

# Résolution accélérée du problème de tenue à la mer appliquée à l'étude paramétrique de fermes de récupérateur d'énergie des vagues

Bruno Borgarino

## ► To cite this version:

Bruno Borgarino. Résolution accélérée du problème de tenue à la mer appliquée à l'étude paramétrique de fermes de récupérateur d'énergie des vagues . Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2011. Français. NNT: . tel-01207480

## HAL Id: tel-01207480 https://hal.science/tel-01207480

Submitted on 30 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. Ecole Centrale de Nantes

## ÉCOLE DOCTORALE

Sciences pour l'ingénieur, Géosciences, Architecture

Année 2010-2011

N° B.U. :

## Thèse de Doctorat

## SPECIALITE : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

**BRUNO BORGARINO** 

le 19/10/2011 à l'Ecole Centrale de Nantes

## TITRE

## RESOLUTION ACCELEREE DU PROBLEME DE TENUE A LA MER APPLIQUEE A L'ETUDE PARAMETRIQUE DE FERMES DE RECUPERATEURS DE L'ENERGIE DES VAGUES

## JURY

Président : Frédéric DIAS, Professeur, CMLA ENS Cachan, Cachan

Rapporteurs : Michel BENOIT, HDR, Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, EDF R&D, Chatou Frédéric DIAS, Professeur, CMLA ENS Cachan, Cachan

Examinateurs : Jean-Luc ACHARD, Docteur HDR, LEGI, Grenoble Aurélien BABARIT, Docteur, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, Nantes Christian BERHAULT, Docteur, PRINCIPIA, Nantes Pierre FERRANT, Professeur, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, Nantes

Membre invité : Gerard DELHOMMEAU, Docteur, ex-Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, Nantes

Directeur de thèse : Pierre FERRANT Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides, UMR 6598 CNRS Ecole Centrale de Nantes Co-encadrant : Aurélien BABARIT Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides, UMR 6598 CNRS Ecole Centrale de Nantes

N° ED : 498-191

#### Résumé en français (obligatoire)

Ce travail de thèse porte sur la résolution du problème de tenue à la mer pour le cas des fermes de récupérateurs d'énergie des vagues. La résolution de ce problème pour un système seul par méthodes potentielles est bien maîtrisée. Dans le cas des fermes, des interactions hydrodynamiques ont lieu entre systèmes, dues aux vagues diffractées et rayonnées par chacun des systèmes flottants ; la résolution du problème de tenue à la mer doit donc être menée sur la ferme dans son ensemble. Le problème numérique présente un nombre important d'inconnues, étant donné qu'une ferme comportera plusieurs dizaines de systèmes, chacun étant représenté par plusieurs centaines d'inconnues.

Une méthode d'accélération est indispensable pour résoudre ce problème en un temps de calcul raisonnable. Ce travail de thèse porte donc sur l'implémentation de l'algorithme multipolaire rapide dans le logiciel de diffraction/radiation Aquaplus. La première étape est d'obtenir le développement multipolaire de la fonction de Green à surface libre. Les formulations issues de la littérature sont généralisées et validées de manière exhaustive.

Une distribution open-source de l'algorithme multipolaire non-adaptatif est ensuite mise en place dans Aquaplus. Celle-ci ne donne pas satisfaction pour le cas des fermes, la distribution spatiale des inconnues étant trop inhomogène. On implémente alors une version simplifiée de cet algorithme, mieux adaptée au cas des fermes.

L'outil obtenu est utilisé pour une étude paramétrique sur des fermes composées de REV génériques. L'influence de la distance de séparation entre corps sur la production d'énergie annuelle en un site donné est étudiée. Cette étude révèle le rôle prépondérant du power take-off sur les interactions hydrodynamiques. Elle montre aussi l'existence de configurations de fermes « optimales » qui permettent de limiter de manière significative les interactions destructives. A partir de ces configurations, on étudie les états de mer dans le sillage de petites fermes.

Mots-clés : récupération de l'énergie des vagues, fermes, algorithme multipolaire rapide, fonction de Green à surface libre

Titre et résumé en anglais (très recommandé)

# An accelerated resolution of the radiation/diffraction problem, applied to the parametric study of arrays of wave energy converters

This thesis presents the implementation of an acceleration method for solving the diffraction/radiation problem for arrays of wave energy converters. The resolution of this problem by numerical models based on linear potential flow theory is now standard for isolated bodies. When the floating bodies are grouped into an array, wave interactions occur between systems, due to radiated and diffracted waves. The resolution of the diffraction/radiation must then be carried on considering the whole array. This numerical problem involves a large number of unknowns, given that an array is made of several tens of systems, each system being modelled by several hundred of unknowns.

An accelerated method is thus mandatory to carry on computations in a reasonable amount of time. This thesis describes the implementation of a fast multipole algorithm in the radiation/diffraction software Aquaplus. The first step is to get a flexible formulation of the multipole expansion of the free-surface Green's function. Formulations from the literature have been extended and validated in a systematic way.

An open-source distribution of the non-adaptative multipole algorithm has then been implemented in Aquaplus. This method did not prove satisfactory for the study of arrays of floating bodies, as the spatial distribution of the unknowns is too inhomogeneous in this case. A simplified version of the fast multipole algorithm, more suited to the study of arrays, is then implemented.

The developed tool has been used for a parametric study of arrays made of generic wave energy converters. The influence of the separating distance between bodies on the yearly energy production of the array at a specific site has been investigated. This study revealed that the power take-off plays a significant role on hydrodynamic interactions. It also showed that optimal array layout can be found, limiting significantly the destructive interactions in the array. The reduction of the significant wave height in the lee of such an array has been studied.

Mots-clés : wave energy conversion, arrays, fast multipole algorithm, free-surface Green's function.

Discipline : Sciences de l'Ingénieur

# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord les rapporteurs de cette thèse, Messieurs Michel Benoit et Frédéric Dias, pour leur relecture détaillée de ce manuscrit. Je remercie également les autres membres du jury, Jean-Luc Achard, Christian Berhault et Gérard Delhommeau.

Mes remerciements vont bien entendu à Messieurs Pierre Ferrant, directeur de cette thèse, et Aurélien Babarit, co-encadrant, pour leur confiance, tout au long de ce projet. Je les remercie également pour leur disponibilité, grâce à laquelle notre collaboration a été fructueuse, malgré notre étalement géographique sur trois pays différents (France, Irlande, Norvège) lors de la dernière année. Merci tout particulièrement à Aurélien pour ses compétences d'encadrant. J'ai pu apprécier son suivi attentif et ses conseils.

Je souhaite d'autre part exprimer toute ma gratitude à John Ringwood, professeur au Department of Electronic Engineering de la National University of Ireland de Maynooth (NUIM) pour son hospitalité et son accueil chaleureux dans son département. Même si des difficultés dans la mise en place de la méthode multipolaire n'ont pas permis *in fine* de réaliser le travail d'optimisation envisagé à NUIM, l'intérêt de M. Ringwood et son point de vue pertinent sur le projet m'ont incontestablement guidé. Un grand merci à Jean-Christophe Gilloteaux d'avoir établi un pont entre l'ECN et NUIM.

J'ai bénéficié de nombreux soutiens scientifiques et techniques au cours de ces trois années. Merci tout d'abord à Gérard Delhommeau pour son aide indéfectible pour tout ce qui touche aux fonctions de Green et à Aquaplus en général, et pour sa réactivité surnaturelle pour répondre aux questions posées par email. Merci aussi à Frédéric Dias, pour ses conseils sur la mise en place de l'algorithme DPMTA.

D'un point de vue technique, merci à toute l'équipe du LMF pour les innombrables coups de main informatiques, qu'il s'agissent d'installation, programmation, compilation ... je pense notamment à Guillaume Ducrozet, Félicien Bonnefoy, Matthieu Weber, Yves Pérignon.

D'un point de vue humain, merci aux équipes du LMF et de NUIM pour leur accueil, leur bonne humeur, et pour l'ensemble des discussions scientifico-marines que nous avons eu. Merci à l'équipe des skippers CNRS (Aurélien, Chadi, Charles, Félicien, François, Mathieu, Hakim) de m'avoir fait découvrir les joies et les douleurs de la régate. Merci à Hakim et Maxime de m'avoir initié au surf dans les conditions propices de la côte basque espagnole.

Pour finir, merci à tous, parents, famille et amis, pour m'avoir soutenu tout au long de ce projet. Un très, très grand merci à Stéphanie, ma bulle d'oxygène pendant ces trois années.

#### Bonne lecture!

vi

# Table des matières

	Intr	oduction	1
Ι	Ré	solution accélérée du problème de tenue à la mer	5
1	Mo	délisation des fermes de récupérateurs de l'énergie des vagues	7
	1.1	Modélisation à l'échelle de la ferme	8
		1.1.1 Modèles analytiques	8
		1.1.2 Méthodes des singularités (ou méthodes des éléments frontières)	10
	1.2	Modélisation à l'échelle régionale	11
	1.3	Conclusion	12
2	Des	cription mécanique d'un ensemble de corps flottants	15
	2.1	Modélisation de l'écoulement	15
		2.1.1 Hypothèses	15
		2.1.2 Problème aux limites	15
	2.2	Equations mécaniques d'un corps flottant	16
		2.2.1 Repère et notations	16
		2.2.2 Bilan des efforts	16
	2.3	Cas d'un ensemble de corps	18
	2.4	Conclusion	19
3	Rés	olution du potentiel des vitesses	<b>21</b>
	3.1	Principe de résolution	21
		3.1.1 Rappel du problème, hypothèses, notations	21
		3.1.2 Deuxième formule de Green	21
		3.1.3 Troisième formule de Green	22
		3.1.4 Fonction de Green	23
		3.1.5 Distribution de singularités	24
		3.1.6 Equation intégrale	24
		3.1.7 Récapitulatif	24
	3.2	Fonctionnement d'Aquaplus	25
		3.2.1 Système linéaire	25
		3.2.2 Calcul de la fonction de Green	25
		3.2.3 Méthodes de résolution et limites	25
	3.3	Utilisation de l'algorithme multipolaire rapide	27
		3.3.1 L'emploi du FMA en hydrodynamique	27
		3.3.2 Positionnement du FMA dans la résolution	28
		3.3.3 Principe du FMA	29
	<b>3.4</b>	Conclusion	30

4	For	mulatio	ons multipolaires de la fonction de Green	33
	4.1	Foncti	on de Green	33
		4.1.1	Notations	33
		4.1.2	Champ proche $G_1$	33
		4.1.3	Champ lointain $G_2$	35
		4.1.4	Récapitulatif	37
	4.2	Opéra	teurs de translation	38
		4.2.1	Principe	38
		4.2.2	Moment to Local (M2L)	38
		4.2.3	Moment to Moment (M2M)	39
		4.2.4	Local to Local (L2L)	40
		4.2.5	Calcul de la fonction de Green	40
	4.3	Dérivé	e normale de la fonction de Green	40
	4.4	Valida	tion	41
		4.4.1	Modification de la fonction de Green	41
		4.4.2	Comparaison entre Aquaplus et formulations multipolaires	42
		4.4.3	Comparaison entre les formulations analytiques et multipolaires	45
		4.4.4	Influence des critères de convergence	45
	4.5	Conclu	usion	45
5	Imr	olémen	tation et performances de l'algorithme multipolaire rapide	49
Č	5.1	Couple	age Aquaplus-DPMTA	49
	0.1	5.1.1	Présentation du DPMTA	49
		5.1.2	Détails de l'implémentation	50
		513	Bésultats sur un corps	51
		5.1.4	Résultats sur un ensemble de corps	56
	5.2	Limite	es du FMA non-adaptatif pour un ieu de particules très inhomogène	59
	5.3	Algori	thme multipolaire simplifié	62
	0.0	5.3.1	Principe	62
		532	Résultats	63
		533	Emploi du FMAS pour évaluer l'élévation de la surface libre	67
	54	Conclu	Ision	68
	0.1	COMOIN		00

# II Etude paramétrique de fermes de récupérateurs d'énergie des vagues 71

6	Infl	uence de la configuration des fermes sur leur production énergétique	<b>73</b>
	6.1	Objectifs	73
	6.2	Caractéristiques des fermes étudiés	73
		6.2.1 Récupérateurs de l'énergie des vagues considérés	73
		6.2.2 Paramètres des fermes	75
	6.3	Modèle	77
		6.3.1 Calcul de la production d'énergie	77
		6.3.2 Résolution des problèmes de diffraction/radiation	77
	6.4	PTO calibrés pour une production annuelle maximale	80
		6.4.1 Fermes à base triangulaire	80
		6.4.2 Fermes à base carrée	85
		6.4.3 Réglage de $b_{pto yr}$ à l'échelle de la ferme	87
	6.5	PTO calibrés pour une puissance maximale à la résonance	87
		6.5.1 Fermes à base carrée	87
		6.5.2 Fermes à base triangulaire	92
	6.6	Conclusion	93

7 Fer	mes construites en sous-unités	
7.1	Méthode numérique employée	
7.2	Fermes de deux unités dans le sillage l'une de l'autre	
	7.2.1 Modèle	
	7.2.2 Unité isolée	
	7.2.3 Unités en interaction	
7.3	Sillage derrière une unité de REV	
	7.3.1 Evaluation de la hauteur significative des vagues	
	7.3.2 Résultats	
	7.3.3 Comparaison avec les modèles de propagation	
	7.3.4 Influence des modes de résonance transverse	
7.4	Ferme de deux unités décalées	
7.5	Conclusion	
Cor	nclusion et perspectives	
A Cal	cul du développement multipolaire de la fonction de Green	
A.1	Eléments de calcul pour $G_4$	
A.2	Coefficients pour la dérivée normale de la fonction de Green	

# Introduction

La récupération de l'énergie des vagues, ainsi que l'ensemble des Energies Marines Renouvelables (EMR), font actuellement l'objet d'un fort intérêt industriel. Le contexte énergétique mondial est en effet difficile et tendu, entre raréfaction des ressources pétrolières, ammoindrissement de la confiance accordée à l'énergie nucléaire, et réchauffement climatique. Nombre de pays européens souhaitent faire un usage accru des énergies renouvelables, en espérant en tirer plusieurs types de bénéfices :

- réduire leur empreinte carbone,
- renforcer leur indépendance énergétique,
- créer une filière industrielle « verte » génératrice d'emploi [55], afin de relancer leurs économies.

Les politiques publiques et les politiques de recherche se tournent donc vers le passage à l'échelle industrielle de la filière des EMR, caractérisé par la mise en place de "fermes" en mer, composées de plusieurs dizaines de systèmes de récupération d'énergie. Les projets à grande échelle sont voués à se développer, de manière à accroître la part des EMR dans le mix énergétique, et à réaliser des économies d'échelle (connexion au réseau, maintenance ...) permettant de réduire le coût du kWh. Cette dynamique est déjà largement lancée en Europe (en cours de démarrage en France) pour le secteur de l'éolien offshore. La filière de l'énergie des vagues est moins mature, car plus récente. Néanmoins la question du regroupement de plusieurs dizaines de systèmes houlomoteurs au sein de "fermes" (à l'image des parcs éoliens) se pose déjà ; elle fait l'objet de plusieurs études, que ce soit de la part des bureaux d'études, des développeurs de logiciels de simulation, des développeurs de systèmes, ou du milieu académique ([15, 39, 40], par exemple).

De même que les autres énergies renouvelables (à l'exception de la géothermie), l'énergie des vagues est une dérivée de l'énergie solaire. Le terme « concentré » d'énergie solaire serait d'ailleurs plus approprié. L'énergie solaire a en effet une densité énergétique de  $0.1 - 0.3 kW/m^2$  de surface terrestre; lorsque celle-ci est convertie en énergie éolienne par le jeu des différences de pression, la densité de l'énergie éolienne mise en jeu atteint  $0.5 kW/m^2$  dans la direction perpendiculaire au vent. Enfin, le vent transmet une partie de son énergie à l'élément liquide lorsqu'il souffle sur l'océan, ce qui entraîne une concentration supplémentaire de l'énergie, qui atteint  $2-3kW/m^2$  dans la direction perpendiculaire à la propagation des vagues [49]. Lorsque la profondeur est importante, les vagues ne ressentent pas la présence du fond marin. En l'absence de frottements, l'énergie est alors transportée quasiment sans pertes sur de très longues distances. Elle est partiellement dissipée lorsqu'elle atteint les côtes. Le potentiel mondial sur les côtes est estimé à 1 TW. Bien évidemment, seule une infime partie de cette énergie peut être récupérée. La tendance actuelle est donc au développement de systèmes flottants ou immergés, éloignés des côtes, là où la profondeur d'eau est grande et où le potentiel énergétique est plus important (voir par exemple le système Pelamis [1]).

La filière de la récupération de l'énergie des vagues n'étant pas encore arrivée à maturité, de nombreux systèmes houlomoteurs sont en cours de conception ou de validation. Ces étapes s'appuient en partie sur la simulation numérique des systèmes. Ces simulations ne sont pas des tâches aisées, et font appel à des méthodes de calcul différentes selon le système considéré et l'objectif de la simulation, qui peut être :

- d'estimer l'énergie produite par un système,
- d'évaluer la résistance aux états de mer extrêmes,

#### INTRODUCTION





(c) CETO [4]

FIGURE 1 – Vues artistiques de fermes de différents systèmes houlomoteurs.

- de tester différentes stratégies de contrôle pour optimiser le fonctionnement du système,
- d'estimer l'impact d'un système sur les états de mer autour de la ferme et sur la dynamique sédimentaire.

Etant donné la variété des systèmes mis en jeu, il est impossible d'avoir un outil de simulation générique pour l'ensemble des récupérateurs de l'énergie des vagues. Le type d'interactions fluide/structure peut en effet varier d'un système à l'autre. On distingue habituellement trois grandes familles de systèmes. Une première famille de systèmes convertit en énergie le mouvement par rapport à une référence fixe d'un corps excité par les vagues (systèmes oscillants) ; la seconde famille récupère grâce à une turbine le flux d'air déplacé par le mouvement de la surface libre dans une cavité (systèmes à colonne d'eau oscillante) ; la troisième famille tire profit du déferlement des vagues sur une rampe pour amener l'eau dans un réservoir surélevée et utiliser l'énergie potentielle ainsi stockée (systèmes à franchissement). La première famille est celle qui comporte le plus d'individus ; c'est sur celle-ci que porte ce travail de thèse. On s'intéressera donc à la résolution du problème de tenue à la mer de corps non-déformables.

Le cas des fermes présente des problématiques spécifiques qui doivent être étudiées. Se pose en premier lieu le problème des interactions entre systèmes houlomoteurs. Dans le cas de systèmes oscillants excités par la houle incidente, les vagues créées par la présence des systèmes (rayonnées du fait de leurs mouvements, ou réfléchies) doivent être considérées. Ces vagues vont en effet se propager d'un système à l'autre, modifiant la production d'énergie dans la ferme. On parlera alors d'interactions « constructives » si la production moyenne par corps dans la ferme est plus élevée que celle d'un corps seul, et d'interactions « destructives » dans le cas contraire. L'autre question est celle de l'impact des fermes sur les états de mer dans leur sillage et sur les processus côtiers. S'il est communément admis que l'extraction d'énergie par un système seul est insuffisante pour modifier les états de mer, la question fait plus débat dans le cas de fermes de plusieurs dizaines d'unités.

Les réponses à ces questions nécessitent de passer par la simulation numérique. Le nombre

de paramètres mis en jeu est très élevé, et il n'est pas envisageable de résoudre ces problèmes par l'expérimentation, sauf pour quelques situations particulières. Le fonctionnement de la ferme dépend en effet :

- de la géométrie des systèmes mis en jeu,
- de leur stratégie de contrôle (qui joue sur leur réponse à la houle incidente),
- de la disposition des systèmes au sein de la ferme,
- de l'environnement (états de mer, bathymétrie).

Les questions posées concernent le cas de la ferme dans son fonctionnement opérationnel (à l'inverse des cas de survie des systèmes aux conditions de mer extrêmes), l'objectif étant de déterminer des configurations de fermes minimisant les interactions destructives entre systèmes et/ou ayant un impact limité. Dans ce cas, la modélisation numérique peut se baser sur des hypothèses simplificatrices; on se placera dans le cadre de la théorie des fluides parfaits, qui considère la viscosité du fluide comme nulle. Cette approximation est valide en l'absence d'impacts ou de mouvements violents à même de générer de la turbulence. L'écoulement est supposé irrotationnel, ce qui permet de se ramener à un problème potentiel. D'autre part, on ajoute plusieurs hypothèses permettant de linéariser le problème :

- faible cambrure de la houle,
- déplacements de faible amplitude des systèmes flottants autour de leur position d'équilibre,
- système d'extraction d'énergie linéaire, c'est-à-dire exercant une force de rappel proportionnelle au déplacement du corps et une force d'amortissement proportionnelle à sa vitesse.

Dans le cadre de ces hypothèses, il est alors possible de résoudre numériquement le problème de tenue à la mer d'un ensemble de corps par une méthode des singularités prenant en compte la présence de la surface libre. La connaissance des mouvements des corps flottants permet de remonter à l'énergie produite par la ferme à un état de mer donné.

Le logiciel Aquaplus, développé au Laboratoire de Mécanique des Fluides (LMF) de l'Ecole Centrale de Nantes (ECN) depuis 1988, permet la résolution de ce problème par la méthode des singularités [41]. Cette méthode, basée sur les équations d'Euler, évalue la vitesse du fluide sur la surface immergée des corps flottants uniquement. Seul un maillage surfacique est alors nécessaire, ce qui permet de réduire le nombre d'inconnues; en cela la méthode des singularités est une méthode rapide. Les méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes, plus complètes, exigent en effet une résolution dans tout le domaine fluide. Employer une méthode rapide est intéressant d'un point de vue "bureau d'étude", car cela permet de tester un grand nombre de configurations de fermes en un temps de calcul raisonnable. Les fermes de systèmes houlomoteurs étant un objet nouveau pour lequel la somme des connaissances est limitée, il n'existe pas pour le moment de règles générales de conception pour les parcs. La réalisation d'un grand nombre d'études numériques n'en est que plus nécessaire.

Néanmoins, le temps de calcul lié à la méthode des singularités évolue avec le cube (méthode de résolution directe) ou le carré (méthode de résolution itérative) du nombre d'inconnues. Ces méthodes, rapides lorsqu'un corps seul est traité (maillage faisant intervenir de 250 à 500 inconnues), peuvent devenir difficile à utiliser à l'échelle d'une ferme, notamment si un balayage paramétrique est réalisé sur la géométrie ou le positionnement des corps. Il est donc indispensable d'accélérer la résolution du problème de tenue à la mer par une méthode appropriée.

C'est l'objet de ce travail de thèse. La première partie détaille l'implémentation d'un algorithme multipolaire rapide pour l'accélération de la résolution de l'équation intégrale.

Les différentes méthodes de modélisation de fermes sont tout d'abord passées en revue. On détaille les modèles analytiques existants; ces modèles sont fondamentaux, car ils ont permis de prouver l'existence d'interactions constructives. Néanmoins, ils font chacun appel à des hypothèses simplificatrices, ce qui constitue une limitation. D'autre part, ces modèles manquent de flexibilité dans l'optique du développement d'un outil de simulation aussi générique que possible, permettant de représenter des corps de forme arbitraire. On s'intéresse donc aux différentes méthodes numériques utilisables, qui se répartissent entre méthodes des singularités et méthodes de propagation. La limitation des méthodes de propagation dans la représentation des interactions fluide/structure est mise en évidence. Différentes méthodes des singularités, présentant plusieurs niveaux de nonlinéarités, sont présentées. Etant donné la complexité du problème envisagé, il apparaît comme raisonnable d'utiliser une méthode complètement linéaire.

On rappelle les équations qui régissent le mouvement d'un corps excité par une houle régulière, en dressant le bilan des forces mises en jeu. Ces équations sont ensuite explicitées pour le cas d'un ensemble de corps flottants ayant chacun un seul degré de liberté.

Le calcul des forces hydrodynamiques nécessite la résolution du potentiel des vitesses en tout point des surfaces des corps. On établit le problème aux limites correspondant. L'utilisation des formules de Green permet de réduire le problème volumique à un problème surfacique. La cinématique du mouvement des corps est représentée par une distribution de singularités appelées "sources" sur la surface des corps. On introduit une fonction de Green harmonique et satisfaisant la condition de surface libre; on obtient alors une équation intégrale à résoudre pour connaître les densités de sources, à partir desquelles le potentiel des vitesses peut être calculé en n'importe quel point du domaine fluide. Le logiciel de tenue à la mer Aquaplus [41] discrétise les surfaces en un ensemble de panneaux et résout la forme matricielle de cette équation intégrale. Pour cela, la fonction de Green et ses dérivées partielles sont préalablement calculées pour chaque jeu de deux panneaux. Il apparaît d'après la littérature que lorsque un grand nombre de panneaux est mis en jeu, cette résolution peut être accélérée par l'algorithme multipolaire rapide [58] (Fast Multipole Algorithm, FMA). Cet algorithme mène de manière conjointe le calcul de la fonction de Green et la résolution de l'équation matricielle, à condition d'être utilisé au sein d'un solveur itératif. Un solveur de type GMRes [81] est donc implémenté.

L'algorithme multipolaire rapide se base sur le développement multipolaire de la fonction de Green. Les formulations de ce développement existantes dans la littérature [90] sont étendues pour pouvoir les employer au sein d'un algorithme multipolaire tridimensionnel, ce qui sera nécessaire si des systèmes de forme allongés verticalement sont représentés. Ces formulations sont validées de manière systématique, par comparaison avec les formulations d'origine d'Aquaplus et avec des formulations analytiques.

Une distribution pré-éxistante de l'algorithme multipolaire est implémentée dans Aquaplus. L'outil obtenu est de nouveau validé à l'aide de résultats numériques et analytiques. Cet outil montre des performances en temps de calcul qui ne sont pas satisfaisantes, ainsi que des limitations sérieuses en terme de précision lorsque le cas des fermes est traité. Ces problèmes tiennent à plusieurs causes : une convergence difficile de la partie oscillante du développement de la fonction de Green pour les petites périodes de houle; l'emploi d'une implémentation du FMA qui ne peut pas s'adapter localement à la densité spatiale des inconnues (alors que dans le cas des fermes, les inconnues sont distribuées de manière très dispersée et inhomogène); la taille des problèmes considérés, trop petits pour que le FMA soit pleinement efficace. Une implémentation simplifiée du FMA, adaptée au cas des fermes, est donc réalisée. Les performances sont bien meilleures, en terme de précision, de temps de calcul et de besoin de mémoire, même si elles peuvent encore s'avérer insuffisantes selon la simulation considérée.

Dans la seconde partie, l'outil obtenu est mis en œuvre pour l'étude paramétrique de fermes de récupérateurs de l'énergie des vagues.

La première étude réalisée évalue l'influence de la distance de séparation entre corps au sein d'une ferme sur sa production d'énergie annuelle. Deux types de récupérateurs de l'énergie des vagues sont étudiés, chacun n'ayant qu'un seul degré de liberté. Cette étude souligne les principaux phénomènes mis en jeu dans la ferme (masquages, focalisations, résonances) et la manière dont ils dépendent de la distance entre corps, de la disposition des corps dans la ferme et de leur nombre. On identifie des configurations pour lesquelles les interactions à l'échelle annuelle sont légèrement constructives en houle irrégulière monodirectionnelle.

Dans une seconde étude, on évalue l'impact des configurations les plus efficaces sur les états de mer dans leur sillage. Cette étude révèle un impact très limité, inférieur à celui généralement estimé par les méthodes de propagation; cela est dû à une modélisation plus complète et plus réaliste des interactions fluide/structure. On s'intéresse aux interactions entre petites unités de quelques corps situées dans le sillage l'une de l'autre. Il apparaît qu'une ferme composée de plusieurs petits groupes de systèmes houlomoteurs éloignés les uns des autres est plus efficace qu'une ferme construite en un seul grand groupe.

Première partie

Résolution accélérée du problème de tenue à la mer

## Chapitre 1

# Modélisation des fermes de récupérateurs de l'énergie des vagues

Le secteur de la récupération de l'énergie des vagues n'ayant pas encore atteint le stade industriel, il existe une très grande variété de systèmes d'extraction proposés. Falcao [45] résume de manière quasi-exhaustive les différentes familles de récupérateurs de l'énergie des vagues (REV). Une des nombreuses manières de classifier ces systèmes est la suivante :

- "Terminators" : ce terme désigne les systèmes de grandes dimensions dans la direction perpendiculaire à celle de la propagation des vagues. Ils font donc "barrage", et on attend d'eux qu'ils modifient significativement les états de mer dans leur sillage. On peut donner comme exemple de système oscillant le célèbre "canard de Salter" [82, 78]. Les systèmes par déversement (Wave Dragon [5], SSG [6]) font aussi partie de cette famille.
- "Lineators" : ces systèmes ont une forme élancée parallèlement à la direction de propagation de la houle. Le plus célèbre système de cette famille est Pelamis [1].
- "Point-absorbers" : ces systèmes sont des flotteurs de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde de la houle incidente (Wavebob [7], PowerBuoy [8], CETO [9]...). Le niveau de production d'un flotteur individuel est faible; pour avoir une production d'énergie significative, il est donc nécéssaire de regrouper un grand nombre de systèmes au sein d'une ferme. L'ordre de grandeur des espacements envisagés entre systèmes est de 10 fois leur taille. Il existe cependant certains concepts (WaveStar [10], Manchester Bobber [22]) qui mettent en jeu des distances beaucoup plus courtes entre flotteurs.

Les méthodes de modélisation des fermes houlomotrices varient selon les systèmes considérés et le stade du projet. La manière dont l'énergie est extraite par les systèmes conditionne en partie les interactions fluide/structure. Une modélisation adaptée au système d'extraction (Power Take-Off, PTO) doit donc être choisie. L'approche usuelle pour les systèmes oscillants est de considérer que le déplacement du système ou d'un de ses éléments par rapport à une référence est amorti par un système de type "piston". Ce piston peut être un générateur électrique, un moteur hydraulique ... Selon le niveau de réalisme et de complexité requis dans la modélisation, le comportement de ce piston peut être linéaire ou non-linéaire, notamment en fonction de la stratégie de contrôle. Dans ce dernier cas, une modélisation des interactions fluide/structure dans le domaine temporel sera indispensable.

Dans la suite de ce chapitre, on présente succinctement les différentes méthodes disponibles en modélisation numérique pour traiter des interactions de vagues dans les fermes houlomotrices, ainsi que leurs limitations. Ce sont ces limitations qui sont à l'origine de ce travail de thèse. L'ensemble de ces méthodes a pour objectif de représenter les REV dans le cadre de leur fonctionnement opérationnel, et non pour les cas d'évènements extrêmes. Les effets liés à la viscosité ou à la turbulence sont donc considérés comme négligeables. Ces méthodes sont présentées selon les échelles auxquelles elles s'appliquent, et selon leurs objectifs. A l'échelle de la ferme, l'objectif est d'évaluer l'effet des interactions sur la production globale d'énergie. Cet effet est souvent décrit par le "q-factor", qui est le ratio suivant :

$$= \frac{\text{Production d'une ferme de } N \text{ récupérateurs}}{N \times \text{Production d'un récupérateur isolé}}$$
(1.1)

Si q > 1, les interactions sont constructives et permettent à l'effet de groupe de la ferme d'augmenter la production d'énergie par corps. Ce facteur varie avec la longueur d'onde et l'organisation de la ferme. Si q < 1, alors les interactions destructives deviennent prédominantes, certains systèmes masquant la houle aux autres.

A l'échelle régionale, on cherchera à évaluer le rôle de la ferme dans la modification des états de mer dans son sillage et son influence sur l'hydrodynamique et les processus côtiers. Il s'agit donc la plupart du temps d'une approche environnementale. Cependant, cette mesure de l'atténuation de la ressource sur un grand domaine peut aussi permettre de traiter de manière approximative les interactions entre "grands" REV (de type "terminator") ou entre fermes.

## 1.1 Modélisation à l'échelle de la ferme

## 1.1.1 Modèles analytiques

Le terme analytique renvoie ici à l'absence de discrétisation des corps flottants et de leur environnement (fond, surface libre) en ensemble d'inconnues. Il est à noter que si la modélisation des fermes est analytique, elle se base parfois sur des résultats concernant le corps isolé obtenus par une méthode numérique. Ces modèles s'appuient sur la théorie linéaire et harmonique des écoulements potentiels (section 2.1), en y ajoutant des hypothèses spécifiques. Leur principe est d'évaluer le potentiel des vitesses au niveau des corps flottants, afin d'en déduire les forces qui leurs sont appliquées. La résolution du principe fondamental de la dynamique, mettant en jeu les forces hydrodynamiques et la force appliquée par le power take-off, permet de connaître la puissance produite pour chaque période de houle. On pourra se référer à Falnes [48] pour de plus amples détails.

De manière générale, ces modèles ont permis de démontrer le potentiel d'extraction d'énergie que l'on peut atteindre en regroupant les corps en fermes, ainsi que la possibilité d'interactions constructives [33, 44, 46]. Néanmoins, étant donné leur complexité de formulations et les restrictions qu'ils imposent, aucun outil généraliste et utilisable dans l'industrie n'a été développé à partir de ces modèles.

#### 1.1.1.1 Multiple scattering method

Cette méthode, développée par Ohkusu [76], est une méthode exacte pour évaluer les interactions entre corps. Elle permet de traiter un nombre quelconque de corps axisymétriques disposés de manière arbitraire, et se base sur les propriétés hydrodynamiques d'un corps isolé. Le principe est de superposer la houle incidente avec un certain nombre de houles rayonnées et diffractées de plusieurs ordres; il est bien entendu nécéssaire de tronquer à un ordre donné. Cette méthode est utilisée par Mavrakos et McIver [71] comme référence pour évaluer la précision des approximations décrites dans les sections 1.1.1.2 et 1.1.1.3.

La principale limitation de cette méthode est qu'elle ne peut s'appliquer qu'à des systèmes axisymétriques. D'autre part, une étude de convergence est nécessaire, afin de s'assurer qu'un nombre suffisant d'ordres de houles diffractées et rayonnées, ainsi qu'un nombre suffisant d'interactions, sont pris en compte.

#### 1.1.1.2 Plane wave approximation

Le principe de cette approximation est de considérer que les vagues rayonnées et diffractées par un corps peuvent être représentées loin de celui-ci par des vagues monodirectionnelles. Cette

q

## 1.1. MODÉLISATION À L'ÉCHELLE DE LA FERME

méthode est valable lorsque l'espacement entre systèmes est grand devant la longueur d'onde; dans ces conditions, la houle apparaît plane lorsque la source de son rayonnement ou de sa diffraction est très éloignée. La méthode originale de Simon [85] négligeant le champ local, il est possible d'y ajouter des termes de correction [72]. La comparaison des résultats de cette méthode avec la méthode de "multiple scattering" a prouvé sa validité dans la plupart des cas [71]. Les caractéristiques hydrodynamiques d'un corps isolé doivent être déterminées avant d'utiliser cette méthode pour une ferme.

La condition sur l'espacement entre corps rend donc cette méthode inappropriée pour les situations où les corps sont relativement proches. Or c'est dans ces situations que les interactions sont les plus fortes et méritent le plus d'être étudiées.

