



HAL
open science

Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM. Étude du problème de magnétostatique et simulation numérique.

Stéphane Balac

► **To cite this version:**

Stéphane Balac. Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM. Étude du problème de magnétostatique et simulation numérique.. Analyse numérique [math.NA]. Université de Rennes 1, 1997. Français. NNT: . tel-01227524

HAL Id: tel-01227524

<https://hal.science/tel-01227524>

Submitted on 11 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Stéphane BALAC

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale Mathématiques de l'Ouest

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE:

*Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM:
étude du problème de magnétostatique
et simulation numérique.*

Soutenue le 27 novembre 1997 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY:

Mr	M. Artola	Rapporteur
Mr	Y. Achdou	Examinateur
Mr	G. Caloz	Examinateur
Mr	M. Costabel	Examinateur
Mr	A. Mignot	Examinateur
Mme	F. Rioux	Rapporteur
Mr	D. Vincensini	Rapporteur

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe d'Analyse Numérique et Mécanique de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes sous la direction du Professeur Gabriel Caloz. Je lui suis très reconnaissant pour ses conseils, ses encouragements et pour le soin avec lequel il a suivi mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Madame Françoise Rioux, à Monsieur Michel Artola et à Monsieur Dominique Vincensini pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie également Monsieur Yves Achdou, Monsieur Martin Costabel et Monsieur Alain Mignot qui ont bien voulu être membre du jury.

Ce travail s'inscrit dans le cadre du Groupement d'Intérêt Scientifique (GIS) *Biomatériaux Métalliques* de l'Université de Rennes 1 et à ce titre a été effectué en collaboration avec le laboratoire de Résonance Magnétique en Biologie et Médecine et le laboratoire de Biomateriaux en Site Osseux. Je tiens à remercier Messieurs Guy Cathelineau, Jacques De Certaines et Jean Lecerf, à l'origine de ce projet, pour l'intérêt qu'ils ont continuellement manifesté pour mon travail.

Enfin, je dois beaucoup à Stéphane Beaumont qui m'a fait bénéficier des acquis de son travail de thèse sur les artefacts de susceptibilité magnétique et à Brice Chauvel qui a réalisé, entre autre, les expérimentations IRM présentées dans cette thèse.

Table des Matières

Introduction	5
Première Partie : Le problème de magnétostatique	11
1 Présentation du problème	13
1.1 Les Équations de l'électromagnétisme	13
1.1.1 Les équations de Maxwell pour les milieux continus	13
1.1.2 Lois de comportement	14
1.1.3 Conditions de transmission	15
1.2 Propriétés magnétiques de la matière	16
1.2.1 Aimantation induite	16
1.2.2 Origine du magnétisme de la matière	16
1.2.3 Classification des milieux aimantés	16
1.3 Modélisation du problème	18
1.3.1 Formulation du problème	18
1.3.2 Hypothèses simplificatrices	19
1.3.3 Problème à résoudre	21
1.4 Un problème de magnétostatique due à des courants de surface	22
1.4.1 Formulation pour l'induction magnétique	22
1.4.2 L'opérateur différentiel divergence surfacique	22
1.4.3 Relation de continuité	23
1.4.4 Étude du problème de la magnétostatique	24
2 Formulation élément fini pour le potentiel magnétique scalaire	27
2.1 Problèmes aux limites pour le potentiel magnétique	27
2.1.1 Premier problème aux limites pour le potentiel magnétique	27
2.1.2 Second problème aux limites pour le potentiel magnétique	29
2.1.3 Ordre de grandeur de l'erreur d'approximation	30
2.2 Propriétés du potentiel magnétique scalaire	31
2.2.1 Régularité du potentiel magnétique	31
2.2.2 Comportement asymptotique du potentiel magnétique	34
2.3 Réduction à un problème en domaine borné	38
2.3.1 Condition aux limites sur la frontière artificielle	38

2.3.2	Le problème posé en domaine borné	40
2.4	Estimation de l'erreur de troncature	43
2.4.1	Un lemme	43
2.4.2	Estimation ponctuelle de l'erreur	44
2.4.3	Estimation de l'erreur pour la norme de l'énergie	47
2.5	Analogie avec un problème de thermoconduction dans un solide rigide . . .	51
2.5.1	Le problème de thermoconduction	51
2.5.2	Mise en évidence de l'analogie	51
2.6	Calcul du potentiel par la méthode des éléments finis et estimation d'erreur	52
2.6.1	Espaces d'approximation	52
2.6.2	Le problème approché	55
2.6.3	Estimation d'erreur	56
2.6.4	Adaptation du maillage	60
3	Formulation intégrale pour l'induction magnétique. Calculs analytiques	
	pour un polyèdre	65
3.1	Formulation intégrale pour le champ magnétique	65
3.2	Formulation intégrale pour l'induction magnétique	67
3.2.1	Formule de représentation intégrale	67
3.2.2	Intérêt de la formule de représentation intégrale	68
3.3	Stratégie de calcul de l'induction magnétique	68
3.4	Calcul analytique de l'induction magnétique	70
3.4.1	Description de la méthode	70
3.4.2	Décomposition du domaine d'intégration	71
3.4.3	Calcul de l'intégrale pour les deux premières composantes	74
3.4.4	Calcul de l'intégrale pour la troisième composante	76
3.4.5	La procédure de calcul de l'intégrale	79
4	Calcul numérique de l'induction magnétique pour un domaine quel-	
	conque	81
4.1	Approximation de la surface	81
4.1.1	Hypothèses et notations	81
4.1.2	Description de la méthode	83
4.2	Estimation de l'erreur due à l'approximation de la surface	86
4.2.1	Erreur dans l'approximation de la normale	87
4.2.2	Quelques résultats intermédiaires	90
4.2.3	Étude du terme E_1	95
4.2.4	Majoration du terme E_2	101
4.2.5	Estimation de l'erreur	103
4.2.6	Comportement de l'erreur pour un point proche de la surface	103
4.3	Utilisation d'une formule de quadrature numérique	105
4.3.1	Formule de quadrature	105
4.3.2	Étude de l'erreur	106

4.3.3	Comportement de l'erreur pour un point proche de la surface: quasi-singularité	112
4.3.4	Traitement de la quasi-singularité	113
4.4	Expériences numériques	115
4.4.1	Un problème test	116
4.4.2	Mise en évidence de la quasi-singularité	117
4.4.3	Mise en évidence de la vitesse de convergence	117
4.4.4	Étude des différentes formules de quadrature	118
Deuxième Partie : Modélisation des artefacts		121
5	La Résonance Magnétique Nucléaire	123
5.1	Les équations de Bloch	123
5.1.1	Principe de la RMN	123
5.1.2	Les équations de Bloch	126
5.2	Résolution des équations de Bloch	127
5.2.1	Équations de Bloch dans le repère tournant	127
5.2.2	Évolution de l'aimantation au cours de la résonance	128
5.2.3	Évolution de l'aimantation au cours de la relaxation	131
5.3	Modélisation d'une séquence d'impulsions	134
5.3.1	Évolution de l'aimantation au cours du temps	135
5.3.2	Opérateur de Résonance et Opérateur de Relaxation	136
5.3.3	Modélisation d'une séquence quelconque	137
5.3.4	Signal RMN	138
5.4	Les Équations de Bloch-Torrey	140
6	L'Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire	141
6.1	Localisation du signal RMN	141
6.1.1	Qu'est-ce qu'un gradient?	142
6.1.2	Sélection d'un plan de coupe	143
6.1.3	Codage par la fréquence	145
6.1.4	Codage par la phase	145
6.1.5	Prise en compte de l'épaisseur de la coupe	147
6.2	Reconstruction de l'image	148
6.2.1	Le signal IRM	148
6.2.2	Transformation de Fourier du signal	149
6.2.3	La méthode Spin-Warp	150
7	Modélisation du processus de création des artefacts	151
7.1	Origine des artefacts de susceptibilité magnétique	151
7.2	Effets des inhomogénéités de champ magnétique	153
7.2.1	Déformation du plan de coupe	153
7.2.2	Perturbation du codage de l'image	155

7.3	Forme du signal IRM en présence d'inhomogénéités magnétiques	156
7.3.1	La séquence Spin-Écho	156
7.3.2	La séquence Écho de Gradient	157
7.3.3	Forme du signal IRM	157
7.4	Analyse mathématique du processus de création des artefacts	159
7.5	Interprétation du processus de création des artefacts	163
7.5.1	Distorsions géométriques	163
7.5.2	Distorsions d'intensité	165
7.6	Mise en évidence des artefacts	166
7.6.1	Déformation du plan de coupe	166
7.6.2	Distorsions géométriques	170
7.7	Simulation numérique des artefacts	170
7.7.1	Description de la méthode	170
7.7.2	Premier algorithme	172
7.7.3	Second algorithme	175
8	Résultats numériques	177
8.1	Le code de calcul du champ magnétique induit	177
8.2	Le code de simulation des artefacts	180
8.3	Quelques exemples de simulation	180
8.3.1	Exemple de la bille métallique	180
8.3.2	Exemple d'un implant dentaire	189
	Conclusion	195
A	Espaces de Sobolev à poids	197
B	Champ magnétique induit par quelques géométries particulières	199
B.1	Champ magnétique induit par une bille uniformément aimantée	199
B.2	Champ magnétique induit par un cylindre "infini" uniformément aimanté .	200
C	Champ magnétique induit par un implant métallique formé par l'association d'un paramagnétique et d'un diamagnétique	201

Introduction

Cette thèse a été suscitée par une collaboration entre le laboratoire de Résonance Magnétique en Biologie et Médecine et l'équipe d'Analyse Numérique et Mécanique de l'IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes, UMR 6625) de l'Université de Rennes 1. Ce travail s'inscrit dans le cadre du Groupement d'Intérêt Scientifique (GIS) *Biomatériaux Métalliques* créé par l'Université de Rennes 1.

L'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM) est une technique d'imagerie médicale permettant d'obtenir, de façon non-invasive et inoffensive, des images du corps humain, bidimensionnelles ou tridimensionnelles, et de très bonne qualité.

L'IRM utilise le fait que certains noyaux (en pratique, on s'intéresse surtout au noyau d'hydrogène en raison de sa très grande abondance dans les tissus biologiques) possèdent un moment magnétique. La résonance magnétique nucléaire (RMN) consiste à détecter les variations du moment magnétique macroscopique (encore appelé aimantation) dans une substance sous l'action d'un champ magnétique statique et d'une onde électromagnétique de fréquence appropriée. Ces variations du moment magnétique macroscopique sont à l'origine d'un signal, le signal RMN, qui correctement interprété (à l'aide d'une transformation de Fourier) fournit des informations sur la substance étudiée.

Pour pouvoir obtenir une image d'un échantillon, il faut être en mesure de relier les informations obtenues en analysant le signal et la position correspondante dans l'échantillon. À l'origine du "codage spatial" du signal se trouve la relation de Larmor (voir la formule (5.1)) qui lie la fréquence du signal RMN au champ magnétique statique appliqué dans l'échantillon. Ainsi, en utilisant un champ magnétique qui varie d'un point à l'autre de l'échantillon d'une façon prédéterminée (de manière linéaire), on crée une dépendance entre la fréquence et la phase du signal RMN d'une part et la position dans (une coupe de) cet échantillon d'autre part (cette relation est appelée *relation espace-fréquence*). En décodant le signal (par une double transformation de Fourier), on pourra associer à chaque point un certain nombre de paramètres caractéristiques de l'échantillon (densité de protons, temps de relaxation, ...) et obtenir une image.

Comme on le conçoit aisément, toute perturbation du champ magnétique va entraîner une perturbation de la relation espace-fréquence et donc un mauvais codage du signal. L'image obtenue ne sera alors pas conforme à l'échantillon. Une telle perturbation de l'image est appelée *artefact* (ou artéfact).

Il est d'usage de distinguer les sources de perturbations du champ magnétique qui sont in-

trinsèques au système d'imagerie et celles qui sont liées à la présence du patient. Plusieurs techniques sont utilisées pour corriger les artefacts (dits *artefacts de champ magnétique*) introduits par des inhomogénéités du champ magnétique dues aux imperfections des aimants. On peut effectuer une correction passive à l'aide de plaques ferromagnétiques judicieusement disposées (voir [1] par exemple). On a aussi recours à l'utilisation de techniques de post-traitement d'image qui tiennent compte de telles inhomogénéités (voir [64], [88] par exemple).

Parmi les sources de perturbations du champ magnétique qui sont liées à la présence du patient, la plus importante est la présence d'objets métalliques implantés (clips chirurgicaux, prothèses dentaires, prothèses articulaires, vis ou plaques orthopédiques, ...). Ces objets sont la source d'un champ magnétique induit qui vient s'ajouter aux champs magnétiques utilisés dans le processus de codage de l'image. Il en résulte une perturbation locale de l'image au voisinage de l'implant, caractérisée par une expansion ou une compression de l'image associées à une modification de l'intensité des pixels. Lorsque la région d'intérêt inclut ces implants ou est au voisinage de ceux-ci, l'interprétation de l'image et par conséquent le diagnostic médical, est impossible. Ces artefacts sont appelés *artefacts de susceptibilité magnétique*. Des différences importantes de susceptibilité magnétique entre deux tissus peuvent également générer de tels artefacts. De telles variations existent par exemple aux interfaces air-tissu (sinus, fosses nasales, poumons ...). De même, des particules ferromagnétiques dispersées (souvent associées à des pathologies au niveau du foie ou du cerveau) peuvent engendrer des artefacts de susceptibilité magnétique (voir [63] par exemple). Enfin, avec le développement actuel de la chirurgie assistée par IRM, se pose le problème des artefacts de susceptibilité magnétique liés à l'utilisation d'instruments chirurgicaux métalliques.

Aucune solution satisfaisante ne permet actuellement de corriger les artefacts de susceptibilité magnétique. La différence essentielle entre les artefacts de susceptibilité magnétique et les artefacts de champ magnétique est que les perturbations du champ magnétique, liées à la présence du patient, varient d'une expérience à l'autre. Leur prise en compte est donc beaucoup plus difficile.

L'objectif de ce travail est de proposer un certain nombre d'éléments permettant d'envisager la mise en œuvre de techniques de correction ou d'atténuation des artefacts de susceptibilité magnétique. Deux problèmes ont retenus notre attention. D'une part, il semble essentiel d'être en mesure de calculer de manière très précise les perturbations du champ magnétique engendrées par l'implant métallique, c'est à dire calculer le champ magnétique induit par un objet métallique placé dans les conditions d'une expérience d'IRM. Il s'agit là d'un problème de magnétostatique. L'étude de ce problème constitue la première partie de la thèse. D'autre part, il est tout aussi important de préciser de quelle manière des perturbations du champ magnétique statique sont responsables d'une perturbation de l'image. L'étude de ce problème constitue la seconde partie de la thèse.

L'étude de ces deux problèmes n'est pas en soi nouvelle. Les problèmes de magnétostatique sont très bien traités tant dans leurs aspects physiques [37] que théoriques [32] dans la littérature et la mise en œuvre de méthodes de calcul numérique fait l'objet de nombreuses

publications (voir par exemple la revue spécialisée *IEEE Transactions on Magnetics*). L'étude que nous avons consacrée au problème de la magnétostatique est justifiée par le fait qu'il nous a paru être important de mettre en œuvre une méthode numérique bien adaptée à notre problème plutôt que d'utiliser des codes de calcul en électromagnétisme plus généraux et donc moins efficaces pour traiter ce problème. Le calcul du champ magnétique induit n'est en effet qu'une étape dans l'étude des artefacts. Dans le cadre d'un logiciel de simulation des artefacts par exemple, le code de calcul du champ magnétique induit doit être associé à un algorithme de reconstruction de l'artefact. Le calcul du champ magnétique doit en particulier être précis et rapide.

De même un certain nombre de travaux ont été consacré à l'étude des artefacts de susceptibilité magnétique [14], [68], [41], [81] et des méthodes de simulations de ces artefacts ont été proposées. Nous avons cherché à généraliser ces travaux (les seules géométries considérées pour l'implant étaient la sphère et le cylindre) et à fournir une modélisation mathématique précise. Cette modélisation a permis d'obtenir un algorithme permettant la simulation numérique des artefacts de susceptibilité magnétique.

Les perspectives d'un tel travail pour le traitement des artefacts de susceptibilité magnétique sont variées. Une première solution au problème des artefacts de susceptibilité magnétique réside dans l'utilisation de nouveaux implants et matériel médical dont les formes et les matériaux sont adaptés afin de limiter les perturbations des champs magnétiques utilisés en IRM. Le développement de tels implants suppose aujourd'hui de nombreux essais en imagerie, longs et coûteux, dont le nombre pourrait être réduit par simulation numérique sur ordinateur. Le logiciel de simulation des artefacts que nous avons développé à partir de notre étude est à même de remplir cette tâche. Connaissant la géométrie et les propriétés magnétiques de l'implant, nous pouvons simuler les artefacts engendrés par les deux séquences d'imagerie IRM de base que sont la séquence Spin-Écho et la séquence Écho de Gradient. D'autre part la possibilité de calculer rapidement le champ magnétique induit par un implant de géométrie quelconque permet d'envisager la mise en œuvre d'une technique de post-traitement d'image qui tiendrait compte des perturbations du processus de codage de l'image dues à l'implant, à l'instar de ce qui existe pour les artefacts de champ magnétique.

Ce document comporte deux parties. Dans la première partie nous abordons l'étude du problème de la magnétostatique. La seconde partie est consacrée à la modélisation des artefacts de susceptibilité magnétique.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude du problème de magnétostatique suivant: soit un implant métallique paramagnétique occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 et soumis à une induction magnétique statique constante \vec{B}_0 ; calculer l'induction magnétique secondaire \vec{B}' solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{B}' & = \vec{0} & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \operatorname{div} \vec{B}' & = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \left[-\frac{1}{\mu} \vec{B}' \wedge \vec{n} \right] & = \left[\frac{1}{\mu} \right] (\vec{B}_0 \wedge \vec{n}) & \text{à travers } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ce problème est un problème classique de magnétostatique due à des courants de surface (fictifs dans notre cas). Un tel problème est étudié par exemple dans Dautray – Lions [32].

Cette formulation du problème est toutefois mal adaptée à une résolution numérique. Nous introduisons le potentiel magnétique scalaire. Ce nouveau problème est étudié au chapitre 2. Il s'agit d'un problème de Laplace dans \mathbb{R}^3 avec une condition d'interface. Ce problème peut se formuler ainsi: trouver $\phi \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = \vec{M} \cdot \vec{n} & \text{à travers } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nous montrons que la formulation variationnelle obtenue possède des analogies avec la formulation variationnelle pour un problème de thermoconduction dans un solide rigide. Ces analogies nous permettent de résoudre ce problème à l'aide du code éléments finis *Modulef* (en ayant recours à la bibliothèque d'éléments finis de thermique). Pour pouvoir utiliser la méthode des éléments finis, le domaine extérieur est tronqué. Nous utilisons les propriétés du potentiel magnétique scalaire pour établir une condition aux limites d'ordre 1 sur la frontière artificielle. Cette condition aux limites est légèrement différente des conditions aux limites usuelles pour le problème de Laplace (voir Bayliss, Gunzburger et Turkel [13]) et procure une précision intermédiaire entre les précisions qui sont obtenues avec les conditions standard d'ordre 1 et 2. Nous abordons ensuite l'approximation par éléments finis et proposons une stratégie de maillage dérivant de celle proposée par Goldstein [48] permettant d'obtenir des estimations d'erreur optimales.

Nous discutons les avantages et les inconvénients de cette approche du problème. Il s'avère que pour une utilisation conjointe avec un code de simulation des artefacts cette méthode numérique n'est pas très bien adaptée. Le chapitre 3 est consacrée à l'étude d'une formulation intégrale pour l'induction magnétique secondaire. On montre que l'induction magnétique secondaire admet la représentation intégrale suivante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{B}'(x) & = \mu_0 \vec{M} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}'}{r^3} \right) \vec{n}(y) \, ds(y) & \forall x \in \Omega, \\ \vec{B}'(x) & = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}'}{r^3} \right) \vec{n}(y) \, ds(y) & \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{array} \right.$$

Dans la situation qui nous intéresse, le domaine Ω est un milieu paramagnétique. Nous faisons l'hypothèse que l'aimantation \vec{M} y est constante et connue. Le calcul de l'induction

magnétique secondaire se ramène donc au calcul de l'intégrale surfacique. Lorsque la surface Σ de l'implant est formée (ou possède) des faces planes, l'intégrale peut être calculée de manière exacte (sans recourir à une formule de quadrature). Par contre, lorsque la surface Σ possède des portions non planes, un calcul analytique de l'intégrale sur ces portions n'est plus envisageable.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation d'une méthode de calcul numérique qui s'inspire des travaux de K.E. Atkinson et D. Chien (voir [6], [8]) développés dans le cadre des méthodes de collocation pour résoudre des équations intégrales de surface. Une étude détaillée de l'estimation d'erreur est effectuée et une attention particulière est portée à l'étude du comportement quasi-singulier de l'intégrale. En pratique, les deux méthodes de calcul de l'intégrale sont utilisées conjointement.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du processus de création des artefacts. Un premier chapitre est consacré à la présentation de la résonance magnétique nucléaire et à la résolution des équations de Bloch décrivant le comportement du moment magnétique macroscopique soumis à des champs magnétiques.

Dans le second chapitre nous présentons une modélisation mathématique du procédé de codage de l'image en IRM.

Au troisième chapitre, nous considérons à nouveau la modélisation effectuée afin de prendre en compte l'existence d'un champ magnétique perturbateur (situation qui se présente en présence d'un implant métallique). Nous obtenons un algorithme permettant la simulation des artefacts de susceptibilité magnétique. La mise en œuvre de cet algorithme est discutée. Une analyse détaillée du processus de création des artefacts, s'appuyant sur le modèle obtenu, est également réalisée.

Le dernier chapitre est consacré aux présentations du code de simulation des artefacts et des résultats numériques.

Première Partie

Le problème de magnéto-statique

Chapitre 1

Présentation du problème

1.1 Les Équations de l'électromagnétisme

1.1.1 Les équations de Maxwell pour les milieux continus

En régime stationnaire, les phénomènes électromagnétiques sont décrits à l'aide de quatre champs \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} et \vec{B} définis sur l'espace \mathbb{R}^3 et à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^3 . \vec{E} est appelé *champ électrique*, \vec{H} *champ magnétique*, \vec{D} *déplacement électrique* et \vec{B} *induction magnétique*.

Ces champs sont reliés à deux autres grandeurs, ρ la *densité de charge* définie sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R} et \vec{j} la *densité de courant* définie de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 , par les équations de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = \vec{0}, & (i) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}, & (ii) \\ \text{div } \vec{D} = \rho, & (iii) \\ \text{div } \vec{B} = 0. & (iv) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans tout milieu où ont lieu des phénomènes électromagnétiques on définit deux champs supplémentaires, \vec{P} *vecteur polarisation* et \vec{M} *vecteur aimantation*, tels que:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.2)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.3)$$

où $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ est la perméabilité magnétique du vide et $\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \pi} \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ est la permittivité électrique du vide.

Les équations (1.1) doivent être considérées au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 . Elles sont valables aussi bien au niveau microscopique qu'au niveau macroscopique. La densité de courant \vec{j} et la densité de charges ρ représentent l'ensemble des courants et charges

électriques présents; ceux-ci peuvent être à support volumique, surfacique, voir linéique ou ponctuel. En prenant la divergence de l'équation (1.1-ii), on obtient

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.4)$$

Cette relation exprime, en régime stationnaire, la conservation des charges électriques. Elle est appelée *équation de continuité*.

Les équations (1.1) forment un système de huit équations où seize inconnues apparaissent (\vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{j} , ρ). Pour aboutir à des problèmes mathématiquement bien posés, le nombre d'équations est insuffisant. On ajoute des équations dites relations constitutives, encore appelées lois de comportement, que l'on obtient par des considérations physiques et qui décrivent les propriétés électromagnétiques des matériaux.

1.1.2 Lois de comportement

La loi d'Ohm

Dans certaines applications, la densité de courant \vec{j} qui provient du déplacement de charges dans les milieux est inconnue. Une loi de comportement caractérisant les relations entre \vec{j} et le champ électromagnétique est introduite. Pour un milieu isotrope conducteur, la densité de courant \vec{j} dépend du champ électrique \vec{E} selon la loi ([37], [60])

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}) \vec{E}. \quad (1.5)$$

Si le milieu est linéaire conducteur, la loi donne la densité de courant \vec{j} comme une fonction linéaire de \vec{E}

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.6)$$

où σ est une constante positive caractéristique du milieu, appelée conductivité électrique.

La loi de polarisation

Pour un milieu diélectrique isotrope le vecteur polarisation est lié au champ électrique \vec{E} par la relation ([37], [60])

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e(\vec{E}) \vec{E}. \quad (1.7)$$

où χ_e est la susceptibilité électrique du milieu qui dans le cas de diélectriques isotropes linéaires (on parle de diélectriques parfaits) est une constante.

La loi de magnétisation

Les propriétés magnétiques des milieux isotropes magnétiques sont décrits de façon convenable en reliant la magnétisation \vec{M} à sa source \vec{B} (ou \vec{H}) par une relation de la forme ([37], [60])

$$\vec{M} = \lambda(\vec{B}) \vec{B}. \quad (1.8)$$

Pour les milieux magnétiques parfaits (isotropes linéaires) λ est constant et \vec{M} est proportionnel à \vec{B} . Dans ce cas le coefficient λ est souvent mis sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}, \quad (1.9)$$

où μ est la perméabilité magnétique du milieu (et μ_0 celle du vide). On caractérise souvent une substance par sa susceptibilité magnétique

$$\chi_m = \mu \lambda = \frac{\mu}{\mu_0} - 1. \quad (1.10)$$

Pour les milieux magnétiques parfaits on a alors la relation

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (1.11)$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur les propriétés magnétiques des matériaux qui interviennent de façon essentielle dans notre étude.

1.1.3 Conditions de transmission

Considérons dans l'espace deux milieux continus occupant des domaines Ω_1 et Ω_2 en contact sur une partie régulière Σ de leur frontière. On suppose les champs $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ et \vec{B} réguliers dans chacun des deux milieux et appartenant localement à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^3$. Ces champs peuvent présenter des discontinuités à la surface de séparation des deux milieux. Soit \vec{j}_Σ une densité surfacique de courant et ρ_Σ une densité surfacique de charge électrique localisées sur l'interface Σ . On note \vec{n} la normale à la surface Σ dirigée de Ω_1 vers Ω_2 . Les équations (1.1) ont un sens dans le cadre classique (de la dérivation) à l'intérieur de chacun des deux milieux, à l'exclusion de l'interface Σ . Les conditions de transmission à travers Σ sont (voir [32], Ch. 1, p. 77 et p. 84):

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\vec{H} \wedge \vec{n}] = -\vec{j}_\Sigma, & (i) \\ [\vec{B} \cdot \vec{n}] = 0, & (ii) \\ [\vec{E} \wedge \vec{n}] = \vec{0}, & (iii) \\ [\vec{D} \cdot \vec{n}] = \rho_\Sigma, & (iv) \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où $[u]$ désigne le saut de la quantité u à travers Σ qui est défini par

$$[u] = u|_{\Omega_2} - u|_{\Omega_1} \quad (1.13)$$

où $u|_{\Omega_1}$ et $u|_{\Omega_2}$ sont les valeurs prises par u de part et d'autre de Σ , respectivement dans les milieux Ω_1 et Ω_2 ,

$$u|_{\Omega_i}(x) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow x \\ \zeta \in \Omega_i}} u(\zeta) \quad x \in \Sigma. \quad (1.14)$$

Ces relations traduisent la continuité de la composante normale de \vec{B} et de la composante tangentielle de \vec{E} à la surface de séparation entre les deux milieux. Elles fournissent également le saut réalisé par la composante tangentielle de \vec{H} et par la composante normale de \vec{D} .

1.2 Propriétés magnétiques de la matière

1.2.1 Aimantation induite

Les propriétés magnétiques de la plupart des corps ne se manifestent que lorsqu'ils sont placés dans une région de l'espace où règne un champ magnétique. Ils acquièrent alors une aimantation que l'on dit *induite* et qui va influencer ce dernier.

À l'échelle macroscopique, on modélise le phénomène en supposant que tout élément de volume d'un matériau possède un moment magnétique dipolaire (un dipôle magnétique est une boucle de courant de taille très inférieure aux distances d'observation; le moment magnétique dipolaire est le moment magnétique engendré par une telle boucle). On caractérise alors le phénomène d'aimantation par une densité volumique de moment dipolaire, le vecteur aimantation (ou encore aimantation) \vec{M} . Ce vecteur aimantation s'exprime en *Ampère par mètre*. L'aimantation \vec{M} acquise par la matière est fonction du champ magnétique total. Le lien entre ces deux grandeurs est caractéristique du matériau et de l'état dans lequel il se trouve (température, pression, etc).

1.2.2 Origine du magnétisme de la matière

Les propriétés magnétiques de la matière dépendent au niveau microscopique de ses constituants atomiques, électrons et noyaux, particules chargées en mouvement. Dans le modèle simplifié de l'atome, les électrons décrivent des orbites circulaires autour du noyau et sont en même temps animés d'un mouvement de rotation intrinsèque. D'autre part, le noyau lui-même est animé d'un mouvement de rotation intrinsèque. Les mouvements de ces particules ont des effets assimilables à de petites boucles de courant de dimensions microscopiques. Ainsi, chaque atome est caractérisé par un moment magnétique qui est la superposition du moment magnétique nucléaire et des moments magnétiques des électrons. Le vecteur aimantation à l'échelle macroscopique est obtenu en effectuant une moyenne de ces moments magnétiques atomiques (voir [60] p. 103 – 107).

1.2.3 Classification des milieux aimantés

Classification

On classe les milieux en fonction de leur comportement dans un champ magnétique. Les grandes lignes de la classification sont les suivantes:

- A. les atomes en l'absence de champ *ne possèdent pas* de moment magnétique individuel (moment magnétique nucléaire et moment d'origine électronique se compensent): il apparaît alors le phénomène de diamagnétisme;
- B. les atomes en l'absence de champ *possèdent* un moment magnétique individuel: le phénomène de diamagnétisme a toujours lieu mais il est masqué par des phénomènes plus importants donnant lieu aux cas suivants:
 - les moments magnétiques atomiques *n'exercent pas* d'interaction les uns sur les autres: c'est le paramagnétisme;

- les moments magnétiques atomiques *exercent* des interactions les uns sur les autres: cela donne lieu au ferromagnétisme.

Suivant le cas, un milieu est dit *diamagnétique*, *paramagnétique* ou *ferromagnétique*.

Le diamagnétisme

Un atome est formé d'électrons tournant sur eux-même et tournant autour du noyau sur des orbites quantifiées. Un champ magnétique quelconque perturbera toujours leurs mouvements en vertu de la force d'Ampère appliquée aux charges en mouvement. Cette perturbation fait apparaître une aimantation. Ce phénomène porte le nom de diamagnétisme. Tous les corps sont diamagnétiques puisque tous les corps possèdent des atomes. Le moment diamagnétique est toujours très faible, même dans les champs intenses et n'existe que pendant l'application du champ.

L'expérience vérifie que le moment diamagnétique est proportionnel au champ magnétique appliqué. Il en est de même du vecteur aimantation. La loi de comportement magnétique pour les milieux diamagnétiques s'écrit

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (1.15)$$

Ainsi que nous l'avons déjà vu, le coefficient χ_m porte le nom de *susceptibilité magnétique*; c'est un nombre *négligé* sans dimension de l'ordre de -10^{-4} à -10^{-6} .

Le paramagnétisme

Si les atomes contenus dans la matière considérée possèdent un ou plusieurs électrons célibataires sur leurs couches périphériques, ils possèdent un moment magnétique individuel. Chaque atome est un petit aimant permanent. Si la distance entre deux moments voisins est suffisamment grande (nettement supérieure au double du rayon de l'orbite décrite par l'électron célibataire, par exemple), ces moments n'interagissent pas de façon significative. Il en résulte que les atomes sont livrés à l'agitation thermique seule et prennent, par conséquent, une répartition statistique uniforme dans toutes les directions de l'espace; le moment résultant est nul et la substance ne porte aucune trace d'aimantation. Mais si l'échantillon est soumis à un champ magnétique, chaque moment va avoir tendance à s'aligner le long de la ligne de champ passant par le point où il se trouve et un moment magnétique résultant apparaît. Il s'établit un compromis entre l'action du champ magnétique et l'agitation thermique.

L'expérience montre que le moment magnétique pris par l'échantillon de matière est proportionnel au champ magnétique appliqué. Il en est de même du vecteur aimantation. La loi de comportement magnétique pour les milieux paramagnétique est de la même forme que celle des milieux diamagnétiques

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (1.16)$$

Toutefois, pour les paramagnétiques le coefficient χ_m , toujours appelé susceptibilité magnétique, est un nombre *positif* variant de 10^{-6} à 10^{-3} . De plus, la susceptibilité magnétique

χ_m diminue pour un paramagnétique quand la température augmente selon la loi de Curie-Weiss. De même que pour le diamagnétisme, le paramagnétisme disparaît lorsque le champ magnétique cesse d'être appliqué.

Le ferromagnétisme

À l'état solide, cristallisé, des forces d'origine électronique, les *forces magnéto-cristallines* peuvent, dans certains cas, créer une aimantation cohérente à l'intérieur d'un très petit domaine, appelé domaine de Weiss. L'intensité de ces forces magnéto-cristallines dépend de la distance entre les atomes ayant des moments magnétiques individuels (liés à la présence d'électrons célibataires). Si cette distance est approximativement le double du rayon de l'orbite décrite par l'électron célibataire les moments magnétiques atomiques interagissent: une aimantation très importante peut apparaître. Ce phénomène est appelé ferromagnétisme. La loi de comportement de l'aimantation est alors non-linéaire.

1.3 Modélisation du problème

1.3.1 Formulation du problème

Considérons dans l'espace plusieurs milieux continus occupant des domaines $\Omega_i, i = 1 \dots N$. Il s'agit par exemple d'implants ou de cavités à l'intérieur de tissus biologiques, voir la figure 1.1.

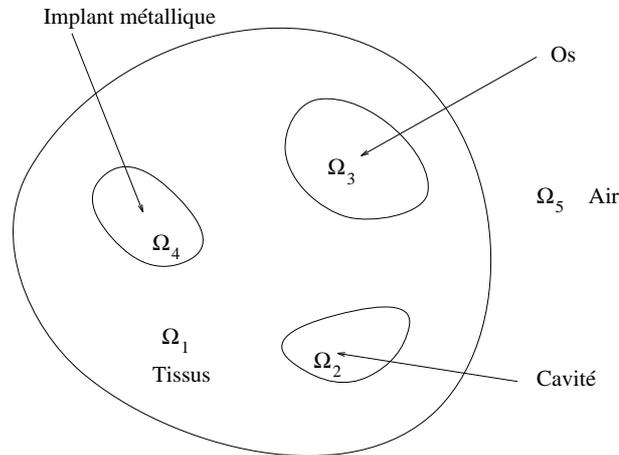


Figure 1.1: situation envisagée.

On note, $\forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j$, Σ_{ij} la frontière commune à Ω_i et Ω_j et \vec{n}_{ij} la normale à cette surface dirigée de Ω_i vers Ω_j . On désigne par \vec{j}_i (respectivement ρ_i) les densités volumiques de courant (respectivement de charge) dans Ω_i et par $\vec{j}_{\Sigma_{ij}}$ (respectivement $\rho_{\Sigma_{ij}}$) les densités surfaciques de courant (respectivement de charge) sur Σ_{ij} .

Les champs électromagnétiques sont solutions des équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = \vec{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3, & (i) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_i & \text{dans chaque milieu } \Omega_i, i = 1, \dots, N, & (ii) \\ \text{div } \vec{D} = \rho_i & \text{dans chaque milieu } \Omega_i, i = 1, \dots, N, & (iii) \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. & (iv) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Les propriétés électromagnétiques de chaque milieu sont décrites à l'aide des champs \vec{P} et \vec{M} reliés aux précédents par les relations (1.2) et (1.3). Le vecteur polarisation et le vecteur aimantation vérifient, si l'on suppose les milieux isotropes linéaires, les lois de comportement (1.7) et (1.8). La densité volumique de courant est liée au champ électrique par la loi d'Ohm (1.5). Les conditions à l'interface Σ_{ij} entre deux milieux Ω_i et Ω_j sont

$$[\vec{H} \wedge \vec{n}] = -\vec{j}_{\Sigma_{ij}}, \quad (1.18)$$

$$[\vec{D} \cdot \vec{n}] = \rho_{\Sigma_{ij}}. \quad (1.19)$$

1.3.2 Hypothèses simplificatrices

Dans notre étude nous nous intéressons aux artefacts (brouillage de l'image) qui apparaissent sur les clichés IRM lorsqu'un implant métallique est présent dans l'échantillon étudié. Nous envisageons donc la situation suivante: un (ou plusieurs) objet métallique aux propriétés physiques connues et de géométrie donnée se trouve à l'intérieur de tissus biologiques; l'ensemble est soumis aux champs magnétiques utilisés lors d'une expérience IRM. Des considérations physiques vont nous permettre de préciser et de simplifier le modèle mathématique donné par les équations de Maxwell. Outre l'hypothèse que les phénomènes étudiés sont indépendants du temps (statique), nous faisons les hypothèses suivantes:

- Nous négligeons tous les phénomènes électromagnétiques ayant pour origine le milieu biologique. Cela signifie que nous négligeons les champs électriques et magnétiques ayant pour origine le milieu biologique (activité neuronale, etc). Nous supposons aussi qu'il n'existe ni courant ni charge à l'intérieur des milieux, ni aux surfaces de séparation de ces milieux.
- Parmi les différents champs électromagnétiques utilisés au cours d'une expérience IRM (voir la seconde partie de ce document) nous ne prendrons en compte que le champ magnétique principal \vec{B}_0 . Nous négligerons les gradients de champ magnétique: ceux-ci ont une intensité 10^4 fois plus faible que le champ \vec{B}_0 . Nous négligerons aussi le champ radio-fréquence \vec{B}_1 .
- Enfin nous supposerons que l'implant métallique est de type paramagnétique. Cette hypothèse nous assure une loi de comportement magnétique linéaire. Elle se justifie par le fait que l'IRM présente des risques pour des patients ayant des implants de

type ferromagnétique [77]. Ils en sont donc systématiquement exclus. Le risque principal est que l'implant de type ferromagnétique se déplace sous l'effet des forces électromagnétiques occasionnant des lésions. Les implants de type diamagnétique quant à eux ne perturbent pas de façon significative l'image.

Signalons que l'hypothèse consistant à négliger le champ électromagnétique \vec{B}_1 ne se justifie vraiment qu'a posteriori: on s'aperçoit que les images des artefacts obtenus avec ce cadre d'hypothèses par simulation numérique sont très proches de celle obtenues par l'imageur. Toutefois, il est mentionné dans la littérature [16] des situations où les artefacts ne s'expliquent qu'en considérant des perturbations du champ électromagnétique \vec{B}_1 . Ils s'agit d'artefacts dus à des implants métalliques très faiblement magnétiques (diamagnétiques) mais très bons conducteurs (tel le cuivre).

Signalons aussi que l'hypothèse d'un implant métallique de type paramagnétique est fondamentale par la suite. Sous cette hypothèse le problème aux dérivées partielles à résoudre est linéaire. Si l'implant était de type ferromagnétique le problème serait non-linéaire et les méthodes d'étude et de résolution seraient très différentes de celles que nous allons utiliser.

Les différents tissus biologiques ne jouant pas de rôle essentiel en ce qui concerne l'étude des artefacts de susceptibilité magnétique, nous supposons par la suite que l'implant est entouré d'un milieu homogène quant à ces propriétés magnétiques. Pour simplifier on pourra même supposer qu'il s'agit du vide. Ceci se justifie d'une part parce que les différences de susceptibilité magnétique entre les tissus biologiques sont très faibles comparées à la différence existant avec la susceptibilité magnétique de l'implant métallique. D'autre part on pourra remplacer ce milieu biologique homogène par le vide car les tissus biologiques sont des milieux diamagnétiques à susceptibilité magnétique très faible (de l'ordre de -10^{-6} , voir [17]). Le champ magnétique induit par le milieu biologique sera donc négligeable devant celui de l'implant que l'on suppose être un paramagnétique. (Notons toutefois que ce sont les propriétés magnétiques des tissus qui sont utilisées afin de créer l'image IRM ...).

Signalons enfin que l'on peut traiter d'une façon analogue les artefacts liés à la présence d'une cavité remplie d'air à l'intérieur des tissus (par exemple les poumons ou les fosses nasales). Il suffit de considérer à la place de la cavité un implant métallique dont la susceptibilité magnétique (fictive ici) est choisie de telle sorte à conserver la différence de susceptibilité magnétique existant entre la cavité (air) et les tissus.

On se restreint par la suite au cas d'un unique implant métallique dans le vide. On désigne par Ω le domaine de \mathbb{R}^3 occupé par l'implant. On suppose que l'ouvert Ω est borné et régulier. On désigne par Ω' le complémentaire dans \mathbb{R}^3 de l'adhérence de Ω et par Σ la frontière de Ω . Cet implant métallique est soumis à une induction magnétique constante (de l'ordre de 1 Tesla) que l'on notera \vec{B}_0 afin de nous conformer à la notation utilisée en IRM.

1.3.3 Problème à résoudre

Sous les hypothèses précédentes, notre étude se ramène à résoudre le problème de magnéto-statique suivant:

trouver (\vec{H}, \vec{B}) solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ [\vec{H} \wedge \vec{n}] = \vec{0} \quad \text{à travers } \Sigma, \\ [\vec{B} \cdot \vec{n}] = \vec{0} \quad \text{à travers } \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.20)$$

avec pour condition à l'infini,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}^3}} \vec{B}(x) = \vec{B}_0. \quad (1.21)$$

Dans le milieu Ω , \vec{B} et \vec{H} sont liés par la relation

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.22)$$

où la constante μ désigne la perméabilité magnétique du milieu.

Justifions la relation (1.22). Compte-tenu de l'hypothèse des milieux magnétiques parfaits, la loi de comportement pour l'aimantation prend la forme

$$\vec{M} = \lambda \vec{B}, \quad (1.23)$$

où $\lambda = \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}$ est constant. Les champs \vec{H} , \vec{B} et \vec{M} étant liés par la relation

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.24)$$

on en déduit dans le cadre précisé ci-dessus que

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}. \quad (1.25)$$

Dans le vide et par suite dans le domaine extérieur Ω' on a la relation

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (1.26)$$

1.4 Un problème de magnétostatique due à des courants de surface

1.4.1 Formulation pour l'induction magnétique

En utilisant la relation (1.25), on peut écrire le système à résoudre (1.20) sous la forme: trouver \vec{B} solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \left[\frac{\vec{B}}{\mu} \wedge \vec{n} \right] = \vec{0} \quad \text{à travers } \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.27)$$

avec pour condition à l'infini,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}^3}} \vec{B}(x) = \vec{B}_0. \quad (1.28)$$

En effectuant un relèvement de la condition à l'infini, on se ramène à un problème pour l'induction magnétique *secondaire* $\vec{B}' = \vec{B} - \vec{B}_0$:

trouver $\vec{B}' \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{B}' = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \operatorname{div} \vec{B}' = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \left[-\frac{1}{\mu} \vec{B}' \wedge \vec{n} \right] = \left[\frac{1}{\mu} \right] (\vec{B}_0 \wedge \vec{n}) \quad \text{à travers } \Sigma. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Posons

$$\vec{j}_\Sigma = \left[\frac{1}{\mu} \right] (\vec{B}_0 \wedge \vec{n}). \quad (1.30)$$

Si nous pouvons vérifier que

$$\operatorname{div}_\Sigma \vec{j}_\Sigma = 0 \quad (1.31)$$

où $\operatorname{div}_\Sigma$ désigne l'opérateur différentiel *divergence surfacique* sur Σ , alors \vec{j}_Σ pourra être interprété comme un courant à la surface Σ de l'implant. Notre problème est alors un problème classique de magnétostatique due à des courants de surface. Ces courants sont dans notre cas des courants fictifs provenant des transformations d'écriture effectuées. La condition (1.31) provient de la relation de continuité (1.4) assurant la conservation des courants. Nous allons montrer que (1.31) a bien lieu.

1.4.2 L'opérateur différentiel divergence surfacique

Dans cette section et la section 1.4.3 nous faisons les hypothèses suivantes: Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^3 ; la frontière Σ de Ω est une variété différentiable de classe \mathcal{C}^2 de dimension deux, Ω étant localement d'un seul côté de Σ . Sous ces hypothèses, il existe une

famille finie de cartes locales $(V_i, \Phi_i)_{i=1\dots N}$ telles que $(V_i)_{i=1\dots N}$ soit une famille d'ouverts bornés recouvrant Σ , et $\forall i = 1, \dots, N$, Φ_i est un difféomorphisme d'un ouvert ω_i de \mathbb{R}^2 sur V_i .

Pour tout système de coordonnées locales (V, Φ) , une base du plan tangent à Σ est donnée en $x \in \Sigma$ par

$$\vec{e}_\alpha(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^\alpha}(\zeta) \quad \alpha = 1, 2 \quad x = \Phi(\zeta) \quad (1.32)$$

et un vecteur normal par

$$\vec{n}(x) = \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\|}(x). \quad (1.33)$$

On suppose que Φ est choisi de sorte que \vec{n} coïncide avec la normale extérieure à Σ . Le tenseur métrique g associé à la base locale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ a pour composantes

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta, & \forall \alpha, \beta = 1, 2, \\ g_{\alpha 3} = 0, & \forall \alpha = 1, 2, \\ g_{33} = 1. \end{cases} \quad (1.34)$$

On note $|g|$ le déterminant de g , à savoir $|g| = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$.

Soit \vec{u} un champ tangent à Σ , $\vec{u} = u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2$. Sa divergence surfacique est définie par (voir [27])

$$\operatorname{div}_\Sigma \vec{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} (\sqrt{|g|} u^\alpha)(x) \right\}, \quad (1.35)$$

où $x = \Phi(\zeta) \in \Sigma$.

1.4.3 Relation de continuité

Nous allons vérifier que

$$\vec{j}_\Sigma = \left[\frac{1}{\mu} \right] (\vec{B}_0 \wedge \vec{n}) \quad (1.36)$$

satisfait bien à l'équation de continuité (1.31). Pour cela, calculons la divergence surfacique de $\vec{u} = \vec{B}_0 \wedge \vec{n}$ avec la formule (1.35). Rappelons que le champ \vec{B}_0 est constant et est dirigé selon l'axe \vec{z} du repère associé à l'imageur IRM. Il faut dans un premier temps exprimer le vecteur \vec{u} dans la base locale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$. La base n'étant pas orthonormée, le calcul du produit vectoriel n'est pas immédiat, voir [66]. Soient (b^1, b^2, b^3) les composantes contravariantes de \vec{B}_0 (dans la base locale). Ses composantes covariantes sont,

$$\begin{cases} b_1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{e}_1 = g_{11} b^1 + g_{12} b^2, \\ b_2 = \vec{B}_0 \cdot \vec{e}_2 = g_{21} b^1 + g_{22} b^2, \\ b_3 = b^3. \end{cases} \quad (1.37)$$

Les composantes contravariantes de \vec{u} sont alors,

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} (b_2 n_3 - b_3 n_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{21} b^1 + g_{22} b^2), \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} (b_3 n_1 - b_1 n_3) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{11} b^1 + g_{12} b^2). \end{aligned} \quad (1.39)$$

On obtient

$$\operatorname{div}_\Sigma \vec{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta^1} (g_{21} b^1 + g_{22} b^2) - \frac{\partial}{\partial \zeta^2} (g_{11} b^1 + g_{12} b^2) \right\}. \quad (1.40)$$

Calculons le produit scalaire $\vec{B}_0 \cdot \vec{e}_1$ dans la base fixe telle que $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ puis dans la base locale,

$$\begin{aligned} \vec{B}_0 \cdot \vec{e}_1 &= B_0 \frac{\partial \Phi^3}{\partial \zeta^1} \\ &= g_{11} b^1 + g_{12} b^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

D'où

$$g_{11} b^1 + g_{12} b^2 = B_0 \frac{\partial \Phi^3}{\partial \zeta^1}. \quad (1.42)$$

De même, en calculant dans les deux bases le produit scalaire $\vec{B}_0 \cdot \vec{e}_2$, on obtient la relation

$$g_{21} b^1 + g_{22} b^2 = B_0 \frac{\partial \Phi^3}{\partial \zeta^2}. \quad (1.43)$$

Finalement la divergence surfacique du vecteur \vec{u} vaut,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma \vec{u}(x) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta^1} (B_0 \frac{\partial \Phi^3}{\partial \zeta^2}) - \frac{\partial}{\partial \zeta^2} (B_0 \frac{\partial \Phi^3}{\partial \zeta^1}) \right\} \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{|g|}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^3}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \Phi^3}{\partial \zeta^2 \partial \zeta^1} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.4.4 Étude du problème de la magnétostatique

Nous allons considérer le problème (1.29) de la magnétostatique pour l'induction secondaire \vec{B}' . Le problème revient à chercher $\vec{B}' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)^3$ solution de

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B}' &= \vec{0} & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', & (i) \\ \operatorname{div} \vec{B}' &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, & (ii) \\ \left[-\frac{1}{\mu} \vec{B}' \wedge \vec{n} \right] &= \vec{j}_\Sigma & \text{à travers } \Sigma, & (iii) \end{cases} \quad (1.45)$$

avec $\vec{j}_\Sigma \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)^3$.

Pour étudier le problème (1.45) nous introduisons un cadre fonctionnel adéquat. On définit les espaces fonctionnels

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)^3 &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3; \frac{u_i}{\sqrt{1+|x|^2}} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3, \right. \\ &\quad \left. \text{et } \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3), i, j = 1, 2, 3 \right\}, \\ \mathbb{V} &= \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^3) = \left\{ \tilde{B} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)^3; \operatorname{div} \tilde{B} = 0 \right\}, \\ \mathbb{W} &= \left\{ \tilde{A} \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)^3; \operatorname{div} \tilde{A} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

On munit l'espace \mathbb{V} de la norme $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)^3$. On peut vérifier que la semi norme

$$|u|_{1, \mathbb{R}^3} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.46)$$

est une norme sur \mathbb{W} équivalente à la norme

$$\|u\|_{1, \mathbb{R}^3} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|^2}{1+|x|^2} dx + |u|_{1, \mathbb{R}^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.47)$$

Définissons les formes bilinéaires

$$a(B, \tilde{B}) = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} B \cdot \tilde{B} dx + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega'} B \cdot \tilde{B} dx, \quad \forall B, \tilde{B} \in \mathbb{V}, \quad (1.48)$$

$$a_0(A, \tilde{A}) = a(\operatorname{rot} A, \operatorname{rot} \tilde{A}), \quad \forall A, \tilde{A} \in \mathbb{W}. \quad (1.49)$$

Proposition 1.4.1 *Le problème (1.45) est équivalent au problème variationnel: trouver $B \in \mathbb{V}$ (respectivement $A \in \mathbb{W}$, $B = \operatorname{rot} A$) vérifiant*

$$a(B, \tilde{B}) = a_0(A, \tilde{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} j_\Sigma \cdot \tilde{A}|_\Sigma d\sigma, \quad \forall \tilde{B} = \operatorname{rot} \tilde{A} \in \mathbb{V}, \text{ ou } \forall \tilde{A} \in \mathbb{W}, \quad (1.50)$$

et admet une solution et une seule.

On trouve une démonstration de la proposition 1.4.1 dans [32] Ch. 9.

D'un point de vue numérique, cette formulation est mal adaptée. En effet, elle nécessite de construire des fonctions tests dans $\mathbb{V} = \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^3)$. Un algorithme pour construire une base de fonctions affines par morceaux sur des tétraèdres, à divergence nulle est proposée dans [54]. Toutefois ce genre de méthodes est lourde à mettre en œuvre.

Chapitre 2

Formulation élément fini pour le potentiel magnétique scalaire

2.1 Problèmes aux limites pour le potentiel magnétique

2.1.1 Premier problème aux limites pour le potentiel magnétique

Une première possibilité pour calculer numériquement le champ magnétique solution du problème (1.20) consiste à introduire le potentiel magnétique scalaire. Rappelons que l'on cherche le champ magnétique (\vec{H}, \vec{B}) solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{H} &= \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ [\vec{H} \wedge \vec{n}] &= \vec{0} \quad \text{à travers } \Sigma, \\ [\vec{B} \cdot \vec{n}] &= 0 \quad \text{à travers } \Sigma, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec pour condition à l'infini

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}^3}} \vec{B}(x) = \vec{B}_0. \quad (2.2)$$

Les champs \vec{H} et \vec{B} sont liés au vecteur aimantation \vec{M} par la relation

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.3)$$

Pour un milieu paramagnétique, \vec{M} et \vec{H} sont liés par la loi de comportement

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (2.4)$$

où la constante χ_m est la susceptibilité magnétique. Dans le vide, l'aimantation \vec{M} est nulle.

Les relations (2.3) et (2.4) nous permettent d'écrire le problème (2.1) en fonction du seul champ \vec{H} . On cherche un champ vectoriel \vec{H} tel que

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{0} & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ [\vec{H} \wedge \vec{n}] &= \vec{0} & \text{à travers } \Sigma, \\ (1 + \chi_m)(\vec{H}|_{\Omega} \cdot \vec{n}) - (\vec{H}|_{\Omega'} \cdot \vec{n}) &= 0 & \text{à travers } \Sigma, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec pour condition à l'infini,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}^3}} \vec{H}(x) = \vec{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0. \quad (2.6)$$

En effectuant un relèvement de la condition à l'infini, on se ramène à un problème où l'inconnue est le champ magnétique induit $\vec{H}' = \vec{H} - \vec{H}_0$: trouver $\vec{H}' \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ solution de

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}' &= \vec{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \vec{H}' &= 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ (1 + \chi_m)(\vec{H}'|_{\Omega} \cdot \vec{n}) - (\vec{H}'|_{\Omega'} \cdot \vec{n}) &= -\chi_m(\vec{H}_0 \cdot \vec{n}) & \text{à travers } \Sigma. \end{cases} \quad (2.7)$$

La première équation du système nous assure qu'il existe une fonction scalaire $\varphi \in \mathcal{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$, unique, tel que

$$\vec{H}' = -\nabla \varphi, \quad (2.8)$$

voir par exemple [32] Ch. 9, lemme de Poincaré. La fonction φ est appelée potentiel magnétique scalaire. Le signe $-$ est mis pour se conformer aux conventions usuelles en électromagnétisme. Signalons dès à présent une propriété utile par la suite. Les traces du potentiel magnétique coïncident sur l'interface Σ . On a en effet le résultat suivant :

$$\varphi \in \mathcal{W}_0^1(\mathbb{R}^3) \text{ si et seulement si } \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^1(\Omega') \text{ et } [\varphi]_{\Sigma} = 0.$$

Le potentiel magnétique scalaire est solution du problème : trouver $\varphi \in \mathcal{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \varphi &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta \varphi &= 0 & \text{dans } \Omega', \\ (1 + \chi_m) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega'} &= \chi_m(\vec{H}_0 \cdot \vec{n}) & \text{à travers } \Sigma. \end{cases} \quad (2.9)$$

Un problème analogue est obtenu par Nédélec et Planchard dans [76] pour le potentiel électrique dans un diélectrique parfait.

Proposition 2.1.1 *Le problème (2.9) est équivalent au problème variationnel suivant: trouver φ dans l'espace $\mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que $\forall \psi \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$,*

$$(1 + \chi_m) \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega'} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx = \chi_m \int_{\Sigma} (\vec{H}_0 \cdot \vec{n}) \, \psi \, ds, \quad (2.10)$$

et admet une unique solution.

Preuve. La formulation variationnelle du problème (2.9) est obtenue de façon usuelle. Il suffit par densité de prendre des fonctions tests dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et d'intégrer par parties sur chacun des deux domaines. L'existence et l'unicité sont alors une conséquence du théorème de Lax-Milgram. \square

En utilisant la technique du potentiel simple couche, Nédélec et Planchard [76] montrent que le problème (2.9) peut s'écrire comme une équation intégrale sur la frontière Σ . On introduit la quantité

$$q = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega'}. \quad (2.11)$$

On a alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{q(y)}{|x-y|} \, ds(y) \quad (2.12)$$

et q est solution de l'équation intégrale

$$\left(1 + \frac{\chi_m}{2}\right) q(x) + \frac{\chi_m}{4\pi} \int_{\Sigma} q(y) \frac{(x-y, \vec{n}(x))}{|x-y|^3} \, ds(y) = g(x) \quad \forall x \in \Sigma. \quad (2.13)$$

Nous renvoyons à [76] pour une étude de cette équation intégrale.

2.1.2 Second problème aux limites pour le potentiel magnétique

Nous allons simplifier le problème (2.9) en faisant une hypothèse supplémentaire sur la loi de comportement du milieu Ω . Le milieu Ω étant un paramagnétique, on a la relation suivante entre \vec{M} et \vec{H}

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m (\vec{H}' + \vec{H}_0), \quad (2.14)$$

où la susceptibilité magnétique χ_m est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} usi. Pour l'étude qui nous intéresse le champ magnétique induit \vec{H}' est très faible devant le champ inducteur \vec{H}_0 (le rapport des intensités est de l'ordre de 10^3). Nous allons donc supposer que

$$\vec{M} \approx \vec{M}_0 = \chi_m \vec{H}_0, \quad (2.15)$$

autrement dit l'aimantation sera supposée constante dans le milieu Ω et devient une donnée du problème. Sous l'hypothèse (2.15), le potentiel magnétique scalaire est solution du problème:

trouver $\phi \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = \vec{M}_0 \cdot \vec{n} & \text{à travers } \Sigma. \end{cases} \quad (2.16)$$

On établit facilement le résultat suivant, qui est l'analogie pour ce nouveau problème de la proposition 2.1.1.

Proposition 2.1.2 *Le problème (2.16) est équivalent au problème variationnel suivant: trouver ϕ dans l'espace $\mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que $\forall \psi \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Sigma} (\vec{M}_0 \cdot \vec{n}) \, \psi \, ds, \quad (2.17)$$

et admet une unique solution.

Notons que sous l'hypothèse (2.15), la solution ϕ du problème (2.16) admet une *représentation intégrale* en fonction de la donnée $g = \vec{M}_0 \cdot \vec{n}$. On a le résultat suivant,

Proposition 2.1.3 *La solution ϕ du problème (2.16) est donnée par*

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{n}}{|x - y|} \, ds(y). \quad (2.18)$$

2.1.3 Ordre de grandeur de l'erreur d'approximation

Nous étudions dans cette section l'erreur commise en effectuant l'hypothèse (2.15). On pose $u = \varphi - \phi$ où φ est la solution du problème (2.9) et ϕ celle du problème (2.16). On peut vérifier que la condition aux limites à travers Σ pour φ s'écrit aussi

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = \vec{M} \cdot \vec{n}. \quad (2.19)$$

La fonction u vérifie donc à l'interface Σ la condition aux limites

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] - \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = (\vec{M} - \vec{M}_0) \cdot \vec{n}. \quad (2.20)$$

L'erreur u est dans l'espace $\mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ et satisfait au système

$$\begin{cases} \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega', \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] & = & (\vec{M} - \vec{M}_0) \cdot \vec{n} & \text{à travers } \Sigma. \end{cases} \quad (2.21)$$

On peut donc écrire

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{(\vec{M}(y) - \vec{M}_0) \cdot \vec{n}(y)}{|x - y|} \, ds(y). \quad (2.22)$$

On a

$$\vec{M} - \vec{M}_0 = \chi_m \vec{H} - \chi_m \vec{H}_0 = \chi_m \vec{H}'. \quad (2.23)$$

Or $\vec{H}' \approx \epsilon \vec{H}_0$ où ϵ est de l'ordre de 10^{-3} pour l'étude qui nous intéresse. Ainsi on déduit,

$$\begin{aligned} u(x) &\approx \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\chi_m}{|x - y|} \vec{H}_0 \cdot \vec{n}(y) \, ds(y) \\ &= \epsilon \phi(x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2 Propriétés du potentiel magnétique scalaire

Nous allons établir dans cette partie certaines propriétés du potentiel magnétique scalaire solution du problème (2.16). Nous faisons dorénavant l'hypothèse (2.15): l'aimantation du matériau est constante; elle sera notée \vec{M} et non plus M_0 .

