



**HAL**  
open science

# Modèles de déformation de processus stochastiques généralisés. Application à l'estimation des non-stationnarités dans les signaux audio.

Harold Omer

## ► To cite this version:

Harold Omer. Modèles de déformation de processus stochastiques généralisés. Application à l'estimation des non-stationnarités dans les signaux audio.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université d'Aix Marseille, 2015. Français. NNT: . tel-01218644

**HAL Id: tel-01218644**

**<https://hal.science/tel-01218644v1>**

Submitted on 21 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE (ED 184)

---

**THESE**

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

**Modèles de déformation de processus  
stochastiques généralisés.  
Application à l'estimation des  
non-stationnarités dans les signaux audio.**

PAR

HAROLD OMER

**Jury**

PATRICK FLANDRIN	ENS LYON	PRÉSIDENT
ROLAND BADEAU	TÉLÉCOM PARISTECH	RAPPORTEUR
VALÉRIE PERRIER	ENSIMAG-GRENOBLE	RAPPORTRICE
FRÉDÉRIC RICHARD	AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ	EXAMINATEUR
RICHARD KRONLAND-MARTINET	CNRS	EXAMINATEUR
BRUNO TORRESANI	AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ	DIRECTEUR DE THÈSE

---

THÈSE EFFECTUÉE À L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE  
SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 18 JUIN 2015



# Remerciements

Les pages se tournent à peu près les unes après les autres. Drôle de place pour des remerciements, épilogue de toute cette histoire de (dé)formation et d'aléa, dernière page de cette aventure scientifique et humaine...

Alors bien évidemment mes premières pensées vont à Bruno qui a su m'initier aux mathématiques et qui m'a transmis des valeurs scientifiques dans lesquelles je me retrouve complètement. Merci de m'avoir amené si loin. Le doctorat est un peu un voyage introspectif dans lequel le directeur de thèse joue un rôle de chaman et tu fais un très bon chaman Bruno.

Je ne peux m'empêcher de penser ensuite à tout l'équipe de doctorant que j'ai côtoyé durant ces quatre ans. Le drôle de duo qu'on a formé avec Juliette. Qui l'eut cru assis dans notre bureau de stagiaire de l'IMT, on est arrivé au bout ! Plein de belles choses dans votre nouvelle aventure avec Mathias. Antoine tes percussions n'auront finalement pas eu raison de moi, je sais que ça partait d'un bon sentiment, tu voulais qu'on soutienne ensemble pour ne pas avoir à payer le champagne, malheureusement je serai là en septembre quand ce sera à toi de le déboucher. Simon évidemment, sept années, du premier jours au dernier. Sept années lors desquelles Frank Zappa s'est levée de ses chiottes, a balancé sa Fender du balcon pour se trémousser en rêve partie sur fond de musique disco. Un coucou à dame Swag, les mathématiques c'est fantastique, le kangourou c'est super doux (oui, je sais) ! Et puis Babylone, Jah Jah Rastafari, faute d'être bon au backgammon tu fera un bon acousticien. Mister Thoret et ses échanges scientifico-éthyls, indispensable à une grande carrière de chercheur. Gondre et toutes ses femmes noyées dans la bières. Le Bilbo qui s'était caché dans mon tuba à une répe et qu'on à retrouvé squattant une chambre du 28. Une pensée pour ton mec aussi, car même s'il n'était pas exactement dans le même bateau il en connaît aussi un bon gros rayon niveau scientifico-éthilique. Merci Hugo pour les burgers à oxford ! Une pensée pour les anciens, Pierre, finger in the noise, Émilie la blonde, Émilie la brune, Thomas, on se fait refait des boites roumaines quand tu veux, Anaik la grande sista.

Un merci particulier à tous les scientifiques que j'ai croisé durant mon doctorat. Clothilde et Alex, tant pour les discussions scientifiques que les échanges humains, merci Clothilde pour les conversations enflammées et merci Alex pour ta science poétique. Valentin pour ton énergie et ton entrain contagieux. Raphaël, pour ta bonne humeur éternelle. Merci à tout les membres du couloir pour le travail dans la bonne humeur, Cécile, Sandrine, Thomas, Caroline, Marie-Christine, Denis, FX, Jean-François, Frédéric et tous les autres, content d'avoir passé ces quatre ans avec vous. Une pensée amicale à Gille, copain de conférence avec qui il a toujours été agréable de partager une bière.

Je tiens fortement à remercier toute l'équipe administrative et technique du labo sans qui rien n'aurait été possible, particulièrement à Marie-Christine, Valérie et Julien pour leur réactivité et leur efficacité.

Je ne peux m'empêcher d'avoir une pensée pour tout les professeurs que j'ai croisée durant ma scolarité, particulièrement à toute l'équipe de signal de Centrale, à l'équipe de matériaux de Livet et à l'équipe enseignante de Victor Hugo qui a cru bon de m'envoyer en seconde.

Et enfin à tout ceux avec qui j'ai partagé mille et une choses ces dernières années, à la jolie voisine qui casse la baignoire, à JeanJean, 15 ans après toujours présent, spécial cassédi à cette grosse dalp de Dijonnaise et puis aux autres, le PPC, le club Mickey, le 28, le Glock Crew, les

potes de Nantes, les morlaisiens, à tout les schlagos de la plaine et à toutes celles et tous ceux qui ne se reconnaîtrons dans aucune de ces catégories socio-culturelles.

À ma famille, France, Lulu, Lola, Andréa, à toutes mes tantes tous mes oncles, cousins, cousines.

À ma mère qui m'a accompagnée à sa manière.

*"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue."*  
John Von Neuman



# Résumé

Ce manuscrit porte sur la modélisation et l'estimation de certaines non-stationnarités dans les signaux audio. Nous nous intéressons particulièrement à une classe de modèles de sons que nous nommons *timbre*  $\times$  *dynamique* dans lesquels un signal stationnaire, associé au phénomène physique à l'origine du son, est déformé au cours du temps par un opérateur linéaire unitaire, appelé opérateur de déformation, associé à l'évolution temporelle des caractéristiques de ce phénomène physique. Le *timbre* du son est alors caractérisé par le spectre du processus stationnaire initial tandis que la composante *dynamique* du son est complètement caractérisée par l'opérateur de déformation.

Les signaux audio sont modélisés comme des processus gaussiens généralisés et nous donnons dans un premier temps un ensemble d'outils mathématiques qui étendent certaines notions classiques utilisées en traitement du signal (transformation de Fourier, transformation de Mellin, signal analytique...) au cas des processus stochastiques généralisés.

Nous introduisons ensuite les deux opérateurs de déformations étudiés dans ce manuscrit (modulation de fréquence et changement d'horloge) et nous donnons des conditions suffisantes pour que ces opérateurs soient des endomorphismes sur l'espace des distributions tempérées. L'opérateur de modulation fréquentielle est l'opérateur de multiplication par une fonction à valeurs complexes de module unité, et l'opérateur de changement d'horloge est la version unitaire de l'opérateur de composition par une fonction bijective.

Lorsque ces opérateurs agissent sur des processus stationnaires généralisés, les processus déformés sont des processus généralisés non-stationnaires, qui possèdent localement des propriétés de stationnarité lorsque les déformations varient lentement. Les transformées temps-fréquence et temps-échelle permettent alors d'exploiter ces propriétés de stationnarité locale, car sous certaines conditions, ils peuvent être approximés par des opérateurs de translation dans les plans temps-fréquence et temps-échelle, respectivement. Nous donnons des versions précises de ces approximations, ainsi que des bornes pour les erreurs d'approximation correspondantes. Plus précisément, certains théorèmes portent sur l'approximation des champs stochastiques non stationnaires eux mêmes tandis que d'autres portent sur l'approximation de leurs fonctions de covariances. Dans ce dernier cas, nous montrons que la déformation se ramène à une translation le long des diagonales des covariances des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus déformés.

En nous basant sur ces approximations, nous développons un estimateur de maximum de vraisemblance approché des fonctions de dilatation et de modulation, ainsi que des caractéristiques du processus stationnaire sous-jacent. Appliqué à des signaux audio non stationnaires, cet algorithme fournit une estimation conjointe des composantes *timbre* et *dynamique* du son. L'algorithme proposé est testé et validé sur des signaux synthétiques. Son application à des sons naturels permet de confirmer la validité du modèle *timbre*  $\times$  *dynamique* dans ce contexte.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Vers une nouvelle classe de signaux : timbre-dynamique . . . . .	13
1.2	De la stationnarité . . . . .	15
1.3	De la recherche de la fréquence instantanée à la modélisation de la stationnarité locale . . . . .	16
1.4	Guide de lecture . . . . .	21
1.5	Publications associées à la thèse . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Modéliser le timbre, aléa et invariance</b>	<b>23</b>
2.1	Éléments de la théorie des fonctions généralisées . . . . .	24
2.1.1	Des espaces de fonctions . . . . .	24
2.1.1.1	$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , l'espace de Schwartz . . . . .	24
2.1.1.2	$\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance lente . . . . .	25
2.1.1.3	$\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance très lente . . . . .	25
2.1.2	Les fonctions généralisées, définition . . . . .	25
2.1.3	Quelques définitions . . . . .	26
2.1.4	Principe de l'extension duale . . . . .	26
2.1.5	L'espace des distributions tempérées . . . . .	26
2.1.6	Opérations usuelles dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	27
2.1.7	Produit d'une distribution tempérée par une fonction . . . . .	28
2.1.8	Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	28
2.1.9	Composition dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	28
2.1.10	Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	29
2.1.11	Transformée de Mellin . . . . .	30
2.1.11.1	Formule d'inversion . . . . .	30
2.1.11.2	Diagonalisation de l'opérateur de dilatation . . . . .	30
2.1.11.3	Produit invariant à la dilatation . . . . .	30
2.1.11.4	Convolution multiplicative . . . . .	31
2.1.11.5	Formule de Plancherel . . . . .	31
2.1.11.6	Relations d'incertitude . . . . .	32
2.1.11.7	Transformée de Mellin dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	33
2.1.12	Fonctions test dépendants d'un paramètre . . . . .	33
2.1.13	Théorème des noyaux de Schwartz . . . . .	33
2.1.14	Théorèmes de Bochner . . . . .	34
2.2	Les processus stochastiques généralisés . . . . .	35
2.2.1	Opérations sur les processus stochastiques généralisés . . . . .	35
2.2.2	Moments fonctionnels et fonctionnelle caractéristique . . . . .	35
2.2.2.1	Fonctionnelle caractéristique . . . . .	36
2.2.2.2	Moyenne généralisée . . . . .	36
2.2.2.3	Autocorrélation fonctionnelle, Autocorrélation généralisée . . . . .	36
2.2.2.4	Covariance fonctionnelle, Covariance généralisée . . . . .	37

2.2.3	Les processus stochastiques stationnaires généralisés . . . . .	38
2.2.3.1	Spectres généralisés . . . . .	40
2.2.3.2	Mesure spectrale . . . . .	40
2.2.4	Les processus gaussiens complexes généralisés . . . . .	41
2.2.4.1	Les processus gaussiens circulaires . . . . .	41
2.2.5	Bruits blancs gaussiens . . . . .	41
2.2.6	Représentation analytique des processus stochastiques généralisés . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Déformation des processus stationnaires généralisés</b>	<b>45</b>
3.1	Opérateurs pseudodifférentiels . . . . .	45
3.1.1	Représentations des opérateurs pseudodifférentiels . . . . .	45
3.1.2	Endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	46
3.2	Pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . . . . .	47
3.2.1	Opérateur de convolution . . . . .	48
3.2.2	Opérateur de dilatation fréquentielle . . . . .	49
3.2.3	Un semi-groupe de pseudo-filtres . . . . .	52
3.3	Opérateurs de déformation des processus stationnaires . . . . .	55
3.3.1	Opérateur de modulation fréquentielle . . . . .	55
3.3.2	Opérateur de dilatation temporelle . . . . .	57
3.4	Présentation des modèles étudiés et problématique . . . . .	60
3.4.1	Modèle de modulation fréquentielle . . . . .	60
3.4.2	Modèle de dilatation temporelle . . . . .	60
3.4.3	Problématique et indétermination . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Analyse temps-fréquence et temps-échelle des processus déformés</b>	<b>63</b>
4.1	Des représentations adaptées à l'étude des signaux non stationnaires . . . . .	64
4.1.1	Analyse de Gabor des processus généralisés . . . . .	64
4.1.2	Analyse en ondelettes des processus généralisés . . . . .	65
4.2	Étude locale des opérateurs de déformation et choix de représentations . . . . .	66
4.2.1	Analyse de Gabor de l'opérateur de modulation fréquentielle . . . . .	66
4.2.1.1	Approximation locale de l'opérateur de modulation fréquentielle . . . . .	67
4.2.1.2	Des migrations dans le plan temps-fréquence . . . . .	67
4.2.1.3	Modulation fréquentielle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . . . . .	68
4.2.1.4	Des théorèmes d'approximations . . . . .	68
4.2.2	Analyse en ondelettes de l'opérateur de dilatation temporelle . . . . .	71
4.2.2.1	Approximation locale de l'opérateur de dilatation temporelle . . . . .	72
4.2.2.2	Des migrations dans le plan temps-échelle . . . . .	72
4.2.2.3	Dilatation temporelle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . . . . .	73
4.2.2.4	Des théorèmes d'approximations . . . . .	74
4.2.3	Conclusion sur l'approximation locale des opérateur de déformation . . . . .	77
4.3	Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus stochastiques généralisés . . . . .	78
4.3.1	Lois des transformées temps-fréquence des processus stochastiques . . . . .	78
4.3.2	Lois des transformées temps-échelle des processus stochastiques . . . . .	81
4.4	Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle à temps fixé . . . . .	83
4.4.1	Spectres locaux associés aux processus déformés . . . . .	83

4.4.2	Étude des transformées de Gabor à temps fixé . . . . .	84
4.4.2.1	Analyse de Gabor des signaux stationnaires à temps fixé . . . . .	84
4.4.2.2	Translation des fonctions de covariance . . . . .	85
4.4.2.3	Un théorème d'approximation . . . . .	86
4.4.2.4	Analyse de Gabor à temps fixé du modèle de modulation fréquentielle . . . . .	88
4.4.3	Étude des transformées en ondelettes à temps fixé . . . . .	89
4.4.3.1	Analyse en ondelettes des signaux stationnaires à temps fixé . . . . .	89
4.4.3.2	Translation des fonctions de covariances . . . . .	90
4.4.3.3	Un théorème d'approximation . . . . .	91
4.4.3.4	Analyse en ondelettes à temps fixé du modèle de dilatation tem- porelle . . . . .	94
4.5	Du continu au discret . . . . .	95
4.5.1	Analyse de Gabor dans $\mathbb{C}^L$ . . . . .	95
4.5.2	Analyse en ondelettes dans $\mathbb{C}^L$ . . . . .	95
4.5.3	Mesures discrètes dans le plans temps-fréquence . . . . .	96
4.5.3.1	Lois des mesures à temps fixé . . . . .	97
4.5.4	Mesures discrètes dans le plan temps-échelle . . . . .	98
4.5.4.1	Lois des mesures à temps fixé . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Méthodes d'estimation</b> . . . . .	<b>101</b>
5.1	État de l'art . . . . .	102
5.1.1	Fréquence locale et échelle locale . . . . .	102
5.1.2	Méthode de Clerc et Mallat . . . . .	102
5.2	Estimation par maximum de vraisemblance . . . . .	105
5.2.1	Changeons les notations . . . . .	106
5.2.2	Densités de probabilité des mesures dans les plans temps-fréquence et temps-échelle . . . . .	106
5.2.3	Expressions des estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	110
5.2.3.1	Maximum de vraisemblance approché . . . . .	111
5.2.3.2	Recherche exhaustive et quantification des estimées . . . . .	112
5.2.4	Conclusion partielle : Des problèmes de quantification . . . . .	114
5.3	Améliorer la résolution fréquentielle . . . . .	114
5.3.1	Estimations avec différentes mesures dans le plan temps-fréquence . . . . .	115
5.3.2	Estimations croisées . . . . .	116
5.3.3	Améliorer la résolution fréquentielle . . . . .	117
5.3.4	Négliger les proches corrélations . . . . .	118
5.3.5	Estimation de la fonction de dilatation . . . . .	118
5.4	Estimation des matrices de covariances . . . . .	119
5.4.1	Cas de la modulation fréquentielle . . . . .	119
5.4.2	Cas de la dilatation temporelle . . . . .	120
5.5	Algorithme d'estimation conjointe . . . . .	121
5.6	Résultats numériques . . . . .	121
5.6.1	Modèle de modulation fréquentielle . . . . .	122
5.6.1.1	Signal synthétique large bande . . . . .	123
5.6.1.2	Spectre de raies . . . . .	123

5.6.1.3	Influence de la localisation des atomes temps-fréquence . . . . .	123
5.6.1.4	Convergence de l'algorithme d'estimation itérative . . . . .	124
5.6.1.5	Influence du paramètre d'échantillonnage de la matrice de covariance . . . . .	124
5.6.2	Modèle de dilatation temporelle . . . . .	125
5.6.2.1	Signal synthétique large bande . . . . .	125
5.6.2.2	Son produit par un moteur de voiture . . . . .	125
5.6.2.3	Voie chantée . . . . .	126
5.6.2.4	Son de couinement . . . . .	126
5.6.2.5	Influence du nombre de moments nuls et comparaison des méthodes . . . . .	127
5.6.3	Conclusion sur les estimations numériques . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>7</b>	<b>Preuves</b>	<b>139</b>
7.1	Stabilité de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ à la composition, preuve de la proposition 2.1 . . . . .	139
7.2	Le groupe $(\mathcal{O}_D(\mathbb{R}), \circ)$ . . . . .	139
7.2.1	Stabilité de $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ par composition . . . . .	140
7.2.2	Élément inverse dans $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . . . . .	141
7.3	Composition dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , preuve de la proposition 2.2 . . . . .	143
7.4	Transformation de Mellin dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , preuve de la section 2.1.11.7 . . . . .	145
7.5	Preuves des théorèmes d'approximation du chapitre 4 . . . . .	147
7.5.1	Preuve du théorème 4.2 . . . . .	147
7.5.2	Preuve du théorème 4.3 . . . . .	148
7.5.3	Preuve du théorème 4.5 . . . . .	148
7.5.4	Preuve du théorème 4.6 . . . . .	150
7.6	Preuves de la proposition 5.11 . . . . .	153
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Introduction

---

## 1.1 Vers une nouvelle classe de signaux : timbre-dynamique

Nous nous intéresserons dans ce manuscrit à une classe de sons portant deux informations fondamentales. La première relative au phénomène physique à l'origine du son, la seconde relative aux variations dynamiques de ce phénomène au cours du temps. Pensons par exemple au son produit par une voiture en mouvement. À l'écoute de ce son, l'auditeur sera bien entendu en mesure de reconnaître l'objet physique à l'origine du son, le moteur de la voiture. Les variations de hauteur et d'intensité du son lui permettront aussi de dire si cette voiture est en train d'accélérer, de ralentir, ou de rouler à vitesse constante. Cet exemple est transposable à de nombreux cas où un phénomène physique produisant un son voit ses caractéristiques évoluer au cours du temps. Ainsi, à l'écoute du son produit lorsque l'on écrit avec une craie sur un tableau, l'auditeur identifiera sans peine le phénomène physique produisant le son, le frottement entre la craie et le tableau. Les variations temporelles des caractéristiques du son permettront aussi à l'auditeur de se représenter mentalement les mouvements produits par la main du scribe (écrit-il vite? appuie-t-il sur la craie? dessine-t-il une droite? une ellipse?). Les deux exemples précédents, et nous pourrions en donner bien d'autres, nous suggèrent de distinguer deux informations fondamentales véhiculées par ce type de sons.

La première information est celle qui contient l'identité de la source sonore, ou l'identité du phénomène physique à l'origine du son. Cette information, portée par différentes caractéristiques du son est contenue dans ce que nous appellerons *le timbre* du son. Nous adopterons alors le point de vue de [Faure, 2000] qui, dans son manuscrit de doctorat consacré à l'étude du timbre des signaux audio, le décrit comme "*la signature de la source sonore et un ensemble de qualités sonores*".

La seconde information, qui est contenue dans les variations des caractéristiques du son au cours du temps (variation d'intensité, de hauteur, de tempo...), renseigne directement l'auditeur sur la dynamique sous-jacente du phénomène physique à l'origine du son. Ainsi, la perception d'un son dont la fréquence perçue augmente au cours du temps, sera généralement associée à une accélération. Nous dirons alors que cette information est contenue dans la composante *dynamique* du son, le terme *dynamique* faisant aussi bien référence ici aux variations temporelles des caractéristiques du son, qu'aux variations temporelles des caractéristiques du phénomène physique à l'origine du son.

### Modéliser le timbre, aléa et invariance

Puisqu'il nous renseigne uniquement sur l'identité de la source sonore, le timbre sera donc pour nous associé à l'ensemble des caractéristiques du son lorsque celui-ci est affranchi de sa composante *dynamique*. On pensera alors au son produit par une voiture roulant à vitesse constante, ou au son produit par une craie lorsque on se déplace à vitesse constante sur un

tableau. Ces sons, bien que possédant une certaine propriété d'invariance au cours du temps, ne sont pas des sons constants au sens strict (encore faudrait-il qu'on puisse donner un sens aux "sons constants") mais possèdent certaines fluctuations. C'est donc assez naturellement que nous choisirons de modéliser le *timbre* comme un signal aléatoire stationnaire, la stationnarité devant être entendue ici comme une propriété d'invariance globale, ou moyenne, du son au cours du temps.

### Modéliser la dynamique, déformer le timbre

Reprenons l'exemple de la voiture roulant à vitesse constante, le son stationnaire émis par le moteur est complètement, et uniquement, relatif au *timbre*. Si maintenant la voiture se met à accélérer ou à ralentir, les variations de vitesse de la voiture (la composante *dynamique*) vont venir déformer ce son en y introduisant des variations de fréquence ou d'intensité au cours du temps et en brisant ainsi ses propriétés de stationnarité. La composante dynamique sera donc modélisée comme une déformation du *timbre* (d'un signal aléatoire stationnaire donc) au cours du temps. On s'intéressera dans ce manuscrit à deux modèles de déformations particulier. Le premier, qui apparaît naturellement lorsque qu'on cherche à modéliser des systèmes dont les fréquences évoluent au cours du temps, est le modèle de modulation fréquentielle. Il convient de signaler que nombre de signaux naturels possèdent des propriétés harmoniques, c'est à dire que localement, ils sont composés d'un ensemble de fréquences chacune multiple d'une fréquence fondamentale. Cette structure est brisée par la modulation ce qui réduit la pertinence du modèle de modulation fréquentielle. Pour cette raison, nous considérerons aussi le modèle de dilatation temporelle dans lequel la déformation du signal initial est effectuée par une opération de composition par une fonction de changement d'horloge, ou dilatation dépendant du temps.

### Problématique générale de la thèse

La question naturelle est alors de savoir dans quelle mesure nous serons capables de séparer l'information relative au timbre de celle relative à la dynamique. Ayant à disposition le son d'une voiture accélérant et ralentissant au cours du temps, sommes-nous en mesure d'extraire l'information liée aux variations de vitesse de cette voiture? Sommes-nous capable de générer un son uniquement associé au timbre du moteur, affranchi de toute *dynamique*? Concrètement, étant donné une réalisation d'un signal aléatoire stationnaire modulé fréquentiellement (resp. dilaté temporellement), on cherchera à estimer d'une part la fonction de modulation (resp. de dilatation) associée à la dynamique du signal audio, et d'autre part, le signal stationnaire initial, associé au *timbre* du son.

### Le paradigme action-objet

On pourra dans une certaine mesure ancrer ce travail dans le paradigme action-objet développé par [Gaver, 1993]. Celui ci suggère que notre processus même de reconnaissance et de description des sons repose sur l'identification d'une *action* exercée sur un *objet*. Demandez à quelqu'un de fermer les yeux et de décrire ce qu'il entend. S'il se trouve sur une plage il parlera peut être du son des vagues sur les rochers, du vent qui souffle ou du jet-ski qui passe à toute allure. S'il se trouve dans la forêt il parlera peut être du craquement des branches ou d'un oiseau qui vole. Toutes ces descriptions font intervenir la notion d'un *objet* physique (les branches, les vagues, l'oiseau ...) ainsi que d'une *action* subie ou réalisée par l'objet en question (souffler, craquer,

voler...). On notera cependant que l'approche *timbre-dynamique* reste différente de l'approche *action-objet* en ce sens où le *timbre* d'un son tel que nous le considérons est produit par une *action* sur un *objet* et que la composante *dynamique* est quant à elle associée à l'évolution de l'*action* au cours du temps.

### Le projet ANR Métason

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés au sein du projet ANR MétaSon. Ce projet réunissant l'Institut de Mathématiques de Marseille, le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, le Laboratoire de Neurosciences Cognitives et l'industriel PSA Peugeot-Citroën, avait pour objectif de définir les meilleures stratégies de sonification susceptibles d'informer les personnes sur l'évolution d'un système dynamique au cours du temps. Deux applications phares ont été développées lors de ce projet. La première concerne la sonification des voitures électriques. Celles-ci sont silencieuses et bien que cela puisse être considéré comme une qualité c'est en réalité source d'accident. D'une part parce que les piétons n'entendent pas les véhicules, d'autre part parce que cela peut déstabiliser les conducteurs et influencer sur leur conduite. L'objectif était donc de savoir comment sonifier les véhicules électriques afin d'informer au mieux le conducteur et les piétons des mouvements du véhicule au cours du temps. La seconde application concerne la rééducation des troubles de l'écriture liés à la dysgraphie. L'objectif est de définir une stratégie de sonification du geste dans le but d'informer le scripteur en temps-réel sur la "qualité" de son écriture, cela permettant alors au scripteur dysgraphique de corriger son geste au cours du temps. Nous renvoyons le lecteur vers le site internet du projet pour plus d'informations : <http://metason.cnrs-mrs.fr>.

## 1.2 De la stationnarité

Comme nous l'avons fait remarquer, la composante associée au *timbre* d'un son possède une propriété d'invariance au cours du temps. Cette propriété est complètement associée aux différentes notions de stationnarité que nous allons très brièvement présenter ici. Au sens strict, un signal stationnaire, invariant au cours du temps, est un signal constant. Celui ci ne présente guère d'intérêt en pratique et l'on est généralement amené à considérer d'autres formes de stationnarité.

La première approche, déterministe, consiste à considérer les signaux stationnaires comme des signaux périodiques, c'est à dire des signaux pour lesquels il existe une constante  $a \in \mathbb{R}_+$  telle que formellement,

$$x(t) = x(t - a), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le plus élémentaire des signaux stationnaires, qui fait alors référence lorsqu'on s'intéresse aux notions de stationnarités, est l'onde monochromatique, définie quel que soit  $t \in \mathbb{R}$  par

$$x(t) = e^{2i\pi\nu t}, \nu \in \mathbb{R}.$$

Elle est donc périodique de période  $1/\nu$  et possède une unique fréquence  $\nu$ . Les outils provenant de l'analyse de Fourier, largement utilisés dans l'étude des signaux stationnaires, permettent alors de décomposer les signaux comme des sommes d'ondes monochromatiques. La transformée

de Fourier  $\hat{x}$  du signal  $x$ , par exemple, définie par

$$\hat{x}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \quad (1.1)$$

est une mesure de la présence de la fréquence  $\nu$  dans le signal  $x$ .

Cette notion de stationnarité est parfois trop restrictive et on peut vouloir donner un sens différent aux propriétés d'invariance temporelle d'un signal. La seconde approche de la stationnarité généralement considérée fait alors appel à la notion de signal aléatoire. On dira qu'un signal aléatoire est stationnaire si quelque soit  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$x(t) = x(t - a), \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

où l'égalité précédente est une égalité en loi. On peut alors montrer que l'espérance  $\mu_x = \mathbb{E}\{x(t)\}$  du signal  $x$ , est indépendante du temps. Un rapide calcul montre que sa covariance  $c_x$  définie par

$$c_x(t, t') = \mathbb{E}\{x(t)\overline{x(t')}\},$$

vérifie quant à elle

$$c_x(t, t') = c_x(t - a, t' - a), \quad (1.3)$$

et on en déduit qu'il existe une fonction  $k_x$  telle que

$$c_x(t, t') = k_x(t - t'). \quad (1.4)$$

Les propriétés d'invariance temporelle du signal aléatoire  $x$  se répercutent donc sur les différents moments du signal  $x$ . De la même manière que nous l'avons fait dans le cas des signaux déterministes on pourra chercher à décomposer la covariance du signal  $x$  comme une somme d'exponentielles complexes. Le théorème de Wiener-Khintchin (voir [Koopmans, 1995] par exemple) stipule que sous de bonnes conditions, il existe une unique fonction  $S_x$ , le spectre du processus  $x$  telle que

$$k_x(t) = \int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (1.5)$$

$S_x$  est alors une mesure de la fréquence  $\nu$  dans le processus stochastique  $x$ . C'est cette notion de stationnarité que nous utiliserons dans l'ensemble de ce manuscrit, nous apporterons un formalisme mathématique rigoureux à l'ensemble de ces notions au prochain chapitre. Le théorème de Cramér fournit quant à lui une représentation spectrale de  $x$  lui même, et non plus de sa covariance. Nous renvoyons à [Koopmans, 1995] et [Soize, 1993] pour un exposé détaillé.

### 1.3 De la recherche de la fréquence instantanée à la modélisation de la stationnarité locale

La composante *dynamique* d'un son est généralement associée à la perception de fréquences évoluant dans le temps et l'étude et la modélisation des processus non stationnaires est souvent liée au concept de fréquence instantanée. Nous allons ici donner un bref état de l'art qui nous permettra d'introduire les modèles de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle que

nous étudierons dans ce manuscrit.

Considérons d'abord le signal stationnaire déterministe le plus élémentaire, l'onde monochromatique définie par,

$$x(t) = ae^{2i\pi\nu t}, \quad a, \nu \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Quel que soit l'instant  $t$ ,  $x$  oscille à la fréquence  $\nu$ , et celle-ci est, à  $2\pi$  près, la dérivée de la phase de l'onde monochromatique. La première définition de la fréquence instantanée proposée par [Carson and Fry, 1937] étend cette notion aux signaux de la forme,

$$y(t) = \exp\left(2\pi f_0 t + i\lambda \int_0^t m(s) ds\right), \quad (1.7)$$

en définissant la fréquence instantanée  $f_y$  du signal  $y$  par,

$$f_y(t) = f_0 + \frac{\lambda}{2\pi} m(t).$$

En suivant le même raisonnement, [Van der Pol, 1946] considère les ondes monochromatiques à valeurs réelles,

$$x(t) = a \cos(2\pi f t + \phi),$$

et propose de définir par  $f_y$  la fréquence instantanée des signaux de la forme,

$$y(t) = a \cos\left(2\pi \int_0^t f_y(s) ds + \phi\right). \quad (1.8)$$

On pourrait naturellement vouloir étendre ce point de vue aux signaux dont l'amplitude  $a \in \mathbb{R}$  dépend du temps,

$$y(t) = a(t) \cos(\phi(t)). \quad (1.9)$$

et l'on aimerait alors définir la fréquence instantanée  $f_y$  comme la dérivée de l'argument du cosinus,

$$f_y(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}(t).$$

Il existe malheureusement une infinité de couples  $(a, \phi)$  permettant de représenter un signal de la forme (1.9). Pour lever cette ambiguïté, [Ville et al., 1948] proposent de considérer le signal analytique  $y^a$  associé au signal  $y$ . Celui-ci s'exprime en fonction d'un unique couple amplitude-phase  $(A_y, \phi_y)$

$$y^a = A_y(t) e^{i\phi_y(t)},$$

la fréquence instantanée du signal  $y$  est alors définie par,

$$f_y(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_y}{dt}(t).$$

Outre le fait qu'il n'existe qu'une représentation analytique associée à un signal à valeurs réelles, le couple amplitude-phase  $(A_y, \phi_y)$  possède des propriétés spectrales particulières. (voir [Picinbono, 1997]).

De nombreux travaux qui ont suivi ont alors généralisé cette approche à la superposition de signaux de type phase-amplitude. On pourra par exemple citer les travaux de [Rankine et al., 2007] qui s'intéresse au signaux de la forme,

$$y(t) = \sum_k A_k(t) e^{2i\pi\phi_k(t)} + w(t)$$

où  $w$  est un bruit blanc circulaire. [Rankine et al., 2007] proposent d'estimer les fonctions  $\phi_k$  en utilisant des algorithmes de détection de maximum sur des transformées temps-fréquence quadratiques. En considérant le même modèle de signal, [Carmona et al., 1995] proposent eux d'estimer des chirps à l'aide de la transformée en ondelette continue.

On pourra aussi citer les méthodes de synchrosqueezing, originellement introduites par [Daubechies and Maes, 1996] et plus récemment développées par [Daubechies et al., 2011] dans lesquelles on considère des superpositions de composantes en mode intrinsèques bien séparées,

$$y(t) = \sum_k A_k(t) e^{i\phi_k(t)}$$

où les  $\phi_k$  vérifient  $\phi'_k(t) > \phi'_{k-1}(t)$  et  $|\phi'_k(t) - \phi'_{k-1}(t)| \leq c [\phi'_k(t) + \phi'_{k-1}(t)]$ .

D'autres travaux ne s'intéressent pas à un modèle de signal en particulier mais s'appuient sur des représentations temps-fréquence quadratiques des signaux non-stationnaires considérés. [Delprat et al., 1992] par exemple, ont montré que sous certaines hypothèses, les transformées temps-fréquence et temps-échelle permettent d'extraire des informations sur la fréquence instantanée d'un signal non-stationnaire. On peut aussi citer les méthodes de réallocation développées initialement par [Kodera et al., 1978] et généralisées par [Auger and Flandrin, 1995]. Celles-ci permettent de créer une version modifiée d'une représentation en déplaçant ses coefficients dans le plan temps-fréquence de manière à améliorer sa localisation.

Alors que la notion de fréquence instantanée est facilement interprétable pour des signaux de la forme (1.7) ou (1.8), qui sont, à un instant donné, localisés autour d'une certaine fréquence. Elle l'est moins pour des signaux n'étant pas des versions déformées d'une unique onde monochromatique. Si l'on considère par exemple le cas où le signal  $x$  est composé d'un continuum de fréquences,

$$x(t) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} a(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu,$$

bien que le contenu spectral du signal  $x$  soit constant au cours du temps, on ne pourra généralement pas trouver de fréquence particulière autours de laquelle  $x$  soit localisé à un instant donné. On sera alors amené à adopter un point de vue différent, dans lequel on ne cherchera pas à définir la fréquence instantanée d'un signal mais à décrire les variations temporelles de son contenu fréquentiel. En considérant le signal  $x$  résultant d'une superposition d'ondes monochromatique,

$$x(t) = \sum_k e^{2i\pi\nu_k t},$$

on pourra s'intéresser à une version du signal  $x$  déformé par composition,

$$y(t) = x(\gamma(t)) = \sum_k e^{2i\pi\nu_k\gamma(t)}, \quad (1.10)$$

où  $\nu_k\gamma'(t)$  est la fréquence instantanée de la  $k$ -ième composante du signal  $y$ . Le signal  $y$  ne possède pas de fréquence instantané à proprement parler mais on pourra remarquer que la fonction  $\gamma$  décrit complètement l'évolution du contenu fréquentiel de  $y$  au cours du temps. De la même manière on pourra considérer une version modulée du signal  $x$ ,

$$y(t) = x(t)e^{2i\pi\alpha(t)} = \sum_k e^{2i\pi(\nu_k t + \alpha(t))}, \quad (1.11)$$

où  $\alpha'(t) + \nu_k$  est la fréquence instantanée de la  $k$ -ième composante du signal  $y$ . Ici encore, bien que le signal  $y$  ne possède pas de fréquence instantanée à proprement parler, la fonction  $\alpha$  décrira complètement les variations du contenu fréquentiel de  $y$  au cours du temps. Cette approche, qui se généralise à des situations où  $x$  n'est pas une superposition d'ondes monochromatiques, a été adoptée dans différents travaux. Dans le cas où l'on considère la déformation de signaux stationnaires déterministes on pourra citer [Wu, 2013] qui généralisent les méthodes de synchronosqueezing aux signaux de la forme,

$$y(t) = \sum_k A_k(t)s_k(\phi_k(t)), \quad (1.12)$$

où les  $s_k$  sont des fonctions analytiques et périodiques. Wu propose d'utiliser des méthodes de réassinement pour estimer conjointement les fonctions  $A_k$ ,  $s_k$  et  $\phi_k$ .

Cette approche se généralise aussi au cas où l'on considère la déformation de signaux stochastiques stationnaires. On peut citer [Wisdom et al., 2014] qui dans le but d'améliorer la détection de signaux bruités ont considérés des modèles de modulation de la forme,

$$y(t) = x(t) \sum_k a_k e^{2i\pi k\phi(t)} \quad (1.13)$$

où  $x$  est un signal aléatoire stationnaire, ou encore la brisure de stationnarité par la transformé de Lamperti, définie par

$$Lx(t) = t^H x(\log(t)), H \in \mathbb{R}^+, \quad (1.14)$$

qui transforme un signal stationnaire en un signal autosimilaire (voir [Flandrin et al., 2003]).

C'est ce point de vue que nous adopterons dans ce manuscrit. Nous considérerons alors les modèles dilatation temporelle et modulation fréquentielle,

$$y(t) = \sqrt{\gamma'(t)}x(\gamma(t)), \text{ et } y(t) = x(t)e^{2i\pi\alpha(t)} \quad (1.15)$$

où le processus  $x$  est un processus stochastique stationnaire. Le spectre du processus  $x$  sera alors associé au *timbre* du signal audio tandis que les fonctions  $\gamma$  et  $\alpha$  seront associées à sa *dynamique*.

Ces modèles ont déjà été considérés dans [Clerc and Mallat, 2003] et [Clerc and Mallat, 2002], nous y ferons souvent référence dans ce manuscrit. Les signaux déformés selon les modèles de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle sont alors des signaux non-stationnaire, mais comme nous le verrons plus tard, ils possèdent localement des propriétés de stationnarité. Ce

type de modèle est donc à rapprocher de ceux proposés dans [Priestley, 1965]. Priestley considère des processus stochastiques dit "localement stationnaires" dont la covariance  $c_x$  est de la forme

$$c_x(t, t') = m_x \left( \frac{t + t'}{2} \right) \gamma_x(t - t'). \quad (1.16)$$

Les non-stationnarités du processus  $x$  sont alors complètement décrites par les variations de la fonction  $m_x$  au cours du temps, de sorte que si  $m_x$  varie lentement, une forme de stationnarité est préservée. Plus généralement, il est toujours possible d'écrire la fonction de covariance

$$c_x(t, t') = c_x^0 \left( \frac{t + t'}{2}, t - t' \right). \quad (1.17)$$

Ainsi, si  $c_x^0$  varie lentement par rapport à son premier argument, on pourra encore parler de stationnarité locale. En considérant ce type de modèle, [Mallat et al., 1998] proposent des méthodes d'estimation de covariance des processus localement stationnaires.

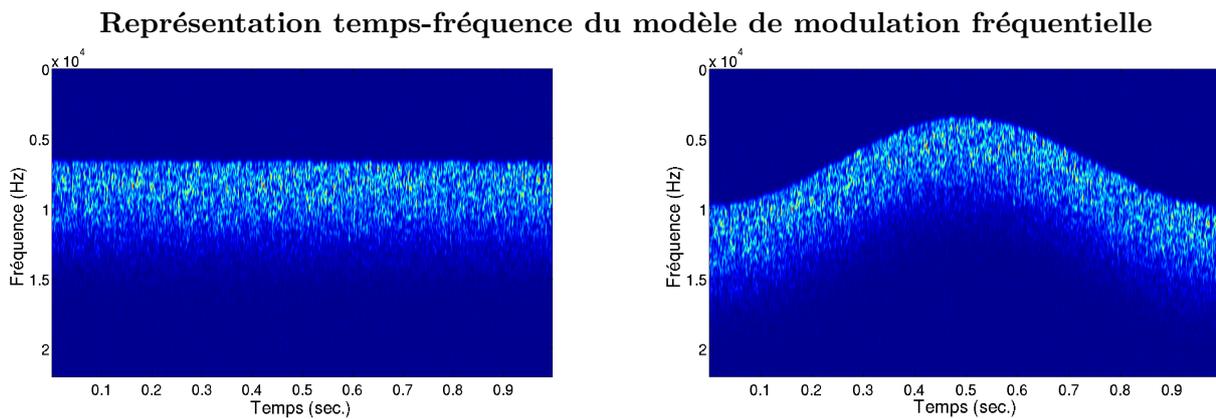


FIGURE 1.1 – A gauche : Image temps-fréquence d'un signal stationnaire. A droite : Image temps-fréquence du même signal modulé fréquentiellement par une exponentielle complexe dont l'argument est une fonction du temps. La fonction de modulation est un sinus dont la période est égale à la taille du signal.

## 1.4 Guide de lecture

Le chapitre II nous permettra d'introduire le formalisme mathématique adopté dans l'ensemble du manuscrit. Après une brève introduction à la théorie des distributions nous donnerons des éléments de la théorie des processus stochastiques généralisés. Nous généraliserons alors différentes notions utilisées en traitement du signal au cas des processus stochastiques généralisés. Nous étudierons dans le chapitre III les opérateurs de déformation des processus stationnaires et donnerons les principales propriétés de l'opérateur de modulation fréquentielle et de l'opérateur de dilatation temporelle que nous considérerons par la suite. Le chapitre IV sera consacré à l'étude temps-fréquence et temps-échelle des opérateurs de déformations. Nous verrons que sous de bonnes conditions, les opérateurs de déformations pourront être approximés par des opérateurs de translation dans les plans temps-fréquence et temps-échelle. Finalement, le chapitre V sera consacré aux méthodes d'estimation des composantes de *timbre* et *dynamique* des signaux audio. Nous donnerons l'expression d'un maximum de vraisemblance approché des fonctions de déformation. L'algorithme sera testé sur des signaux synthétiques ainsi que sur des signaux naturels.

Le site internet suivant contient les exemples sonores étudiés dans ce manuscrit : <http://www.latp.univ-mrs.fr/~omer/SounDef/>.

## 1.5 Publications associées à la thèse

Une partie des travaux décrits dans ce manuscrit ont fait l'objet des publications suivantes :

- Omer, H. and Torrèsani, B. (2015). Time-frequency and time-scale analysis of deformed stationary processes, with application to non-stationary sound modeling. Technical report. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01094835>
- Omer, H. and Torrèsani, B. (2013b). Estimation of frequency modulations on wideband signals; applications to audio signal analysis. In Pfander, G., editor, *Proceedings of the 10th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, pages 29–32. Eurasip Open Library. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00822186>
- Omer, H. and Torrèsani, B. (2013a). Estimation conjointe modulations de fréquence/spectre, application a l'analyse de signaux audio. In *GRETSI 2013*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00836504/>



# Modéliser le timbre, aléa et invariance

---

Ce chapitre introduit les outils mathématiques que nous utiliserons dans ce manuscrit. Nous avons en effet fait le choix de modéliser les signaux audio comme des processus aléatoires et nous utiliserons la notion de processus blanc. Celui-ci, dont la covariance ne trouve de formalisme que dans la théorie des distributions, ne peut être vu comme une simple fonction aléatoire et doit être considéré au sens des distributions aléatoires. Nous donnerons dans un premier temps des éléments de la théorie des distributions qui nous seront nécessaires à l'appréhension de la théorie des processus stochastiques généralisés. Nous définirons les principaux espaces considérés dans ce manuscrit et nous en donnerons les propriétés. Nous introduirons alors le groupe des dilatations contrôlées qui nous permettra de définir correctement la composition par une fonction dans l'espace des distributions tempérées. Nous généraliserons aussi différentes notions telle que la transformation de Mellin et la transformation de Fourier au cas des distributions tempérées. Nous étendrons ensuite certaines notions utilisées dans la théorie des processus stochastiques usuels à la théorie des processus stochastiques généralisés. On s'intéressera par exemple aux différentes propriétés des processus généralisés à valeurs complexes, telles qu'à la notion de circularité ou de première et de seconde covariances généralisées. Nous définirons aussi la notion de signal analytique associé à un processus généralisé. Le formalisme adopté dans l'ensemble de ce chapitre est principalement issu de [Unser and Tafti, 2013] et de [Gelfand and Vilenkin, 1964b].

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Éléments de la théorie des fonctions généralisées</b>	<b>24</b>
2.1.1	Des espaces de fonctions	24
2.1.1.1	$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , l'espace de Schwartz	24
2.1.1.2	$\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance lente	25
2.1.1.3	$\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance très lente	25
2.1.2	Les fonctions généralisées, définition	25
2.1.3	Quelques définitions	26
2.1.4	Principe de l'extension duale	26
2.1.5	L'espace des distributions tempérées	26
2.1.6	Opérations usuelles dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	27
2.1.7	Produit d'une distribution tempérée par une fonction	28
2.1.8	Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	28
2.1.9	Composition dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	28
2.1.10	Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	29
2.1.11	Transformée de Mellin	30
2.1.11.1	Formule d'inversion	30
2.1.11.2	Diagonalisation de l'opérateur de dilatation	30

2.1.11.3	Produit invariant à la dilatation . . . . .	30
2.1.11.4	Convolution multiplicative . . . . .	31
2.1.11.5	Formule de Plancherel . . . . .	31
2.1.11.6	Relations d'incertitude . . . . .	32
2.1.11.7	Transformée de Mellin dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	33
2.1.12	Fonctions test dépendants d'un paramètre . . . . .	33
2.1.13	Théorème des noyaux de Schwartz . . . . .	33
2.1.14	Théorèmes de Bochner . . . . .	34
<b>2.2</b>	<b>Les processus stochastiques généralisés . . . . .</b>	<b>35</b>
2.2.1	Opérations sur les processus stochastiques généralisés . . . . .	35
2.2.2	Moments fonctionnels et fonctionnelle caractéristique . . . . .	35
2.2.2.1	Fonctionnelle caractéristique . . . . .	36
2.2.2.2	Moyenne généralisée . . . . .	36
2.2.2.3	Autocorrélation fonctionnelle, Autocorrélation généralisée . . . . .	36
2.2.2.4	Covariance fonctionnelle, Covariance généralisée . . . . .	37
2.2.3	Les processus stochastiques stationnaires généralisés . . . . .	38
2.2.3.1	Spectres généralisés . . . . .	40
2.2.3.2	Mesure spectrale . . . . .	40
2.2.4	Les processus gaussiens complexes généralisés . . . . .	41
2.2.4.1	Les processus gaussiens circulaires . . . . .	41
2.2.5	Bruits blancs gaussiens . . . . .	41
2.2.6	Représentation analytique des processus stochastiques généralisés . . . . .	42

## 2.1 Éléments de la théorie des fonctions généralisées

### 2.1.1 Des espaces de fonctions

On introduit ici les espaces de fonctions fondamentaux à la théorie des distributions qui seront utilisés tout au long de se manuscrit.

#### 2.1.1.1 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , l'espace de Schwartz

L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  telles qu'elles mêmes ainsi que toutes leurs dérivées soient à décroissance rapide

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \|\psi\|_{\alpha,\beta} < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{N}\}, \quad (2.1)$$

où la semi-norme  $\|\psi\|_{\alpha,\beta}$  est définie par

$$\|\psi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{t \in \mathbb{R}} (|t^\alpha \psi^{(\beta)}(t)|). \quad (2.2)$$

Les fonctions de l'espace de Schwartz et toutes leurs dérivées tendent ainsi vers zéro plus vite que toute puissance de  $1/|t|$ .

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact est alors un sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . L'espace de Schwartz occupe une place majeure dans la théorie des fonctions généralisées pour deux raisons principales que nous détaillerons plus loin, la première étant que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformation de Fourier (section 2.1.10), la second est le fait que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un espace nucléaire (voir [Gelfand and Vilenkin, 1964b](I.1)) et que l'on peut alors montrer un théorème des noyaux dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , voir section 2.1.13 ci-après.

### 2.1.1.2 $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance lente

On appelle  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à croissance lente.  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dont toutes les dérivées sont à croissance au plus polynomiale, c'est à dire que  $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  si et seulement si

$$\forall \alpha \exists C_\alpha > 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N} / \forall t, |\psi^{(\alpha)}(t)| \leq C_\alpha(1 + |t|)^{N_\alpha}. \quad (2.3)$$

**Proposition 2.1**  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  muni de la multiplication point par point est une algèbre (voir lemme 7.1 en Annexe 7.3) et est stable par composition des fonctions (voir annexe 7.1).

### 2.1.1.3 $\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$ , L'espace des fonctions à croissance très lente

On appelle  $\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions à croissance très lente, c'est à dire l'espace des fonctions  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \alpha \exists C_\alpha > 0, / \forall t, |\psi^{(\alpha)}(t)| \leq C_\alpha(1 + |t|)^N. \quad (2.4)$$

$\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$  muni de la multiplication point par point est une algèbre (voir [Larcher, 2012] pour une démonstration).

## 2.1.2 Les fonctions généralisées, définition

Étant donné  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à valeurs réelles et à support compact, appelé espace des fonctions tests à valeurs réelles, on peut construire  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace dual topologique de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  qui est l'espace des formes linéaires continues de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}$ . Cet espace est appelé l'espace des distributions ou fonctions généralisées sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dans son manuscrit Gelfand développe la théorie des distributions principalement sur des espaces de fonctions test à valeurs réelles en précisant cependant que la théorie reste valide sur des espaces de fonctions test à valeurs complexes, on pourra alors considérer des fonctions généralisées à valeurs complexes ainsi qu'un espace dual cette fois composé de l'ensemble des formes continues, antilinéaires sur l'espace de fonction considéré. Forme pouvant elle aussi être à valeurs complexes, c'est à dire pouvant potentiellement associer un nombre complexe à une fonction à valeurs réelles. C'est ce formalisme que nous avons décidé d'adopter dans l'ensemble de ce manuscrit, l'ensemble des résultats établis pour les cas réels s'étendant généralement sans problème au cas complexe. Cela nous conduit donc à la définition suivante

**Définition 2.1 (Fonctions généralisées)** *Étant donné  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions tests à valeurs complexes, on note  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace dual topologique de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , l'espace des formes antilinéaires continues de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{C}$ .  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est appelé l'espace des distributions sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . L'application d'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  à la fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sera indifféremment notée  $T(\psi)$  où  $\langle T, \psi \rangle$ , les crochets étant ici les crochets de dualité. L'anti-linéarité est définie usuellement par*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } \forall (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), x(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \bar{\alpha}x(\psi_1) + \bar{\beta}x(\psi_2).$$

La continuité de  $x$  se traduit par :

si  $\psi_n \rightarrow \psi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alors  $x(\psi_n) \rightarrow x(\psi)$  dans  $\mathbb{C}$ .

Cette définition a du sens dès qu'une topologie est définie sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On se contentera ici de définir la notion de limite dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 2.2 (Limite dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ )** On dit que la suite  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  si

- Les supports de tout les  $\psi_n$  sont inclus dans un domaine compact fixe.
- $(\psi_k)$  et toutes les suites dérivées, tendent vers 0 uniformément sur  $\mathbb{R}^n$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

On dira que  $\psi_k \rightarrow \psi$  si  $\psi_k - \psi \rightarrow 0$ .

Nous traiterons uniquement le cas unidimensionnel ( $\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ) dans ce manuscrit en notant que la plupart des résultats peuvent s'étendre directement aux dimensions supérieures.

### 2.1.3 Quelques définitions

On rappelle ici quelques définitions fondamentales qui seront utilisées par la suite.

**Définition 2.3 (Égalité de deux distributions)** On dit que la distribution  $x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est nulle sur l'ouvert  $\Omega$  si  $\langle x, \psi \rangle = 0$  pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp}(\psi) \subset \Omega_0$ . Deux distribution  $x, y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  sont égales sur un ouvert  $\Omega$  si  $x - y$  est la distribution nulle sur cet ouvert.

**Définition 2.4 (Support)** On appelle support de  $x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel  $x$  est nulle. On appelle support singulier de  $x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel il existe une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\langle x, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle$  pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

### 2.1.4 Principe de l'extension duale

Étant donné une paire d'opérateurs adjoints  $T, T^\dagger : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , le principe d'extension duale [Unser and Tafti, 2013](III.3) nous permet d'étendre leurs actions à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , de la façon suivante :  $\forall x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle Tx, \psi \rangle := \langle x, T^\dagger \psi \rangle, \quad (2.5)$$

$$\langle T^\dagger x, \psi \rangle := \langle x, T\psi \rangle. \quad (2.6)$$

Ce principe permet de définir, par exemple, la translation, la dérivation et la dilatation des fonctions généralisées, nous donnerons par la suite une liste plus détaillée des opérations possibles pour un sous-espace particulier de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  appelé espace des distributions tempérés.

### 2.1.5 L'espace des distributions tempérées

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , l'espace dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , c'est à dire l'espace de toutes les formes antilinéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , est appelé espace des distributions tempérées. On a déjà vu que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , donc les distributions appartenant à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sont aussi des formes antilinéaires et continues sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Ceci nous permet de remarquer la relation d'inclusion suivante :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$

Différentes caractérisations de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sont évidemment possibles, nous donnons seulement ici le théorème de décomposition des distributions tempérées [Schwartz, 1966](VII.4) qui permet de se faire une idée plus précise des objets contenus dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Théorème 2.1** *Soit  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , il existe une suite d'entiers  $n_1, n_2, \dots, n_p$  et des fonctions continues  $u_1, u_1, \dots, u_p$  vérifiant*

$$\forall k \exists C_k > 0, \exists N_k \in \mathbb{N} / \forall t, |u_k(t)| \leq C_k(1 + |t|)^{N_k},$$

telles que

$$x = \sum_{k=1}^p u_k^{(n_k)}.$$

### 2.1.6 Opérations usuelles dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

#### Dérivation

Toute fonction généralisée  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est indéfiniment dérivable et  $x^{(n)}$ , sa dérivée d'ordre  $n$  est définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle x^{(n)}, \psi \rangle = (-1)^n \langle x, \psi^{(n)} \rangle. \quad (2.8)$$

#### Translation

L'opérateur de translation défini pour  $a \in \mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_a \psi(t) = \psi(t - a), \quad (2.9)$$

est un opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Comme  $T_a$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  on peut, avec le principe d'extension duale, étendre son action de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à l'aide de son opérateur adjoint  $T_{-a}$ . On aura donc par définition

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \langle T_a x, \psi \rangle := \langle x, T_{-a} \psi \rangle. \quad (2.10)$$

#### Modulation

L'opérateur de modulation défini pour  $a \in \mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_a \psi(t) = \psi(t) e^{2i\pi t a}, \quad (2.11)$$

est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$ . Comme c'est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on peut étendre son action de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à l'aide de son opérateur adjoint par,

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \langle M_a x, \psi \rangle := \langle x, M_{-a} \psi \rangle. \quad (2.12)$$

#### Dilatation

L'opérateur de dilatation sur  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , défini pour  $a > 0$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_a \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right), \quad (2.13)$$

est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$ . Comme c'est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  on peut étendre son action de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à l'aide de son opérateur adjoint  $D_{\frac{1}{a}}$  par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \langle D_a x, \psi \rangle := \langle x, D_{\frac{1}{a}} \psi \rangle. \quad (2.14)$$

### 2.1.7 Produit d'une distribution tempérée par une fonction

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à croissance lente défini en 2.1.1.2, est l'espace des opérateurs de multiplication sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . C'est à dire que  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,

$$\psi.\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

et de la même manière  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,

$$x.\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

On peut aussi montrer que si,  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), x.\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , alors  $\alpha \in \mathcal{O}_M$ . [Schwartz, 1966](VII.8).

### 2.1.8 Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

L'espace  $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  est appelé l'espace des distributions à décroissance rapide. On notant  $\hat{y}$  la transformée de Fourier (voir section 2.1.10) de  $y$ ,  $y \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{y} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ .

**Propriété 2.1** *L'opérateur de convolution  $A_\rho$ , défini pour  $\rho \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , par  $A_\rho x = \rho * x$ , est un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

On notera aussi sans le démontrer que comme  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est inclus dans  $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , la convolution de  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et de  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est bien définie et que  $\psi * x \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . Voir [Schwartz, 1966](VII.8) pour les preuves.

### 2.1.9 Composition dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

La question de savoir quand la composition d'une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  avec une fonction  $\gamma$  définit bien une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est délicate et requiert certaines conditions sur  $\gamma$ . Nous allons d'abord essayer de donner l'intuition de ces conditions et donnerons ensuite un théorème de composition dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui sera démontré en annexe.