#### 1.1.1.3 Point absorber approximation

L'approximation "point absorber" suppose que les corps sont petits devant la longueur d'onde. Par conséquent, les champs diffractés autour des structures sont négligés. On trouve une des premières utilisations de cette approximation dans [33]. Ces travaux ont par la suite été généralisés [50, 47]. Comme souligné par Mavrakos et McIver [71], cette méthode est moins précise dans le calcul des interactions entre corps que la méthode "plane wave approximation". Filtzgerald et Thomas [51] utilisent cette aproximation pour évaluer rapidement les interactions dans des fermes de systèmes disposés de manière irrégulière. Cela permet de résoudre un problème d'optimisation pour connaître l'organisation idéale de la ferme pour une période de houle donnée.

Lorsque l'on étudie les caractéristiques d'un REV, on évalue son comportement sur tout le spectre de houle, et non pas sur une unique longueur d'onde. Par conséquent cette approximation ne sera pas toujours utilisable. De plus un REV oscillant aura tendance à résoner lorsque sa taille et la longeur d'onde ont le même ordre de grandeur. Cette approximation ne permet pas de traiter ce cas, pour lequel la production d'énergie est maximale.

#### 1.1.1.4 Hydrodynamic interactions method

Cette méthode est basée sur les travaux de Kagemoto et Yue [64]. Elle exprime le potentiel du champ incident (qui arrive à un cylindre), ainsi que ceux des champs diffractés et rayonnés (qui s'en éloignent) comme des produits scalaires de deux vecteurs :

- un vecteur de fonctions de l'espace représentant l'ensemble des vagues qui peuvent s'approcher/s'éloigner du cylindre
- un vecteur de coefficients de pondération

Les interactions entre deux cylindres dues aux vagues rayonnées et diffractées s'évaluent alors par l'emploi de matrices de transfert, qui permettent de "propager" le vecteur de fonctions de l'espace du corps influençant au corps influencé. Cette méthode est décrite en détail par Child et Venugopal [36] qui l'appliquent à une ferme de deux cylindres. Dans [37], cette méthode est utilisée sur un ensemble de 5 cylindres, afin de traiter plusieurs problèmes d'optimisation. Kashiwagi [65] a mis en évidence une bonne correspondance entre cette méthode et une résolution numérique par méthode HOBEM (voir 1.1.2.1), pour le cas d'un ensemble de 4 cylindres.

Cette méthode est pour le moment difficile à appliquer à un corps de forme arbitraire. Dans [36, 37] elle est uniquement développée pour un cylindre (les équations mises en jeu sont différentes sur le fond du cylindre et sur sa paroi verticale). Selon Mavrakos et McIver [71], une autre limite de cette méthode (en comparaison avec la méthode "multiple scattering") est son besoin de mémoire important, dû au stockage des différents vecteurs.

#### 1.1.1.5 Ferme dense de petits corps

Une théorie spécifique aux fermes de petits corps a été développée par Garnaud et Mei [54], dans l'optique de traiter les sytèmes composés de bouées proches les unes des autres. Les bouées en question sont des cylindres pilonnants présentant un faible enfoncement. A l'échelle macroscopique, un "ratio d'occupation" caractérise la densité surfacique de la ferme (sur la surface libre). Les hypothèses suivantes sont faites :

- l'inertie des petits corps est faible
- l'amplitude des mouvements est faible, d'où une radiation négligeable
- les forces dominantes sont alors la force de rappel hydrostatique, la réaction du power take-off et la force d'excitation.

Alors une condition aux limites peut s'écrire sur la surface libre, liant le potentiel des vitesses, les caractéristiques du power take-off, et le "ratio d'occupation". Cela permet la résolution du potentiel dans la ferme, en prenant en compte la présence des systèmes.

Cette méthode permet d'avoir facilement des informations sur la production de la ferme au niveau macroscopique. Cependant les hypothèses utilisées ne permettent pas une étude détaillée et précise au niveau de chacun des corps. Cette méthode est donc plutôt un outil de pré-dimensionnement de la ferme dans son ensemble.

## 1.1.2 Méthodes des singularités (ou méthodes des éléments frontières)

Tout comme les méthodes de la section 1.1.1, ces méthodes sont basées sur la théorie des écoulements potentiels. Elles sont très largement utilisées dans le secteur de l'énergie des vagues, car plus flexibles que les méthodes analytiques, pour les raisons suivantes :

- elles permettent de représenter la surface de corps de forme arbitraire par un ensemble d'élements (panneaux plans ou courbes),
- elles traitent indifféremment les espacements réguliers ou irréguliers entre corps,
- elles n'ajoutent aucune approximation au cadre général de la théorie des écoulements potentiels, ce qui élargit leur champ d'application.

La résolution des problèmes de diffraction et de radiation est faite sur la surface des corps, et non dans l'ensemble du domaine fluide. Ce sont donc des méthodes très rapides si on les compare à celles qui résolvent complètement les équations de Navier-Stokes, car le maillage d'une surface demande moins d'inconnues que celui d'un volume. Cependant, étant donné que les matrices des systèmes à résoudre sont denses, ces méthodes présentent une complexité numérique en  $O(N^2) - O(N^3)$ . Le temps de calcul augmente donc très rapidement avec le nombre d'inconnues N (voir la section 3.2.3).

Lorsque les interactions fluide/structure sont linéarisées, les deux approximations suivantes sont faites :

- Les mouvements des corps sont supposés avoir une faible amplitude. On fait alors l'hypothèse que la surface mouillée des corps est la même au cours du temps; la géométrie du problème reste donc inchangée.
- La cambrure de la houle est supposée faible.

#### 1.1.2.1 Domaine fréquentiel

Les hypothèses considérées dans ce genre de modèles sont plus largement détaillées dans la section 2.1.1; les interactions fluide/structure sont linéaires. Le logiciel basé sur cette méthode qui est le plus employé en bureau d'étude est sans conteste WAMIT [95]. De nombreuses études récentes sur plusieurs "point-absorbers" en interaction l'utilisent [80, 22, 39, 40] pour résoudre le potentiel des vitesses et en déduire les mouvements de corps flottant dans les vagues.

Le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes développe quant à lui le logiciel Aquaplus [41, 42], qui fait l'objet de ce travail de thèse. Quelques études paramétriques sur des fermes faisant varier la distance entre corps ont été réalisées grâce à ce logiciel [63, 15]. Cela est possible notamment grâce à sa rapidité lorsque le nombre de panneaux n'est pas trop élevé ( $\approx 10^3$ ).

Cette méthode présente une version de base appelée Constant Panel Method (CPM) et une version améliorée et plus rapide, Higher Order Boundary Element Method (HOBEM, [87]). Dans la méthode CPM, les surfaces des corps sont représentées par des panneaux quadratiques plans, sur chacun desquels le potentiel des vitesses est constant. La représentation de ce potentiel est donc discontinue. Dans la méthode HOBEM, les surfaces des corps sont découpées en "sous-surfaces",

elles-mêmes représentées par des panneaux quadratiques qui peuvent être plans ou courbes. Cela permet une représentation de la géométrie plus réaliste, pour un nombre d'inconnues bien plus faible, et apporte une accélération importante. Le potentiel des vitesses est alors modélisé de manière continue sur le corps, en utilisant des splines [95], ou d'autres représentations comme des fonctions d'interpolation polynomiales [91]. A noter que dans cette dernière référence, la méthode HOBEM est accélérée par un algorithme multipolaire rapide; on retrouve aussi ce principe dans [88] et [56]. La méthode HOBEM n'est pas implémentée dans Aquaplus. Une méthode d'accélération pour les problèmes à grand nombre de panneaux n'en est donc que plus nécessaire.

Ces méthodes permettent aussi de connaître l'amplitude de l'élévation en tout point de la surface libre, moyennant une étape de post-traitement basée sur les résultats de l'équation du mouvement des corps et sur les potentiels correspondants aux différents problèmes de diffraction/radiation sur la surface de chacun des corps.

#### 1.1.2.2 Domaine temporel

L'emploi de modèles temporels permet de réaliser des simulations plus réalistes, prenant par exemple en compte :

- le fonctionnement non-linéaire du power take-off et du système de contrôle [18],
- les interactions fluide/structure non-linéaires, dans le cas de grands déplacements [59] (mais toujours dans le cadre des fluides parfaits, c'est-à-dire sans viscosité ni turbulence),
- l'influence du tirage des phases aléatoires lors de l'utilisation d'une houle irrégulière en entrée d'un système non-linéaire [83],
- le fonctionnement de systèmes de stockages de l'énergie [14].

Dans cette optique, le LMF a développé le logiciel Achil3D [38], qui permet d'obtenir les réponses impulsionnelles des corps flottants. Les interactions fluide/stucture sont ici aussi linéaires. Là encore, les surfaces sont représentées par un ensemble de panneaux plans. Cette méthode est néanmoins très demandeuse en temps de calcul; par conséquent, peu d'études sur plus d'un système ont pu être réalisées ([16, 17] par exemple).

L'approche décrite dans [60, 59] est prometteuse pour la modélisation d'interactions fluide/ structure non-linéaires. Cette méthode s'appuie sur la résolution en temporel du problème potentiel aux limites dans un bassin de houle numérique ("numerical wave tank", NWT). Les parois du bassin (incluant la plage d'absorption), la surface du corps immergé et la surface libre sont discrétisées par des éléments d'ordre élevé. Il n'y a donc pas d'hypothèses restrictives quant à l'amplitude des mouvements du corps. Dans cette méthode, seule une petite partie des inconnues est dédiée à la représentation de la surface du corps. Modéliser une ferme au lieu d'un corps seul demandera donc un temps de calcul supplémentaire minime ; pour le moment, seules des fermes de deux corps ont été étudiées en deux dimensions. Il est intéressant de noter qu'un bassin numérique du même type a récemment été accéléré grâce à l'emploi d'une méthode multipolaire [52, 53], pour étudier la propagation de vagues sur un fond complexe.

Ces méthodes apportent un gain de réalisme important. Cependant, elles sont bien plus coûteuses en temps de calcul que les méthodes fréquentielles. Elles sont donc adaptées aux études réalisées pour des projets en phase avancée, une fois la plupart des études paramétriques ou d'optimisation effectuées.

## 1.2 Modélisation à l'échelle régionale

L'extraction d'énergie par un système seul est en général perçue comme sans impact sur les processus côtiers. Il n'en va pas de même lorsque des fermes étendues sont envisagées, notamment lorsqu'elles sont composées de systèmes "terminators". Les méthodes dites "de propagation" sont alors utilisées afin d'évaluer la modification des états de mers induite par la présence d'une ferme ou d'un REV de grandes dimensions.

Comme décrit dans [20], ces modèles se répartissent en deux catégories :

 Les modèles spectraux, dont le plus employé est sans doute SWAN (Simulating WAves Nearshore, [11]). Les modèles de ce type évaluent l'évolution du spectre de houle en fonction des différents mécanismes de croissance (vent) et de dissipation (frottement sur le fond, déferlement, moutonnement).

Les modèles temporels basés sur les équations de Boussinesq [69] ou sur les équations Mild-Slope [23], qui décrivent l'évolution des vagues en eau peu profonde, en modélisant la diffraction et la réfraction.

L'extraction d'énergie par les REV peut être implémentée de différentes manières. Dans les premières études [73, 93] l'influence des systèmes est représentée par l'utilisation de coefficients de transmission et d'absorption sur leurs frontières. Il s'agit là d'une approche difficilement justifiable, qui ne prend pas en compte la physique des interactions fluide/structure. On est donc en droit de se demander quelle est la validité des résultats obtenus avec ce genre de méthodes, d'autant qu'il n'existe pas de comparaison avec des données expérimentales.

Beels *et al.* [21] proposent une approche améliorée pour le cas d'une ferme de Wave Dragons (systèmes à franchissement). Les différentes parties du système sont représentées par un jeu d'éléments éponges caractérisés par des coefficients de réflexion et d'absorption. L'absorption d'énergie reproduit la physique du Wave Dragon par une fonction déterminant la quantité d'eau "montant" dans le réservoir (cette fonction a été évaluée expérimentalement). Cette grandeur est supposée indépendante de la période de la houle, ainsi que l'énergie produite.

Dans [94, 77], des oscillateurs résonants sont étudiés mais encore une fois avec une absorption d'énergie indépendante de la période, ce qui est incorrect pour ce type de système. Pour améliorer cette approche, Alexandre *et al.* [13] présentent l'implémentation dans SWAN d'une fonction d'absorption "analytique" basée sur la période. Cette fonction permet de modéliser une absorption d'énergie optimale : on suppose que 75% de l'énergie est extraite; la période propre du système est accordée à la période de pic de l'état de mer considéré.

Néanmoins ces méthodes ne permettent pas une représentation correcte de la modification du champ de vagues due à l'absorption d'énergie, car les interactions fluide/structure ne sont pas pleinement modélisées. Les champs rayonnés et diffractés ne sont donc pas représentés. Il en découle un mauvaise estimation de la répartition de la ressource houlomotrice dans la ferme; l'estimation de l'énergie produite est donc probablement erronée.

Une approche plus appropriée pour prendre en compte l'aspect résonant de systèmes de type FO3 est présentée par Beels [20]. Les FO3 sont des plateformes supportant 21 bouées pilonnantes (chaque système peut donc être considéré comme une "mini-ferme"). Une ferme de 9 plateformes est étudiée, en combinant méthode BEM et méthode de propagation :

- l'absorption d'énergie d'un FO3 est évaluée en utilisant WAMIT
- les FO3 sont implémentés dans un modèle Mild-Slope en supposant que les vagues rayonnées par chaque système sont purement circulaires. Le déphasage et l'amplitude de ces vagues sont obtenus à partir de WAMIT.
- les champs de vagues rayonnés et diffractés sont superposés. L'énergie produite par un FO3 est calculée par règle de trois entre la hauteur des vagues devant le FO3 et la production d'un FO3 isolé pour une houle unitaire.

Cette approche comporte deux limitations. Tout d'abord le champ rayonné par un FO3 est probablement plus complexe qu'une houle circulaire, étant donné le nombre de flotteurs et leurs interactions. D'autre part, seulement un nombre limité de superpositions sont réalisées, ce qui conduit à un léger biais dans l'estimation de la houle devant chaque système.

## 1.3 Conclusion

La modélisation de fermes de REV par méthodes analytiques a démontré, dès le début de ce secteur de recherche, l'intérêt de constituer des fermes. Ces méthodes manquent néamoins de flexibilité pour être utilisées de manière courante en bureau d'études. Quant aux méthodes de propagation, elles ne permettent pas de résoudre correctement la physique du problème. Elles sont donc inadaptées, à moins que l'on puisse y implémenter les caractéristiques des REV de la manière la plus complète possible : champ diffracté, champ rayonné, fonction d'extraction de l'énergie.

L'approche qui semble la plus appropriée pour estimer la production d'une ferme de REV en interactions, tout en réduisant le nombre d'hypothèses simplificatrices, est l'emploi de méthodes

des singularités. Ces méthodes sont déjà largement employées dans le domaine fréquentiel; elles présentent cependant des temps de calcul encore trop longs lorsqu'une ferme est étudiée; le nombre total d'inconnues est proportionnel au nombre de corps en jeu. Or le temps de calcul évolue généralement avec le carré ou le cube du nombre d'inconnues. Une accélération significative de la résolution des problèmes de diffraction et de radiation est donc indispensable.

Depuis quelques années, l'emploi des méthodes multipolaires s'étend à l'accélération de la résolution de différents problèmes en hydrodynamique. Ce travail de thèse aura donc pour objectif l'implémentation et l'utilisation d'une méthode de ce type au sein du code potentiel Aquaplus, dans le domaine fréquentiel.

## Chapitre 2

# Description mécanique d'un ensemble de corps flottants

Ce chapitre pose les principales hypothèses utilisées dans la modélisation des interactions fluide/ structure dans le domaine fréquentiel et décrit les forces auxquelles sont soumis les systèmes excités par une houle harmonique.

## 2.1 Modélisation de l'écoulement

## 2.1.1 Hypothèses

On se place dans le cadre de la théorie linéarisée des écoulements potentiels. Le fluide est dit "parfait", c'est-à-dire que l'on considère sa viscosité commé négligeable. Cette théorie permet la mise en oeuvre de méthodes numériques rapides; on évalue en effet les mouvements de corps flottants en déterminant la pression sur la surface des corps seulement (et non pas dans tout le domaine fluide). Cette méthode est adaptée pour le cas de REVs dans des conditions de production normale, mais ne doit pas être utilisée pour des cas non-linéaires, car les erreurs peuvent devenir significatives lorsque les non-linéarités sont importantes.

L'eau est modélisée par un fluide et incompressible. Les vitesses dérivent alors d'un potentiel  $\Phi$ . On suppose que les mouvements ont une amplitude faible relativement à la longueur d'onde de la houle incidente. De même, la cambrure des vagues est considérée comme faible. L'écoulement est alors supposé irrotationnel. Dans ces conditions, on utilisera la condition de surface libre linéarisée (équation 2.4). Tout au long de ce travail de thèse, les corps considérés ne sont pas déformables.

On se place dans le cadre de fermes de REVs en grande profondeur. Dans le cadre de cette thèse, on situe donc le problème en profondeur infinie. Le problème ayant été linéarisé, on s'intéresse à la réponse stationnaire, de pulsation  $\omega$ . Le potentiel des vitesses au temps t peut donc s'écrire :

$$\Phi = Re[\phi e^{-\mathbf{i}\omega t}] \tag{2.1}$$

avec  $i^2 = -1$ .

## 2.1.2 Problème aux limites

Selon ces hypothèses, l'écoulement est régi par l'équation de Laplace (équation 2.2). On ajoute à cette équation les conditions aux limites qui permettent d'obtenir le problème complet (voir [74]) :

$$\Delta \Phi = 0 \text{ dans tout le domaine fluide}$$
(2.2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \overrightarrow{V}_k \cdot \overrightarrow{n} \text{ en tout point de la surface } S_k \text{ de chaque corps } k$$
(2.3)  
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ sur la surface libre au repos (en } z = 0)$$
(2.4)

avec g l'accélération de la pesanteur,  $\vec{V}_k$  la vitesse du point considéré sur la surface  $S_k$ , et  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  la normale au corps au point considéré. Dans l'hypothèse des faibles mouvements, la surface  $S_k$  est la surface immergée du corps k moyenne au cours du temps (c'est-à-dire la surface immergée de ce corps à la position d'équilibre autour de laquelle il oscille).

## 2.2 Equations mécaniques d'un corps flottant

Cette section décrit les notations et les efforts pour le cas d'un corps flottant. Les grandeurs introduites ici seront ensuite généralisées pour un ensemble de corps.

## 2.2.1 Repère et notations

Le système considéré est un corps flottant mis en mouvement par la houle, repéré dans un repère cartésien  $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$  par la position de son centre de carène. L'axe vertical  $\overrightarrow{e}_z$  pointe vers le haut. La surface libre est située à la côte z = 0 quand elle est au repos. Les 6 degrés de liberté du système sont définis de manière classique par le vecteur position X comme suit :

- trois translations selon les axes du repère :  $X_1$  (cavalement),  $X_2$  (embardée),  $X_3$  (pilonnement) - trois rotations autour des axes du repère :  $X_4$  (roulis),  $X_5$  (tangage),  $X_6$  (lacet)

Les inerties correspondantes sont décrites par la matrice diagonale  $6 \times 6$  M. Si  $i \in [1,3]$ ,  $\mathbf{M}_{ii} = m$ , avec m la masse du système.  $\dot{X}$  et  $\ddot{X}$  sont respectivement les vecteurs vitesse et accélération du système.

## 2.2.2 Bilan des efforts

Les efforts imposés au système par le fluide à chaque pulsation  $\omega$  s'expriment pour chaque degré de liberté i :

$$F_i = -\iint_S p(M,\omega)N_i(M)dS(M)$$
(2.5)

où  $p(M, \omega)$  est la pression en un point M(x, y, z) appartenant à la surface mouillée S du corps. La normale généralisée N est définie par :  $(n_x, n_y, n_z, y.n_z - z.n_y, z.n_x - x.n_z, x.n_y - y.n_x)$ . La relation de Bernoulli donnant la pression s'écrit en théorie linéarisée :

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = p_0 - \rho g z + \rho \omega \mathbf{i} \Phi$$
(2.6)

avec  $p_0$  la pression sur la surface libre (pression atmosphérique). Cela permet d'identifier un terme statique  $(p_0 - \rho gz)$  et un terme dynamique  $(\rho \omega \mathbf{i} \Phi)$ .

#### 2.2.2.1 Efforts hydrostatiques

L'intégration sur la surface S du corps du terme hydrostatique  $p_0 - \rho gz$  revient à la poussée d'Archimède  $F_P$ , avec  $F_{P_i} = \rho g \mathbf{V}$  si i = 3 et  $F_{P_i} = 0$  sinon ( $\mathbf{V}$  est le volume d'eau déplacé par la présence du corps). Cependant le corps est supposé proche de sa position d'équilibre (les mouvements ayant une faible amplitude), par conséquent  $\rho \mathbf{V} \approx m$ . La poussée d'Archimède et l'attraction de la pesanteur se compensent donc mutuellement à l'équilibre. Les efforts hydrostatiques  $F_H$  se résument alors à une force de rappel :

$$F_H = -K_H X \tag{2.7}$$

avec  $K_H$  la matrice de raideur hydrostatique dont les seuls coefficients non-nuls sont  $K_{H ij}, \forall (i, j) \in [3, 5]$ .  $F_H$  est donc l'effort que subit le système lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.

#### 2.2.2.2 Efforts hydrodynamiques

L'effort hydrodynamique  $F_D$  selon i s'écrit :

$$F_{D\,i} = \rho \mathbf{i}\omega \iint_{S} \phi(M,\omega) N_{i}(M) dS(M)$$
(2.8)

Il nécessite la résolution du potentiel  $\phi(M, \omega)$  en tout point M de la surface mouillée pour être calculé. Le potentiel est décomposé de manière classique en potentiel de la houle incidente  $\phi_0$ , potentiel  $\phi_d$  diffracté par la ou les structures et potentiels  $\phi_{R_i}, i \in [1, 6]$  liés aux vagues rayonnées par les mouvements du corps selon ses six degrés de liberté :

$$\phi = \phi_0 + \phi_d + \sum_{i=1}^6 \phi_{R_i} \tag{2.9}$$

On décompose donc l'effort hydrodynamique en force d'excitation et force de radiation.

Force d'excitation La force d'excitation résulte de l'intégrale des potentiels incident et diffracté :

$$F_{e\,i} = \mathbf{i}\omega\rho \iint_{S} (\phi_0 + \phi_d) N_i(M) dS(M)$$
(2.10)

Elle dépend donc fortement de l'environnement dans lequel le système est positionné : systèmes environnants, présence d'un mur, bathymétrie. En profondeur finie constante, le potentiel incident d'une houle linéraire en un point M(x, y, z) est donné par la formule suivante :

$$\phi_0 = -\frac{\mathbf{i}gA}{\omega} \frac{\cosh\left[\nu(z+h)\right]}{\cosh\left(\nu h\right)} e^{\mathbf{i}\nu(x\cos\beta + y\sin\beta)} \tag{2.11}$$

avec h la profondeur,  $\beta$  l'angle d'incidence de la houle,  $\nu$  le nombre d'onde, A l'amplitude. A est pris égal à 1 m par la suite. Quand  $h \to \infty$ , cette expression se simplifie :

$$\phi_0 = \frac{\mathbf{i}gA}{\omega} e^{\mathbf{i}\nu(x\cos\beta + y\sin\beta)} \tag{2.12}$$

**Force de radiation** Ces forces découlent des vagues créées par les mouvements du solide. Comme expliqué par Falnes [48], le lien entre la vitesse du mouvement du corps et le potentiel s'exprime par un coefficient de proportionnalité  $\varphi$  (étant données les hypothèses de linéarité sous lesquelles on se trouve) :

$$\phi_{R_i} = \varphi_i \dot{X}_i \tag{2.13}$$

Le corps étant rigide,  $X_i$  est constante et peut être sorti de l'intégrale lors de l'intégration du potentiel  $\phi_{R_i}$  sur la surface du corps. La composante *i* de la force de radiation  $F_R$  due à un mouvement selon *j* s'ecrit donc :

$$F_{R_i} = -Z_{ij}\dot{X}_j \tag{2.14}$$

avec Z la matrice d'impédance en radiation de taille  $6 \times 6$ . Les éléménts de Z sont exprimés par :

$$Z_{ij} = -\mathbf{i}\omega\rho \iint_{S} \varphi_{j} n_{i} dS \tag{2.15}$$

D'après la condition 2.3,  $n_i = \partial \phi_i / \partial n$ . Cette quantité pour le degré de liberté *i* s'écrit donc ainsi en un point M:

$$\begin{cases} n_i = \overrightarrow{e}_i . \overrightarrow{n}(M) & \text{si } i = 1, 2, 3\\ n_i = (\overrightarrow{e}_i \land \overrightarrow{OM}) . \overrightarrow{n}(M) & \text{si } i = 4, 5, 6 \end{cases}$$
(2.16)

On décompose usuellement Z selon sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$Z = B + \mathbf{i}\omega AM \tag{2.17}$$

La matrice B est l'amortissement correspondant à l'énergie rayonnée par le mouvement du corps. Cette quantité vient en facteur de la vitesse  $\dot{X}$  dans l'équation du mouvement. La matrice AM est appelée "masse d'eau ajoutée". En tant que telle, elle intervient en facteur de l'accélération  $\ddot{X}$ . Le double indice ij dans l'équation 2.15 traduit le couplage entre les différents degrés de liberté du système : un mouvement selon j va générer un champ de pression qui influencera le mouvement selon i.

Les quantités  $\phi_d$  et  $\varphi_{R_i}$  doivent être évaluées numériquement, afin d'évaluer B, AM et  $F_e$ . L'objet de ce travail de thèse est leur évaluation dans le cas de problèmes comprenant un grand nombre de corps, agissant comme autant de sous-systèmes et couplés entre eux.

## 2.2.2.3 Réaction du power take-off (PTO)

La récupération de l'énergie mécanique a lieu grâce au système d'extraction d'énergie (PTO pour "power take-off"), qui tire profit des mouvements du corps par rapport à une référence fixe (le fond marin, par exemple). L'action du PTO est décrit par la somme d'une force de rappel et d'un amortissement :

$$F_{PTO} = -K_{PTO}.X - B_{PTO}.\dot{X}$$
(2.18)

Dans la pratique cependant, l'extraction d'énergie a lieu la plupart du temps selon un seul degré de liberté; seul un terme diagonal des matrices  $B_{PTO}$  et  $K_{PTO}$  est non-nul.

#### 2.2.2.4 Efforts d'ancrage

La problématiques des ancrages est complexe. En effet, ceux-ci doivent être suffisament flexibles pour ne pas restreindre les mouvements du système, mais suffisament raides pour éviter sa dérive et le retenir en cas de tempête. Il existe des logiciels dédiés à la conception d'ancrages. Dans notre cas nous nous contenterons de les modéliser par une force de rappel et un amortissement en parallèle :

$$F_A = -K_A X - B_A \dot{X} \tag{2.19}$$

## 2.3 Cas d'un ensemble de corps

Dans un ensemble de corps flottants, chaque flotteur interagit avec les autres par les effets de diffraction et de radiation :

- La diffraction dépend de l'ensemble des structures présentes. Par conséquent, la force d'excitation appliquée à chaque corps est modifiée par la présence des autres corps. La résolution du problème de diffraction permet de connaître la force d'excitation appliquée à chacun des corps. Ce problème est donc résolu une seule fois pour chaque direction de houle incidente.
- Le mouvement d'un corps rayonne des vagues qui se propagent aux corps voisins et leur appliquent des forces. Ces interactions s'expriment par des termes de couplage en amortissement et en masse d'eau ajoutée. La vitesse et l'accélération d'un corps auront donc un impact sur le mouvement d'un autre corps à travers ces termes. On calcule ces termes de couplage en appliquant un mouvement d'amplitude unitaire sur un seul corps, les autres corps étant fixes. Il faut donc résoudre un problème de radiation pour chaque degré de liberté de chaque corps.

Le problème de nombreux corps flottants ayant chacun 6 degrés de liberté en interaction dans les vagues est complexe. De fait, la plupart des études réalisées sur les fermes de récupérateurs d'énergie des vagues simplifient ce problème en considérant qu'un seul degré de liberté est actif, celui selon lequel le PTO extrait l'énergie.

Nous introduisons ici les notations utilisées par la suite, correspondant à un ensemble de  $N_b$  corps flottants ayant chacun un seul degré de liberté. Aucun ancrage n'est considéré. Le PTO de chaque système est modélisé par un amortissement linéaire  $(b_{pto})$  en parallèle avec un ressort linéaire  $(k_{pto})$ . A chaque pulsation  $\omega$ , l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$(\mathbf{M} + AM(\omega))\ddot{X} + (B_{PTO} + B(\omega))\dot{X} + (K_H + K_{PTO})X = F_e$$
(2.20)

avec :

- $X(x_1, ..., x_{N_b})$  le vecteur position pour l'ensemble des corps selon le degré de liberté actif.  $\dot{X}$  et  $\ddot{X}$  sont les vecteurs vitesse et accélération.
- M est la matrice masse du sytème. Cette matrice est diagonale si l'on ne considère qu'un seul degré de liberté par corps.
- $-K_H$  est la matrice hydrostatique du système. Cette matrice est diagonale si l'on ne considère qu'un seul degré de liberté par corps.
- $K_{PTO}$  et  $B_{PTO}$  sont les matrices diagonales correspondantes au PTO.  $\forall i, K_{PTO_{ii}} = k_{pto}, B_{PTO_{ii}} = b_{pto}.$
- $-AM(\omega)$  and  $B(\omega)$  sont les matrices hydrodynamiques de masse d'eau ajoutée et d'amortissement. Ces matrices de taille  $N_b \times N_b$  sont pleines. On peut montrer que ces deux matrices sont symétriques [48].
- $-F_e(F_{e 1}, ..., F_{e N_b})$  est le vecteur de la force d'excitation.

Le système linéaire à résoudre (équation 2.20) est de petites dimensions (au maximum,  $N_b \approx 100$ ). Il est donc simplement résolu par inversion. La difficulté principale du point de vue numérique réside dans l'évaluation des termes AM, B et Fe. Cette évaluation par la méthode des singularités implique une effort de calcul important lorsque le nombre de corps est grand, pour deux raisons simples : tout d'abord, il y a plus de problèmes de radiation à résoudre; d'autre part, la géométrie globale du problème de l'ensemble de corps nécessite d'être représentée par un grand nombre d'inconnues.

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre résume tout d'abord les principales hypothèses utilisées pour modéliser les interactions fluide/structure, dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée. Un bilan des forces appliquées à un récupérateur d'énergie des vagues isolé est dressé. Les notations sont ensuite étendues au cas d'un ensemble de REV ayant chacun un seul degré de liberté.

Les forces hydrodynamiques s'obtiennent à partir du potentiel des vitesses de l'écoulement. Le chapitre suivant décrit la méthode utilisée par Aquaplus pour résoudre ce potentiel, ainsi que les limites rencontrées.

# Chapitre 3 Résolution du potentiel des vitesses

Ce chapitre rappelle le principe de la méthode des singularités. Il établit le système linéaire à résoudre pour évaluer numériquement le potentiel des vitesses sur la surface des corps pour chacun des problèmes de diffraction et de radiation. Le rôle de l'algorithme multipolaire rapide dans l'accélération de la résolution est explicité.

## 3.1 Principe de résolution

## 3.1.1 Rappel du problème, hypothèses, notations

Le problème à résoudre est celui présenté à la section 2.1.2. Par souci de clarté, on ne considère dans cette section qu'un seul corps flottant. Ce problème doit être résolu au temps t, en tout point M du volume fluide. La condition sur le fond n'est pas considérée, car on choisit de travailler ici en profondeur infinie :

$$\Delta \Phi(M,t) = 0 \text{ dans tout le domaine fluide}$$
(3.1)

$$\frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial n} = \overrightarrow{\mathbf{V}}(M,t).\overrightarrow{n} \text{ en tout point de la surface } S \text{ du corps}$$
(3.2)

$$\frac{\partial^2 \Phi(M,t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial z} = 0 \text{ sur la surface libre au repos, en } z = 0$$
(3.3)

On suppose le problème comme étant harmonique, de pulsation  $\omega$ . Les variables de temps et d'espace peuvent donc être découplées dans l'écriture du potentiel de l'écoulement  $\Phi$ :

$$\Phi(M,t) = Re\left[\phi(M)e^{-\mathbf{i}\omega t}\right] \tag{3.4}$$

L'ensemble des autres quantités du problème (vitesse, pression ...) sont elles-aussi harmoniques. Sous les hypothèses de linéarité, le problème se limite donc à la résolution des quantités dépendantes de l'espace. Le problème précédent peut donc se réécrire comme suit :

$$\Delta \phi(M) = 0 \text{ dans tout le domaine fluide}$$
(3.5)

$$\frac{\partial \phi(M)}{\partial n} = \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{n} \text{ en tout point de la surface } S \text{ du corps}$$
(3.6)

$$-\omega^2 \phi(M) + g \frac{\partial \phi(M)}{\partial z} = 0 \text{ sur la surface libre au repos, en } z = 0$$
(3.7)

La figure 3.1 résume les notations employées.

## 3.1.2 Deuxième formule de Green

Soit  $\tau$  un domaine volumique fermé par une surface S de normale extérieure  $\overrightarrow{n}$ . La formule d'Ostrogradsky donne :

$$\iiint_{\tau} div \overrightarrow{V} d\tau = \iint_{S} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} dS$$
(3.8)



FIGURE 3.1 – Notations : SL est le plan de la surface libre au repos; S est la surface mouillée du corps;  $(\tau_i)$  et  $(\tau_e)$  sont respectivement les domaines intérieur et extérieur au corps;  $\Sigma$  est une sphère centrée au centre du corps, dont le rayon tend vers l'infini;  $\tau_e$  peut donc être considéré comme un domaine intérieur délimité par S, SL et  $\Sigma$ .

