



**HAL**  
open science

# Développement d'un outil de simulation numérique basé sur l'approche "Weak-Scatterer" pour l'étude des systèmes houlomoteurs en grands mouvements

Lucas Letournel

## ► To cite this version:

Lucas Letournel. Développement d'un outil de simulation numérique basé sur l'approche "Weak-Scatterer" pour l'étude des systèmes houlomoteurs en grands mouvements. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2015. Français. NNT: . tel-01207477

**HAL Id: tel-01207477**

**<https://hal.science/tel-01207477v1>**

Submitted on 30 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Lucas LETOURNEL

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : *Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture*

Discipline : Mécaniques des Milieux Fluides  
Unité de recherche : *LHEEA Laboratoire H*

Soutenu le 12 Mars 2015

## DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE SIMULATION NUMÉRIQUE BASÉ SUR L'APPROCHE WEAK-SCATTERER POUR L'ÉTUDE DES SYSTÈMES HOULOMOTEURS EN GRANDS MOUVEMENTS.

### JURY

Président :	<b>Pierre LUBIN</b> , Professeur des universités, ENSPB, Pessac
Rapporteurs :	<b>Michel BENOIT</b> , Professeur assimilé, Université Paris-Est, Chatou <b>Frédéric DIAS</b> , Professeur, University College Dublin, School of Mathematical Sciences, Dublin, Irlande
Examineur:	<b>Šime MALENICA</b> , Docteur, Bureau Veritas, Neuilly sur Seine
Directeur de Thèse :	<b>Pierre FERRANT</b> , Professeur des universités, École Centrale de Nantes, LHÉEA, Nantes
Co-Encadrants :	<b>Aurélien BABARIT</b> , Docteur, École Centrale de Nantes, LHÉEA , Nantes <b>Guillaume DUCROZET</b> , Maître de Conférence, École Centrale de Nantes, LHÉEA , Nantes

# Thèse de Doctorat

Lucas LETOURNEL  
DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE SIMULATION NUMÉRIQUE  
BASÉ SUR L'APPROCHE WEAK-SCATTERER POUR L'ÉTUDE DES  
SYSTÈMES HOULOMOTEURS EN GRANDS MOUVEMENTS.  
Development of a numerical tool based on the Weak-Scatterer  
approximation for the study of Wave Energy Converters in Large  
Motions

## Résumé

Les codes de tenue à la mer basés sur la résolution d'un problème aux limites en théorie potentielle linéarisée, largement utilisée pour l'étude des systèmes flottants conventionnels pour leurs faibles temps de calcul, sont limités par définition à de faibles amplitudes de mouvement. L'efficacité des systèmes houlomoteurs repose, au contraire, sur de grands mouvements: ces systèmes doivent ainsi être conçus avec des fréquences de résonance proches des fréquences de houle. Cette condition est aux antipodes des hypothèses fondamentales des codes potentiels linéaires. Une approche alternative consiste à linéariser les perturbations autour de la déformée de houle incidente (approche Weak-Scatterer) et à exprimer les conditions de glissement sur la position exacte du corps. Ce formalisme doit ainsi pouvoir permettre de traiter avec une meilleure précision les problèmes de tenue à la mer de système houlomoteurs en grands mouvements, tout en maintenant des temps de calculs raisonnables.

Ce travail de thèse consiste en le développement d'un code basé sur cette approche et son exploitation afin d'évaluer ses avantages par rapport à l'approche complètement linéarisée de l'état de l'art. Ce code temporel est basé sur la théorie potentielle avec des sources de Rankine, revisitée selon les choix de conception. Les expressions analytiques des équations intégrales ont ainsi été développées pour une discrétisation linéaire des grandeurs. De même, la détermination de la dérivée temporelle du potentiel par résolution d'un problème aux limites a été complètement reprise pour valider les différentes expressions existantes et donner naissance à une nouvelle, simplifiée. Ces développements théoriques ont été implémentés au sein de différents modules du code, qui ont été successivement validés à l'aide de solutions de référence analytiques ou numériques. L'exploitation du code a finalement permis d'évaluer les performances d'un système houlomoteur de type bouée pilonnante immergée.

## Mots clés

**Energie des vagues, Simulation numérique, Écoulements potentiels à surface libre, Weak-Scatterer. Tenue à la mer**

## Abstract

Usual numerical tools for designing floating bodies have shown their limits when considering WEC's conception. Codes based on linear potential theory and boundary value problems are fast but limited to low amplitude of motions around mean positions. On contrary, wave energy converters efficiency relies on large amplitude of motions. An alternative approach consists in linearizing the perturbations on the incident wave position (Weak-Scatterer approach) while the body conditions are expressed on the body exact position. Sea-keeping studies of wave energy converters with this method may give results with a better precision in reasonable computational time.

Thus this thesis consists in developing a numerical tool based on this approach and comparing its benefits with the state of the art linearized one. This code is based on the potential theory using Rankine sources in time-domain, revisited according to the conception choices. The analytical expressions of the integral equations were thus written for a linear discretization. The boundary value problem for the time derivative of the velocity potential was also entirely re-developed, to validate the different existing expressions and provide a new simplified one. This theoretical developments were implemented into modules, which were validated using reference solutions. An application case was performed to evaluate the performances of a wave energy converter, consisting in a heaving submerged buoy.

## Key Words

**Wave Energy, Numerical Simulation, Potential Free-Surface Flow, Weak-Scatterer, Sea-keeping**

# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse, Pierre Ferrant, ainsi que mes encadrants, Aurélien Babarit et Guillaume Ducrozet, pour m'avoir donné l'occasion de réaliser cette thèse. Elle fut, malgré quelques frustrations passagères, l'objet de mon épanouissement personnel pendant plus de trois ans. Cela n'a pu être possible que grâce à leur accompagnement au quotidien et les échanges enrichissants que nous avons pu avoir, mais surtout grâce à la transmission de la passion qui les anime.

Je souhaite exprimer mes remerciements à Michel Benoît et Šime Malenica pour les conseils précieux qu'ils m'ont délivrés à l'occasion des réunions de suivi de thèse régulières. Je suis également reconnaissant à Frédéric Dias pour avoir accepté, avec Michel Benoit, la responsabilité de rapporteur, et pour leurs commentaires qui m'ont permis d'enrichir ce mémoire. J'en profite pour remercier Pierre Lubin, président du jury de thèse, ainsi que tous les membres du jury, pour leur contribution à ma thèse, notamment au travers de questions instructives qui ont élargi ma compréhension de certains pans de mon travail.

Cette thèse a également été l'occasion de rencontres enrichissantes, notamment dans le cadre du projet ANR MONACOREV, avec les différents acteurs de EDF R& D/ Labo St Venant et Hydrocean, mais également au cours des conférences et séminaires auxquels j'ai pu prendre part.

J'aimerais également remercier tous ceux qui ont partagé mon quotidien au laboratoire et à l'École, doctorants, permanents et administratifs et plus spécialement tous les collègues de bureau que j'ai pu avoir : Romain, Boris, Pierre, Baptiste, Amélie, Xavier, Toyoaki, Nagisa, Maïté et finalement Camille. Mes repas n'aurait pas non plus été aussi animés sans mes anciens collègues de promo, avec lesquels nous avons pu avoir tant de débats : Mathieu, Maxime, Adrien. Je n'oublierai pas non plus tous les doctorants et masters du canal IRC phdpower, que j'ai suivi majoritairement en sous-marin mais toujours assidument pour ces discussions et débats enflammés, même si souvent absurdes !

J'ai enfin une pensée toute particulière, naturellement, pour ma femme, Anaïs, qui me soutient depuis toutes ces années et surtout pendant la rédaction de ce mémoire. C'est sa présence à mes côtés qui m'a permis d'assurer ma confiance dans la réussite de cette entreprise. Je ne mentionnerai pas la relecture attentive de cet ouvrage par ses soins, malgré le caractère rébarbatif de celui-ci !

Je tiens finalement à exprimer ma reconnaissance à l'Agence Nationale pour la Recherche qui a financé ma thèse à travers le programme MONACOREV.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1	Contexte énergétique . . . . .	10
1.2	Systèmes houlomoteurs . . . . .	11
1.3	Outils de simulation numérique . . . . .	12
1.4	Enjeux . . . . .	15
1.4.1	Création et développements de l'approximation <i>Weak-Scatterer</i> . . . . .	15
1.4.2	Principe de l'approximation <i>Weak-Scatterer</i> . . . . .	16
1.5	Contenu du mémoire . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Mise en équations</b>	<b>19</b>
2.1	Hypothèses et approximations . . . . .	19
2.1.1	Hypothèses . . . . .	19
2.1.2	Principe et approximation de la méthode <i>Weak-Scatterer</i> . . . . .	20
2.2	Problème aux limites pour le fluide . . . . .	20
2.2.1	Méthode potentielle . . . . .	20
2.2.2	Seconde identité de Green . . . . .	20
2.2.3	Condition limite sur les surfaces matérielles . . . . .	22
2.2.4	Conditions limites sur la surface libre . . . . .	22
2.3	Couplage fluide-structure . . . . .	25
2.3.1	Équation de mouvement . . . . .	25
2.3.2	Efforts hydrodynamiques . . . . .	25
2.3.3	Détermination de la dérivée temporelle du potentiel . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Discrétisation et équations intégrales</b>	<b>28</b>
3.1	Discrétisation . . . . .	29
3.1.1	Paramétrage . . . . .	29
3.1.2	Expression du gradient . . . . .	29
3.2	Intégrale $I_\sigma(M, i) = \iint_{S_i} \sigma(P)G(M, P)dS$ . . . . .	31
3.2.1	Intégrale $S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP}dS$ . . . . .	32
3.2.2	Intégrale $\vec{I}_\sigma = \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n}_P \wedge \vec{dl}_P$ . . . . .	34

3.3	Intégrale $I_\mu(M, i) = \iint_{S_i} \mu(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS_P$ . . . . .	36
3.3.1	Intégrale $S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$ . . . . .	37
3.3.2	Intégrale $\vec{I}_\mu = \oint_{\vec{c}_i} \frac{\vec{MP}}{MP} \wedge \vec{dl}_P$ . . . . .	38
3.4	Développements asymptotiques . . . . .	39
3.4.1	Intégrale $S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS$ . . . . .	40
3.4.2	Intégrale $S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS$ . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Implémentations numériques et validations</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1	Structure du code . . . . .	41
4.1.1	Description rapide du code . . . . .	41
4.1.2	Algorithme de la boucle temporelle . . . . .	41
4.2	Module de résolution du problème aux limites . . . . .	43
4.2.1	Implémentations numériques . . . . .	43
4.2.2	Validations . . . . .	48
4.2.3	Synthèse . . . . .	58
4.3	Module de calcul des dérivées surfaciques . . . . .	59
4.3.1	Implémentations numériques . . . . .	59
4.3.2	Validations . . . . .	69
4.3.3	Synthèse . . . . .	80
4.4	Module d'avance temporelle . . . . .	81
4.4.1	Implémentations numériques . . . . .	81
4.4.2	Validations . . . . .	83
4.4.3	Synthèse . . . . .	90
4.5	Module de détermination des efforts et mouvements d'un corps . . . . .	92
4.5.1	Implémentations numériques . . . . .	92
4.5.2	Validations . . . . .	95
4.5.3	Synthèse . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Application du code <i>Weak-Scatterer</i></b> . . . . .	<b>113</b>
5.1	Description du système houlomoteur . . . . .	113
5.1.1	Puissance absorbée, largeur de capture et rendement . . . . .	114
5.2	Conditions linéaires : faibles cambrures de houle et réponses en mouvement . . . . .	115
5.2.1	Sans amortissement du PTO . . . . .	115
5.2.2	Avec amortissement du PTO . . . . .	116
5.2.3	Réponses pour un ensemble de fréquences . . . . .	117
5.3	Conditions non-linéaires : grandes cambrures de houle et réponses en mouvement . . . . .	118
5.3.1	Visualisation des non-linéarités liées au corps . . . . .	118

5.3.2	Visualisation des non-linéarités de surface libre . . . . .	121
5.3.3	Réponse pour un ensemble de fréquences . . . . .	123
5.4	Synthèse . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>127</b>
6.1	Développements et validations du code . . . . .	127
6.2	Application à l'étude d'un récupérateur d'énergie des vagues de type Ceto . . . . .	128
6.3	Développements futurs . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Condition limite sur le corps</b> . . . . .	<b>130</b>
A.1	Méthode de Cointe . . . . .	130
A.1.1	Développements 2D . . . . .	131
A.1.2	Développements 3D . . . . .	134
A.2	Méthode de Tanizawa . . . . .	137
A.2.1	Développements 2D . . . . .	138
A.2.2	Développements 3D . . . . .	139
A.3	Équivalence des expressions . . . . .	139
A.3.1	Développements 2D . . . . .	139
A.3.2	Développements 3D . . . . .	142
A.4	Expression unifiée . . . . .	143

# Table des figures

1.1	Potentiel énergétique des vagues . . . . .	11
1.2	Classement des technologies selon Falcão, dans [14] . . . . .	12
1.3	Rapport des puissances produites par le système houlomoteur, mesurées lors d'essais en houle irrégulière dans le bassin de génie océanique de l'École Centrale de Nantes, et prédites par le modèle "Wave to Wire". . . . .	13
3.1	Paramétrage . . . . .	29
3.2	Paramétrage . . . . .	32
3.3	Cas de Référence . . . . .	34
3.4	Cas de Référence . . . . .	38
4.1	Erreur Relative (%) de la solution du BVP pour un maillage cylindrique . . . . .	50
4.2	Erreur Relative (%) pour différents maillages cylindriques . . . . .	50
4.3	Convergence en maillage : erreur relative maximale (%) en fonction de la discrétisation . . . . .	52
4.4	Erreur relative (%) de la solution du BVP en présence d'un corps immergé . . . . .	53
4.5	Erreur Relative (%) pour les différentes symétries . . . . .	54
4.6	Erreur relative (%) de la solution du BVP pour le domaine fermé . . . . .	55
4.7	Erreur Relative (%) de la solution du BVP en domaine ouvert . . . . .	56
4.8	Erreur relative (%) de la solution du BVP pour le domaine ouvert et symétrie verticale . . . . .	57
4.9	Ordre de Voisinage . . . . .	61
4.10	Schéma des bases locales de nœuds doubles . . . . .	68
4.11	Erreur Relative (%) du gradient de la déformée pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log . . . . .	70
4.12	Erreur Relative (%) du gradient de la déformée pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log . . . . .	70
4.13	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, en $z = 0$ . . . . .	71
4.14	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, en $z = 0$ . . . . .	72
4.15	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, en $z = \eta$ . . . . .	73



4.16	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, en $z = \eta$ . . . . .	73
4.17	Potentiel et ses dérivées tangentielles sur la sphère . . . . .	75
4.18	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log . . . . .	75
4.19	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log . . . . .	76
4.20	Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log . . . . .	76
4.21	Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log . . . . .	77
4.22	Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la b-spline d'ordre 3, échelle log . . . . .	78
4.23	Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la b-spline d'ordre 4, échelle log . . . . .	78
4.24	Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les approximations Discrétisation Linéaire et b-splines d'ordre 3, échelle log . . . . .	79
4.25	Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour les approximations Discrétisation Linéaire et b-splines d'ordre 3, échelle log . . . . .	79
4.26	Solution numérique et analytique de la déformée de surface libre en un point en fonction du temps . . . . .	85
4.27	Énergies cinétique et potentielle de surface libre pour une onde stationnaire	85
4.28	Erreurs Relatives des variations énergétique et volumique dans le domaine fluide . . . . .	86
4.29	Comparaison de la solution numérique de l'élévation de surface libre avec la solution analytique de Kennard . . . . .	88
4.30	Variations énergétiques dans le domaine fluide . . . . .	89
4.31	Erreurs Relatives (%) des variations énergétique et volumique dans le domaine fluide . . . . .	89
4.32	Évolution temporelle des efforts de Froude-Krylov et en diffraction . . . . .	96
4.33	Coefficients harmoniques en amplitude et phase de l'effort en diffraction pour différentes pulsations de houle . . . . .	97
4.34	Évolution temporelle de l'effort en diffraction pour une houle de grande cambrure . . . . .	98
4.35	Élévation de surface libre, incidente et perturbée, à l'aplomb du corps . . . . .	99
4.36	Élévation de surface libre incidente plus perturbée, à l'aplomb du corps . . . . .	99
4.37	Efforts hydrodynamiques en théorie linéaire (Nemoh), faiblement non-linéaire (WS) et complètement non-linéaire (NWT) . . . . .	101
4.38	Efforts hydrodynamiques en théorie linéaire (Nemoh), faiblement non-linéaire (WS) et complètement non-linéaire (NWT) . . . . .	102

4.39	Coefficients Harmoniques en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.025a$ . . . . .	104
4.40	Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.3a$ . . . . .	105
4.41	Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.3a$ . . . . .	105
4.42	Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.5a$ . . . . .	106
4.43	Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.5a$ . . . . .	106
4.44	Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.7a$ . . . . .	107
4.45	Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d'onde adimensionalisée pour une amplitude de $A_r = 0.7a$ . . . . .	107
4.46	Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère . . . . .	109
4.47	Conservation énergétique pour une sphère en mouvement libre . . . . .	109
4.48	Erreurs Relatives de la conservation énergétique et volumique . . . . .	110
4.49	Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère, pour une amplitude d'oscillation initiale de $0.5a$ . . . . .	111
4.50	Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère pour une distance $d = 1.5a$ . . . . .	111
5.1	Schéma du WEC . . . . .	113
5.2	Comparaison des modèles linéaire et WS en conditions linéaires, sans amortissement du PTO . . . . .	115
5.3	Comparaison des modèles linéaire et WS en conditions linéaires, avec un amortissement du PTO . . . . .	116
5.4	Réponses en pilonnement et puissance moyenne absorbée pour des houles incidentes de faible amplitude . . . . .	117
5.5	Comparaison des modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités liées au mouvements du corps . . . . .	119
5.6	Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre . . . . .	120
5.7	Comparaison des modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités de surface libre . . . . .	121
5.8	Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre . . . . .	123
5.9	Réponses en pilonnement et puissance moyenne absorbée pour des houles incidente de grande amplitude . . . . .	124
5.10	Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre . . . . .	125
A.1	Schéma de la base curviligne . . . . .	131

A.2 Schéma de la base curviligne 3D . . . . .	135
A.3 Repère de Frenet . . . . .	140

# Liste des tableaux

1.1	Comparaison des temps CPU requis pour des simulations 3D, pour une sphère immergée, oscillant en mouvement libre ou forcé, en fonction du nombre d'éléments sur les frontières du domaine, $N$ . . . . .	14
1.2	Comparaison des codes WS existants . . . . .	16
4.1	Comparaison des temps de calcul en fonction des symétries prises en compte	54
4.2	Comparaison des temps de calcul en domaine ouvert et domaine fermé . .	57
4.3	Comparaison des performances en précision et temps de calcul des différentes méthodes de calcul des dérivées locales . . . . .	74
4.4	Erreurs Relatives de la période et des variations énergétique et volumique pour différentes discrétisations en espace et en temps . . . . .	86
4.5	Erreurs Relatives de la période et des variations énergétique et volumique pour différentes discrétisations en espace et en temps . . . . .	90
4.6	Coefficients harmoniques de l'effort en diffraction, en amplitude et en phase	97
4.7	Harmoniques de l'effort hydrodynamique en conditions linéaires . . . . .	101
4.8	Harmoniques de l'effort hydrodynamique en conditions non-linéaires . . .	103
5.1	Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement donnés par les modèles linéaire et WS en conditions linéaires . . . . .	117
5.2	Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement, donnés par les modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités . . .	120
5.3	Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement, donnés par les modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités . . .	122

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte énergétique

Largement inexploités dans leur ensemble, le potentiel mondial des énergies marines est estimé, selon les sources, entre 20 000 TWh et 80 000 TWh d'électricité par an [24], [25]. Cette quantité est du même ordre de grandeur que la consommation mondiale en électricité (20 000 TWh en 2012). Ce potentiel peut être réparti selon les 4 différentes formes principales d'énergies marines que sont : l'énergie marémotrice et des courants de marée (800 TWh), l'énergie thermique des mers (10 000 TWh), l'énergie des gradients de salinité (2 000 TWh) et l'énergie des vagues (8 000 - 60 000 TWh).

L'énergie houlomotrice, ou énergie des vagues, représente donc une ressource particulièrement importante, malgré des estimations de son potentiel très différentes selon les sources. Ainsi, en 2012, le groupe d'experts international sur l'évolution du climat (GIEC) donne un chiffre d'environ 29 500 TWh par an, en considérant toutes les zones présentant une densité d'énergie de la houle supérieure à 5 kW/m. Cependant, en 2007, le GIEC [4] estimait le potentiel d'énergie de houle exploitable à seulement 146 TWh par an, en supposant que les systèmes houlomoteurs ne seraient installés que sur 2% des 800 000 km de côte du monde pour lesquels la densité d'énergie dépassait 30kW/m. D'autres estimations situent le potentiel de l'énergie des vagues exploitable entre 2 000 et 4 000 TWh par an ([10],[14]).

Il est clair que ce potentiel exploitable dépend des paramètres choisis : densité d'énergie minimum, bathymétrie minimum, éloignement des côtes, etc. et donc des technologies développées. A l'opposé de l'énergie marémotrice et des courants de marée pour laquelle les sites potentiels d'exploitation sont très localisés, le potentiel d'énergie des vagues est beaucoup plus largement réparti sur la surface des océans. Il est cependant possible de déterminer les zones bénéficiant des plus grandes densités énergétiques. L'énergie des vagues provient en effet de l'interaction du vent avec la surface des océans et de l'attraction lunaire, tandis que leurs propagation dépend des changements locaux de bathymétrie. Ainsi les grandes latitudes présentent un potentiel houlomoteur particulièrement important, comme le montre la figure 1.1.

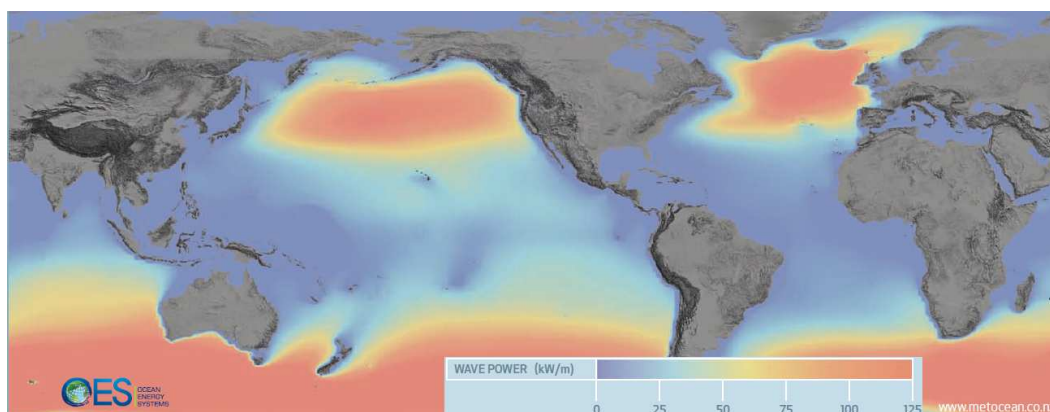


FIGURE 1.1 – Potentiel énergétique des vagues

## 1.2 Systèmes houlomoteurs

Privilégier ces zones pour installer des parcs expose ainsi les machines à des houles de grandes longueurs d’onde mais surtout de grandes amplitudes. Les concepteurs de technologies récupératrices d’énergie des vagues doivent alors composer avec ces contraintes supplémentaires, dans un milieu marin déjà très hostile (salinité, corrosion, etc.).

Les développements de tels systèmes sont relativement anciens (premier brevet en 1799 [39]) mais ont toujours été fortement dépendants du contexte énergétique. Ainsi le choc pétrolier de 1973, et plus récemment la prise de conscience du changement climatique, ont été fondamentaux dans la relance de l’intérêt des énergies alternatives.

Depuis, plus d’une centaine de technologies a vu le jour [1] : très peu sont actuellement opérationnelles et aucune n’a atteint un stade commercial. Elles peuvent être catégorisées en plusieurs classes : systèmes à déferlement, à colonne d’eau oscillante, à mouvements oscillants (de pilonnement ou de tangage), à membrane déformable, etc. Parmi ces classes, on peut distinguer à nouveau entre systèmes flottants ou fixes, puis selon le type de convertisseur d’énergie (*Power Take-Off* PTO) : électrique (générateur électrique, piezo-électrique), hydraulique (générateur hydro-électrique, turbines), etc. Certaines de ces classes présentent plusieurs générations de technologies. C’est le cas par exemple des systèmes à mouvements oscillants flottants, pour lesquels la première génération ne prend en compte qu’un seul degré de liberté du corps, tandis que les générations suivantes permettent d’extraire de l’énergie de mouvements plus complexes.

Cette multiplicité de technologies a donné lieu à différents classements, selon les auteurs. Il est possible par exemple de citer celui de Falcão [14], visible dans la figure 1.2 Ces classements sont mis à jour régulièrement depuis le début des années 80, en prenant en compte les nouvelles technologies développées et en laissant de côté celles abandonnées. À ces occasions, les récupérateurs sont passés en revue, classés et comparés, au travers d’études aboutissant à des publications sous divers formats : livres, articles de journaux, conférences, etc. Il est possible de citer notamment les livres de Mc Cormick [35], Shaw [41], Ross [39] et Cruz [10] et les articles [15] [8] [14], pour de plus courtes références.

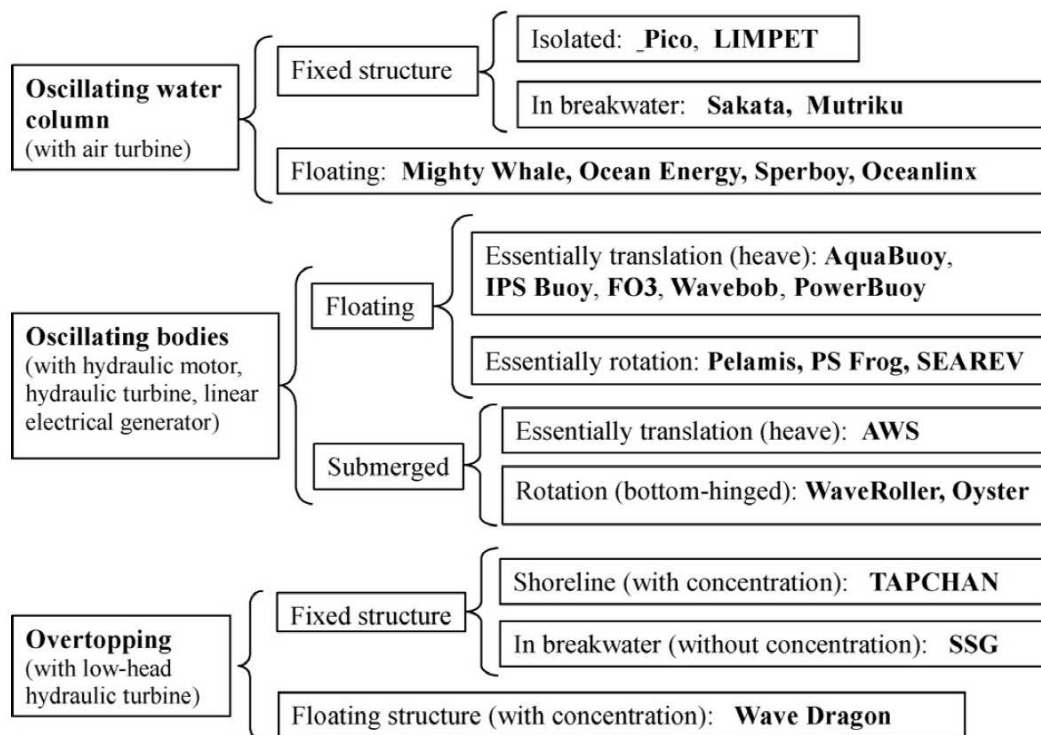


FIGURE 1.2 – Classement des technologies selon Falcão, dans [14]

La majorité de ces technologies est actuellement à un stade de développement peu avancé, nécessitant de nombreuses simulations numériques et essais en bassin, pour valider les choix de conception. Ces deux approches sont complémentaires : la validation des modèles numériques et expérimentaux est effectuée en comparant les résultats des deux approches. Les campagnes d’essais sont cependant bien plus coûteuses et plus longues à réaliser que des simulations numériques. Ces dernières sont donc destinées à limiter les campagnes d’essais en bassin, ou en conditions réelles, au minimum. Elles interviennent ainsi plus tôt dans le processus de conception, afin d’optimiser les paramètres physiques. Les essais viennent ensuite valider les choix de conception (géométrie, PTO, ancrage, etc.), mais également le modèle numérique. Ils peuvent alors mettre à jour des défauts de celui-ci, principalement des phénomènes non-linéaires non pris en compte. Dans ce cas, une itération entre simulation numérique et essais est possible afin de pallier aux défauts du modèle numérique. Ce processus peut néanmoins être long et coûteux.

### 1.3 Outils de simulation numérique

Différentes classes d’outils de simulation numériques existent, pour l’étude et la conception des systèmes houlomoteurs. Chacune présente des avantages et des inconvénients qui définissent alors leur domaine d’application. Li et Yu [31] ont réalisé une

synthèse des méthodes numériques disponibles pour l'étude des systèmes dits *Point Absorber*.

Les méthodes basées sur des développements analytiques donnent un ordre d'idée pour une première analyse qualitative. Ils nécessitent en effet des approximations grossières, de la géométrie des corps et des phénomènes simulés.

Les outils basés sur des méthodes aux éléments frontières dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée sont usuellement utilisés pour la conception de systèmes présentant des problématiques totalement différentes : navires avec vitesse d'avance, plateformes flottantes ou ancrées, soumis à de faibles réponses en mouvement. Les domaines de validité de ces codes sont ainsi restreints à des mouvements de faibles amplitudes autour de positions moyennes. Un amortissement visqueux, sélectionné dans une base de données, est ajouté pour la prise en compte des effets visqueux du fluide sur le corps, absents dans la théorie potentielle. L'avantage de ces codes est alors de présenter des temps de calcul très faibles.

Au contraire, l'efficacité des systèmes houlomoteurs est dépendante de la réponse en mouvement [15] : de grandes amplitudes de mouvement et des vitesses importantes induisent plus d'énergie récupérée. Les fréquences propres des technologies doivent alors être choisies de manière à correspondre aux fréquences de la houle. La théorie potentielle linéaire peut donner une bonne approximation des fréquences propres à choisir (ie les dimensions du système à déterminer pour obtenir ladite fréquence). Cependant son domaine de validité n'étant plus respecté, les résultats obtenus avec ce modèle ne correspondent souvent pas à la réalité physique. La figure 1.3, issue de Durand 2007 [13], met ainsi clairement en avant la mauvaise prédiction énergétique du système houlomoteur pour de grandes amplitudes de houle, obtenue avec un modèle linéaire.

	$T_p = 6s$	$T_p = 7s$	$T_p = 8s$	$T_p = 9s$	$T_p = 10s$
$H_s = 0.5$ m	86%	89%	97%	91%	
$H_s = 1$ m	83%	87%	98%	91%	95%
$H_s = 2$ m	66%	69%	82%	81%	87%
$H_s = 3$ m		42%	47%	48%	59%
$H_s = 5$ m					30%

FIGURE 1.3 – Rapport des puissances produites par le système houlomoteur, mesurées lors d'essais en houle irrégulière dans le bassin de génie océanique de l'École Centrale de Nantes, et prédites par le modèle "Wave to Wire".

Les outils CFD standards permettent de traiter des problèmes de corps en grands



mouvements, en prenant intrinsèquement en compte les effets visqueux du fluide sur le corps. Les temps de calcul associés à ces outils sont cependant encore beaucoup trop longs pour réaliser des simulations en des temps raisonnables. Les outils les plus rapides présentent ainsi des temps de calcul de l'ordre de plusieurs heures par période de houle [33][5]. Dans le cas d'étude de récupération d'énergie de la houle, la réponse des machines à la houle sera recherchée sur des durées physique de l'ordre de grandeur de l'heure. De plus, ces codes sont basés sur des schémas numériques dispersifs qui ne permettent pas la modélisation de phénomènes non amortis tels que la propagation de la houle sur de longues durées de simulation [34]. La méthode SWENSE [33] a été développée au sein du LHEEA pour pallier à ce défaut. Basée sur une décomposition fonctionnelle du champ de houle en composantes incidentes et de perturbation, elle permet alors de ne résoudre le problème que sur ces dernières, en imposant la propagation de la houle incidente dans le domaine fluide. Cette méthode permet de réduire les temps de calcul mais pas encore suffisamment pour pouvoir être appliquée sur de longues périodes de simulations. Les outils CFD sont alors plus généralement destinés à des études de survivabilité ou à la modélisation de phénomènes hautement non-linéaires, réalisées sur des temps de simulations courts.

Les outils potentiels complètement non-linéaires, en domaine temporel, réalisent la jonction entre ces deux classes d'outils. Couplés à un coefficient d'amortissement visqueux, sélectionné de la même manière qu'en théorie potentielle linéarisée, ils permettent également la bonne modélisation de corps en grands mouvements, même si de manière moins précise que les codes CFD. Ils présentent cependant des temps de calcul bien trop importants.

Nombre d'éléments quadrangulaires	$N = 2170$	$N = 6192$
Pilonnement forcé	11h 31min	4j 22h 19min
Pilonnement libre	25h 12min	10j 10h 05min

TABLE 1.1 – Comparaison des temps CPU requis pour des simulations 3D, pour une sphère immergé, oscillant en mouvement libre ou forcé, en fonction du nombre d'éléments sur les frontière du domaine,  $N$

Le tableau 1.1, issu de la thèse de Guerber [20], donne un aperçu des temps de calcul donnés par le code potentiel complètement non-linéaire, pour 10s de simulation d'une sphère en mouvement de pilonnement de période 1s. L'objectif recherché serait d'obtenir des simulations pour lesquelles le temps de calcul est inférieur ou égal au temps réel du phénomène simulé.

De plus, de nombreuses problématiques liées à la prise en compte de ces non-linéarités sont encore à l'heure actuelle difficiles à traiter. Tanizawa [44] a exposé un état de l'art, dans les années 2000, de l'avancement des codes potentiels non-linéaires et de ces problématiques. Celles-ci peuvent être cependant retrouvées dans la thèse de Guerber, plus récente. La principale problématique provient de la non-linéarité de surface libre. La

position exacte de la surface libre est considérée pour la résolution des conditions de surface libre. Cependant celle-ci fait partie des inconnues à résoudre. Cela impacte alors directement la stabilité et la précision de la résolution du problème aux limites. De plus il est nécessaire de propager la houle que l'on souhaite soumettre au corps, via le code. La propagation de celle-ci est ainsi affectée par la précision du code, mais génère en plus un transport de la surface libre, donc du domaine de calcul. La recherche de l'intersection de la surface libre et du corps flottant est de même rendu plus complexe dans ce cas.

## 1.4 Enjeux

L'objectif de cette thèse est alors de développer un outil présentant un compromis entre les méthodes potentielles linéarisées et complètement non-linéaires, afin d'obtenir une solution précise et rapide pour la simulation de système en grands mouvements.

Un premier travail de recherche a été entrepris sur ce sujet dès 2003 au LHEEA avec la thèse de J.C. Gilloteaux [18]. Celle-ci a eu pour objectif de jeter les bases d'un outil de simulation mieux adapté à l'étude du système houlomoteur SEAREV, et basé sur une approche *Body-Exact*. Dans cette approche, les efforts hydrostatiques et de Froude-Krylov sont considérés comme prédominants, et sont calculés sur la surface mouillée exacte du flotteur. Les résultats donnés par cet outil ont été très encourageants comparés à des résultats expérimentaux, permettant en particulier de capturer des phénomènes hautement non linéaires, tel que le roulis paramétrique. Cependant, ce modèle est encore largement perfectible au niveau de la précision des résultats obtenus [2]. Plus fondamentalement, la formulation du problème sur laquelle elle repose est intrinsèquement inconsistante.

### 1.4.1 Création et développements de l'approximation *Weak-Scatterer*

L'approche *Weak-Scatterer* [36] sur laquelle se base notre code constitue une bonne alternative. Bien que la théorie soit assez ancienne, 1992, cette méthode a fait l'objet de peu de développements. Ceux-ci ont donné lieu à des versions de codes BEM instationnaires : Lin en 1994 dans LAMP4 [32], Huang en 1997 dans SWAN4[23], Kim en 2009 dans WISH3 [27]. Ces différents codes sont cependant tous dédiés au domaine naval, c'est à dire à la modélisation d'un navire avec vitesse d'avance. Le tableau 1.2 résume les différences fondamentales entre ces codes et celui présenté dans ce mémoire.

Les études réalisées avec ces trois codes, comparativement à du linéaire, mettent en évidence une prise en compte de non-linéarités globales, liées notamment à celles de surface libre et liées à la position exacte du corps. Cependant les objets de ces études sont des navires, considérés donc comme corps minces (*Slender Body*). Les perturbations générées sont effectivement négligeables devant les composantes de houle incidente. De même, les mouvements du corps obtenus sont relativement faibles.

On retrouve dans ces codes certaines limitations liées au suivi de l'intersection de la surface libre et du corps. À la différence des codes complètement non-linéaires, la position connue analytiquement de la surface libre, sur celle de la surface libre incidente, permet de simplifier le problème et surtout de supprimer les instabilités de surface libre, obtenues

	SWAN-4	LAMP-4	WISH	code présenté
Objet d'étude	Navire avec vitesse d'avance	Navire avec vitesse d'avance	Navire avec vitesse d'avance	WEC grands mouvements
Sources	Rankine	méthode mixte	Rankine	Rankine
Discrétisation	B-Splines Quadratiques	Panneaux Constants	B-Splines d'ordre élevé	Linéaire
Intégration Temporelle Surface Libre	Emplicite		Emplicite	Itératif
Intégration Temporelle Corps	Prédicteur Correcteur	Itératif	Itératif	Itératif

TABLE 1.2 – Comparaison des codes WS existants

avec les codes non-linéaires.

Certaines applications de l'approximation *Weak-Scatterer* ont été réalisées pour l'étude de systèmes houlomoteurs spécifiques. On peut citer notamment Bretl en 2009 [7] qui a étudié l'un d'eux, dont l'extraction est basé sur un pendule plan, actionné en rotation par les mouvements de roulis et tangage. Aucun code basé sur cette approximation n'a cependant été conçu pour l'étude de systèmes houlomoteurs quelconque.

#### 1.4.2 Principe de l'approximation *Weak-Scatterer*

Dans cette approche, une décomposition est effectuée entre champs incident et perturbé avec une approximation de perturbation faible devant les composantes incidentes. Il en résulte une formulation des conditions de surface libre linéarisée par rapport à la déformée incidente de surface libre, et non par rapport au niveau d'eau moyen. Cependant, aucune hypothèse n'est faite sur le champ incident et sur le mouvement du corps. La condition sur le corps est ainsi réalisée sur sa position exacte, tandis que la position de la surface libre est celle de l'onde incidente, connue analytiquement à chaque instant.

Un avantage secondaire mais non négligeable de cette méthode est la meilleure gestion de la houle incidente. Sans cette décomposition, la houle incidente est générée sur les bords du domaine et se propage dans le domaine fluide à l'aide des équations de surface libre. Elle est ainsi soumise, comme la perturbation créée par le corps, à la précision du solveur fluide.

Dans le cas de l'approche *Weak-Scatterer*, la houle incidente est imposée analytiquement dans tout le domaine fluide. Elle est donc définie analytiquement à tout moment et en tout point du domaine et sa propagation ne dépend pas du solveur fluide. Il est de plus possible d'imposer le modèle de houle voulu, linéaire, non-linéaire voire un modèle spectral d'ordre élevé (HOS).

## 1.5 Contenu du mémoire

Bien que ce mémoire reflète la progression chronologique des développements du code *Weak-Scatterer* présenté, il ne reflète pas tout à fait la quantité importante de temps dédiée aux développements et validation de chaque module, en comparaison du peu de temps restant pour l'application à l'étude d'un système houlomoteur.

La première partie de cette thèse a ainsi donné lieu à une analyse bibliographique, comme tout début de thèse. Mais elle a surtout été l'occasion des développements analytiques des équations intégrales pour une discrétisation linéaire, sur lesquels est basée la résolution du problème aux limites. Ceux-ci ont fait l'objet d'une présentation lors des Journées de l'Hydrodynamique en 2012 [29]. Tandis que l'analyse bibliographique a été succinctement présentée dans l'introduction, ces développements ne figurent que dans le troisième chapitre.

La mise en équation est en effet présentée au préalable pour une meilleure compréhension. Chacune de ces équations ont été développées, au fur et à mesure de la thèse, pour chaque module concerné. Les équations de la méthode potentielle, des équations intégrales à résoudre tout d'abord, pour le calcul des coefficients d'influence. Les conditions du problème aux limites ensuite, en accord avec l'approximation *Weak-Scatterer*, pour l'avance en temps de la solution. Enfin les équations de mouvements et d'effort du couplage fluide-structure, nécessitant notamment le développement de la condition sur le corps du problème aux limites sur la dérivées du potentiel.

Les implémentations numériques de chaque module, ainsi que leurs validations, représentent le plus gros chapitre de ce mémoire, comme elles ont représentées la plus grosse charge de travail de cette thèse. Seuls les modules les plus importants, représentant le cœur du code, figurent dans ce chapitre 4. De même, seules les validations les plus pertinentes sont présentées. Parmi ces modules peuvent être retrouvés ceux liés au calcul des coefficients d'influence et de résolution du problème aux limites, ainsi que celui de calcul des dérivées locales, celui de l'avance temporelle et finalement celui permettant la détermination des efforts sur le corps et de ses mouvements en résultant.

Ensuite, le chapitre 5 illustre la dernière partie de la thèse portant sur l'application du code à l'étude d'un système houlomoteur, en accord avec le domaine d'application de celui-ci pour l'avancement présent. Le code de calcul, en effet démarré de la feuille blanche au début de la thèse, a abouti à un outil fonctionnel ayant pour domaine de validité un corps complètement immergé en mouvement libre soumis à une houle régulière. Le système houlomoteur choisi est alors de type CETO, répondant à tous ces critères. Une comparaison avec des résultats issus d'un code potentiel linéaire, Nemoh, a permis de vérifier que le code *Weak-Scatterer* donne des résultats comparables en conditions linéaires. Une étude en conditions non-linéaires a ensuite été menée de manière à mettre en évidence les non-linéarités de surface libre et liées aux grands mouvements du corps.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à la conclusion de cette thèse. Les travaux et principaux résultats issus de celle-ci y sont résumés. De nombreuses pistes de développements sont également envisagées.

Une annexe présente les développements de la condition limites sur le corps pour le

problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel. Les expressions données par Tanizawa et Cointe sont vérifiées et comparées. Une expression unifiée, équivalente aux deux précédentes mais légèrement simplifiée, est ensuite proposée.

# Chapitre 2

## Mise en équations

### 2.1 Hypothèses et approximations

#### 2.1.1 Hypothèses

Les hypothèses utilisées dans le modèle mathématique puis dans le code de calcul et sur lesquelles est basée la théorie présentée dans cette thèse sont les suivantes.

- (H1) Fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  constante,
- (H2) Fluide non visqueux,
- (H3) Écoulement irrotationnel,
- (H4) Ondes incidentes de surface libre non déferlantes,
- (H5) Corps rigides, non déformables et homogènes,

L'hypothèse (H1) implique que le fluide est incompressible tandis que l'hypothèse (H2) néglige les effets visqueux internes au fluide mais également ceux de l'interaction fluide-structure. L'hypothèse (H4) permet d'exprimer la position de la surface libre à l'aide de son élévation  $\eta(x, y)$ . Cette fonction est univoque et ne permet donc pas, par définition, de modéliser le déferlement.

Deux conditions supplémentaires sont considérées : corps en mouvement de translation uniquement et corps complètement immergé. Ces conditions sont posées pour définir le domaine de définition des développements du code souhaités durant la thèse. Le passage à la rotation nécessite l'introduction d'un système de coordonnées locales, faisant intervenir les angles d'Euler, de Cardan ou les quaternions en fonction de la méthode utilisée. De même, la prise en compte de l'intersection de la surface libre et du corps requiert des méthodes appropriées de remaillage, qui font l'objet d'une thèse complémentaire.

Plusieurs approximations sont également utilisées et sont explicités au long de ce manuscrit.

- (A1) Approximation Weak-Scatterer : composantes de perturbation faibles devant les composantes incidentes,
- (A2) Approximation linéaire des grandeurs physiques pour le calcul analytique des coefficients d'influence,

(A3) Approximation par b-splines des grandeurs physiques pour le calcul des dérivées locales.

### 2.1.2 Principe et approximation de la méthode *Weak-Scatterer*

L'approche *Weak-Scatterer* a été introduite par Pawlowski [36] au début des années 90, dans la suite logique de l'approche *Body-Exact*. Cette dernière est également partiellement non-linéaire, mais se focalise uniquement sur le corps. Elle prend en effet en compte l'évolution du mouvement du corps dans le calcul des efforts et de la résolution du problème aux limites. Les non-linéarités liées au corps sont donc bien traitées, à l'opposé de celles liées à la variation de position de la surface libre. Les équations de surface libre sont toujours linéarisées sur sa position moyenne  $z = 0$ .

L'approximation *Weak Scatterer* ajoute à l'approche *Body-Exact* le traitement partiel des non-linéarités de surface libre. Elle suppose que les perturbations de l'écoulement dues au corps sont petites devant les composantes du champ incident. Les équations de surface libre sont alors linéarisées sur la position de la déformée de surface libre incidente, pour aboutir à une approche faiblement non-linéaire.

La surface mouillée du corps, sur laquelle sont intégrés les efforts de pression, est définie par la position exacte du corps et celle de la déformée de surface libre incidente. Une approximation est donc également faite sur la surface mouillée du corps.

## 2.2 Problème aux limites pour le fluide

### 2.2.1 Méthode potentielle

L'hypothèse d'écoulement irrotationnel (H3) permet d'introduire un potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{\nabla}\phi \quad \text{dans le domaine fluide} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \\ &= V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\end{aligned}\tag{2.1}$$

L'hypothèse de fluide incompressible (H1) implique que la divergence de la vitesse du fluide est nulle  $div(\vec{V}) = div(\vec{\nabla}\phi) = 0$ . Le potentiel  $\phi$  satisfait alors l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide.

$$\nabla^2\phi = 0\tag{2.2}$$

### 2.2.2 Seconde identité de Green

La Seconde Identité de Green permet de transformer un problème volumique en un problème équivalent exprimé sur les frontières du domaine. Elle s'énonce ainsi : pour 2

champs scalaires  $u$  et  $w$  de classe  $C^2$  dans le domaine  $\mathcal{D}$ , délimité par la frontière  $\mathcal{S}$ .

$$\iiint_{\mathcal{D}} [w\Delta u - u\Delta w] dv = \iint_{\mathcal{S}} \left[ w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds \quad (2.3)$$

Les champs scalaires  $u$  et  $w$  sont choisis comme

$$\begin{cases} u &= G(M, P) = \frac{1}{MP} \\ w &= \phi(P) \end{cases} \quad (2.4)$$

La fonction  $G$  est une fonction de Green, dénommée Source de Rankine, et correspond au potentiel engendré par une source seule placée au point  $M$ .

La Seconde Identité de Green pour ces champs scalaires est alors

$$\iiint_{\mathcal{D}} [\phi(P)\Delta G(M, P) - G(M, P)\Delta(P)] dv = \iint_{\mathcal{S}} \left[ \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} - G(M, P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n} \right] ds \quad (2.5)$$

Le laplacien du potentiel des vitesses est nul dans tout le domaine, de même que celui de la fonction de Green, excepté en  $P = M$ . Cette intégrale a cependant une solution connue [21] (Annexe 2, III.2).

$$\iiint_{\mathcal{D}} \Delta G(M, P) dV = \Omega(M) \quad (2.6)$$

Avec  $\Omega(M)$ , l'angle solide sous lequel la surface fermée  $\mathcal{S}$  est vue depuis  $M$ . Il est possible de prouver, en utilisant une répartition de sources seules uniforme dans tout le domaine, que l'angle solide peut être explicité comme

$$\Omega(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} ds \quad (2.7)$$

L'identité précédente 2.7 peut être généralisée pour toute fonction  $f(P, t)$

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(P, t) \Delta G(M, P) dv = \Omega(M) f(M, t) \quad (2.8)$$

L'équation 2.5 devient alors

$$\Omega(M)\phi(M) + \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n} G(M, P) ds - \iint_{\mathcal{S}} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} ds = 0 \quad (2.9)$$

Les équations intégrales à déterminer sont ainsi

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) ds - \iint_{\mathcal{S}} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} ds \quad (2.10)$$

La connaissance des quantités sur une frontière est donnée par la condition limite associée à cette frontière. Les conditions limites peuvent être de deux types. Si la condition porte sur une grandeur physique, elle sera de type Dirichlet, tandis que si elle porte sur sa dérivée, elle sera de type Neumann. Le problème aux limites est du même type que celui de la condition limite. Dans le cas où les deux types de condition sont imposés, le problème aux limites est dit mixte. C'est le cas ici.