Prenons d'abord l'exemple de la composition d'une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  par la fonction  $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2}$ . Quand  $t \rightarrow \pm\infty$  alors  $\psi(t) \rightarrow \psi(1)$  qui est généralement différent de zéro, la fonction n'est donc certainement pas dans l'espace de Schwartz et l'on voit qu'une certaine croissance de  $\gamma$  est requise à l'infini. Prenons ensuite l'exemple d'une composition avec la fonction  $\gamma(t) = e^t$ . Comme  $(\psi \circ \gamma)'(t) = e^t \psi'(e^t)$ , la fonction peut diverger à l'infini, ce qui nous amène à penser que les dérivées successives de  $\gamma(t)$  ne doivent pas être des fonctions à croissance rapide.

**Définition 2.5 ( $\mathcal{O}_D$ )** *On appelle  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $\gamma \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , telles que*

$$\begin{aligned} \exists c_\gamma, C_\gamma, \forall t, \quad 0 < c_\gamma \leq |\gamma'(t)| \leq C_\gamma < +\infty, \\ \exists c \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall |t| > c, \quad a_\gamma |t|^{M_\gamma} < |\gamma(t)|. \end{aligned}$$

**Propriété 2.2 (Groupe des dilatations contrôlées)**  *$\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  muni de la loi de composition des fonctions est un groupe appelé groupe des dilatations contrôlées.*

La preuve est donnée en annexe 7.2.

**Définition 2.6 (Opérateur de composition)** *Étant donnée une fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}$  et une fonction  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ , l'opérateur de composition  $\mathcal{D}_\gamma^0$  est défini par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_\gamma^0 \psi(t) = \psi(\gamma(t)).$$

La propriété 2.2 nous permet directement d'énoncer le corollaire suivant,

**Corollaire 2.1 (Groupe des compositions)** *Pour  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  l'ensemble des opérateurs de composition  $\mathcal{D}_\gamma^0$  munit de la loi de composition interne,*

$$\mathcal{D}_\gamma^0 \mathcal{D}_\alpha^0 = \mathcal{D}_{(\alpha \circ \gamma)}^0,$$

*définit le groupe des compositions  $\mathcal{G}_C$ . L'élément neutre de  $\mathcal{G}_C$  est  $\mathcal{D}_{id}^0$ , où  $id$  est la fonction identité, l'inverse de l'élément  $\mathcal{D}_\gamma^0$  est  $\mathcal{D}_{\gamma^{-1}}^0$ .*

**Proposition 2.2 (Composition dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de composition définit un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R}), \mathcal{D}_\gamma^0 \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La démonstration est donnée en annexe 7.3.

On peut alors, par dualité, donner un théorème de composition dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Corollaire 2.2 (Composition dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de composition définit un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  pour  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . C'est à dire que  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la distribution,  $\mathcal{D}_\gamma^0 x$  définie par*

$$\langle \mathcal{D}_\gamma^0 x, \psi \rangle := \langle x, \alpha' \mathcal{D}_\alpha^0 \psi \rangle, \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

*où  $\alpha = \gamma^{-1}$ , est une distribution tempérée.*

**Preuve** Comme  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  muni de la loi de composition des fonctions est un groupe,  $\alpha \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  et  $\alpha' \mathcal{D}_\alpha^0 \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . ♠

### 2.1.10 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

L'opérateur de transformation de Fourier appliqué à la fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , défini par

$$\mathcal{F} : \psi \rightarrow \hat{\psi} \tag{2.15}$$

$$\hat{\psi}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} \psi(t) dt \tag{2.16}$$

est un automorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On peut donc définir la transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{F}^{-1} : \psi \rightarrow \check{\psi} \tag{2.17}$$

$$\check{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu t} \psi(\nu) d\nu. \tag{2.18}$$

L'espace de Schwartz a ainsi pour propriété fondamentale d'être invariant par transformation de Fourier, c'est à dire

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{2.19}$$

On peut alors, par dualité, étendre la transformée de Fourier à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  avec

$$\langle \hat{x}, \psi \rangle := \langle x, \check{\psi} \rangle, \tag{2.20}$$

et la transformée de Fourier généralisée est ainsi un automorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

### 2.1.11 Transformée de Mellin

Alors que la plupart des outils utilisés en traitement du signal possèdent des propriétés d'invariance par translation, la transformation de Mellin intervient dans les cadres où les objets considérés possèdent des propriétés d'invariance par dilatation. Sauf mention contraire et à l'exception de la partie sur la transformée de Mellin dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , l'ensemble des résultats qui suivent est issue de [Bertrand et al., 2009].

**Définition 2.7** *La transformation de Mellin appliquée à une fonction  $\psi$  à support sur la demi-droite  $]0, +\infty[$  est l'opérateur  $\mathcal{TM}$  formellement défini pour  $r \in \mathbb{R}$  par*

$$\begin{aligned} \mathcal{TM} : \psi &\rightarrow \hat{\psi} \\ \hat{\psi}(\beta) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{2i\pi\beta+r} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, le sens que l'on donne à cette expression ainsi qu'à l'égalité précédant dépend des hypothèses faites sur  $\psi$ .

#### 2.1.11.1 Formule d'inversion

Si  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt)$  sa transformée de Mellin  $\hat{\psi}$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$ . L'opérateur de transformation de Mellin est alors inversible, son inverse est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{TM}^{-1} : \phi &\rightarrow \check{\phi} \\ \check{\phi}(t) &= \int_{\mathbb{R}} t^{-2i\pi\beta-r-1} \phi(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

#### 2.1.11.2 Diagonalisation de l'opérateur de dilatation

**Définition 2.8** *L'opérateur de dilatation  $D_a^r$  est l'opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt)$  défini pour  $a \in \mathbb{R}_+^*$  par*

$$D_a^r \psi(t) = \frac{1}{a^{r+1}} \psi\left(\frac{t}{a}\right).$$

**Propriété 2.3** *De la même manière que la transformée de Fourier diagonalise l'opérateur de translation, la transformée de Mellin diagonalise l'opérateur de dilatation  $D_a^r$ , c'est à dire que  $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt)$ ,*

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \mathcal{TM}[D_a^r \psi](\beta) = a^{2i\pi\beta} \mathcal{TM}[\psi](\beta).$$

#### 2.1.11.3 Produit invariant à la dilatation

Le produit usuel de fonctions a pour propriété fondamentale que l'application de l'opérateur de translation sur chacun des facteurs est équivalente à l'application de l'opérateur de translation sur le produit des fonctions,

$$(T_a \psi_1)(T_a \psi_2) = T_a(\psi_1 \psi_2).$$

Le produit invariant à la dilatation est défini de manière à ce que cette propriété d'invariance soit respecté non plus avec l'opérateur de translation mais avec l'opérateur de dilatation.

**Définition 2.9** *Le produit invariant à la dilatation de deux fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , noté par  $\odot$  est défini par*

$$(\psi_1 \odot \psi_2)(t) = t^{r+1} \psi_1(t) \psi_2(t)$$

*L'invariance à la dilatation signifie que quelque soit  $\psi_1, \psi_2$ ,*

$$(D_a^r \psi_1) \odot (D_a^r \psi_2) = D_a^r (\psi_1 \odot \psi_2)$$

**Propriété 2.4** *De la même manière que la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions, la transformée de Mellin du produit invariant à la dilatation de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Mellin des fonctions*

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt), \quad \mathcal{TM}[\psi_1 \odot \psi_2] = \mathcal{TM}[\psi_1] * \mathcal{TM}[\psi_2]$$

#### 2.1.11.4 Convolution multiplicative

Étant données deux fonctions  $\psi_1, \psi_2$  définies sur  $\mathbb{R}$ , la convolution usuelle peut être vue comme la transformation linéaire la plus générale commutant avec la translation. Pour  $\psi_1, \psi_2$  telles que  $\psi_1 * \psi_2$  soit bien défini,

$$(T_a \psi_1) * \psi_2 = \psi_1 * (T_a \psi_2) = T_a(\psi_1 * \psi_2).$$

Par analogie, la convolution multiplicative est définie comme étant la transformation linéaire la plus générale commutant avec l'opérateur de dilatation.

**Définition 2.10** *La convolution multiplicative, notée  $\vee$ , de deux fonctions  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt)$ , est défini par*

$$\psi_1 \vee \psi_2(t) = \int_0^{+\infty} \psi_1(u) \psi\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u}$$

Le produit de convolution multiplicative vérifie alors

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt), \quad (D_a^r \psi_1) \vee \psi_2 = \psi_1 \vee (D_a^r \psi_2) = D_a^r (\psi_1 \vee \psi_2).$$

**Propriété 2.5** *De la même manière que la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit des transformées de Fourier des fonctions, la transformée de Mellin du produit de convolution multiplicatif de deux fonctions est égale au produit des transformées de Mellin des fonctions*

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt), \quad \mathcal{TM}[\psi_1 \vee \psi_2] = \mathcal{TM}[\psi_1] \mathcal{TM}[\psi_2]$$

#### 2.1.11.5 Formule de Plancherel

Comme la transformation de Fourier, la transformation de Mellin satisfait une formule de Plancherel,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^*, t^{2r+1} dt)$ ,

$$\int_0^{+\infty} \psi_1(t) \psi_2(t) t^{2r+1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{TM}[\psi_1](\beta) \mathcal{TM}[\psi_2](\beta) d\beta$$

### 2.1.11.6 Relations d'incertitude

Différents théorèmes d'incertitudes associés à la transformée de Mellin existent, les résultats de cette partie proviennent de [Flandrin, 2001].

**Définition 2.11** *Étant donnée une fonction  $\psi$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , d'intégrale  $E(\psi)$ , sa moyenne arithmétique  $m_a(\psi)$  et sa variance arithmétique  $V_a(\psi)$ , sont définies par*

$$\begin{aligned} m_a(\psi) &= \frac{1}{E(\psi)} \int_{\mathbb{R}} t\psi(t)dt, \\ V_a(\psi) &= \frac{1}{E(\psi)} \int_{\mathbb{R}} (t - m_a(\psi))^2 \psi(t)dt. \end{aligned}$$

**Proposition 2.3** *Une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$  et sa transformée de Mellin de paramètre  $r = -1/2$ ,  $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ , ont des variances arithmétiques telles que*

$$V_a(|\psi|^2)V_a(|\hat{\psi}|^2) \geq \frac{m_a^2(|\psi|^2)}{16\pi^2},$$

avec égalité si et seulement si  $\psi$  est une "ondelette de Klauder", de la forme

$$\psi(t) = K \exp(a \log(t) - bt + i(c \log(t) + d)) \mathbb{1}_+(t), \quad (2.21)$$

où  $a > -\frac{1}{2}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $c, d, K \in \mathbb{R}$

Il est intéressant de remarquer que la borne inférieure des variances arithmétiques n'est pas indépendante des fonctions considérées mais dépend de la valeur moyenne de la fonction  $\psi$ . La variance arithmétique n'est en fait pas une mesure adaptée aux signaux définis sur  $\mathbb{R}_+^*$ , celle ci introduisant une pénalisation sur les temps négatif. Dans le cadre de la transformation de Mellin, on pourra aussi choisir de considérer une mesure invariante à la dilatation, ce qui nous même à définir les notions de moyenne et de variance géométrique.

**Définition 2.12** *Étant donnée une fonction  $\psi$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , d'intégrale  $E(\psi)$ , sa moyenne géométrique  $m_g(\psi)$  et sa variance géométrique  $V_g(\psi)$  sont définies par*

$$\begin{aligned} m_g(\psi) &= \exp\left(\frac{1}{E(\psi)} \int_0^{+\infty} \log(t)\psi(t)dt\right), \\ V_g(\psi) &= \frac{1}{E(\psi)} \int_0^{+\infty} \log^2\left(\frac{t}{m_g(\psi)}\right) \psi(t)dt. \end{aligned}$$

**Proposition 2.4** *Une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$  et sa transformée de Mellin de paramètre  $r = -1/2$ ,  $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$  ont respectivement des variances géométrique et arithmétique telles que*

$$V_g(|\psi|^2)V_a(|\hat{\psi}|^2) \geq \frac{1}{16\pi^2},$$

avec égalité si et seulement si  $\psi$  est une "ondelette d'Altes" de la forme

$$\psi(t) = K \exp\left(-\frac{1}{2} \log(t) - a \log^2\left(\frac{t}{b}\right) + i(c \log(t) + b)\right) \mathbb{1}_+(t), \quad (2.22)$$

où  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $c, d, K \in \mathbb{R}$ .

On remarque alors que le résultat est complètement analogue à la relation d'incertitude qui existe entre la variance arithmétique d'une fonction et la variance arithmétique de sa transformée de Fourier.

### 2.1.11.7 Transformée de Mellin dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

On démontre en annexe 7.4 que l'opérateur de transformation de Mellin est un isomorphisme entre  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$  et  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  quand  $r > -1$ . On peut ainsi définir la transformée de Mellin généralisée,  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^*)$ ,

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \hat{x}, \psi \rangle := \langle x, \check{\psi} \rangle. \quad (2.23)$$

La transformée de Mellin généralisée définit ainsi un isomorphisme entre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^*)$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Dans ce manuscrit, on utilisera uniquement la transformée de Mellin unitaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  associée au paramètre  $r = -\frac{1}{2}$ .

### 2.1.12 Fonctions test dépendants d'un paramètre

On peut être amené à considérer une famille de mesures,  $u : \lambda \rightarrow \langle x, \psi^\lambda \rangle$ , qui résulte de l'évaluation de la distribution  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sur une fonction  $\psi^\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Le paramètre  $\lambda$  peut être, par exemple, associé à une translation,  $\psi^\lambda = T_\lambda \psi$ , à une modulation  $\psi^\lambda = M_\lambda \psi$ , ou à tout autre type de déformation de la fonction  $\psi$ . Il est alors naturel de se demander comment évolue l'ensemble des mesures  $u(\lambda)$  lorsque le paramètre  $\lambda$  évolue de manière continue dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 2.5** *Si la fonction  $f_t : \lambda \rightarrow \psi^\lambda(t)$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  quelque soit  $t$  et si quelque soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , la fonction  $g_{jk}$  définie par*

$$g_{jk} : t \rightarrow \frac{d^k}{d\lambda_j^k} \psi^\lambda(t),$$

*est une fonction de l'espace de Schwartz, alors la fonction  $u$  définie par*

$$u(\lambda) = \langle x, \psi^\lambda \rangle,$$

*est une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On a de plus*

$$\frac{d^k}{d\lambda_j^k} u(\lambda) = \left\langle x, \frac{d^k}{d\lambda_j^k} \psi^\lambda \right\rangle.$$

Nous renvoyons à [Golse, 2010]I.3 pour une démonstration.

### 2.1.13 Théorème des noyaux de Schwartz

Le théorème des noyaux de Schwartz permet de caractériser l'ensemble des formes sesquilinéaires sur un espace nucléaire. On appelle forme sesquilinéaire une forme linéaire à droite et antilinéaire à gauche. Nous donnons ici la version pour les formes sesquilinéaires sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  en notant cependant qu'une version similaire existe pour  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Théorème 2.2 (Théorème des noyaux de Schwartz)** *Toute forme sesquilinéaire et continue  $\mathcal{B}$ , définie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$  peut s'écrire :*

$$\mathcal{B}(\psi, \phi) = \langle k, \psi \otimes \bar{\phi} \rangle \quad (2.24)$$

*où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel  $(\bar{\psi} \otimes \phi)(t, s) = \bar{\psi}(t)\phi(s) \forall t, s \in \mathbb{R}$  et où  $k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  est le noyau de  $\mathcal{B}$ .*

Nous renvoyons à [Gelfand and Vilenkin, 1964b](I.1) pour une démonstration du théorème.

**Remarque 2.1** *On peut définir un théorème équivalent pour les formes sesquilinéaires définies sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on aura dans ce cas  $k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .*

### 2.1.14 Théorèmes de Bochner

Le théorème de Bochner est généralement connu dans le cas usuel des fonctions définies positives, localement continues à l'origine.

**Définition 2.13** *Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est définie positive si  $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  et  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ,*

$$\sum_{j,k=0}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} f(t_j - t_k) \geq 0.$$

**Théorème 2.3 (Bochner)** *Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle. Supposons que  $f$  soit continue à l'origine. Pour que  $f$  soit définie positive, il faut et il suffit qu'elle soit la transformée de Fourier inverse d'une mesure positive finie  $d\lambda$ ,*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi vt} d\lambda(\nu). \quad (2.25)$$

On peut construire un théorème équivalent dans le cas où les "fonctions" considérées sont des fonctions généralisées, cela nécessite préalablement de pouvoir définir la positivité des distributions,

**Définition 2.14** *Une distribution  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est de type positif si*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle x, \overline{\psi} \otimes \psi \rangle \geq 0,$$

où  $[f \otimes g](t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u+t)du$ .

Ce qui nous permet d'énoncer le théorème de Bochner dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,

**Théorème 2.4 (Bochner)** *Pour qu'une distribution  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  soit de type positif, il faut et il suffit qu'elle soit la transformée de Fourier inverse d'une mesure tempérée positive, c'est à dire une mesure positive  $d\lambda$  telle que*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \psi(t)d\lambda(t) < \infty. \quad (2.26)$$

Ce type de mesure peut avoir une croissance polynomiale à l'infini mais reste finie sur tout ensemble compact. Voir [Gelfand and Vilenkin, 1964b](II.3) pour une démonstration du théorème.

**Remarque 2.2** *Le théorème de Bochner énoncé dans [Gelfand and Vilenkin, 1964b](II.3) établit que pour qu'une distribution soit de type positif il faut et il suffit qu'elle soit la transformée de Fourier d'une mesure tempérée (et non la transformée de Fourier inverse). Le fait de considérer comme nous le faisons les fonctions généralisées comme des formes antilinéaires conduit à la version du théorème qui fait intervenir la transformée de Fourier inverse.*

## 2.2 Les processus stochastiques généralisés

Nous allons maintenant donner quelques éléments de la théorie des processus stochastiques généralisés. Nous adopterons le point de vue proposé dans [Gelfand and Vilenkin, 1964b] en l'adaptant au cas des processus généralisés à valeurs complexes.

**Définition 2.15 (Condition de compatibilité)** *Les  $n+1$  variables aléatoires  $v_1, v_2, \dots, v_n, w \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$  respectent la condition de compatibilité si  $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ,*

$$\mathbb{P}\{v_1 < c_1, v_2 < c_2, \dots, v_n < c_n\} = \mathbb{P}\{v_1 < c_1, v_2 < c_2, \dots, v_n < c_n, w < +\infty\}.$$

**Définition 2.16 (Fonctionnelle aléatoire à valeurs réelles sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ )** *On dit que  $x$  est une fonctionnelle aléatoire à valeurs réelles de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ , si à chaque fonction à valeurs réelles  $\psi$  de l'espace de Schwartz l'on fait correspondre une variable aléatoire à valeurs réelles  $\langle x, \psi \rangle \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ , ce qui veut dire que pour toutes fonctions à valeurs réelles  $\psi_1, \dots, \psi_n$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , l'on se donne la probabilité pour que simultanément*

$$a_k \leq \langle x, \psi_k \rangle \leq b_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

où les variables aléatoires  $\langle x, \psi_1 \rangle, \langle x, \psi_2 \rangle, \dots, \langle x, \psi_n \rangle$  vérifient la condition de compatibilité.

**Définition 2.17 (Fonctionnelle aléatoire à valeurs complexes sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ )** *On dit que  $x = x^r + ix^i$  est une fonctionnelle aléatoire à valeurs complexes sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si  $x^r$  et  $x^i$  sont toutes deux des fonctionnelles aléatoires à valeurs réelles sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

**Définition 2.18 (Processus stochastique généralisé sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ )** *On appelle processus stochastique généralisé sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , toute fonctionnelle aléatoire à valeurs complexes  $x$ , antilinéaire et continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ . L'antilinéarité étant définie par*

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } \forall(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), x(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \stackrel{p.s.}{=} \bar{\alpha}x(\psi_1) + \bar{\beta}x(\psi_2),$$

et l'on dira que  $x$  est continue si  $\forall\psi_{kj} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), k \in [1, n]$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \psi_{kj} = \psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\{\langle x, \psi_{1j} \rangle, \langle x, \psi_{2j} \rangle, \dots, \langle x, \psi_{nj} \rangle\} = \mathbb{P}\{\langle x, \psi_1 \rangle, \langle x, \psi_2 \rangle, \dots, \langle x, \psi_n \rangle\}.$$

On note  $\mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  l'espace des processus stochastiques généralisés sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

### 2.2.1 Opérations sur les processus stochastiques généralisés

Les opérations sur les processus stochastiques généralisés se définissent comme dans le cas des fonctions généralisées, on pourra par exemple utiliser le principe de l'extension duale présenté en section 2.1.4.

### 2.2.2 Moments fonctionnels et fonctionnelle caractéristique

Nous définirons d'abord la fonctionnelle caractéristique des processus stochastiques généralisés, analogue de la fonction caractéristique des processus stochastiques "usuels", point de départ à la généralisation de l'ensemble des outils associés aux processus stochastiques usuels. Une grande partie des résultats de cette section sont démontrés dans [Unser and Tafti, 2013](III.5), dans le cas où l'on mesure des processus à valeurs réelles sur des fonctions test à valeurs réelles, nous les généralisons ici dans le cas où les objets considérés sont à valeurs possiblement complexes.

### 2.2.2.1 Fonctionnelle caractéristique

La fonctionnelle caractéristique  $\hat{\mathcal{P}}_x$  du processus  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  est la forme sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  définie par

$$\hat{\mathcal{P}}_x(\psi) = \mathbb{E} \left\{ e^{i\Re\langle x, \psi \rangle} \right\}.$$

La définition est donc formellement semblable à celle posée pour les processus stochastiques usuels où le produit scalaire serait "remplacé" par le crochet de dualité.

### 2.2.2.2 Moyenne généralisée

On peut définir, quand elle existe,  $\mu_x : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  la moyenne généralisée du processus  $x$  évalué en  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  par

$$\mu_x(\psi) = \mathbb{E} \{ \langle x, \psi \rangle \} = -i \frac{d}{d\omega^r} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0} + \frac{d}{d\omega^i} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0},$$

où  $\omega^r = \Re\{\omega\}$  et  $\omega^i = \Im\{\omega\}$ . On montre aisément que  $\mu_x$  est une forme antilinéaire continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{C}$ , donc  $\mu_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On pourra ainsi écrire

$$\mu_x(\psi) = \langle \mu_x, \psi \rangle.$$

### 2.2.2.3 Autocorrélation fonctionnelle, Autocorrélation généralisée

On peut définir les autocorrélations fonctionnelles  $\mathcal{R}_x^1 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\mathcal{R}_x^2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x, \psi_1 \rangle \overline{\langle x, \psi_2 \rangle} \right\}, \\ \mathcal{R}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x, \psi_1 \rangle \langle x, \psi_2 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

quand ces expressions ont un sens. En particulier en notant  $\omega^r = \Re\{\omega\}$  et  $\omega^i = \Im\{\omega\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x^1(\psi, \psi) &= -\frac{d^2}{d\omega^{r^2}} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0} - \frac{d^2}{d\omega^{i^2}} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0}, \\ \mathcal{R}_x^2(\psi, \psi) &= -\frac{d^2}{d\omega^{r^2}} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0} + \frac{d^2}{d\omega^{i^2}} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0} - 2i \frac{d^2}{d\omega^r d\omega^i} \hat{\mathcal{P}}_x(\omega\psi)|_{\omega=0}. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_x^1$  (resp.  $\mathcal{R}_x^2$ ) étant une forme sesquilinéaire ( resp. antilinéaire) continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{C}$ , le théorème des noyaux de Schwartz nous dit qu'il existe alors  $r_x^1$  et  $r_x^2$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , les autocorrélations généralisées de  $x$  tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \langle r_x^1, \psi_1 \otimes \overline{\psi_2} \rangle, \\ \mathcal{R}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \langle r_x^2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3** Dans le cas où le processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  est un processus à valeurs réelles, les autocorrélations fonctionnelles sont égales,  $r_x^1 = r_x^2$ .

## 2.2.2.4 Covariance fonctionnelle, Covariance généralisée

On peut de la même manière définir les covariances fonctionnelles  $\mathcal{C}_x^1 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_x^2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle \overline{\langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle} \right\} = \mathcal{R}_x(\psi_1, \psi_2) - \mathcal{M}_x(\psi_1) \overline{\mathcal{M}_x(\psi_2)}, \\ \mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle \langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle \right\} = \mathcal{R}_x(\psi_1, \psi_2) - \mathcal{M}_x(\psi_1) \mathcal{M}_x(\psi_2).\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_x^1$  (resp.  $\mathcal{C}_x^2$ ) étant une forme sesquilinéaire (resp. antilinéaire) continue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{C}$ , le théorème des noyaux de Schwartz établit qu'il existe alors  $c_x^1$  et  $c_x^2$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , les covariances généralisées telles que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \langle c_x^1, \psi_1 \otimes \overline{\psi_2} \rangle, \\ \mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \langle c_x^2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle,\end{aligned}$$

**Propriété 2.6** La première covariance généralisée  $c_x^1$  est une distribution positive,  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle c_x^1, \psi \otimes \overline{\psi} \rangle \geq 0.$$

**Preuve** Voir [Gelfand and Vilenkin, 1964b](III.2) pour une démonstration. ♠

**Propriété 2.7** La première covariance fonctionnelle  $\mathcal{C}_x^1$  possède la symétrie hermitienne,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) = \overline{\mathcal{C}_x^1(\psi_2, \psi_1)}.$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle \overline{\langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle} \right\}, \\ &= \overline{\mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle \overline{\langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle} \right\}}, \\ &= \overline{\mathcal{C}_x^1(\psi_2, \psi_1)}.\end{aligned}$$

♠

**Propriété 2.8** La seconde covariance fonctionnelle  $\mathcal{C}_x^2$  est symétrique, c'est à dire que  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) = \mathcal{C}_x^2(\psi_2, \psi_1).$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle \langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle x - \mu_x, \psi_2 \rangle \langle x - \mu_x, \psi_1 \rangle \right\}, \\ &= \mathcal{C}_x^2(\psi_2, \psi_1).\end{aligned}$$

♠

### 2.2.3 Les processus stochastiques stationnaires généralisés

Les propriétés des processus stationnaires sont généralement bien connues dans le cas des processus stochastiques usuels à valeurs réelles, elles le sont moins dans le cas des processus stochastiques à valeurs complexes ou dans le cas des processus stochastiques généralisés. [Gelfand and Vilenkin, 1964b](III.3) ont étudié la stationnarité des processus stochastiques généralisés à valeurs réelles. [Picinbono and Bondon, 1997] étudie quand à lui la stationnarité des processus stochastiques discrets à valeurs complexes. On ne s'intéressera dans ce manuscrit qu'à la stationnarité au sens strict, nous verrons alors que les propriétés des processus discrets à valeurs complexes s'étendent facilement au cas des processus stochastiques généralisés.

**Définition 2.19** *Un processus stochastique généralisé  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  est dit stationnaire au sens strict si et seulement si, quelque soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x$  et son translaté,  $T_a x$  ont la même fonctionnelle caractéristique.*

Cette propriété d'invariance par translation se répercute sur les deux premiers moments de  $x$ , ainsi  $\mu_x$  la moyenne généralisée de  $x$  est la distribution constante définie par  $\langle \mu_x, \psi \rangle = \mu \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}$  avec  $\mu \in \mathbb{C}$ . Au second ordre,  $c_x^1$  et  $c_x^2$  sont des distributions invariantes par translation, c'est à dire que  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle c_x^1, T_a \psi_1 \otimes T_a \bar{\psi}_2 \rangle = \langle c_x^1, \psi_1 \otimes \bar{\psi}_2 \rangle, \quad (2.27)$$

$$\langle c_x^2, T_a \psi_1 \otimes T_a \psi_2 \rangle = \langle c_x^2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle. \quad (2.28)$$

On en déduit qu'il existe  $k_x^1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $k_x^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  tel que

$$C_x^1(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle, \quad (2.29)$$

$$C_x^2(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^2 * \bar{\psi}_2, \psi_1 \rangle. \quad (2.30)$$

avec, formellement,  $c_x^1(t, s) = k_x^1(t - s)$  et  $c_x^2(t, s) = k_x^2(t - s)$ . Notons que la convolution  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) * \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est bien définie et que  $k_x^1 * \psi_2 \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ .

Nous donnons les principales propriétés des distributions  $k_1$  et  $k_2$ .

**Propriété 2.9** *La distribution  $k_x^1$  est de type positif. Elle possède de plus la symétrie hermitienne, c'est à dire que  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,*

$$\langle k_x^1, \psi \rangle = \langle \overline{(k_x^1)^\sigma}, \psi \rangle,$$

où  $\hat{\psi}_1^\sigma(\nu) = \hat{\psi}_1(-\nu) \forall \nu \in \mathbb{R}$ .

**Preuve** La preuve que la distribution  $k_1$  est de type positif est immédiate puisque  $c_x^1$  est une distribution positive (prop. 2.6) et que,

$$C_x^1(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle k_x^1, \bar{\psi}_2 \circledast \psi_1 \rangle,$$

où  $[f \circledast g](t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u + t)du$ .

Montrons que maintenant que  $k_1$  possède la symétrie hermitienne. Remarquons d'abord que  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$C_x^1(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle k_x^1, \bar{\psi}_2 \circledast \psi_1 \rangle.$$

Calculons maintenant

$$\langle (\widehat{k_x^1})^\sigma * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle (\widehat{k_x^1})^\sigma, \overline{\psi_2} \otimes \psi_1 \rangle = \overline{\langle k_x^1, (\psi_2 \otimes \overline{\psi_1})^\sigma \rangle}.$$

Comme,  $(\psi_2 \otimes \overline{\psi_1})^\sigma = \overline{\psi_1} \otimes \psi_2$ , on en déduit

$$\langle (\widehat{k_x^1})^\sigma * \psi_2, \psi_1 \rangle = \overline{\langle k_x^1, \overline{\psi_1} \otimes \psi_2 \rangle} = \overline{\mathcal{C}_x^1(\psi_2, \psi_1)}.$$

On a vu dans la Propriété 2.7 que  $\mathcal{C}_x^1$  à la symétrie hermitienne donc finalement,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle (\widehat{k_x^1})^\sigma * \psi_2, \psi_1 \rangle = \mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle.$$

Prenons maintenant  $\psi_2$  une fonction hermitienne telle que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{\psi_2}(\nu) > 0, \forall \psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle (\widehat{k_x^1})^\sigma * (\widehat{\psi_2})^\sigma, \psi_1 \rangle = \langle [\widehat{k_x^1} * \widehat{\psi_2}]^\sigma, \psi_1 \rangle.$$

Donc  $k_x^1 * \psi_2 \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  possède la symétrie hermitienne et par transformation de Fourier  $\widehat{k_x^1} \widehat{\psi_2} \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  est à valeurs réelles. Comme  $\psi_2$  a la symétrie hermitienne  $1/\widehat{\psi_2}$  est à valeurs réelles. Finalement  $\widehat{k_x^1} \widehat{\psi_2} / \widehat{\psi_2} = \widehat{k_x^1}$  est à valeurs réelles et  $k_x^1$  possède la symétrie hermitienne. ♠

**Propriété 2.10** La distribution  $k_x^2$  est paire c'est à dire que  $\forall \psi, \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle k_x^1, \psi \rangle = \langle (k_x^1)^\sigma, \psi \rangle.$$

**Preuve** Remarquons d'abord que  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^2 * \overline{\psi_2}, \psi_1 \rangle = \langle k_x^2, \psi_2 \otimes \psi_1 \rangle.$$

Calculons maintenant

$$\langle (k_x^2)^\sigma * \overline{\psi_2}, \psi_1 \rangle = \langle (k_x^2)^\sigma, \psi_2 \otimes \psi_1 \rangle = \langle k_x^2, (\psi_2 \otimes \psi_1)^\sigma \rangle.$$

Comme,  $(\psi_2 \otimes \psi_1)^\sigma = \psi_1 \otimes \psi_2$ ,

$$\langle (k_x^2)^\sigma * \overline{\psi_2}, \psi_1 \rangle = \langle k_x^2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \mathcal{C}_x^2(\psi_2, \psi_1).$$

On a vu en Propriété 2.8 que  $\mathcal{C}_x^2$  est symétrique donc,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle (k_x^2)^\sigma * \overline{\psi_2}, \psi_1 \rangle = \mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^2 * \overline{\psi_2}, \psi_1 \rangle.$$

Prenons maintenant  $\psi_2$  une fonction paire à valeurs réelles telle que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{\psi_2}(\nu) > 0$ , alors  $\forall \psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle k_x^2 * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle (k_x^2)^\sigma * (\psi_2)^\sigma, \psi_1 \rangle = \langle [k_x^2 * \psi_2]^\sigma, \psi_1 \rangle.$$

Donc  $k_x^2 * \psi_2 \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est une fonction paire et par transformation de Fourier  $\widehat{k_x^2} \widehat{\psi_2} \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  est paire. Comme  $\psi_2$  est paire  $1/\widehat{\psi_2}$  est paire. Finalement  $\widehat{k_x^2} \widehat{\psi_2} / \widehat{\psi_2}$  est paire et  $k_x^2$  est paire. ♠

### 2.2.3.1 Spectres généralisés

Par transformation de Fourier, on peut définir  $S_x^1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $S_x^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , les spectres généralisés de  $x$ , avec  $S_x^1 = \widehat{k_x^1}$  et  $S_x^2 = \widehat{k_x^2}$  vérifiant,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \langle S_x^1, \hat{\psi}_1 \widehat{\bar{\psi}}_2 \rangle, \\ \mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \langle S_x^2, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2^\sigma \rangle, \end{aligned}$$

où  $\hat{\psi}_1^\sigma(\nu) = \hat{\psi}_1(-\nu) \forall \nu \in \mathbb{R}$ .

**Preuve** Le calcul donne

$$\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^1 * \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \widehat{k_x^1} \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_1 \rangle = \langle \widehat{k_x^1}, \hat{\psi}_1 \widehat{\bar{\psi}}_2 \rangle, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) = \langle k_x^2 * \bar{\psi}_2, \psi_1 \rangle = \langle \widehat{k_x^2} \widehat{\bar{\psi}}_2, \hat{\psi}_1 \rangle = \langle \widehat{k_x^2}, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2^\sigma \rangle. \quad (2.32)$$

♠

**Propriété 2.11** *Le premier spectre généralisé,  $S_x^1$  est une distribution à valeurs réelles. Le second spectre généralisé,  $S_x^2$  est une distribution paire.*

**Preuve** Les preuves sont immédiates, puisque  $k_x^1$  à la symétrie hermitienne sa transformée de Fourier  $S_x^1$  est à valeurs réelles et comme  $k_x^2$  est une distribution paire, sa transformée de Fourier  $S_x^2$  est une distribution paire. ♠

Notons qu'une nouvelle écriture des équations (2.31) et (2.32) nous conduit aux relations

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) &= \langle \Delta_{S_x^1}^1, \hat{\psi}_1 \otimes \widehat{\bar{\psi}}_2 \rangle, \\ \mathcal{C}_x^2(\psi_1, \psi_2) &= \langle \Delta_{S_x^2}^2, \hat{\psi}_1 \otimes \hat{\psi}_2 \rangle, \end{aligned}$$

où  $\Delta_{S_x^1}^1$  et  $\Delta_{S_x^2}^2$  sont des fonctions généralisées de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  telles que, formellement,

$$\begin{aligned} \Delta_{S_x^1}^1(\nu, \nu') &= S_x^1(\nu) \delta(\nu - \nu'), \\ \Delta_{S_x^2}^2(\nu, \nu') &= S_x^2(\nu) \delta(\nu + \nu'). \end{aligned}$$

### 2.2.3.2 Mesure spectrale

Comme  $k_x^1$  est une distribution de type positif (voir prop. 2.9), le théorème de Bochner 2.1.14 établit que sa transformée de Fourier inverse est une mesure positive tempérée. Le spectre généralisé peut donc être vu comme une mesure positive tempérée et l'on peut donc définir une mesure spectrale  $d\lambda_x$ , telle que

$$\mathcal{C}_x^1(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\bar{\psi}}_1(\nu) \hat{\psi}_2(\nu) d\lambda_x(\nu).$$

Ceci n'est généralement pas vrai pour la seconde covariance fonctionnelle, celle ci n'étant pas forcément de type positif.

### 2.2.4 Les processus gaussiens complexes généralisés

On appelle  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , l'espace des processus gaussiens complexes généralisés. Le processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  est un processus gaussien complexe généralisé si sa fonctionnelle caractéristique a pour expression

$$\hat{\mathcal{P}}_x(\psi) = e^{-\frac{1}{4}(C_x^1(\psi, \psi) + \Re\{C_x^2(\psi, \psi)\}) + i\Re\{M_x(\psi)\}}.$$

Celle-ci est simplement une généralisation de la fonction caractéristique d'un processus multivarié complexe gaussien donnée par exemple dans [Picinbono, 1996].

**Remarque 2.4** *Dans le cas où l'on mesure un processus gaussien généralisé  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  à valeurs réelles sur des fonction test à valeurs réelles, les deux covariances fonctionnelles sont égales et la fonctionnelle caractéristique du processus  $x$  a alors pour expression,*

$$\hat{\mathcal{P}}_x(\psi) = e^{-\frac{1}{2}C_x^1(\psi, \psi) + iM_x(\psi)}.$$

#### 2.2.4.1 Les processus gaussiens circulaires

Une classe importante des processus gaussiens à valeurs complexes, appelée processus complexe gaussien circulaire, ou processus gaussien circulaire puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté, correspond au cas où un processus complexe gaussien est invariant en loi par la multiplication avec une exponentielle complexe. Nous renvoyons à [Gallager, 2008] ou [Picinbono, 1994] pour une étude plus complète des processus gaussiens circulaires dans le cas où les processus considérés sont des variables aléatoires multidimensionnelles.

**Définition 2.20 (Processus gaussien circulaire)** *Soit  $x$  un processus gaussien complexe généralisé,  $x$  est un processus gaussien circulaire si et seulement si quelque soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x$  et  $xe^{2i\pi a}$  ont la même fonction caractéristique.*

On montre alors qu'un processus complexe généralisé est circulaire si et seulement si sa moyenne généralisée et sa seconde covariance généralisée sont nulles. La fonctionnelle caractéristique d'un processus gaussien circulaire est alors de la forme

$$\hat{\mathcal{P}}_x(\psi) = e^{-\frac{1}{4}C_x^1(\psi, \psi)}.$$

### 2.2.5 Bruits blancs gaussiens

De nombreuses approches permettant de définir le bruit blanc à valeurs réelles existent dans la littérature (voir [Hida and Si, 2008] et [Gelfand and Vilenkin, 1964b](III.2) par exemple), et l'étude des processus à valeurs complexes permet quand à elle de définir de nouveaux types de bruits blancs (voir [Gallager, 2008]). On se limitera ici à donner une définition du bruit blanc à partir de ses covariances généralisées.

**Définition 2.21 (Bruit blanc gaussien réel)** *On appelle bruit blanc gaussien réel de variance  $\sigma_0^2$  le processus généralisé centré à valeurs réelles  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  ayant pour covariance généralisée  $k_x^1 = k_x^2 = \delta\sigma_0^2$ , où  $\sigma_0^2 > 0$ .*

**Définition 2.22 (Bruit blanc gaussien circulaire)** *On appelle bruit blanc gaussien circulaire de variance  $\sigma_0^2$  le processus généralisé circulaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  ayant pour première covariance généralisée  $k_x^1 = \delta\sigma_0^2$ , où  $\sigma_0^2 > 0$ .*

**Propriété 2.12** *La fonctionnelle caractéristique d'un bruit blanc gaussien circulaire est de la forme,*

$$\hat{\mathcal{P}}_x(\psi) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_0^2}{4} \|\psi\|^2 \right\}, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

**Remarque 2.5** *On remarque alors que l'image d'un bruit blanc gaussien circulaire par un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$  est un bruit blanc circulaire de même variance.*

## 2.2.6 Représentation analytique des processus stochastiques généralisés

Étant donné un processus stochastique stationnaire généralisé  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$ , on va chercher à définir sa représentation analytique, ou processus analytique associé à  $x$ . On donnera d'abord la définition d'un processus analytique, analogue au cas des processus stochastiques usuels

**Définition 2.23** *Soit  $x \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  un processus généralisé stationnaire à valeurs réelles, de spectre généralisé  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On appelle, quand elle existe, la représentation analytique du processus  $x$ , le processus stationnaire  $x^a \in \mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$  vérifiant, en loi,*

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^a, \psi \rangle &= \langle \hat{x}, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \text{supp}(\psi) \subset [0, +\infty[, \\ &= 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \text{supp}(\psi) \subset ]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

**Proposition 2.6** *Soit  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus généralisé gaussien stationnaire à valeurs réelles, de spectre généralisé  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  vérifiant*

$$\exists \epsilon > 0, \text{ } \text{supp}(S_x) = ]-\infty, -\epsilon[ \cup ]\epsilon, +\infty[.$$

*Alors  $x_a$ , la représentation analytique du processus  $x$  existe, c'est un processus gaussien généralisé circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_x \mathbb{1}_+$ , où  $\mathbb{1}_+$  est l'échelon de Heaviside.*

**Preuve** Prenons  $\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon$  une fonction de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  tel que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon(\nu) &= 1 \text{ si } \nu \geq 0 \\ &= 0 \text{ si } \nu \leq -\epsilon, \end{aligned}$$

et intéressons nous au processus  $x^a$  défini par  $\hat{x}^a = \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon(\nu)\hat{x}$ . Comme  $\hat{x} \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  et que  $\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,  $x^a \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . Le processus  $x^a$  est donc un processus gaussien généralisé centré, nous allons montrer que c'est un processus circulaire et stationnaire de spectre  $S_{x^a} = S_x \mathbb{1}_+$ .

**Spectre du processus  $x^a$  :**Calculons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{x^a}^1(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}^a, \hat{\psi}_1 \rangle \overline{\langle \hat{x}^a, \hat{\psi}_2 \rangle} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_1 \rangle \overline{\langle \hat{x}, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_2 \rangle} \right\}, \\ &= \left\langle S_x, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^2 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \right\rangle, \\ &= \left\langle S_x \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^2, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Les support singuliers de  $S_x$  et de  $\mathbb{1}_+$ , l'échelon de Heaviside, étant disjoints,  $S_x \mathbb{1}_+$  définit bien une distribution tempérée, comme de plus

$$\exists \epsilon > 0, \text{ supp}(S_x) = ] - \infty, -\epsilon[ \cup ] \epsilon, +\infty[.$$

alors  $S_x \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^2 = S_x \mathbb{1}_+$  et  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{C}_{x^a}^1(\psi_1, \psi_2) = \langle S_x \mathbb{1}_+, \widehat{\psi_1 \psi_2} \rangle$$

Le processus  $x^a$  est donc stationnaire et a pour spectre généralisé  $S_{x^a} = 2S_x \mathbb{1}_+$ .

### Circularité du processus $x^a$

Regardons la seconde covariance fonctionnelle du processus  $x^a$ ,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{x^a}^2(\psi_1, \psi_2) &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}^a, \hat{\psi}_1 \rangle \langle \hat{x}^a, \hat{\psi}_2 \rangle \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_1 \rangle \langle \hat{x}, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_2 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Comme le processus  $x$  est stationnaire,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{x^a}^2(\psi_1, \psi_2) &= \langle S_x, (\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_1)^\sigma (\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \hat{\psi}_2) \rangle, \\ &= \langle S_x \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^\sigma, \hat{\psi}_1^\sigma \hat{\psi}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Le support de  $(\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^\sigma)$  étant inclus dans  $[-\epsilon, +\epsilon]$ , la distribution  $S_x \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon^\sigma$  est la distribution nulle et le processus  $x^a$  est circulaire.

### Représentation analytique

Nous allons maintenant montrer que le processus  $x^a$  est le processus analytique associé au processus  $x$ , c'est à dire qu'il vérifie, en loi,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^a, \psi \rangle &= \langle \hat{x}, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \text{supp}(\psi) \subset [0, +\infty[, \\ &= 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \text{supp}(\psi) \subset ] - \infty, 0]. \end{aligned}$$

Le processus  $x^a$  étant un processus circulaire, sa transformée de Fourier  $\hat{x}^a$  est elle aussi un processus circulaire et sa fonctionnelle caractéristique ne dépend que de sa première covariance fonctionnelle,

$$\mathcal{C}_{\hat{x}^a}^1(\psi, \psi) = \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}^a, \psi \rangle \overline{\langle \hat{x}^a, \psi \rangle} \right\} = \langle S_x, \tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \psi \bar{\psi} \rangle.$$

Si le support de  $\psi$  est dans  $[0, +\infty[$ , alors  $\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \psi = \psi$  et

$$\mathcal{C}_{\hat{x}^a}^1(\psi, \psi) = \langle S_x, \psi \bar{\psi} \rangle = \mathcal{C}_{\hat{x}}^1(\psi, \psi),$$

et les variables aléatoires  $\langle \hat{x}^a, \psi \rangle$  et  $\langle \hat{x}, \psi \rangle$  suivent la même loi de probabilité.

Si le support de  $\psi$  est dans  $] - \infty, 0]$ , alors le support de  $\tilde{\mathbb{1}}_\epsilon \psi$  est inclu dans  $] - \epsilon, 0]$ , comme  $S_x$  est nul sur cet intervalle

$$\mathcal{C}_{\hat{x}^a}^1(\psi, \psi) = 0,$$

alors  $\langle \hat{x}^a, \psi \rangle$  est la variable aléatoire nulle.





# Déformation des processus stationnaires généralisés

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux opérateurs agissant sur les processus stationnaires généralisés. Nous généraliserons d'abord la notion de filtre aux processus stochastiques généralisés ce qui nous permettra de définir un ensemble d'opérateur, appelés pseudo-filtres, préservant les propriétés de stationnarité. Nous présenterons ensuite les deux opérateurs de déformation des processus stationnaires intervenant dans les modèles de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle étudiés dans ce manuscrit.

## Sommaire

<b>3.1 Opérateurs pseudodifférentiels</b>	<b>45</b>
3.1.1 Représentations des opérateurs pseudodifférentiels	45
3.1.2 Endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	46
<b>3.2 Pseudo-filtre de <math>\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})</math></b>	<b>47</b>
3.2.1 Opérateur de convolution	48
3.2.2 Opérateur de dilatation fréquentielle	49
3.2.3 Un semi-groupe de pseudo-filtres	52
<b>3.3 Opérateurs de déformation des processus stationnaires</b>	<b>55</b>
3.3.1 Opérateur de modulation fréquentielle	55
3.3.2 Opérateur de dilatation temporelle	57
<b>3.4 Présentation des modèles étudiés et problématique</b>	<b>60</b>
3.4.1 Modèle de modulation fréquentielle	60
3.4.2 Modèle de dilatation temporelle	60
3.4.3 Problématique et indétermination	61

## 3.1 Opérateurs pseudodifférentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels généralisent la notion d'opérateur différentiel et apportent un formalisme théorique adapté à l'étude des endomorphismes dans des espaces de distributions. Nous renvoyons à [Hörmander, 1983], [Folland, 1989] ou [Alinhac, 2012] pour une étude détaillée, nous donnerons ici seulement différentes représentations possibles d'un même opérateur.

### 3.1.1 Représentations des opérateurs pseudodifférentiels

Étant donné un opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la forme  $\mathcal{B}$ , définie par  $\mathcal{B}(\psi, \phi) = \langle A\phi, \psi \rangle, \forall \psi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , est une forme sesquilinéaire et continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Le théorème des noyaux de Schwartz (Théorème. 2.2) établit qu'il existe alors  $k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  tel que,

$$\mathcal{B}(\psi, \phi) = \langle k, \psi \otimes \bar{\phi} \rangle. \quad (3.1)$$

On pourra alors formellement exprimer l'opérateur  $A$  au moyen de la distribution  $k$ ,

$$A\phi(t) = \int k(t, s)\phi(s)ds, \quad (3.2)$$

et on appellera  $k$ , noyau de l'opérateur  $A$ . Il est aussi possible de donner différentes représentations formelles de l'opérateur  $A$ , associées à différentes transformations de son noyau, voir [Krahmer and Pfander, 2014] par exemple.

- La représentation de Kohn-Nirenberg de l'opérateur  $A$ ,

$$A\phi(t) = \int \sigma(t, \nu)\hat{\phi}(\nu)e^{2i\pi\nu t}d\nu, \quad (3.3)$$

où le symbole de Kohn-Nirenberg,  $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , est défini par  $\sigma(t, \nu) = \int k(t, s)e^{2i\pi\nu(s-t)}ds$ .

- La représentation en termes de sa fonction d'étalement  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ ,

$$A\phi(t) = \int \int \eta(s, \xi)e^{2i\pi\xi t}\phi(t-s)d\xi ds, \quad (3.4)$$

où  $\eta(s, \xi) = \int \int \sigma(t, \nu)e^{2i\pi(s\nu-t\xi)}dt d\nu$ .

- La représentation en termes de sa réponse impulsionnelle évolutive  $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ ,

$$A\phi(t) = \int h(t, s)\phi(t-s)ds,$$

où  $h(t, s) = k(t, t-s)$ .

### 3.1.2 Endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Nous nous intéressons par la suite à des opérateurs définis sur l'espace des processus stochastiques généralisés et les opérateurs considérés seront des endomorphismes de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Les différentes représentations présentées ci-dessus existent pour tout opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et, à fortiori, pour tout endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Cela n'est pas nécessairement vrai lorsque on s'intéresse à des endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Des conditions pour qu'un opérateur  $A$  définisse un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sont proposées dans [Hörmander, 1983](XVIII.1).

**Définition 3.1 (Classe de Hörmander)** *Un symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  est dans la classe de Hörmander  $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$  s'il existe des constantes  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$  et  $m \in \mathbb{R}$  telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \left| \partial_t^\beta \partial_\nu^\alpha \sigma(t, \nu) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \left( \sqrt{1 + \nu^2} \right)^{m - \rho\alpha + \delta\beta}. \quad (3.5)$$

**Propriété 3.1** *Un opérateur linéaire  $A$  associé au symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Si de plus  $\delta < \rho$ , alors  $A$  est aussi un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .*

On sera cependant amené à considérer des endomorphismes de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dont les symboles de Kohn-Nirenberg ne sont pas dans la classe de Hörmander. Dans le cas simple où  $\sigma(t, \nu) = a(t)$ , l'opérateur considéré est alors l'opérateur de multiplication point par point par la fonction  $a$ ,  $A\phi(t) = a(t)\phi(t)$ . Dans le cas où  $a \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  l'opérateur  $A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  (voir 2.1.7) mais son symbole de Kohn-Nirenberg n'est pas nécessairement dans la classe de Hörmander puisque les dérivées de la fonction  $a$  peuvent être croissantes. On s'intéressera dans la section suivante à des endomorphismes de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  pour lesquels on supposera qu'il existe une représentation de Kohn-Nirenberg.

### 3.2 Pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$

Une question naturelle lors de l'étude des opérateurs de déformation des processus stationnaires généralisés est de se demander quels opérateurs laissent les propriétés de stationnarité invariantes. On introduira dans ce but la notion de pseudo-filtre qui généralisera la notion de filtre en l'adaptant au cas des processus stationnaires. La question a préalablement été étudiée dans [Clerc and Mallat, 2003] et nous apporterons ici seulement quelques nouveaux éléments de réponse.

**Définition 3.2** *Un endomorphisme  $A$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  si et seulement si quel que soit le processus stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , le processus  $Ax \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est lui aussi un processus stationnaire.*

**Proposition 3.1** *Soit  $A$  un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  associé au symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ , pour que  $A$  soit un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  il est nécessaire que son symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma$  soit de la forme*

$$\sigma(\nu, t) = \hat{\rho}(\nu)e^{2i\pi\phi(\nu)t}, \quad (3.6)$$

où  $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs complexes et où  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs réelles.

**Preuve** Soit  $A$  un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , étant donné  $X$ , une variable aléatoire centrée, circulaire et unitaire, le processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  défini par  $x(t) = Xe^{2i\pi\nu_0 t}$ , est un processus stochastique circulaire stationnaire de fonction de covariance  $C_x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$C_x(t, t') = e^{2i\pi\nu_0(t-t')},$$

et de spectre  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $S_x = \delta_{\nu_0}$ . L'image du processus  $x$  par l'opérateur  $A$  est,

$$Ax(t) = X\sigma(t, \nu_0)e^{2i\pi\nu_0 t}.$$

et  $C_{Ax} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , fonction de covariance du processus  $Ax$ , a pour expression,

$$C_{Ax}(t, t') = \sigma(t, \nu_0)\overline{\sigma(t', \nu_0)}e^{2i\pi\nu_0(t-t')}.$$

Comme l'opérateur  $A$  est un pseudo-filtre,  $C_{Ax}$  est fonction de  $t - t'$  et il est nécessaire que  $\sigma(t, \nu)\overline{\sigma(t', \nu)}$  soit fonction de  $t - t'$ . Il existe alors une fonction  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$  telle que

$$g(t - t', \nu) = \sigma(t, \nu)\overline{\sigma(t', \nu)}.$$

Posons  $\sigma(t, \nu) = a(t, \nu)e^{2i\pi\varphi(t, \nu)}$ , où  $a(t, \nu) > 0$  et  $\varphi(t, \nu) \in \mathbb{R}$ ,

$$g(t - t', \nu) = a(t, \nu)a(t', \nu)e^{2i\pi(\varphi(t, \nu) - \varphi(t', \nu))}.$$

Remarquons maintenant que pour  $t = t'$ ,

$$g(0, \nu) = a(t, \nu)^2$$

est indépendant de  $t$ , il existe alors une fonction  $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  telle que  $a(t, \nu) = b(\nu) > 0$  et

$$g(t - t', \nu) = b^2(\nu)e^{2i\pi(\varphi(t, \nu) - \varphi(t', \nu))}.$$

Comme  $\varphi(t, \nu) - \varphi(t', \nu)$  ne dépend que de  $t - t'$ , il existe deux fonctions à valeurs réelles  $\Psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et  $\Lambda \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  telles que

$$\varphi(t, \nu) = \Psi(\nu)t + \Lambda(\nu),$$

et  $\sigma$  est finalement de la forme

$$\sigma(t, \nu) = b(\nu)e^{2i\pi(\Psi(\nu)t + \Lambda(\nu))},$$

que l'on peut réécrire

$$\sigma(t, \nu) = \hat{\rho}(\nu)e^{2i\pi\phi(\nu)t}$$

ou  $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs complexes et où  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs réelles. ♠

### 3.2.1 Opérateur de convolution

On sait (voir 2.1.8) que l'opérateur de convolution  $A_\rho$ , défini pour  $\rho \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , par

$$A_\rho x = \rho * x, \quad \forall x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R}).$$

est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Par transformation de Fourier on montre qu'il est associé au symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma(t, \nu) = \hat{\rho}(\nu)$ .

**Proposition 3.2 (Pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de convolution  $A_\rho$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . Quelque soit le processus stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  de spectres généralisés  $S_x^1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $S_x^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , le processus  $A_\rho x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est lui aussi un processus stationnaire et a pour spectres généralisés  $S_{A_\rho x}^1 = |\hat{\rho}|^2 S_x^1$  et  $S_{A_\rho x}^2 = \hat{\rho} \hat{\rho}^\sigma S_x^2$ .*

**Preuve** On sait déjà que l'opérateur de convolution est un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , remarquons que

$$\langle \widehat{A_\rho x}, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{x}, \hat{\psi} \widehat{\bar{\rho}} \rangle,$$

et regardons le premier spectre généralisé du processus  $A_\rho x$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{A_\rho x}, \hat{\psi}_1 \rangle \overline{\langle \widehat{A_\rho x}, \hat{\psi}_2 \rangle} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, \widehat{\psi}_1 \widehat{\bar{\rho}} \rangle \overline{\langle \hat{x}, \widehat{\psi}_2 \widehat{\bar{\rho}} \rangle} \right\} = \langle |\hat{\rho}|^2 S_x^1, \widehat{\psi}_1 \widehat{\psi}_2 \rangle.$$

Donc le processus  $\mathcal{A}_\rho x$  a pour premier spectre généralisé  $|\hat{\rho}|^2 S_x^1$ . Regardons maintenant le second spectre généralisé du processus  $\mathcal{A}_\rho x$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \langle \widehat{\mathcal{A}_\rho x}, \widehat{\psi}_1 \rangle \langle \widehat{\mathcal{A}_\rho x}, \widehat{\psi}_2 \rangle \} &= \mathbb{E} \{ \langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_1 \widehat{\rho} \rangle \langle \widehat{x}, \widehat{\psi}_2 \widehat{\rho} \rangle \}, \\ &= \langle S_x^2, [\widehat{\psi}_1 \widehat{\rho}]^\sigma \widehat{\psi}_2 \widehat{\rho} \rangle = \langle \widehat{\rho}^\sigma \widehat{\rho} S_x^2, \widehat{\psi}_1^\sigma \widehat{\psi}_2 \rangle. \end{aligned}$$

donc le processus  $\mathcal{A}_\rho x$  a pour second spectre généralisé  $S_{\mathcal{A}_\rho x}^2 = \widehat{\rho}^\sigma \widehat{\rho} S_x^2$  et  $\mathcal{A}_\rho x$  est bien un processus stationnaire. ♠

### 3.2.2 Opérateur de dilatation fréquentielle

**Définition 3.3 (Opérateur de dilatation fréquentielle)** *L'opérateur de dilatation fréquentielle  $\mathcal{D}_\gamma^F$ , est défini pour tout  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  par*

$$\mathcal{D}_\gamma^F x = \mathcal{F}^{-1} [\sqrt{\gamma'}(\hat{x} \circ \gamma)] \quad \forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

**Propriété 3.2 (Endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ )**  *$\mathcal{D}_\gamma^F$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  associé au symbole de Kohn-Nirenberg*

$$\sigma(t, \nu) = \sqrt{\alpha'(\nu)} e^{2i\pi t(\alpha(\nu) - \nu)},$$

où  $\alpha = \gamma^{-1}$ .