On définit le vecteur  $\overrightarrow{V}$  à partir de deux fonctions de l'espace et du temps  $\phi$  et  $\psi$  :

$$\overrightarrow{V} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} \overrightarrow{e}_y + \phi \frac{\partial \psi}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$
(3.9)

En réinjectant  $\overrightarrow{V}$  dans l'équation 3.8 on obtient :

$$\iiint_{\tau} (\phi \Delta \psi + \overrightarrow{grad} \phi. \overrightarrow{grad} \psi) d\tau = \iint_{S} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$
(3.10)

En permuttant  $\psi$  et  $\phi$  dans l'équation 3.10 et en soustrayant à l'équation 3.10 l'équation nouvellement obtenue, on arrive à la deuxième formule de Green :

$$\iiint_{\tau} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d\tau = \iint_{S} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$
(3.11)

## 3.1.3 Troisième formule de Green

Soient  $\phi$  un champ scalaire défini dans le domaine  $\tau_i$ , M' le point influençant,  $n_{M'}$  la normale extérieure à la surface S en M'. L'intégrale de Stieltjes donne, en un point M où la surface admet un plan tangent :

$$\iiint_{\tau_i} \phi(M') \Delta_{M'} \left(\frac{1}{MM'}\right) d\tau(M') = \begin{cases} -4\pi\phi(M) & \text{si } M \in \tau_i \\ -2\pi\phi(M) & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \in \tau_e \end{cases}$$
(3.12)

En posant  $\psi = 1/(MM')$  dans l'équation 3.11 et en utilisant le résultat précédent, il vient la troisième formule de Green :

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint \Delta_{M'} \Phi(M') \frac{1}{MM'} d\tau(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{MM'} \frac{\partial \phi(M')}{\partial n_{M'}} dS(M') -\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \phi(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{1}{MM'}\right) dS(M') = \begin{cases} \phi(M) & \text{si } M \in \tau_i \\ \phi(M)/2 & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \in \tau_e \end{cases}$$
(3.13)

Il est à noter que si la fonction  $\phi$  est harmonique, alors  $\Delta_{M'} \Phi(M') = 0$ ; l'intégrale volumique présente dans l'équation 3.13 disparaît, ce qui donne :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{MM} \frac{\partial \phi(M')}{\partial n_{M'}} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \phi(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{1}{MM'}\right) dS(M') = \begin{cases} \phi(M) & \text{si} \quad M \in \tau_i \\ \phi(M)/2 & \text{si} \quad M \in S \\ 0 & \text{si} \quad M \in \tau_e \end{cases}$$
(3.14)

## 3.1.4 Fonction de Green

#### 3.1.4.1 Mise en évidence

Considérons de nouveau le problème présenté à la section  $3.1.1 : \phi$  doit être harmonique (équation 3.5); on utilisera donc ici l'équation 3.14. On applique successivement cette équation dans le domaine intérieur  $\tau_i$  et dans le domaine extérieur  $\tau_e$  (figure 3.1), puis on additionne les deux équations obtenues. On arrive alors à l'équation suivante :

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left( \frac{\partial \phi_{e}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{i}}{\partial n} \right)_{M'} \frac{1}{MM'} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{S} (\phi_{e} - \phi_{i})_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left( \frac{1}{MM'} \right) dS(M')$$

$$= \begin{cases} \phi_{e}(M) & \text{si } M \in \tau_{e} \\ \frac{(\phi_{e}(M) + \phi_{i}(M))}{2} & \text{si } M \in S \\ \phi_{i}(M) & \text{si } M \in \tau_{i} \end{cases}$$

$$(3.15)$$

On note par  $\mathbf{CSL}(\phi(M)) = 0$  la condition de surface libre (équation 3.7), avec M appartenant à la surface libre. L'opérateur  $\mathbf{CSL}$  ne dépend que de M et est linéaire. L'équation 3.15 ne vérifie pas cette condition. Il faut par conséquent ajouter un terme g(M', M) tel que  $\mathbf{CSL}(1/(MM') + g(M', M)) = 0$ . On choisit cette fonction g(M', M) harmonique ( $\Delta_M g(M', M) = 0$ ). En appliquant la deuxième formule de Green (équation 3.11) on obtient :

$$\iint_{S} \left( \phi(M') \frac{\partial g(M', M)}{\partial n_{M'}} - g(M', M) \frac{\partial \phi(M')}{\partial n_{M'}} \right) = 0$$
(3.16)

L'équation 3.16 doit être écrite dans le domaine intérieur et dans le domaine extérieur. Les deux équations obtenues sont ajoutées à l'équation 3.15. On arrive alors à :

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left( \frac{\partial \phi_{e}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{i}}{\partial n} \right)_{M'} \left[ \frac{1}{MM'} + g(M', M) \right] dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{S} (\phi_{e} - \phi_{i}) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[ \frac{1}{MM'} + g(M', M) \right] dS(M') = \begin{cases} \phi_{e}(M) & \text{si } M \in \tau_{e} \\ \frac{(\phi_{e}(M) + \phi_{i}(M))}{2} & \text{si } M \in S \\ \phi_{i}(M) & \text{si } M \in \tau_{i} \end{cases}$$

$$(3.17)$$

Soit G = 1/MM' + g(M', M). g(M', M) est déterminée de manière à ce que  $\mathbf{CSL}(G(M', M)) = 0$ ,  $M \in (SL)$ . L'opérateur Laplacien étant linéaire,  $\Delta G = 0$ . On appelle G la fonction de Green pour le problème à surface libre en profondeur infinie.

#### 3.1.4.2 Formulation

On pourra se référer à Wehausen et Laitone [98] pour plus de détails sur la façon dont la fonction g est établie de manière à obtenir la formulation définitive de la fonction de Green. On note  $E(\xi, \eta, \zeta)$  le point source (point influençant) et F(x, y, z) le point champ (point influencé). Dans le cas de la profondeur infinie, la fonction de Green s'exprime de la manière suivante entre E et F [75] :

$$G(E,F) = \underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}_{G_1} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{2\nu}{k - \nu} e^{k(z + \zeta)} J_0(kR) dk}_{G_2}$$
(3.18)

avec :

$$\begin{array}{l} -\nu \text{ le nombre d'onde} \\ -J_n \text{ la fonction de Bessel de première espèce à l'ordre } n \\ -r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}, \\ R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \end{array}$$

 $G_2$  comporte une singularité pour  $k = \nu$ .  $G_2$  est donc la valeur principale de Cauchy de l'intégrale.

## 3.1.5 Distribution de singularités

Le potentiel en tout point de la surface du corps peut être décrit par une distribution de sources. Si l'on se place en  $M \in S$ , alors  $\phi_e = \phi_i = \phi$ . En reportant ce résultat dans l'équation 3.17, on obtient,  $\forall M \in S$ :

$$\phi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S} \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_{e}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{i}}{\partial n}\right)_{M'}}_{\sigma(M')} G(M', M) dS(M')$$
(3.19)

La connaissance du potentiel nécessite donc de déterminer les densités de source  $\sigma$  en tout point de la surface du corps. Cela passe par la résolution de l'équation intégrale établie ci-dessous.

## 3.1.6 Equation intégrale

Considérons de nouveau l'équation 3.17. Si l'on prend la dérivée normale des deux membres de cette formule pour  $M \in S$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \frac{\phi_e + \phi_i}{2} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M') \frac{\partial G(M', M)}{\partial n_M} dS(M')$$
(3.20)

La dérivée normale de la première intégrale de l'équation 3.17 disparaît car  $\phi_i$  et  $\phi_e$  sont harmoniques. Le membre de gauche peut être décomposé ainsi :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial n_M} + \frac{\partial \phi_i}{\partial n_M} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial n_M} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_M} \right) + \frac{\partial \phi_e}{\partial n_M}$$
(3.21)

ce qui fait intervenir  $\overrightarrow{V}_E$ , la vitesse du fluide dans le domaine extérieur :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial n_M} = \overrightarrow{V}_E(M).\overrightarrow{n}_M \tag{3.22}$$

on obtient alors l'équation intégrale :

$$\frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \sigma(M') \frac{\partial G(M', M)}{\partial n_M} dS(M') = \overrightarrow{V}_E(M) \cdot \overrightarrow{n}_M$$
(3.23)

## 3.1.7 Récapitulatif

On récapitule ici les équations utilisées pour résoudre le potentiel des vitesses sur un ensemble de  $N_b$  corps. La modélisation utilisée dans Aquaplus s'appuie sur une distribution de sources seules. E représente les points sources, F les points champs dans les équations qui suivent  $(E, F \in \bigcup_{k}^{N_b} S_k)$ . L'amplitude  $\phi$  du potentiel en un point F s'obtient par l'intégration des densités de source  $\sigma(E)$  sur l'ensemble des  $N_b$  surfaces immergées :

$$\phi(F) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\bigcup_{k}^{N_{b}} S_{k}} \sigma(E).G(E,F)dS(E)$$
(3.24)

(G est la fonction de Green telle que définie à la section 3.1.4.2). Il faut donc au préalable déterminer les quantités  $\sigma$  en tout point E. Pour cela, la résolution de l'équation intégrale suivante est nécessaire :

$$\frac{\sigma(F)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\bigcup_k^{N_b} S_k} \sigma(E) \frac{\partial G(E, F)}{\partial n_F} dS(E) = \overrightarrow{V}(F) \cdot \overrightarrow{n}(F)$$
(3.25)

Le second membre de l'équation est la composante normale de la vitesse du fluide au point champ F. De par la condition d'imperméabilité sur le corps, cette quantité est différente selon le problème traité :

- pour chacun des problèmes de radiation, la vitesse au point F correspond à un mouvement d'amplitude unitaire selon chacun des degrés de liberté du corps (NB : lorsqu'un corps bouge, les autres sont fixes).
- pour les problèmes de diffraction, cette vitesse s'obtient à partir du potentiel de la houle incidente  $\phi_0$  calculé au point  $F: \overrightarrow{V}(F) = -\overrightarrow{grad}\phi_0(F)$ .

## **3.2** Fonctionnement d'Aquaplus

## 3.2.1 Système linéaire

Dans Aquaplus, c'est la méthode des panneaux constants (Constant Panel Method, CPM) qui est utilisée. Les surfaces des corps sont définies par un ensemble de  $N_{panneaux}$  panneaux quadratiques plans, sur lesquels les inconnues  $\sigma$  sont constantes. L'équation 3.25 doit donc être résolue au centre  $M_j$  de chaque panneau j. Cela conduit à la formation d'un système linéaire de taille  $N_{panneaux} \times N_{panneaux}$ , dont la matrice est pleine et non-symétrique. Le système complet met donc en jeu deux équations matricielles :

$$\mathbf{K}\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{3.26}$$

$$\phi = \mathbf{S}\sigma \tag{3.27}$$

L'équation 3.26 est la traduction matricielle de l'équation 3.25. L'intensité de sources  $\sigma$  est obtenue par une méthode de résolution matricielle appropriée. On obtient le potentiel sur l'ensemble des panneaux grâce à l'équation 3.27 (équation 3.24 discrétisée).

## 3.2.2 Calcul de la fonction de Green

Les matrices **K** et **S** sont construites selon la fonction de Green  $(i, j \leq N_{panneaux}, S_{M_j})$  est la surface du panneau j:

$$\phi_j = \phi(M_j) \tag{3.28}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \iint_{S_{M_i}} \frac{\partial G(M_i, M_j)}{\partial n(M_j)} dS(M_i) \text{ si } i \neq j,$$
(3.29)

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{1}{2} + \iint_{S_{M_i}} \frac{\partial G(M_i, M_j)}{\partial n(M_j)} dS(M_i) \text{ si } i = j$$
(3.30)

$$\mathbf{S}_{ij} = \iint_{S_{M_i}} G(M_i, M_j) dS(M_i) \tag{3.31}$$

Les formulations utilisées pour calculer G et  $\partial G/\partial n$  entre panneaux sont décrites en détail dans [41]. Selon les distances relatives entre panneaux, des formulations exactes ou asymptotiques sont utilisées. Le calcul de  $G_2$  et de ses dérivées se fait par interpolation dans une table de valeurs pré-calculées. Lorsque  $M_i=M_j$ , le calcul des singularités en 1/r se fait grâce à une intégration sur la facette.

## 3.2.3 Méthodes de résolution et limites

#### 3.2.3.1 Résolution directe

Dans l'implémentation actuelle d'Aquaplus, on s'intéresse à deux sous-programmes :

cosk : ce programme calcule la fonction de Green et ses dérivées entre les panneaux deux à deux. Il établit les matrices K et S. Ces matrices sont écrites sur le disque dur dans plusieurs fichiers, puis lues par le programme suivant.
prek : ce programme résout les problèmes de diffraction/radiation et calcule les différents coefficients hydrodynamiques (amortissement, masse ajoutée, force d'excitation).

L'effort de calcul est donc clairement séparé en deux parties : écriture du système linéaire, puis résolution. La première partie présente une complexité en  $O(N_{panneaux}^2)$  qui correspond au peuplement de **K** et **S**. Cette partie est accélérée par plusieurs stratégies [41] :

- emploi de formules asymptotiques lorsque c'est possible, selon les positions relatives entre panneaux et selon la longueur d'onde,
- interpolation dans une table de valeurs pré-calculées pour  $G_2$  et ses dérivées.

La résolution des systèmes linéaires emploie la méthode de Gauss par colonne. Cette méthode devient rapidement coûteuse en terme de temps de calcul, étant donnée sa complexité en  $O(N_{panneaux}^3)$ . Cependant, au vu de la taille usuelle des problèmes traités dans Aquaplus (avec un maximum de 2000 panneaux), l'emploi d'une telle méthode se justifie. Si l'on considère les problèmes de fermes de REVs, les ordres de grandeur suivants vont entrer en jeu :

- nombre de corps : de 10 à 100
- nombre de panneaux par corps : de  $10^2$  à  $10^3$

Le nombre total de panneaux  $(O(10^3) - O(10^6))$  ne permettra donc plus un calcul dans des temps raisonnables, d'autant que le nombre de problèmes de radiation à traiter augmente avec le nombre de corps. Une méthode d'accélération est donc indispensable.

#### 3.2.3.2 Résolution itérative (GMRes)

La méthode itérative GMRes [81] fait partie des méthodes de référence pour résoudre les systèmes linéaires denses et non-symétriques. Chaque itération fait intervenir des produits matricevecteur  $\mathbf{K}.r^{(l)}$  de complexité  $O(N_{panneaux}^2)$  ( $r^{(l)}$  est le résidu à l'itération l). Les systèmes linéaires sont généralement bien conditionnés, d'où un faible nombre d'itérations (typiquement compris entre 10 et 50). La complexité de la résolution est donc elle-aussi  $O(N_{panneaux}^2)$ . Une version simple de cet algorithme (sans préconditionnement ni restarting) a été implémentée dans Aquaplus.

Le nombre d'itérations est quasiment indépendant du nombre de panneaux (table 3.1). Il dépend par contre fortement de la période de la houle, qui joue sur le conditionnement de la matrice K (voir la table 3.2). La géométrie du problème (forme des corps, nombre et disposition de ceux-ci) influence aussi légèrement le conditionnement. On retrouve de telles tendances dans [91].

$N_{panneaux}$	$n_{PMV}$
81	7
171	7
551	8
1023	8
1421	12
1911	12
2401	8
4762	22
7056	12
9801	33

TABLE 3.1 – Nombre de produits matrice-vecteur  $n_{PMV}$  pour résoudre un problème de radiation pour un hémisphère de 10*m* de diamètre représenté par un nombre de panneaux variables, à T = 5s.

On voit que le nombre d'itérations est faible. Cela implique que le temps de calcul est dominé par la construction de la matrice  $\mathbf{K}$ . Ce temps évolue selon  $O(N_{panneaux}^2)$ , ce qui correspond à l'ensemble des interactions deux à deux entre panneaux. Dans la suite, on comptera ce temps comme partie intégrante du temps de calcul de la première itération de l'algorithme GMRes (cela facilitera la comparaison entre méthodes de résolution). Le temps dédié à la première itération est donc bien plus important que pour les autres itérations, car  $\mathbf{K}$  n'est construite qu'une fois par période de houle et reste inchangée d'une itération à l'autre, ainsi que d'un problème de diffraction/radiation à l'autre. En effet, la fonction de Green ne dépend que de la période, et de la géométrie du problème. Elle est donc inchangée d'une itération à l'autre.

	Cylindres en pilonnement				]	Parallépipèdes en cavalement			
	1	9	16	25	1	9	16	25	
$N_{panneaux}$	260	2340	4160	6500	272	2448	4352	6800	
$T = 3.9 \ s$	10	23	16	31	13	31	38	42	
$T = 20.4 \ s$	9	15	14	14	11	15	13	15	

TABLE 3.2 – Nombre de produits matrice-vecteur pour résoudre un problème de diffraction/radiation dans une ferme, selon le nombre de REV et la période de houle. Les corps étudiés sont ceux décrits dans le chapitre 6.

Il est clair qu'un temps de calcul évoluant avec  $O(N_{panneaux}^2)$  reste rédhibitoire dans l'optique de calculs à grands nombres de panneaux, notamment dans le cadre d'études paramétriques ou d'optimisation. L'objet de cette thèse est donc l'accélération du solveur GMRes par l'emploi d'un algorithme multipolaire rapide (Fast Multipole Algorithm, FMA), de manière à passer à une complexité en  $O(N_{panneaux})$ ; cela est possible car la méthode multipolaire permet d'éviter le calcul des interactions deux à deux. Il faut cependant noter que dans ces conditions le plus gros de l'accélération sera apporté à la première itération, en remplaçant la construction de **K** par un autre mécanisme.

# 3.3 Utilisation de l'algorithme multipolaire rapide

#### 3.3.1 L'emploi du FMA en hydrodynamique

L'algorithme multipolaire rapide est considéré comme l'un des dix algorithmes les plus importants du vingtième siècle [67]. Sa spécificité est l'accélération drastique des problèmes d'interactions à très grands nombres d'inconnues (souvent appelées "particules"). On peut considérer par exemple le problème du potentiel gravitationnel dans une galaxie comportant des centaines de milliers d'étoiles ou de planètes : le potentiel gravitationnel sur une planète i est la résultante de la masse de chacune des autres planètes et de la distance qui sépare la planète i de chacune des autres planètes. A l'échelle de la galaxie, le vecteur potentiel s'obtient par un produit matrice-vecteur :

$$\Phi = \mathbf{D}.m\tag{3.32}$$

avec

 $-\Phi_i$  le potentiel sur la planète i,

 $-r_{ij}$  la distance entre les planètes i et j,

 $-\mathbf{D}_{ij} = 1/r_{ij}$  si  $r_{ij} \neq 0, 0$  sinon,

 $-\ m_i$  la masse de la planète i

Le FMA permet une évaluation rapide de  $\Phi$ , sans avoir à construire explicitement la matrice **D**. Pour cela, il est nécessaire de "découper" la fonction qui caractérise l'interaction entre les planètes i et j, de manière à ce que cette fonction puisse "passer" par un ou plusieurs points intermédiaires (figure 3.2). De cette manière, si une planète j' est présente à proximité de j, l'effort de calcul est partagé entre les interactions  $i \to j$  et  $i \to j'$ . Ce découpage est rendu possible par la formulation de la fonction  $1/r_{ij}$  en développement multipolaire, ce qui permet de séparer les contributions de la planète "influençante" et de la planète "influencée".



FIGURE 3.2 – Expression de  $1/r_{ij}$  de manière classique (trait continu) et par méthode multipolaire (pointillés)

La formulation du développement multipolaire de la fonction qui régit les interactions est donc une condition nécessaire pour l'emploi du FMA. Ceci explique que les applications du FMA soient multiples en astronomie, électrostatique, et électromagnétisme, mais encore assez rares en hydrodynamique.

L'utilisation du FMA pour dans une méthode des singularités en hydrodynamique n'est en effet "directe" que si la fonction de Green est une singularité de Rankin (G = 1/r), comme dans le cas de bassins de houle numériques (Numerical Wave Tanks, NWT) non-linéaires [66, 53] pour lesquels la surface libre est elle-aussi décrite par une distribution de singularités. Il est d'ailleurs intéressant de noter que Fochesato et Dias [52] ont accéléré un NWT grâce à une distribution du FMA prééxistante, nommée "Distributed Parallel Multipole Tree Algorithm" [24, 79], dédiée à la dynamique moléculaire. Cette implémentation permet de diviser par 6 environ le temps de calcul pour la résolution de problèmes linéaires de taille 6000 × 6000. On peut aussi évoquer l'approche proposée par Singh *et al.* [86] pour accélérer par FMA la résolution de problèmes axisymétriques. La complexité de la résolution reste en  $O(N^2)$ ; le FMA accélère néamnoins la méthode : le temps de calcul est divisé par deux pour les problèmes comportant  $10^{3-4}$  inconnues.

Lorsque la fonction de Green utilisée est plus complexe, son développement multipolaire doit préalablement être établi. Utsunomiya *et al.* [92], Utsunomiya et Watanabe [91] ont permis une avancée importante en établissant le développement multipolaire de la fonction de Green harmonique en profondeur finie. Ce développement se base sur l'utilisation du théorème de Graf sur l'addition des fonctions de Bessel [96]. Il a rendu possible l'implémentation du FMA dans un code de diffraction/radiation, utilisé pour étudier une Very Large Floating Structure (VLFS) représenté par un nombre de panneaux variable (de 10<sup>3</sup> à 3.10<sup>5</sup>). L'emploi du FMA dans [91] permet une réduction importante du temps de calcul pour le problème de radiation d'un VLFS à une période de houle donnée (à 70.10<sup>3</sup> inconnues, le FMA permet de faire passer le temps de calcul de 113 heures à 13 heures). Teng et Gou [88] se sont basés sur ces résultats pour accélérer les méthodes CPM et HOBEM (voir la section 1.1.2.1). Cette méthode est utilisée par Gou et Teng [56] pour évaluer les interactions entre navires côte-à-côte. Les temps de calcul mis en jeu ne sont pas explicités.

Dans Utsunomiya et Okafuji [90], le développement multipolaire de la fonction de Green harmonique en profondeur infinie (voir 3.1.4.2) est établi et de nouveau utilisé pour le cas d'une VLFS. La tendance du temps de calcul en O(N) est bien mise en évidence ; pour 5.10<sup>4</sup> inconnues, le calcul d'une itération prend environ 20 s avec le FMA. Ces formulations constituent la base de l'implémentation du FMA dans Aquaplus proposée ici. Le chapitre 4 les présente plus en détail et décrit leur extension au cas tri-dimensionnel.

#### 3.3.2 Positionnement du FMA dans la résolution

La résolution de l'équation 3.26 par GMRes nécéssite le calcul de produits matrice-vecteur  $\mathbf{K}.r^{(l)}$ . Ces opérations sont coûteuses en temps de calcul lorsque le nombre de panneaux est grand, principalement à cause de la construction de  $\mathbf{K}$  lors du premier produit matrice-vecteur. Le FMA permet d'accélérer ce produit, en séparant les interactions entre panneaux proches les uns des

autres et panneaux éloignés les uns des autres :

$$\mathbf{K}.r^{(l)} = (\mathbf{K}_{lointain}.r^{(l)})_{FMA} + \mathbf{K}_{proche}.r^{(l)}$$
(3.33)

Dans l'équation 3.33 le produit  $(\mathbf{K}_{lointain}.r^{(l)})_{FMA}$  est évalué de manière directe par le FMA, sans passer par la construction de la matrice  $\mathbf{K}_{lointain}$ . Ce produit concerne la majorité des interactions. Le gain de temps principal réside donc dans une grande économie du temps dédié à la construction de  $\mathbf{K}_{lointain}$ . La matrice des interactions proches  $(\mathbf{K}_{proche})$  doit quant à elle être construite explicitement afin de calculer le produit  $\mathbf{K}_{proche}.r^{(l)}$  de manière classique.

#### 3.3.3 Principe du FMA

Les fondements mathématiques de cette méthode ont été établis pour la première fois par Greengard et Rokhlin [58] et sont décrits plus en détail dans [57]. Le principe du FMA et de faire interagir les particules par groupes plutôt que deux à deux (figure 3.3). La constitution des groupes de particules se base sur la décomposition de l'espace physique en "cellules", au moyen d'un arbre hiérarchique : chaque cellule est divisée en plusieurs autres cellules, et ainsi de suite. Barnes et Hut [19] ont développé un des premiers algorithmes hiérarchiques pour le calcul de forces gravitationnelles dans un système à grand nombre de particules.



FIGURE 3.3 – Interactions entre deux groupes de particules

Plusieurs améliorations ont par la suite été apportées au FMA. On peut notamment citer les implémentations adaptatives de cet algorithme [34, 35], qui permettent d'adapter localement le nombre de décompositions (et donc la taille des cellules) à la densité spatiale des particules.

Toutes les interactions entre cellules ne peuvent pas être traitées par la méthode multipolaire. Comme détaillé dans le chapite 4, certaines conditions de distance entre cellules sont requises pour que l'algorithme multipolaire offre une précision satisfaisante. La méthode multipolaire telle que décrite dans [58] différencie de manière automatique les interactions proches et lointaines. Board *et al.* [24] proposent un critère de différentiation réglable manuellement ("multipole acceptance criterion", *mac*), afin d'avoir une meilleure maîtrise du compromis rapidité/précision. On pourra se référer à [67] pour une excellente introduction sur la manière d'accélérer un programme basé sur la méthode des singularités grâce au FMA.

Le fonctionnement du FMA (non-adaptatif) est illustré en 2D sur la figure 3.4. En 3D, l'espace de simulation est découpé en cellules parallélépipédiques; les relations entre cellules sont décrites par un arbre hiérarchique :

- la cellule élémentaire est découpée en huit cellules enfants,
- chacune des cellules enfants est elle-même découpée en huit cellules, etc.

A chaque nouvelle décomposition, on ajoute un niveau de décomposition. Le nombre de cellules  $N_{cell}$  à chaque niveau  $N_l$  s'exprime ainsi :

$$N_{cell} = 8^{N_l} \tag{3.34}$$

La cellule élémentaire est située au niveau  $N_l = 0$ . On note  $N_L$  le nombre total de niveaux. Une fois l'arbre construit et les relations de parenté entre cellules (parent-enfant, soeur-soeur) établies, l'évaluation des interactions lointaines se fait de la manière suivante : - L'influence de chacun des panneaux i, pondérée par le résidu  $r_i^{(l)}$  à l'itération l est exprimée

- L'influence de chacun des panneaux i, pondérée par le résidu  $r_i^{(i)}$  à l'itération l est exprimée au centre de la cellule à laquelle le panneau appartient (équation 4.6). Il s'agit du calcul du "moment du développement multipolaire". Si la cellule contient plusieurs panneaux (ce qui est souhaitable), les moments sont ajoutés les uns aux autres.

- L'influence groupée de ces panneaux est translatée vers la cellule cible. Plusieurs opérateurs sont nécessaires : M2M (Moment To Moment) et L2L (Local To Local) sont utilisés pour les translations de courtes distances (de type parent-enfant). La translation M2L (Moment To Local) est utilisée pour les transports à longues distances. Les relations de parenté entre cellules déterminent quelles translations doivent être utilisées.
- Une fois exprimée au centre de la cellule cible, l'influence de la cellule source est distribuée sur chacun des panneaux cibles (équation 4.30).

En référence à la structure hiérarchique (voir la figure 3.4(b)), l'ensemble "calcul du moment + M2M" est appelé "montée de l'arbre" (upward pass), et l'ensemble "M2L + L2L + distribution" est appelé "descente de l'arbre" (downward pass).

Cette méthode est adaptée aux problèmes mettant en jeu un très grand nombre d'inconnues, car la majorité de l'effort de calcul est partagée d'une interaction à l'autre. En effet, ajouter un panneau au problème (en maillant les surfaces de manière plus fine, par exemple), signifie qu'il est seulement nécessaire de calculer un moment et une distribution supplémentaires pour prendre en compte ses interactions avec tous les autres panneaux. C'est ce qui explique la tendance en  $O(N_{panneaux})$  de cette méthode quand  $N_{panneaux}$  devient grand. L'utilisation de la méthode directe aurait nécessité un calcul supplémentaire par panneau déjà présent dans le problème.

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre résume le principe de la résolution du potentiel des vitesses par l'emploi d'une méthode des singularités. On pourra se référer à [41] pour une démonstration plus complète et plus rigoureuse. La caractéristique principale de cette méthode est le passage d'un problème volumique à un problème surfacique grâce à l'emploi des formules de Green. L'emploi d'une fonction de Green permettant au potentiel de respecter la condition de surface libre est nécessaire.

Le fonctionnement du logiciel Aquaplus, basé sur ce principe de résolution, est brièvement décrit. On souligne les limites des méthodes de résolution actuelles pour les problèmes de diffraction/radiation. La possibilité d'accélérer ces résolutions par un algorithme multipolaire est détaillée.

L'emploi du FMA nécessite deux pré-requis : la présence d'un solveur itératif de type GMRes, et la formulation du développement multipolaire de la fonction de Green. Un solveur GMRes a donc été implémenté dans Aquaplus. L'adaptation de formulations multipolaires existantes à Aquaplus est décrite dans le chapitre suivant.



FIGURE 3.4 – Principe du FMA illustré en 2D, avec  $N_L = 4$ . Mexp est le calcul du moment du développement multipolaire.

# Chapitre 4

# Formulations multipolaires de la fonction de Green

Ce chapitre est une généralisation des travaux de Utsunomiya et Okafuji [90]. Dans cette référence, le développement multipolaire de la fonction de Green en profondeur infinie est développé. Les formulations proposées par Utsunomiya et Okafuji [90] comportent cependant quelques restrictions, qui les rendent difficiles à utiliser dans un algorithme multipolaire généraliste :

- le point champ doit être situé à une profondeur plus grande que le point source,

- le centre du développement multipolaire doit être situé sur la surface libre.

La première restriction s'avère inutile si l'on démontre le développement de  $G_1$  par d'autres opérateurs mathématiques que dans [90]. La seconde restriction est plus critique, car elle implique que les dimensions horizontales du problème soient plus grandes que ses dimensions verticales. Elle rend donc difficile l'emploi du FMA pour traiter des fermes de corps élancés verticalement. Il est donc indispensable de lever cette restriction.

Il est à noter qu'il en va de même pour les travaux portant sur le cas en profondeur finie [92, 91, 88] : le centre du développement multipolaire doit être situé sur la surface libre dans ce cas également. Les formulations de ce chapitre constituent donc une extension inédite des formulations de la fonction de Green à surface libre, pour leur emploi dans un algorithme FMA en trois dimensions.

# 4.1 Fonction de Green

#### 4.1.1 Notations

Le développement multipolaire de la fonction de Green a pour principe de séparer les contributions du point source E et du point champ F. Les coordonnées de ces points sont exprimées par rapport au centre du développement **C**. Ces coordonnées sont  $E(r_{\xi}, \alpha_{\xi}, \theta_{\xi})$  et  $F(r_x, \alpha_x, \theta_x)$  dans le système sphérique, et  $E(R_{\xi}, \alpha_{\xi}, \zeta)$  et  $F(R_x, \alpha_x, z)$  dans le système cylindrique. Le deux systèmes sont centrés en  $\mathbf{C}(x_C, y_C, z_C)$  (figure 4.1).

#### 4.1.2 Champ proche $G_1$

L'expression du champ proche peut directement être dérivée à partir des résultats de Greengard [57]. Cela permet de lever certaines restrictions présentes dans Utsunomiya et Okafuji [90], et offre donc une plus grande flexibilité pour l'emploi de ces formulations. Greengard [57] exprime le développement multipolaire du potentiel gravitationnel (ou électrostatique) par la formule suivante :

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{O_{m}^{m}}{r_{x}^{n+1}} Y_{n}^{m}(\theta_{x}, \alpha_{x})$$
(4.1)



FIGURE 4.1 – Coordonnées du point source E dans les systèmes cylindriques et sphériques

Le moment de l'équation au point source E est  $O_n^m \times r^{(l)}(E)$  (voir la section 3.3.3), avec :

$$O_n^m = r_\xi^n Y_n^{-m}(\theta_\xi, \alpha_\xi) \tag{4.2}$$

Les quantités  $Y_n^m$  sont les harmoniques sphériques de degré n. Ces harmoniques sont accessibles au calcul numérique si on les écrit de la manière suivante :

$$Y_n^m(\theta,\alpha) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{\mathbf{i}m\alpha}$$

$$\tag{4.3}$$

Les termes  $P_n^m$  sont les fonctions de Legendre associées. Dans les équations 4.1-4.2, la condition  $r_{\xi} < r_x$  est nécessaire pour s'assurer que l'erreur due à la troncature de la somme à un ordre donné demeure bornée. Par conséquent, **C** doit être suffisament proche de *E*. L'ensemble des panneaux est situé sous la surface libre; il en est donc de même pour la cellule élémentaire du FMA, qui englobe l'espace de simulation au plus près. Les centres de développements multipolaires appartenant aux cellules enfants de la cellule élémentaire, on aura  $z_C \leq 0$  (figure 4.2).



FIGURE 4.2 – Exemple de position des centres de développement sous la surface libre (cas d'un hémisphère)

L'expression de la seconde moitié de  $G_1$ , le ratio  $1/r_1$ , peut facilement s'obtenir à partir des relations précédentes. Soit  $E'(\xi, \eta, -\zeta)$  le symétrique de E par rapport à la surface libre. On voit sur la figure 4.3 que si E est situé à une grande profondeur, on aura ( $\mathbf{C}E'$ )  $\approx (EE')$  (car  $\mathbf{C}$  doit rester proche de E), et donc ( $\mathbf{C}E'$ ) >> ( $\mathbf{C}E$ ). La condition  $r_{\xi} < r_x$  n'assure donc pas  $r'_{\xi} < r_x$ . Pour satisfaire cette dernière condition de convergence, il est donc nécessaire de définir un nouveau centre de développement  $\mathbf{C}'(x_C, y_C, -z_C)$  au-dessus de la surface libre. On définit par  $(r'_{\xi}, \alpha'_{\xi}, \theta'_{\xi})$  et  $(r'_x, \alpha'_x, \theta'_x)$  les coordonnées de E' et F dans un système centré en  $\mathbf{C}'$ . Par conséquent :

 $-\cos \theta'_{\xi} = -\cos \theta_{\xi}$  $-r'_{\xi} = r_{\xi}$  $-\alpha'_{\xi} = \alpha_{\xi}$  $-\alpha'_{x} = \alpha_{x}$ or, d'après [12] :

$$P_n^m(-\cos\theta_{\xi}) = (-1)^{n+m} P_n^m(\cos\theta_{\xi}) \tag{4.4}$$



FIGURE 4.3 – Notations pour le développement de  $1/r_1$ 

On peut donc exprimer le développement multipolaire du champ proche entre E et F comme suit :

$$G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{m} M_n^m (n - |m|)! \left( \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta_x)}{r_x^{n+1}} + (-1)^{n+m} \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta'_x)}{r_x^{(n+1)}} \right) e^{\mathbf{i}m\alpha_x}$$
(4.5)

avec :

$$M_n^m = r_{\xi}^n \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta_{\xi})}{(n+|m|)!} e^{-\mathbf{i}m\alpha_{\xi}}$$

$$\tag{4.6}$$

La formulation obtenue est donc très proche de celle de Utsunomiya et Okafuji [90]. Deux légères différences sont cependant listées ci-dessous :

- en supposant que le point source E soit situé à une profondeur importante, la convergence du développement multipolaire de  $G_1$  serait difficile si E et E' avaient le même centre de développement. Il est donc nécessaire d'introduire  $\mathbf{C}'$  ici ;
- l'utilisation de la théorie de Greengard [57] montre que l'équation 4.5 est valide quelle que soit la position relative de E par rapport à F, du moment que  $r_{\xi} < r_x$ . La condition  $z \zeta < 0$  imposée dans [90] n'est donc pas utile.

Les quantités  $P_n^m(\cos\theta)$ ,  $e^{im\alpha}$  sont bornées. Les équations 4.5 et 4.6 montrent donc que la convergence de ce développement sera d'autant plus rapide que le ratio  $\mathbf{r}_{C_1} = r_{\xi}/r_x$  est petit.

