: \mathcal{W}$  to (6.5), where  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  is the Banach space such that*

$$\|u\|_Y = \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} < \infty$$

Because of the continuous embedding  $L^3 \subset \dot{B}_p^{-\sigma, \infty}$  (see (6.7)), small data in  $L^3(\mathbb{R}^3)$  give rise to a global solution. The interesting feature of Theorem 6.3.1, however, is that the  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}$ -norm can be small even when  $L^3$ -norm is large: this is typically the case of fast oscillating data, see [12, 53].

Is it possible to further relax the smallness condition  $\|u\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}} \leq \eta$  for the global solvability of (6.5)? Our main result, Theorem 6.3.2 below provides a negative answer in this direction.



**Theorem 6.3.2.** *Let  $\delta > 0$ . Then there exists  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  such that the unique Weissler's solution  $u$  arising from  $u_0$  and belonging to  $C([0, T^*], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty([0, T^*], L^\infty(\mathbb{R}^3))$  verifies  $T^* < \delta$ . In addition, we can choose  $u_0$  in the following way: for all  $3 \leq q \leq +\infty$ ,*

$$\|u_0\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3}, q}} \leq \delta.$$

In particular, it follows that an initial data  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  and and arbitrarily small in  $\dot{B}_\infty^{-1, \infty}(\mathbb{R}^3)$  can produce solutions that explode in finite time. In the case of the incompressible Navier-Stokes equation, a related result were obtained by Bourgain-Pavlovic [10] and later by Yoneda [81]. Bourgain-Pavlovic proved that the incompressible Navier-Stokes equation is ill-posed in the Besov space  $\dot{B}_\infty^{-1, \infty}$  showing an inflation phenomenon of the norm of the solution from an initial condition  $u_0$ . Yoneda has generalized this result to the case of Besov spaces  $\dot{B}_q^{-1, \infty}$  with  $q > 2$ .

If we compare these results with our results for the equation (6.5), we can see that our result for (6.5) is stronger, as it shows that an arbitrarily small initial data  $u_0$  can produce a blow-up in short time of the solution, while the results of Bourgain, Pavlovic and Yoneda only show that an arbitrarily small initial data  $u_0$  can produce arbitrarily large solutions in short time.

Our demonstration is inspired to that of Montgomery-Smith [61], where he built initial data such that there is no a reasonable solution to a toy model for the Navier-Stokes equation in  $\dot{B}_\infty^{-1, \infty}$ .

## 6.4 Proof of Theorem 6.3.1

For the proof of Theorem 6.3.1, we use a fixed point argument:

**Lemma 6.1** (see [53]). *Let  $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$  a Banach space and let*

$$B : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W},$$

*a application trilinear such that*

$$\|B(x, y, z)\|_{\mathcal{W}} \leq C_0 \|x\|_{\mathcal{W}} \|y\|_{\mathcal{W}} \|z\|_{\mathcal{W}}.$$

*If  $\|x_0\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}C_0^{-1/2}$ , then the equation*

$$x = x_0 + B(x, x, x) \quad x \in \mathcal{W},$$

*has a unique solution which satisfies  $\|x\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}C_0^{-1/2}$  and this solution is the limit of the sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , defined by*

$$x_{n+1} = x_0 + B(x_n, x_n, x_n),$$

*and therefore the function defined as*

$$\Psi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n,$$

*is analytic in the ball  $\|x\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}C_0^{-1/2}$ .*

*Proof. Theorem 6.3.1*

We change (6.6) as

$$u(x, t) = e^{\Delta t} u_0(x) + \Gamma(u, u, u)(x, t)$$

where

$$\Gamma(u_1, u_2, u_3)(x, t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} u_1 u_2 u_3(x, \tau) d\tau. \quad (6.11)$$

Moreover, using the Young's Inequality

$$\|\Gamma(u_1, u_2, u_3)(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \int_0^t \|G_{t-\tau}(\cdot)\|_{L^r} \|u_1 u_2 u_3(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{p}{3}}} d\tau,$$

where  $r = \frac{p}{p-2}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t \|G_{t-\tau}(\cdot)\|_{L^r} \|u_1 u_2 u_3(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{p}{3}}} d\tau &= C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{p}} \|u_1 u_2 u_3(\cdot, \tau)\|_{L^{\frac{p}{3}}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{p}} \|u_1(\cdot, \tau)\|_{L^p} \|u_2(\cdot, \tau)\|_{L^p} \|u_3(\cdot, \tau)\|_{L^p} d\tau \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{p}} \tau^{-\frac{3\sigma}{2}} d\tau \|u_1\|_Y \|u_2\|_Y \|u_3\|_Y. \end{aligned}$$