**Preuve** Montrons que  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , on a déjà montré en propriété 2.2 que la composition par une fonction de  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , donc  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $\hat{x} \circ \gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Comme  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad 0 < c_\gamma \leq |\gamma'(\nu)| \leq C_\gamma < +\infty.$$

La fonction racine étant bornée et  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  sur  $[c_\gamma, C_\gamma]$ ,  $\sqrt{\gamma'} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  et  $\sqrt{\gamma'}(\hat{x} \circ \gamma) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Finalement,

$$\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \mathcal{D}_\gamma^F x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

et  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est bien un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On montre de la même manière que  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Intéressons nous maintenant au symbole de Kohn-Nirenberg de  $\mathcal{D}_\gamma^F$ , prenons une fonction  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et calculons

$$\mathcal{D}_\gamma^F x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi \nu t} \sqrt{\gamma'(\nu)} \hat{x}(\gamma(\nu)) d\nu \quad (3.7)$$

Posons  $\alpha = \gamma^{-1}$ ,

$$\mathcal{D}_\gamma^F x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi \alpha(\nu) t} \sqrt{\gamma'(\alpha(\nu))} \hat{x}(\nu) \cdot \alpha'(\nu) d\nu \quad (3.8)$$

Comme  $\gamma'(\alpha(\nu)) = 1/\alpha'(\nu)$ ,

$$\mathcal{D}_\gamma^F x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\alpha(\nu)t} \sqrt{\alpha'(\nu)} \hat{x}(\nu) d\nu, \quad (3.9)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi(\alpha(\nu)-\nu)t} \sqrt{\alpha'(\nu)} \hat{x}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (3.10)$$

et  $\sigma(t, \nu) = \sqrt{\alpha'(\nu)} e^{2i\pi t(\alpha(\nu)-\nu)}$ . ♠

**Propriété 3.3 (Pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ )** On distingue deux cas selon la parité de  $\gamma$ ,

- Dans le cas où  $\gamma$  est une fonction impaire,  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , quelque soit le processus stochastique stationnaire  $x$  de spectres généralisés  $S_x^1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $S_x^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , le processus  $\mathcal{D}_\gamma^F x$  est lui aussi stationnaire et a pour spectres généralisés  $S_x^1 \circ \gamma$  et  $S_x^2 \circ \gamma$ .
- Dans le cas où  $\gamma$  n'est pas une fonction impaire alors  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est un pseudo-filtre d'un sous espace de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  composé de l'ensemble des processus stochastiques gaussiens circulaires.

**Preuve** Étant donné un processus stochastique stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  de spectres généralisés  $S_x^1$  et  $S_x^2$ ,

$$\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi} \rangle = \langle \sqrt{\gamma'}(\hat{x} \circ \gamma), \hat{\psi} \rangle,$$

en posant  $\alpha = \gamma^{-1}$ ,

$$\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{x}, \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi} \circ \alpha) \rangle.$$

Regardons le premier spectre généralisé du processus  $\mathcal{D}_\gamma^F x$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_2 \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \rangle} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1 \circ \alpha) \rangle \overline{\langle \hat{x}, \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_2 \circ \alpha) \rangle} \right\}, \\ &= \left\langle S_x^1, \alpha'(\hat{\psi}_1 \circ \alpha) \overline{\alpha'(\hat{\psi}_2 \circ \alpha)} \right\rangle, \\ &= \left\langle S_x^1 \circ \gamma, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \right\rangle, \end{aligned}$$

et le processus  $\mathcal{D}_\gamma^F x$  a donc pour premier spectre généralisé  $S_x^1 \circ \gamma$ .

Regardons maintenant le second spectre généralisé de  $\mathcal{D}_\gamma^F x$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \rangle \langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_2 \rangle \right\} = \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1 \circ \alpha) \rangle \langle \hat{x}, \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_2 \circ \alpha) \rangle \right\},$$

comme le processus  $x$  est stationnaire,

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \rangle \langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_2 \rangle \right\} = \left\langle S_x^2, [\sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1 \circ \alpha)]^\sigma \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_2 \circ \alpha) \right\rangle,$$

où  $f^\sigma(t) = f(-t)$ . Regardons

$$[\sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1 \circ \alpha)]^\sigma = [\sqrt{\alpha'}^\sigma(\hat{\psi}_1 \circ \alpha^\sigma)],$$

comme la fonction  $\gamma$  est impaire,  $\alpha$  est impaire et  $\alpha'$  est paire donc,

$$[\sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1 \circ \alpha)]^\sigma = \sqrt{\alpha'}(\hat{\psi}_1^\sigma \circ \alpha),$$

et

$$\mathbb{E} \left\{ \left\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \right\rangle \left\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_2 \right\rangle \right\} = \left\langle S_x^2, \alpha'(\hat{\psi}_1^\sigma \circ \alpha)(\hat{\psi}_2 \circ \alpha) \right\rangle.$$

finalement

$$\mathbb{E} \left\{ \left\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \right\rangle \left\langle \widehat{\mathcal{D}_\gamma^F x}, \hat{\psi}_1 \right\rangle \right\} = \left\langle S_x^2 \circ \gamma, \hat{\psi}_1^\sigma \hat{\psi}_2 \right\rangle.$$

Donc le processus stochastique  $\mathcal{D}_\gamma^F x$  a pour second spectre généralisé  $S_x^2 \circ \gamma$ . Notons que comme  $\gamma$  est une fonction impaire et que  $S_x^2$  est une distribution paire  $S_x^2 \circ \gamma$  est bien une distribution paire, condition nécessaire pour un second spectre généralisé. ♠

**Propriété 3.4 (Groupe des dilatations fréquentielles)** *L'ensemble des opérateurs de dilatation fréquentielle muni de la loi de composition interne,*

$$\mathcal{D}_{\gamma_2}^F \mathcal{D}_{\gamma_1}^F = \mathcal{D}_{\gamma_1 \circ \gamma_2}^F \quad (3.11)$$

forme un groupe, appelé groupe des dilatations fréquentielles, dont l'élément neutre est  $\mathcal{D}_{i_d}^F$  et où l'inverse de  $\mathcal{D}_\gamma^F$  est  $\mathcal{D}_{\gamma^{-1}}^F$ .

**Preuve** Commençons par remarquer qu'on peut décomposer l'opérateur de dilatation fréquentielle sous la forme

$$\mathcal{D}_\gamma^F = \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma'} \mathcal{D}_\gamma^\circ \mathcal{F}, \quad (3.12)$$

où  $\mathcal{D}_\gamma^\circ$  est l'opérateur de composition par  $\gamma$ ,  $\mathcal{D}_\gamma^\circ x = x \circ \gamma$  donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma_2}^F \mathcal{D}_{\gamma_1}^F &= \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma_2'} \mathcal{D}_{\gamma_2}^\circ \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma_1'} \mathcal{D}_{\gamma_1}^\circ \mathcal{F}, \\ &= \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma_2'} \mathcal{D}_{\gamma_2}^\circ \sqrt{\gamma_1'} \mathcal{D}_{\gamma_1}^\circ \mathcal{F}, \\ &= \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma_2' \sqrt{\gamma_1' \circ \gamma_2}} \mathcal{D}_{\gamma_1 \circ \gamma_2}^\circ \mathcal{F}. \end{aligned}$$

En posant  $\gamma_3 = \gamma_1 \circ \gamma_2$ ,

$$\mathcal{D}_{\gamma_2}^F \mathcal{D}_{\gamma_1}^F = \mathcal{F}^{-1} \sqrt{\gamma_3'} \mathcal{D}_{\gamma_3}^\circ \mathcal{F} = \mathcal{D}_{\gamma_3}^F,$$

et finalement  $\mathcal{D}_{\gamma_2}^F \mathcal{D}_{\gamma_1}^F = \mathcal{D}_{\gamma_1 \circ \gamma_2}^F$ . Si les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont impaires alors  $\gamma_1 \circ \gamma_2$  est une fonction impaire, comme on a déjà montré en propriété 2.1 que  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  muni de la composition est un groupe, l'ensemble des opérateurs de dilatation fréquentielle a bien une structure de groupe pour la loi de composition interne  $\mathcal{D}_{\gamma_2}^F \mathcal{D}_{\gamma_1}^F = \mathcal{D}_{\gamma_1 \circ \gamma_2}^F$ . ♠

### 3.2.3 Un semi-groupe de pseudo-filtres

**Définition 3.4** On appelle  $\mathcal{P}_F$  l'ensemble des opérateurs  $\mathcal{P}_{(\rho,\phi)}$  associés à des symboles de Kohn-Nirenberg de la forme

$$\sigma(t, \nu) = \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi(\phi(\nu) - \nu)t}, \quad (3.13)$$

où  $\rho \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  et  $\phi \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . On notera, quand l'intégrale est bien définie,

$$\mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi\phi(\nu)t} \hat{f}(\nu) d\nu. \quad (3.14)$$

**Proposition 3.3 (Décomposition de  $\mathcal{P}_F$ )** Quelque soit l'opérateur  $\mathcal{P}_{(\rho,\phi)} \in \mathcal{P}_F$ , il s'exprime comme la composition d'un opérateur de dilatation fréquentielle et d'un opérateur de convolution,

$$\exists \theta \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R}), \exists \omega \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R}), \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} = \mathcal{A}_\theta \mathcal{D}_\omega^F$$

où  $\omega = \phi^{-1}$  et où la fonction  $\theta$  est définie par  $\theta = \mathcal{D}_\omega^F \rho$ .

**Preuve** Prenons  $\rho \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ ,  $\phi \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  et une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi\phi(\nu)t} \hat{f}(\nu) d\nu. \quad (3.15)$$

Posons  $\omega = \phi^{-1}$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi\omega^{-1}(\nu)t} \hat{f}(\nu) d\nu, \quad (3.16)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\omega(\nu)) \omega'(\nu) e^{2i\pi\nu t} \hat{f}(\omega(\nu)) d\nu. \quad (3.17)$$

Posons maintenant  $\hat{g} = \sqrt{\omega'} \hat{f} \circ \omega$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\omega(\nu)) \sqrt{\omega'(\nu)} e^{2i\pi\nu t} \hat{g}(\nu) d\nu. \quad (3.18)$$

Posons  $\hat{\theta} = \sqrt{\omega'} (\hat{\rho} \circ \omega)$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \hat{g}(\nu) d\nu,$$

et

$$\mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f = \mathcal{A}_\theta g.$$

Remarquons que  $g = \mathcal{F}^{-1} [\sqrt{\omega'} \hat{f} \circ \omega] = \mathcal{D}_\omega^F f$ , donc finalement,

$$\mathcal{P}_{(\rho,\phi)} f = \mathcal{A}_\theta \mathcal{D}_\omega^F f.$$

Montrons maintenant que  $\theta \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ . Comme  $\hat{\rho} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , et  $\omega \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , et que la composition de deux fonctions de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  définit une fonction de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  (voir 7.1),  $\hat{\rho} \circ \omega \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . Comme  $\omega \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, 0 < c_\omega \leq |\omega'(\nu)| \leq C_\omega < +\infty, \quad (3.19)$$

et comme la fonction racine est bornée et  $C^\infty(\mathbb{R})$  sur  $[c_\omega, C_\omega]$ ,  $\sqrt{\omega'} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . Finalement,  $\hat{\theta} = \sqrt{\omega'} (\hat{\rho} \circ \omega) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  et  $\theta \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ .  $\spadesuit$

**Propriété 3.5 (Pseudo-filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ )** Dans le cas où  $\phi$  est une fonction impaire,  $\mathcal{P}_{(\rho,\phi)}$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . Dans le cas où  $\phi$  n'est pas une fonction impaire alors  $\mathcal{P}_{(\rho,\phi)}$  est un pseudo-filtre du sous espace de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  composé de l'ensemble des processus stochastiques gaussiens circulaires.

**Preuve** La preuve est immédiate en remarquant la composition de deux pseudo-filtres reste un pseudo-filtre et que  $\mathcal{P}_{(\rho,\phi)}$  peut s'écrire comme composition d'un opérateur de dilatation fréquentielle et d'un opérateur de convolution. ♠

**Propriété 3.6 (Commutation)** La composition d'un opérateur de convolution par un opérateur de dilatation fréquentielle peut s'écrire comme la composition d'un opérateur de dilatation fréquentielle par un opérateur de convolution, c'est à dire que

$$\forall \omega \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R}), \forall \theta \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R}), \quad \mathcal{D}_\omega^F \mathcal{A}_\theta = \mathcal{A}_\beta \mathcal{D}_\omega^F$$

où  $\hat{\beta} = \hat{\theta} \circ \omega \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ .

**Preuve**

$$\mathcal{D}_\omega^F \mathcal{A}_\theta x(t) = \mathcal{D}_\omega^F (\theta * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu t} \sqrt{\omega'(\nu)} \hat{x}(\omega(\nu)) \hat{\theta}(\omega(\nu)) d\nu$$

Posons  $\phi = \omega^{-1}$ ,

$$\mathcal{D}_\omega^F \mathcal{A}_\theta x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\phi(\nu)t} \sqrt{\omega'(\phi(\nu))} \hat{x}(\nu) \hat{\theta}(\nu) \phi'(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\phi(\nu)t} \sqrt{\phi'(\nu)} \hat{x}(\nu) \hat{\theta}(\nu) d\nu.$$

Avec  $\hat{\rho} = \sqrt{\phi'} \hat{\theta}$ ,

$$\mathcal{D}_\omega^F \mathcal{A}_\theta x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\phi(\nu)t} \hat{x}(\nu) \hat{\rho}(\nu) d\nu = \mathcal{P}_{(\rho,\phi)} x(t) = \mathcal{A}_\beta \mathcal{D}_\gamma^F x(t),$$

où  $\gamma = \phi^{-1}$  et où  $\beta = \mathcal{D}_\gamma^F \rho$ . Comme  $\phi = \omega^{-1}$ ,  $\gamma = \omega$ . Regardons la fonction  $\beta$ ,

$$\hat{\beta} = \sqrt{\gamma'} (\hat{\rho} \circ \gamma) = \sqrt{\omega'} (\hat{\rho} \circ \omega),$$

comme  $\hat{\rho} = \sqrt{\phi'} \hat{\theta}$ ,

$$\hat{\beta} = \sqrt{\omega'} \sqrt{(\phi' \circ \omega)} (\hat{\theta} \circ \omega) = \hat{\theta} \circ \omega.$$

Finalement,  $\mathcal{D}_\omega^F \mathcal{A}_\theta x = \mathcal{A}_\beta \mathcal{D}_\omega^F x$ , avec  $\hat{\beta} = \hat{\theta} \circ \omega$ . ♠

**Propriété 3.7 (Structure de semi-groupe)**  $\mathcal{P}_F$  est semi-groupe pour la loi de composition interne  $\mathcal{P}_{(\rho_2,\phi_2)} \mathcal{P}_{(\rho_1,\phi_1)} = \mathcal{P}_{(\rho_3,\phi_3)}$ , où  $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1$  et  $\hat{\rho}_3 = \hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \circ \phi_1)$ .

**Preuve** Prenons  $\mathcal{P}_{(\rho_1,\phi_1)} \in \mathcal{P}_F$  et  $\mathcal{P}_{(\rho_2,\phi_2)} \in \mathcal{P}_F$ ,

$$\mathcal{P}_{(\rho_2,\phi_2)} \mathcal{P}_{(\rho_1,\phi_1)} = \mathcal{A}_{\theta_2} \mathcal{D}_{\omega_2}^F \mathcal{A}_{\theta_1} \mathcal{D}_{\omega_1}^F$$

où  $\omega_1 = \phi_1^{-1}$ ,  $\omega_2 = \phi_2^{-1}$ ,  $\theta_1 = \mathcal{D}_{\omega_1}^F \rho_1$  et  $\theta_2 = \mathcal{D}_{\omega_2}^F \rho_2$ .

En posant  $\hat{\beta} = \hat{\theta}_1 \circ \omega_2$ ,

$$\mathcal{D}_{\omega_2}^F \mathcal{A}_{\theta_1} = \mathcal{A}_{\beta} \mathcal{D}_{\omega_2}^F,$$

et,

$$\mathcal{P}_{(\rho_2, \phi_2)} \mathcal{P}_{(\rho_1, \phi_1)} = \mathcal{A}_{\theta_2} \mathcal{A}_{\beta} \mathcal{D}_{\omega_2}^F \mathcal{D}_{\omega_1}^F = \mathcal{A}_{\theta_3} \mathcal{D}_{\omega_3}^F,$$

où  $\theta_3 = \theta_2 * \beta$  et  $\omega_3 = \omega_1 \circ \omega_2$ .

Finalement ,

$$\mathcal{P}_{(\rho_2, \phi_2)} \mathcal{P}_{(\rho_1, \phi_1)} = \mathcal{P}_{(\rho_3, \phi_3)},$$

avec  $\phi_3 = \omega_3^{-1}$  et  $\rho_3 = \mathcal{D}_{\phi_3}^F \theta_3$ .

Regardons  $\phi_3$ ,

$$\phi_3 = (\omega_1 \circ \omega_2)^{-1} = \omega_2^{-1} \circ \omega_1^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1.$$

Notons que  $\phi_3 \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  comme  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  est stable par composition. Intéressons nous maintenant à  $\rho_3$ ,

$$\rho_3 = \mathcal{D}_{\phi_3}^F \theta_3 = \mathcal{F}^{-1} \left[ \sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_3 \circ \phi_3) \right].$$

Comme  $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 \hat{\beta}$ ,

$$\hat{\rho}_3 = \sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) (\hat{\beta} \circ \phi_3),$$

et comme  $\hat{\beta} = \hat{\theta}_1 \circ \omega_2$ ,

$$\hat{\rho}_3 = \sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) (\hat{\theta}_1 \circ \omega_2 \circ \phi_3).$$

Comme  $\omega_2 = \phi_2^{-1}$  et  $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1$ ,

$$\hat{\rho}_3 = \sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) (\hat{\theta}_1 \circ \phi_1).$$

Regardons  $(\hat{\theta}_1 \circ \phi_1)$ , comme  $\hat{\theta}_1 = \sqrt{\omega_1'} (\hat{\rho}_1 \circ \omega_1)$ ,

$$\hat{\theta}_1 \circ \phi_1 = \left( \sqrt{\omega_1' \circ \phi_1} \right) (\hat{\rho}_1 \circ \omega_1 \circ \phi_1),$$

et comme  $\phi_1 = \omega_1^{-1}$ ,

$$\hat{\theta}_1 \circ \phi_1 = \hat{\rho}_1 / \sqrt{\phi_1'}.$$

Regardons  $\sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3)$ ,

$$\sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) = \sqrt{\phi_1'} \sqrt{\phi_2' \circ \phi_1} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_2 \circ \phi_1),$$

comme  $\hat{\theta}_2 = \sqrt{\omega_2'} (\hat{\rho}_2 \circ \omega_2)$ ,

$$\sqrt{\phi_3'} (\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) = \sqrt{\phi_1'} \left( \sqrt{\phi_2' \circ \phi_1} \right) \left( \sqrt{\omega_2' \circ \phi_2 \circ \phi_1} \right) (\hat{\rho}_2 \circ \omega_2 \circ \phi_2 \circ \phi_1)$$

Comme  $\omega_2 = \phi_2^{-1}$ ,

$$\sqrt{\phi_3'}(\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) = \sqrt{\phi_1'} \left( \sqrt{\phi_2' \circ \phi_1} \right) \left( \sqrt{\omega_2' \circ \phi_2 \circ \phi_1} \right) (\hat{\rho}_2 \circ \phi_1),$$

et  $\left( \sqrt{\omega_2' \circ \phi_2 \circ \phi_1} \right) = 1/\sqrt{\phi_2' \circ \phi_1}$ , donc

$$\sqrt{\phi_3'}(\hat{\theta}_2 \circ \phi_3) = \sqrt{\phi_1'}(\hat{\rho}_2 \circ \phi_1).$$

Finalement

$$\hat{\rho}_3 = \hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \circ \phi_1),$$

où  $\hat{\rho}_3 \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  comme  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est stable par composition et multiplication point par point. ♠

### 3.3 Opérateurs de déformation des processus stationnaires

Nous présentons dans cette section les deux opérateurs de déformation des processus stochastiques stationnaires que nous étudierons dans la suite de ce manuscrit.

#### 3.3.1 Opérateur de modulation fréquentielle

**Définition 3.5** Soit  $\alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , l'opérateur de modulation fréquentielle  $\mathcal{M}_\alpha$  est l'opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  défini par

$$\mathcal{M}_\alpha \psi = e^{2i\pi\alpha(\cdot)} \psi.$$

Il est associé au symbole de Kohn-Nirenberg,

$$\sigma(t, \nu) = e^{2i\pi\alpha(t)}.$$

**Propriété 3.8 (Groupe des modulations fréquentielle)** L'ensemble des opérateur de modulation fréquentielle  $\{\mathcal{M}_\alpha, \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})\}$  muni de loi de composition interne,

$$\mathcal{M}_{\alpha_1} \mathcal{M}_{\alpha_2} = \mathcal{M}_{(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

a une structure de groupe. L'élément neutre est l'opérateur de modulation par la fonction nulle et l'inverse de  $\mathcal{M}_\alpha$  est  $\mathcal{M}_{-\alpha}$ .

**Preuve** La preuve est immédiate puisque  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel. ♠

**Propriété 3.9 (Endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ )**  $\mathcal{M}_\alpha$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On peut donc étendre son action de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , où  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  la distribution  $\mathcal{M}_\alpha x$  est définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi \rangle := \langle x, \mathcal{M}_\alpha^{-1} \psi \rangle, \quad (3.20)$$

et  $\mathcal{M}_\alpha$  définit ainsi un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

**Preuve** On sait que (voir 2.1.7)  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}), \psi \cdot \alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on sait aussi que  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est stable par composition (voir 7.1), comme  $e^{2i\pi \cdot} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  alors  $\forall \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}), \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \psi e^{2i\pi \alpha(\cdot)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . ♠

**Propriété 3.10 (Pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de modulation fréquentielle  $\mathcal{M}_\alpha$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\alpha$  est une fonction affine,  $\exists a, b \in \mathbb{R}, \alpha(t) = at + b$ .*

**Preuve** L'opérateur de modulation fréquentielle a pour symbole de Kohn-Nirenberg,

$$\sigma(t, \nu) = e^{2i\pi \alpha(t)},$$

où  $\alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . On a montré (voir proposition 3.1) qu'une condition nécessaire pour qu'un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  associé à un symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  soit un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est que  $\sigma$  soit de la forme,

$$\sigma(t, \nu) = \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi \phi(\nu)t},$$

où  $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs complexes et où  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs réelles. La fonction  $\alpha$  est donc nécessairement une fonction affine. La condition est aussi suffisante puisque dans ce cas, le symbole de Kohn-Nirenberg de l'opérateur de modulation fréquentielle est  $\sigma(t, \nu) = e^{2i\pi(at+b)}$ , et  $\mathcal{M}_\alpha \in \mathcal{P}_F$ . ♠

**Propriété 3.11 (Non-unicité des représentations)** *Soient  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  deux processus généralisés stationnaires et circulaires de spectres généralisés respectifs  $S_{x_1}$  et  $S_{x_2}$ . Supposons qu'il existe deux fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  telles que, en loi,*

$$\mathcal{M}_{\alpha_1} x_1 = \mathcal{M}_{\alpha_2} x_2, \quad (3.21)$$

alors il existe une fonction affine  $f$  définie par  $f(t) = at + b$  tel que  $\alpha_2 = \alpha_1 + f$ , et les spectres des processus stationnaires sont liés par la relation  $S_{x_1} = T_a S_{x_2}$ .

**Preuve** Regardons la première covariance fonctionnelle du processus  $\mathcal{M}_{\alpha_1} x_1, \forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{\alpha_1} x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\alpha_1} x_1, \psi_b \rangle} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \langle x_1, \mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_a \rangle \overline{\langle x_1, \mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_b \rangle} \right\}.$$

En posant  $\phi_a = \widehat{\mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_a}$  et  $\phi_b = \widehat{\mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_b}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{\alpha_1} x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\alpha_1} x_1, \psi_b \rangle} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}_1, \phi_a \rangle \overline{\langle \hat{x}_1, \phi_b \rangle} \right\}, \\ &= \langle S_x, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle. \end{aligned}$$

Posons  $f = \alpha_2 - \alpha_1$  et regardons la première covariance fonctionnelle du processus  $\mathcal{M}_{\alpha_2} x_2, \forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{\alpha_2} x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\alpha_2} x_2, \psi_b \rangle} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{(\alpha_1+f)} x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{(\alpha_1+f)} x_2, \psi_b \rangle} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_f x_2, \mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_f x_2, \mathcal{M}_{\alpha_1}^{-1} \psi_b \rangle} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_b \rangle} \right\}, \end{aligned}$$

Les processus  $\mathcal{M}_{\alpha_1}x_1$  et  $\mathcal{M}_{\alpha_2}x_2$  ayant par hypothèse la même covariance fonctionnelle,

$$\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{\alpha_1}x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\alpha_1}x_1, \psi_b \rangle} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_{\alpha_2}x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\alpha_2}x_2, \psi_b \rangle} \right\},$$

et,

$$\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_b \rangle} \right\} = \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle.$$

Comme l'opérateur de modulation fréquentielle et l'opérateur de transformation de Fourier sont des isomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

$$\phi_a, \phi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Donc,

$$\forall \phi_a, \phi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E} \left\{ \langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{M}_f x_2}, \phi_b \rangle} \right\} = \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle.$$

$\mathcal{M}_f$  est donc un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $f$  est une fonction affine.  $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$  et,

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle T_a S_{x_2}, \phi_1 \overline{\phi_2} \rangle = \langle S_{x_1}, \phi_1 \overline{\phi_2} \rangle.$$

Les spectres généralisés des processus  $x_1$  et  $x_2$  vérifient  $T_a S_{x_2} = S_{x_1}$ . ♠

**Propriété 3.12 (Équiprobabilité)** *Étant donné un processus généralisé  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , circulaire et stationnaire de spectre  $S_x(\mathbb{R})$ , et une fonction constante  $f(t) = b$ , alors  $\forall b \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,*

$$\mathcal{M}_{(\alpha+f)}x = \mathcal{M}_\alpha x,$$

où l'égalité précédente est une égalité en loi.

**Preuve** Le processus  $x$  étant circulaire,  $e^{2i\pi b}x$  est identiquement distribué au processus  $x$  donc le processus  $\mathcal{M}_{(\alpha+f)}x$  est identiquement distribué au processus  $\mathcal{M}_\alpha x$ . ♠

### 3.3.2 Opérateur de dilatation temporelle

**Définition 3.6** *Soit  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ , l'opérateur de dilatation temporelle  $\mathcal{D}_\gamma$  est l'opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  défini par*

$$\mathcal{D}_\gamma \psi = \sqrt{\gamma'}(\psi \circ \gamma).$$

**Propriété 3.13** *L'opérateur de dilatation temporelle  $\mathcal{D}_\gamma$  est associé au symbole de Kohn-Nirenberg*

$$\sigma(t, \nu) = \sqrt{\gamma'(t)} e^{2i\pi\nu(\gamma(t)-t)}.$$

**Preuve** La preuve est immédiate en remarquant que

$$\sqrt{\gamma'(t)} \psi(\gamma(t)) = \int \sqrt{\gamma'(t)} e^{2i\pi\gamma(t)\nu} \hat{\psi}(\nu) d\nu.$$

♠

**Propriété 3.14 (Groupe des dilatations temporelle)** *L'ensemble des opérateurs de dilatation temporelle muni de la loi de composition interne,*

$$\mathcal{D}_{\gamma_2} \mathcal{D}_{\gamma_1} = \mathcal{D}_{(\gamma_1 \circ \gamma_2)} \quad (3.22)$$

*forme le groupe des dilatations temporelle  $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ . L'élément neutre de  $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$  est  $\mathcal{D}_{id}$  et l'inverse de  $\mathcal{D}_{\gamma}$  est  $\mathcal{D}_{\gamma^{-1}}$ .*

**Preuve** La preuve est immédiate puisqu'on a déjà montré que  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  muni de la composition est un groupe, il suffit de remarquer que,  $\mathcal{D}_{\gamma_2} \mathcal{D}_{\gamma_1} = \mathcal{D}_{(\gamma_1 \circ \gamma_2)}$ . ♠

**Propriété 3.15 (Endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de dilatation temporelle  $\mathcal{D}_{\gamma}$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On peut étendre son action de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , où  $\forall x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  la distribution  $\mathcal{D}_{\gamma}x$  est définie par*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{D}_{\gamma}x, \psi \rangle := \langle x, \mathcal{D}_{\gamma}^{-1}\psi \rangle, \quad (3.23)$$

*et  $\mathcal{D}_{\gamma}$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

**Preuve** On sait que l'opérateur de composition  $\mathcal{D}_{\gamma}^{\circ}$  (voir 2.6) définit un automorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . Comme  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c_{\gamma}, C_{\gamma}, \forall t, \quad 0 < c_{\gamma} \leq |\gamma'(t)| \leq C_{\gamma} < +\infty,$$

et que comme la fonction racine est  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$  et bornée sur  $[c_{\gamma}, C_{\gamma}]$ ,  $\sqrt{\gamma'} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  et  $\forall \gamma \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{D}_{\gamma}\psi = \sqrt{\gamma'}\psi \circ \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

L'opérateur de dilatation temporelle définit donc un endomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . ♠

**Propriété 3.16 (Pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ )** *L'opérateur de dilatation temporelle est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\gamma$  est une fonction affine,  $\exists a, b \in \mathbb{R}, \gamma(t) = at + b$ .*

**Preuve** L'opérateur de dilatation temporelle a pour symbole de Kohn-Nirenberg,

$$\sigma(t, \nu) = \sqrt{\gamma'(t)} e^{2i\pi\nu(\gamma(t)-t)}.$$

où  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . On a montré (voir proposition 3.1) qu'une condition nécessaire pour qu'un endomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  associé à un symbole de Kohn-Nirenberg  $\sigma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  soit un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est que  $\sigma$  soit de la forme,

$$\sigma(t, \nu) = \hat{\rho}(\nu) e^{2i\pi\phi(\nu)t},$$

où  $\hat{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs complexe et où  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs réelle. La fonction  $\gamma$  est donc nécessairement une fonction affine. La condition est aussi suffisante puisque dans ce cas, le symbole de Kohn-Nirenberg de l'opérateur de dilatation temporelle est,  $\sigma(t, \nu) = e^{2i\pi\nu((a-1)t+b)}$ , et  $\mathcal{D}_{\gamma} \in \mathcal{P}_F$ . ♠

**Propriété 3.17 (Non-unicité des représentations)** Soient  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  deux processus généralisés stationnaires et circulaires de spectres généralisés respectifs  $S_{x_1}$  et  $S_{x_2}$ . Supposons qu'il existe deux fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de l'espace  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  telles que, en loi,

$$\mathcal{D}_{\gamma_1} x_1 = \mathcal{D}_{\gamma_2} x_2, \quad (3.24)$$

alors il existe une fonction affine  $f$  définie par  $f(t) = at + b$  tel que  $\gamma_2 = f \circ \gamma_1$ , et les spectres des processus stationnaires sont liés par la relation  $\frac{1}{\sqrt{a}} D_a S_{x_2} = S_{x_1}$ .

**Preuve** Regardons la première covariance fonctionnelle du processus  $\mathcal{D}_{\gamma_1} x_1$ ,  $\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_b \rangle}\} = \mathbb{E}\{\langle x_1, \mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_a \rangle \overline{\langle x_1, \mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_b \rangle}\},$$

où  $\phi_a = \widehat{\mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_a}$  et  $\phi_b = \widehat{\mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_b}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_b \rangle}\} &= \mathbb{E}\{\langle \hat{x}_1, \phi_a \rangle \overline{\langle \hat{x}_1, \phi_b \rangle}\}, \\ &= \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  est stable par composition et que l'inverse d'une fonction de  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  est dans  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,  $\forall, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}_D, \exists f, \gamma_2 = f \circ \gamma_1$ , ( $f = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ ), et regardons la première fonction de covariance du processus  $\mathcal{D}_{\gamma_2} x_2$ .  $\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_2} x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{\gamma_2} x_2, \psi_b \rangle}\} &= \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{f \circ \gamma_1} x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{f \circ \gamma_1} x_2, \psi_b \rangle}\}, \\ &= \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} \mathcal{D}_f x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} \mathcal{D}_f x_2, \psi_b \rangle}\}, \\ &= \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_f x_2, \mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_f x_2, \mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_b \rangle}\}, \\ &= \mathbb{E}\{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_b \rangle}\}. \end{aligned}$$

où  $\phi_a = \widehat{\mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_a}$  et  $\phi_b = \widehat{\mathcal{D}_{\gamma_1}^{-1} \psi_b}$ .

Comme les deux processus ont, par hypothèse, la même covariance fonctionnelle,

$$\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_{\gamma_1} x_1, \psi_b \rangle}\} = \mathbb{E}\{\langle \mathcal{D}_{\gamma_2} x_2, \psi_a \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_{\gamma_2} x_2, \psi_b \rangle}\},$$

et

$$\forall \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E}\{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_b \rangle}\} = \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle.$$

Comme l'opérateur de dilatation temporelle et l'opérateur de transformation de Fourier sont des isomorphismes de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\phi_a, \phi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi_a, \psi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Alors,

$$\forall \phi_a, \phi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E}\{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_a \rangle \overline{\langle \widehat{\mathcal{D}_f x_2}, \phi_b \rangle}\} = \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle,$$

et  $\mathcal{D}_f$  est un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $f$  est une fonction affine.  $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$  et

$$\forall \phi_a, \phi_b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \left\langle \frac{1}{\sqrt{a}} D_a S_{x_2}, \phi_a \overline{\phi_b} \right\rangle = \langle S_{x_1}, \phi_a \overline{\phi_b} \rangle.$$

Les spectres généralisés des processus  $x_1$  et  $x_2$  vérifient donc  $\frac{1}{\sqrt{a}} D_a S_{x_2} = S_{x_1}$ . ♠

**Propriété 3.18 (Équiprobabilité)** *Étant donné un processus généralisé  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , circulaire et stationnaire de spectre  $S_x(\mathbb{R})$ , et une fonction affine  $f(t) = t + b$ , alors  $\forall b \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,*

$$\mathcal{D}_{(f \circ \gamma)} x = \mathcal{D}_\gamma x,$$

où l'égalité précédente est une égalité en loi.

**Preuve** Remarquons d'abord que  $\mathcal{D}_{(f \circ \gamma)} = \mathcal{D}_\gamma T_b^{-1}$ , le processus  $x$  étant stationnaire,  $T_b^{-1}x$  est identiquement distribué au processus  $x$  et le processus  $\mathcal{D}_{(f \circ \gamma)} x$  est identiquement distribué au processus  $\mathcal{D}_\gamma x$ . ♠

### 3.4 Présentation des modèles étudiés et problématique

Nous allons maintenant présenter les deux modèles de déformation de processus stationnaires généralisés que nous considérerons par la suite.

#### 3.4.1 Modèle de modulation fréquentielle

Soit  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus gaussien stationnaire centré à valeurs réelles de covariance généralisée  $c_x$  et de spectre généralisé  $S_x$  vérifiant,

$$\exists \epsilon > 0, \text{supp}(S_x) = ] - \infty, -\epsilon[ \cup ] \epsilon, +\infty[.$$

Soit  $w$ , un bruit blanc gaussien circulaire de variance  $\sigma_0^2$  et soit  $\mathcal{M}_\alpha$  l'opérateur de modulation fréquentielle par la fonction  $\alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . On suppose disposer d'une réalisation du processus  $y_m \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  correspondant à l'observation bruitée de l'action de l'opérateur de modulation fréquentielle sur le processus stationnaire  $z$ , processus analytique associé au processus  $x$ ,

$$y_m = \mathcal{M}_\alpha z + w. \tag{3.25}$$

#### 3.4.2 Modèle de dilatation temporelle

Soit  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus gaussien stationnaire centré à valeurs réelles de covariance généralisée  $c_x$  et de spectre généralisé  $S_x$  vérifiant,

$$\exists \epsilon > 0, \text{supp}(S_x) = ] - \infty, -\epsilon[ \cup ] \epsilon, +\infty[.$$

Soit  $w$ , un bruit blanc gaussien circulaire de variance  $\sigma_0^2$  et  $\mathcal{D}_\gamma$  l'opérateur de dilatation temporelle par la fonction  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ . On suppose disposer d'une réalisation du processus  $y_d \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$

correspondant à l'observation bruitée de l'action de l'opérateur de dilatation temporelle sur le processus stationnaire  $z$ , processus analytique associé au processus  $x$ ,

$$y_d = \mathcal{D}_\gamma z + w.$$

**Remarque 3.1** *L'opérateur de modulation fréquentielle, quand il agit sur un processus à valeurs réelles, brise la symétrie hermitienne de celui-ci. Les sons étant des signaux à valeurs réelles et possédant la symétrie hermitienne, il est donc naturel de considérer que l'opérateur de modulation agit uniquement sur la partie analytique du signal stationnaire initial. Le son correspondant au processus déformé étant alors associé à la partie réel du processus  $y_m$ . Le problème est inexistant lorsque l'on s'intéresse à l'opérateur de dilatation temporelle puisque celui préserve la symétrie hermitienne. Dans le souci d'unifier les deux modèles de déformation nous avons tout de même considéré que l'opérateur de dilatation temporelle agissait sur la partie analytique du signal stationnaire initial.*

### 3.4.3 Problématique et indétermination

Disposant uniquement d'une réalisation du processus stochastique  $y_m$  (resp.  $y_d$ ), on cherchera à estimer la fonction de déformation  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ), le spectre  $S_x$  du processus stationnaire sous-jacent et si possible, une version stationnarisée du processus observé, correspondant à la réalisation du processus stationnaire  $x$  associé à la réalisation du processus  $y_d$  ou  $y_m$ . Nous avons vu en proposition 3.11 et 3.17 qu'il n'y avait pas unicité de la représentation d'un signal modulé fréquentiellement ou dilaté temporellement. Nous ne serons donc à priori pas en mesure d'estimer les fonctions de déformation de manière univoque. Nous proposerons en section 5.5 un moyen de lever cette indétermination. Cette indétermination est illustrée figure 3.1

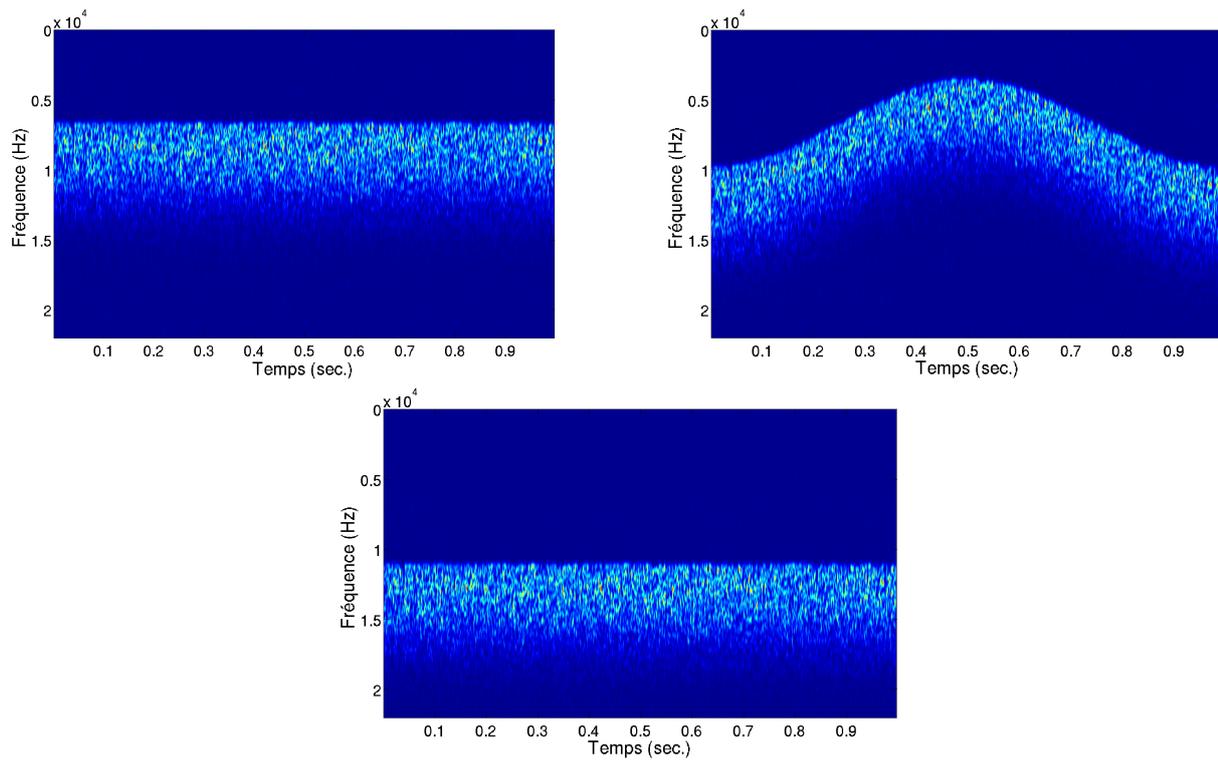


FIGURE 3.1 – En haut à gauche : Image temps-fréquence d'un signal stationnaire. En haut à droite : Image temps-fréquence du même signal modulé fréquemment par une exponentielle complexe dont l'argument est fonction du temps. En bas : Signal obtenu par démodulation du signal modulé fréquemment. La fonction de démodulation utilisée n'est pas l'opposée de la fonction de modulation initiale, elle en diffère d'une fonction affine. La démodulation conduit à un signal stationnaire dont le spectre est translaté par rapport à celui du signal stationnaire initial.

# Analyse temps-fréquence et temps-échelle des processus déformés

---

Ce chapitre est consacré à l'étude temps-fréquence des processus modulés fréquentiellement et dilatés temporellement. Bien que de très nombreuses représentations temps-fréquence existent (voir [Flandrin, 1993]), nous utiliserons uniquement la transformée de Gabor et la transformée en ondelettes. Nous verrons en effet que ces transformées sont particulièrement bien adaptées à l'étude des opérateurs de déformation considérés. Comme montré dans [Clerc and Mallat, 2003], nous verrons que l'opérateur de modulation fréquentielle et l'opérateur dilatation temporelle pourront respectivement être approximés comme des opérateurs de translations dans les plans temps-fréquence et temps-échelle. Ces propriétés de translations se retrouveront alors sur les covariances des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus déformés. Nous donnerons enfin les lois de probabilités associées à des ensembles de mesures discrètes dans les plans temps-fréquence et temps-échelle.

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Des représentations adaptées à l'étude des signaux non stationnaires .</b>	<b>64</b>
4.1.1	Analyse de Gabor des processus généralisées . . . . .	64
4.1.2	Analyse en ondelettes des processus généralisés . . . . .	65
<b>4.2</b>	<b>Étude locale des opérateurs de déformation et choix de représentations</b>	<b>66</b>
4.2.1	Analyse de Gabor de l'opérateur de modulation fréquentielle . . . . .	66
4.2.1.1	Approximation locale de l'opérateur de modulation fréquentielle .	67
4.2.1.2	Des migrations dans le plan temps-fréquence . . . . .	67
4.2.1.3	Modulation fréquentielle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . . . . .	68
4.2.1.4	Des théorèmes d'approximations . . . . .	68
4.2.2	Analyse en ondelettes de l'opérateur de dilatation temporelle . . . . .	71
4.2.2.1	Approximation locale de l'opérateur de dilatation temporelle . . .	72
4.2.2.2	Des migrations dans le plan temps-échelle . . . . .	72
4.2.2.3	Dilatation temporelle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . . . . .	73
4.2.2.4	Des théorèmes d'approximations . . . . .	74
4.2.3	Conclusion sur l'approximation locale des opérateur de déformation . . . .	77
<b>4.3</b>	<b>Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus stochastiques généralisés . . . . .</b>	<b>78</b>
4.3.1	Lois des transformées temps-fréquence des processus stochastiques . . . . .	78
4.3.2	Lois des transformées temps-échelle des processus stochastiques . . . . .	81
<b>4.4</b>	<b>Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle à temps fixé</b>	<b>83</b>
4.4.1	Spectres locaux associés aux processus déformés . . . . .	83
4.4.2	Étude des transformées de Gabor à temps fixé . . . . .	84
4.4.2.1	Analyse de Gabor des signaux stationnaires à temps fixé . . . . .	84

4.4.2.2	Translation des fonctions de covariance . . . . .	85
4.4.2.3	Un théorème d'approximation . . . . .	86
4.4.2.4	Analyse de Gabor à temps fixé du modèle de modulation fréquentielle . . . . .	88
4.4.3	Étude des transformées en ondelettes à temps fixé . . . . .	89
4.4.3.1	Analyse en ondelettes des signaux stationnaires à temps fixé . . . . .	89
4.4.3.2	Translation des fonctions de covariances . . . . .	90
4.4.3.3	Un théorème d'approximation . . . . .	91
4.4.3.4	Analyse en ondelettes à temps fixé du modèle de dilatation temporelle . . . . .	94
<b>4.5</b>	<b>Du continu au discret . . . . .</b>	<b>95</b>
4.5.1	Analyse de Gabor dans $\mathbb{C}^L$ . . . . .	95
4.5.2	Analyse en ondelettes dans $\mathbb{C}^L$ . . . . .	95
4.5.3	Mesures discrètes dans le plans temps-fréquence . . . . .	96
4.5.3.1	Lois des mesures à temps fixé . . . . .	97
4.5.4	Mesures discrètes dans le plan temps-échelle . . . . .	98
4.5.4.1	Lois des mesures à temps fixé . . . . .	99

## 4.1 Des représentations adaptées à l'étude des signaux non stationnaires

### 4.1.1 Analyse de Gabor des processus généralisées

Étant donnée une fonction  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , appelée fenêtre d'analyse, on lui associe une famille de fonctions  $(g_{\tau\nu})_{\tau,\nu \in \mathbb{R}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  obtenues par modulation et translation de  $g$ ,

$$g_{\tau\nu}(t) = T_\tau M_\nu g(t) = g(t - \tau) e^{2i\pi\nu(t-\tau)}. \tag{4.1}$$

La transformée de Gabor (voir [Gabor, 1946] pour l'article original)  $\mathcal{V}_g$  du processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est alors définie par

$$\mathcal{V}_g x(\tau, \nu) = \langle x, g_{\tau\nu} \rangle, \quad \forall (\tau, \nu) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

$\mathcal{V}_g x$  définit alors un champ stochastique de dimension deux dont les trajectoires sont presque sûrement  $\mathcal{C}^\infty$ , ceci étant une conséquence de la proposition 2.5.

**Propriété 4.1** *La transformée de Gabor ainsi définie est covariante par translation temporelle, c'est à dire*

$$\mathcal{V}_g [T_a x](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g [x](\tau - a, \nu).$$

*Les propriétés d'invariance temporelle du signal  $x$  se répercutent alors sur la variable temporelle de la transformée de Gabor.*

**Propriété 4.2** *La transformée de Gabor ainsi définie est quasi-covariante par translation fréquentielle, c'est à dire*

$$\mathcal{V}_g [M_b x](\tau, \nu) = e^{2i\pi b\tau} \mathcal{V}_g (\tau, \nu - b).$$

**Remarque 4.1** On peut donner une définition alternative de la transformée de Gabor où les atomes temps fréquence  $g_{\tau\nu}$  sont obtenus par translation puis modulation de la fenêtre  $g$ ,  $g_{\tau\nu} = M_\nu T_\tau g$ . Avec cette autre définition, les propriétés d'invariance fréquentielle du signal  $x$  se répercutent sur la variable fréquentielle de la transformée de Gabor

$$\mathcal{V}_g[M_b x](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g(\tau, \nu - b).$$

La propriété d'invariance temporelle étant un élément central à l'étude des déformations des processus stationnaires, nous avons naturellement opté pour la définition de la transformée de Gabor covariante en temps.

On considérera sans perte de généralité que  $g$  et  $\hat{g}$  sont des fonctions correctement localisées au voisinage de 0,  $\mathcal{V}_g x(\tau, \nu)$  sera alors une mesure de la présence de la fréquence  $\nu$  dans le processus  $x$  à l'instant  $\tau$ .

#### 4.1.2 Analyse en ondelettes des processus généralisés

Étant donnée une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , appelée ondelette on lui associe la famille de fonctions  $(\psi_{\tau s})_{\tau, s \in \mathbb{R}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  obtenues par dilatation et translation de  $\psi$ ,

$$\psi_{\tau s}(t) = T_\tau D_{q^s} \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{q^s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{q^s}\right),$$

où  $q \in \mathbb{R}_+^*$ .

La transformée en ondelettes  $\mathcal{W}_\psi$  du processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est définie par

$$\mathcal{W}_\psi x(\tau, s) = \langle x, \psi_{\tau s} \rangle, \quad \forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}_\psi x$  définit alors champ stochastique de dimension deux dont les trajectoires sont presque sûrement  $\mathcal{C}^\infty$ , ceci étant une conséquence de la proposition 2.5.

**Propriété 4.3** La transformée en ondelettes ainsi définie est covariante par translation temporelle,

$$\mathcal{W}_\psi[T_a x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi(\tau - a, s).$$

Les propriétés d'invariance temporelle du signal  $x$  se répercutent sur la variable temporelle de la transformée en ondelette.

**Propriété 4.4** La transformée en ondelettes ainsi définie est quasi-covariante par translation en échelle, c'est à dire que

$$\mathcal{W}_\psi[D_{q^b} x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[x](\tau/q^b, s - b).$$

**Remarque 4.2** Comme nous l'avons fait pour la transformée de Gabor, on peut donner une définition alternative de la transformée en ondelette, où les atomes temps-échelle  $\psi_{\tau s}$  sont obtenus par translation puis dilatation de la fonction  $\psi$ ,  $g_{\tau s} = D_{q^s} T_\tau g$ . Les propriétés d'invariance d'échelle du signal  $x$  se répercutent ainsi sur la variable d'échelle de la transformée en ondelettes

$$\mathcal{W}_\psi[D_{q^b} x](\tau, \nu) = \mathcal{W}_g(\tau, s - b).$$

C'est évidemment la définition de la transformée en ondelettes covariante en temps que nous retiendrons, celle-ci étant adaptée à l'étude des propriétés de non-stationnarité des processus stochastique.

On considérera que la fonction  $\psi$  est localisé au voisinage de 0, sa transformée de Fourier sera telle que  $\hat{\psi}(0) = 0$  mais  $\hat{\psi}$  sera bien localisé autour d'un point de l'axe fréquentiel.  $\mathcal{W}_\psi x(\tau, s)$  sera alors une mesure de la présence de l'échelle  $s$  dans le processus  $x$  à l'instant  $\tau$ .

## 4.2 Étude locale des opérateurs de déformation et choix de représentations

Il est communément admis que la transformée de Gabor est une transformation adaptée à l'étude des signaux modulés en fréquence et que la transformée en ondelettes est une transformation adaptée à l'étude des signaux dilatés en fréquence. Un simple calcul algébrique nous permettra en effet de remarquer que les opérateurs de dilatation et de modulation usuels s'expriment simplement dans les plans temps-fréquence et temps-échelle. Nous verrons que, sous la condition de pouvoir exploiter les propriétés de localisation de ces transformées, cela reste approximativement vrai dans le cas général où l'on considère les opérateurs de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle.

### 4.2.1 Analyse de Gabor de l'opérateur de modulation fréquentielle

Considérons d'abord l'opérateur de modulation fréquentielle défini par

$$\mathcal{M}_\alpha x(t) = e^{2i\pi\alpha(t)}x(t),$$

dans le cas élémentaire où la fonction de modulation  $\alpha$  est affine,  $\alpha(t) = at + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . L'opérateur de modulation fréquentielle  $\mathcal{M}_\alpha$  s'exprime alors simplement en fonction de l'opérateur de modulation usuel

$$\mathcal{M}_\alpha = e^{2i\pi b}M_a.$$

Cet opérateur de modulation intervenant dans la construction des familles d'atomes temps-fréquences l'étude de l'opérateur  $\mathcal{M}_\alpha$  à l'aide de la transformée de Gabor nous permet d'utiliser les propriétés de covariance 4.1 et 4.2 de la transformée de Gabor,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) &= \langle \mathcal{M}_\alpha x, T_\tau M_\nu g \rangle \\ &= e^{2i\pi b} \langle M_a x, T_\tau M_\nu g \rangle \\ &= e^{2i\pi b} \langle x, M_a^{-1} T_\tau M_\nu g \rangle \\ &= e^{2i\pi(a\tau+b)} \langle x, T_\tau M_a^{-1} M_\nu g \rangle \\ &= e^{2i\pi(a\tau+b)} \mathcal{V}_g[x](\tau, \nu - a). \end{aligned}$$

Il apparaît alors que dans le cas où la fonction de modulation est affine, l'opérateur de modulation fréquentielle agit, à une phase près, comme un opérateur de translation dans le plan temps fréquence. Dans le cas général où la fonction  $\alpha$  n'est pas affine cette propriété n'est plus vérifiée, nous allons voir comment les propriétés de localité de la fenêtre d'analyse  $g$  vont nous permettre d'approximer, en chaque point, la fonction de modulation  $\alpha$  par une fonction affine afin d'exploiter les propriétés de covariance.

### 4.2.1.1 Approximation locale de l'opérateur de modulation fréquentielle

Mesurer la distribution  $\mathcal{M}_\alpha x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sur l'atome temps-fréquence  $g_{\tau\nu} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est équivalent à mesurer la distribution  $x$  sur l'atome modulé

$$\overline{\mathcal{M}_\alpha} g_{\tau\nu}(t) = g_{\tau\nu}(t) e^{-2i\pi\alpha(t)}.$$

Si la fonction  $g$  est suffisamment bien localisée autour de zéro, on pourra approximer la fonction  $\alpha$  par sa tangente au point  $\tau$ ,  $\alpha(t) \approx \underline{\alpha}(\tau) + \alpha'(\tau)(t - \tau)$ , ceci revient à approximer l'opérateur de modulation fréquentielle  $\mathcal{M}_\alpha$  par  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$ , son opérateur tangent au point  $\tau$ , défini par

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x(t) = e^{2i\pi\alpha(\tau)} e^{2i\pi\alpha'(\tau)(t-\tau)} x(t) \quad \forall t, \quad (4.3)$$

qui s'exprime aussi simplement comme composition des opérateurs de modulation et de translation usuels

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau = e^{2i\pi\alpha(\tau)} T_\tau M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1}. \quad (4.4)$$

Le résultat de la mesure de  $\mathcal{M}_\alpha x$  sur la fonction  $g_{\tau\nu}$  pourra alors, en chaque point  $\tau$ , être approximé par la mesure de  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x$  sur  $g_{\tau\nu}$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \langle \mathcal{M}_\alpha x, g_{\tau\nu} \rangle \approx \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, g_{\tau\nu} \rangle, \quad (4.5)$$

Intuitivement, l'approximation de l'opérateur de modulation par son opérateur tangent sera d'autant meilleure que les variations de la fonction  $\alpha$  seront faibles au voisinage du point  $\tau$ , ce voisinage étant directement lié à la localisation de la fenêtre d'analyse  $g$ . On donnera à la fin de cette section un théorème qui nous permettra de quantifier plus précisément cette erreur d'approximation.