#### 4.1.3 Champ lointain G<sub>2</sub>

#### 4.1.3.1 Théorème de Graf pour l'addition des fonctions de Bessel

Ce théorème [97] constitue la base du développement multipolaire de la fonction de Green par Utsunomiya et Okafuji [90]. Considérons le triangle représenté sur la figure 4.4, telle que  $Z - z \cos \alpha = w \cos \beta$  et  $z \sin \alpha = w \sin \beta$ . Alors :

$$J_{\nu}(w)e^{i\nu\beta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+\nu}(Z)J_m(z)e^{im\alpha}$$
(4.7)

#### 4.1.3.2 Développement multipolaire

Cette partie suit la démonstration de Utsunomiya et Okafuji [90]; la seule différence est l'introduction d'un centre de développement  $\mathbf{C}$  situé à une profondeur non nulle. On utilise l'équation 4.7 dans le triangle résultant de la projection des points E, F et  $\mathbf{C}$  sur la surface libre; on a donc (voir la figure 4.5) :

$$-w = R, Z = R_x, z = R_\xi$$
  
$$-\alpha = \alpha_x - \alpha_\xi$$

Cela permet d'exprimer  $G_2$  ainsi :

$$G_2 = \int_0^\infty \frac{2\nu}{k-\nu} e^{k(\zeta-z_C)} e^{k(z+z_C)} \sum_{m=-\infty}^\infty J_m(kR_\xi) J_m(kR_x) e^{-\mathbf{i}m\alpha_\xi} e^{\mathbf{i}m\alpha_x} dk$$
(4.8)



FIGURE 4.4 – Théorème de Graf sur l'addition des fonctions de Bessel.



FIGURE 4.5 – Application du theorème de Graf

En étendant une formulation de Thorne [89], Utsunomiya et Okafuji [90] montrent que  $\forall m$ :

$$e^{k(\zeta - z_C)} J_m(kR_{\xi}) = \epsilon_m \sum_{n=|m|}^{\infty} r_{\xi}^n \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta_{\xi})}{(n+|m|)!} k^n$$
(4.9)

avec :

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \ge 0\\ (-1)^m & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$(4.10)$$

Etant donné que  $J_{-m}(kR_{\xi}) = (-1)^m J_m(kR_{\xi})$ , alors,  $\forall m$ :

$$J_m(kR_x) = \epsilon_m J_{|m|}(kR_x) \tag{4.11}$$

Si l'on remplace les équations 4.9 et 4.11 dans l'équation 4.8, en notant que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n}$$
(4.12)

on obtient :

$$G_{2} = 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \underbrace{r_{\xi}^{n} \frac{P_{n}^{|m|}(\cos\theta_{\xi})}{(n+|m|)!}}_{M_{n}^{m}} e^{-im\alpha_{\xi}} e^{im\alpha_{x}} \int_{0}^{\infty} \frac{k^{n}}{k-\nu} e^{kz'_{x}} J_{|m|}(kR_{x}) dk$$
(4.13)

avec  $z'_x = z - (-z_C) < 0$ .  $(r'_x, \theta'_x, \alpha'_x)$  et  $(R'_x, \alpha'_x, z'_x)$  sont les coordonnées sphériques et cylindriques de F dans les systèmes centrés en  $\mathbf{C}'$ . On retrouve les mêmes coefficients  $M_n^m$  que pour  $G_1$ . De nouveau, on a  $R'_x = R_x$  et  $\alpha'_x = \alpha_x$ .

#### 4.1.3.3 Calcul du terme intégral

La dernière intégrale est notée  $G_3$ :

$$G_3 = \int_0^\infty \frac{k^n}{k - \nu} e^{k z'_x} J_{|m|}(kR_x) dk$$
(4.14)

D'après [90] :

$$G_{3} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{n-|m|} \nu^{p-1} (-1)^{m+n-p} (n-p-|m|)! \frac{P_{n-p}^{|m|}(\cos\theta'_{x})}{r_{x}^{-n-p+1}} \\ +\nu^{n-|m|} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{k-\nu} e^{kz'_{x}} J_{|m|}(kR_{x}) k^{|m|} dk \text{ si } n > |m| \\ \int_{0}^{\infty} \frac{1}{k-\nu} e^{kz'_{x}} J_{|m|}(kR_{x}) k^{|m|} dk \text{ si } n = |m| \end{cases}$$

$$(4.15)$$

On note :

$$G_4 = \int_0^\infty \frac{1}{k - \nu} e^{k z'_x} J_{|m|}(kR_x) k^{|m|} dk$$
(4.16)

Cette intégrale peut être évaluée par l'équation 4.17 [90], avec m > 0:

$$G_{4} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-\nu^{m} \pi^{2} e^{\nu z'_{x}}}{4} [(-1)^{m} \mathbf{H}_{-\mathbf{m}}(\nu R_{x}) - Y_{m}(\nu R_{x})] + \frac{\sqrt{\pi} (2R_{x})^{m} \Gamma(m + \frac{1}{2})}{2} \int_{0}^{z'_{x}} \frac{e^{\nu(z-s)}}{(s^{2} + R_{x}^{2})^{m + \frac{1}{2}}} ds \right) - \pi \nu^{m} \mathbf{i} e^{\nu z'_{x}} H_{m}^{(2)}(\nu R_{x})$$

$$(4.17)$$

**H** est la fonction de Struve,  $H^{(2)}$  est la fonction de Hankel de deuxième espèce, Y est la fonction de Bessel de deuxième espèce, et  $\Gamma$  est la fonction Gamma. L'annexe A.1 donne des astuces pour le calcul de  $G_4$ . La partie imaginaire de  $G_2$  correspond à la partie imaginaire de  $G_4$ , les autres termes étant réels. D'après les équations 4.13 et 4.17, en écrivant explicitement les coefficients  $M_n^m$ , on constate que :

$$Im(G_2) = -2\pi\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (\nu r_{\xi})^n \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta_{\xi})}{(n+|m|)!} e^{-im\alpha_{\xi}} e^{\nu z'_x} J_m(\nu R_x) e^{im\alpha_x}$$
(4.18)

L'équation 4.18 indique que le produit  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu r_{\xi}$  doit être suffisament petit pour permettre une convergence rapide du développement multipolaire de  $G_2$ . Or le FMA, de par sa structure, permet seulement de s'assurer que  $\mathbf{r}_{C_1}$  est suffisament petit ; ce point est évoqué dans la section 4.4.4, ainsi qu'au chapitre 5. Le moment du développement multipolaire est le même pour  $G_1$  et  $G_2$ , ce qui permet une légère diminution de l'effort de calcul et du besoin de stockage par rapport à [90].

#### 4.1.4 Récapitulatif

La fonction de Green considérée est la somme des sous-fonctions  $G_1$  et  $G_2$ . Les développements multipolaires de ces deux fonctions sont donnés par les équations 4.19 et 4.20:

$$G_{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{m} M_{n}^{m} (n - |m|)! \left( \frac{P_{n}^{|m|}(\cos \theta_{x})}{r_{x}^{n+1}} + (-1)^{n+m} \frac{P_{n}^{|m|}(\cos \theta_{x}')}{r_{x}'^{n+1}} \right) e^{im\alpha_{x}}$$
(4.19)

$$G_2 = 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} M_n^m e^{im\alpha_x} \int_0^\infty \frac{k^n}{k-\nu} e^{kz'_x} J_{|m|}(kR_x) dk$$
(4.20)

avec  $M_n^m$  les coefficients du moment du développement multipolaire :

$$M_n^m = r_{\xi}^n \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta_{\xi})}{(n+|m|)!} e^{-\mathbf{i}m\alpha_{\xi}}$$

$$\tag{4.21}$$

# 4.2 Opérateurs de translation

Les formulations ci-dessous peuvent elles aussi être démontrées en utilisant le théorème sur l'addition des fonctions de Bessel au niveau des termes  $J_m$  ( $m \neq 0$ ) dans les développements de  $G_1$  et  $G_2$ . Dans le cas de  $G_2$ , on se sert de ce théorème au niveau de l'équation 4.8. [90] démontre le développement de  $G_1$  en faisant intervenir des fonctions de Bessel d'ordre non-nul. Là encore, les opérateurs de translation s'obtiennent par l'utilisation du théorème d'addition à une étape intermédiaire de la démonstration.

#### 4.2.1 Principe

Le transfert de l'influence du point source E vers le point champ F se fait en trois étapes principales :

- calcul des coefficients  $M_n^m$  du développement multipolaire, en un centre proche de E.
- transformation de ces coefficients en coefficients d'un développement de Taylor, en un centre proche de F. Cela se fait par la transformation appelée "Moment To Local" (M2L).
- Calcul de l'influence de E en F à partir de ces coefficients.

Conformément à ce principe, les fonctions  $G_1$  et  $G_2$  s'expriment de la manière suivante (les coefficients utilisés sont explicités plus bas) :

$$G_{2} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=-v}^{v} \left( \sum_{n=0}^{m} \sum_{m=-n}^{n} \epsilon_{u} \epsilon_{m} \operatorname{Coeff}_{M2L(2)} \right)_{n+v}^{u-m} \underbrace{M_{n}^{m}}_{\text{Coefficients du développement multipolaire}} Ms_{v}^{u}$$

Coefficient du développement de Taylor  $L_v^{u(2)}$ 

$$G_1 = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=-v}^{v} \left( \sum_{n=0}^{m} \sum_{m=-n}^{n} \epsilon_u \epsilon_m \left( \operatorname{Coeff}_{M2L(11)} \right)_{n+v}^{u-m} - \operatorname{Coeff}_{M2L(12)} \right)_{n+v}^{u-m} \right) \underbrace{M_n^m}_{\text{Coeff. dev. multi.}} M_n^w$$

Coefficient du développement de Taylor  $L_v^{u(1)}$ 

(4.23)

Les coefficients du développement multipolaire  $(M_n^m)$  et du développement de Taylor  $(L_v^{u(1)(2)})$ peuvent être translatés dans l'espace, pour être exprimés respectivement en un autre point proche de E et en un autre point proche de F. On fait appel pour cela aux transformations "Moment To Moment" (M2M) et "Local To Local" (L2L) respectivement.

Les notations des coefficients correspondant aux différentes translations sont détaillées sur la figure 4.6. Par souci de simplicité, seulement une seule M2M est représentée, bien que plusieurs M2M puissent se succéder lorsque l'on remonte l'arbre hiérarchique (figure 3.4(b)). Il en va de même pour les L2L, à la descente de l'arbre.

#### 4.2.2 Moment to Local (M2L)

Cette translation exprime l'influence d'un groupe de particules distantes à proximité du groupe de particules cibles. Elle transforme donc le développement multipolaire en développement de Taylor. Les coefficients du développement de Taylor s'expriment de la manière suivante :

$$L = L^{(1)} + L^{(2)} \tag{4.24}$$

$$L^{(1)} = L^{(11)} + L^{(12)} \tag{4.25}$$



FIGURE 4.6 – Notation des coefficients des développements multipolaires et des développements de Taylor. L'opérateur de translation ... est identifié par son centre  $C_{...}$ , vers lequel il pointe.

Comme le montre la figure 4.6, la M2L dépend du centre du développement d'origine ( $\mathbf{C}_{M2M}$ ) pour  $L^{(1)}$  et du symétrique  $\mathbf{C}'_{M2M}$  de ce centre par rapport à la surface libre pour  $L^{(2)}$ . Les coordonnées du centre du développement multipolaire et de son symétrique sont indicées par  $x_{ML}$  et  $x'_{ML}$ .  $z_{x'_{ML}} < 0$  est la différence de profondeur entre  $\mathbf{C}'_{M2M}$  et  $\mathbf{C}_{M2L}$ .

$$L_{t}^{s(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \epsilon_{s} \epsilon_{m} \tilde{M}_{n}^{m} \\ \underbrace{(\epsilon_{s-m}[(n+t) - |s-m|]! \frac{P_{n+t}^{|s-m|}(\cos\theta_{x_{ML}})}{\Gamma_{x_{ML}}^{n+t+1}} e^{-\mathbf{i}(s-m)\alpha_{x_{ML}}}}_{\text{Coeff}_{M2L(11)}_{n+t}^{s-m}} \\ + \epsilon_{s-m}[(n+t) - |s-m|]!(-1)^{t+n+(s-m)} \frac{P_{n+t}^{|s-m|}(\cos\theta_{x'_{ML}})}{r_{x'_{ML}}^{n+t+1}} e^{-\mathbf{i}(s-m)\alpha_{x_{ML}}})}_{\text{Coeff}_{M2L(12)}_{n+t}^{s-m}}$$
(4.26)

Le calcul de  $L_t^{s(2)}$  est le même que dans [90] :

$$L_{t}^{s(2)} = 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \epsilon_{s} \epsilon_{m} \tilde{M}_{n}^{m}$$

$$\underbrace{\epsilon_{s-m} e^{-\mathbf{i}(s-m)\alpha_{x_{ML}}} \int_{0}^{\infty} \frac{k^{n+t}}{k-\nu} e^{kz_{x'_{ML}}} J_{|s-m|}(kR_{x_{ML}}) dk}_{\operatorname{Coeff}_{M2L(2)} n+t}$$

$$(4.27)$$

Il est important de noter qu'une M2L ne peut pas être calculée entre deux points alignés verticalement; cela conduirait à des quantités  $Y_m(0)$  indéfinies quand m > 0 dans l'équation 4.27. Les positions relatives des centres du développement multipolaire et du développement de Taylor doivent donc être choisies avec soin.

#### 4.2.3 Moment to Moment (M2M)

Soient  $M_n^m$  les coefficients du développement multipolaire de départ, et  $\tilde{M}_n^m$  les coefficients une fois le développement translaté vers un autre centre.  $(r_{x_M}, \alpha_{x_M}, \theta_{x_M})$  sont les coordonnées du centre d'origine **C** vu depuis le nouveau centre **C**<sub>M2M</sub>. Les coefficients  $\tilde{M}_n^m$  se calculent de la manière suivante :

$$\tilde{M}_{n}^{m} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{s=-t}^{t} M_{n-t}^{m-s} \epsilon_{m-s} \epsilon_{m} \underbrace{\epsilon_{s} r_{xM}^{t} \frac{P_{t}^{|s|}(\cos\theta_{x_{M}})}{(t+|s|)!} e^{-\mathbf{i}s\alpha_{x_{M}}}}_{\operatorname{Coeff}_{M2M_{t}^{s}}}$$
(4.28)

Cette formulation est en tous points identique à celle de Utsunomiya et Okafuji [90].

#### 4.2.4 Local to Local (L2L)

Soient  $L_t^s$  les coefficients d'origine du développement de Taylor, et  $\tilde{L}_t^s$  les coefficients du développement translaté.  $(r_{x_L}, \alpha_{x_L}, \theta_{x_L})$  sont les coordonnées du point  $\mathbf{C}_{M2L}$  vu depuis le point  $\mathbf{C}_{L2L}$ .

$$\tilde{L}_{u}^{v} = \sum_{t=v}^{\infty} \sum_{s=-t}^{t} \frac{\epsilon_{u}}{\epsilon_{s}} L_{t}^{s} \underbrace{\epsilon_{u-s}(-1)^{(t-v)+(u-s)} r_{x_{L}}^{t-v} \frac{P_{t-v}^{|u-s|}(\cos\theta_{x_{L}})}{[(t-v)-|u-s|]!} e^{-\mathbf{i}(u-s)\alpha_{x_{L}}}}_{Coeff_{L2L}}$$
(4.29)

#### 4.2.5 Calcul de la fonction de Green

L'évaluation finale de G est donnée par :

$$G(E,F) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=-v}^{v} \tilde{L}_{v}^{u} \underbrace{(r_{x})^{v} \frac{P_{v}^{|u|}(\cos\theta_{x})}{(v+|u|)!} e^{iu\alpha_{x}}}_{Ms_{v}^{u}}$$
(4.30)

avec  $(r_x, \alpha_x, \theta_x)$  les coordonnées du point champ vu depuis le centre du développement de Taylor et  $\tilde{L}_v^{u(1)(2)}$  les coefficients définis à l'équation 4.29. Les quantités  $Ms_v^u$  ont une forme similaire aux coefficients du moment du développement multipolaire (équation 4.6), mais se réfèrent au point champ au lieu de se référer au point source. Tous les opérateurs décrits ci-dessus peuvent s'appliquer à la fonction de Green et à ses dérivées partielles.

# 4.3 Dérivée normale de la fonction de Green

D'après Utsunomiya et Watanabe [91], la dérivée normale de la fonction de Green au point source s'obtient en évaluant le gradient des coefficients  $M_n^m$ . Dans Aquaplus, cependant, la fonction de Green est dérivée au point champ. Par conséquent on évaluera le gradient des coefficients  $M_n^m$ :

$$\frac{\partial M s_n^m}{\partial n(F)} = \left(\frac{\partial M s_n^m}{\partial r_R} \overrightarrow{e_{r_R}} + \frac{1}{r_R} \frac{\partial M s_n^m}{\partial \theta_R} \overrightarrow{e_{\theta_R}} + \frac{1}{r_R sin \theta_R} \frac{\partial M s_n^m}{\partial \alpha_R} \overrightarrow{e_{\alpha_R}}\right) \cdot \overrightarrow{n}(F)$$
(4.31)

avec  $(\overrightarrow{e_{r_R}}, \overrightarrow{e_{\alpha_R}})$  la base orthonormale du système sphérique centré en  $O(x_{C_L}, y_{C_L}, 0)$  (dans cette section,  $\mathbf{C}_L$  fait référence au dernier centre du développement de Taylor). La dérivée normale de la fonction de Green s'obtient simplement par :

$$\frac{\partial G(E,F)}{\partial n(F)} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=-v}^{v} \tilde{L}_{v}^{u} \frac{\partial M s_{u}^{v}}{\partial n(F)}$$

$$\tag{4.32}$$

En se référant à l'équation 4.30 on constate que les dérivées partielles par rapport à  $\alpha$  et r sont triviales quand  $z_{C_L} = 0$ . Les dérivées par rapport à  $\theta$  font appel aux dérivées de  $P_n^m$ , qui s'obtiennent par des relations de récurrence. Lorsque  $z_{C_L} \neq 0$ , il est nécessaire de composer les dérivées pour calculer le gradient au point champ F (voir les notations sur la figure 4.7). On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_R} M s_n^m = \frac{\partial}{\partial \alpha_x} M s_n^m = \mathbf{i} m(r_x^n) \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta_x)}{(n+|m|)!} e^{\mathbf{i} m \alpha_x}$$
(4.33)

$$\frac{\partial}{\partial r_R} M s_n^m = \left[ r_x^n \frac{\partial \cos\theta_x}{\partial r_R} \frac{\partial P_n^{|m|}(\cos\theta_x)}{\partial \cos\theta_x} + P_n^{|m|}(\cos\theta_x) \frac{\partial r_x}{\partial r_R} n r_x^{n-1} \right] \frac{e^{\mathbf{i}m\alpha_x}}{(n+|m|)!}$$
(4.34)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_R} M s_n^m = \left[ r_x^n \frac{\partial \cos\theta_x}{\partial \theta_R} \frac{\partial P_n^{|m|}(\cos\theta_x)}{\partial \cos\theta_x} + P_n^{|m|}(\cos\theta_x) \frac{\partial r_x^n}{\partial \theta_R} \right] \frac{e^{\mathbf{i}m\alpha_x}}{(n+|m|)!}$$
(4.35)

(les coefficients manquants sont donnés dans l'annexe A.2).



FIGURE 4.7 – Système de coordonnées lorsque  $z_C \neq 0$ 

# 4.4 Validation

Cette section compare le calcul de la fonction de Green par différentes formulations, afin de s'assurer de la validité du développement multipolaire. Les formulations décrites ci-dessus ont été codées en Fortran en double précision. Les fonctions spéciales (fonctions de Bessel, fonctions de Legendre associées...) sont calculées par des routines programmées par Jin [62]. Pour le calcul numérique, les séries de termes sont tronquées; on appelle  $N_p$  l'ordre de troncature, ou ordre du développement multipolaire.

#### 4.4.1 Modification de la fonction de Green

Le découpage de la fonction de Green selon les champs proche  $(G_1)$  et lointain  $(G_2)$  diffère de la section 3.1.4.2 dans Aquaplus. Les nouvelles formules de  $G_1$  et  $G_2$  sont données ici.

#### 4.4.1.1 Formulations d'Aquaplus

La fonction de Green considérée dans Aquaplus est la même que dans l'équation 3.18, mais écrite d'une manière légèrement différente :

$$G(E,F) = \underbrace{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}_{G_1} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{2k}{k - \nu} e^{k(z + \zeta)} J_0(kR) dk}_{G_2}$$
(4.36)

Comparé à l'équation 3.18, une quantité  $2/r_1$  est ôtée a  $G_1$  et réinjectée dans  $G_2$  en utilisant l'intégrale de Lipschitz selon laquelle :

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
(4.37)

L'équation 4.37 s'adapte ainsi pour exprimer  $1/r_1$ :

$$\frac{1}{r_1} = \int_0^\infty e^{k(z+\zeta)} J_0(kR) dk$$
(4.38)

#### 4.4.1.2 Formulations multipolaires

Par conséquent, le développement multipolaire de  $G_1$  s'écrit :

$$G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{m} M_n^m (n - |m|)! \left( \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta_x)}{r_x^{n+1}} - (-1)^{n+m} \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta'_x)}{r_x^{n+1}} \right) e^{\mathbf{i}m\alpha_x}$$
(4.39)

(il suffit de changer le signe sous la parenthèse par rapport à 4.5). Par rapport à l'équation 4.13,  $G_2$  s'écrit :

$$G_{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} M_{n}^{m} e^{im\alpha_{x}} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k-\nu} e^{kz'_{x}} J_{|m|}(kR_{x}) dk}_{G'_{3}}$$
(4.40)

$$G'_{3} = \int_{0}^{\infty} \frac{k - \nu}{k - \nu} e^{k z'_{x}} J_{|m|(kR_{x})} k^{n} dk + \nu \int_{0}^{\infty} \frac{1}{k - \nu} e^{k z'_{x}} J_{|m|(kR_{x})} k^{n} dk$$
(4.41)

D'où :

$$G'_{3} = (-1)^{m+n-1} (n-1-|m|)! \frac{P_{n-p}^{|m|}(\cos\theta'_{x})}{r_{x}^{\prime n}} + \nu G_{3}$$

$$(4.42)$$

avec  $G_3$  tel que dans l'équation 4.15.

#### 4.4.1.3 Formulations analytiques

Dans certains cas (calcul de  $G_1$  hors formules asymptotiques), les formulations d'Aquaplus font intervenir l'intégration analytique de la fonction de Green sur chaque panneau. De son coté, la méthode multipolaire se contente de multiplier la fonction de Green par la surface du panneau. Par conséquent, une autre référence, analytique si possible, est souhaitable. L'expression analytique de  $G_1$  est triviale. Pour  $G_2$ , on a [98] :

$$\lim_{r \to +\infty} G_1 + Re(G_2) = -2\pi e^{\nu(\zeta+z)} Y_0(\nu R)$$
(4.43)

$$Im(G_2) = 2\pi e^{\nu(\zeta+z)} J_0(\nu R)$$
(4.44)

#### 4.4.2 Comparaison entre Aquaplus et formulations multipolaires

Dans les résulats de cette section, la fonction de Green est calculée entre un point source  $E(1.0, 1.0, z_E)$  et un point champ  $F(x_F, y_F, -2.0)$ . Le centre du développement multipolaire est situé proche du point source, à la position  $\mathbf{C}(1.0, 1.0, z_E - 2.5)$ . Les positions des points et la période de houle varient selon les intervalles suivants :

- $-z_E$  est compris entre -6 m et -30 m.
- $-x_F = y_F$  sont comprisentre 10 m et 100 m.
- La période va de 3 s à 18 s.

Le point source se déplace donc selon un axe vertical tandis que le point champ se déplace le long d'un axe horizontal proche de la surface libre. On précise que de nombreuses autres situations dont les résultats ne sont pas présentés ici ont aussi été testées, en inversant les positions relatives des différents poins E, F et  $\mathbf{C}$ . Les calculs multipolaires sont menés avec un ordre de troncature égal à 12, ce qui constitue une valeur relativement élevée [24].

Les résultats sont tracés dans l'espace non-dimensionnel  $(\nu R, \nu Z)$ , avec R et Z les distances horizontales et verticales entre point source et point champ. Contrairement aux résultats présentés dans [90], on a ici une évaluation systématique du développement multipolaire de la fonction de Green. Les niveaux de couleurs sont obtenus par triangulation, d'où leur aspect irrégulier. Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 présentent les résultats sur la fonction de Green. Le même type de résultats peut s'obtenir pour les dérivées partielles (figure 4.11). L'accord entre les différentes formulations est bon, notamment sur  $G_1$ . Sur  $G_2$ , on constate une différence résiduelle augmentant avec la distance qui sépare point source et point champ, ce qui pourrait être problématique pour le cas d'application considéré.



FIGURE 4.8 – Comparaison des formulations d'Aquaplus et multipolaires sur  ${\cal G}_1$ 



(a)  $Re(G_2)(m^{-1})$  calculé par développement multipolaire (b) Différence absolue avec Aquaplus  $(m^{-1})$ 

FIGURE 4.9 – Comparaison des formulations d'Aquaplus et multipolaires sur  $Re(G_2)$ 



f(0) f(0)

FIGURE 4.10 – Comparaison des formulations d'Aquaplus et multipolaires sur  $Im(G_2)$ 



(a)  $Re(\frac{\partial G_2}{\partial x})(m^{-2})$  calculé par développement multipolaire (b) Différence absolue avec Aquaplus  $(m^{-2})$ 

FIGURE 4.11 – Comparaison des formulations d'Aquaplus et multipolaires sur  $Re(\frac{\partial G_2}{\partial x})$ 

#### 4.4.3 Comparaison entre les formulations analytiques et multipolaires

La comparaison avec les formulations analytiques disponibles permet de se rassurer; on constate en effet sur la figure 4.12(b) des différences bien plus faibles pour  $Im(G_2)$  que dans la section précédente. Il en va de même pour  $Re(G_2)$  du moment que les valeurs  $\nu R$  et  $\nu Z$  sont suffisament grandes pour être dans le cas asymptotique. Il y a donc un léger écart entre les résultats d'Aquaplus et les formulations analytiques, que plusieurs raisons peuvent expliquer :

- Aquaplus interpole les valeurs de  $G_2$  et de ses dérivées dans une table de valeurs précalculées, afin d'accélérer le calcul des coefficients d'influence.
- Les opérateurs mathématiques utilisés dans les trois formulations ne sont pas les mêmes et ont chacun leur part d'approximations (formules asymptotiques, simple/double précision ...) pour le calcul numérique.

La suite de ce travail de thèse et l'expérience acquise sur les formulations multipolaires laissent à penser que cette dernière hypothèse est la plus probable.

#### 4.4.4 Influence des critères de convergence

Les sections 4.4.2 et 4.4.3 se placent dans une situation favorable pour la convergence des formulations multipolaires : l'ordre de troncature est élevé  $(N_p = 12)$  et le centre du développement **C** est très proche du point source *E*. Il est intéressant d'estimer à quel point les critères  $\mathbf{r}_{C_1} = r_{\xi}/r_x$ et  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu r_{\xi}$  jouent sur la convergence de  $G_1$  et  $G_2$  (voir les équations 4.5 et 4.18).

On compare de nouveau les résultats des formulations multipolaires et analytiques pour  $G_1$  et  $Im(G_2)$ , en faisant varier  $\mathbf{r}_{C_1}$ ,  $\mathbf{r}_{C_2}$  et  $N_p$ . Afin d'avoir un indicateur global, on relève l'erreur relative maximale et l'erreur relative moyenne constatées sur l'ensemble du domaine ( $\nu R, \nu Z$ ) décrit dans la section 4.4.2. Les résultats sont présentés dans la figure 4.13.

Il est clair qu'un ordre de troncature élevé réduit l'erreur, et permet une bonne convergence du développement multipolaire, même avec  $\mathbf{r}_{C_1}$  et  $\mathbf{r}_{C_2}$  ayant des valeurs élevées. Un grand  $N_p$  rendra donc l'algorithme multipolaire plus flexible en terme de positions relatives entre point source, point champ et centre du développement (cela aura évidemment un coût en temps de calcul). L'erreur sur  $G_1$  évolue progressivement selon  $\mathbf{r}_{C_1}$ ; ce n'est pas le cas pour  $G_2$ , pour lequel elle apparaît de manière plus brutale, au delà d'une valeur seuil de  $\mathbf{r}_{C_2}$ .

Ces résultats témoignent d'une bonne implémentation des formulations multipolaires en montrant les tendances attendues. Cependant on peut s'inquiéter du fonctionnement à venir de l'algorithme multipolaire. Supposons en effet que l'on travaille avec  $N_p = 8$ . Les conditions  $\mathbf{r}_{C_1} < 0.4$  et  $\mathbf{r}_{C_2} < 1.0$  doivent être respectées pour favoriser la convergence. La première condition est naturellement satisfaite par le FMA : si l'on considère qu'à un niveau donné, le développement multipolaire est calculé dans une cellule d'arête a, et que seules les cellules séparées d'une distance supérieure ou égale à deux fois la taille de la cellule interagissent [58], alors :

$$\begin{cases} r_{\xi} \le \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ r_{x} \ge 2a \end{cases}$$

$$(4.45)$$

D'où  $\mathbf{r}_{C_1} \leq 0.43$ . La condition sur  $G_2$  pose par contre problème : supposons une période de houle de trois secondes ; alors  $r_{\xi} \leq 2.2 m$  sera nécessaire, ce qui suppose l'utilisation d'un grand nombre de cellules si le domaine de simulation est grand, et donc d'un grand nombre de niveaux de décomposition. Ce problème est traité plus en détail dans la section 5.2.

# 4.5 Conclusion

On a exposé dans ce chapitre les formulations nécessaires pour pouvoir utiliser la fonction de Green en profondeurs infinie dans un algorithme multipolaire rapide (voir aussi [25, 28]). Ces formulations sont basées sur le développement multipolaire de cette fonction, établi par [90]. L'utilisation d'éléments simples de la théorie des harmoniques sphériques présentés dans [57] permet de lever certaines restrictions sur les conditions d'emploi de ces formulations. L'introduction d'un centre de développement hors de la surface libre rend possible l'utilisation de ces formules dans



(a) Differences sur  $G_1$  en  $m^{-1}$ 



(b) Differences sur  $Im(G_2)$  en  $m^{-2}$ 



FIGURE 4.12 – Différence absolue entre formulations multipolaires et analytiques



FIGURE 4.13 – Erreurs moyennes et maximales entre formulations multipolaires et analytiques relevées sur l'ensemble du domaine ( $\nu R, \nu Z$ )

un algorithme en trois dimensions. Le développement multipolaire et les opérateurs de translation sont donc modifiés dans ce sens.

L'implémentation en Fortran des formules obtenues a permis de les valider de manière exhaustive, qu'il s'agisse de la fonction de Green, de ses dérivées spatiales ou des opérateurs de translation. Cette validation a fait intervenir de nombreux paramètres : distances entre point source, point champ et centre du développement; période de houle; ordre de troncature du développement.

La confrontation des formulations multipolaires avec les formulations d'Aquaplus ou des formulations analytiques montre un bon accord, qui atteste de la validité de l'implémentation réalisée. Cependant la tendance de l'erreur sur la partie champ lointain de la fonction de Green fait craindre des difficultés quant à l'utilisation de ces formulations dans l'algorithme multipolaire.

# Chapitre 5

# Implémentation et performances de l'algorithme multipolaire rapide

Ce chapitre présente la mise en place d'un algorithme multipolaire rapide dans Aquaplus. Cet algorithme est basé sur les formulations décrites au chapitre précédent. En se basant sur l'approche de Fochesato et Dias [52], on utilise une distribution pré-établie du FMA appelée DPMTA. Après avoir mis en évidence la difficulté d'utiliser cet algorithme pour notre cas d'application, on décrit l'implémentation d'un algorithme multipolaire plus adapté.

# 5.1 Couplage Aquaplus-DPMTA

#### 5.1.1 Présentation du DPMTA

L'algorithme DPMTA (Distributed Parallel Multipole Tree Algorithm) a été développé à Duke University (USA) jusqu'en 2002. Il s'agit d'un algorithme multipolaire non-adaptatif, dédié à l'origine aux problèmes de dynamique moléculaire. Il prend en compte les interactions entre particules de la manière suivante :

- interactions électrostatiques, exprimées par une fonction de Green du type G = 1/r,
- interactions de Lennard-Jones :  $G = 1/r^6$ .

Cet algorithme est conçu pour pouvoir être facilement implémenté dans un programme de dynamique moléculaire. Il ne comporte pas de solveur ou n'est pas un solveur en lui-même, mais seulement un élément qui permet le calcul rapide de produits matrice-vecteur. Le DPMTA comporte un certain nombre de méthodes d'accélération supplémentaires (implémentation parallèle, FFT), qui pourront éventuellement être adaptées par la suite au problème hydrodynamique considéré, mais qui n'ont pas été utilisées au cours de ce travail de thèse.

Etant conçu pour la dynamique moléculaire (mettant en jeu un ensemble de particules dense et relativement homogène), le DPMTA comporte certaines spécificités dont il faut tenir compte :

- L'algorithme n'est pas adaptatif; toutes les cellules situées au même niveau de l'arbre hiérarchique ont donc les mêmes dimensions.
- La probabilité qu'une cellule soit vide est faible. Toutes les opérations (calcul des coefficients  $M_n^m$  des moments, calculs des coefficients des opérateurs de translations) sont donc effectuées sur l'ensemble des cellules, sans vérifier qu'elles contiennent effectivement des particules. Certains calculs inutiles sont donc réalisés.
- Le problème traité peut être situé n'importe où dans l'espace (il n'y a pas de référence fixe).
   Seules les positions relatives entre particules comptent.

Certaines de ces spécificités devront être corrigées. Comme expliqué à la section 3.3.1, le DPMTA différencie les interactions proches (calculées de manière directe) et lointaines (calculées par le FMA, voir 3.33) à l'aide du "multipole acceptance criterion" (*mac*). L'utilisateur peut fixer manuellement une valeur  $\alpha$  qui va conditionner les interactions entre cellules, comme décrit sur la figure 5.1.



FIGURE 5.1 – Schéma de principe du mac. Les cellules interagissent par FMA si  $\frac{L}{D} < \alpha$ .

#### 5.1.2 Détails de l'implémentation

#### 5.1.2.1 Réorganisation d'Aquaplus

On rappelle quels sont les sous-programmes d'Aquaplus qui sont impactés par la mise en place du FMA :

- **cosk** : Calcul de la fonction de Green (et de ses dérivées) entre les panneaux deux à deux, écriture des systèmes linéaires.
- **prek** : Résolution des systèmes linéaires, calcul des coefficients hydrodynamiques.

Le DPMTA doit donc être intégré à **prek** pour accélérer la résolution des systèmes linéaires. Malgré les langages différents (C pour le DPMTA, Fortran pour Aquaplus) les deux modules sont compilés au sein d'un même exécutable, de manière à éviter l'échange d'informations par fichiers, qui serait coûteux en temps (NB : même si ce temps n'est pas comptabilisé comme du temps CPU). La figure 5.2 résume les changements induits par l'utilisation du FMA. Le DPMTA est appelé à chaque produit matrice-vecteur du GMRes. Il est aussi appelé après la résolution itérative pour résoudre l'équation 3.27. L'ordre d'exécution des programmes est inversé, **prek** faisant marginalement appel à **cosk** pour le calcul des interactions proches.



FIGURE 5.2 – Modification de la structure d'Aquaplus par l'utilisation du FMA

#### 5.1.2.2 Adaptation du DPMTA

Les formulations hydrodynamiques décrites au chapitre 4 ont été intégrées au DPTMA [26, 27, 30]. La manière de repérer les particules dans l'espace a été adaptée pour prendre en compte la présence de la surface libre.