As  $3 < p < 9$ , the integral  $\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{p}} \tau^{-\frac{3\sigma}{2}} d\tau = Ct^{-\sigma/2}$ . Thus, we get

$$\|\Gamma(u_1, u_2, u_3)\|_Y \leq C \|u_1\|_Y \|u_2\|_Y \|u_3\|_Y.$$

Also, in [53] we have

$$\|\Gamma(u_1, u_2, u_3)\|_3 \leq C \|u_1\|_Y \|u_2\|_Y \|u_3\|_Y,$$

and  $\Gamma(u_1, u_2, u_3)(\cdot, t) \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ . On the other hand, we know that the initial data  $u_0$  belongs to  $\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}(\mathbb{R}^3)$ , if and only if  $\|e^{\Delta t} u_0\|_p \leq c t^{-\frac{\sigma}{2}}$ . Therefore, we choose  $\eta = \frac{2C^{-1/2}}{3\sqrt{3}}$  and

$$\|u_0\|_{\dot{B}_p^{-\sigma, \infty}} \leq \frac{2C^{-1/2}}{3\sqrt{3}} = \eta, \quad (6.12)$$

which allow us to apply  $\eta$  Lemma 6.1 in  $\mathcal{W}$  we can conclude.  $\square$

*Remark 6.4.1.* If we consider  $u_0$  as Theorem 6.3.1 and  $\widehat{u}_0(\xi)$  positive, then  $u(x, t)$  solution of (6.5) has its positive Fourier transform. Indeed, suppose for a contradiction that there is  $t$  such that  $\widehat{u}(\xi, t)$  changes sign. By Theorem 6.2.1, we know that there is  $T(u_0) > 0$ , such that  $u$  is the unique solution of (6.5) in  $C([0, T(u_0)], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty((0, T(u_0)], L^\infty(\mathbb{R}^3))$ . We set

$$t_0 = \inf\{t \in [0, T(u_0)), \exists \xi ; \widehat{u}(\xi, t) < 0\}.$$

We must have  $t_0 > 0$  by constructing a local solution by fixed point. Then,  $\forall 0 \leq t < t_0$  and by continuity of the positive function  $(\xi, t) \rightarrow \widehat{u}(\xi, t)$ , we have  $\widehat{u}(\xi, t_0) \geq 0$ . But the Cauchy's problem with  $\widehat{u}_0 = \widehat{u}(\xi, t_0)$  has a solution  $v$  in  $[t_0, t_0 + \alpha)$  ( $\alpha > 0$ ), obtainable by fixed point as:

$$\widehat{v}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}(\xi, t_0) + \int_0^t \widehat{v} * \widehat{v} * \widehat{v}(\xi, s) ds,$$

then  $\widehat{v}(s, \xi) > 0$ , with  $s \in [t_0, t_0 + \alpha)$ . Also, by the uniqueness of solution in  $C([0, T(u_0)], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty([0, T(u_0)], L^\infty(\mathbb{R}^3))$ , this solution coincides with  $u$  dans  $[t_0, t_0 + \alpha)$ . Then there exists  $\alpha > 0$  such that,  $\widehat{u} \geq 0$  in  $[0, t_0 + \alpha)$ . This is absurd by the maximality of  $t_0$ .

*Remark 6.4.2.* In [59], Miao, Yuan and Zhang have generalized this result. They studied the Cauchy problem for the nonlinear heat equation (6.1) in homogeneous Besov spaces  $\dot{B}_r^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , with  $s < 0$ . The non-linear estimation is established by means of trichotomy Littlewood-Paley and is used to prove the global existence of the solutions for small initial data in the homogeneous Besov space  $\dot{B}_r^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  and with  $s = \frac{n}{p} - \frac{2}{b}$ , with  $b > 0$ . In particular, when  $r = \infty$  and when the initial data  $u_0$  satisfies  $\lambda^{\frac{2}{b}} u_0(\lambda x) = u_0(x)$  for all  $\lambda > 0$ , the main result in [59] leads to the global existence of self-similar solutions of the problem (6.1).