2.2.1 Régularité du potentiel magnétique

Nous nous intéressons dans cette section à la régularité du potentiel magnétique. La régularité du potentiel de simple couche en fonction de la régularité des données (régularité de la densité et du domaine) est un problème bien étudié dans la littérature. Dans notre cas, une étude de la régularité du potentiel ϕ se justifie par le fait que la régularité de la densité et la régularité de la surface Σ ne peuvent pas être dissociées. Plus précisément, nous avons $g = \vec{M} \cdot \vec{n}$; le vecteur aimantation \vec{M} étant constant, la régularité de la densité g dépend de la régularité de \vec{n} , autrement dit de la régularité de la surface Σ .

Tout d'abord, signalons que le potentiel associé à une repartition de charges admet des dérivées partielles à tout ordre qui sont continues en tout point de l'espace hors le support des charges, voir par exemple [61] p. 122.

Nous dirons qu'un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert régulier si son bord Γ est une hypersurface de classe \mathcal{C}^m avec $m \geq 1$, \mathcal{O} étant localement d'un seul côté de cette surface. En d'autres termes pour tout point $a \in \Gamma$, on peut trouver un repère orthonormé R , un voisinage ouvert \mathcal{U} de a dans \mathbb{R}^3 , un ouvert \mathcal{V} dans \mathbb{R}^2 et une fonction α de classe \mathcal{C}^m sur \mathcal{V} à valeurs réelles tels que, notant $(x', x'_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ les coordonnées d'un point x dans le repère R , on ait

$$\begin{aligned}\Gamma \cap \mathcal{U} &= \{(x', \alpha(x')); x' \in \mathcal{V}\}, \\ \mathcal{O} \cap \mathcal{U} &= \{x \in \mathcal{U}; x'_3 < \alpha(x')\}.\end{aligned}$$

Nous emploierons sans les rappeler les notations $R, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \alpha$. Pour tout $y \in \Gamma$, le vecteur unitaire normal à Γ , extérieur à \mathcal{O} , est donné dans la base du repère R par

$$\vec{n}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \alpha(y')|^2}} {}^t(-\nabla \alpha(y'), 1). \quad (2.25)$$

On note \mathcal{O}' le complémentaire de l'adhérence de \mathcal{O} dans \mathbb{R}^3 .

Proposition 2.2.1 *Soit Γ le bord d'un ouvert borné régulier \mathcal{O} et soit $\xi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$. Alors le potentiel de simple couche de ξ ,*

$$V_1(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi(y)}{|x - y|} ds(y)$$

est continu dans \mathbb{R}^3 .

Preuve. Il s'agit là d'un résultat classique dont on trouvera la preuve par exemple dans [32] Ch. 2, p. 352. \square

Corollaire 2.2.1 *Si Σ est de classe \mathcal{C}^1 alors le potentiel magnétique*

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{|x - y|} ds(y) \quad (2.26)$$

est continu dans \mathbb{R}^3 .

Preuve. On vérifie aisément (en prenant une paramétrisation locale) que si Σ est de classe \mathcal{C}^1 alors la fonction $y \in \Sigma \mapsto \vec{n}(y)$ est de classe $\mathcal{C}^0(\Sigma)$. Par conséquent la fonction $g = \vec{M} \cdot \vec{n}$ est de classe $\mathcal{C}^0(\Sigma)$ et le corollaire découle de manière immédiate de la proposition 2.2.1 \square

On s'intéresse ensuite à une hypothèse de régularité du bord Σ pour que le potentiel magnétique soit de classe \mathcal{C}^1 sur les fermés $\overline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}'}$. Là encore, nous allons avoir recours à certains résultats concernant la régularité du potentiel de simple couche.

Définition 2.2.1 *On dit qu'un ouvert régulier est à bord Γ de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ si au voisinage de tout point $y \in \Gamma$, il existe une paramétrisation normale $(R, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \alpha)$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ croissante et continue avec*

$$\int_0^{\varepsilon(r)} \frac{\varepsilon(r)}{r} dr < \infty,$$

telle que

$$|\nabla\alpha(x') - \nabla\alpha(z')| \leq \varepsilon(|x' - z'|) \quad \forall x', z' \in \mathcal{V}. \quad (2.27)$$

Proposition 2.2.2 *Soit Γ le bord d'un ouvert \mathcal{O} borné, régulier, de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ et ξ définie sur Γ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ croissante et continue} \\ \text{avec } \int_0^{\varepsilon(r)} \frac{\varepsilon(r)}{r} dr < \infty, \\ \text{telle que } |\xi(x) - \xi(z)| \leq \varepsilon(|x - z|) \quad \forall x, z \in \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Alors le potentiel de simple couche intérieur de ξ est de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}})$ et le potentiel de simple couche extérieur de ξ est de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}'})$.

Preuve. Ce résultat est démontré dans [32] Ch. 2, p. 358. \square

Remarque 2.2.1 L'hypothèse (2.28) faite sur ξ implique que ξ est continue. Cette condition est notamment satisfaite si ξ est höldérienne sur Γ . D'autre part, si Γ est de classe \mathcal{C}^2 ou plus généralement de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$, $0 < \theta < 1$, alors Γ est de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$.

La question qui se pose alors est de savoir si sous l'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ de la surface Σ , la donnée aux limites $g = \vec{M} \cdot \vec{n}$ vérifie l'hypothèse (2.28). La réponse est affirmative; plus précisément on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2 *Si Σ est de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ alors le potentiel magnétique (2.26) est de classe \mathcal{C}^1 sur les fermés $\overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega'}$.*

Preuve. Dans la base du repère local R , le vecteur unitaire normal à Σ est donné par,

$$\vec{n}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\alpha(y')|^2}} {}^t(-\nabla\alpha(y'), 1). \quad (2.29)$$

Soit $g = \vec{M} \cdot \vec{n}$. Alors pour $x, z \in \Sigma$, on a

$$\begin{aligned} |g(x) - g(z)| &= |\vec{M} \cdot (\vec{n}(x) - \vec{n}(z))| \\ &\leq |\vec{M}| |\vec{n}(x) - \vec{n}(z)|. \end{aligned}$$

On note ν le vecteur normal (non unitaire) ${}^t(-\nabla\alpha(y'), 1)$. Alors on vérifie que

$$|\vec{n}(x) - \vec{n}(z)| \leq |\vec{\nu}(x) - \vec{\nu}(z)|. \quad (2.30)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\vec{\nu}(x) - \vec{\nu}(z)| &= \sqrt{(\partial_1\alpha(z') - \partial_1\alpha(x'))^2 + (\partial_2\alpha(z') - \partial_2\alpha(x'))^2} \\ &= |\nabla\alpha(x') - \nabla\alpha(z')| \\ &\leq \varepsilon(|x' - z'|), \end{aligned} \quad (2.31)$$

la majoration étant obtenue d'après (2.27). On obtient donc,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(z)| &\leq |\vec{M}| \varepsilon(|x' - z'|) \\ &\leq \epsilon(|x - z|), \end{aligned} \quad (2.32)$$

où on a posé $\epsilon = |\vec{M}| \varepsilon$. Il est immédiat que la fonction ϵ satisfait à (2.28). □

On a aussi le résultat suivant, voir [32] Ch. 2, p. 358.

Proposition 2.2.3 *Soit Γ le bord d'un ouvert \mathcal{O} borné, régulier, de classe $\mathcal{C}^{m+1,\theta}$ et soit $\xi \in \mathcal{C}^{m,\theta}(\Gamma)$ ($m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$). Alors le potentiel de simple couche intérieur de ξ est de classe $\mathcal{C}^{m+1,\theta}(\overline{\mathcal{O}})$ et le potentiel de simple couche extérieur de ξ est de classe $\mathcal{C}^{m+1,\theta}(\overline{\mathcal{O}'})$.*

On en déduit, par un argument analogue à celui qui vient d'être utilisé dans la preuve précédente le résultat suivant.

Corollaire 2.2.3 *Si Σ est de classe $\mathcal{C}^{m+1,\theta}$ ($m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$) alors le potentiel magnétique (2.26) est de classe $\mathcal{C}^{m+1,\theta}$ sur les fermés $\overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega'}$.*

Considérons maintenant le cas où la frontière est lipschitzienne. On a le résultat suivant (voir par exemple [30]),

Proposition 2.2.4 *Soit un ouvert \mathcal{O} borné de \mathbb{R}^3 de frontière Γ lipschitzienne. Alors les opérateurs K_0 et K_{00} définis pour $v \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Gamma)$ par*

$$\begin{aligned} K_0 v(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{v(y)}{|x-y|} ds(y) & (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \\ K_{00} v &= \gamma_0 K_0 v \end{aligned}$$

sont continus respectivement de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}_{loc}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^3)$ et de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma)$ pour tout $\sigma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Corollaire 2.2.4 *Si Σ est lipschitzienne alors le potentiel magnétique (2.26) appartient à l'espace $\mathbf{H}_{loc}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$.*

Preuve. Si l'ouvert Ω est lipschitzien, alors la normale extérieure à Σ appartient à l'espace $\mathbf{L}^\infty(\Sigma)$. On a donc $g \in \mathbf{L}^\infty(\Sigma) \subset \mathbf{L}^2(\Sigma)$. En appliquant le théorème avec $\sigma = \frac{1}{2}$ on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque 2.2.2 L'inclusion $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^3) \subset C^0(\mathbb{R}^3)$ n'a lieu que pour $s > \frac{3}{2}$.

2.2.2 Comportement asymptotique du potentiel magnétique

Nous allons établir un développement précis du comportement à l'infini du potentiel magnétique scalaire. Ce résultat sera utile lorsque nous passerons à l'approximation par éléments finis du problème (2.16) en bornant le domaine. Énonçons tout d'abord un résultat concernant le comportement à l'infini d'une fonction harmonique:

Proposition 2.2.5 *Soit u une fonction harmonique en dehors de la boule $\overline{B}(O, R)$ et vérifiant*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

alors pour $|x| \rightarrow \infty$,

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (2.33)$$

Preuve. Ce résultat classique est démontré, par exemple, dans [32] Ch. 2, p. 314 ou dans [96] Ch. 5, p. 308. \square

En fait nous allons montrer que le potentiel magnétique scalaire est à décroissance plus rapide et obtenir une représentation de son comportement sous forme de série.

Proposition 2.2.6 *Pour $|x|$ suffisamment grand, $|x| \geq R$, la solution ϕ du problème (2.16) admet la représentation sous forme de série suivante,*

$$\phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \omega)}{r^n} \quad (2.34)$$

où (r, θ, ω) désigne les coordonnées sphériques du point x et Y_n est donné par (2.46). De plus cette série, ainsi que la série obtenue en dérivant terme à terme par rapport à la variable r , convergent uniformément à l'extérieur de la boule $B(O, R)$.

Preuve. Pour établir ce résultat nous allons reprendre certains arguments figurant dans [61]. Soient x et y deux points de \mathbb{R}^3 de coordonnées sphériques (r, θ, ω) et (r', θ', ω') . Nous commençons par établir un développement en série de $\frac{1}{\rho}$ où $\rho = |x - y|$, voir la figure 2.1.

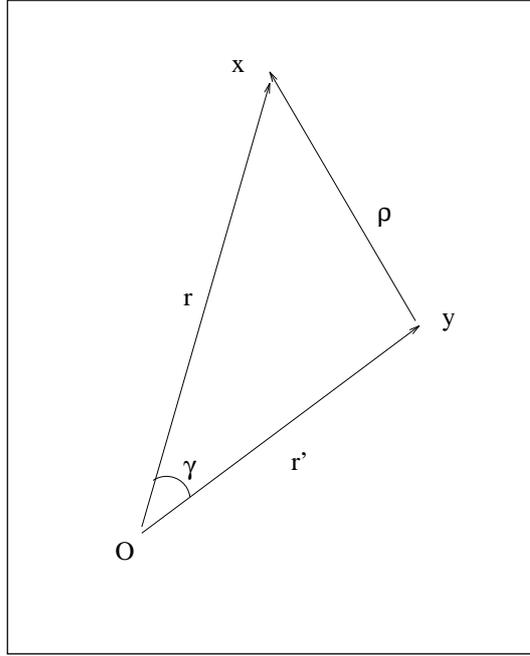


Figure 2.1: développement en série de $1/\rho$; notations utilisées.

On a

$$\rho^2 = r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2 \quad (2.35)$$

où

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\omega - \omega'). \quad (2.36)$$

Posons $u = \cos \gamma$ et $\mu = \frac{r'}{r}$. Si $|2u\mu - \mu^2| < 1$, $\frac{1}{\rho}$ admet le développement en série suivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - 2u\mu + \mu^2}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (2u\mu - \mu^2)^n \end{aligned} \quad (2.37)$$

où $\alpha_0 = 1, \alpha_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$.

En réarrangeant les termes de la série selon les puissances de μ (le procédé est licite pour $|\mu| < \sqrt{2} - 1$), on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \mu^n \quad (2.38)$$

où

$$\begin{aligned} P_0(u) &= 1, \\ P_1(u) &= u, \\ P_2(u) &= \frac{3}{2}(u^2 - \frac{1}{2}), \\ &\vdots \\ P_n(u) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 2k - 1)}{2^k (n - 2k)! k!} (-1)^k u^{n-2k}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les polynômes P_n sont les polynômes de Legendre. Rappelons un résultat classique sur les polynômes de Legendre: pour $u \in [-1, 1]$, $|P_n(u)|$ admet pour maximum 1 qui est atteint au point $u = 1$.

Partant de (2.37) on obtient le développement en série de $\frac{1}{\rho}$ suivant

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(\theta, \theta', \omega, \omega') \frac{r'^n}{r^{n+1}} \quad (2.40)$$

avec $\tilde{P}_n(\theta, \theta', \omega, \omega') = P_n(\cos \gamma)$ où γ est lié à $(\theta, \theta', \omega, \omega')$ par la relation (2.36).

On a établi le développement pour $|\frac{r'}{r}| < \sqrt{2} - 1$. On peut vérifier que la série obtenue converge vers $\frac{1}{\rho}$ pour $|\frac{r'}{r}| < 1$.

Établissons un résultat de convergence uniforme pour la série (2.40). Prenons $y \in \Sigma$. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\Sigma \subset B(O, a)$. Prenons $x \in \Omega' \setminus B(O, R)$ avec $R = \lambda a, \lambda > 1$. Alors la série converge normalement et donc uniformément en les six variables $r, r', \theta, \theta', \omega, \omega'$ sur $K = [\lambda a, \infty[\times [0, a] \times [0, \pi]^2 \times [0, 2\pi]^2$. En effet sur K , on a

$$\tilde{P}_n(\theta, \theta', \omega, \omega') \frac{r'^n}{r^{n+1}} \leq \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n+1}. \quad (2.41)$$

On part de la représentation intégrale (2.26) du potentiel magnétique

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}(y)}{|x - y|} ds(y). \quad (2.42)$$

On choisit le point x à l'extérieur de $B(O, R)$. Alors d'une part on peut remplacer $\frac{1}{|x - y|}$ par la série (2.40) et d'autre part on peut permuter la sommation sur n et l'intégration sur Σ . On pose alors

$$A_k(\theta, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} |y|^k \tilde{P}_k(\theta, \theta', \omega, \omega') (\vec{M} \cdot \vec{n}(y)) ds(y), \quad (2.43)$$

alors ϕ admet la représentation en série (valable pour $|x|$ suffisamment grand, $|x| \geq R$)

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(\theta, \omega)}{r^{k+1}}. \quad (2.44)$$

Montrons que $A_0 = 0$. On a

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \tilde{P}_0(\theta, \theta', \omega, \omega') (\vec{M} \cdot \vec{n}(y)) \, ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \vec{M} \cdot \vec{n}(y) \, ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{M} \, dy \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ainsi ϕ admet la représentation en série (2.34) où

$$Y_n(\theta, \omega) = A_{n-1}(\theta, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} |y|^k \tilde{P}_{n-1}(\theta, \theta', \omega, \omega') (\vec{M} \cdot \vec{n}(y)) \, ds(y). \quad (2.46)$$

Il nous reste à établir les résultats de convergence uniforme. On a

$$|A_k(\theta, \omega)| \leq \frac{a^k}{4\pi} \int_{\Sigma} |\vec{M} \cdot \vec{n}(y)| \, ds(y). \quad (2.47)$$

Par suite

$$\sup_{\substack{r > \lambda a \\ \theta \in [0, \pi] \\ \omega \in [0, 2\pi]}} \frac{|A_k(\theta, \omega)|}{r^{k+1}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{k+1}. \quad (2.48)$$

On a donc convergence normale et par suite convergence uniformément à l'extérieur de la boule $B(O, R)$, $R = \lambda a$, $\lambda > 1$. On vérifie sans peine que la série des dérivées par rapport à la variable r converge également normalement et uniformément à l'extérieur de la boule $B(O, R)$. □

Corollaire 2.2.5 *Le potentiel magnétique ϕ solution du problème (2.16) vérifie*

$$\phi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{quand } |x| \longrightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Il s'agit là d'un résultat bien connu en électromagnétisme: "le champ magnétique induit décroît en $\frac{1}{r^3}$ ".

2.3 Réduction à un problème en domaine borné

L'objectif de la section est de proposer une formulation pour le potentiel magnétique permettant une résolution du problème (2.16) par une méthode *élément fini*. La difficulté principale réside dans le fait que le domaine d'étude qui est \mathbb{R}^3 n'est pas borné.

Signalons que diverses méthodes existent pour résoudre un problème aux dérivées partielles posé en domaine non borné. Un inventaire de ces méthodes est présenté dans [40]. Les alternatives courantes sont les suivantes.

- On peut recourir aux méthodes intégrales de frontière dont le principe est de ramener le problème extérieur à un problème posé sur la frontière.
- Une autre approche possible consiste à utiliser une transformation géométrique bijective. Le domaine extérieur est alors transformé en un domaine borné et les équations dans le domaine extérieur sont transformées en de nouvelles équations valables dans le domaine borné. On peut alors les résoudre par la méthode des éléments finis. On pourra consulter à ce sujet [39].
- Il est également possible de tronquer le domaine extérieur en introduisant une frontière dite artificielle sur laquelle est imposée une condition aux limites rendant compte du comportement à l'infini de la solution. On peut alors utiliser une méthode élément fini classique.

Nous adoptons le dernier point de vue dans ce chapitre. Le point de vue de la représentation intégrale sera analysé dans les chapitres 3 et 4. Plusieurs raisons motivent pareil choix. Nous avons montré que le potentiel magnétique se comportait à l'infini comme $\frac{1}{r^2}$ (au lieu du comportement en $\frac{1}{r}$ souvent observé pour les problèmes de potentiels). D'autre part, nous allons voir que le problème (2.16) présente des analogies avec le problème de la conduction thermique dans un solide rigide où l'inconnue est la température. Or les problèmes de thermique sont résolus de façon très efficace par de nombreux codes élément fini. Ainsi une fois cette analogie établie, il sera possible de résoudre le problème à l'aide d'un logiciel élément fini classique.

2.3.1 Condition aux limites sur la frontière artificielle

Nous avons établi que le potentiel magnétique vérifie à l'infini

$$\phi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \quad (2.50)$$

On peut envisager pour résoudre numériquement le problème de tronquer le domaine extérieur à une certaine distance $r = R$ et d'imposer sur la frontière artificielle introduite la condition aux limites $\phi = 0$.

En général, une telle condition aux limites est trop imprécise. Dans [13] les auteurs proposent un ensemble de conditions aux limites à imposer sur la frontière artificielle produisant des approximations de plus en plus précises de la solution de l'équation de

Laplace et de l'équation de Helmholtz en domaine non borné. La condition aux limites d'ordre 1 pour le problème de Laplace s'écrit

$$B_1 u = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u = 0. \quad (2.51)$$

Plus généralement, la condition aux limites d'ordre m est

$$B_m u = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2j-1}{r} \right) u = 0. \quad (2.52)$$

Ces conditions aux limites y sont étudiées pour le problème de Neumann extérieur.

À l'instar de ce qui est fait pour le problème de Neumann extérieur nous allons introduire pour notre problème une condition aux limites d'ordre 1 sur la frontière artificielle. Nous nous limitons volontairement à une condition d'ordre 1 car nous souhaitons conserver une analogie entre notre problème et un problème de thermique pour le résoudre simplement à l'aide des codes éléments finis tels Modulf. Toutefois nous allons introduire une condition d'ordre 1 un peu différente de celle proposée dans [13]. Elle nous assurera une précision intermédiaire entre les précisions qui y sont obtenues avec les conditions d'ordre 1 et d'ordre 2.

Construisons cette condition. Nous avons montré à la proposition 2.2.6, que pour $r = |x|$ assez grand (il suffit que $r \geq \lambda a$, $\lambda > 1$ et a choisi de sorte que $\Omega \subset B(O, a)$), le potentiel magnétique admettait la représentation sous forme de série

$$\phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \omega)}{r^n}, \quad (2.53)$$

où (r, θ, ω) désignent les coordonnées sphériques du point x . Dérivons terme à terme par rapport à la variable r ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(x) = - \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{Y_n(\theta, \omega)}{r^{n+1}}. \quad (2.54)$$

Par suite,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} \phi(x) = - \frac{1}{r^4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \frac{Y_{n+3}(\theta, \omega)}{r^n}. \quad (2.55)$$

Proposition 2.3.1 *Le potentiel magnétique ϕ solution du problème (2.16) vérifie,*

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} \phi(x) = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.56)$$

Nous imposerons donc sur la frontière artificielle la condition aux limites

$$\widehat{B}_1 u = \frac{\partial u}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} u(x) = 0. \quad (2.57)$$

À l'instar de ce qui est fait dans [13] nous supposons que la frontière artificielle est la sphère de centre O et de rayon R . Les preuves des résultats concernant les estimations d'erreur en seront notablement simplifiées.

D'après ce qui précède, si ϕ est le potentiel magnétique solution du problème (2.16) dans le domaine non borné alors ϕ vérifie sur la frontière artificielle $\Gamma_R = \partial B(0, R)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{R}\phi(x) = O\left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (2.58)$$

Remarquons que la condition aux limites (2.51) nous conduit à

$$B_1\phi = O\left(\frac{1}{R^3}\right). \quad (2.59)$$

2.3.2 Le problème posé en domaine borné

Nous allons tronquer le domaine extérieur Ω' en introduisant une frontière artificielle Γ_R sur laquelle nous imposerons la condition aux limites (2.57). Par ailleurs, nous noterons B_R la boule ouverte centrée à l'origine, de rayon R et $\Omega'_R = B_R \setminus \overline{\Omega}$. Ainsi $B_R = \Omega'_R \cup \overline{\Omega}$, voir la figure 2.2.

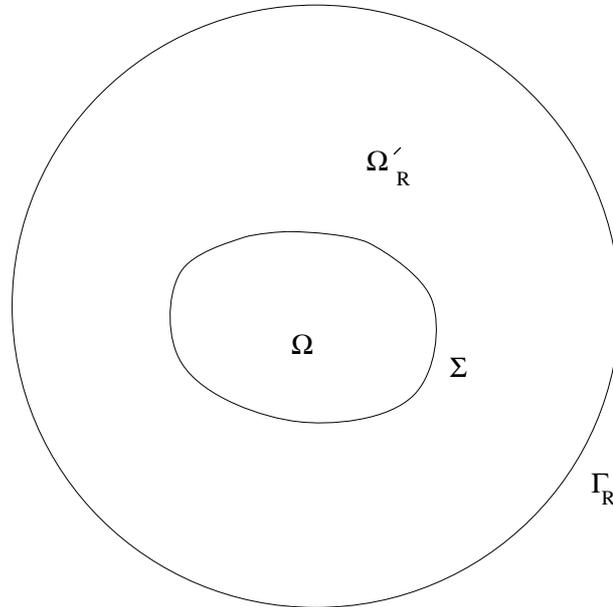


Figure 2.2: le domaine tronqué.

Le problème à résoudre est:

trouver ϕ_R tel que

$$\begin{cases} \Delta\phi_R = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, & (i) \\ \left[\frac{\partial\phi_R}{\partial n} \right] = g = \vec{M} \cdot \vec{n} & \text{à travers } \Sigma, & (ii) \\ \frac{\partial\phi_R}{\partial r}(x) + \frac{2}{R}\phi_R(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_R. & (iii) \end{cases} \quad (2.60)$$

Nous allons établir une formulation variationnelle pour le problème (2.60) et établir un résultat d'existence et d'unicité.

Soit $\psi \in \mathbf{H}^1(B_R)$; en appliquant la première formule de Green aux ouverts Ω et Ω'_R on obtient d'une part,

$$\int_{\Omega} \Delta\phi_R \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla\phi_R \cdot \nabla\psi \, dx + \int_{\Sigma^+} \frac{\partial\phi_R}{\partial n} \psi \, ds, \quad (2.61)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \Delta\phi_R \psi \, dx &= - \int_{\Omega'} \nabla\phi_R \cdot \nabla\psi \, dx + \int_{\Sigma^-} \frac{\partial\phi_R}{\partial n} \psi \, ds + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial\phi_R}{\partial r} \psi \, ds \\ &= - \int_{\Omega'_R} \nabla\phi_R \cdot \nabla\psi \, dx + \int_{\Sigma^-} \frac{\partial\phi_R}{\partial n} \psi \, ds - \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} \phi_R \psi \, ds. \end{aligned} \quad (2.62)$$

En sommant (2.61) et (2.62) il vient

$$\int_{B_R} \Delta\phi_R \psi \, dx = - \int_{B_R} \nabla\phi_R \cdot \nabla\psi \, dx + \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial\phi_R}{\partial n} \right] \psi \, ds - \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} \phi_R \psi \, ds. \quad (2.63)$$

On définit sur $\mathbf{H}^1(B_R) \times \mathbf{H}^1(B_R)$ la forme bilinéaire (symétrique)

$$a_R(\phi, \psi) = \int_{B_R} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} \phi\psi \, ds. \quad (2.64)$$

On lui associe la norme $\|\cdot\|_R$ sur $\mathbf{H}^1(B_R)$, définie par

$$\|\psi\|_R = a_R(\psi, \psi)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \psi \in \mathbf{H}^1(B_R). \quad (2.65)$$

Cette norme est une norme équivalente à la norme usuelle sur $\mathbf{H}^1(B_R)$. On a de manière immédiate en utilisant la continuité de l'application trace de $\mathbf{H}^1(B_R)$ dans $L^2(\Gamma_R)$ la majoration pour tout $\psi \in \mathbf{H}^1(B_R)$

$$\|\psi\|_R \leq C(R) \|\psi\|_{1, B_R}. \quad (2.66)$$

L'équivalence des deux normes résulte alors du lemme suivant:

Lemme 2.3.1 *Il existe une constante C , ne dépendant que de R , telle que pour tout ψ dans $\mathbf{H}^1(B_R)$*

$$\|\psi\|_{1,B_R} \leq C(R) \|\psi\|_R. \quad (2.67)$$

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si l'inégalité n'a pas lieu, alors il existe une suite (v_k) de fonctions de $\mathbf{H}^1(B_R)$ telle que

$$\begin{cases} \forall k \geq 0, & \|v_k\|_{1,B_R} = 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_R = 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Or d'après le théorème de Rellich, toute suite bornée dans $\mathbf{H}^1(B_R)$ admet une sous-suite (v_l) qui converge dans $L^2(B_R)$. On a,

$$\begin{aligned} \|v_l - v_{l'}\|_{1,B_R}^2 &\leq \|v_l - v_{l'}\|_R^2 + \|v_l - v_{l'}\|_{L^2(B_R)}^2 \\ &\leq \|v_l\|_R^2 + \|v_{l'}\|_R^2 + \|v_l - v_{l'}\|_{L^2(B_R)}^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

La suite (v_l) est donc une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}^1(B_R)$. Donc (v_l) converge dans $\mathbf{H}^1(B_R)$ vers une fonction $v \in \mathbf{H}^1(B_R)$. Comme v vérifie

$$\|v\|_R = \lim_{l \rightarrow \infty} \|v_l\|_R, \quad (2.70)$$

on a $v = 0$. Mais $\|v\|_{1,B_R} = 1$. On obtient la contradiction. \square

Proposition 2.3.2 *Le problème :*

trouver $\phi_R \in \mathbf{H}^1(B_R)$ tel que $\forall \psi \in \mathbf{H}^1(B_R)$,

$$a_R(\phi_R, \psi) = \int_{\Sigma} g \psi \, ds \quad (2.71)$$

admet une unique solution. Si Ω est régulier, alors les problèmes (2.60) et (2.71) sont équivalents.

Preuve. Il est immédiat que la forme bilinéaire a_R est un produit scalaire sur $\mathbf{H}^1(B_R)$. En utilisant le lemme précédent, on montre sans difficulté que la forme linéaire

$$L : \psi \in \mathbf{H}^1(B_R) \mapsto \int_{\Sigma} g \psi \, ds \quad (2.72)$$

est continue. L'existence et l'unicité sont alors obtenues grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet.

Pour établir l'équivalence des problèmes (2.60) et (2.71), on prend successivement dans (2.71)

- $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ puis $\psi \in \mathcal{D}(\Omega'_R)$ pour établir les équations (2.60 - i);
- $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$ pour obtenir la condition d'interface (2.60 - ii);
- $\psi \in \mathbf{H}^1(B_R)$ pour obtenir la condition aux limites (2.60 - iii).

\square

2.4 Estimation de l'erreur de troncature

Nous voulons étudier dans cette partie l'erreur commise en tronquant le domaine à l'aide d'une sphère Γ_R de rayon R et en y imposant la condition aux limites (2.57). Nous donnerons d'abord une estimation d'erreur ponctuelle puis une estimation d'erreur pour la norme de l'énergie $\|\cdot\|_R$ puis pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(B_R)}$.

Soit ϕ la solution du problème (2.16) et ϕ_R la solution du problème (2.60). Nous notons

$$e_R(x) = \phi(x) - \phi_R(x) \quad \forall x \in B_R \quad (2.73)$$

et

$$w_R(x) = \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{R}\phi(x) \quad \forall x \in \Gamma_R. \quad (2.74)$$

2.4.1 Un lemme

Lemme 2.4.1 *Soit ϕ la solution du problème (2.16), alors pour $|x|$ assez grand,*

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r}\phi(x) \right|^2 \leq \frac{C}{r^8} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 ds(y), \quad (2.75)$$

la constante C étant indépendante de r et de ϕ .

Preuve. Nous avons établi à la proposition 2.3.1, que pour $|x|$ assez grand,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r}\phi(x) = -\frac{1}{r^4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \frac{Y_{n+3}(\theta, \omega)}{r^n}. \quad (2.76)$$

La fonction Y_{n+3} est donnée par, voir (2.46),

$$Y_{n+3}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} |y|^{n+2} \tilde{P}_{n+2} g(y) ds(y). \quad (2.77)$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés lors de la preuve de la proposition 2.2.6, on peut vérifier que la série de terme général

$$\frac{n+2}{4\pi r^n} |y|^{n+2} \tilde{P}_{n+2} \quad (2.78)$$

converge uniformément par rapport à la variable $y \in B(0, a)$ pour x fixé avec $|x| \geq \lambda a$, $\lambda > 1$. Nous notons $S(x, y)$ la somme de la série. On obtient,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \frac{Y_{n+3}(\theta, \omega)}{r^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{4\pi r^n} \int_{\Sigma} |y|^{n+2} \tilde{P}_{n+2} g(y) ds(y) \\ &= \int_{\Sigma} g(y) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{4\pi r^n} |y|^{n+2} \tilde{P}_{n+2} \right) ds(y) \\ &= \int_{\Sigma} g(y) S(x, y) ds(y). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} \phi(x) \right|^2 &\leq \frac{1}{r^8} \left(\int_{\Sigma} g(y) S(x, y) \, ds(y) \right)^2 \\ &\leq \frac{C(x)}{r^8} \int_{\Sigma} g(y)^2 \, ds(y) \end{aligned} \quad (2.80)$$

où

$$C(x) = \int_{\Sigma} S(x, y)^2 \, ds(y). \quad (2.81)$$

La constante $C(x)$ ne dépend pas de la variable $r = |x|$. En effet la dépendance en x est liée aux polynômes \tilde{P}_n . Or ceux ci ne dépendent que des angles sphériques des points x et y . Le résultat est ainsi démontré. \square

2.4.2 Estimation ponctuelle de l'erreur

Pour établir l'estimation ponctuelle de l'erreur, nous adaptons une méthode introduite dans [13] pour le problème de Neumann extérieur.

Lemme 2.4.2 *Soit h une fonction régulière définie sur Γ_R . Soit $u \in \mathcal{C}^0(B_R)$ avec les restrictions dans $\mathcal{C}^2(\Omega'_R)$ et $\mathcal{C}^2(\Omega)$, telle que tel que*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0 & \text{à travers } \Sigma, \\ \widehat{B}_1 u = h & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.82)$$

Supposons qu'il existe une fonction $z_1 \in \mathcal{C}^0(B_R)$ avec les restrictions dans $\mathcal{C}^2(\Omega'_R)$ et $\mathcal{C}^2(\Omega)$, telle que

$$\begin{cases} \Delta z_1 \leq 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, \\ \left[\frac{\partial z_1}{\partial n} \right] \geq 0 & \text{à travers } \Sigma, \\ \widehat{B}_1 z_1 \geq h & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.83)$$

Et supposons qu'il existe une fonction $z_2 \in \mathcal{C}^0(B_R)$ avec les restrictions dans $\mathcal{C}^2(\Omega'_R)$ et $\mathcal{C}^2(\Omega)$, telle que

$$\begin{cases} \Delta z_2 \geq 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, \\ \left[\frac{\partial z_2}{\partial n} \right] \leq 0 & \text{à travers } \Sigma, \\ \widehat{B}_1 z_2 \leq h & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.84)$$

Alors, $\forall x \in B_R$,

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x). \quad (2.85)$$

Remarque 2.4.1 Ce lemme est une réécriture du théorème 13 Ch. 2 de [82] dans le cas d'un problème d'interface. Il se démontre en utilisant le principe du maximum. Plus précisément, nous utiliserons pour démontrer le lemme les deux résultats classiques suivants, dont on trouvera la preuve par exemple dans [82]. D désigne un ouvert connexe de \mathbb{R}^n .

Résultat 1 Soit $u \in \mathcal{C}^2(D)$ tel que

$$\Delta u \geq 0 \text{ dans } D.$$

Si u atteint son maximum en un point $x_m \in D$ alors u est constante dans D .

Résultat 2 Soit $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^1(\bar{D})$ telle que

$$\Delta u \geq 0 \text{ dans } D.$$

Supposons que $u \leq M$ dans D et que $u = M$ en un point P de ∂D . Alors si u n'est pas constant dans D , $\frac{\partial u}{\partial n}(P) > 0$.

Preuve. (du lemme 2.4.2) Considérons la fonction $v = u - z_1$. Elle vérifie,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v \geq 0 & \text{dans } \Omega, \quad (i) \\ \Delta v \geq 0 & \text{dans } \Omega'_R, \quad (ii) \\ \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \leq 0 & \text{à travers } \Sigma, \quad (iii) \\ \widehat{B}_1 v \leq 0 & \text{sur } \Gamma_R. \quad (iv) \end{array} \right. \quad (2.86)$$

Nous allons montrer que $v \leq 0$, plus précisément qu'elle admet un maximum $M \leq 0$.

1- Dans le domaine extérieur Ω'_R , v vérifie (2.86-ii) et (2.86-iv).

1.1- Si v atteint son maximum M en un point de Ω'_R alors v est constante dans Ω'_R . Par continuité, $v = M$ sur Γ_R . On obtient alors, d'après (2.86-iv) que

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{R}v = \frac{2M}{R} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_R. \quad (2.87)$$

Ainsi $M \leq 0$.

Sinon, le maximum est atteint en un point x'_m du bord de Ω'_R , c'est à dire sur Σ ou sur Γ_R . Examinons ces deux possibilités.

1.2- Supposons le maximum atteint sur Γ_R . Alors d'après le résultat 2 énoncé,

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x'_m) > 0. \quad (2.88)$$

La condition (2.86-iv) impose alors que $\frac{2}{R}v(x'_m) \leq 0$. On a encore dans ce cas $M \leq 0$.

1.3- La dernière possibilité est que le maximum soit atteint sur Σ . Nous réexaminerons cette possibilité ultérieurement.

2- Dans le domaine intérieur Ω , v vérifie (2.86-i). Le maximum est atteint soit dans Ω auquel cas v est constante dans Ω , soit sur Σ .

2.1- Supposons le maximum atteint sur Σ . Alors, $\exists x''_m \in \Sigma$ tel que

$$\begin{cases} v(x''_m) = M \\ \forall x \in \overline{\Omega} \quad v(x) \leq M. \end{cases} \quad (2.89)$$

Si v atteint dans le domaine extérieur Ω'_R un maximum en dehors de Σ alors nous avons montré que ce maximum était négatif. Par continuité, on a dans ce cas $v(x) \leq 0$ ce qui implique que $M \leq 0$.

Si v atteint dans le domaine extérieur Ω'_R un maximum en un point de Σ , alors, $\exists x'_m \in \Sigma$ tel que

$$\begin{cases} v(x'_m) = M' \\ \forall x \in \overline{\Omega'_R} \quad v(x) \leq M'. \end{cases} \quad (2.90)$$

Il est évident que $M = M'$ et qu'il existe un point x_m satisfaisant (2.89) et (2.90).

D'après le résultat 2 on a

$$\frac{\partial v}{\partial n_{\Omega'_R \rightarrow \Omega}}(x_m) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial n_{\Omega \rightarrow \Omega'_R}}(x_m) > 0. \quad (2.91)$$

Ceci contredit la condition (2.86-iii):

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] (x_m) = \frac{\partial v}{\partial n_{\Omega'_R \rightarrow \Omega}}(x_m) + \frac{\partial v}{\partial n_{\Omega \rightarrow \Omega'_R}}(x_m) \leq 0. \quad (2.92)$$

2.2- Reste alors à considérer le cas où v atteint son maximum M dans Ω ; alors v est constante. Comme v est continue, on peut trouver $x''_m \in \Sigma$ vérifiant (2.89). Le raisonnement précédent reste valable. On a donc montré que $v \leq 0$.

Pour démontrer la deuxième partie de la majoration, il suffit de considérer la fonction $w = z_2 - u$. Elle satisfait elle aussi,

$$\begin{cases} \Delta w \geq 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \leq 0 & \text{à travers } \Sigma, \\ \widehat{B}_1 w \leq 0 & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.93)$$

On a donc $w \leq 0$. □

Nous allons utiliser le lemme 2.4.2 pour obtenir une estimation ponctuelle de l'erreur $e_R(x) = \phi(x) - \phi_R(x)$.

Proposition 2.4.1 *On a l'estimation d'erreur suivante:*

$$\| e_R \|_{L^\infty(B_R)} \leq \frac{C}{R^3}.$$

Preuve. $e_R = \phi - \phi_R$ est solution de

$$\begin{cases} \Delta e_R = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et dans } \Omega'_R, \\ \left[\frac{\partial e_R}{\partial n} \right] = 0 & \text{à travers } \Sigma, \\ \widehat{B}_1 e_R = \widehat{B}_1 \phi & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.94)$$

D'après le lemme 2.4.1, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \Gamma_R$,

$$h = |\widehat{B}_1 \phi(x)| \leq \frac{C}{R^4}. \quad (2.95)$$

Soit $z_1 = \frac{C}{2R^3}$ et $z_2 = -\frac{C}{2R^3}$. Alors,

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 z_1 &= \frac{C}{R^4} \geq h, \\ \widehat{B}_1 z_2 &= -\frac{C}{R^4} \leq h. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 2.4.2 avec les fonctions z_1 et z_2 que nous venons de définir. \square

2.4.3 Estimation de l'erreur pour la norme de l'énergie

Pour établir l'estimation de l'erreur pour la norme de l'énergie, nous adaptons une méthode introduite dans [48] pour le problème de Dirichlet extérieur.

Proposition 2.4.2 *Il existe des constantes C_1 et C_2 , indépendantes de R , telles que*

$$\|e_R\|_R \leq \frac{C_1}{R^{\frac{5}{2}}} \left(\int_{\Sigma} g^2(y) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.97)$$

et

$$\|e_R\|_{\mathbb{L}^2(B_R)} \leq \frac{C_2}{R^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Sigma} g^2(y) \, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.98)$$

Preuve. Rappelons que e_R satisfait à (2.94). Par définition on a

$$a_R(e_R, e_R) = \int_{B_R} \nabla e_R \cdot \nabla e_R \, dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds. \quad (2.99)$$

Or réutilisant les notations (2.73) et (2.74), on obtient

$$\frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds = \int_{\Gamma_R} e_R w_R \, ds - \int_{\Gamma_R} e_R \frac{\partial e_R}{\partial r} \, ds. \quad (2.100)$$

En effet

$$e_R^2 = e_R (\phi - \phi_R) \quad (2.101)$$

et sur Γ_R

$$\phi_R = -\frac{R}{2} \frac{\partial \phi_R}{\partial r}, \quad (2.102)$$

$$\phi = \frac{R}{2} \left(w_R - \frac{\partial \phi}{\partial r} \right). \quad (2.103)$$

Ainsi sur Γ_R on a la relation

$$e_R^2 = -\frac{R}{2} e_R \frac{\partial e_R}{\partial r} + \frac{R}{2} e_R w_R. \quad (2.104)$$

Il suffit alors d'intégrer pour obtenir (2.100). D'autre part, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R} e_R \Delta e_R \, dy \\ &= - \int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy + \int_{\Gamma_R} e_R \frac{\partial e_R}{\partial r} \, ds + \int_{\Sigma} \left[e_R \frac{\partial e_R}{\partial n} \right] \, ds. \end{aligned} \quad (2.105)$$

On vérifie qu'à travers Σ ,

$$\left[e_R \frac{\partial e_R}{\partial n} \right] = 0. \quad (2.106)$$

Nous obtenons alors

$$\int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy - \int_{\Gamma_R} e_R \frac{\partial e_R}{\partial r} \, ds = 0. \quad (2.107)$$

Combinant (2.99), (2.100), (2.107), il vient

$$a_R(e_R, e_R) = \int_{\Gamma_R} w_R e_R \, ds. \quad (2.108)$$

Nous avons montré au lemme 2.4.1, que pour $|x|$ assez grand,

$$w_R^2 = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} \phi(x) \right|^2 \leq \frac{C}{r^8} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds, \quad (2.109)$$

la constante C étant indépendante de r et de ϕ . Nous en déduisons la majoration

$$\int_{\Gamma_R} w_R^2 \, ds \leq \frac{C}{R^6} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds. \quad (2.110)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_R(e_R, e_R) &\leq \frac{C}{R^3} \left(\int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds + \frac{C}{R^5} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Par suite

$$\int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy + \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \leq \frac{C}{R^5} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds. \quad (2.112)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}a_R(e_R, e_R) &= \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy + \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \\
 &\leq \int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy + \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \\
 &\leq \frac{C}{R^5} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds.
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

La première estimation dans la norme de l'énergie est démontrée.

Intéressons-nous à l'estimation en norme L^2 . Remarquons tout d'abord que l'on a

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R} r^2 |\nabla e_R|^2 \, dy &\leq R^2 \int_{B_R} |\nabla e_R|^2 \, dy \\
 &\leq R^2 \|e_R\|_R^2 \leq \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} |g(y)|^2 \, ds.
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

Un simple calcul permet d'établir que

$$|\nabla(re_R)|^2 = r^2 |\nabla e_R|^2 + e_R^2 + 2re_R(\nabla e_R, \nabla r) \tag{2.115}$$

et que

$$-2re_R(\nabla e_R, \nabla r) \leq \frac{1}{2}e_R^2 + 2r^2 |\nabla e_R|^2. \tag{2.116}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R} e_R^2 \, dy &= \int_{B_R} |\nabla(re_R)|^2 \, dy - \int_{B_R} r^2 |\nabla e_R|^2 \, dy - 2 \int_{B_R} re_R(\nabla e_R, \nabla r) \, dy \\
 &\leq \int_{B_R} |\nabla(re_R)|^2 \, dy + \int_{B_R} r^2 |\nabla e_R|^2 \, dy + \frac{1}{2} \int_{B_R} e_R^2 \, dy.
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

On obtient alors à partir de l'inégalité (2.114)

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R} e_R^2 \, dy &\leq 2 \int_{B_R} |\nabla(re_R)|^2 \, dy + 2 \int_{B_R} r^2 |\nabla e_R|^2 \, dy \\
 &\leq 2 \int_{B_R} |\nabla(re_R)|^2 \, dy + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds.
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Il nous suffit maintenant de majorer le premier terme à droite de cette dernière inégalité. En intégrant par parties il vient,

$$\int_{B_R} |\nabla(re_R)|^2 \, dy = - \int_{B_R} re_R \Delta(re_R) \, dy + \int_{\Gamma_R} re_R \frac{\partial}{\partial r}(re_R) \, ds. \tag{2.119}$$

Nous allons majorer successivement les deux termes du membre de droite de (2.119).

Remarquant que $\Delta r = \frac{2}{r}$ et $\Delta e_R = 0$, on obtient

$$- \int_{B_R} r e_R \Delta (r e_R) \, dy = -2 \int_{B_R} \left(e_R^2 + e_R (\vec{r} \cdot \nabla e_R) \right) \, dy. \quad (2.120)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration (2.114), on montre que

$$\left| \int_{B_R} e_R (\vec{r} \cdot \nabla e_R) \, dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_{B_R} e_R^2 \, dy + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds. \quad (2.121)$$

Un calcul élémentaire prouve par ailleurs que

$$r e_R \frac{\partial}{\partial r} (r e_R) = e_R r^2 w_R - r e_R^2. \quad (2.122)$$

On en déduit grâce à (2.109), que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} r e_R \frac{\partial}{\partial r} (r e_R) \, ds \right| &\leq R^2 \left| \int_{\Gamma_R} e_R w_R \, ds \right| + R \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \\ &\leq 2R \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds. \end{aligned} \quad (2.123)$$

D'autre part à partir de l'estimation en norme de l'énergie, on a la majoration

$$2R \int_{\Gamma_R} e_R^2 \, ds \leq R^2 \|e_R\|_R^2 \leq \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds. \quad (2.124)$$

Par suite,

$$\left| \int_{\Gamma_R} r e_R \frac{\partial}{\partial r} (r e_R) \, ds \right| \leq \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds. \quad (2.125)$$

On peut alors conclure. Combinant (2.118), (2.119) et (2.120) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R} e_R^2 \, dy &\leq -4 \int_{B_R} e_R^2 \, dy - 4 \int_{B_R} e_R (\vec{r} \cdot \nabla e_R) \, dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma_R} r e_R \frac{\partial}{\partial r} (r e_R) \, ds + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds. \end{aligned} \quad (2.126)$$

D'où

$$\begin{aligned} 5 \int_{B_R} e_R^2 \, dy &\leq 4 \left| \int_{B_R} e_R (\vec{r} \cdot \nabla e_R) \, dy \right| + 2 \left| \int_{\Gamma_R} r e_R \frac{\partial}{\partial r} (r e_R) \, ds \right| \\ &\quad + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds, \end{aligned} \quad (2.127)$$

et

$$5 \int_{B_R} e_R^2 \, dy \leq 2 \int_{B_R} e_R^2 \, dy + \frac{C}{R^3} \int_{\Sigma} g^2 \, ds \quad (2.128)$$

en utilisant les majorations (2.121) et (2.125). La deuxième estimation d'erreur de la proposition est alors immédiate. \square

2.5 Analogie avec un problème de thermoconduction dans un solide rigide

Dans cette partie nous allons montrer que le problème (2.60) présente des analogies au niveau de la formulation variationnelle avec le problème de thermoconduction dans un solide rigide écrit pour la distribution de température u . Il sera ainsi possible de résoudre numériquement le problème de la magnéto-statique en ayant recours aux codes éléments finis tels *Modulef* [69] ou *MSC-NASTRAN* [70] développés pour les applications en analyse de structure et pour les problèmes de thermique. On trouvera des exemples d'utilisation du code *MSC-NASTRAN* pour résoudre des problèmes de magnéto-statique dans [72]. Pour une étude complète des analogies entre les problèmes de la magnéto-statique et de thermique, nous renvoyons à [100], Ch. 10.

2.5.1 Le problème de thermoconduction

On considère un corps rigide conducteur de chaleur occupant un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 . On note Γ sa frontière. On suppose que le milieu continu Ω reçoit un taux de chaleur volumique f^Ω et un taux de chaleur surfacique f^Γ sur une partie Γ_1 de sa frontière. L'autre partie de la frontière notée Γ_0 est à une température imposée u_0 . On cherche la distribution de température u à l'intérieur de Ω . On suppose le problème indépendant du temps.

On est amené à résoudre le problème aux limites suivant:
trouver u solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla u) &= f^\Omega & \text{dans } \Omega, \\ (K\nabla u) \cdot n + \alpha u &= f^\Gamma & \text{sur } \Gamma_1, \\ u &= u_0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (2.129)$$

où K est le tenseur de conductivité thermique et α le coefficient de transfert (ou coefficient de radiation) à travers la partie Γ_1 de la frontière. Le vecteur n désigne toujours la normale unitaire extérieure à Ω .

Il est bien connu que le problème (2.129) est équivalent au problème:

trouver $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, $u = u_0$ sur Γ_0 tel que $\forall v \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$

$$\int_{\Omega} (K\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \alpha uv \, ds = \int_{\Omega} f^\Omega v \, dx + \int_{\Gamma_1} f^\Gamma v \, ds. \quad (2.130)$$

2.5.2 Mise en évidence de l'analogie

Posons

$$g(x) = \overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{n}(x) \quad \forall x \in \Sigma. \quad (2.131)$$

La surface Σ étant connue, il est possible de calculer la normale extérieure à Ω en tout point régulier, g est ainsi une donnée du problème.

En comparant la formulation variationnelle pour le potentiel magnétique (2.71) à la formulation variationnelle pour la température (2.130) on remarque l'analogie suivante

thermique	\longleftrightarrow	magnétostatique	
Ω	\longleftrightarrow	B_R	
Γ_0	\longleftrightarrow	\emptyset	
Γ_1	\longleftrightarrow	$\Sigma \cup \Gamma_R$	
u	\longleftrightarrow	ϕ_R	
K	\longleftrightarrow	I	(2.132)
α	\longleftrightarrow	$\frac{2}{R}$ sur Γ_R 0 sur Σ	
f^Ω	\longleftrightarrow	0	
f^Γ	\longleftrightarrow	g sur Σ 0 sur Γ_R	

Nous sommes amené à résoudre un problème de thermique "fictif" dans un domaine B_R , où les données sont

- un taux de chaleur surfacique $g = \vec{M} \cdot \vec{n}$ sur la surface Σ intérieure au domaine B_R ;
- un coefficient de radiation constant et valant $\frac{2}{R}$ sur le bord Γ_R de B_R .

2.6 Calcul du potentiel par la méthode des éléments finis et estimation d'erreur

2.6.1 Espaces d'approximation

Dans cette partie, nous nous intéressons au calcul d'une approximation ϕ_h de la solution ϕ_R du problème (2.60) posé en domaine borné en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons établi que le problème (2.60) est équivalent au problème suivant:

trouver $\phi_R \in \mathbf{H}^1(B_R)$ tel que $\forall \psi_R \in \mathbf{H}^1(B_R)$,

$$\int_{B_R} \nabla \phi_R \cdot \nabla \psi_R \, dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} \phi_R \psi_R \, ds = \int_{\Sigma} g \psi_R \, ds. \quad (2.133)$$

Nous supposons par la suite que le paramètre R est choisi suffisamment grand de sorte que l'on ait $\Omega \subset B_R$.

On considère une triangulation \mathcal{T}_{he} de B_R , c'est-à-dire une décomposition finie du domaine $\overline{B_R}$,

$$\overline{B_R} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{he}} K,$$

telle que,

- chaque élément K de $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ est un tétraèdre (ayant des faces planes ou courbes) d'intérieur non vide;
- les intérieurs de deux tétraèdres de $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ distincts sont disjoints.
- toute face d'un tétraèdre de $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ est soit face d'un autre tétraèdre de $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ soit une partie de la frontière Γ_R .

Nous imposons une condition supplémentaire sur la triangulation $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ afin qu'elle respecte l'interface Σ . Nous supposons que tous les sommets d'un tétraèdre de $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ appartiennent soit à $\bar{\Omega}$ soit à $\bar{\Omega}'_R$.

Nous envisageons l'utilisation de deux sortes d'éléments finis:

- l'élément fini de Lagrange tétraédrique affine de type (1);
- l'élément fini de Lagrange tétraédrique isoparamétrique de type (2).

Pour cela, on associe à chacun des tétraèdres de la triangulation $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ ayant une face commune avec la surface Γ_R ou avec la surface Σ un tétraèdre construit en approchant cette face à l'aide d'un interpolant polynomial de degré 1 ou 2. Le domaine B_R est ainsi approché par un domaine B_h et à la triangulation $\mathcal{T}_{h\epsilon}$ du domaine B_R est associée une triangulation \mathcal{T}_h du domaine B_h . La triangulation \mathcal{T}_h est la réunion:

- d'une triangulation \mathcal{T}_h^1 composée de tétraèdres à faces planes en correspondance affine avec un tétraèdre de référence \hat{K} fixé.
Cette triangulation \mathcal{T}_h^1 contient, en particulier, tous les tétraèdres intérieurs aux domaines Ω'_R et Ω . Dans le cas où l'approximation est basée sur l'utilisation de l'élément fini de Lagrange affine de type (1), la triangulation \mathcal{T}_h^1 coïncide avec \mathcal{T}_h .
- d'une triangulation \mathcal{T}_h^2 composée de tétraèdres ayant trois faces planes, la quatrième face courbe approchant une partie des surfaces Γ_R et Σ . Ces tétraèdres sont les images du tétraèdre de référence par une application F_K polynomiale de degré 2.

On note Ω_h l'ouvert dont l'adhérence est définie par

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \bar{\Omega}}} K,$$

et Ω'_h l'ouvert dont l'adhérence est définie par

$$\bar{\Omega}'_h = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \bar{\Omega}'_R}} K.$$

La frontière de l'ouvert Ω_h est notée Σ_h et celle de l'ouvert B_h est notée Γ_h .

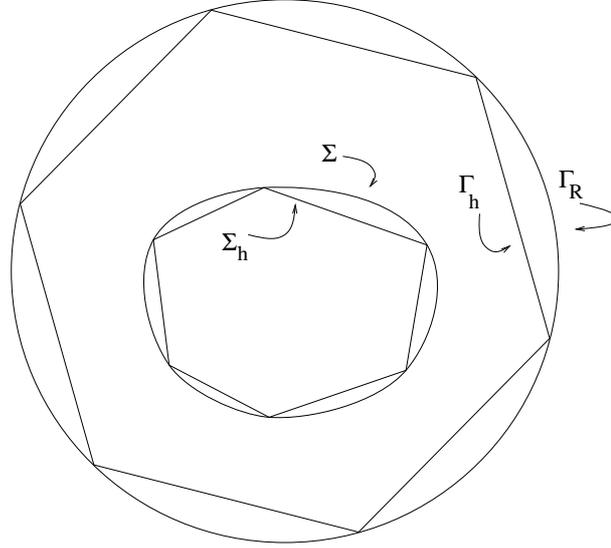


Figure 2.3: approximation du domaine par interpolation linéaire.

On désigne par h_K le diamètre du tétraèdre K (maximum des distances euclidiennes entre deux points de K) et

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K. \quad (2.134)$$

On suppose que, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ $h_K = O(h)$.

On considère alors les espaces d'approximation éléments finis suivants:

- espace associé à l'élément fini de Lagrange tétraédrique de type (1)

$$V_h^{(1)} = \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{B_h}); \forall K \in \mathcal{T}_h, \psi_h|_K \in \mathbb{P}_1 \right\}; \quad (2.135)$$

- espace associé à l'élément fini de Lagrange tétraédrique isoparamétrique de type (2)

$$V_h^{(2)} = \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{B_h}); \forall K \in \mathcal{T}_h, \psi_h|_K \circ F_K \in \mathbb{P}_2 \right\}. \quad (2.136)$$

On a les résultats suivants concernant l'erreur d'approximation élémentaire:

Lemme 2.6.1 *Soit (K, P, Σ) un élément fini de Lagrange tétraédrique de type (1). On note Π_K l'opérateur d'interpolation sur K . Il existe une constante C telle que pour $m = 0$ ou 1, on a*

$$\forall v \in \mathbb{H}^2(K), \quad |v - \Pi_K v|_{m,K} \leq Ch^{2-m} |v|_{2,K}.$$

Soit (K, P, Σ) un élément fini de Lagrange tétraédrique isoparamétrique de type (2). Il existe une constante C tel que pour $m = 0, 1, 2$, on a

$$\forall v \in \mathbb{H}^3(K), \quad |v - \Pi_K v|_{m,K} \leq Ch^{3-m} \|v\|_{3,K}.$$

Preuve. On pourra consulter par exemple [28]. \square

Lemme 2.6.2 Soit $v \in \mathbb{H}^1(B_h)$ dont les restrictions sont dans $\mathbb{H}^2(\Omega_h)$ et $\mathbb{H}^2(\Omega'_h)$ et soit Π_h l'opérateur d'interpolation associé à l'élément fini de Lagrange tétraédrique de type (1). Alors,

$$\begin{aligned} |v - \Pi_h v|_{1,B_h} &\leq Ch \left(|v|_{2,\Omega_h}^2 + |v|_{2,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v - \Pi_h v\|_{0,B_h} &\leq Ch^2 \left(|v|_{2,\Omega_h}^2 + |v|_{2,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v - \Pi_h v\|_{0,\Gamma_h} &\leq Ch^{\frac{3}{2}} \left(|v|_{2,\Omega_h}^2 + |v|_{2,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Soit $v \in \mathbb{H}^1(B_h)$ dont les restrictions sont dans $\mathbb{H}^3(\Omega_h)$ et dans $\mathbb{H}^3(\Omega'_h)$ et soit Π_h l'opérateur d'interpolation associé à l'élément fini de Lagrange tétraédrique isoparamétrique de type (2). Alors

$$\begin{aligned} |v - \Pi_h v|_{1,B_h} &\leq Ch^2 \left(\|v\|_{3,\Omega_h}^2 + \|v\|_{3,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v - \Pi_h v\|_{0,B_h} &\leq Ch^3 \left(\|v\|_{3,\Omega_h}^2 + \|v\|_{3,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v - \Pi_h v\|_{0,\Gamma_h} &\leq Ch^{\frac{5}{2}} \left(\|v\|_{3,\Omega_h}^2 + \|v\|_{3,\Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Preuve. Pour une fonction v appartenant à l'espace $\mathbb{H}^2(B_h)$ (respectivement $\mathbb{H}^3(B_h)$) le résultat est classique, voir par exemple [28]. On a dans ce cas une majoration par la semi-norme $|v|_{2,B_h}$ (respectivement par la norme $\|v\|_{3,B_h}$).

Pour obtenir l'estimation proposée il suffit de reconsidérer la sommation sur les tétraèdres afin de distinguer les tétraèdres appartenant à Ω_h et ceux appartenant à Ω'_h . \square

Remarque 2.6.1 Au lemme 2.6.2, dans les majorations de l'erreur d'interpolation pour l'élément fini de Lagrange tétraédrique isoparamétrique de type (2) on peut remplacer $(\|v\|_{3,\Omega_h}^2 + \|v\|_{3,\Omega'_h}^2)$ par $(|v|_{3,\Omega_h}^2 + |v|_{2,\Omega_h}^2 + |v|_{3,\Omega'_h}^2 + |v|_{2,\Omega'_h}^2)$.

2.6.2 Le problème approché

On introduit $\tilde{\phi}_R$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{\phi}_R = 0 & \text{dans } \Omega_h \text{ et dans } \Omega'_h, \\ \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_R}{\partial n} \right] = g & \text{à travers } \Sigma_h, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_R}{\partial r}(x) + \frac{2}{R} \tilde{\phi}_R(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_h. \end{array} \right. \quad (2.137)$$

Ce problème est l'analogie du problème (2.60) pour ϕ_R . On a remplacé le domaine Ω par le domaine approché Ω_h et la surface Γ_R par la surface approchée Γ_h .

On vérifie l'analogie de la proposition 2.3.2: le problème trouver $\tilde{\phi}_R \in \mathbf{H}^1(B_h)$ tel que $\forall \psi \in \mathbf{H}^1(B_h)$,

$$\int_{B_h} \nabla \tilde{\phi}_R \cdot \nabla \psi \, dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_h} \tilde{\phi}_R \psi \, ds = \int_{\Sigma} g \psi \, ds \quad (2.138)$$

est équivalent au problème (2.137) et admet une unique solution.