### 4.2.1.2 Des migrations dans le plan temps-fréquence

L'expression (4.4) de l'opérateur tangent en fonction des opérateurs de translation et de modulation usuels nous permet d'utiliser les propriétés de covariance 4.1 et 4.2 de la transformée de Gabor pour énoncer la proposition suivante,

**Proposition 4.1** *En chaque point  $\tau$ ,  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$  l'opérateur tangent au point  $\tau$  à l'opérateur de modulation fréquentielle  $\mathcal{M}_\alpha$  agit, à une phase près, comme un opérateur de translation dans le plan temps-fréquence.*

$$\forall (\tau, \nu) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) = e^{2i\pi\alpha(\tau)} \mathcal{V}_g[x](\tau, \nu - \alpha'(\tau)).$$

**Preuve**  $\forall (\tau, \nu) \in \mathbb{R}^2$ , calculons

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) &= \langle e^{2i\pi\alpha(\tau)} T_\tau M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1} x, T_\tau M_\nu g \rangle \\ &= e^{2i\pi\alpha(\tau)} \langle x, T_\tau M_{\nu - \alpha'(\tau)} g \rangle \\ &= e^{2i\pi\alpha(\tau)} \mathcal{V}_g[x](\tau, \nu - \alpha'(\tau)). \end{aligned}$$

Ces propriétés de migration des coefficients resteront alors approximativement vraies dans le cas où l'on considérera l'analyse de Gabor de l'opérateur de modulation fréquentielle.

### 4.2.1.3 Modulation fréquentielle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$

Intéressons nous maintenant au cas où l'opérateur de modulation fréquentielle agit sur un processus stochastique stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . Les opérateurs de modulation et de translation usuels étant des pseudo-filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  (voir définition 3.2), l'expression générale (voir équation 4.4) des opérateurs tangents à  $\mathcal{M}_\alpha$  nous permet de remarquer que ce sont eux aussi des pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.2** *Étant donné un processus stochastique stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , de spectre généralisé  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , le processus  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est un processus stochastique stationnaire de spectre généralisé  $T_{\alpha'(\tau)} S_x$ .*

**Preuve** En utilisant l'expression 4.4 de l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$  en fonction des opérateurs de modulation et de translation usuels on peut calculer la covariance du processus  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \psi_2 \rangle} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \langle e^{2i\pi\alpha(\tau)} T_\tau M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1} x, \psi_1 \rangle \overline{\langle e^{2i\pi\alpha(\tau)} T_\tau M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1} x, \psi_2 \rangle} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1} x, \psi_1 \rangle \overline{\langle M_{\alpha'(\tau)} T_\tau^{-1} x, \psi_2 \rangle} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle x, M_{\alpha'(\tau)}^{-1} \psi_1 \rangle \overline{\langle x, M_{\alpha'(\tau)}^{-1} \psi_2 \rangle} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \hat{x}, T_{\alpha'(\tau)}^{-1} \hat{\psi}_1 \rangle \overline{\langle \hat{x}, T_{\alpha'(\tau)}^{-1} \hat{\psi}_2 \rangle} \right\} \\ &= \langle T_{\alpha'(\tau)} S_x, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \rangle. \end{aligned}$$

♠

Ainsi, dans le cas où  $x$  est un processus stationnaire, approximer, en chaque point  $\tau$ , le processus  $\mathcal{M}_\alpha x$  par le processus  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x$  revient à approximer, en chaque point  $\tau$ , le processus  $\mathcal{M}_\alpha x$  par un processus stationnaire. Bien entendu l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$  n'aura de sens pour nous que lorsque qu'il agira sur un processus mesuré sur une fonction test localisée au voisinage du point  $\tau$ , nous verrons en section 4.4.1 que cela nous permettra de définir des spectres locaux, ou spectres évolutifs, associés aux processus modulés en fréquence.

### 4.2.1.4 Des théorèmes d'approximations

Il convient maintenant de se demander dans quelle mesure les approximations proposées précédemment sont valides et de comprendre l'influence des différents paramètres (localisation des fonctions tests, variations des fonctions de déformation...) sur la qualité de ces approximations. Nous proposons différents théorèmes d'approximation dans le cas où l'opérateur de modulation fréquentielle est appliqué à un processus stationnaire. Les preuves des théorèmes 4.2 et 4.3, proches de la preuve du théorème 4.1, sont données en annexe 7.5.1 et 7.5.2.

**Théorème 4.1** *Soit  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $|g(t)| \leq (1 + |t|)^{-\lambda}$  avec  $\lambda > 2$ . Soit  $x$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) + \epsilon_m(\tau, \nu),$$

où  $\epsilon_m$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} \leq \sigma_x^2 \frac{16}{9} \left( \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1} \right)^2 \left( \frac{\pi}{2} \|\alpha''\|_\infty \right)^{2 - \frac{6}{\lambda + 2}},$$

$\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} S_x(\xi) d\xi$  étant la variance de  $x$ .

**Preuve** On pose,

$$\begin{aligned} \epsilon_m(\tau, \nu) &= \mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) - \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) \\ &= \langle \mathcal{M}_\alpha x, g_{\tau, \nu} \rangle - \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, g_{\tau, \nu} \rangle \\ &= \langle x, f_{\tau \nu} \rangle \end{aligned}$$

où  $f_{\tau \nu}(t) = (e^{2i\pi\alpha(t)} - e^{2i\pi(\alpha(\tau) + (t-\tau)\alpha'(t-\tau))})g(t-\tau)e^{2i\pi(t-\tau)\nu}$ .

Comme le processus  $x$  est stationnaire

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} = \langle S_x, |\hat{f}_{\tau \nu}|^2 \rangle$$

Regardons maintenant  $\hat{f}_{\tau \nu}$  :

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{\tau \nu}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\tau \nu}(t) e^{-2i\pi t \xi} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_{\tau \nu}(t)| dt \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\sin(r(t, \tau))g(t-\tau)| dt, \end{aligned}$$

où il existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $r(t, \tau) = \frac{\pi}{2} \alpha''(\epsilon)(t-\tau)^2$ . Donc

$$|\hat{f}_{\tau \nu}(\xi)| \leq 2 \int_{I_1} |g(u)| du + \pi \|\alpha''\|_\infty \int_{I_2} u^2 |g(u)| du. \quad (4.6)$$

On a ici utilisé les majorations  $|\sin(t)| < 1$  et  $|\sin(t)| < |t|$  et nous avons séparé l'intégrale sur deux domaines

$$I_1 = \{u : |u| \geq u_0\}, \quad I_2 = \mathbb{R} \setminus I_1,$$

où  $u_0$  est une borne pouvant être adaptée. En utilisant maintenant la décroissance de la fonction  $g$ , à savoir  $|g(t)| \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$ ,

$$\int_{I_1} |g(u)| du \leq \frac{2}{\lambda - 1} u_0^{1-\lambda}, \quad \int_{I_2} u^2 |g(u)| du \leq \frac{2}{3} u_0^3.$$

Ainsi

$$|\hat{f}_{\tau \nu}(\xi)| \leq \frac{4}{\lambda - 1} u_0^{1-\lambda} + \frac{2\pi}{3} \|\alpha''\| u_0^3.$$

La valeur minimum de cette expression étant obtenue pour  $u_0 = (\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty)^{-\frac{1}{\lambda+2}}$ , on a ainsi,

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| &\leq \frac{4}{\lambda-1} \left(\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+2}} + \frac{2\pi}{3}\|\alpha''\| \left(\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty\right)^{-\frac{3}{\lambda+2}}. \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right) \left(\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+2}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)|^2 \leq \frac{16}{9} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty\right)^{2-\frac{6}{\lambda+2}}.$$

En supposant que  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  et en posant  $\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} S_x(\xi)d\xi$ ,

$$\mathbb{E} \{|\epsilon_m(\tau, \nu)|^2\} \leq \sigma_x^2 \frac{16}{9} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\|\alpha''\|_\infty\right)^{2-\frac{6}{\lambda+2}}.$$

**Théorème 4.2** Soit  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $|g(t)| \leq \lambda e^{-\lambda|t|}$  avec  $\lambda > 0$ . Soit  $x$  un processus gaussien généralisé stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) + \epsilon_m(\tau, \nu).$$

L'erreur d'approximation  $\epsilon_m$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\mathbb{E} \{|\epsilon_m(\tau, \nu)|^2\} \leq 32\sigma_x^2 \frac{\pi^2 \|\alpha''\|_\infty^2}{\lambda^2} B\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|\alpha''\|_\infty}\right)$$

où  $B$  est la fonction strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[0, 1]$  définie par  $B(x) = [1 - (x+1)e^{-x}]^2$ .

**Théorème 4.3** Soit  $g \in \mathcal{D}([-\frac{1}{\lambda}, +\frac{1}{\lambda}])$  une fonction test à support inclus dans  $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$  telle que  $|g(t)| \leq K$ . Soit  $x$  un processus stochastique généralisé stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors pour tout  $\forall \tau, \nu \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x](\tau, \nu) + \epsilon_m(\tau, \nu),$$

où  $\epsilon_m$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\exists t_\lambda \in [\tau - \frac{1}{\lambda}, \tau + \frac{1}{\lambda}], \quad \mathbb{E} \{|\epsilon_m(\tau, \nu)|^2\} \leq \frac{9}{16\lambda^6} K^2 \pi^2 \sigma_x^2 |\alpha''(t_\lambda)|^2.$$

Dans les trois cas considérés le paramètre  $\lambda$  est un paramètre de localisation de la fenêtre d'analyse autour du point  $\tau$ , on remarque alors que l'erreur d'approximation est évidemment d'autant meilleure que la fonction test est bien localisée puisque les approximations effectuées proviennent d'un développement limité au voisinage de  $\tau$ . On remarque aussi que l'erreur d'approximation est d'autant plus faible que la dérivée seconde de la fonction de modulation est petite. Cette condition se comprend aisément puisque les approximations réalisées correspondent à

## Migrations des coefficients dans le plan temps-fréquence

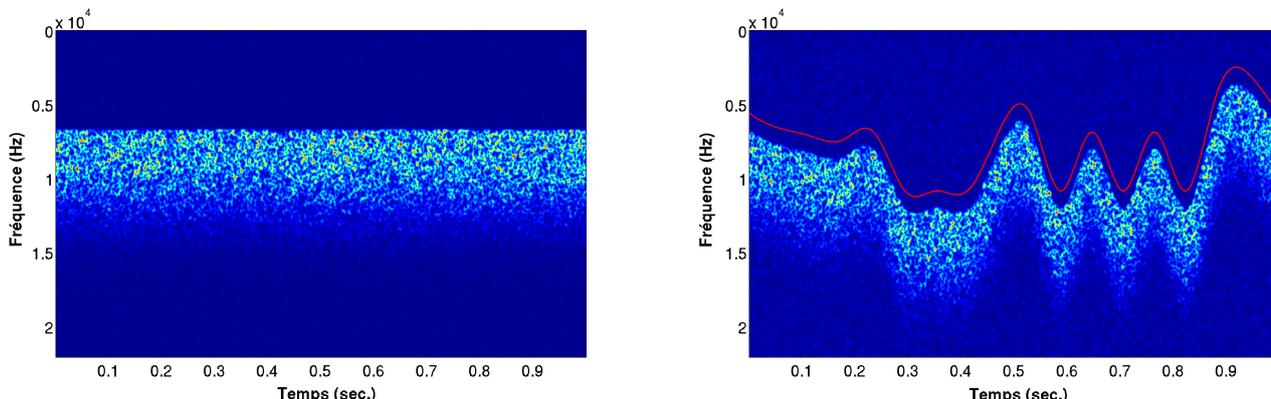


FIGURE 4.1 – Gauche : transformée de Gabor d’un processus stationnaire. Droite : transformée de Gabor du même processus stationnaire déformé par l’opérateur de modulation fréquentielle superposé avec la dérivée de la fonction de modulation (en rouge).

une approximation, en chaque point, de l’opérateur de modulation fréquentielle par un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , or dans le cas où  $\alpha'' = 0$ , l’opérateur de modulation est lui même un pseudo-filtre de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . On notera aussi que les deux premiers théorèmes font intervenir des bornes globales pour les erreurs d’approximation, en ce sens qu’elles sont indépendantes de l’instant  $\tau$  et qu’elles bornent alors une erreur maximale sur tout les instants. On peut cependant supposer que l’erreur d’approximation n’est pas indépendante de l’instant à laquelle elle est mesurée mais qu’elle sera d’autant plus faible à l’instant  $\tau$  que  $\alpha''$  sera faible au voisinage de ce point, c’est ce que montre le troisième théorème, le voisinage du point  $\tau$  étant complètement déterminé par le support de la fonction test  $g$ . On notera enfin que lorsque la localisation de la fenêtre  $g$  devient petite, les bornes proposées dépendent toutes du carré de la dérivée seconde de la fonction de modulation.

### 4.2.2 Analyse en ondelettes de l’opérateur de dilatation temporelle

De la même manière que nous l’avons fait pour l’opérateur de modulation fréquentielle, considérons l’opérateur de dilatation temporelle défini par

$$\mathcal{D}_\gamma x(t) = \sqrt{\gamma'(t)} x(\gamma(t)),$$

dans le cas où la fonction de dilatation  $\gamma$  est affine,  $\gamma(t) = at + b$  avec  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $b \in \mathbb{R}$ . L’opérateur de dilatation temporelle  $\mathcal{D}_\gamma$  a alors une expression simple en fonction de l’opérateur de translation et de l’opérateur de dilatation usuel

$$\mathcal{D}_\gamma = D_a^{-1} T_b^{-1}.$$

Ces opérateurs intervenant dans la construction des familles d’atomes temps-échelle, la transformée en ondelettes paraît adaptée à l’étude de  $\mathcal{D}_\alpha$ . On pourra alors exploiter les propriétés de

covariance 4.3 et 4.4 de la transformée en ondelettes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma x](\tau, s) &= \langle \mathcal{D}_\gamma x, T_\tau D_{q^s} \psi \rangle \\
 &= \langle D_a^{-1} T_b^{-1} x, T_\tau D_{q^s} \psi \rangle \\
 &= \langle T_b^{-1} x, T_{a\tau} D_{aq^s} \psi \rangle \\
 &= \langle x, T_{(a\tau+b)} D_{aq^s} \psi \rangle \\
 &= \mathcal{W}_\psi[x](a\tau + b, s + \log_q(a)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas où la fonction de dilatation est affine, l'opérateur de dilatation temporelle agit sur la variable d'échelle de la transformée en ondelettes, comme un opérateur de translation. Quand la fonction  $\gamma$  n'est pas affine cette propriété n'est plus vérifiée. Nous allons voir comment les propriétés de localisation de l'ondelette  $\psi$  vont nous permettre d'approximer en chaque point la fonction de dilatation  $\gamma$  par une fonction affine afin d'exploiter les propriétés de covariance de la transformée en ondelettes.

#### 4.2.2.1 Approximation locale de l'opérateur de dilatation temporelle

Mesurer la distribution  $\mathcal{D}_\gamma x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sur l'ondelette  $\psi_{\tau s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est équivalent à mesurer  $x$  sur l'ondelette dilatée

$$\mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s}(t) = \sqrt{\gamma^{-1}'(t)/q^s} \psi\left(\frac{\gamma^{-1}(t) - \tau}{q^s}\right)$$

Si l'ondelette  $\psi$  est suffisamment bien localisée autour de zéro, on peut approximer la fonction  $\gamma$  par sa tangente au point  $\tau$ ,  $\gamma(t) \approx \gamma(\tau) + \gamma'(\tau)(t - \tau)$ , ce qui revient à approximer l'opérateur de dilatation temporelle par  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$ , son opérateur tangent au point  $\tau$ , défini par

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x(t) = \sqrt{\gamma'(\tau)} x(\gamma(\tau) + \gamma'(\tau)(t - \tau)), \quad (4.7)$$

qui s'exprime aussi simplement en fonction des opérateurs de dilatation et de translation usuels,

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau = T_\tau D_{\gamma'(\tau)}^{-1} T_{\gamma(\tau)}^{-1}. \quad (4.8)$$

Le résultat de la mesure de  $\mathcal{D}_\gamma x$  sur la fonction  $\psi_{\tau s}$  sera alors approximé, en chaque point  $\tau$ , par la mesure de  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x$  sur  $\psi_{\tau s}$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi_{\tau s} \rangle \approx \langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi_{\tau s} \rangle, \quad (4.9)$$

Intuitivement, l'erreur d'approximation sera d'autant plus faible que les variations de la fonction  $\gamma$  seront faibles au voisinage du point  $\tau$ , ce voisinage étant directement lié à la localisation la fonction  $\psi_{\tau s}$  à l'échelle  $s$ . On donnera à la fin de cette section un théorème d'approximation qui nous permettra de contrôler cette erreur .

#### 4.2.2.2 Des migrations dans le plan temps-échelle

L'expression générale de l'opérateur tangent à l'opérateur de dilatation temporelle en fonction des opérateurs de translation et de dilatation usuels (voir équation 4.8) nous permet d'utiliser les propriétés de covariance 4.3 et 4.4 de la transformée en ondelette.

**Proposition 4.3** *En chaque point  $\tau$ , l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$ , tangent au point  $\tau$  à l'opérateur de dilatation temporelle  $\mathcal{D}_\gamma$  agit, dans le plan temps-échelle, comme un opérateur de composition par rapport à la variable temporelle et de translation par rapport à la variable d'échelle*

$$\forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[x](\gamma(\tau), s + \log_q(\gamma'(\tau))).$$

**Preuve**  $\forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2$ , calculons

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) &= \left\langle T_\tau D_{\gamma'(\tau)}^{-1} T_{\gamma(\tau)}^{-1} x, T_\tau D_{q^s} \psi \right\rangle \\ &= \left\langle x, T_{\gamma(\tau)} D_{q^{s\gamma'(\tau)}} \psi \right\rangle \\ &= \mathcal{W}_\psi[x](\gamma(\tau), s + \log_q(\gamma'(\tau))). \end{aligned}$$

♠

Ces propriétés de migration des coefficients resteront alors approximativement vraies dans le cas où l'on considérera l'analyse par ondelettes de l'opérateur de dilatation temporelle.

#### 4.2.2.3 Dilatation temporelle et pseudo-filtre de $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$

On peut maintenant s'intéresser au cas où l'opérateur de dilatation temporelle agit sur un processus stochastique stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ . Les opérateurs de dilatation et de translation usuels étant des pseudo-filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , l'expression générale des opérateurs tangents à  $\mathcal{D}_\gamma$  (équation 4.8) nous permet de remarquer qu'ils sont eux aussi des pseudo-filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.4** *Étant donné un processus stochastique stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , de spectre généralisé  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , le processus  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  est un processus stochastique stationnaire de spectre généralisé  $S_{\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x} = \sqrt{\gamma'(\tau)} D_{\gamma'(\tau)} S_x$ .*

**Preuve** Utilisons l'expression (4.8) de l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$  en fonction des opérateurs de dilatation et de translation usuels

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau = T_\tau D_{\gamma'(\tau)}^{-1} T_{\gamma(\tau)}^{-1}, \quad (4.10)$$

on peut ainsi calculer la covariance du processus  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left\langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi_1 \right\rangle \overline{\left\langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi_2 \right\rangle} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left\langle T_\tau D_{\gamma'(\tau)}^{-1} T_{\gamma(\tau)}^{-1} x, \psi_1 \right\rangle \overline{\left\langle T_\tau D_{\gamma'(\tau)}^{-1} T_{\gamma(\tau)}^{-1} x, \psi_2 \right\rangle} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left\langle x, D_{\gamma'(\tau)} \psi_1 \right\rangle \overline{\left\langle x, D_{\gamma'(\tau)} \psi_2 \right\rangle} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left\langle \hat{x}, D_{\gamma'(\tau)}^{-1} \hat{\psi}_1 \right\rangle \overline{\left\langle \hat{x}, D_{\gamma'(\tau)}^{-1} \hat{\psi}_2 \right\rangle} \right\} \\ &= \left\langle \sqrt{\gamma'(\tau)} D_{\gamma'(\tau)} S_x, \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $x$  est un processus stationnaire, approximer, en chaque point  $\tau$ , l'opérateur de dilatation temporelle par l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$  revient alors à approximer, en chaque point  $\tau$ , le processus déformé  $\mathcal{D}_\gamma x$  par le processus stationnaire  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x$ . Naturellement l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$  n'aura de sens pour nous que lorsque qu'il agira sur un processus mesuré sur une fonction test localisée au voisinage du point  $\tau$ . Nous verrons en section 4.4.1 que cela nous permettra de définir la notion de spectres évolutifs associés aux processus dilatés temporellement.

#### 4.2.2.4 Des théorèmes d'approximations

Nous proposons, comme dans le cas de l'analyse de Gabor de l'opérateur de modulation fréquentielle, des théorèmes d'approximations dans le cas où l'opérateur de dilatation temporelle est appliqué à un processus stationnaire. Les preuves des théorèmes 4.5 et 4.6, similaires à la preuve du théorème 4.4, sont données en annexe 7.5.3 et 7.5.4.

**Théorème 4.4** Soit  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $|\psi(t)| \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$  avec  $\lambda > 2$ . Soit  $x$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  tel que

$$\rho_x(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2-\frac{6}{\lambda+2}} S_x(\xi) d\xi < \infty .$$

Alors  $\forall (\tau, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) + \epsilon_d(\tau, s). \quad (4.11)$$

où le reste  $\epsilon_d$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \} \leq \|\gamma''\|_\infty^2 q^{3s} \left( K_0 \sigma_x + K_1 \|\gamma''\|_\infty^{\frac{-3}{\lambda+2}} q^s q^{\frac{-6s}{\lambda+2}} \sqrt{\rho_x(\lambda)} \right)^2 ,$$

$K_0$  et  $K_1$  étant deux constante dépendantes de  $\lambda$ .

**Preuve** Soit  $\epsilon_d$  tel que

$$\epsilon_d(\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma x](\tau, s) - \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) = \langle (\mathcal{D}_\gamma - \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau)x, \psi_{\tau s} \rangle$$

Posons  $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{D}_\gamma / \sqrt{\gamma'}$  et  $\widetilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau = \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau / \sqrt{\gamma'(\tau)}$ , et séparons le reste en deux parties,

$$\epsilon_d(\tau, s) = \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) + \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \quad (4.12)$$

Avec

$$\begin{aligned} \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) &= \langle (\sqrt{\gamma'} - \sqrt{\gamma'(\tau)}) \mathcal{B}_\gamma x, \psi_{\tau s} \rangle \\ \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) &= \sqrt{\gamma'(\tau)} \langle (\mathcal{B}_\gamma - \widetilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau) x, \psi_{\tau s} \rangle . \end{aligned}$$

Nous allons donc borner ces deux termes indépendamment. Considérons d'abord  $\epsilon_d^{(0)}$ ,

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \} = \langle S_x, |\phi_{\tau s}|^2 \rangle ,$$

où

$$|\phi_{\tau s}(\xi)| = \left| \int_{t \in \mathbb{R}} e^{2i\pi\xi\gamma(t)} \left( \sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right) \psi_{\tau s}(t) dt \right| \quad (4.13)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'}} \right\|_\infty q^{-s/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t - \tau| |\psi(q^{-s}(t - \tau))| dt \quad (4.14)$$

$$\leq \frac{\mu}{2} \left\| \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'}} \right\|_\infty q^{3s/2} , \text{ où } \mu = \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| dt . \quad (4.15)$$

En supposant que  $|\psi(t)| \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$ ,

$$\mu \leq 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{1 + |t|^\lambda} \leq 2 \int_0^1 t dt + 2 \int_1^\infty t^{1-\lambda} dt \leq \frac{\lambda}{\lambda - 2}.$$

Finalement, avec  $\sigma_x^2 = \|S_x\|_1$  la variance de processus  $x$ , on obtient la majoration suivante

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\} \leq \frac{\lambda^2 \sigma_x^2}{4(\lambda - 2)^2} \left\| \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'}} \right\|_\infty^2 q^{3s}.$$

Considérons maintenant  $\epsilon_d^{(1)}(\tau, s) = \sqrt{\gamma'(\tau)} \langle (\mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau)x, \psi_{\tau s} \rangle$ , et remarquons d'abord que

$$\langle (\mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau)x, \psi_{\tau s} \rangle = q^{-s/2} \langle \hat{x}, f_{\tau s} \rangle,$$

avec

$$f_{\tau s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(q^{-s}(t - \tau)) \left[ e^{-\xi\gamma(t)} - e^{-2i\pi\xi[\gamma(\tau) + \gamma'(\tau)(t - \tau)]} \right] dt.$$

On peut alors calculer la variance de  $\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\} = q^{-s} \gamma'(\tau) \langle S_x, |f_{\tau s}|^2 \rangle. \quad (4.16)$$

Comme il existe  $\zeta \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma''(\zeta) \frac{(t - \tau)^2}{2} = \gamma(t) - \gamma(\tau) - \gamma'(\tau)(t - \tau)$ ,

$$|f_{\tau s}(\xi)| = \left| \int e^{2i\pi\xi\gamma(t)} \left[ 1 - e^{i\pi\xi(t - \tau)^2 \gamma''(\zeta)} \right] \bar{\psi}(q^{-s}(t - \tau)) dt \right|. \quad (4.17)$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^\infty \left| \sin \left( \frac{\pi}{2} \xi (t - \tau)^2 \gamma''(\zeta) \right) \right| |\psi(q^{-s}(t - \tau))| dt \quad (4.18)$$

$$\leq 2q^s \int_{-\infty}^\infty |\psi(t)| \left| \sin \left( \frac{\pi}{2} \xi q^{2s} t^2 \gamma''(\zeta) \right) \right| dt \quad (4.19)$$

$$\leq 2q^s \left[ \int_{I_1(\xi)} |\psi(t)| ds + \frac{\pi \|\gamma''\|_\infty}{2} \xi q^{2s} \int_{I_2(\xi)} t^2 |\psi(t)| dt \right]. \quad (4.20)$$

Nous avons utilisé ici les majorations  $|\sin(u)| \leq 1$  et  $|\sin(u)| \leq |u|$  et nous avons séparé l'axe des réels en deux intervalles dépendant de la fréquence  $\xi$ ,

$$I_1(\xi) = \{t : |t| \geq u_0\}, \quad I_2(\xi) = \mathbb{R} \setminus I_1(\xi),$$

où  $u_0$  est un paramètre qui pourra être adapté.

Notons  $C_0 = \frac{\pi \|\gamma''\|_\infty}{2} \xi q^{2s}$  et utilisons maintenant la décroissance de l'ondelette  $\psi$ , à savoir  $|\psi(t)| \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$ ,

$$\int_{I_1(\xi)} |\psi(t)| dt \leq \frac{2}{\lambda - 1} u_0^{1-\lambda}, \quad \int_{I_2(\xi)} t^2 |\psi(t)| dt \leq \frac{2}{3} u_0^3.$$

Ainsi

$$|f_{\tau s}(\xi)| \leq 4q^s F(u_0) ,$$

où

$$F(u_0) = \frac{u_0^{1-\lambda}}{\lambda-1} + C_0 \frac{u_0^3}{3} .$$

La valeur  $u_{0\text{opt}}$  de  $u_0$  qui minimise l'expression précédente étant  $u_{0\text{opt}} = C_0^{-\frac{1}{\lambda+2}}$ , cela nous conduit à la borne suivante

$$F(u_{0\text{opt}}) = \frac{\lambda+2}{3(\lambda-1)} C_0^{1-\frac{3}{\lambda+2}} .$$

Ainsi,

$$|f(\xi)| \leq 4q^s \frac{\lambda+2}{3(\lambda-1)} \left( \frac{\pi \|\gamma''\|_\infty}{2} \xi q^{2s} \right)^{1-\frac{3}{\lambda+2}} \quad (4.21)$$

On obtient finalement la majoration suivante,

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\} \leq \frac{16(\lambda+2)^2}{9(\lambda-1)^2} \gamma'(\tau) \left( \frac{\pi \|\gamma''\|_\infty}{2} \right)^{2-\frac{6}{\lambda+2}} (q^s)^{5-\frac{12}{\lambda+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2-\frac{6}{\lambda+2}} S_x(\xi) d\xi \quad (4.22)$$

On peut maintenant majorer l'erreur d'approximation dans son intégralité

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 t \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) + \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\} , \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \right|^2 \right\} + \mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\} + 2\Re \left[ \mathbb{E} \left\{ \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \overline{\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)} \right\} \right] , \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| \Re \left[ \mathbb{E} \left\{ \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \overline{\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)} \right\} \right] \right| &\leq \left| \mathbb{E} \left\{ \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \overline{\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)} \right\} \right| , \\ &\leq \mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \overline{\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)} \right| \right\} , \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \right|^2 \right\} \mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\}} \end{aligned}$$

On obtient alors la majoration suivante en fonction des deux erreurs calculées précédemment

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \right\} \leq \left( \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) \right|^2 \right\}} + \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\}} \right)^2 , \quad (4.23)$$

ce qui conclut la preuve. ♠

On obtient de même des bornes similaires, sous des hypothèses différentes de décroissance pour la fonction  $\psi$ .

**Théorème 4.5** Soit  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $|\psi(t)| \leq \lambda e^{-\lambda|t|}$  avec  $\lambda > 0$ . Soit  $x$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 S_x(\xi) d\xi < \infty .$$

Supposons que la fonction de dilatation  $\gamma$  vérifie  $0 < c_\gamma < |\gamma'(t)| < C_\gamma < +\infty, \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $\forall(\tau, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) + \epsilon_d(\tau, s). \quad (4.24)$$

Le reste  $\epsilon_d$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \} \leq q^{3s} \frac{\|\gamma''\|_\infty^2}{\lambda^2} \left( \frac{\sigma_x}{\sqrt{c_\gamma}} + \sqrt{\frac{8\pi^2 C_\gamma}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 v_\lambda(\xi) S_x(\xi) d\xi} \right)^2 \quad (4.25)$$

où  $v_\lambda$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_\lambda(\xi) = 0. \quad (4.26)$$

**Théorème 4.6** Soit  $\psi \in \mathcal{D}([-\frac{1}{\lambda}, +\frac{1}{\lambda}])$  une fonction test à support inclut dans  $[-\frac{1}{\lambda}, +\frac{1}{\lambda}]$  telle que  $|\psi(t)| \leq K$ . Soit  $x$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  tel que

$$V_{S_x} := \int_{\mathbb{R}} \xi^2 S_x(\xi) d\xi < \infty.$$

Supposons que la fonction de dilatation  $\gamma$  vérifie  $0 < c_\gamma < |\gamma'(t)| < C_\gamma < +\infty, \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $\forall(\tau, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma x](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x](\tau, s) + \epsilon_d(\tau, s), \quad (4.27)$$

où le reste  $\epsilon_d$  est un processus stochastique gaussien circulaire vérifiant

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \} \leq \frac{K^2 q^{3s}}{\lambda^4} |\gamma''(t_s)|^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c_\gamma}} \sigma_x + \frac{2}{3\lambda} \sqrt{C_\gamma} \pi q \sqrt{V_{S_x}} \right)^2$$

avec

$$t_s = \operatorname{argmax}_{t \in [\tau - \frac{q^s}{\lambda}, \tau + \frac{q^s}{\lambda}]} (|\gamma''(t)|^2). \quad (4.28)$$

Comme dans le cas des théorèmes concernant les approximations dans le plan temps fréquence, on remarque que l'erreur d'approximation est d'autant meilleure la fonction test est bien localisé et qu'elle se comporte comme le carré de la dérivée seconde de la fonction de dilatation. On notera aussi que les bornes dépendent de la variable d'échelle  $s$ , en effet, la localisation de l'ondelette  $\psi$  augmente dans les petites échelles et diminue ainsi l'erreur d'approximation, celle ci tendant vers 0 quand  $s \rightarrow -\infty$ . La figure 4.2 illustre ces propriétés de migrations dans le plan temps-échelle.

### 4.2.3 Conclusion sur l'approximation locale des opérateur de déformation

Nous avons vu comment la mesure des processus déformés sur des fonctions correctement localisées temporellement nous permettait d'approximer les opérateurs de déformation par leurs opérateurs tangents. Ces opérateurs possèdent deux propriétés fondamentales que nous chercherons à exploiter par la suite, ils ont d'une part des expressions simple dans des espaces de représentation adaptés et ils possèdent d'autre part la propriété d'être des pseudo-filtres. L'approximation des opérateurs de déformation par leurs opérateurs tangents est un élément central à l'ensemble de ce manuscrit puisque une grande partie des méthodes développées prendra effectivement sens lorsque les erreurs en résultant pourront effectivement être négligées.

## Migrations des coefficients dans le plan temps-échelle

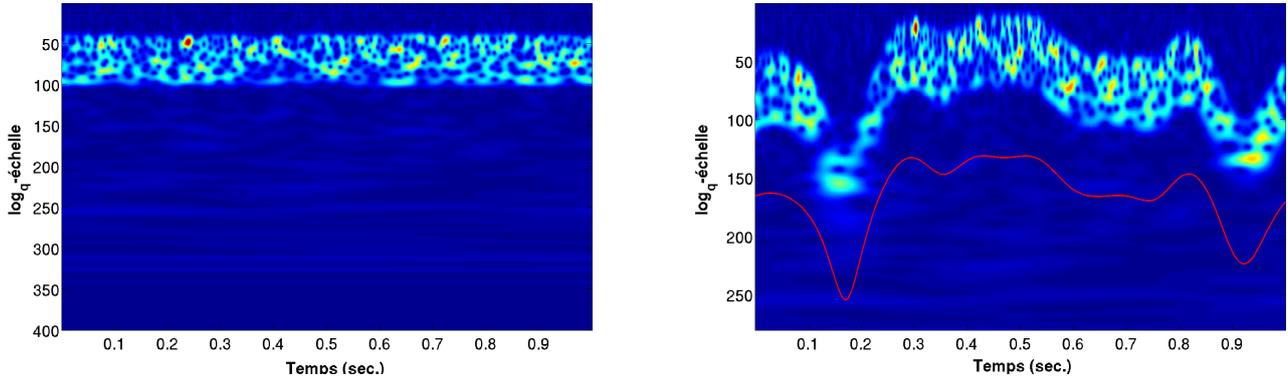


FIGURE 4.2 – Gauche : transformée en ondelettes d’un signal stationnaire. Droite : transformée en ondelettes d’un signal stationnaire déformé par l’opérateur de dilatation temporelle superposé avec le logarithme de la dérivée de la fonction de dilatation (en rouge).

### 4.3 Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus stochastiques généralisés

Les transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus stochastiques étant elles-mêmes des champs stochastiques bidimensionnels on va chercher ici à caractériser leurs lois. On considérera alors les transformées des processus mis en jeu dans les modèles de modulation fréquentielle et de dilatation temporelle présentés en 3.4.1 et 3.4.2, à savoir

$$\begin{aligned} y_m &= \mathcal{M}_\alpha z + w, \\ y_d &= \mathcal{D}_\gamma z + w, \end{aligned}$$

où le processus  $w$  est un bruit blanc circulaire à valeurs complexes de variance  $\sigma_0^2$ , et où  $z$  est un processus circulaire stationnaire de spectre généralisé  $S_z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Les processus stochastiques intervenant dans le modèle de modulation seront étudiés à l’aide de transformées temps-fréquence tandis que les processus stochastiques intervenant dans le modèle de dilatation seront étudiés à l’aide de transformées temps-échelle. On considérera ainsi les relations suivantes

$$\mathcal{V}_g[y_m](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z](\tau, \nu) + \mathcal{V}_g[w](\tau, \nu), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{W}_\psi[y_d](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z](\tau, s) + \mathcal{W}_\psi[w](\tau, s) \quad (4.30)$$

et leurs approximations correspondantes

$$\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z](\tau, \nu) = \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) + \epsilon_m(\tau, \nu),$$

$$\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau, s) + \epsilon_d(\tau, s).$$

#### 4.3.1 Lois des transformées temps-fréquence des processus stochastiques

**Proposition 4.5 (Loi de  $\mathcal{V}_g[z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . Sa transformée de Gabor  $\mathcal{V}_g[z]$  est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire. Sa première fonction de covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}$  a pour

expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \langle S_z, \widehat{g_{\tau\nu} g_{\tau'\nu'}} \rangle,$$

où  $(\widehat{g_{\tau\nu} g_{\tau'\nu'}})(\xi) = \hat{g}(\xi - \nu) \bar{\hat{g}}(\xi - \nu') e^{-2i\pi\xi(\tau - \tau')} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 4.3** La propriété de covariance temporelle de la transformée de Gabor (prop. 4.1), se traduit ici par le fait que la transformée de Gabor d'un processus stationnaire est un champ stochastique bidimensionnel, stationnaire par rapport à sa variable temporelle.

On a de manière corollaire que  $\mathcal{V}_g[w]$ , la transformée de Gabor du processus blanc circulaire de variance  $\sigma_0^2$  est un champ stochastique gaussien bidimensionnel centré et circulaire. Sa première fonction de covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[w]}$  a pour expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[w]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(\xi - \nu) \hat{g}(\xi - \nu') e^{2i\pi\xi(\tau - \tau')} d\xi.$$

**Remarque 4.4** Comme vu en remarque 4.2, la stationnarité du processus blanc se traduit par la stationnarité du processus  $\mathcal{V}_g[w]$  par rapport à sa variable temporelle. La transformée de Fourier du processus blanc étant également un processus stationnaire, une définition alternative de la transformée de Gabor, covariante en fréquence, nous conduirait alors à une stationnarité de  $\mathcal{V}_g[w]$  par rapport à sa variable fréquentielle.

**Proposition 4.6 (Loi de  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ ,  $\mathcal{M}_\alpha$  l'opérateur de modulation fréquentielle défini en 3.3.1. La transformée de Gabor  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]$  du processus modulé est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire. Sa première fonction de covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]}$  a pour expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \langle S_z, \hat{h}_{\tau\nu} \bar{\hat{h}}_{\tau'\nu'} \rangle.$$

avec  $\hat{h}_{\tau\nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_{\tau\nu}(t) e^{-2i\pi\alpha(t)} e^{-2i\pi\xi t} dt$

**Preuve** Le processus  $z$  étant circulaire  $\mathbb{E} \{ \langle z, \psi_1 \rangle \langle z, \psi_2 \rangle \} = 0, \quad \forall \psi_1, \psi_2$ . Alors  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = 0$  et le processus  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]$  est un processus circulaire. Regardons donc la première fonction de covariance du champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') &= \mathbb{E} \{ \langle \mathcal{M}_\alpha z, g_{\tau,\nu} \rangle \langle \mathcal{M}_\alpha z, g_{\tau',\nu'} \rangle \} \\ &= \mathbb{E} \{ \langle z, \overline{\mathcal{M}_\alpha} g_{\tau,\nu} \rangle \langle z, \overline{\mathcal{M}_\alpha} g_{\tau',\nu'} \rangle \}, \\ &= \langle S_z, \hat{h}_{\tau\nu} \bar{\hat{h}}_{\tau'\nu'} \rangle. \end{aligned}$$

où  $\hat{h}_{\tau\nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_{\tau\nu}(t) e^{-2i\pi\alpha(t)} e^{-2i\pi\xi t} dt.$



**Proposition 4.7 (Loi de  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ .  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  l'approximation la transformée de Gabor du processus modulé est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire. Sa première fonction covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}$  a pour expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = e^{2i\pi(\alpha(\tau) - \alpha(\tau'))} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu - \alpha'(\tau), \nu' - \alpha'(\tau')).$$

**Preuve** Regardons l'expression de la première fonction de covariance du champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$ ,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) \overline{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^{\tau'} z](\tau', \nu')} \right\}.$$

On a déjà vu dans la preuve de la proposition 4.1 que

$$\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) = e^{2i\pi\alpha(\tau)} \mathcal{V}_g[z](\tau, \nu - \alpha'(\tau)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') &= \mathbb{E} \left\{ \mathcal{V}_g[z](\tau, \nu - \alpha'(\tau)) \overline{\mathcal{V}_g[z](\tau', \nu' - \alpha'(\tau'))} \right\} e^{2i\pi(\alpha(\tau) - \alpha(\tau'))} \\ &= e^{2i\pi(\alpha(\tau) - \alpha(\tau'))} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu - \alpha'(\tau), \nu' - \alpha'(\tau')). \end{aligned}$$

Regardons maintenant l'expression de sa seconde fonction de covariance,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^{\tau'} z](\tau', \nu') \right\}.$$

Comme vu dans la preuve de la proposition 4.1

$$\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) = e^{2i\pi\alpha(\tau)} \langle z, T_\tau M_{\nu - \alpha'(\tau)} g \rangle,$$

ainsi

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = \mathbb{E} \left\{ \langle z, T_\tau M_{\nu - \alpha'(\tau)} g \rangle \langle z, T_{\tau'} M_{\nu' - \alpha'(\tau')} g \rangle \right\} e^{2i\pi(\alpha(\tau) + \alpha(\tau'))}.$$

Comme  $z$  est un processus circulaire,  $\mathbb{E} \{ \langle z, \psi_1 \rangle \langle z, \psi_2 \rangle \} = 0 \quad \forall \psi_1, \psi_2$  et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = 0.$$

Le processus  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  est donc un processus circulaire. ♠

**Remarque 4.5** Il est important de remarquer que la propriété de stationnarité de processus  $z$  n'est pas exploitée dans la preuve et que la proposition 4.7 reste vraie dans le cas où le processus  $z$  n'est pas stationnaire, ainsi, l'expression de la covariance du champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  en fonction de la covariance du champ stochastique  $\mathcal{V}_g[z]$  ne dépend pas de la stationnarité de  $z$ . Il apparaît alors que notre approche ne semble pas spécifiquement adaptée au cas où le processus déformé est un processus stationnaire. Nous verrons dans la section suivante comment exploiter au mieux ces propriétés de stationnarité.

### 4.3.2 Lois des transformées temps-échelle des processus stochastiques

**Proposition 4.8 (Loi de  $\mathcal{W}_\psi[z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ , la transformée en ondelettes  $\mathcal{W}_\psi[z]$  du processus  $z$  est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire. Sa première fonction de covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}$  a pour expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[z]}(\tau, \tau', s, s') = \left\langle S_z, \hat{\psi}_{\tau s} \bar{\hat{\psi}}_{\tau' s'} \right\rangle, \quad (4.31)$$

avec  $(\hat{\psi}_{\tau s} \bar{\hat{\psi}}_{\tau' s'}) (\xi) = \sqrt{q^{s+s'}} \hat{\psi}(\xi q^s) \bar{\hat{\psi}}(\xi q^{s'}) e^{-2i\pi(\tau-\tau')\xi}$ .

**Remarque 4.6** La propriété de covariance temporelle de la transformée en ondelettes énoncée en proposition 4.3 se traduit ici par le fait que la transformée en ondelettes d'un processus stationnaire est un champ stochastique bidimensionnel, stationnaire par rapport à sa variable temporelle.

De manière corollaire, la transformée en ondelettes  $\mathcal{W}_\psi[w]$  d'un bruit blanc circulaire de variance  $\sigma_0^2$  est un champ stochastique gaussien bidimensionnel centré et circulaire. Sa première fonction de covariance  $\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi w}$  a pour expression

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi w}(\tau, \tau', s, s') = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}_+} \sqrt{q^{s+s'}} \bar{\hat{\psi}}(\xi q^s) \hat{\psi}(\xi q^{s'}) e^{+2i\pi(\tau-\tau')\xi} d\xi \quad (4.32)$$

**Proposition 4.9 (Loi de  $\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ ,  $\mathcal{D}_\gamma$  l'opérateur de dilatation temporelle défini en section 3.3.2.  $\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]$  la transformée en ondelettes du processus dilaté est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire de covariance

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]}(\tau, \tau', s, s') = \left\langle S_z, \hat{\phi}_{\tau s} \bar{\hat{\phi}}_{\tau' s'} \right\rangle. \quad (4.33)$$

avec  $\hat{\phi}_{\tau s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s}](t) e^{-2i\pi t \xi} dt$

**Preuve** Le processus  $z$  étant circulaire  $\mathbb{E} \{ \langle z, \psi_1 \rangle \langle z, \psi_2 \rangle \} = 0, \forall \psi_1, \psi_2$ . Alors  $\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = 0$  et le processus  $\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]$  est un processus circulaire. Regardons maintenant l'expression de la première fonction de covariance du champ stochastique  $\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]}(\tau, \tau', s, s') &= \mathbb{E} \{ \langle \mathcal{D}_\gamma z, \psi_{\tau s} \rangle \langle \mathcal{D}_\gamma z, \psi_{\tau', s'} \rangle \} \\ &= \mathbb{E} \{ \langle z, \mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s} \rangle \langle z, \mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau', s'} \rangle \}, \\ &= \left\langle S_z, \hat{\phi}_{\tau s} \bar{\hat{\phi}}_{\tau' s'} \right\rangle. \end{aligned}$$

avec  $\hat{\phi}_{\tau s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s}](t) e^{-2i\pi t \xi} dt$



**Proposition 4.10 (Loi de  $\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . L'approximation  $\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]$  de la transformée en ondelettes du processus dilaté est un champ stochastique gaussien bidimensionnel circulaire de covariance

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau', s, s') = \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\gamma(\tau), \gamma(\tau'), s + \log_q(\gamma'(\tau)), s' + \log_q(\gamma'(\tau'))). \quad (4.34)$$

**Preuve** Considérons la première fonction de covariance :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau', s, s') = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau, s) \overline{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau', s')} \right\}.$$

On a déjà vu dans la preuve de la proposition 4.3 que

$$\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau, s) = \mathcal{W}_\psi[z](\gamma(\tau), s + \log_q(\gamma'(\tau))).$$

Donc

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau', s, s') = \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\gamma(\tau), \gamma(\tau'), s + \log_q(\gamma'(\tau)), s' + \log_q(\gamma'(\tau'))).$$

Second opérateur de covariance :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}^2(\tau, \tau', s, s') = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau, s) \mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau', s') \right\}.$$

Comme vu dans la preuve de la proposition 4.3

$$\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](\tau, \nu) = \langle z, T_{\gamma(\tau)} D_{q^s \gamma'(\tau)} \psi \rangle,$$

ainsi

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = \mathbb{E} \left\{ \langle z, T_{\gamma(\tau)} D_{q^s \gamma'(\tau)} \psi \rangle \langle z, T_{\gamma(\tau')} D_{q^{s'} \gamma'(\tau')} \psi \rangle \right\}.$$

Comme  $z$  est un processus circulaire,  $\mathbb{E} \{ \langle z, \psi_1 \rangle \langle z, \psi_2 \rangle \} = 0 \quad \forall \psi_1, \psi_2$  et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]}^2(\tau, \tau', \nu, \nu') = 0.$$

Le processus est  $\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]$  est donc un processus circulaire. ♠

**Remarque 4.7** Comme nous l'avons remarqué dans le cas de l'étude de l'opérateur de modulation (voir remarque 4.5), la propriété de stationnarité de processus  $z$  n'est pas exploitée dans la preuve et la proposition 4.10 reste vraie dans le cas où le processus  $z$  n'est pas stationnaire. Nous verrons dans la section suivante une approche alternative qui nous permettra d'exploiter cette propriété de stationnarité.

## 4.4 Étude des transformées temps-fréquence et temps-échelle à temps fixé

Nous avons déjà vu que les opérateurs tangents aux opérateurs de déformation ont la propriété fondamentale d'être des pseudo filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  (voir propositions 4.2 et 4.4). Nous allons voir que cette propriété est exploitable lorsque l'on ne considère plus les transformées temps-fréquence et temps-échelle dans leur totalité mais qu'on les considère, à  $\tau$  fixé, en ne modélisant pas les corrélations qui interviennent entre différents instants.

### 4.4.1 Spectres locaux associés aux processus déformés

Rappelons d'abord que, comme nous l'avons montré dans la section 2.2.3, quel que soit le processus stationnaire  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , on peut lui associer son spectre généralisé  $S_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  défini par

$$\mathbb{E} \left\{ \langle x, \psi_1 \rangle \overline{\langle x, \psi_2 \rangle} \right\} = \left\langle S_x, \hat{\psi}_1 \bar{\hat{\psi}}_2 \right\rangle,$$

et ce, quelles que soient les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  appartenant à l'espace de Schwartz.

Étant donné un processus stationnaire  $x$ , les processus stochastiques  $\mathcal{M}_\alpha x$  et  $\mathcal{D}_\gamma x$  résultant de la déformation de  $x$  par les opérateurs de modulation fréquentielle et de dilatation temporelle ne sont généralement pas stationnaires et ne possèdent donc pas forcément de spectre généralisé. Dans le cas où l'on mesure ces processus sur des fonctions test bien localisées au voisinage d'un instant  $\tau$  donné, les approximations proposées en section 4.2 ont un sens

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi \rangle &\approx \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \psi \rangle, \\ \langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi \rangle &\approx \langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi \rangle. \end{aligned}$$

En prenant deux fonctions  $\psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  correctement localisées au voisinage d'un même point  $\tau$ , on peut réaliser le même type d'approximation et donner des expressions approchées des covariances associées aux processus déformés,

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi_2 \rangle} \right\} \approx \mathbb{E} \left\{ \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x, \psi_2 \rangle} \right\}, \quad (4.35)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi_2 \rangle} \right\} \approx \mathbb{E} \left\{ \langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau x, \psi_2 \rangle} \right\}. \quad (4.36)$$

Intuitivement, ces approximations, bien que différentes de celles effectuées en sections 4.2.1.1 et 4.2.2.1, auront le même type de comportement et seront d'autant meilleures que les variations des fonctions de déformation seront faibles au voisinage du point  $\tau$ , voisinage lié à la localisation des fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Nous donnerons plus loin des théorèmes d'approximation correspondant à ces approximations mais nous pouvons d'ores et déjà exploiter le fait que  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$  soient des pseudo-filtres de  $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ .

Étant donné un processus  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , gaussien et stationnaire de spectre généralisé  $S_x$ , soient  $\psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  deux fonctions correctement localisées au voisinage de  $\tau$ , on peut réaliser les approximations suivantes,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_\alpha x, \psi_2 \rangle} \right\} &\approx \left\langle T_{\alpha'(\tau)} S_x, \hat{\psi}_1 \bar{\hat{\psi}}_2 \right\rangle, \\ \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi_1 \rangle \overline{\langle \mathcal{D}_\gamma x, \psi_2 \rangle} \right\} &\approx \left\langle \sqrt{\gamma'(\tau)} D_{\gamma'(\tau)} S_x, \hat{\psi}_1 \bar{\hat{\psi}}_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Cela suggère de définir des spectres locaux associés aux processus déformés, ainsi, le spectre local du processus  $\mathcal{M}_\alpha x$  sera approximé en chaque point  $\tau$  par  $T_{\alpha'(\tau)}S_x$  tandis le spectre local du processus  $\mathcal{D}_\gamma x$  sera approximé en chaque point  $\tau$  par  $\sqrt{\gamma'(\tau)}D_{\gamma'(\tau)}S_x$ . Les opérateurs de déformation ont ainsi pour effet de déformer localement le spectre du processus stationnaire. L'opérateur de modulation fréquentielle a pour effet de traduire localement le spectre du processus stationnaire tandis que l'opérateur de dilatation temporelle a pour effet de le dilater localement.

Il est important de noter que les approximations précédentes n'ont de sens que lorsque les fonctions test  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont localisées autour du même point  $\tau$ . Cette condition n'est pas respectée lorsqu'on considère les transformées temps-fréquence et temps-échelle dans leur totalité puisque les fonctions de covariances calculées dans la section précédente font intervenir les corrélations existant entre deux instants distincts  $\tau$  et  $\tau'$ . Dans le but de pouvoir exploiter ces propriétés de déformation locales des spectres, nous allons ainsi choisir d'étudier les transformées temps-fréquence et temps-échelle à  $\tau$  fixé sans considérer les corrélations existant entre les différents instants.

#### 4.4.2 Étude des transformées de Gabor à temps fixé

Par souci de simplifier la lecture des équations de cette section on notera  $V^\tau[x](\nu) = \mathcal{V}_g[x](\tau, \nu)$ , la transformée de Gabor de  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à temps fixé. Dans le cas où  $x$  est un processus stochastique gaussien,  $V^\tau[x]$  est alors un processus stochastique gaussien dont les trajectoires sont presque sûrement dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

L'équation (4.29) associée au modèle de modulation fréquentielle se lira à  $\tau$  fixé,

$$V^\tau[y_m](\nu) = V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z](\nu) + V^\tau[w](\nu), \quad (4.37)$$

et son approximation correspondante s'écrit

$$V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z](\nu) = V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\nu) + \epsilon_m(\tau, \nu).$$

##### 4.4.2.1 Analyse de Gabor des signaux stationnaires à temps fixé

**Proposition 4.11** *Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . A  $\tau$  fixé,  $V^\tau[z]$  définit un processus gaussien circulaire de covariance*

$$\mathcal{C}_{V^\tau[z]}(\nu, \nu') = \langle S_z, \hat{g}_{\tau\nu} \bar{\hat{g}}_{\tau\nu'} \rangle, \quad (4.38)$$

avec,

$$(\hat{g}_{\tau\nu} \bar{\hat{g}}_{\tau\nu'}) (\xi) = \hat{g}(\xi - \nu) \bar{\hat{g}}(\xi - \nu').$$

**Remarque 4.8** *La fonction de covariance précédente est indépendante de l'instant  $\tau$ , ainsi quelque soit  $\tau$  et  $\tau'$ ,  $V^\tau[z]$  et  $V^{\tau'}[z]$  sont des processus identiquement distribués.*

**Cas du bruit blanc.** A  $\tau$  fixé,  $V^\tau[w]$  définit un processus gaussien circulaire et stationnaire de covariances

$$\mathcal{C}_{V^\tau[w]}(\nu, \nu') = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(\xi) \hat{g}(\xi + \nu - \nu') d\xi. \quad (4.39)$$

**Remarque 4.9** Nous avons déjà vu que la stationnarité du processus blanc se traduisait par une stationnarité du processus  $\mathcal{V}_g[w]$  par rapport à sa variable temporelle. On remarque ici que la covariance associée au processus blanc est circulante, l'étude des transformées temps-fréquence à temps fixé nous conduit ainsi à une stationnarité du processus  $\mathcal{V}_g[w]$  rapport à la variable fréquentielle.

#### 4.4.2.2 Translation des fonctions de covariance

De manière analogue à ce que nous avons fait dans le paragraphe 4.1 on peut exploiter les propriétés de covariance de la transformée de Gabor (prop. 4.1 et 4.2), une réécriture de l'équation (4.35) nous permet de remarquer que l'effet de l'opérateur de modulation fréquentielle se traduit simplement par des translations le long de la diagonale de la fonction de covariance associé à la transformée temps-fréquence du processus considéré.

**Proposition 4.12** Étant donné un processus stationnaire et circulaire  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , a  $\tau$  fixé,  $V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  définit un processus stochastique généralisé gaussien circulaire de covariance

$$\mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\nu, \nu') = [\mathcal{T}_{\alpha'(\tau)} \mathcal{C}_{V^\tau[z]}](\nu, \nu'), \quad (4.40)$$

où  $\mathcal{T}_\lambda$  est l'opérateur de translation le long de la diagonale  $\mathcal{T}_\lambda f(t, t') = f(t - \lambda, t' - \lambda)$ .

**Preuve** On a montré en proposition 4.7 que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = e^{2i\pi(\alpha(\tau) - \alpha(\tau'))} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu - \alpha'(\tau), \nu' - \alpha'(\tau')).$$

Pour  $\tau = \tau'$  l'équation précédente se réécrit

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau, \nu, \nu') = \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau, \nu - \alpha'(\tau), \nu' - \alpha'(\tau)).$$

Comme  $\forall \tau, \nu, \nu' \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau, \nu, \nu') = \mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\nu, \nu'), \quad (4.41)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau, \nu, \nu') = \mathcal{C}_{V^\tau[z]}(\nu, \nu'), \quad (4.42)$$

on retrouve bien l'expression désirée pour la première covariance. La preuve de la circularité est immédiate puisque la seconde covariance du champ  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  est nulle, sa restriction pour  $\tau = \tau'$  est nulle elle aussi.



**Remarque 4.10** Le processus  $z$  étant stationnaire, la fonction de covariance  $\mathcal{C}_{V^\tau[z]}$  est indépendante de l'instant  $\tau$ , ainsi, les variations temporelles de la loi du processus  $V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$  sont uniquement liées à l'évolution de la fonction de modulation  $\alpha$  au cours du temps.

### 4.4.2.3 Un théorème d'approximation

Nous avons vu en section 4.2.1.4 qu'en chaque point  $\tau$ , le champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x]$  pouvait être approximé par le champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau x]$  et nous avons proposé des estimations de l'erreur d'approximation. On pourra de la même manière approximer la fonction de covariance  $\mathcal{C}_{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]}$  par la fonction  $\mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}$ . Les propriétés de translation le long des diagonales évoquées au paragraphe précédent resteront alors approximativement vraies dans le cas où l'on considérera la fonction de covariance du champ stochastique  $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x]$  à l'instant  $\tau$  fixé. Le théorème suivant permet alors d'estimer cette erreur d'approximation.