## 6.5 Proof of main Theorem and some comments

Our demonstration of the explosion in finite time for the solution of (6.5) is based on the construction of a suitable initial condition  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ : the corresponding solution satisfies  $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$  for  $t \in [0, T^*]$  by Remark 6.2.2, then, we use the Fourier transform  $\widehat{u}(\xi, t)$  of the solution and under certain conditions, we show the finite blow-up of  $\widehat{u}(\cdot, t)$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ . This fact implies the finite time blow-up of  $u(x, t)$  in  $L^1(\mathbb{R}^3)$ .

There are many blowup results based on the maximum principle but to our knowledge, our blow-up criterion of the solution of (6.5) is the only one that uses the positivity of the Fourier transform inherited from its initial condition  $u_0$ .

Now, we are going to formulate a useful lemma for the construction of the initial condition  $u_{0,N}$  that allows us to demonstrate the main Theorem 6.3.2.

**Lemma 6.2.** *Let  $\delta > 0$  and  $w$  be a tempered Schwartz function  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , such that  $\widehat{w}(\xi) \geq 0 \forall \xi$  and  $\widehat{w}(\xi)$  is an even function. Also assume that the support of  $\widehat{w}$  is in  $B_1(0)$ . Let  $w_k = w^{3^k}$  and  $\alpha_k(t) = 3^{\frac{3}{2}+k-\frac{3^{k+1}}{2}} c_\delta^{\frac{1}{2}(3^k-1)} e^{-3^{kt}} \mathbb{1}_{t \geq t_k}$ , where  $t_0 = 0$ ,  $t_k = 4\delta \sum_{j=1}^k 3^{-2j}$ ,  $c_\delta = 1 - e^{-4\delta}$  and  $\mathbb{1}_{t \geq t_k}$  is the Indicator function of the interval  $[t_k, t]$ . Then, if  $u$  is the solution of (6.6) with initial condition  $u_0(x) \in L^3(\mathbb{R}^3)$  such that  $\widehat{u}_0(\xi, t) \geq A\widehat{w}$  with  $A > 0$ , then*

$$\widehat{u} \geq A^{3^k} \alpha_k(t) \widehat{w}_k(\xi) \quad \forall k \geq 0.$$

*Proof.* Using Fourier transform, we have that (6.6) becomes

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{(s-t)|\xi|^2} \widehat{u}(s, \xi) * \widehat{u}(s, \xi) * \widehat{u}(s, \xi) ds \quad (6.13)$$

We start with the case  $k = 0$ :  $e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) > 0$  because  $\widehat{u}_0(\xi) \geq A\widehat{w}(\xi) > 0$ . Then, as  $\widehat{u}(\xi, t) \geq 0$ , using that  $\text{supp } \widehat{w} \subset \{|\xi| \leq 1\}$ , we get

$$\widehat{u}(\xi, t) \geq e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) \geq e^{-t|\xi|^2} A\widehat{w}(\xi) \geq A e^{-t} \widehat{w}(\xi) \quad \forall t > 0. \quad (6.14)$$

Suppose that our desired inequality holds for  $k - 1$ . Then we get, for all  $t \geq t_k$ :

$$\widehat{u}(\xi, t) \geq \int_0^t e^{(s-t)|\xi|^2} \widehat{u}(s, \xi) * \widehat{u}(s, \xi) * \widehat{u}(s, \xi) ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^t e^{(s-t)|\xi|^2} (A^{3^{k-1}} \alpha_{k-1}(s))^3 \widehat{w}_{k-1} * \widehat{w}_{k-1} * \widehat{w}_{k-1}(\xi) ds \\
&= A^{3^k} \widehat{w}_k(\xi) \int_0^t e^{(s-t)|\xi|^2} \alpha_{k-1}^3(s) ds \\
&\geq A^{3^k} \widehat{w}_k(\xi) 3^{\frac{3}{2}+3k-\frac{3^{k+1}}{2}} c_\delta^{\frac{1}{2}(3^k-3)} \int_{t_{k-1}}^t e^{-3^k s} e^{3^{2k}(s-t)} ds \\
&\geq A^{3^k} \widehat{w}_k(\xi) 3^{\frac{3}{2}+3k-\frac{3^{k+1}}{2}} c_\delta^{\frac{1}{2}(3^k-3)} e^{-3^k t} \int_{t_{k-1}}^t e^{3^{2k}(s-t)} ds \\
&\geq A^{3^k} \widehat{w}_k(\xi) 3^{\frac{3}{2}+3k-\frac{3^{k+1}}{2}} c_\delta^{\frac{1}{2}(3^k-3)} e^{-3^k t} 3^{-2k} c_\delta \\
&\geq A^{3^k} \widehat{w}_k(\xi) 3^{\frac{3}{2}+k-\frac{3^{k+1}}{2}} c_\delta^{\frac{1}{2}(3^k-1)} e^{-3^k t} \\
&= A^{3^k} \alpha_k(t) \widehat{w}_k(\xi).
\end{aligned}$$

