HAL
open science

# Contribution à l'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique par des polytopes

Denis Teissandier

## To cite this version:

Denis Teissandier. Contribution à l'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique par des polytopes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Bordeaux 1, 2012. tel-01202782

**HAL Id: tel-01202782**

**https://hal.science/tel-01202782v1**

Submitted on 21 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 590

# Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches

présenté

à l'Université Bordeaux 1

Ecole doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par Denis Teissandier

Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1
section CNU 60 : Mécanique, Génie Mécanique et Génie Civil

Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) UMR 5295

---

# Contribution à l'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique par des polytopes

---

soutenue le 12 Décembre 2012.

devant la commission d'examen composée de :

**Jean Pierre Nadeau**, Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech

**Max Giordano**, Professeur des Universités émérite, Université de Savoie, *rapporteur*

**Luc Mathieu**, Professeur des Universités, Université Paris XI, *rapporteur*

**Jean Paul Bourrières**, Professeur des Universités, Université Bordeaux 1, *rapporteur*

**François Villeneuve**, Professeur des Universités, Université Joseph Fourier

--- 2012 ---

*Ce manuscrit synthétise 16 années d'activités de recherche mêlées à 16 années d'enseignement et à 14 années de gestion de filière d'enseignement.*

*Quelques journées Lozériennes ajoutées à d'autres Landaises durant l'été 2012 m'ont permis de terminer ce travail de synthèse commencé en 2010.*

*Je tiens à remercier très sincèrement Luc Mathieu et Max Giordano pour avoir acceptés d'être rapporteurs de mon travail. J'adresse ma profonde gratitude à Jean Paul Bourrières qui a été le rapporteur local de ma synthèse pour le Conseil Scientifique de l'Université Bordeaux 1, pour ensuite accepter de participer à mon jury. Enfin, j'exprime ma reconnaissance à François Villeneuve (premier coordinateur du Groupe de Recherche en Tolérancement (GRT) avec Luc Mathieu) qui m'a fait l'honneur de participer à mon jury.*

*Mes anciens doctorants : Jérôme, Serge, Manuel et Laurent ont chacun à leur façon contribué aux travaux présentés dans ce mémoire : je tiens à leur exprimer ma profonde reconnaissance.*

*Lazhar, mon doctorant actuel, laisse entrevoir la prochaine concrétisation de perspectives détaillées dans ce mémoire ; un grand merci pour ce travail auquel j'associe Alex Ballu qui dirige également cette thèse.*

*En 1997, par le fruit du hasard, Vincent Delos est venu poser les premières briques des chaînes de cotes par des opérations sur les polytopes dans le cadre de son stage de DESS au LMP. Même si grâce à Alain Gérard, Vincent a pu prolonger son activité quelques mois au LMP jusqu'en début 1998, il m'était difficile d'imaginer que Vincent poserait d'autres briques sur les polytopes, mais en tant qu'Ingénieur de Recherche à mes côtés à I2M à partir de Septembre 2013. Je tiens à remercier Vincent pour cette collaboration dans laquelle je prends beaucoup de plaisir.*

*Je suis très reconnaissant envers Jean Pierre Nadeau, qui en me permettant de participer à l'Equipe de Recherche Technologique IMPACT, m'a offert l'opportunité de donner une seconde jeunesse à mes travaux sur les polytopes. De plus, son accompagnement durant la préparation de ce mémoire m'a été précieux.*

*Enfin, impossible de ne pas conclure ces remerciements sans une pensée pour ma petite famille. Romain, j'espère que tu verras ton père travailler sur une application sur les transports en commun, même si ce n'est pas sur les trains ou les tramways cela pourrait être le métro câble … Clément, les activités sur les moteurs d'hélicoptères pourraient continuer. Quant à Sylvie, qu'elle se rassure, je ne prendrai pas de nouvelle carte étudiant en 2013-2014.*

*Un dernier message amical à l'attention d'Yves Couétard : il y a toujours des « choses » à faire …*

# SOMMAIRE

Sommaire ..... i
1 Introduction ..... 1
1.1 Contexte et positionnement scientifique ..... 1
1.2 A propos (de ma vision) de l'analyse des tolérances géométriques ..... 2
1.3 Plan de lecture du document ..... 4
2 Analyse des tolérances par des operations sur des polytopes ..... 5
2.1 Avant-propos ..... 5
2.2 Paramétrage par des écarts géométriques ..... 6
2.2.1 Surfaces de substitution ..... 6
2.2.2 Ecarts géométriques d'une pièce ..... 7
2.2.3 Ecarts géométriques de liaison ..... 9
2.2.4 Structure topologique d'un système mécanique ..... 12
2.2.5 Gestion des hyperstatismes dans les méthodes de tolérancement ..... 16
2.3 Caractérisation d'une spécification par un polytope ..... 17
2.3.1 Hyperplan, demi-espace et polytope ..... 17
2.3.2 Caractérisation d'un ensemble de contraintes par un ensemble de demi-espaces 18
2.3.3 Prise en compte des déplacements non bornés ..... 21
2.3.4 Définition générale d'un polytope opérande ..... 23
2.3.5 Propriétés d'un polytope opérande ..... 25
2.3.6 Structure topologique d'un polytope opérande ..... 26
2.4 Mise en œuvre d'une chaîne de cotes 3d par des opérations sur des polytopes ..... 32
2.4.1 Opérations mises en œuvre ..... 32
2.4.2 Caractérisation d'une spécification géométrique ISO ou d'une condition fonctionnelle ..... 34
2.4.3 Caractérisation des lois de comportement géométrique d'un système mécanique ..... 36
2.4.4 Simulation du respect d'une condition fonctionnelle ..... 37
2.5 Intersection et somme de Minkowski de polytopes ..... 39
2.5.1 Préambule ..... 39
2.5.2 Intersection de polytopes ..... 40
2.5.3 Somme de Minkowski de polytopes ..... 41
2.6 Pris en compte des déformations thermomécaniques ..... 51
2.6.1 Problématique et contexte industriel ..... 51
2.6.2 Intégration des déformations thermomécaniques dans les variations géométriques ..... 51
2.6.3 Démarche générale de tolérancement ..... 60
2.6.4 Qualification d'architectures de turbines ..... 62
2.7 Bilan et perspectives ..... 64
2.7.1 Les enjeux de la double description ..... 64
2.7.2 Précision et robustesse des polytopes ..... 66
2.7.3 Stratégies de mises en œuvre des opérations sur les polytopes ..... 68
2.7.4 Les enjeux de la prise en compte des variations d'origine thermomécanique ..... 69
2.7.5 Architecture logicielle d'une application d'analyse de tolérances ..... 71
3 Tracabilite des specifications dans le cycle de vie du produit ..... 73
3.1 Avant-propos ..... 73
3.2 Traçabilité des spécifications géométriques ..... 74