**Théorème 4.7** *Soit  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $|g(t)| \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$  avec  $\lambda > 2$ . Soit  $z$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_z \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\mathcal{C}_{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]}(\nu, \nu') = \mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\nu, \nu') + \mathcal{E}_m(\nu, \nu'). \quad (4.43)$$

Le reste  $\mathcal{E}_m$  vérifie,

$$|\mathcal{E}_m(\nu, \nu')| \leq \sigma_z^2 \pi \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} 4^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} (\|\alpha''\|_\infty)^{1 - \frac{2}{\lambda+1}}, \quad (4.44)$$

où  $\sigma_z^2 = \int_{\mathbb{R}} S_z(\xi) d\xi$ .

#### Preuve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(\nu, \nu') &= \mathcal{C}_{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]}(\nu, \nu') - \mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\nu, \nu'), \\ &= \mathbb{E} \left\{ V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z](\nu) \overline{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z](\nu')} \right\} - \mathbb{E} \left\{ V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\nu) \overline{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\nu')} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle \mathcal{M}_\alpha z, g_{\tau\nu} \rangle \overline{\langle \mathcal{M}_\alpha z, g_{\tau\nu'} \rangle} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z, g_{\tau\nu} \rangle \overline{\langle \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z, g_{\tau\nu'} \rangle} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle z, \mathcal{M}_\alpha^{-1} g_{\tau\nu} \rangle \overline{\langle z, \mathcal{M}_\alpha^{-1} g_{\tau\nu'} \rangle} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \langle z, (\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau)^{-1} g_{\tau\nu} \rangle \overline{\langle z, (\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau)^{-1} g_{\tau\nu'} \rangle} \right\} \end{aligned}$$

Comme le processus  $z$  est stationnaire,

$$\mathcal{E}_m(\nu, \nu') = \langle S_z, h_{\nu, \nu'} \rangle - \langle S_z, \tilde{h}_{\nu, \nu'} \rangle,$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned} h_{\nu, \nu'}(\xi) &= \int_{t, t' \in \mathbb{R}} e^{-\xi(t-t')} e^{-2i\pi(\alpha(t) - \alpha(t'))} \overline{g(t-\tau)} g(t'-\tau) e^{2i\pi\nu(t-\tau)} e^{-2i\pi\nu'(t'-\tau)} dt dt', \\ \tilde{h}_{\nu, \nu'}(\xi) &= \int_{t, t' \in \mathbb{R}} e^{-\xi(t-t')} e^{-2i\pi(\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t'))} \overline{g(t-\tau)} g(t'-\tau) e^{2i\pi\nu(t-\tau)} e^{-2i\pi\nu'(t'-\tau)} dt dt', \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\tau) + \alpha'(\tau)(t - \tau)$ . Regardons maintenant  $f_{\nu, \nu'} = |h_{\nu, \nu'} - \tilde{h}_{\nu, \nu'}|$ ,

$$\begin{aligned} f_{\nu, \nu'}(\xi) &\leq \int_{t, t' \in \mathbb{R}} \left| \left( e^{-2i\pi(\alpha(t) - \alpha(t'))} - e^{-2i\pi(\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t'))} \right) \overline{g(t-\tau)} g(t'-\tau) \right| dt dt', \\ &\leq 2 \int_{t, t' \in \mathbb{R}} \left| \sin[u(t, t', \tau)] \overline{g(t-\tau)} g(t'-\tau) \right| dt dt', \end{aligned}$$

où

$$u(t, t', \tau) = \pi (\alpha(t) - \alpha(t') - \tilde{\alpha}(t) + \tilde{\alpha}(t')).$$

Remarquons qu'il existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tel que,

$$u(t, t', \tau) = \frac{\alpha''(\epsilon)}{2} \pi [(t - \tau)^2 - (t' - \tau)^2],$$

donc,

$$f_{\nu, \nu'}(\xi) \leq 2 \int_{t, t' \in \mathbb{R}} \left| \sin \left[ \frac{\alpha''(\epsilon)}{2} \pi (t^2 - t'^2) \right] \overline{g(t)} g(t') \right| dt dt'.$$

Exprimons maintenant l'intégrale ci dessus en coordonnées polaires,

$$f_{\nu, \nu'}(\xi) \leq 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \left| \sin [\alpha''(\epsilon) \pi r^2 \cos(2\theta)] \overline{g(r \cos(\theta))} g(r \sin(\theta)) \right| r dr d\theta,$$

et regardons l'intégrale  $I(\theta)$  définie par

$$I(\theta) = \int_{r=0}^{+\infty} \left| \sin \left[ \frac{\alpha''(\epsilon)}{2} \pi r^2 \cos(2\theta) \right] \overline{g(r \cos(\theta))} g(r \sin(\theta)) \right| r dr.$$

En utilisant les majorations  $|\sin(t)| < 1$  et  $|\sin(t)| < |t|$  et en séparant l'intégrale sur deux domaines, on peut écrire  $I(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta)$ , où

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= \int_{r=0}^{r_0} \left| \frac{\alpha''(\epsilon)}{2} \pi r^2 \cos(2\theta) \overline{g(r \cos(\theta))} g(r \sin(\theta)) \right| r dr, \\ I_2(\theta) &= \int_{r_0}^{+\infty} \left| \overline{g(r \cos(\theta))} g(r \sin(\theta)) \right| r dr. \end{aligned}$$

On va d'abord majorer  $I_1(\theta)$ , comme  $g(t) \leq 1$ ,

$$I_1(\theta) \leq |\cos(2\theta)| \left| \frac{\alpha''(\epsilon)}{2} \right| \pi \int_{r=0}^{r_0} r^3 dr \leq |\cos(2\theta)| \frac{\|\alpha''\|_{\infty}}{2} \frac{\pi}{4} r_0^4.$$

Majorons maintenant  $I_2(\theta)$  en utilisant la décroissance de la fenêtre  $g$ ,  $g(t) \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$ ,

$$I_2(\theta) \leq \int_{r_0}^{+\infty} [1 + |r \cos(\theta)|^\lambda]^{-1} [1 + |r \sin(\theta)|^\lambda]^{-1} r dr.$$

Comme

$$[1 + |r \cos(\theta)|^\lambda] [1 + |r \sin(\theta)|^\lambda] \geq \left[ 1 + r^\lambda \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^\lambda \right]^2 \geq r^{2\lambda} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2\lambda},$$

$$I_2(\theta) \leq 2^\lambda \int_{r_0}^{+\infty} r^{1-2\lambda} dr \leq 2^\lambda \frac{r_0^{2-2\lambda}}{2\lambda - 2}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} f_{\nu, \nu'}(\xi) &\leq 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} (I_1(\theta) + I_2(\theta)) d\theta, \\ &\leq 2\pi \frac{\|\alpha''\|_\infty}{2} r_0^4 + 4\pi 2^\lambda \frac{r_0^{2-2\lambda}}{2\lambda - 2}. \end{aligned}$$

Le minimum de l'expression précédente étant atteint pour,

$$r_0 = \left( \frac{\|\alpha''\|_\infty}{2^\lambda} \right)^{-\frac{1}{2+2\lambda}},$$

on obtient finalement la majoration suivante,

$$f_{\nu, \nu'}(\xi) \leq 4\pi \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\lambda - 2} \right] 2^{\frac{2\lambda}{\lambda+1}} (\|\alpha''\|_\infty)^{1 - \frac{2}{\lambda+1}}$$

Finalement,

$$|\mathcal{E}_m(\nu, \nu')| \leq \sigma_z^2 \pi \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} 4^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} (\|\alpha''\|_\infty)^{1 - \frac{2}{\lambda+1}}. \quad (4.45)$$

Ce théorème, bien qu'il mesure des erreurs d'approximations de différentes natures que le théorème 4.1, en est assez proche. L'erreur d'approximation est évidemment d'autant plus faible que la fonction test est bien localisée et que la dérivée seconde de la fonction de modulation est petite. Mesurer l'erreur d'approximation comme la différence entre les deux fonctions de covariances est un choix arbitraire et l'on pourrait considérer des divergence différentes.

#### 4.4.2.4 Analyse de Gabor à temps fixé du modèle de modulation fréquentielle

**Proposition 4.13** Soit  $w \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus blanc gaussien circulaire,  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus circulaire stationnaire et soit  $y_m$  le processus défini par

$$y_m = \mathcal{M}_\alpha z + w, \quad (4.46)$$

alors  $V^\tau[y_m]$ , est processus stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathcal{C}_{V^\tau[y_m]}(\nu, \nu') = [\mathcal{T}_{\alpha'(\tau)} (\mathcal{C}_{V^\tau[z]} + \mathcal{C}_{V^\tau[w]})] (\nu, \nu') + \mathcal{E}_m(\nu, \nu'), \quad (4.47)$$

où  $\mathcal{E}_m$  est contrôlé comme dans le théorème 4.7.

**Preuve** Par linéarité,  $V^\tau[y_m] = V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z] + V^\tau[w]$ . Comme  $V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]$  et  $V^\tau[w]$  sont des processus circulaires  $V^\tau[y_m]$  est aussi un processus circulaire. Sa première covariance a pour expression

$$\mathcal{C}_{V^\tau[y_m]} = \mathcal{C}_{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]} + \mathcal{C}_{V^\tau[w]}, \quad (4.48)$$

$$= \mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]} + \mathcal{C}_{V^\tau[w]} + \mathcal{E}_m; \quad (4.49)$$

On a montré dans la proposition 4.12 que

$$\mathcal{C}_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]} = \mathcal{T}_{\alpha'(\tau)} (\mathcal{C}_{V^\tau[z]}). \quad (4.50)$$

On a aussi montré (voir eq. (4.54)) que  $\mathcal{C}_{V^\tau[w]}$  est circulante, donc,

$$\mathcal{C}_{V^\tau[w]} = \mathcal{T}_{\alpha'(\tau)} (\mathcal{C}_{V^\tau[w]}), \quad (4.51)$$

et l'on retrouve bien l'expression désirée. ♠

**Remarque 4.11** *Les processus  $x$  et  $w$  étant stationnaires, les covariances  $\mathcal{C}_{V^\tau[x]}$  et  $\mathcal{C}_{V^\tau[w]}$  sont toutes les deux indépendantes de l'instant  $\tau$ . Dans le cas où  $\mathcal{E}_m$  peut effectivement être négligé, les variations temporelles de la loi de  $V^\tau[y_m]$  dépendent uniquement des variations de la fonction de modulation au cours du temps et s'expriment alors comme des translations le long de la diagonale de  $\mathcal{C}_{V^\tau[y_m]}$*

#### 4.4.3 Étude des transformées en ondelettes à temps fixé

Pour simplifier la lecture des équations suivantes on notera  $W^\tau[x](s) = \mathcal{W}_\psi[x](\tau, s)$ , la transformée en ondelettes de  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à temps fixé. Dans le cas où  $x$  est un processus stochastique gaussien,  $W^\tau[x]$  est alors un processus stochastique gaussien dont les trajectoires sont presque sûrement dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

L'équation (4.30) associée au modèle de dilatation temporelle se lira à  $\tau$  fixé,

$$W^\tau[y_d](s) = W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z](s) + W^\tau[w](s), \quad (4.52)$$

et son approximation correspondante,

$$W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z](s) = W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z](s) + \epsilon_d(\tau, s).$$

##### 4.4.3.1 Analyse en ondelettes des signaux stationnaires à temps fixé

**Proposition 4.14** *Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique gaussien circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . À  $\tau$  fixé,  $W^\tau[z]$  définit un processus gaussien circulaire de covariance*

$$\mathcal{C}_{W^\tau[z]}(s, s') = \langle S_z, \hat{\psi}_{\tau s} \tilde{\psi}_{\tau s'} \rangle, \quad (4.53)$$

avec,

$$(\hat{\psi}_{\tau s} \tilde{\psi}_{\tau s'})(\xi) = \sqrt{q^{s+s'}} \hat{\psi}(\xi q^s) \tilde{\psi}(\xi q^{s'}).$$

**Remarque 4.12** *L'opérateur de covariance précédent est indépendant de l'instant  $\tau$ , ainsi quelque soit  $\tau$  et  $\tau'$ ,  $W^\tau[z]$  et  $W^{\tau'}[z]$  sont des processus identiquement distribués.*

**Cas du bruit blanc.** A  $\tau$  fixé,  $W^\tau[w]$  définit un processus gaussien circulaire et stationnaire de covariance

$$\mathcal{C}_{W^\tau[w]}(s, s') = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}_+} \sqrt{q^{s+s'}} \tilde{\psi}(\xi q^s) \hat{\psi}(\xi q^{s'}) d\xi. \quad (4.54)$$

**Remarque 4.13** *Nous avons déjà vu que la stationnarité du processus blanc se traduisait par une stationnarité du processus  $\mathcal{W}_\psi[w]$  par rapport à sa variable temporelle. On remarque ici que la covariance associée au processus blanc est circulante, ainsi, l'étude des transformées temps-échelle à temps fixé nous conduit à une stationnarité par rapport à la variable d'échelle de  $W^\tau[w]$ . Une normalisation différente des atomes temps-échelle,  $\frac{1}{q^s} \psi\left(\frac{t-\tau}{q^s}\right)$ , par exemple, n'aurait pas permis d'obtenir cette propriété.*

#### 4.4.3.2 Translation des fonctions de covariances

De la même manière que ce que nous avons fait au paragraphe 4.3 on peut exploiter les propriétés de covariance de la transformée en ondelettes (prop. 4.3 et 4.4), une réécriture de l'équation (4.36) nous permet alors de remarquer que l'effet de l'opérateur de dilatation temporelle se traduit par des translations le long de la diagonale de la fonction de covariance associé à la transformée temps-échelle du processus considéré.

**Proposition 4.15** *Étant donné  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus gaussien stationnaire et circulaire, à  $\tau$  fixé,  $W^\tau[\tilde{D}_\gamma^\tau z]$  définit un processus stochastique généralisé gaussien circulaire de covariance*

$$\mathcal{C}_{W^\tau[\tilde{D}_\gamma^\tau z]}(s, s') = [\mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(\tau))}(\mathcal{C}_{W^\tau[z]})](s, s'), \quad (4.55)$$

où  $\mathcal{T}_\lambda$  est l'opérateur de translation le long de la diagonale  $\mathcal{T}_\lambda f(t, t') = f(t - \lambda, t' - \lambda)$ .

**Preuve** On a déjà montré en proposition 4.10 que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\tilde{D}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau', s, s') = \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\gamma(\tau), \gamma(\tau'), s + \log_q(\gamma'(\tau)), s' + \log_q(\gamma'(\tau))). \quad (4.56)$$

Pour  $\tau = \tau'$  l'équation précédente se réécrit

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\tilde{D}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau, s, s') = \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\gamma(\tau), \gamma(\tau), s + \log_q(\gamma'(\tau)), s' + \log_q(\gamma'(\tau))). \quad (4.57)$$

On a vu dans la proposition 4.8 que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[z]}(\tau, \tau', s, s') = \langle S_z, \hat{\psi}_{\tau s} \tilde{\psi}_{\tau' s'} \rangle, \quad (4.58)$$

avec  $(\hat{\psi}_{\tau s} \tilde{\psi}_{\tau' s'})(\xi) = \sqrt{q^{s+s'}} \hat{\psi}(\xi q^s) \tilde{\psi}(\xi q^{s'}) e^{-2i\pi(\tau-\tau')\xi}$ , qui est indépendant de  $\tau$  quand  $\tau = \tau'$  donc,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\gamma(\tau), \gamma(\tau), s, s') = \mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\tau, \tau, s, s'). \quad (4.59)$$

Comme  $\forall \tau, s, s'$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi[\tilde{D}_\gamma^\tau z]}(\tau, \tau, s, s') = \mathcal{C}_{W^\tau[\tilde{D}_\gamma^\tau z]}(s, s') \quad (4.60)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}_\psi z}(\tau, \tau, s, s') = \mathcal{C}_{W^\tau[z]}(s, s') \quad (4.61)$$

on retrouve bien l'expression désirée pour la première covariance. La preuve de la circularité est immédiate puisque la seconde covariance du champ  $\mathcal{W}_\psi[\tilde{D}_\gamma^\tau z]$  est nulle, sa restriction pour  $\tau = \tau'$  est nulle elle aussi.  $\spadesuit$

**Remarque 4.14** *Le processus  $z$  étant stationnaire,  $C_{W^\tau[z]}$  est indépendante de l'instant  $\tau$ , et les variations temporelles de la distribution associée au processus  $W^\tau[\tilde{D}_\gamma^\tau z]$  sont uniquement liées à l'évolution de la fonction de dilatation  $\gamma$  au cours du temps.*

### 4.4.3.3 Un théorème d'approximation

Les propriétés de translation le long des diagonales des fonctions de covariance resteront approximativement vraies dans le cas où l'on considérera la fonction de covariance du champs stochastique  $W_g[\mathcal{D}_\gamma x]$  à l'instant  $\tau$  fixé. Le théorème suivant permet d'estimer l'erreur de l'approximation de la fonction de covariance  $C_{W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]}$  par la fonction de covariance  $C_{W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma z]}$ .

**Théorème 4.8** *Soit  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction test satisfaisant  $\psi \leq (1 + |t|^\lambda)^{-1}$  avec  $\lambda > 2$ . Soit  $z$  un processus stochastique gaussien stationnaire, de spectre généralisé  $S_z \in L^1(\mathbb{R})$  tel que*

$$\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} S_z(\xi) |\xi|^{1-\frac{2}{\lambda+1}} d\xi < +\infty,$$

alors

$$C_{W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]}(s, s') = C_{W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma z]}(s, s') + \mathcal{E}_d(s, s')$$

où le reste  $\mathcal{E}_d$  vérifie,

$$|\mathcal{E}_d(s, s')| \leq q^{(s+s')} \|\gamma''\|^\infty \left( \sigma_z^2 K_1 + \rho(\lambda) K_2 (\|\gamma''\|^\infty)^{-\frac{2}{\lambda+1}} \left( q^{(s+s')} \right)^{\frac{3}{2} - \frac{4}{\lambda+1}} \right),$$

$K_1$  et  $K_2$  étant deux constantes dépendantes de  $\lambda$  et  $\sigma_z^2 = \int_{\mathbb{R}} S_z(\xi) d\xi$ .

**Preuve** La preuve a la même structure que la preuve du théorème 4.7,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d(s, s') &= C_{W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]}(s, s') - C_{V^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma z]}(s, s'), \\ &= \mathbb{E} \left\{ W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z](s) \overline{W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z](s')} \right\} - \mathbb{E} \left\{ W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma z](s) \overline{W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma z](s')} \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \langle z, \mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s} \rangle \overline{\langle z, \mathcal{D}_\gamma^{-1} \psi_{\tau s'} \rangle} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \langle z, (\tilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau)^{-1} \psi_{\tau s} \rangle \overline{\langle z, (\tilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau)^{-1} \psi_{\tau s'} \rangle} \right\} \end{aligned}$$

Comme le processus  $z$  est stationnaire,

$$\mathcal{E}_d(s, s') = \langle S_z, h_{s, s'} \rangle - \langle S_z, \tilde{h}_{s, s'} \rangle, \quad (4.62)$$

où les fonctions  $h_{s, s'}$  et  $\tilde{h}_{s, s'}$  sont définies par

$$\begin{aligned} h_{s, s'}(\xi) &= \int_{t, t' \in \mathbb{R}} e^{-\xi(\gamma(t) - \gamma(t'))} \sqrt{\gamma'(t)} \sqrt{\gamma'(t')} \psi_{\tau, s'}(t) \overline{\psi_{\tau, s}(t')} dt dt', \\ \tilde{h}_{s, s'}(\xi) &= \int_{t, t' \in \mathbb{R}} e^{-\xi(\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t'))} \gamma'(\tau) \psi_{\tau, s'}(t) \overline{\psi_{\tau, s}(t')} dt dt', \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\tau) + \gamma'(\tau)(t - \tau)$ . Nous allons majorer  $f_{\nu, \nu'} = |h_{\nu, \nu'} - \tilde{h}_{\nu, \nu'}|$ ,

$$\begin{aligned} f_{s, s'}(\xi) &\leq \int_{t, t' \in \mathbb{R}} \left| \left( \sqrt{\gamma'(t)} \sqrt{\gamma'(t')} e^{-2i\pi\xi(\gamma(t) - \gamma(t'))} - \gamma'(\tau) e^{-2i\pi\xi(\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t'))} \right) \psi_{\tau, s'}(t) \overline{\psi_{\tau, s}(t')} \right| dt dt', \\ &\leq f_{s, s'}^1(\xi) + f_{s, s'}^2(\xi), \end{aligned}$$

où les fonctions  $f_{s, s'}^1$  et  $f_{s, s'}^2$  sont définies par,

$$\begin{aligned}
 f_{s,s'}^1(\xi) &= \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \left| \left( \sqrt{\gamma'(t)} \sqrt{\gamma'(t')} - \gamma'(\tau) \right) \psi_{\tau,s'}(t') \overline{\psi_{\tau,s}(t)} \right| dt dt', \\
 f_{s,s'}^2(\xi) &= \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \gamma'(\tau) \left| \left( e^{-2i\pi\xi(\gamma(t)-\gamma(t'))} - e^{-2i\pi\xi(\tilde{\gamma}(t)-\tilde{\gamma}(t'))} \right) \psi_{\tau,s'}(t') \overline{\psi_{\tau,s}(t)} \right| dt dt'.
 \end{aligned}$$

Majorons d'abord  $f_{s,s'}^1$  et remarquons que pour tout  $t, t' \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \left| \sqrt{\gamma'(t)} \sqrt{\gamma'(t')} - \gamma'(\tau) \right| &= \left| \sqrt{\gamma'(\tau)} \left[ \sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right] + \sqrt{\gamma'(t)} \left[ \sqrt{\gamma'(t')} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right] \right|, \\
 &\leq \left| \sqrt{\gamma'(\tau)} \left[ \sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right] \right| + \left| \sqrt{\gamma'(t)} \left[ \sqrt{\gamma'(t')} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right] \right|.
 \end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor de  $\sqrt{\gamma'}$  autour du point  $\tau$  et en supposant que  $0 < c_\gamma \leq \gamma'(t) \leq C_\gamma < +\infty$ ,

$$\left| \sqrt{\gamma'(t)} \sqrt{\gamma'(t')} - \gamma'(\tau) \right| \leq \sqrt{C_\gamma} \left\| \frac{\gamma''}{2\sqrt{\gamma'}} \right\|_\infty (|t - \tau| + |t' - \tau|) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\gamma}{c_\gamma}} \|\gamma''\|_\infty (|t - \tau| + |t' - \tau|).$$

On obtient alors la majoration suivante pour  $f_{s,s'}^1$ ,

$$\begin{aligned}
 f_{s,s'}^1(\xi) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\gamma}{2c_\gamma}} \|\gamma''\|_\infty \frac{1}{\sqrt{q^{s+s'}}} \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \left( |t| + |t'| \right) \left| \psi(t'q^{-s'}) \overline{\psi(tq^{-s})} \right| dt dt', \\
 &\leq \frac{1}{2} \sqrt{q^{(s+s')}} \sqrt{\frac{C_\gamma}{2c_\gamma}} \|\gamma''\|_\infty \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \left( |tq^s| + |t'q^{s'}| \right) \left| \psi(t') \overline{\psi(t)} \right| dt dt', \\
 &\leq \frac{1}{2} \sqrt{q^{(s+s')}} (q^s + q^{s'}) \sqrt{\frac{C_\gamma}{2c_\gamma}} \|\gamma''\|_\infty \mu_\psi v_\psi, \\
 &\leq q^{(s+s')} \text{ch}(s - s') \sqrt{\frac{C_\gamma}{2c_\gamma}} \|\gamma''\|_\infty \mu_\psi v_\psi.
 \end{aligned}$$

où l'on posé  $\mu_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt$  et  $v_\psi = \int_{\mathbb{R}} |t\psi(t)| dt$ .

Majorons maintenant  $f_{s,s'}^2$ ,

$$f_{s,s'}^2(\xi) = \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \gamma'(\tau) \left| \left( e^{-2i\pi\xi(\gamma(t)-\gamma(t'))} - e^{-2i\pi\xi(\tilde{\gamma}(t)-\tilde{\gamma}(t'))} \right) \psi_{\tau,s'}(t') \overline{\psi_{\tau,s}(t)} \right| dt dt'.$$

Comme il existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) + \frac{\gamma''(\epsilon)}{2}(t - \tau)^2$ ,

$$\begin{aligned}
 f_{s,s'}^2(\xi) &\leq 2 \frac{\gamma'(\tau)}{\sqrt{q^{s+s'}}} \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \left| \sin \left[ \xi \frac{\gamma''(\epsilon)}{2} \pi (t^2 - t'^2) \right] \psi \left( \frac{t}{q^s} \right) \overline{\psi \left( \frac{t'}{q^{s'}} \right)} \right| dt dt', \\
 &\leq 2 \frac{\gamma'(\tau)}{q^{\frac{3}{2}(s+s')}} \int_{t,t' \in \mathbb{R}} \left| \sin \left[ \xi \frac{\gamma''(\epsilon)}{2} \pi \left( \frac{u^2}{q^{s'}} - \frac{u'^2}{q^s} \right) \right] \psi \left( \frac{u}{q^{s+s'}} \right) \overline{\psi \left( \frac{u'}{q^{s+s'}} \right)} \right| du du'.
 \end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} f_{s,s'}^2(\xi) &\leq 2 \frac{\gamma'(\tau)}{q^{\frac{3}{2}(s+s')}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \left| \sin \left[ \xi \frac{\gamma''(\epsilon)}{2} \pi r^2 \left( \frac{\sin^2(\theta)}{q^{s'}} - \frac{\cos^2(\theta)}{q^s} \right) \right] \psi \left( \frac{r \sin(\theta)}{q^{s+s'}} \right) \overline{\psi \left( \frac{r \cos(\theta)}{q^{s+s'}} \right)} \right| r dr d\theta, \\ &\leq 2 \frac{\gamma'(\tau)}{q^{\frac{3}{2}(s+s')}} \int_{\theta=0}^{2\pi} [I_1(\theta) + I_2(\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ici  $I_1$  et  $I_2$  sont définis par,

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= \int_{r=0}^{r_0} \left| \xi \frac{\gamma''(\epsilon)}{2} \pi r^2 \left( \frac{\sin^2(\theta)}{q^{s'}} - \frac{\cos^2(\theta)}{q^s} \right) \psi \left( \frac{r \sin(\theta)}{q^{s+s'}} \right) \overline{\psi \left( \frac{r \cos(\theta)}{q^{s+s'}} \right)} \right| r dr d\theta, \\ I_2(\theta) &= \int_{r=0}^{r_0} \left| \psi \left( \frac{r \sin(\theta)}{q^{s+s'}} \right) \overline{\psi \left( \frac{r \cos(\theta)}{q^{s+s'}} \right)} \right| r dr d\theta, \end{aligned}$$

Nous avons séparé l'intégrale en deux intervalles et nous avons utilisé les majorations  $|\sin(u)| \leq 1$  et  $|\sin(u)| \leq |u|$ .

Nous allons majorer  $I_1$  en remarquant que  $|\psi(t)| \leq 1$ ,

$$I_1(\theta) \leq \left| \xi \frac{\gamma''(\epsilon)}{2} \frac{\pi}{4} r_0^4 \left( \frac{\sin^2(\theta)}{q^{s'}} - \frac{\cos^2(\theta)}{q^s} \right) \right| \leq \xi \frac{\|\gamma''\|_{\infty}}{2} \frac{\pi}{4} r_0^4. \quad (4.64)$$

On majore maintenant  $I_2$  utilisant la décroissance de la fenêtre  $\psi$ ,

$$I_2(\theta) \leq \int_{r=0}^{r_0} \frac{1}{1 + |rq^{-(s+s')} \sin(\theta)|^\lambda} \frac{1}{1 + |rq^{-(s+s')} \cos(\theta)|^\lambda} r dr.$$

Comme

$$(1 + |rq^{(s+s')} \sin(\theta)|^\lambda) (1 + |rq^{-(s+s')} \cos(\theta)|^\lambda) \geq \left( rq^{-(s+s')} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2\lambda}$$

On obtient la majoration suivante pour  $I_2$ ,

$$I_2(\theta) \leq 2^\lambda q^{2(s+s')\lambda} \int_{r=0}^{r_0} r^{1-2\lambda} dr \leq q^{2(s+s')\lambda} \frac{2^\lambda}{2\lambda - 2} r_0^{2-2\lambda}. \quad (4.65)$$

En réunissant les équations (4.63), (4.64) et (4.65),

$$f_{s,s'}^2(\xi) \leq 2\pi \frac{\gamma'(\tau)}{q^{\frac{3}{2}(s+s')}} \left[ \xi \pi \frac{\|\gamma''\|_{\infty}}{4} r_0^4 + r_0^{2-2\lambda} \frac{2^{\lambda+1}}{2\lambda - 2} q^{2(s+s')\lambda} \right].$$

Le minimum de l'expression précédente étant atteint pour,

$$r_0 = \left( \xi \pi q^{-2\lambda(s+s')} \frac{\|\gamma''\|_{\infty}}{2^{\lambda+1}} \right)^{-\frac{1}{2+2\lambda}},$$

on peut finalement majorer  $f_{s,s'}^2$ ,

$$\begin{aligned} f_{s,s'}^2(\xi) &\leq 2\pi \frac{\gamma'(\tau)}{q^{\frac{3}{2}(s+s')}} (|\xi|\pi\|\gamma''\|_\infty)^{1-\frac{2}{\lambda+1}} \left(2^{\lambda+1}q^{2\lambda(s+s')}\right)^{\frac{2}{\lambda+1}}, \\ &\leq 8\pi\gamma'(\tau) (|\xi|\pi\|\gamma''\|_\infty)^{1-\frac{2}{\lambda+1}} \left(q^{(s+s')}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{4}{\lambda+1}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_d(s, s')| &\leq \int_{\mathbb{R}} S_z(\xi) [f_{s,s'}^1(\xi) + f_{s,s'}^2(|\xi|)] d\xi, \\ &\leq \sigma_z^2 q^{(s+s')} \text{ch}(s-s') \sqrt{\frac{C_\gamma}{2c_\gamma} \|\gamma''\|_\infty \mu_\psi v_\psi} + 8\pi\rho(\lambda) C_\gamma (\pi\|\gamma''\|_\infty)^{1-\frac{2}{\lambda+1}} \left(q^{(s+s')}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{4}{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

où  $\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} S(\xi) |\xi|^{1-\frac{2}{\lambda+1}} d\xi$ .

♠

De manière analogue au théorème 4.4, l'erreur d'approximation est d'autant plus faible que la fonction test est bien localisée et que la dérivée seconde de la fonction de modulation est petite, cette erreur tend vers 0 lorsque  $s \rightarrow -\infty$ .

#### 4.4.3.4 Analyse en ondelettes à temps fixé du modèle de dilatation temporelle

**Proposition 4.16** *Étant donné  $w \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus blanc gaussien circulaire,  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stationnaire et le processus  $y_d \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  défini par*

$$y_d = \mathcal{D}_\gamma z + w,$$

alors  $W^\tau[y_d]$  est un processus stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathcal{C}_{W^\tau[y_d]}(s, s') = \left[ \mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(\tau))} \left( \mathcal{C}_{W^\tau[z]} + \mathcal{C}_{W^\tau[w]} \right) \right] (s, s') + \mathcal{E}_d(s, s') \quad (4.67)$$

où  $\mathcal{E}_d$  est contrôlé comme dans le théorème 4.8.

**Preuve** Par linéarité,  $W^\tau[y_d] = W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z] + W^\tau[w]$ . Comme  $W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]$  et  $W^\tau[w]$  sont des processus circulaires  $W^\tau[y_d]$  est aussi un processus circulaire. Sa première covariance a pour expression

$$\mathcal{C}_{W^\tau[y_d]} = \mathcal{C}_{W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]} + \mathcal{C}_{W^\tau[w]}, \quad (4.68)$$

$$= \mathcal{C}_{W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]} + \mathcal{C}_{W^\tau[w]} + \mathcal{E}_d; \quad (4.69)$$

On a montré dans la proposition 4.15 que

$$\mathcal{C}_{W^\tau[\tilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]} = \mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(\tau))} \left( \mathcal{C}_{W^\tau[z]} \right). \quad (4.70)$$

On a aussi montré (voir eq. (4.54)) que  $\mathcal{C}_{W^\tau[w]}$  est circulante, donc,

$$\mathcal{C}_{W^\tau[w]} = \mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(\tau))} \left( \mathcal{C}_{W^\tau[w]} \right), \quad (4.71)$$

et l'on retrouve bien l'expression désirée.

♠

**Remarque 4.15** *Les processus  $x$  et  $w$  étant stationnaires, les covariances  $\mathcal{C}_{W^\tau[x]}$  et  $\mathcal{C}_{W^\tau[w]}$  sont toutes les deux indépendantes de l'instant  $\tau$ . Dans le cas où  $\mathcal{E}_d$  peut effectivement être négligé, la variation temporelle de la loi de  $W^\tau[y_d]$  dépendent uniquement des variations de la fonction de dilatation au cours du temps et s'expriment alors comme des translations le long de la diagonale de  $\mathcal{C}_{W^\tau[y_d]}$*

## 4.5 Du continu au discret

Nous avons fait le choix de modéliser les signaux audio comme des processus stochastiques à temps continu et nous avons de même utilisé la transformée de Gabor et la transformée en ondelettes continues, transformations adaptées à l'étude des migrations dans les plans temps-fréquence et temps-échelle. Le but de ce manuscrit étant de donner des méthodes d'estimations des opérateurs de déformation, méthodes ayant pour finalité d'être implémentables numériquement, il est peut être évident mais néanmoins nécessaire de rappeler que nos ordinateurs ne travaillent encore qu'avec des signaux discrets, de taille finie, et que nous sommes alors très loin des modèles de fonctions généralisées. Les méthodes d'estimation proposées dans ce manuscrit s'appuieront sur les transformées temps-fréquence et temps-échelle des signaux audio, pratiquement, les transformées utilisées sont alors la transformée de Gabor discrète et la transformée en ondelette discrète que nous présenterons ici. Dans un souci de prise en compte des problématiques liées à l'utilisation de ces transformations discrètes, nous construirons des estimateurs reposant sur des objets ayant la même structure que les transformées temps-fréquence et temps-échelle discrètes, à savoir, des matrices de dimensions finies. Il sera alors nécessaire de discrétiser la transformée de Gabor et la transformée en ondelettes continue. Nous renvoyons à [Carmona et al., 1998] pour une étude détaillée des transformées temps-fréquence et temps-échelle discrètes.

### 4.5.1 Analyse de Gabor dans $\mathbb{C}^L$

Disposant d'une fenêtre d'analyse  $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^L$  aux conditions aux bords périodiques, on peut construire une famille d'atomes de Gabor  $(\mathbf{g}_{an,bm})_{nm} \in \mathbb{C}^L$  obtenues par modulations et translations discrètes de  $\mathbf{g}$ ,  $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $\forall m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{g}_{an,bm}[t] = T_{an}M_{\frac{m}{M}}\mathbf{g}[t] = \mathbf{g}[t - na]e^{2i\pi(t-na)\frac{m}{M}} \quad (4.72)$$

où  $a \in \mathbb{Z}_+^*$  vérifie  $a = L/N$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$  vérifie  $b = L/M$ .

Les atomes ainsi obtenus sont alors des vecteurs de  $\mathbb{C}^L$  aux conditions aux bords périodiques.

Étant donné un processus stochastique  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^L$  aux conditions aux bords périodiques, sa transformée de Gabor discrète est définie pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et pour tout  $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  par

$$\mathcal{V}_{\mathbf{g}}\mathbf{x}[n, m] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{g}_{an,bm} \rangle = \sum_{t=0}^{L-1} \mathbf{x}[t]\bar{g}[t - an]e^{-2i\pi(t-na)\frac{m}{M}}. \quad (4.73)$$

$\mathcal{V}_{\mathbf{g}}\mathbf{x}$  est alors une matrice stochastique de  $\mathbb{C}^{N \times M}$  aux conditions aux bords périodiques.

### 4.5.2 Analyse en ondelettes dans $\mathbb{C}^L$

Les familles d'ondelettes discrètes ne peuvent se construire de la même manière que les familles d'atomes de Gabor discrets, en effet, disposant d'une ondelette  $\psi \in \mathbb{C}^L$  aux conditions aux bords périodiques, il nous est généralement impossible, de donner un sens à  $\psi[\frac{t}{q^m}] \forall m \in \mathbb{Z}$  puisque  $\frac{t}{q^m}$  n'est pas forcément un nombre entier. De la même manière  $\psi[(t-n)q^{-m}]$  ne sera périodique de période  $L$  que si  $\frac{1}{q}$  est un nombre entier. Une solution consiste donc à considérer une valeur de  $\frac{1}{q}$  entière, dans le cas où  $\frac{1}{q} = 2$  par exemple on obtient la transformée en ondelettes

dyadique (voir [Mallat, 2000]). Une seconde solution est de construire les atomes temps-échelle non plus à partir d'un vecteur  $\boldsymbol{\psi}$ , mais à partir d'une fonction d'une variable continue  $\psi$  dont l'on connaît l'expression analytique, on pourra alors facilement calculer analytiquement ses dilatées puis les discrétiser.

Étant donnée une fonction d'une variable continue  $\psi$  dont l'on connaît l'expression analytique, on peut construire une famille d'ondelettes  $(\boldsymbol{\psi}^m)_m$  de  $\mathbb{C}^L$  obtenues par dilatation et discrétisation de  $\psi$ ,

$$\forall t \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \forall m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket, \quad \boldsymbol{\psi}^m[t] = \frac{1}{\sqrt{q^m}} \psi\left(\frac{t}{q^m}\right).$$

où  $q \in \mathbb{R}_+^*$ .

Ces vecteurs ne possédant pas de propriété de périodicité on considérera  $\boldsymbol{\psi}_p^m[t]$  le périodisé de  $\boldsymbol{\psi}^m[t]$  par rapport à sa variable temporelle,

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \boldsymbol{\psi}_p^m[t] = \boldsymbol{\psi}^m[t \pmod{L}].$$

On pourra finalement définir la famille d'ondelettes  $\boldsymbol{\psi}_{an,m}$  obtenues par translations discrètes de  $\boldsymbol{\psi}_p^m$ ,  $\forall N \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\boldsymbol{\psi}_{an,m}[t] = \boldsymbol{\psi}_p^m[t - an], \quad (4.74)$$

où  $a \in \mathbb{Z}_+^*$  vérifie  $a = L/N$ .

La transformée en ondelettes discrète  $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{x}$  du processus stochastique  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^L$  aux conditions aux bords périodiques est alors définie pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et pour tout  $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  par

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{x}[n, m] = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}_{an,m} \rangle = \frac{1}{\sqrt{q^m}} \sum_{t=0}^{L-1} \boldsymbol{x}[t] \bar{\psi}\left(\frac{t - na \pmod{L}}{q^m}\right). \quad (4.75)$$

$\mathcal{W}_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{x}$  est alors une matrice stochastique de  $\mathbb{C}^{N \times M}$  périodique de période  $N$  par rapport sa première variable.

**Remarque 4.16** *On pourrait discrétiser  $\psi$  après l'avoir translatée puis dilatée mais on perdrait alors à la périodisation de la transformée en ondelettes par rapport à la variable  $n$ .*

### 4.5.3 Mesures discrètes dans le plans temps-fréquence

Dans le but de travailler avec des objets ayant les mêmes structures que la transformée de Gabor discrète, on supposera avoir accès à un ensemble fini de mesures discrètes dans le plan temps-fréquence associé à la transformée de Gabor continue présentée en 4.1.1. Étant donné  $\mathcal{V}_g x$ , la transformée de Gabor continue d'un processus  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  et étant donné deux constantes  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$ , on considérera alors l'ensemble des mesures,

$$\mathcal{V}_g x(an, bk + c),$$

définie pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$  et  $c \in [0, b]$ .

Ce qui est équivalent à mesurer le processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  sur la famille d'atomes temps-fréquences suivante

$$g_{an, bk+c}(t) = g(t - na) e^{2i\pi(t-na)\frac{kb+c}{L}}.$$

### 4.5.3.1 Lois des mesures à temps fixé

De la même manière que nous l'avons fait dans section 4.4, nous considérons ici la transformée de Gabor discrétisée, à temps fixé, sans prendre en compte les corrélations existantes entre les différents instants. On notera alors  $\mathbf{V}_x^{(n,c)}$  la discrétisation de la transformée de Gabor à  $n$  fixé définie  $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$  par

$$\mathbf{V}_x^{(n,c)}[k] = \mathcal{V}_g x(an, bk + c).$$

On imposera de plus des conditions périodiques aux bords du vecteur  $\mathbf{V}_x^{(n,c)}$ , c'est à dire que,  $\forall k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{V}_x^{(n,c)}[k + K] := \mathbf{V}_x^{(n,c)}[k]. \quad (4.76)$$

La discrétisation de l'équation (4.37) se lira alors, à  $n$  fixé,

$$\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)} = \mathbf{V}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)} + \mathbf{V}_w^{(n,c)}. \quad (4.77)$$

et l'approximation correspondante

$$\mathbf{V}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)} = \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)} + \mathbf{e}_m.$$

Pour simplifier la lecture des équations suivantes nous avons adopté les notations

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}[k] = V^{an}[\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}^{an} z](bk + c) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_m[k] = \epsilon_m(an, bk + c).$$

Les objets considérés sont alors des vecteurs stochastiques de  $\mathbb{C}^K$  et nous allons donner les lois de probabilités qui leur sont associées.

**Proposition 4.17 (loi de  $\mathbf{V}_z^{(n,c)}$ )** Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . A  $n$  fixé,  $\mathbf{V}_z^{(n,c)} \in \mathbb{C}^K$  définit un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}}[k, k'] = \langle S_z, h_{kk'} \rangle, \quad (4.78)$$

où  $h_{kk'}(\xi) = \hat{g}(\xi - bk - c)\bar{\hat{g}}(\xi - bk' - c)$ .

**Remarque 4.17** La matrice de covariance précédente est indépendante de l'instant  $n$ , les vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_z^{(n,c)}$  et  $\mathbf{V}_z^{(n',c)}$  sont donc identiquement distribués quel que  $n, n' \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

**Cas du bruit blanc.** A  $n$  fixé,  $\mathbf{V}_w^{(n,c)}$  définit un vecteur gaussien circulaire et stationnaire dont la matrice de covariance

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}[k, k'] = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(\xi)\hat{g}(\xi + bk - bk')d\xi, \quad (4.79)$$

est indépendante du paramètre  $c$ .

**Proposition 4.18 (loi de  $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}$ )** Étant donné  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire, à  $n$  fixé,  $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)} \in \mathbb{C}^K$ , la transformée de Gabor discrétisée du processus  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}^{an} z$  est un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathbf{C}_{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}}[k, k'] = [\mathcal{T}_{\alpha'}(an) (C_{V^{an}[z]})](bk + c, bk' + c). \quad (4.80)$$

**Preuve** La preuve est immédiate en discrétisant les variables  $\tau$  et  $\nu$  dans l'équation (4.40) de la proposition 4.12. ♠

**Remarque 4.18** On donne ici l'expression de la covariance du vecteur stochastique  $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_\alpha z}^{(n,c)}$  en fonction de la covariance du processus stochastique  $V^{an}[z]$ . On ne peut pas, dans le cas général, donner son expression en fonction de la covariance translaté du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_z^{(n,c)}$  puisque

$$\mathcal{T}_a \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}} \right)$$

n'est définie que lorsque  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 4.19 (loi de  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ )** Étant donné  $w \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus blanc gaussien circulaire,  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus gaussien circulaire et stationnaire, étant donné  $y_m$  le processus défini par

$$y_m = \mathcal{M}_\alpha z + w,$$

alors  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)} \in \mathbb{C}^K$ , est un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}[k, k'] = \left[ \mathcal{T}_{\alpha'(an)} \left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]} \right) \right] (bk + c, bk' + c) + \mathcal{E}_m(kb + c, k'b + c) \quad (4.81)$$

**Preuve** La preuve est immédiate en discrétisant les variables  $\tau$  et  $\nu$  dans l'équation (4.47) de la proposition 4.13. ♠

**Remarque 4.19** Dans le cas où  $\alpha'(an) = 0$ , la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$  s'exprime simplement en fonction des matrices de covariance des vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_z^{(n,c)}$  et  $\mathbf{V}_w^{(n,c)}$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}[k, k'] = \mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}}[k, k'] + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}[k, k'] + \mathcal{E}_m(bk + c, bk' + c). \quad (4.82)$$

**Preuve** Il suffit de remarquer que  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]} \right) (bk + c, bk' + c) = \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \right) [k, k']. \quad (4.83)$$

♠

#### 4.5.4 Mesures discrètes dans le plan temps-échelle

Dans le but de travailler avec des objets ayant les mêmes structures que la transformée en ondelettes discrète, on supposera avoir accès à un ensemble fini de mesures discrètes dans le plan temps-échelle associé à la transformée en ondelettes continue présentée en 4.1.2. Étant donnée  $\mathcal{W}_\psi x$ , la transformée en ondelettes continue d'un processus  $x \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  et étant donné une constante  $a \in \mathbb{R}_+^*$  on considérera alors l'ensemble des mesures,

$$\mathcal{W}_\psi x(an, bk + c),$$

définie pour  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$  et  $c \in [0, b[$ , ce qui est équivalent à mesurer le processus stochastique  $x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sur la famille d'atomes temps-échelle suivante

$$\psi_{an, bk+c}(t) = \frac{1}{\sqrt{q^{bk+c}}} \psi \left( \frac{t - na}{q^{bk+c}} \right).$$

#### 4.5.4.1 Lois des mesures à temps fixé

De la même manière que nous l'avons fait dans section 4.4, on considérera la transformée en ondelettes discrétisée à temps fixé, sans prendre en compte les corrélations existantes entre les différents instants. On notera  $\mathbf{W}_x^{(n,c)}$  la discrétisation de la transformée en ondelettes continue à l'instant  $n$  fixé définie  $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$  par

$$\mathbf{W}_x^{(n,c)}[k] = \mathcal{W}_{\psi} x(an, bk + c).$$

On imposera de plus des conditions périodiques aux bords du vecteur  $\mathbf{W}_x^{(n,c)}$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{W}_x^{(n,c)}[k + K] := \mathbf{W}_x^{(n,c)}[k].$$

La discrétisation de l'équation (4.52) se lira, à  $n$  fixé,

$$\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)} = \mathbf{W}_{\mathcal{D}_{\gamma}z}^{(n,c)} + \mathbf{V}_w^{(n,c)},$$

et son approximation correspondante

$$\mathbf{W}_{\mathcal{D}_{\gamma}z}^{(n,c)} = \widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma}z}^{(n,c)} + \mathbf{e}_d,$$

où nous avons adopté les notations

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma}z}^{(n,c)}[k] = W^{an}[\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma}^{an}z](bk + c) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_d[k] = \epsilon_d(an, bk + c).$$

Les objets considérés sont alors des vecteurs stochastiques de  $\mathbb{C}^K$ , nous allons donner ici leurs lois de probabilités.

**Proposition 4.20 (loi de  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$ )** *Soit  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire de spectre généralisé  $S_z$ . A  $n$  fixé,  $\mathbf{W}_z^n \in \mathbb{C}^K$  définit un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance*

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}}[k, k'] = \langle S_z, \phi_{kk'} \rangle. \quad (4.84)$$

où  $\phi_{kk'}(\xi) = \sqrt{q^{b(k+k')+2c}} \hat{\psi}(\xi q^{bk+c}) \bar{\hat{\psi}}(\xi q^{bk'+c})$ .

**Remarque 4.20** *La matrice de covariance précédente est indépendante de l'instant  $n$ , les vecteurs stochastiques  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_z^{(n',c)}$  sont donc identiquement distribués quelque soit  $n, n' \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .*

**Cas du bruit blanc.** A  $n$  fixé,  $\mathbf{W}_w^{(n,c)}$  définit un vecteur gaussien circulaire et stationnaire dont la matrice de covariance

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}[k, k'] = \sigma_0^2 \sqrt{q^{b(k+k')}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{\psi}}(\xi q^{bk}) \hat{\psi}(\xi q^{bk'}) d\xi, \quad (4.85)$$

est indépendante du paramètre  $c$ .

**Proposition 4.21 (loi de  $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)}$ )** *Étant donné  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus stochastique, gaussien, circulaire et stationnaire, à  $n$  fixé,  $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)} \in \mathbb{C}^K$ , la transformée en ondelettes discrétisée du processus  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma}^{an} z$  est un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance*

$$\mathbf{C}_{\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)}}[k, k'] = \left[ \mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(an))} (C_{W^{an}[z]}) \right] (bk + c, bk' + c).$$

**Preuve** La preuve est immédiate en discrétisant la variable  $\tau$  dans l'équation (4.55) de la proposition 4.15. ♠

**Remarque 4.21** *Comme nous l'avons fait dans le cas de l'étude de l'opérateur de modulation fréquentielle, on donne ici l'expression de la covariance du vecteur stochastique  $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)}$  en fonction de la covariance du processus stochastique  $W^{an}[z]$ . On ne peut pas, dans le cas général, donner son expression en fonction de la covariance translaté du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$  puisque*

$$\mathcal{T}_a \left( \mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}} \right)$$

n'est définie que lorsque  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 4.22 (loi de  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ )** *Étant donné  $w \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus blanc gaussien circulaire,  $z \in \mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$  un processus gaussien circulaire et stationnaire, étant donné  $y_d$  le processus défini par*

$$y_d = \mathcal{M}_{\alpha} z + w,$$

alors  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)} \in \mathbb{C}^K$ , est un vecteur stochastique gaussien circulaire de covariance

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}[k, k'] = \left[ \mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(an))} (C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]}) \right] (bk + c, bk' + c) + \mathcal{E}_d(bk + c, bk' + c)$$

**Preuve** La preuve est immédiate en discrétisant la variable  $\tau$  dans l'équation (4.67) de la proposition 4.16. ♠

**Remarque 4.22** *Dans le cas où  $\log_q(\gamma'(an)) = 0$ , la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}$  s'exprime simplement en fonction des matrices de covariances des vecteurs stochastiques  $\mathbf{W}_w^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$ ,*

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}[k, k'] = \mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}}[k, k'] + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}[k, k'] + \mathcal{E}_d(bk + c, bk' + c). \quad (4.86)$$

**Preuve** Il suffit de remarquer que  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$(C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]}) (bk + c, bk' + c) = \left( \mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}} \right) [k, k']. \quad (4.87)$$

♠

# Méthodes d'estimation

Nous avons vu au chapitre précédent que les opérateurs de déformations pouvaient être approximatés par des opérateurs de translations sur les covariances des transformées temps-fréquence et temps-échelle à temps-fixé. On construira dans ce chapitre des estimateurs approchés des fonctions de déformation, en estimant, à chaque instant, les valeurs de ces translations. Après avoir donné un bref état de l'art des méthodes d'estimation on donnera l'expression du maximum de vraisemblance approché des fonctions de déformation. Ce maximum de vraisemblance approché nécessitera de disposer de covariances associées aux transformées temps-fréquence ou temps-échelle des processus stationnaires  $z$  et  $w$  et nous donnerons une méthode pour les estimer. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'estimation numérique des fonctions de déformation sur des signaux synthétiques ainsi que sur des sons naturels.

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>102</b>
5.1.1	Fréquence locale et échelle locale . . . . .	102
5.1.2	Méthode de Clerc et Mallat . . . . .	102
<b>5.2</b>	<b>Estimation par maximum de vraisemblance</b> . . . . .	<b>105</b>
5.2.1	Changeons les notations . . . . .	106
5.2.2	Densités de probabilité des mesures dans les plans temps-fréquence et temps-échelle . . . . .	106
5.2.3	Expressions des estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	110
5.2.3.1	Maximum de vraisemblance approché . . . . .	111
5.2.3.2	Recherche exhaustive et quantification des estimées . . . . .	112
5.2.4	Conclusion partielle : Des problèmes de quantification . . . . .	114
<b>5.3</b>	<b>Améliorer la résolution fréquentielle</b> . . . . .	<b>114</b>
5.3.1	Estimations avec différentes mesures dans le plan temps-fréquence . . . . .	115
5.3.2	Estimations croisées . . . . .	116
5.3.3	Améliorer la résolution fréquentielle . . . . .	117
5.3.4	Négliger les proches corrélations . . . . .	118
5.3.5	Estimation de la fonction de dilatation . . . . .	118
<b>5.4</b>	<b>Estimation des matrices de covariances</b> . . . . .	<b>119</b>
5.4.1	Cas de la modulation fréquentielle . . . . .	119
5.4.2	Cas de la dilatation temporelle . . . . .	120
<b>5.5</b>	<b>Algorithme d'estimation conjointe</b> . . . . .	<b>121</b>
<b>5.6</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>121</b>
5.6.1	Modèle de modulation fréquentielle . . . . .	122
5.6.1.1	Signal synthétique large bande . . . . .	123
5.6.1.2	Spectre de raies . . . . .	123
5.6.1.3	Influence de la localisation des atomes temps-fréquence . . . . .	123
5.6.1.4	Convergence de l'algorithme d'estimation itérative . . . . .	124

5.6.1.5	Influence du paramètre d'échantillonnage de la matrice de covariance	124
5.6.2	Modèle de dilatation temporelle . . . . .	125
5.6.2.1	Signal synthétique large bande . . . . .	125
5.6.2.2	Son produit par un moteur de voiture . . . . .	125
5.6.2.3	Voie chantée . . . . .	126
5.6.2.4	Son de couinement . . . . .	126
5.6.2.5	Influence du nombre de moments nuls et comparaison des méthodes	127
5.6.3	Conclusion sur les estimations numériques . . . . .	127

## 5.1 État de l'art

### 5.1.1 Fréquence locale et échelle locale

Un estimateur de la fréquence instantanée souvent utilisé dans l'analyse et la caractérisation des signaux audio non-stationnaires est l'évolution du barycentre spectral au cours du temps (voir [Merer et al., 2008] ou [Thoret, 2014] par exemple). Celui-ci est donné par l'évolution du centre de gravité d'une transformée temps-fréquence quadratique au cours du temps (voir [Flandrin, 1993]). Dans le cas où la transformée quadratique considérée est le spectrogramme  $v_y$  du processus stochastique  $y$ ,

$$v_y[n, k] = \mathbb{E} \left\{ |\mathcal{V}_g[y](an, bk + c)|^2 \right\},$$

le centre de gravité spectral est un estimateur de la dérivée de la fonction de modulation. On appellera fréquence locale, la fonction définie par,

$$n \rightarrow \nu(n) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k v_y[n, k]}{\sum_{k=0}^{K-1} v_y[n, k]}. \quad (5.1)$$

Dans le cas où l'on considère le scalogramme  $w_y$  du processus  $y$

$$w_y[n, k] = \mathbb{E} \left\{ |\mathcal{W}_\psi[y](an, bk + c)|^2 \right\},$$

l'échelle locale, définie par,

$$n \rightarrow \sigma(n) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k w_y[n, k]}{\sum_{k=0}^{K-1} w_y[n, k]}, \quad (5.2)$$

est alors un estimateur de la dérivée de la fonction de dilatation.