because  $t \geq t_k$ , with  $t_k - t_{k-1} \geq 3^{-2k} 4\delta$ , then  $1 - e^{3^{2k}(t_{k-1}-t)} \geq c_\delta$ . Our claim now follows by induction.  $\square$

Next lemma provides a first blowup result for equation (6.6).

**Lemma 6.3.** *Let  $\delta > 0$  and  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  ( $w \neq 0$ ) be a Schwartz function such that  $\widehat{w}(\xi) \geq 0 \forall \xi$  and  $\widehat{w}(\xi)$  is an even function. Also assume that the support of  $\widehat{w}$  is in  $B_1(0)$ . Let  $u_0 \geq Aw$ , with  $A \geq \frac{3^{\frac{3}{2}} c_\delta^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\delta}{2}}}{\|\widehat{w}\|_{L^1}}$ , with  $c_\delta = (1 - e^{-4\delta})$ . If  $u$  is the unique Weissler's solution of (6.6) arising from  $u_0$  and belonging to  $C([0, T^*], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty((0, T^*], L^\infty(\mathbb{R}^3))$ , then  $T^* \leq \frac{\delta}{2}$ .*

*Proof.* Assuming  $T^* > \frac{\delta}{2}$  (otherwise the conclusion readily follows), applying Lemma 6.2, and using that  $t_k \uparrow \frac{\delta}{2}$  as  $k \rightarrow +\infty$ , we get:

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq \frac{\delta}{2}} \|u(t, \cdot)\|_{L^1} &= \sup_{0 \leq t \leq \frac{\delta}{2}} \|\widehat{u}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} A^{3^k} 3^{3/2+k-\frac{3^{k+1}}{2}} e^{-3^k \delta/2} \|\widehat{w}\|_{L^1}^{3^k}.
\end{aligned}$$

In the first equality we used the positivity of  $\widehat{u}(t, \cdot)$ . It is clear that the right-hand side is infinite if  $A \geq \frac{3^{3/2} c_\delta^{-1/2} e^{\delta/2}}{\|\widehat{w}\|_{L^1}}$ . The conclusion then follows by Remark 6.4.1.  $\square$

*Remark 6.5.1.* The blowup result of Lemma 6.3 does not immediately imply Theorem 6.3.2, because in this Lemma the condition  $\|u_0\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3}, q}} \leq \delta$  is not satisfied.

In the last part, we will prove the main theorem of our article.

*Proof. Theorem 6.3.2*

Let  $\delta > 0$  fixed and  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  such that  $\widehat{w} \neq 0$  and  $\widehat{w}(\xi) \geq 0 \forall \xi$ . Also assume that  $\widehat{w}$  is an even function and its support is in  $B_1(\frac{1}{6}e_1)$ . On the another hand, let  $u_{0,N} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , defined as

$$u_{0,N}(x) = \epsilon_N \sum_{k=1}^N 2^{2/3 k} \eta_k \cos((2^k - 1)x_1) w(x) \quad \text{where} \quad \eta_k = k^{-1/3} \quad \text{and} \quad \epsilon_N = 1/\log(\log(N)),$$

with  $N \in \mathbb{N}$ . Then, by the Theorem 6.2.1, there is  $T_N^* > 0$  and a unique solution  $u_N(x, t)$  to (6.5) arising from  $u_{0,N}(x)$  such that  $u_N \in C([0, T_N^*], L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty([0, T_N^*], L^\infty(\mathbb{R}^3))$ . Moreover, we can see that  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \notin \ell^3$ , but  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ , with  $q > 3$  and that  $\epsilon_N$  slowly converges to 0.