3.2.1 Objectifs et enjeux ... 74
3.2.2 Formalisation d'un transfert de spécifications ... 75
3.2.3 Modèle produit pour le tolérancement géométrique ... 76
3.2.4 Traduction bidirectionnelle entre le modèle de données produit IPPOP et le modèle de données MECAmaster ... 81
3.3 Des spécifications géométriques aux spécifications projet ... 83
3.4 Premier bilan et perspectives sur la traçabilité des spécifications ... 86
4 Industrialisation de pieces en materiaux composites élaborées par le procede Resin Transfer Molding (RTM) ... 89
4.1 Avant-propos ... 89
4.2 Problématique et contexte industriel ... 90
4.3 Caractérisation des écarts de fabrication des pièces obtenues par RTM ... 92
4.3.1 Ecarts géométriques ... 94
4.3.2 Ecarts volumiques d'imprégnation ... 94
4.4 Simulation de processus de fabrication ... 96
4.4.1 Critères de performance d'industrialisation ... 97
4.4.2 Choix d'un processus de fabrication ... 98
4.5 Bilan et perspectives ... 102
4.5.1 Un premier bilan ... 102
4.5.2 Caractériser numériquement et expérimentalement les écarts volumiques d'imprégnation ... 102
4.5.3 Simuler les trois phases du processus de fabrication par procédé RTM ... 103
4.5.4 Spécifications de fabrication sur un processus mettant en œuvre des matériaux composites ... 103
5 Conclusion ... 105
6 perspectives generales ... 107
6.1.1 Analyse des tolérances par des opérations sur des polytopes ... 107
6.1.2 lndustrialisation du processus de fabrication de pièces composites ... 108
7 Bibliographie ... 109
7.1 Revues internationales à comité de lecture ... 119
7.2 Chapitres d'ouvrages ... 119
7.2.1 Internationaux ... 119
7.2.2 Nationaux ... 119
7.3 Conférences internationales avec actes et comités de lecture ... 120
7.3.1 Sélectionnées pour publication dans un ouvrage collectif à comité de lecture 120
7.3.2 Diffusées sur supports numériques ... 121
7.4 Conférences nationales ... 122
7.5 Conférences sans actes ... 122
7.6 Encadrements scientifiques ... 123
7.6.1 Thèses de Doctorats ... 123
7.6.2 DEA et Masters Recherche ... 124
7.6.3 DESS et Masters Professionnels ... 124
7.7 Responsabilités scientifiques ... 125
7.7.1 Organisation de congrès internationaux ... 125
7.7.2 Activités contractuelles ... 125
7.7.3 Reviewer ... 125
7.8 Formation continue ... 126

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 Contexte et positionnement scientifique

Ce document synthétise mon activité de recherche depuis 1996, année où j'ai été nommé Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1.

Mon activité de recherche relève du domaine du génie mécanique et plus particulièrement du tolérancement géométrique.
Le tolérancement géométrique contribue à la prise en compte de la variabilité géométrique des procédés de fabrication dans le cycle de conception d'un produit. Quels que soient les procédés de fabrication mis en œuvre, quels que soient les matériaux mis en œuvre, une pièce fabriquée n'est jamais géométriquement parfaite. Toute caractéristique géométrique de forme ou de dimension d'une pièce fabriquée ne sera jamais égale à la caractéristique nominale dont elle représente une réalisation physique particulière. Pour un système mécanique, il faut considérer la variabilité des procédés d'assemblage venant se superposer à la variabilité des procédés de fabrication des pièces constitutives. Ce constat dû à la variabilité des procédés de fabrication et d'assemblage peut se généraliser à toute caractéristique fonctionnelle d'une pièce ou d'un système mécanique : résistance mécanique, rendement énergétique, etc.
D'une façon générale, les variabilités des procédés d'obtention génèrent des écarts géométriques par rapport à un modèle géométrique nominal. Ce modèle, historiquement représenté à l'aide d'une table à dessin industriel, est aujourd'hui crée par un outil de *Conception Assistée par Ordinateur (CAO)*. Ces écarts peuvent compromettre le comportement attendu d'un système mécanique.

D'un point vue industriel, les stratégies économiques actuelles des acteurs majeurs des secteurs de l'aéronautique, de l'automobile et du ferroviaire, incluant de plus en plus de partenariats et de sous-traitances dans le développement d'un aéronef, d'une automobile, ou d'un train, ne font qu'exacerber ce problème. Ces stratégies initiées dans les années 80 ont révélé la problématique du tolérancement géométrique au sein de nombreux corps de métiers et dans de nombreuses applications industrielles différentes.

La prise en compte de la variabilité des procédés de fabrication et d'assemblage d'un point de vue mesure expérimentale et simulation a été initiée au début des années 90 par Alain Gérard et Yves Couétard au sein d'une opération de recherche Cotation-Fabrication-Usinage (CUB) du Laboratoire de Mécanique Physique (LMP - UMR 5469). Un premier Maître de Conférences, Alex Ballu, a été recruté sur cette thématique en 1992, pour développer la sémantique des spécifications géométriques, leurs modèles et outils d'expression notamment au travers de l'ISO. J'ai été recruté en 1996 en tant que Maître de Conférences pour développer plus particulièrement des outils assurant la vérification de la conformité d'un système mécanique au regard d'une exigence (ou condition) fonctionnelle en prenant en compte : les spécifications (ou tolérances) exprimées sur les pièces constitutives et les spécifications de position entre les pièces potentiellement en contact. Ce type d'outil est communément appelé outil d'analyse de tolérances géométriques ou outil de chaînes de cotes dans la communauté internationale.
Depuis la création de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M - UMR 5295) en Janvier 2011, mes travaux s'effectuent dans le département Ingénieries Mécanique et Conception (IMC), coordonné par Jean Pierre Nadeau.

## 1.2 A propos (de ma vision) de l'analyse des tolérances géométriques

Je définis l'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique comme la vérification de la conformité d'un système mécanique au regard de spécifications (ou exigences) fonctionnelles caractérisant le fonctionnement attendu du système. Cette vérification impose de prendre en compte les spécifications géométriques des pièces constitutives et les spécifications entre les pièces potentiellement en contact.

Je me suis plus particulièrement focalisé sur la simulation de l'analyse des tolérances géométriques par des opérations sur des polytopes. Cette approche consiste à ne manipuler que des contraintes caractérisant les variations géométriques entre des surfaces d'une même pièce et entre des surfaces de pièces potentiellement en contact. Le travail théorique sur les polytopes repose sur une collaboration avec le laboratoire MAP5 de l'Université Paris Descartes, voir figure 1a.