Nous utiliserons dans la suite ces deux quantités comme références et les méthodes d'estimations développées plus loin leur seront comparées

### 5.1.2 Méthode de Clerc et Mallat

Le problème de stationnarisation des processus modulés fréquemment et des processus dilatés temporellement a été étudié dans [Clerc and Mallat, 2003]. Les estimations des fonctions de déformation reposent sur des équations de transport dans les plans temps-fréquence et temps-échelle. Dans le cas de l'étude temps-fréquence du modèle de modulation fréquentielle, nous avons

vu en section 4.2.1.1 que l'étude temps-fréquence du processus modulé nous permettait, à chaque instant  $\tau$ , d'approximer l'opérateur de modulation par son opérateur tangent,

$$\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha x](\tau, \nu) \approx \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu),$$

où

$$\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) = e^{2i\pi\alpha(\tau)} \mathcal{V}_g[x](\tau, \nu - \alpha'(\tau)).$$

On peut alors remarquer que l'approximation du spectrogramme du processus modulé défini par,

$$\tilde{c}(\tau, \nu) = \mathbb{E} \left\{ \left| \mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z](\tau, \nu) \right|^2 \right\},$$

obéit à une équation de transport,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{c}(\tau, \nu) + \alpha''(\tau) \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{c}(\tau, \nu) = 0. \quad (5.3)$$

**Preuve** Remarquons que  $\tilde{c}(\tau, \nu)$  s'exprime en fonction de la fonction de covariance du processus  $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z$  définie en proposition 4.7,

$$\tilde{c}(\tau, \nu) = \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau, \nu, \nu). \quad (5.4)$$

On sait (voir proposition 4.7) que  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}$  s'exprime en fonction de la covariance du processus stationnaire  $z$ ,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = e^{2i\pi(\alpha(\tau) - \alpha(\tau'))} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu - \alpha'(\tau), \nu' - \alpha'(\tau')).$$

où

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau', \nu, \nu') = \langle S_z, \widehat{g_{\tau\nu} g_{\tau'\nu'}} \rangle.$$

Le spectrogramme  $\tilde{c}$  a alors pour expression

$$\tilde{c}(\tau, \nu) = \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}(\tau, \tau, \nu, \nu) = \mathcal{C}_{\mathcal{V}_g[z]}(\tau, \tau, \nu - \alpha'(\tau), \nu - \alpha'(\tau)) = \langle S_z, h_{\nu - \alpha'(\tau)} \rangle,$$

avec  $h_{\nu - \alpha'(\tau)}(\xi) = \hat{g}(\xi - \nu + \alpha'(\tau)) \bar{\hat{g}}(\xi - \nu + \alpha'(\tau))$ .

Remarquons maintenant que  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h_{\nu - \alpha'(\tau)}(\xi) = -\alpha''(\tau) \frac{\partial}{\partial \nu} h_{\nu - \alpha'(\tau)}(\xi).$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{v}(\tau, \nu) = \left\langle S_z, \frac{\partial}{\partial \tau} h_{\nu - \alpha'(\tau)} \right\rangle, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{v}(\tau, \nu) = \left\langle S_z, \frac{\partial}{\partial \nu} h_{\nu - \alpha'(\tau)} \right\rangle,$$

on retrouve bien l'équation de transport désirée. ♠

Le spectrogramme du processus modulé obéira alors approximativement à la même équation de transport. Le théorème suivant montre que l'erreur d'approximation tend vers 0 quand le support de la fenêtre d'analyse tend vers 0.

**Théorème 5.1 (Clerc et Mallat)** *Soit  $x$  un processus stationnaire, supposons qu'il existe  $h > 0$  tel que sa covariance  $c_x$  vérifie*

$$c_x(0) - c_x(t) = |t|^h \eta(t), \quad (5.5)$$

où  $\eta$  est une fonction continue au voisinage de 0, et  $\eta(0) > 0$ . Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  une fonction paire et positive à support dans  $[-1, 1]$ . Soit  $\nu_0$  tel que

$$\forall k < h + 3, \text{ supp } \{\hat{g}^{(k)}\} \subset [-\nu_0, \nu_0], \quad (5.6)$$

mais

$$\int \int |t - s|^h (t - s) \sin[\nu_0(t - s)] g(t) g(s) dt ds \neq 0. \quad (5.7)$$

Soit  $y_m = \mathcal{M}_\alpha x$  où  $\alpha \in \mathcal{C}^{\lceil h \rceil + 4}$ , en posant

$$v^\lambda(\tau, \nu) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle y_m, \overline{g_{\tau, \nu}^\lambda} \rangle \right|^2 \right\}, \quad (5.8)$$

où  $g^\lambda(t) = g(t/\lambda)$ . Alors pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha''(\tau) \neq 0$  et pour  $\nu = \nu_0/\lambda$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda(\tau, \nu) - \alpha''(\tau) \frac{\partial}{\partial \nu} v^\lambda(\tau, \nu) = O(\lambda^2) \frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda(\tau, \nu). \quad (5.9)$$

De la même manière Clerc et Mallat montrent que le scalogramme du processus dilaté temporellement obéit approximativement à une équation de transport.

**Théorème 5.2 (Clerc et Mallat)** *Soit  $x$  un processus stationnaire, supposons qu'il existe  $h > 0$  tel que sa covariance  $c_x$  vérifie*

$$c_x(0) - c_x(t) = |t|^h \eta(t), \quad (5.10)$$

où  $\eta$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  au voisinage de 0 et  $\eta(0) > 0$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  une fonction à support dans  $[-1, 1]$  telle que,

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int \int |t - s|^h \overline{\psi}(t) \psi(s) dt ds \neq 0. \quad (5.11)$$

Soit  $y_d(t) = x(\gamma(t))$  où  $\gamma \in \mathcal{C}^3$  et  $\gamma'(t) > 0$ , en posant

$$w(\tau, s) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle y_d, \overline{\psi^{s\tau}} \rangle \right|^2 \right\}, \quad (5.12)$$

où  $\psi^{s\tau}(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ . Alors pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma''(\tau) \neq 0$ , quand  $s \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} w(\tau, s) - \frac{\gamma''(\tau)}{\gamma(\tau)} \frac{\partial}{\partial \log(s)} w(\tau, s) = \mathcal{O}(s) \frac{\partial}{\partial \tau} w(\tau, s). \quad (5.13)$$

**Remarque 5.1** [*Clerc and Mallat, 2003*] adoptent un formalisme différent de celui que nous avons adopté dans ce manuscrit. Ils considèrent les processus généralisés comme des formes linéaires continues alors que nous les considérons comme des formes anti-linéaires continues, ce qui explique la différence de signe existante entre le théorème 5.1 et l'équation (5.3). Ils considèrent des familles d'ondelettes définies par  $\psi^{s\tau}(t) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$  et le modèle de dilatation étudié,  $y = x \circ \gamma$ , n'est pas unitaire dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Disposant d'une seule réalisation des processus stochastiques  $y_m$  et  $y_d$ , les théorèmes précédent suggèrent d'estimer les fonctions de déformation à partir des quotients,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \left| \langle y_m, \overline{g_{\tau, \nu}^\lambda} \rangle \right|^2}{\frac{\partial}{\partial \nu} \left| \langle y_m, \overline{g_{\tau, \nu}^\lambda} \rangle \right|^2}, \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \left| \langle y_d, \overline{\psi^{s\tau}} \rangle \right|^2}{\frac{\partial}{\partial \log(s)} \left| \langle y_d, \overline{\psi^{s\tau}} \rangle \right|^2}. \quad (5.14)$$

La réalisation d'un spectrogramme ou d'un scalogramme possédant généralement beaucoup de fluctuations et est nécessaire de les lisser. En notant  $r(\tau, \nu)$ , une réalisation du champ stochastique  $\left| \langle y, \overline{g_{\tau, \nu}^\lambda} \rangle \right|^2$ , Clerc et Mallat proposent d'estimer  $\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda$  en convoluant temporellement  $\frac{\partial}{\partial \tau} r(\tau, \nu)$ . On notera alors,  $\widehat{\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda}$  l'estimateur de  $\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda$  défini par,

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda}(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \tau} r(\tau - t, \nu) k(t) dt.$$

Les quantités  $\frac{\partial}{\partial \nu} v^\lambda$ ,  $\frac{\partial}{\partial \tau} w$  et  $\frac{\partial}{\partial \log(s)} w$  sont estimées de la même manière. Les hypothèses des théorèmes 5.1 et 5.2 permettant d'assurer que  $\frac{\partial}{\partial \log(s)} w(\tau, s)$  et  $\frac{\partial}{\partial \nu} v^\lambda(\tau, \nu)$  ne s'annule pas, les estimateurs des fonctions de déformation ont finalement pour expressions,

$$\widehat{\alpha''(\tau)} = \frac{\widehat{\frac{\partial}{\partial \tau} v^\lambda}(\tau, \nu)}{\widehat{\frac{\partial}{\partial \nu} v^\lambda}(\tau, \nu)}, \quad \text{et} \quad \frac{\gamma''(\tau)}{\gamma(\tau)} = \frac{\widehat{\frac{\partial}{\partial \tau} w}(\tau, s)}{\widehat{\frac{\partial}{\partial \log(s)} w}(\tau, s)}. \quad (5.15)$$

Le support du noyau de convolution  $k$  permet alors d'effectuer un compromis classique entre le biais et la variance de l'estimateur. On comprend aisément qu'il serait judicieux d'utiliser un noyau de convolution à support large lorsque les dérivées des fonctions de déformation varient lentement au cours temps et un noyau à support étroit lorsque les variations sont plus rapides. Les dynamiques n'étant évidemment pas connues à l'avance il est impossible de réaliser ce type d'adaptation. On notera aussi que les fonctions de déformation sont estimées localement à partir de quotients de réalisations lissées des spectrogrammes et des scalogrammes. Comme ces dernières comportent toujours certaines fluctuations, cela peut altérer la qualité des estimations.

## 5.2 Estimation par maximum de vraisemblance

Nous avons vu dans la section 4.5 que les vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{y_m}^n$  et  $\mathbf{V}_{y_d}^n$  suivent, à temps fixé, des lois gaussiennes multivariées circulaires,

$$\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}\right), \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}\right), \quad (5.16)$$

dont les matrices de covariance dépendent explicitement des fonctions de déformation à estimer. Dans cette section, nous supposons disposer des réalisations des vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{y_m}^n$  et  $\mathbf{V}_{y_d}^n$  pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et nous construirons un estimateur de maximum de vraisemblance approché basé sur les approximations réalisées précédemment. On estimera ainsi les valeurs des fonctions de déformation en chaque instant  $n$ , sans prendre en compte les corrélations existant entre les différents instants. Nous traiterons le modèle de dilatation temporelle et le modèle de modulation fréquentielle quasi-simultanément, les méthodes d'estimation proposées étant presque équivalentes dans les deux cas.

### 5.2.1 Changeons les notations

Les méthodes d'estimation des fonctions de déformation reposeront sur les matrices de covariance des vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$  dont les expressions sont données en propositions 4.19 et 4.22,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}[k, k'] = [\mathcal{T}_{\alpha'(an)} (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c) + \mathcal{E}_m(bk + c, bk' + c), \quad (5.17)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}[k, k'] = [\mathcal{T}_{-\log_q(\gamma'(an))} (C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c) + \mathcal{E}_d(bk + c, bk' + c). \quad (5.18)$$

Pour simplifier nous adopterons les notations suivantes,  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}[k, k'] &= [\mathcal{T}_{\delta} (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c), & \mathbf{E}_m^c[k, k'] &= \mathcal{E}_m(bk + c, bk' + c), \\ \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}[k, k'] &= [\mathcal{T}_{-\theta} (C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c), & \mathbf{E}_d^c[k, k'] &= \mathcal{E}_d(bk + c, bk' + c). \end{aligned}$$

Ainsi les équations (5.17) et (5.18) se liront , pour  $\delta = \alpha'(an)$  et pour  $\theta = \log_q(\gamma'(an))$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} = \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} + \mathbf{E}_m^c, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}} = \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} + \mathbf{E}_d^c. \quad (5.20)$$

Comme nous l'avons vu en remarques 4.19 et 4.22, lorsque les paramètres de translation  $\delta$  et  $\theta$  sont nuls, les covariances  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}$  vérifient

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} = \mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)} = \mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}. \quad (5.22)$$

### 5.2.2 Densités de probabilité des mesures dans les plans temps-fréquence et temps-échelle

Les vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$  ont des matrices de covariance positives mais pas nécessairement définies et ils ne possèdent donc pas nécessairement de densité de probabilité. Les propositions suivantes nous donnent des conditions suffisantes pour que  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}$  soient des matrices définies positives.

**Proposition 5.1** *Supposons que la fenêtre d'analyse  $g$  soit telle que*

$$K_g := \frac{1}{b} \min_{u \in \mathbb{R}} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| g\left(u + \frac{v}{b}\right) \right|^2 > 0 .$$

Alors quel que soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^K$ ,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq \sigma_0^2 K_g \|\mathbf{x}\|^2 ,$$

et la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$  est inversible à inverse borné.

**Preuve** Rappelons d'abord (voir eq. (4.77)) que,

$$\mathbf{V}_{y_m}^n = \mathbf{V}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)} + \mathbf{V}_w^{(n,c)} ,$$

donc la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$  vérifie,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} = \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} .$$

Comme  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}}$  est une matrice semi-définie positive,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$ ,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \mathbf{x} . \quad (5.23)$$

On va donc minorer  $\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \mathbf{x}$ . D'après l'équation (4.79),

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}[k, k'] = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(\xi - bk) \hat{g}(\xi - bk') d\xi .$$

On a donc l'égalité suivante  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^K$ ,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \mathbf{x} = \sigma_0^2 \|\hat{y}\|_2^2 , \quad (5.24)$$

où la fonction  $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par

$$\hat{y}(\xi) = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \hat{g}(\xi - bk') .$$

La transformé de Fourier étant un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$ , l'équation (5.24) peut se réécrire

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \mathbf{x} = \sigma_0^2 \|y\|_2^2 , \quad (5.25)$$

où

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi - bk) e^{2i\pi\xi t} d\xi = g(t) \sum_{k=0}^{K-1} x[k] e^{2i\pi t b k} .$$

On va donc minorer  $\|y\|_2^2$ .

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \int_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|^2 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi t b k} \right|^2 dt \\ &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \int_{u=0}^{1/b} |g(u + v/b)|^2 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi(u+v/b)bk} \right|^2 du \end{aligned}$$

On a ici séparé l'ensemble  $\mathbb{R}$  en une union d'intervalles de taille  $1/b$ .

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \int_{u=0}^{1/b} |g(u + v/b)|^2 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi u b k} \right|^2 du \\ &\geq \min_{u \in \mathbb{R}} \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} |g(u + v/b)|^2 \right) \int_{u=0}^{1/b} \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi u b k} \right|^2 du \\ &\geq \frac{1}{b} \min_{u \in \mathbb{R}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(u + n/b)|^2 \right) \int_{u=0}^1 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi u k} \right|^2 du. \end{aligned}$$

On obtient finalement la majoration suivante,

$$\|y\|_2^2 \geq \frac{1}{b} \min_u \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} |g(u + v/b)|^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2. \quad (5.26)$$

Finalement, en réunissant les équations (5.25) et (5.26),

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{ym}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq \frac{\sigma_0^2}{b} \min_{u \in \mathbb{R}} \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} |g(u + v/b)|^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2.$$

♠

La proposition précédente exprime simplement le lien entre la redondance fréquentielle des mesures dans le plan temps-fréquence et l'inversibilité de la matrice de covariance. Ainsi, de grandes valeurs de  $b$  associées à de faibles redondances fréquentielle des mesures seront requises afin d'assurer l'inversibilité de la matrice. De la même manière une trop forte localisation des fonctions  $g$  risquerait de compromettre l'inversibilité. Cette dernière condition peut être appréhendé en considérant le principe d'incertitude temps-fréquence qui établit que plus la fenêtre  $g$  est bien localisée moins sa transformée de Fourier  $\hat{g}$  pourra l'être, impliquant alors une redondance fréquentielle potentiellement plus grande. On remarquera aussi que la condition d'inversibilité est indépendante du paramètre de translation  $c$ . On peut donner une proposition équivalente concernant l'étude temps-échelle du modèle de dilatation temporelle.

**Proposition 5.2** *Supposons que l'ondelette  $\psi$  soit telle que sa transformée de Fourier-Mellin  $\underline{\psi} := \hat{\hat{\psi}}$  vérifie*

$$K_\psi := \frac{1}{b \log(q)} \min_{u \in \mathbb{R}} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| \underline{\psi} \left( u + \frac{v}{b \log(q)} \right) \right|^2 > 0.$$

Alors quel que soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$ ,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq K_\psi \sigma_0^2 \|\mathbf{x}\|^2,$$

et la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}}$  est inversible à inverse borné.

**Preuve** La matrice de covariance de  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$  vérifie,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}} = \mathbf{C}_{\mathbf{W}_{\mathcal{D}\gamma z}^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}.$$

La matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{\mathcal{D}\gamma z}^{(n,c)}}$  étant semi-définie positive,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$ ,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}} \mathbf{x}. \quad (5.27)$$

Nous allons donc minorer  $\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}} \mathbf{x}$ .

D'après l'équation (4.54)

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}[k, k'] = \sigma_0^2 \int_{\mathbb{R}_+} \sqrt{q^{bk+bk'}} \hat{\psi}(\xi q^{bk}) \hat{\psi}(\xi q^{bk'}) d\xi,$$

ce qui nous mène à l'égalité suivante

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}} \mathbf{x} = \sigma_0^2 \|\hat{y}\|_2^2,$$

où la fonction  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par

$$y(\xi) = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \sqrt{q^{bk}} \hat{\psi}(\xi q^{bk}).$$

Comme  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est une ondelette analytique,  $\text{supp}(y) \subset \mathbb{R}_+^*$  et la transformée de Mellin de  $y$  est bien définie. Comme de plus la transformation de Mellin est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$ , l'équation (5.27) peut se réécrire

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}} \mathbf{x} = \sigma_0^2 \|\hat{y}\|_2^2, \quad (5.28)$$

avec

$$\hat{y}(\beta) = \underline{\psi}(\beta) \sum_{k=0}^{K-1} x[k] q^{-2i\pi\beta bk},$$

où  $\underline{\psi} := \hat{\psi}$  est la transformée de Fourier-Mellin de  $\psi$ .

On va donc minorer  $\|\hat{y}\|_2^2$

$$\begin{aligned} \|\hat{y}\|_2^2 &= \int_{\beta \in \mathbb{R}} |\underline{\psi}(\beta)|^2 \left| \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{-2i\pi\beta b \log(q)k} \right|^2 dt \\ &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \int_{u=0}^{1/(b \log(q))} \left| \underline{\psi} \left( u + \frac{v}{b \log(q)} \right) \right|^2 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi u b \log(q)k} \right|^2 du, \end{aligned}$$

où l'on a découpé l'ensemble  $\mathbb{R}$  en une union d'intervalles de taille  $1/(b \log(q))$ .

$$\begin{aligned} \|\underline{y}\|_2^2 &\geq \frac{1}{b|\log(q)|} \min_u \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\psi(u + \frac{v}{b \log(q)})}{b \log(q)} \right|^2 \right) \int_{u=0}^1 \left| \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{x}[k] e^{2i\pi uk} \right|^2 du, \\ &\geq \frac{1}{b|\log(q)|} \min_u \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\psi(u + \frac{v}{b \log(q)})}{b \log(q)} \right|^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

On obtient finalement en réunissant les équations (5.28) et (5.29),

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}} \mathbf{x} \geq \frac{\sigma_0^2}{b \log(q)} \min_u \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\psi(u + \frac{v}{b \log(q)})}{b \log(q)} \right|^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2.$$

♠

Cette proposition fait donc le lien entre la redondance d'échelle des mesures dans le plan temps-échelle et l'inversibilité de la matrice de covariance. De faibles valeurs des paramètres  $q$  et  $b$  associées à de grandes redondances d'échelle et une trop forte localisation de l'ondelette  $\underline{\psi}$  risquerait de compromettre l'inversibilité de la covariance. La condition sur la localisation de  $\underline{\psi}$  est liée au principe d'incertitude temps-échelle énoncé en 2.1.11.6 qui établit que mieux la fonction  $\underline{\psi}$  est localisée moins  $\hat{\psi}$  peut l'être, impliquant une redondance d'échelle potentiellement plus grande. Comme dans le cas de la proposition précédente, la condition d'inversibilité est indépendante du paramètre  $c$ .

On supposera dans la suite que les propositions 5.1 et 5.2 sont vérifiées, les vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ , possèdent alors des densités de probabilité dont l'expression est donnée dans [Gallager, 2008].

**Proposition 5.3** *Soit  $\mathbf{U}$  un vecteur stochastique gaussien circulaire, si sa matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{U}}$  est définie positive alors  $\mathbf{U}$  possède une densité de probabilité  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$ , définie  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^K$  par,*

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\pi^K \det(\mathbf{C}_{\mathbf{U}})} \exp \left\{ - \langle \mathbf{C}_{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \right\}.$$

### 5.2.3 Expressions des estimateurs du maximum de vraisemblance

**Proposition 5.4** *Étant donné  $\mathbf{U}_m^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et  $\mathbf{U}_d^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ , les estimateurs du maximum de vraisemblance des fonctions de déformation ont pour expressions*

$$\begin{aligned} \mathcal{ML}[\alpha'(an)](\mathbf{U}_m^c) &= \operatorname{argmin}_{\delta \in \mathbb{R}} \left\{ \log \left( |\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} + \mathbf{E}_m^c| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} + \mathbf{E}_m^c \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\} \\ \mathcal{ML}[\log_q(\gamma'(an))](\mathbf{U}_d^c) &= \operatorname{argmin}_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \log \left( |\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} + \mathbf{E}_d^c| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} + \mathbf{E}_d^c \right)^{-1} \mathbf{U}_d^c, \mathbf{U}_d^c \right\rangle \right\} \end{aligned}$$

**Preuve** On donne la preuve pour l'estimation de la fonction de modulation  $\alpha$ , la preuve concernant la fonction de dilatation  $\gamma$  étant identique. On a déjà vu en proposition 5.3 que le vecteur

stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  possède une distribution de probabilité, définie pour  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^K$  par,

$$\mathcal{P}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\pi^K \det(\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}})} \exp \left\{ - \left\langle \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle \right\}.$$

où la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$  dépend du paramètre  $\alpha'(an)$  à estimer (voir eq. (5.19)),

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} = \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\alpha'(an),c)} + \mathbf{E}_m^c.$$

Disposant d'une observation  $\mathbf{U}_m^c$  du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ , l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre  $\alpha'(an)$  a alors pour expression,

$$\mathcal{ML}[\alpha'(an)](\mathbf{U}_m^c) = \operatorname{argmax}_{\delta \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{\pi^K \det(\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} + \mathbf{E}_m^c)} \exp \left\{ - \left\langle (\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} + \mathbf{E}_m^c)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\} \right].$$

On obtient finalement l'expression désirée en ne maximisant pas la fonction de vraisemblance mais en minimisant l'opposé de son logarithme. ♠

### 5.2.3.1 Maximum de vraisemblance approché

En négligeant les erreurs d'approximation  $\mathbf{E}_m^c$  et  $\mathbf{E}_d^c$ , les estimateurs précédents ne dépendent que des matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}[k, k'] = [\mathcal{T}_\delta (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c), \quad (5.30)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}[k, k'] = [\mathcal{T}_{-\theta} (C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c), \quad (5.31)$$

et l'estimation des fonctions de déformation se résume alors à l'estimation d'un paramètre de translation. Cela reste approximativement vrai lorsqu'elles sont petites et dans le cas où les matrices de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$  sont inversibles. On construira alors des estimateurs de maximum de vraisemblance approchés en négligeant ces erreurs d'approximation.

**Proposition 5.5** *La matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  est inversible sous les mêmes conditions que la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^{n,c}}$  est inversible (voir proposition 5.1) et la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$  est inversible sous les mêmes conditions que la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}_{y_d}^{n,c}}$  est inversible (voir proposition 5.2).*

**Preuve** Concernant l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$ , il suffit de remarquer que

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}},$$

où  $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}}$  est définie en équation (5.17) par

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{n,c}}[k, k'] = [\mathcal{T}_{\alpha'(an)} (C_{V^{an}[z]})] (bk + c, bk' + c).$$

Comme  $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_{\alpha z}}^{(n,c)}}$  est une matrice semi-définie positive,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^* \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}} \mathbf{x},$$

et la suite de la preuve est identique à la preuve de la proposition 5.1 à partir de l'équation (5.24). Pour l'inversibilité de  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$  on remarque que de la même manière que

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} = \mathbf{C}_{\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)}} + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}},$$

où  $\mathbf{C}_{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{D}_{\gamma z}}^{(n,c)}}$  est une matrice semi-définie positive. La suite de la preuve est donc identique à la preuve de la proposition 5.2 à partir de l'équation (5.23).  $\spadesuit$

**Définition 5.1** *Étant données  $\mathbf{U}_m^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et  $\mathbf{U}_d^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ , on définit les estimateurs du maximum de vraisemblance approchés des fonctions de déformation par*

$$\widetilde{\mathcal{ML}}[\alpha'(an)](\mathbf{U}_m^c) = \operatorname{argmin}_{\delta \in \mathbb{R}} \left\{ \log \left( \left| \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \right| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\}, \quad (5.32)$$

$$\widetilde{\mathcal{ML}}[\log_q(\gamma'(an))](\mathbf{U}_d^c) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \log \left( \left| \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} \right| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_d^c, \mathbf{U}_d^c \right\rangle \right\}. \quad (5.33)$$

### 5.2.3.2 Recherche exhaustive et quantification des estimées

Les expressions approchées des estimateurs des maximums de vraisemblance font intervenir les fonctions de covariance associées aux transformées temps-fréquence et temps-échelle continues,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}[k, k'] &= \mathcal{T}_{\delta} \left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]} \right) (bk + c, bk' + c), \\ \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}[k, k'] &= \mathcal{T}_{-\theta} \left( C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]} \right) (bk + c, bk' + c). \end{aligned}$$

Disposant uniquement de mesures discrètes dans les plans temps-fréquence et temps-échelle, il nous est en pratique impossible d'avoir accès à une estimation de ces covariances. Nous verrons plus loin (sec. 5.4) une méthode pour estimer les matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}$ , associées à des paramètres de translation nuls,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}[k, k'] &:= \mathbf{C}_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}}[k, k'] + \mathbf{C}_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}[k, k'], \\ \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}[k, k'] &:= \mathbf{C}_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}}[k, k'] + \mathbf{C}_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}[k, k']. \end{aligned}$$

On ne peut pas, dans le cas général, exprimer les matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$  en fonction des matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}$ , les translations le long des diagonales de ces dernières n'étant définies que dans le cas discret. Nous allons voir que cela est possible pour certaines valeurs discrètes des paramètres  $\delta$  et  $\theta$ , ce qui nous permettra d'estimer des valeurs quantifiées des fonctions de déformation.

**Proposition 5.6** *Supposons que  $\delta, \theta \in [0, b, 2b, \dots, (K-1)b]$ , alors les matrices de covariance vérifient,*

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathcal{T}_{\frac{\delta}{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)} = \mathcal{T}_{\frac{\theta}{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}.$$

**Preuve** On donne la preuve uniquement pour l'expression de la matrice,  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$ , la preuve pour la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$  étant complètement identique. On sait que  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}[k, k'] = (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]}) (bk + c, bk' + c),$$

pour  $\delta/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ , les translations par  $\delta/b$  le long de la diagonale de la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  sont bien définies et  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{\frac{\delta}{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}) [k, k'] &= (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]}) (bk + c - \delta, bk' + c - \delta), \\ &= [\mathcal{T}_{\delta} (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})] (bk + c, bk' + c), \end{aligned}$$

donc  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathcal{T}_{\frac{\delta}{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  ♠

**Remarque 5.2** Les vecteurs  $\mathbf{V}_z^{(n,c)}$ ,  $\mathbf{V}_w^{(n,c)}$ ,  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_w^{(n,c)}$  ont des conditions aux bords périodiques (voir eq. (4.84) et (4.76)), donc les matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}^{(0,c)}$  ont elles aussi des conditions aux bords périodiques et les translations le long de leurs diagonales sont bien définies.

**Proposition 5.7** Étant donné  $\mathbf{U}_m^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ , dans le cas où l'on se restreint à rechercher des valeurs quantifiées de la fonction à estimer, à savoir  $\alpha'(an) \in [0, b, 2b, \dots, (K-1)b]$ , l'approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de modulation a pour expression,

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(an)}{b} \right] (\mathbf{U}_m^c) = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket} \left\{ \left\langle \mathcal{T}_{\lambda} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\}.$$

**Preuve** On connaît l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance approché,

$$\widetilde{\mathcal{ML}}[\alpha'(an)](\mathbf{U}_m^c) = \operatorname{argmin}_{\delta \in \mathbb{R}} \left[ \log \left( \left| \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \right| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right].$$

Pour  $\delta/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathcal{T}_{\frac{\delta}{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  donc  $\left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} \right)^{-1} = \mathcal{T}_{\frac{\delta}{b}} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1}$ .

En posant  $\lambda = \delta/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\lambda b, c)} = \mathcal{T}_{\lambda} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  et en minimisant la vraisemblance approchée par rapport à  $\lambda$  on obtient l'estimateur de  $\frac{\alpha'(n)}{b}$  suivant,

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(an)}{b} \right] (\mathbf{U}_m^c) = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket} \left[ \log \left( \left| \mathcal{T}_{\lambda} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1} \right| \right) + \left\langle \mathcal{T}_{\lambda} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right].$$

On va maintenant montrer que  $\left| \mathcal{T}_{\lambda} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1} \right|$  est indépendant du paramètre de translation  $\lambda$ .

Intéressons nous au cas général où  $\rho \in \mathbb{C}$  est une valeur propre d'une matrice  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{K \times K}$  associée au vecteur propre  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^K$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{u} = \rho\mathbf{u} &\Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}[j, k] \mathbf{u}[k] = \rho \mathbf{u}[j] \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{Z}, \forall i \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}[j-\lambda, k-\lambda] \mathbf{u}[k-\lambda] = \rho \mathbf{u}[i-\lambda] \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{Z}, [\mathcal{T}_{\lambda} \mathbf{C}] [\mathcal{T}_{\lambda} \mathbf{u}] = \rho [\mathcal{T}_{\lambda} \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Donc  $\rho \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de la matrice  $\mathcal{T}_\lambda \mathbf{C}$  associée au vecteur propre  $T_\lambda \mathbf{u}$ . Les matrices  $\mathcal{T}_\lambda \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}$  ont les mêmes valeurs propres et le déterminant de  $|\mathcal{T}_\lambda \mathbf{C}|$  est indépendant du paramètre de translation  $\lambda$ .  $|\mathcal{T}_\lambda (\mathbf{C}_V^{(0,c)})|$  étant indépendant de  $\lambda$  on obtient l'expression désirée pour l'estimation de la fonction de modulation. ♠

**Proposition 5.8** *Étant donné  $\mathbf{U}_d^c \in \mathbb{C}^K$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ , dans le cas où l'on se restreint à rechercher des valeurs quantifiées de la fonction à estimer,  $\gamma'(an) \in [1, q^b, q^{2b}, \dots, q^{b(K-1)}]$ , l'approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction de dilatation a pour expression,*

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\log_q(\gamma'(an))}{b} \right] (\mathbf{U}_d^c) = \underset{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} \left[ \left\langle \mathcal{T}_\lambda (\mathbf{C}_W^{(0,c)})^{-1} \mathbf{U}_d^c, \mathbf{U}_d^c \right\rangle \right].$$

**Preuve** La preuve est identique à la preuve de la proposition 5.7. ♠

### 5.2.4 Conclusion partielle : Des problèmes de quantification

Étant données une réalisation  $\mathbf{U}_m^c$  du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  et une réalisation  $\mathbf{U}_d^c$  du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}$ , nous avons proposé dans cette section une méthode pour estimer des valeurs quantifiées des fonctions de déformation,  $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\alpha'(an) \in [0, b, 2b, \dots, (K-1)b] \quad \text{et} \quad \gamma'(an) \in [1, q^b, q^{2b}, \dots, q^{b(K-1)}].$$

On pourra alors utiliser des méthodes d'interpolation et d'intégration pour estimer les fonctions de déformation. Nous avons vu en propositions 5.1 et 5.2, que les conditions d'inversibilité des matrices de covariances nécessitaient que les valeurs de  $b$  et de  $q^b$  soient d'autant plus faible que les fonctions tests  $g$  et  $\psi$  sont bien localisées. Les approximations des opérateurs de déformations par leurs opérateurs tangents (section 4.2) et les approximations des maximums de vraisemblance qui en résultent (section 5.2.3.1), seront d'autant meilleures que les fonctions test seront bien localisées autour de 0. Cela signifie alors que les valeurs du paramètre de discrétisation  $b$  ne pourront être aussi faibles que l'on veut et que les estimations des fonctions de déformation sont en pratique fortement quantifiées.

## 5.3 Améliorer la résolution fréquentielle

Le but de cette section est de proposer une méthode permettant de diminuer les valeurs de quantification des estimations, cette méthode nécessitera d'utiliser différentes mesures dans les plans temps-fréquence et temps-échelle, associées à de différentes valeurs du paramètre de décalage  $c$ . Nous supposerons désormais que le paramètre  $b$  est entier et on posera  $L = Kb \in \mathbb{Z}$ . A chaque instant  $n$ , on ne supposera plus avoir uniquement accès aux mesures  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  pour une valeur du paramètre  $c$  donné, mais à l'ensemble des  $b$  mesures  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  pour  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ . De la même manière que nous l'avons faite section 5.4, nous pourrons alors estimer les matrices de covariances  $\mathbf{C}_V^{(0,c)}$  pour tout  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ . Les problématiques étant complètement équivalentes

dans le cas de la modulation fréquentielle et de la dilatation temporelle, on ne traitera ici que le cas de la modulation et nous donnerons à la fin de cette section la méthode d'estimation pour la fonction de dilatation.

### 5.3.1 Estimations avec différentes mesures dans le plan temps-fréquence

Introduisons le vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^L \in \mathbb{C}^L$  défini par,

$$\mathbf{V}_{y_m}^L[k] = \mathcal{V}_g[y_m](an, k), \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad (5.34)$$

de matrice de covariance,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^L}[k, k'] = [\mathcal{T}_{\alpha'(an)}(C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})](k, k'), \quad \forall k, k' \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket. \quad (5.35)$$

Remarquons que pour tout  $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ , et pour tout  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}[k] = \mathbf{V}_{y_m}^L[bk + c],$$

ainsi, disposer des réalisations des vecteurs  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$  pour tout  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$  est équivalent à disposer d'une réalisation du vecteur  $\mathbf{V}_{y_m}^L$ . On peut alors montrer, comme nous l'avons fait en proposition 5.1, que la fenêtre d'analyse  $g$  doit être telle que

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \sum_{v \in \mathbb{Z}} |g(u+v)|^2 > 0,$$

pour que la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^L}$  soit inversible. Cette condition n'est généralement pas vérifiée et la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{y_m}^L}$  n'est a priori pas inversible. On ne construira donc pas à d'estimateur de la fonction de modulation à partir du vecteur  $\mathbf{V}_{y_m}^L$  mais à partir de l'ensemble des vecteurs stochastiques  $\{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}\}_{c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}$  en les supposant tous indépendants.

**Remarque 5.3** *Étant donné l'ensemble des réalisations  $\{\mathbf{U}_m^c\}_{c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}$  des vecteurs stochastiques  $\{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}\}_{c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}$ , en négligeant les dépendances existantes entre les vecteurs  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ , l'approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance a pour expression,*

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(an)}{b} \right] (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \underset{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\}, \quad (5.36)$$

**Preuve** En négligeant les dépendances existantes entre les vecteurs  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ ,

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{V}_{y_m}^{(n,1)}, \mathbf{V}_{y_m}^{(n,2)}, \dots, \mathbf{V}_{y_m}^{(n,b-1)})} (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \prod_{c=0}^{b-1} \mathcal{P}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} (\mathbf{U}_m^c).$$

En notant  $\mathcal{L}$ , l'opposé du logarithme de la fonction de vraisemblance,

$$\mathcal{L}_{(\mathbf{V}_{y_m}^{(n,1)}, \mathbf{V}_{y_m}^{(n,2)}, \dots, \mathbf{V}_{y_m}^{(n,b-1)})} (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \sum_{c=0}^{b-1} \mathcal{L}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}} (\mathbf{U}_m^c),$$

En réalisant les mêmes approximations qu'en sections 5.2.3.1,  $\forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}(\mathbf{U}_m^c) = \log \left( \left| \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\lambda,c)} \right| \right) + \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\lambda,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle,$$

et le maximum de vraisemblance approché a pour expression

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(an)}{b} \right] (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \left( \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\lambda,c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\}.$$

### 5.3.2 Estimations croisées

Nous avons remarqué dans la section 5.2.3.2 que lorsque le paramètre de translation  $\delta$  était un multiple de  $b$ , la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  pouvait s'exprimer en fonction de translations discrètes le long de la diagonale de la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$ . Disposant à présent de l'ensemble des matrices  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  pour tout  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ , nous allons voir que l'on peut exprimer la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  en fonction d'une matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c')}$ , correspondant à une valeur de décalage différente.

**Proposition 5.9** *Étant donné  $c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ , si  $\delta \in [c_0, b+c_0, 2b+c_0, \dots, (K-1)b+c_0]$ , alors la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$  s'exprime en fonction de translations discrètes le long de la diagonale de la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)}$ ,*

$$\forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathcal{T}_{(\delta-c_0)/b} \left[ \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)} \right].$$

**Preuve** On sait que  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}[k, k'] = \left[ \mathcal{T}_{\delta} \left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]} \right) \right] (bk+c, bk'+c).$$

Comme  $\forall k, k' \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)}[k, k'] = \left( C_{V^{na}[z]} + C_{V^{na}[w]} \right) (bk+c-c_0, bk'+c-c_0),$$

dans le cas où  $(\delta-c_0)/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ , les translations par  $(\delta-c_0)/b$  le long de la diagonale de  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)}$  sont bien définies et

$$\left[ \mathcal{T}_{(\delta-c_0)/b} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)} \right] [k, k'] = \left[ \mathcal{T}_{\delta} \left( C_{V^{na}[z]} + C_{V^{na}[w]} \right) \right] (bk+c, bk'+c). \quad (5.37)$$

Donc

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)} = \mathcal{T}_{(\delta-c_0)/b} \left[ \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c-c_0)} \right].$$

♠

**Remarque 5.4** *La matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}$  n'est a priori définie que pour  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ , or  $c-c_0 \in \llbracket -b+1, b-1 \rrbracket$ . Remarquons que dans le cas où  $c \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,-c)}[k, k'] &= \left( C_{V^{na}[z]} + C_{V^{na}[w]} \right) (bk-c, bk'-c), \\ &= \left( C_{V^{na}[z]} + C_{V^{na}[w]} \right) (b(k-1)+b-c, b(k'-1)+b-c), \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,b-c)}[k-1, k'-1] \end{aligned}$$

comme  $(b-c) \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$  et comme les translations le long de la diagonale de  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,b-c)}$  sont bien définies, la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,-c)}$  est bien définie.

**Proposition 5.10** *Étant donné l'ensemble des réalisations  $\{\mathbf{U}_m^c\}_{c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}$  des vecteurs stochastiques  $\{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}\}_{c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}$ , en négligeant les dépendances existantes entre les vecteurs  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}$ , et lorsqu'on se limite à rechercher des valeurs quantifiées de la fonction de modulation  $\alpha'(an) \in [c_0, b+c_0, 2b+c_0, \dots, (K-1)b+c_0]$ , l'approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance a pour expression*

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(n) - c_0}{b} \right] (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket} \left\{ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c-c_0)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right\}.$$

**Preuve** On a montré en remarque 5.3 que l'estimateur du maximum de vraisemblance approché a pour expression,

$$\widetilde{\mathcal{ML}} \left[ \frac{\alpha'(an)}{b} \right] (\mathbf{U}_m^1, \mathbf{U}_m^2, \dots, \mathbf{U}_m^{b-1}) = \operatorname{argmin}_{\delta \in \mathbb{R}} \left[ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \left( \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(\delta, c)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right],$$

dan le cas où  $(\delta - c_0)/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{C}_\mathbf{V}^{(\delta, c)} = \mathcal{T}_{(\delta - c_0)/b} \left[ \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c-c_0)} \right], \quad \forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket.$$

De la même manière que dans la preuve de la proposition 5.7, en posant  $\lambda = (\delta - c_0)/b \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$  et en remarquant que  $\left| \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c-c_0)} \right) \right|$  est indépendant de  $\lambda$ , on obtient finalement l'expression désirée. ♠

### 5.3.3 Améliorer la résolution fréquentielle

Nous allons maintenant pouvoir proposer une méthode pour améliorer la résolution fréquentielle des estimations. Notons  $\lambda_{c_0} \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ , l'estimation de  $(\alpha'(n) - c_0)/b$  définie par,

$$\lambda_{c_0} = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket} \left[ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c-c_0)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right]. \quad (5.38)$$

Disposant de l'ensemble des matrices  $\mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c)}$  pour tout  $c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ , on peut calculer  $\lambda_{c_0}$  pour tout  $c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ . Il est alors naturel de rechercher la valeur optimale du paramètre  $c_0$ , c'est à dire la valeur  $c_0^*$  vérifiant,

$$c_0^* = \operatorname{argmin}_{c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket} \left[ \sum_{c=0}^{b-1} \left\langle \mathcal{T}_{\lambda_{c_0}} \left( \mathbf{C}_\mathbf{V}^{(0, c-c_0)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle \right]. \quad (5.39)$$

Il apparaît alors que l'estimateur  $\delta^*$  associé à la valeur optimale du paramètre  $c_0$ ,

$$\delta^* = b \lambda_{c_0^*} + c_0^*, \quad (5.40)$$

est un estimateur de  $\alpha'(an)$ . La quantification du paramètre estimé a alors été diminuée puisque  $\delta^* \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$ .

### 5.3.4 Négliger les proches corrélations

L'estimateur  $\delta^*$  défini par les équations (5.38), (5.39) et (5.40) nécessite de faire plusieurs minimisations des fonctions de vraisemblance approchées, associées à différentes valeurs de mesures dans le plan temps fréquence. Nous allons proposer dans ce paragraphe un moyen simple pour le calculer qui nécessitera de considérer les mesures  $\mathbf{V}_{y_m}^L$  définies par

$$\mathbf{V}_{y_m}^L[k] = \mathcal{V}_g[y_m](an, k), \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad (5.41)$$

en négligeant les corrélations existantes entre les fréquences rapprochées.

Étant donnée la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}^L}$  du vecteur stochastique  $\mathbf{V}^L$  défini par,

$$\mathbf{V}^L[k] = \mathcal{V}_g[z](an, k) + \mathcal{V}_g[w](an, k), \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad (5.42)$$

l'estimateur  $\delta^*$  peut être calculé à partir de la matrice  $\Gamma_{\mathbf{V}}$  définie par,

$$\Gamma_{\mathbf{V}}[k, k'] = \mathbf{C}_{\mathbf{V}^L}[k, k'] \mathbb{I}\mathbb{I}_b[k - k'], \quad (5.43)$$

où

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_b[k] = 1, \quad \text{si } k \in [0, b, 2b, \dots, (K-1)b], \quad (5.44)$$

$$= 0, \quad \text{sinon.} \quad (5.45)$$

**Proposition 5.11** *Étant donné  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^L$  une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^L$ , alors*

$$\delta^* = \underset{\delta \in \llbracket 0, \dots, L-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} \left[ \langle \mathcal{T}_\delta (\Gamma_{\mathbf{V}})^{-1} \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle \right], \quad (5.46)$$

où  $\delta^*$  est l'estimateur de  $\alpha'(an)$  défini par les équations (5.38), (5.39) et (5.40).

La preuve est donnée en annexe 7.6.

Ainsi le paramètre  $b$  qui était jusqu'alors un paramètre de discrétisation des mesures dans le plan temps fréquence devient un paramètre associé à la matrice de covariance intervenant dans notre méthode d'estimation. Il représente alors la plus petite distance en dessous de laquelle les corrélations fréquentielles seront négligées. Le choix  $b = 1$  par exemple revient à considérer la totalité de la matrice de covariance du processus  $\mathbf{V}^L$  tandis que le choix  $b = L$  revient à ne considérer que la diagonale de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}^L}$  et assure alors son inversibilité.

### 5.3.5 Estimation de la fonction de dilatation

L'ensemble des méthodes développées dans cette section peuvent s'appliquer à l'estimation de la fonction de dilatation. Considérons le vecteur stochastique,

$$\mathbf{W}_{y_d}^L[k] = \mathcal{W}_\psi[y_d](an, k), \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad (5.47)$$

ainsi que la matrice,

$$\Gamma_{\mathbf{W}}[k, k'] = \mathbf{C}_{\mathbf{W}^L}[k, k'] \mathbb{I}\mathbb{I}_b[k - k'], \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad (5.48)$$

où  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}^L}$  est la matrice de covariance du vecteur stochastique

$$\mathbf{W}^L[k] = \mathcal{W}_\psi[z](an, k) + \mathcal{W}_\psi[w](an, k), \quad \forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket. \quad (5.49)$$

**Proposition 5.12** *Étant donné  $U \in \mathbb{C}^L$  une réalisation du vecteur stochastique  $W_{y_m}^L$ , alors*

$$\theta^* = \underset{\theta \in [0, \dots, L-1]}{\operatorname{argmin}} \left[ \langle \mathcal{T}_\delta (\Gamma_{\mathbf{W}})^{-1} U, U \rangle \right], \quad (5.50)$$

où  $\delta^* = q^{\theta^*} \in [1, q, q^2, q^3, \dots, q^{L-1}]$  est un estimateur de  $\gamma'(an)$ .

**Remarque 5.5** *On a alors réduit la quantification de l'estimée et comme dans le cas de la fonction de modulation, l'estimation peut prendre  $L$  valeurs différentes. On notera cependant que la quantification de l'estimée n'est pas uniforme, ceci étant une conséquence directe de l'utilisation des ondelettes dans notre méthode d'estimation.*

## 5.4 Estimation des matrices de covariances

Les méthodes d'estimations proposées précédemment requièrent la connaissance des matrices de covariances  $C_{\mathbf{V}^L}$  et  $C_{\mathbf{W}^L}$ , définies pour tout  $k, k' \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$  par,

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{V}^L}[k, k'] &= (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]})(k, k'), \\ C_{\mathbf{W}^L}[k, k'] &= (C_{W^{an}[z]} + C_{W^{an}[w]})(k, k'). \end{aligned}$$

Nous allons montrer comment la connaissance des fonctions de déformation  $\alpha$  et  $\gamma$  va nous permettre d'estimer ces matrices.

### 5.4.1 Cas de la modulation fréquentielle

Supposons que la fonction de modulation  $\alpha$  soit connue, on peut stationnariser le processus  $y_m$ ,

$$\mathcal{M}_\alpha^{-1} y_m = \mathcal{M}_\alpha^{-1} \mathcal{M}_\alpha z + \mathcal{M}_\alpha^{-1} w = z + w'. \quad (5.51)$$

Comme  $\mathcal{M}_\alpha^{-1}$  est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$  le processus  $w' = \mathcal{M}_\alpha^{-1} w$  est un bruit blanc identiquement distribué à  $w$  (voir prop. 2.12). On a alors accès à l'ensemble des  $N$  vecteurs stochastiques  $\left\{ \mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1} y_m}^{(n)} \right\}_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$  définis  $\forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$  par,

$$\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1} [y_m]}^{(n)}[k] = \mathcal{V}_g[z](an, k) + \mathcal{V}_g[w'](an, k)$$

L'observation de ces  $N$  vecteurs stochastiques va nous permettre d'estimer la matrice de covariance  $C_{\mathbf{V}^L}$ .

**Proposition 5.13** *Disposant de l'ensemble de réalisations  $\left\{ \mathbf{V}^{(n)} \right\}_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ , où pour chaque  $n$ ,  $\mathbf{V}^{(n)}$  est une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1} y_m}^{(n)}$ , un estimateur de la matrice de covariance  $C_{\mathbf{V}^L}$  est donné par*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{V}^{(n,c)}[k] \overline{\mathbf{V}^{(n,c)}[k']}. \quad (5.52)$$

**Preuve** Les processus  $w'$  et  $z$  étant décorrélés

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}}[k, k'] &= \mathbb{E} \left\{ \left( \mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}[k] \right) \left( \mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}[k'] \right)^* \right\}, \\ &= \left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w']} \right) (k, k'). \end{aligned}$$

Comme  $w'$  et  $w$  sont identiquement distribués,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}} = \left( C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]} \right).$$

On a déjà vu en remarque 4.8 que les lois des vecteurs stochastiques  $V^{an}[z]$  et  $V^{an}[w]$  sont indépendantes de l'instant  $n$ , donc quelque soit  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , les vecteurs stochastiques  $\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}$  sont identiquement distribués. L'ensemble des réalisations  $\{\mathbf{V}^n\}_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ , où pour chaque  $n$ ,  $\mathbf{V}^n$  est une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}$ , peut alors être vu comme  $N$  réalisations d'un même vecteur gaussien centré et circulaire de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha^{-1}y_m}^{(n)}}$ , dont un estimateur de la matrice de covariance est donné par la moyenne empirique,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{V}^{(n,c)}[k] \overline{\mathbf{V}^{(n,c)}[k']}.$$

♠

### 5.4.2 Cas de la dilatation temporelle

De la même manière que dans le cas du modèle de modulation fréquentielle, dans le cas où la fonction de dilatation  $\gamma$  est connue, on peut stationnariser le processus  $y_d$ ,

$$\mathcal{D}_\gamma^{-1}y_d = \mathcal{D}_\gamma^{-1}\mathcal{D}_\gamma z + \mathcal{D}_\gamma^{-1}w = z + w', \quad (5.53)$$

où  $w' = \mathcal{D}_\gamma^{-1\gamma}w$  est un bruit blanc identiquement distribué à  $w$ . On a alors accès à l'ensemble des  $N$  vecteurs stochastiques  $\left\{ \mathbf{W}_{\mathcal{D}_\gamma^{-1}y_d}^{(n)} \right\}_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$  définis  $\forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$  par

$$\mathbf{W}_{\mathcal{D}_\gamma^{-1}y_d}^{(n)}[k] = \mathcal{W}_\psi z(an, k) + \mathcal{W}_\psi w'(an, k).$$

L'observation des ces  $N$  vecteurs stochastiques va nous permettre d'estimer la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}^L}$ .

**Proposition 5.14** *Disposant de l'ensemble des réalisations  $\{\mathbf{W}^{(n)}\}_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ , où pour chaque  $n$ ,  $\mathbf{W}^n$  est une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{W}_{\mathcal{D}_\gamma^{-1}y_d}^{(n)}$ , un estimateur de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}^L}$  est,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{W}^{(n)}[k] \overline{\mathbf{W}^{(n)}[k']} \quad (5.54)$$

**Preuve** La preuve est identique à la preuve de la proposition 5.13 en considérant que les lois des vecteurs stochastiques  $\mathbf{W}_z^{(n,c)}$  et  $\mathbf{W}_w^{(n,c)}$  sont indépendantes de l'instant  $n$ . ♠

## 5.5 Algorithme d'estimation conjointe

Nous avons vu en section 5.3 que, sous réserve de connaître les matrices de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}L}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}L}$ , nous étions en mesure d'estimer des versions discrétisées des dérivés des fonctions de déformation,  $\alpha'(an)$  et  $\gamma'(an)$  pour  $n \in [0, N - 1]$ . Nous avons aussi vu en section 5.4 que la connaissance des fonctions de déformation  $\alpha$  et  $\gamma$  nous permettait d'estimer les matrices de covariances  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}L}$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}L}$ . Nous proposons dans cette section un algorithme d'estimation conjointe des fonctions de déformation.

Les processus non-stationnaires  $y_m$  et  $y_d$  considérés seront des signaux discrets, de taille  $L$ , aux conditions périodiques aux bords. On supposera que  $L = aN$ , ainsi, le paramètre  $a$  correspondra au pas temporel des transformées discrètes utilisées numériquement et il sera nécessaire d'estimer  $\alpha(n)$  et  $\gamma(n)$  pour tout  $n \in \llbracket 0, L - 1 \rrbracket$ . L'idée est la suivante, étant donné une première estimation de la dérivée de la fonction de modulation  $\alpha'(an)$  pour  $n \in [0, N - 1]$ , on pourra, par interpolation et intégration, estimer la fonction de modulation  $\alpha(an)$  pour  $n \in [0, N - 1]$ . On pourra ensuite effectuer une première estimation de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}L}$  en stationnarisant le processus modulé  $y_m$ . Cette première estimation nous permettra ensuite d'effectuer une nouvelle estimation de  $\alpha'(an)$ , ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. La première estimation de la fonction de modulation (resp. de dilatation) sera obtenue en utilisant la méthode de fréquence locale (resp. échelle locale) (voir 5.1.1).

Les algorithmes d'estimation dépendront alors de plusieurs hyper-paramètres dont nous étudierons l'influence dans la section 5.6 : Le critère d'arrêt de l'algorithme, que nous choisirons comme un nombre d'itérations fixé (noté  $It$  dans les pseudo-codes 1 et 2), le paramètre  $b$  associé à l'échantillonnage des matrices de covariances, le paramètre  $a$  qui correspond au pas temporel des transformées et les atomes temps-fréquence et temps-échelle utilisées. Le paramètre  $q$  de la transformée en ondelette sera considéré comme un hyper-paramètre associé à la forme des atomes temps-échelle utilisés.

Nous avons vu en propositions 3.11 et 3.17 qu'il n'y avait pas unicité des représentations des modèles de déformations. Ne disposant a priori d'aucune information sur les fonctions de déformation et sur les spectres des processus stationnaires il nous est impossible de les estimer de manière univoque. On imposera donc certaines contraintes aux fonctions de déformation afin de lever cette ambiguïté. La fonction de dilatation sera supposée bijective de  $[0, L - 1]$  dans  $[0, L - 1]$ , cela aura pour conséquence que le signal stationnaire initial et le signal dilaté auront la même durée. La valeur moyenne de la dérivée de la fonction de dilatation sur l'intervalle  $[0, L - 1]$  sera alors égale à 1. La valeur moyenne de  $\alpha'$  sur l'intervalle  $[0, L - 1]$  sera elle fixée à 0. Les valeurs 1 et 0 n'ont pas été choisies au hasard, l'opérateur de modulation fréquentielle laisse un processus invariant en loi lorsque  $\alpha' = 0$  tandis que l'opérateur de dilatation temporelle laisse un processus invariant en loi lorsque  $\gamma' = 1$  (voir propositions 3.12 et 3.18). Les pseudo-codes des algorithmes d'estimation sont donnés dans les algorithmes 1 et 2.

L'interpolation des fonctions de déformation ainsi que de l'opérateur de dilatation inverse est réalisée avec des splines.

## 5.6 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques d'estimation obtenue à partir de sons synthétiques et de sons naturels. Alors que nous avons facilement pu trouver des sons naturels obéissant approximativement au modèle de dilatation temporelle nous n'en n'avons

---

**Algorithm 1:** Estimation jointe de la fonction de modulation et de la covariance

---

**Require:** :  $y_m \in \mathbb{C}^L$ ,  $g \in \mathbb{C}^L$ ,  $a \in \mathbb{N}$   $b \in [0, L - 1]$

- Calculer  $\mathbf{V}_{y_m}^L[k] = \mathcal{V}_g y_m(an, k)$ ,  $k \in [0, L - 1]$ ,  $n \in [0, N - 1]$ ,

**Initialiser** Estimer  $\alpha^{(0)}(an)$ ,  $n \in [0, N - 1]$  en suivant (5.1)

**while**  $p < It$  **do**

- Calculer  $\alpha^{(p)}(n)$ ,  $n \in [0, L - 1]$  par interpolation et intégration de  $\alpha^{(p)}(an)$ .
- Stationnariser  $y_m$  en suivant (5.51).
- Calculer la transformée temps fréquence de signal stationnarisé  $\mathbf{V}_{\mathcal{M}_{a^{-1}}^{-1} y_m}^{(n)}[k]$
- Estimer la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{V}^L}$  définie en (5.42) en suivant (5.52).
- Calculer  $\Gamma_{\mathbf{V}}$  suivant (5.43).
- Estimer  $\alpha^{(p+1)}(an)$ ,  $n \in [0, N - 1]$  en suivant (5.46).
- $p := p + 1$

**fin while**

---



---

**Algorithm 2:** Estimation jointe de la fonction de dilatation et de la covariance

---

**Require:** :  $y_d \in \mathbb{C}^L$ ,  $\psi \in \mathbb{C}^L$ ,  $a \in \mathbb{N}$   $b \in [0, L - 1]$ ,  $q \in \mathbb{R}$

- Calculer  $\mathbf{W}_{y_d}^L[k] = \mathcal{W}_g y_d(an, k)$ ,  $k \in [0, L - 1]$ ,  $n \in [0, N - 1]$ ,

**Initialiser** Estimer  $\gamma^{(0)}(an)$ ,  $n \in [0, N - 1]$  en suivant (5.2)

**while**  $p < It$  **do**

- Calculer  $\gamma^{(p)}(n)$ ,  $n \in [0, L - 1]$  par interpolation et intégration de  $\gamma^{(p)}(an)$ .
- Stationnariser  $y_d$  en suivant (5.53).
- Calculer la transformée temps fréquence de signal stationnarisé  $\mathbf{W}_{\mathcal{D}_{\gamma^{-1}}^{-1} y_d}^{(n)}[k]$
- Estimer la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{W}^L}$  définie en (5.49) en suivant (5.54).
- Calculer  $\Gamma_{\mathbf{W}}$  suivant (5.48).
- Estimer  $\gamma^{(p+1)}(an)$ ,  $n \in [0, N - 1]$  en suivant (5.50).
- $p := p + 1$

**fin while**

---

trouvé aucun se rapprochant du modèle de modulation fréquentielle, les sons produits naturellement possédant généralement des propriétés harmoniques qui sont brisées par la modulation. Dans l'ensemble des figures les courbes d'estimation sont superposées de manière arbitraire sur les plans temps-fréquence et temps-échelle. Nous avons en effet vu que nous imposons une moyenne égale à 1 pour la dérivée de la fonction dilatation et une moyenne égale à 0 pour la dérivée de la fonction de modulation, nous avons donc recalé fréquemment les estimations (ainsi que les vrais fonctions de déformation le cas échéant), afin de pouvoir aisément les comparer aux scalogrammes et aux spectrogrammes des signaux considérés. Les exemples sonores utilisés dans cette section peuvent être écoutés à l'adresse suivante : <http://www.latp.univ-mrs.fr/~omer/SoundDef/>.