We do the Littlewood-Paley analysis observing that  $\Delta_j(\cos(2^k - 1x_1)w(x)) = 0$  for all  $j \in \mathbb{Z}$  and  $k = 1, \dots, N$ , except when  $j$  and  $k$  are of the same order. Then, we get

$$\Delta_j u_0 = \begin{cases} \epsilon_N 2^{2/3 j} \eta_j w(x) \cos((2^j - 1)x_1) & j = 0, 1, \dots, N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus, if  $q > 3$  we get

$$\begin{aligned} \|u_{0,N}\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},q}} &\simeq \epsilon_N \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{2}{3}qj} \|\Delta_j u_{0,N}\|_9^q \right)^{\frac{1}{q}} \simeq \epsilon_N \left( \sum_{j=1}^N 2^{-\frac{2}{3}qj + \frac{2}{3}qj} \eta_j^q \|w(x) \cos((2^j - 1)x_1)\|_9^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \epsilon_N \left( \sum_{j=1}^N \eta_j^q \|w(x)\|_9^q \right)^{\frac{1}{q}} = \epsilon_N \|w(x)\|_9 \left( \sum_{j=1}^N \eta_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0 \quad \text{when } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Thus, for all  $q > 3$  fixed, there exists  $N^* \in \mathbb{N}$  such that

$$\|u_{0,N^*}\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},q}} \leq \delta.$$

If the lifetime  $T_{N^*}^*$  of the solution of (6.5) arising from  $u_{0,N^*}$  is less than  $\delta$ , then there is nothing to prove. Therefore, we can assume  $T_{N^*}^* \geq \delta$ . To simplify the notation, from now on we set we call  $N^* = N$ . By Remark 6.4.1, we have  $\hat{u}_N(t, \xi) \geq 0 \forall t \in [0, T_N^*]$ . Thus, if  $0 < t \leq T_N^*$ , we get

$$\begin{aligned} \hat{u}_N(t, \xi) &= e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_{0,N}(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} [\hat{u}_N * \hat{u}_N * \hat{u}_N(\cdot, s)](\xi) ds \geq e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_{0,N}(\xi) \\ &= \epsilon_N \left( \sum_{k=1}^N 2^{\frac{2}{3}k} \eta_k e^{-t|\xi|^2} \frac{1}{2} (\hat{w}(\xi + (2^k - 1)e_1) + \hat{w}(\xi - (2^k - 1)e_1)) \right) \\ &\geq \epsilon_N \left( \sum_{k=1}^N 2^{\frac{2}{3}k-1} \eta_k e^{-t} 2^{2k} (\hat{w}(\xi + (2^k - 1)e_1) + \hat{w}(\xi - (2^k - 1)e_1)) \right). \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} [\hat{u}_N * \hat{u}_N * \hat{u}_N(\cdot, s)](\xi) &\geq \epsilon_N \left( \sum_{k=0}^{N-1} 2^{\frac{2}{3}k - \frac{1}{3}} \eta_{k+1} e^{-s2^{2k+2}} \hat{w}(\xi + (2^{k+1} - 1)e_1) \right) \\ &\quad * \epsilon_N \left( \sum_{k=1}^N 2^{\frac{2}{3}k-1} \eta_k e^{-s2^{2k}} \hat{w}(\xi - (2^k - 1)e_1) \right) \\ &\quad * \epsilon_N \left( \sum_{k=1}^N 2^{\frac{2}{3}k-1} \eta_k e^{-s2^{2k}} \hat{w}(\xi - (2^k - 1)e_1) \right) \\ &\geq \epsilon_N^3 \left( \sum_{k=1}^{N-1} 2^{\frac{2}{3}k - \frac{1}{3} + 2(\frac{2k}{3} - 1)} e^{-s(2^{2k+2} + 2^{2k} + 2^{2k})} \eta_k^2 \eta_{k+1} \right) \hat{w} * \hat{w} * \hat{w}(\xi + e_1). \end{aligned}$$

Observe that  $\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w}(\cdot + e_1)$  is supported by  $B_1(0)$ . We have