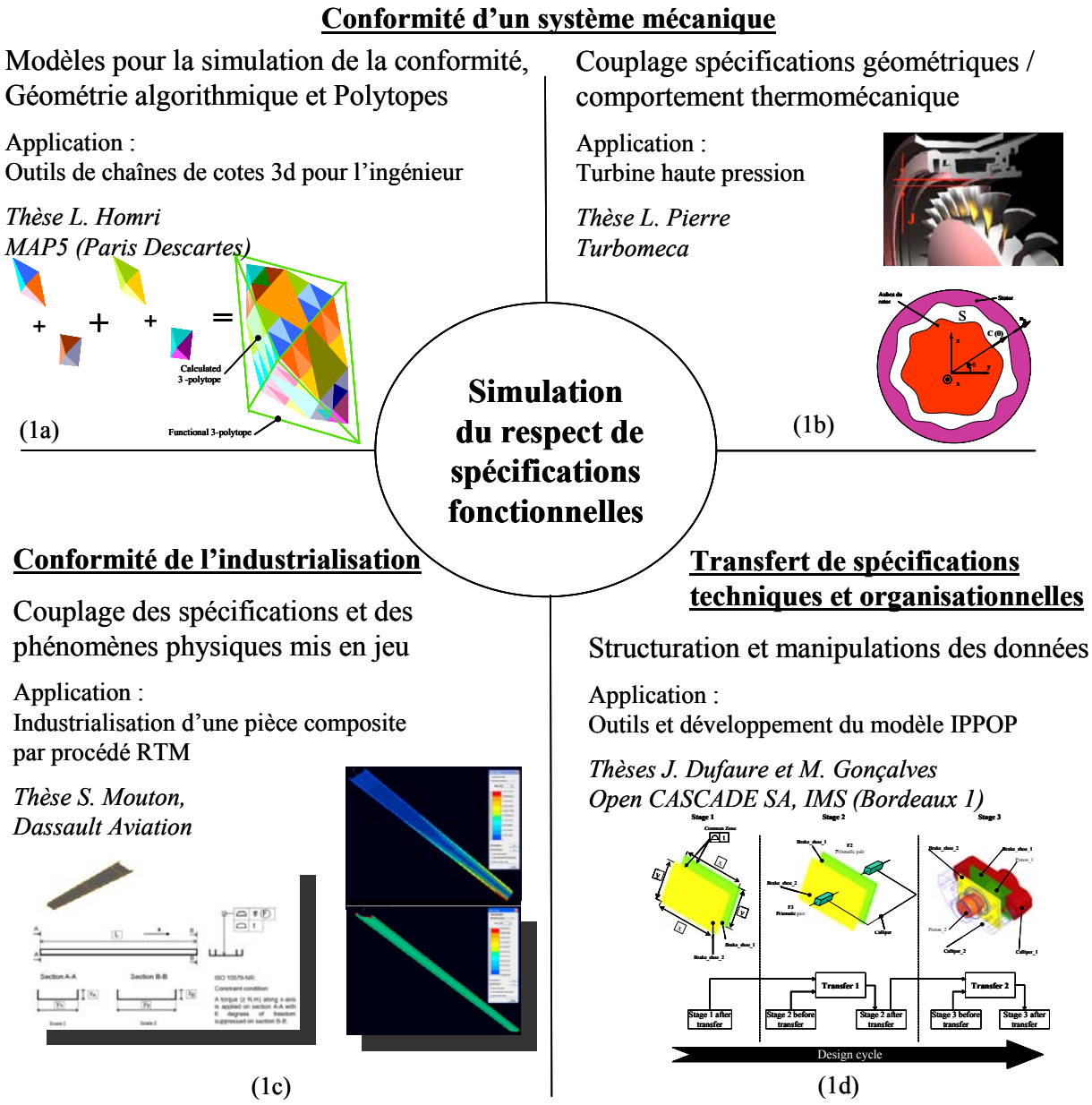



Figure 1 : Synoptique de mon activité de recherche.

Les méthodes et outils développés permettent de modéliser la variabilité des défauts géométriques inhérents à tout procédé de fabrication de pièces, inhérents à tout procédé d'assemblage et aussi inhérents au comportement d'un système mécanique, par exemple son comportement thermomécanique. L'intégration du comportement thermomécanique dans une démarche d'analyse de tolérances a été réalisée sur une turbine haute pression d'un turbomoteur développé par la société Turbomeca, voir figure 1b.

L'analyse des tolérances d'un système mécanique peut se transposer à l'échelle d'une pièce unique sur une démarche d'industrialisation. En effet, l'analyse des spécifications d'une gamme de fabrication consiste à vérifier la conformité d'une pièce fabriquée au regard des spécifications fonctionnelles de la pièce. Je me suis intéressé à une gamme de fabrication incluant le procédé Resin Transfer Molding (RTM). Dans ce procédé impliquant des phénomènes physiques extrêmement complexes, les spécifications fonctionnelles d'une pièce de structure aéronautique ont été corrélées à des spécifications de fabrication (spécifications d'outillages, spécifications de pression d'injection et de température ...). Une application a été réalisée en partenariat avec Dassault Aviation sur le longeron d'un aéronef, voir figure 1c. Dans ce type de travail, il n'est plus possible de travailler avec des modèles de solides infiniment rigides comme souvent en tolérancement de fabrication restreint aux procédés d'usinage.

La conformité d'un système mécanique doit être assurée pour plusieurs exigences fonctionnelles. De surcroît, une démarche d'analyse de tolérances réalisées à un stade très avancé du cycle de conception peut constater des non conformités sans pour autant influencer les différents choix d'architectures d'un système, ainsi que les formes et dimensions des pièces constitutives. Ce problème est souvent la cause d'augmentation des délais et des coûts de développement d'un produit.
Cela m'a conduit à m'orienter vers la structuration des données pour le tolérancement dans un modèle produit pour identifier les données manipulées en analyse de tolérances. La formalisation d'une activité de transfert de spécifications géométriques a permis d'assurer la traçabilité des spécifications géométriques pour :

- couvrir le cycle de conception (aspect multi niveaux du cycle de conception d'un produit)
- partager les données manipulées avec d'autres expertises métiers (aspect multi vues du cycle de conception d'un produit).

Le transfert d'une exigence fonctionnelle doit donc être réalisé à travers différents niveaux de détails du produit (transfert interniveaux) et également entre différentes expertises métiers liés à la fabrication, l'assemblage et la métrologie (transfert intervues).
La cohésion des données est assurée par le modèle qui structure les données manipulées appelé communément modèle produit. La cohérence des données est assurée par le (ou les) outil(s) d'analyses mis en œuvre et, bien sûr, les compétences des différents acteurs. Ces deux aspects sont complémentaires. Ils sont déterminants dans la prise en compte des déformations des pièces en analyse de tolérances où les systèmes sont souvent modélisés en solides infiniment rigides. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Open CASCADE SA, l'IMS de l'Université Bordeaux 1 et Alex Ballu, voir figure 1d.

Je considère que les outils d'analyse de tolérances doivent s'adapter aux modèles et outils d'expression des spécifications existants, et en particulier ceux développés dans le groupe de travail ISO TC 213. La vocation de ces modèles et outils est de pouvoir définir des exigences fonctionnelles en considérant la géométrie réelle d'un système conditionnant son

comportement physique. Beaucoup de travaux sont en cours sur ce sujet, et de nombreux challenges sont à relever notamment dans la prise en compte des variations géométriques liés au comportement physique d'un système mécanique.
En outre, d'un point de vue communication et échanges entre les différents partenaires d'un projet industriel, l'aspect normatif des spécifications me semble incontournable dans le contexte industriel actuel.
Mon travail n'a pas consisté à développer des modèles et outils d'expression de spécifications mais à considérer les concepts émergeant de l'ISO pour les prendre en compte dans mes développements d'outils d'analyse de tolérances.

Mon activité de recherche peut donc se résumer par le développement d'une approche de l'analyse des tolérances géométriques par des polytopes, appliquée à des systèmes de solides infiniment rigides et de systèmes dont les variations d'origine thermomécanique sont prises en comptes.
De plus, le transfert de spécifications fonctionnelles d'une pièce élaborée par le procédé RTM a été considéré pour aborder la corrélation de spécifications fonctionnelles avec les spécifications inhérentes au procédé RTM.
Enfin, cette approche de l'analyse des tolérances m'a amené à considérer la problématique de structuration des données pour le tolérancement en se focalisant sur la traçabilité des spécifications d'un point de vue interniveaux et intervues.

## 1.3 Plan de lecture du document

Le chapitre 2 de ce document présente la synthèse des travaux liés à l'analyse des tolérances géométriques par des polytopes. Ce chapitre structure les bases scientifiques des développements exposés dans les chapitres suivants.
Le chapitre 3 est consacré à la traçabilité des spécifications géométriques dont les concepts sont étendus à la traçabilité de spécifications fonctionnelles (ou techniques) et organisationnelles.
Enfin le chapitre 4 résume le travail lié à l'industrialisation d'une pièce en matériaux composites élaboré par le procédé RTM.
Le dernier chapitre présentera mes perspectives de recherche.

# 2 ANALYSE DES TOLERANCES PAR DES OPERATIONS SUR DES POLYTOPES

## 2.1 Avant-propos

Parmi les travaux dédiés à l'analyse et à la synthèse des tolérances géométriques, il existe deux types d'approches : l'approche paramétrique et l'approche par des ensembles de contraintes.