La définition du centre des cellules a été modifiée, car dans le DPMTA le centre des développements multipolaires est le centre géométrique de chacune des cellules. De manière à éviter les M2L purement verticales dont le calcul pose problème (équation 4.27), on situe désormais les centres de développement des cellules superposées verticalement selon une spirale ascendante effectuant moins d'un tour complet.

Enfin, des routines ont été mises en place pour conditionner l'exécution d'opérations multipolaires à la présence de particules dans les cellules influençantes et influencées.

#### 5.1.2.3 Stockage et réutilisation de coefficients

Comme on peut le voir dans le chapitre 4, de nombreux coefficients des formulations multipolaires peuvent être calculés une fois seulement, puis stockés et réemployés, afin d'économiser du temps de calcul. Il s'agit des jeux de coefficients liés au développement multipolaire et au développement de Taylor  $(M_n^m \text{ et } Ms_n^m)$ , ainsi que des coefficients  $\operatorname{Coeff}_{M2M_n}^m$ ,  $\operatorname{Coeff}_{M2L(11)_n}^m$ ,  $\operatorname{Coeff}_{M2L(12)_n}^m$ ,  $\operatorname{Coeff}_{M2L(2)_n}^m$  et  $\operatorname{Coeff}_{L2L_n}^m$  intervenant dans les différents opérateurs de translation. Le stockage de ces coefficients est implémenté de manière statique pour un ordre de troncature maximum  $N_{p max} = 20$ . Ce stockage est réalisé dans la RAM par l'emploi d'un disque virtuel.

Le besoin de mémoire associé aux matrices des interactions proches est faible (la majorités des termes sont nuls, il est donc inutile de les stocker). Il est donc possible de mémoriser les matrices  $\mathbf{K}_{proche}$  et  $\mathbf{S}_{proche}$  sous la forme suivante, dans une matrice de dimension verticale  $N_{panneaux} \times N_{panneaux}$  et de dimension horizontale 2 :

Interaction entre panneaux *i* et *j* 
$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}_{proche \, ij} & \mathbf{S}_{proche \, ij} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
 (5.1)

#### 5.1.3 Résultats sur un corps

Les résultats présentés ici sont hors du cas d'application envisagé (fermes de corps éloignés les uns des autres). Ils donnent une première validation de l'implémentation réalisée en terme de précision et permettent de caractériser le comportement du logiciel en fonction du nombre d'inconnues.

#### 5.1.3.1 Résultats préliminaires

On considère un hémisphère modélisé par un petit nombre de panneaux ( $N_{panneaux} = 361$ ) pour lequel on veut résoudre le problème de radiation en pilonnement. L'algorithme multipolaire rapide n'est pas conçu pour la résolution de problèmes aussi petits; il n'apportera aucune accélération à la résolution dans ce cas. On s'intéresse ici à la précision du calcul.

**Produit matrice-vecteur** Soient  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  les matrices des coefficients d'influences construites à partir du calcul de  $G_1$  et  $Im(G_2)$  entre les panneaux deux à deux. On étudie la précision du calcul des produits matrice-vecteur  $\mathbf{S}_1.r$  et  $\mathbf{S}_2.r$ , avec  $r_i = 1$  sur chaque panneau *i*. Les différences relatives moyenne et maximum constatées entre l'évaluation de ces produits par la méthode classique et par la méthode multipolaire sont relevées sur la figure 5.3. On étudie l'influence des paramètres suivants : ordre de troncature du développement multipolaire  $N_p$ , et nombre de niveaux dans l'arbre hiérarchique  $N_L$ . Pour que la comparaison entre résultats obtenus avec différents jeux de paramètres ait du sens, on règle le *mac* de manière à ce que le nombre d'interactions proches soit toujours à peu près le même, qu'il y ait 3 ou 4 niveaux dans l'arbre hiérarchique.

La figure 5.3 montre que même pour des valeurs de  $N_p$  faibles, on obtient une précision satisfaisante, que ce soit sur  $G_1$  et  $Im(G_2)$ . Les ordres de grandeur des erreurs obtenues pour  $N_p = 20$ concordent avec les résultats présentés dans [58]. Il est intéressant de constater que l'erreur en fonction de  $N_p$  n'a pas la même allure sur  $G_1$  et  $Im(G_2)$ . La figure 5.3 permet plusieurs constats :

- La convergence des produits  $\mathbf{S}_1$ . r est meilleure lorsque le nombre de niveaux est élevé. Dans ce cas la quantité  $\mathbf{r}_{C_1} = r_{\xi}/r_x$  est statistiquement plus petite, d'où une meilleure convergence de  $G_1$  (équation 4.5). Quelle que soit la valeur de  $N_L$ , l'erreur diminue rapidement quand  $N_p$  augmente.
- La précision sur les produits  $\mathbf{S}_2 \cdot r$  semble indépendante de  $N_p$  et  $N_L$ . Ces calculs sont faits à T = 5 s; dans ces conditions les quantités  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu \cdot r_{\xi}$  sont suffisament faibles pour permettre une bonne convergence quel que soit l'ordre de troncature (voir l'équation 4.18).



FIGURE 5.3 – Erreur relative moyenne (sur l'ensemble des panneaux) et erreur relative maximum introduites par le FMA dans les produits matrice-vecteur. Rouge :  $\mathbf{S}_1.r$ ; bleu :  $\mathbf{S}_2.r$ . Carrés :  $N_L = 3$ , mac = 0.8; cercles :  $N_L = 4$ , mac = 0.6.

**Coefficients de radiation** Les problèmes de pilonnement et cavalement sur des hémisphères de différents diamètres sont résolus par Aquaplus avec ou sans méthode multipolaire. Les coefficients de radiation obtenus sont comparés à ceux évalués de manière analytique par Hulme [61]. A partir d'Aquaplus, les valeurs adimensionnelles de ces coefficients s'obtiennent par :

$$\tilde{A} = \frac{AM}{\rho D^3} \tag{5.2}$$

pour les masses d'eau ajoutées et par :

$$\tilde{B} = \frac{B}{\omega \rho D^3} \tag{5.3}$$

pour les amortissements, avec  $\rho$  la masse volumique du fluide. L'hémisphère considéré est modélisé par 579 panneaux. Les calculs sont faits sur des hémisphères de diamètre D = 5, 10, 30 m. La figure 5.4 présente certains résultats, selon les jeux de paramètres du DPMTA utilisés. On constate que l'emploi du FMA dans Aquaplus ne fausse pas ses résultats; le FMA "suit" même Aquaplus dans les problèmes liés aux fréquences irrégulières (figure 5.4(c)). L'erreur par rapport à la solution analytique est donc la même que l'on emploie ou non le FMA.

Néanmoins, le jeu de paramètres employés doit être choisi avec attention. A nombres équivalents d'interactions proches, la précision est bien meilleure avec un nombre de niveaux plus élevés, comme le montre le tableau 5.1; lorsque  $N_L$  est grand, les quantités  $\mathbf{r}_{C_1} = r_{\xi}/r_x$  et  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu r_{\xi}$  sont en effet plus petites (voir l'évolution de  $r_{\xi}$  et  $r_x$  selon le nombre de niveaux sur la figure 5.5). Ceci est cohérent avec les résultats de la figure 5.3.





(a) Masse d'eau ajoutée en pilonnement  $(\tilde{A}^{(0)})$  et cavalement  $(\tilde{A}^{(1)}),\,D=5\,m,\,N_L=3,N_p=5,\,mac=0.6$ 

(b) Amortissement en pilonnement  $(\tilde{B}^{(0)})$  et cavalement  $(\tilde{B}^{(1)})$ ,  $D = 5 m, N_L = 3, N_p = 5, mac = 0.6$ 



Analytique FMA0.3 Aquaplus 0.20.10 0  $\mathbf{2}$ 4 $\mathbf{6}$ 8 101214  $\nu.D$ 

(c) Masse d'eau ajoutée en pilonnement  $(\tilde{A}^{(0)})$  et cavalement  $(\tilde{A}^{(1)}),\,D=30\,m,\,N_L=4,N_p=10,\,mac=0.75$ 

(d) Amortissement en pilonnement  $(\tilde{B}^{(0)})$  et cavalement  $(\tilde{B}^{(1)})$ ,  $D = 30 m, N_L = 4, N_p = 10, mac = 0.75$ 

FIGURE 5.4 – Résolution des coefficients de radiation selon les méthodes

0.4

Différence sur	$\tilde{A}^{(1)}$	$ ilde{A}^{(0)}$	$\tilde{B}^{(1)}$	$ ilde{B}^{(0)}$
Np = 5, Nl = 3, m = 0.6	$1.1 \times 10^{-2}$	$2.5  imes 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$1.8  imes 10^{-1}$
Np = 10, Nl = 3, m = 0.6	$3.4  imes 10^{-3}$	$8.7  imes 10^{-4}$	$8.1  imes 10^{-3}$	$4.3  imes 10^{-2}$
Np = 10, Nl = 4, m = 0.75	$5.8 \times 10^{-7}$	$2.3 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-6}$	$7.0 \times 10^{-6}$
Np = 10, Nl = 4, m = 1.0	$5.8 \times 10^{-7}$	$2.3 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-6}$	$7.0 \times 10^{-6}$

TABLE 5.1 – Différence moyenne (calculée sur l'ensemble des valeurs  $\nu$ .D) par rapport à la méthode directe selon les jeux de paramètres du DPMTA.



FIGURE 5.5 – Réduction des critères  $\mathbf{r}_{C_1}$  et  $\mathbf{r}_{C_2}$  par l'augmentation du nombre de niveaux (à nombre équivalent d'interactions lointaines).

#### 5.1.3.2 Performances en fonction du nombre d'inconnues

Cette section présente les performances constatées lors de la résolution du problème de pilonnement sur un hémisphère représenté par un nombre variable de panneaux (de 80 à 9800). Les calculs sont effectués à une période de houle de 5 secondes. Le critère de convergence du GMRes est  $10^{-5}$ .



FIGURE 5.6 – Erreur relative induite par l'utilisation du FMA. Lignes continues :  $N_p = 5$ ; lignes pointillées :  $N_p = 10$ 

**Précision** La figure 5.6 montre que la précision obtenue est satisfaisante, la différence relative avec les résultats de la méthode directe étant systématiquement inférieure à 1%, quel que soit le jeu de paramètres utilisés dans le DPMTA. Le pic d'erreur constaté lorsque le nombre de panneaux est petit vient d'une différence dans la manière de calculer  $G_1$ : la version directe d'Aquaplus intègre  $G_1$  sur le panneau cible, ce qui n'est pas le cas pour la version multipolaire. Cette erreur relative est plus importante sur les panneaux proches de la surface libre, car les valeurs de  $G_1 = 1/r - 1/r_1$  sont faibles. Lorsque le nombre global de panneaux augmente, le poids statistique de ces quelques panneaux diminue fortement.

Un nombre de niveaux élevé favorise la convergence du développement multipolaire de la fonction de Green, et donc la précision du calcul. Lorsque  $N_L \ge 4$ , les courbes  $N_p = 5$  et  $N_p = 10$ sont quasiment confondues sur la figure 5.6, signe d'une bonne convergence même avec un ordre de troncature faible.

**Temps de calcul** Il est important de rappeler qu'Aquaplus est déjà une méthode accélérée pour la construction des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{S}$ , dont certains coefficients sont obtenus par interpolation dans une table de valeurs pré-calculées (section 3.2.3). Pour cette raison, l'accélération que le FMA peut apporter en général aux méthodes des singularités n'est pas forcément bien mise en valeur dans ce travail de thèse.

Deux paramètres du FMA sont étudiés : l'ordre de troncature  $(N_p = 5, 10)$  et le nombre de niveaux dans l'arbre hiérarchique  $(N_L = 3, 4, 5)$ . Le temps CPU est tracé pour les différentes méthodes de résolution utilisées, en fonction du nombre de panneaux. La figure 5.7(a) illustre le temps nécessaire pour calculer le premier produit matrice-vecteur dans le GMRes, avec ou sans FMA. Lorsque le FMA n'est pas utilisé, le temps CPU évolue de manière parabolique en fonction du nombre de panneaux (suivant la tendance en  $O(N_{panneaux}^2)$  des itérations du GMRes). Lorsque le FMA est activé, la courbe présente deux segments d'allures linéaires et de pentes différentes :

- une forte pente lorsque le nombre de panneaux est faible. Dans ce cas, affiner le maillage revient à peupler des cellules qui étaient vides auparavant. Etant donné que ces cellules interagissent par les opérateurs de translations, le nombre d'opérations devient plus important et le temps CPU augmente rapidement.
- une pente plus faible au delà d'une valeur seuil de  $N_{panneaux}$ : lorsque le nombre de panneaux est suffisament élevé, la majorité des cellules sont déjà "actives". L'ajout d'un panneau revient seulement à calculer un moment (équation 4.6) et une redistribution (équation 4.30) supplémentaires. Le temps CPU augmente linéairement selon le nombre de panneaux, avec une pente plus faible qu'auparavant.

Le nombre de cellules dépendant directement du nombre de niveaux  $N_L$  ( $N_{cells} = 2^{N_L-1}$ ), le point de rupture entre les deux segments de droites s'atteint pour un nombre de panneaux plus grand quand  $N_L$  augmente. De plus, un grand nombre de niveaux entraîne de nombreuses opérations entre cellules, dont la durée dépend de l'ordre de troncature  $N_p$ . Par conséquent le temps CPU global dépendra plus fortement de  $N_p$  si  $N_L$  est grand (voir les différences entre lignes continue et ligne en pointillés à  $N_L$  équivalent sur la figure 5.7(a)). Cependant, un grand nombre de niveaux est un choix payant lorsque le nombre de panneaux est très grand, car cela réduit la proportion d'interactions calculées par la méthode directe. C'est la raison pour laquelle :

- les courbes  $N_L = 3$  et  $N_L = 4$  se croisent aux environs de  $N_{panneaux} = 7500$ ,
- les courbes  $N_L = 3$  et  $N_L = 4$  ont une allure sensiblement différente quand  $N_{panneaux}$  est grand. Dans le cas  $N_L = 3$ , la tendance parabolique du calcul des interactions proches est clairement visible.

La figure 5.7(a) suggère donc que le FMA apporte une accélération raisonnable au GMRes, car les courbes  $N_L = 3$  et  $N_L = 4$  croisent la courbe du GMRes à respectivement 1000 et 3500 panneaux. Cependant, lorsque l'on considère la résolution complète du problème sur la figure 5.7(b) (et non plus le seul premier produit matrice-vecteur), on peut voir que ces points de rencontre se trouvent à un nombre de panneaux bien plus élevé. Ceci révèle deux tendances antagonistes :

- le FMA accélère fortement le GMRes lors du premier produit matrice-vecteur, en évitant la construction de la matrice K;
- aux produits matrice-vecteur qui suivent, le GMRes est plus rapide seul que combiné au FMA. Cela est dû au fait que les problèmes traités sont trop petits pour que le FMA soit pleinement efficace.

Par conséquent, l'emploi du FMA est un choix pertinent si le nombre de produits matrice-vecteur est suffisament bas, que ce soit grâce à une convergence rapide du GMRes, ou grâce à un faible nombre de problèmes à résoudre. Dans le cas d'une ferme houlomotrice composée de  $N_b$  corps flottants à 6 degrés de liberté, soumises à plusieurs incidences de houle, le nombre de problèmes à résoudre est grand. Il n'est donc pas évident *a priori* que le FMA soit finalement le choix le plus pertinent.



FIGURE 5.7 – Temps de calcul selon la méthode employée. Ligne continue : Np = 5, ligne pointillée : Np = 10.

#### 5.1.4 Résultats sur un ensemble de corps

Cette section présente des résultats préliminaires sur un ensemble d'un nombre variable de corps. Ces résultats permettent d'identifier plusieurs limites de l'outil obtenu pour le cas des fermes de REV. Les corps considérés ici sont des hémisphères de 10 m de diamètre, modélisés chacun par 171 panneaux.

#### 5.1.4.1 Ferme dense

Le premier cas d'étude concerne une ferme comportant de 2 à 49 corps (voir la figure 5.8), positionnés sur une grille de  $900m \times 900m$ . Les corps sont "ajoutés" d'une ferme à l'autre de manière à en augmenter la densité. On résout le potentiel correspondant au mouvement de cavalement du corps 1, positionné aux coordonnées (300 m, 300 m). La période considérée est T = 5 s. La figure 5.9 montre que les résultats obtenus par l'utilisation du FMA sont imprécis, voire clairement faux, avec la plupart de jeux de données utilisés. L'erreur se comporte de la manière suivante :

- elle augmente avec le nombre de corps présents dans la ferme,
- elle augmente avec la valeur du "multipole acceptance criterion" (mac),
- lors que le mac est élevé, l'erreur est plus importante avec un ordre de tron cature élevé que faible.

Ce comportement est symptomatique d'une situation dans laquelle les développements multipolaires de la fonction de Green et de ses dérivées ne convergent pas. La section 5.1.4.2 permet d'élucider les mécanismes qui mènent à ces erreurs.

Malgré le manque de précision de ces résultats, il est intéressant de jeter un oeil au temps de calcul (figure 5.10). On retrouve certaines tendances attendues. De manière générale, plus le mac est faible, plus la proportion d'interactions directes est élevée et plus le calcul est long. Plus le mac est élevé, plus le temps de calcul dépend de l'ordre de troncature  $N_p$ , puisque le nombre d'opérations multipolaires augmente; c'est d'autant plus vrai avec un grand nombre de niveaux  $N_L$ . Enfin, le comportement du temps de calcul n'évolue pas de manière régulière avec le mac. Cela s'explique par le faible nombre de cellules au regard de l'espace couvert, et par l'inhomogénéité du jeu de particules (panneaux). Une faible variation du mac peut faire passer la relation entre deux corps d'"interactions proches" à "interactions lointaines", et a donc un rôle fondamental sur le temps de calcul.



FIGURE 5.8 – Fermes de REV étudiées



FIGURE 5.9 – Erreur relative moyenne sur le potentiel correspondant au cavalement du corps 1. Ligne continue :  $N_p = 10$ . Pointillées :  $N_p = 5$ .

#### 5.1.4.2 Corps éloignés

On étudie un cas simplifié similaire à celui de la figure 5.8(a), avec les distances entre corps selon les axes x et y égales à 1000 m. Les corps sont des hémisphères représentés par 99 panneaux chacun. Dans ce cas de corps très éloignés, les interactions entre panneaux d'un même corps sont évaluées comme étant des interactions proches, quel que soit le mac. Cela permet de comparer les résultats de la méthode FMA avec différents jeux de paramètres, sans introduire de biais dû à la proportion d'interactions proches (évaluées par la méthode directe).

La figure 5.12(a) montre que les formulations multipolaires de la fonction de Green ne convergent pas. L'erreur augmente en effet avec le mac et l'ordre de troncature  $N_p$ . Il est clair que cette erreur trouve son origine dans le "chemin" parcouru pour propager l'influence d'un groupe de panneaux (corps) vers l'autre. La figure 5.11 permet d'illustrer le fait que selon le mac, ce chemin est différent, ainsi que la distance  $r_{\xi}$  du panneau au centre du développement multipolaire. On rappelle que la quantité  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu r_{\xi}$  doit être faible pour permettre une bonne convergence de  $G_2$ . Le cas de figure "à grand mac" ne permet pas de satisfaire cette configuration ( $r_{\xi_2} > r_{\xi_1}$  sur la figure 5.11). On vérifie cette hypothèse en imposant le développement multipolaire au barycentre des panneaux contenus dans la cellule. Dans ce cas, les centres de développement dans les cellules de niveau 2 et 3 sont confondus dans l'exemple de la figure 5.11, d'où  $r_{\xi_2} = r_{\xi_1}$ . La figure 5.12(b) confirme le rôle de la valeur de  $r_{\xi}$  sur la convergence. En effet :

- les niveaux d'erreurs sont désormais tolérables (de l'ordre de 3%),
- le mac n'a quasiment pas d'influence, de même que le nombre de niveaux,
- la précision est meilleure quand l'ordre de troncature augmente.

Néanmoins, imposer l'ordre de convergence au barycentre peut ne pas suffire pour permettre la convergence. La figure 5.13 donne des résultats de précision pour un cas de 4 sphères disposées selon un carré de côté 1000 m. Si l'erreur à T = 5 s est acceptable, ce n'est plus le cas à T = 3 s, la quantité  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu r_{\xi}$  étant de nouveau trop élevée.

En imposant la convergence au barycentre du corps, on s'est libéré des problèmes liés à la grande distance de séparation entre corps,  $r_{\xi}$  étant désormais indépendant de la taille des cellules, et donc de la taille du domaine de simulation et du nombre de niveaux. Cette mesure est insuffisante, la convergence dépendant principalement du nombre d'onde  $\nu$  et de la taille du jeu de panneaux utilisés dans le développement. Il est clair ici qu'à T = 3 s, les panneaux du corps considéré sont



FIGURE 5.10 – Temps de calcul pour la résolution du premier problème de cavalement. Ligne continue :  $N_p = 10$ . Pointillées :  $N_p = 5$ .

trop éloignés les uns des autres pour qu'un développement centré en leur barycentre converge. Des niveaux de décomposition supplémentaires seraient nécessaires, pour diviser le corps en sous-corps et suffisament réduire  $r_{\xi}$  pour compenser la valeur élevée de  $\nu$ .



FIGURE 5.11 – Illustration du "chemin" suivi par le développement multipolaire en fonction du mac, avec  $N_L = 3$ .

# 5.2 Limites du FMA non-adaptatif pour un jeu de particules très inhomogène

Dans le cas d'un jeu de particules très irrégulier, la version non-adaptative du FMA que nous utilisons présente des limites, dues d'un côté à l'arbre hiérarchique et de l'autre aux problèmes



(a) Développement multipolaire au centre de la cellule (b) Développement au barycentre des panneaux

FIGURE 5.12 – Erreur relative moyenne sur le potentiel correspondant au cavalement du corps 1. Ligne continue :  $N_p = 10$ . Pointillées :  $N_p = 5$ .



FIGURE 5.13 – Erreur relative moyenne sur le potentiel correspondant au cavalement du corps 1, développement multipolaire au barycentre. Ligne continue :  $N_p = 15$ . Pointillées :  $N_p = 20$ .

de convergence de  $G_2$ . Considérons le cas de corps flottants, ayant un diamètre de l'ordre de 10 m et séparés les uns des autres par quelques centaines de mètres. Si l'on souhaite réduire la quantité d'interactions directes entre panneaux pour tirer profit du FMA au maximum, un très grand nombre de cellules est nécessaire. De cette manière, on aura un corps (ou une portion de corps) au maximum dans chaque cellule, et les corps interagiront entre eux par les opérateurs du FMA. Par conséquent, l'arbre hiérarchique devra comporter un grand nombre de niveaux  $N_L$ . Ceci a deux conséquences néfastes quant à la performance du code :

- Un plus grand nombre de calculs intermédiaires sont nécessaires, que ce soit pour remonter l'arbre (M2M) ou le descendre (L2L), ainsi qu'entre cellules soeurs (M2L), étant donné le grand nombre de niveaux.
- Un grand nombre de cellules vides sont créées. Cela ne joue pas sur le résultat du calcul mais peut avoir un impact sur la performance, selon l'implémentation du FMA. Si le code utilisé est concu pour un jeu de particules homogène (comme dans le cas du DPMTA) de la mémoire vive est allouée aux cellules et les M2L entre cellules sont calculés, qu'elles contiennent ou non des particules.

Comme on l'a vu, la structure de l'arbre joue sur la convergence de  $G_2$ . Pour les plus petites périodes, il est nécessaire de réduire la distance entre le centre des panneaux et le "dernier" centre du développement multipolaire (c'est à dire celui d'où part la M2L, figure 5.11). De cette manière le terme  $\mathbf{r}_{C_2} = \nu . r_{\xi}$  est suffisament petit pour que la convergence de  $G_2$  soit rapide. Deux conditions "géométriques" doivent donc être satisfaites (figure 5.14) :

- Les cellules du plus haut niveau (les "feuilles" de l'arbre) ne doivent contenir qu'un seul corps (ou partie de corps). Le centre du développement est alors positionné au barycentre des particules contenues dans la cellule, afin de réduire  $r_{\xi}$ .
- Seules les interactions feuille-feuille peuvent être calculées. En effet, grouper l'influence de deux corps contenus dans deux cellules au centre de leur cellule mère revient à calculer les moments du développement quelque part entre ces deux corps. La condition  $\nu .r_{\xi} \ll 1$  peut donc ne plus être respectée, selon la valeur de  $\nu$ .



FIGURE 5.14 – Convergence de  $G_2$  selon le "chemin" du développement multipolaire.

Cette dernière condition est contraire à la principale force du FMA, qui est de grouper les particules autant que possible pour partager l'effort de calcul. De plus ces deux conditions ne peuvent pas être satisfaites de manière efficace :

- Soit le nombre de cellules est très élevé, afin de s'assurer qu'une cellule qui contient des panneaux ne sera regroupée qu'avec des cellules vides (pour garder le jeu de panneaux localement "dense").
- Soit une condition très restrictive sur les interactions est implémentée a niveau du mac, afin de permettre seulement les interactions "feuille" à "feuille". Ainsi, seule les interactions très lointaines sont prises en compte : la proportion d'interactions calculées par FMA diminue drastiquement, et l'accélération apportée dans ce cas est nulle.
L'outil développé n'est donc pas approprié pour le cas d'étude envisagé; une autre implémentation est nécessaire. La nature du problème appelle l'emploi d'un algorithme multipolaire adaptatif. Cependant la mise un place d'un tel algorithme requiert un niveau de complexité supplémentaire. Afin de se doter plus rapidement d'un outil permettant l'étude de fermes de récupérateurs d'énergie des vagues, on a préféré développer un outil spécifiquement adapté à ce problème, plus rapide à implémenter. C'est l'objet du FMA simplifié, décrit dans la section 5.3.

## 5.3 Algorithme multipolaire simplifié

## 5.3.1 Principe

Afin de s'affranchir des problèmes constatés sans implémenter un algorithme adaptatif, un algorithme simplifié et plus adapté au problème de fermes de REV est proposé [32]. Cet algorithme est lui aussi basé sur les formulations décrites dans le chapitre 4, mais n'utilise pas d'arbre hiérarchique. Les interactions entre panneaux sont prises en compte plus simplement, de la manière suivante : les interactions proches ont lieu entre panneaux appartenant au même corps, et les interactions lointaines ont lieu entre panneaux de corps différents. Ces interactions font appel à seulement quelques-uns des opérateurs décrits précédemment (figure 5.15) :

- Pour chaque panneau, les moments du développement multipolaire de la fonction de Green sont calculés au barycentre du corps (équation 4.6).
- Les corps interagissent par le biais d'un transformation M2L entre leurs barycentres respectifs (équations 4.26 et 4.27). Il y a  $N_b \times (N_b 1)$  M2L à calculer (avec  $N_b$  le nombre de corps).
- Enfin, pour chaque panneau du corps cible, l'équation 4.30 est utilisée pour achever le calcul de la fonction de Green.



FIGURE 5.15 – Expression de l'influence de l'ensemble des panneaux sur les panneaux du corps 2

Comme dans le DPMTA, l'espace de simulation est normé afin de réduire les erreurs d'arrondi dans le calcul des développements multipolaires. Cet algorithme simplifié (nommé FMAS par la suite) réduit le nombre de calculs intermédiaires (les M2M et L2L ne sont pas utilisées). Il permet de satisfaire les conditions décrites dans la section 5.2. Cependant, la différentiation entre interactions proches et lointaines n'est plus automatique, mais dépend de l'utilisateur. Il faut donc s'assurer :

- que les corps sont suffisament éloignés les uns des autres, pour assurer la convergence de  $G_1$ .
- que les corps sont suffisament petits par rapport à la longueur d'onde, pour assurer la convergence de  $G_2$ .

Dans le cas de fermes de REV de type "points absorbers", ces conditions sont automatiquement satisfaites. Si l'on considère des corps plus grands (comme par exemple le système Pelamis) cet algorithme est aussi utilisable; il faut alors découper ce corps en plusieurs sous-corps. Les sous-corps d'un même système interagiront entre eux par méthode directe, et les sous-corps des différents systèmes interagiront par FMA (figure 5.16).



FIGURE 5.16 – Emploi du FMAS dans le cas d'une ferme de corps allongés. Transport de l'influence de quelques panneaux des sous-corps 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3 vers quelques panneaux du sous-corps 2.1.

## 5.3.2 Résultats

Cette section décrit le comportement et les performances de l'algorithme simplifié. Les calculs qui suivent portent sur des fermes carrées de 4 à 49 cylindres flottants. Les cylindres ont un diamètre de 10 m et un enfoncement de 10 m, et sont modélisés par 130, 260 ou 460 panneaux. Les cylindres sont disposés sur une grille de 100m. On s'attache à résoudre le problème de pilonnement à la période de T = 7 s.

#### 5.3.2.1 Précision

On étudie la différence relative entre résultats obtenus par méthode directe ou avec le FMAS. On considère les paramètres de radiation (masse d'eau ajoutée et amortissement) des deux premiers corps de chaque ferme (en prenant bien sûr en compte leurs interactions avec les autres corps). Les figures 5.17(a) et 5.17(b) montrent un bon accord entre les deux méthodes de résolution, la différence relative étant toujours inférieure à 1%, même pour les problèmes de grande taille.

Il est surprenant que la différence relevée entre la méthode multipolaire et les résultats d'Aquaplus soit plus importante avec  $N_p = 10$  ou  $N_p = 15$  qu'avec  $N_p = 5$ . On s'attendrait effectivement à la tendance inverse. Il ne s'agit cependant pas d'un problème de convergence des formulations multipolaires, puisque les courbes correspondantes à  $N_p = 10$  et  $N_p = 15$  sont confondues. L'explication la plus probable réside dans la différence entre les formulations d'Aquaplus et les formulations multipolaires (déjà évoquée à la section 4.4.3); ces formulations fonctionnent chacune avec des opérateurs mathématiques spécifiques, qui comportent leur part d'approximation dans le calcul numérique. Cela explique que les différences entre méthodes soient plus fortes :

- quand le nombre de termes dans le développement multipolaire est plus élevé,
- quand la proportion d'interactions traitées par le FMA augmente (dans notre cas, quand le nombre de corps augmente).

### 5.3.2.2 Besoins de mémoire

Ce nouvel algorithme réduit les besoins de mémoire par rapport à l'emploi du DPMTA, car moins d'opérations multipolaires sont nécessaires. Les coefficients que l'on doit stocker sont les suivants :

- Les coefficients  $M_n^m$  et  $Ms_n^m$  (ainsi que les dérivées de  $Ms_n^m$ ) sont calculés et stockés pour le premier corps seulement. Ils sont utilisés pour les autres corps, tous les corps ayant la même géométrie (leurs panneaux ont donc la même position relative par rapport au barycentre du corps).



FIGURE 5.17 – Différence relative entre les résultats de la méthode multipolaire et de la méthode directe. Carrés : Np = 5, triangles : Np = 10, cercles :  $N_p = 15$ . Ligne continue : 130 panneaux/corps ; ligne pointillée : 260 panneaux/corps. T = 7 s.

– Les coefficients  $\operatorname{Coeff}_{M2L(11)(12)(2)_n}^m$  sont stockés pour chaque M2L (d'où un jeu de  $N_b(N_b-1)$  coefficients).

La figure 5.18(a) illustre les tendances liées à cette implémentation. Les besoins de mémoire dépendent peu du nombre de panneaux par corps (cela constitue l'offset de la courbe), mais évoluent de manière parabolique en fonction du nombre de corps. A titre de comparaison, la figure 5.18(b) montre le besoin de mémoire de l'algorithme GMRes (lorsque les matrices pleines  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{S}$  sont stockées) qui évolue de manière parabolique avec le nombre de panneaux. L'ordre de grandeur est bien plus petit quand le FMAS est utilisé, ce qui rend le logiciel plus facile à utiliser, même lorsque le nombre de panneaux est élevé. La réduction des besoins de mémoire par le FMAS permet en outre d'éviter d'écrire et de lire des données sur le disque dur, ce qui permet d'économiser du temps "horloge" (wall clock time) lors des calculs (voir la section 5.3.2.4).

### 5.3.2.3 Temps de calcul associé au FMAS

Le temps de calcul pour la résolution d'un problème de radiation ou de diffraction s'exprime de la manière suivante, en fonction du nombre de produits matrice-vecteur  $n_{PMV}$ :

$$T_{FMA} = T_{FMA}^{(1)} + (n_{MVP} - 1)T_{FMA}^{(MVP)}$$
(5.4)

Dans l'équation 5.4, on différencie le temps nécessaire au calcul du premier produit matrice-vecteur  $T_{FMA}^{(1)}$ , et le temps nécéssaire au calcul des produits suivants  $T_{FMA}^{(MVP)}$ .  $T_{FMA}^{(1)}$  et  $T_{FMA}^{(MVP)}$  sont différents, car dans le premier cas les coefficients du FMAS doivent être calculés, et dans les cas suivants ceux-ci sont seulement lus et réutilisés. La figure 5.19 présente  $T_{FMA}^{(1)}$  et  $T_{FMA}^{(MVP)}$  en fonction du nombre total de panneaux  $(N_{panneaux} = 260 \times N_b)$  pour le cas Np = 10. Comme souhaité, le temps de calcul évolue de manière quasi-linéaire avec le nombre de panneaux. Cette tendance est plus prononcée pour  $T_{FMA}^{(MVP)}$ , une fois la matrice  $\mathbf{K}_{proche}$  construite. A chaque produit matrice-vecteur  $i \geq 1$ ,

$$T_{FMA}^{(i)} = N_{panneaux/corps} \times N_b \times (T_{Mexp} + T_{Distribution}) + N_b \times (N_b - 1) \times T_{M2L} + N_{panneaux/corps}^2 \times T_{direct} \times N_b$$
(5.5)



FIGURE 5.18 – Besoin de mémoire pour le stockage des coefficients d'influence selon la méthode. L'axe des abscisses n'est pas le même pour les figures 5.18(a) et 5.18(b), afin de mettre en évidence le fonctionnement du stockage de coefficients selon les deux algorithmes.

La figure 5.20 illustre l'équation 5.5. Encore une fois, la tendance en  $O(N_{panneaux})$  est plus évidente après le premier produit matrice-vecteur.

#### 5.3.2.4 Accélération apportée par le FMAS

On rappelle que le temps de calcul demandé par une résolution utilisant le GMRes seul s'exprime comme suit :

$$T_{GMRes} = T_{GMRes}^{(1)} + (n_{PMV} - 1)T_{GMRes}^{MVP}$$
(5.6)

De même que lorsque le FMA est employé, le temps de calcul n'est pas le même pour le premier produit matrice-vecteur et pour les suivants. Or :

- $-T_{GMRes}^{(1)} >> T_{FMA}^{(1)}$ , car les matrices **K** et **S** doivent être construites dans leur intégralité.  $-T_{GMRes}^{(MVP)} < T_{FMA}^{(MVP)}$  dans notre cas. Une fois les coefficients et/ou matrices d'interactions
- $-T_{GMRes}^{(MVF)} < T_{FMA}^{(MVF)}$  dans notre cas. Une fois les coefficients et/ou matrices d'interactions pré-calculés, la méthode classique est plus rapide à calculer les produits matrice-vecteur que le FMAS. Les ordres de grandeur de temps sont cependant équivalents; il est probable qu'en considérant des problèmes de plus grandes dimensions ( $N_{panneaux} \approx 10^5 10^6$ ) l'inégalité précédente puisse être inversée.