On introduit la forme bilinéaire a_h définie par:

$$\forall \psi, \varphi \in \mathbf{H}^1(B_h), \quad a_h(\varphi, \psi) = \int_{B_h} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_h} \varphi \psi \, ds. \quad (2.139)$$

Remarque 2.6.2 On peut vérifier que la forme bilinéaire a_h définit une norme sur $\mathbf{H}^1(B_h)$ (que l'on notera $\|\cdot\|_h$) équivalente à la norme usuelle.

On s'intéresse au problème approché suivant:

trouver $\phi_h \in V_h^{(k)}$ solution de

$$\forall \psi_h \in V_h^{(k)}, \quad a_h(\phi_h, \psi_h) = \int_{\Sigma_h} g \psi_h \, ds. \quad (2.140)$$

Proposition 2.6.1 *Le problème approché (2.140) admet une solution $\phi_h \in V_h^{(k)}$ et une seule. De plus*

$$\|\tilde{\phi}_R - \phi_h\|_h = \inf_{v_h \in V_h^{(k)}} \|\tilde{\phi}_R - v_h\|_h. \quad (2.141)$$

Preuve. Ce résultat est classique. L'existence et l'unicité s'obtiennent facilement par le théorème de Lax-Milgram puisque V_h de dimension finie est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_h$. L'estimation de l'erreur commise est obtenue par le lemme de Céa. La constante de continuité et la constante d'ellipticité valent 1. \square

On a le résultat suivant d'estimation de l'erreur d'interpolation.

Proposition 2.6.2 *Soit $\psi \in \mathbf{H}^1(B_h)$ dont les restrictions sont dans $\mathbf{H}^{k+1}(\Omega_h)$ et $\mathbf{H}^{k+1}(\Omega'_h)$ et soit Π_h l'opérateur d'interpolation associé à l'espace d'approximation $V_h^{(k)}$. Alors,*

$$\|\psi - \Pi_h \psi\|_h \leq Ch^k \left(\|\psi\|_{k+1, \Omega_h}^2 + \|\psi\|_{k+1, \Omega'_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.142)$$

Preuve. Ce résultat découle de manière immédiate du lemme 2.6.2 et de la définition de la norme $\|\cdot\|_h$. \square

2.6.3 Estimation d'erreur

On s'intéresse à l'estimation de l'erreur $\|\phi - \phi_h\|_h$ où ϕ est le potentiel magnétique solution du problème (2.16) et ϕ_h la solution du problème approché (2.140). En particulier, on se demande à quelle distance placer la frontière artificielle Γ_R en fonction de la précision souhaitée. En utilisant un espace d'approximation basé sur l'élément fini de Lagrange

de type (k) l'erreur d'approximation "élément fini" est d'ordre h^k . La question est alors de savoir comment choisir le paramètre R de sorte que l'erreur liée à l'introduction de la frontière artificielle pour borner le domaine soit du même ordre. Si l'on place la frontière artificielle trop près alors l'erreur de troncature limitera la précision totale. À l'inverse si cette frontière est placée trop loin, le nombre d'éléments de la triangulation et par suite la taille du système linéaire à résoudre sera inutilement important.

On introduit la fonction $\tilde{\phi}$ solution du problème :
trouver $\tilde{\phi} \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\phi} &= 0 & \text{dans } \Omega_h \text{ et dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_h, \\ \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right] &= g & \text{à travers } \Sigma_h. \end{cases} \quad (2.143)$$

On remarquera que $\tilde{\phi}$ est le potentiel magnétique associé au domaine Ω_h . Tous les résultats que nous avons établis pour le potentiel magnétique ϕ s'appliquent à $\tilde{\phi}$. On a notamment $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_h)$ et $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_h)$. En utilisant l'inégalité triangulaire et la proposition 2.6.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_h\|_h &\leq \|\phi - \tilde{\phi}\|_h + \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h + \|\tilde{\phi}_R - \phi_h\|_h \\ &\leq \|\phi - \tilde{\phi}\|_h + 2 \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h + \inf_{v_h \in V_h^{(k)}} \|\tilde{\phi} - v_h\|_h. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Puisque $\tilde{\phi} \in \mathbb{H}^1(B_h)$ et que ses restrictions à chacun des deux domaines Ω_h et Ω'_h sont \mathcal{C}^∞ , le dernier terme du membre de droite se majore en utilisant la proposition 2.6.2.

Intéressons nous au terme du milieu. En utilisant la formule de Green, on vérifie que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h^2 &= a_h(\tilde{\phi}, \tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R) - \int_{\Sigma_h} g (\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R) \, ds \\ &= \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right) (\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R) \, ds. \end{aligned} \quad (2.145)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h^2 &\leq \left(\int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_{0,\Gamma_h} \\ &\leq \sqrt{\frac{R}{2}} \left(\int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h \end{aligned} \quad (2.146)$$

et la majoration

$$\|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h \leq \sqrt{\frac{R}{2}} \left(\int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.147)$$

L'analogie du lemme 2.4.1 pour $\tilde{\phi}$ nous donne pour $x \in \mathbb{R}^3, |x|$ assez grand,

$$\left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}(x) + \frac{2}{r} \tilde{\phi}(x) \right|^2 \leq \frac{C}{r^8} \int_{\Sigma_h} |g(y)|^2 ds. \quad (2.148)$$

Par suite,

$$\int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds \leq \frac{C}{R^6} \int_{\Sigma_h} |g(y)|^2 ds. \quad (2.149)$$

Comme dans (2.147) et dans (2.149) l'intégrale porte sur les surfaces Γ_h et Γ_R , pour conclure, nous avons besoin du résultat suivant concernant l'approximation d'intégrales surfaciques.

Lemme 2.6.3 *Soit S une surface régulière (par morceaux) et S_h la surface approchée obtenue à partir d'un maillage régulier de la surface S par interpolation polynomiale de degré $r > 0$. Soit f une fonction régulière dans un voisinage de S . Alors,*

$$\begin{aligned} E &= \left| \int_S f(x) ds(x) - \int_{S_h} f(x) ds(x) \right| \\ &= \text{mesure}(S) O(h^{r+1}) \end{aligned} \quad (2.150)$$

où h désigne le pas du maillage.

Pour établir ce résultat, on a recours à une paramétrisation de la surface S . On pourra trouver la preuve de ce lemme dans [25].

Sachant que sur Γ_h le terme $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n}(x) + \frac{2}{R} \tilde{\phi}(x)$ se comporte en $\frac{1}{R^3}$, on peut vérifier, en utilisant le lemme 2.6.3, que

$$\int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds - \int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds = O\left(\frac{h^{k+1}}{R^4}\right). \quad (2.151)$$

Ainsi en effectuant la décomposition

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds &= \int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds \\ &+ \left\{ \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds - \int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right)^2 ds \right\}, \end{aligned} \quad (2.152)$$

on établit la majoration

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right\|_{0, \Gamma_h} \leq C_1 \frac{h^{\frac{1}{2}(k+1)}}{R^2} + C_2 \frac{1}{R^3} \|g\|_{0, \Sigma_h} \quad (2.153)$$

d'où on déduit à partir de (2.147) que

$$\|\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_R\|_h \leq C \left(\frac{h^{\frac{k+1}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \|g\|_{0,\Sigma_h} \right). \quad (2.154)$$

Il nous reste à majorer le terme $\|\phi - \tilde{\phi}\|_h$. Notons tout d'abord que

$$\phi(x) = \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x-y|} ds(y) \quad (2.155)$$

et

$$\tilde{\phi}(x) = \int_{\Sigma_h} \frac{g(y)}{|x-y|} ds(y). \quad (2.156)$$

On vérifie alors en utilisant le lemme 2.6.3 que

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_{0,\Gamma_h} = O(R h^{k+1}). \quad (2.157)$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi - \tilde{\phi}\|_h^2 &= \int_{\Sigma} g(\phi - \tilde{\phi}) ds - \int_{\Sigma_h} g(\phi - \tilde{\phi})(x) ds \\ &+ \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{2}{R} \phi \right) (\phi - \tilde{\phi}) ds - \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right) (\phi - \tilde{\phi}) ds. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Les termes de bord sur Γ_h se majorent aisément en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis les majorations (2.153) (et une majoration analogue pour ϕ) et (2.157). On obtient

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{2}{R} \phi \right) (\phi - \tilde{\phi}) ds - \int_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \frac{2}{R} \tilde{\phi} \right) (\phi - \tilde{\phi}) ds \right| \\ &\leq C_1 \frac{h^{\frac{3}{2}(k+1)}}{R} + C_2 \frac{h^{k+1}}{R^2}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Pour majorer

$$E = \int_{\Sigma} g(\phi - \tilde{\phi}) ds - \int_{\Sigma_h} g(\phi - \tilde{\phi}) ds,$$

on a recours à des techniques analogues à celles présentées au chapitre 4 et dans [24]. Il s'agit d'introduire une paramétrisation des surfaces Σ et Σ_h en prenant soin du comportement singulier de ϕ et $\tilde{\phi}$ en (2.155) et (2.156). On vérifie que

$$|E| = O(h^{2k}). \quad (2.160)$$

Nous avons donc

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_h \leq C \left(\frac{h^{\frac{3}{2}(k+1)}}{R} + \frac{h^{k+1}}{R^2} + h^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.161)$$

Ainsi,

$$\|\phi - \phi_h\|_h \leq C \left\{ \left(\frac{h^{\frac{3}{2}(k+1)}}{R} + \frac{h^{k+1}}{R^2} + h^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} + h^k + h^{\frac{k+1}{2}} R^{-\frac{3}{2}} + R^{-\frac{5}{2}} \right\}. \quad (2.162)$$

On peut préciser la signification des différents termes du membre de droite.

- Le premier terme rend compte de l'erreur provenant de l'approximation du domaine Ω par le domaine Ω_h . Ce terme disparaît si Ω est polygonal.
- Le second terme est l'erreur d'approximation "élément fini".
- Le troisième terme rend compte de l'erreur provenant de l'approximation de la frontière artificielle Γ_R par Γ_h .
- Enfin le dernier terme est le terme d'erreur lié au fait que l'on tronque le domaine.

On peut remarquer que pour avoir une erreur d'approximation en $O(h^k)$, il faut choisir R telle que l'erreur de troncature soit en $O(h^k)$, c'est-à-dire $R^{-\frac{5}{2}} = h^k$. Les termes provenant de l'approximation du domaine ne limitent pas l'ordre de convergence.

On peut dès lors énoncer le résultat suivant concernant l'erreur d'approximation.

Proposition 2.6.3 *Soit ϕ le potentiel magnétique solution du problème (2.16) et ϕ_h la solution du problème approché (2.140).*

Si $\phi_h \in V_h^{(1)}$ et si la valeur du paramètre R est choisie de sorte que $R = h^{-\frac{2}{5}}$ alors

$$\|\phi - \phi_h\|_h \leq Ch.$$

Si $\phi_h \in V_h^{(2)}$ et si la valeur du paramètre R est choisie de sorte que $R = h^{-\frac{4}{5}}$ alors

$$\|\phi - \phi_h\|_h \leq Ch^2.$$

À titre d'exemple pour $k = 1$ si $h = 0.1$ il faut prendre $R \geq 2.51$ et si $h = 0.01$ il faut prendre $R \geq 6.31$. Pour $k = 2$, on obtient respectivement $R \geq 6.31$ et $R \geq 39.81$.

2.6.4 Adaptation du maillage

Nous allons introduire un nouveau maillage du domaine B_R où la taille des tétraèdres sera adaptée en fonction de leur distance à Ω . On conçoit en effet aisément que compte tenu de la décroissance du potentiel magnétique en d^{-2} où d est la distance à Ω , la taille des éléments éloignés n'a pas besoin d'être aussi petite que celle des éléments qui sont au voisinage immédiat de Ω . Par un procédé introduit par C.I. Goldstein [48] qui consiste à augmenter progressivement la taille des tétraèdres en fonction de la distance à Ω nous allons montrer que l'on peut, à précision égale, réduire de manière importante la dimension de l'espace d'approximation et par conséquent la taille du système linéaire à résoudre.

Commençons par une remarque. La dimension de l'espace d'approximation $V_h^{(k)}$ est proportionnelle à $mesure(B_R) h^{-3}$ (voir [9]). Dans notre cas pour avoir une estimation d'erreur en norme de l'énergie en $O(h^k)$ nous avons vu, proposition 2.6.3, qu'il fallait choisir R tel que

- $R = h^{-\frac{2}{5}}$ dans le cas de l'approximation de degré 1,
- $R = h^{-\frac{4}{5}}$ dans le cas de l'approximation de degré 2.

Aussi $mesure(B_R)$ n'est pas indépendant de h ; on a

$$mesure(B_R) = O(R^3) = O(h^{-\frac{6k}{5}}), \quad (2.163)$$

et par suite

$$dim V_h^{(k)} = \begin{cases} O(h^{-\frac{21}{5}}) & \text{si } k = 1, \\ O(h^{-\frac{27}{5}}) & \text{si } k = 2. \end{cases} \quad (2.164)$$

Nous allons introduire une technique de maillage où la taille des tétraèdres croît en fonction de la distance à Ω et pour laquelle, tout en conservant une estimation d'erreur de la forme

$$\|\phi - \phi_h\|_h \leq Ch^k, \quad (2.165)$$

la dimension de l'espace d'approximation $V_h^{(k)}$ sera de l'ordre de h^{-3} .

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $\Omega \subset B(0,1) = B_0$. Soit J' tel que $2^{J'} = R$ et soit $J = [J'] + 1$. Pour $j = 1, \dots, J$ on définit, voir la figure 2.4,

$$B_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; 2^{j-1} < |x| \leq 2^j \right\} \text{ si } j = 1 \dots J-1, \quad (2.166)$$

et

$$B_J = \Omega'_h \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^3; 2^{J-1} < |x| \leq 2^J \right\}. \quad (2.167)$$

Pour $j = 0, \dots, J$, on note \mathcal{T}_{h_j} une triangulation du domaine B_j à l'aide de tétraèdres de diamètre $h_K = O(h_j)$ (la valeur de h_j sera précisée plus loin). On suppose que $h_0 = h$ et que les triangulations \mathcal{T}_{h_0} et \mathcal{T}_{h_j} respectent les conditions imposées à la section 2.6.1 pour ce qui concerne l'approximation des surfaces Γ_R et Σ .

Nous distinguons trois cas.

1– Pour $j = 1, \dots, (J-1)$, on note $V_j^{(k)} = \left\{ v \in C^0(\overline{B}_j); \forall K \in \mathcal{T}_{h_j} v|_K \in \mathbb{P}_k \right\}$.

On vérifie que

$$\inf_{v_h \in V_j^{(k)}} \left| \tilde{\phi} - v_h \right|_{1,B_j} \leq Ch_j^k \left| \tilde{\phi} \right|_{k+1,B_j}, \quad (2.168)$$

où $\tilde{\phi}$ est introduit en (2.143).

Compte tenu des propriétés du potentiel magnétique (voir proposition 2.2.6), on a

$$\left| \tilde{\phi} \right|_{2,B_j} = \left(\int_{B_j} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^3 \\ |\alpha|=2}} \left| \partial^\alpha \tilde{\phi} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{B_j} r^{-8} dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{-\frac{5}{2}j} \quad (2.169)$$

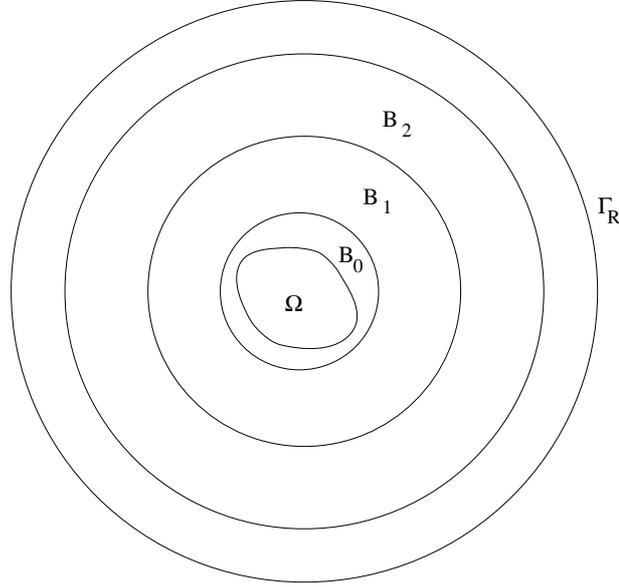


Figure 2.4: les différents domaines de discrétisation.

et

$$|\tilde{\phi}|_{3,B_j} = \left(\int_{B_j} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^3 \\ |\alpha|=3}} |\partial^\alpha \tilde{\phi}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{B_j} r^{-10} dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{-\frac{7}{2}j}. \quad (2.170)$$

On s'aperçoit que pour obtenir une erreur en $O(h^k)$ il faut choisir h_j tel que $h_j = 2^{\lambda_j} h$

$$\text{où } \lambda_j = \begin{cases} \frac{5}{2}j & \text{si } k = 1, \\ \frac{7}{4}j & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

2– Pour $j = J$, on définit $V_{h_j}^{(1)}$ l'espace d'approximation basé sur l'élément fini de Lagrange affine de type (1) et $V_{h_j}^{(2)}$ l'espace d'approximation basé sur l'élément fini de Lagrange isoparamétrique de type (2). En adaptant au domaine B_J les résultats de la section 2.6.1 on vérifie que

$$\inf_{v_h \in V_J^{(1)}} \left\{ |\tilde{\phi} - v_h|_{1,B_J}^2 + \frac{2}{R} \|\tilde{\phi} - v_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq Ch_J |\tilde{\phi}|_{2,B_J} \quad (2.171)$$

et

$$\inf_{v_h \in V_J^{(2)}} \left\{ |\tilde{\phi} - v_h|_{1,B_J}^2 + \frac{2}{R} \|\tilde{\phi} - v_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq Ch_J^2 \left\{ |\tilde{\phi}|_{2,B_J}^2 + |\tilde{\phi}|_{3,B_J}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.172)$$

Pour obtenir une erreur en $O(h^k)$ il faut choisir h_J tel que $h_J = 2^{\lambda_J} h$

$$\text{où } \lambda_J = \begin{cases} \frac{5}{2}J & \text{si } k = 1, \\ \frac{5}{4}J & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

3- Pour $j = 0$, on note $\Omega_0 = B_0 \setminus \bar{\Omega}_h$. On vérifie que

$$\inf_{v_h \in V_0^{(1)}} |\tilde{\phi} - v_h|_{1, B_0} \leq Ch \left\{ |\tilde{\phi}|_{2, \Omega_0}^2 + |\tilde{\phi}|_{2, \Omega_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.173)$$

et que

$$\inf_{v_h \in V_0^{(2)}} |\tilde{\phi} - v_h|_{1, B_0} \leq Ch^2 \left\{ |\tilde{\phi}|_{2, \Omega_0}^2 + |\tilde{\phi}|_{3, \Omega_0}^2 + |\tilde{\phi}|_{2, \Omega_h}^2 + |\tilde{\phi}|_{3, \Omega_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.174)$$

Soit χ la fonction qui restreinte à chaque domaine B_j réalise l'infimum en (2.168), (2.171) et (2.173) ou en (2.168), (2.172) et (2.174). On a $\chi \in V_h^{(k)}$ et

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi} - \chi\|_h^2 &= \int_{B_h} \nabla(\tilde{\phi} - \chi)^2 dx + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_h} (\tilde{\phi} - \chi)^2 ds \\ &= |\tilde{\phi} - \chi|_{1, B_0}^2 + \sum_{j=1}^{J-1} |\tilde{\phi} - \chi|_{1, B_j}^2 + |\tilde{\phi} - \chi|_{1, B_J}^2 + \frac{2}{R} \int_{\Gamma_h} (\tilde{\phi} - \chi)^2 ds \\ &\leq Ch^{2k}. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Par suite

$$\inf_{v_h \in V_h^{(k)}} \|\tilde{\phi} - v_h\|_h \leq Ch^k \quad (2.176)$$

et l'estimation (2.165) s'obtient grâce à (2.144) et (2.162).

Intéressons-nous à la dimension de l'espace $V_h^{(k)}$ obtenu à partir de cette nouvelle triangulation,

$$\begin{aligned} \dim V_h^{(k)} &= \sum_{j=0}^J \dim V_j^{(k)} = \sum_{j=0}^J O(h_j^{-3} \text{mesure}(B_j)) = \sum_{j=0}^J O(h^{-3} 8^{-\lambda_j} 8^j) \\ &= O(h^{-3}). \end{aligned} \quad (2.177)$$

En adoptant cette nouvelle stratégie de triangulation, la taille de l'espace d'approximation est divisée par $h^{-\frac{6}{5}}$ dans le cas d'une approximation de degré 1 et par $h^{-\frac{12}{5}}$ dans le cas d'une approximation de degré 2.

Limites de cette méthode

La formulation en potentiel magnétique possède plusieurs avantages. Une fois le domaine borné, on est ramené à un problème classique de potentiel. Ces problèmes sont très bien traités numériquement par un certain nombre de logiciels élément fini tel *Modulef*. De plus, par rapport à une formulation en champ, on n'a qu'une seule inconnue par nœud du maillage.

Toutefois, dans le cadre de notre étude, un certain nombre de limitations à l'utilisation de cette méthode sont apparues. Tout d'abord, compte tenu de la précision nécessaire pour la simulation numérique de l'artefact, un pas de discrétisation relativement fin doit être pris. Ceci conduit à des systèmes linéaires de grande dimension. D'autre part, pour reconstruire l'image de l'artefact, il est nécessaire de calculer les valeurs de l'induction magnétique $\vec{B} = -\mu\nabla\phi$ et de ses dérivées. Ceci implique de prendre un ordre élevé dans l'approximation polynomiale sur chaque élément.

Ces différents inconvénients nous ont amené à rechercher une méthode de calcul numérique du champ magnétique mieux adaptée à la spécificité de notre problème.

Chapitre 3

Formulation intégrale pour l'induction magnétique. Calculs analytiques pour un polyèdre

3.1 Formulation intégrale pour le champ magnétique

Nous avons établi à la section 2.1.2 que le potentiel magnétique scalaire ϕ solution du problème (2.16):

trouver $\phi \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta\phi & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta\phi & = & 0 & \text{dans } \Omega', \\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = & \vec{M} \cdot \vec{n} & \text{à travers } \Sigma, \end{cases} \quad (3.1)$$

est donné par

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{|x - y|} ds(y). \quad (3.2)$$

Le champ magnétique induit par l'implant métallique est lié au potentiel magnétique par la relation $\vec{H}' = -\nabla\phi$. Nous allons utiliser la formule (3.2) pour établir une formule de représentation intégrale pour le champ magnétique.

Proposition 3.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, on a*

$$\nabla\phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{n}(y) ds(y)$$

où $\vec{r} = x - y$.

Preuve. Si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ alors en dérivant sous le signe intégral on obtient

$$\nabla\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \vec{n}) \nabla_x \left(\frac{1}{|x-y|} \right) ds(y). \quad (3.3)$$

En utilisant la formule de calcul vectoriel

$$\vec{M} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) = (\vec{M} \cdot \vec{u}) \vec{n} - (\vec{M} \cdot \vec{n}) \vec{u}$$

il vient

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\vec{M} \cdot \nabla_x \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right) \vec{n} ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \vec{M} \wedge \iint_{\Sigma} \vec{n} \wedge \nabla_x \left(\frac{1}{|x-y|} \right) ds(y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La première intégrale donne le terme voulu. En utilisant la formule du rotationnel, on vérifie que la seconde intégrale est nulle. \square

Nous avons en outre établi au corollaire 2.2.2 que si la surface Σ de l'implant était de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$ ($0 < \theta < 1$) alors le potentiel magnétique ϕ était de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$ dans $\overline{\Omega}$ et dans $\overline{\Omega'}$. Par conséquent, si Σ est de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$, $\nabla\phi$ est \mathcal{C}^0 dans $\overline{\Omega}$ et dans $\overline{\Omega'}$. Se pose alors la question de savoir comment prolonger $\nabla\phi$ à Σ .

On a le résultat suivant (voir par exemple [29], [23] ou [32]).

Théorème 3.1.1 *Soit Σ le bord d'un ouvert borné, régulier, de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$ et soit $f \in \mathcal{C}^{0,\theta}(\Sigma)$ ($0 < \theta < 1$) alors le gradient du potentiel de simple couche V_1 de densité f est continu dans Ω et Ω' et peut être prolongé par continuité à $\overline{\Omega}$ en posant sur Σ*

$$\nabla V_1(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(y) \nabla_x \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \frac{1}{2} f(x) \vec{n}(x) \quad (3.5)$$

et à $\overline{\Omega'}$ en posant sur Σ

$$\nabla V_1(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(y) \nabla_x \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \frac{1}{2} f(x) \vec{n}(x) \quad (3.6)$$

où l'intégrale existe en tant qu'intégrale de Cauchy.

Comme corollaire, on établit la proposition suivante.

Proposition 3.1.2 *Si Σ est de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$ alors le champ magnétique défini pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ par*

$$\vec{H}'(x) = -\nabla\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n}(y) ds(y)$$

où $\vec{r} = x - y$, est continu dans Ω et Ω' et peut être prolongé par continuité à $\overline{\Omega}$ en posant sur Σ

$$\vec{H}'(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n}(y) ds(y) + \left(\frac{\vec{M}}{2} \cdot \vec{n}(x) \right) \vec{n}(x), \quad (3.7)$$

et à $\overline{\Omega'}$ en posant sur Σ

$$\overline{\vec{H}}'(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\overline{\vec{M}} \cdot \frac{\overline{\vec{r}}}{r^3}) \overline{\vec{n}}(y) \, ds(y) - \left(\frac{\overline{\vec{M}}}{2} \cdot \overline{\vec{n}}(x) \right) \overline{\vec{n}}(x), \quad (3.8)$$

où l'intégrale existe en tant qu'intégrale de Cauchy.

Preuve. Si Σ est de classe $\mathcal{C}^{1,\theta}$ alors $g = \overline{\vec{M}} \cdot \overline{\vec{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^{0,\theta}$. D'après le théorème 3.1.1 on peut prolonger $\overline{\vec{H}}'$ par continuité en posant sur Σ

$$\overline{\vec{H}}'(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\overline{\vec{M}} \cdot \overline{\vec{n}}(y)) \frac{\overline{\vec{r}}}{r^3} \, ds(y) \pm \left(\frac{\overline{\vec{M}}}{2} \cdot \overline{\vec{n}}(x) \right) \overline{\vec{n}}(x). \quad (3.9)$$

Il suffit ensuite de réécrire l'intégrale comme dans la preuve de la proposition 3.1.1. \square

3.2 Formulation intégrale pour l'induction magnétique

3.2.1 Formule de représentation intégrale

Lorsqu'on s'intéresse à la reconstruction de l'artefact, la grandeur d'intérêt est, plutôt que le champ magnétique induit, l'induction magnétique secondaire. Établissons la formule de représentation intégrale pour l'induction magnétique secondaire.

Rappelons que les champs $\overline{\vec{H}}$ et $\overline{\vec{B}}$ sont liés au vecteur aimantation $\overline{\vec{M}}$ par la relation

$$\overline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{B}} - \overline{\vec{M}}. \quad (3.10)$$

Dans le domaine Ω' , l'aimantation est nulle et dans le domaine Ω , on a supposé que l'aimantation est constante et vaut

$$\overline{\vec{M}} = \chi_m \overline{\vec{H}}_0. \quad (3.11)$$

Dans le domaine Ω' l'induction magnétique secondaire vaut

$$\begin{aligned} \overline{\vec{B}}' &= \overline{\vec{B}} - \overline{\vec{B}}_0 \\ &= \mu_0 \overline{\vec{H}} - \overline{\vec{B}}_0 \\ &= \mu_0 (\overline{\vec{H}}' + \overline{\vec{H}}_0) - \overline{\vec{B}}_0 \\ &= \mu_0 \overline{\vec{H}}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\overline{\vec{M}} \cdot \frac{\overline{\vec{r}}}{r^3}) \overline{\vec{n}}(y) \, ds(y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans le domaine Ω on a

$$\begin{aligned} \overline{\vec{B}}' &= \overline{\vec{B}} - \overline{\vec{B}}_0 \\ &= \mu_0 (\overline{\vec{H}} + \overline{\vec{M}}) - \overline{\vec{B}}_0 \\ &= \mu_0 \overline{\vec{H}}' + \mu_0 \overline{\vec{M}} \\ &= \mu_0 \overline{\vec{M}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\overline{\vec{M}} \cdot \frac{\overline{\vec{r}}}{r^3}) \overline{\vec{n}}(y) \, ds(y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le calcul de l'induction magnétique secondaire se ramène donc au calcul de l'intégrale surfacique

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n}(y) \, ds(y). \quad (3.14)$$

Par abus de langage, nous noterons $\vec{B}(x)$ cette intégrale et nous la nommerons induction magnétique secondaire.

3.2.2 Intérêt de la formule de représentation intégrale

Comparée à la méthode élément fini pour le potentiel magnétique ϕ qui a été discutée au chapitre précédent les formules intégrales (3.12 – 3.13) possèdent plusieurs avantages.

- Tout d'abord elles nous donnent explicitement l'induction magnétique qui est la grandeur d'intérêt lorsqu'on souhaite calculer numériquement l'artefact. Avec la méthode élément fini, il est nécessaire de dériver la solution ϕ obtenue.
- Pour calculer \vec{B} à partir de la formule (3.14), la discrétisation portera uniquement sur la surface de l'implant. Comparé à la méthode élément fini pour le potentiel magnétique ϕ où le problème est tridimensionnel, nous avons gagné une dimension dans la discrétisation.
- Avec la méthode élément fini il est nécessaire de tronquer le domaine extérieur Ω' . L'introduction d'une frontière artificielle ajoute une approximation supplémentaire liée à la condition à l'infini. Dans la représentation intégrale (3.12 – 3.13), le champ \vec{B} satisfait de façon naturelle la condition à l'infini.
- À partir de la formule (3.14) nous pouvons calculer les valeurs de la solution sur un sous-domaine d'intérêt particulier (dans notre cas au voisinage immédiat de l'implant) sans avoir à calculer la solution en tout point du domaine. Avec la méthode élément fini le problème est discrétisé sur le domaine en entier. On obtient la solution aux nœuds du maillage en résolvant un système linéaire global.

3.3 Stratégie de calcul de l'induction magnétique

Nous souhaitons calculer l'induction magnétique secondaire pour un implant métallique, diamagnétique ou paramagnétique, d'aimantation \vec{M} constante à partir des formules de représentation intégrale (3.12) et (3.13). Nous considérons une triangulation T_h de la surface Σ , c'est-à-dire une décomposition de Σ en une réunion finie de triangles K ,

$$\Sigma = \bigcup_{K \in T_h} K, \quad (3.15)$$

telle que,

- deux triangles ont leur intersection qui est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune;

- toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts.

Ici le terme de triangle désigne un ensemble isométrique à l'enveloppe convexe de 3 points non alignés dans \mathbb{R}^2 .

Nous distinguerons les deux cas suivants:

- Σ (ou une partie de Σ) est formée de surfaces planes,
- Σ (ou une partie de Σ) est formée de surfaces courbes.

Nous adopterons une méthode de calcul de l'intégrale spécifique pour chacun de ces deux cas. Nous notons Σ_p la partie de Σ constituée de surfaces planes et Σ_c la partie de Σ constituée de surfaces courbes (non-planes). On peut écrire,

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_p} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{n}(y) \, ds(y) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_c} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{n}(y) \, ds(y). \quad (3.16)$$

Calcul analytique de l'intégrale de surface

Pour calculer l'intégrale sur Σ_p nous utilisons une méthode analytique. Nous tirons profit du fait que dans ce cas particulier la normale \vec{n} est constante sur chaque triangle. Pour obtenir la valeur du champ \vec{B} au point $x \in \mathbb{R}^3$, il suffit de calculer pour chaque triangle $K \in T_h$,

$$\mathcal{I}(x) = \iint_K \frac{x - y}{|x - y|^{\frac{3}{2}}} \, ds(y). \quad (3.17)$$

On peut écrire

$$\mathcal{I}(x) = -\nabla_x \iint_K \frac{1}{|x - y|} \, ds(y). \quad (3.18)$$

Plusieurs résultats concernant le calcul analytique de l'intégrale

$$\iint_K \frac{1}{|x - y|} \, ds(y) \quad (3.19)$$

existent dans la littérature, voir par exemple [57], [73], [79].

Pour notre étude de tels résultats sont difficiles à exploiter. Les expressions obtenues pour l'intégrale (3.19) sont compliquées et dépendent de la géométrie du triangle. Il s'avère alors difficile de dériver ces expressions pour obtenir l'intégrale (3.17). Aussi avons-nous choisi de calculer l'intégrale (3.17) directement. Il nous est apparu par la suite que cette méthode est très voisine de celle utilisée par T.H. Duong [36]. Précisons que par cette méthode, la précision du résultat ne dépend pas de la taille des triangles. On a même intérêt à réaliser une triangulation très grossière afin de limiter le nombre de triangles et par suite le nombre de calculs.

Calcul numérique de l'intégrale de surface

Pour calculer la seconde intégrale dans (3.16) un calcul analytique n'est pas envisageable. Si la surface Σ n'admet pas de paramétrisation simple, il n'est pas facile de calculer sa normale \vec{n} . D'autre part même dans le cas où une telle paramétrisation existe, l'intégrant a une expression compliquée. Nous l'évaluons donc numériquement.

La triangulation "exacte" (3.15) est mal adaptée pour un calcul numérique de l'intégrale (3.14). Nous approchons chacun des triangles $K \in T_h$ par une surface paramétrée à l'aide de fonctions polynomiales \tilde{m}_k de degré 2. Ceci revient à associer à chacun des triangles K un triangle curviligne approché \widetilde{K} , ce qui conduit à approcher la surface Σ_c par une surface Σ_h . Nous notons \mathcal{T}_h la triangulation de Σ_h ainsi obtenue. La surface Σ_h est une union de triangles curvilignes (des portions de quadriques) raccordés le long de leurs arêtes. On peut ainsi calculer simplement une approximation \tilde{n} de la normale \vec{n} sur chaque triangle \widetilde{K} et mettre en œuvre une formule de quadrature numérique.

Nous détaillons maintenant ces deux méthodes de calcul de l'induction magnétique secondaire. Signalons que ce travail a fait l'objet d'une présentation au Congrès Compumag qui a eu lieu à Berlin en Juillet 1995 et d'une publication [12].

3.4 Calcul analytique de l'induction magnétique

3.4.1 Description de la méthode

Nous cherchons à calculer

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n} \, ds. \quad (3.20)$$

Nous supposons dans cette partie que Σ est la frontière d'un ouvert Ω polyédrique. Dans ce cas on peut obtenir une triangulation \mathcal{T} de Σ , c'est-à-dire une décomposition

$$\Sigma = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K,$$

telle que

- $K \subset \mathbb{R}^3$ est un triangle non-dégénéré;
- pour tous triangles K_1 et $K_2 \in \mathcal{T}$, l'intersection de K_1 et de K_2 est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune.

Remarque 3.4.1 Contrairement à l'optique adoptée dans les méthodes numériques, la taille des triangles n'aura aucune influence sur la précision du résultat. Le calcul de l'intégrale sur chaque triangle est effectué de manière exacte. Au contraire, on a tout intérêt à faire en sorte que les triangles soient les plus grands possible afin d'en limiter le nombre. Cela réduira le nombre des calculs à effectuer.

Nous pouvons écrire

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{K \in \mathcal{T}} \iint_K (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n} \, ds. \quad (3.21)$$

D'après l'hypothèse qui a été faite sur la géométrie du domaine, la normale extérieure à Σ est constante sur chaque triangle. D'autre part, le vecteur aimantation \vec{M} est lui aussi constant (dans la situation qui nous intéresse, le domaine Ω est un milieu magnétique parfait). Nous obtenons alors

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\vec{M} \cdot \iint_K \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds \right) \vec{n}_K. \quad (3.22)$$

Ainsi pour obtenir la valeur de \vec{B} au point P , il suffit de calculer pour chaque triangle $K \in \mathcal{T}$ l'intégrale

$$\iint_K \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds. \quad (3.23)$$

3.4.2 Décomposition du domaine d'intégration

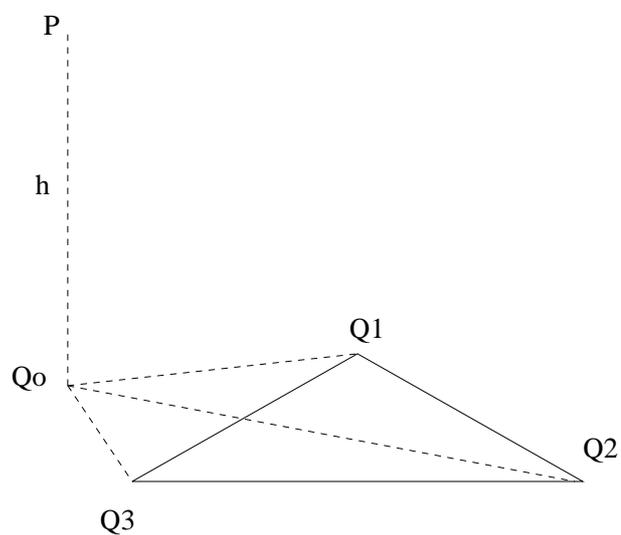
Considérons un triangle K de la triangulation et désignons par Q_1, Q_2, Q_3 ses sommets. On note Q_0 la projection du point P sur le plan défini par K . Nous introduisons les triangles K_1, K_2 et K_3 , (voir figure 3.1), de sommets respectifs $\{Q_0, Q_2, Q_3\}$, $\{Q_0, Q_3, Q_1\}$ et $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$. Nous décomposons alors l'intégrale sur K en la somme de trois intégrales sur les triangles K_1, K_2 et K_3

$$\iint_K \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds = \pm \iint_{K_1} \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds \pm \iint_{K_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds \pm \iint_{K_3} \frac{\vec{r}}{r^3} \, ds. \quad (3.24)$$

Le signe devant être pris en considération pour chacune des trois intégrales dépend de la position du point Q_0 par rapport au triangle K . Il peut être aisément obtenu en calculant les coordonnées barycentriques du point Q_0 relativement au triangle K . Par exemple dans la situation dessinée sur la figure 3.1, les signes sont $+$, $-$ et $+$. Le tableau 3.1 fournit les signes à retenir selon le signe des coordonnées barycentriques du point Q_0 .

Intéressons-nous au calcul de l'intégrale sur le triangle K_k de sommets $\{Q_0, Q_i, Q_j\}$ où $k \in \{1, 2, 3\}$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Nous introduisons un nouveau repère \mathcal{R}_k associé au triangle K_k en prenant pour origine Q_0 et pour vecteurs de la base orthonormée

$$\begin{cases} \vec{x} &= \frac{\overrightarrow{Q_0 Q_i}}{|\overrightarrow{Q_0 Q_i}|} \\ \vec{z} &= \frac{(\overrightarrow{Q_0 Q_i} \wedge \overrightarrow{Q_0 Q_j})}{|\overrightarrow{Q_0 Q_i} \wedge \overrightarrow{Q_0 Q_j}|} \\ \vec{y} &= \vec{z} \wedge \vec{x} \end{cases} \quad (3.25)$$

Figure 3.1: décomposition du triangle K .

signe des coordonnées barycentriques			signe de l'intégrale		
λ_1	λ_2	λ_3	R_1	R_2	R_3
-	-	+	-	-	+
-	+	+	-	+	+
-	+	-	-	+	-
+	+	-	+	+	-
+	-	+	+	-	+
+	+	+	+	+	+

Tableau 3.1: tableau donnant les signes des intégrales en fonction du signe des coordonnées barycentriques.

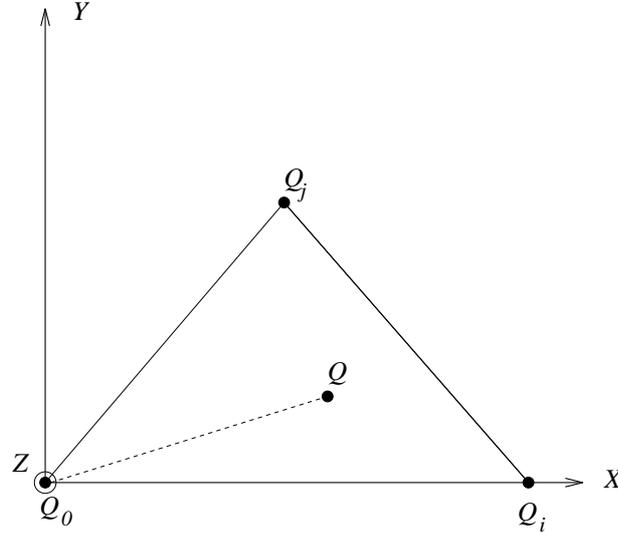


Figure 3.2: nouveau système de coordonnées.

Dans ce nouveau repère les sommets ont pour coordonnées

$$\begin{cases} Q_0 = (0, 0) \\ Q_i = (x_i, 0) \quad \text{avec } x_i \geq 0, \\ Q_j = (x_j, y_j) \quad \text{avec } y_j \geq 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Soit (x, y) les coordonnées du point générique Q dans le repère \mathcal{R}_k et soit $h = \overrightarrow{Q_0P} \cdot \vec{z}$. Nous avons

$$\vec{r} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QQ_0} + \overrightarrow{Q_0P} = -x \vec{x} - y \vec{y} + h \vec{z}. \quad (3.27)$$

Par conséquent les coordonnées de l'intégrale $\vec{R} = \iint_{K_k} \frac{\vec{r}}{r^3} ds$ dans le repère \mathcal{R}_k sont

$$\begin{aligned} R_1 &= \iint_{K_k} \frac{-x}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy, \\ R_2 &= \iint_{K_k} \frac{-y}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy, \\ R_3 &= h \iint_{K_k} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Une fois ces intégrales calculées, on obtient par un calcul élémentaire les coordonnées du vecteur \vec{R} dans le repère de départ.

3.4.3 Calcul de l'intégrale pour les deux premières composantes

Pour calculer les deux premières composantes de \vec{R} , nous allons utiliser une paramétrisation du triangle K_k . Nous notons

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{x_j}{y_j}, \\ \delta_2 = \frac{x_j - x_i}{y_j}, \\ \delta_3 = -\frac{x_i y_j}{x_j - x_i}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ces paramètres sont liés à la paramétrisation du triangle. Ils vont jouer un rôle important par la suite.

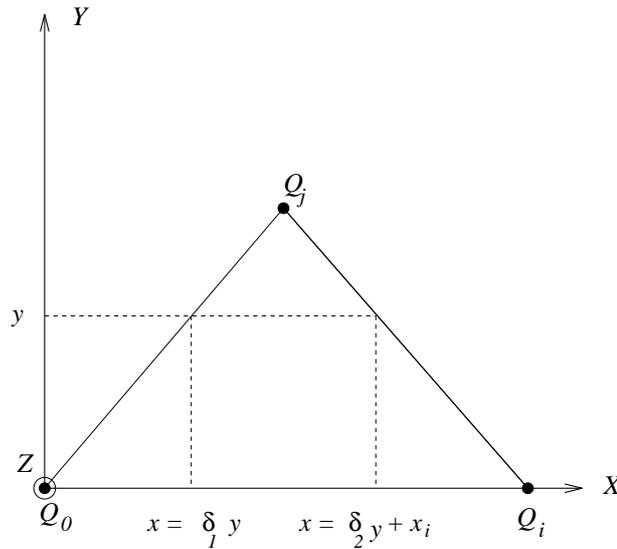


Figure 3.3: paramétrisation du triangle.

Soit F la fonction des trois variables (a, b, u) définie par

$$F(a, b, u) = \int \frac{1}{\sqrt{(a^2 + 1)u^2 + 2abu + b^2 + h^2}} du. \quad (3.30)$$

On vérifie que F vaut

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \ln \left\{ \sqrt{(a^2 + 1)u^2 + 2abu + b^2 + h^2} + \sqrt{a^2 + 1} u + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 1}} \right\}. \quad (3.31)$$

Le calcul de R_1 est immédiat et le résultat peut être exprimé de façon très simple en ayant recours à la fonction F . On a

$$\begin{aligned}
R_1 &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \, dx \, dy \\
&= \int_0^{y_j} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{x=\delta_1 y}^{x=\delta_2 y + x_i} \, dy \\
&= F(\delta_2, x_i, y_j) - F(\delta_2, x_i, 0) - F(\delta_1, 0, y_j) + F(\delta_1, 0, 0). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Pour calculer R_2 , on va bien entendu commencer par intégrer en y . Trois paramétrisations sont à envisager suivant la forme du triangle K_k .

– Premier cas: $x_j \in [0, x_i]$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \, dx \, dy \\
&= \int_0^{x_j} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{\delta_1} x} \, dx + \int_{x_j}^{x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{\delta_2} x + \delta_3} \, dx \\
&= F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_j\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, 0\right) - F(0, 0, x_j) + F(0, 0, 0) \\
&\quad + F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_i\right) - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_j\right) - F(0, 0, x_i) + F(0, 0, x_j). \tag{3.33}
\end{aligned}$$

– Deuxième cas: $x_j < 0$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \, dx \, dy \\
&= \int_{x_j}^0 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=\frac{1}{\delta_1} x}^{y=\frac{1}{\delta_2} x + \delta_3} \, dx + \int_0^{x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{\delta_2} x + \delta_3} \, dx \\
&= F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, 0\right) - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_j\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, 0\right) + F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_j\right) \\
&\quad + F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_i\right) - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, 0\right) - F(0, 0, x_i) + F(0, 0, 0). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

– Troisième cas: $x_j > x_i$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \iint_{K_k} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \, dx \, dy \\
&= \int_0^{x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{\delta_1} x} \, dx + \int_{x_i}^{x_j} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{y=\frac{1}{\delta_2} x + \delta_3}^{y=\frac{1}{\delta_1} x} \, dx \\
&= F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_i\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, 0\right) - F(0, 0, x_i) + F(0, 0, 0) \\
&\quad + F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_j\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_i\right) - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_j\right) + F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_i\right). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Nous obtenons dans les trois cas la même expression pour l'intégrale R_2

$$\begin{aligned} R_2 &= F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_j\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, 0\right) + F(0, 0, 0) + F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_i\right) \\ &\quad - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_j\right) - F(0, 0, x_i). \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.4.4 Calcul de l'intégrale pour la troisième composante

La troisième intégrale est plus difficile à calculer. Nous commençons par intégrer une fois en x ,

$$\begin{aligned} R_3 &= h \iint_{K_k} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy \\ &= h \int_0^{y_j} \int_{\delta_{1y}}^{\delta_{2y+x_i}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy \\ &= h \int_0^{y_j} \left[\frac{1}{y^2 + h^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right]_{x=\delta_{1y}}^{x=\delta_{2y+x_i}} dy \\ &= G(\delta_2, x_i) - G(\delta_1, 0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

où l'on a posé

$$G(a, b) = h \int_0^{y_j} \frac{ay + b}{(y^2 + h^2)\sqrt{(a^2 + 1)y^2 + 2aby + b^2 + h^2}} dy. \quad (3.38)$$

La difficulté est alors de déterminer la forme explicite de G en fonction des paramètres a et b . La méthode de calcul de cette intégrale est donnée dans [49] à la page 81. Il faut distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de a et b . Notons que $b \geq 0$.

Premier cas

Le premier cas envisagé est celui où $ab \neq 0$. Nous effectuons le changement de variables défini par la fonction

$$\Phi : y \mapsto t = \frac{a(h^2a - by)}{b(ay + b)} \quad (3.39)$$

Nous notons $t_0 = t(0) = \frac{a^2h^2}{b^2}$ et $t_j = t(y_j) = \frac{a(h^2a - by_j)}{b(ay_j + b)}$.

- Si $a > 0$ alors on vérifie que Φ est strictement croissante sur $[0, y_j]$.
- Dans le cas où $a < 0$, Φ n'est pas définie pour $y = -\frac{b}{a}$. Elle est strictement croissante sur $\left[0, -\frac{b}{a}\right[$ à valeurs dans $[t_0, +\infty[$, et elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ à valeurs dans $] -\infty, -1[$.

Nous allons donc distinguer les deux cas suivants qui correspondent à deux comportements distincts pour Φ .

A. " $a > 0$ " ou " $a < 0$ et $y_j < -\frac{b}{a}$ ", alors Φ est croissante sur $[0, y_j]$.

B. " $a < 0$ et $y_j > -\frac{b}{a}$ ", alors Φ est croissante sur $\left[0, -\frac{b}{a}\right]$ et sur $\left[-\frac{b}{a}, y_j\right]$.

A. Dans le premier cas, le changement de variables nous donne

$$G(a, b) = -h \int_{t_0}^{t_j} \frac{a(b^2 + h^2 a^2)}{(t+1) \sqrt{\frac{(b^4 + h^2 a^2 b^2) t^2 + A^2}{a^2 b^2 (t+1)^2}}} dt \quad (3.40)$$

où

$$A^2 = a^2(b^2 + h^2 a^2)(b^2 + h^2 + h^2 a^2). \quad (3.41)$$

On écrit cette dernière expression sous la forme

$$G(a, b) = -\frac{a|a|h}{b^2} \sqrt{b^2 + h^2 a^2} \int_{t_0}^{t_j} \frac{dt}{\left(\frac{h^2 a^2}{b^2} + t^2\right) \sqrt{\frac{A^2}{b^2(b^2 + h^2 a^2)} + t^2}}. \quad (3.42)$$

En intégrant, on obtient

$$G(a, b) = -\frac{|a|}{a} \frac{|h|}{h} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2}}{|h|} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2 + a^2 h^2)}} \right) \right]_{t_0}^{t_j}. \quad (3.43)$$

B. Dans le deuxième cas, ($a < 0$ et $y_j > -\frac{b}{a}$), nous commençons par décomposer le domaine d'intégration. On écrit

$$G(a, b) = -h \int_{t_0}^{+\infty} g(a, b, t) dt - h \int_{-\infty}^{t_j} g(a, b, t) dt \quad (3.44)$$

où

$$g(a, b, t) = \frac{a(b^2 + h^2 a^2)}{(t+1) \sqrt{\frac{(b^4 + h^2 a^2 b^2) t^2 + A^2}{a^2 b^2 (t+1)^2}}}. \quad (3.45)$$

Pour la première intégrale dans (3.44), on a $t > 0$ et

$$g(a, b, t) = -\frac{a^2 b(b^2 + h^2 a^2)}{(b^2 t^2 + h^2 a^2) \sqrt{b^2(b^2 + h^2 a^2) t^2 + A^2}}. \quad (3.46)$$

On retrouve le cas traité précédemment avec t_j remplacé par T variable destinée à tendre vers $+\infty$. Pour $T \rightarrow +\infty$, on montre que l'intégrale converge vers

$$G_1 = -\frac{h}{|h|} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2}}{|h|} \right) - \arctan \left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2} t_0}{|h| \sqrt{t_0^2 + \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2 + a^2 h^2)}} \right) \right). \quad (3.47)$$

Pour la seconde intégrale, on a $t < -1$ et g s'écrit

$$g(a, b, t) = \frac{a^2 b(b^2 + h^2 a^2)}{(b^2 t^2 + h^2 a^2) \sqrt{b^2(b^2 + h^2 a^2) t^2 + A^2}}. \quad (3.48)$$

Par rapport à l'intégration précédente seul le signe de l'intégrand change. On obtient

$$G_2 = -\frac{h}{|h|} \left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2} t_j}{|h| \sqrt{t_j^2 + \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2 + a^2 h^2)}}\right) + \arctan\left(\frac{-\sqrt{b^2 + h^2 a^2}}{|h|}\right) \right). \quad (3.49)$$

Pour obtenir l'expression de G , on somme (3.47) et (3.49). Compte tenu du fait que la fonction arc-tangente est impaire, on obtient

$$\begin{aligned} G(a, b) &= -\frac{|h|}{h} \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2} t_0}{|h| \sqrt{t_0^2 + \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2 + a^2 h^2)}}\right) \\ &\quad - \frac{|h|}{h} \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2} t_j}{|h| \sqrt{t_j^2 + \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2 + a^2 h^2)}}\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Deuxième cas

Si $ab = 0$, la technique de calcul de l'intégrale est différente. On distingue selon les valeurs de a et b trois expressions pour la fonction G .

A. Si $a = 0$, $b \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} G(a, b) &= h \int_0^{y_j} \frac{b}{(y^2 + h^2) \sqrt{y^2 + b^2 + h^2}} dy \\ &= \frac{h}{|h|} \arctan\left(\frac{y_j}{|h| \sqrt{y_j^2 + b^2 + h^2}}\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

B. Si $a \neq 0$, $b = 0$ alors

$$\begin{aligned} G(a, b) &= h \int_0^{y_j} \frac{b}{(y^2 + h^2) \sqrt{(a^2 + 1)y^2 + h^2}} dy \\ &= \frac{h}{|h|} \frac{a}{|a|} \left\{ \arctan\left(\sqrt{\frac{(a^2 + 1)y_j^2 + h^2}{a^2 h^2}}\right) - \arctan\frac{1}{|a|} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

C. Si $a = 0$, $b = 0$ alors $G(a, b) = 0$.

Pour des détails concernant la technique de calcul de ces intégrales, on pourra consulter [49] p. 89, formule (2.284).

En résumé

Pour obtenir une écriture plus synthétique de la fonction G , nous introduisons la fonction

$$Atg(t) = \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2 a^2} t}{|h| \sqrt{t^2 + \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2 + h^2 a^2)}}\right). \quad (3.53)$$

Rappelons que $t_j = \frac{a(h^2 a - b y_j)}{b(a y_j + b)}$ et $t_0 = \frac{a^2 h^2}{b^2}$.

En fonction des paramètres a et b qui sont liés à la forme du triangle nous distinguons six expressions différentes pour G .

– Si $ab \neq 0$ nous avons :

A. $a > 0$,

$$G(a, b) = -\frac{h}{|h|} (Atg(t_j) - Atg(t_0)). \quad (3.54)$$

B. $a < 0$ et $y_j < -\frac{b}{a}$,

$$G(a, b) = \frac{h}{|h|} (Atg(t_j) - Atg(t_0)). \quad (3.55)$$

C. $a < 0$ et $y_j > -\frac{b}{a}$,

$$G(a, b) = -\frac{h}{|h|} (Atg(t_j) + Atg(t_0)). \quad (3.56)$$

– Si $ab = 0$ nous avons :

A. $a = 0$ et $b \neq 0$,

$$G(a, b) = \frac{h}{|h|} \arctan \left(\frac{b y_j}{|h| \sqrt{y_j^2 + h^2 + b^2}} \right). \quad (3.57)$$

B. $a \neq 0$ et $b = 0$,

$$G(a, b) = \frac{ah}{|ah|} \left(\arctan \sqrt{\frac{(a^2 + 1)y_j^2 + h^2}{a^2 h^2}} - \arctan \left(\frac{1}{|a|} \right) \right). \quad (3.58)$$

C. $a = 0$ et $b = 0$,

$$G(a, b) = 0. \quad (3.59)$$

3.4.5 La procédure de calcul de l'intégrale

Résumons la procédure de calcul de l'intégrale

$$I(P) = \iint_K \frac{\vec{r}}{r^3} ds(Q).$$

On calcule le projeté Q_0 du point P dans le plan du triangle K . Pour chacun des trois triangles K_1 , K_2 et K_3 issus de K ,

1 – on calcule les coordonnées $(x_i, 0)$ et (x_j, y_j) des deux sommets dans le repère local,

2 – on calcule les valeurs de δ_1 , δ_2 et δ_3 .

On a alors les trois composantes de

$$R_k(P) = \iint_{K_k} \frac{\vec{r}}{r^3} ds(Q)$$

qui sont données par

$$\begin{aligned} R_1 &= F(\delta_2, x_i, y_j) - F(\delta_2, x_i, 0) - F(\delta_1, 0, y_j) + F(\delta_1, 0, 0), \\ R_2 &= F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, x_j\right) - F\left(\frac{1}{\delta_1}, 0, 0\right) + F(0, 0, 0) + F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_i\right) \\ &\quad - F\left(\frac{1}{\delta_2}, \delta_3, x_j\right) - F(0, 0, x_i), \end{aligned}$$

où F est donnée par (3.31) et

$$R_3 = G(\delta_2, x_i) - G(\delta_1, 0),$$

où la valeur de $G(\delta_2, x_i)$ dépend du signe de δ_2 et x_i (voir (3.54)–(3.59)) et où la valeur de $G(\delta_1, 0)$ est donnée par (3.58). On calcule les composantes de $R_k(P)$ dans le repère de départ et on obtient $I(P)$ en sommant ces trois intégrales,

$$I(P) = \text{signe}(\lambda_1) R_1(P) + \text{signe}(\lambda_2) R_2(P) + \text{signe}(\lambda_3) R_3(P)$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées barycentriques de Q_0 relativement au triangle K .

Remarque 3.4.2 Cette méthode de calcul de l'intégrale est celle que nous avons publiée dans [12]. Remarquons que T.H. Duong [36] avait été amené à calculer de manière analytique ces mêmes intégrales R_1 , R_2 et R_3 pour calculer l'intégrale

$$\iint_K \frac{f(y)}{|x-y|^3} ds(y)$$

où f est un polynôme de degré 1. Cette intégrale intervient lorsque l'on cherche à calculer un potentiel de double couche. La méthode utilisée par T.H. Duong est assez proche de la méthode que nous avons exposée. Toutefois, le repère local à chaque triangle R_k est choisi de sorte à avoir une paramétrisation polaire de chaque triangle. Le calcul de l'intégrale R_3 est rendu élémentaire par ce choix. Par contre le calcul des deux premières intégrales est un peu plus complexe que ce que nous avons présenté. Pour ce qui est de la mise en œuvre numérique, les formules sont "équivalentes"; le résultat s'exprime à l'aide de fonctions logarithme et de la fonction Arc-sinus. D'autres résultats pour le calcul analytique de ces mêmes intégrales ont été publiés dans [84] et sont utilisés dans le code *TRIFOU* [95] de calcul des courants de Foucault.

Chapitre 4

Calcul numérique de l'induction magnétique pour un domaine quelconque

Dans ce chapitre nous présentons une méthode numérique pour calculer l'intégrale

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) \vec{n} \, ds$$

dans le cas où la surface Σ de l'implant n'est pas plane. Le principe de la méthode est le suivant. Nous approchons la surface Σ par interpolation polynomiale d'ordre 2 à partir d'une triangulation de Σ . L'intégrale sur chacun des triangles de la triangulation est ensuite calculée par intégration numérique. Sur la base d'une interpolation polynomiale d'ordre 2 de la surface, les résultats classiques de la théorie de l'interpolation montrent que l'erreur de discrétisation se comporte en $O(h^3)$ où h désigne le pas du maillage, voir le lemme 2.6.3. Nous allons vérifier que sous certaines hypothèses concernant le maillage de la surface Σ , l'erreur de discrétisation se comporte en $O(h^4)$.

4.1 Approximation de la surface

4.1.1 Hypothèses et notations

Nous conservons les notations déjà introduites. Ω désigne un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 (l'implant métallique dans notre cas). La frontière de Ω , notée Σ , est une variété régulière compacte. Nous reprenons les notations introduites dans [3]. On procède à une partition de la surface Σ en J morceaux notés Σ_j , $j = 1, \dots, J$, telle que

- Σ_j est un fermé et $\Sigma = \bigcup_{j=1}^J \Sigma_j$,

- l'intersection de deux surfaces Σ_{j_1} et Σ_{j_2} , $j_1 \neq j_2$ est soit vide, soit un bord commun appartenant à Σ ,

- pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, Σ_j est l'image d'un domaine D_j polygonal fermé de \mathbb{R}^2 par un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme F_j ,

$$\Sigma_j = F_j(D_j).$$

Pour chaque domaine D_j , on introduit une triangulation \widehat{T}_h^j de D_j au sens des triangulations usuelles en éléments finis,

$$D_j = \bigcup_{\widehat{K} \in \widehat{T}_h^j} \widehat{K},$$

telle que

- $\widehat{K} \in \mathbb{R}^2$ est un triangle d'intérieur non vide,
- pour tout triangles \widehat{K}_1 et $\widehat{K}_2 \in \widehat{T}_h^j$, l'intersection de $\overset{o}{\widehat{K}}_1$ et de $\overset{o}{\widehat{K}}_2$ est vide,
- chaque arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle soit une partie de la frontière de D .