### 2.2.3 Condition limite sur les surfaces matérielles

La condition sur les Surfaces Matérielles est de type Neumann et repose sur l'hypothèse d'imperméabilité de ces surfaces. Cette dernière nous permet en effet d'affirmer que le fluide ne pénètre pas les surfaces. La vitesse normale du fluide en un point du corps est donc égale à la vitesse normale du corps.

$$\vec{V}_{corps} \cdot \vec{n} = \vec{V}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (2.11)$$

### 2.2.4 Conditions limites sur la surface libre

Deux conditions limites de type Dirichlet coexistent sur la surface libre : la condition cinématique de surface libre (CCSL) et la condition dynamique de surface libre (CDSL). Ces équations sont utilisées pour l'avance en temps du potentiel et de l'élévation de surface libre au cours de la simulation temporelle.

#### Condition cinématique de surface libre

Cette équation traduit le comportement cinématique de l'interface air/fluide. L'équation instantanée décrivant la position de la surface libre peut être écrite comme :

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z = 0 \quad (2.12)$$

avec  $\eta(x, y, t)$  la déformée de la surface libre aux coordonnées géométriques  $(x, y)$  et au temps  $t$ , mesurée depuis  $z = 0$ . Cette description monovaluée de la surface libre empêche la modélisation du déferlement, mais simplifie le suivi de la surface libre.

Cette équation est valable à tout moment : une particule fluide sur la surface libre à un instant le sera également à l'instant suivant. Cela se traduit alors par

$$\frac{D\mathcal{F}(M, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}(\mathcal{F}) = 0 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.13)$$

Valable pour un point  $M$  de la Surface Libre, de vitesse  $\vec{U}$ . Cette vitesse est la vitesse de l'interface et non du fluide. Elles peuvent cependant être exprimées l'une en fonction de l'autre à l'aide de la condition de nullité du flux à travers la surface libre.

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \quad (2.14)$$

Or le gradient de la fonction  $\mathcal{F}$  est porté par la normale à la surface libre :

$$\vec{\nabla}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}(\mathcal{F}) = 0 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (2.16)$$

### Condition dynamique de surface libre

La Condition Dynamique de Surface Libre traduit la continuité de la pression au travers de la surface libre. Elle s'exprime via la relation de Bernoulli :

$$\frac{p_{atm}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + gz \quad \text{pour } z = \eta(x, y, t) \quad (2.17)$$

La pression atmosphérique est choisie comme référence :  $p_{atm} = p_{ref} = 0$ . Soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi \quad \text{pour } z = \eta(x, y, t) \quad (2.18)$$

### Approximation *Weak-Scatterer* et suivi de la surface libre

Ces deux équations 2.16 et 2.18 sont écrites sur la position exacte de la surface libre  $z = \eta(x, y, t)$  qui fait partie des inconnues. Cela aboutit donc à un problème totalement couplé difficile à résoudre. L'approximation *Weak-Scatterer* (A1) précédemment introduite conduit à linéariser ces équations sur la position de la déformée de surface libre incidente, au travers d'une décomposition du champ total, solution du problème, en composante incidente et de perturbation.

Cela signifie que le maillage de la surface libre est situé sur la position de la déformée de surface libre incidente. Ainsi pour mettre à jour la composante de perturbation du potentiel ou de l'élévation à partir des équations de surface libre, il faut suivre les particules présentes sur la surface libre incidente.

$$\eta_0(x, y, t + dt) = \eta_0(x, y, t) + \frac{\partial \eta_0}{\partial t} dt \quad (2.19)$$

Une particule sur la surface libre incidente de coordonnées  $(x, y, z = \eta(x, y, t))$  à l'instant  $t$  se déplace alors verticalement jusqu'aux coordonnées  $(x, y, z = \eta(x, y, t + dt))$  selon une vitesse  $\vec{v} = \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \vec{z}$ .

Une dérivée particulaire associée à cette vitesse est définie, de manière à suivre les nœuds sur la surface libre dans leur mouvement.

$$\frac{D_{0z}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.20)$$

Il est à noter que l'expression de  $\frac{\partial \eta_0}{\partial t}$  est donnée par l'équation cinématique de surface libre qui dépend du type de houle imposée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z} \quad , \text{ pour une houle linéaire : } \quad z = 0 \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \eta_0 \quad , \text{ pour une houle non-linéaire : } \quad z = \eta_0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

**Condition cinématique de surface libre modifiée**

La déformée de surface libre  $\eta(x, y, t)$  ne dépendant pas de  $z$ ,  $\vec{\nabla}\eta = \left[ \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, 0 \right]$ . Il est aisé de montrer que

$$\frac{D_{0z}\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (2.22)$$

Ainsi en reprenant l'équation cinématique (2.16)

$$\frac{\partial(\eta - z)}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}(\eta - z) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\eta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

D'où

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\eta \quad (2.24)$$

Cette équation est écrite pour la position exacte de la surface libre  $z = \eta$ . Dans le cadre de l'approximation Weak-Scatterer, il est nécessaire de transposer cette équation sur la position de la surface libre incidente. Pour cela, la décomposition en composantes incidente et de perturbation est introduite dans un premier temps

$$\frac{\partial\eta_p}{\partial t} = -\frac{\partial\eta_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_p + \phi_0) - \vec{\nabla}(\phi_p + \phi_0) \cdot \vec{\nabla}(\eta_p + \eta_0) \quad (2.25)$$

Un développement de Taylor sur la composante de perturbation  $\eta_p$  faible devant la composante incidente est réalisé. Les termes du second ordre des composantes de perturbation, négligeables, sont alors supprimés.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta_p}{\partial t} &= -\frac{\partial\eta_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_p + \phi_0) - \vec{\nabla}\phi_0 \cdot \vec{\nabla}\eta_0 - \vec{\nabla}\phi_p \cdot \vec{\nabla}\eta_0 - \vec{\nabla}\phi_0 \cdot \vec{\nabla}\eta_p \\ &\quad + \eta_p \left( \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2} - \frac{\partial\vec{\nabla}\phi_0}{\partial z} \cdot \vec{\nabla}\eta_0 \right), \text{ sur } z = \eta_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Condition dynamique de surface libre modifiée**

La condition dynamique (2.18) peut être écrite en utilisant la dérivée particulière introduite précédemment.

$$\begin{aligned} \frac{D_{0z}\phi}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\eta_0}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= -g\eta - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial\eta_0}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial z}, \text{ sur } z = \eta \end{aligned} \quad (2.27)$$

La même décomposition est introduite

$$\begin{aligned} \frac{D_{0z}\phi_p}{Dt} &= -\frac{D_{0z}\phi_0}{Dt} - g(\eta_p + \eta_0) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\phi_p + \phi_0) \cdot \vec{\nabla}(\phi_p + \phi_0) + \frac{\partial\eta_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}(\phi_p + \phi_0) \\ &= -\frac{\partial\phi_0}{\partial t} - g(\eta_p + \eta_0) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\phi_p + \phi_0) \cdot \vec{\nabla}(\phi_p + \phi_0) + \frac{\partial\eta_0}{\partial t} \frac{\partial\phi_p}{\partial z}, \text{ sur } z = \eta \end{aligned}$$

Il reste alors à transporter cette équation, écrite sur la position exacte de la surface libre, sur la position de la houle incidente, via le développement de Taylor sur  $\eta_p$  et supprimer les termes du second ordre des composantes de perturbation.

$$\begin{aligned} \frac{D_{0z}\phi_p}{Dt} = & -\frac{\partial\phi_0}{\partial t} - g \cdot (\eta_0 + \eta_p) - \frac{1}{2} \vec{\nabla}\phi_0 \cdot \vec{\nabla}\phi_0 - \vec{\nabla}\phi_p \cdot \vec{\nabla}\phi_0 + \frac{\partial\eta_0}{\partial t} \frac{\partial\phi_p}{\partial z} \\ & - \eta_p \left( \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z \partial t} + \frac{\partial\vec{\nabla}\phi_0}{\partial z} \cdot \vec{\nabla}\phi_0 \right), \text{ sur } z = \eta_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.3 Couplage fluide-structure

### 2.3.1 Équation de mouvement

La détermination des mouvements d'un corps libre est réalisée via l'équation de mouvement écrite pour les 3 degrés de liberté en translation et 3 degrés de liberté en rotation.

$$\overline{\overline{M}} \cdot \ddot{\vec{x}}_B = \vec{F}_{Hydro} + \overline{\overline{M}} \cdot \vec{g} + \vec{F}_{ext} \quad (2.29)$$

$\ddot{\vec{x}}_B$  est le vecteur accélération en translation du corps, exprimé en son centre de gravité.  $\overline{\overline{M}}$  est la matrice masse du corps.  $\vec{F}_{ext}$  est la résultante des efforts extérieurs s'appliquant sur le corps (ancrage, amortissement visqueux, PTO, etc).

Les vecteurs position, vitesse et accélération,  $(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$  d'un point du corps peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de gravité du corps et des coordonnées du point considéré dans le repère local centré sur le centre de gravité du corps.

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}_B + \vec{r} \\ \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_B + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \\ \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_B + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \end{cases} \quad (2.30)$$

### 2.3.2 Efforts hydrodynamiques

L'effort hydrodynamique est défini comme l'intégration sur la surface du corps de la pression hydrodynamique

$$\vec{F}_{Hydro} = - \iint_{S_b} p \vec{n} ds \quad (2.31)$$

La pression hydrodynamique locale peut être calculée par la relation de Bernoulli.

$$p - p_{atm} = \rho \left( -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi - g \cdot z \right) \quad (2.32)$$

$p_{atm}$  correspond à la pression atmosphérique et peut être choisie comme la pression de référence  $p_{atm} = p_{ref} = 0$ . On peut également isoler le terme de pression hydrostatique :  $p_s = -\rho g z$ .

L'évolution du potentiel sur le corps est connue puisque c'est la solution du problème aux limites permettant de calculer la dérivée normale sur la surface libre. Le gradient surfacique du potentiel peut être déterminé pour chaque facette à partir du paramétrage isométrique ou via une approximation par B-Splines du potentiel. La dérivée normale du potentiel est connue, par la condition sur le corps.

### 2.3.3 Détermination de la dérivée temporelle du potentiel

La dérivée temporelle du potentiel n'est *a priori* pas connue lors de la simulation temporelle. Elle peut être déterminée de deux manières, selon que le mouvement du corps est imposé ou laissé libre.

En effet, si le corps est en mouvement imposé, la détermination des efforts de pression n'est pas nécessaire à l'avance en temps de la solution. La dérivée temporelle peut alors être calculée par différences finies à la fin de la simulation. Les valeurs du potentiel étant données pour un corps en mouvement, la dérivée calculée par cette méthode est la dérivée lagrangienne associée à la vitesse des nœuds du corps.

Si le corps est en mouvement libre, cette méthode ne fonctionne plus en raison du couplage fort entre dynamique du mouvement et effort. La seconde méthode est basée sur la résolution d'un problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel. En effet, si le potentiel est à laplacien nul, sa dérivée partielle par rapport au temps l'est également.

$$\Delta \phi = 0 \implies \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

Les conditions limites de ce problème sont similaires à celles pour le problème aux limites pour le potentiel. On retrouve une condition de Neumann sur la surface libre et une condition de Dirichlet sur les surfaces matérielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 & \text{dans tout le domaine fluide} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D_{0z}\phi}{Dt} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} & \text{sur la surface libre} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{n} \partial t} = \ddot{\vec{x}}_B \cdot \vec{n} + q & \text{sur un corps en mouvement de translation} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = 0 & \text{sur les frontières fixes} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$(\ddot{\vec{x}}_B, \ddot{\vec{\theta}}_B)$  sont les accélérations du corps en translation et rotation, le terme supplémentaire  $q$  permet de prendre en compte les effets d'advection du corps en mouvement. La condition de Neumann sur les surfaces matérielles ainsi que l'origine du terme  $q$  est

développée dans l'ANNEXE 1.

$$\begin{aligned}
q &= (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) \left( 2(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) \left( 2(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\
&+ \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1)}{R_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \right) + \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2)}{R_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \right) \\
&+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

## Chapitre 3

# Discrétisation et équations intégrales

La résolution du problème aux limites nécessite de calculer les deux équations intégrales posées dans le chapitre 2.2.2, rappelées ci-dessous

$$\iint_S \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P$$
$$\iint_S \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$$

Ces équations sont décomposées pour chaque élément de surface composant la frontière du domaine. La discrétisation, i.e. l'approximation de la variation des grandeurs  $\phi$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  sur les facettes, a été choisie linéaire. Cette discrétisation présente en effet un bon compromis précision/efficacité, en comparaison de celles à panneaux constants et d'ordre élevé. Ce choix est de plus consistant avec celui de la formulation *Weak-Scatterer*, compromis entre les approches linéaire et complètement non-linéaire.

La discrétisation à panneaux constants est utilisée dans Aquaplus et Nemoh. Les développements analytiques sont donc connus au sein du laboratoire. De précédents travaux sur une discrétisation d'ordre élevé ont également été menés au préalable. Celle-ci requiert l'utilisation de schémas numériques, pour la détermination des équations intégrales. Les temps de calcul associés à cette discrétisation ont cependant été trop importants (environ 24h par période de houle simulée).

Un important travail d'élargissement des développements analytiques des équations intégrales a ainsi été réalisée, au début de la thèse, afin de pouvoir passer de la discrétisation à panneaux constants à la discrétisation linéaire. En conservant un calcul analytique des équations intégrales, on s'assure de garder des temps de calcul raisonnables.

### 3.1 Discrétisation

La description de la géométrie est basée sur des éléments triangulaires. Les grandeurs physiques varient linéairement sur les facettes, en accord avec la discrétisation.

#### 3.1.1 Paramétrage

Le paramétrage suivant est défini pour chaque facette.

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{P}_1 + u.\overrightarrow{P_1P_2} + v.\overrightarrow{P_1P_3} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

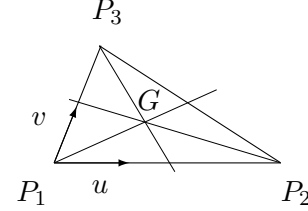


FIGURE 3.1 – Paramétrage

Cette description de la facette est isoparamétrique : la fonction paramétrique  $f$  décrit aussi bien la géométrie de la facette que les variations des grandeurs.

$$\begin{aligned}f(P) &= f(P_1) + u.(f(P_2) - f(P_1)) + v.(f(P_3) - f(P_1)) \\ &= (1 - u - v).f(P_1) + u.f(P_2) + v.f(P_3)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Le centre de gravité de l'élément est le point particulier de coordonnées  $(u, v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} \vec{G} &= \frac{1}{3}.\vec{P}_1 + \frac{1}{3}.\vec{P}_2 + \frac{1}{3}.\vec{P}_3 \\ f(G) &= \frac{1}{3}.f(P_1) + \frac{1}{3}.f(P_2) + \frac{1}{3}.f(P_3) \end{cases}\tag{3.2}$$

La fonction  $f$  variant linéairement, son gradient surfacique  $\vec{\nabla}_s f$  est constant sur la facette.  $f$  peut ainsi être exprimée, en un point  $P$  de la facette, à l'aide de celui-ci.

$$f(P) = f(G) + \vec{\nabla}_s f \cdot \overrightarrow{GP}\tag{3.3}$$

Le gradient surfacique diffère du gradient complet par la contribution nulle de la variation normale à l'élément.

$$\vec{\nabla}_s f = \vec{\nabla} f - \left(\vec{\nabla} f \cdot \vec{n}\right) \vec{n}\tag{3.4}$$

#### 3.1.2 Expression du gradient

Pour exprimer le gradient surfacique de  $f$ , il est nécessaire de déterminer les dérivées partielles de la fonction  $f$  selon les paramètres  $u$  et  $v$



$$f_{,u}(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial u} = f(P_2) - f(P_1) \quad \text{et} \quad f_{,v}(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial v} = f(P_3) - f(P_1) \quad (3.5)$$

ainsi que les dérivées partielles du paramétrage.

$$\overrightarrow{P_{,u}} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial u} = \overrightarrow{P_1 P_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_{,v}} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial v} = \overrightarrow{P_1 P_3} \quad (3.6)$$

Le tenseur métrique est alors défini comme

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 & \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} & \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

et son inverse

$$g = \mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 & -\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \\ -\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} & \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

avec  $\Delta = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 - (\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3})^2$

Le gradient de la fonction paramétrique est alors donnée par Bonnet [6]

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left( g_{11} \frac{\partial P}{\partial u} + g_{12} \frac{\partial P}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left( g_{21} \frac{\partial P}{\partial u} + g_{22} \frac{\partial P}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \vec{n} \quad (3.9)$$

Soit le gradient surfacique,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}_s f &= \frac{f(P_2) - f(P_1)}{\Delta} \cdot \left[ \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} - (\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \right] \\ &+ \frac{f(P_3) - f(P_1)}{\Delta} \cdot \left[ -(\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} + \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

On peut également l'exprimer de manière à isoler les valeurs de la fonction aux nœuds :

$$\overrightarrow{\nabla}_s f = \overline{\overline{\Sigma}} \cdot \begin{pmatrix} f(P_1) \\ f(P_2) \\ f(P_3) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{cases} \overline{\overline{\Sigma}} &= \frac{1}{\Delta} \cdot \left[ -(\vec{A} + \vec{B}) \quad \vec{A} \quad \vec{B} \right] \\ \vec{A} &= \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} - (\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \\ \vec{B} &= -(\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} + \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \cdot \overrightarrow{P_1 P_3} \end{cases}$$

### 3.2 Intégrale $I_\sigma(M, i) = \iint_{S_i} \sigma(P)G(M, P)dS$

L'intégrale  $I_\sigma(M, i)$  s'écrit pour chaque couple de point de contrôle  $M$  et de facette  $i$ ,  $\sigma$  faisant référence à la distribution de sources générant une vitesse normale  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ .

$$I_\sigma(M, i) = \iint_{S_i} \frac{\partial\phi(P)}{\partial n} G(M, P) dS \quad (3.12)$$

Le paramétrage donne la variation linéaire de  $\sigma$  pour un point  $P$  de l'élément  $i$ .

$$\sigma(P) = \sigma(G) + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \vec{GP} \quad (3.13)$$

Le centre de gravité  $G$  et le gradient surfacique  $\vec{\nabla}_s \sigma$  sont intrinsèques à l'élément  $i$  et devraient porter l'indice  $i$ . Pour plus de lisibilité, il a été choisi d'omettre cet indice pour ces grandeurs.

L'intégrale  $I_\sigma(M, i)$  peut alors s'écrire comme

$$\begin{aligned} I_\sigma(M, i) &= \sigma(G) \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \iint_{S_i} \frac{\vec{GP}}{MP} dS \\ &= \left( \sigma(G) + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \vec{GM} \right) \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \iint_{S_i} \frac{\vec{MP}}{MP} dS \\ &= \left( \sigma(G) + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \vec{GM} \right) \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS + \vec{\nabla}_s \sigma \cdot \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n} \wedge \vec{dl} \quad (3.14) \end{aligned}$$

La transformation de l'intégrale de surface en intégrale de contour est réalisée grâce à la formule de Kelvin.

$$\iint_S \vec{\nabla} f dS = \oint_C f \cdot \vec{n}_S \wedge \vec{dl} \quad (3.15)$$

avec

$$\frac{\vec{MP}}{MP} = \vec{\nabla}(MP) \quad (3.16)$$

En isolant les valeurs de  $\sigma$  aux nœuds à l'aide de l'équation 3.11, l'intégrale s'écrit alors comme

$$I_\sigma(M, i) = \left[ \left( \frac{1}{3} \vec{I} + \vec{GM} \cdot \vec{\Sigma} \right) \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS - \left( \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n} \wedge \vec{dl} \right) \cdot \vec{\Sigma} \right] \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

On pose pour la suite :

$$S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS \quad \text{et} \quad \vec{I}_\sigma = - \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n} \wedge \vec{dl}$$

### 3.2.1 Intégrale $S_\sigma = \iint_{\mathcal{S}_i} \frac{1}{MP} dS$

#### Cas régulier

Pour  $M \notin \mathcal{S}_i$ , l'intégrale  $S_\sigma$  possède une solution analytique donnée par P. Guevel [21].

$$S_\sigma = \sum_{k=1}^3 \frac{N_k^t}{2d_k} \log \left( \frac{N_k^1}{D_k^1} \right) - 2 |Z| \arctan \left( \frac{N_k^t}{D_k^t} \right) \quad (3.18)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_k = \|\overrightarrow{P_k M}\| \\ d_k = \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| \\ Z = \overrightarrow{GM} \cdot \vec{n} \\ N_k^1 = R_{k+1} + R_k + d_k \\ D_k^1 = R_{k+1} + R_k - d_k \\ N_k^t = 2\overrightarrow{P_k M} \cdot (\vec{n} \wedge \overrightarrow{P_k P_{k+1}}) \\ D_k^t = (R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2 |Z| \cdot (R_{k+1} + R_k) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Si le point de contrôle  $M$  est situé sur le sommet  $P_k$  de l'élément  $\mathcal{S}_i$ , une singularité apparaît alors.

$$M = P_k \Rightarrow (R_k, d_k, N_k^1, D_k^1, N_k^t, D_k^t) = (0, R_{k+1}, 2.R_{k+1}, 0, 0, 0) \quad (3.20)$$

#### Singularité

On suppose  $M = P_1$ . Toute solution déterminée dans ce cas précis vaudra également pour  $M = P_2$  ou  $M = P_3$ , en réordonnant les sommets.

Soit le paramétrage suivant de l'élément  $\mathcal{S}_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 P_3}) \\ \vec{j} = \overrightarrow{P_2 P_3} \\ \vec{h} = \vec{i} \wedge \vec{j} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

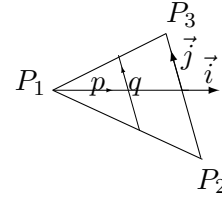


FIGURE 3.2 – Paramétrage

$$\overrightarrow{MP} = p\vec{i} + pq\vec{j} \quad (p, q) \in [0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (3.22)$$

ainsi que le changement de variables suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p' \cdot \sqrt{\frac{j^2}{\Delta}} \\ q = \frac{\sqrt{\Delta}}{j^2} \left( q' + \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{\sqrt{\Delta}} \right) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \Delta = \vec{i}^2 \cdot \vec{j}^2 - (\vec{i} \cdot \vec{j})^2 \quad (3.23)$$

Les bornes d'intégration deviennent alors :

$$(p', q') \in \left[0, \sqrt{\frac{\Delta}{j^2}}\right] \times [-a + b, a + b] \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2} \cdot \frac{j^2}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad b = \frac{(\vec{i} \cdot \vec{j})}{\sqrt{\Delta}} \quad (3.24)$$

La surface élémentaire  $dS$  se calcule par :

$$dS = \|\vec{h}\| \, pdpdq = \|\vec{h}\| \, p' \cdot \sqrt{\frac{j^2}{\Delta}} \cdot \sqrt{\frac{j^2}{\Delta}} \, dp' \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{j^2} \, dq' = \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{\Delta}} \, p' \, dp' \, dq' \quad (3.25)$$

La norme de  $MP$  au carré s'exprime en fonction de ce changement de variable par :

$$\begin{aligned} MP^2 &= (p\vec{i} + pq\vec{j})^2 = p^2 \cdot \vec{i}^2 + q^2 \cdot \vec{j}^2 + 2p^2 q \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} \\ &= p^2 \cdot (\vec{i}^2 + q^2 \cdot \vec{j}^2 + 2q \cdot \vec{i} \cdot \vec{j}) \\ &= p'^2 \frac{j^2}{\Delta} \cdot \left[ \vec{i}^2 + q'^2 \cdot \frac{\Delta}{j^4} \cdot \vec{j}^2 + \frac{(\vec{i} \cdot \vec{j})^2}{j^4} \cdot \vec{j}^2 - 2q' \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \vec{i} \cdot \vec{j}}{j^4} \cdot \vec{j}^2 + 2q' \frac{\Delta}{j^2} - 2 \frac{(\vec{i} \cdot \vec{j})^2}{j^2} \right] \\ &= p'^2 \frac{j^2}{\Delta} \cdot \left[ \vec{i}^2 + q'^2 \cdot \frac{\Delta}{j^2} - \frac{(\vec{i} \cdot \vec{j})^2}{j^2} \right] \\ &= p'^2 \frac{j^2}{\Delta} \cdot \left[ \frac{\vec{i}^2 \cdot \vec{j}^2 - (\vec{i} \cdot \vec{j})^2}{j^2} + q'^2 \cdot \frac{\Delta}{j^2} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Soit

$$MP^2 = p'^2 \cdot (1 + q'^2) \quad (3.27)$$

L'intégrale  $S_\sigma$  s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \iint_{p' \times q'} \frac{1}{p' \cdot \sqrt{1 + q'^2}} \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{\Delta}} \, p' \, dp' \, dq' \\ &= \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{\Delta}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta}{j^2}} \cdot \int_{q'} \frac{1}{\sqrt{1 + q'^2}} \, dq' \\ &= \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{j^2}} \cdot \int_{q'} \frac{1}{\sqrt{1 + q'^2}} \, dq' \\ S_\sigma &= \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{j^2}} \cdot [\operatorname{asinh}(a + b) - \operatorname{asinh}(-a + b)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ou sous une autre forme

$$S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} \, dS_P = \frac{\|\vec{h}\|}{\sqrt{j^2}} \cdot \ln \left( \frac{a + b + \sqrt{1 + (a + b)^2}}{-a + b + \sqrt{1 + (-a + b)^2}} \right) \quad (3.29)$$

### 3.2.2 Intégrale $\vec{I}_\sigma = \oint_{C_i} MP \cdot \vec{n}_P \wedge d\vec{l}_P$

L'intégrale  $\vec{I}_\sigma$  peut se décomposer sur chacun des côtés de l'élément. On se place dans un cas de référence : on considère un segment  $[AB]$ , un point  $P$  sur ce segment, et un point de contrôle  $M$ . L'intégrale à calculer sur ce segment est alors

$$\vec{I}_\sigma = \int_A^B MP \cdot d\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (3.30)$$

Avec la base locale  $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{n})$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{s} = \vec{n} \wedge \vec{t} = \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} \\ \vec{t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \\ t = \frac{AP}{AB}, t \in [0, 1] \\ dl = AB \cdot dt \end{array} \right. \quad (3.31)$$

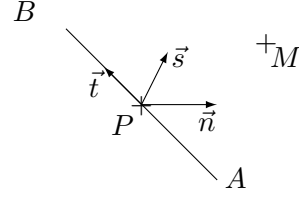


FIGURE 3.3 – Cas de Référence

D'après le théorème d'Al-Kashi, on peut écrire la norme de MP sous la forme :

$$\begin{aligned} MP^2 &= AP^2 + AM^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= AP^2 + AM^2 - 2 \cdot \frac{AP}{AB} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \quad , \text{ puisque } P \in [AB] \\ &= t^2 \cdot AB^2 + AM^2 - 2t \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= \left( t \cdot AB - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right)^2 + AM^2 - \left( \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right)^2 \end{aligned}$$

Soit

$$MP^2 = K^2(1 + q^2) \quad (3.32)$$

en introduisant le changement de variable suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} K^2 = AM^2 - \left( \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right)^2 = \frac{AM^2 \cdot AB^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM})^2}{AB^2} \geq 0 \\ q = \frac{1}{K} \cdot \left( t \cdot AB - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right), q \in [q_0, q_1] \\ dq = \frac{AB}{K} \cdot dt \\ q_0 = -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB \cdot K} \\ q_1 = \frac{AB^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB \cdot K} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

L'intégrale à calculer devient avec ce changement de variable

$$\begin{aligned}
 \vec{I}_\phi &= \int_{q_0}^{q_1} K^2 \sqrt{1+q^2} . dq . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \\
 &= K^2 . \int_{\text{asinh}(q_0)}^{\text{asinh}(q_1)} \sqrt{1+\sinh(x)^2} . \cosh(x) dx . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \quad \text{en posant } q = \sinh(x) \\
 &= K^2 . \int_{a=\text{asinh}(q_0)}^{b=\text{asinh}(q_1)} \cosh(x)^2 dx . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \\
 &= K^2 . \int_a^b \frac{\cosh(2x) + 1}{2} dx . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB}
 \end{aligned}$$

La solution analytique de cette intégrale est ainsi

$$\vec{I}_\phi = \frac{K^2}{2.AB} \left[ b - a + \frac{\sinh(2b) - \sinh(2a)}{2} \right] \vec{n} \wedge \vec{AB} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} a = \text{asinh}(q_0) = \text{asinh}\left(-\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB.K}\right) \\ b = \text{asinh}(q_1) = \text{asinh}\left(\frac{AB^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB.K}\right) \\ K^2 = AM^2 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AB}\right)^2 \end{cases} \quad (3.35)$$

### Singularité

Bien que l'intégrale ne présente initialement pas de singularité, la solution analytique que nous avons développée en possède une. En effet, lorsque  $K = 0$ , l'expression de  $q$  n'est plus valable. Cependant, dans ce cas précis, nous pouvons nous ramener à une représentation et une expression de l'intégrale encore plus simple. En effet,  $K = 0$  signifie que le point M est sur la droite  $(AB)$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{I}_\phi &= \int_A^B MP . dl . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \\
 &= \int_A^B \left\| MA + \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AM.AB} \cdot AP \right\| . dl . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \\
 &= \int_0^1 \left\| MA + \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AM.AB} \cdot t.AB \right\| . (AB . dt) . \frac{\vec{n} \wedge \vec{AB}}{AB} \\
 &= \left\| MA + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{AM.AB} \cdot AB \right\| \cdot \vec{n} \wedge \vec{AB}
 \end{aligned}$$

### 3.3 Intégrale $I_\mu(M, i) = \iint_{S_i} \mu(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS_P$

L'intégrale  $I_\mu(M, i)$ ,  $\mu$  faisant référence à la distribution de doublets normaux à l'origine d'un potentiel  $\phi$ , s'écrit pour chaque couple de point de contrôle  $M$  et de facette  $i$

$$I_\mu(M, i) = \iint_{S_i} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS_P$$

Pour cette intégrale, le cas singulier peut être évacué de manière simple. En effet la contribution de cette singularité est isolée dans l'angle solide :

$$\Omega(M)\phi(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \phi(P) \Delta G(M, P) dV$$

Pour le cas régulier, une méthode similaire à celle utilisée pour l'intégrale  $I_\sigma(M, i)$ , et basée sur l'expression de la variation linéaire de  $\mu = \phi$  d'un point  $P$  sur l'élément  $i$ , peut être utilisée.

$$\mu(P) = \mu(G) + \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{GP}$$

L'équation  $I_\mu(M, i)$  s'écrit alors

$$I_\mu(M, i) = \left( \mu(G) + \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{GM} \right) \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS + \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{MP} \right) dS$$

La seconde intégrale peut se transformer en intégrale de contour en introduisant la fonction vectorielle suivante :

$$\vec{F} = -G(M, P) \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \wedge \overrightarrow{MP} \right) \quad (3.36)$$

$$\vec{F} = \begin{cases} \frac{c_\mu \cdot (y_P - y_M) - b_\mu \cdot (z_P - z_M)}{\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}} \\ \frac{a_\mu \cdot (z_P - z_M) - c_\mu \cdot (x_P - x_M)}{\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}} \\ \frac{b_\mu \cdot (x_P - x_M) - a_\mu \cdot (y_P - y_M)}{\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla}_{s\mu} = [a_\mu, b_\mu, c_\mu]$$

Il est possible de remarquer que le rotationnel de cette fonction contient les termes à intégrer :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) &= [a_\mu(x_P - x_M) + b_\mu(y_P - y_M) + c_\mu(z_P - z_M)] \cdot \vec{\nabla} G(M, P) \\ &\quad - 2 \cdot G(M, P) \cdot \vec{\nabla}_{s\mu} + G(M, P) \cdot \vec{\nabla}_{s\mu} \\ &= \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{MP} \right) \vec{\nabla} G(M, P) - G(M, P) \vec{\nabla}_{s\mu} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) \cdot \vec{n} &= \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{MP} \right) - G(M, P) \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \vec{n} \right) \\
 &= \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{MP} \right)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le gradient surfacique contient en effet par définition une variation normale nulle.

$$\vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \vec{n} = 0$$

Le théorème de Stokes permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale de contour.

$$\iint_{S_i} \left( \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \right) dS = \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{3.39}$$

La seconde intégrale s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{MP} \right) dS &= \oint_{C_i} -\frac{1}{MP} \left( \vec{\nabla}_{s\mu} \wedge \overrightarrow{MP} \right) \cdot d\vec{l} \\
 &= -\vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge d\vec{l}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

L'intégrale  $I_\mu(M, i)$  s'exprime alors comme

$$I_\mu(M, i) = \left( \mu(G) + \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \overrightarrow{GM} \right) \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS - \vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge d\vec{l} \tag{3.41}$$

En isolant les valeurs de  $\mu$  aux nœuds à l'aide de l'équation 3.11, l'intégrale s'écrit alors comme

$$I_\mu(M, i) = \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot \vec{I} + \overrightarrow{GM} \cdot \vec{\Sigma} \right) \cdot \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS - \left( \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{\Sigma} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

On pose pour la suite :

$$S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P \quad \text{et} \quad \vec{I}_\mu = \oint_{C_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge d\vec{l}$$

### 3.3.1 Intégrale $S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P$

L'intégrale  $S_\mu$  possède une solution analytique donnée par P. Guevel [21].

$$S_\mu = 2 \cdot \text{signe}(Z) \sum_{k=1}^3 \arctan \left( \frac{N_k^t}{D_k^t} \right) \tag{3.43}$$



$$\begin{cases} R_k &= \|\overrightarrow{P_k M}\| \\ d_k &= \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| \\ Z &= \overrightarrow{GM} \cdot \vec{n} \\ N_k^t &= 2\overrightarrow{P_k M} \cdot (\vec{n} \wedge \overrightarrow{P_k P_{k+1}}) k \\ D_k^t &= (R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2 |Z| \cdot (R_{k+1} + R_k) \end{cases} \quad (3.44)$$

### 3.3.2 Intégrale $\vec{I}_\mu = \oint_{c_i} \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge d\vec{l}_P$

L'intégrale  $\vec{I}_\mu$  peut être décomposée sur chaque côté de la facette. Soit le cas de référence suivant : un segment  $[AB]$ , un point  $P$  sur ce segment, et un point de contrôle  $M$ .

L'intégrale à calculer est alors :

$$I_\sigma = \int_A^B \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \wedge \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} dl = \frac{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} \int_A^B \frac{1}{MP} dl + \frac{1}{AB} \int_A^B \frac{\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}}{MP} dl \quad (3.45)$$

Les mêmes paramétrage et changements de variable que pour l'intégrale  $\vec{I}_\sigma$  peuvent être introduits pour exprimer  $MP$ .

$$\begin{cases} \vec{t} &= \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \\ t &= \frac{AP}{AB}, t \in [0, 1] \\ dl &= AB \cdot dt \end{cases} \quad (3.46)$$

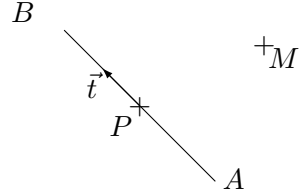


FIGURE 3.4 – Cas de Référence

$$MP^2 = K^2(1 + q^2) \quad (3.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K^2 = AM^2 - \left( \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right)^2 = \frac{AM^2 \cdot AB^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM})^2}{AB^2} \geq 0 \\ q = \frac{1}{K} \cdot \left( t \cdot AB - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB} \right), q \in [q_0, q_1] \\ dq = \frac{AB}{K} \cdot dt \\ q_0 = -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB \cdot K} \\ q_1 = \frac{AB^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{AB \cdot K} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Si  $K^2 > 0$ , l'intégrale  $I_\emptyset$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{I}_\emptyset &= -K \cdot \frac{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} \int_{q_0}^{q_1} \frac{1}{K \cdot \sqrt{1+q^2}} \cdot dq \\ \vec{I}_\emptyset &= -\frac{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} [\operatorname{asinh}(q_1) - \operatorname{asinh}(q_0)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ou sous une autre forme

$$\vec{I}_\emptyset = -\frac{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} \ln \left( \frac{q_1 + \sqrt{1+q_1^2}}{q_0 + \sqrt{1+q_0^2}} \right) \quad (3.50)$$

### Singularité

La singularité apparait si  $K = 0$  mais implique que  $M \in (AB)$ . L'intégrale a alors une solution analytique simple

$$\vec{I}_\emptyset = -\vec{\nabla}_{s\mu} \cdot \frac{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}}{AB} \int_A^B \frac{1}{MP} dl = 0 \quad (3.51)$$

## 3.4 Développements asymptotiques

Les développements asymptotiques (point de contrôle  $M$  loin de l'élément  $i$ ) ont été établis par Guevel [21] et Delhommeau [11]. Un critère de distance a été introduit par Guevel pour sélectionner la solution exacte ou la solution asymptotique à utiliser. Ce critère est défini comme le rapport de la distance du point de contrôle au centre de la facette sur la plus grande distance du centre de gravité de la facette à ses sommets.

$$Cr = \frac{GM}{\max_{i=1,3}(GP_i)} \quad (3.52)$$

Une valeur du seuil à 7 a été proposée par Guevel : supérieure ou égale à ce seuil, la solution asymptotique est choisie, sinon la solution exacte est utilisée. Guevel donne une estimation de l'erreur relative induite par la solution asymptotique inférieure à 0.5% lorsque ce critère est supérieur à 7.

La valeur du seuil dans notre cas a été choisi arbitrairement à 8 sans plus d'étude sur l'erreur relative entre les deux solutions en discrétisation linéaire que n'en a mené Guevel.

### 3.4.1 Intégrale $S_\sigma = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS$

L'influence de l'élément  $i$  sur le point de contrôle M est approximée en supposant que la grandeur  $\sigma$  est constante sur la facette.

$$S_\sigma(M, i) = \iint_{S_i} \frac{1}{MP} dS = \frac{\mathcal{A}_{S_i}}{GM} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{S_i} \text{ l'aire de l'élément } i \quad (3.53)$$

### 3.4.2 Intégrale $S_\mu = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS$

De la même façon, l'influence de l'élément  $i$  sur le point de contrôle M est approximée en supposant que la grandeur  $\mu$  est constante sur la facette.

$$S_\mu(M, i) = \iint_{S_i} \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS = \frac{\overrightarrow{GM} \wedge \vec{n}}{GM^3} \mathcal{A}_{S_i} \quad (3.54)$$

# Chapitre 4

## Implémentations numériques et validations

### 4.1 Structure du code

#### 4.1.1 Description rapide du code

Le code de calcul est écrit en langage Fortran, décomposé en plusieurs modules dont les principaux sont :

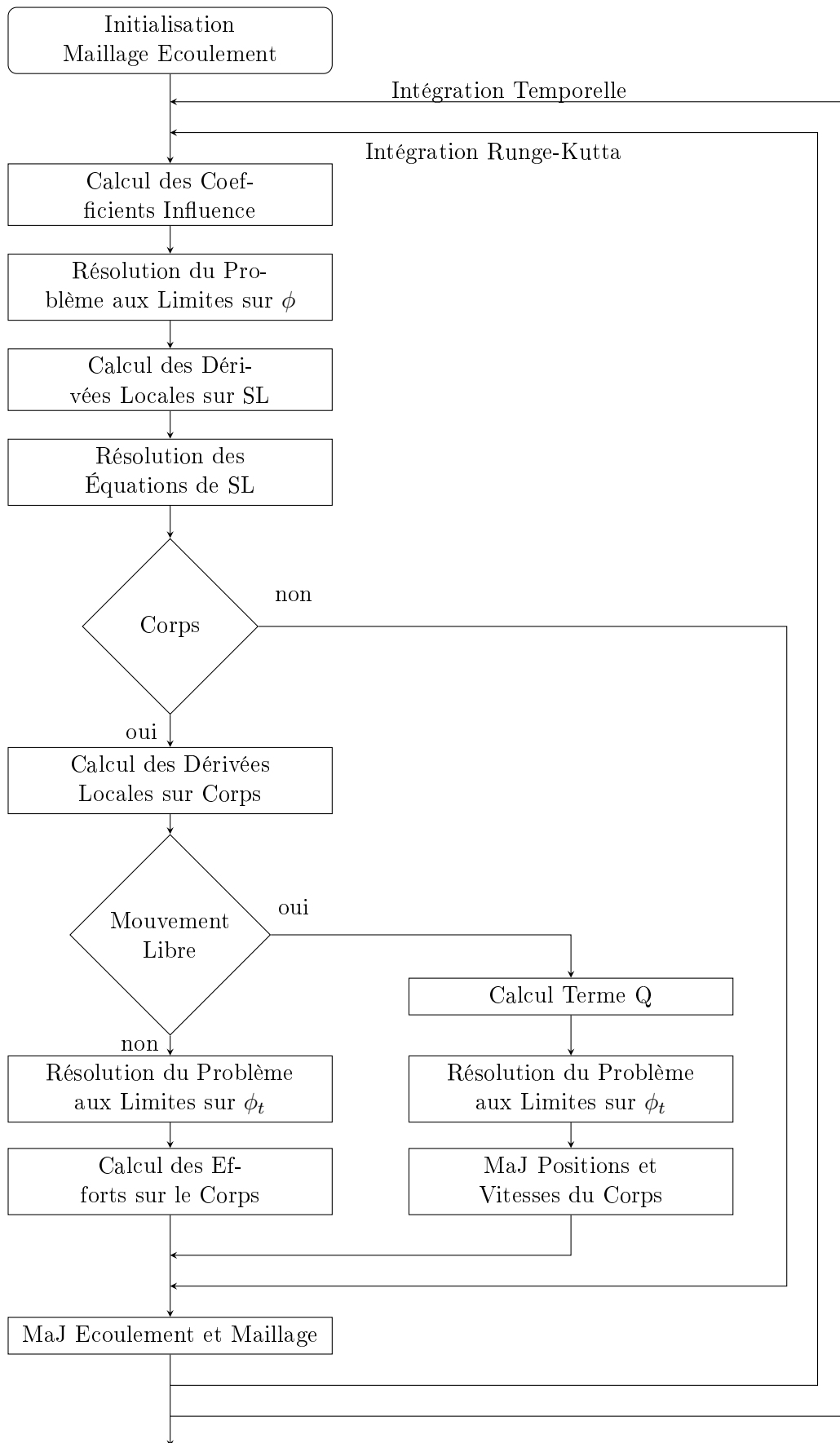
- Module de Calcul des Coefficients d'Influence,
- Module de Résolution du Problème aux Limites,
- Module de Calcul des Dérivées Locales,
- Module de la Boucle Temporelle,
- Module de Calcul des Efforts et Mouvements du corps.

Excepté le premier, les implémentations de tous ces modules sont présentées dans ce chapitre. Ils ont été développés chronologiquement et validés indépendamment. Seulement une partie de ces validation sont exposées afin de ne pas surcharger le document.

De même plusieurs autres modules contenant des fonctions et routines nécessaires au fonctionnement du code ne sont pas présentés, tels les modules de génération de maillage, de définition des composantes incidentes de la houle ou encore de gestion des structures de données.

#### 4.1.2 Algorithme de la boucle temporelle

Le module de Boucle Temporelle est celui faisant appel à quasiment tous les autres modules, pour réaliser l'avance en temps de la solution. Son algorithme est ainsi présenté dans un premier temps pour mieux saisir l'imbrication de tous ces modules.



Cet algorithme est incomplet puisqu'il ne permet pas de prendre en compte certaines fonctionnalités, tel le calcul partiel des coefficients d'influence ou encore le fonctionnement en schéma RK figé. Cependant il donne une bonne approximation des étapes nécessaires au bon fonctionnement du code.

## 4.2 Module de résolution du problème aux limites

La résolution du Problème aux Limites permet de déterminer le potentiel sur la surface du corps ainsi que la vitesse normale sur la surface libre, grandeurs nécessaires à l'avance en temps puisque présentes respectivement dans la résolution du mouvement du corps et les équations de surface libre.

### 4.2.1 Implémentations numériques

#### Problème aux limites discrétisé

Le problème aux limites est basé sur la résolution d'un ensemble d'équations écrites pour chaque nœud du maillage des frontières du domaine. L'équation intégrale s'écrit pour un point  $M$  quelconque du domaine.

$$\phi(M) \cdot \Omega(M) + \iint_S \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P - \iint_S \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P = 0 \quad (4.1)$$

Cette équation peut être discrétisée, c'est à dire écrite pour tous les points de la surface  $S$  fermant le domaine  $D$ , en isolant les valeurs de  $\phi$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ . Les inconnues étant localisées aux nœuds du maillage, d'après l'approximation (A2), cette discrétisation est effectuée par collocation.

Pour un nœud d'indice  $i$ , on a

$$\Omega(i) \cdot \phi(i) + \sum_{j=1}^N CS(i, j) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{j=1}^N CD(i, j) \cdot \phi(j) = 0 \quad (4.2)$$

Les coefficients  $CS$  et  $CD$  sont appelés coefficients d'influence et quantifient l'influence d'un point source sur un point de contrôle. Ces équations, écrites pour tous les points, établissent un système linéaire permettant, si l'une des quantités  $\phi$  ou  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  est connue, de déterminer l'autre.

L'angle solide a été explicité dans l'équation 2.7 comme

$$\Omega(M) = \iint_S \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} ds \quad (4.3)$$

L'angle solide d'un point d'indice  $i$  peut être exprimé simplement sous forme discrétisée comme la somme des coefficients  $CD$

$$\Omega(i) = \sum_{j=1}^N CD(i, j) \quad (4.4)$$

Le coefficient de doublet d'auto-influence  $CD(i, i)$  est nul par définition. Afin de simplifier l'écriture du système linéaire à résoudre, on intègre l'angle solide dans ce coefficient d'auto-influence, pour obtenir

$$\sum_{j=1}^N CS(i, j) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{j=1}^N CD(i, j) \cdot \phi(j) = 0 \quad (4.5)$$

avec

$$CD(i, i) = \Omega(i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N CD(i, j) \quad (4.6)$$

### Gestion des nœuds sur des intersections

Certains nœuds peuvent se trouver sur l'intersection de deux faces, présentant une normale différente et/ou un type de condition différent. Cela pose donc le problème de conditions multiples sur ces nœuds. Si l'intersection a lieu entre deux faces d'une surface matérielle, deux conditions de Neumann sont posées, une pour chaque normale. Si l'intersection est celle d'une surface matérielle et de la surface libre, il y a coexistence de la condition de Neumann et de la condition de Dirichlet.

Afin de prendre en compte ces conditions multiples, des nœuds doubles sont introduits. Pour une position géométrique, on fait coexister deux nœuds présentant deux conditions différentes. Cela contraint légèrement le système à résoudre puisqu'il faut vérifier la continuité de la solution du potentiel au franchissement de ces bords. Néanmoins cela permet d'être assuré que toutes les conditions sont posées correctement.

### Système linéaire à résoudre

La discrétisation linéaire utilisée pour le calcul des coefficients d'influence localise les inconnues aux nœuds du maillage, et non aux centres des facettes comme avec une discrétisation par Panneaux Constants. Selon le maillage utilisé, le nombre de nœuds peut être deux fois moins important de celui des facettes, ce qui réduit le nombre d'inconnues également de moitié.