La table 5.2 indique l'accélération apportée par le FMAS pour le premier produit matrice-vecteur (c'est à dire le ratio  $T_{GMRes}^1/T_{FMA}^1$ ). Cette accélération est importante; malheureusement, la performance finale du code dépend du nombre total de produits matrice-vecteur.

Les deux inégalités précédentes montrent que les courbes de temps de calcul par le FMAS et par le GMRes se croisent forcément à un nombre de produits matrice-vecteur donné. En relevant les valeurs  $T_{GMRes}^{(1)}$ ,  $T_{FMA}^{(1)}$ ,  $T_{GMRes}^{(PMV)}$  et  $T_{FMA}^{(PMV)}$ , il est possible de déterminer approximativement le nombre de produits matrice-vecteur  $n_{PMV_c}$  au delà duquel il n'est plus intéressant d'utiliser le FMAS. La figure 5.21 montre ce seuil en fonction du nombre de corps et de la discrétisation des corps. Deux indicateurs sont considérés :

- le temps CPU
- le temps "horloge", qui permet de prendre en compte les temps d'écriture et de lecture de données sur le disque dur.



FIGURE 5.19 – Temps de calcul des produits matrice-vecteur en fonction de  $N_{panneaux}$ . Carrés :  $1^{er}$  produit. Triangles : moyenne des autres produits.  $N_p = 10$ .

La zone située en dessous des courbes tracées est celle pour lesquelles le FMAS est plus rapide que le GMRes. Le nombre limite de produits matrice-vecteur dépend de plusieurs facteurs : rapidité de convergence du GMRes, nombre de problèmes de diffraction/radiation traités à chaque période. On peut donc identifier des configurations où le FMAS jouera un rôle significatif dans l'accélération de l'étude d'une ferme de REV :

- Les corps ont des formes complexes et ont besoin d'un grand nombre de panneaux pour être représentés de manière précise. Le FMAS permet des calculs sur des REV réalistes plutôt que sur des formes simplifiées.
- Un nombre limité de problèmes est considéré. On ne considère par exemple que la direction principale de propagation de la houle. Les systèmes étudiés ne présentent qu'un seul degré de liberté.
- Dans le cas d'une ferme présentant des axes de symétrie, certains corps auront les mêmes forces d'excitation, masse ajoutée et amortissement, réduisant le nombre de problèmes à résoudre. Cette stratégie a peu d'intérêt quand GMRes est employé seul puisque le temps de calcul est dominé par la construction du système linéaire, mais peut faire une grande différence dans le cas du FMAS.
- La convergence du GMRes est rapide. L'emploi d'un préconditionneur sera indispensable pour "augmenter" la zone d'intérêt du FMAS.

$N_{panels}$	$N_p = 5$	$N_p = 10$
1040	11	12
2340	19	19
4160	48	42
6500	116	92
9360	142	110
12740	150	128

TABLE 5.2 – Facteur d'accélération apporté par le FMAS lors du premier produit matrice-vecteur.



FIGURE 5.20 – Temps de calcul des produits. Ligne continue :  $1^{er}$  produit ; ligne pointillée : moyenne des autres produits. Carrés : coefficients des moments ; triangles : M2L ; losanges : distribution ; cercles : direct.

## 5.3.3 Emploi du FMAS pour évaluer l'élévation de la surface libre

Une fois l'ensemble des problèmes de diffraction/radiation résolus, il est possible d'en déduire les mouvements des corps. A partir de ces résultats, on peut évaluer l'élévation de la surface libre autour des systèmes.

La première étape est de recombiner les résultats intermédiaires afin de connaître la perturbation du potentiel due à la présence et au mouvement des corps sur l'ensemble des panneaux du problème :

$$\phi_P = \phi_d - \mathbf{i}\omega \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{6} X_j(i)\varphi_j(i)$$
(5.7)

avec  $\phi_d$  le potentiel dû à la diffraction,  $X_j(i)$  l'amplitude du mouvement du corps *i* selon le degré de liberté *j* et  $\varphi_j(i)$  le potentiel de radiation unitaire associé à ce mouvement. On définit par le vecteur  $P_C$  l'ensemble des  $n_C$  points de contrôle où l'on souhaite évaluer l'amplitude de l'élévation de la surface libre. La perturbation du potentiel  $\phi_C$  en ces points s'obtient par le produit matrice-vecteur suivant :

$$\phi_C = \mathbf{S}.\phi_P \tag{5.8}$$

avec

$$\mathbf{S}_{ij} = G(E(j), P_C(i)) \text{ avec } i \in [1, n_C], \ j \in [1, N_{panneaux}]$$
(5.9)

Selon le nombre de points de contrôle considérés, il peut être opportun d'employer le FMA, de manière à ne pas avoir à construire la matrice **S**. C'est d'autant plus intéressant que les moments du développement multipolaire de la fonction de Green ont été calculés auparavant pour la résolution des problèmes de diffraction/radiation. Les seules étapes restantes sont donc le calcul du second membre de la fonction de Green entre le barycentre des corps et les points de contrôle. Il y a donc  $N_b \times n_C$  calculs à réaliser (figure 5.22(a)).

Si le nombre de points de contrôle est élevé, l'implémentation devra être améliorée en découpant l'ensemble des points de contrôle en groupes, et en agissant exactement comme si ces groupes représentaient un corps flottant (figure 5.22(b)).



FIGURE 5.21 – Nombre de produits matrice-vecteur en dessous duquel le FMAS apporte une accélération. Ligne continue : en considérant le temps CPU; ligne pointillée : en considérant le temps horloge.

Une fois ce produit matrice-vecteur calculé, l'élévation de la surface libre aux points de contrôle s'obtient par les équations suivantes :

$$\phi = \phi_I + \phi_C \tag{5.10}$$

$$|\eta| = \frac{\omega}{g} |\phi| \tag{5.11}$$

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre détaille donc deux approches utilisées pour implémenter l'algorithme multipolaire rapide dans Aquaplus. Afin d'éviter de développer un algorithme multipolaire à partir de zéro, le choix a été fait d'utiliser l'algorithme non-adaptatif DPMTA. Les résultats montrent que cette implémentation, si elle fonctionne dans le cas d'un seul corps, n'est pas adaptée pour une ferme de REV. La forte inhomogénéité spatiale requiert l'emploi d'un algorithme adaptatif pour obtenir un bon compromis rapidité/précision.

En l'absence de version open-source du FMA adaptatif, on développe une version du FMA spécifiquement dédiée aux ensembles de corps en interactions dans la houle. L'avantage de cette implémentation est sa simplicité et son efficacité comparativement au DPMTA dans le cas des fermes. Le besoin de mémoire pour résoudre les problèmes de grande taille est très réduit par rapport à la méthode directe; selon les simulations le gain de temps de calcul est significatif.

De manière générale l'implémentation originale d'Aquaplus (Fortran 77 et tableaux statiques) n'a pas permis de dépasser  $10^4$  inconnues dans les problèmes traités. Pour aller au-delà, une réécriture complète du logiciel avec une implémentation plus adaptée aux grands nombres d'inconnues aurait été nécessaire. Par conséquent, les problèmes étudiés sont encore trop petits pour être dans la "zone" pour laquelle le FMA est conçu ( $N \in [10^4, 10^6]$ ). Il en résulte que seul le premier produit matrice-vecteur est drastiquement accéléré par le FMA, les autres étant au contraire légèrement ralentis. Plusieurs pistes seront donc à exploiter pour améliorer l'outil développé :

 réécriture d'Aquaplus, afin de pouvoir utiliser le FMA dans des cas à très grands nombres d'inconnues



FIGURE 5.22 – Principe de l'évaluation de l'élévation de la surface libre par FMAS.

- implémentation d'un préconditionneur adapté au FMA [70, 84], pour réduire le nombre de produits matrice-vecteur au cours desquels du temps de calcul est perdu.

Quoi qu'il en soit, il a été établi que cet outil est adapté pour traiter les problèmes simplifiés, où seulement un nombre restreint de problèmes de diffraction ou radiation sont traités par système linéaire construit. Avec cette approche, on utilise l'outil développé dans le chapitre 6, dans l'optique d'une étude paramétrique des fermes de REV.

# Deuxième partie

# Etude paramétrique de fermes de récupérateurs d'énergie des vagues

## Chapitre 6

# Influence de la configuration des fermes sur leur production énergétique

## 6.1 Objectifs

Il est désormais admis qu'au sein d'une ferme de récupérateurs de l'énergie des vagues des interactions constructives et destructives peuvent se produire. Ces interactions sont quantifiées par le "q-factor" (équation 1.1), supérieur à 1 dans le cas d'interactions constructives, et inférieur à 1 dans le cas contraire. Ce facteur dépend de la période de la houle, de sa direction et de l'organisation de la ferme.

Dans la théorie linéaire, on suppose qu'un état de mer décrivant une houle irrégulière par le biais d'un spectre résulte de la superposition de plusieurs houles régulières de périodes et de directions différentes. Par conséquent, interactions constructives et négatives se superposent elles-aussi, et se compensent mutuellement. Babarit [15] a mené cette analyse sur l'ensemble des états de mer en un site spécifique à l'échelle d'une année, pour le cas d'une ferme de deux corps. Il a effectivement montré un "lissage" des effets d'interactions, permettant de tirer des grandes tendances quant au rôle des interactions sur la production annuelle de la ferme, selon la distance de séparation entre les corps.

Dans l'optique d'une ferme composée de quelques dizaines de corps, cette approche globale à l'échelle de l'année est indispensable, car elle donne un indicateur synthétique permettant d'évaluer la performance d'un système complexe. Au bout du compte, c'est l'évaluation de l'énergie productible sur une année-type qui intéressera un développeur de fermes. On étudie donc dans ce chapitre le rôle global des interactions dans des fermes complexes (comportant de 9 à 25 corps), en faisant varier les distances de séparation entre corps.

## 6.2 Caractéristiques des fermes étudiés

On considère un ensemble de corps ayant chacun une seul degré de liberté ; ce chapitre fait donc appel aux notations de la section 2.3.

## 6.2.1 Récupérateurs de l'énergie des vagues considérés

## 6.2.1.1 Géométries

De même que dans [15], deux REV différents sont étudiés : un cylindre en pilonnement et une barge parallépipédique en cavalement (figure 6.1). Les deux corps présentent un même volume immergé ( $785 m^3$ ), une même largeur faisant face aux vagues (10 m), et un même enfoncement (10 m). La longueur de la barge dans la direction de propagation de la houle est 7.85 m. Les ancrages ne sont pas considérés ici. Les corps ne peuvent bouger que dans la direction de fonctionnement de leur PTO; par conséquent, seul un problème de radiation par corps est résolu.



FIGURE 6.1 – Maillage surfacique des REV considérés.

#### 6.2.1.2 Power take-off

Tous les corps de la ferme ont le même PTO. La raideur  $k_{pto}$  de la barge est choisie de manière à ce que les deux corps aient la même période propre  $(T_0 \approx 7.3s)$ ; dans le cas du cylindre, la valeur de  $k_{pto}$  est nulle, la seule raideur venant du rappel hydrostatique selon z. Le réglage de l'amortissement  $b_{pto}$  du PTO conditionne fortement l'absorption d'énergie par le REV. Par conséquent, deux stratégies sont testées ici :

- on choisit la valeur  $b_{pto} = b_{pto yr}$  qui permet la production d'énergie annuelle la plus élevée
- pour un corps seul. Cette valeur s'obtient simplement par un balayage des valeurs de  $b_{pto yr}$ . – on choisit  $b_{pto} = b_{pto \omega_0}$  égal à l'amortissement hydrodynamique  $B(\omega_0)$  à la période propre
  - d'un corps isolé, comme suggéré par Falnes [48].

La première stratégie prend en compte la ressource énergétique disponible sur le site étudié. Cela permet d'accorder de manière simple un système générique (produit en série, sans être conçu en fonction du site d'installation) au climat local, indépendamment de ses caractéristiques géométriques. La seconde stratégie permet de maximiser l'extraction d'énergie à la fréquence de résonance, et dépend donc seulement du REV considéré.

La valeur de  $b_{pto yr}$  est bien plus grande que celle de  $b_{pto \omega_0}$  (table 6.1). Dans le cas de la première stratégie, les mouvements sont donc plus petits (figure 6.2). Ceci est intéressant pour deux raisons :

- concernant le fonctionnement du REV : les accélérations et vitesses mises en jeu sont plus faibles; les risques de casse sur le système sont donc limités. Il en va de même pour les risques d'excursions (lorsque le système est émergé sur toute sa hauteur); le système est donc moins sujet au slamming.
- concernant l'aspect numérique : on rappelle que l'on se place dans l'hypothèse de mouvements de faible amplitude autour de la position d'équilibre. Si  $b_{pto}$  est tel que les réponses du corps montrent des petits mouvements, alors cette hypothèse est valable et on peut accorder une plus grande confiance aux résultats obtenus.

On constate d'autre part que le choix de  $b_{pto} = b_{pto yr}$  donne une bande d'extraction plus large aux systèmes et décale les courbes de puissance vers les périodes où la densité énergétique est la plus forte (figure 6.2(a)).

WEC	$k_{pto}~({ m kN/m})$	$b_{pto \ \omega_0} \ ({ m kN.s/m})$	$b_{pto \ yr} \ ({ m kN.s/m})$	$T_0$ (s)
Cylindre	0.0	25.9	336.1	7.29
Barge	1402.1	159.9	444.2	7.29

TABLE 6.1 – PTO des systèmes considérés.



(a) Puissance (exprimée par unité de largeur du REV et par (b) Mouvements (par unité d'amplitude de la houle) unité d'amplitude de la houle)

FIGURE 6.2 – Résponses des REV selon le réglage du PTO. Rouge : barge en cavalement ; bleu : cylindre en pilonnement. Ligne continue :  $b_{pto} = b_{pto \omega_0}$ ; ligne pointillée ;  $b_{pto} = b_{pto yr}$ . Noir : densité énegétique.

## 6.2.2 Paramètres des fermes

La houle vient des x négatifs. Les fermes sont composées de 9, 16 ou 25 corps, positionnés sur un maillage régulier décrit par le couple (dx, dy). Les fermes ont le même nombre de "lignes" et de "colonnes" (9 corps correspondent à 3 lignes et 3 colonnes). On désigne par "ferme à base carrée" le cas dx = dy et par "ferme à base triangulaire" le cas  $dx = \sqrt{3}dy/2$ , avec une rangée sur deux décalée de dy/2 (les corps sont alors disposés selon des triangles équilatéraux). Ces deux configurations permettent de caractériser la ferme par un seul paramètre dx (figure 6.3). Les valeurs de dx inférieures à 100 m ne sont pas considérées, car pour des raisons d'ancrages et d'accessibilité il est peu probable que les corps soient très rapprochés les uns des autres. La taille maximum de la ferme est fixée à 1 km, ce qui donne la valeur maximale de dx en fonction du nombre de lignes dans la ferme. On numérote les corps d'abord par ligne, puis par colonne (le corps 7 sur la figure 6.3(a) est celui situé à (x, y) = (200, 0)). Les calculs de production annuelle d'énergie sont fait en considérant les états de mer de l'Ile d'Yeu (figure 6.4).



FIGURE 6.3 – Fermes de 9 corps, distance de séparation dx = 100 m.



FIGURE 6.4 – Probabilité  ${\cal C}(H_s,T_p)$  de rencontre des états de mer $(H_s,T_p)$  à l'île d'Yeu.

## 6.3 Modèle

## 6.3.1 Calcul de la production d'énergie

On résout numériquement l'équation du mouvement 2.20 dans le domaine fréquentiel. Une fois l'amplitude des mouvements obtenue, la puissance extraite par la ferme à la pulsation  $\omega$  est :

$$p = \sum_{i=1}^{N_b} p_i \tag{6.1}$$

avec  $p_i$  la puissance extraite par le corps i:

$$p_i = \frac{1}{2} b_{pto} \omega^2 |X_i|^2 \tag{6.2}$$

Dans l'hypothèse de linéarité, on peut calculer la puissance extraite en houle irrégulière par superposition des puissances aux différentes périodes de houle, en se basant sur un spectre :

$$P_i(H_s, T_p) = \int_0^\infty S(T_p, H_s, \omega) p_i(\omega) d\omega$$
(6.3)

où S est le spectre de JONSWAP standard,  $H_s$  la hauteur de vagues significative et  $T_p$  la période de pic. Ce spectre est défini par l'équation 6.4:

$$S(f) = \alpha H_s^2 f_p^4 f^{-5} \Gamma^{e - \frac{(f - f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}} e^{-\frac{5}{4} (\frac{f_p}{f})^4}$$
(6.4)

Le paramètre de largeur de spectre  $\sigma$  est égal à 0.07 si  $f \leq f_p$  et 0.09 si  $f > f_p$ . Pour chaque état de mer, le paramètre d'étalement fréquentiel  $\Gamma$  est choisi égal à 3.3 (valeur standard). La puissance moyenne annuelle extraite par un corps i, considérant les probabilités d'occurence des différents états de mer, est donnée par :

$$Pyr_{i} = \langle P_{i} \rangle = \sum_{H_{s}, T_{p}} C(H_{s}, T_{p}) P_{i}(H_{s}, T_{p})$$
(6.5)

Cette valeur sera notée  $Pyr_{R_i}$  ou  $Pyr_A$ , selon qu'elle est moyennée sur la rangée i de la ferme ou sur la ferme complète. On la note  $Pyr_0$  pour un REV isolé. Les autres indicateurs utilisés pour évaluer l'influence des interactions sur la puissance sont le classique "q-factor" et sa version modifiée. Pour un corps i,

$$q_i(\omega) = \frac{p_i(\omega)}{p_0(\omega)} \tag{6.6}$$

avec  $p_0$  la puissance extraite par un système isolé. Babarit [15] introduit le facteur  $q_{mod}$ , qui prend en compte les interactions significatives du point de vue de la production d'énergie, c'est-à-dire celles qui ont lieu aux périodes où la puissance extraite est la plus importante :

$$q_{mod i}(\omega) = \frac{p_i(\omega) - p_0(\omega)}{max_T[p_0(\omega)]}$$
(6.7)

 $q_{mod}(T) > 0$  ( $q_{mod}(T) < 0$ ) correspond à des interactions constructives (respectivement destructives). Quand les quantités q et  $q_{mod}$  sont calculées sur un ensemble de  $N_b$  corps,  $p_i(\omega)$  et  $p_0(\omega)$  sont remplacés par  $\sum_{i}^{N_b} p_i(\omega)$  et  $N_b.p_0(\omega)$  dans les équations 6.6 et 6.7.

## 6.3.2 Résolution des problèmes de diffraction/radiation

Etant donné le nombre relativement faible de problèmes à résoudre (de 10 à 26, car l'on ne considère qu'un seul degré de liberté par corps et seulement la direction principale de propagation de la houle), il est pertinent d'utiliser ici la version d'Aquaplus accélérée par le FMAS pour évaluer  $AM(\omega)$ ,  $B(\omega)$  and  $F_{ex}(\omega)$  à chaque fréquence.

#### 6.3.2.1 Convergence en maillage

Après une étude de convergence (figures 6.5 et 6.6), il apparait que des discrétisations par 260 panneaux pour les cylindres et par 272 panneaux pour la barge sont suffisantes pour modéliser correctement les corps.



FIGURE 6.5 – Test de convergence en maillage sur le cylindre.

## 6.3.2.2 Choix du pas en fréquence

Les intervalles de périodes considérés sont ceux où la production d'énergie des REV est significative : T[3.9s, 35s] (pour le cylindre) et T[2.9s, 20s] (barge). Le pas en fréquence est de 0.01 rad/s. Afin de s'assurer que ce pas est suffisant, on a considéré une ferme complexe et très étalée spatialement de 49 cylindres pilonnants sur un maillage de triangles équilatéraux. La distance de séparation entre corps est 166m (la ferme occupe un rectangle d'environ  $900m \times 1100m$ ). La figure 6.7 présente les résultats en radiation et diffraction selon le pas en fréquence. Un pas d'au moins 0.01 rad/s est nécessaire pour bien capter les phénomènes d'interactions. On constate à  $\Delta \omega = 0.005 rad/s$  que le problème de radiation n'a pas été résolu correctement à l'une des fréquences étudiées. Le tableau 6.2 montre cependant que cette erreur a un impact minimal sur le résultat final d'énergie produite sur l'année, étant donnée la faible différence constatée entre les résultats avec  $\Delta \omega = 0.01 rad/s$  et  $\Delta \omega = 0.005 rad/s$ . Il confirme d'autre part qu'un pas de 0.01 rad/s est suffisant.

$\Delta \omega =$	0.025 - 0.01  rad/s	0.01 - 0.005  rad/s
Ferme de 49 corps	9.40	1.00
Ferme de 9 corps	х	1.02

TABLE 6.2 – Différence relative (%) sur la production annuelle de la ferme selon la discrétisation en fréquence.



(a) Ligne continue : masse d'eau ajoutée. Pointillés : amortissement

FIGURE  $6.6-{\rm Test}$  de convergence en maillage sur la barge.

z



FIGURE 6.7 – Choix de la discrétisation en fréquence.

#### 6.3.2.3 Paramètres du GMRes et du FMAS

Le critère de convergence du GMRes est fixé à  $10^{-5}$ . Cependant ce critère peut être réduit à  $10^{-4}$  s'il advient une stagnation du résidu; cela permet d'éviter les erreurs telles que constatées sur la figure 6.7(a). Par conséquent :

- Si le résidu est inférieur à  $5.10^{-5}$ ,

– et si la décroissance du résidu est inférieure à 0.5% sur l'ensemble des 3 dernières itérations, alors on considère que le GMRes a convergé. Cette adaptation est apparue comme nécessaire pour les cas à grands nombres de corps pour les quels la période de houle est petite. Afin de réduire le temps de calcul, on adapte l'ordre du développement multipolaire  $N_p$  à la période de houle T, en choisissant  $N_p = 10$  si  $T < 5 \, s$  et  $N_p = 5$  sinon.

## 6.3.2.4 Ordre de grandeur des temps de calculs

La table 6.3 donne une idée des temps de calculs mis en jeu; le nombre de problèmes total est le nombre des périodes évaluées multiplié par le nombre de problèmes de radiation (nombre de corps) et le nombre de problèmes de diffraction (un seul). On constate un facteur 10 dans le temps CPU entre les fermes de cylindres et les fermes de barges. Cela est dû à deux raisons, qui sont illustrées sur la figure 6.8 :

- à période équivalente, le cas de la barge a besoin de plus d'itérations pour converger;
- − les périodes de houle intéressantes pour la barge sont plus petites que celles du cylindre; la convergence du GMRes est donc plus difficile. La majeure partie du temps de calcul est en effet située entre  $T \in [2.9 \, s, 5 \, s]$  (figure 6.8(b)).

Le passage de  $N_p = 10$  à  $N_p = 5$  est clairement visible sur la figure 6.8(a) à T = 5 s.

Parc	Nb. total de problèmes	Nb. moyen de $PMV/problème$	Temps CPU total (s)
9 cylindres	1450	16	$1.70.10^{3}$
16 cylindres	2465	18	$6.15.10^3$
25 cylindres	3770	20	$1.71.10^4$
9 barges	1870	23	$1.82.10^4$
16 barges	3179	30	$2.95.10^4$
25 barges	4862	36	$9.97.10^4$

TABLE 6.3 – Temps de calculs caractéristiques.

## 6.4 PTO calibrés pour une production annuelle maximale

Cette étude paramétrique porte sur les fermes à base carrée et triangulaire des deux types de REV considérés. On étudie l'influence de la distance de séparation sur les différents "indicateurs d'interactions", ainsi que sur la production annuelle de la ferme.

Dans les courbes présentant Pyr dans la suite de ce chapitre, l'échelle est choisie pour mettre en valeur les tendances des différents effets d'interactions. Ces échelles sont donc très dilatées, et il est conseillé de se référer à l'axe des ordonnées pour bien évaluer l'importance de ces effets.

## 6.4.1 Fermes à base triangulaire

### 6.4.1.1 Barges en cavalement

On considère dans un premier temps le corps central (n° 5) d'une ferme de 9 corps pour différentes valeurs de dx. La figure 6.9(a) montre bien que la production de ce corps est influencée par ses voisins, et ce sur une large gamme de périodes. On retrouve cette même tendance sur le facteur  $q_{mod}$  (figure 6.9(b)) car le système a une large bande d'extraction (figure 6.2(a)). L'amplitude des



FIGURE 6.8 – Temps CPU en fonction de la période pour des fermes à base carrée de 25 corps (dx = 100).

interactions varie fortement d'une période à l'autre, et l'allure des courbes n'est pas la même selon la valeur de dx.

Sur l'ensemble des valeurs de dx, les interactions positives semblent dominer (figure 6.10(a)). Etant donné que la valeur Pyr "somme" ces interactions sur l'année, son évolution en fonction de dx est plus lisse. La figure 6.10(b) montre que selon les valeurs de dx, les systèmes bénéficient de leur regroupement au sein de la ferme ; la production annuelle moyenne de la ferme est légèrement plus élevée que celle d'un REV isolé. On peut tirer plusieurs informations de cette figure, qui illustre les grandes tendances au sein de la ferme :

- Pour les plus petites valeurs de dx, la  $3^{eme}$  rangée souffre d'effet de masquage, car ses corps sont alignés avec ceux de la  $1^{ere}$  rangée (figure 6.3(b)) et les deux rangées sont proches.
- La 1<sup>ere</sup> rangée bénéficie d'interactions positives quasiment constantes. Cela suggère qu'elle est très peu impactée par le reste de la ferme : elle ne subit aucun masquage. Les autres corps agissent de son point de vue comme un "réflecteur" qui lui renvoie une partie de l'énergie dans le dos, par diffraction et radiation.
- La deuxième rangée est celle qui a la production la plus élevée. Il est probable qu'elle ne souffre qu'assez peu du masquage de la houle. Par contre, chacun de ses corps tire profit des vagues rayonnées par ses voisins.
- La forme convexe  $Pyr_A$  montre l'existence d'un maximum local dans la production énergétique de la ferme, selon la distance de séparation dx entre systèmes. Il est intéréssant d'évaluer l'allure de la fonction  $Pyr_A(dx, dy)$  au voisinage de ce maximum.

On réalise donc une étude "2D", pour laquelle dx et dy sont indépendants l'un de l'autre. Il est clair d'après la figure 6.11 qu'un "chemin de crête" entre interactions constructives et destructives existe, à condition qu'une certaine relation entre dx et dy soit respectée. Cette relation semble parabolique; cependant, vu les faibles pentes relevées sur la figure 6.11, et étant données les marges d'erreur du modèle, une relation affine paraît satisfaisante pour le jeu de valeurs (dx, dy) considérées. Le cas des fermes à base triangulaire "traverse" la zone d'interactions positives, ce qui explique la forme convexe de  $Pyr_A$  sur la figure 6.10(b). A l'échelle de la production annuelle de la ferme, deux tendances s'opposent donc :



FIGURE 6.9 – Indicateurs d'interactions pour le REV central d'une ferme de 9 barges selon la distance de séparation dx ( $b_{pto} = b_{pto yr}$ ).



(a) Valeurs min. et max. de  $q_{mod}$  sur l'intervalle des périodes, (b) Puissance annuelle moyenne au centre de chaque ligne

FIGURE 6.10 – Indicateurs d'interactions et puissance d'une ferme de 9 barges à base triangulaire  $(b_{pto} = b_{pto yr})$ .

- le masquage de la houle entre corps : cette tendance peut être minimisée en augmentant l'espacement entre les corps;
- le partage des vagues rayonnées : lorsque les corps sont suffisament proches, ils peuvent récupérer une partie de l'énergie rayonnée par leur voisins.

Un équilibre optimal entre ces tendances existe. Le développeur de fermes de REV dispose d'une certaine flexibilité dans le positionnement de ses machines, étant donné qu'il existe un ensemble de couples (dx, dy) optimaux.

Les mêmes tendances se retrouvent pour les fermes de 16 et 25 corps (figure 6.12); les effets de masquage sont plus prononcés au fur et à mesure que le nombre de rangées dans la ferme augmente. Dans la plupart des cas, les résultats pour 9 corps sont une bonne illustration de tendances qui s'appliquent aussi aux fermes de 16 et 25 corps. On présentera donc ces résultats en priorité.



FIGURE 6.11 – Production d'énergie d'une ferme de barges à deux paramètres  $(b_{pto} = b_{pto yr})$ .



FIGURE 6.12 – Puissance annuelle moyenne pour des fermes de barges à base triangulaire ( $b_{pto} = b_{pto yr}$ ).

### 6.4.1.2 Cylindres en pilonnement

Les résultats de la figure 6.14(b) montrent des tendances similaires au cas des barges. La forme convexe des courbes est moins marquée, probablement car les systèmes ont un mode de fonctionnement axisymétrique, et peuvent donc capter les vagues rayonnées par leurs voisins plus facilement. Une rapide étude 2D (figure 6.13) présente la même allure que dans la section 6.4.1. La sensibilité à dy est réduite, probablement car les cylindres sont des REV moins efficaces que les barges. Par conséquent les effets de masquage sont moins marqués.



FIGURE 6.13 –  $Pyr_A/Pyr_0$  pour des fermes de cylindres à deux paramètres, avec  $b_{pto} = b_{pto yr}$  (ligne bleu : fermes à base triangulaire).

Le gain de puissance maximum de la ferme par rapport à un corps isolé, d'environ 1%, a lieu pour dx = 450 m. Il est surprenant de constater des interactions positives à des distances aussi grandes, pour lesquelles on pourrait supposer que les vagues rayonnées se sont quasiment évanouies. A noter

que si les distances paraissent grandes par rapport aux corps, elles appartiennent à l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes mises en jeu. Des interactions entre deux barges alignées séparées par de très grandes distances ( $dx \approx 2000 m$ ) ont aussi été constatées par Babarit [15]. Une explication peut être qu'une grande distance de séparation importante entre corps augmente les interactions positives aux grandes longueurs d'onde (figure 6.14(a)). La plus grande partie de l'énergie étant présente à ces longueurs d'ondes, il en résulte une absorption d'énergie plus importante. Cependant les résultats sont très bruités, et cette hypothèse demande à être confirmée.



FIGURE 6.14 – Indicateurs d'interactions et puissance d'une ferme de 9 cylindres à base triangulaire  $(b_{pto} = b_{pto yr})$ .

## 6.4.2 Fermes à base carrée

Le comportement de fermes carrées est plus dépendant des REV formant la ferme que dans le cas des triangles. Les barges étant des REV efficaces (car antisymétriques, [48]), et les systèmes étant désormais alignés, les effets de masquages sont importants (figure 6.15(a)). Cela conduit à des différences de production très importantes entre les différentes rangées; seul le premier rang bénéficie de vagues renvoyées par l'arrière. Au niveau global, les interactions sont négatives, sauf à de très grandes distances de séparations.

Dans le cas des cylindres, un maximum dans la production peut être trouvé pour dx = 180m. Les interactions jouent un rôle globalement positif à l'échelle de la ferme; leur effet diminue lentement au fur à mesure que la distance de séparation entre les corps augmente. Les interactions négatives sur le  $3^{eme}$  rang diminuent très vite, ce qui peut être expliqué par les raisons suivantes :

- Les cylindres sont peu efficaces, par conséquent le masquage s'estompe assez vite.
- Ils sont axisymétriques, donc des interactions positives peuvent avoir lieu quel que soit l'alignement des corps par rapport à la direction de la houle. Ces interactions peuvent compenser les effets de masquage entre cylindres alignés. C'est notamment le cas pour la 2<sup>eme</sup> rangée, qui a la production d'énergie la plus élevée, et dont les corps sont ceux qui ont le plus grand nombre de voisins.

On constate les mêmes tendances avec 4 rangées (16 corps, figure 6.16) ou 5 rangées (25 corps), le masquage augmentant avec le nombre de rangées.



FIGURE 6.15 – Production de fermes de 9 corps à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto yr})$ .



FIGURE 6.16 – Production de fermes de 16 corps à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto yr})$ .

## 6.4.3 Réglage de $b_{pto yr}$ à l'échelle de la ferme

De Backer *et al.* [40] ont mis en évidence la nécessité d'accorder l'amortissement du PTO des REV regroupés en fermes d'une manière différente que dans le cas d'un corps isolé. Dans [40], un jeu d'états de mer particulier est considéré; les corps flottants sont très proches les uns des autres. Des stratégies d'optimisation sont mises en place pour accorder les systèmes soit de manière identique, soit indépendamment les uns des autres.

Afin d'évaluer la sensibilité de la production de la ferme au réglage du PTO, les valeurs de  $b_{pto}$  ont été balayées et appliquées de manière identique à tous les corps de la ferme; la valeur  $b_{pto yr}$  choisie est désormais celle qui permet à  $Pyr_A$  d'atteindre un maximum.

On a constaté que cette valeur est quasiment la même que celle du corps isolé, quelle que soit la configuration de ferme considérée, la distance dx et le REV. L'amélioration apportée est minime, notamment au regard des marges d'erreur du modèle. Cette très faible sensibilité est due à plusieurs facteurs :

- On considère des moyennes annuelles, pour lesquelles interactions positives et négatives se compensent sur l'ensemble des périodes. Un réglage du PTO par état de mer serait peut-être plus sensible à la configuration de la ferme, l'étalement fréquentiel étant moindre.
- Les corps sont éloignés les uns des autres, donc l'effet des interactions est limité.
- Les mouvements sont faibles, limitant d'autant l'importance des vagues rayonnées et diffractées, et donc des interactions.

La production peut certainement être améliorée par un réglage plus fin du PTO, mais ce n'est pas l'objet de cette thèse. On met ici en évidence que des interactions positives sont possibles même avec des systèmes très simples. Des systèmes génériques peuvent donc être utilisés, sans avoir été conçus pour des états de mer particuliers ou une configuration de ferme particulière.

## 6.5 PTO calibrés pour une puissance maximale à la résonance

Un très grand nombre d'études sur les fermes se focalise sur la maximisation de la puissance extraite à la période de résonance des systèmes oscillants [22, 37]. Dans cette méthode, on suppose en général que cette période est calquée sur la période dominante de houle au site considéré. Il est intéressant d'évaluer si cette approche, radicalement différente de l'approche précédente, change de manière notable les interactions au sein de la ferme.

### 6.5.1 Fermes à base carrée

#### 6.5.1.1 Cylindres en pilonnement

On étudie de nouveau le REV central d'une ferme de 9 corps. La figure 6.17(a) montre des interactions sur un grand intervalle de périodes. Cependant,  $q_{mod}$  (figure 6.17(b)) filtre ces résultats car les interactions significatives ont lieu seulement autour de la période propre (les systèmes ont une bande d'extraction très étroite, voir la figure 6.2(a)). A cette période, les amplitudes des mouvements des corps atteignent leur maximum (figure 6.2(b)) ce qui conduit à une forte radiation et des interactions importantes. La figure 6.17(b) révèle en effet une forte dépendance des interactions à dx.

Cette dépendance est confirmée par l'évolution de  $q_{mod}$  et Pyr (qui sont fortement corrélés entre eux) sur la figure 6.18. L'étroitesse de la bande d'extraction empêche les interactions négatives et positives de se compenser sur l'année (figure 6.17(b)). L'allure de  $Pyr_A$  en fonction de dx oscille donc fortement autour de la puissance annuelle d'un corps isolé. Lorsque dx est compris entre 100m et 300 m, c'est le 2<sup>eme</sup> rang qui est le plus sensible aux interactions ; étant central, il est soumis à la radiation des corps des autres rangs.