### 5.6.1 Modèle de modulation fréquentielle

Les transformées temps-fréquences présentées dans cette section ont été réalisées avec le logiciel LTFAT (voir [Søndergaard et al., 2012]), les atomes temps-fréquences utilisés sont des

gaussiens discrétisées. Sauf mention contraire, les atomes temps-fréquence utilisés ont une variance temporelle égale à leur variance fréquentielle et l'on ne considère que la diagonale de la matrice de covariance pour l'estimation par maximum de vraisemblance approché.

### 5.6.1.1 Signal synthétique large bande

Les figures 5.1 et 5.2 illustrent les résultats d'estimations obtenus sur un signal synthétique large bande modulé fréquemment. Le signal est entaché d'un bruit blanc. L'estimation obtenue à partir de la méthode de fréquence locale, outre de présenter une forte variance au cours du temps, comporte un grand biais et ne parvient pas à suivre les variations d'amplitude de la vraie fonction. Cela peut s'expliquer par la présence du bruit blanc dans le signal qui tend à diminuer les variations du centre de gravité spectral du signal au cours du temps. L'estimation obtenue à partir de la méthode de maximum de vraisemblance approché est celle obtenue à la 10-ième itération de notre algorithme, elle possède une légère variance mais suit fidèlement la fonction originale. On remarquera néanmoins que l'effet de quantification de l'estimée reste observable sur l'estimation effectuée avec la méthode du maximum de vraisemblance approché (fig. 5.2) et que le problème est inexistant pour l'estimation effectuée avec la méthode de fréquence locale.

### 5.6.1.2 Spectre de raies

Les figures 5.3 et 5.4 montrent les résultats d'estimation sur un signal synthétique à spectre de raies. Le signal est obtenu en modulant une somme d'exponentielles complexes au cours du temps et en y ajoutant un bruit blanc, la fonction de modulation étant continue par morceaux. Alors que la méthode de fréquence locale comporte une forte variance au cours du temps, due à la présence du bruit blanc, la méthode proposée suit correctement la fonction originale, même lorsque celle-ci présente des discontinuités. On remarquera que la variance de l'estimation par maximum de vraisemblance approché est beaucoup plus faible sur ce signal que sur le signal large bande de la section précédente. Cela peut s'expliquer par le caractère déterministe du signal d'intérêt. L'estimation effectuée avec l'algorithme itératif présenté ici est celle obtenue à la 4-ième itération.

### 5.6.1.3 Influence de la localisation des atomes temps-fréquence

Nous étudions dans ce paragraphe l'influence de la localisation de la fenêtre d'analyse  $g$  sur les résultats d'estimation. Nous avons généré 30 simulations d'un signal gaussien modulé fréquemment. La fonction de modulation est un sinus dont la période est égale à la taille du signal. Les estimations de la fonction de modulation ont été réalisées avec différentes valeurs de localisation de la fenêtre d'analyse,  $r = 100$ ,  $r = 10$ ,  $r = 6$ ,  $r = 4$ ,  $r = 1$ ,  $r = 0.1$  et  $r = 0.01$  où  $r$  est le rapport entre la variance temporelle et la variance fréquentielle de  $g$ . Le tableau 5.1 présente l'erreur moyenne normalisée ainsi que la variance des estimations. Les résultats présentés ont été obtenus en ne considérant que la diagonale de la matrice de covariance et sont ceux obtenus à la 8-ième itération de l'algorithme itératif. On observe que de trop fortes ou de trop faibles localisations de la fenêtre d'analyse  $g$  ont tendance à altérer la qualité des estimations. Il convient de remarquer que la mesure de l'erreur moyenne normalisée est fortement sensible à la variation des estimations et que même si l'estimateur n'est pas biaisé, une grande variance entraînera

une grande erreur moyenne normalisée. On peut supposer que c'est ce qu'il se passe aux petites valeurs de  $r$ .

	r=100	r=10	r=6	r=4	r=1	r=0.1	r=0.01
err.	0.031	0.017	0.16	0.015	0.020	0.056	0.180
var.	1.45	0.46	0.40	0.37	0.61	4.91	53.4

TABLE 5.1 – Analyse de l'influence de la localisation de la fenêtre d'analyse. Les test sont effectués avec différentes localisations de la fenêtre d'analyse,  $r$  est le rapport entre la variance temporelle et la variance fréquentielle de  $g$ .

#### 5.6.1.4 Convergence de l'algorithme d'estimation itérative

La figure 5.5 illustre la convergence de l'algorithme d'estimation itérative. L'évolution de l'erreur moyenne normalisée (à gauche) ainsi que l'évolution de la variance des estimations (à droite)  $y$  sont présentées. La première estimation correspond à l'initialisation de notre algorithme à l'aide de la méthode de fréquence locale. Les résultats ont été obtenus à partir d'un signal large bande modulé fréquentiellement par une fonction sinusoïdale dont la période est égale à la longueur du signal. On observe clairement une décroissance de l'algorithme, l'erreur moyenne se stabilisant autours de 0.055, la variance autour de 4.80.

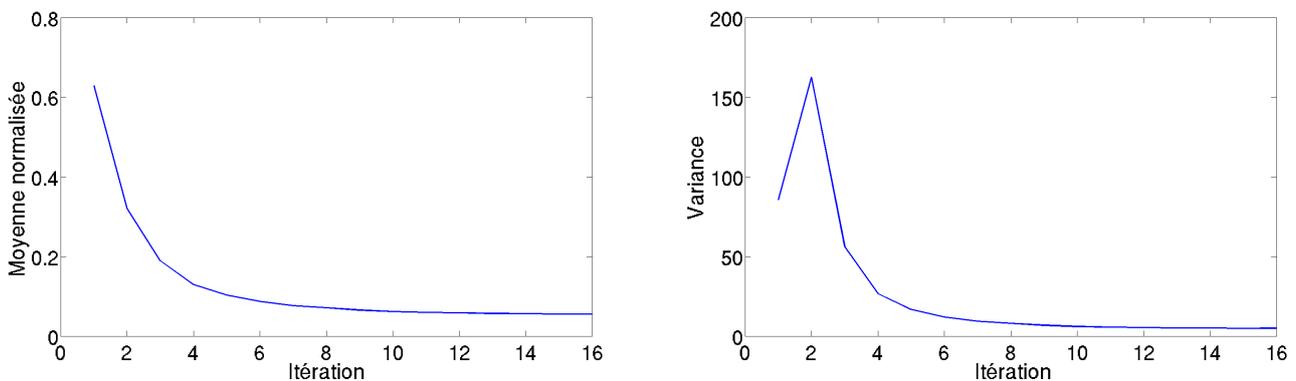


FIGURE 5.5 – Convergence de l'algorithme d'estimation itérative.

#### 5.6.1.5 Influence du paramètre d'échantillonnage de la matrice de covariance

Afin d'évaluer quantitativement l'influence du paramètre d'échantillonnage de la matrice de covariance nous avons réalisé une étude statistique dans laquelle 30 simulations d'un signal gaussien modulé fréquentiellement ont été générées. La fonction de modulation est un sinus dont la période est égale à la taille du signal. Les estimations de la fonction de modulation ont été réalisées avec différents paramètres d'échantillonnage de la matrice de covariance,  $b = 10$ ,  $b = 60$ ,  $b = 100$  et  $b = 400$ , la longueur du signal est de 44000 points. Le tableau 5.2 présente l'erreur moyenne normalisée (c'est à dire la norme euclidienne de  $\delta - \alpha'$ , normalisée par la

norme euclidienne de  $\alpha'$  où  $\delta$  est l'estimation de  $\alpha'$ ) moyennée sur l'ensemble des réalisations. Nous fournissons également dans le même tableau la variance des estimations. Les résultats présentés sont ceux obtenus à la 8-ième itération. De manière assez étonnante on remarque que l'erreur moyenne et la variance calculée diminuent lorsque qu'on considère un paramètre d'échantillonnage plus grand. Plusieurs explications sont envisageables. La première est que plus le paramètre d'échantillonnage est petit, moins la matrice de covariance est bien conditionnée, cela pouvant entraîner des erreurs numériques plus importantes lors de son inversion. La seconde est que la variance des estimations peut augmenter lorsque l'on augmente le nombre de valeurs non nulles dans la matrice de covariance, se répercutant ainsi sur l'erreur moyenne normalisée.

	b=10	b=60	b=100	b=400
err.	$70.9 \times 10^{-3}$	$29.8 \times 10^{-3}$	$25.5 \times 10^{-3}$	$20.5 \times 10^{-3}$
var.	7.94	1.40	1.03	0.67

TABLE 5.2 – Analyse de l'influence du paramètre d'échantillonnage  $b$  de la matrice de covariance.

## 5.6.2 Modèle de dilatation temporelle

Nous allons maintenant présenter les résultats de l'algorithme d'estimation de la fonction de dilatation. Les atomes ondelettes utilisés sont des dérivées  $k$ -ième de gaussiennes, elle possèdent donc  $k$  moments nuls et plus l'ordre de dérivation sera grand plus les ondelettes seront localisées fréquemment. Les estimations obtenues ont été réalisées en ne considérant que les diagonales des matrices de covariances. Les sons naturels sur lesquels nous avons testé notre algorithme n'étaient pas nécessairement entachés de bruit blanc, nous avons donc décidé d'ajouter une constante de régularisation aux diagonales des matrices de covariances considérées. Cela nous permet alors d'assurer l'inversibilité des matrices sans corrompre le signal d'origine.

### 5.6.2.1 Signal synthétique large bande

La figure 5.6 illustre le résultat des estimations obtenues sur un signal synthétique large bande dilaté temporellement. On remarque que l'estimation obtenue à partir de la méthode du maximum de vraisemblance approché suit correctement la vraie courbe de dilatation, et ce, même aux plus grandes échelles (entre 0.1s et 0.3s) où les ondelettes sont moins bien localisées temporellement. L'estimation obtenue à partir de la méthode d'échelle locale comporte une plus grande variance, et n'arrive pas à capter la dynamique de la déformation en basse fréquence.

### 5.6.2.2 Son produit par un moteur de voiture

Le son représenté figure 5.7 est produit par le moteur d'une voiture durant une phase d'accélération. Il possède une composante harmonique large bande ainsi qu'un bruit basse fréquence stationnaire. La transformée en ondelette normalisée, comme nous l'avons présentée en section 4.1.2 est adaptée pour un signal comportant un bruit de fond blanc (voir remarque 4.13). Lorsque que le bruit de fond n'est pas blanc il sera judicieux d'utiliser une normalisation alternative qui nous permettra d'assurer que la variance des coefficients d'ondelettes du bruit soit

approximativement constante à chaque échelle. La famille d'ondelettes utilisée ici est de la forme  $\psi_{\tau,s}(t) = q^{-\frac{3}{2}s} \psi\left(\frac{t-\tau}{q^s}\right)$ . On remarque que l'estimation réalisée à partir de la méthode de l'échelle locale a une variance assez importante et est sensible aux variations d'intensité de la composante harmonique. Le centre de gravité du scalogramme a tendance à se déplacer vers le haut lorsque l'intensité de cette composante est faible et, inversement, à se déplacer vers le bas lorsque l'intensité de la composante harmonique augmente (autour de 2.6s). L'estimation obtenue à partir du maximum de vraisemblance approché est beaucoup plus lisse et ne semble pas sensible aux variations d'intensités de la composante harmonique. La figure 5.8 représente le scalogramme du signal stationnarisé. On remarquera enfin que notre algorithme ne corrige pas les variations d'intensité au cours du temps et que celles-ci restent perceptibles à l'écoute du signal stationnarisé.

### 5.6.2.3 Voie chantée

Le son représenté figure 5.9 est celui d'une voie chantée. On distingue clairement les harmoniques produit par les cordes vocales ainsi que les variations de hauteurs de la voie au cours du temps. Les "bulles" présentes autour de 1.5s et après 5s sont des battements qui correspondent à la présence de trémolos dans le son, il n'est pas évident de faire apparaître ces rapides variations de fréquences au cours du temps avec la transformée en ondelettes (nous renvoyons à [Delprat, 1992] pour une étude détaillée du problème). Encore une fois, l'estimation réalisée avec la méthode d'échelle locale comporte une forte variance et est fortement sensible aux variations d'intensité des harmoniques. L'estimation réalisée avec le maximum de vraisemblance approché suit correctement les variations de hauteurs de la voie, on remarquera cependant que les trémolos sont mal détectés par notre algorithme et qu'ils restent perceptibles à l'écoute du signal stationnarisé. Les trémolos étant de faible amplitude, on remarquera que le spectre du signal stationnarisé présenté figure 5.10 fait clairement apparaître les différents harmoniques de la voie chantée.

### 5.6.2.4 Son de couinement

Le son représenté figure 5.11 est produit par le frottement d'un doigt sur une plaque de verre. Le son est très harmonique et possède des variations de hauteur assez rapides au cours du temps. Ici encore l'estimation du maximum de vraisemblance approchée est assez lisse et semble suivre correctement les variations des harmoniques au cours du temps, même lorsque celles-ci varient rapidement (autour de 1.5-1.6s). A l'écoute du son "stationnarisé", l'auditeur pourra entendre une composante basse fréquence non stationnaire, cette composante peut être repérée aux grandes échelles sur le scalogramme de la figure 5.12 autour de 0.1s, 0.5s, 1.2s 1.6s et 2s. Cette composante non-stationnaire provient en fait d'une composante basse fréquence stationnaire présente dans le signal d'origine, cette composante stationnaire à été déstationnarisée lorsque l'on a appliqué l'opérateur de dilatation inverse au signal original. On remarquera que le spectre du signal stationnarisé présenté figure 5.12 fait ici aussi clairement apparaître les propriétés harmoniques du son.

### 5.6.2.5 Influence du nombre de moments nuls et comparaison des méthodes

Afin d'évaluer l'influence de la localisation des ondelettes utilisées lors des simulations et de comparer quantitativement notre méthode à la méthode d'échelle locale, nous avons réalisé une étude statistique de la précision de notre algorithme. 500 réalisations d'un signal aléatoire dilaté temporellement ont été générées en utilisant la même fonction de déformation. Celle-ci a été estimée au moyen de la méthode d'échelle locale et de la méthode du maximum de vraisemblance approché en utilisant différentes ondelettes. Nous fournissons dans le tableau 5.3 l'erreur moyenne normalisée (la norme euclidienne de  $\gamma' - \delta$ , normalisée par la norme euclidienne de  $\gamma'$  où  $\delta$  est l'estimation de  $\gamma'$ ) moyennée sur l'ensemble des réalisations ainsi que la variance des estimations. Les fonctions de déformation considérées sont des fonctions sinusoïdales dont la période est égale à la longueur du signal (simulation 1), à la moitié de la longueur du signal (simulation 2) et à un quart de la longueur du signal (simulation 3). Les résultats numériques montrent clairement que la méthode proposée surpasse la méthode d'échelle locale, à la fois en termes d'erreur moyenne et de variance. Les ondelettes utilisées sont des dérivées  $k$ -ièmes de fonctions gaussiennes, trois ondelettes différentes ont été testées, chacune associée à un ordre de dérivation différent,  $k = 7$ ,  $k = 25$  et  $k = 70$ . Les résultats numériques montrent que les ondelettes mieux localisées fréquemment (ici  $k = 70$ ) donnent des estimations plus précises en terme d'erreur et de variance.

	Simulation 1		Simulation 2		Simulation 3	
	err.	var.	err.	var.	err.	var.
$k = 70$ : Échelle locale	0.394	32.08	0.388	32.05	0.391	32.04
$k = 70$ : Méthode proposée	0.115	6.61	0.126	7.76	0.151	10.44
$k = 25$ : Échelle locale	0.248	19.53	0.259	21.56	0.358	28.55
$k = 25$ : Méthode proposée	0.129	7.91	0.165	11.25	0.257	20.54
$k = 7$ : Échelle locale	0.296	33.47	0.294	34.29	0.315	37.90
$k = 7$ : Méthode proposée	0.226	24,75	0.236	26.47	0.275	33.03

TABLE 5.3 – Analyse de la performance de la méthode d'estimation de dilatation temporelle proposée. Les test sont effectués en utilisant trois ondelettes différentes (des dérivées d'ordre  $k$  de fonctions gaussiennes,  $k = 70$  en haut,  $k = 25$  au milieu et  $k = 7$  en bas).

### 5.6.3 Conclusion sur les estimations numériques

Nous avons présenté dans cette section des résultats d'estimations obtenus à partir de sons synthétiques et de sons naturels. Dans les deux cas, la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance approché s'est avérée bien plus performante que les méthodes de fréquence locale ou d'échelle locale. Les estimations suivent fidèlement les vraies courbes de déformation, et les tests sur des signaux naturels ont permis de correctement stationnariser les signaux. Nous avons aussi donné des résultats sur l'influence des différents hyper-paramètres de l'algorithme. Ces résultats sont donnés à titre indicatif et ne prétendent pas apporter de réponse générale quant à la forme des familles d'atomes temps-fréquence et temps-échelle à utiliser. Il est évident que les valeurs optimales des hyper-paramètres de notre algorithme sont, si elle existent, fortement dépendantes des signaux considérés ainsi que de leurs dynamiques.

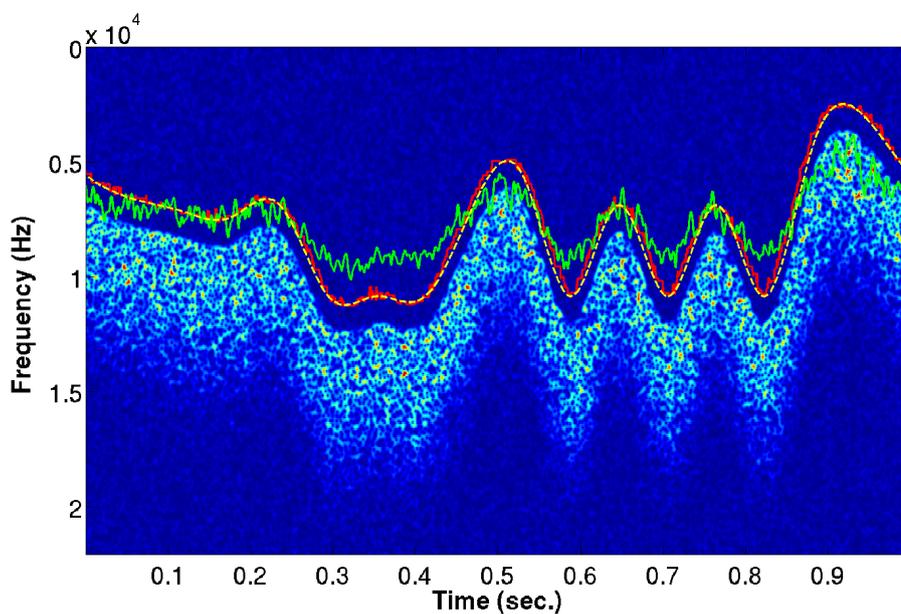


FIGURE 5.1 – Spectrogram d'un signal synthétique large bande modulé fréquentiellement. Les estimations de la dérivée de la fonction de modulation obtenue avec la méthode de la fréquence locale (en vert) et avec la méthode proposée (en rouge) sont superposées avec la vraie fonction (en jaune).

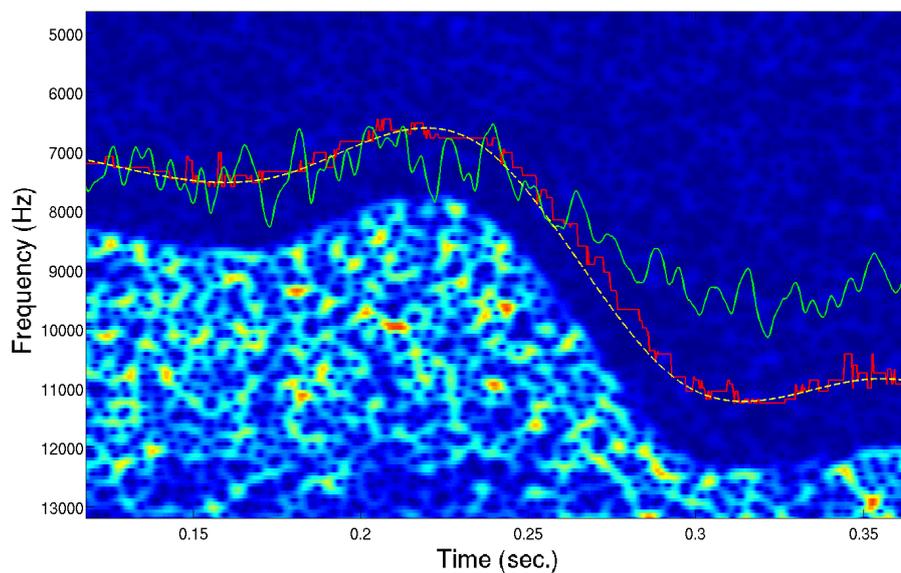


FIGURE 5.2 – Zoom sur un détail de la figure 5.1.

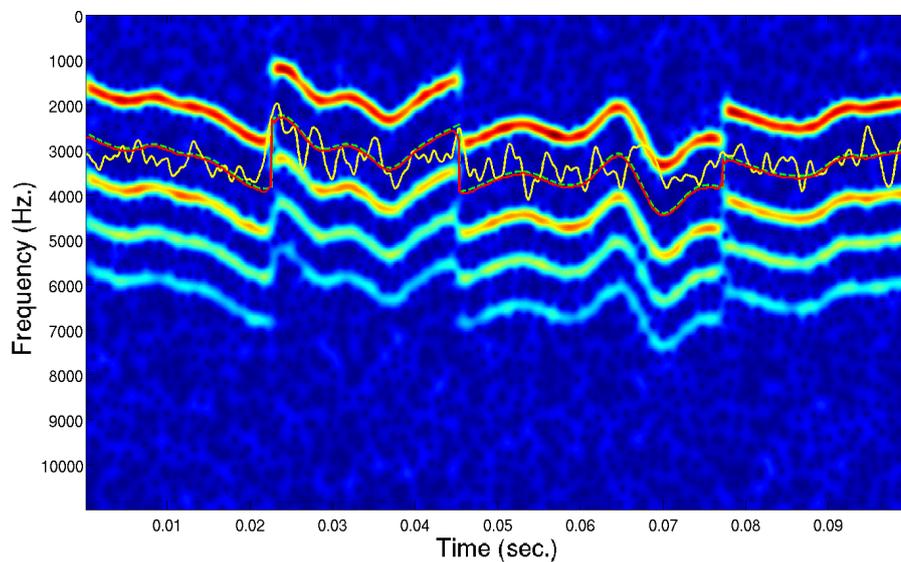


FIGURE 5.3 – Spectrogramme d'un signal synthétique à spectre de raies modulé fréquemment. Les estimations de la dérivée de la fonction de modulation obtenue avec la méthode de la fréquence locale (en jaune) et avec la méthode proposée (en rouge) sont superposées avec la vraie fonction (en vert).

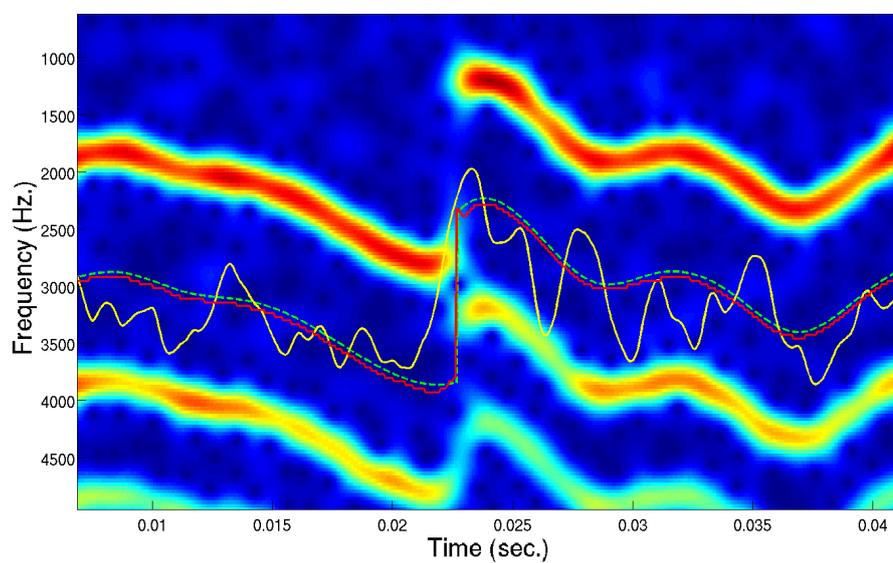


FIGURE 5.4 – Zoom sur une partie de la figure 5.3.

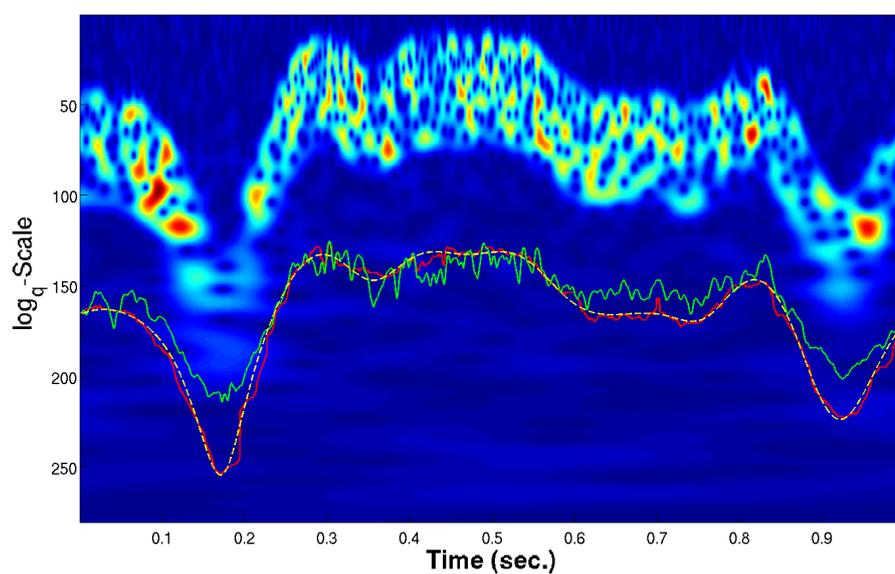


FIGURE 5.6 – Scalogramme d'un signal synthétique large bande dilaté temporellement. Les estimations de la dérivée de la fonction de modulation obtenue avec la méthode de la fréquence locale (en vert) et avec la méthode proposée (en rouge) sont superposées avec la vraie fonction (en jaune).

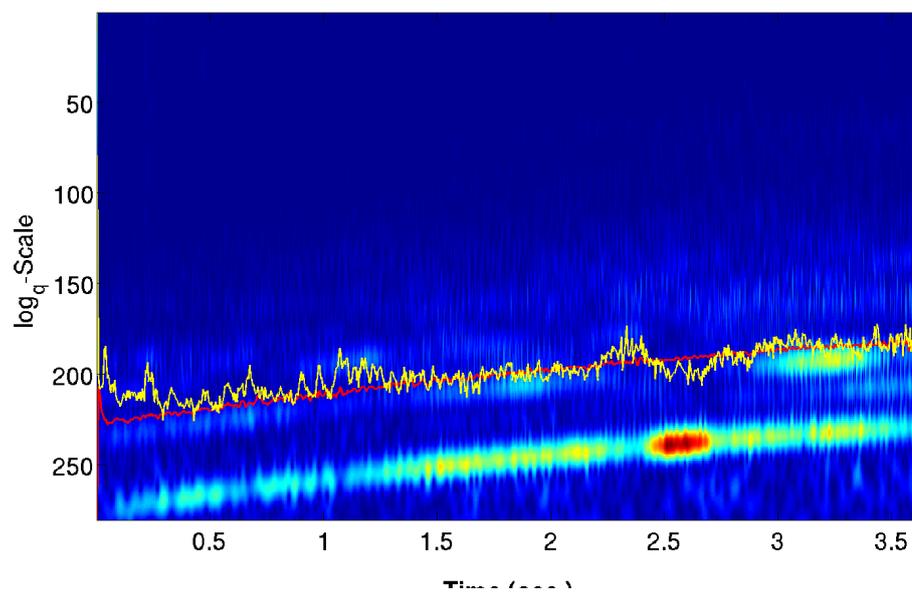


FIGURE 5.7 – Scalogramme d'un sons de moteur de voiture en phase d'accélération superposé avec l'estimation obtenue à partir de la méthode de la fréquence locale (en jaune) et celle obtenue à partir de la méthode proposée (en rouge).

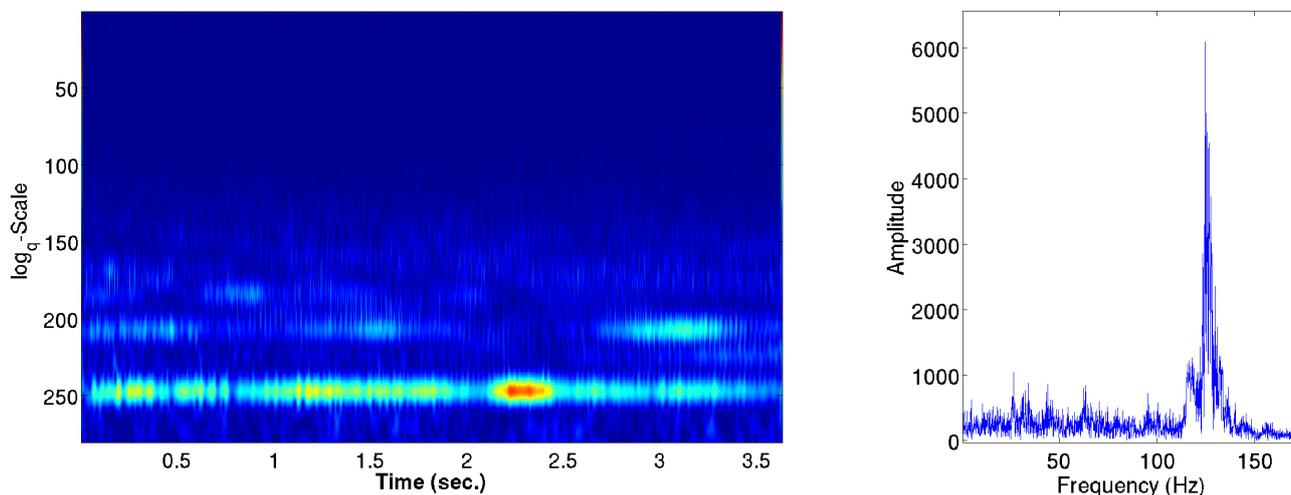


FIGURE 5.8 – Scalogramme (à gauche) et spectre (à droite) du signal "stationnarisé".

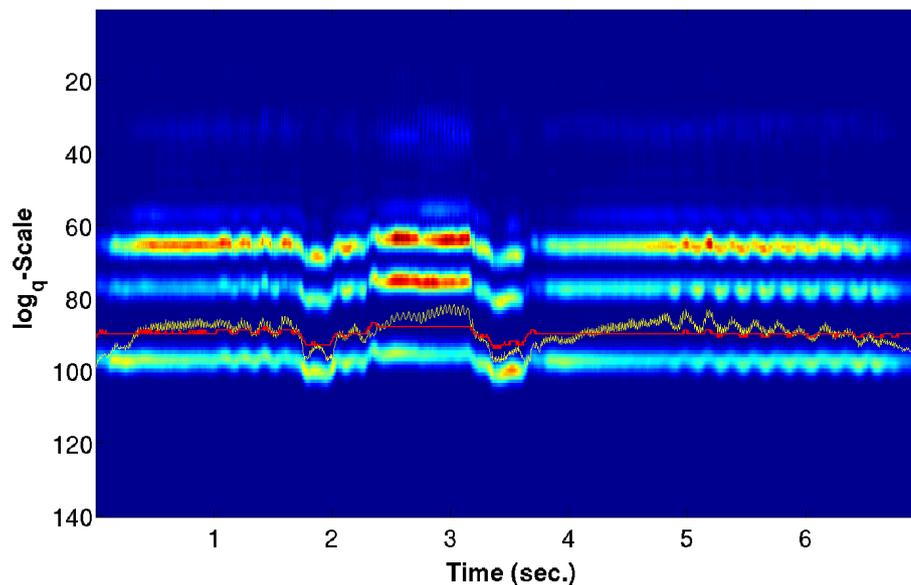


FIGURE 5.9 – Scalogramme d'un sons de voie chantée superposé avec l'estimation obtenue à partir de la méthode de la fréquence locale (en jaune) et celle obtenue à partir de la méthode proposée (en rouge).

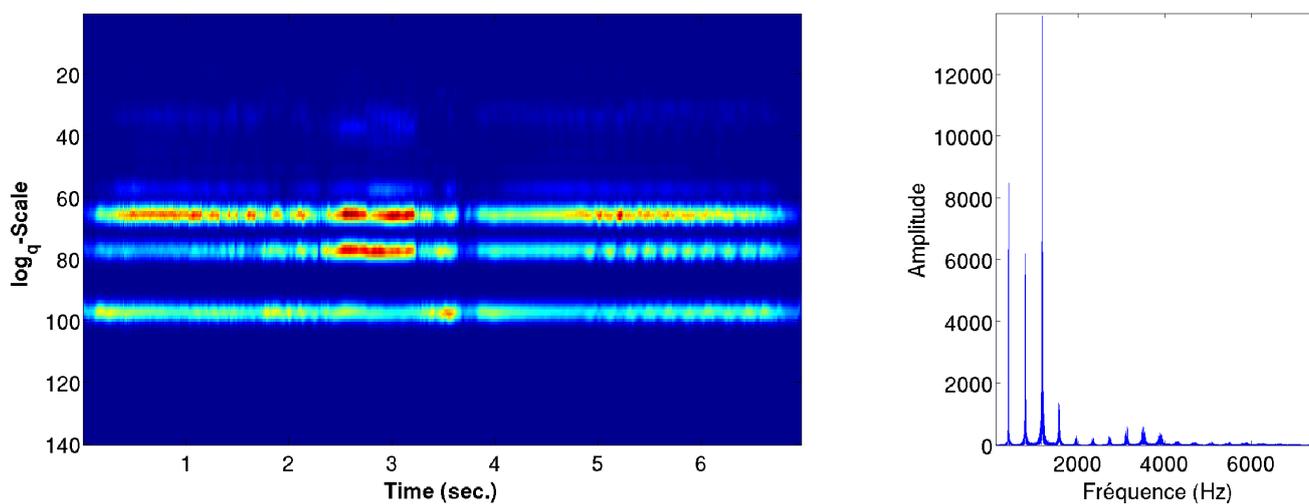


FIGURE 5.10 – Scalogramme (à gauche) et spectre (à droite) du signal stationnarisé.

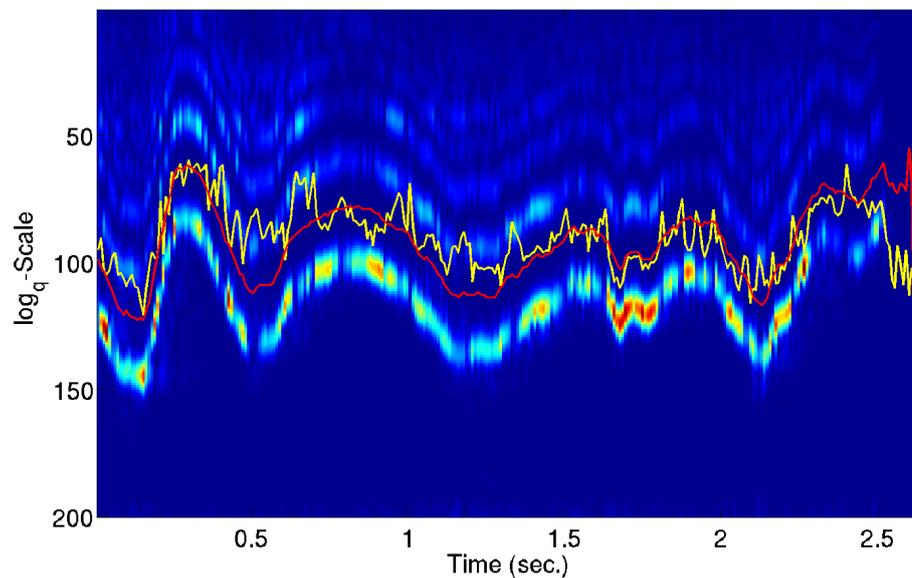


FIGURE 5.11 – Scalogramme d'un sons de couinement superposé avec l'estimation obtenue à partir de la méthode de la fréquence locale (en jaune) et celle obtenue à partir de la méthode proposée (en rouge).

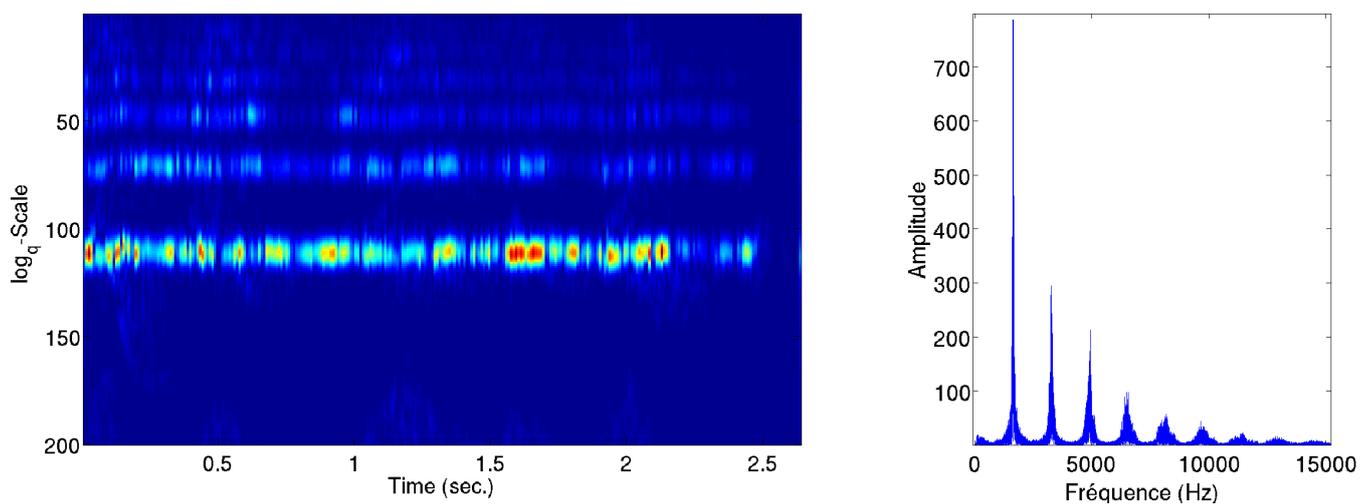


FIGURE 5.12 – Scalogramme (à gauche) et spectre (à droite) du signal stationnarisé.



# Conclusion et perspectives

---

Ce travail s'est donc intéressé au très vaste sujet qu'est la modélisation et l'estimation des non-stationnarités dans les signaux audio. Comme dit Patrick Flandrin, "la non-stationnarité est une non-propriété" et il est en pratique impossible de vouloir la caractériser de manière générale. Donner une mesure de non-stationnarité implique assez naturellement de vouloir mesurer un écart à la stationnarité et c'est cette approche que nous avons adoptée dans ce manuscrit. Celle-ci n'est pas pertinente dans toutes les situations, il est en effet difficile d'interpréter la mesure d'un écart à la stationnarité si l'on considère le cas des signaux impulsionsnels. Elle prend par contre tout sens lorsqu'on s'intéresse à des signaux du type *timbre – dynamique* pour lesquels la non-stationnarité est complètement associée à une fonction évoluant au cours du temps et où les processus étudiés possèdent localement des propriétés de stationnarité. Nous avons donc étudié deux modèles de non-stationnarité dans ce manuscrit, ou plus exactement, deux modèles de déformation des signaux stationnaires. Le modèle de modulation fréquentielle, très largement étudié et utilisé dans le cas où la porteuse est un signal déterministe à bande étroite, beaucoup moins dans le cas où la porteuse est un signal stationnaire large bande, et le modèle de dilatation temporelle qui nous a permis de modéliser correctement les propriétés d'harmonicité des sons naturels.

Nous avons choisi de modéliser les sons comme des processus stochastiques généralisés. Alors que ceux-ci sont très généralement considérés comme des processus à valeurs réelles, nous avons considéré dans ce manuscrit des processus stochastiques généralisés à valeurs possiblement complexes. Différentes notions que nous avons abordées au chapitre II proviennent initialement de la théorie des processus usuels à valeurs complexes ou des vecteurs stochastiques à valeurs complexes (circularité, vecteurs gaussiens complexes, processus analytiques, seconde matrice de covariance,...). D'autres notions proviennent directement de la théorie des processus généralisés à valeurs réelles (moments généralisés, fonctionnelle caractéristique,...). Le chapitre II nous a donc permis d'unifier l'ensemble de ces outils et d'apporter ainsi quelques éléments nécessaires à l'étude des processus stochastiques généralisés à valeurs complexes.

Nous avons ensuite défini les opérateurs de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle agissant sur des distributions tempérées et étudié leurs propriétés. Alors que la définition de l'opérateur de modulation n'a pas posé de problème particulier, la définition de l'opérateur de dilatation impliquait de pouvoir définir la composition d'une distribution tempérée par une fonction et nous avons pour cela introduit un nouvel ensemble de fonctions appelé groupe des dilations contrôlées. Nous nous sommes par ailleurs intéressés à une classe d'endomorphismes définis sur des espaces de processus généralisés, les pseudo-filtres, possédant la propriété fondamentale de conserver les propriétés de stationnarité des processus stochastiques. Nous avons alors proposé des conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme sur un espace de processus généralisés soit un pseudo-filtre.

Le chapitre IV nous a permis de remarquer que les opérateurs de déformation considérés pouvaient être approximés par des opérateurs de translation dans les plans temps-fréquence et

temps-échelle. Nous avons ensuite vu que lorsque l'on considérait que ces opérateurs agissaient sur des processus stochastiques, les translations se retrouvaient alors le long des diagonales des covariances des transformées temps-fréquence et temps-échelle des processus stochastiques déformés. Différents théorèmes permettant de quantifier les erreurs d'approximations effectués ont alors été proposés.

C'est assez naturellement qu'au chapitre V nous avons donné l'expression d'un maximum de vraisemblance approché des fonctions de déformation, en s'appuyant sur l'estimation de translations le long des diagonales des covariances. Nous avons proposé un algorithme itératif afin d'estimer conjointement les fonctions de déformation associées à la composante *dynamique* et les signaux stationnaires sous-jacents, associés au *timbre* du son. L'algorithme a finalement été testé sur des signaux synthétiques et sur des sons naturels et les résultats obtenus nous ont permis de confirmer la pertinence du modèle *timbre – dynamique*.

## Perspectives

Comme c'est généralement le cas, les travaux développés au cours de cette thèse ont soulevé un grand nombre de questions théoriques restées pour l'instant sans réponse.

La plupart des notions développées au chapitre II ont soit étendu certaines propriétés des vecteurs stochastiques à valeurs complexes au cas des processus généralisés à valeurs complexes, soit étendu certaines propriétés des processus généralisés à valeurs réelles au cas des processus généralisés à valeurs complexes. Il serait intéressant d'étendre cette approche à d'autres notions qui ne sont pas abordées dans ce manuscrit. On peut par exemple se demander dans quelle mesure nous pourrions étendre la représentation de Cramér au cas des processus généralisés. On peut aussi se demander quelles sont les conditions sur la fonctionnelle caractéristique d'un processus généralisé permettant d'assurer que celui-ci possède des moments généralisés jusqu'à un ordre donné. Une autre question intéressante est de savoir quelles conditions sont nécessaires pour que la seconde covariance généralisée d'un processus stationnaire soit une distribution positive, cela impliquerait alors qu'on puisse associer une mesure spectrale au second spectre généralisé.

Si l'on s'attarde sur les travaux développés dans le chapitre II, la question principale concerne l'expression générale des pseudo-filtres. Nous avons en effet donné des conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme sur l'espace des distributions tempérées soit un pseudo-filtre. Nous avons pour cela considéré des endomorphismes associés à un symbole de Kohn-Nirenberg continu. On pourra alors naturellement se demander quels endomorphismes sur l'espace des distributions tempérées ne sont pas associés à un symbole de Kohn-Nirenberg continu.

Les questions théoriques relatives aux chapitres suivants concernent surtout les méthodes d'estimation. La plupart des estimateurs (maximum de vraisemblance, maximum a posteriori) reposent sur les densités de probabilité des variables aléatoires considérées. Il serait intéressant de pouvoir construire des estimateurs directement sur les fonctions caractéristiques (ou sur les fonctionnelles caractéristiques) dans le cas où les objets considérés ne possèdent pas de densité de probabilité.

D'un point de vue applicatif, les principales perspectives qu'offrent ces travaux sont liées au formalisme proposé pour l'étude des opérateurs de déformation. Nous avons proposé d'approximer en chaque point un opérateur de déformation par son opérateur tangent, celui-ci

ayant la propriété fondamentale d'être un pseudo-filtre. Les expressions des opérateurs tangents à l'opérateur de modulation fréquentielle et à l'opérateur de dilatation temporelle ont montrées que les espaces de représentation adaptés à leurs études étaient respectivement les plans temps-fréquence et temps-échelle. On pourrait alors imaginer généraliser cette approche à d'autres types d'opérateurs de déformation et les expressions de leurs opérateurs tangents pourraient nous amener à construire des espaces de représentation exotiques, dans lesquels les non-stationnarités se traduisent par des translations au cours du temps. S'il l'on prend l'exemple du son émis par une voiture en mouvement on sait que les non-stationnarités ne peuvent être uniquement caractérisées par une simple dilatation temporelle. Les vibrations produites par le moteur rentrent en résonance avec les différents éléments de la voiture tels que le châssis ou la carrosserie. Selon la vitesse de la voiture ces résonances vont alors amplifier ou non certaines harmoniques. Le cas des instruments de musique est aussi très représentatif de ce phénomène, selon la notes jouée, on observe non seulement une variation de la fréquence fondamentale, mais aussi des amplifications différentes de chacune des harmoniques. Ce fut d'ailleurs l'un des obstacles que nous avons rencontré lorsque nous avons testé notre méthode sur des sons naturels, on pouvait généralement distinguer des variations d'amplitude des harmoniques sur les sons "stationnarisés". La prise en compte de modèles physiques plus complets, permettant de modéliser ces résonances, pourrait nous permettre d'adapter les espaces de représentation dans le but d'estimer au mieux les non-stationnarités des signaux considérés.

De manière moins ambitieuse, on pourrait évidemment compléter les modèles de dilatation temporelle et de modulation fréquentielle en introduisant une variation inconnue de l'amplitude des signaux au cours du temps. On pourrait alors obtenir le même type d'approximations que celles effectuées au chapitre IV et estimer conjointement les fonctions de déformation et les amplitudes des signaux.

On pourrait aussi imaginer adopter un point de vue bayésien pour l'estimation des non-stationnarités. L'introduction d'une information "a priori" sur les fonctions de déformation pourrait conduire à ajouter un terme de régularisation dans nos méthodes d'estimation. Celui-ci nous permettrait, par exemple, d'obtenir des résultats d'estimation plus lisses.

Enfin, il serait bien entendu utile d'étendre ces modèles de déformation à des signaux multivariés, ce qui nous permettrait d'estimer des déformations de textures en deux dimensions. Une des questions serait alors de savoir comment exploiter les propriétés d'isotropie d'une image, si elle en possède, afin d'améliorer la qualité de nos estimations.



## 7.1 Stabilité de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ à la composition, preuve de la proposition 2.1

Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,

$$\forall p \in \mathbb{N} \exists C_p > 0, \exists N_p \in \mathbb{N} / \forall t, |\alpha^{(p)}(t)| \leq C_p(1 + |t|)^{N_p} \quad (7.1)$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \exists D_q > 0, \exists M_q \in \mathbb{N} / \forall t, |\beta^{(q)}(t)| \leq D_q(1 + |t|)^{M_q}. \quad (7.2)$$

Regardons la dérivée d'ordre  $n$  de  $\alpha \circ \beta$  à l'aide de la formule de Faà di Bruno

$$(\alpha \circ \beta)^{(n)}(t) = \sum_{\pi \in \Pi} \alpha^{|\pi|}(\beta(t)) \cdot \prod_{B \in \pi} \beta^{|B|}(t),$$

où  $\pi$  parcourt l'ensemble  $\Pi$  de toutes les partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ,  $B \in \pi$  signifie que la variable  $B$  parcourt la liste de tous les blocs de la partition  $\pi$  et  $|A|$  désigne le cardinal de l'ensemble  $A$  donc  $|\pi|$  est le nombre de blocs de la partition  $\pi$ , et  $|B|$  est la taille du bloc  $B$ . Comme  $\beta \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , et que  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est stable par la multiplication point par point,

$$\forall \pi, \exists D_\pi > 0, \exists M_\pi \in \mathbb{N}, \forall t, \prod_{B \in \pi} \beta^{|B|}(t) \leq D_\pi(1 + |t|)^{M_\pi}.$$

Comme  $\alpha$  est dans  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,

$$\exists C_{|\pi|} > 0, \exists N_{|\pi|} \in \mathbb{N}, \forall \beta(t), \alpha^{|\pi|}(\beta(t)) \leq C_{|\pi|}(1 + |\beta(t)|)^{N_{|\pi|}}.$$

Comme  $\beta$  est dans  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,  $\exists C_{|\pi|}, C_0 > 0, \exists N_{|\pi|}, N_0 \in \mathbb{N}, \forall t$ ,

$$\alpha^{|\pi|}(\beta(t)) \leq C_{|\pi|} \left(1 + |C_0(1 + |t|)^{N_0}|\right)^{N_{|\pi|}} \leq C_{|\pi|} \left((1 + C_0) |(1 + |t|)^{N_0}|\right)^{N_{|\pi|}}$$

Alors  $\exists A_\pi > 0, \exists L_\pi \in \mathbb{N}, \forall t$ ,

$$\alpha^{|\pi|}(\beta(t)) \leq A_{|\pi|}(1 + |t|)^{L_{|\pi|}}.$$

Finalement  $(\alpha \circ \beta)^{(n)}$  est la somme de fonctions de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  donc  $(\alpha \circ \beta)^{(n)} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ .

## 7.2 Le groupe $(\mathcal{O}_D(\mathbb{R}), \circ)$

Nous donnons la preuve de la propriété 2.2, à savoir que  $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  muni de la loi de composition des fonctions est un groupe.

### 7.2.1 Stabilité de $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ par composition

**Preuve** Rappelons d'abord que  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\gamma$  est une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant

1.  $\gamma \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,
2.  $\exists c_\gamma, C_\gamma, \forall t, 0 < c_\gamma \leq |\gamma'(t)| \leq C_\gamma < +\infty$ ,
3.  $\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_\gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > c, a_\gamma |t|^{M_\gamma} < |\gamma(t)|$ .

Supposons que  $\alpha, \gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  et regardons  $\gamma \circ \alpha$ .

On sait, (voir sec. 7.1) que  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est stable par composition. Regardons  $(\gamma \circ \alpha)' = \alpha' \cdot (\gamma' \circ \alpha)$ , comme  $\alpha \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c_\alpha, C_\alpha, \forall t, 0 < c_\alpha \leq |\alpha'(t)| \leq C_\alpha < +\infty,$$

donc

$$\forall t, 0 < c_\alpha |(\gamma' \circ \alpha)(t)| \leq |\alpha' \cdot (\gamma' \circ \alpha)(t)| \leq C_\alpha |(\gamma' \circ \alpha)(t)| < +\infty.$$

Comme  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c_\gamma, C_\gamma, \forall t, 0 < c_\gamma \leq |(\gamma' \circ \alpha)(t)| \leq C_\gamma < +\infty,$$

et finalement

$$\forall t, 0 < c_\gamma c_\alpha \leq |(\gamma \circ \alpha)'(t)| \leq C_\gamma C_\alpha < +\infty.$$

Regardons maintenant la troisième condition, comme  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c_\gamma \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_\gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall |\alpha(t)| > c_\gamma, a_\gamma |\alpha(t)|^{M_\gamma} < |(\gamma \circ \alpha)(t)|,$$

et comme  $\alpha \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ ,

$$\exists c_\alpha, c_\gamma \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma, M_\alpha \in \mathbb{R}_+, a_\gamma, a_\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall |\alpha(t)| > c_\gamma, \forall |t| > c_\alpha \quad a_\gamma a_\alpha |t|^{M_\alpha M_\gamma} < |(\gamma \circ \alpha)(t)|.$$

Prenons  $d > \max\left(c_\alpha, \frac{c_\gamma}{a_\alpha} 1/M_\alpha\right)$ , et remarquons que d'une part,

$$\forall, |t| > d, |t| > c_\alpha,$$

et que d'autre part,

$$\forall, |t| > d, |\alpha(t)| > a_\alpha |t|^{M_\alpha} > a_\alpha \left| \frac{c_\gamma}{a_\alpha} 1/M_\alpha \right|^{M_\alpha} > c_\gamma.$$

Donc finalement, en posant  $a = a_\gamma a_\alpha$  et  $M = M_\gamma M_\alpha$ ,

$$\exists d \in \mathbb{R}_+, M \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > d \quad a |t|^M < |(\gamma \circ \alpha)(t)|,$$

et  $\gamma \circ \alpha \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ .



### 7.2.2 Élément inverse dans $\mathcal{O}_D(\mathbb{R})$

On va montrer que si  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  alors  $\gamma^{-1} \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$

**Preuve** Étant donné  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$  si et seulement  $\gamma$  vérifie les conditions  $(C_1)$  et  $(C_2)$

- $(C_1) : \exists c_\gamma, C_\gamma, \forall t, 0 < c_\gamma \leq |\gamma'(t)| \leq C_\gamma < +\infty,$
- $(C_2) : \exists c \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_\gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > c, a_\gamma |t|^{M_\gamma} < |\gamma(t)|,$

et si quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma^{(n)}$  vérifie la condition  $(C_3)$

- $(C_3) : \exists C_n > 0, \exists N_n \in \mathbb{N} / \forall t, |\gamma^{(n)}(t)| \leq C_n(1 + |t|)^{N_n}.$

Étant donné une fonction bijective  $\gamma \in \mathcal{O}_D(\mathbb{R})$ , on va d'abord montrer  $(\gamma^{-1})$  vérifie les conditions  $(C_1)$  et  $(C_2)$  on montrera ensuite par récurrence que quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  vérifie la condition  $(C_3)$ .

**Première condition :**

Notons d'abord que  $(\gamma^{-1})' = 1/(\gamma' \circ \gamma^{-1})$ , comme  $\gamma'$  vérifie la condition donc

$$\forall t, 0 < \frac{1}{C_\gamma} \leq |(\gamma^{-1})'(t)| \leq \frac{1}{c_\gamma} < +\infty.$$

et  $(\gamma^{-1})'$  vérifie  $(C_1)$ .

**Seconde condition :**

$\gamma$  vérifie  $(C_3)$  pour  $n = 0$  donc

$$\exists C_0 > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall t \in \mathbb{R}, |\gamma(t)| \leq C_0(1 + |t|)^{N_0}.$$

Comme  $(1 + |t|) \geq 1$ ,  $(1 + |t|)^{N_0} \leq (1 + |t|)^{N_0+1}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\gamma(t)| \leq C_0(1 + |t|)^{N_0+1}.$$

En composant maintenant par la fonction inverse

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t| \leq C_0 \left(1 + |\gamma^{-1}(t)|\right)^{N_0+1},$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{C_0^{1/(N_0+1)}} |t|^{\frac{1}{N_0+1}} - 1 \leq |\gamma^{-1}(t)|.$$

En prenant maintenant  $N < \frac{1}{N_0+1}$ , on remarque

$$\exists N \in \mathbb{R}_+^*, \exists c > 0, \forall |t| > c, \frac{1}{C_0^{1/(N_0+1)}} |t|^{\frac{1}{N_0+1}} - 1 > \frac{1}{C_0^{1/(N_0+1)}} |t|^N.$$

Finalement, en posant  $a = C_0^{-1/(N_0+1)}$

$$\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > c, a |t|^N < |\gamma^{-1}(t)|$$

et  $\gamma^{-1}$  vérifie  $(C_2)$ .