Le problème aux limites s'écrit, sous forme discrétisée, pour un indice  $i$

$$\sum_{i, j} CS(i, j) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{i, j} CD(i, j) \cdot \phi(j) = 0 \quad (4.7)$$

Selon que les points de contrôle se situent sur la surface libre ou une surface matérielle, la condition aux limites sera différente. Le potentiel est imposé sur la surface libre ( $SL$ ) avec la condition de Dirichlet. La vitesse normale est imposée, par la condition de Neumann, sur les surfaces matérielles ( $SM$ ) comprenant les surfaces du corps et des frontières fixes du domaine ( $SM = Sb + Sd$ ). Il est alors possible d'isoler dans le second membre ces

termes imposés.

$$\sum_{j \in SL} CS(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{j \in SM} CD(i, j) \phi(j) = \sum_{j \in SL} CD(i, j) \phi(j) - \sum_{j \in SM} CS(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) \quad (4.8)$$

Le système à résoudre est alors

$$AX = B \quad (4.9)$$

avec

$$\begin{cases} A &= [ CS(:, SL) \quad -CD(:, SM) ] \\ X &= \begin{bmatrix} \Phi_n(SL) \\ \Phi(SM) \end{bmatrix} \\ B &= [ -CS(:, SM) \quad CD(:, SL) ] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_n(SM) \\ \Phi(SL) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.10)$$

La matrice principale du système linéaire est alors de taille  $N \times N$ ,  $N$  le nombre de nœuds du maillage, pleine.

### Solveur

Deux solveurs sont implémentés pour la résolution des systèmes linéaires. Le premier est direct, par décomposition LU, tandis que le second, itératif, est basé sur le schéma GMRES, de Saad & Schultz [40]. Le système linéaire à résoudre ici est principalement caractérisé par une matrice pleine de taille importante, à dominante diagonale. Le solveur GMRES est plus qualifié dans ce cas que le solveur direct et est donc utilisé pour cette résolution. Une étude de solveur a été réalisée par Pierre Ferrant lors de la conception du code complètement non-linéaire ANSWAVE [17]. Parmi les différents schémas de résolution testés, le GMRES a montré le meilleur comportement, avec une convergence régulière et monotone, et le temps CPU le plus faible pour un résidu de convergence donné.

Cette méthode est utilisée avec un pré-conditionnement diagonal, qui permet de réduire par deux le nombre d'itérations nécessaires, pour un coût quasi nul. De plus grandes réductions d'itérations peuvent être obtenues en utilisant des techniques de pré-conditionnement plus élaborées. Cependant appliquées sur une matrice pleine, le coût de celles-ci n'est plus négligeable et ne permet plus un gain de temps en comparaison de la réduction du nombre d'itérations du schéma GMRES.

La convergence monotone du schéma permet de plus une réduction supplémentaire d'itérations nécessaires, en initialisant la solution à l'aide de celle obtenue pour des itérations temporelles précédentes.

### Fonctionnalités

Trois fonctionnalités ont été mises en place pour accélérer le calcul des coefficients d'influence et la résolution du problème aux limites : le **calcul partiel** des coefficients d'influence, l'utilisation de **symétries** et le calcul en **domaine ouvert**. Elles permettent



toutes les trois de réduire la taille du système à résoudre, mais avec différentes approximations.

### Calcul partiel des coefficients d'influence

Le calcul partiel des coefficients d'influence permet de ne calculer les coefficients d'influence que des couples (point de contrôle, facette influençant) dont la distance et/ou l'orientation ont changé par rapport au calcul précédent.

Par exemple, les nœuds d'un corps rigide en mouvement bougent d'un seul bloc. Il n'est alors pas nécessaire de recalculer l'influence du corps sur lui-même. De même, si les composantes incidentes de surface libre sont nulles, la position de la surface libre est linéarisée sur sa position moyenne  $z = 0$ , tel que décrit par la théorie linéaire. Dans ce cas, le maillage de la surface libre est fixe pendant toute la simulation, ce qui permet de conserver les coefficients d'influence de la surface libre sur elle-même constants et donc de ne pas avoir besoin de les calculer à chaque itération temporelle.

### Calcul en domaine ouvert

En faisant l'hypothèse que les surfaces fermant le domaine (fond et murs verticaux) sont loin du corps, il est possible de montrer que l'influence de ces frontières sur le corps est négligeable pour le problème aux limites. Ainsi les inconnues sur ces frontières peuvent être purement supprimées, sans modifier la résolution du problème aux limites. La preuve est facilement établie en reprenant l'équation intégrale à résoudre.

Soit le domaine fluide fermé  $\mathcal{D}$ , délimité par la surface libre  $\mathcal{S}_{SL}$ , la surface du corps  $\mathcal{S}_b$ , intersectant ou non la surface libre, et la surface permettant de fermer le domaine fluide  $\mathcal{S}_p$ . Le problème aux limites est alors posé comme :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \\ \phi = \phi_{SL} & \text{sur } \mathcal{S}_{SL} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{V}_b \cdot \vec{n} & \text{sur } \mathcal{S}_b \end{cases} \quad (4.11)$$

**Démonstration :** La seconde Identité de Green permet d'écrire pour tout point  $M$  appartenant aux frontières du domaine  $\mathcal{D}$  :

$$\phi(M) \cdot \Omega M + \iint_{\mathcal{S}_{SL} + \mathcal{S}_b + \mathcal{S}_p} \frac{\partial\phi(P)}{\partial n} \cdot G(M, P) dS_P - \iint_{\mathcal{S}_{SL} + \mathcal{S}_b + \mathcal{S}_p} \phi(P) \cdot \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS_P = 0 \quad (4.12)$$

Deux cas possibles apparaissent :

- Le point  $M$  appartient à la surface du corps ou à la surface libre et est loin de la surface  $\mathcal{S}_p$  fermant le domaine :

$$P \in \mathcal{S}_p, G(M, P) \simeq 0 \quad (4.13)$$

- Le point  $M$  appartient à la surface  $\mathcal{S}_p$  ou à la surface libre mais proche de  $\mathcal{S}_p$ , la solution est alors supposée nulle :

$$\begin{cases} \phi(M) & = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(M) & = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Dans les deux cas, la contribution de la surface  $\mathcal{S}_p$  peut être considérée comme négligeable. La seconde identité de Green devient alors :

$$\phi(M) \cdot \Omega M + \iint_{\mathcal{S}_{SL} + \mathcal{S}_b} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n} \cdot G(M, P) dS_P - \iint_{\mathcal{S}_{SL} + \mathcal{S}_b} \phi(P) \cdot \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} dS_P = 0$$

**Condition nécessaire :** Afin que cette méthode soit valide, il est nécessaire de poser une condition de radiation, assurant d'obtenir une solution nulle pour un point de la surface libre proche de la frontière extérieure, pour assurer l'hypothèse du deuxième point :

$$\forall (M, P) \in \{\mathcal{S}_{SL} \mathcal{S}_p\}, \text{ tel que } G(M, P) > 10^{-5} \Rightarrow \left( \phi(M), \frac{\partial \phi}{\partial n}(M) \right) = 0 \quad (4.15)$$

Cette condition impose la mise en place d'une plage absorbante efficace pour limiter le maillage de la surface libre à son minimum.

**Attention,** le calcul de l'angle solide en un point est réalisé en sommant les coefficients de doublets du domaine **fermé**. Ainsi supprimer une partie des points du domaine crée une perte d'information. Il est cependant possible de pallier à cette perte en maillant très grossièrement les surfaces fermant le domaine. Les coefficients de doublets de ces surfaces sur le corps sont supposées négligeables.

### Prises en compte des symétries

Le nombre d'inconnues peut également être réduit en s'appuyant sur les propriétés de symétrie de la géométrie et de la solution. Deux manières de prendre en compte une symétrie existent. La première consiste à mailler le plan de symétrie et à y imposer des conditions de symétrie. Cette méthode permet effectivement de réduire le nombre d'inconnues, mais pas de moitié, puisque l'on en ajoute sur le plan de symétrie.

La seconde méthode, que nous utilisons, ne maille pas le plan de symétrie et diminue donc bien les inconnues de moitié. Pour cela, il est nécessaire de revenir encore une fois à l'équation intégrale.

Soit la frontière  $S$  du domaine que l'on peut diviser en deux parties symétriques  $S_+$  et  $S_-$ . Le problème aux limites s'écrit pour un point  $M$  de  $S_+$  :

$$\begin{aligned} \phi(M) \cdot \Omega(M) &+ \iint_{S_+} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P - \iint_{S_+} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P \\ &+ \iint_{S_-} \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} G(M, P) dS_P - \iint_{S_-} \phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} dS_P = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Soit sous forme discrète

$$\sum_{S_+} CS(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{S_+} CD(i, j) \phi(j) + \sum_{S_-} CS(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{S_-} CD(i, j) \phi(j) = 0 \quad (4.17)$$

Les propriétés de symétrie impliquent que tout nœud d'indice  $j$  de  $S_+$  possède un nœud symétrique d'indice  $sym(j)$  dans  $S_-$  tel que

$$\begin{cases} \phi(j) &= \phi(sym(j)) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) &= \frac{\partial \phi}{\partial n}(sym(j)) \end{cases} \quad (4.18)$$

Soit

$$\sum_{j \in S_+} [CS(i, j) + CS(i, sym(j))] \frac{\partial \phi}{\partial n}(j) - \sum_{j \in S_+} [CD(i, j) + CD(i, sym(j))] \phi(j) = 0 \quad (4.19)$$

Cela permet alors de réduire de moitié le nombre d'inconnues. En terme de calcul de coefficients d'influence, cela nécessite de calculer l'influence de  $S_+$  sur  $S_+$  mais également celle de  $S_-$  sur  $S_+$ . Cependant l'influence de  $S_+ \cup S_-$  sur  $S_-$  n'est plus nécessaire, ce qui réduit alors de moitié le temps de calcul des coefficients d'influence.

A priori, il pourrait sembler utile de résoudre également un problème antisymétrique, afin de pouvoir traiter des problèmes où la géométrie du corps est symétrique mais pas le champ. Dans ce cas, on pourrait décomposer le champ en une partie symétrique et une partie anti-symétrique, résoudre les deux problèmes avec les mêmes coefficients d'influence (géométries identiques) et ré-assembler ensuite pour obtenir la solution complète.

Cela n'est cependant pas cohérent avec notre formulation : il y a peu de chances en effet que la géométrie reste symétrique, avec un corps en mouvement et un champ de houle incidente non symétrique.

A l'inverse, si la géométrie est symétrique (houle incidente comprise), le champ perturbé résultant conservera la symétrie au cours du temps

## 4.2.2 Validations

La validation du calcul des coefficients d'influence est réalisée en même temps que celle de la résolution du problème aux limites. En effet l'exactitude de la solution du problème aux limites implique forcément que les coefficients d'influence sont bien calculés.

Une étude des temps de calcul nécessaires pour calculer les coefficients d'influence et résoudre le système en fonction du nombre d'inconnues est effectuée.

Les différentes fonctionnalités, symétrie, domaine ouvert et calcul partiel sont également à valider et le gain de temps obtenu à quantifier.

### Description du cas de validation

Une source de Rankine est placée en un point  $M$  hors du domaine fluide et génère des champs de potentiel et de vitesse normale sur les frontières de celui-ci. Ces champs sont connus analytiquement et s'expriment simplement pour un point  $P$

$$\begin{cases} \phi(P) &= \frac{1}{MP} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(P) &= \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}}{MP^2} \end{cases} \quad (4.20)$$

Les conditions aux limites, Dirichlet ( $\phi$ ) sur la surface libre et Neumann ( $\phi_n$ ) sur le corps, sont imposées. La solution du problème aux limites est alors la vitesse normale sur la surface libre et le potentiel sur les surfaces matérielles. Cette solution est à comparer aux champs générés par la source de Rankine.

Ce cas de validation, simple à mettre en œuvre, a l'avantage de pouvoir être adapté à n'importe quel type de maillage. Un coefficient relatif à la dimension caractéristique du maillage peut être utilisé pour obtenir des champs relativement uniformes d'un maillage à l'autre. Cela revient alors simplement à multiplier le nombre de sources présentes au point  $M$ . Ce coefficient est également utilisé pour la position verticale de la source au dessus de l'origine du repère global.

L'erreur relative est calculée pour tous les nœuds du maillage, y compris les points doubles, sous la forme

$$\epsilon = \begin{cases} 100 \frac{|\frac{\partial \phi}{\partial n_n} - \frac{\partial \phi}{\partial n_a}|}{\text{Max}(|\frac{\partial \phi}{\partial n_a}|)} & , \text{ sur la Surface Libre} \\ 100 \frac{|\phi_n - \phi_a|}{\text{Max}(|\phi_a|)} & , \text{ sur les Surfaces Matérielles} \end{cases} \quad (4.21)$$

avec les quantités indicées  $a$  calculées analytiquement et celles indicées  $n$  numériquement. En prenant le maximum de la solution comme référence, les irrégularités liées à une solution nulle ponctuellement sont éliminées. L'erreur relative est exprimée directement en pourcentage.

### Validation du problème aux limites et des coefficients d'influence

La validation décrite ci-dessus est réalisée pour un premier maillage d'une cuve cylindrique, fermée, sans prise en compte de symétries et sans corps, cf figure 4.1.

L'erreur relative maximale est inférieure à 1% pour une résolution spatiale du maillage relativement grossière. Les erreurs les plus importantes sont surtout localisées sur la surface libre et notamment sur son pourtour. Les mailles  $y$  sont en effet de taille plus grosses. Toutefois l'erreur augmente également lorsque l'on se rapproche du centre : les mailles au centre sont quant à elles plus déformées.

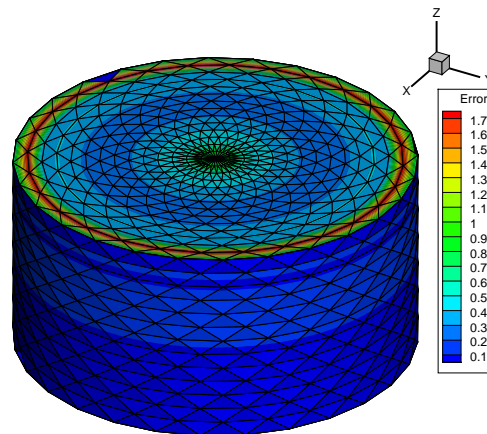


FIGURE 4.1 – Erreur Relative (%) de la solution du BVP pour un maillage cylindrique

Il est possible de montrer une forte dégradation de la solution du BVP lorsque le maillage de la surface libre présente des éléments trop aplatis. Le maillage de surface libre précédent a été généré en prenant les nombres de discrétisation en rayon et en angle égaux :  $N_r = N_\theta = 15$ . Les erreurs de la solution du BVP sont présentées pour deux maillages avec des résolutions spatiales différentes :  $(N_r, N_\theta) = (10, 20)$  pour la figure 4.2a et  $(N_r, N_\theta) = (20, 10)$  pour la figure 4.2b

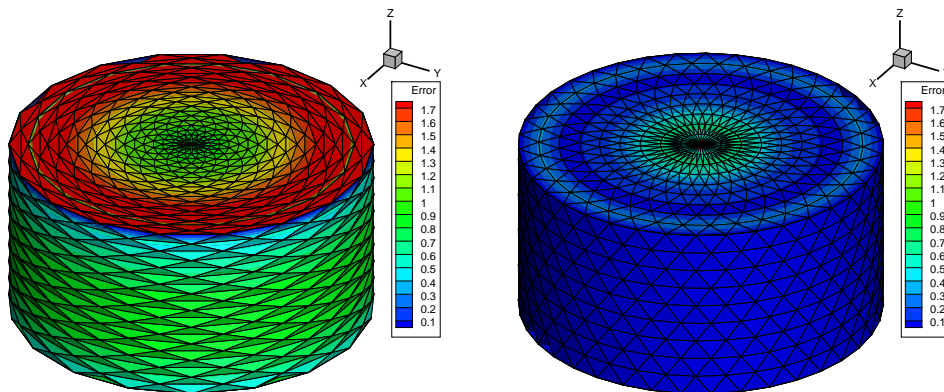


FIGURE 4.2 – Erreur Relative (%) pour différents maillages cylindriques

L'erreur relative de la surface libre augmente drastiquement pour les mailles présentant un aspect ratio important. Dans le cas de la figure 4.2a, ce sont les mailles du pourtour de la surface libre qui sont déformées, l'erreur y augmente de manière significative à plus de 10%. Pour la figure 4.2b, les mailles au centre de la surface libre sont plus

aplaties, tandis que celles sur le pourtour présentent un aspect ratio plus proche de 1. L'erreur relative est globalement meilleure avec cette discrétisation.

Cependant il faut garder à l'esprit que le centre de la surface libre est généralement l'endroit où les perturbations sont les plus importantes. La perturbation sur le pourtour du domaine est en effet moins intéressante, puisque potentiellement plus loin du corps étudié. De plus, avoir trop de nœuds voisins du nœud central, et des facettes alentour très plates, peut s'avérer gênant pour le calcul des dérivées locales.

Il peut alors être acceptable de garder le maillage de la figure 4.1 au détriment de celui de la figure 4.2b pour limiter les erreurs générées par d'autres méthodes numériques, sachant que les erreurs sur la solution du BVP restent ici inférieures à 2%.

Un soin particulier doit donc être apporté sur le maillage de la surface libre. L'idéal serait de mailler la surface libre avec une méthode non structurée, pour s'affranchir des bas aspects ratio, soit au centre, soit sur le pourtour, générés par un maillage cylindrique.

### Convergence en maillage : étude de la précision et du temps de calcul

Une convergence sur le pas de discrétisation spatiale du maillage est menée pour s'assurer de la validité de la résolution du problème aux limites. Pour plus de facilité, celle-ci a été réalisée sur un maillage de cuve rectangulaire de pas de discrétisation égal selon les trois directions. L'erreur relative maximale de la solution du problème aux limites est relevée pour différentes valeurs du pas de discrétisation et tracée figure 4.3. Les temps cpu du calcul des coefficients d'influence, ( $t_{CI}$ ), et de l'ensemble (définition et résolution) du système linéaire, ( $t_{BVP}$ ), à partir des simulations lancées sur un ordinateur de bureau (double cœur 2.40Ghz), sont également visible sur cette figure.

La convergence est visible, avec une pente de  $-0.93$ , en échelle loglog, en accord avec la discrétisation linéaire des grandeurs sur les facettes utilisée pour le calcul des équations intégrales.

Les temps cpu s'accroissent naturellement avec le nombre de nœuds du maillage. La hausse exponentielle s'effectue cependant avec des pentes légèrement différentes : 1.66 pour le calcul des coefficients d'influence et 2.31 pour la résolution du problème aux limites. Le calcul des coefficients d'influence a été optimisé au cours de son développement, au contraire des routines de définition et résolution du problème aux limites. Celles-ci présentent en effet des temps de calcul beaucoup moins importants pour des maillages de taille raisonnable ( $< 5000$  nœuds). Une passe d'optimisation sur ce calcul ne serait toutefois pas inutile si les maillages utilisés augmentent en taille. La résolution du système étant réalisée par le solveur GMRES, déjà complètement optimisé, il suffirait de reprendre les routines définissant le système (pré et post-résolution). Si besoin, le solveur pourrait néanmoins être modifié simplement dans le code.

### Ajout d'un corps

Un corps sphérique complètement immergé est ajouté et l'erreur relative tracée figure 4.4 de la même façon que précédemment, afin de s'assurer que la résolution n'est pas altérée. Les faces latérale et inférieure sont supprimées de la figure suivante afin de

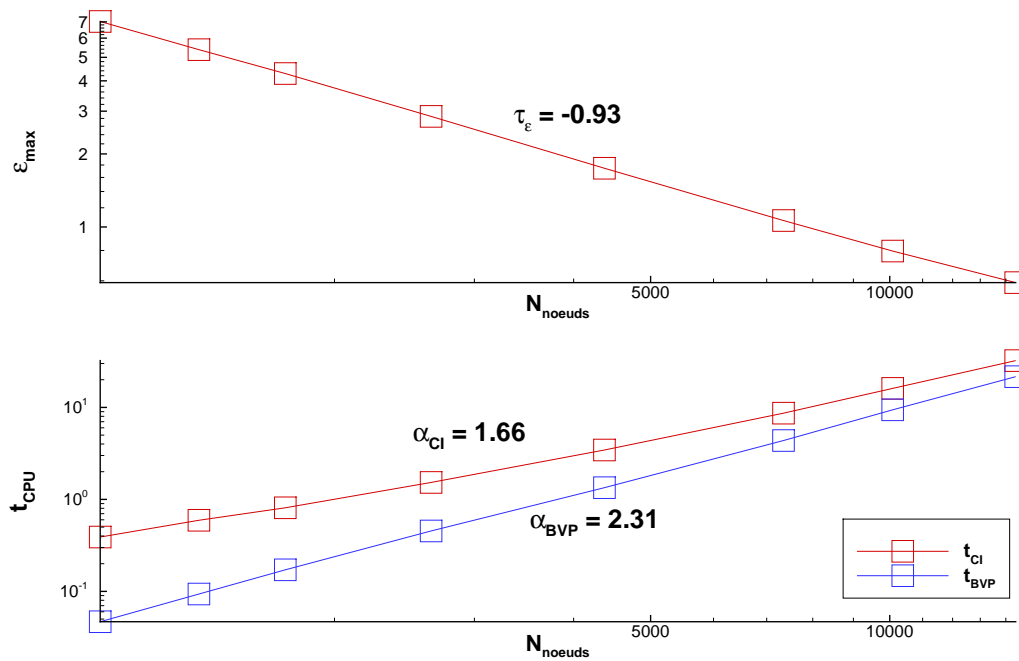


FIGURE 4.3 – Convergence en maillage : erreur relative maximale (%) en fonction de la discrétisation

mieux visualiser la solution sur la sphère. Elles font cependant toujours partie des frontières du domaine. Le pas de discrétisation en rayon et en angle de la surface libre génère une erreur relative maximale inférieure au pourcent. La discrétisation de la sphère est quant à elle fixée de manière à obtenir des mailles de taille équivalente à ceux du centre de la surface libre.

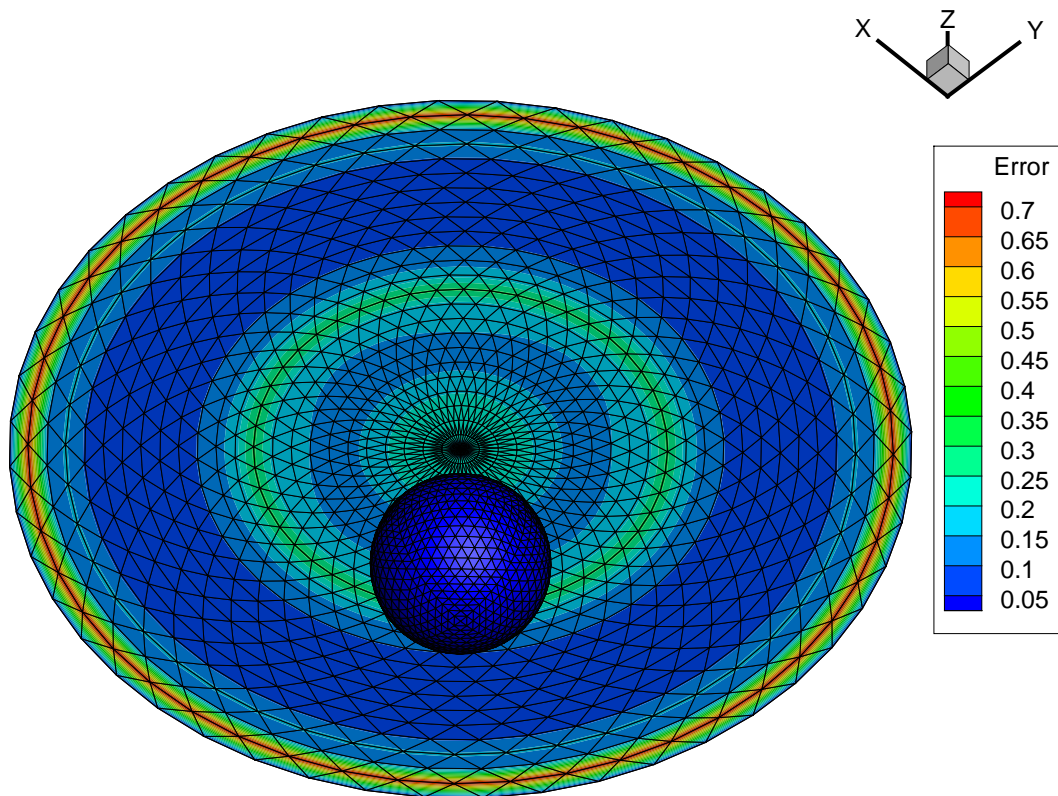


FIGURE 4.4 – Erreur relative (%) de la solution du BVP en présence d'un corps immergé

L'erreur est toujours maximale sur le pourtour de la surface libre, mais reste du même ordre de grandeur que sans le corps. Elle est quasiment négligeable sur le corps, pour la solution du potentiel, environ 100 fois plus faible.

### Validation de l'utilisation des symétries

Cette validation consiste à reprendre le cas test et y ajouter les 2 symétries : par rapport à un plan vertical et par rapport au fond. La symétrie par rapport à un plan vertical est tout d'abord pris en compte. Puis celle par rapport au fond est ensuite traitée. Enfin les deux symétries sont simultanément considérées. Les pas de discrétisation sont choisis à chaque fois de manière à obtenir des mailles de taille similaire au cas initial sans symétrie. Une condition de symétrie doit être respectée dans la définition du cas de validation : la source doit avoir son symétrique par rapport au plan de symétrie considéré. Dans le cas de la symétrie par rapport au plan vertical, la position de la source est choisie de manière à appartenir directement au plan de symétrie. Dans le cas de la symétrie par rapport au fond, une seconde source symétrique de celle au dessus de la surface libre ne doit pas être oubliée. Les erreurs relatives pour chaque cas sont tracées comme auparavant dans les figures 4.5a, 4.5b et 4.5c.



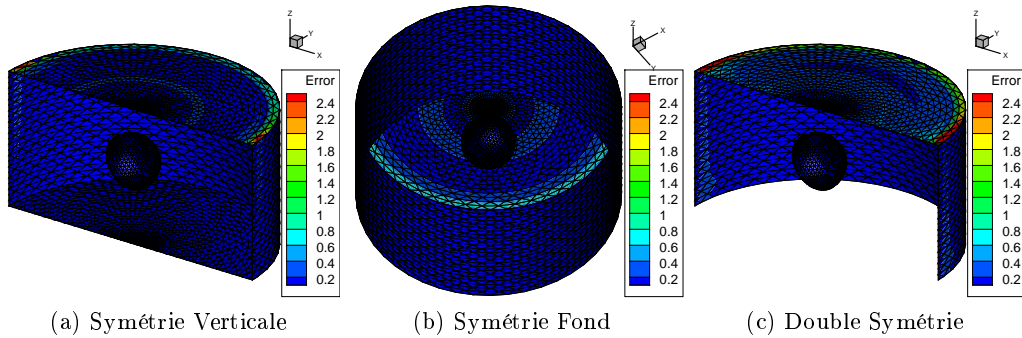


FIGURE 4.5 – Erreur Relative (%) pour les différentes symétries

L'ordre de grandeur de l'erreur maximale est conservé uniquement dans le cas de la symétrie par rapport au fond, cf figure 4.5b. En effet, dans le cas de la symétrie par rapport à un plan vertical, le maillage de la surface libre a dû être adapté au voisinage de ce plan, à cause du décalage d'un demi pas de discrétisation permettant d'obtenir un rapport d'aspect intéressant sur le reste du domaine. De petites mailles sont alors créées proche de ce plan de symétrie et viennent dégrader la solution localement. L'ordre de grandeur de l'erreur sur le pourtour de la surface libre est sinon conservé. Dans le cas de la prise en compte des deux symétries simultanément, les erreurs provenant des deux symétries s'ajoutent, pour culminer localement à 5%. Un remaillage peut alors être nécessaire pour améliorer globalement la précision de la solution, puisque la prise en compte de la symétrie permet de diminuer le temps de calcul.

La comparaison des temps de calcul par rapport au nombre de nœuds, donc d'inconnues à résoudre, est effectuée dans le tableau 4.1. On rappelle que dans le cas de la prise en compte de la symétrie par rapport à un plan vertical, on élimine quasiment la moitié des nœuds du maillage initial, tandis que dans celle par rapport au fond, seul le fond n'est plus maillé.

Symétrie	Nombre de Nœuds	Temps CPU total
Aucune	4532	5.54s
Verticale	2409	2.53s
Fond	3379	4.71s
Double	1796	2.14s

TABLE 4.1 – Comparaison des temps de calcul en fonction des symétries prises en compte

Les temps de calcul sont réduits par deux par la prise en compte de la symétrie verticale. Cela paraît logique, le nombre de nœuds étant également divisé par deux.

Dans le cas de la symétrie par rapport au fond, les temps CPU sont seulement réduits de 15%. Cependant ce rapport de réduction dépend fortement du nombre de nœuds sur le fond en comparaison de celui sur les autres frontières.

### Validation de la fonctionnalité de domaine ouvert

Le même cas test est toujours utilisé pour valider la fonctionnalité de domaine ouvert. Il suffit ainsi de comparer les erreurs obtenues en domaine fermé et en domaine ouvert pour pouvoir conclure.

Quelques modifications à apporter au maillage de la surface libre sont nécessaires pour pouvoir travailler en domaine ouvert : un corps est notamment nécessaire pour conserver un problème à conditions mixtes Dirichlet Neumann. Les deux conditions pour l'application de domaine ouvert sont : maillage du pourtour de la surface libre suffisamment loin du corps, pour avoir une influence de ces mailles faible et solution du potentiel sur le pourtour de la surface libre nulle. Dans ce cas test, la deuxième condition n'est pas tout à fait vérifiée puisque le potentiel tend vers zéro en s'éloignant de la source, mais ne l'atteint jamais. Cependant si la différence entre le potentiel au centre et sur le pourtour de la surface libre est suffisamment grand, on peut alors considérer que cette condition est vérifiée. La surface libre doit cependant être maillée sur une plus grande distance que précédemment. On choisit un rayon quinze fois supérieur à celui de la sphère.

L'erreur relative pour la solution du problème aux limites est tracée figure 4.6 pour le domaine fermé dans un premier temps. Les parois latérale et inférieure sont supprimées uniquement pour la visualisation.

L'erreur est maximale au centre avec une valeur d'environ 2% et négligeable sur le reste des frontières, corps compris.

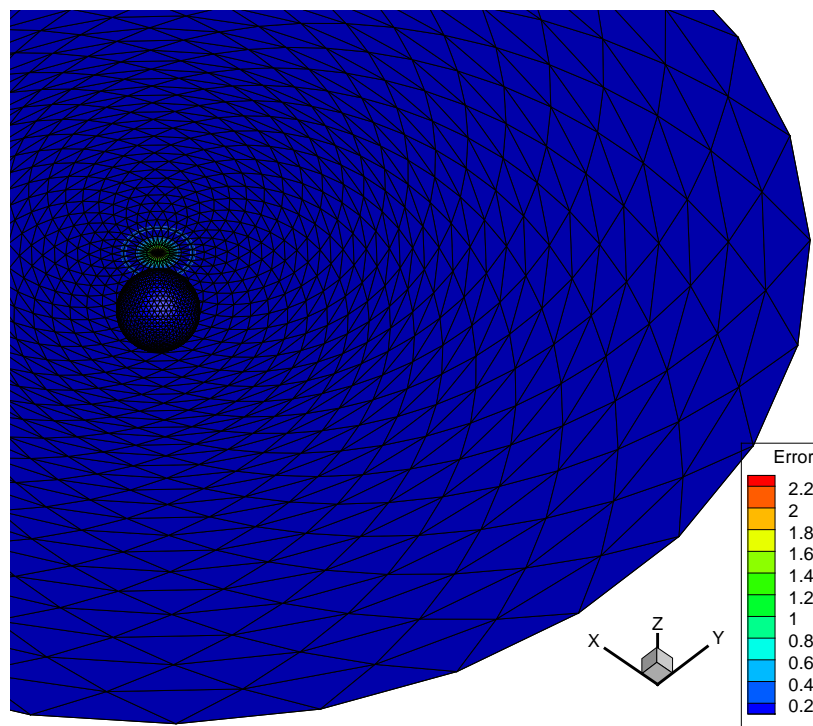


FIGURE 4.6 – Erreur relative (%) de la solution du BVP pour le domaine fermé

Le même calcul est réalisé en domaine ouvert, l'erreur relative est tracée de manière à constater le maximum sur le pourtour de la surface libre, figure 4.7a et centré sur le corps pour observer les différences avec le cas de domaine fermé, figure 4.7b.

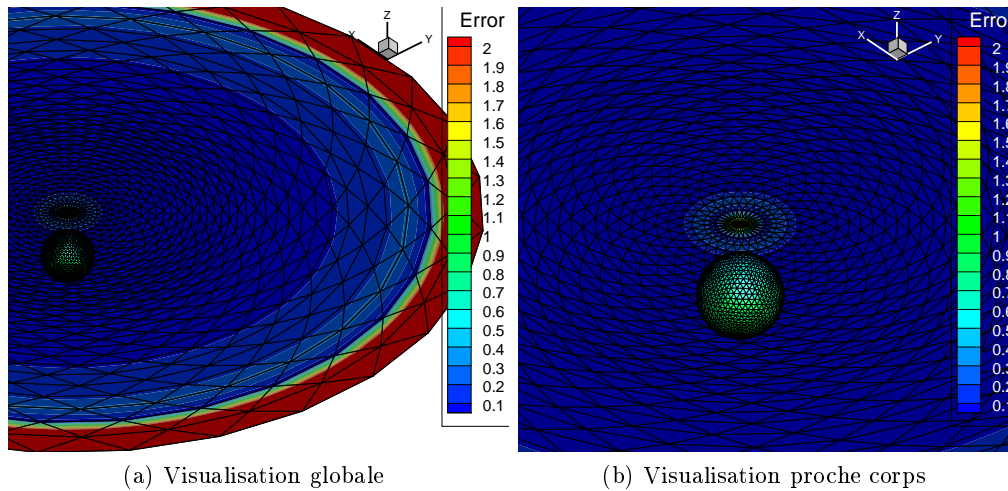


FIGURE 4.7 – Erreur Relative (%) de la solution du BVP en domaine ouvert

L'erreur relative augmente de manière significative effectivement sur le pourtour de la surface libre. C'est en effet sur ces mailles que la perte d'une partie des frontières du domaine est la plus importante. La validité de la seconde condition, de perturbation nulle sur le pourtour, est sans doute à mettre en cause. Cependant, cette même condition nous permet de considérer que, sous réserve d'être validée, ces erreurs ne sont pas importantes pour le reste de la solution. En étudiant de plus près la solution sur le corps, il est possible de s'apercevoir que l'erreur y a légèrement augmentée, mais reste faible, inférieure au pourcent.

Ce cas de validation ne peut pas être adapté puisqu'il ne respecte pas complètement la seconde condition, cependant en étendant le maillage de surface libre, il est possible de montrer que les erreurs sur le pourtour et sur le corps diminuent. Ainsi pour un maillage de surface libre d'un rayon de vingt fois le rayon de la sphère, l'erreur maximale sur le pourtour de la surface libre est divisée de moitié  $\epsilon_{max} = 4.8\%$  et celle sur le corps est inférieure à 0.5%. De même avec un rayon de vingt-cinq fois celui de la sphère, les deux erreurs passent respectivement à 2.8% et 0.37%.

Cette extension du maillage de surface libre pour obtenir une solution du potentiel nulle sur son pourtour montre bien que le respect des deux conditions énoncées pour se placer dans le domaine de validité de la fonctionnalité de domaine ouvert conditionne l'obtention d'une solution de bonne précision et valide ainsi cette méthode.

Le tableau 4.2 donne le gain de temps de calcul que permet le domaine ouvert, en comparaison de celui en domaine fermé. Ce gain provenant d'une réduction des inconnues, le nombre de nœuds est également donné. Différents rayons extérieurs de maillage de la surface libre sont testés, pour comparer le gain en temps de calcul par

rapport à la précision obtenue de la solution sur le corps.

Cas	Nombre de Nœuds	Temps CPU total	$\epsilon_{max}(Corps)$
Domaine Fermé (R=15a)	3324	4.10s	0.18 %
Domaine Ouvert (R=15a)	2091	1.90s	0.92 %
Domaine Ouvert (R=20a)	2203	2.14s	0.55%
Domaine Ouvert (R=25a)	2287	2.31s	0.37%

TABLE 4.2 – Comparaison des temps de calcul en domaine ouvert et domaine fermé

Le gain de temps avec un même maillage de surface libre est supérieur à deux. Même en étendant le maillage de surface libre, afin d'obtenir une solution de meilleure qualité, et donc ajouter quelques points sur la surface libre, le gain de temps reste acceptable.

Il est cependant nécessaire de comparer avec un domaine fermé donnant une précision équivalente mais nécessitant moins de points. Un maillage fermé avec un rayon de cinq fois seulement le rayon de la sphère possède 2624 nœuds et obtient une erreur maximale de 2.2% au centre de la surface libre et 0.18% au maximum sur le corps, en seulement 2.5s.

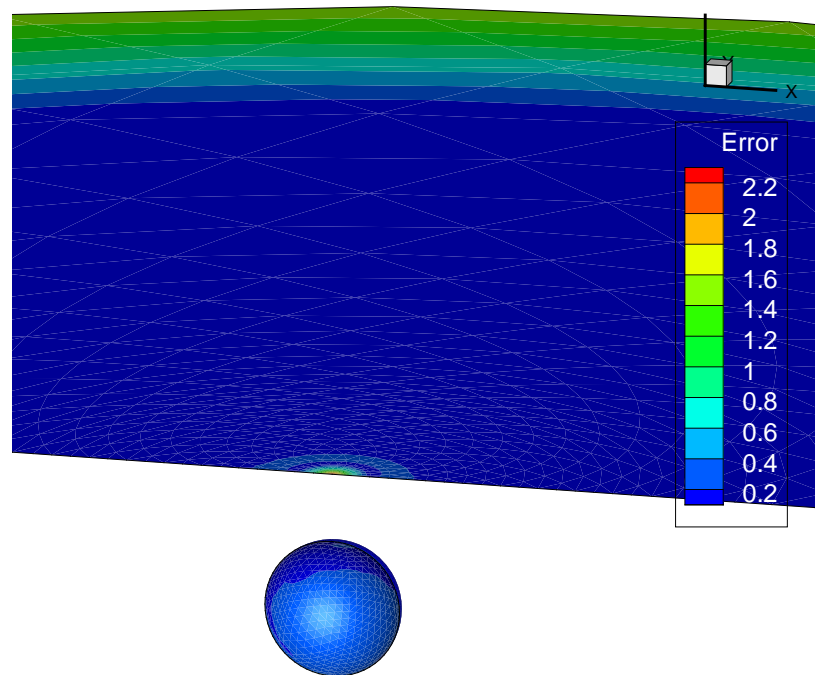


FIGURE 4.8 – Erreur relative (%) de la solution du BVP pour le domaine ouvert et symétrie verticale

Toutefois la longueur d'onde de la houle incidente utilisée impose généralement un maillage de surface libre plus grand, sur lequel il est donc mieux de travailler en domaine ouvert. De plus une plage absorbante est nécessaire afin de réduire voire annuler les

réflexions des perturbation sur les bords du domaine. Dans le cas du domaine ouvert, cette plage absorbante assure la seconde condition de potentiel nul.

La prise en compte d'une symétrie verticale fonctionne correctement en association avec celle de domaine ouvert, comme il est possible de le constater dans la figure 4.8.

### 4.2.3 Synthèse

Nous avons vu dans cette section les implémentations et validations pour la résolution du problème aux limites nécessitant le calcul des coefficients d'influence. Ce dernier est réalisé à l'aide d'expressions analytiques des équations intégrales, avec une approximation linéaire des grandeurs sur les facettes. Les inconnues sont dans ce cas localisées au nœuds du maillage, permettant d'utiliser une méthode de collocation pour l'écriture sous forme discrète du problème aux limites. Des nœuds doubles (ou triples) sont introduits pour les points physiques sur lesquels s'appliquent des conditions limites multiples.

La résolution du système linéaire est réalisée grâce au schéma itératif GMRES, suppléé d'un pré-conditionneur diagonal. Ce choix résulte de comparaisons avec un solveur direct et est également inspiré d'une étude de Ferrant [17].

Trois fonctionnalités visant à réduire le nombre d'inconnues, et donc le temps de calcul, ont été implémentées et validées : la prise en compte de symétries, le calcul en domaine ouvert et le calcul partiel des coefficients d'influence. Les prises en compte de symétries s'appuient sur les conditions de symétrie des cas d'applications souhaités : plan de symétrie par rapport au fond positionné sur le fond du domaine, plan de symétrie verticale respectant la symétrie du problème. Ces méthodes pour les symétries permettent de ne pas avoir à mailler le plan de symétrie, mais permettent une réduction des inconnues et des temps de calcul par deux.

Le calcul en domaine ouvert permet de ne mailler que la surface libre et le corps étudié. Les surfaces fermant le domaine doivent être maillées très grossièrement pour le calcul des angles solides. Les nœuds sur ces surfaces ne font cependant pas partis des inconnues. Une condition de radiation sur la surface libre doit être cependant strictement assurée, afin d'obtenir une solution du problème aux limites non dégradée.

### 4.3 Module de calcul des dérivées surfaciques

Ce module est destiné à calculer les dérivées spatiales des différentes grandeurs en jeu, que ce soit le potentiel, l'élévation de surface libre ou bien encore celles liées à la géométrie locale. Ces dérivées peuvent être exprimées, selon les équations dans lesquelles elle figurent, de manière globale sous forme de gradient ou bien de dérivées locales par rapport à une base locale, précédemment définie. Plusieurs équations présentées dans la théorie font intervenir des dérivées spatiales locales. Il est ainsi possible de retrouver, dans les deux équations de surface libre, les gradients du potentiel et de l'élévation de surface libre. De même, le gradient du potentiel sur le corps figure dans l'équation de Bernoulli pour l'intégration des efforts hydrodynamiques sur le corps. De plus la condition sur le corps du problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel impose de connaître non seulement les dérivées locales premières du potentiel sur le corps, mais également les secondes.

Deux méthodes ont été mises en œuvre afin de déterminer les dérivées spatiales. La première se base sur la discrétisation linéaire des facettes, utilisée pour calculer analytiquement les coefficients d'influence. Cette approximation est néanmoins assez grossière et ne permet pas forcément d'obtenir des résultats suffisamment précis, notamment pour les dérivées secondes.

La seconde méthode utilise l'approximation par des fonctions d'interpolation locale b-splines des grandeurs dont on cherche les dérivées spatiales. La précision du calcul des dérivées dépend alors de l'ordre des b-splines choisies, mais également du voisinage nécessaire à la détermination de ces dernières.

#### 4.3.1 Implémentations numériques

Le gradient peut se calculer en s'appuyant sur les valeurs des grandeurs sur les points alentours du point considéré, en utilisant différentes approximations. Cette méthode ne donne accès qu'aux composantes surfaciques du gradient, puisque les points sont uniquement positionnés sur les surfaces du domaine. Il est alors nécessaire d'ajouter la composante normale pour obtenir le gradient complet.

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_s + \frac{\partial}{\partial n} \vec{n} \quad (4.22)$$

#### Discrétisation linéaire

La discrétisation linéaire des grandeurs sur les facettes est utilisée principalement pour le calcul analytique des coefficients d'influence. Cette approximation implique que le gradient surfacique des grandeurs est constant sur la facette. Il a été montré qu'il pouvait être exprimé en fonction des valeurs de la grandeur aux sommets de la facette et d'une matrice ne dépendant que des caractéristiques géométriques de la facette.

$$\vec{\nabla}_s \phi = \vec{\Sigma} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Cette matrice peut être stockée pour les différents calculs de gradient puisqu'elle ne varie que si la géométrie de la facette est modifiée.

Ainsi si l'on souhaite exprimer le gradient en un nœud, il est possible de définir une approximation s'appuyant sur les gradients des facettes dont fait partie le nœud, pondérés par l'angle au sommet de la facette

$$\vec{\nabla}_s \phi(N_i) \simeq \sum_{j=1}^{N_i} \alpha(i, j) \vec{\nabla}_s \phi(F_j) \quad (4.24)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_s \phi(N_i), \text{ le gradient surfacique du nœud } i, \\ \vec{\nabla}_s \phi(F_j), \text{ le gradient surfacique de la facette } j, \\ N(i), \text{ le nombre de facettes dont fait partie le nœud } i, \\ \alpha(i, j), \text{ l'angle au sommet constitué par le nœud } i, \text{ de la facette } j. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Cette approximation, pondérée de telle manière, ne possède pas de fondement mathématique mais donne des résultats proches du gradient réel surfacique.

La dérivée locale selon un paramètre,  $u$ , de la base locale au nœud est alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \vec{\nabla}_s \phi \cdot \vec{u} \quad (4.26)$$

Le gradient total est finalement obtenu en ajoutant la composante normale manquante.

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla}_s \phi + \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \quad (4.27)$$

Pour obtenir les dérivées secondes, il est possible d'itérer cette méthode en déterminant le gradient surfacique de chaque composante du gradient. Le gradient surfacique du gradient donne alors accès aux dérivées secondes locales via

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{u} \quad (4.28)$$

Cette approximation donne cependant des résultats de précision faible pour les dérivées secondes. La méthode par approximation par b-splines permet d'obtenir de bien meilleurs résultats, pour des temps de calcul raisonnables.

**Gestion des symétries :** Dans le cas de symétrie, des effets de bord sont rencontrés pour les nœuds positionnés sur le plan de symétrie. Il manque en effet la moitié des facettes dans le voisinage des ces nœuds. Le gradient surfacique calculé par cette méthode est alors partiel  $\vec{\nabla}_p$ .

Cependant les conditions de symétrie permettent de corriger ces effets de bords pour obtenir le gradient surfacique total  $\vec{\nabla}$ . Pour un plan de symétrie défini par sa normale

$\vec{n}_{ps}$ , la condition de symétrie impose que la composante normale au plan de symétrie du gradient est nulle. Dans les directions transverses ( $\vec{u}_{ps}, \vec{v}_{ps}$ ), l'absence de la moitié des facettes peut simplement être compensée en multipliant par deux les composantes transverses du gradient, partiel  $\vec{\nabla}_p$ , calculée par cette méthode. Soit

$$\begin{cases} \vec{\nabla} & = 2 \cdot \vec{\nabla}_p \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{n}_{ps} & = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

### Approximation par b-splines

L'approximation par b-splines a été étudiée par Pelletier, lors de sa thèse de doctorat [37]. Les développements suivants sont tirés de son mémoire. Les principaux résultats sont explicités, étendus et adaptés à notre étude.

L'approximation par b-spline est très populaire pour des maillages déstructurés de surface décrite de façon paramétrique. Dans notre cas, la surface libre peut être décrite de telle manière, puisqu'elle est paramétrée à partir de son élévation  $z = \eta(x, y, t)$ . Les paramètres sont alors les coordonnées  $(x, y)$  des points de contrôle.

**Voisinage :** L'approximation est estimée en un point de contrôle à l'aide des fonctions d'interpolation locales de type b-spline, à partir des valeurs sur un semis de points voisins. Ces points proches du point de contrôle peuvent être classés selon leur ordre de voisinage. L'ordre de voisinage est défini par le nombre minimum de points intermédiaires nécessaires pour relier le point de contrôle au point voisin en terme de facettes. Le

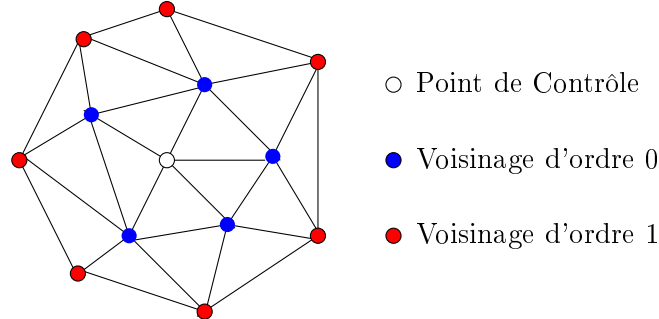


FIGURE 4.9 – Ordre de Voisinage

nombre de points voisins d'un ordre de voisinage n'est à priori pas connu. Si le nombre de points voisins d'ordre 0 n'est pas suffisant pour obtenir une précision suffisante de l'interpolation, les points d'ordre 1 peuvent être ajoutés au voisinage.

**Expressions des fonctions d'interpolation de type b-splines :** Les fonctions d'interpolation locale sont données par la nomenclature de Lafranche [28]. Elles peuvent être de plusieurs types, mais seules les splines de type plaque mince et les splines Pseudo-Polynômiales seront présentées ici.