Les calculs sur 16 et 25 corps (figure 6.19) montrent que les trois premiers rangs ne sont quasiment pas influencés par les ajouts des  $4^{eme}$  et  $5^{eme}$  rangs, et se comportent presque comme une entité indépendante. Les  $4^{eme}$  et  $5^{eme}$  rangs sont alors victimes d'un masquage important.



FIGURE 6.17 – Indicateurs d'interactions pour le REV central d'une ferme de 9 corps à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .



(a) Valeurs min. et max. de  $q_{mod}$  sur l'intervalle des périodes, (b) Puissance annuelle moyenne au centre des rangées de la ferme

FIGURE 6.18 – Indicateurs d'interactions et production de fermes de 9 cylindres à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .



FIGURE 6.19 – Production de fermes de barges à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .

**Intersection parabolique** Child [37] propose une stratégie pour construire une ferme de REV optimal à une période de houle donnée. Son principe est de positionner chaque corps en un point où la houle incidente est en phase avec les vagues rayonnées par les autres corps. Dans notre cas, le cylindre produit quasiment toute son énergie à T = 7.3 s. Par conséquent, ce raisonnement peut s'utiliser pour interpréter les résultats précédents.

La figure 6.20 monte l'amplitude de l'élévation de la surface libre autour d'un ensemble de corps (1 cylindre et 3 cylindres), en considérant la houle incidente, et les vagues rayonnées et diffractées (les vagues rayonnées dominant nettement). En surimpression est représentée une ferme à base carrée de 9 cylindres, avec dx = 150 m. Si dans un premier temps on néglige les interactions entre corps et on se contente de superposer en le décalant le champ autour d'un cylindre, on constate que pour dx = 150 m les corps sont effectivement proches des "zones de phases" mentionnées. Ils béneficient donc mutuellement des vagues rayonnées. Le même constat s'applique en considérant le champ autour de 3 cylindres côte à côte, les deux premiers rangs bénéficiant des vagues rayonnées par le dernier. La figure 6.20 suggère une très forte sensibilité à dx et dy, ce qui est confirmé par une rapide étude de ferme à deux paramètres (figure 6.21).

**Influence du désordre** Dans un cas réel, l'espacement des corps dans la ferme ne sera pas parfaitement régulier. Des imprécisions dans la construction peuvent avoir lieu; les systèmes retenus pas des ancrages souples peuvent dériver. On a identifié au paragraphe précédent une configuration de ferme dont la production est apparement très sensible à l'espacement. Il est intéressant d'évaluer l'effet d'une légère perturbation dans la disposition des corps dans ce cas; si cet effet est limité ou nul, alors il sera insignifiant dans la plupart des autres cas.

On se base sur une ferme de 9 cylindres à base carré avec dx = 150 m. L'introduction d'une perturbation aléatoire (appelée "désordre") est basée sur la démarche de Duclos et Clément [43]. On impose à la position idéale de chaque corps i un déplacement défini par :

$$\Delta x_i = \gamma_i p \tau \cos(2\pi \gamma_i) \Delta y_i = \gamma_i p \tau \sin(2\pi \gamma_i)$$
(6.8)

avec  $\gamma_i \in [0,1]$  un nombre aléatoire, p = 30 m le déplacement maximum autorisé,  $\tau \in [0,1]$ déterminant le "niveau de désordre", comme proportion du déplacement maximum. Pour chaque valeurs de  $\tau$ , 5 cas de désordres aléatoires sont traités. La figure 6.22 montre un exemple de fermes "désordonnées". La figure 6.23 reporte les résultats obtenus. Un désordre d'amplitude importante  $(\tau = 1)$  conduit à une grande dispersion dans la production, en la réduisant en moyenne de 9%.



(a) Champ de vagues autour d'un cylindre (b) Champ autour des 3 cylindres de la rangée de droite

FIGURE 6.20 – Amplitude de l'élévation de la surface libre à T = 7.3 s autour de 1 ou 3 cylindres, superposée avec une vue d'une ferme de 9 cylindres. Les vagues viennent de la gauche,  $b_{pto} = b_{pto \omega_0}$ .



FIGURE  $6.21 - Pyr_A/Pyr_0$  pour une ferme à base carrée de neuf cylindres.  $b_{pto} = b_{pto \omega_0}$ . Ligne bleue : fermes à base carrée.

Cependant la quantité  $Pyr_A/Pyr_0$  reste toujours supérieure à 1 même avec un désordre important, ce qui est rassurant. Cela suggère qu'en dehors des effets de phases vus précédemment, la ferme agit comme un "piège" pour la houle incidente, dans lequel les systèmes se renvoient mutuellement l'énergie qu'ils n'ont pas pu absorber, favorisant au niveau global une absorption plus complète.



FIGURE 6.22 – Exemples de fermes de 9 cylindres à base carrée pour les quelles du désordre a été introduit de manière aléatoire.



FIGURE 6.23 – Effet du désordre dans une ferme à base carrée de 9 cylindres  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .



FIGURE 6.24 – Production de fermes de barges à base carrée  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .

#### 6.5.1.2 Barges en cavalement

Les systèmes ont une bande d'extraction plus étroite que dans la section 6.4.2. Les évolutions de Pyr selon dx sont donc moins douces (figure 6.24). A leur période propre, les systèmes extraient une puissance plus grande que précédemment ; par conséquent les masquages sont très importants.

## 6.5.2 Fermes à base triangulaire

## 6.5.2.1 Cylindres en pilonnement

La figure 6.25 montre que comme dans le cas des fermes à base carrée,  $P_{yr}$  et  $q_{mod}$  évoluent de manière quasi-périodique selon dx et sont fortement corrélés. On voit qu'en lissant la courbe  $Pyr_A$ 



sur la figure 6.25 (b), on obtiendrait de nouveau une courbe convexe, typique des configurations en triangle vues précédemment.

(a) Valeurs min. et max. de  $q_{mod}$  sur l'intervalle des périodes, (b) Puissance annuelle moyenne au centre de chaque ligne

FIGURE 6.25 – Indicateurs d'interactions et production de fermes de 9 corps à base triangulaire  $(b_{pto \omega_0})$ .

#### 6.5.2.2 Barges en cavalement

La différence entre  $b_{pto \omega_0}$  et  $b_{pto yr}$  étant faible dans le cas de la barge, on retrouve les mêmes tendances que dans la figure 6.10(b). Les courbes sont simplement décalées vers une puissance plus faible (figure 6.26).

## 6.6 Conclusion

Les tableaux 6.4 et 6.5 synthétisent les valeurs extrêmes des gains ou des pertes d'énergie que l'ont peut attendre selon la configuration de la ferme. L'amplitude des variations de production dépend fortement du choix du PTO. Lorsque l'on calibre l'amortissement du PTO de manière à maximiser la production annuelle d'un corps isolé, on constate que les interactions constructives dans la ferme ont des amplitudes très faibles (table 6.4) ; cependant, elles évoluent de manière très douce avec la distance de séparation entre corps. Ces résultats ne montrent donc pas de gain de production phénoménal d'énergie par le regroupement des systèmes, mais ils rassurent quant à la possibilité de mettre en place des fermes sans que la production d'énergie par système ne s'effondre.

La connaissance obtenue sur le fonctionnement des fermes étudiées permet de donner quelques recommandations pour leur conception. En premier lieu, les systèmes à large bande doivent être privilégiés, car ils permettent aux interactions destructives et constructives de se compenser sur l'intervalle des périodes. La dépendance de la production énergétique en fonction de la configuration de la ferme est ainsi réduite. Cela donne plus de flexibilité dans la conception de la ferme et autorise une marge d'erreur à l'installateur.

Le PTO ne doit pas être accordé en fonction de la seule fréquence de résonance, car cela réduit la largeur d'extraction du système et favorise des mouvements de grande amplitude. Ces mouvements créent une forte radiation qui renforce les interactions dans la ferme. La configuration de la ferme joue alors un rôle plus critique.

En règle générale deux tendances s'opposent : les corps doivent être suffisament éloignés les uns des autres pour réduire le masquage de la houle, mais suffisament proches pour bénéficier des vagues rayonnées par leurs voisins. On montre qu'un optimum peut être trouvé entre ces tendances.



FIGURE 6.26 – Production de fermes de barges à base triangulaire  $(b_{pto} = b_{pto \omega_0})$ .

Une sélection des résultats présentés dans ce chapitre et ses principales conclusions ont fait l'objet d'une publication [31].

De manière globale, les interactions sur l'année sont positives (l'ensemble des corps "piégeant" la houle) mais d'amplitude très limitée. Le rôle du contrôle est fondamental ; un mode de contrôle plus complexe permettrait certainement d'améliorer la production d'énergie, mais tout en la rendant plus sensible à la configuration de la ferme. Il est désormais nécessaire de tester des configurations de fermes plus élaborées, réduisant les alignements entre systèmes. On peut aussi s'intéresser à la modification des états de mer dans le sillage des fermes de plus grande taille.

Ferme	$\operatorname{Syst}eme$	dx	Min.	dx	Max.
Carrée	Cylindre	100	-1.5	180	0.6
Triangulaire	Cylindre	100	-3.6	450	0.7
Carrée	$\mathbf{Barge}$	100	-11.9	500	-6.2
Triangulaire	Barge	100	-7.7	280	2.6

TABLE 6.4 – Valeur max. et min. de  $100(Pyr_A - Pyr_0)/Pyr_0$  pour des fermes de 9 corps, avec  $b_{pto} = b_{pto yr}$ . Les nombres en gras concernent les configurations pour lesquelles  $Pyr_A$  est le plus élevé.

Ferme	$\operatorname{Syst}eme$	dx	Min.	dx	Max.
Carrée	Cylindre	100	-8.9	150	13.4
Triangulaire	Cylindre	150	-11.4	400	9.9
Carrée	Barge	100	-17.6	340	-8.4
Triangulaire	Barge	100	-12.9	350	7.9

TABLE 6.5 – Valeur max. et min. de  $100(Pyr_A - Pyr_0)/Pyr_0$  pour des fermes de 9 corps, avec  $b_{pto} = b_{pto \omega_0}$ . Les nombres en gras concernent les configurations pour lesquelles  $Pyr_A$  est le plus élevé.

## Chapitre 7

## Fermes construites en sous-unités

Le chapitre précédent a montré que certaines architectures de fermes maximisent la production annuelle d'énergie. Si le nombre de REV est suffisament petit, la production par REV peut être légèrement plus élevée que la production d'un corps isolé. Cependant, à partir d'une certain nombre de "lignes" de corps dans la ferme, les effets de masquage entre corps deviennent dominants par rapport aux interactions constructives.

A nombre de REV égal, il est peut-être intéressant de construire la ferme comme un ensemble de sous-unités, chaque unité ayant un petit nombre de lignes, et donc présentant un risque de masquage entre corps réduit. Dans ce cas de figure, il faut s'interroger sur les interactions ayant lieu entre sous-unités. Les résultats de ce chapitre ont été présentés à la conférence EWTEC 2011 [29].

## 7.1 Méthode numérique employée

Dans ce chapitre, l'influence de l'étalement directionnel de la houle est étudiée; pour chaque ferme de récupérateurs considérée, 19 directions de houle incidente sont prises en compte ( $\beta \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}], \Delta\beta = 10^{\circ}$ ). Par conséquent, le nombre total de problèmes de diffraction et de radiation à résoudre est trop important pour que l'emploi de la méthode multipolaire simplifiée apporte un gain de temps de calcul (voir la section 5.3.2.4). On se contentera donc d'utiliser la méthode GMRes, avec un critère de convergence égal à  $10^{-4}$ . L'élévation de la surface libre en différents points de contrôle se fait conformément aux équations de la section 5.3.3, en utilisant encore une fois la méthode directe et non le FMAS.

Il est à noter que les études du présent chapitre se basent sur les résultats du chapitre 6, obtenus par l'emploi du FMAS. Cela confirme l'utilité de cette méthode comme outil de prédimensionnement.

## 7.2 Fermes de deux unités dans le sillage l'une de l'autre

On étudie ici la configuration la moins efficace; il s'agit d'évaluer si la séparation d'une unité de 6 rangées et de 20 corps en deux unités de 3 rangées et 10 corps permet effectivement d'améliorer la production d'énergie par corps même dans cette configuration. On étudie donc l'influence de la distance de séparation entre les deux unités.

## 7.2.1 Modèle

On s'intéresse à des unités de dix corps telles que sur la figure 6.11; le PTO est réglé de manière à maximiser la production d'énergie annuelle sur le site de l'île d'Yeu. Dans le cas des cylindres, l'unité est définie par (dx = 100 m, dy = 50 m). Dans le cas des barges, elle est définie par (dx = 200 m, dy = 280 m). L'unité de barges est configurée de manière à être "optimale"

(la relation dy = 0.65dx + 235 est conforme aux résultats de la figure 6.11); l'unité de cylindres est configurée de manière quelconque. L'objectif est d'estimer si les tendances relevées sont très dépendantes de la configuration. L'étalement directionnel de la houle, lorsqu'il est considéré, est modélisé de la manière suivante :

$$S_d(\omega, \theta) = S(\omega)D(\theta) \tag{7.1}$$

où S est de nouveau le spectre JONSWAP. La fonction D, caractérisant l'étalement directionnel, est indépendante de la fréquence de la houle si on utilise la fonction définie dans [68] :

$$D(\theta) = D_0 \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \beta}{2}\right) \quad |\theta - \beta| < \pi$$
(7.2)

 $\beta$  est la direction principale de la houle. Le paramètre s caractérise l'intensité de l'étalement. On fixe s = 10, ce qui correspond à une "mer du vent", et donc à un étalement assez prononcé.  $D_0$  est un paramètre de normalisation, tel que la condition suivante soit respectée :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(\theta) d\theta = 1 \tag{7.3}$$

## 7.2.2 Unité isolée

La table 7.1 résume la production des unités considérées. On note  $Pyr_0$  la puissance annuelle moyenne d'un corps isolé, et  $Pyr_C$  la puissance annuelle moyenne d'une unité de 10 corps. Comme on pouvait s'y attendre, l'unité de barges en cavalement présente une sensibilité à l'étalement directionnel plus grande que l'unité de cylindres en pilonnement. Cela est bien sûr dû au mode de fonctionnement des systèmes. La figure 7.1 montre que les interactions constructives dans l'unité (caractérisées par  $Pyr_C/Pyr_0 > 1$ ) disparaissent quand la valeur de l'angle d'incidence  $\beta$  de la houle augmente, notamment dans le cas des barges. Lorsque l'incidence de la houle est quasiment perpendiculaire à l'unité de barges,  $Pyr_0$  (pour un corps isolé) tend vers zéro plus rapidement que  $Pyr_C$ . En effet, au sein de l'unité de REV, les vagues rayonnées et diffractées dans des directions autres que celle de la houle incidente conduisent à un léger surcroît de production ; la production par corps est donc plus élevée que dans le cas d'un corps isolé. Cela explique l'augmentation surprenante de  $Pyr_C/Pyr_0$  pour  $|\beta| > 50°$ , qui n'atteste en aucun cas d'une excellente performance de l'unité de barges.

	Sans étalement		Avec étalement	
Body	Isolé	En unité	Isolé	En unité
Cylindre	51.95	51.71	51.95	50.55
Barge	139.54	144.11	117.50	114.43

TABLE 7.1 – Puissance annuelle moyenne (kW) par corps à l'île d'Yeu

## 7.2.3 Unités en interaction

On considère ici deux unités de récupérateurs de l'énergie des vagues. Les unités sont alignées dans la direction de propagation de la houle, et on fait varier la distance qui les sépare (il s'agit de la distance entre la dernière rangée de la première unité et la première rangée de la deuxième unité).

#### 7.2.3.1 Cylindres

La figure 7.2 représente l'évolution du ratio  $Pyr_C/Pyr_0$  en fonction de la distance qui sépare les deux unités. L'impact des interactions entre unités n'est pas le même selon l'unité considérée. La première bénéficie d'interactions positives, dues à des vagues renvoyées vers l'avant (par diffraction et radiation) par la deuxième unité. Cette dernière souffre de son coté du masquage de la houle



FIGURE 7.1 – Puissance annuelle moyenne d'une unité de 10 corps comparée à celle d'un corps isolé

occasionné par la première unité.

Ces interactions sont importantes quand  $\beta$  est proche de zéro, même lorsque la distance de séparation est grande. Cependant, plus  $\beta$  augmente, plus la distance à partir de laquelle les interactions deviennent négligeables est petite. Par conséquent, l'effet du masquage sur la deuxième unité disparaitra plus tôt si l'étalement directionnel de la houle est considéré.



FIGURE 7.2 - Puissance annuelle moyenne de deux unités de cylindres alignées selon la direction de la houle (ligne continue : unité de devant; ligne pointillée : unité de derrière)

## 7.2.3.2 Barges

Les tendances sont les mêmes pour les barges, mais en plus marquées (figure 7.3). Lorsque les deux unités sont alignées ( $\beta = 0^{\circ}$ ), les corps de la deuxième unité génèrent moins de 85% de la
production d'un système isolé, quelle que soit la distance de séparation. Pour certaines incidences non nulles, les deux unités peuvent atteindre la même production (mais celle-ci est assez faible, le fonctionnement des corps n'étant pas axisymétrique).

Même lorsque l'étalement directionnel est considéré, la production de la deuxième unité reste très en deçà de celle d'une unité isolée, quelle que soit la distance de séparation. En effet, deux phénomènes se compensent : d'un coté, le masquage est limité par la dispersion; de l'autre coté, les barges produisent peu d'énergie quand  $\beta \neq 0^{\circ}$ .



FIGURE 7.3 – Puissance annuelle moyenne de deux unités de barges alignées selon la direction de la houle (ligne continue : unité de devant ; ligne pointillée : unité de derrière)

#### 7.2.3.3 Modélisation des unités comme des "puits" d'énergie

Il est communément admis que l'on ne peut pas représenter les récupérateurs de l'énergie des vagues comme des puits d'énergie absorbant une fraction fixe de l'énergie incidente. Cela est dû à la physique du problème, et à la nature résonante des systèmes étudiés. Cependant on peut se demander si une telle modélisation n'est pas envisageable sur les unités considérées, qui sont des structures plus massives, à l'échelle de la production annuelle. On se base donc sur les données de la section 7.2.3 pour évaluer si la modélisation présentée par la figure 7.4 est valable. Une telle modélisation s'appuie sur des hypothèses très fortes :

- l'effet positif de la deuxième unité sur la première est négligé,
- le masquage est su restimé, car on suppose que la houle ne se reforme pas dans le sillage de la première unité.

Si ce type de modélisation était valable, même de manière approchée, cela faciliterait considérablement les études amont de faisabilité des projets de fermes de REV.

La quantité  $P_i$  est la puissance annuelle moyenne arrivant à l'unité i, en kW/m.  $x_i$  est la part de cette puissance qui est extraite par l'unité i. Sur le site choisi,  $P_1 = 27.7 kW/m$ . On évalue  $x_1$ et  $x_2$  à partir des puissances extraites par les unités, qui sont connues.

La table 7.2 montre que les ratios  $x_1$  et  $x_2$  ont le même ordre de grandeur. Cependant, du fait des hypothèses présentées,  $P_2$  est sous-estimé, ce qui entraîne  $x_2 > x_1$  (ce qui est irréaliste, car il n'y a pas de raison que la deuxième unité soit plus performante que la première). Il serait donc plus approprié de se référer systématiquement à  $P_1$ , en considérant  $x'_1$  au lieu de  $x_2$ . Cependant l'imprécision qui en résulterait (car  $x_1 \neq x'_1$ ) serait significative, car elle porterait sur l'ensemble de la production annuelle. Cette modélisation des unités en "termes puits" ne semble donc pas être appropriée. Il apparaît plus prudent de continuer de se référer au calcul numérique pour ce type d'études.



FIGURE 7.4 – Modélisation des unités de REV en "termes puits". Les puissances extraites par les unités sont exprimées par mètre de l'unité faisant face aux vagues.

	$x_1$	$x_2$	$x'_1$
Cylindres, pas d'étalement	11.75	12.80	11.29
Cylindres, étalement	11.63	12.78	11.30
Barges, pas d'étalement	32.75	39.51	26.57
Barges, étalement	26.07	31.17	23.05

TABLE 7.2 – Ratios d'extraction de puissance, en % (valeurs moyennées sur l'ensemble des distances de séparation entre unités)

### 7.3 Sillage derrière une unité de REV

Les résultats précédents permettent d'évaluer numériquement des tendances auxquelles on pouvait s'attendre. Par contre, ils ne donnent pas d'informations sur le positionnement optimal de la deuxième unité. On étudie donc ici le sillage de la première unité, en fonction de sa géométrie. Cette méthode permet d'évaluer la zone d'influence de la première unité, sans considérer la deuxième ; le nombre de corps dans le problème est donc divisé par deux.

#### 7.3.1 Evaluation de la hauteur significative des vagues

Une quarantaine d'unités, comportant 8, 10 ou 14 corps ont été considérées. Afin de se placer dans les configurations de fermes les plus efficaces, le positionnement des REV au sein de l'unité de REV est défini à partir des figures 6.11(a) et 6.13. On calibre la relation entre dx et dy de manière à parcourir le "chemin de crête" visible sur ces figures, ce qui donne :

- dy = 0.65 dx + 235 pour les cylindres,
- dy = 0.54dx + 177 pour les barges.

Cette approche est valable car le climat de houle est le même que dans le chapitre 6. De nouveau, la valeur maximale de dy est 100 m pour des raisons pratiques. La dimension maximale de l'unité est 1000 m. A chaque période, on évalue sur un ensemble de points de contrôle l'amplitude  $\tilde{A}$  de la houle correspondante à une houle incidente d'amplitude 1 m. Les champs incidents, rayonnés et diffractés sont donc pris en compte. On reconstruit la hauteur significative  $\tilde{H}_s$  à chaque point de

contrôle selon le spectre JONSWAP, de la manière suivante :

$$\underbrace{(H_s, T_p) \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \omega_i & A(\omega_i) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \omega_i & \tilde{A}(\omega_i) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \rightarrow (\tilde{H}_s, T_p)$$
(7.4)

Spectre de houle incidente Spectre au point de contrôle

On exprime l'influence de la ferme sur la hauteur significative de la houle aux points de contrôles étudiés par le coefficient  $K_d$ :

$$K_d = \frac{\dot{H}_s}{H_s} \tag{7.5}$$

On définit par  $K_{d_W}$  la valeur moyenne de  $K_d$  dans le sillage de l'unité;  $K_{d_W}$  permet donc d'avoir un indicateur global sur l'atténuation de la hauteur de houle significative. La zone sur laquelle  $K_d$ est moyenné pour obtenir  $K_{d_W}$  est définie ainsi :

- $\begin{array}{l} \ x \in [X_{max} + 100 \ m, 4100 \ m] \\ \ y \in [-25 \ m, Y_{max} + 25 \ m] \end{array}$

où  $X_{max}$  et  $Y_{max}$  définissent les limites de l'unité (voir la figure 7.5).

#### 7.3.2Résultats

#### 7.3.2.1Tendances générales

Pour chacun des états de mer, on considère les dix unités qui créent le plus de masquage; on relève donc les dix valeurs les plus faibles de  $Kd_W$ . La moyenne de ces dix valeurs est reportée dans le tableau 7.3 afin d'avoir une vue d'ensemble synthétique.

Les valeurs de  $K_{d_W}$  sont toutes proches de 1, ce qui indiquent que dans l'ensemble le masquage est limité. On trouve les valeurs les plus faibles de  $K_{d_W}$  (et donc le plus fort masquage) pour les états de mer les moins énergétiques. Cela vient probablement du fait que les systèmes considérés sont principalement efficaces aux petites périodes de houles. Comme on pouvait s'y attendre, le masquage est plus faible lorsque l'étalement directionnel de la houle est considéré. Cela s'explique par plusieurs raisons :

- le masquage est réparti sur plusieurs directions : il est donc moins intense localement ;

- les unités considérées ont été conçues pour une houle monodirectionnelle (chapitre 6). Leur extraction d'énergie n'est donc pas forcément optimale pour une houle multidirectionnelle.

La suite de ce chapitre se concentre presque exclusivement sur l'état de mer le moins énergétique considéré  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ , à partir duquel il est plus facile de visualiser les tendances du masquage.

		Pas d'étalement		Etalement		
$H_s(m)$	$T_p(s)$	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	
1	6	0.948	0.89	0.982	0.24	
2	7	0.968	0.62	0.988	0.16	
3	9	0.977	0.40	0.994	0.09	
4	10	0.982	0.30	0.995	0.08	
5	11	0.985	0.36	0.996	0.08	

TABLE 7.3 – Moyenne et écart-type (%) de  $K_{d_W}$  pour les dix unités qui atténuent le plus la houle aux états de mers considérés

#### 7.3.2.2 Etats de mer monodirectionnels

Les unités présentant le masquage le plus fort sont celles qui ont la densité la plus élévée (grand nombre de corps, distances de séparations courtes). Les unités de cylindres masquent plus que les unités de barges : parmi les 10 unités les plus "opaques", sept sont des unités de 14 ou 18 cylindres.

Les figures 7.5 et 7.7 montrent les sillages des unités qui créent le plus de masquage. On voit une augmentation du  $H_s$  légèrement à l'écart du sillage dans le cas des barges, due aux fortes propriétés radiatives de ces systèmes. Par conséquent, on constate une forte sensibilité de l'allure du sillage aux interactions au sein de l'unité de barges, et donc à la valeur de dy. Les figures 7.7 et 7.6 montrent un sillage radicalement différent, bien que la valeur de dy n'ait changé que de 50 m d'une unité à l'autre, et malgré le nombre élevé de systèmes.

Lorsque l'espacement entre REV atteint des valeurs relativement élevées (dy = 250 m), les unités deviennent "poreuses" et présentent un sillage assez inhomogène (figures 7.8 et 7.9), notamment pour les barges.



FIGURE 7.5 –  $K_d$  derrière une unité de 18 cylindres (dy = 100 m) pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$  (dy = 150 m) pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ 

On trace les sillages des deux unités qui masquent le plus à l'état de mer  $(H_s = 3 m, T_p = 9 s)$ (figures 7.13 et 7.14). Un regard aux figures 7.5 et 7.7 confirme que l'atténuation du masquage est bien moindre que pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ , de même que l'aire sur laquelle le masquage est significatif.

#### 7.3.2.3 Etats de mers multidirectionnels

La table 7.3 confirme qu'il y a moins de masquage quand l'étalement directionnel est pris en compte, les vagues se reformant plus rapidement derrière les unités (voir par exemple la figure 7.10), ce qui est cohérent avec les résultats de la section 7.2.3. Le sillage est plus large, mais aussi plus court et de moindre intensité. Les 10 unités qui masquent le plus sont toutes composés de 18 ou 14 cylindres. Les valeurs de dy dans ces unités sont plus élevées que dans le cas de la houle monodirectionnelle. La "porosité" des unités est réduite par l'étalement dans le cas des cylindres (figure 7.11). C'est moins vrai dans le cas des barges (figure 7.12). Il est probable que les réflexions entre les plans fixes que sont les cotés des barges guident les vagues à travers l'unité.

On note une légère rupture de symétrie dans les sillages lorsque l'étalement est considéré. Celleci ne présente pas de réalité physique. Cela correspond à des incertitudes numériques : le calcul du sillage pour  $\beta = -x^{\circ}$  ne donne pas exactement le symétrique du sillage calculé pour  $\beta = x^{\circ}$ . On peut faire disparaître visuellement cette incertitude en ne considérant qu'un "demi-domaine" (défini par  $y \ge Y_{max}/2$  ou  $y \le Y_{max}/2$ ). Considérer le domaine entier permet néanmoins de s'assurer que cette incertitude n'est pas significative.



FIGURE 7.7 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 100 m), pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ 



FIGURE 7.10 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 100 m), pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ), houle multidirectionnelle

1.1

1.08

1.06

1.04

1.02

0.98

0.96

0.94

0.92

0.9

4000

3000

1



FIGURE 7.8 –  $K_d$  derrière une unité de 18 cylindres (dy = 250 m), pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ )



FIGURE 7.9 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 250 m), pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ 



 $2000 \\ X$ 

1000



FIGURE 7.12 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 250 m) at ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ), houle multidirectionnelle



FIGURE 7.13 –  $K_d$  derrière une unité de 18 cylindres (dy = 150 m) pour  $(H_s = 3 m, T_p = 9 s)$  barges (dy = 100 m), pour  $(H_s = 3 m, T_p = 9 s)$ 

#### 7.3.3 Comparaison avec les modèles de propagation

La plupart des études concernant les états de mer derrière les fermes de récupérateurs de l'énergie des vagues étudient leur impact sur l'environnement côtier. Par conséquent elles utilisent des méthodes de propagation (SWAN, Mild Slope) permettant de prendre en compte une bathymétrie complexe, ainsi que divers phénomènes (déferlement, moutonnement, rôle du vent ou du courant). Dans ces modèles, les REV sont considérés comme des termes "puits" extrayant la plupart du temps un ratio fixe de l'énergie incidente. La technique d'"éléments éponges", permet de représenter le contour des REV par des coefficients de reflexion et d'absorption.

On peut trouver des exemples de ce type d'études dans [21] et [93]. Ces deux études se consacrent à des REV de type "terminator", dont les coefficients sont réglés indépendament de la longeur d'onde. Elles montrent une atténuation très significative du  $H_s$ , quel que soit l'état de mer. Cette atténuation n'est pas comparable avec les résultats présentés ici.

Dans [13], une fonction d'absorption dépendante de la période est implémentée dans SWAN, pour étudier une ferme de point-absorbers. Les résultats de cette étude présentent des ordres de grandeurs comparables avec nos résultats. Pour  $(H_s = 2.7m, T_p = 10.7s)$ , une réduction de 25% du  $H_s$  est observée, les REV étant conçus pour extraire un maximum d'énergie à cet état de mer. Les résultats expérimentaux sur un ensemble de 5 corps alignés face à la houle montrent une réduction du  $H_s$  allant de 2% à 14%, selon la manière dont l'amortissement du power take-off est réglé. Ces ordres de grandeurs sont plus proches des résultats numériques présentés ici que de ceux de SWAN dans [13]. L'expérimentation semble donc confirmer que l'approche par méthode des singularités est plus réaliste que l'utilisation de méthode de propagation.

L'approche utilisée ici modélise complètement les interactions fluide/structure (dans les limites de la théorie linéaire) ; la dépendance en fréquence des champs rayonnés et diffractés est intégralement prise en compte. Il pourra être intéressant par la suite d'utiliser les résultats de cette approche (spectre de houle derrière l'unité de REV) en entrée des modèles de propagation. De cette manière, l'impact des fermes sur la dynamique côtière pourra être évaluée de manière plus réaliste.

#### 7.3.4 Influence des modes de résonance transverse

A l'état de mer  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ , les unités de barges absorbent environ dix fois plus d'énergie que les unités de cylindres (pour une houle monodirectionnelle). Il est donc surprenant de trouver un masquage plus faible derrière les barges, notamment si l'on se réfère aux résultats de la section 7.2. Une explication peut être que les barges sont des générateurs de houle plus efficaces que les cylindres, créant du clapot à l'arrière et à l'avant de la ferme.

On compare ici deux unités ayant des caractéristiques similaires (8 corps, dy = 150 m), mais présentant un masquage différent :  $K_{dw} = 0.967$  pour les cylindres et  $K_{dw} = 0.992$  pour les barges ( $\beta = 0^{\circ}$ , pas d'étalement). On remarque que l'amplitude la houle est fortement augmentée derrière l'unité de barges à T = 6.12 s (figure 7.15). Une telle augmentation ne se retrouve à aucune période de houle dans le cas des cylindres. Cette augmentation ne correspond pas à un pic dans l'extraction d'énergie, car ce pic a lieu vers T = 7.3 s. A cette période, l'allure du champ de houle est différent et révèle une forte radiation (figure 7.17), car l'amplitude du mouvement des corps atteint son maximum. Plusieurs raisons suggèrent donc que le phénomène d'augmentation de l'amplitude de la houle derrière l'unité à  $T = 6.12 \ s$  correspond à une résonance qui focalise les vagues dans le sillage :

- ce phénomène n'a pas lieu pour un corps isolé
- ce phénomène ne correspond pas à un pic dans la radiation par les barges
- ce phénomène est très sensible à la période
- les systèmes considérés ne permettent pas de dissipation d'énergie selon l'axe Y (étant donné que seul le cavalement est possible)
- les systèmes sont espacés de manière régulière
- l'unité présente des plans parallèles fixes

Cependant, dans un cas réel, les corps ne seront pas forcément positionnés à leur position idéale : il peut y avoir des imprécisions lors de la construction. D'autre part, si ils sont ancrés sur des lignes flexibles, ils risquent de dériver et de s'éloigner légèrement de la position assignée. Il est donc important de savoir si le  $H_s$  est très sensible à ce phénomène de résonance. Pour cela, on introduit du désordre dans la construction de l'unité, selon l'approche décrite dans [43]. Un déplacement de direction et d'amplitude aléatoire est appliqué à chacun des systèmes, l'amplitude maximum  $p_{max}$  du déplacement étant fixée à  $10\,m$  ou  $20\,m.$  Cette approche n'est pas équivalente à l'ajout de degrés de libertés dans le problème, car cet ajout ne changerait pas la position d'équilibre autour de laquelle chacun des systèmes oscille.



FIGURE 7.15 – Amplitude de la houle derrière FIGURE 7.16 – Amplitude de la houle derrière une unité de 8 barges (dy = 150 m) à T = 6.12 s.

une unité de 8 barges (dy = 150 m) à T = 6.12 s. Désordre caractérisé par  $p_{max} = 10 m$ .



FIGURE 7.17 – Amplitude de la houle derrière une unité de 8 barges (dy = 150 m) à T = 7.25 s,  $p_{max} = 0 m.$ 

TABLE 7.4 – Influence du désordre sur le comportement des unités de REV (haut : pas d'étalement ; bas : étalement directionnel).  $Pyr_C$  est en kW.

	$p_{\rm max}=0\ m$		$p_{\rm max}=10~m$		$p_{\rm max}=20{\rm m}$	
Unité	$K_{d_W}$	$Pyr_C$	$K_{d_W}$	$Pyr_C$	$K_{d_W}$	$Pyr_C$
8 barges	0.992	28.71	0.971	28.74	0.959	29.14
18 barges	0.958	27.30	0.955	27.30	0.953	27.42
8 barges	1.002	24.20	0.997	24.14	0.995	24.08
18 barges	0.990	23.91	0.988	23.90	0.987	23.87



FIGURE 7.18 –  $K_d$  derrière une unité de 8 barges (dy = 150 m) pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ),  $p_{max} = 0 m$ 

2000

1500

500

> 1000

FIGURE 7.19 –  $K_d$  derrière une unité de 8 barges (dy = 150 m) pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ),  $p_{max} = 10 m$ 



FIGURE 7.20 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 250 m) pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ),  $p_{max} = 20 m$ 

3000

 $2000 \\ X$ 

1000

FIGURE 7.21 –  $K_d$  derrière une unité de 18 barges (dy = 250 m) pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ), houle multidirectionnelle,  $p_{max} = 20 m$ 

La figure 7.16 montre bien une réduction de l'amplitude de la houle à l'arrière de la ferme, si on la compare à la figure 7.15 (cas résonant). La table 7.4 réunit les niveaux de masquage et de production en fonction du désordre. La puissance annuelle moyenne n'est pas sensible au désordre, ce qui est en accord avec la section 6.5.1.1. Lorsque l'étalement directionnel est activé, le masquage est le même quelle que soit l'intensité du désordre. Le désordre a une plus grande influence dans le cas d'une houle monodirectionnelle. En effet, la suppression de la résonance pour l'unité de 8 barges conduit à une baisse de  $K_{d_W}$  de 3%, et la taille et l'intensité du sillage sont nettement modifiées (figures 7.18 et 7.19). Cela suggère que les phénomènes de résonance ont peut-être conduit à sous-estimer le masquage des unités de barges.