Une approche paramétrique caractérise la position relative entre deux surfaces d'un mécanisme en un point particulier, par une simple relation (linéaire ou non linéaire) entre des écarts inhérents aux variations géométriques des pièces, et des écarts inhérents aux variations géométriques des surfaces potentiellement en contact. La principale limitation de ce type d'approche est qu'elle ne supporte pas les redondances de suppressions des degrés de liberté entre les pièces, créées par les architectures hyperstatiques. De plus, il est souvent nécessaire de générer plusieurs relations en plusieurs points et/ou suivant des directions différentes afin de simuler les variations entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme.

Une approche par des ensembles de contraintes caractérise la position relative entre deux surfaces d'un mécanisme par des opérations (sommes de Minkowski et intersections) entre des ensembles de contraintes géométriques. Ces ensembles de contraintes géométriques formalisent toutes les positions relatives entre des surfaces d'une même pièce, conformes à une spécification géométrique. De même, ils formalisent toutes les positions relatives entre deux surfaces de deux pièces potentiellement en contact, conformes à une spécification de contact. Le principal intérêt de ce type d'approche est de simuler des variations d'architectures hyperstatiques. De plus, une seule relation est suffisante pour simuler les variations entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme.

Mes travaux de thèse de Doctorat sur les UPEL (Union Pondérée d'Espaces de Liberté) concept initié par Yves Couétard en 1991, reposent sur une approche par des ensembles de contraintes du tolérancement géométrique. J'ai fait le choix en 1997 de modéliser les variations géométriques d'une pièce et les variations géométriques entre deux pièces potentiellement en contact par des polytopes. Ce choix a été motivé par les travaux réalisés au LMP par Vincent Delos lors de son stage de DESS d'Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques en 1997, suivi d'un contrat de chargé de recherche en 1998. Suite au départ de Vincent Delos dans l'industrie, et faute d'équipe de recherche travaillant sur la géométrie algorithmique à l'Université Bordeaux 1, ces travaux ont été stoppés en 1999. Sur la période 2007-2010, ma participation à l'Equipe de Recherche Technologique IMPACT (Innovation Moteur Pour l'Anneau et le Contrôle du jeu Turbine haute pression) m'a incité à reprendre des travaux sur les polytopes dans le cadre de la thèse de Laurent Pierre. L'objectif de cette thèse a été de caractériser les variations du jeu rotor stator en sommets d'aubes d'une turbine haute pression d'un moteur d'hélicoptère. La particularité de ces travaux est qu'ils intègrent des variations d'origine thermomécanique dans des chaînes de cotes sur des architectures fortement hyperstatiques. De plus dans la même période, Vincent Delos a intégré le laboratoire MAP5 (UMR 8145) de l'Université Paris Descartes en tant qu'Ingénieur de Recherche CNRS dans une équipe travaillant sur les polytopes avec des approches probabilistes et statistiques. Cela m'a permis de nouer une collaboration permettant de travailler sur les aspects plus fondamentaux liés aux polytopes et plus particulièrement aux sommes de Minkowski dans l'espace de dimension $n$. Des travaux sont actuellement en cours sur ce sujet dans le cadre de la thèse de Lazhar Homri débutée en Octobre 2011.

Ce chapitre fait la synthèse des travaux réalisés avec Vincent Delos et des travaux réalisés pendant la thèse de Laurent Pierre. De plus, il mettra en perspectives les travaux amorcés dans

la thèse de Lazhar Homri en Octobre 2011 et plus généralement les travaux envisagés autour des polytopes.
Une première partie résume le paramétrage par des écarts géométriques, caractérisant les différentes variations qui sont prises en compte dans un outil d'analyse de tolérances, reposant sur des petits déplacements entre des surfaces de substitution. Cette première partie sera conclue par une synthèse des différentes approches paramétriques. Puis, une deuxième partie recensent les définitions des polytopes opérandes manipulés ainsi que les principaux développements réalisés sur les deux opérations mises en œuvre : l'intersection et la somme de Minkowski. Une troisième partie dresse le bilan des travaux concernant l'intégration des déformations thermomécaniques dans une chaîne de cotes 3d reposant sur des opérations de polytopes. Enfin, une quatrième partie introduit les perspectives envisagées concernant l'analyse des tolérances par des opérations sur des polytopes.

Dans ce paragraphe, nous posons les hypothèses physiques suivantes :

- pas de pièce déformable,
- pas de déformation locale de surfaces en contact,
- pas de défaut de forme des surfaces.

La prise en compte de la déformation des pièces inhérente au comportement thermomécanique des pièces sera abordée dans le paragraphe 2.6.

## 2.2 Paramétrage par des écarts géométriques

### 2.2.1 Surfaces de substitution

La notion d'écart géométrique a été introduite en métrologie tridimensionnelle pour qualifier les défauts de forme, de dimension, d'orientation et de position d'une pièce fabriquée (Bourdet 1987). La caractérisation d'un écart repose sur le principe d'association d'une surface de substitution à un ensemble de points $M_i$ extraits de la surface réelle par une opération de mesure (Ballu 1993). Une surface de substitution est une surface idéale (i.e. géométriquement parfaite) qui a le même type que la surface nominale dont elle caractérise une réalisation physique particulière : voir figure 2.

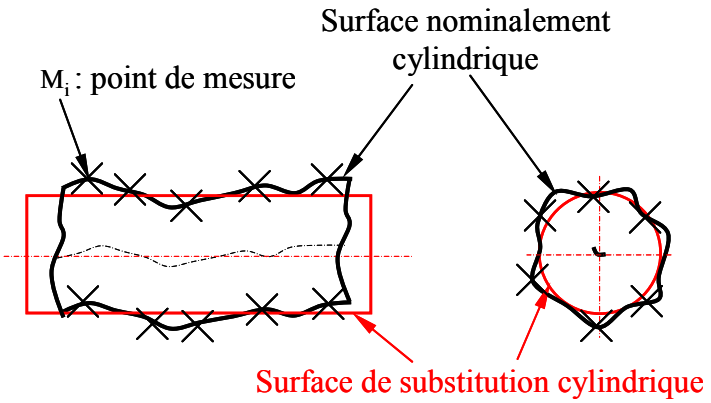



Figure 2 : Surface cylindrique associée à un ensemble de points.

Ce principe très répandu en métrologie tridimensionnelle a été initié par Bourdet et Clément à la fin des années 70 en France par les torseurs des petits déplacements et des coordonnées pluckériennes. L'association d'une surface à un ensemble de points a été développé dans les années (Clément & Bourdet 1988). Le torseur de petits déplacements permet la détermination

des écarts afin de vérifier la conformité ou la non-conformité d'une pièce fabriquée vis-à-vis de spécifications par dimension et par zone de tolérance.
Son utilisation est très largement reprise dans la communauté française fédérée par le Groupe de Recherche de Tolérancement (GRT).
Dans le cycle de conception d'un produit, toute écriture de chaîne de cotes suppose que l'on soit capable d'une part de simuler les défauts de fabrication d'une pièce et d'autre part de simuler les défauts de mise en position de deux pièces potentiellement en contact. Les trois modélisations différentes utilisées en tolérancement sont: le modèle nominal (modèle CAO), le skin modèle et le modèle des surfaces de substitution initialement développé pour la métrologie : voir figure 3.