Nous supposons en outre que ces triangulations vérifient les conditions habituelles de régularité, en particulier le diamètre $h_{\widehat{K}}$ du triangle \widehat{K} vérifie

$$h_{\widehat{K}} \leq h \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_{\widehat{K}}} \leq C \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } \widehat{K}. \quad (4.1)$$

Pour simplifier l'exposé, nous ne considérerons qu'un seul domaine D ; autrement dit il ne sera plus fait référence à l'indice $j = 1, \dots, J$. \widehat{K} désigne alors l'élément générique de la triangulation \widehat{T}_h . Ses sommets sont notés $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2$ et \widehat{S}_3 . Sans restreindre la généralité, on supposera que D est un triangle rectangle isocèle.

Décomposition de la surface

On obtient une triangulation T_h de la surface Σ en prenant l'image par F de la triangulation \widehat{T}_h de D . L'image du triangle \widehat{K} par l'application F est noté K . On note S_1, S_2 et S_3 ses "sommets" qui sont définis par $S_i = F(\widehat{S}_i)$, $i = 1, 2, 3$, voir la figure 4.1.

Soit σ le triangle de référence

$$\sigma = \{(s, t) \in [0, 1]^2 \mid 0 \leq s + t \leq 1\}. \quad (4.2)$$

On désigne par $\{\rho_i\}_{i=1..6}$ les trois sommets et les trois milieux d'arêtes de σ . On considère $f_{\widehat{K}}$ l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par les relations

$$f_{\widehat{K}}(\rho_i) = \widehat{S}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Cette application associe à tout point $(s, t) \in \sigma$, le point $(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \in \widehat{K}$ tel que

$$(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = (1 - s - t) \widehat{S}_1 + t \widehat{S}_2 + s \widehat{S}_3. \quad (4.4)$$

On note m_K l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$m_K = F \circ f_{\widehat{K}}. \quad (4.5)$$

À tout point $(s, t) \in \sigma$ l'application m_K associe le point $(x^1, x^2, x^3) \in K$ tel que

$$(x^1, x^2, x^3) = m_K(s, t) = F(f_{\widehat{K}}(s, t)) = F((1-s-t)\widehat{S}_1 + t\widehat{S}_2 + s\widehat{S}_3). \quad (4.6)$$

Approximation de la surface

Pour approcher la surface Σ on remplace l'application F , pour chaque triangle $\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{T}}_h$, par $\widetilde{F}_{\widehat{K}}$ l'interpolant de Lagrange de degré 2 sur \widehat{K} . En particulier

$$\widetilde{F}_{\widehat{K}}(\widehat{S}_i) = F(\widehat{S}_i) = S_i \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.7)$$

On note L_i , $i = 1, \dots, 6$ les fonctions de base de l'interpolation de Lagrange de degré 2 sur σ . On note encore \widetilde{m}_K l'interpolant d'ordre 2 de m_K donné par

$$\widetilde{m}_K(s, t) = \sum_{i=1}^6 S_i L_i(s, t) = \sum_{i=1}^6 m_K(\rho_i) L_i(s, t). \quad (4.8)$$

La surface Σ est approchée par la surface Σ_h définie par

$$\Sigma_h = \bigcup_{\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{T}}_h} \widetilde{F}_{\widehat{K}}(\widehat{K}) = \bigcup_{\widetilde{K} \in \mathcal{T}_h} \widetilde{K}. \quad (4.9)$$

L'élément générique \widetilde{K} de la triangulation \mathcal{T}_h est l'image du triangle $\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{T}}_h$ par l'application $\widetilde{F}_{\widehat{K}}$.

4.1.2 Description de la méthode

Nous cherchons à calculer pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ le champ

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}(x, y)}{r^3(x, y)} \vec{n}(y) \, ds(y) \quad (4.10)$$

où $\vec{r} = x - y$ et \vec{n} est la normale extérieure à Σ .

Le calcul de \vec{B} dans le cas où Σ est formée de surfaces planes a été abordé au chapitre précédent. Nous considérons ici le cas où Σ est une surface quelconque. On note Φ la fonction définie par

$$\Phi(x, y) = \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}(x, y). \quad (4.11)$$

On désigne par N le nombre d'éléments de la triangulation $\widehat{\mathcal{T}}_h$ de D . L'application m_{K_k} associée au $k^{\text{ème}}$ élément de la triangulation sera noté plus simplement m_k . De même on

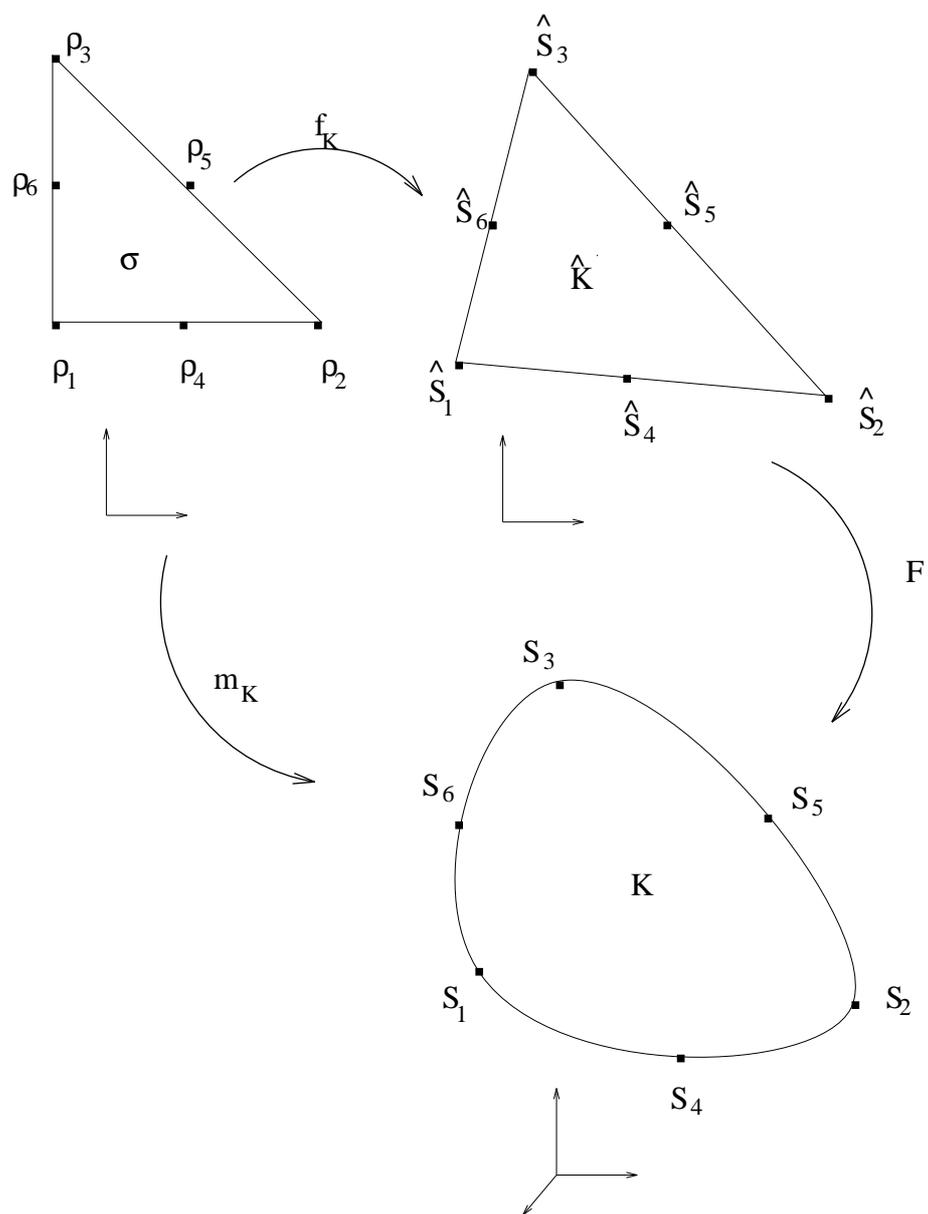


Figure 4.1: construction de la triangulation de la surface.

écrit \tilde{m}_k au lieu de \tilde{m}_{K_k} . Nous avons

$$\begin{aligned}\vec{B}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\tilde{K} \in \hat{\mathcal{T}}_h} \iint_{F(\tilde{K})} \Phi(x, y) \vec{n}(y) \, ds(y) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \iint_{\sigma} \Phi(x, m_k(s, t)) \vec{n}(m_k(s, t)) J(s, t) \, ds \, dt\end{aligned}\quad (4.12)$$

où

$$J(s, t) = | \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) |.$$

Le vecteur normal unitaire à la surface Σ est donné par

$$\vec{n}(m_k(s, t)) = n(s, t) = \frac{\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)}{| \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) |}.\quad (4.13)$$

Il est en général mal aisé pour une surface Σ quelconque d'explicitier l'application m_k et de calculer J . Pour pouvoir calculer \vec{B} , nous avons donc recours à l'interpolant \tilde{m}_k d'ordre 2 de m_k donné en (4.8). Ceci nous amène à considérer l'approximation suivante de \vec{B} ,

$$\vec{B}_h(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \iint_{\sigma} \Phi(x, \tilde{m}_k(s, t)) \tilde{n}(s, t) \tilde{J}(s, t) \, ds \, dt\quad (4.14)$$

où

$$\tilde{J}(s, t) = | \partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) | \quad (4.15)$$

et $\tilde{n}(s, t)$ est le vecteur

$$\tilde{n}(s, t) = \frac{\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)}{| \partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) |}.\quad (4.16)$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\begin{aligned}\vec{B}_h(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\tilde{K} \in \mathcal{T}_h} \iint_{\tilde{K}} \Phi(x, y) \tilde{n}(y) \, ds(y) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_h} \Phi(x, y) \tilde{n}(y) \, ds(y).\end{aligned}\quad (4.17)$$

Nous abordons dans la section 4.2 l'étude de l'estimation de l'erreur $| \vec{B}(x) - \vec{B}_h(x) |$.

Il n'est pas possible de calculer l'intégrale dans (4.14) de manière exacte. Nous utilisons une méthode d'intégration numérique basée sur la formule de quadrature élémentaire

$$\int_{\sigma} f(s, t) \, ds \, dt = \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j f(u_j)\quad (4.18)$$

où les coefficients $\omega_j \in \mathbb{R}$ sont les poids de quadrature et où les points $u_j = (s_j, t_j) \in \sigma$ sont les nœuds de quadrature. Nous calculons alors l'approximation suivante de l'induction magnétique secondaire,

$$\vec{B}_h^\mu(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi(P, u_j) (\partial_s \tilde{m}(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}(u_j)). \quad (4.19)$$

La section 4.3 est consacrée à l'étude de cette approximation.

4.2 Estimation de l'erreur due à l'approximation de la surface

Dans cette section nous étudions l'erreur résultant de l'approximation de la surface Σ par interpolation d'ordre 2. On montrera que sous certaines conditions de régularité et de symétrie du maillage l'erreur commise est en $O(h^4)$. Pour cette étude d'erreur, nous adaptons une technique introduite par D. Chien dans sa thèse [24] pour la résolution d'une équation intégrale de surface dans \mathbb{R}^3 par une méthode de collocation.

Nous adoptons les notations suivantes pour les dérivées partielles d'une fonction u

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_s = \partial_s u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t = \partial_t u. \quad (4.20)$$

Nous cherchons à estimer l'erreur $|\vec{B}(P) - \vec{B}_h(P)|$ en un point $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ en fonction du paramètre h . Le point P étant fixé, nous notons

$$\Phi_P(Q) = \Phi(P, Q) = \frac{\vec{M} \cdot (P - Q)}{|P - Q|^3} \quad \forall Q \in \Sigma. \quad (4.21)$$

L'erreur liée à l'approximation de la surface est

$$\begin{aligned} E(P) &= \vec{B}(P) - \vec{B}_h(P) \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s, t)) n(s, t) J(s, t) \, ds \, dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(\tilde{m}_k(s, t)) \tilde{n}(s, t) \tilde{J}(s, t) \, ds \, dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

où

$$\begin{aligned} J(s, t) &= |\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)|, \\ \tilde{J}(s, t) &= |\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)| \end{aligned} \quad (4.23)$$

et

$$\begin{aligned} n(s, t) &= \frac{\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)}{|\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)|}, \\ \tilde{n}(s, t) &= \frac{\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)}{|\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)|}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 E(P) &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s,t)) (\partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t)) \, ds \, dt \\
 &\quad - \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) (\partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t)) \, ds \, dt.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Nous décomposons $E(P)$ sous la forme

$$E(P) = E_1(P) + E_2(P), \tag{4.26}$$

avec

$$\begin{aligned}
 E_1(P) &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s,t)) \\
 &\quad \times \{ \partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t) - \partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t) \} \, ds \, dt, \\
 E_2(P) &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \{ \Phi_P(m_k(s,t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) \} (\partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t)) \, ds \, dt.
 \end{aligned}$$

Nous allons étudier séparément ces deux termes.

4.2.1 Erreur dans l'approximation de la normale

Proposition 4.2.1 *Pour chaque triangle $\widehat{K} \in \widehat{T}_h$ et $\forall (s,t) \in \sigma$, on a*

$$| \partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t) - \partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t) | = O(h^4).$$

Preuve. Soit $(s,t) \in \sigma$, et $u = 1 - s - t$. On a, voir (4.6),

$$m_k(s,t) = \begin{pmatrix} x^1(s,t) \\ x^2(s,t) \\ x^3(s,t) \end{pmatrix} = F(u \widehat{S}_1 + t \widehat{S}_2 + s \widehat{S}_3). \tag{4.27}$$

L'interpolant de Lagrange d'ordre 2 de $m_k(s,t)$, $\tilde{m}_k(s,t) = {}^t(\tilde{x}^1(s,t), \tilde{x}^2(s,t), \tilde{x}^3(s,t))$ est alors donné par, voir (4.8),

$$\tilde{x}^i(s,t) = \sum_{j=1}^6 x^i(s_j, t_j) L_j(s,t), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.28}$$

où pour $j = 1, \dots, 6$, les $\rho_j = (s_j, t_j)$ sont les nœuds et les L_j sont les fonctions de base sur le triangle σ pour l'interpolation de Lagrange d'ordre 2.

Ainsi,

$$\partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t) = \begin{pmatrix} x_s^2(s,t) x_t^3(s,t) - x_s^3(s,t) x_t^2(s,t) \\ x_s^3(s,t) x_t^1(s,t) - x_s^1(s,t) x_t^3(s,t) \\ x_s^1(s,t) x_t^2(s,t) - x_s^2(s,t) x_t^1(s,t) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

et

$$\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_s^2(s, t) \tilde{x}_t^3(s, t) - \tilde{x}_s^3(s, t) \tilde{x}_t^2(s, t) \\ \tilde{x}_s^3(s, t) \tilde{x}_t^1(s, t) - \tilde{x}_s^1(s, t) \tilde{x}_t^3(s, t) \\ \tilde{x}_s^1(s, t) \tilde{x}_t^2(s, t) - \tilde{x}_s^2(s, t) \tilde{x}_t^1(s, t) \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Remarquons que l'on a, voir (4.6),

$$\partial_s x^i(s, t) = \nabla F^i(u \hat{S}_1 + t \hat{S}_2 + s \hat{S}_3) \cdot (\hat{S}_3 - \hat{S}_1) = O(h), \quad (4.31)$$

$$\partial_t x^i(s, t) = \nabla F^i(u \hat{S}_1 + t \hat{S}_2 + s \hat{S}_3) \cdot (\hat{S}_2 - \hat{S}_1) = O(h), \quad (4.32)$$

avec une généralisation immédiate pour les ordres de dérivation supérieurs. Effectuons un développement de Taylor de $x^i(s, t)$ au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} x^i(s, t) &= x^i(0, 0) + D x^i(0, 0) \cdot (s, t) + \frac{1}{2} D^2 x^i(0, 0) \cdot (s, t)^2 + \frac{1}{6} D^3 x^i(0, 0) \cdot (s, t)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} D^4 x^i(0, 0) \cdot (s, t)^4 + \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^4}{4!} D^5 x^i(\zeta s, \zeta t) \cdot (s, t)^5 d\zeta, \end{aligned} \quad (4.33)$$

soit utilisant la notation en puissances symboliques

$$\begin{aligned} x^i(s, t) &= x^i(0, 0) + (s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t}) x^i(0, 0) + \frac{1}{2} (s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t})^2 x^i(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{6} (s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t})^3 x^i(0, 0) + \frac{1}{24} (s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t})^4 x^i(0, 0) + O(h^5). \end{aligned} \quad (4.34)$$

On vérifie aussi que l'interpolant \tilde{x}^i de x^i défini par (4.28) admet le développement

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i(s, t) &= \sum_{j=1}^6 \left(x^i(0, 0) + (s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t}) x^i(0, 0) + \frac{1}{2} (s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t})^2 x^i(0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t})^3 x^i(0, 0) + \frac{1}{24} (s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t})^4 x^i(0, 0) + O(h^5) \right) \times L_j(s, t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Afin de simplifier cette dernière expression, nous avons recours aux propriétés de l'interpolant de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 L_j(s, t) &= 1, & \sum_{j=1}^6 s_j L_j(s, t) &= s, \\ \sum_{j=1}^6 t_j L_j(s, t) &= t, & \sum_{j=1}^6 s_j^2 L_j(s, t) &= s^2, \\ \sum_{j=1}^6 s_j t_j L_j(s, t) &= s t, & \sum_{j=1}^6 t_j^2 L_j(s, t) &= t^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

On obtient,

$$\tilde{x}^i(s, t) = x^i(0, 0) + s \frac{\partial}{\partial s} x^i(0, 0) + t \frac{\partial}{\partial t} x^i(0, 0) + \frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} x^i(0, 0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i(0,0) + st \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} x^i(0,0) \\
 & + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 x^i(0,0) L_j(s,t) \\
 & + \frac{1}{24} \sum_{j=1}^6 \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 x^i(0,0) L_j(s,t) + O(h^5). \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

Finalement, en sommant (4.34) et (4.37), on obtient pour $i = 1, 2, 3$,

$$x^i(s,t) - \tilde{x}^i(s,t) = H^i(s,t) + G^i(s,t) + O(h^5), \tag{4.38}$$

où

$$H^i(s,t) = \frac{1}{6} \left\{ \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 x^i(0,0) - \sum_{j=1}^6 \left\{ \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 x^i(0,0) \right\} L_j(s,t) \right\}, \tag{4.39}$$

$$G^i(s,t) = \frac{1}{24} \left\{ \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 x^i(0,0) - \sum_{j=1}^6 \left\{ \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 x^i(0,0) \right\} L_j(s,t) \right\}. \tag{4.40}$$

On vérifie que

$$H^i(s,t) = O(h^3), \quad G^i(s,t) = O(h^4). \tag{4.41}$$

Étudions la première composante de $\partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t) - \partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t)$ que nous noterons $\nu_1(s,t)$,

$$\nu_1(s,t) = x_s^2(s,t) x_t^3(s,t) - x_s^3(s,t) x_t^2(s,t) - \tilde{x}_s^2(s,t) \tilde{x}_t^3(s,t) + \tilde{x}_s^3(s,t) \tilde{x}_t^2(s,t). \tag{4.42}$$

En dérivant l'expression (4.38), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_s^i(s,t) & = x_s^i(s,t) - H_s^i(s,t) - G_s^i(s,t) + O(h^5), \\
 \tilde{x}_t^i(s,t) & = x_t^i(s,t) - H_t^i(s,t) - G_t^i(s,t) + O(h^5).
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Puis en combinant (4.42) et (4.43), il vient après simplification

$$\begin{aligned}
 \nu_1(s,t) & = x_s^2(s,t)(H_t^3(s,t) + G_t^3(s,t)) + x_t^3(s,t)(H_s^2(s,t) + G_s^2(s,t)) \\
 & - x_s^3(s,t)(H_t^2(s,t) + G_t^2(s,t)) - x_t^2(s,t)(H_s^3(s,t) + G_s^3(s,t)) \\
 & + (H_s^3(s,t) + G_s^3(s,t))(H_t^2(s,t) + G_t^2(s,t)) \\
 & - (H_s^2(s,t) + G_s^2(s,t))(H_t^3(s,t) + G_t^3(s,t)) + O(h^6). \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Effectuons ensuite un développement de Taylor de x_s^i et x_t^i au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned}
 x_s^i(s,t) & = x_s^i(0,0) + s x_{ss}^i(0,0) + t x_{st}^i(0,0) + O(h^3), \\
 x_t^i(s,t) & = x_t^i(0,0) + s x_{st}^i(0,0) + t x_{tt}^i(0,0) + O(h^3).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\nu_1(s, t) &= \{x_s^2(0, 0) + s x_{ss}^2(0, 0) + t x_{st}^2(0, 0)\} \{H_t^3(s, t) + G_t^3(s, t)\} \\
&+ \{x_t^3(0, 0) + s x_{st}^3(0, 0) + t x_{tt}^3(0, 0)\} \{H_s^2(s, t) + G_s^2(s, t)\} \\
&- \{x_s^3(0, 0) + s x_{ss}^3(0, 0) + t x_{st}^3(0, 0)\} \{H_t^2(s, t) + G_t^2(s, t)\} \\
&- \{x_t^2(0, 0) + s x_{st}^2(0, 0) + t x_{tt}^2(0, 0)\} \{H_s^3(s, t) + G_s^3(s, t)\} + O(h^6) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

que l'on développe

$$\begin{aligned}
\nu_1(s, t) &= x_s^2(0, 0)H_t^3(s, t) + x_t^3(0, 0)H_s^2(s, t) - x_s^3(0, 0)H_t^2(s, t) - x_t^2(0, 0)H_s^3(s, t) \\
&+ x_s^2(0, 0)G_t^3(s, t) + x_t^3(0, 0)G_s^2(s, t) - x_s^3(0, 0)G_t^2(s, t) - x_t^2(0, 0)G_s^3(s, t) \\
&+ \{s x_{ss}^2(0, 0) + t x_{st}^2(0, 0)\} \{H_t^3(s, t) + G_t^3(s, t)\} \\
&+ \{s x_{st}^3(0, 0) + t x_{tt}^3(0, 0)\} \{H_s^2(s, t) + G_s^2(s, t)\} \\
&- \{s x_{ss}^3(0, 0) + t x_{st}^3(0, 0)\} \{H_t^2(s, t) + G_t^2(s, t)\} \\
&- \{s x_{st}^2(0, 0) + t x_{tt}^2(0, 0)\} \{H_s^3(s, t) + G_s^3(s, t)\} + O(h^6). \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Posons alors

$$E_4^1(s, t) = x_s^2(0, 0)H_t^3(s, t) + x_t^3(0, 0)H_s^2(s, t) - x_s^3(0, 0)H_t^2(s, t) - x_t^2(0, 0)H_s^3(s, t) \quad (4.48)$$

et

$$\begin{aligned}
E_5^1(s, t) &= x_s^2(0, 0)G_t^3(s, t) + x_t^3(0, 0)G_s^2(s, t) - x_s^3(0, 0)G_t^2(s, t) - x_t^2(0, 0)G_s^3(s, t) \\
&+ \{s x_{ss}^2(0, 0) + t x_{st}^2(0, 0)\} \{H_t^3(s, t) + G_t^3(s, t)\} \\
&+ \{s x_{st}^3(0, 0) + t x_{tt}^3(0, 0)\} \{H_s^2(s, t) + G_s^2(s, t)\} \\
&- \{s x_{ss}^3(0, 0) + t x_{st}^3(0, 0)\} \{H_t^2(s, t) + G_t^2(s, t)\} \\
&- \{s x_{st}^2(0, 0) + t x_{tt}^2(0, 0)\} \{H_s^3(s, t) + G_s^3(s, t)\}. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

On a

$$\nu_1(s, t) = E_4^1(s, t) + E_5^1(s, t) + O(h^6). \quad (4.50)$$

On vérifie que E_4^1 est en $O(h^4)$ et E_5^1 est en $O(h^5)$. Les mêmes calculs peuvent être effectués pour les deux autres composantes. On obtient une estimation d'erreur en $O(h^4)$ pour chacune des composantes et par suite la proposition est démontrée. \square

4.2.2 Quelques résultats intermédiaires

Lemme 4.2.1 *Soit g un polynôme homogène de degré 3 à 2 variables et Π son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 sur le triangle de référence σ . Alors,*

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial s} (g(s, t) - \Pi(s, t)) \, ds \, dt = 0, \quad (4.51)$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} (g(s, t) - \Pi(s, t)) \, ds \, dt = 0. \quad (4.52)$$

Preuve. Le polynôme g est de la forme $g(s, t) = c_1 s^3 + c_2 s^2 t + c_3 s t^2 + c_4 t^3$, avec c_1, c_2, c_3 et $c_4 \in \mathbb{R}$. La différence $h(s, t) = g(s, t) - \Pi(s, t)$ vaut alors

$$\begin{aligned} h(s, t) &= c_1 \left(s^3 - \frac{3}{2} s^2 + \frac{1}{2} s \right) + c_2 \left(s^2 t - \frac{1}{2} s t \right) + c_3 \left(s t^2 - \frac{1}{2} s t \right) \\ &+ c_4 \left(t^3 - \frac{3}{2} t^2 + \frac{1}{2} t \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

On dérive pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial s} h(s, t) = c_1 \left(3s^2 - 3s + \frac{1}{2} \right) + c_2 \left(2st - \frac{1}{2} t \right) + c_3 \left(t^2 - \frac{1}{2} t \right), \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h(s, t) = c_4 \left(3t^2 - 3t + \frac{1}{2} \right) + c_3 \left(2st - \frac{1}{2} s \right) + c_2 \left(s^2 - \frac{1}{2} s \right). \quad (4.55)$$

Un calcul élémentaire permet d'établir que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} s^2 \, ds \, dt &= \frac{1}{12} = \int_{\sigma} t^2 \, ds \, dt, \\ \int_{\sigma} s \, ds \, dt &= \frac{1}{6} = \int_{\sigma} t \, ds \, dt, \\ \int_{\sigma} ds \, dt &= \frac{1}{2}, \\ \int_{\sigma} st \, ds \, dt &= \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Le résultat s'obtient alors immédiatement. \square

Lemme 4.2.2 *Nous reprenons les notations introduites à la section 4.2.1. Soit E_4^i la fonction définie en (4.48). Alors $\forall i = 1, \dots, 3$*

$$\int_{\sigma} E_4^i(s, t) \, ds \, dt = 0. \quad (4.57)$$

Preuve. Nous utilisons la convention suivante sur les indices,

$$\text{si } i = 2 \text{ alors } i + 1 = 3 \text{ et } i + 2 = 1,$$

$$\text{si } i = 3 \text{ alors } i + 1 = 1 \text{ et } i + 2 = 2.$$

Alors la fonction E_4^i prend la forme

$$\begin{aligned} E_4^i(s, t) &= x_s^{i+1}(0, 0) H_t^{i+2}(s, t) + x_t^{i+2}(0, 0) H_s^{i+1}(s, t) \\ &- x_s^{i+2}(0, 0) H_t^{i+1}(s, t) - x_t^{i+1}(0, 0) H_s^{i+2}(s, t). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Pour démontrer (4.57) nous allons vérifier que $\forall k = 1, \dots, 3$,

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial s} H^k(s, t) \, ds \, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} H^k(s, t) \, ds \, dt = 0. \quad (4.59)$$

On a par (4.39)

$$\begin{aligned}
H^k(s, t) &= \frac{1}{6}s^3\partial_{sss}^3x^k(0, 0) + \frac{1}{2}ts^2\partial_{sst}^3x^k(0, 0) + \frac{1}{2}st^2\partial_{tts}^3x^k(0, 0) \\
&+ \frac{1}{6}t^3\partial_{ttt}^3x^k(0, 0) - \frac{1}{6}\sum_{j=1}^6 \left\{ s_j^3\partial_{sss}^3x^k(0, 0) + 3t_j s_j^2\partial_{sst}^3x^k(0, 0) \right. \\
&\left. + 3s_j t_j^2\partial_{tts}^3x^k(0, 0) + t_j^3\partial_{ttt}^3x^k(0, 0) \right\} L_j(s, t). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme précédent en prenant

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{6}\partial_{sss}^3x^k(0, 0) & c_2 &= \frac{1}{2}\partial_{sst}^3x^k(0, 0) \\
c_3 &= \frac{1}{2}\partial_{tts}^3x^k(0, 0) & c_4 &= \frac{1}{6}\partial_{ttt}^3x^k(0, 0). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

□

Définition 4.2.1 On appelle triangles symétriques deux triangles \widehat{K}_1 et \widehat{K}_2 de sommets respectifs $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3$ et $\widehat{S}_1, \widehat{S}_4, \widehat{S}_5$ tels que, voir la figure 4.2,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\widehat{S}_1\widehat{S}_2} = -\overrightarrow{\widehat{S}_1\widehat{S}_4}, \\ \overrightarrow{\widehat{S}_1\widehat{S}_3} = -\overrightarrow{\widehat{S}_1\widehat{S}_5}. \end{cases} \tag{4.62}$$

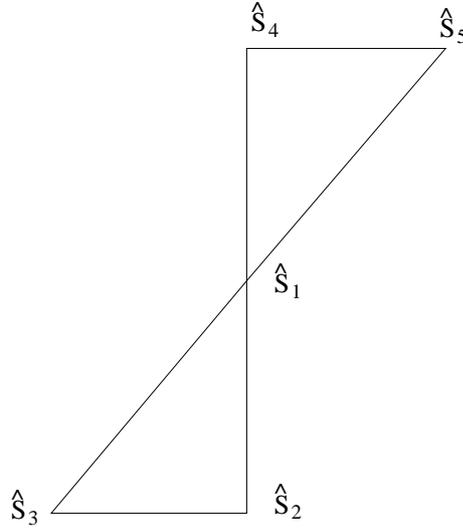


Figure 4.2: une paire de triangles symétriques.

Lemme 4.2.3 Soit D un triangle isocèle rectangle. On effectue une triangulation structurée de D , voir la figure 4.3, à l'aide de n^2 triangles. Alors si n est impair, il existe $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ paires de triangles symétriques et n triangles qui ne peuvent être appariés. Et si n est pair il existe $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ paires de triangles symétriques et $3n - 2$ triangles qui ne peuvent être appariés.

Ce lemme énonce un résultat fondamental pour l'étude de l'erreur qui suit. Un résultat similaire est utilisé par D. Chien [24]. Nous en donnons une justification.

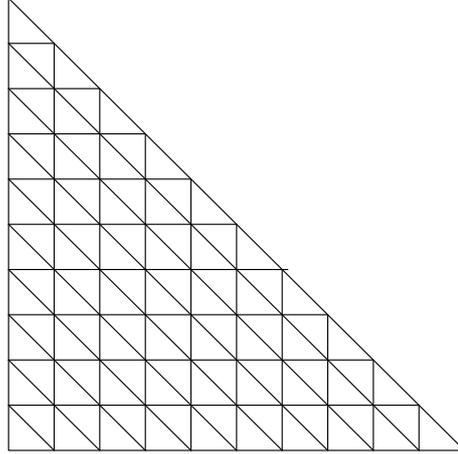


Figure 4.3: triangulation structurée de D .

Preuve. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que D est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Nous allons donner un moyen de construire les paires de triangles symétriques dans D .

Si l'on considère un sommet S quelconque de la triangulation, intérieur à D , la façon la plus avantageuse de créer des paires de triangles symétriques est d'associer les triangles ayant S pour sommet comme indiqué sur la figure 4.4. L'idée est ensuite de répéter ce motif le plus de fois possibles dans D .

Prenons le cas présenté sur la figure 4.5 où D est maillé en 25 triangles ($n = 5$). On peut placer trois fois le motif. Parmi les triangles restant, on peut encore associer deux triangles entre eux. Il reste 5 triangles non appariés. La formule est donc vérifiée avec $n = 5$.

On peut ensuite procéder par récurrence. On en explicite la première étape. La récurrence consiste à ajouter le long de l'hypoténuse une bande ayant la forme d'un quadrilatère afin d'obtenir un maillage formé dans ce cas de 7^2 triangles. On peut répéter 3 fois le motif de base dans la bande ajoutée, voir la figure 4.6. De plus, les deux triangles apparaissant entre deux motifs dans la bande sont symétriques. En ajoutant la bande, on ajoute donc seulement 2 triangles non appariés. Il y a au total $5 + 2 = 7$ triangles non appariés. La formule est donc exacte pour $n = 7$. Plus généralement, pour passer d'un maillage en n triangles à un maillage en $n + 2$ triangles, on ajoute suivant l'hypoténuse une bande formée de $4(n + 1)$ triangles. Dans cette bande, on peut placer $(n + 1)/2$ fois le motif de base. Il reste deux triangles entre deux motifs adjacents. Ces deux triangles sont symétriques. On forme alors $(n - 1)/2$ paires de triangles symétriques supplémentaires. Il reste $4(n + 1) - 6(n + 1)/2 - 2(n - 1)/2 = 2$ triangles non-appariés dans la bande. Au total pour le maillage en $(n + 2)^2$ triangles ainsi construit, il y a $n + 2$ triangles non-appariés.

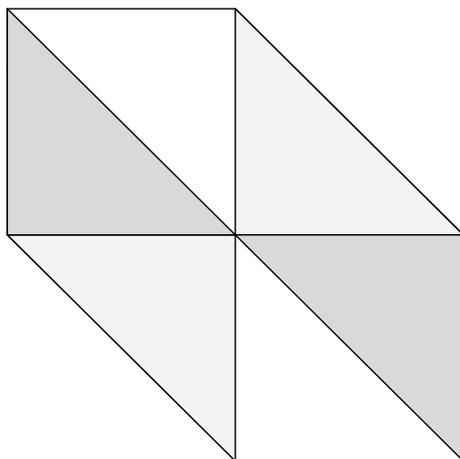
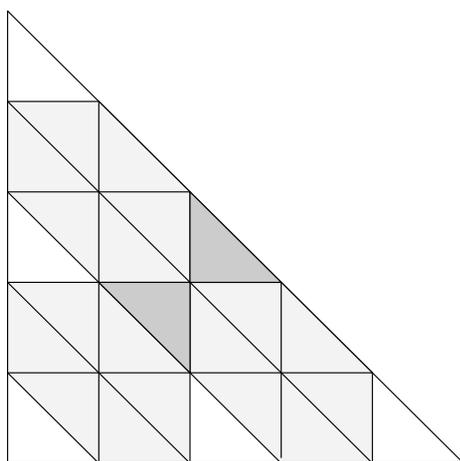


Figure 4.4: motif de base.

Figure 4.5: maillage de D en 5^2 triangles. Paires de triangles symétriques.

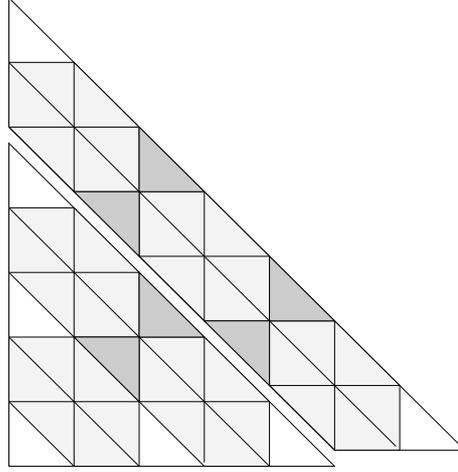


Figure 4.6: maillage de D en 7^2 triangles. Paires de triangles symétriques.

Si n est pair, il suffit de considérer le triangle D' formé de $(n - 1)^2$ triangles qui est issu de D . On applique à D' le résultat obtenu dans le cas impair. On passe de D' à D en ajoutant $2n - 1$ triangles non-appariés le long de l'hypoténuse de D' . On vérifie sans peine que le triangle D possède $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ paires de triangles symétriques et $3n - 2$ triangles non-appariés. \square

Remarque 4.2.1 La propriété que nous utiliserons par la suite est que si un triangle est maillé de façon structurée à l'aide de n^2 triangles alors il existe $O(n^2)$ paires de triangles symétriques et $O(n)$ triangles non-appariés.

4.2.3 Étude du terme E_1

Lemme 4.2.4 On suppose avoir un maillage structuré de D . Le comportement du terme E_1 dans (4.26) en fonction du paramètre h est donné par

$$E_1(P) = O(h^4).$$

Preuve. On écrit

$$E_1(P) = \sum_{k=1}^N e_{1,k}(P) \tag{4.63}$$

avec

$$e_{1,k}(P) = \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s, t)) \{ \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) - \partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) \} ds dt. \tag{4.64}$$

Afin de simplifier la présentation, nous nous intéressons à la première composante de $e_{1,k}$, notée $e_{1,k}^1$. Le raisonnement est identique pour les deux autres composantes à permutation des indices près.

Commençons par effectuer un développement de Taylor de $\Phi_P \circ m_k$ au voisinage de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} \Phi_P(m_k(s,t)) &= \Phi_P(m_k(0,0)) + s \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_s m_k(0,0) \\ &\quad + t \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_t m_k(0,0) + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.65)$$

D'après la proposition 4.2.1 et la formule (4.50) on a

$$\{\partial_s m_k(s,t) \wedge \partial_t m_k(s,t) - \partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t)\} \cdot \vec{i} = E_4^1(s,t) + E_5^1(s,t) + O(h^6), \quad (4.66)$$

où \vec{i} est le premier vecteur de base et où les termes E_4^1 et E_5^1 sont données par (4.48) et (4.49). Rappelons que $E_4^1 = O(h^4)$ et que $E_5^1 = O(h^5)$. Ainsi

$$\begin{aligned} e_{1,k}^1(P) &= \int_{\sigma} \left\{ \Phi_P(m_k(0,0)) + s \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_s m_k(0,0) \right. \\ &\quad \left. + t \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_t m_k(0,0) + O(h^2) \right\} \left\{ E_4^1(s,t) + E_5^1(s,t) + O(h^6) \right\} ds dt \end{aligned} \quad (4.67)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} e_{1,k}^1(P) &= \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(0,0)) E_5^1(s,t) ds dt + \int_{\sigma} \left\{ s \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_s m_k(0,0) \right. \\ &\quad \left. + t \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_t m_k(0,0) \right\} E_4^1(s,t) ds dt + O(h^6); \end{aligned} \quad (4.68)$$

en effet, d'après le lemme 4.2.2

$$\int_{\sigma} E_4^1(s,t) ds dt = 0. \quad (4.69)$$

Nous obtenons que $e_{1,k}^1(P)$ est en $O(h^5)$ et par suite $E_1^1(P)$ l'erreur pour les N triangles est en $O(h^3)$. Pour obtenir l'estimation annoncée, il convient d'étudier de façon plus précise les différents termes dans (4.68). Nous posons

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 &= \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(0,0)) E_5^1(s,t) ds dt \\ &\quad + \int_{\sigma} \left\{ s \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_s m_k(0,0) + t \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_t m_k(0,0) \right\} E_4^1(s,t) ds dt. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nous allons montrer que sous l'hypothèse d'un maillage structuré de la surface du domaine nous allons obtenir l'estimation d'erreur annoncée. Pour cela nous montrons que les termes d'ordre 5 du développement asymptotique se compensent pour une paire de triangles symétriques; c'est-à-dire que si \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} sont deux triangles symétriques, alors $\Delta_{k_1}^1 + \Delta_{k_2}^1 = O(h^6)$.

Soient $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3$ et $\widehat{S}_1, \widehat{S}_4, \widehat{S}_5$ les sommets des triangles \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} , voir la figure 4.2. Nous désignerons par (a_i, b_i) les coordonnées du sommet \widehat{S}_i . On a les relations

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= a_4 - a_1, & b_1 - b_2 &= b_4 - b_1, \\ a_1 - a_3 &= a_5 - a_1, & b_1 - b_3 &= b_5 - b_1. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Soient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k_1}^1(s, t) \\ x_{k_1}^2(s, t) \\ x_{k_1}^3(s, t) \end{pmatrix} &= m_{k_1}(s, t) = F((1-s-t)\widehat{S}_1 + t\widehat{S}_2 + s\widehat{S}_3) \\ &= \begin{pmatrix} F^1(a_1 + t(a_2 - a_1) + s(a_3 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1) + s(b_3 - b_1)) \\ F^2(a_1 + t(a_2 - a_1) + s(a_3 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1) + s(b_3 - b_1)) \\ F^3(a_1 + t(a_2 - a_1) + s(a_3 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1) + s(b_3 - b_1)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k_2}^1(s, t) \\ x_{k_2}^2(s, t) \\ x_{k_2}^3(s, t) \end{pmatrix} &= m_{k_2}(s, t) = F((1-s-t)\widehat{S}_1 + t\widehat{S}_4 + s\widehat{S}_5) \\ &= \begin{pmatrix} F^1(a_1 + t(a_4 - a_1) + s(a_5 - a_1), b_1 + t(b_4 - b_1) + s(b_5 - b_1)) \\ F^2(a_1 + t(a_4 - a_1) + s(a_5 - a_1), b_1 + t(b_4 - b_1) + s(b_5 - b_1)) \\ F^3(a_1 + t(a_4 - a_1) + s(a_5 - a_1), b_1 + t(b_4 - b_1) + s(b_5 - b_1)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Remarquons que

$$m_{k_1}(0, 0) = m_{k_2}(0, 0) = F(S_1). \quad (4.74)$$

D'autre part, $\forall i = 1, \dots, 3$,

$$\begin{aligned} \partial_s x_{k_1}^i(0, 0) &= (a_3 - a_1) \partial_1 F^i(a_1, b_1) + (b_3 - b_1) \partial_2 F^i(a_1, b_1), \\ \partial_s x_{k_2}^i(0, 0) &= (a_5 - a_1) \partial_1 F^i(a_1, b_1) + (b_5 - b_1) \partial_2 F^i(a_1, b_1). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Compte tenu des relations (4.71), nous en déduisons la relation suivante entre dérivées partielles relatives aux triangles \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2}

$$\partial_s x_{k_1}^i(0, 0) = -\partial_s x_{k_2}^i(0, 0). \quad (4.76)$$

Par un calcul similaire, on vérifie les égalités suivantes

$$\partial_t x_{k_1}^i(0, 0) = -\partial_t x_{k_2}^i(0, 0), \quad (4.77)$$

$$\begin{cases} \partial_{ss}^2 x_{k_1}^i(0, 0) = \partial_{ss}^2 x_{k_2}^i(0, 0), \\ \partial_{st}^2 x_{k_1}^i(0, 0) = \partial_{st}^2 x_{k_2}^i(0, 0), \\ \partial_{tt}^2 x_{k_1}^i(0, 0) = \partial_{tt}^2 x_{k_2}^i(0, 0), \end{cases} \quad (4.78)$$

$$\begin{cases} \partial_{sss}^3 x_{k_1}^i(0,0) = -\partial_{sss}^3 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{sst}^3 x_{k_1}^i(0,0) = -\partial_{sst}^3 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{stt}^3 x_{k_1}^i(0,0) = -\partial_{stt}^3 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{ttt}^3 x_{k_1}^i(0,0) = -\partial_{ttt}^3 x_{k_2}^i(0,0), \end{cases} \quad (4.79)$$

$$\begin{cases} \partial_{ssss}^4 x_{k_1}^i(0,0) = \partial_{ssss}^4 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{ssst}^4 x_{k_1}^i(0,0) = \partial_{ssst}^4 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{sstt}^4 x_{k_1}^i(0,0) = \partial_{sstt}^4 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{sttt}^4 x_{k_1}^i(0,0) = \partial_{sttt}^4 x_{k_2}^i(0,0), \\ \partial_{tttt}^4 x_{k_1}^i(0,0) = \partial_{tttt}^4 x_{k_2}^i(0,0). \end{cases} \quad (4.80)$$

Étudions maintenant la première des intégrales du membre de droite dans (4.70). L'expression de E_5^1 est donnée par (4.49),

$$\begin{aligned} E_5^1 &= x_s^2(0,0) G_t^3(s,t) + x_t^3(0,0) G_s^2(s,t) - x_s^3(0,0) G_t^2(s,t) - x_t^2(0,0) G_s^3(s,t) \\ &+ \{s x_{ss}^2(0,0) + t x_{st}^2(0,0)\} (H_t^3(s,t) + G_t^3(s,t)) \\ &+ \{s x_{st}^3(0,0) + t x_{tt}^3(0,0)\} (H_s^2(s,t) + G_s^2(s,t)) \\ &- \{s x_{ss}^3(0,0) + t x_{st}^3(0,0)\} (H_t^2(s,t) + G_t^2(s,t)) \\ &- \{s x_{st}^2(0,0) + t x_{tt}^2(0,0)\} (H_s^3(s,t) + G_s^3(s,t)). \end{aligned} \quad (4.81)$$

On a

$$G^3(s,t) = \frac{1}{24} \left\{ \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 x^3(0,0) - \sum_{j=1}^6 \left\{ \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 x^3(0,0) \right\} L_j(s,t) \right\}, \quad (4.82)$$

d'où, en dérivant

$$\begin{aligned} G_t^3(s,t) &= \frac{1}{24} \left\{ 4s^3 x_{ssst}^3(0,0) + 12s^2 t x_{sstt}^3(0,0) + 12st^2 x_{sttt}^3(0,0) + 4t^3 x_{tttt}^3(0,0) \right\} \\ &- \frac{1}{24} \sum_{j=1}^6 \left\{ s_j^4 x_{ssss}^3(0,0) + 4s_j^3 t_j x_{ssst}^3(0,0) + 6s_j^2 t_j^2 x_{sstt}^3(0,0) \right. \\ &\quad \left. + 4s_j t_j^3 x_{sttt}^3(0,0) + t_j^4 x_{tttt}^3(0,0) \right\} \partial_t L_j(s,t). \end{aligned} \quad (4.83)$$

En utilisant les relations (4.76) – (4.80) on obtient l'égalité

$$G_t^3(s,t)|_{k_1} = G_t^3(s,t)|_{k_2}, \quad (4.84)$$

et par suite,

$$x_s^2(0,0) G_t^3(s,t)|_{k_1} = -x_s^2(0,0) G_t^3(s,t)|_{k_2}. \quad (4.85)$$

On vérifie de la même manière que

$$\begin{aligned} x_t^3(0,0) G_s^2(s,t)|_{k_1} &= -x_t^3(0,0) G_s^2(s,t)|_{k_2}, \\ x_s^3(0,0) G_t^2(s,t)|_{k_1} &= -x_s^3(0,0) G_t^2(s,t)|_{k_2}, \\ x_t^2(0,0) G_s^3(s,t)|_{k_1} &= -x_t^2(0,0) G_s^3(s,t)|_{k_2}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

On a ainsi montré que, pour deux triangles symétriques \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} , les quatre premiers termes dans l'expression de E_5^1 secompensent mutuellement. Étudions les autres termes dans (4.81). Remarquons que les termes faisant intervenir les dérivées partielles de G^i sont d'ordre 6. Il suffit donc d'étudier le comportement des produits faisant intervenir les dérivées partielles de $H^i(s,t)$ tel $x_{ss}^2(0,0)H_t^3(s,t)$.

On a

$$H^3(s,t) = \frac{1}{6} \left\{ \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 x^3(0,0) - \sum_{j=1}^6 \left\{ \left(s_j \frac{\partial}{\partial s} + t_j \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 x^3(0,0) \right\} L_j(s,t) \right\}, \quad (4.87)$$

d'où en dérivant

$$\begin{aligned} H_t^3(s,t) &= \frac{1}{6} \left\{ 3s^2 x_{sst}^3(0,0) + 6st x_{stt}^3(0,0) + 3t^2 x_{ttt}^3(0,0) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \left\{ s_j^3 x_{sss}^3(0,0) + 3s_j^2 t_j x_{sst}^3(0,0) + 3s_j t_j^2 x_{stt}^3(0,0) + t_j^3 x_{ttt}^3(0,0) \right\} \partial_t L_j(s,t). \end{aligned} \quad (4.88)$$

En utilisant les relations (4.76) – (4.80) on obtient

$$H_t^3(s,t)|_{k_1} = -H_t^3(s,t)|_{k_2}, \quad (4.89)$$

puis,

$$x_{ss}^2(0,0)H_t^3(s,t)|_{k_1} = -x_{ss}^2(0,0)H_t^3(s,t)|_{k_2}. \quad (4.90)$$

Un calcul similaire peut être effectué avec les autres produits dans (4.81). On obtient finalement, en développant les termes restants

$$E_5(s,t)|_{k_1} + E_5(s,t)|_{k_2} = O(h^6), \quad (4.91)$$

d'où on conclut que

$$\int_{\sigma} \Phi_P(m_{k_1}(0,0)) E_5^1(s,t)|_{k_1} ds dt + \int_{\sigma} \Phi_P(m_{k_2}(0,0)) E_5^1(s,t)|_{k_2} ds dt = O(h^6). \quad (4.92)$$

Il faut ensuite étudier la seconde intégrale du membre de droite dans (4.70), c'est-à-dire l'intégrale des deux fonctions

$$s \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_s m_k(0,0) E_4^1(s,t) \quad (4.93)$$

et

$$t \nabla \Phi_P(m_k(0,0)) \cdot \partial_t m_k(0,0) E_4^1(s,t). \quad (4.94)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} E_4^1(s, t) &= x_s^2(0, 0)H_t^3(s, t) + x_t^3(0, 0)H_s^2(s, t) \\ &\quad - x_s^3(0, 0)H_t^2(s, t) - x_t^2(0, 0)H_s^3(s, t). \end{aligned} \quad (4.95)$$

On a établi, voir (4.89), que

$$\begin{aligned} H_s^i(s, t)|_{k_1} &= -H_s^i(s, t)|_{k_2}, \\ H_t^i(s, t)|_{k_1} &= -H_t^i(s, t)|_{k_2}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

et que, voir (4.76) et (4.77),

$$\begin{aligned} x_s^i(0, 0)|_{k_1} &= -x_s^i(0, 0)|_{k_2}, \\ x_t^i(0, 0)|_{k_1} &= -x_t^i(0, 0)|_{k_2}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

On a donc

$$E_4^1(s, t)|_{k_1} = E_4^1(s, t)|_{k_2}. \quad (4.98)$$

D'autre part, d'après (4.74), (4.76) et (4.77),

$$\begin{aligned} m_{k_1}(0, 0) &= m_{k_2}(0, 0), \\ \partial_t m_{k_1}(0, 0) &= -\partial_t m_{k_2}(0, 0), \\ \partial_s m_{k_1}(0, 0) &= -\partial_s m_{k_2}(0, 0). \end{aligned} \quad (4.99)$$

On a donc

$$\begin{aligned} &s \nabla \Phi_P(m_{k_1}(0, 0)) \cdot \partial_s m_{k_1}(0, 0) + t \nabla \Phi_P(m_{k_1}(0, 0)) \cdot \partial_t m_{k_1}(0, 0) \\ &= -s \nabla \Phi_P(m_{k_2}(0, 0)) \cdot \partial_s m_{k_2}(0, 0) - t \nabla \Phi_P(m_{k_2}(0, 0)) \cdot \partial_t m_{k_2}(0, 0). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Combinant (4.98) et (4.100), il est alors immédiat que,

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma} \{s \nabla \Phi_P(m_{k_1}(0, 0)) \cdot \partial_s m_{k_1}(0, 0) \\ &\quad + t \nabla \Phi_P(m_{k_1}(0, 0)) \cdot \partial_t m_{k_1}(0, 0)\} E_4^1(s, t)|_{k_1} \, ds \, dt \\ &+ \int_{\sigma} \{s \nabla \Phi_P(m_{k_2}(0, 0)) \cdot \partial_s m_{k_2}(0, 0) \\ &\quad + t \nabla \Phi_P(m_{k_2}(0, 0)) \cdot \partial_t m_{k_2}(0, 0)\} E_4^1(s, t)|_{k_2} \, ds \, dt = 0. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Ainsi, des estimations (4.92) et (4.101), on obtient

$$\Delta_{k_1}^1 + \Delta_{k_2}^1 = O(h^6) \quad (4.102)$$

et par suite, voir (4.68),

$$e_{1,k_1}^1 + e_{1,k_2}^1 = O(h^6). \quad (4.103)$$

Un calcul analogue pour les autres composantes nous donne

$$e_{1,k_1} + e_{1,k_2} = O(h^6). \quad (4.104)$$

Pour obtenir l'estimation annoncée pour E_1 , nous sommes sur les triangles de D . La triangulation \widehat{T}_h de D possède N éléments. D'après le lemme 4.2.3, on peut réaliser $O(N)$ paires de triangles symétriques. Pour une paire de triangles nous venons de montrer que l'erreur est en $O(h^6)$, alors que pour un triangle pris isolément cette erreur est en $O(h^5)$. Les paires de triangles symétriques vont fournir une erreur globale proportionnelle à $N h^6 = O(h^4)$. Les $O(\sqrt{N})$ triangles qui n'ont pas été appariés vont fournir une erreur globale proportionnelle à $\sqrt{N} h^5 = O(h^4)$. On peut résumer en écrivant successivement

$$\begin{aligned}
 E_1(P) &= \sum_{k=1}^N e_{1,k}(P) \\
 &= \sum_{\substack{\text{triangles} \\ \text{symétriques}}} e_{1,k}(P) + \sum_{\substack{\text{triangles} \\ \text{non-appariés}}} e_{1,k}(P) \\
 &= O(N) O(h^6) + O(\sqrt{N}) O(h^5) \\
 &= O(h^{-2})O(h^6) + O(h^{-1})O(h^5) \\
 &= O(h^4).
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

□

4.2.4 Majoration du terme E_2

Lemme 4.2.5 *On suppose avoir un maillage structuré de D . Le comportement du terme E_2 dans (4.26) en fonction du paramètre h est donné par*

$$E_2(P) = O(h^4).$$

Preuve. On écrit

$$E_2(P) = \sum_{k=1}^N e_{2,k}(P) \tag{4.106}$$

avec

$$e_{2,k}(P) = \int_{\sigma} \{ \Phi_P(m_k(s,t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) \} (\partial_s \tilde{m}_k(s,t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s,t)) \, ds \, dt. \tag{4.107}$$

Effectuons un développement de Taylor de la fonction Φ_P autour de $\tilde{m}_k(s,t)$. On obtient,

$$\Phi_P(m_k(s,t)) = \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) + \nabla \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) \cdot (m_k(s,t) - \tilde{m}_k(s,t)) + O(h^6). \tag{4.108}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \Phi_P(m_k(s,t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) &= \nabla \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) \cdot (m_k - \tilde{m}_k) + O(h^6) \\
 &= (x^1(s,t) - \tilde{x}^1(s,t)) \partial_1 \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) + (x^2(s,t) - \tilde{x}^2(s,t)) \partial_2 \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) \\
 &\quad + (x^3(s,t) - \tilde{x}^3(s,t)) \partial_3 \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) + O(h^6).
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Effectuons ensuite un développement de Taylor de la fonction $\partial_i \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t))$ au voisinage de $(0,0)$,

$$\partial_i \Phi_P(\tilde{m}_k(s,t)) = \partial_i \Phi_P(\tilde{m}_k(0,0)) + O(h). \tag{4.110}$$

D'autre part, d'après (4.38), on a

$$(x^i(s, t) - \tilde{x}^i(s, t)) = H^i(s, t) + O(h^4) = O(h^3), \quad (4.111)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \Phi_P(m_k(s, t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s, t)) &= \left(H^1(s, t) + O(h^4) \right) (\partial_1 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) + 0(h)) \\ &\quad + \left(H^2(s, t) + O(h^4) \right) (\partial_2 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) + 0(h)) \\ &\quad + \left(H^3(s, t) + O(h^4) \right) (\partial_3 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) + 0(h)) \\ &= H^1(s, t) \partial_1 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) \\ &\quad + H^2(s, t) \partial_2 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) \\ &\quad + H^3(s, t) \partial_3 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) + O(h^4) \\ &= O(h^3). \end{aligned} \quad (4.112)$$

D'autre part,

$$\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) = \partial_s \tilde{m}_k(0, 0) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(0, 0) + O(h^3) = O(h^2). \quad (4.113)$$

On obtient donc pour un triangle,

$$e_{2,k}(P) = O(h^5) \quad (4.114)$$

et en sommant sur les N triangles du maillage

$$E_2(P) = O(h^3). \quad (4.115)$$

Ici encore, pour obtenir l'estimation annoncée nous allons devoir étudier l'erreur pour une paire de triangles symétriques. Nous allons montrer que si \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} sont deux triangles symétriques, alors $e_{2,k_1}(P) + e_{2,k_2}(P) = O(h^6)$.

Partant de $e_{2,k}$ donné en (4.107), on utilise (4.112) et (4.113) pour obtenir l'expression

$$\begin{aligned} e_{2,k}(P) &= - \int_{\sigma} \left\{ H^1(s, t) \partial_1 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) + H^2(s, t) \partial_2 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) \right. \\ &\quad \left. + H^3(s, t) \partial_3 \Phi_P(\tilde{m}_k(0, 0)) \right\} \left\{ \partial_s \tilde{m}_k(0, 0) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(0, 0) \right\} ds dt + O(h^6). \end{aligned} \quad (4.116)$$

On vérifie en utilisant (4.39) et (4.79) que

$$H^i(s, t)|_{k_1} = -H^i(s, t)|_{k_2}. \quad (4.117)$$

On vérifie également facilement, en utilisant (4.28) et (4.30), que

$$\partial_s m_{k_1}(0, 0) \wedge \partial_t m_{k_1}(0, 0) = \partial_s m_{k_2}(0, 0) \wedge \partial_t m_{k_2}(0, 0). \quad (4.118)$$

Ainsi, si l'on considère deux triangles symétriques \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} , l'intégrant dans (4.116) provenant du triangle \widehat{K}_{k_1} est de signe opposé à celui provenant du triangle \widehat{K}_{k_2} . Autrement dit,

$$e_{2,k_1}(P) + e_{2,k_2}(P) = O(h^6). \quad (4.119)$$

On renouvelle alors le raisonnement effectué pour l'estimation de E_1 . On obtient finalement l'estimation

$$E_2(P) = O(h^4). \quad (4.120)$$

□

4.2.5 Estimation de l'erreur

Proposition 4.2.2 *On suppose avoir un maillage structuré de D . Alors l'erreur commise en approchant la surface Σ par interpolation d'ordre 2 pour calculer l'intégrale*

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}'}{r^3} \right) \vec{n} \, ds$$

se comporte en $O(h^4)$,

$$E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h(P)| = O(h^4).$$

Preuve. Nous avons montré que l'erreur pouvait s'écrire

$$E(P) = E_1(P) + E_2(P) \quad (4.121)$$

où E_1, E_2 donnés par (4.26). Les termes E_1 et E_2 ont été estimés aux lemmes 4.2.4 et 4.2.5. □

4.2.6 Comportement de l'erreur pour un point proche de la surface

Dans l'étude qui vient d'être effectuée, nous avons étudié le comportement des différents termes en fonction du paramètre h seul. Il est important de remarquer que la fonction Φ_P se comporte en $1/d^2$ où d est la distance du point P à la surface Σ . Aussi, si le point P est proche de la surface Σ , disons $d = O(h)$, il convient de prendre en compte ce comportement dans l'étude de l'erreur.

Pour tout triangle $K \in T_h$ nous notons d_k la distance de P au triangle K et

$$d = \min_{K \in T_h} d_k.$$

Reprenons alors l'étude des deux termes d'erreur E_1 et E_2 en (4.26). Nous conservons les notations introduites précédemment.

Lemme 4.2.6 *Si le point P est à une distance d de la surface Σ tel que $d = O(h)$ alors le comportement du terme E_1 dans (4.26) est donné par*

$$E_1(P) = O(h^2).$$

Preuve. Le développement de Taylor (4.65) de $\Phi_P \circ m_k$ au voisinage de $(0, 0)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_P(m_k(s, t)) &= \Phi_P(m_k(0, 0)) + s \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_s m_k(0, 0) \\ &\quad + t \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_t m_k(0, 0) + O\left(\frac{h^2}{d_k^4}\right), \end{aligned} \quad (4.122)$$

le premier terme du membre de droite se comportant en $O\left(\frac{1}{d_k^2}\right)$, les deux suivants en $O\left(\frac{h}{d_k^3}\right)$.