Les Spline de type plaque mince,  $\sigma$ , sont définies par

$$\sigma(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i |u - u_i|^2 \log |u - u_i| + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \cdot x + \alpha_{n+3} \cdot y \quad (4.30)$$

Les Splines Pseudo-Polynômiales d'ordre  $m$ ,  $\sigma_m$ , sont quant à elles de la forme

$$\sigma_m(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i |u - u_i|^{2m-1} + P_{m-1}(u) \quad (4.31)$$

$u = (x, y)$  est le vecteur coordonnées local du point considéré, tandis que  $u_i = (x_i, y_i)$  correspond à celui du  $i^e$  point voisin. Les polynômes sont définis selon leur ordre par

$$P_{m-1}(u) = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \cdot x + \alpha_{n+3} \cdot y + \alpha_{n+4} \cdot x^2 + \alpha_{n+5} \cdot xy + \dots + \alpha_{n+m} \cdot (m+1)/2 \cdot y^{m-1} \quad (4.32)$$

Les coefficients d'interpolation local,  $\alpha_{i,(i=0,n)}$  doivent vérifier, pour tout  $v$  appartenant à l'ensemble des polynômes de degré  $m - 1$ , la relation

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot v(u_i) = 0 \quad (4.33)$$

Le degré  $m$  des polynômes détermine l'ordre de la spline pseudo polynomiale mais également les propriétés de continuité de celle-ci :  $\sigma_m$  est  $C^{2m-2}$ . La spline de type plaque mince est quant à elle  $C^1$ .

Afin d'obtenir des gradients continus à l'interface des facettes, une spline pseudo-polynomiale d'ordre minimum 1 est nécessaire. Des tests comparatifs ont été effectués par Pelletier [37] avec des splines de type plaque mince et pseudo-polynômiales d'ordre 2 et 3. Seules les splines de type plaque mince et des splines pseudo-polynomiales d'ordre 3 et 4 sont utilisées dans notre cas.

**Détermination des coefficients d'interpolation :** Les formulations de ces splines font apparaître des coefficients d'interpolation, qu'il est nécessaire de déterminer pour obtenir l'approximation voulue. La condition d'interpolation d'une grandeur  $F$  sur  $n$  points voisins ( $P_i, i = 0, n$ ) conduit à l'établissement des systèmes linéaires suivants.

Pour les Splines de type plaque mince, le système est

$$\begin{cases} \sigma(u_i) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j K(i, j) + \alpha_{n+1} + x_i \alpha_{n+2} + y_i \alpha_{n+3} = F_i, \forall i \in [0, n] \\ \sum_0^n \alpha_i u_i &= 0 \\ K(i, j) &= |u_j - u_i|^2 \log |u_j - u_i| \end{cases} \quad (4.34)$$

Soit sous forme vectorisée

$$\begin{bmatrix} K(0,0) & \dots & K(0,n) & 1 & x_0 & y_0 \\ \dots & K(i,j) & \dots & 1 & x_i & y_j \\ K(n,0) & \dots & K(n,n) & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_i & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_0 & y_i & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_i \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \alpha_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_i \\ F_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour les Splines de Pseudo-Polynômes, le système est

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m(u_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j K(i, j) + P_{m-1}(u_i) = F_i, \quad \forall i \in [0, n] \\ \sum_0^n \alpha_i u_i = 0 \\ K(i, j) = |u_j - u_i|^{2m-1} \\ P_{m-1}(u_i) = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \cdot x_i + \alpha_{n+3} \cdot y_i + \alpha_{n+4} \cdot x_i^2 + \alpha_{n+5} \cdot x_i y_i + \dots + \alpha_{n+m} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot y_i^{m-1} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Soit sous forme vectorisée

$$\begin{bmatrix} K(0,0) & \dots & K(0,n) & 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0 y_0 & y_0^2 \\ \dots & K(i,j) & \dots & 1 & x_i & y_j & x_i^2 & x_i y_j & y_j^2 \\ K(n,0) & \dots & K(n,n) & 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_0 & x_i & x_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ y_0 & y_i & y_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_0^2 & x_i^2 & x_n^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_0 y_0 & x_i y_i & x_n y_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ y_0^2 & y_i^2 & y_n^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_i \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \dots \\ \alpha_{n+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_i \\ F_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système linéaire possède une taille différente selon le type de spline utilisée. Les splines de type plaque mince requièrent  $n + 4$  coefficients ( $\alpha_i, i = 0, n + 3$ ), tandis que les pseudo-polynômes d'ordre 3 en requièrent  $n + 7$ , avec  $n$  le nombre de points voisins. Il nous faut alors ajouter une condition sur le nombre de points nécessaires :  $N_{Voisins} > 4$  dans le cas de splines de type plaque mince et  $N_{Voisins} > 7$  pour les splines pseudo-polynômes d'ordre 3, pour la bonne résolution de ces systèmes linéaires.

**Dérivées locales :** Lorsque les coefficients d'interpolation ont été déterminés, la grandeur  $F$  peut alors être approximée à l'aide des fonctions d'interpolation. Les dérivées spatiales selon les deux paramètres (i.e. le gradient surfacique) peuvent être développées en différentiant les expressions analytiques des fonctions d'interpolation.

Pour les Splines de type plaque mince, les dérivées sont exprimées comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x - x_i) (2 \cdot \log|u - u_i| + 1) + \alpha_{n+2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (y - y_i) (2 \cdot \log|u - u_i| + 1) + \alpha_{n+3} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Pour les Splines Pseudo-Polynômiales d'ordre  $m$ , les dérivées sont calculées par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(u) = (2m-2) \sum_{i=0}^n \alpha_i (x-x_i) |u-u_i|^{2m-2} + \frac{\partial P_{m-1}}{\partial x}(u) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(u) = (2m-2) \sum_{i=0}^n \alpha_i (y-y_i) |u-u_i|^{2m-2} + \frac{\partial P_{m-1}}{\partial y}(u) \\ \frac{\partial P_{m-1}}{\partial x}(u) = \alpha_{n+2} + 2\alpha_{n+4} \cdot x + \alpha_{n+5} \cdot y + \dots \\ \frac{\partial P_{m-1}}{\partial y}(u) = \alpha_{n+3} + \alpha_{n+5} \cdot x + 2\alpha_{n+6} \cdot y \dots \end{array} \right. \quad (4.37)$$

**L'élévation de surface libre :** L'élévation de surface libre est une fonction pouvant s'exprimer en fonction de deux paramètres  $u = (x, y)$ . Ainsi il est possible d'approximer directement cette variable par des b-splines.

$$\eta(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_\eta(u, u_i) + P(u) \quad (4.38)$$

et d'en déduire ses dérivées locales selon ces deux paramètres.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta(u)}{\partial x} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\partial f_\eta(u, u_i)}{\partial x} + \frac{\partial P(u)}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(u)}{\partial y} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\partial f_\eta(u, u_i)}{\partial y} + \frac{\partial P(u)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.39)$$

**Le potentiel sur la surface libre :** Le potentiel ne peut être approximé de la même façon que l'élévation de surface libre. En effet, il ne dépend pas seulement des paramètres  $u = (x, y)$ , mais est fonction de  $z$  également. Cependant ce potentiel et ses dérivées locales doivent être approximés sur la position de la surface libre incidente, connue de manière paramétrique. Il est alors possible de ramener ce problème à un problème équivalent à celui de l'élévation de surface libre.

Soit le paramétrage de la surface libre, défini par les fonctions  $(F, f)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, v) = F(x, y, z) \\ (x, y, z) = f(u, v) = (u, v, \eta_0(u, v)) \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Les dérivées partielles de  $F$  selon les deux paramètres  $(u, v)$  peuvent alors être exprimées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u} = \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \end{pmatrix} \\ \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v} = \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Le tenseur métrique lié à ce paramétrage est défini par :

$$G = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} & \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \\ \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} & \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial x} & \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} & 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

et son inverse

$$g = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} & -\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \\ -\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} & \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial y} & -\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} & 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\text{Avec } \Delta = \left(1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial y}\right) - \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} = 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial y}.$$

Avec ce paramétrage de la surface libre, il est alors possible d'approximer le potentiel par des b-splines :

$$\phi(u, v) = \sum_{i=0}^N \beta_i \cdot f_\phi(u, v, u_i, v_i) + P(u, v) \quad (4.44)$$

et de déterminer également les dérivées partielles par rapport à  $u$  et  $v$

$$\frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0}^N \beta_i \frac{\partial f_\phi(u, v, u_i, v_i)}{\partial u} + \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^N \beta_i \frac{\partial f_\phi(u, v, u_i, v_i)}{\partial v} + \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \quad (4.46)$$

Pour obtenir le gradient surfacique de  $\phi$  exprimé sur la surface libre par rapport aux coordonnées  $(x, y, z)$ , on applique le changement de variables donné par Bonnet [6] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}_s \phi(x, y, z) &= \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u} \cdot \left( g_{11} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} + g_{12} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \right) + \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v} \cdot \left( g_{21} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}} + g_{22} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial y} \\ -\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \\ 1 + \frac{\partial \eta_0^2}{\partial x} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

**Généralisation à des surfaces orientées de manière quelconque :** L'approximation par b-spline est applicable à toute surface paramétrée et pas seulement au cas  $z = f(x, y)$ , que nous avons traité jusqu'à présent. Ce cas est en effet le cas fondamental permettant d'appliquer l'approximation, mais il est possible de se ramener à celui-ci pour n'importe quelle surface orientée de manière quelconque dans l'espace, par un simple changement de variable. Il suffit d'ajouter un changement de base

$$P : (u, v, n) \longrightarrow (x, y, z) \quad (4.48)$$

avec  $\vec{n}$  la normale au point considéré et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs tangents déterminés à partir de la normale et du point considéré, pour retrouver le cas précédent.

Cela permet alors d'approximer la géométrie locale dans la base locale, et ainsi calculer les dérivées locales par rapport aux paramètres tangentiels et d'obtenir :

- un calcul précis de la normale à partir des dérivées premières de la géométrie locale :  $\vec{n} = [\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, -1]$  à normaliser et ramener dans la base globale.
- les courbures selon les paramètres tangentiels :  $k_u = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$  et  $k_v = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ .

Les dérivées premières et secondes de la géométrie locale sont stockées pour la suite, associées à la base locale utilisée, car les premières servent au calcul des gradients surfaciques du potentiel décrit par l'équation (4.47). Les dérivées secondes servent quant à elles au calcul des courbures.

**Dérivées secondes :** Les dérivées secondes sont déterminées dans le cas de l'approximation de la surface pour obtenir les courbures locales. Mais les dérivées secondes du potentiel sur le corps sont également nécessaires dans la résolution de la condition sur le corps pour le problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel.

Plusieurs méthodes sont possibles avec l'approximation par b-splines. Il est en effet possible de calculer directement ces dérivées secondes de l'approximation de la variable considérée. Cela requiert cependant des splines d'ordre au minimum 2, ce qui n'est pas le cas des splines de type plaque mince. De plus, la précision de ces dérivées secondes est beaucoup plus faible que celle des dérivées premières. Augmenter l'ordre des splines est possible, en passant par exemple à des splines pseudo-polynômiales d'ordre 4, mais celles-ci nécessitent un nombre de points de voisinage plus important, qu'il faut alors aller chercher plus loin du point de référence.

Une autre possibilité est d'approximer les dérivées premières de la variable à l'aide de b-splines pour en déterminer les dérivées secondes. Cette méthode s'est avérée plus précise que le calcul direct, mais nécessite de faire attention à la dérivée calculée.

En effet, déterminer les dérivées secondes du potentiel sur le corps requiert de passer par le paramétrage de la surface du corps. Ainsi si le calcul direct donne bien les dérivées secondes du potentiel selon les deux paramètres tangents  $\frac{\partial \phi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ , ce n'est pas le cas avec la seconde méthode.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = \left( \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{u} \right) \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Soit

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = \left( \bar{\bar{\nabla}}(\bar{\nabla} \phi) \cdot \bar{u} \right) \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \phi \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \quad (4.49)$$

Le second terme de droite permet de prendre en compte la variation du paramètre  $u$  le long de la surface. Chaque point de contrôle possède en effet sa propre base normale, définie à l'aide de sa normale, qui peut être différente de ses voisins. Il est possible de passer des dérivées locales au gradient dans la base globale à l'aide de la formule donnée par Bonnet. Cependant pour approximer les dérivées locales en un point, il est nécessaire d'exprimer celles des points voisins dans la base locale du point considéré, différente de celles des points voisins. Il serait possible de passer de la base locale du point voisin à celle du point considéré avec la formule de Bonnet, mais il est plus simple de repasser par la base globale.

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \bar{\nabla} \phi \cdot \bar{u} \quad (4.50)$$

Ce changement de base (locale(voisin)→globale → locale(point considéré)) ne prend cependant pas en compte la variation de la base le long de la surface, à la différence de la formule donnée par Bonnet. Les dérivées secondes calculées à l'aide de la seconde méthode ne sont alors pas  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}$  mais  $\left( \bar{\bar{\nabla}}(\bar{\nabla} \phi) \cdot \bar{u} \right) \cdot \bar{u}$ .

**Voisinage :** La bonne définition du voisinage de points à utiliser est primordiale et impacte directement le résultat obtenu. En effet, la résolution du système linéaire pour déterminer les coefficients d'interpolation impose un nombre de points voisins minimum. Cependant utiliser plus de points de voisinage que nécessaire n'est pas forcément un gage de précision de la solution. Cela nécessite d'aller chercher des points voisins plus loin du point de contrôle. La précision de la solution a été définie comme dépendant de la plus grande distance des points voisins au point de contrôle,  $d$ . L'erreur sur les dérivées d'ordre  $\beta$  est de l'ordre de  $O(d^{m-\beta})$ .

De la même façon, utiliser des splines d'ordre  $m$  supérieur impose un voisinage lui aussi plus important. D'après l'expression de l'erreur ci-dessus, on voit aisément que si  $m$  et  $d$  augmentent, l'erreur peut être supérieure avec une spline d'ordre élevé et un voisinage important qu'une spline d'ordre faible et un voisinage restreint.

De même, les points de voisinage doivent être répartis uniformément autour du point de contrôle. Si ce n'est pas le cas, la précision de la solution de la dérivée dans la direction où les points voisins sont réduits risque d'en pâtir.

**Gestion des symétries :** La symétrie introduit également des effets de bord au niveau du plan de symétrie. Il est théoriquement possible de gérer ce problème de la même manière que pour la discrétisation linéaire. Cependant une autre méthode basée sur des points virtuels est plus avantageuse. Les points virtuels sont des points symétriques aux points réels du voisinage, dont la valeur de la grandeur est égale à leur symétrique. Introduire ces points virtuels a le grand avantage de pouvoir réduire le voisinage, qui autrement serait obligé d'aller chercher des points plus loin pour respecter la condition de points minimum pour la résolution du système.

Cependant ces points virtuels doivent être utilisés non seulement pour les points présents sur le plan de symétrie, mais également pour ceux proches de ce plan, ce qui complexifie la définition du voisinage.

**Solveur utilisé :** La résolution du système linéaire pour l'obtention des coefficients d'interpolation est réalisée grâce au solveur direct LU. Le système est en effet de taille réduite et ne nécessite donc pas l'utilisation d'un solveur itératif.

### Gestion des bords

Ces deux méthodes d'approximation présentent un défaut majeur pour des points de contrôle proches des bords. Pour ces points, il manque en effet une partie de l'information, à cause d'une troncature du voisinage dans une direction. Des effets de bords classiques sont alors obtenus. La méthode suivante permet de corriger ces erreurs, en prenant en compte la variation locale au franchissement de la frontière.

Les bords représentent une discontinuité de la normale à la géométrie (surface libre ou matérielle) puisque la surface englobant le domaine fluide est théoriquement fermée. Seul le cas de domaine ouvert possède des bords libres pour l'extérieur de la surface libre. La solution étant censée être nulle ou très faible à ces endroits, ce dernier cas ne pose pas de difficultés.

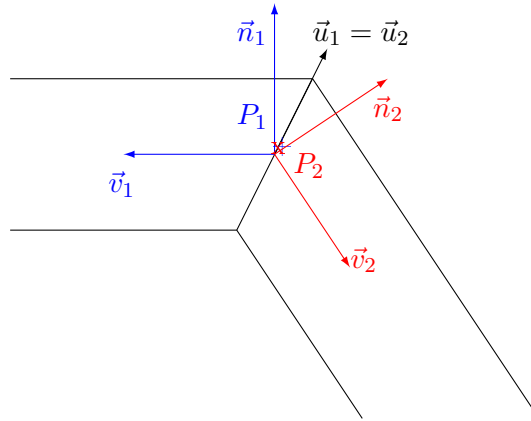


FIGURE 4.10 – Schéma des bases locales de nœuds doubles

La gestion des bords dans la résolution des problèmes aux limites est réalisée grâce à des points doubles. À un point géométrique à l'intersection de deux faces de normales différentes,  $(n_1, n_2)$  sont associés deux nœuds, appelés nœuds doubles, respectivement  $(P_1, P_2)$  (cf figure 4.10).

Une grandeur  $\sigma$  et son gradient sont supposés continus au passage du bord, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \phi(P_1) & = & \phi(P_2) \\ \vec{\nabla}\phi(P_1) & = & \vec{\nabla}\phi(P_2) \end{cases} \quad (4.51)$$

Il est possible d'écrire les vecteurs locaux  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  associés à chacun des nœuds en fonction l'un de l'autre et des vecteurs normaux.

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2) \vec{n}_2 \\ \vec{v}_2 &= (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 \end{cases} \quad (4.52)$$

les dérivées locales selon les vecteurs locaux  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} &= \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial v_2} &= \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_1 \\ &= (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) \left( (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_2 \right) + (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_1 \end{cases} \quad (4.53)$$

Soit

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} &= \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) (\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2)}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)} + \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2)}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v_2} &= \frac{\partial \phi}{\partial n_1} \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2)}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)} + \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2)}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)} \end{cases} \quad (4.54)$$

La composante du gradient selon la dernière direction  $\vec{u}$  peut être déterminée par l'une des deux méthodes précédemment présentées.

### 4.3.2 Validations

#### Dérivées spatiales sur la Surface Libre

Les dérivées spatiales à déterminer sur la surface libre sont celles intervenant dans le gradient de la déformée de surface libre et du potentiel. La dérivée normale n'est pas calculée par ces méthodes puisque le calcul s'appuie sur les valeurs des grandeurs sur la surface. Elle sera alors retranchée du gradient, donnant ainsi le gradient surfacique. Ainsi les comparaisons avec les solutions analytiques ne feront pas intervenir de terme analytique dans les grandeurs calculées numériquement.

Une solution analytique connue est imposée pour le potentiel et la déformée de surface libre, comme par exemple celle d'une houle d'Airy. Les dérivées spatiales sont alors calculées par les différentes méthodes et comparées à la solution analytique.

L'erreur relative est donnée pour un gradient par

$$\epsilon = \frac{\| \vec{\nabla} \sigma_n - \vec{\nabla} \sigma_a \|}{\text{Max}(\| \vec{\nabla} \sigma_a \|)} \quad (4.55)$$

#### Dérivées Spatiales de la Déformée de Surface Libre

Le calcul des dérivées spatiales de la déformée de surface libre ne dépend pas de la surface puisque la déformée exprime justement la variation verticale de la surface libre en



fonction des coordonnées horizontales du point considéré. L'erreur relative du gradient surfacique de la déformée est alors tracée pour un maillage de surface libre cylindrique et un calcul des dérivées par approximation linéaire fig 4.11a, b-splines plaque mince fig 4.11b et b-splines Polynomiale d'ordre 3, fig 4.12a et 4, fig 4.12b.

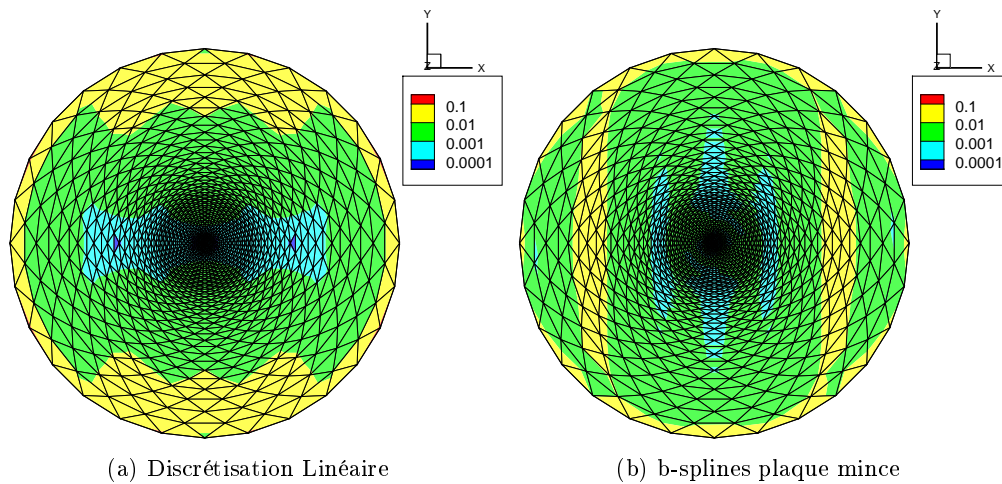


FIGURE 4.11 – Erreur Relative (%) du gradient de la déformée pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log

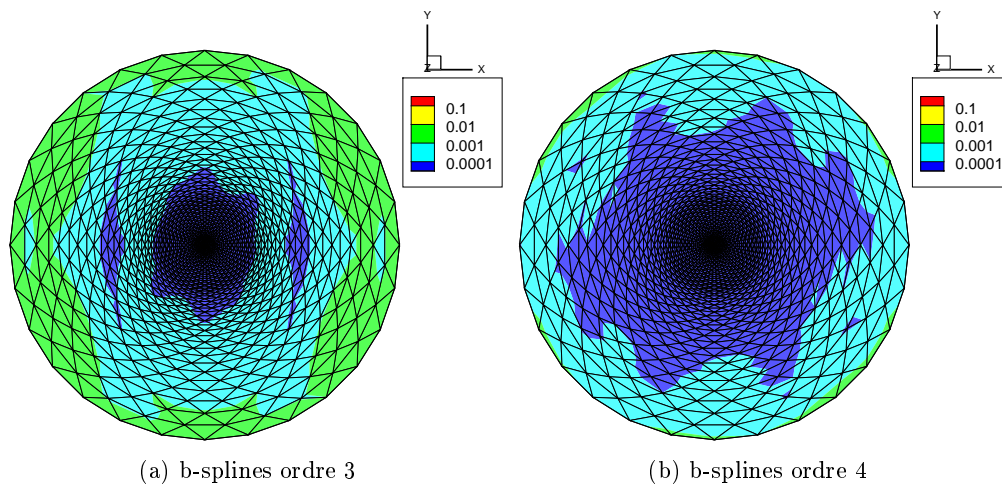


FIGURE 4.12 – Erreur Relative (%) du gradient de la déformée pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log

L'erreur relative est maximale sur le pourtour de la surface libre, comme attendu. Il manque en effet pour ces nœuds une partie de l'information puisque leurs voisinages

ne sont pas centrés sur eux, d'où l'effet de bord observable. La précision est meilleure pour des degrés d'approximation supérieurs. L'erreur est sensiblement du même ordre de grandeur pour la méthode par discrétisation linéaire des facettes et par b-splines plaque mince. Ces deux méthodes présentent effectivement les mêmes ordres d'approximation. Les b-splines d'ordre 3 et 4, naturellement d'ordre d'approximation supérieur, présentent un ordre d'erreur à chaque fois supérieur,  $10^{-5}\%$  et  $10^{-6}\%$ . La troisième constatation possible est l'amélioration de la précision au centre de la surface libre, où les mailles y sont plus concentrées. Cela confirme que la convergence en maillage est avérée. Cependant pour le cas des b-splines d'ordre 4, une irrégularité est présente au centre, due au trop grand nombre de nœuds voisins. Elle est peu visible sur la figure 4.12b, mais l'erreur relative y est de 3.7%, à comparer avec les  $10^{-3}\%$  de ses voisins.

### Dérivées spatiales du potentiel en $z = 0$

La houle d'Airy est une houle linéarisée sur la position moyenne de la surface libre,  $z = 0$ . Ainsi pour obtenir l'approximation du potentiel équivalente à celle de la houle d'Airy, il est nécessaire de positionner la surface libre sur la position moyenne,  $z = 0$ , et celle donnée par la houle d'Airy. Des conclusions très similaires à celles pour les dérivées spatiales de la déformée de surface libre peuvent être tirées pour les dérivées spatiales du potentiel, tracées figures 4.13a, 4.13b, 4.14a et 4.14b.

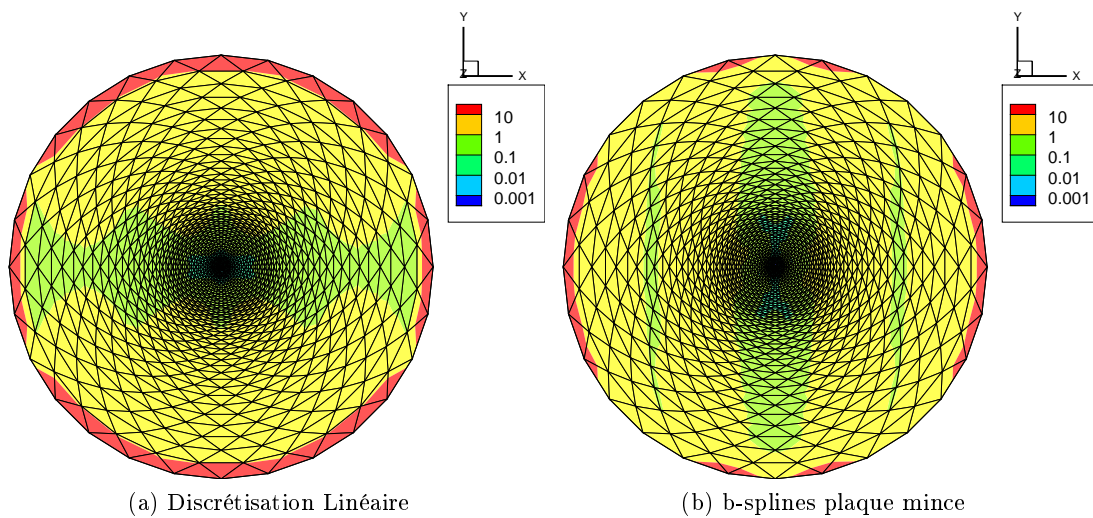


FIGURE 4.13 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, en  $z = 0$

Les effets de bords sont nettement plus visibles pour les dérivées du potentiel. De manière générale, les erreurs relative pour ces dérivées sont d'un ordre supérieur à celles pour les dérivées de la déformée. Il est cependant toujours possible de retrouver les mêmes écarts d'ordre d'erreur selon l'ordre d'approximation de la méthode d'approximation utilisée.

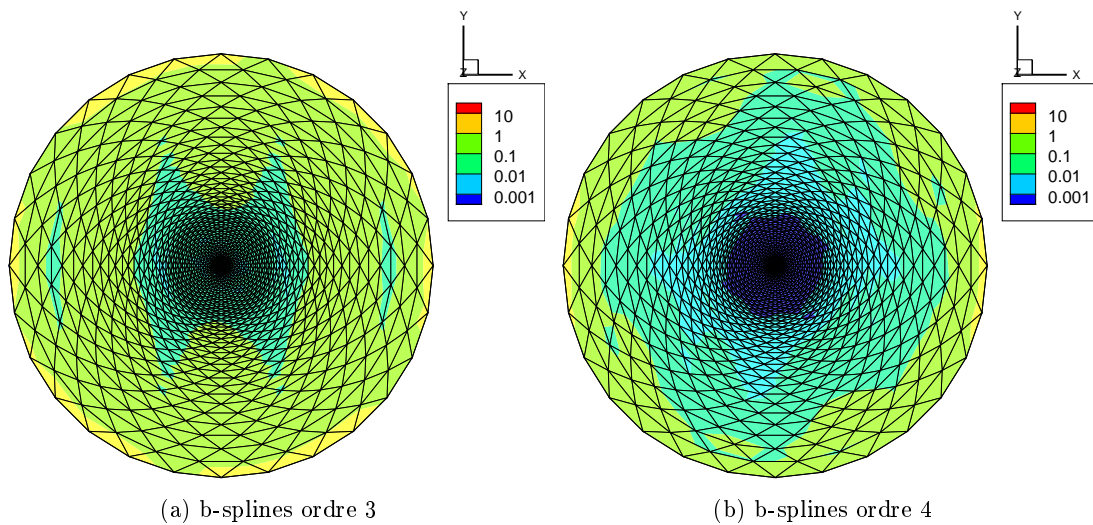


FIGURE 4.14 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, en  $z = 0$

L'irrégularité au centre de l'approximation par b-splines d'ordre 4 est également présente à un degré bien plus important : l'erreur relative  $y$  est de 200%. Cette méthode est donc à proscrire sur ce type de voisinage. Les b-splines d'ordre 3 donnent de toute manière des résultats de précision acceptable pour un temps de calcul bien moindre.

#### Dérivées spatiales du potentiel en $z = \eta$

La houle de Rienecker et Fenton est une houle complètement non linéaire. Le potentiel et ses dérivées sont donc exprimés sur la position de la surface libre donnée par la solution de la déformée de surface libre. À la différence du paragraphe précédent, l'approximation du potentiel est alors réalisée sur la position de la surface libre,  $z = \eta$  et non plus sur sa position moyenne. L'erreur sur le gradient du potentiel en  $z = \eta$  est ainsi tracé pour les quatre approximations, figures 4.15a, 4.15b, 4.16a et 4.16b.

La prise en compte de la variation de la géométrie locale, ie la déformée de surface libre, accentue les erreurs relatives obtenues, notamment sur les bords. Cependant la précision de la solution reste acceptable au centre de la surface libre, avec une erreur relative inférieure à 2% pour toutes les approximations. La validation de la prise en compte de la variation de la géométrie est alors établie. Les conclusions similaires à celles faites précédemment peuvent sinon être énoncées : la convergence en maillage est visible, l'ordre d'approximation influence bien la précision de la solution et une irrégularité est toujours présente au centre pour des b-splines d'ordre 4.

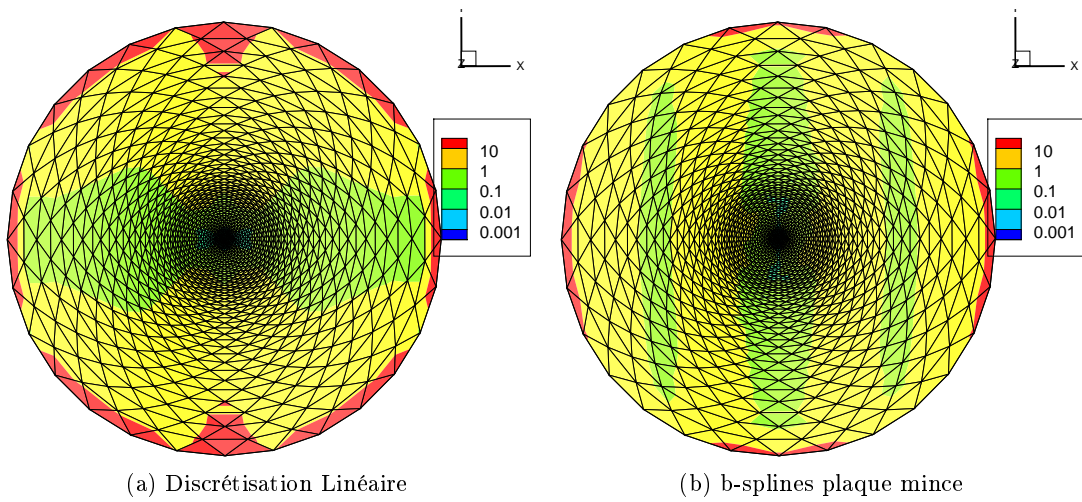


FIGURE 4.15 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discretisation Linéaire et les b-splines plaque mince, en  $z = \eta$

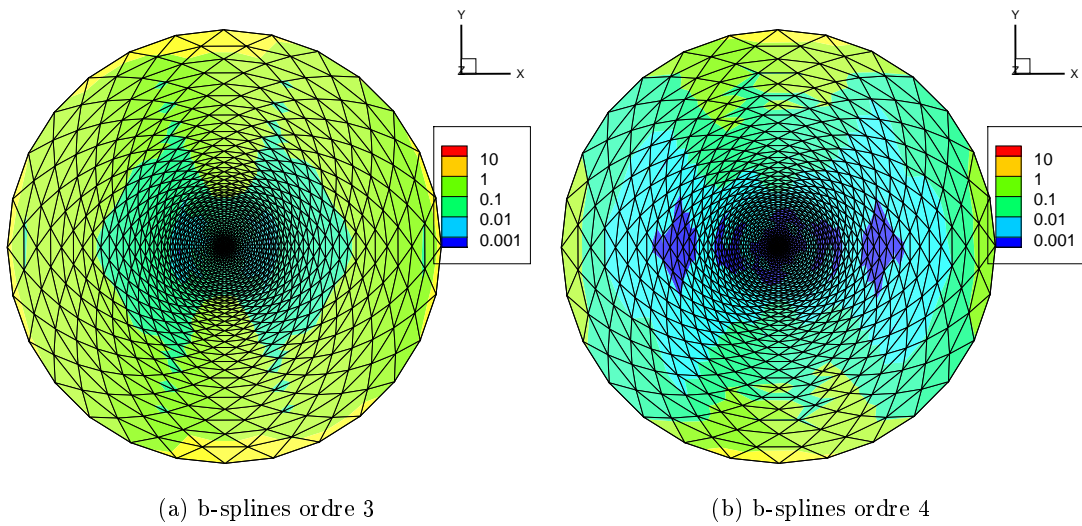


FIGURE 4.16 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, en  $z = \eta$

**Temps de Calcul :** Les temps de calcul relatifs aux différentes approximations peuvent être comparés. Cependant seuls les temps des calculs effectifs d'approximation et dérivéation sont relevés. Ceux de la recherche des points voisins, étape nécessaire à l'approximation par b-splines, ne sont pas ajoutés puisque cette étape n'est réalisée qu'une seule fois au début de la simulation.

Les temps de calcul pour ce maillage ne dépassant pas les  $0.1s$ , un maillage plus conséquent de la surface libre ( $N_{noeud} = 4400$ ) est utilisé pour donner une meilleure comparaison de ceux-ci. Les erreurs relatives maximales sont données à titre de compa-

Approximation	$\epsilon_{max}(\eta)$	$\epsilon_{max}(\phi)$	Temps CPU
Discrétisation Linéaire	0.11%	52%	0.01s
b-splines plaque mince	$2.13 \cdot 10^{-2}\%$	13%	0.25s
b-splines ordre 3	$1.74 \cdot 10^{-3}\%$	0.60%	0.36s
b-splines ordre 4	0.25%	55%	0.53s

TABLE 4.3 – Comparaison des performances en précision et temps de calcul des différentes méthodes de calcul des dérivées locales

raison, puisque certaines sont localisées sur le pourtour de la surface libre et d'autres, notamment pour les b-splines d'ordre 4, au centre de la surface libre. Il est possible de constater cependant que les b-splines d'ordre 3 donnent le meilleur rapport de précision sur temps de calcul, l'erreur maximale étant inférieure au pourcent. Les erreurs très importantes ( $\epsilon_\eta = 0.25\%$ ,  $\epsilon_\phi = 55\%$ ) pour les b-splines d'ordre 4 sont localisées au centre de la surface libre, présentant une singularité pour la sélection des points voisins (maillage cylindrique). Les temps CPU de détermination des dérivées spatiales restent bien inférieurs à ceux de résolution du problème aux limites, calcul de coefficient inclus, pour un nombre de nœuds équivalent.

### Dérivées Locales sur le Corps

Les dérivées spatiales du potentiel sur les corps sont validées en imposant, de la même façon que sur la surface libre, une solution analytique connue, celle d'une houle de Rienecker et Fenton sur un corps sphérique.

La sphère de rayon  $2m$ , avec une discrétisation non structurée. La discrétisation polaire habituelle génère en effet des singularités aux pôles pour le voisinage. Le nombre de nœuds est de 1026 pour 2048 facettes. Le paramétrage local de la sphère est défini par les coordonnées sphériques en longitude et colatitude. Le premier vecteur tangent est donc porté par la longitude tandis que le second par la latitude, orienté de manière à ce que la base soit directe avec la normale extérieure au corps.

La houle choisie possède une longueur d'onde de  $8m$ , pour une amplitude de  $0.2m$ , soit une courbure de 5%. La solution du potentiel sur la sphère est présentée figure 4.17a, avec celles de ses dérivées selon les deux paramètres tangentiels, sur les figures 4.17b et 4.17c.

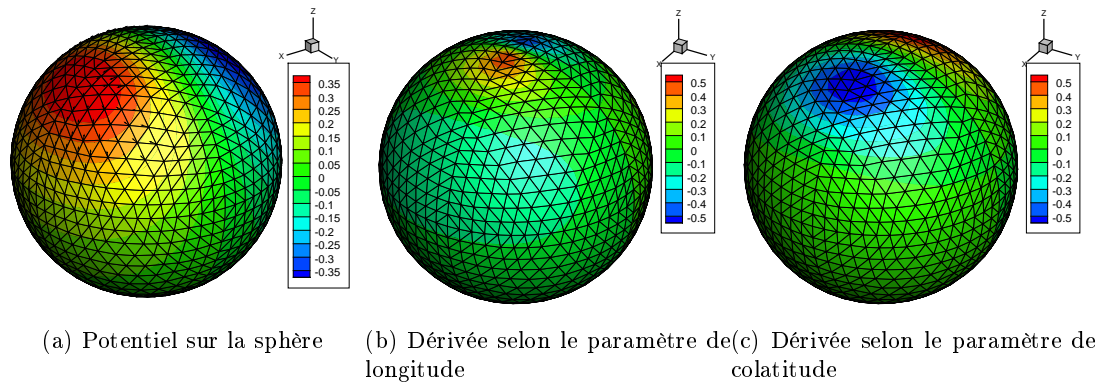


FIGURE 4.17 – Potentiel et ses dérivées tangentielles sur la sphère

**Gradient Surfaccique :** Les dérivées secondes locales du potentiel doivent être vérifiées en plus de son gradient surfaccique. Cependant le passage du gradient surfaccique aux dérivées locales premières étant direct, valider le gradient surfaccique valide également les dérivées premières. Les erreurs relatives des calculs du gradient surfaccique pour les 4 approximations sont présentées dans un premier temps, figures 4.18a, 4.18b, 4.19a et 4.19b.

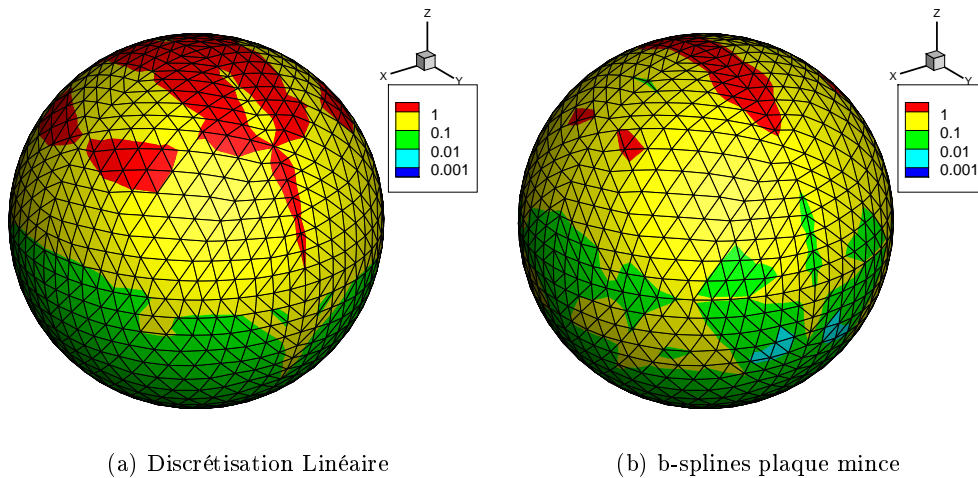


FIGURE 4.18 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log

L'ordre de précision est retrouvée similaire pour les approximation par discrétisation linéaire et b-spline plaque mince, tandis que les b-spline d'ordre 3 et 4 présentent un ordre de précision plus élevé à chaque changement d'ordre de spline. Le calcul du gradient du potentiel est cependant validé pour toutes les approximations, l'erreur relative maximum

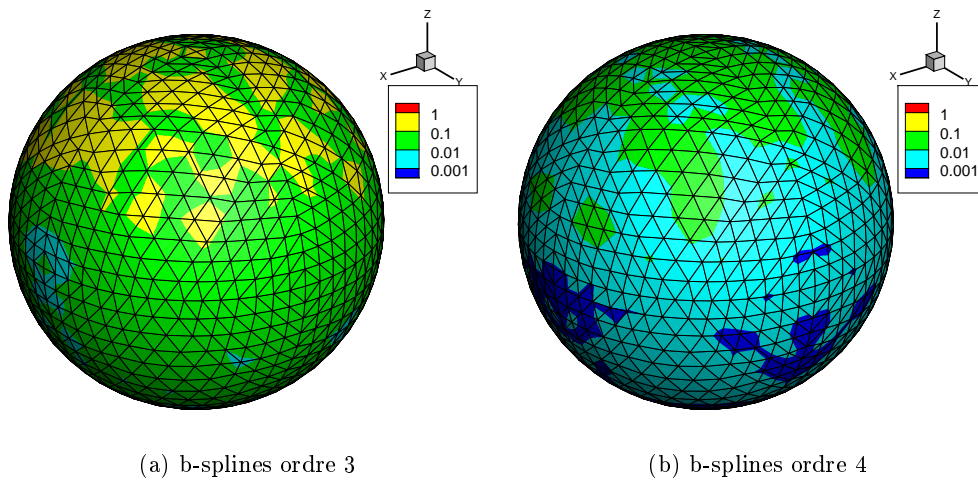


FIGURE 4.19 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log

ne dépassant pas les 2%.

**Dérivées Secondes :** Les erreurs relatives des dérivées secondes sont ensuite présentées pour les 4 approximations. Les erreurs étant très similaires pour les dérivées secondes selon le paramètre de longitude et selon celui de colatitude, seules celles suivant le paramètre de longitude sont exposées, figures 4.20a, 4.20b, 4.21a et 4.21b.

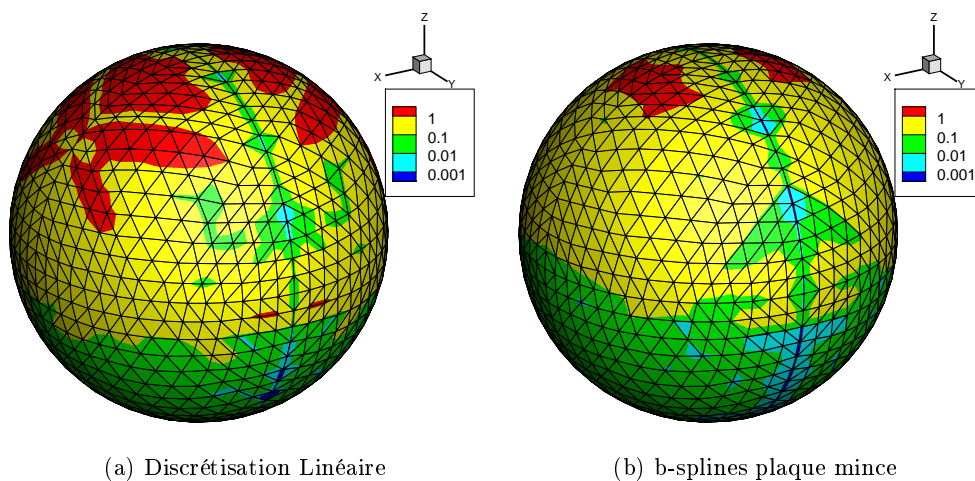


FIGURE 4.20 – Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la Discrétisation Linéaire et les b-splines plaque mince, échelle log

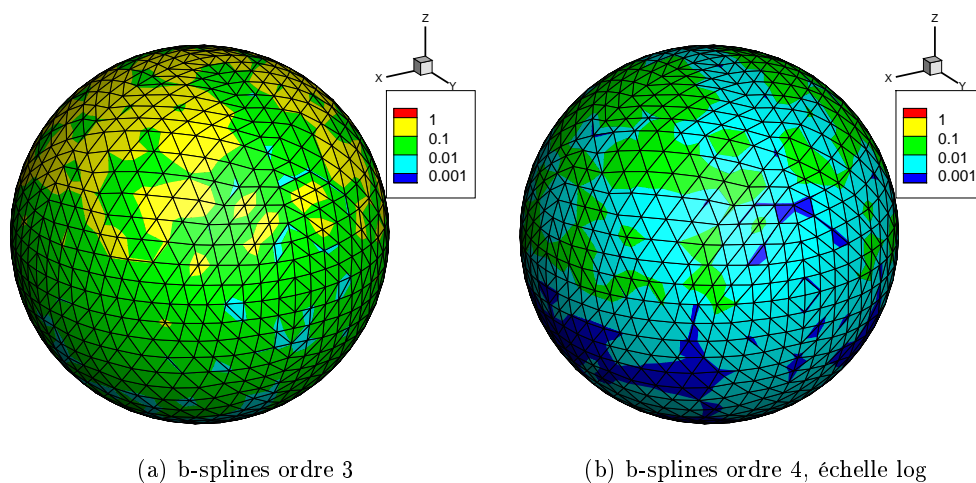


FIGURE 4.21 – Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour les b-splines d'ordre 3 et 4, échelle log

Les mêmes remarques que pour les gradients peuvent être énoncées ici : l'ordre de précision de l'approximation par discrétisation linéaire et b-splines plaque mince est le même. Il est naturellement inférieur à celui du gradient puisque le calcul des dérivées secondes s'appuie sur celui des dérivées premières. L'ordre de précision s'accroît ensuite pour les b-splines d'ordre supérieur. Bien que l'erreur maximale atteigne désormais les 4% pour la discrétisation linéaire, le calcul des dérivées secondes peut être considéré comme validé également. Des splines d'ordre supérieur sont cependant fortement conseillées.

**Comparaison avec la méthode directe :** Une méthode possible pour obtenir les dérivées secondes aurait pu être le calcul direct avec des splines d'ordre au minimum 2. Cependant cette méthode présente des résultats moins précis que celle itérative, employée actuellement (ie appliquer le calcul par approximation par b-splines au potentiel pour obtenir les dérivées premières puis ré-appliquer cette méthode aux dérivées premières).

Une comparaison de ces deux méthodes, directe et itérative, est présentée figures 4.22a et 4.22b, pour les splines d'ordre 3, et figures 4.23a et 4.23b, pour les splines d'ordre 4.

Il apparaît clairement que la méthode directe est loin d'atteindre la précision de la méthode itérative, ce qui a motivé notre choix pour cette dernière.