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_N(t, \xi) &\geq \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} [\widehat{u} * \widehat{u} * \widehat{u}(\cdot, s)](\xi) ds \\
&\geq \epsilon_N^3 \int_0^t e^{-(t-s)} \left( \sum_{k=1}^{N-1} 2^{2k-\frac{7}{3}} e^{-s(3 \cdot 2^{2k+1})} \eta_k^2 \eta_{k+1} \right) (\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w})(\xi + e_1) ds \\
&= \left( \epsilon_N^3 \sum_{k=1}^{N-1} 2^{2k-\frac{7}{3}} \eta_k^2 \eta_{k+1} e^{-t} \int_0^t e^{(1-3 \cdot 2^{2k+1})s} ds \right) (\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w})(\xi + e_1) \\
&= \left( \epsilon_N^3 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2^{2k-\frac{7}{3}}}{3 \cdot 2^{2k+1} - 1} \eta_k^2 \eta_{k+1} e^{-t} (1 - e^{t(1-3 \cdot 2^{2k+1})}) \right) (\widehat{w} * \widehat{w} * \widehat{w})(\xi + e_1).
\end{aligned}$$

Choose  $t = \frac{\delta}{2}$ . Therefore, if we call  $\tau_N > 0$  as

$$\tau_N = \epsilon_N^3 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2^{2k-\frac{7}{3}}}{3 \cdot 2^{2k+1} - 1} \eta_k^2 \eta_{k+1} e^{-2\delta} (1 - e^{\frac{\delta}{2}(1-3 \cdot 2^{2k+1})}),$$

we get

$$\left\| \widehat{u}_N \left( \frac{\delta}{2}, \cdot \right) \right\|_{L^1} \geq \tau_N \|\widehat{w}\|_{L^1}^3 \quad (6.15)$$

On the other hand, we consider the Cauchy problem (6.5) with initial data  $u_N \left( \frac{\delta}{2}, x \right)$ . Now we apply Lemma 6.3 with the new initial data  $u_N \left( \frac{\delta}{2}, x \right)$  instead of  $u_0$ . Moreover as  $T_N \rightarrow +\infty$  as  $N \rightarrow +\infty$ , if  $N \in \mathbb{N}$  is chosen large enough, then all the assumption of this Lemma are satisfied and therefore  $T_N^* \leq \delta$ .  $\square$

*Remark 6.5.2.* With our choice of initial data  $u_{0,N}$  we have

$$\|u_{0,N}\|_{\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},3}} \leq \epsilon_N \|w(x)\|_9 \left( \sum_{j=1}^N \eta_j^3 \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow +\infty.$$

and

$$\sum_{k=1}^N \eta_k^3 \sim \log N \quad \text{when} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Therefore, our initial condition in Theorem 6.3.2 has the defect that is not in arbitrarily small in  $\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},3}$ . We leave open the following question: a smallness condition on  $u_0$  in  $\dot{B}_9^{-\frac{2}{3},3}$  does it imply the existence of a global solution or not?. However Theorem 6.3.2 shows the optimality of the assumption  $p < 9$  in the global existence Theorem 6.3.1.

On a related subject, Pierre-Gilles Lemarié Rieusset dans [43] studied the parabolic semi-linear equations on  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  of type

$$\partial_t u - (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u^2,$$

where  $0 < \alpha < n + 2\beta$  and  $0 < \beta < \alpha$ . Actually Lemarié-Rieusset worked on a more general quadratic nonlinearity that  $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u^2$ . He showed similar results to ours when  $\beta < \frac{\alpha}{2}$ .