On obtient alors pour (4.68),

$$e_{1,k}^1(P) = O\left(\frac{h^5}{d_k^3}\right). \quad (4.123)$$

Il reste alors à sommer sur les triangles de la triangulation pour obtenir l'estimation d'erreur pour E_1 . Tout d'abord, pour les triangles $K \in T_h$ "très" éloignés du point P , i.e. $d_k = O(1)$, on effectue à nouveau la sommation comme pour (4.105). On obtient une erreur globale en $O(h^4)$ pour ces triangles. Intéressons-nous aux autres triangles, situés à une distance $d_k = O(h)$ du point P . On note K_0 le triangle vérifiant

$$d = \text{dist}(P, \Sigma) = \min_{K \in T_h} d_k = \text{dist}(P, K_0), \quad (4.124)$$

et \widehat{K}_0 le triangle correspondant dans la triangulation \widehat{T}_h . On classe alors ces triangles en fonction de leur distance au point P , ou ce qui revient au même, en fonction de leur distance à K_0 . Plus précisément, on appelle *voisinage d'ordre n* de \widehat{K}_0 l'ensemble V_n des triangles $\widehat{K} \in \widehat{T}_h$ situés à une distance r_k de \widehat{K}_0 tel que

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) h \leq r_k \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) h.$$

On peut vérifier que le nombre de triangles dans le voisinage d'ordre n est une fonction affine de n . On a l'approximation suivante

$$\begin{aligned} d_k^2 &\approx r_k^2 + d^2 \\ &\approx n^2 h^2 + c^2 h^2 = (n^2 + c^2) h^2. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Sommons l'erreur sur chaque triangle en respectant les voisinages

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\widehat{K} \in V_n} e_{1,k}(P) &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\widehat{K} \in V_n} O\left(\frac{h^5}{d_k^3}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} (a n + b) O\left(\frac{h^5}{d_k^3}\right) \\ &= O(h^2). \end{aligned} \quad (4.126)$$

□

Lemme 4.2.7 *Si le point P est à une distance d de la surface Σ tel que $d = O(h)$ alors le comportement du terme E_2 dans (4.26) est donné par*

$$E_2(P) = O(h^2).$$

Preuve. On a

$$E_2(P) = \sum_{k=1}^N e_{2,k}(P) \quad (4.127)$$

avec

$$e_{2,k} = \int_{\sigma} \{\Phi_P(m_k(s, t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s, t))\} (\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)) \, ds \, dt. \quad (4.128)$$

On peut vérifier, en reprenant les calculs ayant permis d'aboutir à (4.112), que,

$$\Phi_P(m_k(s, t)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(s, t)) = O\left(\frac{h^3}{d_k^3}\right). \quad (4.129)$$

D'autre part, nous avons, voir (4.113),

$$\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) = \partial_s \tilde{m}_k(0, 0) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(0, 0) + O(h^3) = O(h^2). \quad (4.130)$$

Ainsi,

$$e_{2,k}(P) = O\left(\frac{h^5}{d_k^3}\right). \quad (4.131)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer à nouveau la procédure concernant la sommation sur les différents triangles utilisée au cours de la preuve du lemme précédent. \square

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 4.2.3 *Si le point P est à une distance d de la surface Σ tel que $d = O(h)$, l'erreur commise en approchant la surface Σ par interpolation d'ordre 2 pour calculer*

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{n} \, ds$$

se comporte en $O(h^2)$,

$$E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h(P)| = O(h^2).$$

4.3 Utilisation d'une formule de quadrature numérique

4.3.1 Formule de quadrature

Dans cette partie, nous étudions la mise en œuvre d'une formule de quadrature numérique pour évaluer (4.17). Nous utilisons pour cela la formule de quadrature élémentaire

$$\int_{\sigma} f(s, t) \, ds \, dt = \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j f(u_j) \quad (4.132)$$

où les $\omega_j \in \mathbb{R}$ sont les poids et les $u_j = (s_j, t_j) \in \sigma$ les nœuds de quadrature.

On désigne par μ l'ordre de la formule de quadrature (la formule intègre de manière exacte les polynômes de degré inférieur ou égal à μ mais pas les polynômes de degré $\mu + 1$). Signalons que les nœuds de quadrature et les nœuds d'interpolation pour la surface Σ ne sont pas nécessairement les mêmes. Construisons la formule de quadrature composée. On a, voir (4.17),

$$\begin{aligned} \vec{B}_h(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_h} \Phi(P, Q) \tilde{n}(Q) \, ds(Q) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\tilde{K} \in \mathcal{T}_h} \iint_{\tilde{K}} \Phi(P, Q) \tilde{n}(Q) \, ds(Q) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \iint_{\sigma} \Phi(P, \tilde{m}_k(s, t)) (\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)) \, ds \, dt. \end{aligned} \quad (4.133)$$

En utilisant la formule de quadrature (4.132), on calcule l'approximation suivante de l'induction magnétique secondaire

$$\vec{B}_h^\mu(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi(P, \tilde{m}_k(u_j)) (\partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j)). \quad (4.134)$$

4.3.2 Étude de l'erreur

L'erreur liée à l'approximation $\vec{B}_h^\mu(P)$ de l'induction magnétique secondaire $\vec{B}(P)$ vaut

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s, t)) (\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)) \, ds \, dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi_P(\tilde{m}_k(u_j)) (\partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j)). \end{aligned} \quad (4.135)$$

On décompose E sous la forme

$$E = E_0 + E_1 + E_2 \quad (4.136)$$

avec

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} \Phi_P(m_k(s, t)) (\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)) \, ds \, dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi_P(m_k(u_j)) (\partial_s m_k(u_j) \wedge \partial_t m_k(u_j)), \\ E_1 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi_P(m_k(u_j)) \{ \partial_s m_k(u_j) \wedge \partial_t m_k(u_j) - \partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j) \}, \\ E_2 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \{ \Phi_P(m_k(u_j)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(u_j)) \} (\partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j)). \end{aligned}$$

Le terme E_0 s'interprète simplement; il s'agit de l'erreur de quadrature. Les autres termes sont les analogues de ceux introduits à la section 4.2 mais avec une formule de quadrature numérique.

On a un premier résultat concernant l'erreur de quadrature qui généralise le résultat classique de la dimension 1 : si la formule de quadrature est d'ordre μ , l'erreur de quadrature se comporte en $O(h^{\mu+1})$, h désignant le pas de discrétisation [7]. Nous allons montrer que sous l'hypothèse d'un maillage structuré et sous certaines hypothèses sur la formule de quadrature la convergence est accrue en $O(h^{\mu+2})$. Nous reprenons pour cette étude d'erreur les notations introduites dans les sections précédentes.

Étude de l'erreur de quadrature

Proposition 4.3.1 *On se place dans l'hypothèse d'un maillage structuré. L'erreur de quadrature E_0 se comporte en $O(h^{\tilde{\mu}})$*

$$\text{où } \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu + 2 & \text{si } \mu \text{ est pair,} \\ \mu + 1 & \text{si } \mu \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. Considérons tout d'abord le triangle générique \widehat{K} et notons G l'intégrant dans (4.135),

$$G(s, t) = \Phi_P(m_k(s, t)) (\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)). \quad (4.137)$$

Si (a_1, b_1) , (a_2, b_2) et (a_3, b_3) désignent les coordonnées des trois sommets de \widehat{K} , nous avons

$$m_k(s, t) = F(a_1 + s(a_3 - a_1) + t(a_2 - a_1), b_1 + s(b_3 - b_1) + t(b_2 - b_1)).$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{k=1}^N \int_{\sigma} G(s, t) \, ds \, dt - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j G(s_j, t_j) \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\sigma} G(s, t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j G(s_j, t_j) \right\}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Effectuons un développement de Taylor de G à l'ordre μ , au voisinage de l'origine,

$$G(s, t) = H_{\mu}(s, t) + K_{\mu}^1(s, t) + K_{\mu}^2(s, t), \quad (4.139)$$

avec

$$\begin{aligned} H_{\mu}(s, t) &= \sum_{k=0}^{\mu} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^k G(0, 0), \\ K_{\mu}^1(s, t) &= \frac{1}{(\mu + 1)!} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\mu+1} G(0, 0), \\ K_{\mu}^2(s, t) &= \frac{1}{(\mu + 1)!} \int_0^1 (1 - \nu)^{\mu+1} \frac{d^{\mu+2} G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) \, d\nu. \end{aligned}$$

$H_\mu(s, t)$ est un polynôme de degré μ , il est donc intégré de façon exacte par la formule de quadrature. Le terme E_0 s'écrit donc

$$E_0 = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\sigma} K_{\mu}^1(s, t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j K_{\mu}^1(s_j, t_j) \right\} + \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\sigma} K_{\mu}^2(s, t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j K_{\mu}^2(s_j, t_j) \right\}. \quad (4.140)$$

Posons

$$e_{k, \mu}^2 = \int_{\sigma} K_{\mu}^2(s, t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j K_{\mu}^2(s_j, t_j) \quad (4.141)$$

$$= \frac{1}{(\mu+1)!} \int_0^1 (1-\nu)^{\mu+1} \left\{ \int_{\sigma} \frac{d^{\mu+2}G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \frac{d^{\mu+2}G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s_j, \nu t_j) \right\} \, d\nu.$$

Nous allons montrer que

$$\frac{d^{\mu+2}G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) = O(h^{\mu+4}), \quad (4.142)$$

on aura alors immédiatement l'estimation

$$e_{k, \mu}^2 = O(h^{\mu+4}).$$

On pourrait en fait vérifier que

$$\max_{\substack{0 \leq \nu \leq 1 \\ (s, t) \in \sigma}} \left| \frac{d^{\mu+2}G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) \right| \leq Ch^{\mu+4} \max_{\substack{i+j=\mu+2 \\ i, j \geq 0}} \max_{(\hat{x}, \hat{y}) \in D} \left| \frac{\partial^{\mu+2} \Phi_P}{\partial x^i \partial y^j}(F(\hat{x}, \hat{y})) \right|. \quad (4.143)$$

On a

$$\frac{d^{\mu+2}G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j=\mu+2}} s^i t^j \frac{\partial^{\mu+2}G}{\partial s^i \partial t^j}(\nu s, \nu t). \quad (4.144)$$

Considérons le terme générique de la somme précédente développé par la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mu+2}G}{\partial s^i \partial t^j}(s, t) &= (\partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t)) \frac{\partial^{\mu+2} \Phi_P}{\partial s^i \partial t^j}(m_k(s, t)) + \dots \\ &\dots + \Phi_P(m_k(s, t)) \frac{\partial^{\mu+2}}{\partial s^i \partial t^j} \{ \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) \}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Pour la valeur entière ζ , par dérivation composée, on peut vérifier que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\zeta} \Phi_P}{\partial s^i \partial t^j}(m_k(s, t)) &= \sum_{\substack{l, m \geq 0 \\ l+m=\zeta}} p(a_3 - a_1, a_2 - a_1, b_3 - b_1, b_2 - b_1) \\ &\frac{\partial^{\zeta} \Phi_P \circ F}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{y}^m}(a_1 + s(a_3 - a_1) + t(a_2 - a_1), b_1 + s(b_3 - b_1) + t(b_2 - b_1)), \end{aligned} \quad (4.146)$$

où p est un polynôme homogène de degré ζ des 4 variables. Il est alors immédiat que

$$\frac{\partial^\zeta \Phi_P}{\partial s^i \partial t^j}(m_k(s, t)) = O(h^\zeta). \quad (4.147)$$

D'autre part, en utilisant (4.29) et (4.31), on obtient

$$\frac{\partial^{\mu+2-\zeta}}{\partial s^i \partial t^j} \{ \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) \} = O(h^{\mu+4-\zeta}). \quad (4.148)$$

Finalement on obtient le comportement

$$\frac{d^{\mu+2} G}{d\nu^{\mu+2}}(\nu s, \nu t) = O(h^{\mu+4}) \quad (4.149)$$

et l'estimation pour $e_{k,\mu}^2$ est alors immédiate.

Intéressons-nous maintenant au terme

$$e_{k,\mu}^1 = \int_\sigma K_\mu^1(s, t) \, ds \, dt - \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j K_\mu^1(s_j, t_j). \quad (4.150)$$

En argumentant comme précédemment on peut vérifier que $e_{k,\mu}^1 = O(h^{\mu+3})$. Ce résultat n'est pas suffisant pour démontrer la proposition dans le cas μ pair. Nous allons montrer que si \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} sont deux triangles symétriques et si μ est un nombre pair alors

$$e_{k_1,\mu}^1 + e_{k_2,\mu}^1 = 0. \quad (4.151)$$

Pour cela, il convient d'étudier chacun des termes de la somme

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\mu+1} G(0, 0) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=\mu+1}} C_i^{\mu+1} s^i t^j \frac{\partial^{\mu+1} G}{\partial s^i \partial t^j}(0, 0). \quad (4.152)$$

Raisonnons sur le premier terme, on se convaincra sans peine que l'argument est utilisable avec les autres termes de la somme. En utilisant la formule de Liebnitz, on développe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mu+1} G}{\partial s^{\mu+1}}(0, 0) &= (\partial_s m_k(0, 0) \wedge \partial_t m_k(0, 0)) \frac{\partial^{\mu+1} \Phi_P}{\partial s^{\mu+1}}(m_k(0, 0)) + \dots \\ &\dots + \Phi_P(m_k(0, 0)) \frac{\partial^{\mu+1}}{\partial s^{\mu+1}} \{ \partial_s m_k(0, 0) \wedge \partial_t m_k(0, 0) \}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Prenons le terme générique

$$\frac{\partial^\zeta \Phi_P}{\partial s^\zeta}(m_k(0, 0)) = \sum_{\substack{l,m \geq 0 \\ l+m=\zeta}} \left\{ C_l^\zeta (a_3 - a_1)^l (b_3 - b_1)^m \right\} \frac{\partial^\zeta \Phi_P \circ F}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{y}^m}(a_1, b_1) \quad (4.154)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mu+1-\zeta}}{\partial s^{\mu+1-\zeta}} \{ \partial_s m_k(0,0) \wedge \partial_t m_k(0,0) \} &= \frac{\partial^{\mu+2-\zeta} m_k}{\partial s^{\mu+2-\zeta}}(0,0) \wedge \frac{\partial m_k}{\partial t}(0,0) + \dots \\ &\dots + \frac{\partial m_k}{\partial s}(0,0) \wedge \frac{\partial^{\mu+2-\zeta} m_k}{\partial s^{\mu+1} \partial t^\zeta}(0,0), \end{aligned} \quad (4.155)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n m_k}{\partial s^{\eta_1} \partial t^{\eta_2}}(0,0) &= \sum_{\substack{l_1, m_1 \geq 0 \\ l_1 + m_1 = \eta_1}} \sum_{\substack{l_2, m_2 \geq 0 \\ l_2 + m_2 = \eta_2}} p(a_3 - a_1, a_2 - a_1, b_3 - b_1, b_2 - b_1) \\ &\times \frac{\partial^\zeta F}{\partial \hat{x}^{l_1+l_2} \partial \hat{y}^{m_1+m_2}}(a_1, b_1), \end{aligned} \quad (4.156)$$

avec p polynôme homogène de degré η .

Considérons alors deux triangles symétriques \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} . On a les relations suivantes entre les coordonnées des sommets, voir (4.62) et (4.71),

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = -(a_1 - a_4) & , & a_1 - a_3 = -(a_1 - a_5), \\ b_1 - b_2 = -(b_1 - b_4) & , & b_1 - b_3 = -(b_1 - b_5). \end{cases} \quad (4.157)$$

On obtient alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial^\zeta \Phi_P}{\partial s^\zeta}(m_{k_2}(0,0)) &= (-1)^\zeta \frac{\partial^\zeta \Phi_P}{\partial s^\zeta}(m_{k_1}(0,0)), \\ \frac{\partial^{\mu+1-\zeta}}{\partial s^{\mu+1-\zeta}} \{ \partial_s m_{k_2}(0,0) \wedge \partial_t m_{k_2}(0,0) \} &= (-1)^{\mu+3-\zeta} \frac{\partial^{\mu+1-\zeta}}{\partial s^{\mu+1-\zeta}} \{ \partial_s m_{k_1}(0,0) \wedge \partial_t m_{k_1}(0,0) \}. \end{cases}$$

On a d'autre part,

$$\Phi_P(m_{k_1}(0,0)) = \Phi_P(m_{k_2}(0,0)) = \Phi_P(S_1) \quad (4.158)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_s m_{k_1}(0,0) \wedge \partial_t m_{k_1}(0,0) &= \partial_s m_{k_2}(0,0) \wedge \partial_t m_{k_2}(0,0) \\ &= \partial_s F(\widehat{S}_1) \wedge \partial_t F(\widehat{S}_1). \end{aligned} \quad (4.159)$$

Ainsi, si μ est pair alors $(-1)^{\mu+1} = (-1)^{\mu+3} = -1$ et d'après (4.153) nous avons

$$\frac{\partial^{\mu+1} G}{\partial s^{\mu+1}}(0,0)|_{k_1} + \frac{\partial^{\mu+1} G}{\partial s^{\mu+1}}(0,0)|_{k_2} = 0. \quad (4.160)$$

Pour conclure, on a une fois de plus recours à la décomposition du maillage en triangles symétriques et triangles non-appariés. Pour une paire de triangles symétriques, si μ est pair, on a une erreur en $O(h^{\mu+4})$. Pour un triangle non apparié, l'erreur se comporte en $O(h^{\mu+3})$. L'erreur globale est ainsi en $O(h^{\mu+2})$ si μ est pair et en $O(h^{\mu+1})$ seulement si μ est impair. \square

Étude des autres termes d'erreur

Lemme 4.3.1 *Si l'ordre de la formule de quadrature μ vérifie $\mu \geq 2$ alors*

$$E_1 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi_P(m_k(u_j)) \{ \partial_s m_k(u_j) \wedge \partial_t m_k(u_j) - \partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j) \} = O(h^4).$$

Preuve. On utilise les expressions (4.65) et (4.66) pour écrire,

$$\begin{aligned} & \Phi_P(m_k(s, t)) \{ \partial_s m_k(s, t) \wedge \partial_t m_k(s, t) - \partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t) \} = \\ & \Phi_P(m_k(0, 0)) \{ E_4(s, t) + E_5(s, t) \} + \{ s \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_s m_k(0, 0) \\ & \quad + t \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_t m_k(0, 0) \} E_4(s, t) + O(h^6). \end{aligned} \quad (4.161)$$

Si $\mu \geq 2$ alors E_4 , qui est un polynôme de degré 2, voir (4.48), est intégré exactement. D'après le lemme 4.2.2, on a donc,

$$\sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j E_4(u_j) = \int_{\sigma} E_4(s, t) \, ds \, dt = 0. \quad (4.162)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \Phi_P(m_k(u_j)) \{ \partial_s m_k(u_j) \wedge \partial_t m_k(u_j) - \partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j) \} \\ & = \sum_{j=1}^{\mu_d} \Phi_P(m_k(0, 0)) E_5(s, t) + \{ s \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_s m_k(0, 0) \\ & \quad + t \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_t m_k(0, 0) \} E_4(s, t) + O(h^6). \end{aligned} \quad (4.163)$$

Pour conclure, on reprend l'argument consistant à distinguer les triangles symétriques de la triangulation. Pour deux triangles symétriques \widehat{K}_{k_1} et \widehat{K}_{k_2} , nous avons montré, voir (4.91), que

$$E_5(s, t)|_{k_1} + E_5(s, t)|_{k_2} = O(h^6), \quad (4.164)$$

et d'après (4.98) et (4.99),

$$\begin{aligned} & - \{ s \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_s m_k(0, 0) + t \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_t m_k(0, 0) \} E_4(s, t)|_{k_1} \\ & = \{ s \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_s m_k(0, 0) + t \nabla \Phi_P(m_k(0, 0)) \cdot \partial_t m_k(0, 0) \} E_4(s, t)|_{k_2}. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Ainsi, en sommant sur les triangles du maillage, en respectant les paires de triangles symétriques, on a $O(\sqrt{N})$ triangles avec une erreur en $O(h^5)$ et $O(N)$ triangles avec une erreur en $O(h^6)$, soit une erreur globale en $O(h^4)$. \square

Lemme 4.3.2

$$E_2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\mu_d} \omega_j \{ \Phi_P(m_k(u_j)) - \Phi_P(\tilde{m}_k(u_j)) \} (\partial_s \tilde{m}_k(u_j) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(u_j)) = O(h^4).$$

Preuve. Il suffit de reprendre les arguments de la section 4.2.4 et de les appliquer au point $(s, t) = u_j$. \square

Estimation de l'erreur

Proposition 4.3.2 *Sous l'hypothèse d'un maillage structuré et si la formule de quadrature (4.132) est d'ordre μ , où μ est un entier supérieur ou égal à 2, alors l'erreur dans l'approximation de l'induction magnétique \vec{B} par la méthode décrite à la section 4.1.2 vérifie*

$$E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h^\mu(P)| = O(h^4).$$

4.3.3 Comportement de l'erreur pour un point proche de la surface: quasi-singularité

À l'instar de ce qui a été fait à la section 4.2.6, nous allons examiner l'estimation d'erreur pour un point "proche" de la surface Σ (situé à une distance $d = O(h)$ de Σ).

Proposition 4.3.3 *Si le point P est à une distance d de la surface Σ telle que $d = O(h)$, l'erreur $E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h^\mu(P)|$ vérifie $E(P) = O(1)$.*

Autrement dit, pour un point proche de la surface Σ , il n'y a plus convergence de la méthode.

Preuve. Les arguments que nous allons utiliser sont analogues à ceux de la section 4.2.6. Nous allons montrer que le terme E_0 dans (4.136) vérifie $E_0 = O(1)$.

Nous reprenons le cheminement de la preuve de la proposition 4.3.1. Toutefois maintenant une dérivée d'ordre α de Φ_P fait apparaître un comportement en $d_k^{-\alpha-2}$. On a l'estimation (4.147) remplacée par

$$\frac{\partial^\zeta \Phi_P}{\partial s^i \partial t^j}(m_k(s, t)) = O\left(\frac{h^\zeta}{d_k^{\zeta+2}}\right). \quad (4.166)$$

Par suite (4.145) nous donne

$$\frac{\partial^{\mu+2} \Phi_P}{\partial s^i \partial t^j}(s, t) = O\left(\frac{h^{\mu+4}}{d_k^{\mu+4}}\right). \quad (4.167)$$

On en déduit immédiatement que

$$e_{k,\mu}^2 = O\left(\frac{h^{\mu+4}}{d_k^{\mu+4}}\right). \quad (4.168)$$

De même on obtient

$$e_{k,\mu}^1 = O\left(\frac{h^{\mu+3}}{d_k^{\mu+3}}\right), \quad (4.169)$$

sans avoir recours à l'argument des triangles symétriques.

En appliquant le procédé de sommation utilisé au cours de la preuve du lemme 4.2.6, on obtient

$$E_0(P) = O(1). \quad (4.170)$$

Les estimations d'erreur pour les termes E_1 et E_2 s'obtiennent de manière immédiate en appliquant les développements de Taylor effectués dans les preuves du lemme 4.2.6 et du lemme 4.2.7 aux points $u_j = (s_j, t_j)$. On obtient les estimations $E_1 = O(h^2)$, $E_2 = O(h^2)$, qui sont du même ordre que celles obtenues à la section 4.2.6 avec une intégration exacte. \square

4.3.4 Traitement de la quasi-singularité

Nous avons mis en évidence que des difficultés numériques liées à l'utilisation d'une formule de quadrature numérique apparaissaient quand le point P se situait à proximité de la surface Σ . Bien que les intégrales ne soient pas à proprement parler singulières, la précision de l'évaluation numérique se dégrade sérieusement en raison de la grande rapidité des variations de l'intégrand au voisinage de la surface (il se comporte en fonction de la distance à la surface r , comme r^{-2}).

Ce type d'intégrales quasi-singulières se retrouve lors de la mise en œuvre des méthodes d'équation intégrale de frontière. On pourra consulter à ce sujet l'article de synthèse de Huang et Cruse [58]. Deux approches sont possibles afin de calculer avec précision les intégrales singulières. La première consiste à utiliser des transformations géométriques (changements de variables) afin d'affaiblir la singularité [58], [93], [67]. La seconde consiste à augmenter le nombre de nœuds de quadrature, soit en augmentant l'ordre de la formule de quadrature [85], soit en divisant le domaine d'intégration [4], [5]. Nous avons adopté cette dernière solution, en raison de la simplicité de sa mise en œuvre et de son efficacité. Nous reprenons une méthode introduite par K.E. Atkinson dans [4], [5]. Cette méthode consiste à distinguer deux types de formules de quadrature en fonction de la distance du point P au triangle \widetilde{K} sur lequel doit être évaluée l'intégrale.

Pour calculer

$$\begin{aligned} I_k(P) &= \iint_{\widetilde{K}} \Phi(P, Q) \tilde{n}(Q) \, ds(Q) \\ &= \iint_{\sigma} \Phi(P, \tilde{m}_k(s, t)) (\partial_s \tilde{m}_k(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}_k(s, t)) \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (4.171)$$

nous nous donnons un paramètre δ et nous distinguons les deux cas suivants: la distance du point P au triangle \widetilde{K} est plus grande que δ ; la distance du point P au triangle \widetilde{K} est plus petite que δ .

– Si $\text{dist}(P, \widetilde{K}) > \delta$, alors l'intégrand est considéré comme étant régulier (on veut dire par là que ni l'intégrand, ni ses dérivées n'ont de fortes variations ou ne deviennent très grands). Dans ce cas, on utilise la formule de quadrature à trois points, du second ordre,

$$\int_{\sigma} f(s, t) \, ds \, dt = \frac{1}{6} \sum_{j=4}^6 f(\rho_j) \quad (4.172)$$

où les nœuds de quadrature ρ_j sont les milieux des arêtes du triangle σ , voir la figure 4.1.

D'après l'étude d'erreur qui a été effectuée nous savons alors que l'erreur globale se comporte en $O(h^4)$. Ce taux de convergence est également observé sur des exemples numériques, voir la section 4.4.

– Si $0 < \text{dist}(P, \widetilde{K}) < \delta$, alors l'intégrand est de type "quasi-singulier"; lorsque le point P est pris proche d'un triangle \widetilde{K} , l'intégrand devient très grand et varie dans de grandes proportions en fonction du point $Q \in \widetilde{K}$. La méthode d'intégration doit être à même de prendre en compte ce comportement quasi-singulier de l'intégrand. Nous avons recours à la formule de quadrature à sept points, d'ordre 5, référencée ($T_2 : 5 - 1$) dans [90] p. 314,

$$\int_{\sigma} f(s, t) \, ds \, dt = \frac{9}{80} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + B \{f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)\} \\ + C \{f(\gamma, \gamma) + f(\gamma, \zeta) + f(\zeta, \zeta)\}, \quad (4.173)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{6 - \sqrt{5}}{21}, \quad \beta = \frac{9 + 2\sqrt{15}}{21}, \\ \gamma = \frac{6 + \sqrt{5}}{21}, \quad \zeta = \frac{9 - 2\sqrt{15}}{21}, \\ B = \frac{155 - \sqrt{15}}{2400}, \quad C = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400}. \end{array} \right.$$

La stratégie d'intégration consiste alors à subdiviser σ en triangles et à approcher l'intégrale sur chacun de ces triangles par la formule de quadrature (4.173). Pour cela on se donne un paramètre de subdivision l . On divise σ de manière régulière en 4^l triangles (on divise chacun des deux côtés de σ parallèles aux axes en 2^l segments de même longueur et on maille σ en triangles en s'appuyant sur ces segments). Après un changement de variables adéquat, l'intégrale sur chacun de ces triangles est transformée en une intégrale sur le triangle de référence σ et est évaluée en utilisant la formule de quadrature (4.173). Ce faisant nous utilisons l'équivalent d'une formule de quadrature à $7 \cdot 4^l$ nœuds.

Soit $I_k^l(P)$ la valeur obtenue en appliquant cette méthode avec le paramètre de subdivision l . On calcule successivement $I_k^0(P), I_k^1(P), \dots$, en s'arrêtant lorsque l'une des deux conditions suivantes est réalisée,

$$(T_1) \quad |I_k^l(P) - I_k^{l-1}(P)| < \varepsilon_a + \varepsilon_r |I_k^l(P)|,$$

$$(T_2) \quad l + 1 > L.$$

Si (T_1) ou (T_2) est vérifié alors $I_k^l(P)$ est acceptée comme approximation de (4.171). Le choix des paramètres $\delta, \varepsilon_a, \varepsilon_r$ et L est un problème crucial. La précision de l'approximation en dépend de façon directe. Les valeurs de ces paramètres ne peuvent être fixées que de manière empirique.

En pratique nous utilisons une méthode légèrement différente de celle qui vient d'être présentée et qui a été introduite dans [8] et [6]. Cette nouvelle méthode est plus facile à mettre en œuvre et aussi efficace. Elle consiste à distinguer non pas deux zones mais un plus grand nombre de zones (toujours en fonction de la distance du point P au triangle sur lequel est réalisé l'intégration) et à imposer à l'avance le nombre de subdivisions du triangle σ à effectuer pour chacune de ces zones. Ceci évite d'avoir à mettre en œuvre le contrôle automatique d'erreur des tests (T_1) et (T_2) . Cette méthode consiste alors à distinguer les cas suivants (on se donne un entier N_d et un réel positif ϱ).

- Si $\text{dist}(P, \widetilde{K}) \leq \varrho$ alors on prend un paramètre de subdivision $l = N_d$.
- Si $\varrho < \text{dist}(P, \widetilde{K}) \leq 2\varrho$ alors on prend un paramètre de subdivision $l = \max\{N_d - 1, 0\}$.
- On poursuit ainsi jusqu'à ce que la distance $\text{dist}(P, \widetilde{K})$ soit suffisamment importante pour que l'on puisse utiliser la formule à trois nœuds (4.172).

Là encore les valeurs des paramètres N_d et ϱ doivent être fixées de manière empirique. Pour fixer ces valeurs nous avons d'une part eu recours à des essais avec le problème test évoqué à la section 4.4.1 qui permet l'étude de l'erreur locale. D'autre part, nous avons effectué des essais avec la sphère pour laquelle une formule analytique pour le champ magnétique induit est connue (on peut ainsi étudier le comportement global de l'erreur). Nous renvoyons à la section 4.4 pour le détail des expériences numériques réalisées. On obtient alors le résultat suivant,

Résultat 4.3.1 *Sous l'hypothèse d'un maillage structuré et en ayant recours à la méthode d'intégration qui vient d'être décrite, l'erreur dans l'approximation de l'induction magnétique \vec{B} est en $O(h^4)$, $\forall P \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$,*

$$E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h^\mu(P)| = O(h^4).$$

Il s'agit là d'un résultat que nous avons observé sur des exemples numériques. On peut tenter de le justifier. Pour un point assez éloigné de la surface Σ nous avons démontré cette affirmation (la formule de quadrature (4.172) est d'ordre 2). Pour un point proche de la surface Σ , seul un petit nombre de triangles posent des problèmes pour l'intégration numérique. Pour la majorité des triangles on a bien convergence en $O(h^4)$. En ayant recours à une technique d'intégration spéciale pour les triangles pour lesquels existent la quasi-singularité, on arrive à obtenir une erreur raisonnable. Ainsi, ces triangles qui contribuaient le plus à l'erreur de quadrature ne produisent plus qu'une erreur comparable à celle provenant de l'intégration sur les triangles éloignés du point P .

4.4 Expériences numériques

Notre objectif dans cette section est de mettre en évidence numériquement certains des phénomènes évoqués dans les parties précédentes.

4.4.1 Un problème test

Nous considérons le triangle isoparamétrique d'ordre 2, \widetilde{K}_0 , dont les sommets sont $S_1(1, 0, 0)$, $S_2(0, 1, 0)$, $S_3(0, 0, 1)$ et dont les nœuds sont, outre les sommets, les points $S_4(c, c, 0)$, $S_5(0, c, c)$, $S_6(c, 0, c)$ avec $c = \frac{\delta}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}$. Le paramètre h caractérise la taille du triangle, et le paramètre δ sa courbure.

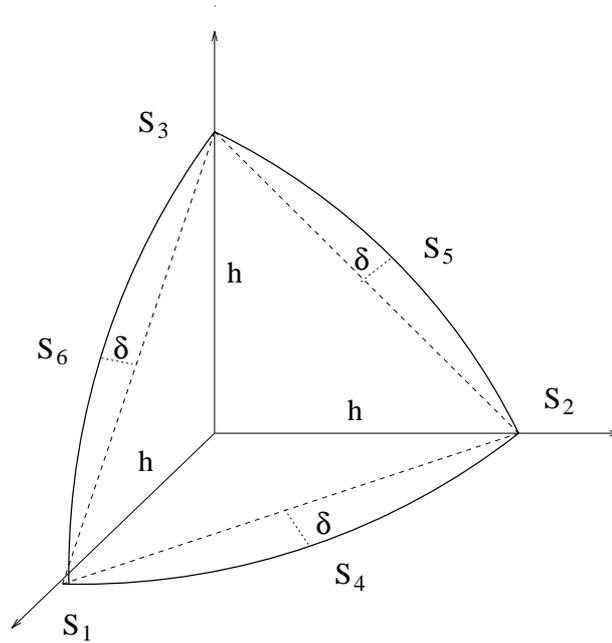


Figure 4.7: le triangle modèle

Nous nous intéressons au calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned} J(x) &= \iint_{\widetilde{K}_0} \frac{1}{r^2}(x, y) \tilde{n}(y) \, ds(y) \\ &= \iint_{\sigma} \frac{1}{r^2}(x, \tilde{m}(s, t)) (\partial_s \tilde{m}(s, t) \wedge \partial_t \tilde{m}(s, t)) \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (4.174)$$

où \tilde{n} désigne la normale au triangle \widetilde{K}_0 et $\tilde{m}(s, t)$ la fonction d'interpolation d'ordre 2,

$$\tilde{m}(s, t) = \sum_{j=1}^6 S_j L_j(s, t) \quad (4.175)$$

où pour $j = 1, \dots, 6$ les L_j sont les polynômes de base de l'interpolation de Lagrange d'ordre 2 sur le triangle σ . Cette intégrale possède des propriétés analogues aux intégrales que nous avons à calculer mais sa valeur exacte peut être obtenue.

4.4.2 Mise en évidence de la quasi-singularité

Nous avons utilisé la formule de quadrature (4.173) pour évaluer l'intégrale (4.174) en des points x situés à des distances variables du triangle \widetilde{K}_0 . En comparant les valeurs calculées aux valeurs exactes (obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple*) on met en évidence une dégradation de la précision du calcul à mesure que le point x se rapproche de \widetilde{K}_0 . Nous présentons à la figure 4.8 l'erreur relative $\frac{|I_{num}(x) - I_{exacte}(x)|}{|I_{exacte}(x)|}$ en fonction de la distance relative $\frac{d}{h}$ au triangle \widetilde{K}_0 .

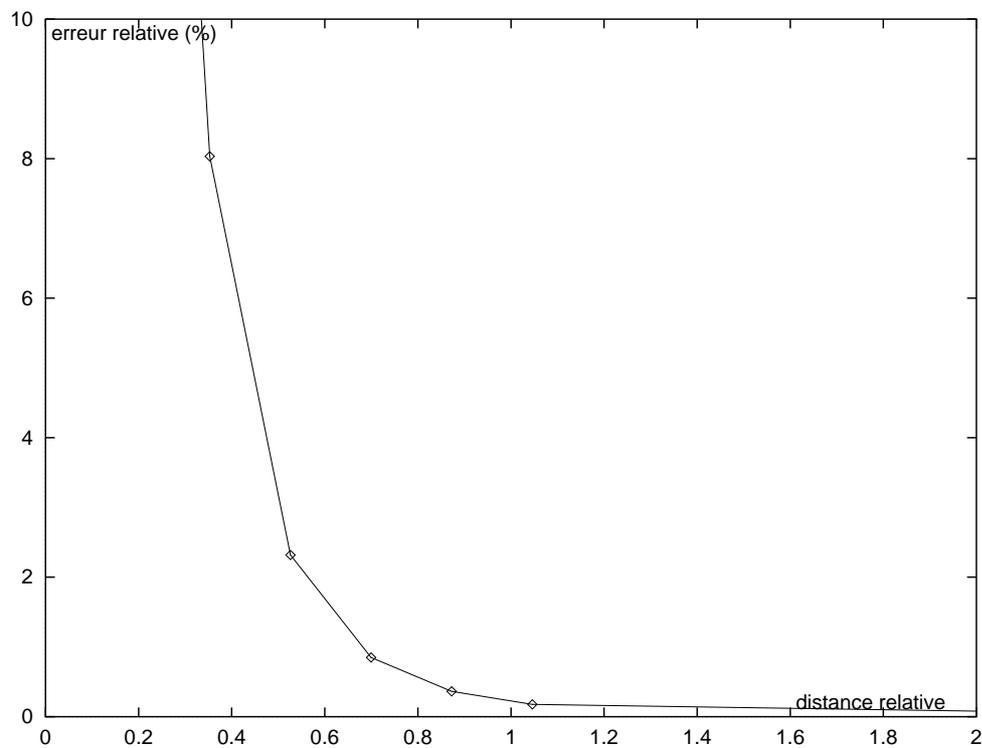


Figure 4.8: mise en évidence de la quasi-singularité.

On observe qu'une formule de quadrature standard donne des résultats acceptables jusqu'à une distance du triangle voisine de la taille h de celui-ci. Pour des points plus proches, la précision se dégrade notablement.

4.4.3 Mise en évidence de la vitesse de convergence

Dans le cas où la surface Σ est une sphère, une formule analytique pour le champ magnétique induit est connue, voir [37] et l'annexe B. Il nous est donc possible d'illustrer sur cet exemple les résultats de convergence obtenus précédemment. Le maillage de la sphère utilisé

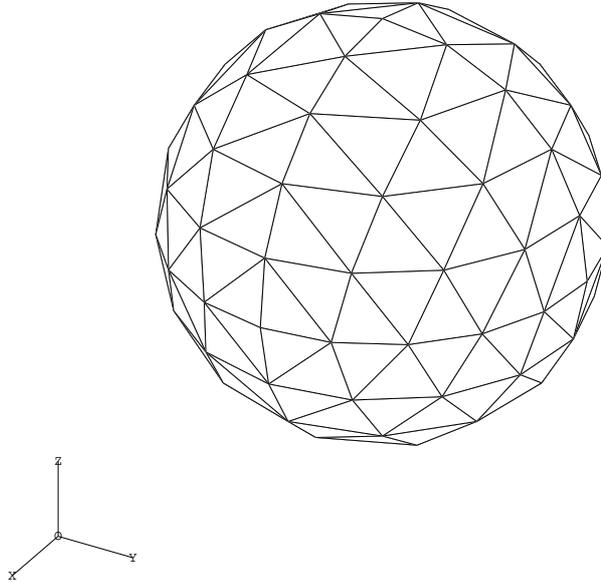


Figure 4.9: maillage de la sphère en 200 triangles.

est présenté à la figure 4.9.

Nous avons montré, proposition 4.3.2, que sous l'hypothèse d'un maillage structuré et si la formule de quadrature (4.132) est d'ordre μ , où μ est un entier pair non nul, alors l'erreur dans l'approximation de l'induction magnétique \vec{B} par la méthode décrite à la section 4.1.2 vérifiait

$$E(P) = |\vec{B}(P) - \vec{B}_h^\mu(P)| = O(h^4).$$

La figure 4.10 représente le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du nombre N de triangles pour un point P situé à 5 fois le rayon de la sphère de la surface Σ . La pente de la droite obtenue vaut -2 . Comme le pas h est proportionnel à $N^{-1/2}$ on a bien la relation annoncée entre E et h .

4.4.4 Étude des différentes formules de quadrature

Nous avons discuté à la section 4.3.4 de la stratégie d'intégration utilisée pour calculer

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} \, ds. \quad (4.176)$$

Lorsque le point P est éloigné de la surface Σ l'intégrale est calculée en utilisant la formule de quadrature à trois points (4.172). Lorsque le point P est proche de la surface Σ la méthode d'intégration numérique pour calculer

$$\iint_K \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} \, ds \quad (4.177)$$

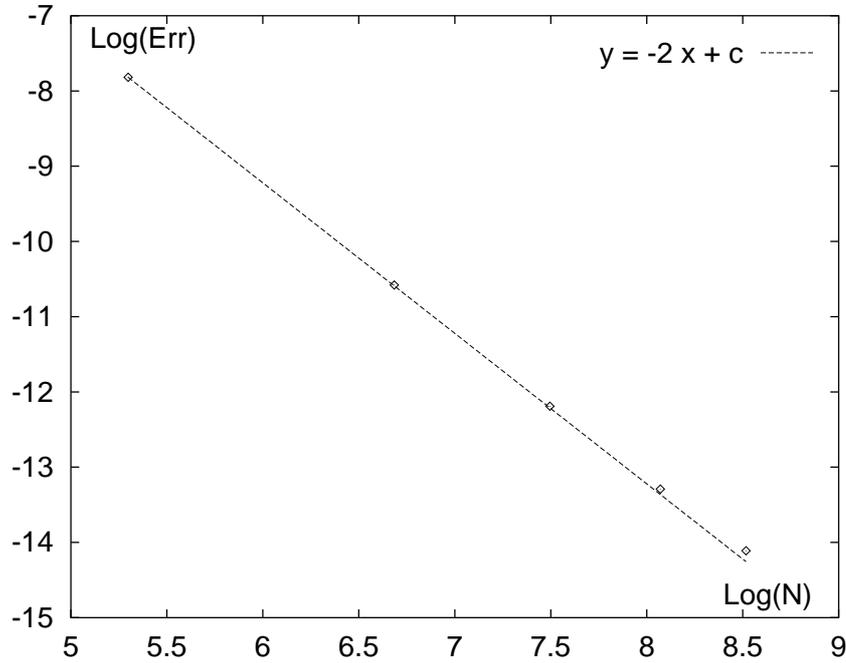


Figure 4.10: erreur en un point éloigné de la surface en fonction du nombre N de triangles.

est basée sur la formule de quadrature à sept points (4.173) avec un redécoupage du domaine d'intégration en 4^l triangles où le paramètre l est ajusté en fonction de la distance de P au triangle K .

Nous avons cherché à étudier la précision de ces différentes formules de quadrature en fonction de la distance de P à la surface Σ . Nous avons mis en œuvre ces formules de quadrature pour calculer le champ magnétique induit par une bille métallique de rayon 1 cm, de susceptibilité magnétique 10^{-3} usi soumise à un champ $B_0 = 1$ Tesla. La surface de la bille a été maillée à l'aide de 680 triangles, le pas du maillage valant approximativement $h = 2.2 \cdot 10^{-3}$ m. Nous avons représenté à la figure 4.11 l'erreur relative en fonction de la distance au centre de la bille pour les différentes formules de quadrature envisagées: formule à trois points (4.172), formule à sept points (4.173) avec différentes valeurs du paramètre l de redécoupage du domaine d'intégration.

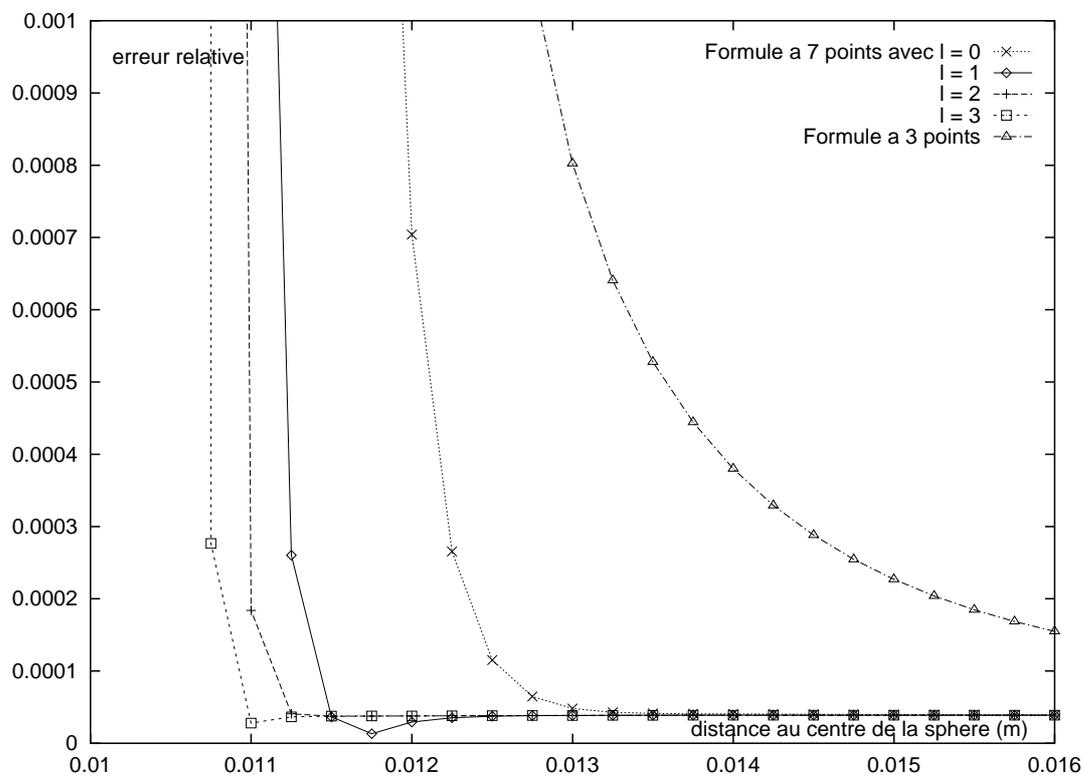


Figure 4.11: erreur relative en fonction de la distance au centre de la bille pour les différentes formules de quadrature envisagées.

Deuxième Partie

Modélisation des artefacts

Chapitre 5

La Résonance Magnétique Nucléaire

La Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) consiste à étudier les propriétés magnétiques de certains noyaux atomiques sous l'action de champs magnétiques. Les premières expériences de RMN ont été réalisées dès 1946 [18], [83]. Bien que le magnétisme nucléaire soit d'origine quantique, il est possible de décrire le comportement de noyaux soumis à des champs magnétiques à l'aide de la mécanique classique. Ce modèle développé par F. Bloch conduit à des résultats justes dès l'instant où l'on s'intéresse à des populations de noyaux très nombreuses et que l'on ne cherche pas à prendre en compte toutes les interactions qui agissent entre noyaux résonants (déplacement chimique, couplage spin-spin ...). Nous souhaitons au cours de ce chapitre donner un aperçu du modèle de Bloch qui permet de décrire de manière relativement simple le phénomène de la résonance magnétique nucléaire. Nous introduisons un certain nombre de notions et de notations qui seront reprises dans les chapitres suivants concernant la modélisation des artefacts. Les notations utilisées sont les notations usuelles en Imagerie par Résonance Magnétique.

5.1 Les équations de Bloch

5.1.1 Principe de la RMN

Les noyaux possédant un nombre impair de nucléons ont un moment cinétique intrinsèque non nul, appelé *spin*. À ce spin est associé un moment magnétique nucléaire. En IRM on s'intéresse surtout au noyau d'hydrogène en raison de sa très grande abondance naturelle dans les tissus biologiques. L'organisme contient environ 75% d'eau, chaque molécule d'eau renferme elle-même deux protons. En outre, sa répartition ainsi que celle de nombreuses autres molécules riches en hydrogène (comme les lipides) sont modifiées par de nombreuses maladies, ce qui permet de mettre en évidence les tissus pathologiques. Dans la suite, nous ne considérerons plus que ce noyau. On décrit le comportement d'un ensemble de noyaux à l'aide d'un moment magnétique macroscopique \vec{M} (encore appelé vecteur aimantation), qui représente l'effet global de tous les moments magnétiques nucléaires pour un type de noyau donné dans l'échantillon étudié.

En l'absence de champ magnétique, sous l'effet de l'agitation thermique, les moments magnétiques nucléaires sont orientés de manière aléatoire. Le moment magnétique macroscopique est nul. Lorsqu'un champ magnétique \vec{B}_0 est appliqué, les moments magnétiques nucléaires produisent un moment magnétique macroscopique d'équilibre \vec{M}_0 qui est orienté dans la direction du champ \vec{B}_0 . Cette aimantation macroscopique d'équilibre est trop faible pour être mesurée directement. Au cours d'une expérience de RMN, on mesure les paramètres qui caractérisent le retour à l'équilibre du moment magnétique macroscopique \vec{M} préalablement déplacé de sa position d'équilibre \vec{M}_0 . Ce *phénomène de résonance* est obtenu en soumettant les noyaux à une onde radio-fréquence \vec{B}_1 dont la fréquence ν_r est ajustée à la fréquence propre (ou fréquence de Larmor) des noyaux étudiés. La fréquence de Larmor d'une espèce nucléaire est proportionnelle au champ magnétique \vec{B} auquel sont soumis les noyaux et est donnée par la relation

$$\nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B, \quad (5.1)$$

où γ est le rapport gyromagnétique de l'espèce considérée (par exemple le rapport gyromagnétique de l'hydrogène vaut $\gamma = 42.58 \cdot 10^6$ hertz par tesla). La fréquence de l'onde radio-fréquence est située dans la bande radio du spectre électromagnétique et est très inférieure à celle des rayons X ou même de la lumière visible (la fréquence de résonance du proton dans un champ de 0.5 Tesla est de 21.3 Mhz). Ainsi l'énergie de l'onde radio-fréquence est trop faible pour endommager les systèmes vivants.

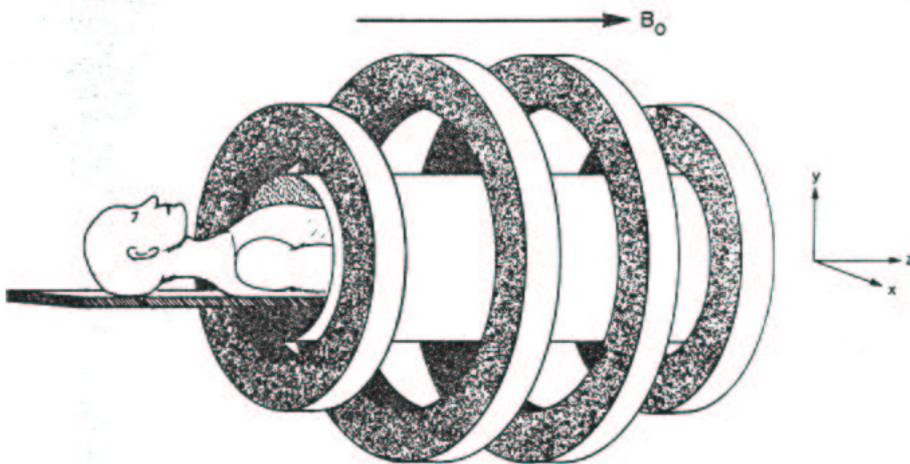


Figure 5.1: repère du laboratoire.

Pour aborder plus commodément l'étude, on introduit deux repères. Le premier repère, appelé *repère du laboratoire* et noté $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est lié à l'imageur; le vecteur \vec{z} est défini par le sens du champ \vec{B}_0 (qui est celui de l'axe du tunnel de l'imageur), les deux autres directions étant choisies de façon arbitraire (voir figure 5.1). Le second repère

$R' = (O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$, appelé par la suite *repère tournant*, est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (O, \vec{z}) à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -\omega_r \vec{z}$. Dans ce repère l'induction \vec{B}_1 apparaît stationnaire. On choisit l'axe \vec{x}' tel que \vec{B}_1 soit orienté selon \vec{x}' .

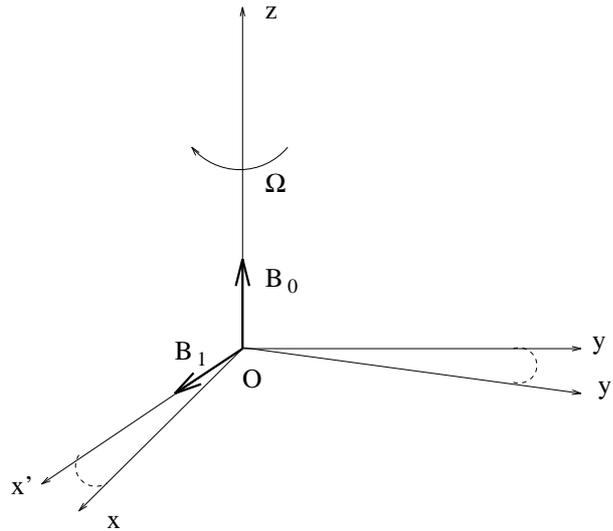


Figure 5.2: orientation des champs magnétiques.

Le champ radio-fréquence \vec{B}_1 de fréquence ν_r est orienté perpendiculairement au champ \vec{B}_0 et a pour expression dans le repère du laboratoire

$$\vec{B}_1 = B_1(\cos \omega_r t \vec{x} + \sin \omega_r t \vec{y}). \quad (5.2)$$

Son amplitude B_1 est beaucoup plus petite que l'intensité du champ statique B_0 . Typiquement, l'induction statique est de l'ordre du Tesla alors que l'induction radio-fréquence est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} Tesla. Pour que le phénomène de résonance ait lieu, il faut que la fréquence ν_r de l'onde radio-fréquence soit égale à la fréquence de résonance ν_0 des noyaux considérés.

À l'arrêt de l'impulsion radio-fréquence \vec{B}_1 , le moment magnétique macroscopique \vec{M} va retourner à sa position d'équilibre. Ce retour à l'équilibre n'est pas instantané mais se produit progressivement: on appelle *phénomène de relaxation* cette évolution conduisant à un retour à la position d'équilibre initiale. C'est au cours de ce retour vers l'équilibre qu'est enregistré le signal RMN. Il provient des variations de flux induites par l'évolution du moment magnétique macroscopique. La forme du signal RMN dépend des différents champs auxquels a été soumis le moment magnétique macroscopique. Nous présentons dans ce qui suit les équations régissant le comportement du moment magnétique macroscopique dans un champ magnétique.

5.1.2 Les équations de Bloch

Les équations de Bloch décrivent l'évolution du moment magnétique nucléaire macroscopique soumis à un champ magnétique. Ce sont les équations les plus générales obtenues à partir de la mécanique classique. Sous l'hypothèse que l'amplitude du champ radio-fréquence \vec{B}_1 est beaucoup plus petite que l'intensité du champ statique \vec{B}_0 (cette hypothèse est vérifiée au cours d'une expérience d'IRM), le moment magnétique macroscopique \vec{M} soumis au champ magnétique \vec{B} évolue au cours du temps selon une loi donnée, dans le repère du laboratoire, par l'équation de Bloch

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma(\vec{M} \wedge \vec{B}) - \frac{M_x \vec{x} + M_y \vec{y}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \vec{z}. \quad (5.3)$$

Le premier terme du second membre décrit le mouvement libre du moment magnétique macroscopique dans un champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$. Les deux autres termes sont des termes d'amortissement rendant compte du nécessaire retour vers l'équilibre thermodynamique du moment magnétique macroscopique. Les paramètres T_1 et T_2 sont appelés *temps de relaxation*. Le premier des deux termes d'amortissement dans (5.3) rend compte de l'annihilation de la composante transversale du moment magnétique macroscopique qui est liée au transfert d'énergie entre les noyaux de l'échantillon. Le second décrit le retour du moment magnétique macroscopique vers sa position d'équilibre en raison de l'échange d'énergie entre les noyaux et le milieu environnant. En pratique, les temps de relaxation des tissus biologiques sont pour T_1 de l'ordre de 0,5 seconde et pour T_2 de l'ordre de 50 milli-secondes. Ici, M_0 désigne l'intensité du moment magnétique macroscopique d'équilibre. Son expression est donnée par la loi de Curie

$$M_0 = \rho \frac{\gamma^2 h^2 B_0 I(I+1)}{3k_B T}, \quad (5.4)$$

où ρ est la densité volumique de noyaux, I est le nombre quantique de spin ($I = 1/2$ pour le proton), h est la constante de Planck, k_B est la constante de Boltzmann ($k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$) et T est la température.

Les composantes (M_x, M_y, M_z) de l'aimantation dans le repère du laboratoire vérifient les équations,

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \gamma(M_y B_z(t) - M_z B_y(t)) - \frac{M_x}{T_2}, \\ \frac{dM_y}{dt} = \gamma(M_z B_x(t) - M_x B_z(t)) - \frac{M_y}{T_2}, \\ \frac{dM_z}{dt} = \gamma(M_x B_y(t) - M_y B_x(t)) - \frac{M_z - M_0}{T_1}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients non constants.

5.2 Résolution des équations de Bloch

Les équations de Bloch (5.3) décrivent l'évolution du moment magnétique macroscopique soumis à un champ magnétique. En particulier ces équations régissent l'évolution du moment magnétique au cours des phénomènes de résonance et de relaxation que nous avons décrit à la section 5.1.1. Il est important de remarquer que les équations régissant l'évolution du moment magnétique macroscopique sont les mêmes, qu'il s'agisse de la résonance ou de la relaxation. Seuls varient les conditions initiales et le champ magnétique (les champs appliqués au cours de la résonance sont le champ statique \vec{B}_0 et le champ radio-fréquence \vec{B}_1 alors que dans la période de relaxation seul le champ \vec{B}_0 est appliqué). Nous allons résoudre les équations de Bloch afin d'obtenir l'évolution du moment magnétique au cours de la résonance et de la relaxation.

5.2.1 Équations de Bloch dans le repère tournant

On se place dans le repère $R' = (0, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ tournant autour de \vec{z} à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -\omega_r \vec{z}$. Dans ce repère, le champ \vec{B}_1 apparaît stationnaire et est orienté selon \vec{x}' .

Notons $\partial \vec{M} / \partial t$ la dérivée de \vec{M} par rapport au temps vue du repère tournant R' et (u, v, M_z) les composantes de \vec{M} dans ce même repère. On a la formule de dérivation composée

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{M}. \quad (5.6)$$

Les équations de Bloch dans le repère tournant sont alors

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma (\vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{eff}}) - \frac{u \vec{x}' + v \vec{y}'}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \vec{z} \quad (5.7)$$

où l'on a noté

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B} + \frac{1}{\gamma} \vec{\Omega}.$$

On note ω_0 et ω_1 les paramètres tels que

$$\vec{B}_0 = \frac{\omega_0}{\gamma} \vec{z}, \quad (5.8)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\omega_1}{\gamma} \vec{x}', \quad (5.9)$$

alors

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{1}{\gamma} \{(\omega_0 - \omega_r) \vec{z} + \omega_1 \vec{x}'\}. \quad (5.10)$$

On note $\delta\omega = \omega_0 - \omega_r$. En projetant les équations (5.7) sur les axes du repère R' , on obtient le système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= v \delta\omega - \frac{u}{T_2}, \\ \frac{dv}{dt} &= M_z \omega_1 - u \delta\omega - \frac{v}{T_2}, \\ \frac{dM_z}{dt} &= -v \omega_1 - \frac{M_z - M_0}{T_1}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Ces équations décrivent (dans le repère tournant) l'évolution du moment magnétique macroscopique soumis à une induction statique $\vec{B}_0 = \frac{\omega_0}{\gamma} \vec{z}$ et à une induction radio-fréquence d'intensité $B_1 = \frac{\omega_1}{\gamma}$ et de fréquence $\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$.