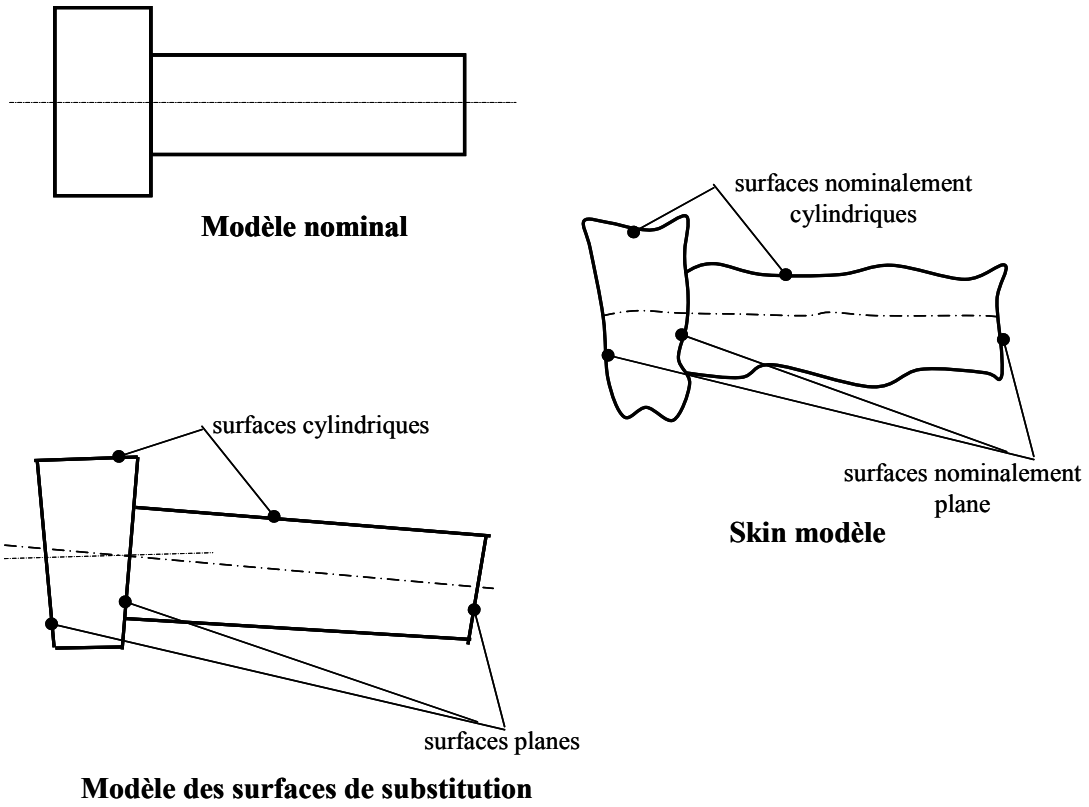


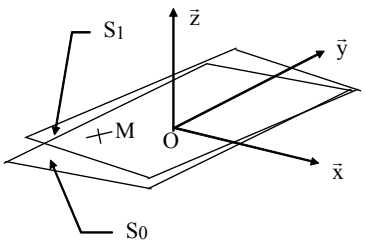

Figure 3 : Modèles de surfaces pour le tolérancement.

Le modèle nominal est le modèle utilisé par un modeleur géométrique : il est géométriquement parfait par définition. Le skin modèle donne une représentation des surfaces réelles de la pièce et sert de support graphique à l'expression des spécifications géométriques (Dantan et al. 2008). On remarque que le skin modèle de l'arbre de la figure 3 est constitué de cinq surfaces réelles : trois surfaces nominalement planes et deux surfaces nominalement cylindriques. Enfin le modèle des surfaces de substitution est composé de cinq surfaces : trois surfaces planes et deux surfaces cylindriques.

### 2.2.2 Ecarts géométriques d'une pièce

Les défauts géométriques d'une surface réelle sont définis par les écarts de situation entre une surface de substitution et la surface nominale correspondante auxquels il convient d'ajouter d'éventuels écarts de dimension intrinsèques (diamètres de cylindre ou de sphère, conicité ou angle au sommet d'un cône par exemple). Ces écarts sont inhérents aux variations géométriques d'une pièce.

Une surface de substitution peut être caractérisée par une classe d'invariance. Une classe d'invariance correspond à un sous-groupe de déplacements laissant globalement invariant une surface (Hervé 1978). Par exemple, un plan subissant une rotation suivant sa normale et deux translations respectivement suivant deux directions orthogonales à sa normale reste globalement invariant. Il existe sept sous-groupes de déplacements correspondant respectivement à sept classes d'invariance. Les sept classes d'invariance sont les classes de surfaces de révolution, prismatique, cylindrique, plane, sphérique, hélicoïdale et complexe (Clément et al. 1994), (Gaunet 1994). A chaque classe de surface sont associés des éléments de situation (plan, droite et point) permettant de définir le nombre de paramètres strictement nécessaire pour positionner toute surface dans l'espace euclidien (Clément et al. 1991).
Les écarts de situation dans une pièce caractérisent la position relative entre une surface de substitution et sa surface nominale correspondante. Dans une base orthonormée directe définie partiellement par les éléments de situation d'une surface, il est possible à l'aide d'un torseur de petits déplacements de définir les écarts de situation dans une pièce de tout type de surface. Cela a été montré dans (Teissandier 1995) pour les surfaces de type planes, cylindriques, sphériques, conique et torique. Bien que n'étant pas exhaustif vis-à-vis des sept classes de surfaces, il s'agit des types de surfaces les plus couramment utilisés en tolérancement.




$$[d_{1/0}]\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \rho_{1/0x} \\ \rho_{1/0y} \\ r_{1/0z} \\ e_{M-1/0x} \\ e_{M-1/0y} \\ \varepsilon_{M-1/0z} \end{bmatrix}$$

Figure 4: Petits déplacements relatifs entre deux plans (Teissandier et al. 1996).

La surface $S_1$ est une surface de substitution correspondant à une réalisation physique de la surface nominale $S_0$, voir la figure 4. Dans une base orthonormée directe $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ telle que le vecteur $\mathbf{z}$ soit la normale à $S_0$, $[d_{1/0}]$ caractérise les petits déplacements relatifs entre $S_1$ et $S_0$ en tout point M de $S_0$,. On distingue les composantes primaires $\rho_{1/0x}$, $\rho_{1/0y}$ et $\varepsilon_{M-1/0z}$ des composantes secondaires $r_{1/0z}$, $e_{M-1/0x}$ et $e_{M-1/0y}$, désignées "indéterminées par Ballot (Ballot 1995). Les composantes primaires caractérisent localement dans la base $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ la position relative entre $S_1$ et $S_0$ au point M alors que les composantes secondaires n'ont aucun effet sur la position relative entre $S_1$ et $S_0$. Ces dernières caractérisent les déplacements laissant globalement invariant le plan $S_1$ dans la base $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ en tout point M de $S_0$.
Le tableau de la figure 5 dresse une synthèse de la caractérisation des principales surfaces utilisées en tolérancement.
La position relative entre deux surfaces de la même pièce peut se déterminer par une intersection entre les sous-groupes de déplacements respectifs des surfaces. On obtient la classe laissant globalement invariant l'union des deux surfaces à laquelle correspond ses éléments de situation (i.e. EGRM (Elément Géométrique de Référence Minimum)). Le concept de SATT (Surface Associée Technologiquement et Topologiquement) repose sur ce principe (Clément et al. 1994). Le même résultat est obtenue par la somme des torseurs des déplacements relatifs entre les surfaces de substitution et les surfaces nominales respectives

en s'appuyant sur les propriétés d'addition des composantes secondaires (ou "indéterminées") (Ballot 1995).