### Symétrie

On vérifie dans ce paragraphe que la prise en compte de la symétrie verticale est bien réalisée pour le calcul des dérivées locales, premières et secondes, sur le corps, la gestion de la symétrie étant la même sur la surface libre et le corps. La solution de houle non-linéaire de Rienacker et Fenton imposée est bien symétrique et peut donc être utilisée dans cette validation. Seules les approximations par discrétisation linéaire et b-splines



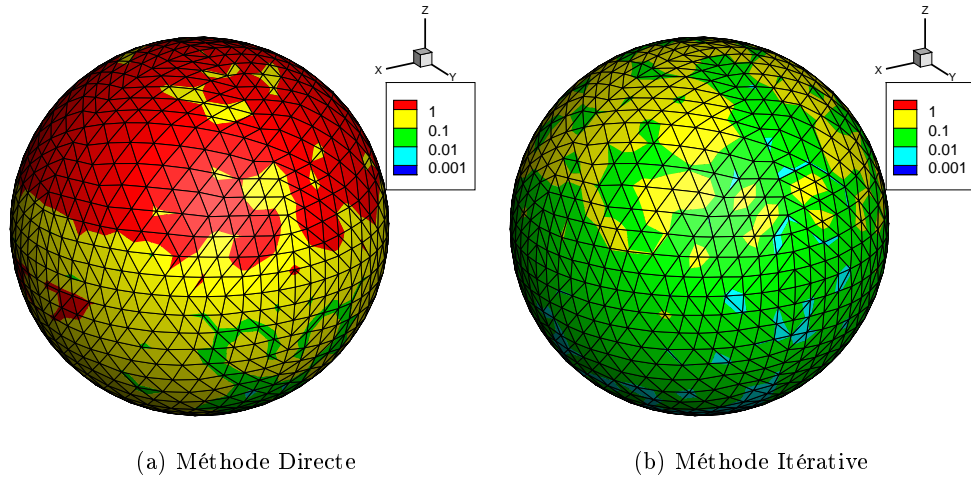


FIGURE 4.22 – Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la b-spline d'ordre 3, échelle log

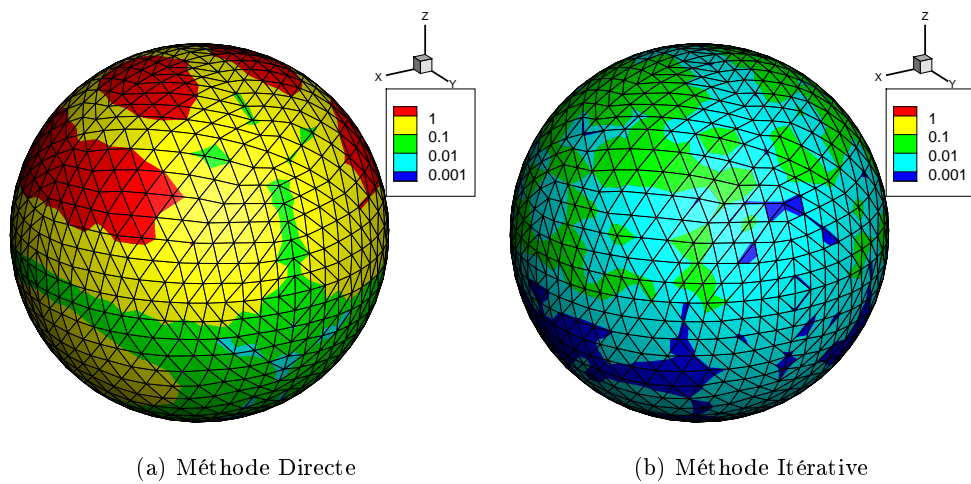


FIGURE 4.23 – Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour la b-spline d'ordre 4, échelle log

d'ordre 3 sont présentées, figures 4.24a, 4.24b, 4.25a et 4.25b, puisque la gestion de la symétrie est similaire pour les différentes b-splines.

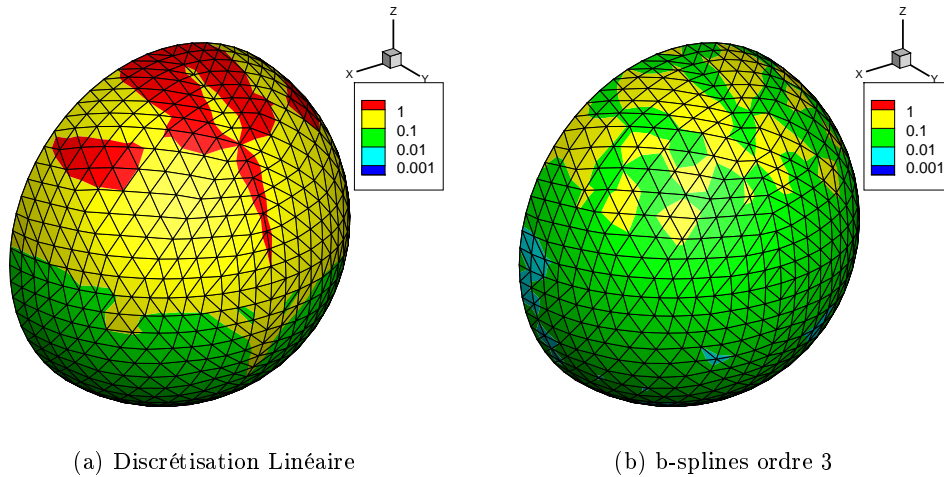


FIGURE 4.24 – Erreur Relative (%) du gradient du potentiel pour les approximations Discrétisation Linéaire et b-splines d'ordre 3, échelle log

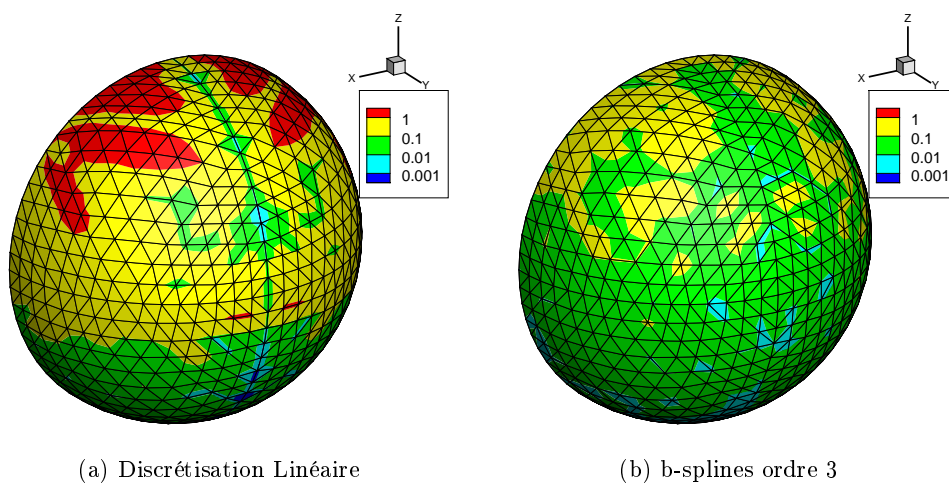


FIGURE 4.25 – Erreur Relative (%) de la dérivée seconde du potentiel selon le paramètre en longitude pour les approximations Discrétisation Linéaire et b-splines d'ordre 3, échelle log

La gestion de la symétrie verticale est correctement réalisée : aucun effet de bords n'est visible au niveau du plan de symétrie. La précision reste similaire à celle obtenue sans le plan de symétrie.

### 4.3.3 Synthèse

Deux classes d'approximations sont implémentées pour le calcul des dérivées locales. La première basée sur la discrétisation linéaire des grandeurs sur les facettes est consistante avec le calcul des coefficients d'influence. Rapide et facile à implémenter, elle est cependant insuffisamment précise pour le calcul des dérivées secondes et à peine suffisante pour celui des dérivées premières.

La seconde se base sur une approximation par fonctions d'interpolation b-splines. Trois types de spline différents sont implémentés : splines de type plaque mince, splines de type polynômiale d'ordre 3 et d'ordre 4. Les splines de type plaque mince présentent une précision équivalente à celle de l'approximation par discrétisation linéaire, avec des temps de calculs supérieurs. Elles ne présente alors que peu d'intérêt.

Les splines polynômiales d'ordre 3 et 4 sont plus précises, d'un ordre de précision supérieur par ordre de polynôme pour les dérivées premières. Cependant elles requièrent un voisinage plus important. Cela signifie que les informations provenant des points voisins les plus loin peuvent perturber l'approximation locale. Ainsi, il est parfois plus judicieux d'utiliser les splines polynômiales d'ordre 3, et non celles d'ordre 4, puisqu'elles nécessitent moins de points voisins.

La définition du voisinage, pour l'approximation par b-splines, est de manière générale capitale : celui-ci doit être centré sur le point considéré et correctement réparti. Il est donc conseillé d'utiliser un maillage uniforme, si possible. Dans le cas de maillages cylindriques, les centres, où un nœud fait parti d'un grand nombre de facettes, constituent des singularités pouvant générer de grandes erreurs. Ces maillages sont donc à éviter.

## 4.4 Module d'avance temporelle

### 4.4.1 Implémentations numériques

#### Schéma utilisé

Le schéma utilisé pour l'avance en temps est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Celui-ci est classique des intégrations temporelles et a été retenu pour sa stabilité. Le pas de temps considéré est actuellement constant mais pourra être envisagé variable dans l'avenir pour gagner en temps de calcul. Une variation de ce schéma, avec un domaine figé pour les quatre passes a été implémenté dans ce même but.

Dans ce schéma, une itération temporelle fait intervenir 4 étapes durant lesquelles est calculée la dérivée temporelle de la grandeur recherchée, avec des conditions dépendant de l'étape. La grandeur,  $f$ , est ensuite avancée en temps à l'aide de sa dérivée  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$

$$f(t + dt) = f(t) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t)dt \quad (4.56)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t) = (k_1 + 2.k_2 + 2.k_3 + k_4) \frac{1}{6} \\ k_1 = \frac{\partial}{\partial t} f(t) \\ k_2 = \frac{\partial}{\partial t} f_1(t + \frac{dt}{2}), \\ k_3 = \frac{\partial}{\partial t} f_2(t + \frac{dt}{2}), \\ k_4 = \frac{\partial}{\partial t} f_3(t + dt), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f_1(t + \frac{dt}{2}) = f(t) + k_1 \frac{dt}{2} \\ f_2(t + \frac{dt}{2}) = f(t) + k_2 \frac{dt}{2} \\ f_3(t + dt) = f(t) + k_3 dt \end{array} \quad (4.57)$$

#### Grandeurs à avancer en temps

Les composantes de perturbation du potentiel sur la surface libre ainsi que de l'élévation de surface libre font parties de ces grandeurs à avancer en temps. Leurs dérivées sont données par les deux conditions de surface libre.

Selon les cas de simulation, plusieurs autres grandeurs doivent être également avancées en temps. Si le corps est en mouvement libre, la position, la vitesse et l'accélération de son centre de gravité sont des grandeurs qu'il faut inclure dans ce schéma, via l'équation de mouvement et la méthode de la Condition Implicite.

Enfin, si l'énergie dans le domaine est recherchée, notamment pour vérifier sa conservation, il est nécessaire d'intégrer en temps la puissance des efforts hydrodynamiques s'appliquant sur le corps. Ceux-ci s'écrivent

$$W_{Hydro} = \int_0^t \dot{\vec{x}}_B(\tau) \cdot \vec{F}_{Hydro}(\tau) d\tau \quad (4.58)$$

### Remarques sur le calcul des coefficients d'influence

Le schéma Runge-Kutta d'ordre 4, fait intervenir quatre calculs des dérivées aux instants  $t$  (étape 1),  $t + dt/2$  (étapes 2 et 3) et  $t + dt$  (étape 4). Ce calcul nécessite la résolution du problème aux limites sur le potentiel, pour la détermination de la dérivée normale du potentiel sur la surface libre. Cependant les frontières du domaine de calcul, pour le problème aux limites, évoluent en fonction du temps, que ce soit la position de la surface libre ou celle du corps.

En ce qui concerne la surface libre, l'approche *Weak-Scatterer* impose la position de la surface libre que celle de la déformée de surface libre incidente. Cela signifie 3 positions différentes de la surface libre, aux 3 instants. Cependant la position de la surface libre à l'instant  $t + dt$  du pas de temps courant correspondra à celle de l'instant  $t$  du pas de temps suivant. Ainsi seuls deux calculs des coefficients de l'influence de la surface libre seront nécessaires pendant un pas de temps.

Pour le corps, si celui-ci est fixe, aucun calcul de l'influence des nœuds du corps ne sera nécessaire. Si son mouvement est fixé, donc connu analytiquement comme la surface libre, on retrouvera deux calculs des coefficients de l'influence du corps nécessaires pendant un pas de temps. Néanmoins si le corps est considéré en mouvement libre, sa position fera partie des inconnues à résoudre en temps, ce qui signifie que 4 calculs des coefficients de l'influence du corps seront nécessaires pendant un pas de temps.

Afin de pouvoir calculer la dérivée temporelle totale de l'itération  $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ , il faut se ramener après chaque étape sur le domaine de référence, le maillage au temps  $t$ . On a supposé sur la surface libre une convection des nœuds uniquement sur la verticale. Il n'y a alors pas besoin d'interpolation, il suffit juste de convecter les valeurs du potentiel et de l'élévation de surface libre avec la position du nœud/pseudo-particule. De même, l'étape de remaillage pour passer d'un domaine de calcul à l'autre se fait uniquement en convectant les points de calcul de la surface libre sur la position de la surface libre incidente.

### Schéma RK figé

Le schéma RK figé consiste en l'approximation de faible déformation des frontières du domaine par rapport aux variations temporelles des grandeurs avancées en temps. Ainsi cela revient à figer le maillage pour les 4 étapes du schéma de Runge-Kutta et ainsi à ne réaliser qu'un seul calcul des coefficients d'influence pour les 4 étapes.

Cependant il faut prendre garde, dans le cas de corps en mouvement libre, de bien considérer deux quantités différentes pour l'évolution temporelle de la position du centre de gravité du corps. L'une représente la grandeur physique mise à jour en temps dans chaque étape du schéma de Runge-Kutta. La seconde, liée au maillage, représente l'origine du repère lié au corps, repère qui est fixe, de même que le maillage, pendant les 4 étapes d'une itération. En effet, les termes de Coriolis dans le calcul des positions, vitesses et accélérations en chaque point du corps, font intervenir le vecteur position du point dans le repère lié au corps.

### Plage absorbante

Deux modèles de plage absorbante ont été implémentés. Le premier est basé sur l'ajout de termes équivalents à une pression,  $\nu\phi$  et  $\nu\eta$ , dans les deux équations de surface libre. L'expression du coefficient d'amortissement est fonction de la pulsation,  $\omega$ , et de la longueur d'onde,  $\lambda$ , de la perturbation à absorber.

$$\begin{cases} \nu = \alpha\omega \left( \frac{(r-r_0)}{\lambda} \right)^2 & r \geq r_0 = R_{ext} - \beta\lambda \\ \nu = 0 & r < r_0 \end{cases} \quad (4.59)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres permettant d'ajuster respectivement l'intensité des efforts de pression et la largeur de la plage absorbante numérique.  $R_{ext}$  est le rayon extérieur limitant dans le plan horizontal la surface libre. Une valeur de  $\alpha = 0.7$  a été étudiée comme optimale.

Le second modèle est basé sur l'annulation progressive de la perturbation sur la géométrie à l'aide d'une fonction  $\tanh$ . Il sert ainsi à s'assurer de la condition de perturbation nulle sur le bord du domaine pour les calculs en domaine ouvert. Les conditions de surface libre sont alors multipliées par le coefficient défini par

$$\begin{cases} \nu = 0.5 \left( 1 - \tanh \left( \frac{r-r_m}{L} \right) \right) \\ r_m = R_{ext} - \frac{\beta\lambda}{2} \\ L = \frac{\beta\lambda}{2 \operatorname{atanh}(0.95)} \end{cases} \quad (4.60)$$

avec un paramètre  $\beta$  similaire.

#### 4.4.2 Validations

##### Onde stationnaire dans une cuve fermée

**Description du Cas :** Une déformée de surface libre est imposée initialement sur la composante de perturbation de manière à former une onde stationnaire dans la cuve. La longueur d'onde est choisie en fonction du mode de la cuve voulue. Celle du mode  $k$  d'une cuve de longueur significative  $L_{cuve}$  (longueur ou diamètre) est

$$\lambda = \frac{L_{cuve}}{k} \quad (4.61)$$

L'amplitude de l'onde est déterminée en fixant la cambrure de l'onde à 10%.

$$A_{Onde} = 0.1 \times \lambda \quad (4.62)$$

Aucune houle incidente n'est imposée, les équations de surface libre sont linéarisées sur la position moyenne. Cela signifie que le calcul des coefficients d'influence n'est nécessaire qu'à l'initialisation de la boucle temporelle. Le domaine n'est en effet pas déformé par la suite, puisque la surface libre conserve sa position, sur sa position moyenne  $z = 0$ , en l'absence d'une houle incidente. Cette simulation est réalisée en domaine fermé, et naturellement sans plage absorbante.

**Solution Analytique :** La solution numérique obtenue pour la déformée de surface libre générée par l'onde stationnaire est alors linéaire. La solution analytique à laquelle la comparer doit donc être la solution d'une onde stationnaire linéaire.

$$\eta_a(x, t) = A_{Onde} \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (4.63)$$

La validation de ce cas s'appuie sur la concordance des périodes de l'onde stationnaire simulée numériquement et analytique. L'erreur relative liée à celle-ci est définie par

$$\epsilon_T = \frac{|T_{Num} - T_{Ana}|}{T_{Ana}} \quad (4.64)$$

La conservation énergétique et volumique appliquée au domaine fluide permet également de vérifier la justesse de la simulation.

$$E_{fluide} = E_p + E_k = \iiint_D \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho g z \right) dV \quad (4.65)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \iint_{SL} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \frac{1}{2} \rho g \iint_{SL} \eta^2 dS \quad (4.66)$$

$$\Delta V = \iint_{SL} \eta dS \quad (4.67)$$

La variation de volume est calculée uniquement au niveau de la surface libre, le volume fluide compris entre le fond de la cuve et la position moyenne de la surface libre n'est pas considéré. En effet, aucune variation de volume n'est attendue dans cette partie du domaine. L'erreur associée à la variation de volume est alors choisie relative au volume généré par la surface de la surface libre fois l'amplitude de l'onde stationnaire initialement imposée.

$$\epsilon_V = \frac{\Delta V}{Aire(SL) \cdot A_{Onde}} \quad (4.68)$$

L'erreur relative associée aux variations d'énergie est simplement définie avec comme référence la quantité d'énergie dans le domaine fluide à l'état initial.

$$\epsilon_E = \frac{|E_{Fluide} - E_{Fluide}(0)|}{E_{Fluide}(0)} \quad (4.69)$$

**Résultats :** L'onde stationnaire modélisée dans un premier temps correspond au premier mode de la cuve, de dimension  $(L, l, H) = (10, 1, 3)m$  avec une discrétisation en espace de  $dx = 0.5m$ . Le maillage des frontières du domaine fluide (cuve et surface libre) obtenu est constitué de 600 nœuds pour 920 facettes. Le phénomène simulé est bidimensionnel, ce qui permet de limiter le nombre d'éléments dans la direction transverse à deux éléments. Le maillage est ainsi réduit au strict nécessaire sans dégrader la solution numérique. Le pas de discrétisation en temps est choisi à  $dt = 0.065s$ , soit 40 pas de temps par période.

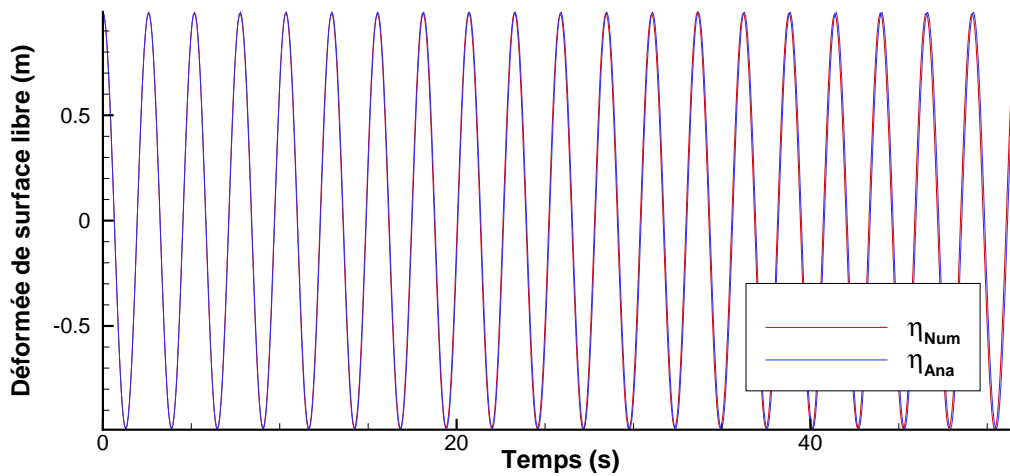


FIGURE 4.26 – Solution numérique et analytique de la déformée de surface libre en un point en fonction du temps

Les solutions numérique et analytique de la déformée de surface libre en un point sont tracées, en fonction du temps, sur 20 périodes d'oscillations, figure 4.26.

Les deux solutions sont en adéquation bien qu'une légère dérive soit visible à la fin de la simulation. La période de l'onde obtenue numériquement est légèrement différente  $T_{num} = 2.586s$  de la période théorique de l'onde stationnaire attendue  $T_{ana} = 2.59s$ . L'erreur relative sur la période est alors de l'ordre de  $\epsilon_T = 0.15\%$  ce qui est très acceptable. La conservation énergétique est présentée ensuite figure 4.27.

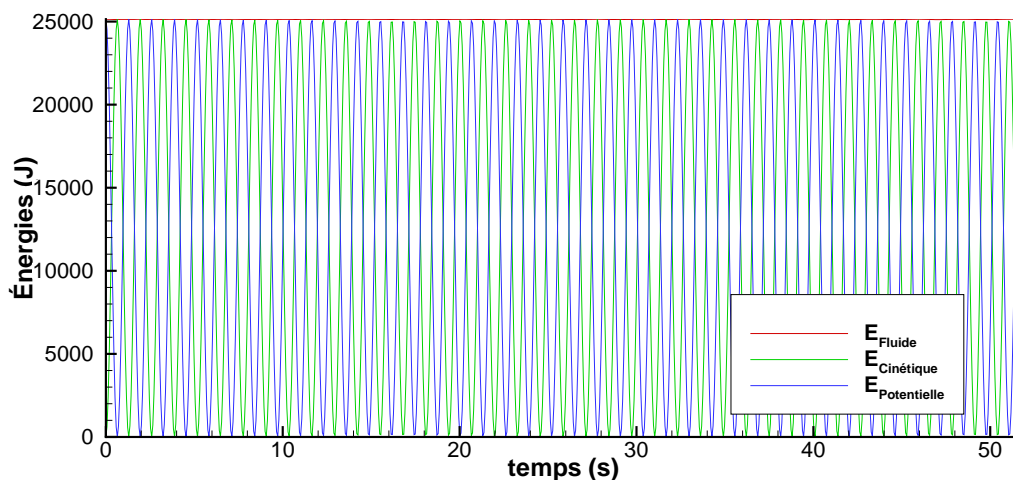


FIGURE 4.27 – Énergies cinétique et potentielle de surface libre pour une onde stationnaire



Les erreurs relatives des variations de volume et d'énergie sont présentées dans la figure 4.28 et valident bien la conservation de ces 2 grandeurs dans le domaine fluide. L'erreur relative des variations d'énergie atteint un maximum de  $\epsilon_E = 0.1\%$ , tandis que celle des variations de volume une valeur de  $\epsilon_V = 0.26\%$ .

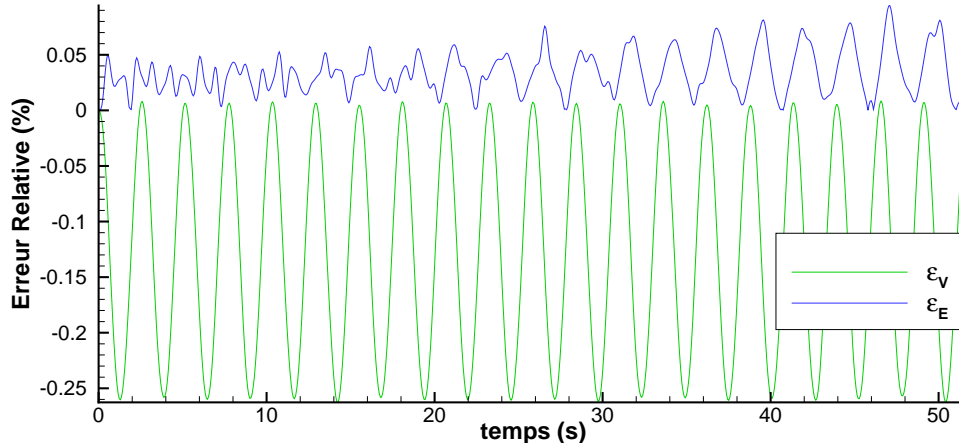


FIGURE 4.28 – Erreurs Relatives des variations énergétique et volumique dans le domaine fluide

**Convergence :** Une convergence très rapide en espace et en temps est menée : les pas de discrétisation en espace et en temps sont divisées par 2. Trois simulations sont alors lancées  $(dt/2, dx)$ ,  $(dt, dx/2)$  et  $(dt/2, dx/2)$  pour compléter la simulation  $(dx, dt)$  précédente. Le tableau suivant récapitule les erreurs relatives sur la période et les conservations énergétique et volumique. Le tableau 4.4 donne les erreurs sur la période et les conservations énergétique et volumique, pour les quatre configurations.

	$dt$	$dt/2$
$dx$	$\epsilon_E = 0.1\%$	$\epsilon_E = 0.08\%$
	$\epsilon_V = 0.26\%$	$\epsilon_V = 0.26\%$
	$\epsilon_T = 0.15\%$	$\epsilon_T = 0.15\%$
$dx/2$	$\epsilon_E = 0.03\%$	$\epsilon_E = 0.02\%$
	$\epsilon_V = 0.175\%$	$\epsilon_V = 0.175\%$
	$\epsilon_T = 0.049\%$	$\epsilon_T = 0.049\%$

TABLE 4.4 – Erreurs Relatives de la période et des variations énergétique et volumique pour différentes discrétisations en espace et en temps

Les erreurs relatives évoluent peu entre les deux pas de discrétisation en temps, ce qui démontre que la convergence en temps est déjà atteinte, même avec seulement 40 pas de temps par période. Les erreurs relatives de l'énergie et de la période sont divisées par

3 lorsque le pas de discrétisation en espace réduit de moitié, tandis que celle du volume l'est seulement par 2.

### Batteur de houle

Un batteur de houle est modélisé par un flux sinusoïdal sur une des parois de la cuve  $S_c$ , qui sera alors nommée paroi amont dans la suite. Ce flux est imposé via la condition :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U(t) = A_b \cdot \sin(\omega_b t) \quad (4.70)$$

Ce flux donne naissance à des vagues de modèle linéaire. Sans houle incidente imposée, les conditions limites de surface libre sont en effet linéarisées.

Aucun flux n'est imposé sur la paroi aval de la cuve, opposée à la paroi amont : la perturbation générée se réfléchit donc sur celle-ci. Aucune plage numérique n'est non plus appliquée pour dissiper la perturbation.

L'écoulement obtenu peut être supposé bidimensionnel. Une solution semi-analytique par décomposition en série de Fourier sur les modes propres du bassin a été donnée par Kennard [26]. Pour un canal de longueur  $L$  muni d'un batteur piston en  $x = 0$ , l'élévation de surface libre linéarisée est donnée par :

$$\eta(x, t) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k_n^2 + \lambda_m^2} \right] \cos(k_n x) \int_0^t U(\tau) \cos(\omega_n(t - \tau)) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} \lambda_m &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \\ \omega_n^2 &= gk_n \tanh(k_n H) \end{cases}$$

Les conservations énergétique et volumique sont également étudiées dans ce cas pour validation. Le batteur de houle est simulé par un flux de fluide. Les flux de matière et d'énergie à travers la frontière de la paroi amont est alors

$$\begin{cases} E_{Flux} = \int_0^t dE(\tau) d\tau &= \int_0^t \iint_{S_c} \rho \frac{\partial \phi}{\partial n}(\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau) ds d\tau \\ V_{Flux} = \int_0^t dV(\tau) d\tau &= \int_0^t \iint_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial n}(\tau) ds = A_{S_c} \times U(t) \end{cases} \quad (4.71)$$

La dérivée temporelle du potentiel sur le batteur est obtenue par résolution du problème aux limites sur cette grandeur.

Comme précédemment les erreurs relatives liées aux variations énergétiques et volumique sont définies par

$$\begin{cases} \epsilon_E &= 100 \frac{|E_{Fluide} - E_{Flux}|}{|E_{Flux}|} \\ \epsilon_V &= 100 \frac{|V_{Fluide} - V_{Flux}|}{\max(|V_{Flux}|)} \end{cases} \quad (4.72)$$

La référence de l'erreur relative sur la variation volumique est choisie comme le maximum des variations volumiques du flux pour éviter les pics lors des passages à zéro.

**Résultats** La cuve possède les caractéristiques  $(L, l, H) = (5, 0.1, 1)m$ , pour un pas de discrétisation de  $0.05m$ , soit un maillage constitué de 3700 nœuds pour 6450 facettes..

La vitesse du batteur est choisie de manière à générer une onde de longueur d'onde  $\lambda = \frac{L}{5} = 1m$ . La pulsation est alors  $\omega = 7.85rad.s^{-1}$ , pour une période de  $T_0 = 0.8s$ . L'amplitude de la vitesse est choisie à  $A = 0.05m.s^{-1}$ . La houle générée par ces paramètres est d'amplitude suffisamment faible pour être linéaire. La simulation est menée sur 10 périodes d'oscillations, avec une discrétisation temporelle de 40 pas de temps par période.

La solution numérique de l'élévation de surface libre sur le plan médian de la cuve est comparée à la solution de Kennard, pour différents temps dans la figure 4.29.

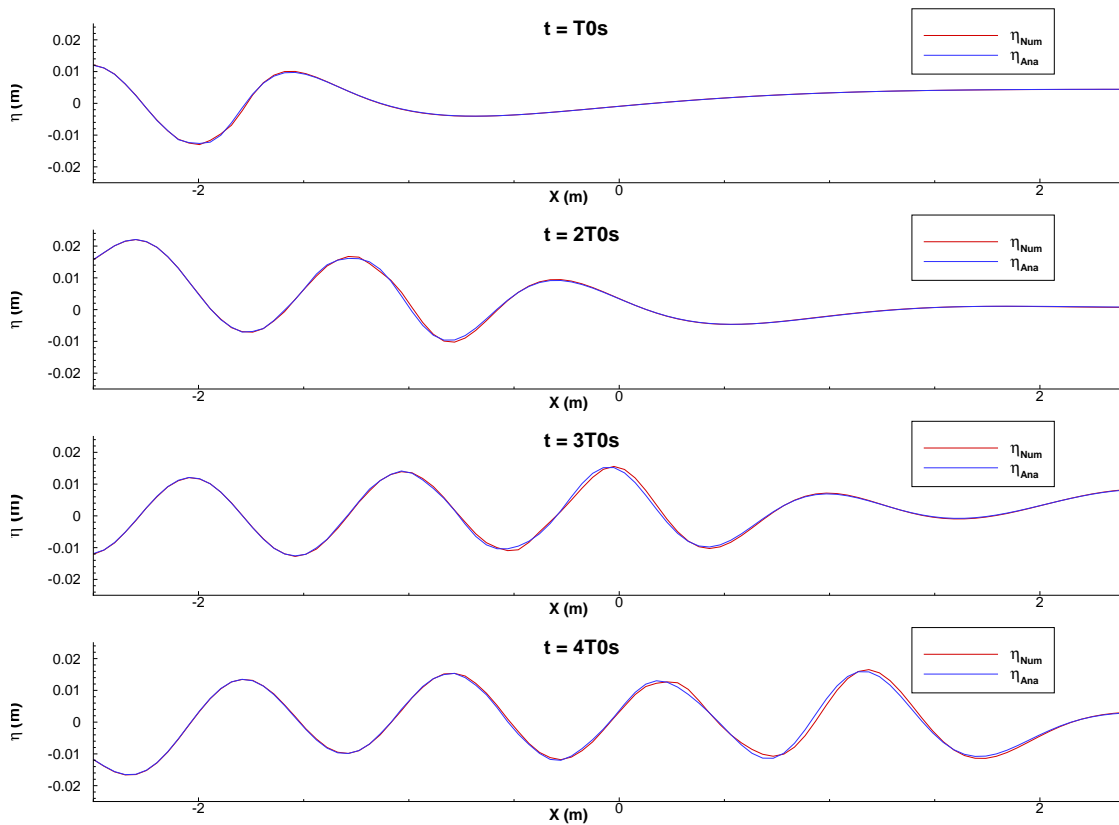


FIGURE 4.29 – Comparaison de la solution numérique de l'élévation de surface libre avec la solution analytique de Kennard

Les deux solutions sont en adéquation bien que des différences soient visibles. Un léger déphasage est présent après 4 périodes d'oscillation et les pics, maximums et minimums, sont également légèrement sous-estimés. La discrétisation spatiale étant grossière par

rapport à la longueur d'onde (20 pas de discrétisation en espace par longueur d'onde), ces différences ne sont pas inattendues. Une réflexion sur la paroi aval de la cuve est visible au bout de trois périodes temporelles.

Les variations énergétiques dans le domaine fluide sont tracées figure 4.30 et comparées à celles générées par le flux du batteur. La conservation est effective, l'oscillation de

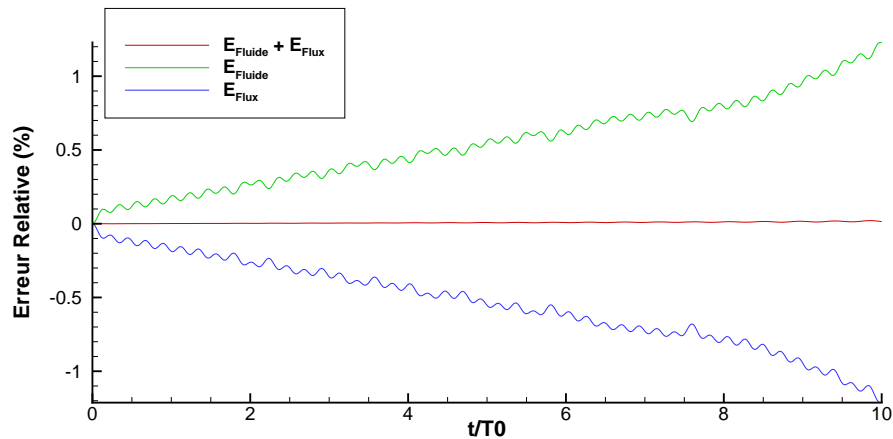


FIGURE 4.30 – Variations énergétiques dans le domaine fluide

la somme des variation énergétique dans le fluide et apportées par le flux sont à peine visibles à la fin de la simulation.

Les erreurs sur les variations énergétiques et volumiques, figure 4.31, permettent de donner une idée de la précision atteinte par le solveur fluide

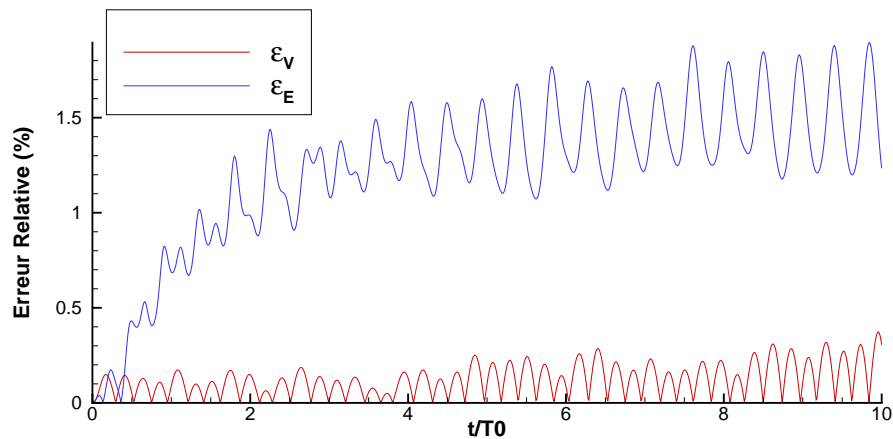


FIGURE 4.31 – Erreurs Relatives (%) des variations énergétique et volumique dans le domaine fluide

L'erreur relative atteint à peine 1.8%, pour les variations énergétiques et 0.4% pour les

variations volumiques. Une stabilisation de la variation énergétique peut être constatée après 4 périodes d'oscillations. C'est en effet à ce moment que des réflexions sur la paroi aval commencent à apparaître, lorsque la première onde générée par le batteur atteint la paroi aval. Les erreurs relatives sur les conservations peuvent être considérées comme suffisamment faibles pour valider ce cas de génération de houle.

**Convergence en espace et en temps :** Une convergence similaire au cas de validation précédent est menée : la discrétisation temporelle est divisée par deux : de 50 à 100 pas de temps par période. La discrétisation en espace est par contre multipliée par deux (de 100 à 50 nœuds sur la longueur de la cuve), pour ne pas obtenir des temps de calcul trop importants. Le tableau 4.5 donne les erreurs sur les conservations énergétique et volumique pour les différentes configurations. Les temps de calcul nécessaires pour simuler une période sont ajoutées pour donner un ordre d'idée.

	$dt$	$dt/2$
$2 \times dx$	$\epsilon_E = 8.4\%$	$\epsilon_E = 8.5\%$
	$\epsilon_V = 1.0\%$	$\epsilon_V = 1.0\%$
$N_{noeud} = 1360$	$\frac{t_{cpu}}{T_0} = 1.18min$	$\frac{t_{cpu}}{T_0} = 2.18min$
$dx$	$\epsilon_E = 1.9\%$	$\epsilon_E = 1.7\%$
	$\epsilon_V = 0.37\%$	$\epsilon_V = 0.37\%$
$N_{noeud} = 3690$	$\frac{t_{cpu}}{T_0} = 8.32min$	$\frac{t_{cpu}}{T_0} = 15.4min$

TABLE 4.5 – Erreurs Relatives de la période et des variations énergétique et volumique pour différentes discrétisations en espace et en temps

La convergence en temps est ici aussi clairement atteinte : les erreurs relatives sur les conservations énergétique et volumique sont les mêmes pour les deux pas de temps.

De meilleurs résultats sont par contre obtenus avec un maillage raffiné. En effet le raffinement impacte directement la précision de la résolution des problèmes aux limites, pour le potentiel et sa dérivée temporelle.

Les durées des simulations sont bien multipliées par deux lorsque le pas de temps est lui-même réduit par deux, comme attendu. Cependant diviser le pas de discrétisation en espace par deux triple le nombre de nœuds du maillage, ce qui multiplie alors le temps de calcul par 8.

### 4.4.3 Synthèse

L'intégration temporelle est réalisée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas constant. L'évolution du domaine sur les quatre passes du schéma induit un re-calcul des coefficients d'influence. Cependant, seule une partie du domaine pouvant bouger (le corps ou la surface libre), il est possible de tirer partie de la fonctionnalité de calcul partiel des coefficients d'influence. En clair, il n'est pas toujours nécessaire de recalculer tous les coefficients.

Une variation de ce schéma avec un domaine figé pour les quatre passes a également été implémentée pour réduire le temps de calcul. Cela génère cependant des erreurs puisque les équations de surface libre ne sont alors plus résolues sur la position de la surface libre incidente. Avec des composantes de perturbation non négligeables, cette erreur est toutefois négligeable et permet un gain de temps conséquent.

Deux types de plages absorbantes sont implémentés et ont été présentés ici. Elles sont néanmoins assez peu perfectionnées et dépendent fortement du maillage de la surface libre : des réflexions sont généralement toujours présentes. Un travail plus approfondi sur ce sujet pourrait être réalisé pour pallier à ce problème.

## 4.5 Module de détermination des efforts et mouvements d'un corps

Dans le cas d'un corps en mouvement forcé ou fixe, seuls les efforts hydrodynamiques s'appliquant sur le corps sont à déterminer. L'équation de Bernoulli pour le calcul de la pression fait intervenir la dérivée temporelle du potentiel sur le corps, qui n'est pas accessible immédiatement. La connaissance des efforts n'étant pas nécessaire à l'avance en temps de la solution hydrodynamique dans ce cas précis, il est possible d'estimer la dérivée temporelle du potentiel a posteriori, d'après les valeurs du potentiel sur le corps en chaque instant, à l'aide une méthode de différences finies.

Dans le cas d'un corps en mouvement libre, ce module résout simultanément l'évolution du mouvement du corps et les efforts hydrodynamiques qui s'y appliquent, ces deux quantités étant solution d'un problème fortement couplé. La méthode de la Condition Implicite introduite par Tanizawa permet en effet de traiter ce problème, en intégrant l'équation de mouvement dans le problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel à résoudre pour calculer les efforts hydrodynamiques.

### 4.5.1 Implémentations numériques

#### Calcul des efforts hydrodynamiques

Pour rappel, l'effort hydrodynamique a été définis comme l'intégration sur la surface du corps de la pression hydrodynamique, au chapitre 2.3.2

$$\vec{F}_{Hydro} = - \iint_{S_b} p \vec{n} ds \quad (4.73)$$

Soit sous forme discrétisée

$$\vec{F}_{Hydro} = \rho \sum_{j=1}^{N_b} p(j) \Delta S_j \vec{n}_j = CT \cdot \left( \frac{\partial \phi(B)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2(B) + g.z(B) \right) \quad (4.74)$$

avec

$$CT(i, j) = \Delta S_j (\vec{n}_j \cdot \vec{e}_i) \quad \forall (i, j) \in [1, 3] \times [1, N_b] \quad (4.75)$$

La sommation peut se faire sur les nœuds ou les facettes du corps. Dans les deux cas, une approximation est nécessaire.

**Intégration sur les nœuds** Si l'intégration est réalisée sur les nœuds, il est nécessaire de déterminer l'aire équivalente à associer au nœud. La méthode utilisée est

$$Aire(i) = \sum_{j=1}^{N(i)} Aire(j) Angle(j, i) \quad (4.76)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} Aire(i) & \text{est l'aire associée au nœud } i, \\ N(i) & \text{est le nombre de facettes dont fait partie le nœud,} \\ Angle(j, i) & \text{est l'angle au sommet associé au nœud } i \text{ de la facette } j. \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Le calcul du gradient dans ce cas peut être réalisé par approximation par B-Splines ou par discrétisation linéaire.

**Intégration sur les facettes** Si la sommation est effectuée sur les facettes, une approximation de la dérivée temporelle est possible via l'hypothèse de discrétisation linéaire des valeurs sur les facettes. La valeur de la dérivée temporelle du potentiel associée à la facette est alors celle associée à son centre de gravité, calculée simplement comme la moyenne des 3 valeurs aux sommets.

Le calcul du gradient est également basé sur l'approximation de discrétisation linéaire.

### Détermination de $\phi_t$ par différences finies

Dans le cas où les mouvements du corps n'ont pas besoin d'être calculés, il est alors possible de déterminer la dérivée temporelle du potentiel et donc les efforts hydrodynamiques sur le corps a posteriori. La méthode utilisée pour cela repose sur la connaissance du potentiel sur le corps à chaque instant et donc l'utilisation d'un schéma de différences finies. Si le corps est en mouvement forcé, la dérivée calculée par cette méthode est la dérivée particulaire associée à la vitesse des points du corps.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\phi(t+dt) - \phi(t-dt)}{2dt} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{D\phi}{Dt} - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}\phi \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Malgré un schéma d'intégration du second ordre, cette méthode reste moins précise que la méthode reposant sur la résolution d'un problème aux limites sur la dérivée du potentiel.

### Résolution d'un problème aux limites sur la dérivée du potentiel

Un problème aux limites similaire à celui pour le potentiel a été posé dans le chapitre 2.3.3.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 & \text{dans tout le domaine fluide} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{D_{0z}\phi}{Dt} - \frac{\partial\phi_0}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial z} & \text{sur la surface libre} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}}_B \cdot \vec{n} + q & \text{sur un corps en mouvement de translation} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial n \partial t} = 0 & \text{sur les surfaces fixes} \end{array} \right. \quad (4.79)$$



La seconde identité de Green pour ce problème aux limites donne sous forme discrétisée

$$\sum_{j=1}^N CS(i, j) \cdot \phi_{tn}(j) - \sum_{j=1}^N CD(i, j) \cdot \phi_t(j) = 0 \quad (4.80)$$

soit en séparant les inconnues, des grandeurs connues à imposer dans le second membre

$$\sum_{j \in SL} CS(i, j) \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t}(j) - \sum_{j \in SM} CD(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial t}(j) = \sum_{j \in SL} CD(i, j) \frac{\partial \phi}{\partial t}(j) - \sum_{j \in SM} CS(i, j) \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t}(j) \quad (4.81)$$

Les coefficients d'influence,  $CS$  et  $CD$ , sont les mêmes que pour le problème aux limites pour le potentiel, ce qui permet un gain de temps considérable.

Il est également possible d'écrire la condition limite sur le corps sous forme discrète

$$\phi_{tn}(B) = CK \cdot \ddot{\vec{x}}(B) + Q \quad (4.82)$$

avec

$$CK(j, i) = \vec{n}_j \cdot \vec{e}_i \quad \forall (i, j) \in [1, 3] \times [1, N_b] \quad (4.83)$$

Dans le cas où l'accélération du corps est connue (ie le mouvement du corps est imposé), il est possible alors de résoudre directement le système linéaire ci dessous

$$AX = B \quad (4.84)$$

avec

$$\begin{cases} A &= [ CS(:, SL) \quad -CD(:, SM) ] \\ X &= \begin{bmatrix} \Phi_{tn}(SL) \\ \Phi_t(SM) \end{bmatrix} \\ B &= [ -CS(:, SM) \quad CD(:, SL) ] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{tn}(SM) \\ \Phi_t(SL) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.85)$$

Dans le cas d'un mouvement libre pour lequel l'accélération du corps est inconnue, il est nécessaire de résoudre le problème couplé complet par la méthode de la Condition Implicite.

### Méthode de la condition implicite

La méthode de la condition implicite repose sur la résolution simultanée de l'équation de mouvement et du problème aux limites sur la dérivée du potentiel, comprenant la condition limite sur le corps. Il est alors nécessaire de réécrire l'équation de mouvement en explicitant les efforts hydrodynamiques

$$\bar{M} \cdot \ddot{\vec{x}}_B = \vec{F}_{Hydro} + M\vec{g} + \vec{F}_{ext} \quad (4.86)$$

soit sous forme discrétisée et en passant les inconnues dans le membre de gauche

$$\left\{ \bar{M} \cdot \ddot{\vec{x}}_B - CT \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(B) = T \right. \quad (4.87)$$

avec

$$T = CT \cdot \left( \vec{\nabla} \phi^2(B) + g.z(B) \right) + M\vec{g} + \vec{\mathcal{F}}_{ext} \quad (4.88)$$

Les inconnues du système à résoudre sont ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{tn}(SL) : \text{la dérivée normale de la dérivée temporelle du potentiel sur la surface libre} \\ \phi_t(B + C) : \text{la dérivée temporelle du potentiel sur les surfaces Corps et Cuve} \\ \phi_{tn}(B) : \text{la dérivée normale de la dérivée temporelle du potentiel sur le corps} \\ \ddot{\vec{x}}(B) : \text{l'accélération du corps, en translation et rotation} \end{array} \right.$$

L'ajout de l'équation de mouvement discrétisée au problème aux limites posé précédemment donne le système total à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} CS \cdot \phi_{tn}(SL) - CD \cdot \phi_t(B + C) + CS \cdot \phi_{tn}(B) = CD \cdot \phi_t(SL) - CS \cdot \phi_{tn}(C) \\ \phi_{tn}(B) - CK \cdot \ddot{\vec{x}}(B) = Q \\ \bar{M} \cdot \ddot{\vec{x}}(B) - CT \cdot \phi_t(B) = T \end{array} \right. \quad (4.89)$$

soit le système linéaire

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} CS & -CD & -CD & CS & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & -CK \\ \hline 0 & -CT & 0 & 0 & M \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \phi_{tn}(SL) \\ \phi_t(B) \\ \phi_t(C) \\ \phi_{tn}(B) \\ \ddot{\vec{x}}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [CD, -CS] \cdot \begin{pmatrix} \phi_t(SL) \\ \phi_{tn}(C) \end{pmatrix} \\ Q \\ T \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

## 4.5.2 Validations

### Diffraction d'une houle régulière sur une sphère immergée fixe

#### Description du cas de validation

Le cas de validation porte sur l'étude de la diffraction d'une sphère immergée fixe sous une houle incidente régulière. La solution WS pour l'effort en diffraction sur le corps est comparée à la solution linéaire donnée par Nemoh, en se plaçant en conditions linéaires, i.e. houle de faible cambrure.

Les paramètres géométriques de la sphère sont : rayon  $a = 10m$  et enfoncement  $d = -20m$ . La simulation est menée sur 8 périodes de houle et 100 pas de temps par période, en profondeur infinie et domaine ouvert. L'approximation sur la surface libre est désormais *Weak-Scatterer*, la houle incidente étant non nulle.

### Résultats en condition linéaire

Une houle incidente régulière est imposée avec une pulsation  $\omega_h = 1.5\text{rad/s}$ , soit une période  $T_0 = 4.19\text{s}$  et une longueur d'onde  $\lambda = 27.4\text{m}$ . Avec une amplitude crête à creux faible,  $A_h = 0.01\text{m}$ , la cambrure obtenue est alors  $c = kA_h = 0.23\%$ . Les efforts de Froude-Krylov et en diffraction sont tracés en fonction du temps pour les solutions linéaire et WS, dans la figure 4.32.