5.2.2 Évolution de l'aimantation au cours de la résonance

Résolution des équations de Bloch

Pour que le phénomène de résonance ait lieu, la fréquence ν_r de l'onde excitatrice doit être égale à la fréquence de Larmor ν_0 des noyaux considérés, c'est-à-dire que l'on doit avoir,

$$\nu_r = \nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0. \quad (5.12)$$

On a alors $\delta\omega = \omega_0 - \omega_r = 0$ et les équations de Bloch (5.11) dans le repère tournant s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\frac{u}{T_2}, \\ \frac{dv}{dt} = M_z \omega_1 - \frac{v}{T_2}, \\ \frac{dM_z}{dt} = -v \omega_1 - \frac{M_z - M_0}{T_1}. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

En intégrant la première équation du système on obtient,

$$u = C_u \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right), \quad (5.14)$$

où C_u est une constante. Pour déterminer le couple (v, M_z) solution des deux autres équations, on introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_1 \\ -\omega_1 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$F = {}^t \left(0, \frac{M_0}{T_1} \right).$$

Si on note,

$$X = {}^t (v, M_z),$$

on est amené à chercher X solution de

$$\frac{dX}{dt} = A X + F. \quad (5.15)$$

Par commodité d'écriture, on introduit les notations suivantes,

$$\tau_1 = \frac{1}{T_1} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Les solutions de l'équation différentielle (5.15) s'obtiennent à partir de la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (5.15) et d'une solution particulière de cette même équation. Si (λ_1, λ_2) désignent les deux valeurs propres de la matrice A et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres, les solutions de l'équation différentielle homogène

$$\frac{dX}{dt} = A X,$$

sont de la forme $X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) e_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) e_2$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. La matrice A admet les deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda^\pm = -\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 - 4\omega_1^2}. \quad (5.16)$$

La quantité $(\tau_1 - \tau_2)^2 - 4\omega_1^2$ est non nulle et négative (ce résultat est lié aux ordres de grandeur des quantités physiques intervenant). Un vecteur propre associé à la valeur propre λ^+ est

$$e_+ = \begin{pmatrix} \tau_1 + \lambda^+ \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre λ^- est

$$e_- = \begin{pmatrix} \tau_1 + \lambda^- \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$X(t) = C^+ \exp(\lambda^+ t) \begin{pmatrix} \tau_1 + \lambda^+ \\ -\omega_1 \end{pmatrix} + C^- \exp(\lambda^- t) \begin{pmatrix} \tau_1 + \lambda^- \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

avec $C^+, C^- \in \mathbb{C}$. On peut vérifier qu'une solution particulière de l'équation différentielle (5.15) est

$$X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_1 \tau_1}{\tau_1 \tau_2 + \omega_1^2} M_0 \\ -\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 \tau_2 + \omega_1^2} M_0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Ainsi, au cours de la résonance, les composantes dans le repère tournant du moment magnétique macroscopique sont

$$\begin{cases} u(t) &= C_u \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ v(t) &= C^+ (\tau_1 + \lambda^+) \exp(\lambda^+ t) + C^- (\tau_1 + \lambda^-) \exp(\lambda^- t) - \frac{\omega_1 \tau_1}{\tau_1 \tau_2 + \omega_1^2} M_0, \\ M_z(t) &= -C^+ \omega_1 \exp(\lambda^+ t) - C^- \omega_1 \exp(\lambda^- t) - \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 \tau_2 + \omega_1^2} M_0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Intéressons-nous aux valeurs prises par les différents paramètres physiques. La quantité $\omega_1 = \gamma B_1$ est de l'ordre de 10^5 radian par seconde. Les temps de relaxation des tissus biologiques sont, pour le temps de relaxation longitudinal (ou spin-réseau) T_1 de l'ordre de 0.1 à 1 seconde et pour le temps de relaxation transversal (ou spin-spin) T_2 de l'ordre de 0.1 seconde, voir [17], Ch. 7. Ainsi en pratique ω_1 est très grand devant τ_1 et τ_2 ; on peut négliger dans les formules précédentes τ_1 et τ_2 par rapport à ω_1 . Sachant que le terme d'amortissement $e^{-\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)t}$ reste voisin de 1 durant la résonance, nous ne conservons que la forme simplifiée suivante

$$\begin{cases} u(t) &= C_u \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ v(t) &= i \omega_1 C^+ \exp(i \omega_1 t) - i \omega_1 C^- \exp(-i \omega_1 t), \\ M_z(t) &= -\omega_1 C^+ \exp(i \omega_1 t) - \omega_1 C^- \exp(-i \omega_1 t), \end{cases} \quad (5.22)$$

où les constantes C_u, C^+, C^- sont obtenues à l'aide des conditions initiales.

Action du champ radio-fréquence sur le moment magnétique macroscopique à l'équilibre

Soumis au champ statique \vec{B}_0 , un échantillon de matière acquiert un moment magnétique macroscopique \vec{M}_0 dirigé selon \vec{B}_0 . Lorsque l'on soumet l'échantillon à un champ radio-fréquence \vec{B}_1 de fréquence $\nu_r = \nu_0$, le moment magnétique macroscopique évolue selon (5.22) sous les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0) &= 0, \\ v(0) &= 0, \\ M_z(0) &= M_0. \end{cases} \quad (5.23)$$

L'évolution du moment magnétique macroscopique dans le repère tournant au cours de la résonance est donc donné par

$$\begin{cases} u(t) &= 0, \\ v(t) &= M_0 \sin \omega_1 t, \\ M_z(t) &= M_0 \cos \omega_1 t. \end{cases} \quad (5.24)$$

Interprétation: au cours de la résonance \vec{M} s'écarte de sa position d'équilibre suivant \vec{z} (i.e. suivant \vec{B}_0) dans un mouvement de rotation autour de l'axe \vec{x}' (i.e. autour de \vec{B}_1) en faisant par rapport à l'axe \vec{z} un angle θ croissant en fonction du temps, voir la figure 5.3,

$$\theta(t) = \omega_1 t = \gamma B_1 t. \quad (5.25)$$

Dans le langage spécifique à l'IRM, on parle d'impulsion α pour désigner une onde radio-fréquence d'intensité B_1 qui appliquée pendant une durée $\tau = \alpha/\gamma B_1$ fait basculer l'aimantation d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre. Les impulsions les plus utilisées en IRM sont les impulsions π et $\frac{\pi}{2}$.

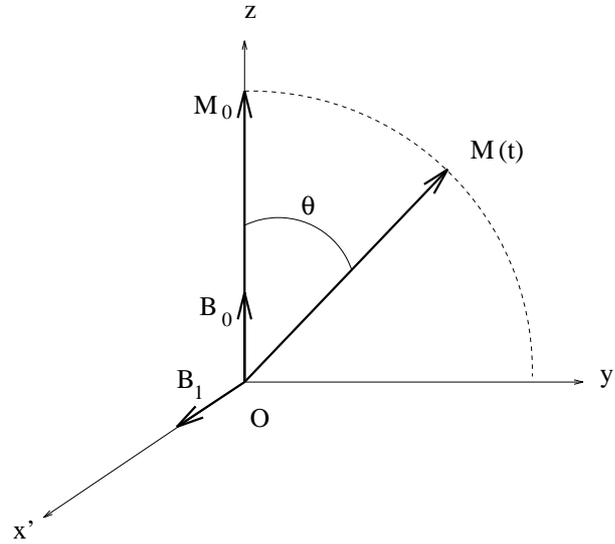


Figure 5.3: évolution de l'aimantation dans le repère tournant au cours de la résonance.

Le repère R' est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe \vec{z} du repère du laboratoire à la vitesse $\omega_r = \omega_0$. On obtient pour composantes du moment magnétique macroscopique dans le repère du laboratoire,

$$\begin{cases} M_x(t) = u \cos \omega_r t + v \sin \omega_r t = M_0 \sin \omega_1 t \sin \omega_0 t, \\ M_y(t) = -u \sin \omega_r t + v \cos \omega_r t = M_0 \sin \omega_1 t \cos \omega_0 t, \\ M_z(t) = M_0 \cos \omega_1 t. \end{cases} \quad (5.26)$$

Dans le repère du laboratoire, le moment magnétique macroscopique \vec{M} décrit une spirale en restant sur une sphère de rayon M_0 , voir la figure 5.4.

5.2.3 Évolution de l'aimantation au cours de la relaxation

Résolution des équations de Bloch

Lorsque l'on arrête l'onde radio-fréquence excitatrice l'aimantation nucléaire macroscopique retourne vers son état d'équilibre au cours d'un phénomène appelé relaxation. Au cours de la relaxation, l'évolution du moment magnétique macroscopique est toujours gouvernée par les équations de Bloch. Par rapport à la situation précédente, outre des conditions initiales différentes, le champ statique \vec{B}_0 est le seul champ magnétique appliqué pendant la relaxation. On a donc $\vec{B} = B_0 \vec{z} = \frac{\omega_0}{\gamma} \vec{z}$ et dans le repère du laboratoire les composantes

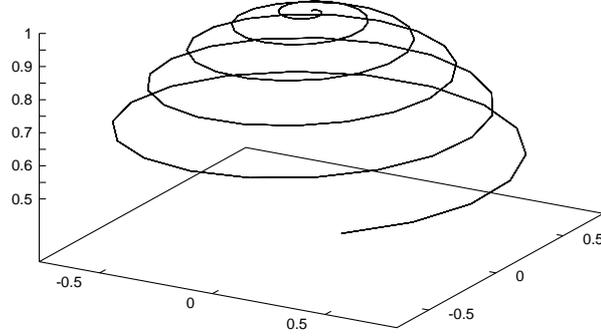


Figure 5.4: évolution de l'aimantation dans le repère du laboratoire au cours de la résonance.

du moment magnétique macroscopique données par (5.5) vérifient

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2}, \\ \frac{dM_y}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2}, \\ \frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Par commodité, on définit le moment magnétique transversal complexe

$$M_{tr} = M_x + iM_y. \quad (5.28)$$

Nous sommes alors amenés à résoudre le système d'équations différentielles du premier ordre,

$$\begin{cases} \frac{dM_{tr}}{dt} = -\left(\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)M_{tr}, \\ \frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1}. \end{cases} \quad (5.29)$$

La résolution du système (5.29) est immédiate. On a

$$\begin{cases} M_{tr} = C_{tr} \exp\left(-\left(\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t\right), \\ M_z = M_0 - C_z \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right), \end{cases} \quad (5.30)$$

où les constantes $C_{tr} = C_1 + iC_2$ et C_z sont déterminées à l'aide des conditions initiales.

On obtient pour composantes du moment magnétique macroscopique dans le repère du laboratoire

$$\begin{cases} M_x = C_1 \exp(-\frac{t}{T_2}) \cos \omega_0 t + C_2 \exp(-\frac{t}{T_2}) \sin \omega_0 t, \\ M_y = -C_1 \exp(-\frac{t}{T_2}) \sin \omega_0 t + C_2 \exp(-\frac{t}{T_2}) \cos \omega_0 t, \\ M_z = M_0 - C_z \exp(-\frac{t}{T_1}), \end{cases} \quad (5.31)$$

et dans le repère tournant,

$$\begin{cases} u = C_1 \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ v = C_2 \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ M_z = M_0 - C_z \exp(-\frac{t}{T_1}). \end{cases} \quad (5.32)$$

Évolution de l'aimantation après une unique impulsion

Supposons que l'impulsion radio-fréquence \vec{B}_1 soit une impulsion radio-fréquence α et intéressons-nous à l'évolution de l'aimantation à l'arrêt de l'onde radio-fréquence. Les conditions initiales pour l'aimantation \vec{M} sont dans le repère tournant, voir (5.24),

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ v(0) = M_0 \sin \alpha, \\ M_z(0) = M_0 \cos \alpha. \end{cases} \quad (5.33)$$

Les composantes du moment magnétique macroscopique dans ce repère sont alors,

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = M_0 \sin \alpha \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ M_z = M_0 - M_0(1 - \cos \alpha) \exp(-\frac{t}{T_1}). \end{cases} \quad (5.34)$$

Dans le repère du laboratoire, on obtient

$$\begin{cases} M_x = M_0 \sin \alpha \exp(-\frac{t}{T_2}) \sin \omega_0 t, \\ M_y = M_0 \sin \alpha \exp(-\frac{t}{T_2}) \cos \omega_0 t, \\ M_z = M_0 - M_0(1 - \cos \alpha) \exp(-\frac{t}{T_1}). \end{cases} \quad (5.35)$$

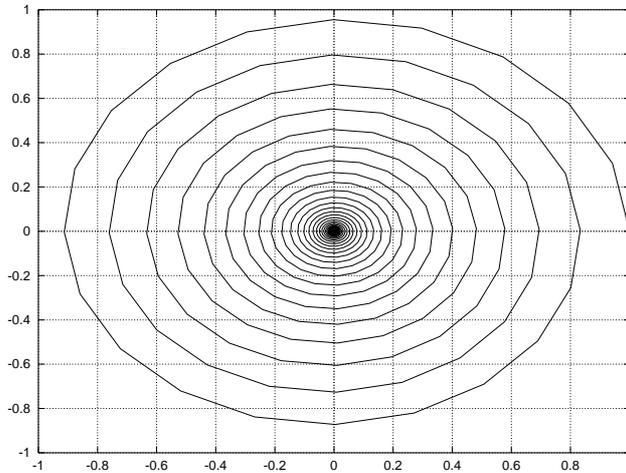


Figure 5.5: évolution du moment magnétique transversal au cours de la relaxation.

Interprétation: au cours de la relaxation, la composante transversale $M_x \vec{x} + M_y \vec{y}$ de l'aimantation décroît en décrivant une spirale dans le plan $(0, \vec{x}, \vec{y})$, voir la figure 5.5. La composante longitudinale $M_z \vec{z}$ varie au cours du temps de sa position initiale $M_z(0) \vec{z} = M_0 \cos \alpha \vec{z}$ vers sa position d'équilibre $M_0 \vec{z}$ de façon exponentielle. L'extrémité du vecteur \vec{M} décrit ainsi au cours de la relaxation, dans le repère du laboratoire, une figure proche d'une corne de trompe, voir la figure 5.6.

Remarque 5.2.1 Les figures 5.5 et 5.6 ne représentent pas l'évolution réelle; la "pseudo-période" pour l'aimantation transversale (temps entre deux passages devant l'axe $(0, \vec{y})$) vaut $T = 2\pi/\gamma B_0 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ seconde pour des protons soumis à un champ magnétique de 0.5 Tesla. La durée de la relaxation étant de l'ordre de $5 T_1$, l'aimantation transversale effectue entre 10^6 et 10^7 rotations au cours de la relaxation. Pour la représentation graphique, on a pris des temps de relaxation sans aucune réalité physique: $T_2 \approx 0.2 \frac{\omega_0}{2\pi}$, $T_1 \approx 0.5 \frac{\omega_0}{2\pi}$.

5.3 Modélisation d'une séquence d'impulsions

On appelle séquence d'impulsions l'émission d'un certain nombre d'impulsions radio-fréquence espacées dans le temps. La possibilité de modifier ou même d'inverser complètement les contrastes en modifiant les séquences d'impulsions constitue l'un des avantages essentiels de l'IRM. Les paramètres sur lesquels il est possible d'agir sont :

- l'intensité de l'impulsion radio-fréquence \vec{B}_1 caractérisée par l'angle de basculement α du moment magnétique macroscopique;
- les durées séparant les impulsions;
- le temps de répétition T_R entre deux séquences successives.

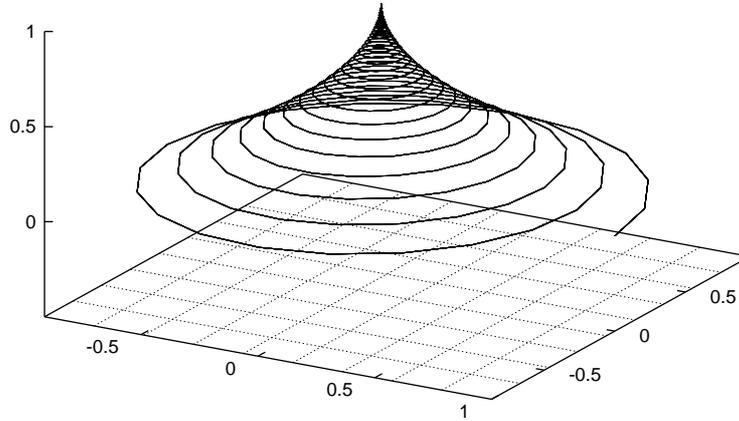


Figure 5.6: évolution du moment magnétique dans le repère du laboratoire au cours de la relaxation.

Les possibilités d'arrangement de ces séquences sont infinies mais toutes les séquences possibles ne sont pas intéressantes pour l'imagerie.

5.3.1 Évolution de l'aimantation au cours du temps

Soumis à une impulsion radio-fréquence \vec{B}_1 d'amplitude $B_1 = \omega_1/\gamma$ et de fréquence égale à la fréquence de résonance ν_0 des noyaux étudiés, le moment magnétique macroscopique est déplacé de sa position initiale par un phénomène de résonance. À l'arrêt de l'impulsion, l'aimantation regagne sa position d'équilibre. Cette phase de relaxation est caractérisée par deux grandeurs T_1 et T_2 appelées temps de relaxation. Nous avons vu qu'il était beaucoup plus commode d'étudier l'évolution du moment magnétique macroscopique dans le repère tournant R' . Nous ne considérons plus que ce repère dans ce qui suit.

- Au cours de la résonance

Sous les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0) &= u_0, \\ v(0) &= v_0, \\ M_z(0) &= M_{z_0}, \end{cases} \quad (5.36)$$

les composantes de \vec{M} varient au cours de la résonance de la façon suivante (voir section 5.2.2)

$$\begin{cases} u(t) &= u_0 \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ v(t) &= v_0 \cos \omega_1 t + M_{z_0} \sin \omega_1 t, \\ M_z(t) &= -v_0 \sin \omega_1 t + M_{z_0} \cos \omega_1 t. \end{cases} \quad (5.37)$$

- Au cours de la relaxation

Supposons que l'impulsion radio-fréquence ait amené l'aimantation dans la position

$$\begin{cases} u(0) &= u_1, \\ v(0) &= v_1, \\ M_z(0) &= M_{z1}. \end{cases} \quad (5.38)$$

Au cours de la relaxation, les composantes de \vec{M} varient de la façon suivante (voir section 5.2.3)

$$\begin{cases} u(t) &= u_1 \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ v(t) &= v_1 \exp(-\frac{t}{T_2}), \\ M_z(t) &= M_0 - (M_0 - M_{z1}) \exp(-\frac{t}{T_1}). \end{cases} \quad (5.39)$$

Remarque 5.3.1 le champ statique \vec{B}_0 crée un moment magnétique macroscopique d'équilibre dont la direction est \vec{z} . À l'équilibre, on a donc

$$\begin{cases} u &= 0, \\ v &= 0, \\ M_z &= M_0. \end{cases} \quad (5.40)$$

On peut aisément vérifier que quelque soit l'enchaînement des impulsions, $u(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que \vec{M} évolue dans le plan (O, \vec{y}', \vec{z}) . L'étude de l'évolution de l'aimantation dans le repère tournant R' se restreint donc à l'étude de ses deux composantes suivant \vec{y}' et \vec{z} . Dans la suite de ce paragraphe, on désigne par moment magnétique \mathcal{M} le vecteur ${}^t(v(t), M_z(t))$.

5.3.2 Opérateur de Résonance et Opérateur de Relaxation

On introduit deux opérateurs agissant sur \mathcal{M} . L'opérateur de résonance est défini à l'aide de la matrice

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Appliquer une impulsion α à l'aimantation \mathcal{M} se trouvant dans la position $\mathcal{M}_i = (v_i, M_{z_i})$ l'amène dans la position \mathcal{M}_α telle que

$$\mathcal{M}_\alpha = S_\alpha \mathcal{M}_i. \quad (5.42)$$

L'opérateur de relaxation est défini à l'aide de la matrice

$$L_t = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{t}{T_2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{t}{T_1}) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

et du vecteur

$$N_t = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 - M_0 \exp(-\frac{t}{T_1}) \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

L'évolution du moment magnétique \mathcal{M} au cours de la relaxation à partir de la position $\mathcal{M}_i = (v_i, M_{z_i})$ est donnée par

$$\mathcal{M}_t = L_t \mathcal{M}_i + N_t. \quad (5.45)$$

Pour obtenir le moment magnétique à l'issue d'une séquence d'impulsions, il suffit d'appliquer ces deux opérateurs successivement à l'aimantation dans l'ordre défini par la séquence.

5.3.3 Modélisation d'une séquence quelconque

Considérons la séquence schématisée à la figure 5.7.

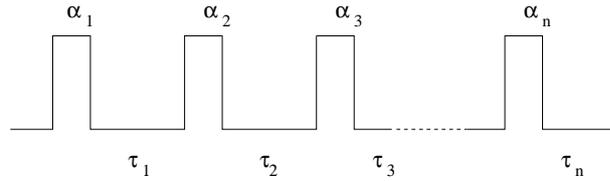


Figure 5.7: une séquence d'impulsions.

Le moment magnétique à l'équilibre est $\mathcal{M}_0 = (0, M_0)$. L'impulsion α_1 l'amène dans la position

$$\mathcal{M}_{\alpha_1} = S_{\alpha_1} \mathcal{M}_0. \quad (5.46)$$

À l'issue de la première période de relaxation de durée τ_1 , le moment magnétique se trouve dans la position

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tau_1} &= L_{\tau_1} \mathcal{M}_{\alpha_1} + N_{\tau_1} \\ &= L_{\tau_1} S_{\alpha_1} \mathcal{M}_0 + N_{\tau_1}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

L'impulsion α_2 l'amène dans la position

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha_2} &= S_{\alpha_2} \mathcal{M}_{\tau_1} \\ &= S_{\alpha_2} L_{\tau_1} S_{\alpha_1} \mathcal{M}_0 + S_{\alpha_2} N_{\tau_1}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

À l'issue de la seconde période de relaxation de durée τ_2 , il se trouve dans la position

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tau_2} &= L_{\tau_2} \mathcal{M}_{\alpha_2} + N_{\tau_2} \\ &= L_{\tau_2} S_{\alpha_2} L_{\tau_1} S_{\alpha_1} \mathcal{M}_0 + L_{\tau_2} S_{\alpha_2} N_{\tau_1} + N_{\tau_2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Par récurrence, on vérifie qu'après un temps τ_k suivant la $k^{\text{ème}}$ impulsion, l'aimantation vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\tau_k} &= L_{\tau_k} \mathcal{M}_{\alpha_k} + N_{\tau_k} \\ &= \sum_{l=0}^k \left\{ \prod_{i=n}^{l+1} L_{\tau_i} S_{\alpha_i} \right\} N_{\tau_l},\end{aligned}\quad (5.50)$$

où l'on a posé $N_{\tau_0} = \mathcal{M}_0$ et avec la convention

$$\begin{cases} \prod_{i=n}^m A_i = A_n \cdot A_{n-1} \cdots A_m & \text{si } m \leq n, \\ \prod_{i=n}^m A_i = I_d & \text{si } m > n. \end{cases}\quad (5.51)$$

À l'issue de la $n^{\text{ème}}$ impulsion, l'évolution de l'aimantation au cours du temps est donnée par

$$\mathcal{M}_t = L_t \mathcal{M}_{\alpha_n} + N_t, \quad (5.52)$$

où

$$\mathcal{M}_{\alpha_n} = S_{\alpha_n} \sum_{l=0}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^{l+1} L_{\tau_i} S_{\alpha_i} \right\} N_{\tau_l}. \quad (5.53)$$

5.3.4 Signal RMN

Le signal RMN est recueilli suivant l'axe (O, \vec{y}) du repère du laboratoire. Il est engendré par l'évolution au cours du temps du moment magnétique macroscopique transversal. La variation du moment magnétique entraîne une variation du flux magnétique qui induit un courant électrique (d'après la loi de Lenz). À l'issue de la $n^{\text{ème}}$ impulsion de la séquence, les composantes de l'aimantation dans le repère tournant sont

$$\begin{cases} u(t) &= 0, \\ v(t) &= \{L_t \mathcal{M}_{\alpha_n} + N_t\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ M_z(t) &= \{L_t \mathcal{M}_{\alpha_n} + N_t\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases}\quad (5.54)$$

où \mathcal{M}_{α_n} est donné par

$$\mathcal{M}_{\alpha_n} = S_{\alpha_n} \sum_{l=0}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^{l+1} L_{\tau_i} S_{\alpha_i} \right\} N_{\tau_l}. \quad (5.55)$$

Dans le repère du laboratoire, l'aimantation a pour composantes

$$\begin{cases} M_x(t) &= u(t) \cos \omega_0 t + v(t) \sin \omega_0 t, \\ M_y(t) &= -u(t) \sin \omega_0 t + v(t) \cos \omega_0 t. \end{cases}\quad (5.56)$$

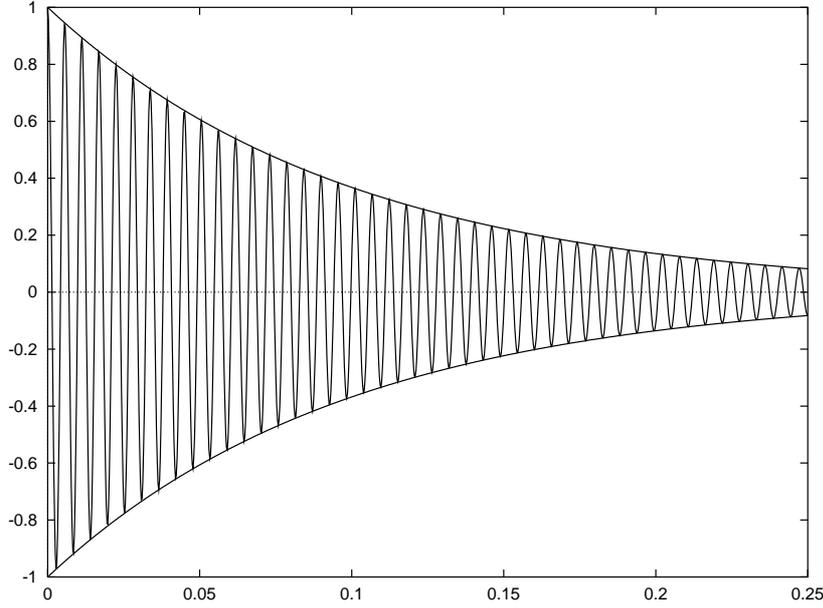


Figure 5.8: forme générale du signal RMN en fonction du temps.

Le signal RMN a pour expression

$$S(t) = M_y(t) + iM_x(t) = v_n \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(i\omega_0 t), \quad (5.57)$$

où v_n est la première composante du vecteur M_{α_n} ,

$$v_n = S_{\alpha_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^{k+1} L_{\tau_i} S_{\alpha_i} \right\} N_{\tau_k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

avec S_{α_i} , L_{τ_i} et N_{τ_k} donnés respectivement par (5.41), (5.43) et (5.44).

Le signal RMN est un signal sinusoïdal amorti de pseudo-période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\gamma B_0}$$

L'amplitude v_n dépend des temps de relaxation et de l'aimantation équilibre \vec{M}_0 (qui est proportionnelle à la densité volumique de noyaux) au point considéré. Cette dépendance a lieu par le biais des relations (5.41), (5.43) et (5.44). L'importance de chacun des trois paramètres (temps de relaxation et densité volumique de noyaux) est déterminée par le choix de la séquence par l'intermédiaire de l'expression (5.58). La figure 5.8 représente la forme générale du signal RMN (on a pris $v_n = 1$, $T_2 = 0.1$ seconde et $B_0 = 0.5$ Tesla).

5.4 Les Équations de Bloch-Torrey

La modélisation qui vient d'être effectuée ne prend pas en compte deux phénomènes pourtant importants:

- Le fait que le champ magnétique statique \vec{B}_0 n'est pas parfaitement homogène mais varie d'un point à l'autre de l'échantillon.
- La diffusion des molécules à l'intérieur de l'échantillon en raison notamment de l'agitation thermique. Les noyaux sont donc soumis au cours du temps à des inhomogénéités magnétiques variables.

Ces deux phénomènes ont été mis en avant par E. Hahn [51] pour expliquer le fait qu'en appliquant deux pulses radio-fréquence $\frac{\pi}{2}$ et π espacés d'un temps τ , il obtenait de façon apparemment surprenante un signal au temps 2τ . Il appela ce signal *l'écho de spin*.

Notons $\vec{B}'(P)$ les inhomogénéités magnétiques au point P , que nous supposons de faible intensité comparé au champ \vec{B}_0 . Les noyaux situés au point P ont une fréquence de résonance qui vaut en première approximation

$$\nu_l(P) = \frac{\gamma}{2\pi} |\vec{B}_0 + \vec{B}'(P)| \approx \frac{\gamma}{2\pi} (B_0 + B'_z(P)). \quad (5.59)$$

Dans [31] les auteurs introduisent le terme de *groupe isochromatique* (isochromatic group) pour désigner l'ensemble des noyaux ayant la même fréquence de résonance. Les équations de Bloch doivent donc être considérées séparément pour chaque groupe isochromatique.

D'autre part, en raison de l'agitation thermique des molécules, surtout dans les liquides, chaque groupe isochromatique va diffuser dans des zones où les inhomogénéités magnétiques vont varier. E.H. Hahn [51], puis T.P. Das et A.K. Saha [31], et H.Y. Carr et E.M. Purcell [21] ont traité le problème de la diffusion par une approche aléatoire du phénomène. En 1956, H.C. Torrey [94] a généralisé les équations de Bloch pour prendre en compte la diffusion. Le moment magnétique macroscopique \vec{M} est une fonction du temps et de l'espace obéissant à l'équation (dite de Bloch-Torrey),

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(r, t) = \gamma(\vec{M} \wedge \vec{B}(r, t)) - \frac{M_x(r, t) \vec{x} + M_y(r, t) \vec{y}}{T_2} - \frac{M_z(r, t) - M_0}{T_1} \vec{z} + D\Delta \vec{M}(r, t). \quad (5.60)$$

Le terme supplémentaire $D\Delta \vec{M}(r, t)$ représente la contribution de la diffusion à la variation de l'aimantation. Le coefficient D est appelé *coefficient de diffusion*.

Chapitre 6

L'Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire

Jusqu'à présent, nous n'avons donné aucune indication sur la manière dont les signaux de résonance émis depuis des positions distinctes pouvaient être différenciés. Ce pas conceptuel important, à l'origine du développement des systèmes d'imagerie IRM a été franchi en 1973 de façon indépendante par P.C. Lauterbur [65] et par P. Mansfield et P.K. Grannell [71]. Comme la fréquence de résonance d'une espèce nucléaire est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique appliqué, un champ magnétique variant dans l'espace donne lieu à des fréquences de résonance variant elles aussi d'un point à l'autre de l'échantillon. En effectuant une analyse fréquentielle du signal, on obtiendra des informations sur la concentration spatiale en noyaux.

6.1 Localisation du signal RMN

Le signal RMN recueilli est un signal global dû à l'accumulation d'un grand nombre de signaux de résonance provenant de noyaux excités répartis dans tout l'échantillon. Afin d'avoir accès aux informations concernant un point donné de l'échantillon, il convient de créer une dépendance spatiale du signal. Diverses méthodes ont été développées dont la méthode de *Projection-Reconstruction*, technique basée sur la reconstruction de l'image à partir de projections et qui fut introduite par P.C. Lauterbur [65]. Cette technique dérive directement des méthodes de reconstruction d'images utilisées en tomographie par rayon X (tomodensimétrie ou scanner) et fut de ce fait à l'origine très utilisée. Une présentation de cette méthode, privilégiant l'approche mathématique peut être trouvée dans [33]. Pour une description des différentes techniques d'imagerie, on pourra consulter [87].

La méthode à l'heure actuelle la plus utilisée est la méthode appelée *Zeugmatographie de Fourier*, voir la figure 6.1 (et ses variantes, les méthodes *Spin-Warp* et *Spin-Écho*). Elle est basée sur une double transformation de Fourier du signal de résonance. Elle consiste à créer une dépendance spatiale du signal à l'aide de trois "gradients", champs magnétiques dont l'intensité varie de façon linéaire selon les trois directions de l'espace. Plus précisément, un premier gradient, (appelé gradient de coupe) est appliqué simul-

tanément à l'onde radio-fréquence. Cela conduit à la mise en résonance des noyaux situés sur une même coupe de l'échantillon à l'exclusion des autres noyaux. Un second gradient (appelé gradient de phase) est appliqué un court instant avant l'enregistrement du signal. Il crée un déphasage des signaux de résonance dans une direction choisie du plan de coupe. Enfin la localisation spatiale est obtenue en appliquant un troisième gradient (le gradient de lecture) pendant l'enregistrement du signal dans la direction orthogonale à celle du gradient de phase dans le plan de coupe. On obtient une correspondance entre l'espace (plan de coupe, bi-dimensionnel) et la fréquence (couple fréquence – phase) du signal. *Nous ne considérons que cette méthode par la suite.*

La relation à la base du codage spatial est la relation de Larmor,

$$\nu_l = \frac{\gamma}{2\pi} B, \quad (6.1)$$

qui lie la fréquence de résonance ν_l d'une espèce nucléaire (qui est aussi la fréquence du signal RMN, voir le chapitre 5) au champ magnétique statique \vec{B} appliqué.

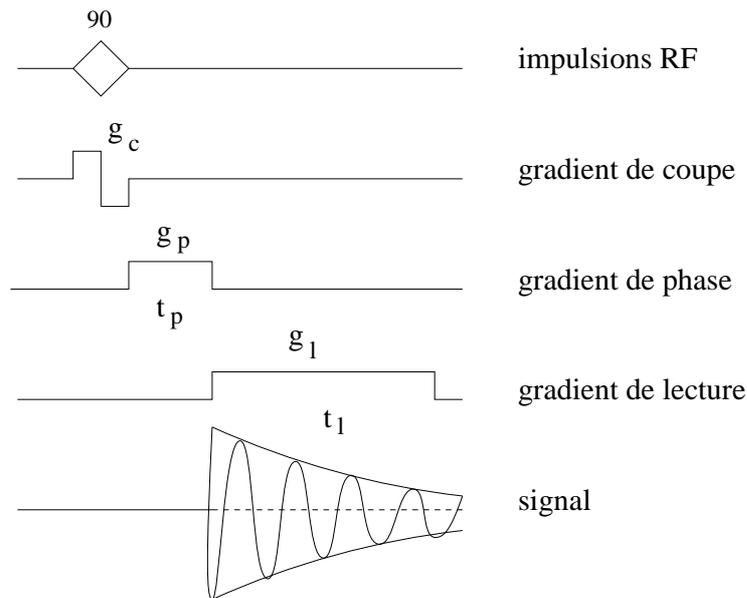


Figure 6.1: la Zeugmatographie de Fourier.

6.1.1 Qu'est-ce qu'un gradient?

Dans le vocabulaire spécifique à l'IRM un *gradient de champ magnétique*, ou plus simplement un *gradient* désigne un champ magnétique statique orienté dans la même direction que le champ principal \vec{B}_0 et dont l'intensité varie linéairement dans une direction donnée,

voir la figure 6.2. L'intensité d'un tel champ est relativement faible (de l'ordre du Gauss¹ à la dizaine de Gauss).

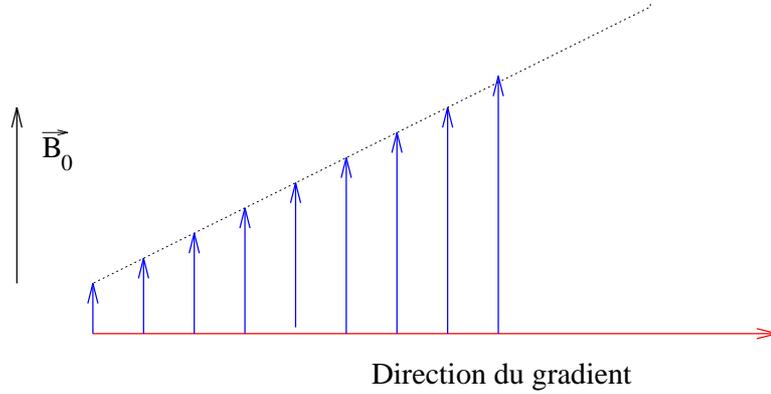


Figure 6.2: un gradient de champ magnétique.

On désigne par *direction du gradient* la direction selon laquelle son intensité varie. Il ne faut pas la confondre avec la direction du champ lui-même, qui est toujours orienté selon le champ principal \vec{B}_0 . De même, on parle de *l'intensité du gradient*; il s'agit du coefficient directeur de la variation linéaire. Elle s'exprime en Gauss par centimètre ou Tesla par mètre dans le système international. Il ne faut pas, là non plus, la confondre avec l'intensité du champ qui dépend elle de la position du point selon la direction du gradient. Si g désigne l'intensité du gradient, \vec{n} sa direction et $\vec{r} = \vec{OP}$, alors le gradient en un point P a pour expression

$$\vec{G}(P) = g (\vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{z}. \quad (6.2)$$

Dans une expérience d'IRM, la direction définie par le champ principal \vec{B}_0 est une direction privilégiée. On introduit à nouveau le *repère du laboratoire* $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, lié à l'imageur, dont le vecteur \vec{z} est défini par le sens du champ \vec{B}_0 (qui est celui de l'axe du tunnel de l'imageur), les deux autres directions étant choisies de façon arbitraire.

6.1.2 Sélection d'un plan de coupe

La sélection du *plan de coupe*, coupe de l'objet qui sera représentée sur l'image, est effectuée à l'aide d'un champ magnétique \vec{G}_c appelé *gradient de coupe*. Ce champ en un point $P \in \mathbb{R}^3$ a pour expression

$$\vec{G}_c(P) = g_c (\vec{n}_c \cdot \vec{r}) \vec{z}, \quad (6.3)$$

où $\vec{r} = \vec{OP}$, et où g_c et \vec{n}_c sont l'intensité et la direction du gradient de coupe.

¹1 Gauss = 10^{-4} Tesla. L'unité du système S.I. est le Tesla. Nous utiliserons suivant les cas les deux unités, nous conformant en cela à l'usage.

On considère le plan Π_c , voir la figure 6.3, de cote c dans la direction \vec{n}_c . Le vecteur \vec{G}_c est constant sur ce plan, $\forall P \in \Pi_c$,

$$\vec{G}_c(P) = g_c c \vec{z}. \quad (6.4)$$

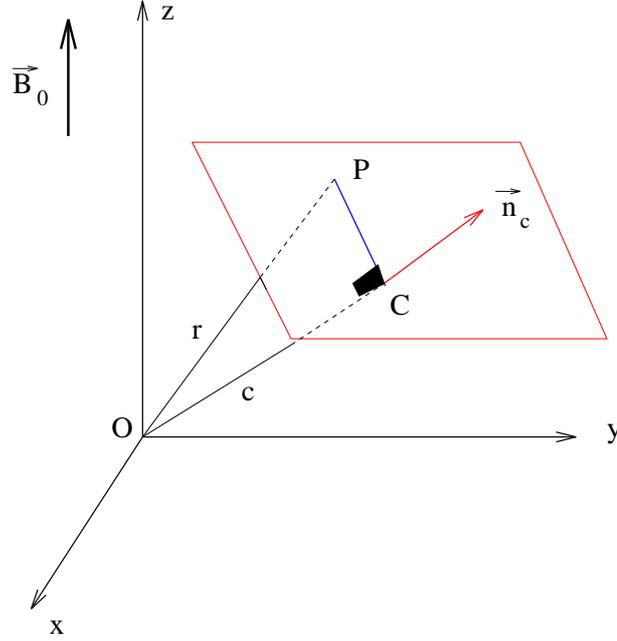


Figure 6.3: sélection du plan de coupe.

Par suite, le champ magnétique statique en tout point P de ce plan est constant et vaut

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \vec{B}_0 + \vec{G}_c(P) \\ &= (B_0 + g_c c) \vec{z}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

La fréquence de Larmor des noyaux situés sur ce plan, donnée par la relation (6.1) est elle aussi constante, $\forall P \in \Pi_c$,

$$\begin{aligned} \nu_l(P) &= \frac{\gamma}{2\pi} B(P) \\ &= \frac{\gamma}{2\pi} (B_0 + g_c c) \equiv \nu_c. \end{aligned} \quad (6.6)$$

La relation (6.6) est à l'origine de la sélection de la coupe représentée sur l'image. Elle établit un lien entre l'espace (Π_c) et la fréquence (ν_c). Plus précisément, en appliquant une onde radio-fréquence \vec{B}_1 de fréquence égale à la fréquence ν_c , on n'excite que les noyaux situés sur le plan Π_c (voir figure 6.3). Tous les autres noyaux, soumis à un autre champ magnétique, ont une fréquence de Larmor ν_l différente de la fréquence ν_c de l'onde radio-fréquence excitatrice et ne seront donc pas mis en résonance.

Le point C du plan Π_c tel que $\overrightarrow{OC} = c \overrightarrow{n_c}$ sera appelé par la suite *origine du plan de coupe*.

6.1.3 Codage par la fréquence

Un second gradient, le *gradient de lecture* \overrightarrow{G}_l est utilisé pour créer une dépendance de la fréquence des différents signaux émis par les noyaux de la coupe sélectionné Π_c en fonction de leur position dans le plan de coupe. La direction du gradient de lecture \overrightarrow{n}_l est orthogonale à celle du gradient de coupe $\overrightarrow{n_c}$. En un point P de l'espace, le champ magnétique associé au gradient vaut

$$\overrightarrow{G}_l(P) = g_l (\overrightarrow{n}_l \cdot \overrightarrow{r}) \overrightarrow{z}, \quad (6.7)$$

où $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$ et où g_l est l'intensité du gradient de lecture.

On considère, voir la figure 6.4, la droite D_l du plan Π_c perpendiculaire à la direction du gradient de lecture \overrightarrow{n}_l et située à la distance x_l du point C . En tout point P de cette droite, on a

$$\overrightarrow{n}_l \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{n}_l \cdot \overrightarrow{CP} = x_l. \quad (6.8)$$

Par suite, le gradient de lecture est le même en tout point de cette droite et vaut

$$\overrightarrow{G}_l(P) = g_l x_l \overrightarrow{z}. \quad (6.9)$$

Le gradient de lecture est appliqué au moment de l'enregistrement du signal de résonance, le champ magnétique à cet instant vaut,

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{G}_l \quad (6.10)$$

(le gradient de coupe n'est alors plus appliqué). La fréquence du signal de résonance émis depuis le point P du plan Π_c vaut donc

$$\nu(P) = \frac{\gamma}{2\pi} (B_0 + g_l x_l). \quad (6.11)$$

Cette fréquence est identique pour tous les noyaux situés sur une même droite D_l . On peut en outre choisir l'origine des fréquences de sorte que la fréquence du signal de résonance au point P soit

$$\nu(P) = \frac{\gamma}{2\pi} g_l x_l. \quad (6.12)$$

6.1.4 Codage par la phase

Grâce au procédé qui vient d'être décrit, les signaux qui sont émis depuis chaque droite du plan de coupe orthogonale à la direction du gradient de lecture ont une fréquence différente. Pour que la localisation spatiale soit complète, il reste à créer une dépendance du signal en fonction de la position sur chaque droite D_l . On utilise pour cela un troisième gradient, le *gradient de phase* \overrightarrow{G}_p . La direction \overrightarrow{n}_p de ce gradient est perpendiculaire aux

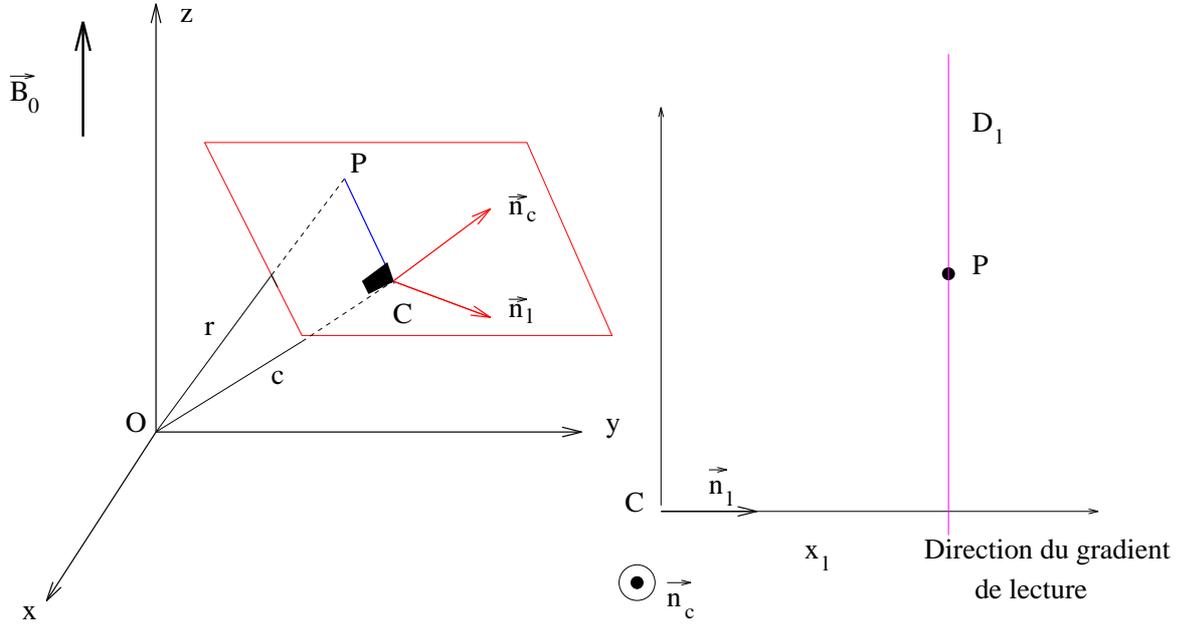


Figure 6.4: codage par la fréquence.

directions du gradient de coupe et du gradient de lecture. Le gradient de phase a pour expression

$$\vec{G}_p(P) = g_p (\vec{n}_p \cdot \vec{r}) \vec{z}, \quad (6.13)$$

où $\vec{r} = \vec{OP}$ et g_p est l'intensité du gradient.

On considère, voir la figure 6.5, la droite D_p perpendiculaire à \vec{n}_p et située à la distance x_p du point C . On a $\forall P \in D_p$,

$$\vec{n}_p \cdot \vec{r} = \vec{n}_p \cdot \vec{CP} = x_p. \quad (6.14)$$

Le gradient de phase en tout point P de cette droite vaut donc

$$\vec{G}_p(P) = g_p x_p \vec{z}. \quad (6.15)$$

Le gradient de phase est appliqué pendant un temps t_p avant que ne commence l'enregistrement du signal. Le signal émis depuis un point $P \in \Pi_c$ situé à l'ordonnée x_p dans le repère $(C, \vec{n}_l, \vec{n}_p, \vec{n}_c)$ acquiert une phase

$$\begin{aligned} \phi(P) &= 2\pi \nu_l(P) t_p \\ &= \gamma g_p x_p t_p + (\gamma B_0 t_p). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le terme entre parenthèses étant constant, on choisit l'origine des phases pour avoir

$$\phi(P) = \gamma g_p x_p t_p. \quad (6.17)$$

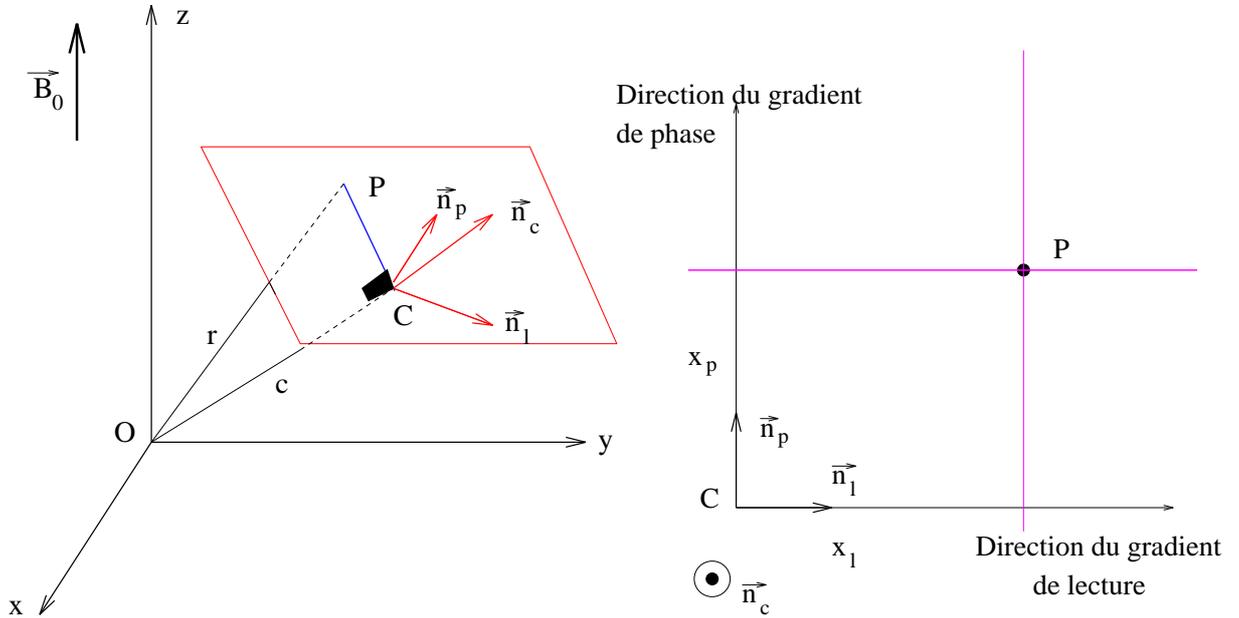


Figure 6.5: codage par la fréquence et la phase.

Ainsi par le biais du gradient de lecture et du gradient de phase, on crée une dépendance entre la position des noyaux à l'intérieur du plan de coupe et le couple phase–fréquence du signal de résonance. Cette relation est donnée par les expressions (6.12) et (6.17).

6.1.5 Prise en compte de l'épaisseur de la coupe

Nous avons vu que pour obtenir l'image d'une coupe Π_c de cote c dans la direction \vec{n}_c , on appliquait simultanément le gradient de coupe \vec{G}_c de direction \vec{n}_c et une onde radio-fréquence de fréquence ν_c égale à la fréquence de Larmor des noyaux du plan Π_c ,

$$\nu_c = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_c c). \quad (6.18)$$

En pratique, il est impossible d'obtenir une onde radio-fréquence mono-fréquentielle. On émet un pulse radio-fréquence de largeur de bande $\Delta\nu_c$ autour de la fréquence ν_c . Cela a pour conséquence la mise en résonance de l'ensemble des noyaux ayant leur fréquence de Larmor égale à l'une des fréquences de l'onde, c'est-à-dire vérifiant

$$\nu_l \in \left[\nu_c - \frac{\Delta\nu_c}{2} ; \nu_c + \frac{\Delta\nu_c}{2} \right]. \quad (6.19)$$

Or, la fréquence de Larmor est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique statique, on a

$$\nu_l(P) = \frac{\gamma}{2\pi}B(P) = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_c c') \quad (6.20)$$

où c' est la cote du point P dans la direction \vec{n}_c du gradient de coupe. On met ainsi en résonance tous les noyaux situés en des points de cote c' vérifiant

$$c' = \frac{2\pi \nu}{\gamma g_c} \quad \text{où } \nu \in \left[\nu_c - \frac{\Delta\nu_c}{2} ; \nu_c + \frac{\Delta\nu_c}{2} \right], \quad (6.21)$$

c'est-à-dire les noyaux situés de part et d'autre de Π_c dans une bande d'épaisseur

$$e_c = \frac{2\pi \Delta\nu_c}{\gamma g_c}. \quad (6.22)$$

Par abus de langage, on désignera encore par "plan de coupe" l'ensemble des noyaux mis en résonance, bien qu'il s'agisse d'un volume. Tout ce volume sera reproduit en définitive sur l'image.

6.2 Reconstruction de l'image

On considère le repère R_c lié au plan Π_c et défini par son origine C et les vecteurs de base \vec{n}_l, \vec{n}_p et \vec{n}_c . On rappelle que les vecteurs \vec{n}_l, \vec{n}_p et \vec{n}_c sont les directions de variation de l'intensité des trois gradients, gradient de lecture, gradient de phase et gradient de coupe, respectivement, et que le point C est défini par $\overline{OC} = c \vec{n}_c$, c étant la cote de Π_c dans la direction \vec{n}_c (voir la figure 6.5).

6.2.1 Le signal IRM

L'expression du signal de résonance émis depuis le point $P = (x_l, x_p)$ du plan de coupe est donnée par (5.57). Il est de la forme

$$s(x_l, x_p) = I(x_l, x_p) \exp\left(-\frac{t_l + t_p}{T_2}\right) \exp(i(\omega(x_l, x_p)t_l + \phi(x_l, x_p))) \quad (6.23)$$

où $\omega = 2\pi\nu$ avec ν donné par (6.12) et où ϕ est donné par (6.17). Ici t_p est la durée d'application du gradient de phase et t_l est la variable de temps dont l'origine coïncide avec le début d'enregistrement du signal.

Le signal recueilli provient de la mise en résonance de tous les protons du plan de coupe Π_c sélectionné. Il est de la forme

$$\mathcal{S}(t_l, t_p) = \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(-\frac{t_l + t_p}{T_2^*(x_l, x_p)}\right) \exp(i\gamma(g_l x_l t_l + g_p x_p t_p)) \, dx_l \, dx_p. \quad (6.24)$$

Ici T_2^* est un temps de relaxation légèrement plus petit que le temps de relaxation T_2 ; en raison des inévitables inhomogénéités du champ magnétique, le retour vers l'état d'équilibre du moment magnétique transversal est un peu plus rapide que si le champ \vec{B}_0 était parfaitement homogène. L'intensité I du signal dépend d'une part du moment magnétique d'équilibre et donc de la densité de protons au point (x_l, x_p) du plan de coupe, et d'autre part des temps de relaxation T_1 et T_2 par le biais de la relation (5.58).

6.2.2 Transformation de Fourier du signal

Afin de simuler le processus d'acquisition de l'image IRM, nous allons effectuer la transformation de Fourier du signal \mathcal{S} . L'intensité de l'image au point (u_1, u_2) vaut,

$$\begin{aligned}
T(u_1, u_2) &= \mathcal{F}(\mathcal{S})(u_1, u_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(t_l, t_p) \exp\left(-i(u_1 t_l + u_2 t_p)\right) dt_l dt_p \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(i(\gamma g_l x_l - u_1)t_l - \frac{t_l}{T_2^*}\right) \\
&\quad \times \exp\left(i(\gamma g_p x_p - u_2)t_p - \frac{t_p}{T_2^*}\right) dx_l dx_p dt_l dt_p \\
&= \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left(i(\gamma g_l x_l - u_1)t_l - \frac{t_l}{T_2^*}\right) dt_l \right\} \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left(i(\gamma g_p x_p - u_2)t_p - \frac{t_p}{T_2^*}\right) dt_p \right\} dx_l dx_p. \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables défini par

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x_l, x_p) &\longmapsto (\tau_1(x_l, x_p), \tau_2(x_l, x_p))
\end{aligned} \quad (6.26)$$

tel que

$$\begin{cases} \tau_1(x_l, x_p) = \gamma g_l x_l, \\ \tau_2(x_l, x_p) = \gamma g_p x_p. \end{cases} \quad (6.27)$$

Le Jacobien de la transformation vaut

$$J = \frac{1}{\gamma^2 g_p g_l}. \quad (6.28)$$

Posons $\tilde{I} = J I \circ \psi^{-1}$; on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{S})(u_1, u_2) &= \iint_{\Pi_c} \tilde{I}(\tau_1, \tau_2) \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left(i(\tau_1 - u_1)t_l - \frac{t_l}{T_2^*}\right) dt_l \right\} \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left(i(\tau_2 - u_2)t_p - \frac{t_p}{T_2^*}\right) dt_p \right\} d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.29)
\end{aligned}$$

On vérifie que, a étant une constante positive,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{ibt} dt = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (6.30)$$

Si l'on pose

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{T_2^*}{1 + T_2^{*2} \omega^2} + i \frac{T_2^{*2} \omega}{1 + T_2^{*2} \omega^2}, \quad (6.31)$$

on obtient

$$T(u_1, u_2) = \iint_{\Pi_c} \tilde{I}(\tau_1, \tau_2) \mathcal{L}(\tau_1 - u_1) \mathcal{L}(\tau_2 - u_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.32)$$

6.2.3 La méthode Spin-Warp

La méthode *Spin-Warp* est une variante de la Zeugmatographie de Fourier qui fut proposée en 1980 dans [38]. C'est la méthode de codage de l'image IRM la plus utilisée actuellement. Ce qui importe dans le procédé de codage par la phase c'est le produit $g_p t_p$ (voir l'expression (6.17)). Avec la Zeugmatographie de Fourier, on fait varier $g_p t_p$ en faisant varier le temps t_p d'application du gradient, son intensité g_p restant constante. Il s'avère en fait plus judicieux de faire varier l'intensité g_p du gradient de phase et de conserver une durée t_p d'application du gradient constante. (Nous noterons alors T_p la durée d'application du gradient.) On pourra consulter [75], p. 165, pour les différents avantages de la méthode Spin-Warp par rapport à la Zeugmatographie de Fourier.

Le signal recueilli en utilisant la méthode Spin-Warp a pour expression,

$$\mathcal{S}(t_l, g_p) = \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(-\frac{t_l + T_p}{T_2^*(x_l, x_p)}\right) \exp\left(i\gamma(g_l x_l t_l + g_p x_p T_p)\right) dx_l dx_p. \quad (6.33)$$

Au chapitre 7, nous considérerons la méthode Spin-Warp en présence d'inhomogénéités magnétiques (on négligera alors les phénomènes de relaxation). En effectuant une transformation de Fourier du signal perturbé, nous obtiendrons des indications sur la façon dont l'image est brouillée. Il peut être intéressant, dans un but de comparaison, de calculer ce que fournit la transformation de Fourier du signal non-perturbé. Si l'on néglige les phénomènes de relaxation, le signal recueilli en utilisant la méthode Spin-Warp a pour expression,

$$\mathcal{S}(t_l, g_p) = \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(i\gamma(g_l x_l t_l + g_p x_p T_p)\right) dx_l dx_p, \quad (6.34)$$

où I ne dépend plus que de la densité de protons au point (x_l, x_p) . On peut écrire (6.34) sous la forme,

$$\mathcal{S}(t_l, g_p) = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1} I(\gamma g_l t_l, \gamma g_p T_p), \quad (6.35)$$

où on a noté \mathcal{F}^{-1} la transformation de Fourier inverse. Ainsi l'intensité de l'image au point (u_1, u_2) , obtenue en effectuant une transformation de Fourier du signal, a pour expression

$$T(u_1, u_2) = \mathcal{F}(\mathcal{S})(u_1, u_2) = I(x_l, x_p), \quad (6.36)$$

où (u_1, u_2) et (x_l, x_p) sont liés par les relations

$$\begin{cases} u_1 &= \gamma g_l x_l, \\ u_2 &= \gamma T_p x_p. \end{cases} \quad (6.37)$$

Puisque I est proportionnel à la densité de protons, l'image représente la concentration en protons dans le plan de coupe sélectionné.

Chapitre 7

Modélisation du processus de création des artefacts

7.1 Origine des artefacts de susceptibilité magnétique

Nous avons décrit dans la partie précédente le processus d'acquisition de l'image IRM. Un champ magnétique statique \vec{B}_0 de l'ordre de 1 Tesla est utilisé afin de créer une aimantation macroscopique d'origine nucléaire dans les tissus biologiques. Cette aimantation est mesurée grâce à un phénomène de résonance en soumettant l'échantillon à un champ radio-fréquence \vec{B}_1 . Pour avoir un signal qui reflète la répartition spatiale des noyaux résonants, on utilise des gradients de champ magnétique. Ils permettent de créer un champ magnétique statique dont l'intensité varie (d'une façon prédéterminée) dans l'espace. Un premier gradient, le gradient de coupe, est utilisé pour sélectionner la partie (ou coupe) de l'échantillon qui doit être représentée. Les deux autres gradients servent à obtenir une dépendance spatiale de la fréquence et de la phase du signal. On conçoit aisément que des perturbations du champ magnétique vont perturber ce processus de codage de l'image. Dans ce cas l'image obtenue ne sera pas conforme à la coupe de l'échantillon étudié.

Les perturbations du champ magnétique statique ont des origines diverses. Elles peuvent être intrinsèques au système d'imagerie. Il est en effet difficile d'obtenir un champ magnétique statique \vec{B}_0 constant dans tout le volume de l'imageur, de même qu'il est difficile d'obtenir un champ magnétique d'intensité variant linéairement dans une direction donnée. Toutefois, ces inhomogénéités du champ magnétique sont connues pour un imageur donné et diverses techniques sont utilisées pour en limiter l'impact sur l'image [1], [88], [64]. Les artefacts engendrés par des imperfections des aimants sont appelés *artefacts de champ magnétique*.

Une autre source de perturbation du champ magnétique est liée à la présence dans l'échantillon étudié d'un objet dont les caractéristiques magnétiques diffèrent de façon importante du milieu biologique environnant. Il peut s'agir de cavités aérienne (fosses nasales, poumons) ou de matériaux métalliques implantés (implants dentaires [55], prothèses orthopédiques, clips vasculaires ...). Les perturbations du champ magnétique peuvent être dans ce cas localement importantes. Les déformations de l'image qui en

résultent sont appelées *artefacts de susceptibilité magnétique*. Comparés aux artefacts de champ magnétique, les artefacts de susceptibilité magnétique ont pour caractéristique le fait que la source de perturbation varie d'une expérience à l'autre. Il est donc beaucoup plus difficile de mettre en œuvre des méthodes pour les supprimer. Des particules ferromagnétiques dispersées, souvent associées à des pathologies, peuvent également produire des perturbations du champ magnétique [63].

Dans notre étude, nous nous intéressons plus particulièrement aux artefacts liés à la présence d'un implant métallique dans l'échantillon étudié. Dans ce cas le champ magnétique statique est perturbé par le champ magnétique qui est induit par l'implant métallique. On qualifie les milieux continus de diamagnétiques, paramagnétiques ou ferromagnétiques en fonction des caractéristiques de ce champ magnétique induit. On pourra consulter par exemple [60] pour les détails de la classification (et la section 1.2.3 de cette thèse). Précisons que l'IRM n'est pas accessible aux patients porteurs d'un implant de type ferromagnétique. Sous l'effet du champ magnétique \vec{B}_0 un matériau ferromagnétique est susceptible de se déplacer, occasionnant des dommages important aux tissus environnants [77], [91]. D'autre part, pour un implant de type diamagnétique le champ magnétique induit est très faible et en général n'entraîne pas de perturbation significative du champ magnétique statique. Nous nous intéressons donc aux implants métalliques de type paramagnétique. La plupart des matériaux métalliques utilisés pour la réalisation d'implants médicaux (tel le titane) sont paramagnétiques.