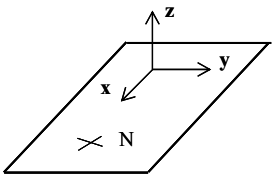
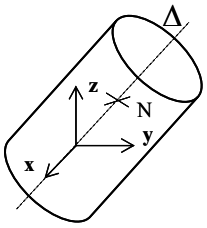
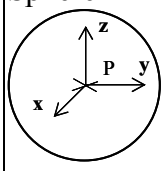
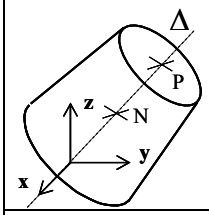
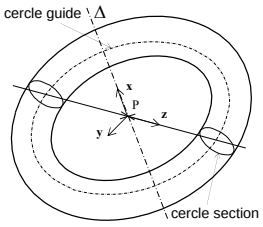
| **Surface de substitution S** | **Classe d'invariance** | **Déplacements laissant globalement invariant S** | **Eléments de situation** | **Ecarts de situation de type pièce** |
|---|---|---|---|---|
| Plan   | Plane | $r_z, e_{M-x}, e_{M-y}$ | S | rotation : $\rho_x, \rho_y, r_z$<br>translation : $\forall N \in S$ : $e_{M-x}, e_{M-y}, \varepsilon_{M-z}$ |
| Cylindre   | Cylindrique | $r_x, e_{M-x}$ | Δ : axe de S | rotation : $r_x, \rho_y, \rho_z$<br>translation : $\forall N \in \Delta$ : $e_{M-x}, \varepsilon_{M-y}, \varepsilon_{M-z}$ |
| Sphère   | Sphérique | $r_x, r_y, r_z$ | P : centre de S | rotation : $r_x, r_y, r_z$<br>translation : $\varepsilon_{P-x}, \varepsilon_{P-y}, \varepsilon_{P-z}$ |
| Cône   | De révolution | $r_x$ | Δ : axe de S<br>P : centre petite base | rotation : $r_x, \rho_y, \rho_z$<br>translation : $\forall N \in \Delta$ : $\varepsilon_{M-x}, \varepsilon_{M-y}, \varepsilon_{M-z}$ |
| Tore   | De révolution | $r_x$ | Δ : axe de S<br>P : centre cercle guide | rotation : $r_x, \rho_y, \rho_z$<br>translation : $\forall N \in \Delta$ : $\varepsilon_{M-x}, \varepsilon_{M-y}, \varepsilon_{M-z}$ |

Figure 5 : Caractérisation des principales surfaces.

### 2.2.3 Ecarts géométriques de liaison

Une liaison existe entre deux pièces si et seulement si lors du fonctionnement normal du mécanisme, les deux pièces peuvent être en contact (Ballu et al. 2010). Une liaison est définie par son type (ponctuelle, linéaire annulaire, rotule, …), des éléments de situation et un attribut de contact. Les types de liaisons sont très utilisés en mécanique du solide et en théorie des mécanismes. Nous retiendrons la terminologie référencée dans (ISO3952-1 1981). Les

éléments de situation sont les mêmes que pour les surfaces de substitution à savoir : le plan, la droite et le point. Ils permettent de positionner la liaison dans l'espace euclidien avec un nombre de paramètres strictement nécessaire, définissant les directions des degrés de mobilité et des degrés de liaison. L'attribut de contact est fixe, glissant ou flottant. Cette notion a été introduite par (Dantan 2000) et récemment complété par deux autres attributs spécifiques à la liaison ponctuelle : roulant-glissant et roulant (Ballu 2009).

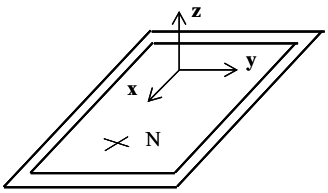
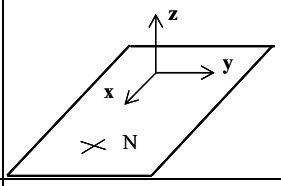
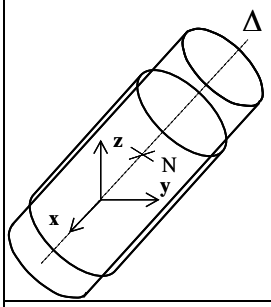
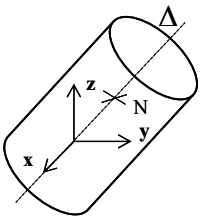
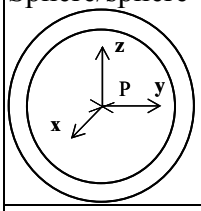
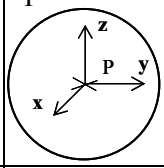
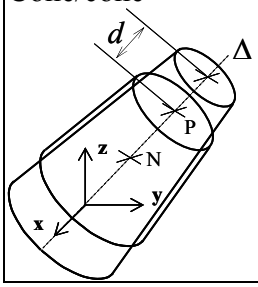
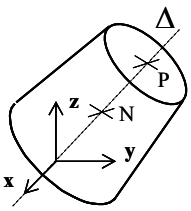
| **Surfaces en contact** | **Type de liaison**<br>**Elément de contact** | **Mobilités** | **Eléments de situation** | **Ecarts de situation de liaison** |
|---|---|---|---|---|
| Plan/plan<br>  | Appui plan<br>Plan S<br>  | $r_z, e_{N-x}, e_{N-y}$ | S | rotation :<br>$\rho_x, \rho_y, r_z$<br><br>translation :<br>$\forall N \in S$ :<br>$e_{N-x}, e_{N-y}, \varepsilon_{N-z}$ |
| Cylindre/cylindre<br>  | Pivot glissant<br>Cylindre S<br>  | $r_x, e_{N-x}$ | Δ :<br>axe de S | rotation :<br>$r_x, \rho_y, \rho_z$<br><br>translation :<br>$\forall N \in \Delta$ :<br>$e_{N-x}, \varepsilon_{N-y}, \varepsilon_{N-z}$ |
| Sphère/sphère<br>  | Rotule<br>Sphère S<br>  | $r_x, r_y, r_z$ | P :<br>centre de S | rotation :<br>$r_x, r_y, r_z$<br><br>translation :<br>$\varepsilon_{P-x}, \varepsilon_{P-y}, \varepsilon_{P-z}$ |
| Cône/cône<br>  | Pivot<br>Cône S<br>  | $r_x$ | Δ :<br>axe de S<br><br>P : centre petite base | rotation :<br>$r_x, \rho_y, \rho_z$<br><br>translation :<br>$\forall N \in \Delta$ :<br>$\varepsilon_{N-x}, \varepsilon_{N-y}, \varepsilon_{N-z}$ |

Figure 6 : Ecarts de situation entre des surfaces de même type (élément de contact surfacique).

Il existe des similitudes fortes entre les caractérisations des écarts de situation dans une pièce et les écarts de situation dans une liaison. La caractérisation des écarts de situation d'une surface de substitution par rapport à son modèle nominal dans une pièce est directement transposable à la caractérisation des écarts de situation d'une liaison entre deux surfaces identiques (i.e. appartenant à la même classe de surface et ayant les mêmes caractéristiques intrinsèques nominales) tel que leurs éléments de situation respectifs soient nominalement confondus. En effet, les écarts de situation dans une pièce caractérisent la position relative

entre une surface de substitution et une surface nominale tel que leurs éléments de situation soient nominalement confondus. Par conséquent, les caractérisations des écarts de situation des surfaces planes, cylindriques, sphériques et coniques de la figure 5 sont respectivement transposables aux liaisons appui plan, pivot glissant, rotule et pivot : voir figure 6. Seules les liaisons couramment réalisées par contact entre deux surfaces sont prises en compte dans la figure 6, qui n'est pas exhaustive vis-à-vis de toutes les liaisons modélisables avec deux surfaces choisies parmi les sept classes de surfaces. Toutes les liaisons de cette figure ont des éléments de contact surfacique. Les liaisons de type linéaire rectiligne et linéaire annulaire ont des éléments de contact linéique. La liaison ponctuelle, comme son nom l'indique, a un élément de contact de type point : voir figure 7.