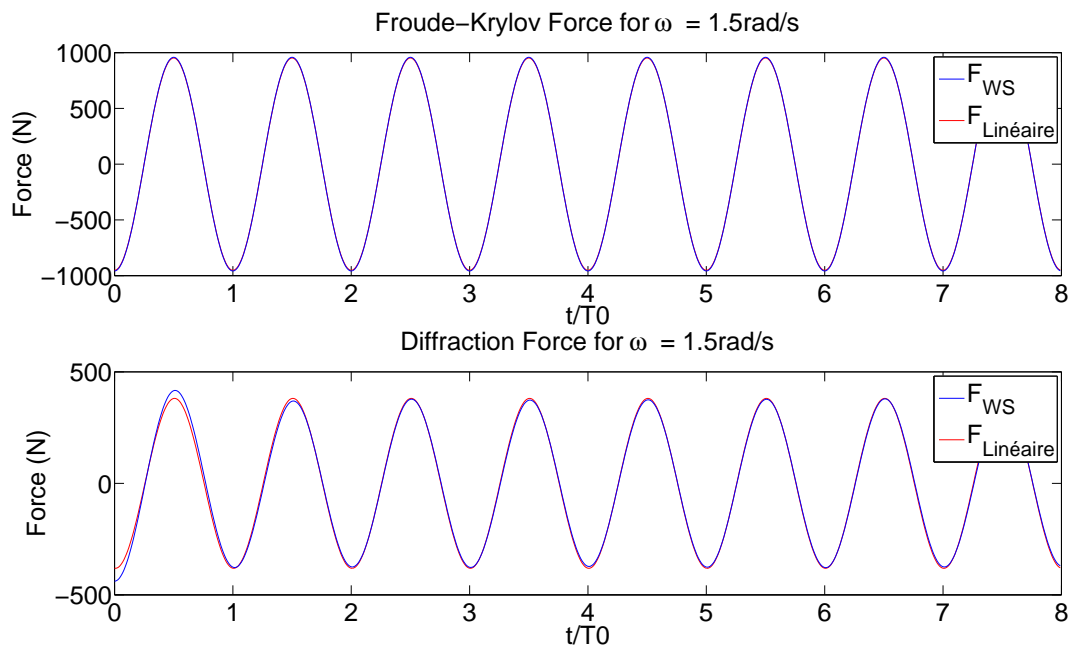


FIGURE 4.32 – Évolution temporelle des efforts de Froude-Krylov et en diffraction

Un bon accord des efforts de Froude-Krylov et en diffraction est visible. Un léger écart sur le Froude-Krylov provient d'une discrétisation différente de la sphère, entraînant une erreur géométrique évaluée à  $\epsilon = 0.7\%$ . Celle-ci se retrouve également dans l'effort en diffraction, notamment sur son amplitude. Un déphasage entre la solution linéaire et WS est également présent mais très faible. Il est possible de retrouver la période d'établissement de l'effort en diffraction pour la solution WS, inexistante pour la solution linéaire. Une analyse harmonique de l'effort en diffraction, des solutions linéaire et WS, donne les coefficients en amplitude et en phase dans le tableau 4.6. L'accord est bon entre les résultats des deux solutions, que ce soit sur le coefficient d'amplitude ou celui en phase.

	$ F_{diff} (N)$	$\phi(rad)$
Linéaire	37512	-3.0806
WS	38111	-3.0975
Erreur Relative (%)	1.6	0.54

TABLE 4.6 – Coefficients harmoniques de l'effort en diffraction, en amplitude et en phase

### Variation de la pulsation de houle incidente

Plusieurs houles de pulsations différentes sont ensuite imposées, comprises entre 0.25 rad/s et 1.75 rad/s. Les efforts en diffraction sont analysés pour comparer les coefficients harmoniques avec la solution linéaire. Ceux-ci sont alors tracés figure 4.33.

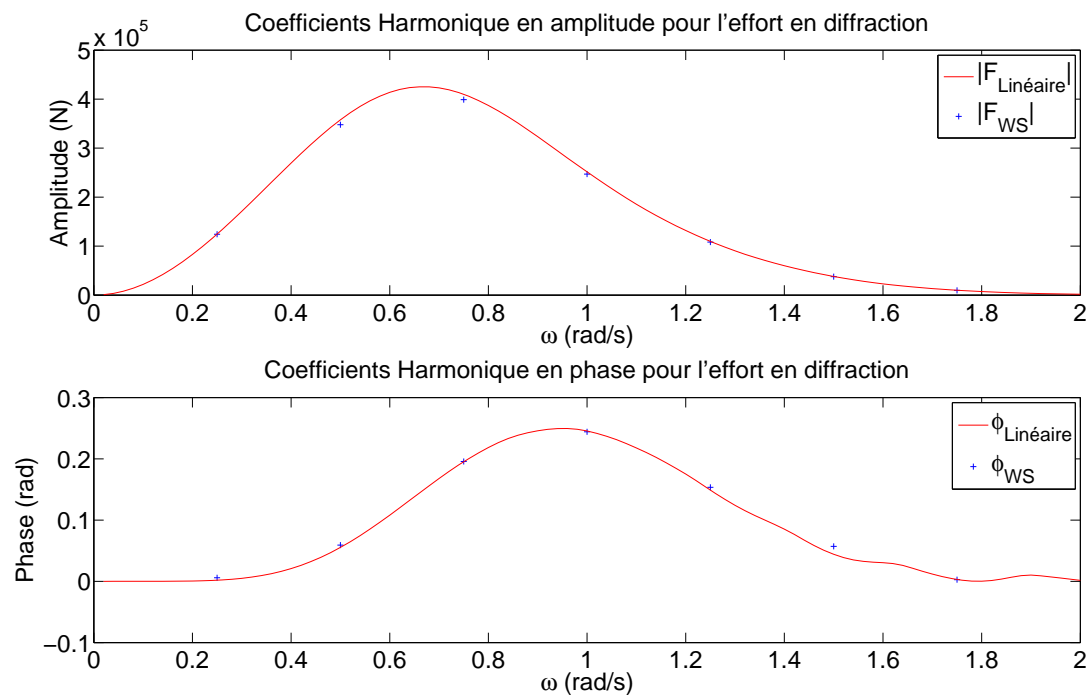


FIGURE 4.33 – Coefficients harmoniques en amplitude et phase de l'effort en diffraction pour différentes pulsations de houle

Un bon accord est obtenu, les coefficients harmoniques de la solution WS pour les différentes pulsations correspondent bien à la courbe donnée par la solution linéaire. L'erreur entre les deux solutions est minimale et permet de valider la justesse des calculs des efforts en diffraction sous l'approximation *Weak-Scatterer*.

### Résultats en conditions non linéaires

Une houle de grande cambrure est imposée :  $A_h = 4.5m$  pour  $\omega = 0.7rad/s$ , soit une cambrure  $c = kA_h = 22.5\%$ . Le corps est approché de la surface libre,  $d = -15$ , afin de renforcer les interactions de celui-ci avec la surface libre. Les solutions linéaire et WS de l'effort en diffraction sont tracées figure 4.34

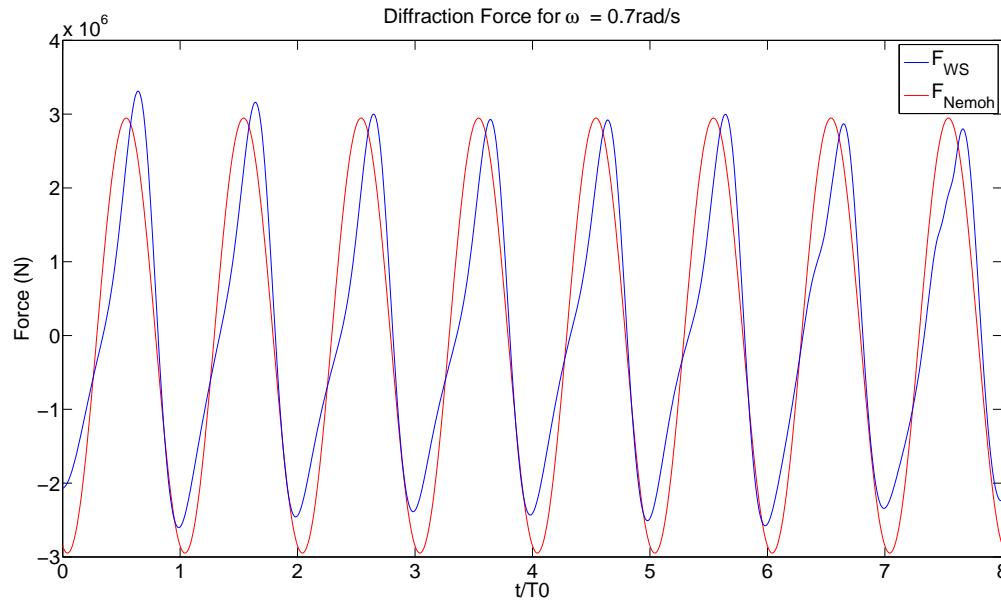


FIGURE 4.34 – Évolution temporelle de l'effort en diffraction pour une houle de grande cambrure

Des différences non négligeables sont obtenues. Elles sont dues à la proximité du corps avec la surface libre. Il est possible en effet d'observer que l'effort en diffraction donné par l'approche WS se déphase lorsque le corps et la surface libre se rejoignent. Ce déphasage est lié à la modification importante de l'amortissement en radiation du corps à proximité de la surface libre. La figure 4.35 donne les composantes incidente et de perturbation de l'élévation de surface libre à l'aplomb du corps.

Contrairement aux hypothèses de l'approche WS, les composantes de perturbation ne sont pas faibles, comparées aux composantes incidentes. Cela remet donc en question la validité des résultats obtenus avec cette approximation. Il est également possible d'observer de faibles oscillations sur la fin de la figure, qui ont tendance à s'amplifier au cours du temps. Elles sont liées à la génération des ondes courtes. Si le maillage de la surface libre n'est pas assez raffiné, celles-ci ont tendance à dégénérer et créer des instabilités.

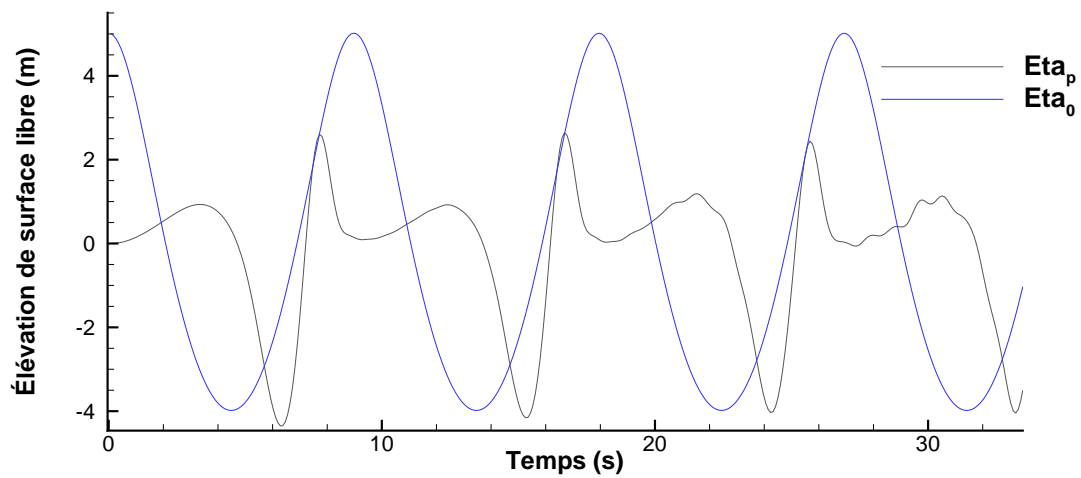


FIGURE 4.35 – Élévation de surface libre, incidente et perturbée, à l’aplomb du corps

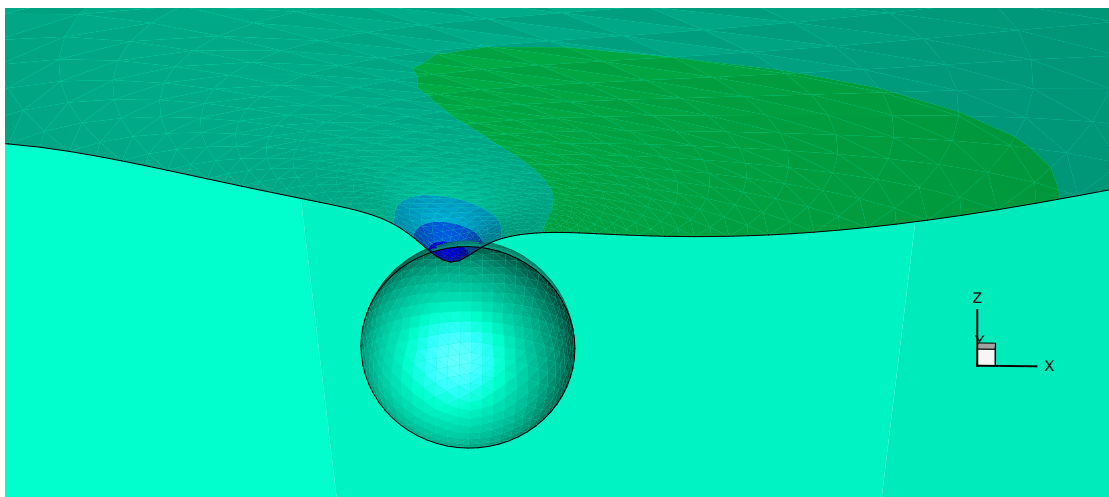


FIGURE 4.36 – Élévation de surface libre incidente plus perturbée, à l’aplomb du corps

Un second problème, lié à l’approche WS est visible dans la figure 4.36 : le maillage de la surface libre est positionné sur la somme de l’élévation incidente et perturbée, uniquement à des fins de visualisation. Le corps passe ici à travers la surface libre. La position de la surface libre dans le code étant toujours celle de la houle incidente, cette situation ne pose pas de problèmes pour le code. Cependant il ne permet pas de modéliser correctement les phénomènes en jeu lorsque le corps et la surface libre entrent en contact.

## Radiation seule d'une sphère immergée en mouvement forcé

### Description du cas de validation

Une sphère de rayon  $a = 10m$  est immergée à une distance  $d = 2a = 20m$  sous la surface libre. Un mouvement de pilonnement lui est imposé, d'amplitude  $A_r$  et de pulsation  $\omega_r = 1rad.s^{-1}$ . En choisissant la constante de gravitation  $g = 10m.s^{-2}$ , par simplification, la longueur d'onde adimensionnée par le rayon de la sphère est alors  $ka = 1$ .

La simulation est réalisée en domaine ouvert, dans une cuve de diamètre  $R = 100m$  et de profondeur infinie, afin de supprimer les réflexions sur le bord. Une discrétisation temporelle de 100 pas de temps par période est choisie. La simulation est menée sur 5 périodes.

Aucune houle incidente n'est appliquée, les conditions de surface libre sont donc toujours linéarisées sur la position moyenne  $z = 0$ . Le maillage du corps suivant son déplacement réel, les conditions sur le corps sont exactes. Ce cas de validation est donc réalisé selon l'approche faiblement non-linéaire "Body Exact".

L'effort hydrodynamique s'appliquant sur la sphère est relevé et comparé à deux solutions numériques. La première est une solution en théorie potentielle linéaire, donnée par Nemoh. La seconde est une solution potentielle complètement non-linéaire, donnée par un *Numerical Wave Tank* (NWT) développé par Harris [22], une variation de celui initié par Grilli [19]. Une comparaison des performances des deux codes, *Weak-Scatterer* et NWT a fait l'objet d'une publication [30].

Une analyse harmonique sur l'effort hydrodynamique est ensuite réalisée pour obtenir les 4 premières harmoniques, parties réelles et imaginaires.

### Résultats en conditions linéaires

Une première comparaison est réalisée en conditions linéaires : l'amplitude du mouvement forcé est choisie faible devant le rayon de la sphère  $A_r = 0.025m$ . Les 3 solutions, linéaire, faiblement non-linéaire et complètement non linéaire, des efforts hydrodynamiques doivent alors correspondre dans ces conditions.

Les solutions temporelles linéaires et complètement non-linéaires sont re-crées à partir des coefficients harmoniques des efforts hydrodynamiques. Ils ne présentent donc pas de période d'établissement du signal ou de réflexion sur les frontières du domaine, au contraire de la solution faiblement non-linéaire. L'effort hydrodynamique sur le corps en fonction du temps pour les trois solutions est tracé dans la figure 4.37.

Un bon accord des 3 courbes est visible. L'établissement de la solution faiblement non-linéaire est visible et limité à la première période d'oscillation. Une perturbation est également présente à la fin de la simulation, après la 4<sup>e</sup> période. Cela est dû à l'effet des ondes réfléchies sur les parois de la cuve malgré la plage absorbante.

L'analyse harmonique est alors réalisée entre le début de la 2<sup>e</sup> et la fin de la 4<sup>e</sup> période. Le signal est suffisamment stable pour que 3 périodes d'oscillation suffisent pour l'analyse. Les coefficients harmoniques des efforts hydrodynamiques sont présentés dans le tableau 4.7 adimensionnés par  $\rho g k a^3 A_r$ .

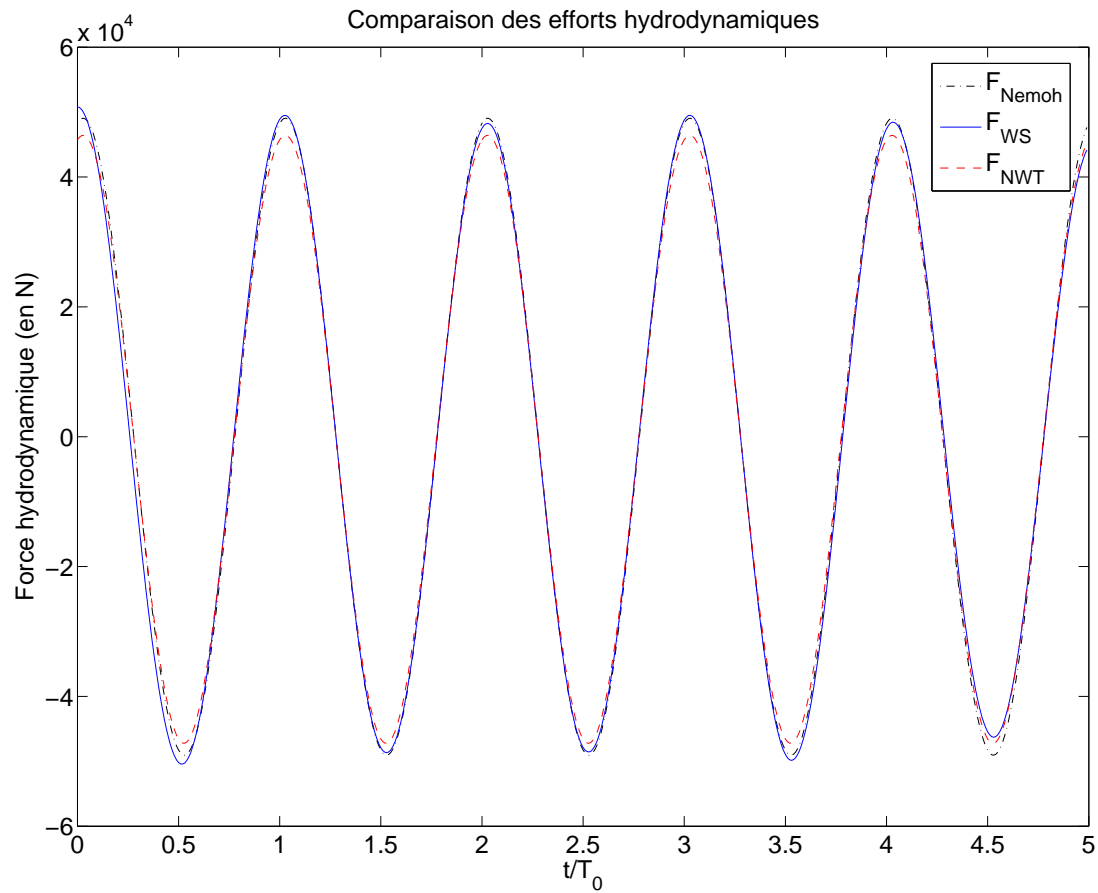


FIGURE 4.37 – Efforts hydrodynamiques en théorie linéaire (Nemoh), faiblement non-linéaire (WS) et complètement non-linéaire (NWT)

	1 <sup>re</sup> harmonique	2 <sup>e</sup> harmonique	3 <sup>e</sup> harmonique	4 <sup>e</sup> harmonique
Nemoh	1.884, 0.341			
WS	1.879, 0.342	0.0025, 0.0035	0.0014, 0,0020	0,0009, 0,0014
NWT	1.805, 0.309	-0.014, -0.0006	-0.0038, -0.0021	-0.0021, -0.0015

TABLE 4.7 – Harmoniques de l'effort hydrodynamique en conditions linéaires



Logiquement, les harmoniques d'ordre supérieur sont très faibles. Les coefficients harmoniques du premier ordre présentent un bon accord pour les 3 solutions, avec un écart plus important sur la solution non-linéaire. La discrétisation spatiale utilisée est sans doute en cause. La partie réelle est affecté par la discrétisation de la sphère, puisqu'elle est directement lié à la masse ajoutée du corps. La partie imaginaire donne l'amortissement en radiation du corps, donc l'interaction de celui-ci avec la surface libre. Ainsi la discrétisation spatiale de la surface libre influence la précision de la partie imaginaire.

### Résultats en conditions non-linéaires

L'amplitude d'oscillation du corps est choisie de manière à être non négligeable devant le rayon de la sphère :  $A_r = 0.5a = 5m$ . L'effort hydrodynamique sur la sphère pour les 3 solutions est tracé dans la figure 4.38.

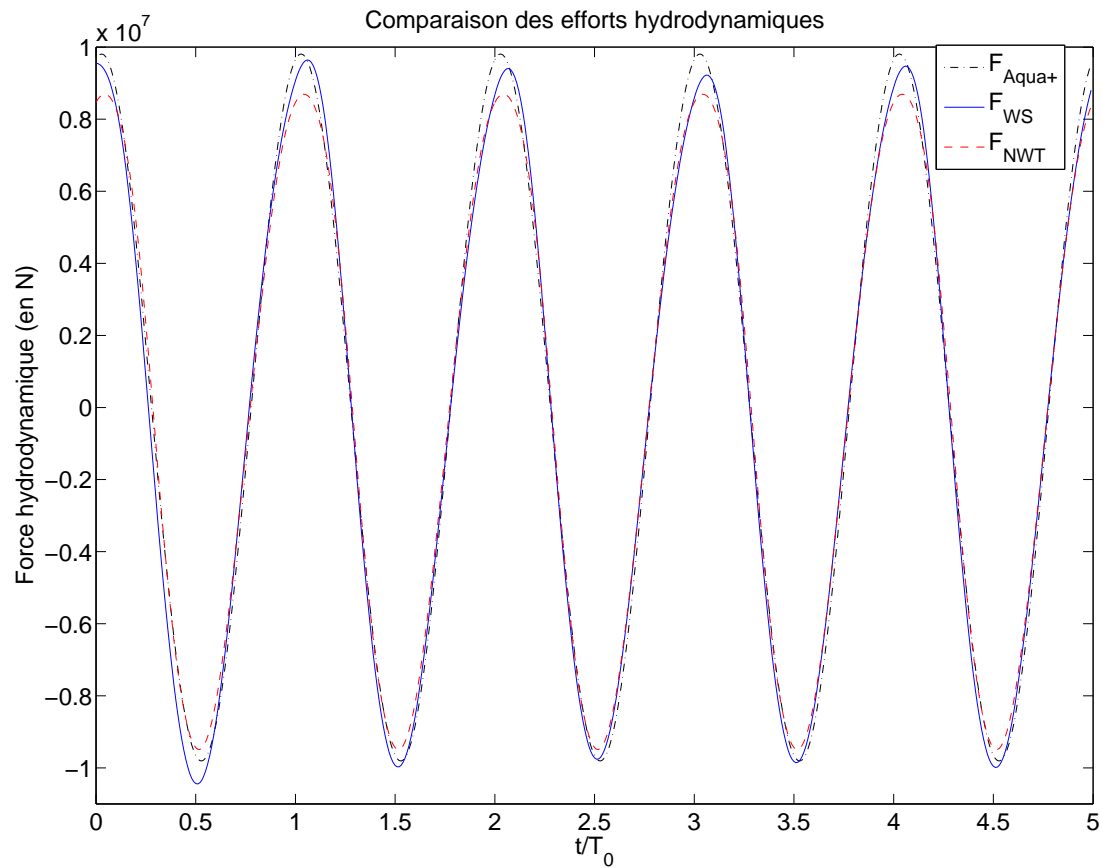


FIGURE 4.38 – Efforts hydrodynamiques en théorie linéaire (Nemoh), faiblement non-linéaire (WS) et complètement non-linéaire (NWT)

La période d'établissement du signal est retrouvée, de même que le retour des ondes ré-

fléchies par les frontières du domaine pour la solution WS. De plus grands écarts peuvent être relevés entre les 3 solutions, notamment sur les pics supérieurs, lorsque la sphère se rapproche de la surface libre. Cela indique une prédominance, ici, des non-linéarités de surface libre sur les non-linéarités liées aux mouvements du corps.

Les coefficients harmoniques adimensionnalisés sont présentés dans le tableau 4.8. Les coefficients d'ordre supérieur ne sont désormais plus négligeables, bien que toujours faibles devant ceux du premier ordre. Un bon accord est obtenu entre les coefficients des solutions WS et NWT. Le coefficient réel du premier ordre en complètement non linéaire présente toujours un grand écart par rapport aux deux autres solutions, ce qui vient appuyer l'hypothèse d'une discrétisation du corps sans doute plus faible dans le cas du NWT. Cependant les coefficients imaginaires correspondent beaucoup mieux dans ce cas.

	1 <sup>e</sup> harmonique	2 <sup>e</sup> harmonique	3 <sup>e</sup> harmonique	4 <sup>e</sup> harmonique
Nemoh	1.884, 0.341			
WS	1.845, 0.333	-0,088, 0,099	-0,0284, 0,0085	-0,0084, -0,0024
NWT	1.769, 0.330	-0.098, 0.051	-0.0217, -0.0226	0.0036, -0.0095

TABLE 4.8 – Harmoniques de l'effort hydrodynamique en conditions non-linéaires

### Variation de la pulsation et de l'amplitude du mouvement du corps

Une comparaison des coefficients harmoniques en fonction de la fréquence de mouvement forcé du corps a été réalisée à l'occasion d'une publication [30]. Les solutions comparées à celle du code *Weak-Scatterer* sont la solution complètement non-linéaire du code NWT et une solution *Body-Exact* et fonctions de Green linéarisée par Ferrant [16].

La solution complètement non-linéaire (NWT) est réalisée en bassin numérique, en domaine fermé. Ainsi, pour se placer en condition de profondeur infinie, la profondeur de domaine fluide maillé doit dépendre de la longueur d'onde des perturbations générées par le mouvement de la sphère. Les solutions WS et de Ferrant ont par contre été réalisées en conditions de domaine ouvert, donc en profondeur infinie.

Deux solutions linéaires sont également utilisées comme références pour un cas de mouvement forcé de faible amplitude  $A_r = 0.025a$ . La première, numérique, est donnée par Aquaplus (désormais remplacé par Nemoh). La seconde est une solution analytique donnée pour une sphère en mouvement forcé en profondeur infinie par Srokosz [42].

Le nombre d'onde adimensionnalisé par le rayon de la sphère varie entre 0.1 et 3. L'effort hydrodynamique sur le corps en fonction du temps pour toutes ces solutions est tracé dans la figure 4.39

Un bon accord entre toutes les solutions est visible, avec quelques pourcents d'erreur relative au maximum. L'écart observable sur la partie réelle entre les différentes solutions semble constant pour toutes les longueurs d'onde. Une différence de discrétisation de la sphère peut ainsi être à l'origine de ces écarts : le maillage de la sphère en WS possède en effet 2 fois plus d'éléments que ceux du NWT et de la solution de Ferrant. Les écarts sur la partie imaginaire sont quant à eux plus concentrés à l'endroit du pic. Dans les deux

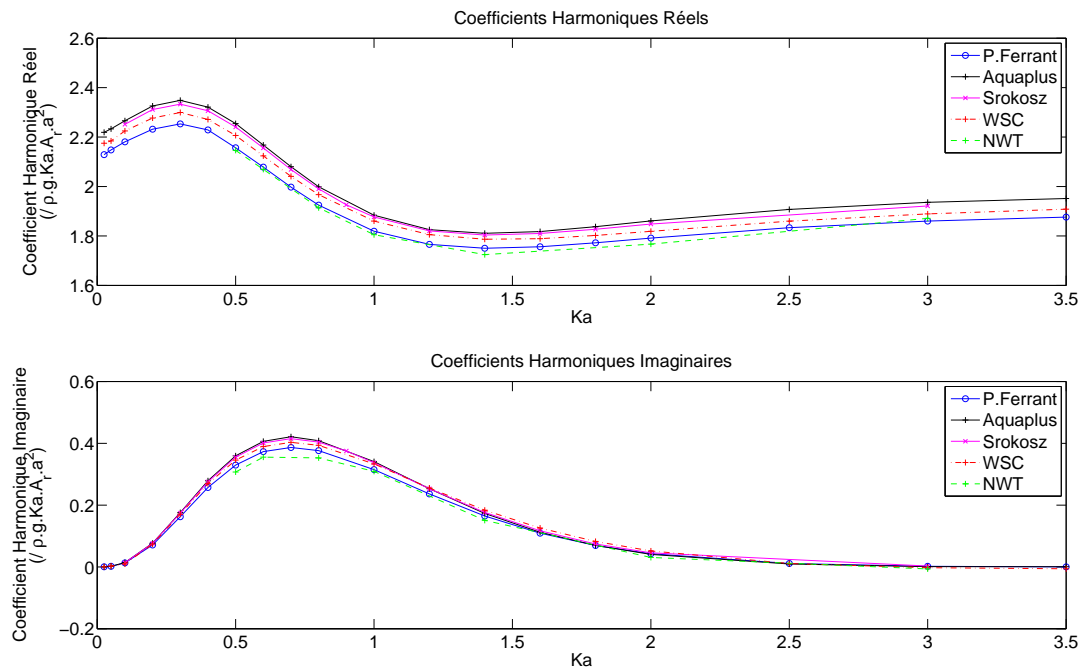


FIGURE 4.39 – Coefficients Harmoniques en fonction de la longueur d'onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.025a$

cas, la solution Weak-Scatterer est encadrée par les différentes solutions, ce qui valide notre modèle.

Trois grandes amplitudes de mouvement sont ensuite considérées :  $A_r = 0.3a$ ,  $0.5a$  et  $0.7a$ . Les coefficients harmoniques adimensionnés en fonction de la longueur d'onde sont présentés pour ces différents cas dans les figures 4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.45.

Les trois solutions des coefficients harmoniques présentent un bon accord général, notamment pour les premiers harmoniques. Les harmoniques d'ordre supérieurs ne sont présentées que pour donner une ordre d'idée. Bien que les évolutions montrent des similitudes, des différences notables sont visibles. Il est en effet difficile de donner celles-ci sans s'attacher à un raffinement de la surface libre suffisant pour modéliser correctement les ondes courtes. Une erreur constante pour les coefficients réels présente entre la solution WS et les deux autres semblent confirmer une discrétisation de la sphère différente entre ces solutions, comme avancé précédemment. La solution complètement non-linéaire présente des temps de calcul bien plus importants, notamment pour les faibles nombres d'ondes. Il est en effet nécessaire dans ces cas de considérer une plus grande profondeur à mailler, donc des maillages plus conséquents.

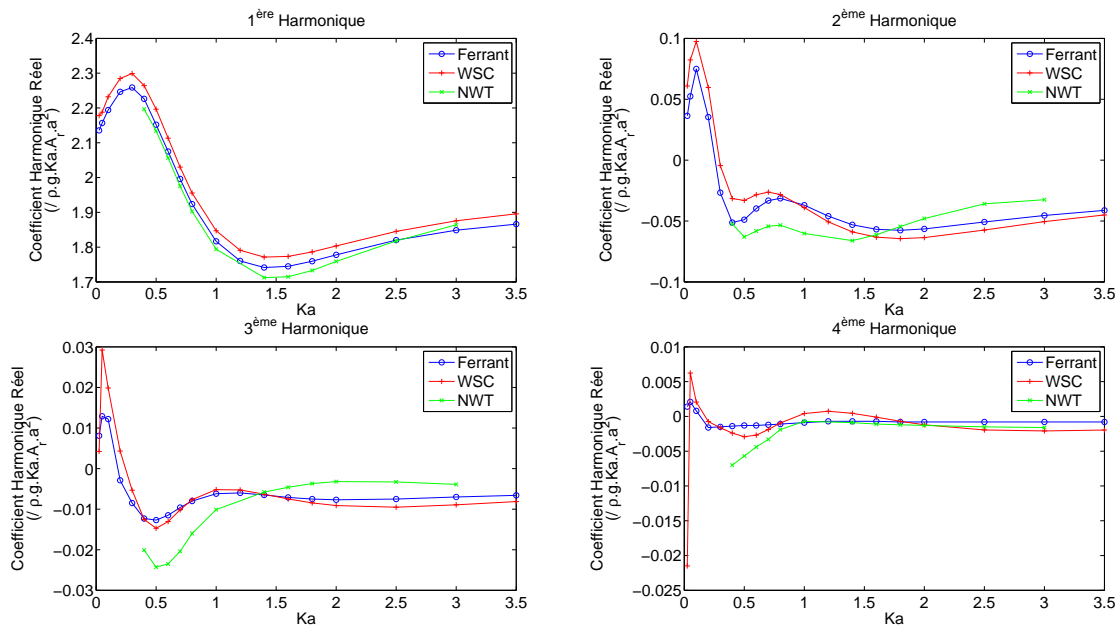


FIGURE 4.40 – Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d'onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.3a$

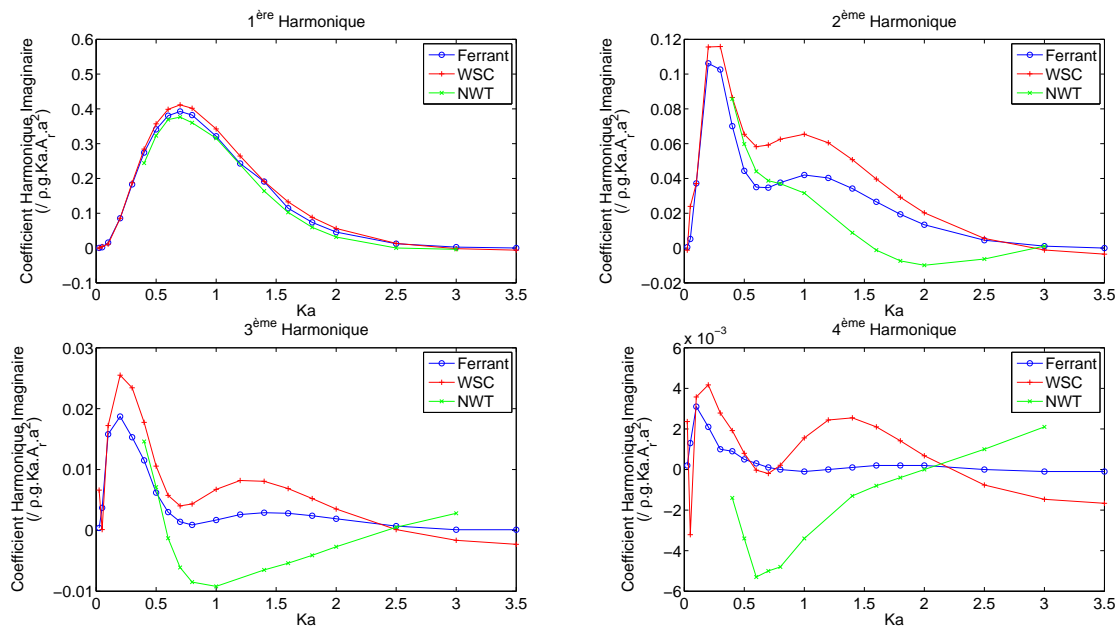


FIGURE 4.41 – Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d'onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.3a$

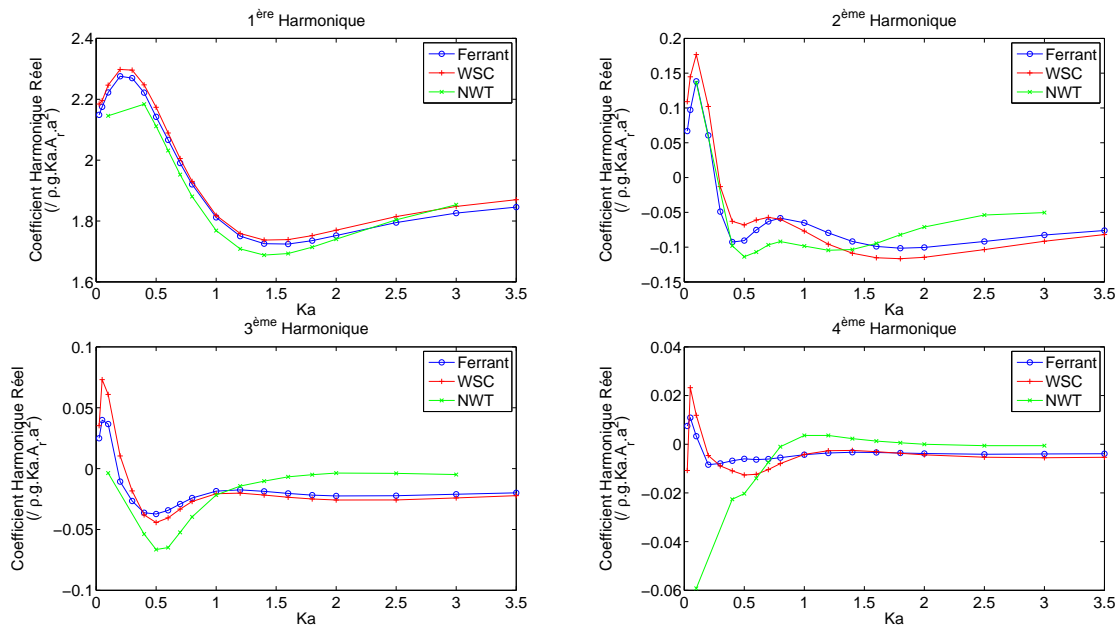


FIGURE 4.42 – Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d'onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.5a$

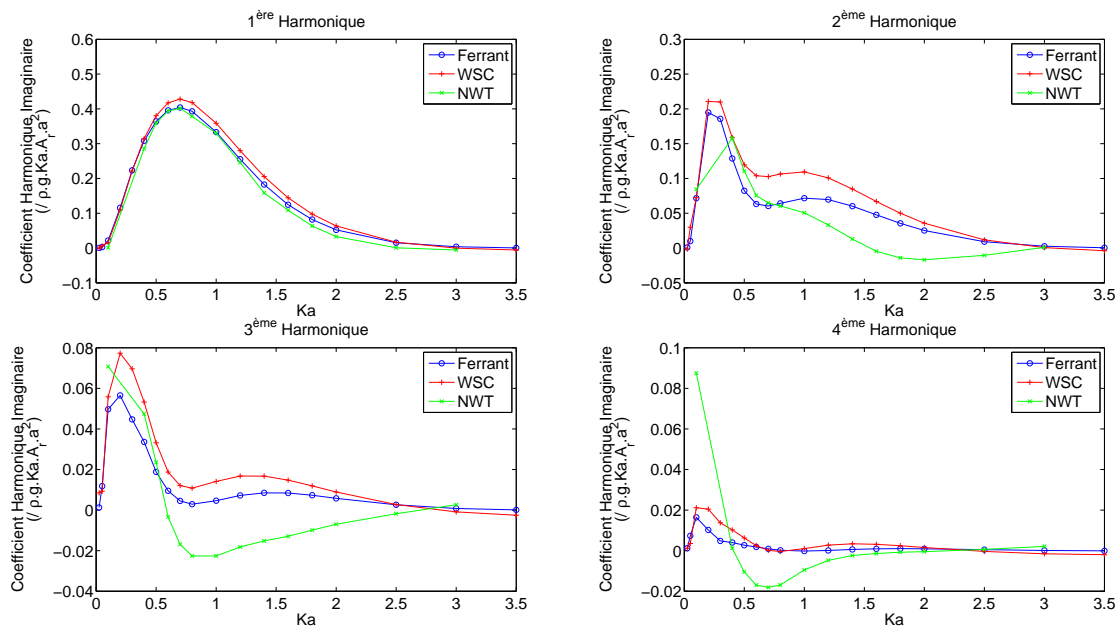


FIGURE 4.43 – Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d'onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.5a$

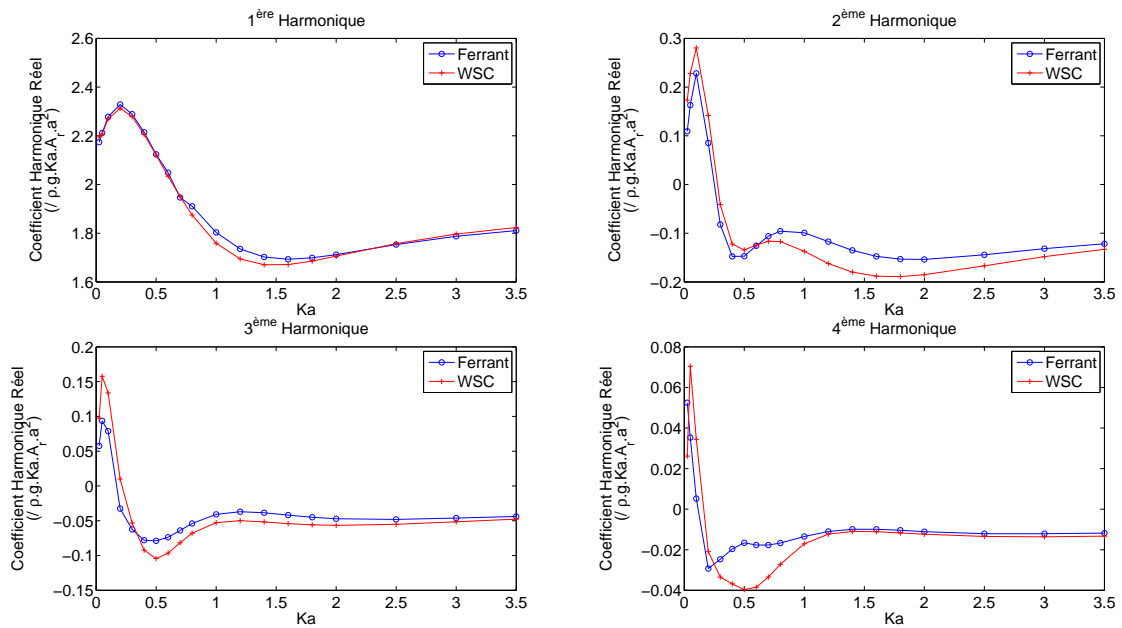


FIGURE 4.44 – Coefficients Harmoniques Réels en fonction de la longueur d’onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.7a$

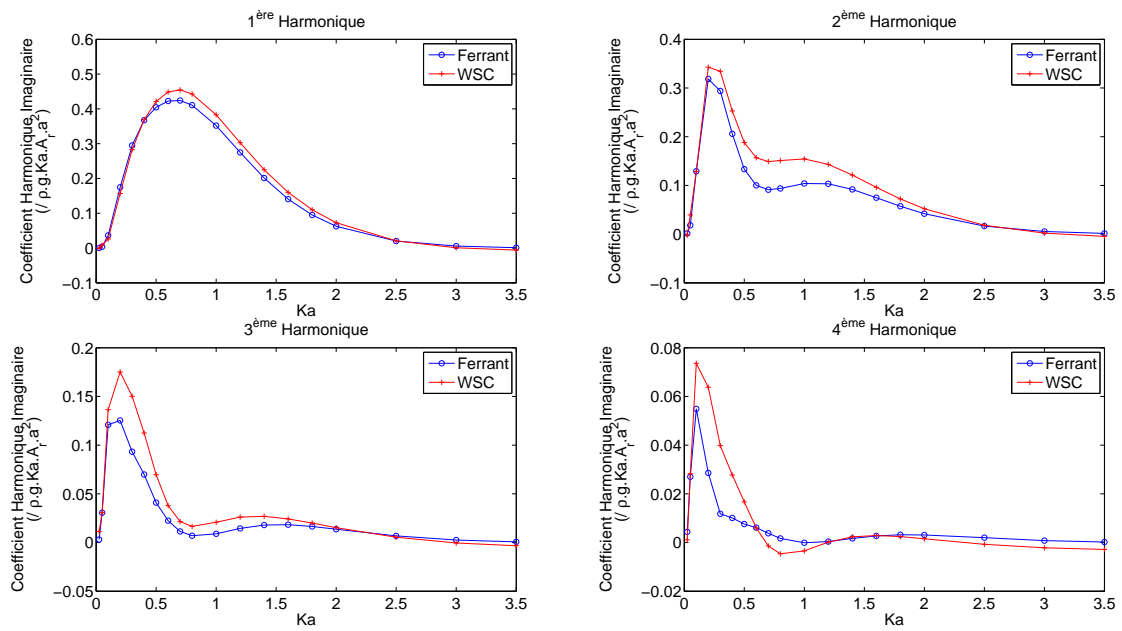


FIGURE 4.45 – Coefficients Harmoniques Imaginaires en fonction de la longueur d’onde adimensionnée pour une amplitude de  $A_r = 0.7a$

## Radiation seule d'une sphère immergée en mouvement libre

### Description du cas de validation

Ce cas de validation est un essai en extinction et diffère du précédent uniquement par le mouvement de la sphère laissée libre. Celle-ci est soumise à un rappel élastique de raideur  $K_e$  fixe en  $z = -d = -2a$  sous la surface libre. La sphère, de même rayon  $a = 10m$ , est décalée d'une distance  $a_0$  à la verticale du point fixe du ressort.

La simulation est menée sur 10 périodes avec 100 pas de temps par période, en profondeur infinie et domaine ouvert. Aucune houle incidente n'étant imposée, les conditions de surface libre sont complètement linéarisées, tandis que les conditions sur le corps sont exactes (approche Body-Exact).

### Résultats en conditions linéaires

Une comparaison avec l'approche linéaire donné par Nemoh est effectuée en se plaçant à une amplitude de mouvement faible devant le rayon de la sphère :  $a_0 = 0.1m$ . La raideur élastique et la masse ajoutée à l'infini donne une approximation de la pulsation du mouvement obtenu.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_e}{M + \mu_\infty}}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4.91)$$

La masse ajoutée à l'infini  $\mu_\infty$  est donnée par Nemoh pour une pulsation tendant vers l'infini. Une raideur de  $K_e = 6.44.10^6 N.m^{-1}$  est utilisée dans un premier temps, de manière à obtenir une pulsation d'environ  $1rad.s^{-1}$ .

Une reconstruction du signal temporel de l'évolution du centre de gravité pour le modèle linéaire Nemoh est effectuée grâce à la méthode Prony [38]. L'évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère est tracée figure 4.46 pour les solutions linéaire reconstruite et WS. Un léger écart est visible, notamment à la fin de la simulation, sur la période de l'oscillation. L'erreur relative sur cette période par rapport à la période prédite  $T_0$  est de 1% pour la méthode Prony et 0.89% pour le code WS. Une légère différence peut également être relevée sur les pics, et donc sur l'amortissement du mouvement.

### Conservations Énergétique et Volumique

Les conservations énergétique et volumique sont strictement similaires à celles présentées dans le cas de validation de mouvement forcé. Les conservations sont présentées pour le maillage de surface libre le plus raffiné (WS1), dans la figure 4.47. Une dérive de l'énergie totale est visible au cours de la simulation, mais cette dernière reste faible devant l'énergie fournie par le corps au fluide ou l'énergie du fluide.