**Troisième condition :**

$\gamma$  vérifie  $(C_2)$ ,

$$\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_\gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > c, a_\gamma |t|^{M_\gamma} < |\gamma(t)|,$$

en composant par la fonction inverse on obtient la majoration suivante pour  $\gamma^{-1}$ ,

$$\exists d \in \mathbb{R}_+, \exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_\gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall |t| > d, |\gamma^{-1}(t)| < a_\gamma^{-1/M_\gamma} (1 + |t|)^{1/M_\gamma}.$$

En prenant  $a_0 > \supp(a_\gamma^{-1/M_\gamma}, \max_{|t| \leq c} |\gamma^{-1}(t)|)$  on remarque qu'il existe  $a_0$  tel que  $\forall t$

$$|\gamma^{-1}(t)| < a_0 (1 + |t|)^{1/M_\gamma},$$

donc,

$$\exists M_\gamma \in \mathbb{R}_+, a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, |\gamma^{-1}(t)| < a_0 (1 + |t|)^{1/M_\gamma}.$$

En prenant  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N > 1/M_\gamma$ ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, |\gamma^{-1}(t)| < a_0 (1 + |t|)^N.$$

et  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  vérifie  $(C_3)$  pour  $n = 0$ .

On a déjà montré que  $(\gamma^{-1})'$  vérifie la première condition,

$$\forall t, 0 < \frac{1}{C_\gamma} \leq |(\gamma^{-1})'(t)| \leq \frac{1}{c_\gamma} \gamma < +\infty,$$

Donc  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  vérifie  $(C_3)$  pour  $n = 1$ .

Supposons maintenant que  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  vérifie  $(C_3)$  pour  $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , ce qui est vrai pour  $m = 1$ , et regardons pour  $n = m + 1$ , Écrivons la dérivée d'ordre  $m + 1$  de la fonction  $\gamma \circ \gamma^{-1}$  à l'aide de la formule de Faà Di Bruno faisant intervenir les polynômes de Bell,

$$(\gamma \circ \gamma^{-1})^{(m+1)}(t) = \sum_{k=1}^{m+1} (\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})(t) B_{m+1,k}((\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m-k+2)}(t)).$$

L'expression des  $B_{n,k}$  est donné par

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}},$$

où la somme porte sur toutes les suites d'entiers  $j_1, j_2, \dots, j_{n-k+1} \in \mathbb{N}$  tel que  $j_1 + j_2 + \dots = k$  et  $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots = n$ .

Remarquons d'abord que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\gamma \circ \gamma^{-1})^{(m+1)}(t) = 0.$$

En isolant maintenant le terme pour  $k = 1$  dans l'expression de  $(\gamma \circ \gamma^{-1})^{(m+1)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\gamma' \circ \gamma^{-1})(t) B_{m+1,1} \left( (\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m+1)}(t) \right) + \\ \sum_{k=2}^{m+1} (\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})(t) B_{m+1,k} \left( (\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m-k+2)}(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

Comme  $B_{n,1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = x_{n-k+1}$ , la formule précédente se réécrit,

$$(\gamma' \circ \gamma^{-1})(t) (\gamma^{-1})^{(m+1)}(t) = - \sum_{k=2}^{m+1} (\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})(t) B_{m+1,k} \left( (\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m-k+2)}(t) \right).$$

Comme  $|\gamma'|$  est borné inférieurement par  $c_\gamma$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left| (\gamma^{-1})^{(m+1)}(t) \right| \leq \frac{1}{c_\gamma} \sum_{k=2}^{m+1} \left| (\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})(t) B_{m+1,k} \left( (\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m-k+2)}(t) \right) \right|.$$

Intéressons maintenant à  $P_k(t) := B_{m+1,k} \left( (\gamma^{-1})'(t), (\gamma^{-1})''(t), \dots, (\gamma^{-1})^{(m-k+2)}(t) \right)$ . Pour  $k \in \llbracket 2, m+1 \rrbracket$ , l'expression des  $P_k$  est une somme dont chaque terme résulte du produit des fonctions  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  pour  $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Par hypothèses les fonctions  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  pour  $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$  vérifient toutes, la condition  $(C_3)$ , on sait de plus que si deux fonctions vérifient la condition  $(C_3)$  alors comme  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est un algèbre pour la multiplication point par point, leurs produits et leurs somme vérifie aussi  $(C_3)$ , donc  $\forall k \in \llbracket 2, m+1 \rrbracket$ ,  $P_k$  vérifie  $(C_3)$ .

Regardons maintenant  $(\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})$  pour  $k \in \llbracket 2, m+1 \rrbracket$ , on sait que quelque soit  $k$ ,  $\gamma^{(k)}$  vérifie la condition  $(C_3)$ , on sait aussi que  $\gamma^{-1}$  vérifie la condition  $(C_3)$  et puisque  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  est stable par composition, la composition de deux fonction qui vérifient  $(C_3)$  est une fonction qui vérifie  $(C_3)$ , donc  $k \in \llbracket 2, m+1 \rrbracket$ ,  $(\gamma^{(k)} \circ \gamma^{-1})$  vérifie  $(C_3)$ .

Finalement  $\left| (\gamma^{-1})^{(m+1)} \right|$  est majorée par une somme de fonctions vérifiant la condition  $(C_3)$  donc  $(\gamma^{-1})^{(m+1)}$  vérifie  $(C_3)$ , on a ainsi montré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\gamma^{-1})^{(n)}$ , vérifie  $(C_3)$  comme on l'a aussi montré pour  $n = 0$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\gamma^{-1})^{(n)}$  vérifie  $(C_3)$ . ♠

### 7.3 Composition dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , preuve de la proposition 2.2

Étant donné une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et une fonction  $\gamma$  vérifiant

1.  $\gamma \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$
2.  $\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists \beta \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+^* / \forall |t| > c, |\gamma(t)| > a|t|^\beta$

on veut montrer que  $\psi \circ \gamma$  définie bien une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Lemme 7.1** Soit  $f$  et  $g$ , deux fonctions de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , alors  $fg \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$

**Preuve** Exprimons la dérivée d'ordre  $n$  de  $fg$  à l'aide de la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)}(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Comme  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ ,

$$\forall \alpha \exists C_\alpha^f > 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N} / \forall t, |f^{(\alpha)}(t)| \leq C_\alpha^f (1 + |t|)^{N_\alpha}, \quad (7.3)$$

$$\forall \alpha \exists C_\alpha^g > 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N} / \forall t, |g^{(\alpha)}(t)| \leq C_\alpha^g (1 + |t|)^{N_\alpha}. \quad (7.4)$$

Alors  $\forall k, \forall n, \exists C_k^f > 0, \exists C_{n-k}^g > 0, \exists N_k^f \in \mathbb{N}, \exists N_{n-k}^g \in \mathbb{N}$  tel que

$$|f^{(k)} g^{(n-k)}(t)| \leq C_k^f C_{n-k}^g (1 + |t|)^{N_k^f + N_{n-k}^g}.$$

En posant  $C_k^n = \binom{n}{k} C_k^f C_{n-k}^g$  et  $N_k^n = N_k^f + N_{n-k}^g$ ,

$$\forall k, \forall n, \exists C_k^n > 0, \exists N_k^n \in \mathbb{N}, \forall t, |(fg)^{(n)}(t)| \leq \sum_{k=0}^n C_k^n (1 + |t|)^{N_k^n}.$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} C^n &= \max_{k \in [0, n]} C_k^n \\ N^n &= \max_{k \in [0, n]} N_k^n, \end{aligned}$$

comme quelque soit  $k$ ,

$$(1 + |t|)^{N_k^n} \leq (1 + |t|)^{N^n},$$

on obtient la majoration suivante

$$\forall n, \exists C^n > 0, \exists N^n \in \mathbb{N}, \forall t \quad |(fg)^{(n)}(t)| \leq C^n n (1 + |t|)^{N^n}.$$

Donc le produit  $fg$  est bien une fonction à croissance lente. ♠

Regardons l'expression de la dérivée d'ordre  $n$  de  $\psi \circ \gamma$  à l'aide de la formule de Fàa di Bruno,

$$(\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t) = \sum_{\pi \in \Pi} \psi^{|\pi|}(\gamma(t)) \cdot \prod_{B \in \pi} \gamma^{|B|}(t),$$

où  $\pi$  parcourt l'ensemble  $\Pi$  de toutes les partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, \beta\}$ ,  $B \in \pi$  signifie que la variable  $B$  parcourt la liste de tous les blocs de la partition  $\pi$  et  $|A|$  désigne le cardinal de l'ensemble  $A$  donc  $|\pi|$  est le nombre de blocs de la partition  $\pi$ , et  $|B|$  est la taille du bloc  $B$ .

On peut alors majorer  $|t^\alpha (\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t)|$ ,

$$|t^\alpha (\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t)| \leq \sum_{\pi \in \Pi} \left| t^\alpha \psi^{|\pi|}(\gamma(t)) \cdot \prod_{B \in \pi} \gamma^{|B|}(t) \right|.$$

Comme  $\gamma \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  et qu'on a montré que le produit de fonction de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  définit bien une fonction de  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , le produit dans l'équation précédente est une fonction de à croissance lente et

$$\exists C_\pi > 0, \exists N_\pi \in \mathbb{N}, \forall t, \prod_{B \in \pi} \gamma^{|B|}(t) < C_\pi (1 + |t|)^{N_\pi}.$$

La fonction  $\psi$  appartenant à l'espace de Schwartz, pour tout  $|\pi|$  il existe  $D_{|\pi|} > 0$  tel que

$$|\psi^{|\pi|}(t)| \leq \frac{D_{|\pi|}}{1 + |t|^\lambda} \quad \forall \lambda > 0.$$

On obtient ainsi la majoration suivante

$$|t^\alpha (\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t)| \leq \sum_{\pi \in \Pi} |t^\alpha \frac{D_{|\pi|}}{1 + |\gamma(t)|^\lambda} C_\pi (1 + |t|)^{N_\pi}| \quad \forall \lambda > 0.$$

qui devient quand  $|t| > c$ , en utilisant la condition (2)

$$|t^\alpha (\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t)| \leq \sum_{\pi \in \Pi} t^\alpha \frac{D_{|\pi|}}{1 + |t|^{\beta\lambda}} C_\pi (1 + |t|)^{N_\pi} \quad \forall \lambda > 0.$$

En prenant  $\lambda > \frac{\alpha + N_\pi}{\beta}$  on constate que la somme ci dessus est une somme finie de termes qui tendent tous vers 0 à l'infini, donc  $|t^\alpha (\psi \circ \gamma)^{(\beta)}(t)|$  tend vers zéro à l'infini quelque soit  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $(\psi \circ \gamma)$  est bien dans l'espace de Schwartz.

## 7.4 Transformation de Mellin dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , preuve de la section 2.1.11.7

On définit l'opérateur de transformation de Mellin d'une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$  à support sur la demi-droite  $]0, +\infty[$  par

$$\mathcal{MF} : \psi \rightarrow \mathcal{MF}(\psi) = \widehat{\psi} \quad (7.5)$$

$$\widehat{\psi}(\beta) = \int_{\mathbb{R}_+} \nu^{2i\pi\beta+r} \psi(\nu) d\nu, \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

On veut montrer que  $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour  $r > -1$ .

Effectuons d'abord le changement de variable  $\nu = e^{-u}$  dans l'intégrale précédente

$$\widehat{\psi}(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(2i\pi\beta+r)u} \psi(e^{-u}) e^{-u} du, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

et réécrivons là sous une nouvelle forme

$$\widehat{\psi}(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\beta u} \psi(e^{-u}) e^{-u(r+1)} du, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Cela nous permet de remarquer que  $\widehat{\psi}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $h$  définie par  $h(u) = \psi(e^{-u}) e^{-u(r+1)}$ .

Nous allons maintenant montrer que  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , notons d'abord que  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et utilisons la formule de Leibniz pour exprimer la dérivée  $n$ -ième de  $h$

$$h^{(n)}(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(u) (-r-1)^{n-k} e^{-u(r+1)},$$

où la fonction  $f$  est définie par,

$$f(u) = \psi(e^{-u}).$$

La dérivée  $k$ -ième de la fonction  $f$  étant de la forme

$$f^{(k)}(u) = \sum_{j=0}^k a_{jk} \psi^{(j)}(e^{-u}) e^{-b_{jk}u},$$

avec  $a_{jk} \in \mathbb{N}$  et  $b_{jk} \in \mathbb{Z}$ , la dérivée  $n$ -ième de  $h$  a pour expression,

$$h^{(n)}(u) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k D_{jkrn} \psi^{(j)}(e^{-u}) e^{-u(r+1+b_{jk})},$$

où  $D_{jkrn} \in \mathbb{R}$ . On peut donc majorer  $|u^m h^{(n)}(u)|$  :

$$|u^m h^{(n)}(u)| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k |D_{jkrn} \psi^{(j)}(e^{-u}) e^{-u(r+1+b_{jk})} u^m|.$$

Comme  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $\forall \lambda \geq 2$ , il existe une constante  $C_{k\lambda} > 0$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$|\hat{\psi}^{(k)}(u)| \leq \frac{C_{k\lambda}}{1 + |u|^\lambda} \quad (7.7)$$

et

$$|u^m h^{(n)}(u)| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \left| B_{jkrn\lambda} \frac{e^{-u(r+1+b_{jk})}}{1 + e^{-u\lambda}} u^m \right|,$$

où  $B_{jkrn\lambda} \in \mathbb{R}$ .

Étudions maintenant la fonction  $g$  définie par

$$g(u) = \left| \frac{e^{-u(r+1+b_{jk})}}{1 + e^{-u\lambda}} u^m \right|.$$

Quand  $u \rightarrow +\infty$ , le dénominateur tend vers 1, le numérateur tend vers 0 quelque soit  $k$  si et seulement si  $r > -1$ .

Quand  $u \rightarrow -\infty$ ,  $g(u) \sim |e^{(\lambda-r-1-b_{jk})u} u^m|$ . En prenant  $\lambda > r + 1 + b_{jk}$  pour tout  $j, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on montre alors que  $g(u)$  tend vers 0.

On a donc montré que pour  $r > -1$ ,  $|u^m h^{(n)}(u)|$  était majoré par une somme finie de termes qui tendent tous vers 0 quand  $|u| \rightarrow +\infty$ , donc la fonction  $h$  est bien dans l'espace de Schwartz, comme  $\hat{\psi}$  est la transformée de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  alors  $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

## 7.5 Preuves des théorèmes d'approximation du chapitre 4

### 7.5.1 Preuve du théorème 4.2

On montre de la même manière que dans la preuve du théorème 4.1 que

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} = \langle S_x, |\hat{f}_{\tau\nu}|^2 \rangle,$$

avec,

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| \leq 2 \int_{I_1} |g(u)| du + \pi \|\alpha''\|_\infty \int_{I_2} u^2 |g(u)| du,$$

où  $I_1 = \{u : |u| \geq u_0\}$ ,  $I_2 = \mathbb{R} \setminus I_1$ . En utilisant maintenant la décroissance de la fonction  $g$ , à savoir  $|g(t)| \leq \lambda e^{-\lambda|t|}$ ,

$$\int_{I_1(\nu)} |g(u)| du \leq 2e^{-\lambda u_0},$$

et

$$\begin{aligned} \int_{I_2(\nu)} u^2 |g(u)| du &\leq 2\lambda \int_0^{u_0} u^2 e^{-\lambda u} du, \\ &\leq -2u_0^2 e^{-\lambda u_0} + 4 \int_0^{u_0} u e^{-\lambda u} du, \\ &\leq -2u_0^2 e^{-\lambda u_0} + 4 \left[ \frac{u_0}{-\lambda} e^{-\lambda u_0} - \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda u_0} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| &\leq 4e^{-\lambda u_0} + \pi \|\alpha''\|_\infty \left[ -2u_0^2 e^{-\lambda u_0} + 4 \left( \frac{u_0}{-\lambda} e^{-\lambda u_0} - \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda u_0} - 1) \right) \right], \\ &\leq 4e^{-\lambda u_0} \left[ 1 + \pi \|\alpha''\|_\infty \left( -\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] + \pi \|\alpha''\|_\infty \frac{4}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

La valeur minimum de cette expression est obtenue pour  $u_0 = (\frac{\pi}{2} \|\alpha''\|_\infty)^{-\frac{1}{2}}$ , en posant  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2} \|\alpha''\|_\infty}$

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| \leq -8e^{-\lambda/\lambda_0} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) + 8 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}.$$

En posant

$$B(x) = [1 - (x+1)e^{-x}]^2$$

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)|^2 \leq 32 \frac{\pi^2 \|\alpha''\|_\infty^2}{\lambda^2} B \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \|\alpha''\|_\infty}} \right)$$

En supposant finalement que  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  et en posant  $\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} S_x(\xi) d\xi$ ,

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} \leq 32 \sigma_x^2 \frac{\pi^2 \|\alpha''\|_\infty^2}{\lambda^2} B \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \|\alpha''\|_\infty}} \right)$$

### 7.5.2 Preuve du théorème 4.3

On montre comme dans la preuve du théorème 4.1 que

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} = \langle S_x, |\hat{f}_{\tau\nu}|^2 \rangle$$

avec,

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\sin(r(t, n))g(t - n)| dt,$$

où il existe  $\epsilon \in [\tau - \frac{1}{\lambda}, \tau + \frac{1}{\lambda}]$  tel que  $r(t, \tau) = \frac{\pi}{2} \alpha''(\epsilon)(t - \tau)^2$ .

En utilisant la majoration  $|\sin(u)| \leq |u|$ ,

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)| \leq 2\pi\alpha''(\epsilon) \int_{-\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} t^2 |g(t)| dt.$$

Comme  $|g(t)| \leq K$ ,

$$\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} t^2 |g(t)| dt \leq \frac{2K}{3\lambda^3} \quad (7.8)$$

et

$$|\hat{f}_{\tau\nu}(\xi)|^2 \leq \frac{9}{16\lambda^6} K^2 \pi^2 |\alpha''(\epsilon)|^2.$$

En supposant que  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$  et en posant  $\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} S_x(\xi) d\xi$ , on obtient finalement

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_m(\tau, \nu)|^2 \} \leq \frac{9}{16\lambda^6} K^2 \pi^2 \sigma_x^2 |\alpha''(\epsilon)|^2.$$

### 7.5.3 Preuve du théorème 4.5

On montre de la même manière que dans la preuve du théorème 4.4 que

$$\epsilon_d(\tau, s) = \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) + \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \quad (7.9)$$

Avec

$$\begin{aligned} \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) &= \left\langle \left( \sqrt{\gamma'} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right) \mathcal{B}_\gamma x, \psi_{\tau s} \right\rangle \\ \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) &= \sqrt{\gamma'(\tau)} \left\langle \left( \mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau \right) x, \psi_{\tau s} \right\rangle. \end{aligned}$$

Nous allons donc borner ces deux termes indépendamment. Considérons premièrement  $\epsilon_d^{(0)}$ ,

$$\mathbb{E} \{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \} = \langle S_x, |\phi_{\tau s}|^2 \rangle,$$

où comme nous l'avons montré dans l'équation 4.15,

$$|\phi_{\tau s}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'}} \right\|_{\infty} q^{3s/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| dt.$$

Supposons que  $|\psi(t)| \leq \lambda e^{-\lambda|t|}$ , alors  $\int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| dt \leq \frac{2}{\lambda}$  et

$$|\phi_{\tau s}(\xi)| \leq \frac{1}{\lambda} \left\| \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'}} \right\|_{\infty} q^{3s/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| dt.$$

Finalement, avec  $\sigma_x^2 = \|S_x\|_1$  la variance de processus  $x$ , et en supposant qu'il existe une constante  $c_\gamma$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 < c_\gamma \leq |\gamma'(t)|, \quad (7.10)$$

on obtient la majoration suivante

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\} \leq \frac{\sigma_x^2 \|\gamma''\|_{\infty}^2}{\lambda^2 c_\gamma} q^{3s}.$$

Considérons maintenant  $\epsilon_d^{(1)}(\tau, s) = \sqrt{\gamma'(\tau)} \langle (\mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma)x, \psi_{\tau s} \rangle$ , de la même manière que nous l'avons montré dans l'équation 4.20,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\} = q^{-s} \gamma'(\tau) \langle S_x, |f_{\tau s}|^2 \rangle, \quad (7.11)$$

où

$$|f_{\tau s}(\xi)| \leq 2q^s \left[ \int_{I_1(\xi)} |\psi(t)| ds + \frac{\pi \|\gamma''\|_{\infty}}{2} \xi q^{2s} \int_{I_2(\xi)} t^2 |\psi(t)| dt \right].$$

Nous avons utilisé ici les majorations  $|\sin(u)| \leq 1$  et  $|\sin(u)| \leq |u|$  et nous avons séparé l'axe des réels en deux intervalles dépendant de la fréquence  $\xi$ ,

$$I_1(\xi) = \{t : |t| \geq u_0\}, \quad I_2(\xi) = \mathbb{R} \setminus I_1(\xi),$$

où  $u_0$  est un paramètre qui pourra être adapté.

Supposons maintenant que  $|\psi(t)| \leq \lambda e^{-\lambda|t|}$ . Alors

$$\int_{I_1(\xi)} |\psi(t)| ds \leq 2e^{-\lambda u_0},$$

et

$$\int_{I_2(\xi)} t^2 |\psi(t)| dt \leq \frac{4}{\lambda^2} - e^{-\lambda u_0} \left[ 2u_0^2 + \frac{4u_0}{\lambda} + \frac{4}{\lambda^2} \right].$$

En posant  $c_0 = \frac{\pi \|\gamma''\|_{\infty}}{2} |\xi| q^{2s}$ ,

$$|f_{\tau s}(\xi)| \leq 2q^s F(u_0),$$

avec

$$F(u_0) = 2e^{-\lambda u_0} + c_0(\xi) \left[ \frac{4}{\lambda^2} - e^{-\lambda u_0} \left( 2u_0^2 + \frac{4u_0}{\lambda} + \frac{4}{\lambda^2} \right) \right].$$

La dernière expression étant minimum pour  $u_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$ , en posant  $\lambda_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \|\gamma''\|_\infty |\xi| q^{2s}}$ ,

$$F(1/\sqrt{c_0}) = 4 \frac{\lambda_1^2(\xi)}{\lambda^2} - 4e^{-\lambda/\lambda_1(\xi)} \left( \frac{\lambda_1(\xi)}{\lambda} + \frac{\lambda_1^2(\xi)}{\lambda^2} \right). \quad (7.12)$$

On obtient alors la majoration suivante

$$|f_{\tau s}(\xi)|^2 \leq 32q^{2s} \left[ \frac{\lambda_1^2(\xi)}{\lambda^2} - e^{-\lambda/\lambda_1(\xi)} \left( \frac{\lambda_1(\xi)}{\lambda} + \frac{\lambda_1^2(\xi)}{\lambda^2} \right) \right]^2. \quad (7.13)$$

En posant maintenant

$$u_\lambda(\xi) := \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1(\xi)} \right) e^{-\frac{\lambda}{\lambda_1(\xi)}} \right]^2$$

et en supposant qu'il existe une constant  $C_\gamma < +\infty$  tel que  $\|\gamma'\|_\infty \leq C_\gamma$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\} \leq 8\pi^2 \frac{q^{3s}}{\lambda^4} \|\gamma''\|_\infty^2 C_\gamma \int_{\mathbb{R}} \xi^2 u_\lambda(\xi) S_x(\xi) d\xi$$

On utilisant l'inégalité suivante,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \right\} \leq \left( \sqrt{\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\}} + \sqrt{\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\}} \right)^2, \quad (7.14)$$

on peut borner le reste dans son intégralité

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \right\} \leq q^{3s} \frac{\|\gamma''\|_\infty^2}{\lambda^2} \left( \frac{\sigma_x}{\sqrt{c_\gamma}} + \sqrt{\frac{8\pi^2 C_\gamma}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 u_\lambda(\xi) S_x(\xi) d\xi} \right)^2 \quad (7.15)$$

#### 7.5.4 Preuve du théorème 4.6

On montre de la même manière que dans la preuve du théorème 4.4 que

$$\epsilon_d(\tau, s) = \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) + \epsilon_d^{(1)}(\tau, s), \quad (7.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_d^{(0)}(\tau, s) &= \left\langle \left( \sqrt{\gamma'} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right) \mathcal{B}_\gamma x, \psi_{\tau s} \right\rangle \\ \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) &= \sqrt{\gamma'(\tau)} \left\langle \left( \mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma^\tau \right) x, \psi_{\tau s} \right\rangle. \end{aligned}$$

Nous allons donc borner ces deux termes indépendamment. Regardons d'abord  $\epsilon_d^{(0)}$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\} = \left\langle S_x, |\phi_{\tau s}|^2 \right\rangle.$$

où

$$\phi_{\tau s}(\xi) = \int_{t \in \mathbb{R}} e^{2i\pi \xi \gamma(t)} \left( \sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \right) \psi_{\tau s}(t) dt$$

Comme le support de  $\psi$  est inclus dans  $[-\frac{1}{\lambda}, +\frac{1}{\lambda}]$ , le support de  $\psi_{\tau s}$  est inclus dans  $[\tau - \frac{q^s}{\lambda}, \tau + \frac{q^s}{\lambda}]$  et

$$|\phi_{\tau s}(\xi)| \leq \int_{\tau - \frac{q^s}{\lambda}}^{\tau + \frac{q^s}{\lambda}} |(\sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)}) \psi_{\tau s}(t)| dt.$$

Il existe alors  $\tau_0 \in [\tau - \frac{q^s}{\lambda}, \tau + \frac{q^s}{\lambda}]$  tel que

$$\sqrt{\gamma'(t)} - \sqrt{\gamma'(\tau)} \leq \frac{\gamma''(\tau_0)}{2\sqrt{\gamma'(\tau_0)}}(t - \tau),$$

et

$$|\phi_{\tau s}(\xi)| \leq \frac{\gamma''(\tau_0)}{2\sqrt{\gamma'(\tau_0)}} \int_{\tau - \frac{q^s}{\lambda}}^{\tau + \frac{q^s}{\lambda}} |(t - \tau) \psi_{\tau s}(t)| dt.$$

En supposant maintenant que  $|\psi(t)| \leq K$ ,

$$\begin{aligned} |\phi_{\tau s}(\xi)| &\leq \frac{K}{\sqrt{q^s}} \frac{\gamma''(\tau_0)}{2\sqrt{\gamma'(\tau_0)}} \int_{-\frac{q^s}{\lambda}}^{\frac{q^s}{\lambda}} |t| dt, \\ &\leq K \lambda^2 q^{3s/2} \frac{\gamma''(\tau_0)}{2\sqrt{\gamma'(\tau_0)}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement une majoration pour  $|\phi_{\tau s}(\xi)|^2$ ,

$$|\phi_{\tau s}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{4\lambda^4} K^2 q^{3s} \left( \frac{\gamma''(\tau_0)}{\sqrt{\gamma'(\tau_0)}} \right)^2.$$

En supposant maintenant que  $S_x \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\} &\leq \frac{1}{4\lambda^4} K^2 q^{3s} \left( \frac{\gamma''(\tau_0)}{\sqrt{\gamma'(\tau_0)}} \right)^2 \int_{\xi \in \mathbb{R}} S_x(\xi) d\xi, \\ &\leq \frac{1}{4\lambda^4} K^2 q^{3s} (\gamma''(\tau_0))^2 \left\| \frac{1}{\gamma'} \right\| \sigma_x^2, \end{aligned}$$

Considérons maintenant  $\epsilon_d^{(1)}(\tau, s) = \sqrt{\gamma'(\tau)} \langle (\mathcal{B}_\gamma - \tilde{\mathcal{B}}_\gamma)x, \psi_{\tau s} \rangle$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\} = \gamma'(\tau) \langle S_x, |f_{\tau s}|^2 \rangle, \quad (7.17)$$

avec

$$|f_{\tau s}(\xi)| = \left| \int_{\tau - \frac{q^s}{\lambda}}^{\tau + \frac{q^s}{\lambda}} e^{2i\pi\xi\gamma(t)} [1 - e^{i\pi\xi r(t, \tau)}] \psi_{\tau s}(t) dt \right|.$$

Il existe  $t_1 \in [\tau - \frac{q^s}{\lambda}, \tau + \frac{q^s}{\lambda}]$  tel que  $r(t, n) = \gamma''(t_1)(t - \tau)^2$ . En utilisant la majoration  $|\psi(t)| \leq K$ ,

$$\begin{aligned} |f_{\tau s}(\xi)| &\leq \frac{2K}{\sqrt{q^s}} \int_{\tau - \frac{q^s}{\lambda}}^{\tau + \frac{q^s}{\lambda}} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi r(t, \tau)\right) \right| dt, \\ &\leq \frac{2K}{\sqrt{q^s}} \int_{-\frac{q^s}{\lambda}}^{+\frac{q^s}{\lambda}} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi \gamma''(t_1)t^2\right) \right| dt. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la majoration  $|\sin(u)| \leq u$ ,

$$\begin{aligned} |f_{\tau s}(\xi)| &\leq \gamma''(t_1) \frac{K\pi\xi}{\sqrt{q^s}} \int_{-\frac{q^s}{\lambda}}^{+\frac{q^s}{\lambda}} t^2 dt, \\ &\leq \gamma''(t_1) \frac{K\pi\xi}{\sqrt{q^s}} \int_{-\frac{q^s}{\lambda}}^{+\frac{q^s}{\lambda}} t^2 dt. \\ &\leq \frac{2}{3\lambda^3} \gamma''(t_1) K\pi\xi q^{5s/2}. \end{aligned}$$

Finalement, en supposant que  $\int_{\mathbb{R}} \xi^2 S_x(\xi) d\xi < +\infty$ ,

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \epsilon_d^{(1)}(\tau, s) \right|^2 \right\} \leq \frac{4}{9\lambda^6} \gamma'(\tau) (\gamma''(t_1))^2 K^2 \pi^2 q^{5s} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 S_x(\xi) d\xi. \quad (7.18)$$

$$(7.19)$$

On peut maintenant majorer l'erreur d'approximation dans son intégralité avec,

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \right\} \leq \left( \sqrt{\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(0)}(\tau, s)|^2 \right\}} + \sqrt{\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d^{(1)}(\tau, s)|^2 \right\}} \right)^2.$$

En supposant qu'il existe deux constantes strictement positives  $c_\gamma$  et  $C_\gamma$  telles que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$c_\gamma \leq |\gamma'(t)| \leq C_\gamma,$$

on obtient finalement la majoration suivante

$$\mathbb{E} \left\{ |\epsilon_d(\tau, s)|^2 \right\} \leq \frac{K^2 q^{3s}}{\lambda^4} |\gamma''(\tau_0)|^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c_\gamma}} \sigma_x + \frac{2}{3} \sqrt{C_\gamma \pi \lambda q} \sqrt{V_{S_x}} \right)^2$$

avec

$$\tau_0 = \operatorname{argmax}_{t \in [\tau - \frac{q^s}{\lambda}, \tau + \frac{q^s}{\lambda}]} (|\gamma''(t)|^2),$$

et où l'on a posé  $V_{S_x} = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 S_x(\xi) d\xi$ .

## 7.6 Preuves de la proposition 5.11

Nous aurons besoins du résultats suivant.

**Lemme 7.2** *Soit la matrice définie  $\Gamma_{\mathbf{V}}$  telle qu'elle est définie en équation (5.43).  $\Gamma_{\mathbf{V}}$  est inversible et*

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbf{V}}^{-1}[k, k'] &= 0, \quad \text{si } (k - k') \notin [0, b, 2b, \dots, (K-1)b], \\ \Gamma_{\mathbf{V}}^{-1}[kb + c, k'b + c] &= \left(\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}\right)^{-1}[k, k'], \quad \forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket\end{aligned}$$

**Preuve** Commençons par remarquer que

$$\mathbf{C}_{\mathbf{V}L}[k, k'] = \left[ (C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]}) \right] (k, k'), \quad \forall k, k' \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket. \quad (7.20)$$

donc  $\forall k, k' \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$ ,

$$\Gamma_{\mathbf{V}}[k, k'] = [C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]}] (k, k') \mathbb{I}_b[k - k']. \quad (7.21)$$

Donc si  $k - k' \notin [0, b, 2b, \dots, (K-1)b]$ ,

$$\Gamma_{\mathbf{V}}[k, k'] = 0$$

et  $\forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$

$$\Gamma_{\mathbf{V}}[kb + c, k'b + c] = [C_{V^{an}[z]} + C_{V^{an}[w]}] (bk + c, bk' + c) = \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}[k, k'].$$

Intéressons nous maintenant à la matrice  $A_{\mathbf{V}}$  définie par

$$\begin{aligned}A_{\mathbf{V}}[k, k'] &= 0, \quad \text{si } (k - k') \notin [0, b, 2b, \dots, (K-1)b], \\ A_{\mathbf{V}}[kb + c, k'b + c] &= \left(\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}\right)^{-1}[k, k'], \quad \forall c \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket.\end{aligned}$$

On va montrer que  $A_{\mathbf{V}} = \Gamma_{\mathbf{V}}^{-1}$ . Regardons  $A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}}$ ,

$$A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}}[l, l'] = \sum_{j=0}^{L-1} A_{\mathbf{V}}[l, n]\Gamma_{\mathbf{V}}[n, l'].$$

Posons  $l = bk + c$  et  $n = bj + d$

$$A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}}[bk + c, bk' + c'] = \sum_{d=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{K-1} A_{\mathbf{V}}[bk + c, bj + d]\Gamma_{\mathbf{V}}[bj + d, bk' + c']$$

Remarquons que comme  $\Gamma_{\mathbf{V}}[k, k'] = 0$ , si  $k - k' \notin [0, b, 2b, \dots, (K-1)b]$ , alors  $\Gamma_{\mathbf{V}}[bj + d, bk' + c'] = 0$  si  $d \neq c'$  et que comme  $A_{\mathbf{V}}[k, k'] = 0$  si  $k - k' \notin [0, b, 2b, \dots, (K-1)b]$  alors  $A_{\mathbf{V}}[bk + c, bj + d] = 0$  si  $c \neq d$ . Finalement  $A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}}[bk + c, bk' + c'] = 0$  si  $c \neq c'$  et

$$\begin{aligned}A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}}[bk + c, bk' + c] &= \sum_{j=0}^{K-1} A_{\mathbf{V}}[bk + c, bj + c]\Gamma_{\mathbf{V}}[bj + c, bk' + c], \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \left(\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}\right)^{-1}[k, j] \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{(0,c)}[j, k'], \\ &= \delta[k - k'].\end{aligned}$$

Alors  $A_{\mathbf{V}}\Gamma_{\mathbf{V}} = I_d$  et  $A_{\mathbf{V}} = \Gamma_{\mathbf{V}}^{-1}$ . ♠

Nous allons maintenant démontrer la proposition 5.11. Commençons par remarquer qu'étant donné une fonction  $f : \mathbb{C}^L \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\delta^*$  défini par

$$\delta^* = \underset{\delta \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} f(\delta), \quad (7.22)$$

et en posant  $\delta = \lambda b + c_0$  où  $\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,  $c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ , avec

$$\lambda_{c_0} = \underset{\lambda \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} g^{(c_0)}(\lambda) \quad (7.23)$$

où  $g^{(c_0)}(\lambda) = f(\lambda b + c_0)$  et

$$c_0^* = \underset{c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} q^{(c_0)}(\lambda_{c_0}), \quad (7.24)$$

alors  $\delta^* = \lambda_{c_0^*} b + c_0^*$ .

On va donc montrer que lorsque  $f(\delta) = \langle \mathcal{T}_\delta \Gamma_V^{-1} \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle$  alors

$$g^{(c_0)}(\lambda) = \left\langle \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_V^{(0, c-c_0)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle.$$

où  $\mathbf{U}[bk + c] = \mathbf{U}_m^{(c)}[k]$ .

$$f(\delta) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} \bar{\mathbf{U}}[k] \mathbf{C}^{-1} \Gamma_V^{-1}[k - \delta, k' - \delta] \mathbf{U}[k'], \quad (7.25)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{c=0}^{b-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \sum_{c'=0}^{b-1} \bar{\mathbf{U}}[bk + c] \Gamma_V^{-1}[bk + c' - \delta, bk' + c - \delta] \mathbf{U}[bk' + c], \quad (7.26)$$

or si  $c \neq c'$ ,

$$\Gamma_V^{-1}[bk + c' - \delta, bk' + c - \delta] = 0,$$

donc

$$f(\delta) = \sum_{c=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \bar{\mathbf{U}}[bk + c] \Gamma_V^{-1}[bk + c - \delta, bk' + c - \delta] \mathbf{U}[bk' + c]. \quad (7.27)$$

Posons maintenant  $\delta = c_0 + b\lambda$  avec  $c_0 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ ,

$$g^{(c_0)}(\lambda) = \sum_{c=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \bar{\mathbf{U}}[bk + c] \Gamma_V^{-1}[bk + c - c_0 - b\lambda, bk' + c - c_0 - b\lambda] \mathbf{U}[bk' + c].$$

Comme  $\mathbf{U}[bk + c] = \mathbf{U}_m^{(c)}[k]$ , où  $\mathbf{U}_m^{(c)}$  est une réalisation du vecteur stochastique  $\mathbf{V}_{y_m}^{(n, c)}$  et comme  $\Gamma_V^{-1}[bk + c - c_0, k' + c - c_0] = \left( \mathbf{C}_m^{(c-c_0)} \right)^{-1}[k, k']$  alors

$$\begin{aligned} g^{(c_0)}(\lambda) &= \sum_{c=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \overline{\mathbf{U}_m^{(c)}[k]} \left( \mathbf{C}_m^{(c-c_0)} \right)^{-1}[k - \lambda, k' - \lambda] \mathbf{U}_m^{(c)}[k']. \\ &= \left\langle \mathcal{T}_\lambda \left( \mathbf{C}_V^{(0, c-c_0)} \right)^{-1} \mathbf{U}_m^c, \mathbf{U}_m^c \right\rangle. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve.

# Notations

$A_\rho$ , 44	$W_{y_d}^{(n,c)}$ , 95
$D_\gamma^F$ , 45	$W_{D_\gamma z}^{(n,c)}$ , 95
$D_a$ , 24	$e_d$ , 95
$M_a$ , 23	$e_m$ , 93
$S_x^1$ , 36	$C_x^1$ , 33
$S_x^2$ , 36	$C_x^2$ , 33
$T_a$ , 23	$C_{V^\tau[w]}$ , 80
$V^\tau[w]$ , 80	$C_{V^\tau[z]}$ , 80
$V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]$ , 80	$C_{V^\tau[\mathcal{M}_\alpha z]}$ , 82
$V^\tau[y_m]$ , 80	$C_{W^\tau[w]}$ , 85
$W^\tau[\mathcal{D}_\gamma z]$ , 85	$C_{W^\tau[z]}$ , 85
$W^\tau[w]$ , 85	$C_{\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}$ , 76
$W^\tau[y_d]$ , 85	$C_{\mathcal{V}_g[w]}$ , 75
$\Gamma_{\mathbf{V}}$ , 114	$C_{\mathcal{V}_g[z]}$ , 75
$\Gamma_{\mathbf{W}}$ , 114	$C_{\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]}$ , 75
$C_{\mathbf{V}}^{(\delta,c)}$ , 102	$C_{\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma x]}$ , 77
$C_{\mathbf{W}}^{(\theta,c)}$ , 102	$C_{\mathcal{W}_\psi[w]}$ , 77
$C_{\mathbf{V}_{y_m}^L}$ , 111	$C_{\mathcal{W}_\psi[z]}$ , 77
$C_{\mathbf{V}^L}$ , 114	$C_{\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]}$ , 77
$C_{\mathbf{V}_w^{(n,c)}}$ , 93	$C_{V^\tau[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]}$ , 81
$C_{\mathbf{V}_z^{(n,c)}}$ , 93	$C_{V^\tau[y_m]}$ , 84
$C_{\mathbf{V}_{y_m}^{(n,c)}}$ , 94	$C_{W^\tau[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma x]}$ , 86
$C_{\mathbf{W}^L}$ , 114	$C_{W^\tau[y_d]}$ , 90
$C_{\mathbf{W}_w^{(n,c)}}$ , 96	$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , 21
$C_{\mathbf{W}_z^{(n,c)}}$ , 95	$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , 21
$C_{\mathbf{W}_{y_d}^{(n,c)}}$ , 96	$\mathcal{D}_\gamma$ , 53
$C_{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_\alpha z}^{(n,c)}}$ , 93	$\mathcal{D}_\gamma^0$ , 25
$C_{\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_\gamma z}^{(n,c)}}$ , 96	$\mathcal{E}_d$ , 87
$\mathbf{E}_d^c$ , 102	$\mathcal{E}_m$ , 82
$\mathbf{E}_m^c$ , 102	$\mathcal{M}_\alpha$ , 51
$\mathbf{V}^L$ , 114	$\mathcal{O}'_c$ , 24
$\mathbf{V}_{y_m}^L$ , 111	$\mathcal{O}_D$ , 25
$\mathbf{V}_w^{(n,c)}$ , 93	$\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ , 21
$\mathbf{V}_x^{(n,c)}$ , 93	$\mathcal{O}_c(\mathbb{R})$ , 21
$\mathbf{V}_{\mathcal{M}_\alpha z}^{(n,c)}$ , 93	$\mathcal{P}_{(\rho,\phi)}$ , 48
$\mathbf{W}_{y_d}^L$ , 114	$\mathcal{R}_x^1$ , 33
$\mathbf{W}_w^{(n,c)}$ , 95	$\mathcal{R}_x^2$ , 33
$\mathbf{W}_x^{(n,c)}$ , 95	$\mathcal{V}_g[\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau z]$ , 75
	$\mathcal{V}_g[w]$ , 75

$\mathcal{V}_g[z]$ , 74  
 $\mathcal{V}_g[\mathcal{M}_\alpha z]$ , 75  
 $\mathcal{V}_g$ , 60  
 $\mathcal{W}_\psi$ , 61  
 $\mathcal{W}_\psi[\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau z]$ , 77  
 $\mathcal{W}_\psi[w]$ , 77  
 $\mathcal{W}_\psi[z]$ , 77  
 $\mathcal{W}_\psi[\mathcal{D}_\gamma z]$ , 77  
 $\epsilon_d$ , 70  
 $\epsilon_m$ , 64  
 $\mathcal{P}_x$ , 32  
 $\mu_x$ , 33  
 $\psi_{\tau s}$ , 61  
 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , 42  
 $\mathcal{S}'_a(\mathbb{R})$ , 32  
 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 20, 42  
 $\mathcal{S}'_g(\mathbb{R})$ , 37  
 $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{M}_\alpha z}^{(n,c)}$ , 93  
 $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{D}_\gamma z}^{(n,c)}$ , 95  
 $\widetilde{\mathcal{D}}_\gamma^\tau$ , 68  
 $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha^\tau$ , 63  
 $c_x^1$ , 33  
 $c_x^2$ , 33  
 $g_{\tau\nu}$ , 60  
 $k_x^1$ , 34  
 $k_x^2$ , 34  
 $r_x^1$ , 33  
 $r_x^2$ , 33  
 $y_d$ , 56, 57  
 $y_m$ , 56  
 $z$ , 56

# Index

- Analytique, 38
- Autocorrélation fonctionnelle, 33
- Autocorrélation généralisée, 33
  
- Bruit blanc, 38
  
- Composition, 24
- Convolution, 24
- Covariance fonctionnelle, 33
- Covariance généralisée, 33
  
- Dilatation, 24
- Distributions, 21
- Distributions tempérées, 22
- Dérivation, 23
  
- Espace de Schwartz, 20
  
- Fonctionnelle caractéristique, 32
- Fonctions généralisées, 21
- Fonctions à croissance lente, 21
- Fonctions à croissance très lente, 21
- Fréquence locale, 98
  
- Groupe des dilatations contrôlées, 25
  
- Mesure spectrale, 37
- Modulation, 23
- Moyenne généralisée, 33
  
- Noyaux de Schwartz, 41
  
- Opérateur de convolution, 44
- Opérateur de dilatation fréquentielle, 45
- Opérateur de dilatation temporelle, 53
- Opérateur de modulation fréquentielle, 51
- Opérateur tangent, 63, 68
- Opérateurs pseudodifférentiels, 41
  
- Principe de l'extension duale, 22
- Processus circulaire, 38
- Processus gaussiens, 37
- Processus stationnaire, 34
  
- Produit, 24
- Pseudo-filtre, 43
  
- Spectre généralisé, 36
- Spectre local, 79
- Support, 22
- Symbole de Kohn-Nirenberg, 42
  
- Théorème des noyaux de Schwartz, 30
- Théorèmes de Bochner, 30
- Transformée de Fourier, 26
- Transformée de Gabor discrète, 91
- Transformée de Gabor généralisée, 60
- Transformée de Mellin, 26
- Transformée en ondelettes discrète, 91
- Transformée en ondelettes généralisée, 61
- Translation, 23
  
- Échelle locale, 98



# Bibliographie

- [, ] Technical report.
- [Alinhac, 2012] Alinhac, S. (2012). *Opérateurs pseudo-différentiels et théoreme de Nash-Moser*. EDP Sciences.
- [Auger and Flandrin, 1995] Auger, F. and Flandrin, P. (1995). Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 43(5) :1068–1089.
- [Auger et al., 2013] Auger, F., Flandrin, P., Lin, Y.-T., McLaughlin, S., Meignen, S., Oberlin, T., and Wu, H.-T. (2013). Time-frequency reassignment and synchrosqueezing : An overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(6) :32–41.
- [Bertrand et al., 2009] Bertrand, J., Bertrand, P., and Ovarlez, J.-P. (2009). *The Transform and Applications Handbook*, chapter 12, The Mellin Transform.
- [Boashash, 1992] Boashash, B. (1992). Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. i. fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, 80(4) :520–538.
- [Boashash, 2003] Boashash, B. (2003). *Time frequency analysis*. Gulf Professional Publishing.
- [Carmona et al., 1995] Carmona, R., Hwang, W. L., and Torrèsani, B. (1995). Identification of chirps with continuous wavelet transform. In *Wavelets and Statistics*, pages 95–108. Springer.
- [Carmona et al., 1998] Carmona, R., Hwang, W.-L., and Torrèsani, B. (1998). *Practical Time-Frequency Analysis : Gabor and Wavelet Transforms, with an Implementation in S*, volume 9. Academic Press.
- [Carson and Fry, 1937] Carson, J. R. and Fry, T. C. (1937). Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation. *Bell System Technical Journal*, 16(4) :513–540.
- [Clerc and Mallat, 2002] Clerc, M. and Mallat, S. (2002). The texture gradient equation for recovering shape from texture. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(4) :536–549.
- [Clerc and Mallat, 2003] Clerc, M. and Mallat, S. (2003). Estimating deformations of stationary processes. *Annals of Statistics*, 31(6) :1772–1821.
- [Daubechies et al., 2011] Daubechies, I., Lu, J., and Wu, H.-T. (2011). Synchrosqueezed wavelet transforms : an empirical mode decomposition-like tool. *Applied and computational harmonic analysis*, 30(2) :243–261.
- [Daubechies and Maes, 1996] Daubechies, I. and Maes, S. (1996). A nonlinear squeezing of the continuous wavelet transform based on auditory nerve models. *Wavelets in medicine and biology*, pages 527–546.
- [Delprat, 1992] Delprat, N. (1992). *Analyse temps-fréquence de sons musicaux : Exploration d'une nouvelle méthode d'extraction de données pertinentes pour un modèle de synthèse*. PhD thesis.
- [Delprat et al., 1992] Delprat, N., Escudie, B., Guillemain, P., Kronland-Martinet, R., Tchamitchian, P., and Torrèsani, B. (1992). Asymptotic wavelet and gabor analysis : Extraction of instantaneous frequencies. *IEEE transactions on Information Theory*, 38(2) :644–664.

- [Dörfler and Torr sani, 2010] Dörfler, M. and Torr sani, B. (2010). On the time-frequency representation of operators and generalized Gabor multiplier approximations. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 16 :261–293.
- [Faure, 2000] Faure, A. (2000). *Des sons aux mots, comment parle-t-on du timbre musical?* PhD thesis, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (EHESS).
- [Feichtinger et al., 2004] Feichtinger, H., Hampejs, M., and Kracher, G. (2004). Approximation of matrices by gabor multipliers. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(11) :883 – 886.
- [Flandrin, 1993] Flandrin, P. (1993). *Temps-fréquence*. Hermes.
- [Flandrin, 1999] Flandrin, P. (1999). *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. Academic Press.
- [Flandrin, 2001] Flandrin, P. (2001). *Wavelet transforms and time-frequency signal analysis*, chapter Inequalities in Mellin-Fourier signal analysis, pages 289–319. Springer.
- [Flandrin et al., 2003] Flandrin, P., Borgnat, P., and Amblard, P.-O. (2003). From stationarity to self-similarity, and back : Variations on the lamperti transformation. In *Processes with Long-Range Correlations*, pages 88–117. Springer.
- [Folland, 1989] Folland, G. B. (1989). *Harmonic analysis in phase space*. Number 122. Princeton university press.
- [Gabor, 1946] Gabor, D. (1946). Theory of communication. part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26) :429–441.
- [Gallager, 2008] Gallager, R. (2008). Circularly symmetric gaussian random vectors. *Preprint*.
- [Gasquet and Witomski, 1990] Gasquet, C. and Witomski, P. (1990). *Analyse de Fourier et applications*. Masson.
- [Gaver, 1993] Gaver, W. W. (1993). What in the world do we hear? : An ecological approach to auditory event perception. *Ecological psychology*, 5(1) :1–29.
- [Gelfand and Vilenkin, 1964a] Gelfand, I. and Vilenkin, N. (1964a). *Generalized functions Vol.1. Properties and operations*. Academic Press.
- [Gelfand and Vilenkin, 1964b] Gelfand, I. and Vilenkin, N. (1964b). *Generalized functions Vol.4. Applications of harmonic analysis*. Academic Press.
- [Golse, 2010] Golse, F. (2010). *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Cours de l’Ecole Polytechnique.
- [Goodman, 1963] Goodman, N. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (an introduction). *Annals of mathematical statistics*.
- [Gr chenig, 2001] Gr chenig, K. (2001). *Foundations of time-frequency analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Inc., Boston, MA.
- [Hida and Si, 2008] Hida, T. and Si, S. (2008). *Lectures on white noise functionals*. World Scientific.
- [Hörmander, 1983] Hörmander, L. (1983). *The analysis of linear partial differential operators III*, volume 257. Springer.
- [Huang and Shen, 2005] Huang, N. E. and Shen, S. S. P. (2005). *Hilbert-Huang Transform and its Applications*. World Scientific.

- [Kodera et al., 1978] Kodera, K., Gendrin, R., and Villedary, C. (1978). Analysis of time-varying signals with small  $bt$  values. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 26(1) :64–76.
- [Koopmans, 1995] Koopmans, L. H. (1995). *The spectral analysis of time series*. Academic press.
- [Krahmer and Pfander, 2014] Krahmer, F. and Pfander, G. E. (2014). Local sampling and approximation of operators with bandlimited kohn–nirenberg symbols. *Constructive Approximation*, 39(3) :541–572.
- [Larcher, 2012] Larcher, J. (2012). Multiplication and convolution in l.schwartz’ spaces of tests functions of distributions and distributions and their continuity. *arXiv preprint arXiv :1209.4174*.
- [Malik and Rosenholtz, 1997] Malik, J. and Rosenholtz, R. (1997). Computing local surface orientation and shape from texture for curved surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 23(2) :149–168.
- [Mallat, 1989] Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 11 :674–693.
- [Mallat, 2000] Mallat, S. (2000). *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions Ecole Polytechnique.
- [Mallat et al., 1998] Mallat, S., Papanicolaou, G., and Zhang, Z. (1998). Adaptive covariance estimation of locally stationary processes. *Annals of Statistics*, pages 1–47.
- [Merer et al., 2008] Merer, A., Ystad, S., Kronland-Martinet, R., and Aramaki, M. (2008). Semiotics of sounds evoking motions : Categorization and acoustic features. In *Computer Music Modeling and Retrieval. Sense of Sounds*, pages 139–158. Springer.
- [Nie et al., 2005] Nie, K., Stickney, G., and Zeng, F.-G. (2005). Encoding frequency modulation to improve cochlear implant performance in noise. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 52(1) :64–73.
- [Olivero et al., 2013] Olivero, A., Torr sani, B., and Kronland-Martinet, R. (2013). A class of algorithms for time-frequency multiplier estimation. *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Processing*, 21(8) :1550 – 1559.
- [Omer and Torr sani, 2013a] Omer, H. and Torr sani, B. (2013a). Estimation conjointe modulations de fréquence/spectre, application a l’analyse de signaux audio. In *GRETSI 2013*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00836504/>.
- [Omer and Torr sani, 2013b] Omer, H. and Torr sani, B. (2013b). Estimation of frequency modulations on wideband signals; applications to audio signal analysis. In Pfander, G., editor, *Proceedings of the 10th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, pages 29–32. Eurasip Open Library. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00822186>.
- [Omer and Torr sani, 2015] Omer, H. and Torr sani, B. (2015). Time-frequency and time-scale analysis of deformed stationary processes, with application to non-stationary sound modeling. Technical report. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01094835>.
- [Picinbono, 1994] Picinbono, B. (1994). On circularity. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12) :3473–3482.

- [Picinbono, 1996] Picinbono, B. (1996). Second-order complex random vectors and normal distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(10) :2637–2640.
- [Picinbono, 1997] Picinbono, B. (1997). On instantaneous amplitude and phase of signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 45(3) :552–560.
- [Picinbono and Bondon, 1997] Picinbono, B. and Bondon, P. (1997). Second-order statistics of complex signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2) :411–420.
- [Picinbono and Martin, 1983] Picinbono, B. and Martin, W. (1983). Représentation des signaux par amplitude et phase instantanées. In *Annales des télécommunications*, volume 38, pages 179–190. Springer.
- [Priestley, 1965] Priestley, M. B. (1965). Evolutionary spectra and non-stationary processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 204–237.
- [Rankine et al., 2007] Rankine, L., Mesbah, M., and Boashash, B. (2007). If estimation for multicomponent signals using image processing techniques in the time–frequency domain. *Signal Processing*, 87(6) :1234–1250.
- [Schwartz, 1966] Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions*. Actualités Scientifiques et Industrielles, Institut de Mathématique, Université de Strasbourg.
- [Soize, 1993] Soize, C. (1993). *Méthodes mathématiques en analyse du signal*. Masson.
- [Søndergaard, 2007a] Søndergaard, P. (2007a). *Finite Discrete Gabor Analysis*. PhD thesis, Institut for Matematik – Denmark Technical University.
- [Søndergaard, 2007b] Søndergaard, P. L. (2007b). Gabor frames by sampling and periodization. *Advances in Computational Mathematics*, 27(4) :355–373.
- [Søndergaard, 2012] Søndergaard, P. L. (2012). Efficient algorithms for the discrete gabor transform with a long fir window. *J. Fourier Anal. Appl.*, 18(3) :456–470.
- [Søndergaard et al., 2012] Søndergaard, P. L., Torrésani, B., and Balazs, P. (2012). The linear time frequency analysis toolbox. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 10(04).
- [Thoret, 2014] Thoret, E. (2014). *Caractérisation acoustique des relations entre les mouvements biologiques et la perception sonore : application au contrôle de la synthèse et à l'apprentissage de gestes*. PhD thesis, Aix-Marseille Université.
- [Unser and Tafti, 2013] Unser, M. and Tafti, P. (2013). *Sparse stochastic processes*. Cambridge University Press.
- [Van der Pol, 1946] Van der Pol, B. (1946). The fundamental principles of frequency modulation. *Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering, Journal of the Institution of*, 93(23) :153–158.
- [Van Trees, 2003] Van Trees, H. L. (2003). *Detection, estimation and modulation theory*. Wiley Interscience.
- [Ville et al., 1948] Ville, J. d. et al. (1948). Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Cables et transmission*, 2(1) :61–74.
- [Wisdom et al., 2014] Wisdom, S., Atlas, L., and Pittore, J. (2014). Extending coherence time for analysis of modulated random processes. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pages 340–344. IEEE.

- 
- [Wu, 2013] Wu, H.-T. (2013). Instantaneous frequency and wave shape functions (i). *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 35(2) :181–199.