Prenons le cas d'une bille métallique de susceptibilité magnétique χ_m soumise à un champ magnétique statique \vec{B}_0 . L'intensité maximale du champ induit vaut (voir l'annexe B)

$$B'_{max} = \frac{2}{3}\chi_m B_0 \quad (7.1)$$

et décroît à l'extérieur de la bille comme le cube de la distance. Supposons par exemple que la bille soit en titane et soit soumise à un champ magnétique de 1 Tesla. On a alors

$$B'_{max} \approx 10^{-4} \text{ Tesla} = 1 \text{ Gauss}. \quad (7.2)$$

On observe que le champ induit est de l'ordre de grandeur du champ magnétique associé aux gradients utilisés pour le codage spatial de l'image ($g \approx 1$ Gauss par centimètre). L'origine des artefacts de susceptibilité magnétique est la suivante: le champ magnétique induit par l'implant vient s'ajouter aux gradients et entraîne une perturbation du processus de codage par les gradients. Dans ce chapitre, nous précisons de quelle manière le processus de codage de l'image décrit au chapitre précédent est perturbé. En prenant en compte dans la modélisation l'existence d'un champ magnétique supplémentaire, le champ induit par l'implant, nous aboutissons à un algorithme permettant la simulation numérique des artefacts.

Mentionnons que les auteurs dans [16] ont étudié des artefacts liés à une perturbation de l'onde radio-fréquence \vec{B}_1 par des courants de Foucault à l'intérieur d'implants faiblement magnétiques mais bons conducteurs tel le cuivre. Nous n'envisageons pas ce type d'artefact dans notre étude. Signalons enfin que dans l'étude qui suit aucune hypothèse concernant

l'origine du champ magnétique perturbateur n'est faite. Aussi la modélisation sera valable aussi bien pour les perturbations liées à la présence d'un implant que pour celle dues à des inhomogénéités du champ magnétique de l'aimant.

7.2 Effets des inhomogénéités de champ magnétique

7.2.1 Déformation du plan de coupe

Cas d'une onde mono-fréquentielle

Lorsqu'un champ magnétique \vec{B}' se superpose au champ magnétique principal \vec{B}_0 et au gradient \vec{G}_c , le champ total en un point $P \in \mathbb{R}^3$ vaut

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_0 + \vec{G}_c(P) + \vec{B}'(P). \quad (7.3)$$

Rappelons que \vec{B}_0 définit l'axe \vec{z} du repère associé à l'imageur et que \vec{G}_c est orienté selon \vec{B}_0 . D'autre part, dans le cadre de notre étude les champs perturbateurs représentés par \vec{B}' sont de faible intensité par rapport à \vec{B}_0 (mais de même ordre de grandeur que les gradients, soit de 1 à 10 Gauss). Ceci nous amène à faire l'approximation,

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= (B_0 + G_c(P) + B'_z(P))\vec{z} + B'_x(P)\vec{x} + B'_y(P)\vec{y} \\ &\approx (B_0 + G_c(P) + B'_z(P))\vec{z}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Par suite, on peut considérer que la fréquence de Larmor au point P vaut

$$\nu_l(P) = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + G_c(P) + B'_z(P)). \quad (7.5)$$

Supposons que l'on veuille obtenir l'image d'un plan Π_c de cote c dans la direction \vec{n}_c . On ajuste la fréquence ν_c de l'onde radio-fréquence émise simultanément au gradient de coupe à la valeur

$$\nu_c = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_c c). \quad (7.6)$$

Toutefois compte-tenu du champ parasite \vec{B}' les noyaux réellement mis en résonance sont les noyaux pour lesquels

$$\nu_l(P) = \nu_c, \quad (7.7)$$

autrement dit, les noyaux mis en résonance sont situés en des points pour lesquels

$$G_c(P) + B'_z(P) = g_c c. \quad (7.8)$$

Les noyaux mis en résonance ne sont donc pas ceux du plan de coupe Π_c qui devait être représenté.

Cherchons à expliciter la relation (7.8). Soit (x, y, z) les coordonnées de P dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à l'imageur et (n_1, n_2, n_3) les composantes du vecteur \vec{n}_c , direction du gradient de coupe. Soit $c'(P)$ la cote d'un point P dans la direction \vec{n}_c . On a, voir la figure 7.1,

$$c'(P) = \vec{OP} \cdot \vec{n}_c = n_1 x + n_2 y + n_3 z. \quad (7.9)$$

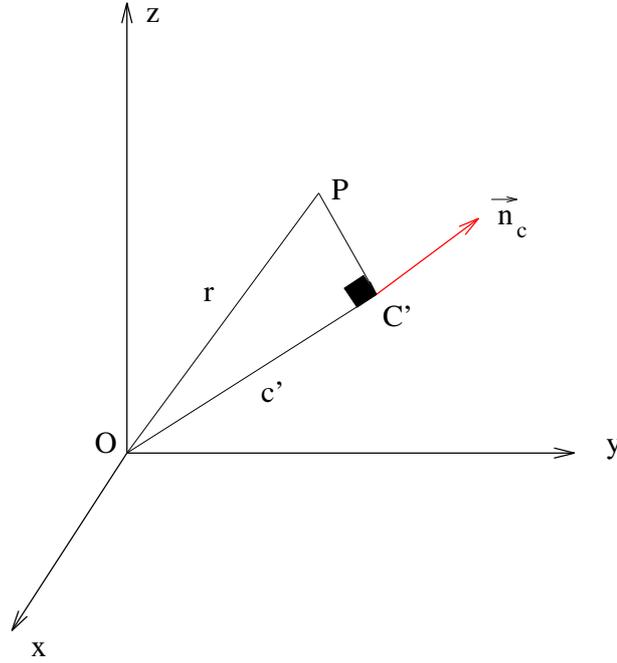


Figure 7.1:

Le gradient de coupe en ce point a pour expression

$$G_c(P) = g_c c'(P) = g_c (n_1 x + n_2 y + n_3 z). \quad (7.10)$$

L'équation (7.8) s'écrit encore

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + \frac{B'_z(x, y, z)}{g_c} = c. \quad (7.11)$$

Ainsi, les points de l'échantillon reproduits sur l'image sont les points appartenant à la surface d'équation (7.11) et non pas ceux du plan Π_c d'équation

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = c. \quad (7.12)$$

On met en évidence selon la direction \vec{n}_c un écart entre le point de l'échantillon reproduit sur l'image et celui que l'on souhaitait voir reproduit. Cet écart vaut

$$\Delta c(P) = c - c'(P) = \frac{B'_z(P)}{g_c}. \quad (7.13)$$

On constate que cette distorsion est proportionnelle à la composante longitudinale du champ perturbateur et que pour une perturbation \vec{B}' donnée elle est d'autant plus faible que l'intensité du gradient de coupe \vec{G}_c est importante.

Plaçons-nous dans le repère $R_c = \{C, \vec{n}_l, \vec{n}_p, \vec{n}_c\}$ lié au plan de coupe, voir la figure 6.5. Soit (x_l, x_p, x_c) les coordonnées de P dans ce repère. On a

$$\begin{aligned} c'(P) &= \overline{OC'} = \overline{OP} \cdot \vec{n}_c = (\overline{OC} + \overline{CP}) \cdot \vec{n}_c \\ &= c + x_c. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ainsi, la relation (7.8) se réécrit en fonction des coordonnées dans le repère associé au plan de coupe

$$g_c (c + x_c) + B'_z(x_l, x_p, x_c) = g_c c, \quad (7.15)$$

soit

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = 0. \quad (7.16)$$

Par la suite, le repère qui sera privilégié pour les calculs sera le repère R_c lié au plan de coupe.

Nous avons mis en évidence que les hétérogénéités du champ magnétique perturbent la relation "espace-fréquence" de la façon suivante: les noyaux excités, répartis dans l'objet sur une surface à priori non plane qui dépend uniquement de la nature des hétérogénéités magnétiques, sont reproduits au niveau de l'image comme provenant d'un même plan. Nous nommerons dans la suite *surface de coupe* cette surface par analogie avec le terme plan de coupe.

Cas d'une onde pluri-fréquentielle

En pratique l'onde radio-fréquence possède une largeur de bande $\Delta\nu_c$ autour de la fréquence ν_c . On excite l'ensemble des noyaux dont la fréquence de Larmor vérifie

$$\nu_l(P) \in \left[\nu_c - \frac{\Delta\nu_c}{2}; \nu_c + \frac{\Delta\nu_c}{2} \right], \quad (7.17)$$

c'est-à-dire les noyaux situés en des points P tels que

$$g_c \left(c - \frac{e_c}{2} \right) \leq G_c(P) + B'_z(P) \leq g_c \left(c + \frac{e_c}{2} \right), \quad (7.18)$$

où $e_c = \frac{2\pi}{\gamma} \frac{\Delta\nu_c}{g_c}$. On montre que les noyaux mis en résonance sont situés aux points P de coordonnées (x_l, x_p, x_c) dans le repère R_c tels que

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta \in \left[-\frac{e_c}{2}; \frac{e_c}{2} \right]. \quad (7.19)$$

7.2.2 Perturbation du codage de l'image

Si des hétérogénéités magnétiques \vec{B}' existent pendant l'enregistrement du signal, le champ magnétique statique total vaut alors

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_0 + \vec{G}_l(P) + \vec{B}'(P). \quad (7.20)$$

La fréquence du signal de résonance donnée par la relation de Larmor (6.1) vaut, compte tenu de l'approximation (7.4),

$$\nu(P) = \frac{\gamma}{2\pi}(g_l x_l + B'_z(x_l, x_p, x_c)). \quad (7.21)$$

De même, si ces hétérogénéités magnétiques existent pendant la période où est appliqué le gradient de phase, le champ magnétique total au point P vaut pendant la durée T_p d'application du gradient

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_0 + \vec{G}_p(P) + \vec{B}'(P). \quad (7.22)$$

Par suite, les noyaux situés au point P émettent un signal de résonance dont la phase vaut

$$\phi(P) = 2\pi\nu(P)T_p = \gamma(g_p x_p + B'_z(x_l, x_p, x_c)) T_p. \quad (7.23)$$

Signalons que dans les expressions (7.21) et (7.23), l'origine des fréquences et celle des phases est choisie de sorte que le terme constant $\frac{\gamma}{2\pi}B_0$ ou $\gamma B_0 T_p$ n'apparaisse pas. Nous reviendrons ultérieurement sur les renseignements que l'on peut déduire des expressions (7.21) et (7.23) en ce qui concerne la description du phénomène de création des artefacts. Toutefois, on peut déjà s'apercevoir que, puisque la fréquence et la phase du signal servent à coder la position des noyaux dans le plan de coupe, les hétérogénéités magnétiques vont entraîner des écarts de position.

7.3 Forme du signal IRM en présence d'inhomogénéités magnétiques

Nous nous intéressons à deux séquences d'imagerie particulières, la séquence Spin-Écho et la séquence Écho de Gradient. Deux raisons motivent ce choix. D'une part, ces séquences sont à la base de nombreuses autres séquences d'imagerie. D'autre part, les artefacts générés sont très dissemblables pour ces deux séquences.

7.3.1 La séquence Spin-Écho

La technique de Spin-Écho consiste à émettre une impulsion radio-fréquence 90° suivie d'une impulsion 180° au bout d'un temps $\frac{T_E}{2}$. On obtient alors un écho de spin dont l'intensité est maximale au temps T_E . Si l'on choisit l'origine du temps au maximum de l'écho, le signal a pour expression [87],

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t_l, g_p) = & \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(-\frac{T_E}{T_2(x_l, x_p)}\right) \exp\left(-\frac{t_l}{T_2^*(x_l, x_p)}\right) \\ & \times \exp\left(i\gamma(g_l x_l t_l + g_p x_p T_p)\right) dx_l dx_p. \end{aligned} \quad (7.24)$$

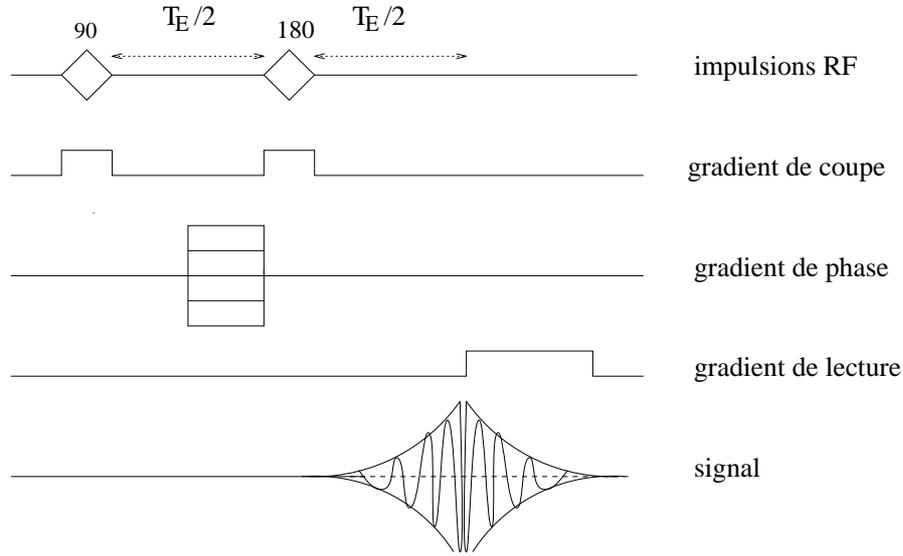


Figure 7.2: La séquence Spin-Écho

7.3.2 La séquence Écho de Gradient

La technique de l'Écho de Gradient est à la base de nombreuses séquences d'imagerie rapide. Par rapport à la séquence Spin-Écho, l'impulsion radio-fréquence 90° n'est plus suivie de l'impulsion de 180° . L'écho est obtenu en appliquant un gradient. On observe alors au bout du temps T_E un écho (l'écho de gradient) dont l'amplitude suit la décroissance en T_2^* du moment magnétique transversal. Si l'on choisit l'origine du temps au maximum de l'écho, le signal a pour expression,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t_l, g_p) = & \iint_{\Pi_c} I(x_l, x_p) \exp\left(-\frac{T_E}{T_2(x_l, x_p)}\right) \exp\left(-\frac{t_l}{T_2^*(x_l, x_p)}\right) \\ & \times \exp\left(i\gamma(g_l x_l t_l + g_p x_p T_p)\right) dx_l dx_p. \end{aligned} \quad (7.25)$$

On remarquera que le signal IRM obtenu avec la séquence Écho de Gradient a la même forme que celui obtenu avec la séquence Spin-Écho. L'intérêt de l'écho de gradient est de permettre une acquisition de l'image plus rapide. L'inconvénient est une moins bonne compensation des inhomogénéités du champ magnétique qu'en Spin-Écho. Aussi, lorsque nous prendrons en compte les inhomogénéités magnétiques, la forme de ces deux signaux différera.

7.3.3 Forme du signal IRM

Par la suite, nous ne prendrons plus en compte les phénomènes de relaxation dans notre étude. Nous considérons les deux séquences que nous venons de décrire: la séquence Spin-

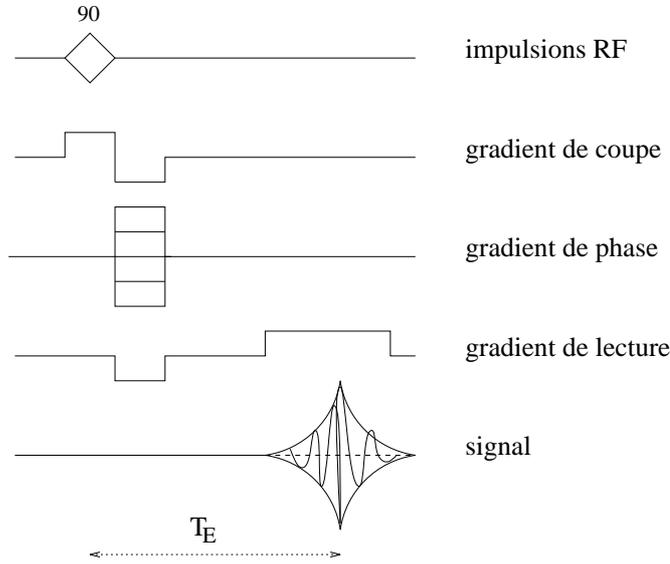


Figure 7.3: La séquence Écho de Gradient

Écho et la séquence Écho de Gradient dans le cadre de la technique d'imagerie Spin-Warp (voir la section 6.2.3). Remarquons tout d'abord que les hétérogénéités magnétiques ont en fait cours pendant toute la durée de la séquence, c'est-à-dire pendant une durée $\tau = T_E$ et non pas seulement pendant la période où est appliqué le gradient de phase. Le déphasage du signal dû aux hétérogénéités magnétiques est donc donné au point P par

$$\phi_m(P) = \gamma B'_z(P) T_E \quad (7.26)$$

et le déphasage total par

$$\phi(P) = \gamma(g_p x_p T_p + B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E). \quad (7.27)$$

Pour la séquence Spin-Écho les déphasages introduits par les hétérogénéités magnétiques sont en fait parfaitement compensés au moment d'enregistrer le signal (c'est l'un des avantages de cette séquence). Par contre ce n'est pas le cas pour la séquence Écho de Gradient. Nous traiterons simultanément les deux possibilités en introduisant un coefficient k_d que nous nommerons *coefficient de déphasage* valant 0 dans le cas d'une séquence Spin-Écho et 1 dans le cas d'une séquence Écho de Gradient. Le déphasage sera donc donné au point P par

$$\phi(P) = \gamma(g_p x_p T_p + k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E). \quad (7.28)$$

Si des hétérogénéités magnétiques \vec{B}' existent au cours de la séquence, la forme du signal (6.34) doit être modifiée de la manière indiquée aux sections 7.2.1 et 7.2.2. Il a pour

expression

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t_l, g_p) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p)) \\ &\quad \times \exp\{i \gamma [g_l x_l + B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p))] t_l\} \\ &\quad \times \exp\{i \gamma [g_p x_p T_p + k_d B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p)) T_E]\} dx_l dx_p \end{aligned} \quad (7.29)$$

où x_c désigne une solution de l'équation

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = 0. \quad (7.30)$$

Ici I est proportionnel à la densité de protons au point considéré. Dans l'écriture adoptée pour \mathcal{S} , nous supposons implicitement que la solution de (7.30) est unique. Toutefois, il peut exister plusieurs solutions à (7.30). Le développement que nous allons effectuer restera valable sous réserve d'ajouter la sommation sur les différentes solutions dans l'expression (7.29) de \mathcal{S} .

Afin d'alléger l'écriture, on écrira $B_z^*(x_l, x_p)$ pour $B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p))$ et $I^*(x_l, x_p)$ pour $I(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p))$.

7.4 Analyse mathématique du processus de création des artefacts

Pour simuler le processus de création des artefacts nous allons effectuer la transformée de Fourier du signal \mathcal{S} , opération qui est réalisée par le système informatique de l'imageur pour obtenir l'image. On peut vérifier que \mathcal{S} est continue et bornée. Par suite \mathcal{S} appartient à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dual topologique de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ des fonctions complexes sur \mathbb{R}^2 indéfiniment dérivables, à décroissance rapide (décroissant à l'infini plus vite que l'inverse de tout polynôme, de même que toutes les dérivées de la fonction).

Soit T la transformée de Fourier de \mathcal{S} . On a, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= \langle \mathcal{S}, \hat{\phi} \rangle \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(t_l, g_p) \hat{\phi}(t_l, g_p) dt_l dg_p \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma (g_l x_l + B_z^*(x_l, x_p)) t_l\} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{i \gamma (g_p x_p T_p + k_d B_z^*(x_l, x_p) T_E)\} dx_l dx_p \right\} \hat{\phi}(t_l, g_p) dt_l dg_p. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Permutons l'ordre d'intégration; on obtient,

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma k_d B_z^*(x_l, x_p) T_E\} \\ &\quad \times \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i \gamma [(g_l x_l + B_z^*(x_l, x_p)) t_l + g_p x_p T_p]\} \right. \\ &\quad \left. \times \hat{\phi}(t_l, g_p) dt_l dg_p \right\} dx_l dx_p. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Le terme entre accolades correspond à la transformée de Fourier inverse de la fonction $\hat{\phi}$ au point $(\gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \gamma x_p T_p)$. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i \gamma [(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p))t_l + g_p x_p T_p]\} \hat{\phi}(t_l, g_p) dt_l dg_p \\ = 4\pi^2 \phi(\gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \gamma x_p T_p). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= 4\pi^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma k_d B_z'^*(x_l, x_p) T_E\} \\ &\times \phi(\gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \gamma T_p x_p) dx_l dx_p. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Considérons le changement de variables défini par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_l, x_p) &\longmapsto (\tau_1(x_l, x_p), \tau_2(x_l, x_p)) \end{aligned} \quad (7.35)$$

où

$$\begin{cases} \tau_1(x_l, x_p) = \gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \\ \tau_2(x_l, x_p) = \gamma T_p x_p. \end{cases} \quad (7.36)$$

La fonction ψ n'est a priori pas bijective (en raison du terme $B_z'^*(x_l, x_p)$). Par contre, on peut partitionner \mathbb{R}^2 en un nombre fini N d'ouverts U_j tel que $\forall j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \psi_j : U_j &\longrightarrow V_j \\ (x_l, x_p) &\longmapsto \psi_j(x_l, x_p) \end{aligned} \quad (7.37)$$

soit bijective. On note J_j le jacobien de la transformation ψ_j ,

$$J_j(x_l, x_p) = \frac{1}{\gamma^2 T_p \left(g_l + \frac{\partial}{\partial x_l} B_z'^*(x_l, x_p) \right)}. \quad (7.38)$$

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= 4\pi^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=1}^N I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma k_d B_z'^*(x_l, x_p) T_E\} \right. \\ &\quad \left. \times \phi(\gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \gamma T_p x_p) \mathbb{1}_{U_j}(x_l, x_p) \right\} dx_l dx_p \\ &= 4\pi^2 \sum_{j=1}^N \iint_{U_j} I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma k_d B_z'^*(x_l, x_p) T_E\} \\ &\quad \times \phi(\gamma(g_l x_l + B_z'^*(x_l, x_p)), \gamma T_p x_p) dx_l dx_p. \end{aligned} \quad (7.39)$$

où $\mathbb{1}_{U_j}$ désigne la fonction indicatrice de l'ouvert U_j .

Afin d'alléger l'écriture, notons

$$\tilde{I}(x_l, x_p) = I^*(x_l, x_p) \exp\{i \gamma k_d B'_z(x_l, x_p) T_E\}$$

et

$$I_j^*(\tau_1, \tau_2) = 4\pi^2 \tilde{I}(\psi_j^{-1}(\tau_1, \tau_2)) J_j(\psi_j^{-1}(\tau_1, \tau_2)).$$

Effectuons le changement de variables (7.36),

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= \sum_{j=1}^N \iint_{V_j} \phi(\tau_1, \tau_2) I_j^*(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^N I_j^*(\tau_1, \tau_2) \mathbb{1}_{V_j}(\tau_1, \tau_2) \right) \phi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^N I_j^* \mathbb{1}_{V_j}, \phi \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.40)$$

On obtient finalement

$$T = \mathcal{F}(\mathcal{S}) = \sum_{j=1}^N I_j^* \mathbb{1}_{V_j} \quad (7.41)$$

ou encore

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= 4\pi^2 \sum_{j=1}^N I^*(\psi_j^{-1}(\tau_1, \tau_2)) \exp\{i \gamma k_d B'_z(\psi_j^{-1}(\tau_1, \tau_2)) T_E\} \\ &\quad \times J_j(\psi_j^{-1}(\tau_1, \tau_2)) \mathbb{1}_{V_j}(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (7.42)$$

L'intensité du signal au point (τ_1, τ_2) de l'image est donc donnée par

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{\substack{(x_l, x_p, x_c) \\ \text{solution de (7.44)}}} I(x_l, x_p, x_c) \exp\{i \gamma k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E\} \\ &\quad \times \frac{1}{\left| 1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c) \right|}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

où

$$\begin{cases} x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l} = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = 0. \end{cases} \quad (7.44)$$

Notons que cette dernière écriture inclut le cas où (7.30) admet plusieurs solutions. De plus, les coefficients γ dans (7.44) et $\frac{4\pi^2}{\gamma^2 T_p g_l}$ dans l'expression du jacobien ont été omis (ils peuvent être interprétés comme des coefficients de changement d'échelle entre l'image et la coupe de l'échantillon).

Généralisation au cas où l'onde est pluri-fréquentielle

Nous avons supposé dans le développement précédent que l'onde excitatrice était mono-fréquentielle. Cela n'est en pratique pas le cas. Il y a mise en résonance des noyaux appartenant à un certain volume de l'échantillon. Dans le repère R_c , les noyaux mis en résonance sont situés en des points (x_l, x_p, x_c) vérifiant

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta \in \left[-\frac{e_c}{2}, \frac{e_c}{2}\right]. \quad (7.45)$$

Dans la suite $x_c(x_l, x_p, \zeta)$ désignera une solution de cette équation avec la convention adoptée en (7.30).

Le signal a pour expression,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t_l, g_p) &= \int_{-\frac{1}{2}e_c}^{\frac{1}{2}e_c} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta)) \\ &\times \exp\{i\gamma [g_l x_l + B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta))] t_l\} \\ &\times \exp\{i\gamma [g_p x_p T_p + k_d B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta)) T_E]\} dx_l dx_p d\zeta \end{aligned} \quad (7.46)$$

où x_c est solution de (7.45). Le raisonnement concernant la transformée de Fourier du signal effectué précédemment reste valable. Il faut alors lire

$$\begin{aligned} I^*(x_l, x_p) &= I(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta)) \\ B'_z{}^*(x_l, x_p) &= B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta)) \end{aligned}$$

et ajouter la sommation relativement à la variable ζ sur l'intervalle $[-\frac{e_c}{2}, \frac{e_c}{2}]$. L'intensité du signal au point (τ_1, τ_2) de l'image est donnée par

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= \int_{-\frac{1}{2}e_c}^{\frac{1}{2}e_c} \sum_{\substack{(x_l, x_p, x_c) \\ \text{solution de (7.45)}}} I(x_l, x_p, x_c) \exp\{i\gamma k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E\} \\ &\times \frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)|} d\zeta, \end{aligned} \quad (7.47)$$

où

$$\begin{cases} x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l} = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta. \end{cases} \quad (7.48)$$

Remarque 7.4.1 Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette étude aux artefacts de susceptibilité magnétique. Toutefois dans la modélisation qui vient d'être effectuée, aucune propriété spécifique concernant l'origine des inhomogénéités du champ magnétique statique n'a été exploitée. Le modèle est donc à même de prendre en compte les inhomogénéités du champ statique quelle que soit leur origine. En particulier, nous serons à même de simuler les artefacts liés aux défauts d'homogénéités du champ principal \vec{B}_0 ou des gradients. Pour ce dernier cas, il faudra toutefois tenir compte du fait que les inhomogénéités n'apparaissent que lorsque les gradients sont appliqués.

7.5 Interprétation du processus de création des artefacts

À partir de la modélisation qui vient d'être effectuée, nous allons montrer que l'on retrouve l'interprétation couramment admise des artefacts de susceptibilité magnétique. Une analyse détaillée des phénomènes de distorsion d'image a été effectuée par S. Beaumont dans sa thèse [14]. On peut consulter également les travaux de Ludeke *et al.* [68], Ericsson *et al.* [41] ou ceux plus récents de J.F. Schenck [86]. Nous allons faire le lien entre l'analyse des artefacts qui est faite dans ces publications et le résultat de notre modélisation.

7.5.1 Distorsions géométriques

Considérons le système (7.48).

(a) – La troisième équation nous montre que la présence d'un champ magnétique perturbateur \vec{B}' entraîne un écart, dans la direction du gradient de coupe, entre le point P reproduit et sa position supposée. Cet écart vaut

$$\Delta c(P) = \frac{B'_z(P)}{g_c}. \quad (7.49)$$

On peut constater que cet écart sera d'autant plus faible que l'intensité g_c du gradient de coupe sera importante. On retrouve là un fait bien connu: une façon de diminuer l'importance des artefacts consiste à utiliser des gradients de forte intensité. Des raisons technologiques limitent toutefois l'intensité des gradients. La présence d'inhomogénéités magnétiques se traduit donc par une déformation du plan de coupe.

(b) – La première et la deuxième équation du système (7.48) nous permettent d'appréhender de façon plus précise la manière dont la perturbation du codage par la phase et par la fréquence se traduit en définitive sur l'image. En l'absence de perturbation du champ magnétique, un point P de coordonnées (x_l, x_p, x_c) dans le repère associé au plan de coupe est représenté sur l'image (au changement d'échelle près) à la position $(\tau_1 = x_l, \tau_2 = x_p)$. Si un champ magnétique perturbateur \vec{B}' existe pendant la période de codage de l'image, ce point P va être représenté sur l'image à la position

$$(\tau_1 = x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l}, \tau_2 = x_p). \quad (7.50)$$

Les modifications liées à la perturbation du codage en fréquence se traduisent par un déplacement selon la direction du gradient de lecture de la position sur l'image du point P reproduit. L'importance du déplacement est donnée par

$$\Delta l(P) = \frac{B'_z(P)}{g_l}. \quad (7.51)$$

On remarquera l'absence de déformation dans la direction du gradient de phase: c'est là l'un des avantages bien connu de la méthode Spin-Warp par rapport à la Zeugmatographie de Fourier, voir [75], p.165 et [78]. On peut vérifier que si l'on a recours à la Zeugmatographie de Fourier, des perturbations \vec{B}' du champ magnétique vont entraîner une déformation de l'image à la fois selon la direction du gradient de lecture et la direction du gradient de phase. Le point P de coordonnées (x_l, x_p, x_c) est représenté sur l'image à la position

$$(\tau_1 = x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l}, \tau_2 = x_p + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_p}). \quad (7.52)$$

(c) – Outre les écarts que nous venons de mettre en évidence entre la position réelle et la position sur l'image d'un point du plan de coupe, les équations (7.48) montrent qu'en raison des inhomogénéités magnétiques, les distances ne sont pas conservées sur l'image. Soyons plus précis. Considérons deux points $P = (x_l, x_p, x_c)$ et $P' = (x'_l, x'_p, x'_c)$ appartenant à la surface de coupe et séparés dans l'échantillon par une distance δ . Nous supposons que

$$(x'_l = x_l + \delta_l, x'_p = x_p + \delta_p, x'_c = x_c + \delta_c). \quad (7.53)$$

Soient (τ_1, τ_2) et (τ'_1, τ'_2) les positions de ces deux points sur l'image. En l'absence d'inhomogénéités magnétiques, ces deux points sont reproduits sur l'image à la position $(\tau_1 = x_l, \tau_2 = x_p)$ et la distance séparant ces deux points sur l'image vaut $\sqrt{\delta_l^2 + \delta_p^2}$. Si des inhomogénéités magnétiques existent, les deux points sont reproduits sur l'image à la position

$$\begin{aligned} \tau_1 &= x_l + \frac{1}{g_l} B'_z(x_l, x_p, x_c), \\ \tau_2 &= x_p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= x'_l + \frac{1}{g_l} B'_z(x'_l, x'_p, x'_c), \\ \tau'_2 &= x'_p. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= \tau_1 + \delta_l + \frac{1}{g_l} (B'_z(P') - B'_z(P)), \\ \tau'_2 &= \tau_2 + \delta_p. \end{aligned}$$

La distance séparant les deux points à l'image vaut

$$\Delta = \sqrt{\left(\delta_l + \frac{1}{g_l} (B'_z(P') - B'_z(P))\right)^2 + \delta_p^2}, \quad (7.54)$$

et est différente de la distance δ entre les deux points à l'intérieur de l'échantillon. On observe qu'en présence de perturbations magnétiques, les distances ne sont pas conservées à l'image. Si le champ magnétique perturbateur \vec{B}' admet des variations importantes alors deux points de l'échantillon proches l'un de l'autre peuvent se retrouver représentés sur l'image loin l'un de l'autre, et inversement. Ce phénomène a lieu par exemple pour deux points situés de part et d'autre d'une surface séparant deux milieux aux propriétés magnétiques très différentes (l'implant métallique et les tissus biologiques dans notre cas). Il est en effet bien connu qu'à l'interface entre deux milieux le champ magnétique est discontinu (voir la section 1.1.3 de la partie traitant du problème de la magnétostatique), le saut étant proportionnel à la différence de susceptibilité magnétique si les deux milieux sont des milieux magnétiques parfaits.

7.5.2 Distorsions d'intensité

La relation (7.47) met en évidence des perturbations de l'intensité de l'image.

(a) – Ces perturbations sont liées pour une part à la déformation du plan de coupe (terme $I(x_l, x_p, x_c)$). Deux situations peuvent avoir lieu :

- s'il existe plusieurs solutions au système (7.48), plusieurs points de l'objet sont associés à un même point image (τ_1, τ_2, ζ) ; il y a alors apparition d'un hypersignal,
- si le système (7.48) n'admet pas de solution, il n'y a pas de points de l'objet à correspondre au point image (τ_1, τ_2, ζ) . On obtient alors un hyposignal.

(b) – Des modifications de l'intensité de l'image sont également liées aux variations du champ \vec{B}' (ou plus exactement sa composante B'_z) suivant la direction du gradient de lecture. Cette perturbation est représentée par le terme

$$\frac{1}{\left|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)\right|}. \quad (7.55)$$

Si B'_z est croissante suivant la direction du gradient de lecture alors

$$\frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c) > 0$$

et on aura un hyposignal,

$$\frac{1}{\left|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)\right|} < 1. \quad (7.56)$$

Par contre si B'_z est décroissante suivant la direction du gradient de lecture alors

$$\frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c) < 0$$

et on aura un hypersignal,

$$\frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)|} > 1 \quad . \quad (7.57)$$

(c) – Enfin les hétérogénéités magnétiques \vec{B}' peuvent être à l'origine dans le cas de la séquence Écho de gradient d'une modification supplémentaire de l'intensité signal représentée par le terme

$$\exp\{i \gamma B'_z(x_l, x_p, x_c(x_l, x_p, \zeta)) T_E\}. \quad (7.58)$$

Les franges d'intensité caractéristiques des artefacts de susceptibilité magnétique en Écho de Gradient sont liées à ce terme.

7.6 Mise en évidence des artefacts

Nous souhaitons illustrer l'analyse concernant les artefacts de susceptibilité magnétique qui vient d'être effectuée. Nous supposons qu'un implant, une bille de rayon R constituée d'un matériau de type paramagnétique, est présent dans l'échantillon soumis à l'IRM. Nous faisons coïncider l'origine (arbitraire) O du repère lié à l'imageur avec le centre de la bille. Soumis à un champ magnétique statique \vec{B}_0 , la bille est source d'un champ induit \vec{B}' donné par, (voir l'annexe B),

$$\begin{cases} \vec{B}'(P) = \frac{2}{3} \chi_m \vec{B}_0 & \text{à l'intérieur de la bille,} \\ \vec{B}'(P) = \frac{1}{3} \chi_m R^3 \left(\frac{3 (\vec{B}_0 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{B}_0}{r^3} \right) & \text{à l'extérieur de la bille,} \end{cases} \quad (7.59)$$

où $\vec{r} = \vec{OP}$.

Par la suite, nous supposerons que le rayon de la bille vaut 1 cm, que l'intensité du champ magnétique \vec{B}_0 vaut 0.5 Tesla et que les gradients sont de 1 Gauss par cm.

7.6.1 Déformation du plan de coupe

Supposons que l'on veuille obtenir l'image d'un plan Π_c de cote c dans la direction $\vec{n}_c = (n_1, n_2, n_3)$. Si des inhomogénéités magnétiques existent, les noyaux mis en résonance sont situés en des points solution de l'équation (7.11). Dans la situation qui nous intéresse,

ces noyaux sont situés en des points dont les coordonnées dans le repère lié à l'imageur satisfont,

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 x + n_2 y + n_3 z + \frac{2 \chi_m B_0}{3 g_c} = c \quad \text{si } r < R, \\ n_1 x + n_2 y + n_3 z + \beta_c \left(\frac{3 (\vec{z} \cdot \vec{r})^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) = c \quad \text{si } r > R, \end{array} \right. \quad (7.60)$$

avec $\beta_c = \frac{\chi_m B_0 R^3}{3 g_c}$.

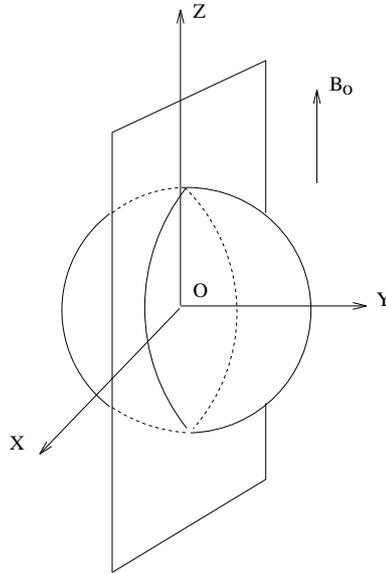


Figure 7.4: position du plan de coupe $y = y_0$ dans la situation envisagée.

Supposons que l'on souhaite obtenir une image de la coupe $y = y_0$ pour les valeurs suivantes de y_0 : 0, 0.5 cm et 1.5 cm, voir la figure 7.4. Nous présentons la forme de la surface de coupe, c'est-à-dire les noyaux qui seront réellement mis en résonance, dans le cas où la bille est constituée d'un matériau de susceptibilité magnétique 10^{-3} usi (figure 7.5), ce qui correspond approximativement à la valeur de la susceptibilité magnétique du Luxachrome, matériau très utilisé pour la réalisation d'implants dentaires, puis (figure 7.6) dans le cas où la bille est constituée d'un matériau de susceptibilité magnétique $2 \cdot 10^{-4}$ usi, valeur qui correspond approximativement au Titane.

On remarquera que la surface représentant la déformée du plan de coupe n'est a priori pas continue, ce qui entraînera un certain nombre de difficultés lorsque l'on cherchera à calculer numériquement l'artefact.

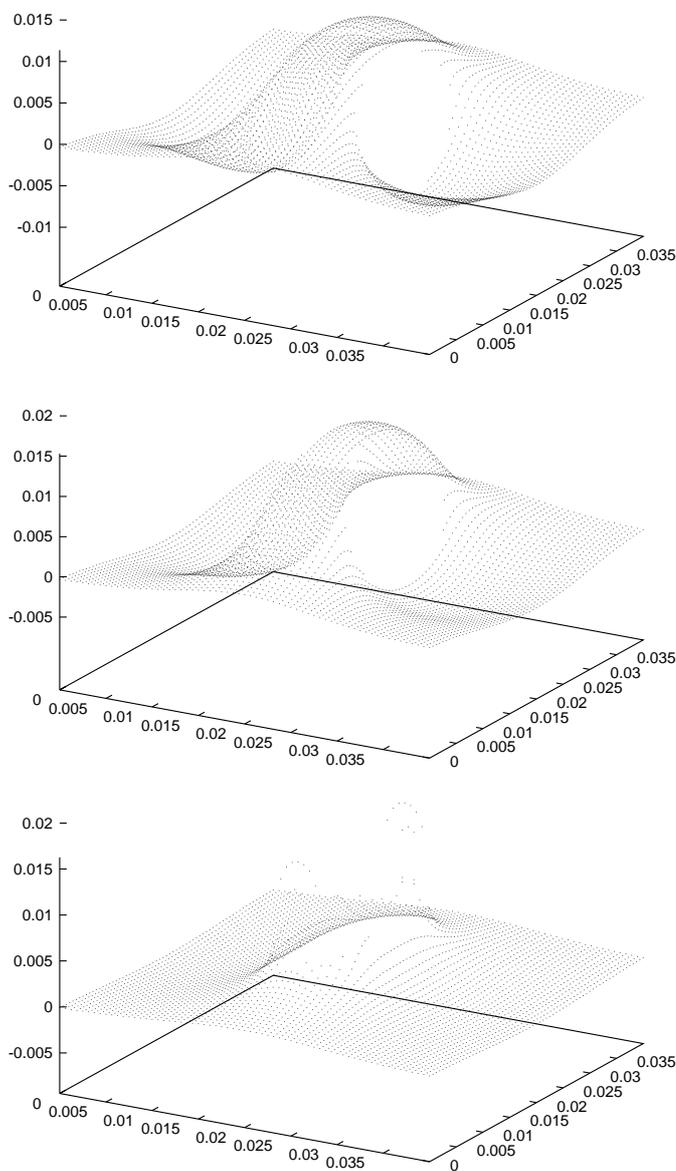


Figure 7.5: exemples de déformation du plan de coupe. Cas d'une bille de rayon 1 cm et de susceptibilité magnétique 10^{-3} usi. L'unité de longueur est le mètre. La figure du haut correspond à la déformée de la coupe $y_0 = 0$. Celle du milieu correspond à la déformée de la coupe $y_0 = 0.5$ cm et celle du bas à la déformée de la coupe $y_0 = 1.5$ cm .

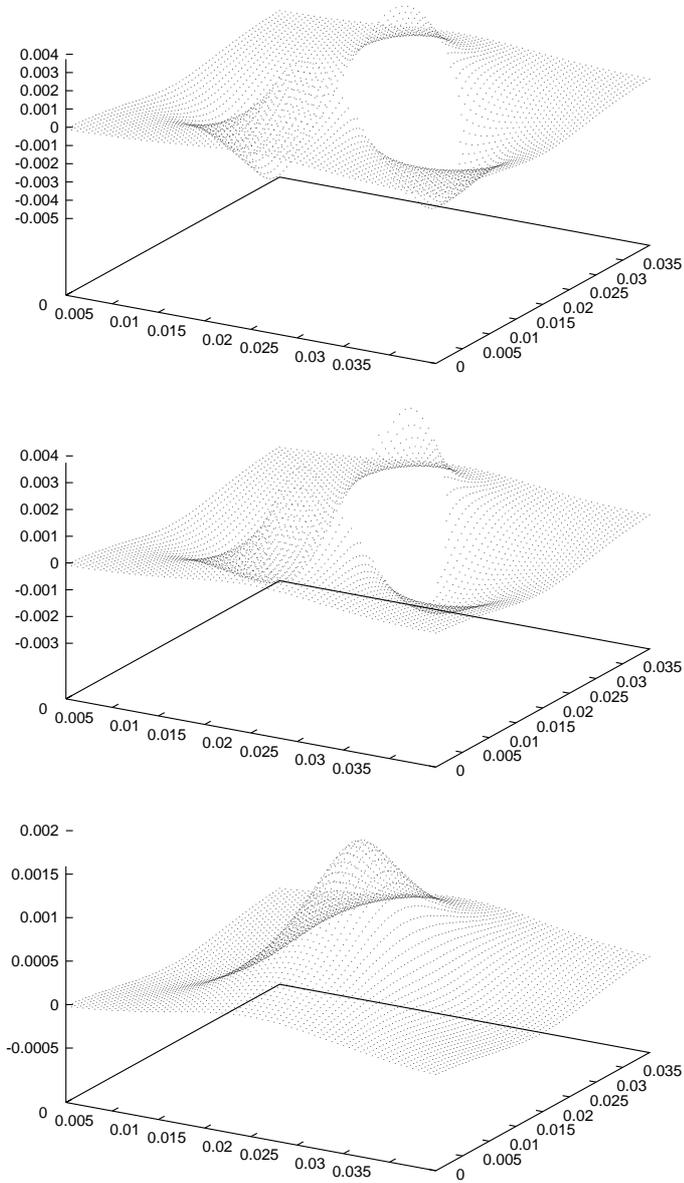


Figure 7.6: exemples de déformation du plan de coupe. Cas d'une bille de rayon 1 cm et de susceptibilité magnétique $2 \cdot 10^{-4}$ usi. L'unité de longueur est le mètre. La figure du haut correspond à la déformée de la coupe $y_0 = 0$. Celle du milieu correspond à la déformée de la coupe $y_0 = 0.5$ cm et celle du bas à la déformée de la coupe $y_0 = 1.5$ cm .

7.6.2 Distorsions géométriques

Nous avons montré que les distorsions liées à la perturbation du codage en fréquence se traduisent par un déplacement selon la direction du gradient de lecture. Si des inhomogénéités magnétiques \vec{B}' existent, le point P de la surface de coupe de coordonnées (x_l, x_p, x_c) est associé au pixel (τ_1, τ_2) donné par

$$\begin{cases} \tau_1 = x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l}, \\ \tau_2 = x_p, \end{cases} \quad (7.61)$$

au lieu du pixel $(\tau_1^0 = x_l, \tau_2^0 = x_p)$.

On a représenté à la figure 7.7 ces distorsions géométriques pour les six cas envisagés précédemment. Plus précisément, on a représenté pour l'ensemble des points P de la surface de coupe les points de l'image qui leurs étaient associés. On remarque qu'à certains pixels sont associés plusieurs points de l'échantillon. Il y a également des pixels qui ne sont associés à aucun point de l'échantillon.

7.7 Simulation numérique des artefacts

L'algorithme permettant la simulation des artefacts est obtenu à partir de la modélisation qui vient d'être effectuée.

7.7.1 Description de la méthode

La situation envisagée est la suivante. On cherche à réaliser l'image d'une coupe d'épaisseur e_c d'un échantillon à l'aide d'une séquence Spin-Écho ou Écho de Gradient. On suppose qu'il existe un champ magnétique perturbateur \vec{B}' connu lié à la présence dans l'échantillon étudié d'un implant métallique. Nous souhaitons calculer l'intensité T de l'image au point (pixel) (τ_1, τ_2) .

On se place dans le repère $(C, \vec{n}_l, \vec{n}_p, \vec{n}_c)$ lié au plan de coupe. En raison de l'épaisseur de coupe non nulle, l'ensemble des plans de cote ζ avec $\zeta \in [-\frac{e_c}{2}, \frac{e_c}{2}]$ se superposent sur l'image. Nous avons

$$T(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\frac{e_c}{2}}^{\frac{e_c}{2}} A(\tau_1, \tau_2, \zeta) d\zeta. \quad (7.62)$$

L'intensité au point (τ_1, τ_2, ζ) résulte de la mise en résonance des noyaux situés au(x) point(s) (x_l, x_p, x_c) vérifiant

$$\begin{cases} x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l} = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta. \end{cases} \quad (7.63)$$

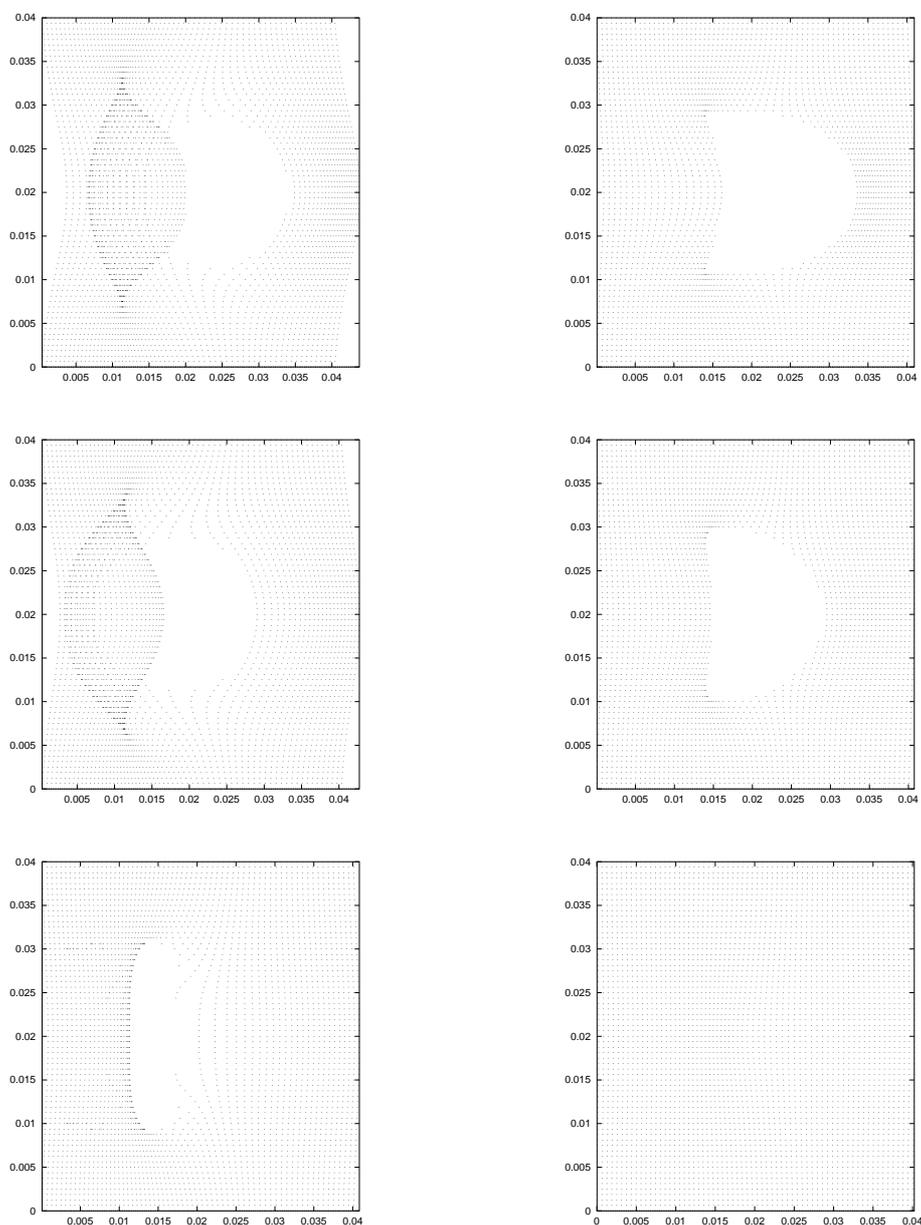


Figure 7.7: exemples de distorsions géométriques. Cas d'une bille de rayon 1 cm. La susceptibilité magnétique vaut 10^{-3} usi pour les dessins de la partie gauche et vaut $2 \cdot 10^{-4}$ usi pour ceux de la partie droite. La rangée du haut correspond à la coupe $y_0 = 0$. Celle du milieu correspond à la coupe $y_0 = 0.5$ cm et celle du bas à la coupe $y_0 = 1.5$ cm .

Une fois ce(s) point(s) déterminé(s), leur contribution à l'intensité de l'image est donnée par

$$I(x_l, x_p, x_c) \exp\{i \gamma k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E\} \frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)|}. \quad (7.64)$$

7.7.2 Premier algorithme

Une étape essentielle pour la mise en œuvre de la méthode qui vient d'être décrite consiste, étant donné un point (τ_1, τ_2, ζ) de l'image, à déterminer le(s) point(s) (x_l, x_p, x_c) de l'échantillon qui est (sont) reproduit(s) en ce point. Le système (7.63) s'écrit encore, par simple combinaison de la première et de la dernière équation,

$$\begin{cases} x_l + \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta. \end{cases} \quad (7.65)$$

Nous sommes alors amenés à trouver x_c solution de

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta \quad (7.66)$$

où

$$\begin{cases} x_l + \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) = \tau_1, \\ x_p = \tau_2. \end{cases} \quad (7.67)$$

Les paramètres g_l, g_p, τ_1, τ_2 et ζ étant fixés, introduisons la fonction F définie par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_c &\longmapsto (x_c - \zeta) + \frac{1}{g_c} B'_z\left(\tau_1 + \frac{g_c}{g_l} (x_c - \zeta), \tau_2, x_c\right). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Résoudre (7.65) revient à chercher les racines de F . On obtient alors x_l et x_p par (7.67).

Mise en évidence des difficultés rencontrées

Il est important de noter que même dans ce cas de géométrie simple la résolution de (7.68) est non triviale. Suivant la coupe sélectionnée et le point image considéré des situations très diverses peuvent avoir cours. Nous prenons pour illustrer ce fait le cas d'une bille de Luxachrome soumise à un champ magnétique \vec{B}_0 de 0.5 T. L'intensité des gradients est de 0.5 G/cm. Le plan de coupe sélectionné est le plan $(0, \vec{y}, \vec{z})$. Les figures 7.8, 7.9, 7.10 représentent la fonction F pour différentes valeurs de (τ_1, τ_2, ζ) .

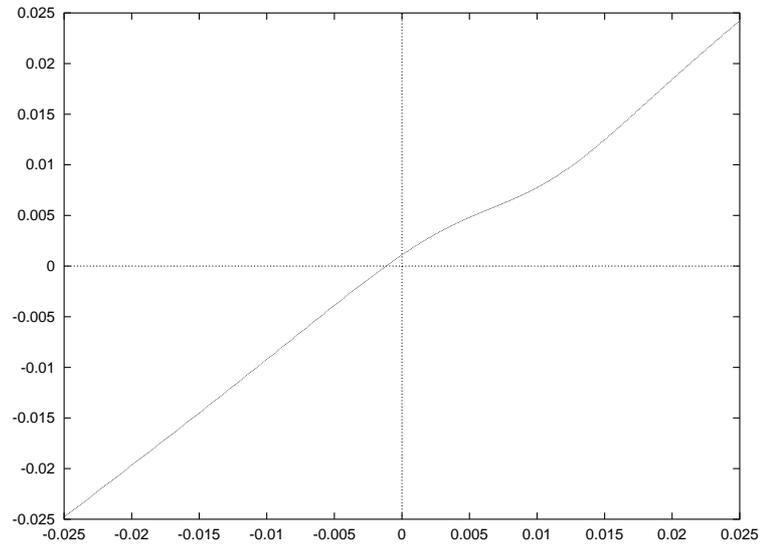


Figure 7.8: graphe de la fonction F pour un point éloigné de la bille.

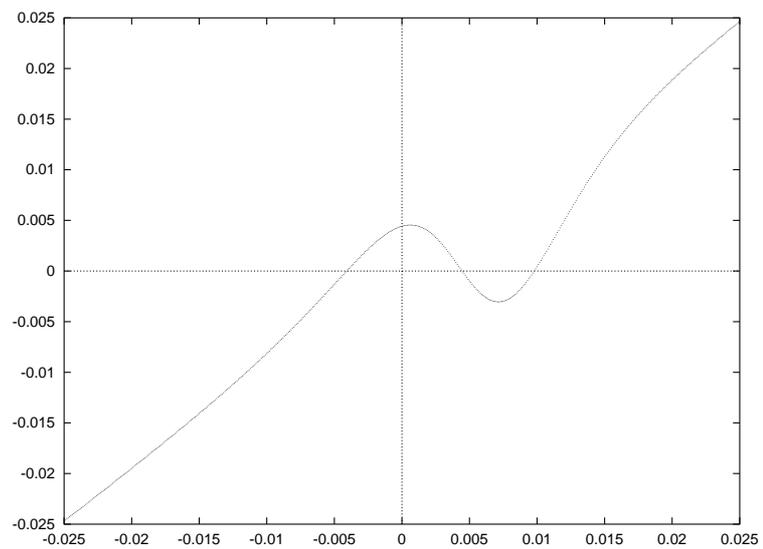
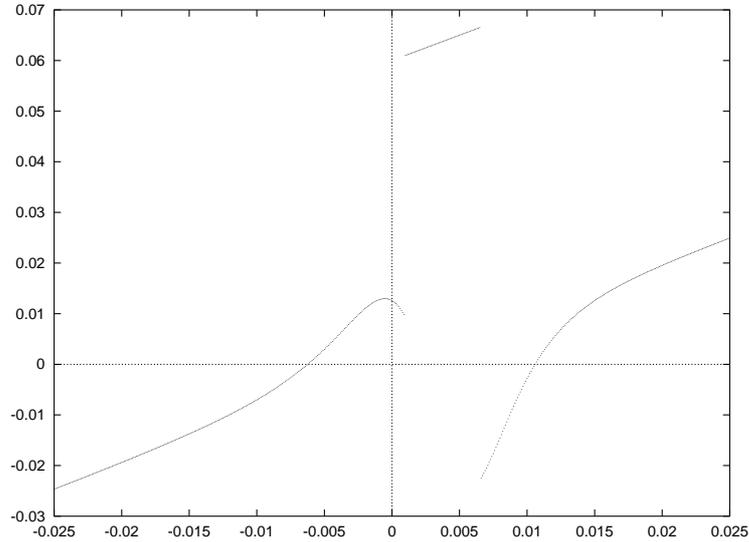


Figure 7.9: graphe de la fonction F pour un point proche de la bille.

Figure 7.10: graphe de la fonction F pour un point très proche de la bille.**Premier algorithme**

Pour tout point (τ_1, τ_2) de l'image faire

Initialisation : $T(\tau_1, \tau_2) = 0$

Pour $\zeta \in [-\frac{\epsilon_c}{2}, \frac{\epsilon_c}{2}]$ faire \dagger

Initialisation : $A(\tau_1, \tau_2, \zeta) = 0$

Déterminer l'ensemble des solutions x_c de $F(x_c) = 0$

Pour chaque solution x_c calculer

$$\begin{cases} x_l &= \tau_1 - \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) \\ x_p &= \tau_2 \end{cases}$$

Calculer $I(x_l, x_p, x_c)$, $B'_z(x_l, x_p, x_c)$, $\frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)$

et

$$A(\tau_1, \tau_2, \zeta) = A(\tau_1, \tau_2, \zeta) + I(x_l, x_p, x_c) \times \exp\{i \gamma k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E\} \frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)|}$$

$T(\tau_1, \tau_2) = T(\tau_1, \tau_2) + A(\tau_1, \tau_2, \zeta)$

Refaire

Refaire

† Pour la mise en œuvre, la formule (7.62) nous suggère plutôt d'utiliser une formule de quadrature. On réduit alors la boucle aux seuls nœuds de quadrature.

Dans cet algorithme, le point délicat pour la mise en œuvre est la recherche des zéros de F . En général, la fonction F n'est pas une fonction polynomiale et nous n'avons en pratique qu'une approximation numérique de cette fonction. Cet algorithme est donc difficile à mettre en œuvre dans le cas général. Si le champ magnétique perturbateur est le champ magnétique induit par une bille métallique uniformément aimantée, le champ induit et par suite la fonction F sont connus de manière explicite. Dans ce cas particulier, trouver les zéros de F revient à déterminer les racines d'un polynôme de degré 12 à coefficients réels.

7.7.3 Second algorithme

Il est possible de contourner la difficulté du calcul des racines de F en prenant le problème "à l'envers". Plutôt que de déterminer pour chaque pixel quels sont les points de l'échantillon qui lui sont associés, on considère tous les points de l'échantillon et on vérifie si ils appartiennent à la partie de l'échantillon reproduit sur l'image et le cas échéant à quel pixel ils sont associés. L'algorithme est le suivant,

Pour tout point (τ_1, τ_2) de l'image faire

Initialisation: $T(\tau_1, \tau_2) = 0$

Refaire

Pour tout point (x_l, x_p, x_c) de l'échantillon faire

Calculer (τ_1, τ_2, ζ) tel que

$$\begin{cases} \tau_1 = x_l + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_l} \\ \tau_2 = x_p \\ \zeta = x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} \end{cases}$$

Si $\zeta \in [-\frac{\epsilon_c}{2}, \frac{\epsilon_c}{2}]$ et si (τ_1, τ_2) est un pixel de l'image alors

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= T(\tau_1, \tau_2) + I(x_l, x_p, x_c) \\ &\times \exp\{i \gamma k_d B'_z(x_l, x_p, x_c) T_E\} \frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'_z(x_l, x_p, x_c)|} \end{aligned}$$

Refaire

Cet algorithme contient les idées introduites par S. Beaumont dans sa thèse [14]. Il est relativement simple à mettre en œuvre. Il suffit pour chaque point de l'espace de calculer

la valeur du champ magnétique induit \vec{B}' , d'effectuer deux additions et deux divisions afin de tester si ce point est reproduit sur l'image. Si c'est le cas il suffit d'incrémenter la valeur du pixel correspondant. Le principal défaut de cet algorithme est de tester pour tous les points (x_l, x_p, x_c) de l'échantillon s'ils participent ou non à l'image. Cela nous amène à faire beaucoup de calculs inutiles car seuls les points de la surface de coupe (définis comme solution de (7.11)) sont reproduits sur l'image. Un certain nombre de considérations permettent toutefois de restreindre le nombre de points à tester.