---

## Bibliography

---

- [1] JM Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations.*, The Quarterly Journal of Mathematics **28** (1977), no. 4, 473–486.
- [2] Bandle C. and Levine H., *Fujita type results for convective-like reaction diffusion equations in exterior domains*, ZAMP **40** (1989), no. 5, 665–676.
- [3] ———, *On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains*, Trans. Am. Math. Soc. **316** (1989), no. 2, 595–622.
- [4] J. Bourgain and N. Pavlović, *Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D*, Journal of Functional Analysis **255** (2008), no. 9, 2233–2247.
- [5] Brezis H. and Cazenave T., *A nonlinear heat equation with singular initial data*, Journal D’Analyse Mathématique **68** (1996), no. 1, 277–304.
- [6] Cannone. M., *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes avec une préface de Yves Meyer.*, 1994, pp. 146 p. Thèse de doctorat dirigée par Meyer, Yves Mathématiques appliquées Paris 9 1994.
- [7] ———, *Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations.*, Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III, 2004, pp. 161-244.
- [8] M. A. Ebde and H. Zaag, *Construction and stability of a blow up solution for a nonlinear heat equation with a gradient term*, SeMA Journal **55** (2011), no. 1, 5–21.
- [9] Friedman. A, *Remarks on nonlinear parabolic equations.*, Proc. Sympos. Appl. Math **Vol. XVII** (1965), no. 17, 3–23.
- [10] ———, *Partial differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Co **Vol. XVII** (1976), 3–23.
- [11] Fujita. H, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo **13** (1966), 109–124.
- [12] Fujita H., *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations*, Proc. Symp. Pure Math. XVII Am. Math. Soc. **18** (1970), 105–113.
- [13] Furioli. G, Lemarié-Rieusset. P. G., and Terraneo. E., *Unicité dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  et d’autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes.*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 605-667.
- [14] V. Galaktionov, S. Kurdyumov, and A. Samarskiĭ, *On approximate self-similar solutions of a class of quasilinear heat equations with a source*, Mathematics of the USSR-Sbornik **52** (1984), no. 1, 163-188.
- [15] V. Galaktionov, S. Kurdyumov, P. Mikhailov, and A. Samarskii, *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, SIAM Review **38** (1996), no. 4, 692-694.
- [16] P. Groisman, J. Rossi, and H. Zaag, *On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem* (2003).
- [17] Haraux A. and Weissler F., *Non-uniqueness for a semilinear initial value problem*, Indiana University Mathematics Journal **31** (1982), no. 2, 167–189.
- [18] Hayakawa K., *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proceedings of the Japan Academy **49** (1973), no. 7, 503–505.
- [19] Henry D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* **840** (1985).
- [20] S. Khenissy, Y Rebai, and H. Zaag, *Continuity of the blow-up profile with respect to initial data and to the blow-up point for a semilinear heat equation.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **28** (2011), no. 1, 1–26.



- [21] Lemarié-Rieusset P. G., *Sobolev multipliers, maximal functions and parabolic equations with a quadratic nonlinearity.*, Preprint, Univ. Evry (2013).
- [22] H. A. Levine and Q. S. Zhang, *The critical Fujita number for a semilinear heat equation in exterior domains with homogeneous Neumann boundary values*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **130** (2000), no. 12, 591–602.
- [23] Y. Meyer, *Oscillating Patterns in Some Nonlinear Evolution Equations*, Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, 2006, pp. 101-187.
- [24] Miao C., Yuan B., and Zhang B., *Strong solutions to the nonlinear heat equation in homogeneous Besov spaces.*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications **67** (2007), no. 5, 1329–1343.
- [25] Stephen Montgomery-Smith, *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** (2001), no. 10, 3025–3029.
- [26] Rault J-F., *The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions*, Comptes Rendus Mathématique **349** (2011), no. 19, 1059–1061.
- [27] P. Souplet, *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source*, Journal of Differential Equations **153** (1999), no. 2, 374–406.
- [28] Suzuki R., *Critical Blow-Up for Quasilinear Parabolic Equations in Exterior Domains*, Tokyo Journal of Mathematics **12** (1996), no. 2, 397–409.
- [29] Elide Terraneo, *Non-uniqueness for a critical non-linear heat equation*, Proceedings of the American Mathematical Society (2002).
- [30] J. L. Vazquez and E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, Journal of Functional Analysis **173** (2000), no. 1, 103–153.
- [31] F. Vigneron, *Spatial decay of the velocity field of an incompressible viscous fluid in  $\mathbb{R}^d$* , Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **63** (2005), no. 4, 525–549.
- [32] Wayne C., *Infinite dimensional dynamical systems and the Navier-Stokes equation*, Hamiltonian Dynamical Systems and Applications, 2008, pp. 103-141.
- [33] Fred B Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in  $L^p$* , Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 79-102.
- [34] ———, *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel Journal of Mathematics **38** (1981), no. 1-2, 29–40.
- [35] Yoneda T., *Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near.*, Journal of Functional Analysis **258** (2010), no. 10, 3376–3387.