Un regard sur une unité plus complexe et plus "opaque" montre que de telles résonances ont lieu à plusieurs périodes différentes pour la même unité. Encore une fois, ces résonances focalisent la houle à l'arrière. Le désordre n'a pas d'influence significative, le sillage n'étant presque pas modifié par le passage de  $p_{max}$  de 0 m à 20 m (voir les figures 7.8 et 7.20). Cette tendance est d'autant plus marquée si l'on considère l'étalement directionnel (figures 7.12 et 7.21). Les valeurs de  $K_{dw}$ paraissent alors indépendantes de  $p_{max}$ . Par conséquent, les résultats obtenus sur les unités les plus complexes sont probablement réalistes : les caractéristiques favorisant la résonance sont suffisament marquées pour que même un désordre assez important (déplacements de l'ordre de deux fois la taille du système) n'empêche pas cette résonance.

Même s'il est difficile de tirer des conclusions définitives, étant donné les faibles niveaux de masquage, il est sûr que le lien entre absorption d'énergie et masquage ne peut pas s'établir directement, ce dernier étant très sensible à l'architecture de la ferme.

#### 7.4 Ferme de deux unités décalées

L'objectif de cette section est de vérifier rapidement si la connaissance du sillage d'une unité est une donnée suffisante pour placer la seconde unité de manière opportune. On considère donc une ferme composée de deux unités de 8 corps. On situe la deuxième unité de manière décalée par rapport à la première, afin qu'elle soit située à la limite de son sillage pour l'état de mer  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ . La table 7.5 donne les résultats de puissance annuelle moyenne. Chaque unité se comporte presque comme si elle était isolée. La seconde unité produit légèrement moins lorsque l'étalement directionnel est considéré, puisqu'un masquage direct entre unités a lieu selon quelques directions de houle incidente. Dans le cas contraire, elle produit plus que la première unité, puisqu'elle bénéficie des vagues rayonnées par ce dernier. Cela est plus évident dans le cas des barges (figure 7.22) que des cylindres (figure 7.24).

Il est intéressant de noter que le champ de vagues n'est pas le même dans les deux unités de barges. Il y a une plus large proportion de vagues diffractées dans la seconde unité, car la première rayonne des vagues ayant une composante dans la direction Y. Ces composantes ne sont absorbées ni par le PTO, ni par amortissement hydrodynamique; elles sont par contre réfléchies par les plans latéraux des systèmes. On ne retrouve pas ce phénomène pour les cylindres, étant donné leur fonctionnement axisymétrique.

Les sillages de deux unités de cylindres se superposent l'un à l'autre, ce qui permet un meilleur masquage. On retrouve cette tendance lorsque l'étalement directionnel est considéré. Les sillages des unités de barges restent par contre indépendants l'un de l'autre.

	Pas d'étalement		${f Etalement}$	
Ferme	Unité 1	Unité 2	Unité 1	Unité 2
Barges, $dy = 250 m$	139.71	140.82	114.20	111.41
Reference	140.26		114.23	
Cylindres, $dy = 100 m$	50.97	51.14	51.29	50.67
Reference	50.93		51.21	

TABLE 7.5 – Puissance annuelle moyenne  $(Pyr_C, kW)$  dans une ferme de deux unités décalées latéralement.



FIGURE 7.22 –  $K_d$  derrière deux unités de 8 barges, pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ 



FIGURE 7.23 –  $K_d$  derrière deux unités de 8 barges, pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ), étalement directionnel



1.12000 1.081.061500 1.04 1.021 1000 0.980.96500 0.940.920.9Ω 1000  $2000 \\ X$ 3000 4000

FIGURE 7.24 –  $K_d$  derrière deux unités de 8 cylindres, pour  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ 

FIGURE 7.25 –  $K_d$  derrière deux unités de 8 cylindres, pour ( $H_s = 1 m, T_p = 6 s$ ), étalement directionnel

### 7.5 Conclusion

Ce chapitre étudie la possibilité de scinder une ferme de récupérateurs de l'énergie des vagues en sous-unités. L'objectif est d'améliorer la production énergétique de la ferme en combinant deux stratégies :

- l'utilisation de sous-unités reconnues comme étant efficaces,

- et la limitation des effets de masquage en éloignant les unités les unes des autres.

La première partie de ce chapitre montre que cette méthode porte ses fruits, même dans le cas le plus défavorable (deux unités alignées parallèlement au sens de propagation de la houle). L'effet de masquage entre unités disparaît au fur à mesure que la distance qui les sépare augmente; cela dit, il reste visible même à de grandes distances de séparation (de l'ordre du kilomètre). Lorsque l'étalement directionnel est considéré, le masquage diminue plus rapidement en fonction de la distance.

La seconde partie caractérise la réduction de la hauteur de houle significative dans le sillage d'une unité de REV, selon ses caractéristiques géométriques. De manière générale, cette réduction est très faible; elle est de 10% au maximum (dans le cas des états de mer les moins énergétiques) dans une zone proche de la ferme. La méthode employée prend explicitement en compte les interactions fluide/structure. Il est donc probable que les niveaux de réduction rencontrés soient plus fiables que ceux obtenus par méthodes de propagation. Chaque projet de ferme devra faire l'objet d'une étude environnementale appropriée; cependant, la réduction de la hauteur de houle significative par la ferme ne semble pas être un problème majeur.

L'allure du sillage et son intensité sont très dépendantes de la configuration de la ferme. En houle monodirectionnelle, le sillage "visible" s'étend jusqu'à 4000 m après la ferme. En houle multidirectionnelle, il est bien plus court (2000 m) et moins intense. Il est difficile d'établir un lien solide entre l'efficacité de la ferme en terme d'absorption d'énergie et les caractéristiques de son sillage. Cela est d'autant plus vrai que des phénomènes de résonances numériques ont été mis en évidence dans cette étude.

La connaissance du sillage d'une unité permet de placer l'unité suivante de manière à limiter les interactions entre unités. Cela permet de tirer partie de la meilleure façon possible de petites unités reconnues comme efficaces. Cela dit, les distances mises en jeu sont importantes, ce qui risque de poser des problèmes de conflits d'usage et de maintenance.

# Conclusion

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons implémenté l'algorithme multipolaire rapide (FMA) dans le code de tenue à la mer Aquaplus, afin d'accélérer la simulation de fermes de récupérateurs d'énergie des vagues composées de nombreux corps flottants, en mouvement dans la houle.

Un prérequis indispensable a été l'ajout d'un algorithme de résolution itératif GMRes dans Aquaplus, car c'est au sein de cette méthode que le FMA s'utilise. Ce simple ajout, permettant l'utilisation du GMRes sans FMA, apporte une accélération significative à la résolution. L'accélération supplémentaire due au FMA doit donc s'évaluer en comparant les temps de calcul des méthodes "GMRes seul" et "GMRes avec FMA".

Comme préalable essentiel à l'implémentation du FMA, les formulations du développement multipolaire de la fonction de Green à surface libre en profondeur infinie ont été étendues, de manière à ce qu'il soit possible de les utiliser dans un algorithme tridimensionnel. Il est probable que le même type de développement soit réalisable pour les formulations en profondeur finie (pour ce cas aussi, les formulations existantes exigent que le centre du développement soit situé sur la surface libre). Le calcul de la fonction de Green par les formulations obtenues a été validé de manière systématique grâce à des résultats de référence. Cette étape a révélé des difficultés de convergence des formulations multipolaires pour les petites périodes de houle. Deux paramètres  $\mathbf{r}_{C_1}$  et  $\mathbf{r}_{C_2}$  doivent être minimisés pour assurer la convergence respectivement du champ proche et du champ lointain de la fonction de Green. Cependant, par son architecture, le FMA assure la minimisation de  $\mathbf{r}_{C_1}$ seulement.

Une version open-source du FMA appelée DPMTA a été implémentée, afin d'accélérer le calcul des produits matrice-vecteur dans l'algorithme de résolution GMRes. Cette implémentation a été validée en terme de précision. Elle a montré des résultats décevants en terme de temps de calcul, le FMA n'accélérant le GMRes que pour un nombre réduit de situations. Cela tient aux raisons suivantes :

- Le temps de calcul se répartit en deux étapes : calcul de la matrice des coefficients d'influence
   K ; résolution des problèmes de diffraction et de radiation, sachant que chaque problème fait intervenir la même matrice K.
- Le FMA permet de gagner un temps significatif en évitant le calcul de K. Il faut noter néanmoins que Aquaplus, de son côté, accélère le calcul de K par l'interpolation de certains coefficients dans une table de valeurs précalculées. Il y a donc deux méthodes d'accélération en "compétition", ce qui masque l'accélération drastique qu'aurait apporté le FMA si Aquaplus calculait entièrement les coefficients.
- Les problèmes considérés sont relativement "petits", avec un maximum de 10<sup>4</sup> panneaux. Par conséquent, une fois les coefficients des deux méthodes calculés, il est toujours plus rapide d'évaluer le produit matrice-vecteur par un simple produit que par le FMA, car ce dernier comporte un certain nombre d'étapes intermédiaires.
- Le temps gagné à la première étape est donc perdu petit à petit à chacun des produits matrice-vecteur. L'accélération est donc effective seulement si le nombre de ces produits est suffisament faible.

D'autre part, l'outil développé n'est pas adaptatif. En raison des difficultés décrites au paragraphe précédent, la convergence de la fonction de Green dans le cas des fermes est impossible à réaliser. Une implémentation simplifiée du FMA adaptée au cas des fermes est donc mise en place.

Ce nouvel outil permet d'atteindre une précision satisfaisante. Il présente les mêmes tendances en terme de temps de calcul que l'outil précédent, mais apporte quantitativement une meilleure accélération. Enfin, il réduit drastiquement les besoins de stockage par rapport à la méthode classique. Cet outil est efficace lorsque les fermes étudiées ont les caractéristiques suivantes :

- Le nombre de problèmes à résoudre doit être faible, afin de limiter le nombre de produits matrice-vecteur.
- La discrétisation de chacun des corps est faite avec un nombre élevé de panneaux.

Il s'agit donc d'un outil adapté aux études "simplifiées" de fermes houlomotrices, ayant lieu par exemple pendant la phase de pré-dimensionnement. Cet outil peut néanmoins être amélioré dans le futur par la mise en place d'un préconditionneur adapté au FMA, dont le rôle sera d'accélerer la convergence du GMRes, réduisant ainsi le nombre de produits matrice-vecteur à calculer. D'autre part, une nouvelle implémentation d'Aquaplus (en Fortran 90, par exemple) devrait permettre de traiter des problèmes à plus grand nombre d'inconnues, et d'être ainsi dans une "zone" de plus grande efficacité du FMA.

L'outil développé a été utilisé de manière à mener rapidement l'étude paramétrique de fermes houlomotrices. On a considéré des fermes de 9 à 25 systèmes génériques ayant un seul degré de liberté, soumis à une houle monodirectionnelle. Les systèmes sont positionnés à intervalles réguliers, le long de "maillages" à base carrée ou triangulaire, et l'on fait varier la taille des mailles. On étudie l'influence de ce paramètre sur la production annuelle d'énergie en un site précis.

Cette étude confirme qu'il est bien nécéssaire d'évaluer le rôle des interactions entre systèmes houlomoteurs, même si la distance de séparation entre corps est "grande" (supérieure à 10 fois la taille caractéristique du corps). Selon les configurations, la production d'énergie annuelle peut varier de manière très significative en fonction de la disposition des systèmes.

Le premier enseignement de cette étude est le rôle crucial de la valeur de l'amortissement du PTO. Dans le cas d'un faible amortissement, les mouvements des corps présentent une forte amplitude, qui va de pair avec une radiation importante. Le rôle des interactions est alors significatif. La production annuelle de la ferme est donc très dépendante de la distance de séparation entre systèmes, notamment dans le cas où ceux-ci ont une bande d'absorption étroite. Le mode de fonctionnement des systèmes (axisymétrique/antisymétrique) joue nettement sur la manière dont ils interagissent. Dans le cas d'un fort amortissement, la distance de séparation a une influence bien moindre, et les fermes composées de systèmes différents ont cette fois un comportement relativement similaire.

Lorsque l'amortissement est élevé, il est possible d'évaluer les grandes tendances qui ont lieu dans la ferme. De manière générale, deux phénomènes inverses se compensent :

- La ferme agit comme un piège pour les vagues : l'énergie qui n'est pas extraite par un système est réémise par les champs rayonnés et diffractés. Elle peut donc être captée par un système voisin.
- Les systèmes se masquent mutuellement la houle, notamment s'ils sont alignés dans le sens de propagation de celle-ci.

La manière dont ces deux tendances s'équilibrent dépend du positionnement des systèmes. Une installation sur un maillage en quinconce décrit par deux paramètres de distance (dans le sens parallèle à la propagation de la houle et dans le sens perpendiculaire) permet de définir un ensemble de configurations pour lesquelles les interactions sont constructives à l'échelle de la production d'énergie annuelle. Une relation affine entre les deux paramètres de distance caractérise ces configurations. Les coefficients de cette relation sont spécifiques aux états de mers étudiés sur le site envisagé, ainsi qu'aux carctéristiques des systèmes.

L'atténuation de la hauteur de houle significative par une ferme conçue selon les critères du paragraphe précédent a été étudiée. Cette atténuation est visible seulement pour les états de mer les moins énergétiques (les systèmes extrayant l'énergie principalement aux petites périodes de houle). Dans le cas d'une houle monodirectionnelle, cette réduction est au maximum de 10% pour un état de mer  $(H_s = 1 m, T_p = 6 s)$ . Le sillage s'étend alors sur une grande distance derrière la ferme (4000 m). Lorsque l'étalement directionnel de la houle est considéré, la longueur du sillage et son intensité diminuent de manière drastique. Il est difficile de tracer un lien direct entre absorption d'énergie par la ferme et caractéristiques de son sillage. Celui-ci est en effet fortement dépendant des champs diffractés et rayonnés par les systèmes, ainsi que des phénomènes autres que l'absorption d'énergie, tels que la focalisation de la houle en certaines zones de la surface libre. La construction d'une ferme en un ensemble de "sous-unités" autonomes et performantes semble être une solution appropriée pour améliorer la production annuelle d'énergie par système, et donc la rentabilité de la ferme.

Ces deux études se basent sur des convertisseurs d'énérgie des vagues génériques, n'ayant qu'un seul degré de liberté. La prochaine étape est de réaliser ces études sur des corps à 6 degrés de libertés (même si l'extraction d'énergie n'a lieu que selon un seul d.d.l). Il est en effet possible que l'amortissement hydrodynamique soit plus important que dans les résultats présentés, ce qui aura une influence sur les interactions entre corps et sur le sillage, le champ rayonné étant plus complexe.

L'outil développé dans la première partie a donc permis le pré-dimensionnement d'une ferme de récupérateurs de l'énergie des vagues en un site particulier. Cette outil peut encore être accéléré. D'autre part, l'algorithme multipolaire peut être mis en place dans Aquaplus pour le cas de la profondeur finie, en se basant sur des formulations multipolaires existantes de la fonction de Green en profondeur finie. Enfin, la base hydrodynamique obtenue dans le domaine fréquentiel peut être utilisée pour calculer les matrices impulsionnelles du problème. Ces résultats ouvrent la voie à des simulations plus réalistes, permettant l'étude de l'influence des non-linéarités (dans la modélisation des ancrages, la loi de contrôle ...) sur les interactions entre récupérateurs d'énergie des vagues.

L'accélération des méthodes de simulation est une voie à poursuivre. En effet, la possibilité de réaliser un grand nombre de simulations en un temps raisonnable ouvre la porte aux études paramétriques pour la recherche d'une configuration de ferme "optimale". De telles études offrent donc une bonne compréhension des phénomènes mis en jeu et de l'influence des différents paramètres dans la production d'énergie d'une ferme houlomotrice. Si des algorithmes d'optimisation sont mis en œuvre, l'emploi de méthodes accélérées pourra permettre soit des optimisations plus rapides, soit des optimisations plus riches, mettant un jeu un plus grand nombre de paramètres.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## Bibliographie

- [1] . URL www.pelamiswave.com. Consulté en Mai 2011.
- [2] URL http://fr.wikipedia.org/wiki/Searev. Consulté en Juin 2011.
- [3] . URL www.pelamiswave.com. Consulté en Juin 2011.
- [4] URL www.carnegiecorp.com.au. Consulté en Juin 2011.
- [5] . URL www.wavedragon.net. Consulté en Mai 2011.
- [6] URL www.waveenergy.no/technology\_innovation/. Consulté en Mai 2011.
- [7] . URL www.wavebob.com. Consulté en Mai 2011.
- [8] URL www.oceanpowertechnologies.com. Consulté en Mai 2011.
- [9] URL www.carnegiecorp.com.au. Consulté en Mai 2011.
- [10] URL www.wavestarenergy.com. Consulté en Mai 2011.
- [11] SWAN User Manual, SWAN Cycle III version 40.51.
- [12] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN : Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series - 55, 1964. URL http://www.math.ucla.edu/~cbm/aands/intro.htm#006.
- [13] A. ALEXANDRE, T. STALLARD et P.K. STANSBY: Transformation of wave spectra across a line of wave devices. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [14] J. AUBRY, P. BYDLOWSKI, B. MULTON, H. BEN HAMED et B. BORGARINO : Energy storage system sizing for smoothing power generation of direct wave energy converters. In Proceedings of the 3rd International Conference on Ocean Energy, Bilbao, 2010.
- [15] A. BABARIT : Impact of long separating distances on the energy production of two interacting wave energy converters. Ocean Engineering, 37:718–729, 2010.
- [16] A. BABARIT, B. BORGARINO, P. FERRANT et A. CLÉMENT : Assessment of the influence of the distance between two wave energy converters on the energy production. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, pages 528–537, 2009.
- [17] A. BABARIT, B. BORGARINO, P. FERRANT et A. CLÉMENT : Assessment of the influence of the distance between two wave energy converters on energy production. *IET Renewable Power Generation*, 4:592–601, 2010.
- [18] A. BABARIT et A. CLÉMENT : Optimal latching control of a wave energy device in regular and irregular waves. Applied Ocean Research, 28:77–91, 2006.
- [19] J. BARNES et P. HUT : A hierarchical O(N log N) force-calculation algorithm. Nature, 324:446-449, 1986.

- [20] C. BEELS: Optimization of the lay-out of a farm of wave energy converters in the North Sea : analysis of wave power resources, wake effects, production and cost. Thèse de doctorat, Ghent University. Faculty of Engineering, 2009.
- [21] C. BEELS, P. TROCH, De Visch K., G. DE BACKER, J. DE ROUCK et J.P. KOFOED : Numerical simulation of wake effect in the lee of a farm of Wave Dragon wave energy converters. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [22] S. BELLEW, T. STALLARD et P.K. STANSBY: Optimization of a heterogenous array of heaving bodies. In Proceedings of the 8th Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [23] J.C.W. BERKHOFF : Computation of combined refraction-diffraction. In Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, Vancouver, Canada, pages 471–490, July 1972.
- [24] J. BOARD, Z. HAKURA, W. ELLIOT et W. RANKIN : Scalable variants of multipole-accelerated algorithms for molecular dynamics applications. Rapport technique, Duke University, Department of Electrical Engineering, 1995.
- [25] B BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Extension of the free-surface Green's function multipole expansion for the infinite water depth case. In Proc of the 20th ISOPE Conference, Beijing (China), volume 1, pages 802–809, 2010.
- [26] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Implementation of a Fast Multipole Algorithm (DPMTA) into the seakeeping diffraction/radiation code Aquaplus for the simulation of wave energy converters farms. In Proceedings of the 3rd International Conference on Ocean Energy, Bilbao, 2010.
- [27] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Implémentation d'une méthode multipole rapide dans le code de diffraction/radiation Aquaplus pour la simulation de fermes de récupérateurs d'énergie des vagues. In Actes des 12èmes Journées de l'Hydrodynamique, Ecole Centrale de Nantes, 17-19 Novembre, 2010.
- [28] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Extension of the free-surface Green's function multipole expansion for the infinite water depth case. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 21(3):161–168, 2011.
- [29] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Impact of the separating distance between interacting wave energy converters on the overall energy extraction of an array. In Proceeding of the 10th European Wave and Tidal Energy Conference, Southampton, United Kingdom, 2011.
- [30] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Implémentation d'une méthode multipolaire rapide dans le code de diffraction/radiation Aquaplus. *La Houille Blanche*, 4:13–18, 2011.
- [31] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : Impact of wave interactions effects on energy absorption in large arrays of wave energy converters (accepté). *Ocean Engineering*, 2012.
- [32] B. BORGARINO, A. BABARIT et P. FERRANT : An implementation of the Fast Multipole Algorithm for wave interactions problems on sparse arrays of floating bodies (accepté). *Journal* of Engineering Mathematics, 2012.
- [33] K. BUDAL : Theory for absorption of wave power by a system of interacting bodies. *Journal of Ship Research*, 21, No. 4:248–253, 1977.
- [34] J. CARRIER, L. GREENGARD et V. ROKHLIN : A fast adaptative multipole algorithm for particles simulation. *Journal on scientific computing*, 9, 1988.
- [35] H. CHENG, L. GREENGARD et V. ROKHLIN : A fast adaptative multipole algorithm in three dimensions. Journal of Computational Physics, 155:468–498, 1999.

- [36] B.F.M. CHILD et V. VENUGOPAL : Interaction of waves with an array of floating wave energy devices. In Proceedings of the 7th European Wave and Tidal Energy Conference, 2007.
- [37] B.F.M. CHILD et V. VENUGOPAL: Modification of power characteristics in an array of floating wave energy devices. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [38] A. CLÉMENT : Hydrodynamique instationnaire linéarisée : mise en oeuvre d'une méthode des singularités utilisant un modèle différentiel de la fonction de Green. Rapport technique, Laboratoire de mécanique des fluides, CNRS UMR6598, 1997.
- [39] J. CRUZ, R. SYKES, P. SIDDORN et R. EATOCK-TAYLOR : Wave farm design : preliminary studies on the influences of wave climate, array layout and farm control. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [40] G. DE BACKER, M. VANTORRE, C. BEELS, J. DE ROUCK et P. FRIGAARD : Performance of closely spaced point absorbers with constrained floater motion. In Proceedings of the 8th European Wave and Tidal Energy Conference, Uppsala, Sweden, 2009.
- [41] G. DELHOMMEAU : Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités. Thèse d'Etat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, Laboratoire d'Hydrodynamique Navale, 1987.
- [42] G. DELHOMMEAU : Seakeeping codes Aquadyn and Aquaplus. In 19th WEGMENT School, Numerical Simulation of Hydrodynamics : Ship and Offshore Structures,, 1993.
- [43] G. DUCLOS et A.H. CLÉMENT : Wave propagation through arrays of unevenly spaced vertical piles. *Journal of Ocean Engineering*, 31:1655–1668, 2004.
- [44] D. EVANS: Some theoretical aspects of three-dimensional wave-energy absorbers. In Proceedings of the 1st Symposium on Wave Energy Utilization, Gotheburg, Sweden, 1979.
- [45] A. FALCAO: Wave energy utilization: A review of the technologies. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 14:899–918, 2010.
- [46] J. FALNES : Radiation impedance matrix and optimum power absorption for interacting oscillators in surface waves. Applied Ocean Research, 2:75–80, 1980.
- [47] J. FALNES: Wave-power absorption by an array of attenuators oscillating with unconstrained amplitudes. *Applied Ocean Research*, 6, No. 1:16–22, 1984.
- [48] J. FALNES: Ocean Waves and Oscillating Systems. Cambridge University Press, 2002.
- [49] J. FALNES: A review of wave-energy extraction. Marine Structures, 20:185–201, 2007.
- [50] J. FALNES et K. BUDAL : Wave-power absorption by parallel rows of interacting oscillating bodies. *Applied Ocean Research*, 4, No. 4:194–207, 1982.
- [51] C. FILTZGERALD et G. THOMAS: A preliminary study on the optimal formation of an array of wave power devices. In Proceedings of the 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal, 2007.
- [52] C. FOCHESATO et F. DIAS : A fast method for non-linear three dimensional free-surface. Proceedings of the Royal Society of London, A462:2715-2735, 2006.
- [53] C. FOCHESATO, S. GRILLI et F. DIAS : Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion*, 44:395–416, 2007.
- [54] X. GARNAUD et C.C. MEI: Wave-power extraction by a compact array of buoys. Journal of Fluid Mechanics, 635:389-413, 2009.

- [55] G. GAUTIER : Rapport Énergies Marines Renouvelables. Emplois, Compétences, Formation. Quelles perspectives d'avenir ? Rapport remis à M. François FILLON Premier Ministre, Décembre 2010.
- [56] Y. GOU et B. TENG : Research on hydrodynamic interaction between multiple floating bodies. Rapport technique, Actes des 10èmes Journées de l'Hydrodynamique, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France, 2008.
- [57] L GREENGARD : The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems. MIT Press, 1988.
- [58] L. GREENGARD et V. ROKHLIN : A fast algorithm for particle simulation. Journal of Computational Physics, 73:325-343, 1987.
- [59] E. GUERBER, M. BENOIT, S. GRILLI et C. BUVAT : Modelling of fully nonlinear wave interactions with submerged moving structures. In Proceedings of the 20th ISOPE Conference, Beijing, China, 20-26 June, 2010.
- [60] E. GUERBER, M. BENOIT, S.T. GRILLI et C. BUVAT : Etude numérique des effets nonlinéaires sur la dynamique bi-dimensionelle d'un système houlomoteur immergé. In Actes des 12èmes Journées de l'Hydrodynamique, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France, 17-19 Novembre, 2010.
- [61] A. HULME : The wave forces acting on a floating hemisphere undergoing forced periodic oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 121:443–463, 1982.
- [62] J. JIN : Fortran routines for computation of special functions. URL http://jin.ece.uiuc.edu/routines/routines.html.
- [63] P.A.P. JUSTINO et A. CLÉMENT : Hydrodynamic performance for small arrays of submerged spheres. In Proceedings of the 5th European Wave Energy Conference, Cork, Ireland, 2003.
- [64] H. KAGEMOTO et D.K.P. YUE : Interactions among three-dimensional bodies in water waves : an exact algebraic method. *Journal of Fluid Mechanics*, 166:189–209, 1986.
- [65] M. KASHIWAGI : 3-D calcultation for multiple floating bodies in proximity using the wave interaction theory. In Proceedings of the 17th ISOPE Conference, Lisbon, Portugal, pages 2246-2252, 2007.
- [66] T. KORSMEYER, D.K.P. YUE, K. NABORS et J. WHITE: Multipole accelerated preconditioned iterative methods for three-dimensional potential problems. In Proceedings of BEM 15, pp.517-527, 1993.
- [67] Y. J. LIU et N. NISHIMURA : The fast multipole Boundary Element Method for potential problems : A tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30:371–381, 2006.
- [68] M.S. LONGUET-HIGGINS, D.E. CARTWRIGHT et N.D SMITH : Observations of the directionnal spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. Ocean Wave Spectrum, pages 111– 136, 1961.
- [69] P.A. MADSEN et H.A. SCHÄFFER : Advances in coastal and ocean engineering, volume 5, chapitre A review of Boussinesq-type equations for surface gravity waves, pages 1–94. 1999.
- [70] N. MAKIHATA, T. UTSUNOMIYA et E. WATANABE : Effectiveness of GMRES-DR and OSP-ILUC for wave diffraction analysis of a very large floating structure (VLFS). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30:49–58, 2006.
- [71] S.A. MAVRAKOS et P. MCIVER : Comparison of methods for computing hydrodynamic characteristics of arrays of wake power devices. *Applied Ocean Research*, 19:283–291, 1997.
- [72] P. MCIVER : Wave force on arrays of floating bodies. Journal of Engineering Mathematics, 18:273-285, 1984.

- [73] D.L. MILLAR, H.S.M. SMITH et D.E. REEVE : Modelling analysis of the sensitivity of shoreline change to a wave farm. *Ocean Engineering*, 34:884–901, 2007.
- [74] J. N. NEWMAN : Marine Hydrodynamics. MIT Press, 1977.
- [75] J. N. NEWMAN : Algorithms for free-surface Green's function. Journal of Engineering Mathematics, 19:57–67, 1985.
- [76] M. OHKUSU : Hydrodynamic forces on multiple cylinders in waves. In Proceedings of the International Symposium on Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, Institute of Mechanical Engineers, London, 1974.
- [77] A. PALHA, L. MENDES, C.J. FORTES, A. BRITO-MELO et A. SARMENTO : The impact of wave energy farms in the shoreline wave climate : Portuguese pilot zone case study using pelamis energy wave devices. *Renewable Energy*, 35:62–77, 2010.
- [78] D.J. PIZER : Maximum wave power absorption of point absorbers under motion constraints. Applied Ocean Research, 15:227–234, 1993.
- [79] W.T. RANKIN : DPMTA a Distributed Implementation of the Parallel Multipole Tree Algorithm - version 3.1. Rapport technique, Department of Electrical Engineering, Duke University, 2002.
- [80] P. RICCI, J.B. SAULNIER et A.F. FALCAO : Point-absorbers arrays : a configuration study off the Portuguese West-Coast. In Proceedings of the 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal, 2007.
- [81] Y. SAAD et M.H. SCHULTZ : GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymetric linear systems. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7:856–869, 1986.
- [82] S.H. SALTER : Wave power. Nature, 249:720-724, 1974.
- [83] J.B. SAULNIER : Climatologie fine des systèmes de vague pour l'étude des systèmes houlomoteurs. Thèse de doctorat, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Ecole Centrale de Nantes, France, 2009.
- [84] S. SCHNEIDER et S. MARBURG : Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part ii. acceleration by ILU-type preconditioner. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:751–757, 2003.
- [85] M.J. SIMON : Multiple scattering in arrays of axisymmetric wave energy devices, Part 1 : A matrix method using a plane wave approximation. *Journal of Fluid Mechanics*, 120:1–25, 1982.
- [86] J. SINGH, A. GLIÈRE et J-L. ACHARD : A multipole expansion-based boundary element method for axisymetric potential problem. *Engineering analysis with boundary element method*, 2008.
- [87] B. TENG et R. EATOCK-TAYLOR : New higher order boundary element method for wave diffraction/radiation. *Applied Ocean Research*, 17:71-77, 1995.
- [88] B. TENG et Y. GOU: Fast multipole expansion method and its application in BEM for wave diffraction and radiation. In Proceedings of the 10th ISOPE Conference, San Fransisco, California, 2006.
- [89] R.C. THORNE: Multipole expansions in the theory of surface waves. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 49:707–716, 1953.
- [90] T. UTSUNOMIYA et T. OKAFUJI : Wave response of a VLFS by accelerated Green's function method in infinite water depth. International Journal of Offshore and Polar Engineers, 17:30– 38, 2007.

- [91] T. UTSUNOMIYA et E. WATANABE : Accelerated higher order boundary element method for wave diffraction/radiation problems and its applications. In Proceedings of the 12th ISOPE Conference, Kitakyushu, Japan, 2002.
- [92] T. UTSUNOMIYA, E. WATANABE et N. NISHIMURA : Fast multipole algorithm for wave diffraction/radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography. In Proceedings of OMAE'01, 20th International Conference on Offshore Mechanics and Artic Engineering, 2001.
- [93] V. VENUGOPAL et G.H. SMITH : Wave climate investigations for an array of wave power devices. In Proceedings of the 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal, 2007.
- [94] C. VIDAL, F.J. MENDEZ, G. DIAZ et R. LEGAZ : Impact of Santoña WEC installation on the littoral processes. In Proceedings of the 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal, 2007.
- [95] WAMIT User manual, versions 6.4,6.4PC,6.3S,6.3S-PC. WAMIT, Inc., 822 Boylston St. -Suite 202. Chestnut Hill, MA 02467-2504, USA, 2006.
- [96] G. N. WATSON : A treatise on the theory of Bessel functions, chapitre Chapter XI Addition theorems, page 359. Cambridge University Press, 1944.
- [97] G. N. WATSON : A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 1944.
- [98] J. WEHAUSEN et E. LAITONE : *Surface Waves*, chapitre Sec. 13. Springer Verlag, 1960. URL http://www.coe.berkeley.edu/SurfaceWaves/.

## Annexe A

# Calcul du développement multipolaire de la fonction de Green

### A.1 Eléments de calcul pour $G_4$

La différence  $(-1)^m \mathbf{H}_{-m}(\nu R_x) - Y_m(\nu R_x)$  contribue à la partie champ lointain de la fonction de Green dans  $G_4$  (équation 4.17). L'emploi d'une expression asymptotique pour le calcul de cette différence a permis d'améliorer l'accord du développement multipolaire avec Aquaplus et avec les formulations analytiques. D'après Abramowitz et Stegun [12], lorsque l'argument  $\nu R_x$  est grand,

$$\mathbf{H}_{m}(\nu R_{x}) - Y_{m}(\nu R_{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k_{max}-1} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2}-k)(\frac{\nu R_{x}}{2})^{2k-\nu-1}}$$
(A.1)

D'autre part :

$$Y_{-m}(\nu R_x) = (-1)^m Y_m(\nu R_x)$$
(A.2)

En écrivant :

$$[(-1)^{m}\mathbf{H}_{-m}(\nu R_{x}) - Y_{m}(\nu R_{x})] = (-1)^{m}[\mathbf{H}_{-m}(\nu R_{x}) - Y_{-m}(\nu R_{x})]$$
(A.3)

il est alors possible d'utiliser la formulation de l'équation A.1 pour  $\nu R_x$  plus grand que 20, avec  $k_{max} = 20$ .

L'intégrale présente dans  $G_4$  est évaluée par la méthode de Simpson; 1000 points sont utilisés.

# A.2 Coefficients pour la dérivée normale de la fonction de Green

$$\frac{\partial r_x}{\partial r_R} = \frac{r_R - z_C \cos\theta_R}{\sqrt{r_R^2 + z_C^2 - 2 z_C r_R \cos\theta_R}} \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial \cos\theta_x}{\partial r_R} = \frac{z_C}{r_R^2} \frac{\sin\theta_x^3}{\sin\theta_R} \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial \cos\theta_x}{\partial\theta_R} = -\sin\theta_R \frac{\sin\theta_x + \cos\theta_x \frac{\cos\theta_R}{\sin\theta_R}}{\sin\theta_R + \frac{\cos\theta_x}{\sin\theta_x}(\cos\theta_R - \frac{z_C}{r_R})}$$
(A.6)

$$\frac{\partial r_x^n}{\partial \theta_R} = n \ z_C \ r_R \ \sin\theta_R (r_R^2 + z_C^2 - 2 \ z_C \ r_R \ \cos\theta_R)^{\frac{n}{2} - 1} \tag{A.7}$$