Les erreurs relatives sur les conservations énergétique et volumique en fonction du temps sont tracées figure 4.48. Celle sur la conservation volumique est négligeable devant celle sur la conservation énergétique. La dérive sur cette dernière est bien visible sur ce tracé. Elle est principalement due à la propagation de la perturbation sur un maillage de surface libre moins raffiné à l'extérieur du domaine qu'au centre. En effet, si l'on trace

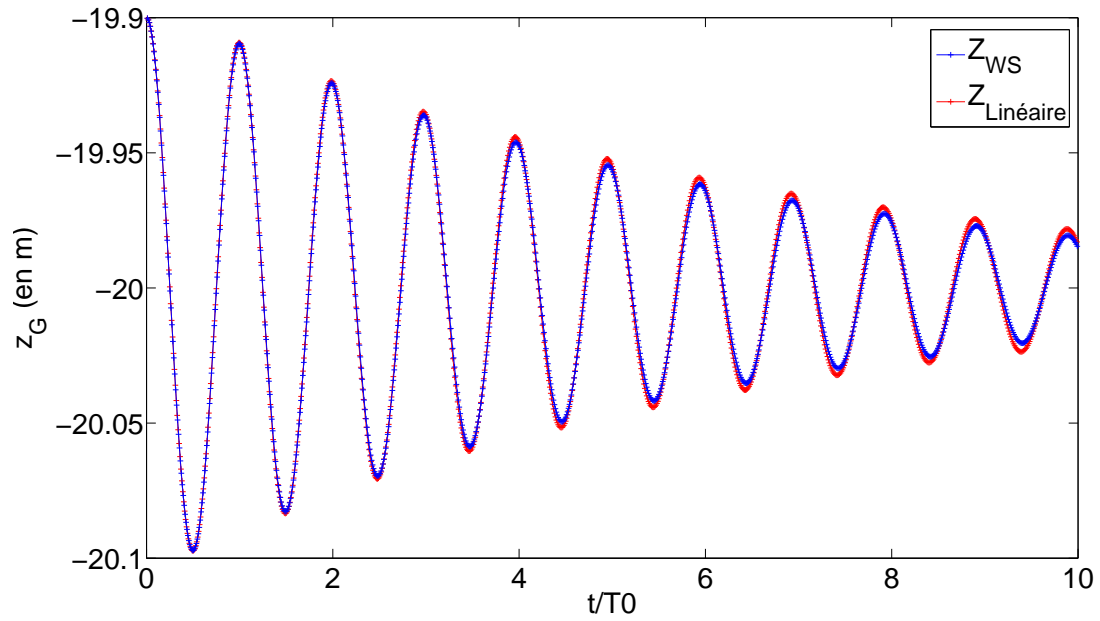


FIGURE 4.46 – Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère

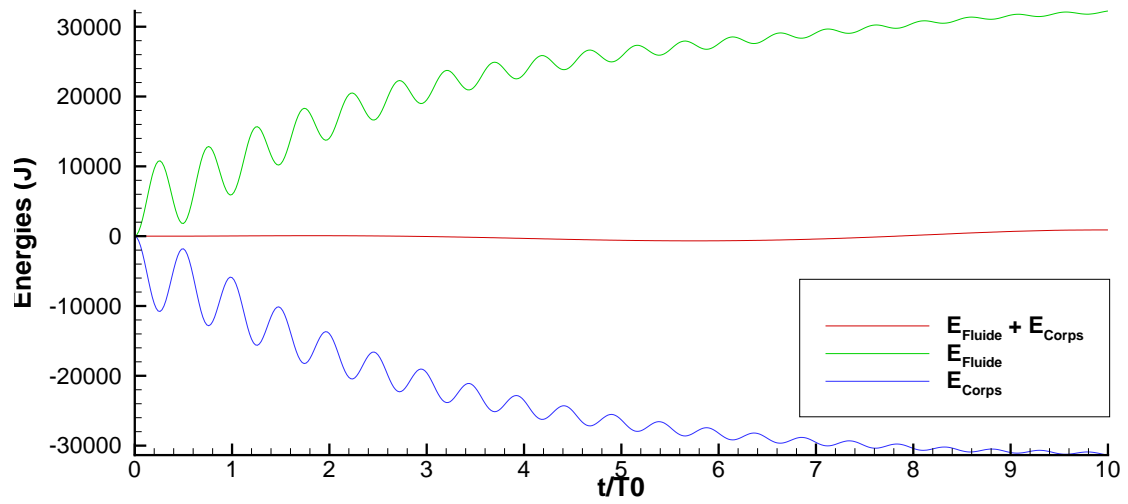


FIGURE 4.47 – Conservation énergétique pour une sphère en mouvement libre



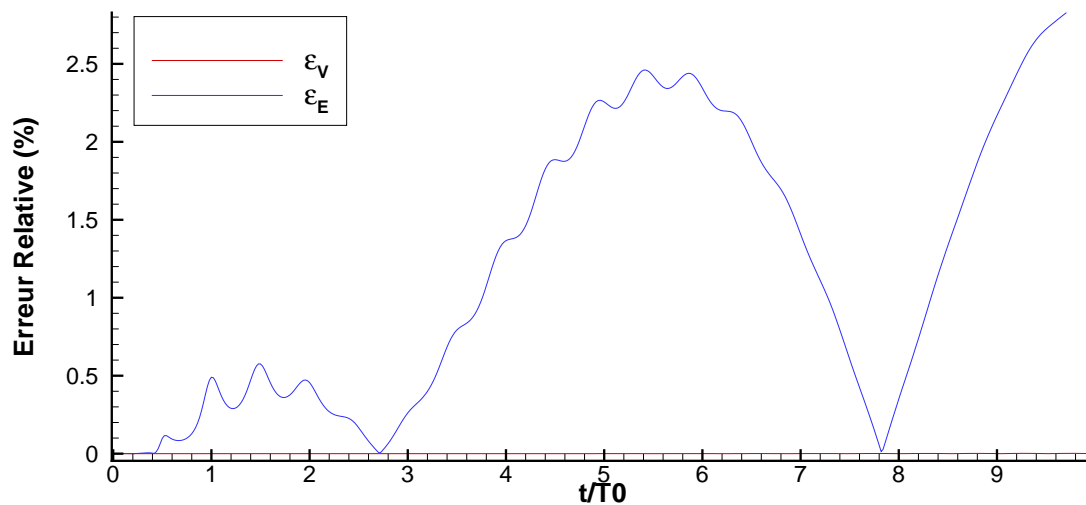


FIGURE 4.48 – Erreurs Relatives de la conservation énergétique et volumique

la même conservation pour le maillage WS3, le phénomène est amplifié. L'erreur relative pour la conservation d'énergie atteint les 4% sur le premier pic, avant l'observation d'une dérive plus importante. Il est possible alors de conclure sur la présence de diffusion numérique due au maillage. C'est un des problèmes lié au maillage cylindrique, pratique puis réduisant le nombre de facettes et de nœuds sur l'extérieur du domaine, mais où la précision peut alors ne plus être suffisante pour assurer une bonne propagation des perturbations.

### Conditions Non-Linéaires : Grands Mouvements et Proche Surface Libre

La sphère est désormais éloignée verticalement du point d'équilibre d'une distance  $a_0 = 0.5a$ . L'évolution du centre de gravité de la sphère est tracée figure 4.49 pour les solutions linéaire reconstruite et WS. Les deux modèles présentent des résultats encore similaires. Une augmentation de l'amortissement de la solution du code WS par rapport à celle de la méthode linéaire est cependant présente.

En approchant la sphère de la surface libre avec le point fixe du ressort à  $d = 1.5a = 15m$ , la distance initiale au point d'équilibre doit être légèrement abaissée à  $a_0 = 0.4a$ , mais les non-linéarités de surface libre sont amplifiées, cf figure 4.50.

Une bonne adéquation des solutions est obtenue, un amortissement supérieur est cependant encore observable sur la solution donnée par le code WS.

### 4.5.3 Synthèse

Le calcul des efforts hydrodynamique sur un corps, ainsi que celui de ses mouvements ont été implémentés. La résolution de la dérivée temporelle du potentiel est réalisée par

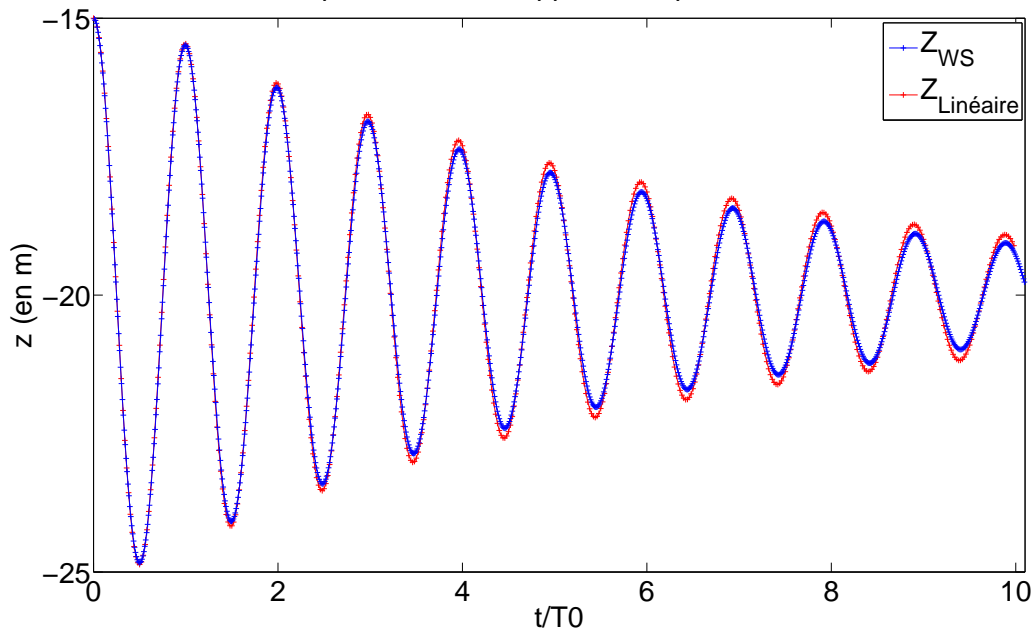


FIGURE 4.49 – Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère, pour une amplitude d'oscillation initiale de  $0.5a$

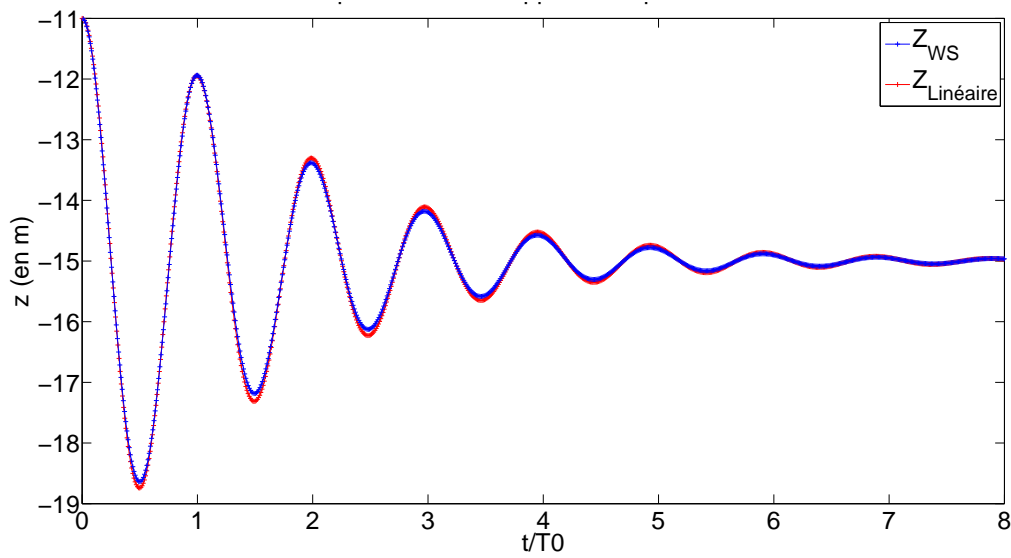


FIGURE 4.50 – Évolution temporelle de la position verticale du centre de gravité de la sphère pour une distance  $d = 1.5a$

résolution d'un problème aux limites sur cette dernière. La condition sur le corps a été re-développée selon les méthodes données par Tanizawa et Cointe. Une nouvelle expression est ainsi proposée, permettant d'unifier celles de Tanizawa et Cointe.

Les dérivées locales, premières et secondes, du potentiel sont quant à elles calculées d'après l'approximation par fonctions d'interpolation b-splines, présentées à la section 4.3.

La prise en compte et le calcul des mouvements libres du corps sont également effectués lors de la résolution du problème aux limites, à l'aide de la méthode de la condition limite implicite proposée par Tanizawa et Van Dalen.

Le calcul des efforts sur un corps fixe est validé dans un premier temps, au travers de l'étude de la diffraction d'une houle sur une sphère immergée. Il est à noter que c'est la première validation réellement effectuée sous l'approximation *Weak-Scatterer* (conditions limites de surface libre faiblement non-linéaire), présentée dans ce mémoire. Des calculs en conditions linéaires sont alors menés avec une solution en approche linéaire donnée par Némoh. Une étude des différences entre les deux approches en conditions non-linéaires (houle de grande cambrure) est ensuite présentée.

Un cas de radiation seule d'une sphère immergée en pilonnement forcé est ensuite mené, pour valider la condition sur le corps du problème aux limites sur la dérivée du potentiel. De même, une solution en approche linéaire donnée par Némoh est utilisée, pour validation en conditions linéaires et à titre de comparaison en conditions non-linéaires.

Enfin le cas de radiation seule de la sphère immergée en mouvement libre est résolu, avec l'ajout d'un rappel élastique, afin de valider la méthode de la condition implicite (calcul des mouvements dans la résolution du problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel). Une solution en approche linéaire donnée par Némoh est toujours utilisée, pour validation en conditions linéaires et comparaison en non-linéaires.

Il est possible de conclure dans ces trois cas de la validité des résultats donnés par l'approche WS par rapport à ceux de l'approche linéaire, en conditions linéaires. Des différences minimales sont observables, notamment liées à des discrétisations du corps légèrement différentes dans les deux codes. Les méthodes de discrétisation des équations intégrales pour le calcul des coefficients d'influence sont également différentes : panneaux constants pour Némoh et discrétisation linéaire pour WS, et peuvent mener à des ordres de précision des résultats différents.

Des différences plus notables sont visibles en conditions non-linéaires : corps en grands mouvements, houle de grande cambrure avec corps proche de la surface libre. Ces dernières justifient alors l'apport de la formulation *Weak-Scatterer* sur l'approche linéaire, en permettant de capturer des phénomènes non-linéaires, ici particulièrement liés à l'interaction entre la surface libre et le corps. Il est toutefois nécessaire de prêter attention à la validité des hypothèses de la formulation *Weak-Scatterer*. Ces phénomènes non-linéaires sont en effet souvent accompagnés de grandes perturbations générées par le corps. Or celles-ci, supposées faibles devant le champ incident, ne le sont pas toujours.

## Chapitre 5

# Application du code *Weak-Scatterer*

*Étude d'une bouée immergée pilonnante ancrée au fond, de type Ceto*

### 5.1 Description du système houlomoteur

Le système houlomoteur (wave energy converter, WEC, en anglais) Ceto a été développé par la société australienne Carnegie Wave Energy Limited.

Il consiste en une bouée immergée ancrée au fond générant de l'énergie et possédant également des fonctionnalités de désalinisation d'eau de mer. Ce cas d'application s'inspire largement de ce système houlomoteur en simplifiant la géométrie à celle d'une sphère et les ancrages et Power Take-Off (PTO) à un système ressort-amortissement linéaire.

Les caractéristiques géométriques de la sphère sont tirées des dimensions du Ceto :

- $a = 3.5m$ , rayon de la sphère
- $d = 5m$ , immersion au repos du  $CdG$
- $H = 20m$ , profondeur du domaine

Les paramètres du ressort,  $K_{PTO}$  et  $l_0$  permettent d'ajuster la réponse du système houlomoteur aux sollicitations de houle. La raideur,  $K_{PTO}$ , est définie de manière à obtenir une résonance du système mécanique sous l'action de la houle incidente. Elle peut être alors exprimée en fonction de la pulsation de houle incidente,  $\omega$ , de la masse du corps,  $M$ , ainsi que de sa masse d'eau ajoutée à l'infini,  $\mu_\infty$ . Cette dernière est choisie comme approximation de la masse d'eau ajoutée du corps, puisque celle-ci

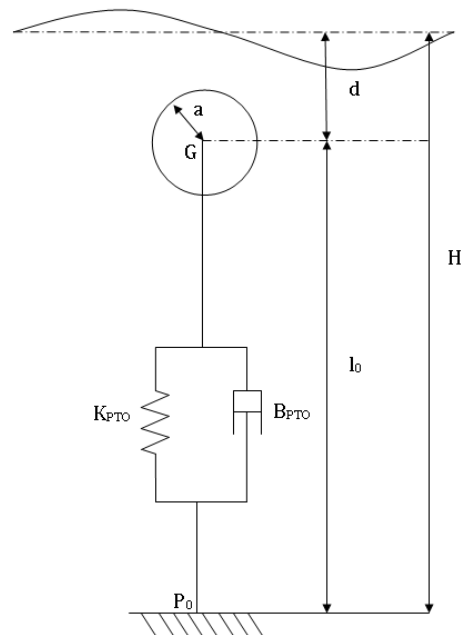


FIGURE 5.1 – Schéma du WEC

dépend de la pulsation de houle incidente.

$$K_{PTO} = (\mu_{\infty} + M) \omega^2 \quad (5.1)$$

La longueur à vide du ressort,  $l_0$ , permet de définir une pré-tension, via l'équation hydrostatique de la bouée.

$$(M - \rho_{eau} \cdot V_{Sphere}) g = K_{PTO} (H - d - l_0) \quad (5.2)$$

Seul le cas d'une sphère de flottabilité nulle est considéré ici.

$$M = \rho_{eau} V_{Sphere} \quad (5.3)$$

La longueur à vide donne alors directement l'immersion au repos de la sphère.

$$d = H - l_0 \quad (5.4)$$

L'amortissement  $B_{PTO}$  dimensionne le PTO et donc influence la quantité d'énergie de la houle récupérée.

L'effort du PTO sur le corps s'écrit en fonction de la position relative du corps par rapport au point d'ancrage,  $\overrightarrow{GP_0}$ , et à la vitesse du corps,  $\overrightarrow{V} = \frac{\partial \overrightarrow{GP_0}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{F_{PTO}} = K_{PTO} \left( |\overrightarrow{GP_0}| - l_0 \right) \frac{\overrightarrow{GP_0}}{|\overrightarrow{GP_0}|} + B_{PTO} \overrightarrow{V} \quad (5.5)$$

et la puissance instantanée ainsi que l'énergie absorbée par le PTO sont donc simplement

$$\begin{cases} P_{PTO}(t) &= B_{PTO} \overrightarrow{V}(t)^2 \\ E_{PTO}(t) &= \int_0^t P_{PTO}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (5.6)$$

### 5.1.1 Puissance absorbée, largeur de capture et rendement

La puissance moyenne absorbée par le PTO, le flux d'énergie de houle incidente, la largeur de capture et le rendement sont définis à partir de l'énergie captée par le PTO et des paramètres de houle.

$$\begin{cases} P_{abs} &= \frac{E_{PTO}}{t} \\ J &= \frac{\rho g^2}{8\pi} A_h^2 T \quad W/m \\ B_J &= \frac{P_{abs}}{J} \\ \eta_{PTO} &= \frac{B_J}{2a} \end{cases} \quad (5.7)$$

## 5.2 Conditions linéaires : faibles cambrures de houle et réponses en mouvement

Un premier cas est présenté pour s'assurer de la validité de la solution WS, sous conditions linéaires, en comparaison avec la solution linéaire. Les hypothèses de houle de faibles amplitude et cambrure doivent ainsi être respectées, afin que les non-linéarités de surface libre soit négligeables. De même, l'amplitude de mouvement du corps doit être faible devant la longueur caractéristique de celui-ci, pour négliger les non-linéarités liées aux mouvement du corps.

La houle incidente est choisie avec une pulsation  $\omega = 1.7\text{rad/s}$ , soit une période de  $T = 3.7\text{s}$  et une longueur d'onde  $\lambda = 21.3\text{m}$ . L'amplitude de la houle est  $A_h = 0.001\text{m}$  soit une cambrure  $c = kA_h = 0.03\%$ . Une amplitude de houle aussi faible nous permet d'assurer le respect des hypothèses de linéarité, sur la surface libre et le corps, malgré la résonance mécanique générée par le ressort ( $K_{PTO} = 740000\text{N/m}$ ).

### 5.2.1 Sans amortissement du PTO

L'amortissement du PTO est pris nul, dans un premier temps, pour vérifier la justesse de l'évaluation de l'amortissement en radiation par le modèle WS, sans interférence du premier avec le second. Les solutions linéaire et WS des réponses en mouvement et en effort en diffraction-radiation sont tracées figure 5.2

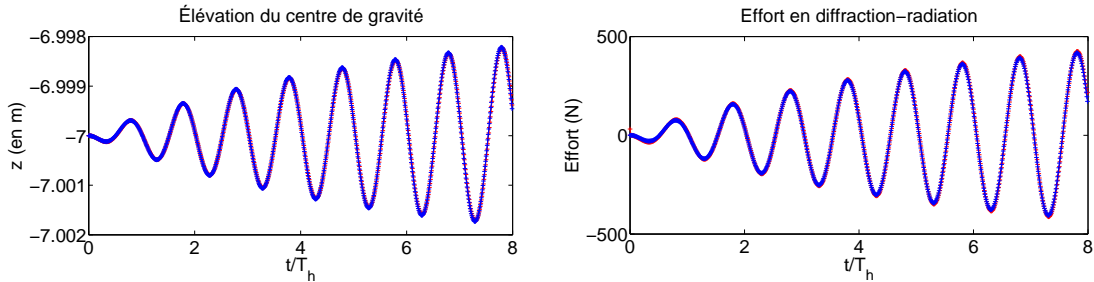


FIGURE 5.2 – Comparaison des modèles linéaire et WS en conditions linéaires, sans amortissement du PTO

Les deux modèles donnent des solutions présentant un très bon accord. Les périodes d'oscillations sont très proches visuellement, de même que l'accroissement des amplitudes des oscillations. La masse ajoutée et l'amortissement en radiation sont respectivement liés à ces deux quantités. Il est alors possible de conclure sur l'accord des deux solutions en terme de masse ajoutée et d'amortissement en radiation, de manière qualitative, sans les évaluer directement.

En effet, le régime permanent n'est pas atteint après 8 périodes d'excitation, à cause d'un amortissement faible. L'analyse harmonique est ainsi plus complexe à réaliser et non nécessaire ici, où l'on ne cherche qu'à vérifier ce qui a déjà été validé précédemment.

### 5.2.2 Avec amortissement du PTO

L'amortissement du PTO permet la récupération de l'énergie de houle par le système houlomoteur. Il permet également la stabilisation plus ou moins rapide du mouvement du corps, du régime transitoire au régime stationnaire. Une valeur de l'amortissement du PTO de  $B_{PTO} = 50000 N.s/m$  a été déterminée à l'aide de la solution linéaire de manière à obtenir un régime transitoire limité à quelques oscillations.

Les solutions linéaire et WS de l'élévation du centre de gravité du corps, de l'effort en diffraction-radiation et de l'énergie captée en fonction du temps sont présentées dans la figure 5.3.

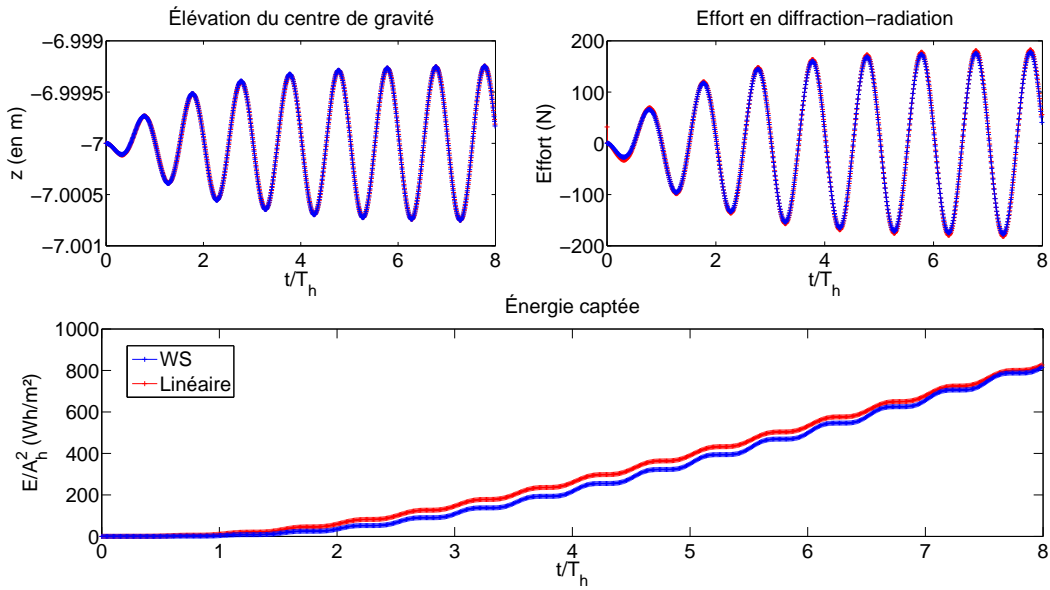


FIGURE 5.3 – Comparaison des modèles linéaire et WS en conditions linéaires, avec un amortissement du PTO

L'hypothèse de linéarité sur le corps est vérifiée : l'amplitude de mouvement du corps est très faible devant ses dimensions. Un bon accord est visible entre les deux modèles pour les solutions de l'élévation du centre de gravité et de l'effort en radiation. Les mêmes périodes d'oscillation et amortissements peuvent être retrouvés. Un écart est visible dans le régime transitoire, puisque les efforts en diffraction ne sont pas imposés de la même façon dans les deux modèles. Dans l'approximation linéaire, les efforts en diffraction du régime permanent sont considérés dès le début, au contraire de l'approximation WS. Cela résulte en un écart sur l'énergie absorbée, qui se traduit par un offset entre les deux modèles une fois le régime permanent atteint. Cela est visible entre les 4<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> périodes. Cependant la solution WS rattrape l'écart sur la fin de la simulation, sans doute à cause de réflexions de la perturbation sur l'extérieur du domaine.

La puissance moyenne absorbée, la largeur de capture et le rendement du PTO sont comparés dans le tableau 5.1, pour les deux modèles. Pour la houle incidente choisie, le

flux d'énergie de houle incidente est de  $J = 0.0141W/m$ . La puissance moyenne absorbée n'est relevée que sur le régime stationnaire.

	Nemoh	WS
$P_{abs}(W)$	0.0369	0.0367
$B_J(m)$	2.61	2.59
$\eta_{PTO}(\%)$	37.4	37.0

TABLE 5.1 – Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement donnés par les modèles linéaire et WS en conditions linéaires

### 5.2.3 Réponses pour un ensemble de fréquences

Les réponses en pilonnement et en puissance moyenne absorbée sont étudiées pour un ensemble de pulsations de houle incidente variant de  $0.4rad/s$  à  $2rad/s$ , tandis que l'amplitude de houle est conservée constante  $A_h = 0.001m$ . La raideur du ressort est accordée à la pulsation de houle incidente, de manière à conserver la résonance mécanique du système, tandis que l'amortissement du PTO est choisie fixe,  $B_{PTO} = 5.10^4N.s/m$ .

Les réponses en pilonnement et en puissance moyenne absorbée sont tracées en fonction de la pulsation, figure 5.4, pour les modèles linéaire et WS. Le flux d'énergie de houle incidente, multiplié par le diamètre du corps, est de plus ajouté pour comparaison avec les réponses en puissance.

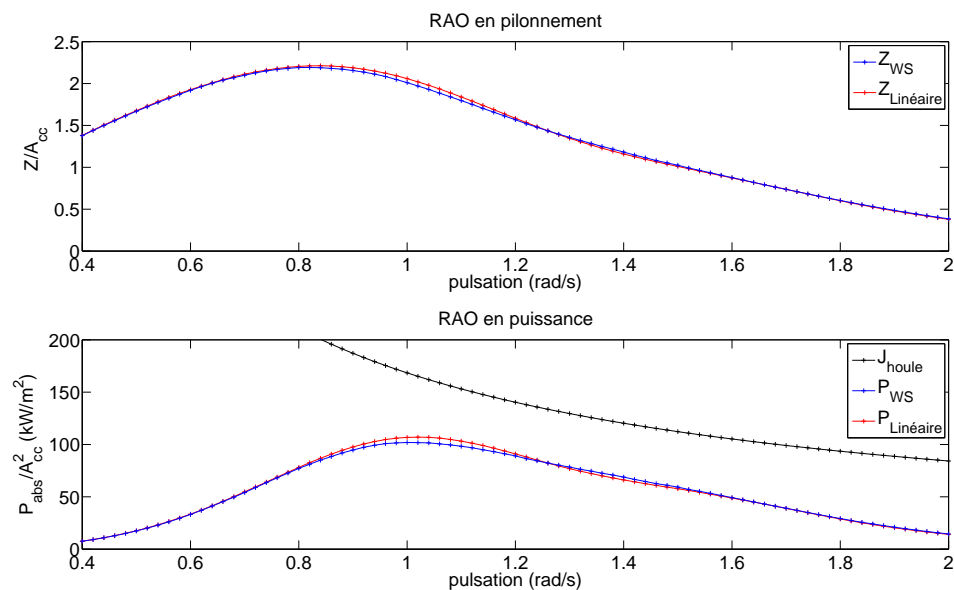


FIGURE 5.4 – Réponses en pilonnement et puissance moyenne absorbée pour des houles incidentes de faible amplitude



Un bon accord est trouvé entre les deux modèles. Quelques différences sont visibles pour des pulsations comprises entre  $\omega = 0.8rad/s$  et  $1.5rad/s$ , avec une erreur relative maximale de l'ordre de  $\epsilon = 1.5\%$  sur la réponse en pilonnement. Une différence de discrétisation du corps dans les deux modèles est donc peut-être en cause ici aussi. Cet erreur maximale est néanmoins faible, suffisamment pour pouvoir valider le modèle WS en conditions linéaires par rapport à l'approche linéaire.

La réponse en mouvement supérieure à 1, proche de 2.25 au maximum, confirme que la résonance recherchée en réglant la raideur du ressort en fonction de la pulsation de la houle incidente est bien obtenue.

### 5.3 Conditions non-linéaires : grandes cambrures de houle et réponses en mouvement

Une étude similaire en conditions non-linéaires est menée pour identifier l'apport de l'approche WS sur l'approximation linéaire, en terme de réponse en mouvement et en puissance.

Deux principaux ensembles de non-linéarités peuvent alors être considérées : ceux des non-linéarités liées à de grandes amplitudes de mouvement du corps, et ceux des non-linéarités dues à des houles non-linéaires, de grande cambrure. Les premières concernent ainsi principalement le problème en radiation. Les secondes, au contraire, affectent le problème en diffraction.

Une étude sur la réponse en mouvement et en puissance en fonction de la fréquence d'excitation de la houle est également présentée.

#### 5.3.1 Visualisation des non-linéarités liées au corps

Les non-linéarités liées aux mouvements du corps sont recherchées dans un premier temps. Il est alors nécessaire de se placer à la fréquence générant la plus grande réponse en amplitude, tout en conservant une houle incidente de cambrure moyenne.

Une houle incidente est choisie avec une pulsation  $\omega = 1rad/s$ , soit une période de  $T = 6.3s$  et une longueur d'onde  $\lambda = 60m$ . L'amplitude de la houle est  $A_h = 1.25m$  soit une cambrure  $c = kA_h = 13\%$ . La raideur du ressort, ajustée sur l'excitation, est définie à  $k_{PTO} = 3.10^6 N/m$ , tandis que l'amortissement est  $B_{PTO} = 5.10^4 N.s/m$ .

#### Réponses en pilonnement, effort et énergie

Les solutions linéaire et WS des réponses en mouvement et en effort en diffraction-radiation sont tracées figure 5.5

Les conditions de linéarité, de faibles mouvements du corps autour d'une position moyenne, ne sont plus respectées : l'amplitude de mouvement atteint  $2.5m$  à la fin de la simulation, soit environ les trois quarts du rayon de la sphère. Les effets de non-linéarité du au corps, pris en compte par le modèle WS et non par le linéaire, sont visibles. La

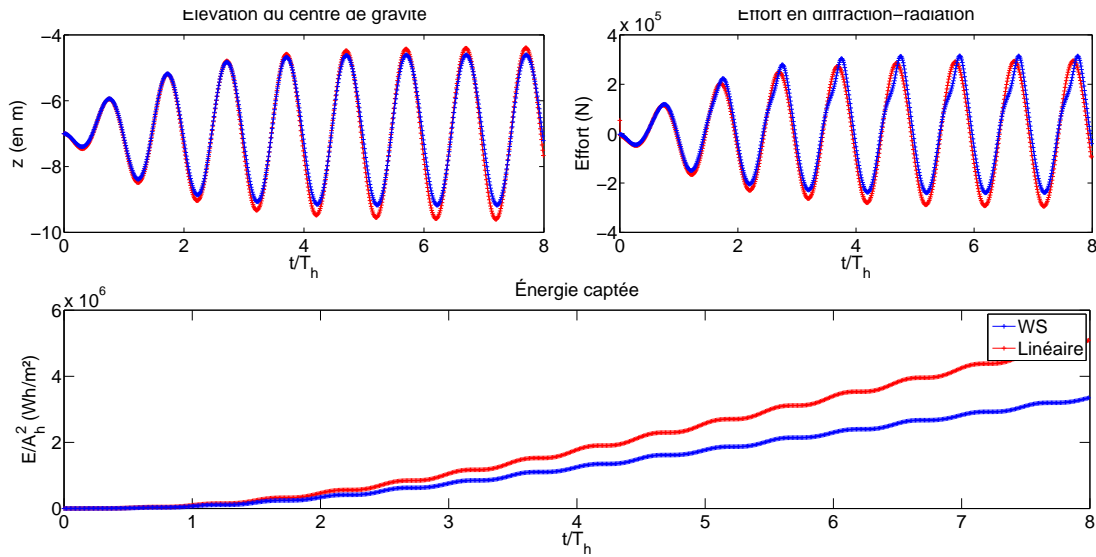


FIGURE 5.5 – Comparaison des modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités liées au mouvements du corps

réponse en amplitude en régime permanent est moins importante prédite par le modèle WS que l’approche linéaire.

Des non-linéarités sont visibles sur l’effort en diffraction-radiation lorsque le corps s’approche de la surface libre : les pics se déforment. Cela provient d’une modification de l’amortissement en radiation du corps, qui induit alors un déphasage, pendant un temps très court. Lorsque le corps s’éloigne ensuite de la surface libre, l’amortissement en radiation et donc le déphasage retrouvent leurs valeurs. Ces non-linéarités ne sont pas liées à la grande cambrure de la houle, mais plutôt de l’interaction entre le corps et la surface libre.

En terme de réponse en puissance moyenne absorbée, ces non-linéarités ont également un impact non négligeables. L’énergie absorbée à la fin de la simulation par le PTO diffère entre les deux approximations d’un écart d’environ  $-33\%$ .

### Puissance moyenne absorbée

Le tableau 5.2 résume les grandeurs associées à l’absorption d’énergie par le PTO, pour les deux approches. Pour la houle incidente choisie, le flux d’énergie de houle incidente est de  $J = 37.6kW/m$ . La puissance moyenne absorbée n’est relevée que sur le régime stationnaire.

L’écart en puissance moyenne absorbée, et donc également sur la largeur de capture et le rendement énergétique, entre les deux approches, atteint presque les 50%. Le modèle linéaire, qui ne prend en compte ces non-linéarités, surestime donc bien la réponse en puissance, comme attendu.

	Nemoh	WS
$P_{abs}(kW)$	161	83.4
$B_J(m)$	4.30	2.22
$\eta_{PTO}(\%)$	61	32

TABLE 5.2 – Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement, donnés par les modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités

### Validation des hypothèses WS

Le choix de cette houle incidente place le code WS dans un cas limite d'application. La sphère vient en effet presque au contact avec la surface libre. Il est de plus intéressant de vérifier la validité des hypothèses de l'approche WS. Les composantes incidente et de perturbation de l'élévation de surface libre sont ainsi tracées, figure 5.6, en fonction du temps, pour un point de la surface libre situé à l'aplomb de la sphère.

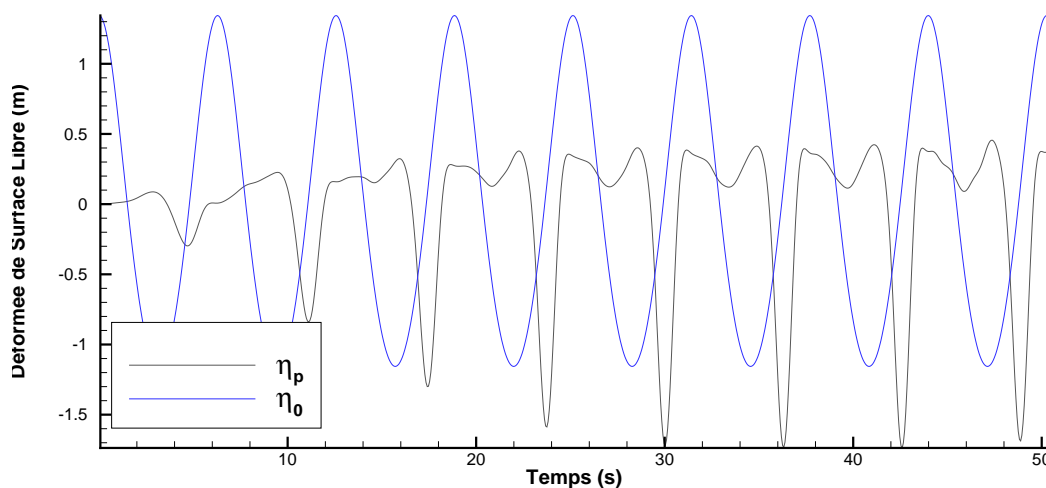


FIGURE 5.6 – Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre

Les perturbations générées par le corps sont très localement supérieures aux composantes de houle incidente. C'est notamment le cas lorsque le corps est très proche de la surface libre. Des lâchers d'ondes courtes, de grandes amplitudes mais de faibles longueurs d'onde, sont alors générés en aval du corps. En dehors de ces ondes courtes, les perturbations sont très faibles devant les composantes de houle incidente.

### 5.3.2 Visualisation des non-linéarités de surface libre

Les non-linéarités de surface libre sont à présent recherchées. Les résultats donnés par l'approche linéaire et le modèle WS sont ainsi comparés pour une houle présentant une forte cambrure mais ne générant pas une grande amplitude de mouvement du corps. La houle incidente sélectionnée possède une pulsation de  $\omega = 2\text{rad/s}$ , soit une période de  $T = 3.14\text{s}$  et une longueur d'onde de  $\lambda = 17\text{m}$ . L'amplitude de houle est choisie à  $A_h = 0.85\text{m}$ , soit une cambrure de  $c = kA_h = 31.4\%$ .

L'amortissement du PTO est défini à  $B_{PTO} = 5.10^4\text{N.s/m}$ , tandis que l'immersion initiale du corps est fixée à  $d = 5\text{m}$ , de manière à amplifier les effets de la houle sur le corps.

#### Réponses en pilonnement, effort et énergie

Les solutions linéaire et WS des réponses en mouvement et en effort en diffraction-radiation, ainsi que l'énergie absorbée par le PTO en fonction du temps, sont tracées figure 5.7

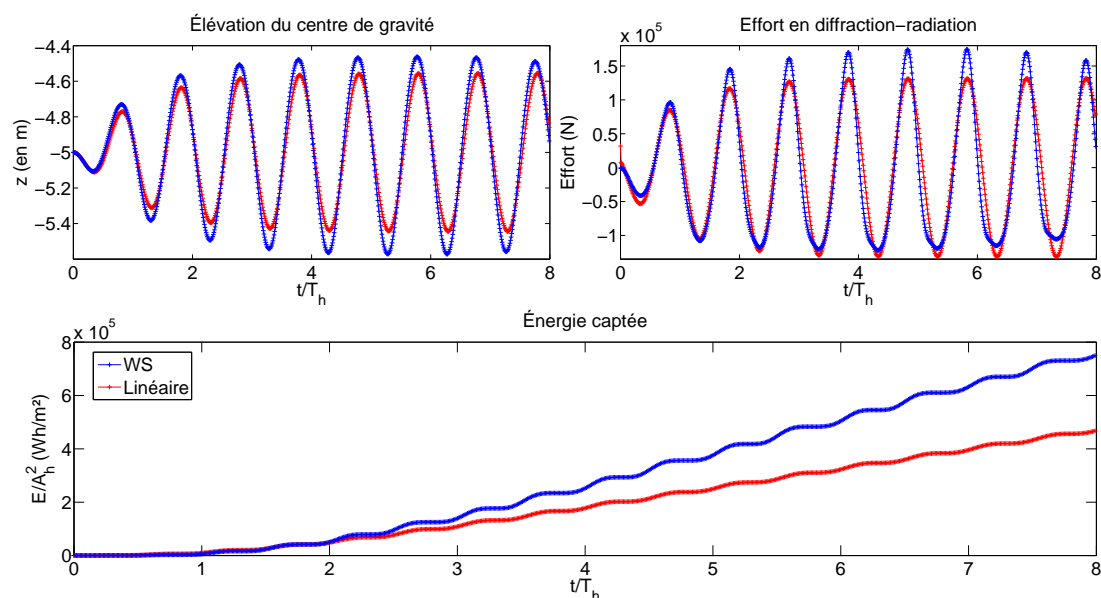


FIGURE 5.7 – Comparaison des modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités de surface libre

L'hypothèse de faible réponse en amplitude de mouvement est vérifiée : l'amplitude maximum de pilonnement de la sphère est de  $0.5\text{m}$ , soit environ 15% du rayon du corps.

L'influence des non-linéarités de surface libre est clairement visible dans les résultats donnés par l'approche WS, en comparaison de ceux de l'approximation linéaire. Les amplitudes de réponses en pilonnement sont plus importantes en WS, amplifiées encore

par le ressort, que ce soit en régime transitoire ou permanent. Les réponses en efforts en diffraction-radiation sont également fortement impactées par ces non-linéarités : les pics sont plus prononcés tandis que les creux sont aplatis.

Cela impacte ainsi directement l'énergie absorbée par le PTO. Elle est ici beaucoup plus importante pour le modèle WS, prenant en compte les non-linéarités liées à la houle incidente de grande cambrure.

### Puissance moyenne absorbée

Le tableau 5.3 résume les grandeurs associées à l'absorption d'énergie par le PTO, pour les deux approches. Pour la houle incidente choisie, le flux d'énergie de houle incidente est de  $J = 8.7kW/m$ . La puissance moyenne absorbée n'est relevée que sur le régime stationnaire.

	Nemoh	WS
$P_{abs}(kW)$	19.7	28.8
$B_J(m)$	2.27	3.32
$\eta_{PTO}(\%)$	32	47

TABLE 5.3 – Comparaison des puissance absorbée, largeur de capture et rendement, donnés par les modèles linéaire et WS, en présence de non-linéarités

Un écart non négligeable de l'ordre de 30% est obtenu entre les deux approches, pour la prédiction de la puissance moyenne absorbée par le PTO. Cela signifie qu'un modèle linéaire ne prenant pas en compte les non-linéarités de surface libre sous-estime cette dernière. Cela va à l'encontre de ce que l'on a pu constater dans l'introduction, pour des houles irrégulières de grande amplitude. Il est néanmoins nécessaire de noter que la pulsation de houle incidente choisie ici ne correspond pas à celle pour laquelle le système houlomoteur serait conçu (i.e. présentant la plus grande réponse en puissance :  $\omega \simeq 1rad/s$ ).

### Validation des hypothèses WS

De même, il est intéressant de vérifier la validité des hypothèses de l'approche WS. Les composantes incidente et de perturbation de l'élévation de surface libre sont ainsi tracées, figure 5.8, en fonction du temps, pour un point de la surface libre situé à l'aplomb de la sphère.

De plus grandes perturbations sont visibles, en comparaison du cas non-linéaire précédent. Des ondes courtes sont toujours générées : la sphère a une amplitude de mouvement moindre mais son enfoncement initiale, moins important, la place désormais proche de la surface libre sur de plus longues durées. Les composantes de perturbations varient alors du même ordre de grandeur que celles de la houle incidente. Cela remet directement en cause les résultats de l'approche WS. Pour valider ceux-ci, par rapport aux résultats du modèle linéaire, il faudrait pouvoir comparer avec une approche complètement non-linéaire.

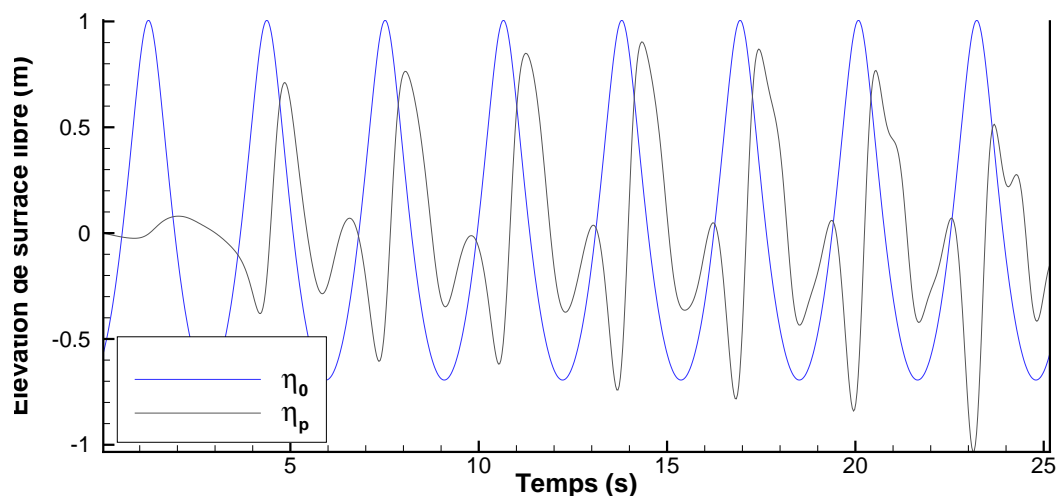


FIGURE 5.8 – Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre

### 5.3.3 Réponse pour un ensemble de fréquences

La même étude est réalisée pour un ensemble de fréquence variant de  $0.4$  à  $2\text{rad/s}$  et une amplitude de houle constante  $A_h = 0.85\text{m}$ . Cette dernière assure de rester en sphère totalement immergée. Les cambrures varient alors de  $2.6\%$  à  $31\%$ .

Les mêmes paramètres de PTO sont utilisés : raideur ajustée sur l'excitation et amortissement fixe  $B_{PTO} = 50000\text{Ns/m}$ . Les paramètres du corps sont également conservés : rayon  $a = 3.5\text{m}$  et enfoncement  $d = 2a = 7\text{m}$ .

Le maillage de la surface libre est soumis à plusieurs conditions. La première concerne le nombre de facettes par longueur d'onde, l'excitation et la perturbation présentant normalement une fréquence proche, grâce à la raideur du ressort. La seconde, liée à la précision du solveur du problèmes aux limites, impose un rapport de taille de facettes sur les frontières de type Dirichlet et Neumann proche de un. Les maillages ainsi générés sont raffinés au centre de manière à obtenir environ 50 pas de discrétisation par période et leur circonférence atteint quatre longueurs d'onde afin d'éviter le retour de réflexions. Une plage absorbante est imposée sur la dernière longueur d'onde.

### Réponses en pilonnement et en puissance moyenne absorbée

Les réponses en pilonnement et en puissance moyenne absorbée sont tracées dans la figure 5.9 suivante.

Les deux modèles présentent des réponses en pilonnement, et donc en puissance, proches bien que présentant des différences pour certaines gammes de fréquences.