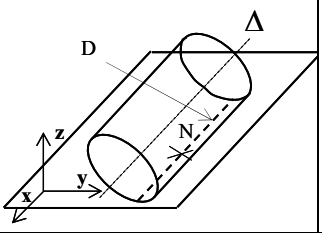
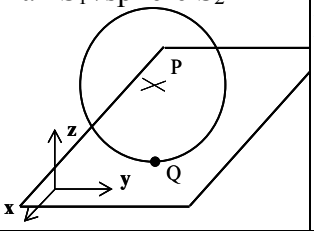
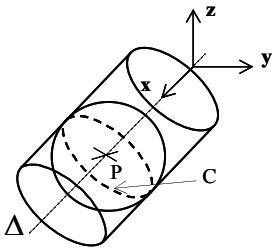
| **Surfaces en contact** | **Type de liaison**<br>**Elément de contact** | **Mobilités** | **Eléments de situation** | **Ecarts de liaison** |
|---|---|---|---|---|
| Plan $S_1$ /Cylindre $S_2$<br>  <br> | Linéaire rectiligne<br>Segment de droite D | Rotation :<br>$r_x, r_z$<br><br>Translation :<br>$e_{N-x}, e_{N-y}$ | $S_1$ et la droite support de D | Rotation :<br>$r_x, \rho_y, r_z$<br><br>Translation :<br>$\forall N \in D$ :<br>$e_{N-x}, e_{N-y}, \varepsilon_{N-z}$ |
| Plan $S_1$ /sphère $S_2$<br>  <br> | Ponctuelle<br>Point Q | Rotation :<br>$r_x, r_y, r_y$<br><br>Translation :<br>$e_{Q-x}, e_{Q-y}$ | $S_1$ et le point Q | Rotation :<br>$r_x, r_y, r_y$<br><br>Translation :<br>$e_{Q-x}, e_{Q-y}, \varepsilon_{Q-z}$ |
| Cylindre $S_1$ /sphère $S_2$<br>  <br> | Linéaire annulaire<br>Cercle C | Rotation :<br>$r_x, r_y, r_y$<br><br>Translation :<br>$e_{P-x}$ | Δ et P<br>(P : centre cercle C) | Rotation :<br>$r_x, r_y, r_y$<br><br>Translation :<br>$e_{P-x}, \varepsilon_{P-y}, \varepsilon_{P-z}$ |

Figure 7 : Liaisons à élément de contact non surfacique.

La conséquence de ceci est qu'il existe plusieurs variantes de couples de surfaces pour réaliser une liaison dont l'élément de contact n'est pas surfacique. La liaison linéaire rectiligne est académiquement défini par un contact d'un cylindre sur un plan suivant une génératrice du cylindre. Or d'un point de vue réalisation en conception, cela se pratique rarement. On rencontre plus fréquemment deux cylindres en contact suivant une génératrice ou deux surfaces en développante de cercle également en contact suivant une génératrice (cas des engrenages cylindriques à profils à développante de cercle) (Teissandier, Couétard, et al. 1999). Cela est aussi vrai pour les liaisons linéaires annulaires dont on trouvera plus fréquemment des réalisations par un contact d'une sphère dans un tore (tel que les diamètres nominaux de la sphère et du cercle de section du tore soient égaux). Quant aux liaisons

ponctuelles, tout contact d'une sphère avec tout autre surface réalise un contact ponctuel si au voisinage du contact cette surface est convexe.
Nous avons considéré le type de la liaison mais aussi l'élément de contact qui est l'élément géométrique défini par l'intersection des surfaces en contact dans le cas particulier d'un attribut de contact glissant. Ces deux notions sont redondantes : le type de liaison correspond à un seul type d'élément de contact particulier et vice versa. L'expérience montre qu'il est généralement plus facile de caractériser une liaison par ses degrés de mobilité dans une approche cinématique, alors que l'élément de contact permet d'aborder la définition d'une liaison d'un point de vue géométrique. Cela permet également d'apprécier plus facilement la modélisation d'une liaison d'un point de vue technologique (Ballu et al. 2010).
Les modélisations les plus fréquentes consistent à ne pas considérer la dimension d'un élément de contact surfacique ou linéique. Un élément de contact plan pourra être approximé par un segment de droite qui lui-même pourra être approximé par un point. Un élément de contact cylindrique (centrage long) pourra être approximé par un cercle (centrage court), voir figure 8.

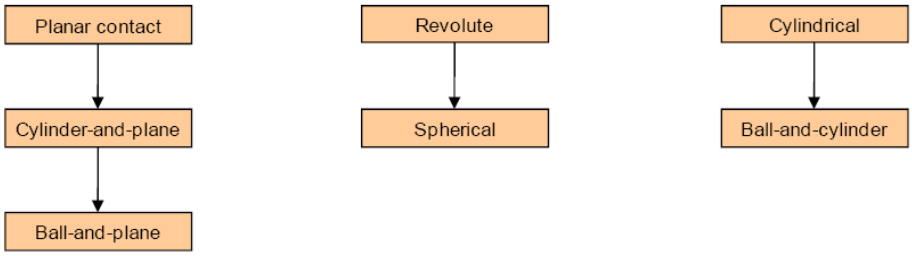



Figure 8: Réduction des surfaces de contact d'après (Ballu et al. 2010).

### 2.2.4 Structure topologique d'un système mécanique

Les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 ont montré la modélisation des défauts géométriques d'un mécanisme par des écarts dans les pièces et les liaisons. Ce paragraphe fait une synthèse des évolutions de la structure de données initialement mise en œuvre pour le concept des UPEL (Union Pondérée d'Espaces de Liberté) (Teissandier 1995). Depuis 1995, les évolutions ont été influencées par les travaux de Ballu et Mathieu (Ballu & Mathieu 1999) et par les nombreuses expériences réalisées au travers de travaux dirigés et de travaux pratiques avec des étudiants de Licence 3ème année et de Master 2ème année de la spécialité génie mécanique de l'Université Bordeaux 1 depuis une dizaine d'années. Cette structure de données décrit les dépendances entre les écarts dans les pièces et les liaisons au travers d'un graphe permettant de définir le modèle global du mécanisme formalisée par les lois de comportement géométriques (Ballot & Bourdet 1995). La structure de données a d'abord été élaborée par des chaînes de cotes de solides infiniment rigides mais elle a du être adaptée pour prendre en compte des déformations thermomécaniques (Pierre 2011).
Un mécanisme composé d'un rotor 1 guidé en rotation dans un stator 2 va servir d'exemple fil rouge dans ce chapitre.

#### 2.2.4.1 Structure d'un mécanisme

Les premiers travaux formalisant la structure d'un mécanisme par un graphe datent des années 70 où il s'agissait de générer le processus d'assemblage de solides géométriquement parfait (Liberman & Wesley 1977). Plus récemment, on peut citer la structure de données hiérarchisée pour modéliser le mouvement des pièces d'un mécanisme en fonctionnement

(Lee & Gossard 1985), le graphe relationnel développé dans (Homem De Mello & Sanderson 1989) dédié à la génération automatique de processus d'assemblage et les premiers graphes relationnels dédiés au tolérancement pour intégrer des concepts de (ANSI Y14.5M 1993) dans un modeleur géométrique (Roy & Liu 1988).

En France, la théorie des mécanismes (Siestrunck 1973), (Le Borzec & Lotterie 1975) a influencé les travaux de la communauté du Groupe de Recherche en Tolérancement (GRT).