Chapitre 8

Résultats numériques

Nous présentons dans ce chapitre le code de calcul du champ magnétique induit et le code de reconstruction de l'artefact. Nous présentons aussi quelques résultats numériques.

8.1 Le code de calcul du champ magnétique induit

Le code de calcul du champ magnétique induit est organisé autour de la structure de programmes *Modulef*. Les différentes étapes permettant le calcul de l'induction magnétique sont les suivantes.

- On effectue une triangulation (à l'aide de triangles plats) de la surface Σ de l'implant.
- Dans le cas où la surface Σ est courbe, on construit la surface approchée Σ_h obtenue par interpolation d'ordre deux à partir de la triangulation.
- On calcule alors les intégrales sur chaque triangle de la triangulation, soit analytiquement, soit numériquement.

Maillage de la surface de l'implant

Nous utilisons le mailleur du code éléments finis *Modulef* pour obtenir un maillage de la surface de l'implant à l'aide de triangles. Les figures 8.1, 8.2 et 8.3 présentent par exemple les maillages de la surface d'un cylindre, de la surface d'une bille et de la surface d'un cône.

Le programme *apn2xx*

Si la surface Σ de l'implant est courbe, nous souhaitons disposer d'une approximation de cette surface par des triangles curvilignes de degrés 2 (des morceaux de quadriques) afin d'utiliser la méthode de calcul du champ magnétique présentée au chapitre 4. Nous avons écrit un programme qui permet d'obtenir ce nouveau maillage à partir du maillage par triangles plats généré par le mailleur *Modulef*. Le maillage est stocké dans une structure de données *Modulef* de type NOPO que nous avons adaptée.

Le programme *cmagxx*

Ce programme calcule la valeur de l'induction magnétique. Pour cela, étant donné un point $P \in \mathbb{R}^3$ le programme évalue pour tout triangle K de la triangulation, l'intégrale

$$\iint_K \left(\vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \vec{n} \, ds.$$

Chaque triangle possède un numéro de référence permettant de déterminer si le triangle est plat ou courbe. Dans le premier cas, le calcul de l'intégrale est effectuée analytiquement par une procédure mettant en œuvre les formules obtenues à la section 3.4. Dans le second cas, l'intégrale est évaluée numériquement. La formule de quadrature utilisée dépend de la distance de P à K afin de gérer la quasi-singularité (voir la section 4.3).

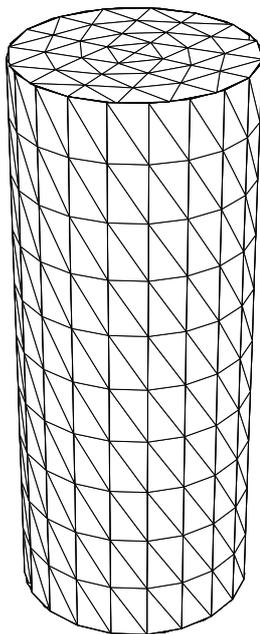


Figure 8.1: maillage de la surface d'un cylindre.

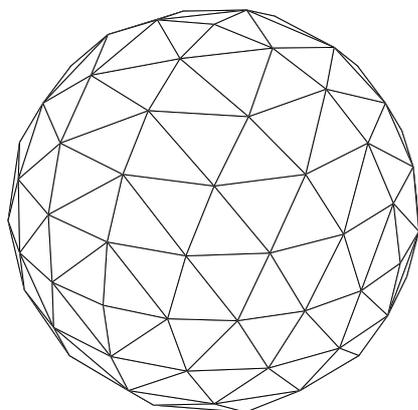


Figure 8.2: maillage de la sphère.

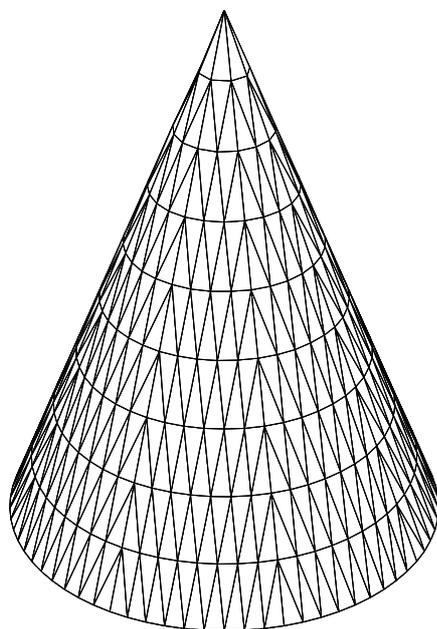


Figure 8.3: maillage de la surface d'un cône.

8.2 Le code de simulation des artefacts

Le code de simulation des artefacts de susceptibilité magnétique met en œuvre l'algorithme présenté à la section 7.7.3. L'utilisateur spécifie (par rapport au repère lié à l'objet) les caractéristiques du plan de coupe (position, épaisseur). Nous savons que la déformation maximale pour le plan de coupe vaut (voir (7.13))

$$\Delta e_{max} = \max_{P \in \mathbb{R}^3} \frac{B'_z(P)}{g_c}.$$

On considère alors le volume formé par les deux parallélépipèdes de hauteur Δe_{max} de part et d'autre du plan de coupe. Les points à l'intérieur de ce volume sont susceptibles d'être représentés sur l'image. Dans un premier temps nous déterminons quels sont, parmi les nœuds d'un maillage cubique "grossier", les nœuds qui sont reproduits sur l'image. Nous distinguons alors les deux cas suivants:

- Si aucun des sommets du cube n'est reproduit sur l'image, nous considérons qu'aucun point du cube ne l'est.
- Nous nous intéressons aux autres cubes, pour lesquels au moins un sommet est reproduit sur l'image. Chacun de ces cubes est découpé en "cubes élémentaires" (ou voxels). Pour chaque voxel, nous testons s'il appartient à la surface de coupe et le cas échéant nous calculons à quelle position il sera reproduit sur l'image. Il suffit alors d'incrémenter l'intensité des pixels correspondants.

8.3 Quelques exemples de simulation

8.3.1 Exemple de la bille métallique

Nous présentons dans cette partie des résultats numériques pour une bille métallique de rayon $R = 1$ centimètre. Cette bille est soumise à un champ magnétique \vec{B}_0 d'intensité 0.5 Tesla. Les gradients sont d'intensité 1 Gauss par centimètre.

Nous considérons les trois coupes représentées à la figure 8.4 correspondant aux plans $x = 0$, $x = R/2$ et $x = 3R/2$. L'épaisseur de chacune de ces coupes est de 3 millimètres.

Dans un premier temps nous considérons le cas d'une bille de titane dont la susceptibilité magnétique vaut $2 \cdot 10^{-4}$.

La figure 8.5 représente les lignes d'isovaleurs de la composante principale de l'induction magnétique secondaire, c'est-à-dire

$$B'_z = \vec{B}' \cdot \frac{\vec{B}_0}{B_0}$$

pour les trois coupes de la figure 8.4. L'image du haut représente la coupe $x = 0$, celle du milieu représente la coupe $x = R/2$ et celle du bas la coupe $x = 3R/2$. Les coupes ont une longueur et une largeur de 4 centimètres.

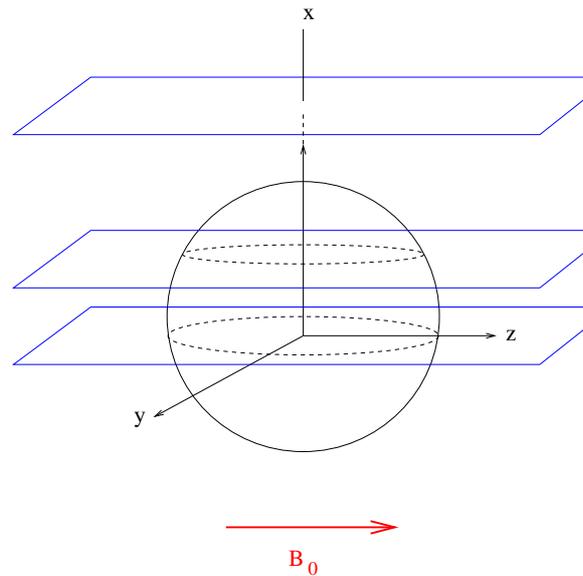


Figure 8.4: schéma des coupes réalisées.

La figure 8.6 représente les artefacts engendrés par la bille de titane au cours d'une séquence Spin-Écho pour chacune des trois coupes envisagées. Les images ont pour longueur et pour hauteur 4 centimètres. Le gradient de lecture est orienté suivant l'horizontale.

La figure 8.7 représente les artefacts engendrés par la bille de titane au cours d'une séquence Écho de Gradient. Les images ont pour longueur et pour hauteur 4 centimètres. Le gradient de lecture est orienté suivant l'horizontale.

Nous considérons ensuite le cas d'une bille de Luxachrome (matériau utilisé pour la fabrication d'implants dentaires) dont la susceptibilité magnétique χ_m vaut approximativement 10^{-3} .

La figure 8.8 représente les lignes d'isovaleurs de la composante principale de l'induction magnétique secondaire pour chacune des trois coupes. Les coupes ont une longueur et une largeur de 4 centimètres.

La figure 8.9 représente les artefacts engendrés par la bille de Luxachrome au cours d'une séquence Spin-Écho pour chacune des trois coupes envisagées. Les images ont pour longueur et pour hauteur 5 centimètres. Le gradient de lecture est orienté suivant l'horizontale.

La figure 8.10 représente les artefacts engendrés par la bille de Luxachrome au cours d'une séquence Écho de Gradient. Les images ont pour longueur et pour hauteur 5 centimètres. Le gradient de lecture est orienté suivant l'horizontale.

Enfin, la figure 8.11 présente une image expérimentale d'un artefact produit par une bille métallique.

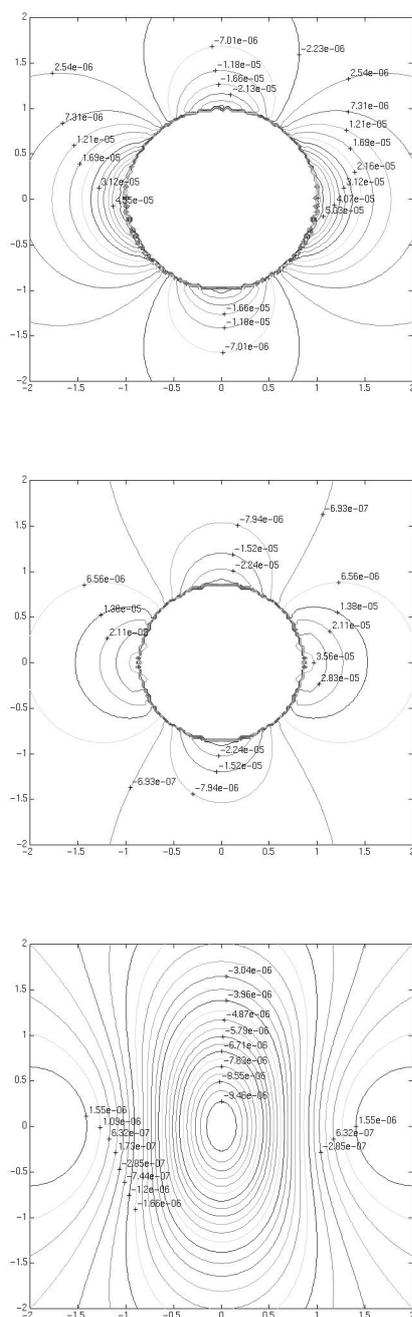


Figure 8.5: composante principale de l'induction magnétique secondaire pour la bille de titane. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

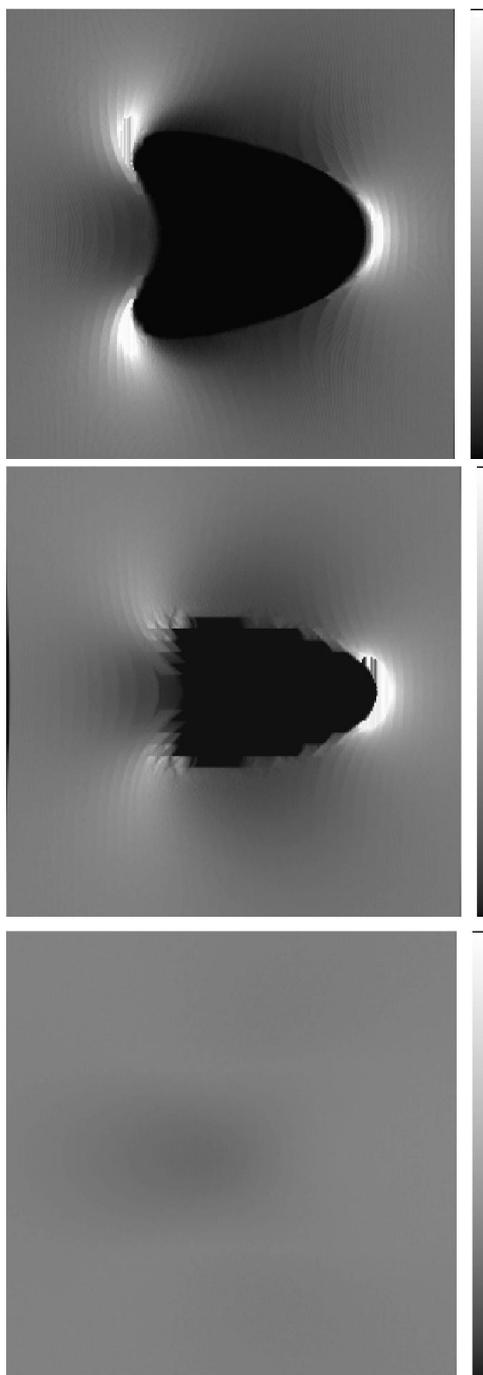


Figure 8.6: artefact engendré par la bille de titane lors d'une séquence Spin-Écho. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

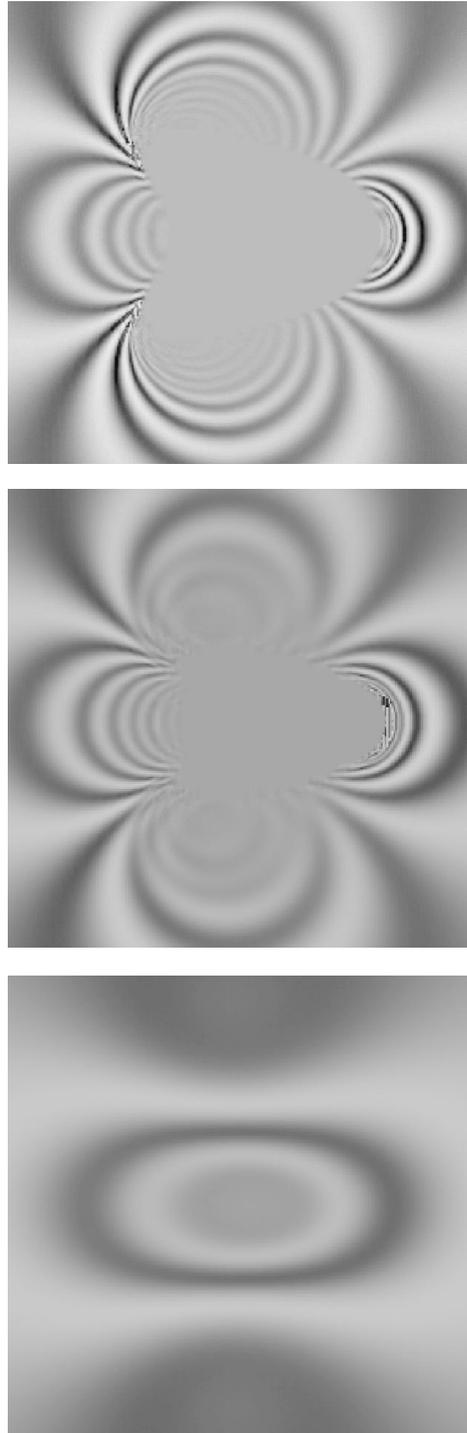


Figure 8.7: artefact engendré par la bille de titane lors d'une séquence Écho de Gradient. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

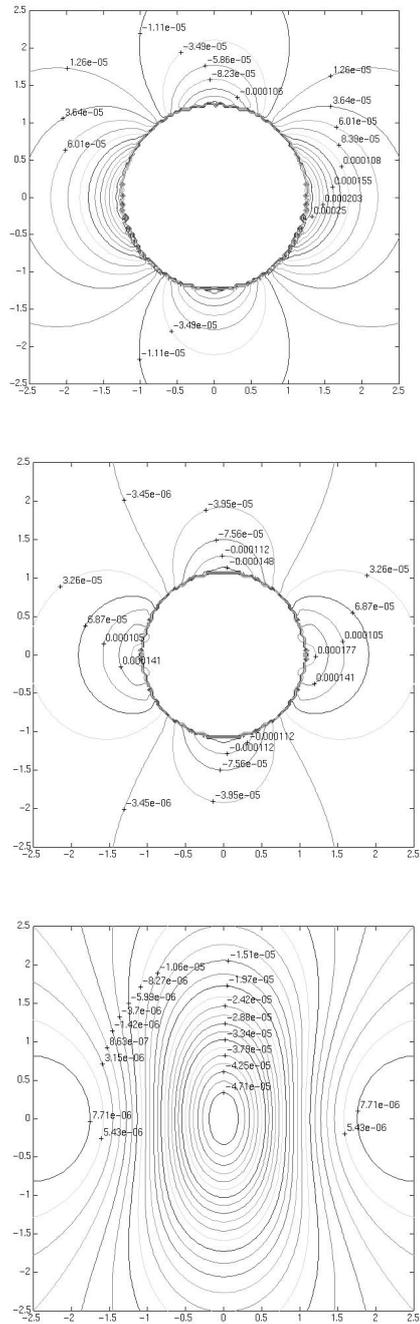


Figure 8.8: composante principale de l'induction magnétique secondaire pour la bille de Luxachrome. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

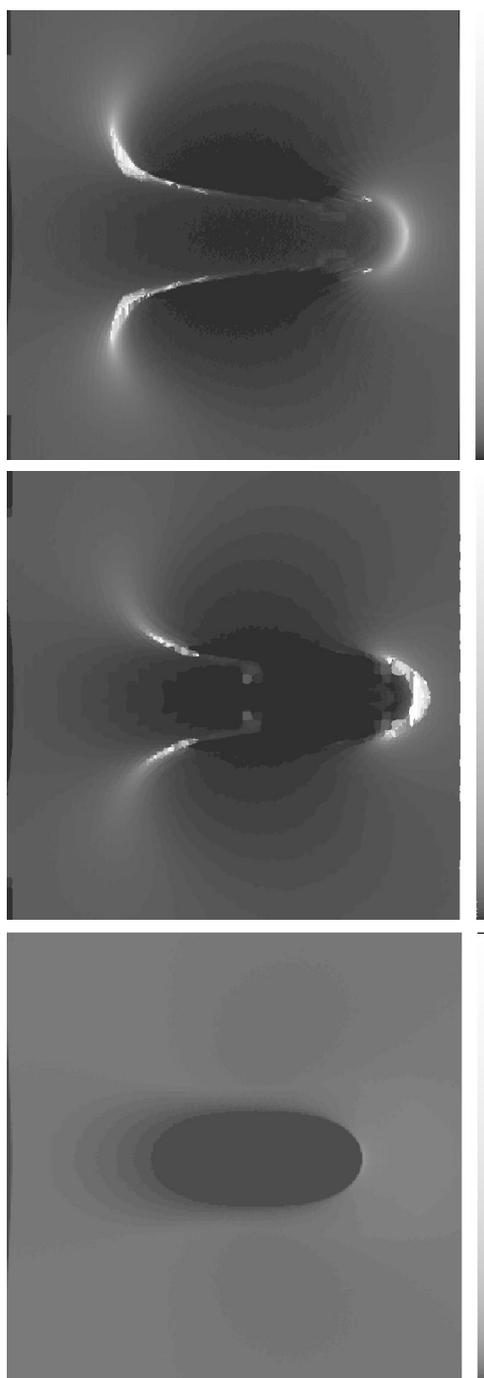


Figure 8.9: artefact engendré par la bille de Luxachrome lors d'une séquence Spin-Écho. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

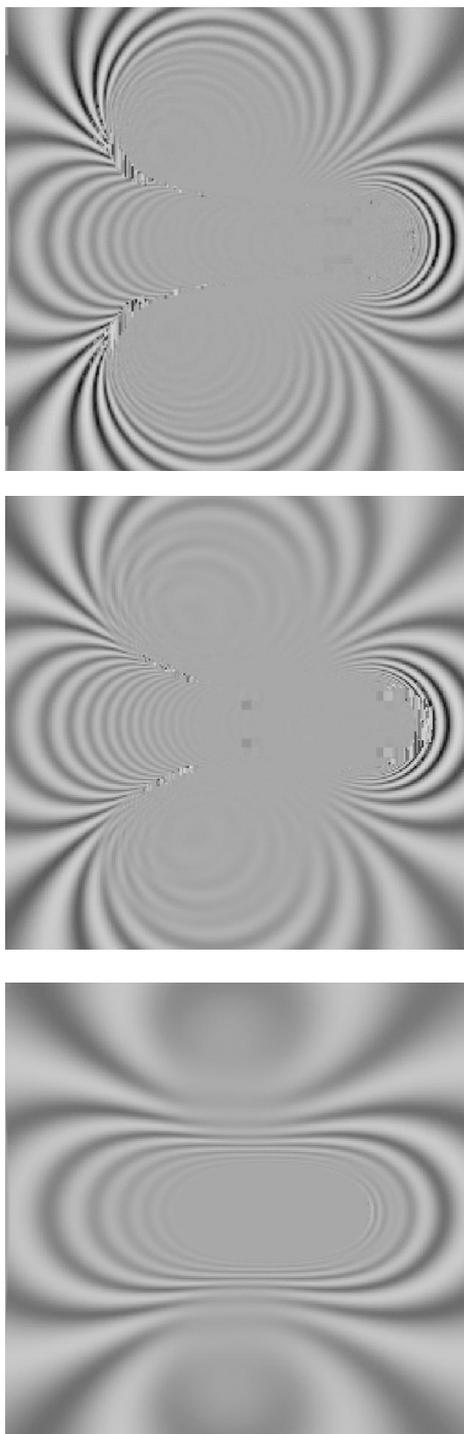


Figure 8.10: artefact engendré par la bille de Luxachrome lors d'une séquence Écho de Gradient. L'image du haut correspond à la coupe $x = 0$, celle du milieu à la coupe $x = R/2$ et celle du bas à la coupe $x = 3R/2$.

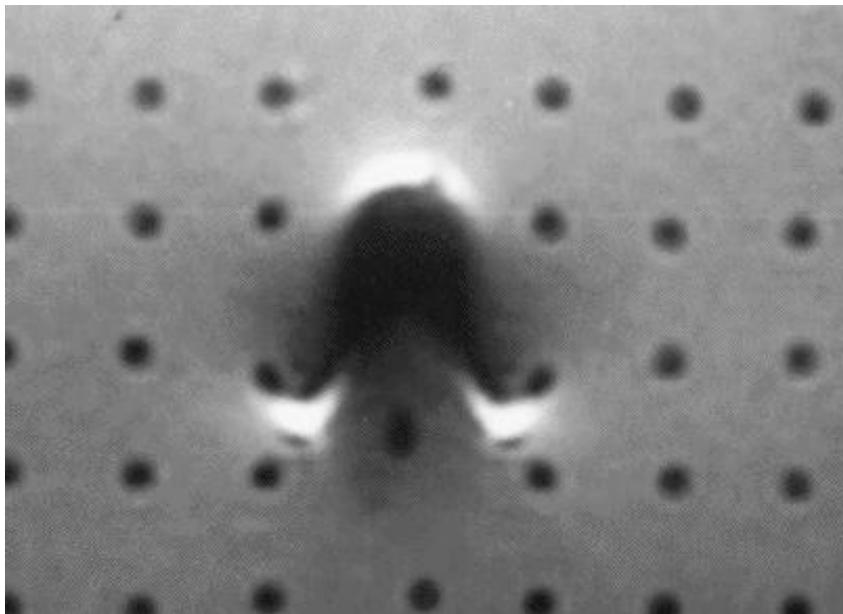


Figure 8.11: artefact engendré par une bille de titane dans le cas de la séquence Spin-Écho; image expérimentale.

8.3.2 Exemple d'un implant dentaire

Nous présentons dans cette partie des résultats de simulation pour un implant dentaire, une coiffe de cicatrisation, représenté à la figure 8.12. La susceptibilité magnétique de l'implant vaut 10^{-3} usi. L'implant est soumis à un champ magnétique \vec{B}_0 d'intensité 0.5 Tesla. Les gradients sont d'intensité 1 Gauss par centimètre. Nous considérons les trois coupes représentées à la figure 8.13. L'épaisseur de chacune de ces coupes est de 3 millimètres.

La figure 8.14 représente les lignes d'isovaleurs de la composante principale de l'induction magnétique secondaire pour chacune des trois coupes de la figure 8.13. L'image du haut représente la coupe numéro 1, celle du milieu représente la coupe numéro 2 et celle du bas la coupe numéro 3. Les coupes ont une longueur et une largeur de 5 centimètres.

La figure 8.15 représente les artefacts engendrés par l'implant au cours d'une séquence Spin-Écho pour chacune des trois coupes envisagées. Ces images sont obtenues par simulation numérique. Les images ont pour longueur et pour hauteur 5 centimètres. Le gradient de lecture est orienté suivant l'horizontale. La figure 8.16 représente les images expérimentales pour ces trois même coupes.

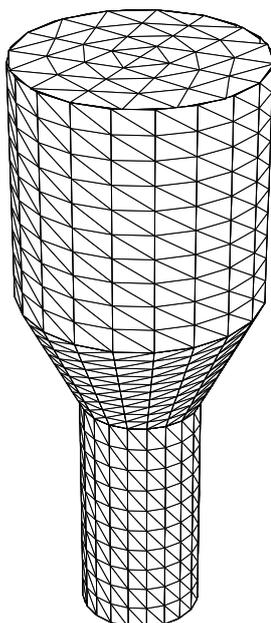


Figure 8.12: maillage de la surface de l'implant.

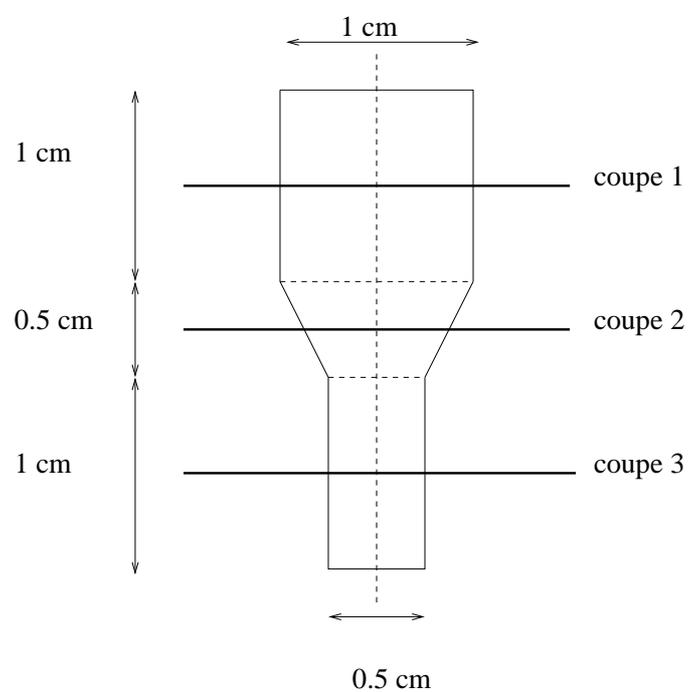


Figure 8.13: schéma des coupes réalisées.

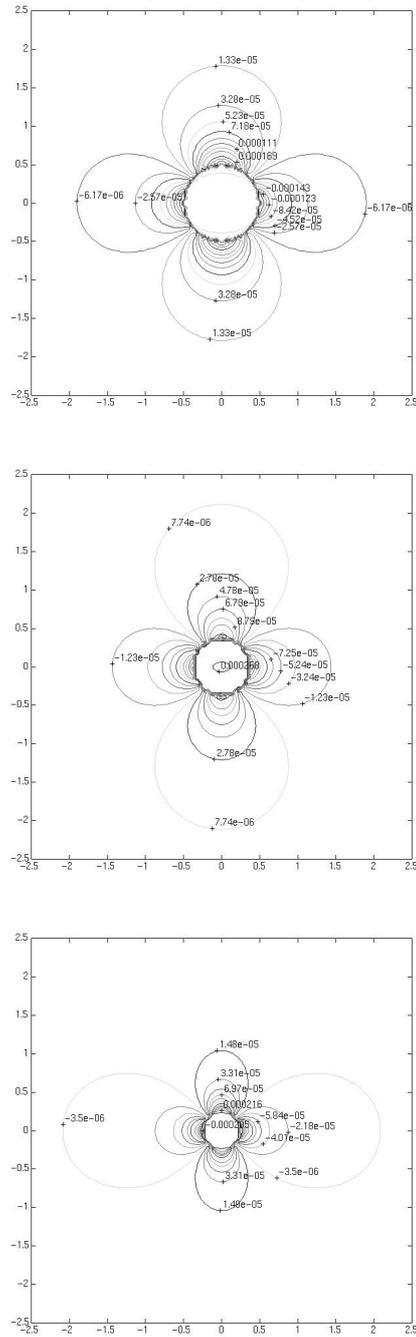


Figure 8.14: composante principale de l'induction magnétique secondaire. L'image du haut correspond à la coupe numéro 1, celle du milieu à la coupe numéro 2 et celle du bas à la coupe numéro 3.

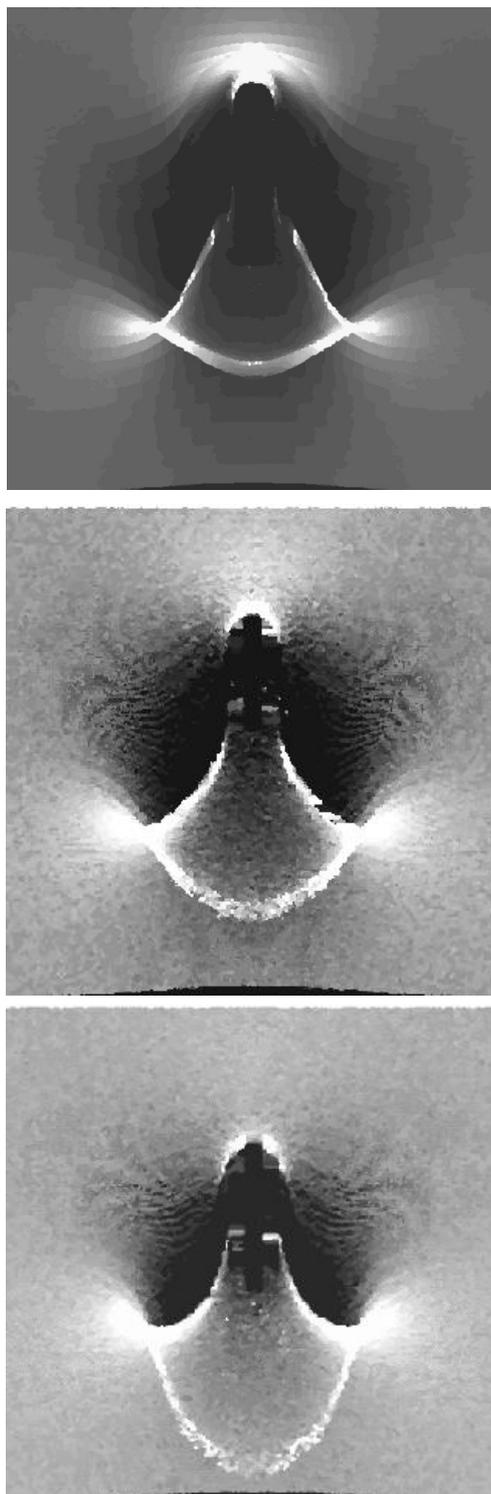


Figure 8.15: artefact engendré par l'implant lors d'une séquence Spin-Écho. L'image du haut correspond à la coupe numéro 1, celle du milieu à la coupe numéro 2 et celle du bas à la coupe numéro 3.

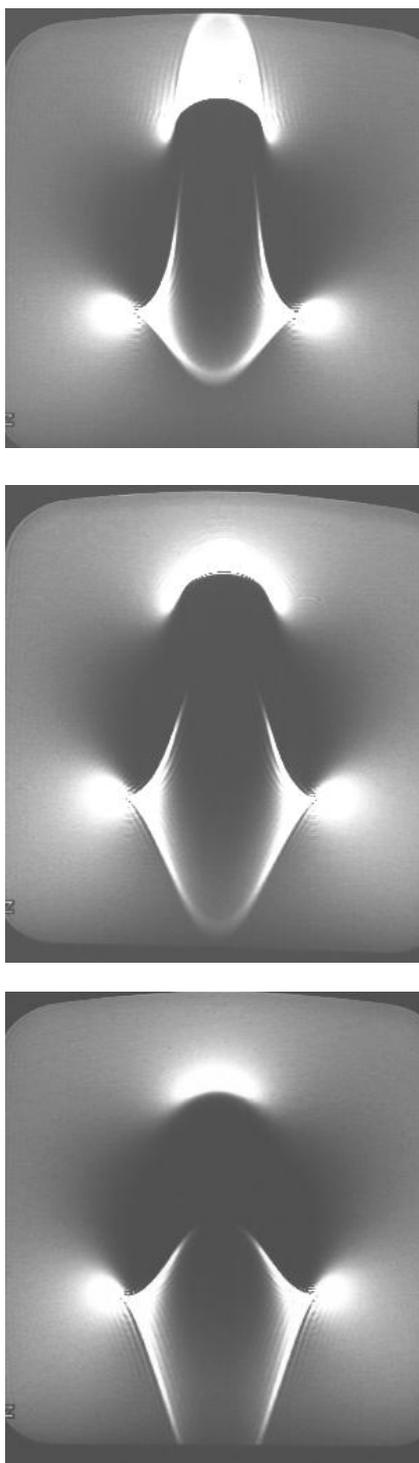


Figure 8.16: artefact engendré par l'implant lors d'une séquence Spin-Écho; images expérimentales L'image du haut correspond à la coupe numéro 1, celle du milieu à la coupe numéro 2 et celle du bas à la coupe numéro 3.

Conclusion

Ce travail a porté sur l'étude des artefacts de susceptibilité magnétique en IRM. Une caractéristique essentielle de ce travail par rapport aux études précédentes a été de traiter le problème des artefacts de susceptibilité magnétique dans sa globalité. Les deux aspects suivants ont été abordés :

- calcul du champ magnétique induit par un implant métallique de type paramagnétique, de géométrie quelconque, dans les conditions d'une expérience d'IRM;
- étude de la manière dont ce champ magnétique induit perturbe le processus d'acquisition de l'image IRM et génère des artefacts.

La première partie de ce document a été consacrée à l'étude du champ magnétique induit par un implant métallique de type paramagnétique. Nous avons montré que ce problème s'énonçait comme un problème de magnétostatique due à des courants de surface (chapitre 1). Deux méthodes numériques ont été étudiées afin de calculer le champ magnétique induit. La première méthode est basée sur l'utilisation de la technique des éléments finis pour le potentiel magnétique (chapitre 2). La seconde méthode, jugée plus efficace dans notre cas, est basée sur une formule de représentation intégrale pour l'induction magnétique (chapitres 3 et 4).

La seconde partie du document a été consacrée à la modélisation mathématique du processus de création des artefacts de susceptibilité magnétique. Cette modélisation a abouti (chapitre 7) à un algorithme permettant la simulation numérique des artefacts dans le cas des deux séquences de base en IRM que sont la séquence Spin-Écho et la séquence Écho de Gradient. Un important travail a également été consacré à la mise en œuvre numérique. Nous disposons d'un code de calcul permettant pour des implants de géométries variées de calculer les perturbations de l'image (artefact) associées.

D'un point de vue pratique, ce travail devrait faciliter la mise au point de nouveaux implants médicaux. Nous disposons maintenant d'un moyen de tester de manière systématique de nouvelles formes et de nouveaux matériaux pour la réalisation d'un implant sans que le recours à un imageur, dont l'utilisation se révèle longue et coûteuse, soit nécessaire. Disposant d'un moyen de calcul des perturbations du champ induit, il serait intéressant d'envisager la possibilité de mettre en œuvre un algorithme de post-traitement d'image pour atténuer (voir corriger) les artefacts de susceptibilité magnétique à l'instar de ce qui est fait pour les artefacts de champ magnétique.

Nous avons pu vérifier en comparant les séquences Spin-Écho et Écho de Gradient que la forme et l'importance des artefacts dépendaient de manière importante de la séquence d'imagerie utilisée. Il serait intéressant d'étudier plus en avant les variations de forme et de taille des artefacts en fonction de la séquence IRM. Ceci permettrait d'établir quelles sont les séquences IRM les moins sensibles aux artefacts de susceptibilité magnétique. Là encore la modélisation mathématique peut s'avérer précieuse. Il est nécessaire de compléter le modèle présenté au chapitre 5 afin d'y intégrer les effets de la diffusion ou du déplacement chimique par exemple. Enfin nous avons pu vérifier, voir l'annexe C, qu'en associant un matériau diamagnétique et un matériau paramagnétique, il était possible dans le cas de la bille d'annuler le champ magnétique induit à l'extérieur. Cette propriété semble très prometteuse pour développer des implants adaptés à l'IRM. La forme extérieure ainsi que le matériau formant la partie externe de l'implant étant en général imposés en raison des propriétés biomécaniques exigées, il s'agit, afin de réduire l'intensité du champ magnétique induit, de déterminer quel matériau pourrait former le coeur de l'implant et dans quelles proportions.

Annexe A

Espaces de Sobolev à poids

L'espace naturel pour résoudre le problème du potentiel dans \mathbb{R}^3 est l'adhérence de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ pour la norme

$$\| u \|_{1, \mathbb{R}^3} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx}. \quad (\text{A.1})$$

Nous notons, selon une convention couramment admise $\mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3)$ cet espace. On peut montrer, voir [34], que nous avons les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3) &= \left\{ u \in \mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3 \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) ; \frac{u}{\sqrt{1+|x|^2}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et Ω' le complémentaire de son adhérence dans \mathbb{R}^3 . On note

$$\mathbb{W}^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega') ; \frac{u}{\sqrt{1+|x|^2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega'), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega'), i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (\text{A.3})$$

On munit $\mathbb{W}^1(\Omega')$ de la norme

$$\| u \|_{1, \Omega'} = \left(\int_{\Omega'} \frac{u^2}{1+|x|^2} dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Nous avons les propriétés suivantes, voir [34],

- $\mathbb{W}^1(\Omega')$ est contenu dans l'espace $\mathbb{H}_{loc}^1(\Omega')$;
- en particulier les éléments de l'espace $\mathbb{W}^1(\Omega')$ admettent une trace sur la frontière Σ de Ω qui est dans l'espace $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

On peut ainsi définir l'espace

$$\mathbb{W}_0^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathbb{W}^1(\Omega') ; u|_{\Sigma} = 0 \right\}. \quad (\text{A.5})$$

D'après l'inégalité de Hardy [52], l'expression

$$\| u \|_{1,\Omega'} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx} \quad (\text{A.6})$$

est une norme sur $\mathbb{W}_0^1(\Omega')$ équivalente à la norme $\| u \|_{1,\Omega'}$.

Soit Σ la frontière de l'ouvert Ω . On a le résultat suivant

$$u \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3) \text{ ssi } \begin{cases} u \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ u \in \mathbb{W}^1(\Omega'), \\ [u]_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Annexe B

Champ magnétique induit par quelques géométries particulières

Pour un objet uniformément aimanté soumis à un champ magnétique constant, il existe dans la littérature (voir par exemple [37] ou [60]) quelques formules simples donnant le champ magnétique induit. Ces formules ont été très largement utilisées dans les premiers travaux concernant les artefacts de susceptibilité magnétique. Dans le cadre de notre étude, elles permettent de tester les méthodes numériques mises en œuvre pour le calcul du champ induit.

B.1 Champ magnétique induit par une bille uniformément aimantée

Nous considérons une bille uniformément aimantée, de rayon R et centrée à l'origine. Soumis à un champ magnétique statique constant \vec{B}_0 , la bille est source d'un champ magnétique induit.

Induction magnétique secondaire

L'induction magnétique secondaire \vec{B}' est donnée par

$$\begin{cases} \vec{B}'(P) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} & \text{si } r < R, \\ \vec{B}'(P) = \frac{\mu_0}{3} R^3 \left(\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right) & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\vec{r} = \vec{OP}$ et \vec{M} désigne le vecteur aimantation. Ce vecteur est lié au champ inducteur \vec{B}_0 par la relation

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0. \quad (\text{B.2})$$

Potentiel magnétique

Un calcul élémentaire permet dans le cas où l'ouvert Ω est une bille d'obtenir de manière explicite la solution du problème (2.16). On a

$$\begin{cases} \phi(P) = \frac{1}{3} \vec{r} \cdot \vec{M} & \text{si } r \leq R, \\ \phi(P) = \frac{1}{3} \frac{R^3}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{M} & \text{si } r \geq R. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

B.2 Champ magnétique induit par un cylindre "infini" uniformément aimanté

Considérons un cylindre "infini" (c'est à dire très long) constitué d'un matériau para-magnétique et soumis à un champ magnétique \vec{H}_0 orienté transversalement. On suppose que le cylindre est orienté selon \vec{z} et que le champ magnétique est orienté selon \vec{x} . On désigne par r_0 le rayon du cylindre. On note $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ l'induction magnétique. Soit (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point P .

Potentiel magnétique

On vérifie, voir par exemple [37], que le potentiel ϕ solution du problème (2.16) a pour expression

$$\begin{cases} \phi(P) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} H_0 r \cos \theta & \text{à l'intérieur du cylindre,} \\ \phi(P) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} H_0 \frac{r_0^2}{r} \cos \theta & \text{à l'extérieur du cylindre.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Induction magnétique secondaire

L'induction magnétique secondaire est donnée à l'intérieur du cylindre par

$$\begin{cases} B'_x = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} B_0, \\ B'_y = 0, \\ B'_z = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

et à l'extérieur du cylindre par

$$\begin{cases} B'_x = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} B_0 \frac{r_0^2}{r} \cos(2\theta), \\ B'_y = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} B_0 \frac{r_0^2}{r} \sin(2\theta), \\ B'_z = 0. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Annexe C

Champ magnétique induit par un implant métallique formé par l'association d'un paramagnétique et d'un diamagnétique

Dans cette annexe nous présentons une étude qui a été menée en collaboration avec le laboratoire de Résonance Magnétique en Biologie et Médecine. Nous avons voulu vérifier qu'il était possible d'annuler le champ magnétique induit par une bille métallique en associant deux matériaux aux propriétés magnétiques distinctes, un paramagnétique et un diamagnétique, pour réaliser cette bille. Le principe est simple. Le matériau paramagnétique formant la coque externe de la bille est imposé en raison des contraintes mécaniques et de bio-compatibilité exigées. On calcule quelle doit être la susceptibilité magnétique du matériau diamagnétique constituant le cœur de l'implant. Afin de pouvoir tirer parti de formules analytiques, nous avons supposé que la partie interne de l'implant a également une géométrie sphérique. Le fait que l'on parvient par cette méthode à annuler le champ magnétique induit à l'extérieur provient du fait que l'aimantation pour un matériau paramagnétique est dans le sens du champ inducteur alors que pour un matériau diamagnétique elle est de sens opposée. En associant ces deux types de matériau, il y a en quelque sorte un phénomène de compensation.

Nous présentons cette méthode plus en détail dans les pages qui suivent. Une vérification expérimentale y est également présentée.

Bibliographie

- [1] M. Abele et al. Compensation of field distortion with ferromagnetic material and permanent magnets. *J. Appl. Phys.*, 75:6990–6992, 1994.
- [2] A. Abragam. *The Principles of Nuclear Magnetism*. Clarendon Press, Oxford, 1961.
- [3] K.E. Atkinson. Piecewise polynomial collocation for integral equations on surfaces in three dimensions. *J. Integral Equations*, 9:25–48 (suppl.), 1985.
- [4] K.E. Atkinson. Solving integral equations on surfaces in space. In G. Hämmerlin and K. Hoffman, editors, *Constructive methods for the practical treatment of integral equations*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 73, pages 20–43. Birkhaeuser Verlag, 1985. Proceedings of the Conference at the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, June 24–30, 1984.
- [5] K.E. Atkinson. An empirical study of the numerical solution of integral equation in R^3 . Reports on computational mathematics 1, Dept of Mathematics, University of Iowa, 1989.
- [6] K.E. Atkinson. User’s guide to a boundary element package for solving integral equation on piecewise smooth surface. Reports on computational mathematics 44, Dept of Mathematics, University of Iowa, 1994.
- [7] K.E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics 4. Cambridge University Press, 1997.
- [8] K.E. Atkinson and D. Chien. Piecewise polynomial collocation for boundary integral equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16:651–681, 1995.
- [9] A.K. Aziz, editor. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. Academic Press, 1972.
- [10] C. Bakker et al. Susceptibility artifacts in 2DFT spin-echo and gradient-echo imaging: the cylinder model revisited. *Magn. Reson. Imaging*, 11:539–548, 1993.
- [11] S. Balac, S. Beaumont, G. Caloz, G. Cathelineau, J. D. De Certaines, and J. Lecerf. Analyse des artefacts liés à la susceptibilité magnétique de biomatériaux en I.R.M. *I.T.B.M.*, 15:557–569, 1994.

-
- [12] S. Balac and G. Caloz. Magnetic susceptibility artifacts in magnetic resonance imaging: Calculation of the magnetic field disturbances. *IEEE Trans. Magn.*, 32:1645–1648, 1996.
- [13] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, 42:430–451, 1982.
- [14] S. Beaumont. *Les artefacts de champ magnétique en Imagerie par Résonance Magnétique*. Thèse de l’Université P. Sabatier, Toulouse, France, 1993.
- [15] E. Bellon et al. MR artifacts : a review. *American Journal of Roentgenology*, 147:1271–1281, 1986.
- [16] L.H. Bennett, P.S. Wang, and M.J. Donahue. Artifacts in magnetic resonance imaging from metals. *J. Appl. Phys.*, 79:4712–4714, 1996.
- [17] A.M. Bernard, J.D. De Certaines, and J.J. Lejeune. *Résonance Magnétique Nucléaire*. Masson, Paris, 1988.
- [18] F. Bloch. Nuclear induction. *Phys. Rev.*, 70:460, 1946.
- [19] P.T. Callaghan. Susceptibility-limited resolution in nuclear magnetic resonance microscopy. *J. Magn. Reson.*, 87:304–318, 1990.
- [20] D. Canet. *La RMN : concepts et méthodes*. InterEditions, Paris, 1991.
- [21] H.Y. Carr and E.M. Purcell. Effects of diffusion on free precession in nuclear magnetic resonance experiments. *Phys. Rev.*, 94:630–638, 1954.
- [22] B. Chauvel, G. Cathelineau, S. Balac, J. Lecerf, and J. D. De Certaines. Cancellation of metal-induced MRI artifacts with dual-component paramagnetic and diamagnetic material: mathematical modelization and experimental verification. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 6:936–938, 1996.
- [23] G. Chen and J. Zhou. *Boundary element methods*. Computational Mathematics and Applications. Academic Press, 1992.
- [24] D. Chien. *Piecewise polynomial collocation for integral equations on surface in 3-D*. PhD thesis, University of Iowa, Iowa, USA, 1993.
- [25] D. Chien. Numerical evaluation of surface integrals in three dimensions. *Math. Comput.*, 64:727–743, 1995.
- [26] Z.H. Cho and Y.M. Ro. Reduction of susceptibility artifacts in gradient-echo imaging. *Magn. Reson. Med.*, 23:193–200, 1990.
- [27] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Monographies Universitaires de Mathématiques. Dunod, Paris, 1968.

-
- [28] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [29] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [30] M. Costabel. Boundary integral operators on lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19:613–626, 1988.
- [31] T.P. Das and A.K. Saha. Mathematical analysis of Hahn spin-echo experiment. *Phys. Rev.*, 93:749–756, 1954.
- [32] R. Dautray and J.L. Lions, editors. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Commissariat à l'Énergie Atomique, Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires. Collection Enseignement. Masson, Paris, 1985.
- [33] M.E. Davison and F.A. Grunbaum. Tomographic reconstruction with arbitrary directions. *Comm. on Pure App. Math.*, 34:77–120, 1973.
- [34] J. Denis and J.L. Lions. Les espaces de type Beppo-Levi. *Ann. Inst. Fourier*, 5:305–370, 1953.
- [35] M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [36] T.H. Duong. A finite element method for the double-layer potential solutions of the Neumann exterior problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2:191–208, 1980.
- [37] E. Durand. *Magnétostatique*. Dunod, Paris, 1968.
- [38] W. Edelstein et al. Spin-Warp imaging and application to human whole body imaging. *Phys. Med. Biol.*, 25:751–756, 1980.
- [39] Y. El Ouazzani, F. Rioux-Damidau, X. Brunotte, and G. Meunier. Finite element modeling of unbounded problems: use of a geometrical transformation and comparison with the boundary integral method. *IEEE Trans. Magn.*, 32:1401–1404, 1996.
- [40] C. Emson. Finite element methods applied to electromagnetic field problems. In A. Bossavit, C. Emson, and I.D. Mayergoyz, editors, *Méthodes numériques en électromagnétisme*, Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF. Éditions Eyrolles, Paris, 1991.
- [41] A. Erricsson, A. Hemmingsson, B. Jung, and G. O. Sperber. Calculation of MRI artefacts caused by static field disturbances. *Phys. Med. Biol.*, 33:1103, 1988.
- [42] E. Feig, F. Greenlead, and M. Perlin. Magnetic resonance imaging with non-uniform fields. *Phys. Med. Biol.*, 31:1091–1099, 1986.

-
- [43] G. Fournet. *Électromagnétisme à partir des équations locales*. Masson, Paris, 1979.
- [44] M.J. Friedman. Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 39:14–20, 1980.
- [45] J. Giroire. Formulation variationnelle par équations intégrales de problèmes aux limites extérieurs. Rapport interne CMAP 6, École Polytechnique, mars 1976.
- [46] R. Glowinski and A. Marrocco. Numerical solution of two-dimensional magnetostatic problems by augmented lagrangian methods. *Computer Methods Appl. Mech. Engin.*, 12:33–46, 1977.
- [47] C.I. Goldstein. The finite element method with non-uniform mesh sizes applied to the exterior helmholtz problem. *Numer. Math.*, 38:61–82, 1981.
- [48] C.I. Goldstein. The finite element method with nonuniform mesh sizes for unbounded domains. *Math. Comput.*, 36:387–404, 1981.
- [49] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1965.
- [50] M. Haacke and E. Bellon. Artifacts. In D. Stark and W. Bradley, editors, *Magnetic resonance imaging*, chapter 8, pages 138–159. The C.V. Mosby Compagny, Saint Louis, 1988.
- [51] E. Hahn. Spin-Echoes. *Phys. Rev.*, 80:580–594, 1950.
- [52] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.
- [53] R. Harris and G. Wesbey. Artifacts in MRI. In H. Kressel, editor, *Magnetic Resonance Annual 1988*. Raven Press, 1988.
- [54] F. Hecht. Construction d’une base de fonctions P_1 non conforme à divergence nulle dans R^3 . *RAIRO, Anal. Numer.*, 15:119–150, 1981.
- [55] D.B. Hinshaw et al. Dental material artefacts on MR images. *Radiology*, 166:777–779, 1988.
- [56] W. Hinshaw and A. Lent. An introduction to NMR imaging: from the Bloch equation to the image equation. *Proc. IEEE*, 71:338–350, 1983.
- [57] D.M. Hough. Exact formulae for certain integrals arising in potential theory. *IMA J. Numer. Anal.*, 1:223–228, 1981.
- [58] Q. Huang and T. A. Cruse. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:2643–2659, 1993.

-
- [59] J.M.S. Hutchinson, R.J. Sutherland, and J.R. Mallard. NMR imaging : image recovery under magnetic fields with large non-uniformities. *J. Phys. E: Sci.Instrum.*, 11:217–221, 1978.
- [60] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [61] O.D. Kellogg. *Fundation of potential theory*. Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1929.
- [62] F. Kikuchi. Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems. *Japan J. Appl. Math.*, 6:209–221, 1989.
- [63] J. Kim, W. Kucharczyk, and M. Henkelman. Cavernous hemangiomas: dipolar susceptibility artifact in MR imaging. *Radiology*, 187:735–741, 1993.
- [64] C.M. Lai. Reconstruction NMR images under magnetic fields with large inhomogeneities. *J. Phys. E: Sci.Instrum.*, 15:1093–1099, 1982.
- [65] P.C. Lauterbur. Image formation by induced local interactions: example employing NMR. *Nature*, 242:190–191, 1973.
- [66] J. Lelong-Ferrand. *Géométrie différentielle (tenseurs-formes différentielles)*. Masson, Paris, 1963.
- [67] Y. Li, T. Obata, H. Koguchi, and T. Yada. Some improvements of accuracy and efficiency in three-dimensional direct boundary element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1451–1464, 1992.
- [68] K. M. Ludeke, P. Roshmann, and R. Tischler. Susceptibility artifacts in NMR imaging. *Magn. Reson. Imaging*, 3:329–343, 1985.
- [69] Bernardou M. et al. *MODULEF, une bibliothèque modulaire d'éléments finis*. Éditions de l'INRIA, 1988.
- [70] R.H. MacNeal, editor. *The NASTRAN theoretical manual*. NASA SP221(01), 1972.
- [71] P. Mansfield and P.K. Grannell. NMR diffraction in solids? *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 6:L422–L426, 1973.
- [72] T.W. McDaniel, R.B. Fernandez, R.R. Root, and R.B. Anderson. An accurate scalar potential finite element method for linear, two-dimensional magnetostatics problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 19:725–737, 1983.
- [73] D.E. Medina and J.A. Liggett. Exact integrals for three-dimensional boundary element potential problems. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 5:555–561, 1989.
- [74] S.G. Mikhlin. *Mathematical physics, an advanced course*. North-Holland Publishing Company, 1970.

-
- [75] P.G. Morris. *Nuclear magnetic resonance imaging in medicine and biology*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [76] J.-C. Nédélec and J. Planchard. Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans R^3 . *RAIRO*, 7:105–129, 1973.
- [77] P. New et al. Potential hazards and artifacts of ferromagnetic and nonferromagnetic surgical and dental materials and devices in nuclear magnetic resonance imaging. *Radiology*, 147:139–148, 1983.
- [78] M. O'Donnell and W.A. Edelstein. NMR imaging in the presence of magnetic field inhomogeneities and gradient field nonlinearities. *Med. Phys.*, 12:20–26, 1985.
- [79] E.E. Okon and R.F. Harrington. The potential due to a uniform source distribution over a triangular domain. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18:1401–1411, 1982.
- [80] L. Pinchard. *Électromagnétisme classique et théorie des distributions*. Ellipse, Paris, 1990.
- [81] S. Posse and W. Aue. Susceptibility artifacts in spin-echo and gradient-echo imaging. *J. Magn. Reson.*, 88:473–492, 1990.
- [82] M. Protter and H. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [83] E.M. Purcell. *Phys. Rev.*, 69:67, 1946.
- [84] Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, and J.C. Vérité. An efficient semi-analytical integration procedure in three dimensional boundary integral method. *COMPEL*, 7:195–205, 1988.
- [85] M. Rezayat, D.J. Shippy, and F.J. Rizzo. On time-harmonic elastic-wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 55:349–367, 1986.
- [86] J.F. Schenck. The role of magnetic susceptibility in magnetic resonance imaging. *Med. Phys.*, 23:815–850, 1996.
- [87] G. Sebastiani and P. Barone. Mathematical principles of basic magnetic resonance imaging in medicine. *Signal Processing*, 25:227–250, 1991.
- [88] K. Sekihara, M. Kuroda, and H. Kohno. Image restoration from non uniform magnetic field influence for direct fourier NMR imaging. *Phys. Med. Biol.*, 29:15–24, 1984.
- [89] C.P. Slichter. *Principles of Magnetic Resonance*. Springer-Verlag, New-York, 1990.
- [90] A. Stroud. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

-
- [91] G.P. Teitelbaum et al. Ferromagnetism and MR imaging : safety of carotid vascular clamps. *A.J.N.R.*, 12:267–272, 1990.
- [92] G.P. Teitelbaum et al. Metallic ballistic fragments: MR imaging safety and artifacts. *Radiology*, 175:855–859, 1990.
- [93] J.C.F. Telles. A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:959–973, 1987.
- [94] H. Torrey. Bloch equations with diffusion terms. *Phys. Rev.*, 104:563–565, 1956.
- [95] J.C. Vérité. TRIFOU: un code de calcul tridimensionnel des courants de Foucault. *Bulletin de la DER - EDF , série C*, 2:79–92, 1983.
- [96] V.S. Vladimirov. *Equations in mathematical physics*. Marcel Dekker, New York, 1971.
- [97] J. Weis and L. Budinsky. Simulation of the influence of magnetic field inhomogeneities and distortion correction in MR imaging. *Magn. Reson. Imaging*, 8:483–489, 1990.
- [98] N. Yamada et al. Evaluation of the susceptibility effect on the phase images of a simple gradient echo. *Radiology*, 175:561–565, 1990.
- [99] I.R. Young et al. The benefits of increasing spatial resolution as a means of reducing artifacts due to field inhomogeneities. *Magn. Reson. Imaging*, 6:585–590, 1988.
- [100] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite element method. Volume I: basic formulation and linear problems*. McGraw-Hill, 1989.

Cette thèse est consacrée à la modélisation et à la simulation numérique des artefacts de susceptibilité magnétique en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Deux problèmes ont été résolus. Calculer le champ magnétique induit par un implant paramagnétique dans les conditions d'une expérience IRM. Déterminer de quelle manière ce champ magnétique perturbe le processus d'acquisition de l'image et engendre un artefact. La première partie de la thèse est consacrée à l'étude du problème de magnétostatique et à la présentation de deux méthodes de calcul du champ magnétique induit. La première méthode met en œuvre la technique des éléments finis pour calculer le potentiel magnétique scalaire. Une frontière artificielle, sur laquelle une condition aux limites adéquate est imposée, est introduite afin de borner le domaine d'étude. Nous étudions l'erreur de troncature ainsi que l'erreur de discrétisation. La seconde méthode est basée sur une formule de représentation intégrale pour l'induction magnétique. Pour un implant polyédrique le calcul de l'intégrale de surface est effectué de manière exacte. Pour des géométries quelconques nous avons recours à des formules de quadrature numérique. Une étude détaillée de l'erreur d'approximation est réalisée. La seconde partie de la thèse est consacrée à la modélisation du processus de création des artefacts. Cette modélisation nous a permis de proposer une analyse détaillée des phénomènes de distorsion de l'image ainsi qu'un algorithme permettant de simuler numériquement ces artefacts.

Mots-clés: problème de magnétostatique, potentiel magnétique scalaire, méthode des éléments finis, méthode intégrale de frontière, quadrature numérique, imagerie par résonance magnétique, artefacts de susceptibilité magnétique, implants métalliques, équations de Bloch.

This thesis is devoted to the modeling and numerical simulation of susceptibility artifacts in Magnetic Resonance Imaging (MRI). Two distinct problems are studied. The first is the computation of the magnetic field disturbances due to a medical implant. The second is to determine the way the magnetic field disturbances give rise to the image distortions (the artifact). The thesis is divided into two parts. The first is devoted to the study of the magnetostatic problem. Two numerical methods are propound. The first numerical method is based on the finite element method where the unknown is the scalar magnetic potential. The domain is bounded by introducing an artificial boundary on which a suitable boundary condition is prescribed. The truncation error as well as the approximation error are studied. The second method relies on a surface integral representation of the magnetic induction. To implement it in an efficient way, an analytical expression is derived when the boundary of the implant can be meshed in flat panels. Otherwise a numerical quadrature scheme is implemented. A precise study of the numerical error is achieved. The second part of the thesis is where a precise mathematical model of the MRI imaging process is made out. This model enables to study the various way in which magnetic field inhomogeneities give rise to image distortion. Moreover we derive algorithms for the numerical simulation of susceptibility artifacts. Finally the study has lead to writing of software that enables numerical computation of MRI artifacts.

Key-words: magnetostatic problem, scalar magnetic potential, finite element method, boundary integral method, numerical quadrature, magnetic resonance imaging, susceptibility artifacts, metallic implants, Bloch equations.