Deux de ces gammes peuvent être définies. La première pour des pulsations supérieures à  $1.6\text{rad/s}$ , soit des houles de cambrure supérieure à  $20\%$ . Les écarts entre solu-

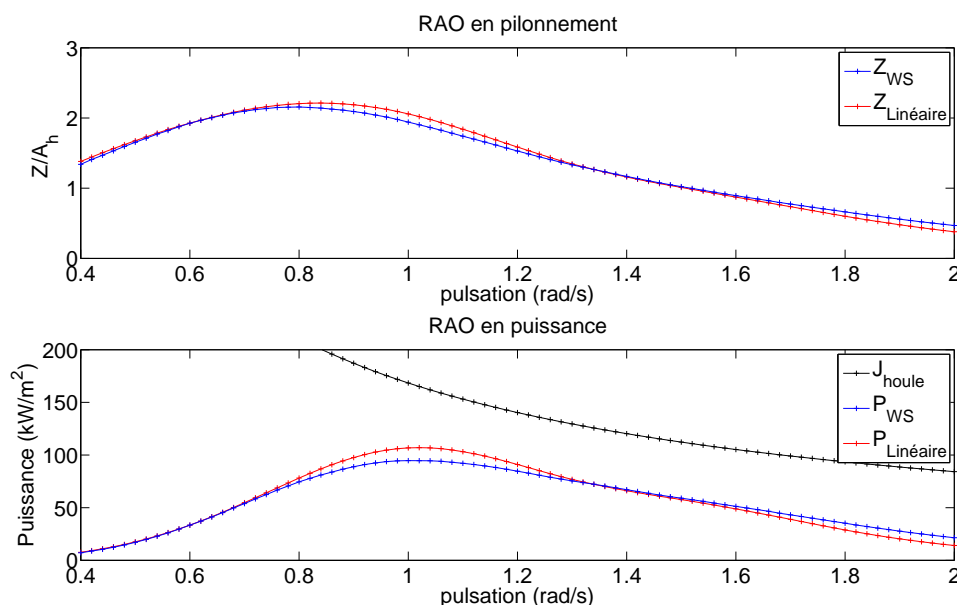


FIGURE 5.9 – Réponses en pilonnement et puissance moyenne absorbée pour des houles incidente de grande amplitude

tion linéaire et WS correspondent ici à la prise en compte de non-linéarités de surface libre. La réponse en pilonnement est en effet inférieure à 1. Une réponse en puissance, supérieure pour le modèle WS, peut alors être retrouvée.

La seconde gamme de pulsation concerne celles comprises entre  $0.8\text{rad/s}$  et  $1.3\text{rad/s}$ . Les non-linéarités liées à de grandes amplitude de mouvement du corps sont ici prépondérants. La réponse en mouvement  $y$  est plus importante, comprise entre 1.5 et 2. La réponse en puissance est inférieure pour le modèle WS, comparé à l'approche linéaire.

Les deux types de non-linéarités sont retrouvés, bien que générant des écarts moins importants, dus à une amplitude de houle moindre ou une immersion supérieure que dans les deux cas précédent.

La seconde gamme de pulsation présente la plus grande réponse en puissance. Le système houlomoteur doit ainsi être conçu pour fonctionner dans celle-ci. Les effets non-linéaires dus aux grands mouvements du corps seront alors prépondérants. Le ressort étant accordé à l'excitation, ce résultat n'est pas inattendu.

### Validation des hypothèses WS

Il est également intéressant d'étudier le champ de perturbations générées par le corps sur la déformée de surface libre incidente, afin de s'assurer que les conditions de l'approximation WS sont bien respectées. L'évolution des composantes incidente et de perturbation de la déformée de surface libre est alors tracée pour le point au centre de la surface libre, pour la pulsation présentant la plus grande réponse en pilonnement,  $\omega = 0.84\text{rad/s}$ .

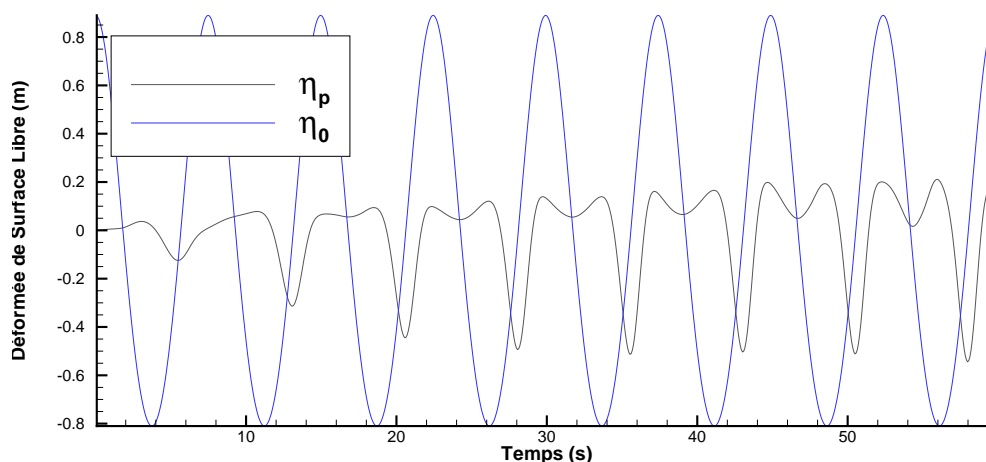


FIGURE 5.10 – Déformées de surface libre incidente et de perturbation au centre de la surface libre

Les perturbation maximum ne sont pas négligeables : 75% de l'amplitude de la houle incidente. Les pics sont cependant très localisés : lorsque le corps est proche de la surface libre, il génère des ondes courtes. Au contraire, lorsque la sphère s'éloigne de celle-ci, les perturbations sont très faibles devant les composantes de houle incidente.

## 5.4 Synthèse

Un système houlomoteur simple de type Ceto a été étudié à l'aide du code WS et les résultats comparés à ceux de Nemoh, basé sur une approche potentiel linéaire. Dans des conditions linéaires, les deux modèles présentent un bon accord, comme attendu. Les faibles écarts, au maximum de 1% pour la réponse en pilonnement, proviennent sans doute de la discrétisation plus précise du corps en WS qu'en linéaire.

En conditions non-linéaires, des écarts non négligeables entre les deux approches apparaissent. Considérer de grandes amplitudes de mouvement du corps entraîne la prise en compte de non-linéarités du corps dans le code WS pour la résolution du problème en radiation. Le modèle linéaire tend alors à donner des performances énergétiques supérieures à celles du modèle WS.

Au contraire, lorsque des houles non-linéaires, de grande cambrure, sont imposées, avec de faible amplitude de mouvement dur corps, l'approche WS donne des performances énergétiques supérieures à celles du modèle linéaire. Ces écarts sont ainsi liés aux non-linéarités de modélisation de la surface libre dans la résolution du problème en diffraction.

Dans les deux cas, il faut néanmoins faire attention au domaine de validité de l'approche WS. Obtenir de grandes réponses en mouvement ou imposer des houles de grandes amplitude et cambrure génère des perturbations qui peuvent mettre en défaut les hypo-



thèses fondatrices de la méthode WS. Une comparaison avec un modèle complètement non-linéaire pourrait être réalisée pour définir ce domaine de validité.

Dans cette étude, la raideur du ressort a été accordée à l'excitation de houle, ce qui a permis d'obtenir de grandes réponses en mouvement et puissance, pour des houles régulières. Dans le cas d'une houle irrégulière, la raideur du ressort ne peut être accordée qu'à la fréquence d'excitation prépondérante. Une étude sur les réponses du système houlomoteur soumis à des houles irrégulières permettraient également de mieux quantifier l'apport de l'approche WS sur le modèle linéaire.

# Chapitre 6

## Conclusions

### 6.1 Développements et validations du code

L'objectif de cette thèse de fournir un outil numérique fonctionnel pour la modélisation de corps en grands mouvements a été atteint. Le domaine d'application de cet outil est défini à l'étude d'un corps immergé en mouvement libre soumis à une houle régulière. Ce code *Weak-Scatterer* a été développé *ex-nihilo*, sous forme de modules. Chacun d'eux a été validé successivement avec succès au cours du développement du code WS.

Les validations les plus pertinentes ont été présentées dans ce mémoire. Elles ont également permis d'illustrer le fonctionnement des principaux modules associés. Parmi ceux-ci figurent notamment le module de calcul des coefficients d'influence et celui de définition et résolution du problème aux limites. Réalisés en début de thèse, ils s'appuient sur le développement des expressions analytiques des équations intégrales. La validation de ces modules a été réalisée conjointement à l'aide d'une solution analytique simple. Différentes fonctionnalités, ayant pour but de réduire les temps de calcul de ces deux modules, ont été implémentées, validées et présentées : prises en compte de symétries, domaine ouvert et calcul partiel des coefficients d'influence.

Le module de calcul des dérivées locales a été développé par la suite. Il est basé sur des approximations par fonctions d'interpolation b-splines, d'ordre élevé. Une méthode basée sur la discrétisation linéaire est également implémentée. Les dérivées locales, premières et secondes, des grandeurs peuvent alors être déterminées sur toute surface paramétrée : surface libre ou corps. La validation de ce module s'est également appuyée sur une solution analytique connue, proche d'une solution que le code serait amené à modéliser. Différentes méthodes de calcul des dérivées ont pu être comparées, en terme de précision et rapidité.

Le module développé ensuite permet l'avance en temps de la solution, au travers d'une boucle temporelle basée sur un schéma de Rung-Kutta d'ordre 4. Les différentes quantités à avancer en temps sont le potentiel et l'élévation de surface libre, mais également la vitesse et la position du corps et diverses puissances instantanées à intégrer en temps pour la vérification de la conservation énergétique ou le calcul de l'énergie absorbée par un PTO. Des cas de validation sans corps sont réalisées dans un premier temps pour s'assurer des équations de surface libre : l'établissement d'une onde stationnaire et la modélisation

d'un batteur de houle. Ces deux validations s'appuient sur deux solutions analytiques : respectivement celle d'une onde stationnaire en théorie linéaire et une solution d'un batteur de houle donnée par Kennard [26].

Enfin le dernier module d'interaction fluide/structure a été implémenté, donnant les efforts hydrodynamique s'appliquant sur le corps, ainsi que les mouvements de celui-ci. Ce module est basé sur la résolution d'un problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel, pour déterminer cette grandeur sur le corps. Une expression pour la condition sur le corps a été développée, unifiant celles données par Cointe [9] et Tanizawa [43]. Les problèmes en radiation et en diffraction ont été validés successivement. Des comparaisons en conditions linéaires avec des résultats en approche linéaire, donnés par Nemoh, ont été utilisées pour cela. La validation du problème en radiation d'une sphère immergée a fait l'objet d'une publication en comparaison avec un code complètement non-linéaire, un *Numerical Wave Tank* (NWT) initié par Grilli et développé par Harris [22].

L'étude des conservations énergétique et volumique dans le domaine fluide a également permis d'accréditer les cas de validations présentés.

## 6.2 Application à l'étude d'un récupérateur d'énergie des vagues de type Ceto

Un système houlomoteur simple de type Ceto a été étudié à l'aide du code WS et les résultats comparés à ceux d'une approche potentiel linéaire, donnés par Nemoh. Dans des conditions linéaires, les deux modèles présentent un bon accord, comme attendu. Les faibles écarts, au maximum de 1% pour la réponse en pilonnement, proviennent sans doute de la discrétisation plus précises du corps en WS qu'en linéaire.

En conditions non-linéaires, des écarts non négligeables entre les deux approches apparaissent. Considérer de grandes amplitudes de mouvement du corps entraîne la prise en compte de non-linéarités du corps dans le code WS pour la résolution du problème en radiation. Le modèle linéaire tend alors à donner des performances énergétiques supérieures à celles du modèle WS. Au contraire, lorsque des houles non-linéaires, de grande cambrure, sont imposées, avec de faible amplitude de mouvement dur corps, l'approche WS donne des performances énergétiques supérieures à celles du modèle linéaire. Ces écarts sont ainsi liés aux non-linéarités de modélisation de la surface libre dans la résolution du problème en diffraction.

Dans les deux cas, il faut faire attention au domaine de validité de l'approche WS. Obtenir de grandes réponses en mouvement ou imposer des houles de grandes amplitude et cambrure génère des perturbations qui peuvent mettre en défaut les hypothèses fondatrices de la méthode WS.

Une comparaison avec un code complètement non-linéaire pourrait permettre de définir plus précisément le domaine d'application du modèle WS. L'influence de la perturbation générée par le corps sur lui-même n'est en effet pas prise en compte dans notre modèle. Cette étude quantifierait ainsi l'importance de ces perturbations sur le corps.

### 6.3 Développements futurs

Ce code a été développé *ex-nihilo*. Seule la structure de gestion des données et quelques fonctions ont été reprises de travaux précédents. Le code obtenu est fonctionnel pour tous les cas de validation et d'application présentés dans ce mémoire. Son domaine d'application est cependant restreint à des corps immergés soumis à des houles régulières.

Techniquement, des corps perçant la surface libre verticalement peuvent être traités. Cependant pour rester dans la configuration d'intersection corps/surface libre verticale, le corps doit être fixe ou en mouvement de pilonnement seul. Un travail conséquent sur la gestion de l'intersection du corps avec la surface libre est donc nécessaire, pour pouvoir considérer des corps flottants librement. Une thèse portant sur le sujet et mené par Camille Chauvigné est actuellement en cours. La gestion de l'intersection regroupe notamment l'étude de la définition et du suivi de l'intersection entre le corps et la surface libre, de la déformation du maillage de surface libre pour suivre le corps dans son mouvement, voire de son remaillage, complet ou partiel, selon les déformations.

La prise en compte d'une houle irrégulière nécessite également une attention particulière. Le principe de superposition de plusieurs houles régulières n'est en effet valable qu'en théorie linéaire. Un modèle de propagation de houle irrégulière d'ordre élevé, basé sur une méthode *High Order Spectral* (HOS), est de plus développé au laboratoire LHEEA [12]. Un futur développement du code WS serait donc un couplage avec ce modèle.

La modélisation de plusieurs corps n'est pas complètement opérationnelle dans tous les modules. Il fait défaut notamment dans le module d'interaction fluide/structure, permettant de déterminer les mouvements de corps. Ce travail serait donc à finaliser pour pouvoir étudier l'interaction de plusieurs corps entre eux. Un couplage à un simulateur multi-corps permettrait de plus de pouvoir étudier des systèmes à mobilité et corps multiples, avec des couplages d'efforts et mouvements entre ces corps.

Il est déjà possible de dégrader simplement la formulation WS pour traiter des problèmes selon l'approximation linéaire, sur la surface libre, le corps (*Body Exact*) ou les deux. Différentes versions du code temporelle pourraient alors être considérées selon les non-linéarités modélisées. De même, il serait possible d'implémenter une version complètement non-linéaire mais toujours basée sur la décomposition du champ en composantes incidentes et de perturbation. Il suffirait juste de considérer les conditions de surface libre exactes, ainsi que la dérivée temporelle totale (incident plus perturbation) dans la définition de la dérivée particulière associée à la vitesse de déplacement des nœuds sur la surface libre. La position de la surface libre devrait cependant être considérée comme inconnue du problème aux limites, rendant sa résolution légèrement moins stable.

Une optimisation de l'efficacité du code, voire une parallélisation de celui-ci, pourraient lui permettre de diminuer les temps de calcul afin de pouvoir simuler des phénomènes en des temps de calcul plus courts, voire en temps réel.

Enfin de nombreux ajouts au code seront nécessaires avant une éventuelle commercialisation ou mise à disposition plus large au public, à plus long terme : interface, import de maillages de corps complexes, ajout de modèles d'ancrages, etc.

## Annexe A

# Développement de la condition limite sur le corps pour le problème aux limites sur la dérivée temporelle du potentiel

Le problème aux limites pour la dérivée temporelle du potentiel est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 & \text{dans tout le domaine fluide} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D_{0z}\phi}{Dt} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} & \text{sur la surface libre} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}}(B) \cdot \vec{n} + \left( \ddot{\vec{\theta}}(B) \wedge \vec{r} \right) \cdot \vec{n} + q & \text{sur un corps en mouvement} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = 0 & \text{sur les surfaces fixes} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

La condition limite sur le corps fait apparaître le terme  $q$ , qu'il s'agit d'explicitier. Une expression de ce terme est présentée dans cette annexe, accompagnée de son développement. Celui-ci a été basé sur les travaux de Cointe [9], Berkvens [3], Tanizawa [43] et Van Dalen [45], qui ont eux-mêmes développé des expressions 2D et 3D selon deux méthodes différentes.

Les développements des différentes expressions analytiques de la condition limite sont présentés, de même que leurs équivalences. Une nouvelle expression simplifiée est également introduite.

### A.1 Méthode de Cointe

La méthode développée par Cointe[9] repose sur la dérivée temporelle de la condition de glissement sur le corps. Si l'on considère le déplacement d'un point  $P$  du corps, de coordonnées  $\vec{x}$  dans le repère global et une vitesse de rotation du corps,  $\theta$  dans le repère

global, Cointe[9] a exprimé l'équation précédente en 2D comme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \cdot \left( \dot{\vec{x}} \cdot \vec{s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} \right) \dot{\vec{x}} \cdot \vec{s} + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \dot{\vec{x}} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.2})$$

$\vec{s}$  correspond au vecteur tangent local au point  $P$ . Elle a été ensuite développée par Van Dalen[45] en 3D

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} &+ \left( \vec{x} \cdot \vec{s}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) \cdot \vec{\theta} \cdot \vec{s}_2 - \left( \vec{x} \cdot \vec{s}_2 - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \cdot \vec{\theta} \cdot \vec{s}_1 - \left( k_1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} \right) \cdot \vec{x} \cdot \vec{s}_1 \\ &- \left( k_2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} \right) \cdot \vec{x} \cdot \vec{s}_2 + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} - (k_1 + k_2) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \cdot \vec{x} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

### A.1.1 Développements 2D

Soit un corps muni d'un repère local curviligne direct  $(O, s, n)$ , défini à partir des vecteurs tangent ( $\vec{s}$ ) et normal ( $\vec{n}$ ) locaux. Les courbes  $s = \text{constante}$  sont donc des droites portées par les vecteurs normaux locaux. Les courbes  $n = \text{constante}$  sont des contours homothétiques du profil de la carène, tandis que  $n = n_0$  correspond à celui-ci.

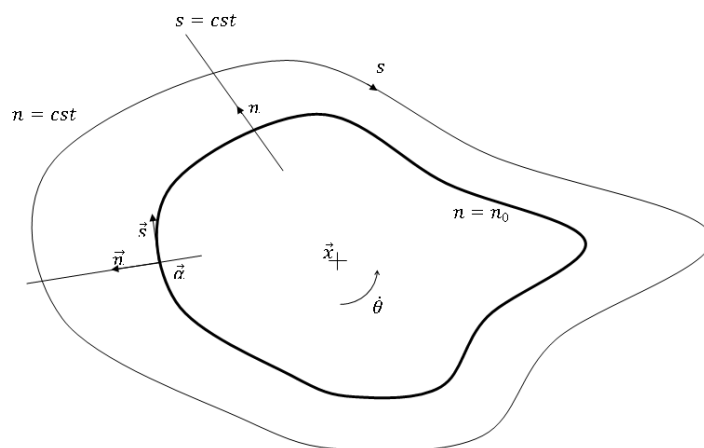


FIGURE A.1 – Schéma de la base curviligne

Si, en cartésien, le vecteur position s'écrit  $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$ , les vecteurs de la base curviligne,  $(\vec{s}, \vec{n})$ , sont définis par

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \quad \text{et} \quad \vec{s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \quad (\text{A.4})$$

Les facteurs d'échelle sont définis par

$$h_n = |\vec{n}| \quad \text{et} \quad h_s = |\vec{s}| \quad (\text{A.5})$$

Les courbes  $s = cst$  sont des droites et  $\vec{n}$  est défini unitaire pour tout  $s$  et  $t$ . Alors pour tout  $(s, n, t)$ , les variations du facteur d'échelle suivant la normale sont

$$h_n = 1, \quad \frac{\partial h_n}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial n} = 0 \text{ et } \frac{\partial h_n}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Le vecteur tangent  $\vec{s}$  est également défini unitaire sur le contour ( $n = n_0$ ) pour tout  $s$ . Il varie néanmoins pour toutes les autres valeurs de  $n$ . Cette variation s'exprime à l'aide du rayon de courbure  $R$  par

$$\frac{\partial h_s}{\partial n} = \frac{h_s}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h_s}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Les équations de dérivation des vecteurs unitaires de la base, en base directe, sont

$$\frac{\partial \vec{h}_i}{\partial w_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial w_i} \vec{h}_j - \delta_{ij} \sum_{k, k \neq i} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \vec{h}_k \quad (\text{A.8})$$

Les dérivées spatiales des vecteurs de la base sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} = \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial s} \vec{s} - \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{n} = -\frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{s}}{\partial n} = \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_n}{\partial s} \vec{n} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{s} = \frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{s} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial n} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_n}{\partial n} \vec{n} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_n}{\partial s} \vec{s} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

Les opérateurs dérivatifs peuvent alors être exprimés comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} b^i = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\prod_j h_j} \frac{\partial}{\partial q_i} (V_i \prod_{j \neq i} h_j) = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{s}}{\partial s} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}}{\partial n} \\ = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{s}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{n}}{\partial n} + \frac{1}{R} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \\ \Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 0 \end{array} \right.$$

La dérivée temporelle de  $\phi$  lorsque l'on suit le corps dans son mouvement de corps rigide est définie par  $\frac{\delta \phi}{\delta t}$ . Cette dérivée correspond à une dérivée particulière par rapport au mouvement du corps, donc associée à la vitesse du point du corps considéré,  $\dot{\vec{x}}$ . Elle peut alors être exprimée en fonction de la dérivée partielle par

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (\text{A.10})$$

Les vecteurs tangents et normaux locaux varient en suivant le mouvement du corps. Leurs dérivées temporelles particulières peuvent alors être exprimées par

$$\frac{\delta \vec{s}}{\delta t} = \dot{\theta} \vec{n} \quad \text{et} \quad \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} = -\dot{\theta} \vec{s} \quad (\text{A.11})$$

Et leurs dérivées partielles par

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \frac{\delta \vec{s}}{\delta t} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{\partial \vec{s}}{\partial n} = \dot{\theta} \cdot \vec{n} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{\partial \vec{n}}{\partial n} = -\dot{\theta} \cdot \vec{s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \cdot \vec{s} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

L'accélération d'un point du corps de coordonnées  $\vec{x}$  peut être exprimée à l'aide de la dérivée particulière comme

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \frac{\delta \dot{\vec{x}}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \vec{s} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \vec{n} \right) \\ &= \left( \frac{\delta}{\delta t} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) - \dot{\theta} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \right) \vec{s} + \left( \frac{\delta}{\delta t} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) + \dot{\theta} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) \vec{n} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Soit

$$\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} = \frac{\delta}{\delta t} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) + \dot{\theta} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \quad (\text{A.14})$$

La condition de glissement sur le corps permet d'exprimer la vitesse normale en fonction de la composante normale du gradient du potentiel  $\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} &= \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}) + \dot{\theta} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) = \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{n} + \vec{\nabla} \phi \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} + \dot{\theta} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} + \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) - \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Le terme d'advection peut se développer sous la forme suivante

$$(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi = (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} &= (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \left( -\frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{1}{h_n^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \\ &= (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \left( -\frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( -\frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

en utilisant l'expression du Laplacien du potentiel nul, pour remplacer la dérivée normale double du potentiel.

$$\frac{1}{h_n^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = -\frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (\text{A.17})$$



L'équation A.15 peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} + \dot{\theta} \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) - \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{1}{h_s} \left( -\frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( -\frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{1}{h_s h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

En remplaçant finalement  $h_s = 1 = h_n$  et  $\frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} = \frac{1}{R}$ , l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \quad (\text{A.19})$$

Pour comparer avec la formule donnée par Cointe, il faut se ramener dans la base indirecte utilisée par Cointe, où la normale est de sens inversé ( $\vec{n}' = -\vec{n}$ ). Cela a pour conséquence :

$$\frac{\partial}{\partial n'} = -\frac{\partial}{\partial n}, \quad \dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}' = -\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.20})$$

La formule donnée par Cointe est alors retrouvée

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} - \dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \quad (\text{A.21})$$

### A.1.2 Développements 3D

Une base curviligne similaire est introduite mais en 3D. La dérivation des vecteurs unitaires de la base s'écrit

$$\frac{\partial \vec{h}_i}{\partial w_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial w_i} \vec{h}_j - \delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \vec{h}_k \quad (\text{A.22})$$

Ce qui donne pour les vecteurs de notre base.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{s}_1}{\partial s_1} = -\frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial s_2} \vec{s}_2 - \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{s}_1}{\partial s_2} = \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial s_1} \vec{s}_2 \\ \frac{\partial \vec{s}_1}{\partial n} = \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_n}{\partial s_1} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{s}_2}{\partial s_1} = \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial s_1} \vec{s}_1 \\ \frac{\partial \vec{s}_2}{\partial s_2} = \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial s_2} \vec{s}_1 - \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{s}_2}{\partial n} = \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_n}{\partial s_2} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial s_1} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial s_1} \vec{s}_1 \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial s_2} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial s_2} \vec{s}_2 \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial n} = -\frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_n}{\partial s_1} \vec{s}_1 - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_n}{\partial s_2} \vec{s}_2 \end{array} \right.$$

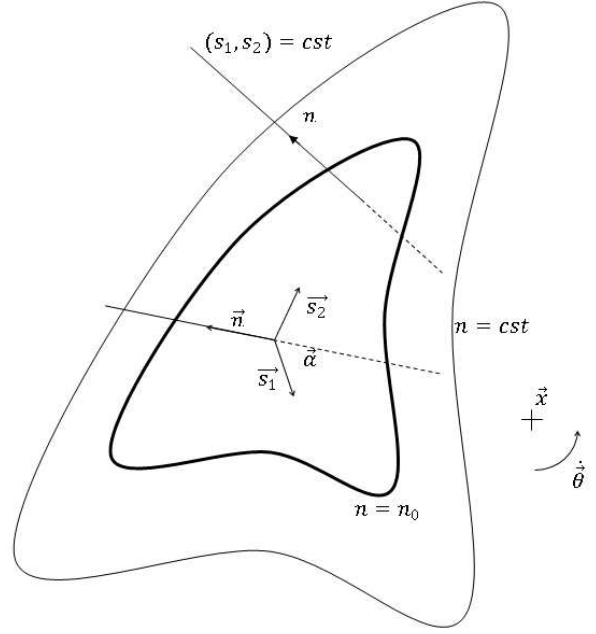


FIGURE A.2 – Schéma de la base curviligne 3D

Avec des facteurs d'échelle définis par

$$h_k^2 = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial s_k}^2$$

Ainsi pour un vecteur  $\vec{x}$  compris dans la surface du corps,  $\vec{x} = \vec{x}(s_1, s_2)$ , ce qui implique que  $h_n$  est constant sur la surface du corps.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_n}{\partial s_1} = 0 \\ \frac{\partial h_n}{\partial s_2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

Les facteurs d'échelle  $h_{s_1}$  et  $h_{s_2}$  sont également constants sur la surface du corps. Mais leur variation selon la direction normale au corps est donnée par la courbure locale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} \\ \gamma_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \end{array} \right. \quad (\text{A.24})$$

Les opérateurs dérivatifs spatiaux peuvent alors être écrits comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \\ \Delta \phi = \frac{1}{h_{s_1}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{1}{h_{s_2}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} + \frac{1}{h_n^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} + \frac{1}{h_n^2} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

De même, pour les opérateurs dérivatifs temporels

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \vec{s}_1}{\delta t} = \dot{\theta} \wedge \vec{s}_1 = (\dot{\theta} \cdot \vec{n}) \vec{s}_2 - (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \vec{n} \\ \frac{\delta \vec{s}_2}{\delta t} = \dot{\theta} \wedge \vec{s}_2 = (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \vec{n} - (\dot{\theta} \cdot \vec{n}) \vec{s}_1 \\ \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} = \dot{\theta} \wedge \vec{n} = (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \vec{s}_1 - (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \vec{s}_2 \\ \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{x} \cdot \vec{\nabla}) \end{array} \right. \quad (\text{A.26})$$

L'accélération d'un point du corps s'exprime toujours à l'aide de la dérivée particulaire, comme en 2D :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\delta \dot{x}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \left( (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) \vec{s}_1 + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) \vec{s}_2 + (\dot{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta t} (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) \vec{s}_1 + (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) \left( (\dot{\theta} \cdot \vec{n}) \vec{s}_2 - (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \vec{n} \right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta t} (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) \vec{s}_2 + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) \left( (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \vec{n} - (\dot{\theta} \cdot \vec{n}) \vec{s}_1 \right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta t} (\dot{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\dot{x} \cdot \vec{n}) \left( (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \vec{s}_1 - (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \vec{s}_2 \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \ddot{x} \cdot \vec{n} &= \frac{\delta}{\delta t} (\dot{x} \cdot \vec{n}) + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) - (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \\ &= \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}) + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) - (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \\ &= \frac{\delta \vec{\nabla} \phi}{\delta t} \cdot \vec{n} + \vec{\nabla} \phi \frac{\delta \vec{n}}{\delta t} + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) - (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} \cdot \vec{n} + \left( (\dot{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} + \left( (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \\ &\quad - \left( (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) - \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \end{aligned}$$

Le terme d'advection peut se développer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (\dot{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi &= (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \vec{n} \right) \\ &\quad + (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \vec{n} \right) \\ &\quad + (\dot{x} \cdot \vec{n}) \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \vec{n} \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} &= (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \frac{1}{h_{s_1}} \frac{1}{h_n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \frac{1}{h_{s_2}} \frac{1}{h_n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{1}{h_n^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \end{aligned}$$

La dérivée normale double peut être remplacée à l'aide de l'expression du Laplacien de  $\phi$  nul.

$$\frac{1}{h_n^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = -\frac{1}{h_{s_1}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} - \frac{1}{h_{s_2}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} - \frac{1}{h_n^2} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Soit

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} + \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) - \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \frac{1}{h_{s_1}} \frac{1}{h_n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \frac{1}{h_{s_2}} \frac{1}{h_n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \frac{1}{h_n^2} \left( -\frac{1}{h_{s_1}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} - \frac{1}{h_{s_2}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} - \frac{1}{h_n^2} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

En remplaçant finalement les facteurs d'échelle et leurs variations, comme en 2D, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) \left( (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{1}{R_2} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} \right) \\ &+ (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

## A.2 Méthode de Tanizawa

Tanizawa a ensuite introduit en 2D une méthode alternative basée sur le potentiel d'accélération, donnant une expression légèrement différente.

L'accélération  $\vec{a}$  d'une particule fluide glissant sur le corps peut être exprimée via la dérivée particulaire liée à la vitesse de la particule fluide,  $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D\vec{\nabla} \phi}{Dt} = \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} + (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \quad (\text{A.29})$$

La composante normale de cette équation est

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = \vec{a} \cdot \vec{n} - \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \quad (\text{A.30})$$

Le second terme du membre de gauche a été explicité par Tanizawa [43] en 2D.

$$\left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} \phi = -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{\partial \phi^2}{\partial n} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \quad (\text{A.31})$$

puis par Berkvens [3] en 3D dans les mêmes conditions.

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} \phi &= - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi^2}{\partial n} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi^2}{\partial s_1} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial \phi^2}{\partial s_2} - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

### A.2.1 Développements 2D

L'expression contenant le gradient du potentiel est tout d'abord explicitée, en se plaçant dans la même base curviligne que précédemment. Le gradient du potentiel est alors exprimé par

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \quad (\text{A.33})$$

Soit l'expression suivante

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \vec{\nabla} \phi \right) &= \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \right) + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vec{n} \right) \\ &= \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \vec{s} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \left( -\frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{n} \right) \right] + \frac{1}{h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \vec{n} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left( \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \vec{s} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h_n^2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left[ \frac{1}{h_s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} \vec{s} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \vec{n} \right] \end{aligned}$$

Et suivant la normale

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} &= -\frac{1}{h_s^3} \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{1}{h_s^2} \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} + \frac{1}{h_n^3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \\ &= -\frac{1}{h_s^3} \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{1}{h_s^2} \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left( \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \\ &= -\frac{1}{h_s h_n} \frac{\partial h_s}{\partial n} \left( \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{\partial \phi^2}{\partial n} \right) + \frac{1}{h_s^2} \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{1}{h_s^2} \frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \end{aligned}$$

En remplaçant  $h_s = h_n = 1$  et  $\frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial n} = \frac{1}{R}$

$$\left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} = -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{\partial \phi^2}{\partial n} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \quad (\text{A.34})$$

Soit l'expression donnée par Tanizawa.

### A.2.2 Développements 3D

La base curviligne définie en 3D est de nouveau utilisée pour exprimer le gradient

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial n} \vec{n}$$

Ainsi l'expression suivante s'écrit

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}\phi &= \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial n} \vec{n} \right) \\ &+ \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial n} \vec{n} \right) \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \vec{s}_1 + \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \vec{s}_2 + \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial n} \vec{n} \right) \end{aligned}$$

et la composante normale est

$$\begin{aligned} ((\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{n} &= \frac{1}{h_{s_1}} \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{1}{h_{s_1}} \frac{\partial h_{s_1}}{\partial n} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \right) \\ &+ \frac{1}{h_{s_2}} \frac{1}{h_n} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial s_2 \partial n} - \frac{1}{h_{s_2}} \frac{\partial h_{s_2}}{\partial n} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \right) \\ &+ \frac{1}{h_n^2} \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{\partial^2\phi}{\partial n^2} \end{aligned}$$

En remplaçant les facteurs d'échelle et leurs variations, ainsi que la dérivée normale double à l'aide du Laplacien, l'expression donnée par Berkvens apparaît.

$$\begin{aligned} ((\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{n} &= \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial s_2 \partial n} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \right) \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial n} \left( -\frac{\partial^2\phi}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial s_2^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \\ &= -\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial\phi^2}{\partial n} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial\phi^2}{\partial s_1} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial\phi^2}{\partial s_2} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial s_2^2} \right) \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial s_1} \frac{\partial^2\phi}{\partial s_1 \partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial s_2} \frac{\partial^2\phi}{\partial s_2 \partial n} \end{aligned} \tag{A.35}$$

## A.3 Équivalence des expressions

### A.3.1 Développements 2D

Pour faire le parallèle entre Cointe et Tanizawa, il nous faut alors exprimer l'accélération,  $\vec{a}$ , de la particule fluide glissant sur le corps en fonction de l'accélération,  $\vec{\ddot{x}}$ , du point du corps associé à la particule fluide. Ces deux points ont pour coordonnées  $\vec{x}$  dans

le repère global et  $\vec{r}$  dans le repère local associé au corps. Les vecteurs position, vitesse et accélération du point sur le corps sont

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{x}_B + \vec{r} \\ \dot{\vec{x}} &= \dot{\vec{x}}_B + \dot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} \\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot{\vec{x}}_B + \ddot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} + \dot{\vec{\theta}} \wedge \dot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Les coordonnées du point du corps dans le repère local,  $\vec{r}$ , sont fixes au cours du temps si le corps ne se déforme pas, puisque le repère local suit le corps dans son mouvement. Ces coordonnées ne sont cependant plus constantes au cours du temps pour un point du fluide glissant sur le corps.

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{x}_B + \vec{r} \\ \vec{v} &= \dot{\vec{x}}_B + \dot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{r}} \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{x}}_B + \ddot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} + \dot{\vec{\theta}} \wedge \dot{\vec{\theta}} \wedge \vec{r} + 2\dot{\vec{\theta}} \wedge \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}} + 2\dot{\vec{\theta}} \wedge \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Soit la différence des deux vitesses

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} - \dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{x}} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) \vec{s} \quad (\text{A.38})$$

Tanizawa a donné une expression de  $\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n}$  basée sur la dérivation en repère de Frenet.

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = k|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right)^2 \quad (\text{A.39})$$

En effet, une particule fluide glissant sur le corps va rester au cours du temps sur le corps et parcourir une courbe paramétrable.

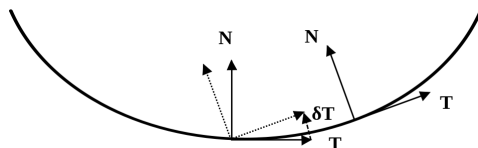


FIGURE A.3 – Repère de Frenet

La position de cette particule au cours du temps peut être donnée par  $\vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ . Les vecteurs tangent et normal sont définis pour tout couple  $(s, t)$  par

$$\vec{T} = \frac{\partial \vec{OM}(s, t)}{\partial s} = \left( \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right) \quad \text{et} \quad \vec{N} = R \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} \quad (\text{A.40})$$

La vitesse de déplacement de la particule sur la courbe peut alors être exprimée à l'aide de la vitesse scalaire  $v = \frac{\partial s}{\partial t}$

$$\dot{\vec{r}}(s, t) = \left( \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \right) = v \vec{T} = |\dot{\vec{r}}(s, t)| \vec{T} \quad (\text{A.41})$$

Et de la même façon pour l'accélération,

$$\ddot{\vec{r}}(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} |\dot{\vec{r}}(s, t)| \vec{T} + |\dot{\vec{r}}(s, t)| \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} |\dot{\vec{r}}(s, t)| \vec{T} + |\dot{\vec{r}}(s, t)| \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} |\dot{\vec{r}}(s, t)| \vec{T} + \frac{|\dot{\vec{r}}(s, t)|^2}{R} \vec{N} \quad (\text{A.42})$$

En conclusion, la composante normale est

$$\ddot{\vec{r}}(s, t) \cdot \vec{n} = \frac{1}{R} |\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right)^2 \quad (\text{A.43})$$

L'expression de  $\vec{a} \cdot \vec{n}$  est alors donnée en fonction de  $\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n}$

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + 2\dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right)^2 \quad (\text{A.44})$$

L'expression de la dérivée normale de la dérivée temporelle du potentiel peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \vec{a} \cdot \vec{n} - \left( \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \\ &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + 2\dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right)^2 - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \phi^2}{\partial s} + \frac{\partial \phi^2}{\partial n} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \\ &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + 2\dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s})^2 - \frac{2}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \\ &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \\ &\quad + \dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) + \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s})^2 - \frac{2}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) \\ &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + \dot{\theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} \right) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \\ &\quad + \left( \dot{\theta} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \right) \end{aligned}$$

La dérivée tangentielle de la dérivée normale du potentiel peut être exprimée à l'aide de la condition de glissement sur le corps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial s} \cdot \vec{n} + \dot{\vec{x}} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \\ &= \frac{\partial (\dot{\vec{x}}_B + \dot{\theta} \wedge \vec{r})}{\partial s} \cdot \vec{n} - \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \\ &= (\dot{\theta} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}) \cdot \vec{n} - \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \\ &= (\dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{s}) \cdot \vec{n} - \frac{1}{R} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}) \end{aligned}$$



Soit

$$\dot{\theta} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{1}{R} (\dot{x} \cdot \vec{s}) = 0 \quad (\text{A.45})$$

En substituant cette égalité dans la condition sur le corps ci-dessus, l'expression donnée par Cointe apparaît alors.

### A.3.2 Développements 3D

De la même façon qu'en 2D, l'accélération de la particule fluide peut s'écrire en fonction de celle du point du corps associé.

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \ddot{x} \cdot \vec{n} + (2\dot{\theta} \wedge \dot{r}) \cdot \vec{n} + \ddot{r} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.46})$$

Avec

$$(\dot{\theta} \wedge \dot{r}) \cdot \vec{n} = (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{x} \cdot \vec{s}_2 \right) - (\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{x} \cdot \vec{s}_1 \right) \quad (\text{A.47})$$

et

$$\ddot{r} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{x} \cdot \vec{s}_1 \right)^2 + \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{x} \cdot \vec{s}_2 \right)^2 \quad (\text{A.48})$$

L'expression de la dérivée normale de la dérivée temporelle du potentiel est alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \vec{a} \cdot \vec{n} - \left( (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \right) \cdot \vec{n} \\ &= \ddot{x} \cdot \vec{n} + 2(\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{x} \cdot \vec{s}_2 \right) - 2(\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{x} \cdot \vec{s}_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{x} \cdot \vec{s}_1 \right)^2 + \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{x} \cdot \vec{s}_2 \right)^2 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi^2}{\partial n} \\ &\quad - \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi^2}{\partial s_1} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi^2}{\partial s_2} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} \\ &= \ddot{x} \cdot \vec{n} + 2(\dot{\theta} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{x} \cdot \vec{s}_2 \right) - 2(\dot{\theta} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{x} \cdot \vec{s}_1 \right) + \frac{1}{R_1} (\dot{x} \cdot \vec{s}_1)^2 \\ &\quad + \frac{2}{R_1} (\dot{x} \cdot \vec{s}_1) \frac{\partial \phi}{\partial s_1} + \frac{1}{R_2} (\dot{x} \cdot \vec{s}_2)^2 + \frac{2}{R_2} (\dot{x} \cdot \vec{s}_2) \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \\ &\quad + (\dot{x} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2 \right) - (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1 \right) \\
&\quad - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\
&\quad + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \right) \left[ (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} - \frac{1}{R_2} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \right] \\
&\quad - \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \right) \left[ (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} + \frac{1}{R_1} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \right]
\end{aligned}$$

De même qu'en 2D, les variations surfaciques de la dérivée normale du potentiel peuvent être exprimées en fonction de la vitesse normale, pour obtenir les relations suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1 \partial n} = -(\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) - \frac{1}{R_1} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2 \partial n} = (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{1}{R_2} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

Ces deux dernières égalités nous permettent d'annuler les deux derniers termes et ainsi de retrouver l'expression donnée par Van Dalen.

#### A.4 Expression unifiée

Une nouvelle expression, issue de l'unification de celles de Cointe et Tanizawa, est proposée ci-dessous et utilisée dans le code de calcul. L'équation (A.49) permet en effet d'écrire simplement les variations surfaciques de la dérivée normale du potentiel en fonction de termes déjà présents dans l'expression de Cointe.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} &= \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{n} + (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_2) \left( 2(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) - \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - (\dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{s}_1) \left( 2(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) - \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \\
&\quad + \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1)}{R_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_1} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_1) \right) + \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2)}{R_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s_2} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{s}_2) \right) \\
&\quad + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s_2^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)
\end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

# Bibliographie

- [1] URL <http://www.emec.org.uk/marine-energy/wave-developers/>.
- [2] Babarit, A., Mouslim, H., et al. (2009). “On the Numerical Modelling of the Non Linear Behaviour of a Wave Energy Converter”. In “ASME 2009 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering”, pp. 1045–1053. American Society of Mechanical Engineers, Honolulu, Hawaii, USA.
- [3] Berkvens, P. P. J. F. (1998). *Floating bodies interacting with water waves : Development of a time-domain panel method*. Ph.D. thesis, Universiteit Twente (The Netherlands).
- [4] Bernstein, L., Bosch, P., et al. (2007). “Climate change 2007 : Synthesis report. contribution of working groups i, ii and iii to the fourth assessment report of the intergovernmental panel on climate change”. In *IPCC : Geneva, Switzerland*.
- [5] Bhinder, M. A., Mingham, C. G., et al. (2009). “A joint numerical and experimental study of a surging point absorbing wave energy converter (WRASPA)”. In “ASME 2009 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering”, pp. 1–7. American Society of Mechanical Engineers, Honolulu, Hawaii, USA.
- [6] Bonnet, M. (1995). *Équations intégrales et éléments frontières*. CNRS Editions / Eyrolles.
- [7] Bretl, J. J. G. (2009). *A time domain model for wave induced motions coupled to energy extraction*. Ph.D. thesis, University of Michigan.
- [8] Clément, A., McCullen, P., et al. (2002). “Wave energy in Europe : Current status and perspectives”. In *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 6(5) :pp. 405–431.
- [9] Cointe, R. (1989). *Quelques aspects de la simulation numérique d’un canal à houle*. Ph.D. thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [10] Cruz, J. a. (2007). *Ocean wave energy : current status and future prespectives*. Springer Science & Business Media, illustrate edn.
- [11] Delhommeau, G. (1987). *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités*. Ph.D. thesis, École Centrale de Nantes (ex ENSM).
- [12] Ducrozet, G., Bingham, H. B., et al. (2010). “High-order finite difference solution for 3D nonlinear wave-structure interaction”. In *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, vol. 22(5) :pp. 225–230.

- [13] Durand, M., Babarit, A., et al. (2007). “Experimental validation of the performances of the SEAREV Wave Energy Converter with real time latching control”. In “7th European Wave and Tidal Energy Conference”, Porto, Portugal.
- [14] Falcão, A. F. D. O. (2010). “Wave energy utilization : A review of the technologies”. In *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 14(3) :pp. 899–918.
- [15] Falnes, J. (2002). *Ocean Waves and Oscillating Systems : Linear interaction including wave energy extraction..* Cambridge University Press.
- [16] Ferrant, P. (1988). *Radiation d’ondes de gravité par les mouvements de grande amplitude d’un corps immergé*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale de Mécanique (ex Ecole Centrale de Nantes).
- [17] Ferrant, P. (1993). “Three-dimensional unsteady wave-body interactions by a Rankine boundary element method”. In *Ship Technology Research*, vol. 40 :p. 165.
- [18] Gilloteaux, J. (2007). *Mouvements de grande amplitude d’un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l’énergie des vagues*. Ph.D. thesis, École Centrale de Nantes.
- [19] Grilli, S., Guyenne, P., et al. (2001). “A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom”. In *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- [20] Guerber, E. (2011). *Modélisation numérique des interactions non-linéaires entre vagues et structures immergées, appliquée à la simulation de systèmes houlomoteurs*. Ph.D. thesis, Université Paris-Est.
- [21] Guevel, P. (1976). “Corps solide animé d’un mouvement quelconque dans un fluide illimité”.
- [22] Harris, J. C., Dombre, E., et al. (2014). “Fast Integral Equation Methods for Fully Nonlinear Water Wave Modeling”. In “Twenty-fourth (2014) International Ocean and Polar Engineering Conference”, vol. 3, pp. 583–590. Busan, Korea.
- [23] Huang, Y. (1997). *Nonlinear ship motions by a Rankine panel method*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [24] IEA (2007). “CO2 emissions from fossil fuel combustion”.
- [25] IRENA (2014). “Ocean energy, technology readiness, patents, deployment status and outlook”.
- [26] Kennard, E. (1949). “Generation of surface waves by a moving partition”. In *Q. Appl. Math.*
- [27] Kim, K.-H. and Kim, Y. (2009). “Time-Domain Analysis of Nonlinear Ship Motion Responses Based on Weak-scatterer Hypothesis”. In “19th International Offshore and Polar Engineering Conference”, vol. 1, pp. 583–589. Osaka, Japan.
- [28] Lafranche, Y. (1984). *Application de l’interpolation polynomiale au dépouillement graphique de valeurs de  $R_3$* . Ph.D. thesis.

- [29] Letournel, L., Ferrant, P., et al. (2012). “Expression Analytique des Équations Intégrales pour une discrétisation linéaire de la géométrie”. In “13èmes Journées de l’Hydrodynamique”, Chatou, France.
- [30] Letournel, L., Harris, J. C., et al. (2014). “Comparison of fully nonlinear and weakly nonlinear potential flow solvers”. In “ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering”, American Society of Mechanical Engineers, San Francisco, California, USA.
- [31] Li, Y. and Yu, Y.-H. (2012). “A synthesis of numerical methods for modeling wave energy converter-point absorbers”. In *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 16(6) :pp. 4352–4364.
- [32] Lin, W., Meinhold, M., et al. (1994). “Large-amplitude ship motions and wave loads for ship design”. In “20th Symposium on Naval Hydrodynamics”, California, USA.
- [33] Luquet, R. (2007). *Simulation numérique de l’écoulement visqueux autour d’un navire soumis à une houle quelconque*. Ph.D. thesis, École Centrale de Nantes.
- [34] Maguire, A. E. and Ingram, D. M. (2009). “Hydrodynamics and absorption efficiencies of wavemakers”. In “8th European Wave and Tidal Energy Conference”, Uppsala, Sweden.
- [35] McCormick, M. (1981). *Ocean wave energy conversion*. New York, Wiley Interscience.
- [36] Pawlowski, J. S. (1991). “A Non-linear Theory of Ship Motion in Waves”. In *Society of Naval Architects and marine Engineers*, vol. 99 :pp. 319–352.
- [37] Pelletier, K. (2002). *Simulations au second ordre des interactions houle-structure en régime instationnaire*. Ph.D. thesis, Université de Nantes.
- [38] Prony, R. (1795). “Essai experimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l’alcool, à différentes températures”. In *J. de l’Ecole Polytechnique*.
- [39] Ross, D. (1995). *Power from the waves*. Oxford University Press.
- [40] Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). “Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems”. In *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, vol. 7(3) :pp. 856–869.
- [41] Shaw, R. (1982). *Wave energy : a design challenge*. E. Horwood.
- [42] Srokosz, M. A. (1979). “The submerged sphere as an absorber of wave power”. In *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 95 :pp. 717–741.
- [43] Tanizawa, K. (1995). “A Nonlinear Simulation Method of 3-D Body Motions in Waves (1st Report)”. In *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, vol. 1995(178) :pp. 179–191.
- [44] Tanizawa, K. (2000). “The state of the art on numerical wave tank”. In “4th Osaka colloquium on seakeeping performance ships”, pp. 95–114.
- [45] van Daalen, E. F. G. (1993). *Numerical and Theoretical Studies of Water Waves and Floating Bodies*. Ph.D. thesis.