Dans chaque pièce et dans chaque liaison la position relative entre des surfaces de substitution est paramétrée. La structure de données initiée en 1995 (Teissandier 1995) est formalisée par un graphe dont les arcs ne sont pas orientés, on parle alors d'arêtes. De plus, il s'agit d'un graphe à une composante connexe. Cela signifie qu'il existe toujours un chemin pour aller d'un sommet à un autre. Si le graphe possède *n* composantes connexes, cela signifie que le graphe décrit la structure de *n* mécanismes indépendants les uns des autres. Les arêtes représentent les écarts dans les pièces et les liaisons. A chaque arête caractérisant une liaison, on renseigne le type de la liaison sur le graphe (AP pour Appui Plan, PG pour Pivot Glissant, …) ainsi que son attribut de contact (fixe, glissant ou flottant). La définition des surfaces en contact ne suffit pas pour caractériser une liaison, notamment son type et son attribut de contact.

Les sommets caractérisent les surfaces de substitution. Chaque sommet est désigné par un couple de numéros, par exemple 2,1. Cela signifie surface 1 de la pièce 2. Il y a un sommet désigné $i,0$ par pièce $i$. Ce sommet caractérise le modèle nominal de la pièce, c'est-à-dire un repère lié à la pièce (Teissandier, Couétard, et al. 1999). Il n'est pas possible d'avoir deux arêtes entre un sommet $i,j$ (avec $j \neq 0$) et un sommet i,0.

Un exemple de graphe avec les caractéristiques associées aux arêtes et aux sommets est donné : voir figure 9, figure 10 et figure 11. Ce graphe modélise la structure d'un mécanisme composé d'un rotor 1 guidé en rotation dans un stator 2.

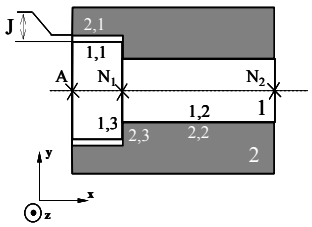
| **Mécanisme** | **Liaison (nom, type, attribut)** | **Eléments de situation** | **Ecarts de liaison** |
|---|---|---|---|
| Assemblage rotor 1- stator 2   | 1,3/2,3 Appui plan glissant | Plan $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{1,3/2,3x}, \rho_{1,3/2,3y}, \rho_{1,3/2,3z}$ $\varepsilon_{N1-1,3/2,3x}, e_{N1-1,3/2,3y}, e_{N1-1,3/2,3z}$ |
| | 1,2/2,2 Pivot glissant flottant | Droite $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{1,2/2,2x}, \rho_{1,2/2,2y}, \rho_{1,2/2,2z}$ $e_{N1-1,2/2,2x}, \varepsilon_{N1-1,2/2,2y}, \varepsilon_{N1-1,2/2,2z}$ |

Figure 9 : Caractérisation des liaisons.

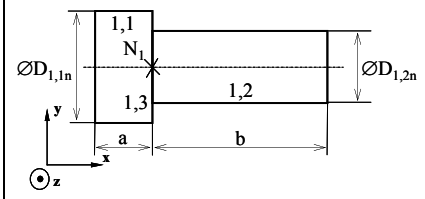
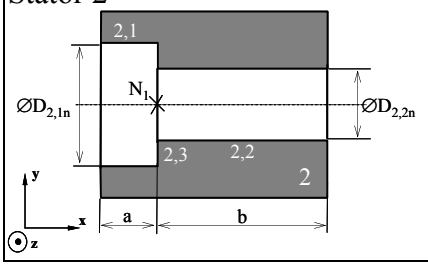
| Pièce | Surface de substitution | Eléments de situation | Ecarts de pièce |
|---|---|---|---|
| Rotor 1   | Cylindre 1,1 | Droite $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{1,1/1,0x}$, $\rho_{1,1/1,0y}$, $\rho_{1,1/1,0z}$<br>$e_{N1-1,1/1,0x}$, $\varepsilon_{N1-1,1/1,0y}$, $\varepsilon_{N1-1,1/1,0z}$ |
| | Cylindre 1,2 | Droite $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{1,2/1,0x}$, $\rho_{1,2/1,0y}$, $\rho_{1,2/1,0z}$<br>$e_{N1-1,2/1,0x}$, $\varepsilon_{N1-1,2/1,0y}$, $\varepsilon_{N1-1,2/1,0z}$ |
| | Plan 1,3 | Plan $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{1,3/1,0x}$, $\rho_{1,3/1,0y}$, $\rho_{1,3/1,0z}$<br>$\varepsilon_{N1-1,3/1,0x}$, $e_{N1-1,3/1,0y}$, $e_{N1-1,3/1,0z}$ |
| Stator 2   | Cylindre 2,1 | Droite $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{2,1/2,0x}$, $\rho_{2,1/2,0y}$, $\rho_{2,1/2,0z}$<br>$e_{N1-2,1/2,0x}$, $\varepsilon_{N1-2,1/2,0y}$, $\varepsilon_{N1-2,1/2,0z}$ |
| | Cylindre 2,2 | Droite $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{2,2/2,0x}$, $\rho_{2,2/2,0y}$, $\rho_{2,2/2,0z}$<br>$e_{N1-2,2/2,0x}$, $\varepsilon_{N1-2,2/2,0y}$, $\varepsilon_{N1-2,2/2,0z}$ |
| | Plan 2,3 | Plan $(N_1, \mathbf{x})$ | $r_{2,3/2,0x}$, $\rho_{2,3/2,0y}$, $\rho_{2,3/2,0z}$<br>$\varepsilon_{N1-2,3/2,0x}$, $e_{N1-2,3/2,0y}$, $e_{N1-2,3/2,0z}$ |

Figure 10 : Caractérisation des surfaces de substitutions.

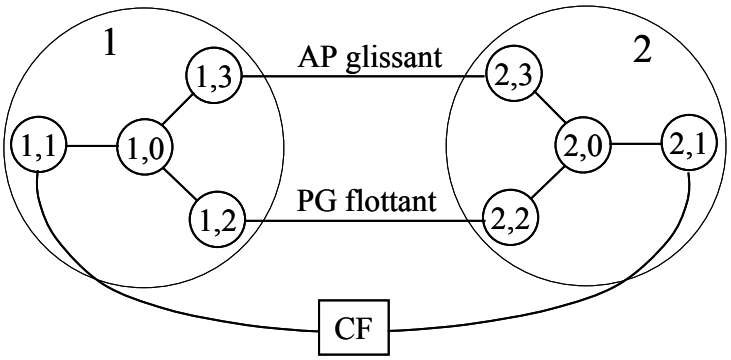



Figure 11 : Graphe du mécanisme.

Un grand cercle entoure les surfaces de la même pièce : ce cercle n'est qu'un attribut de représentation graphique et n'est pas un sommet.
Le bon fonctionnement de ce mécanisme sera garanti par la maîtrise du jeu J entre le rotor 1 et le stator 2 dans un plan de normale $\mathbf{x}$ passant part le point A, soit le plan $(A, \mathbf{x})$. Cette condition fonctionnelle est représentée par une arête sur le lequel est mentionné CF dans un rectangle.
On définit CF par la relation suivante :

$$J_{\min} \leq J \leq J_{\max} \tag{1}$$

2.2.4.2 Boucles topologiques d'écarts

Le graphe du mécanisme contient généralement des cycles fermés définissant les boucles topologiques de la structure d'un mécanisme (Serre et al. 2010). Un cycle fermé induit une relation de type :

$$d_{i,0/i,j} + d_{i,j/u,v} + \ldots + d_{i,k/i,0} = 0 \quad \text{avec } j \neq 0,\ k \neq 0,\ v \neq 0,\ j \neq k \text{ et } u \neq i \tag{2}$$

Les termes de type $d_{i,0/i,j}$ désigne un écart dans une pièce.

Les termes $d_{i,j/u,v}$ désigne un écart dans une liaison.
La relation (2) repose sur la relation de Chasles dans $\mathbb{R}^3$. Chaque terme $d_{i,j/u,v}$ caractérise la position et/ou l'orientation relative de repères de $\mathbb{R}^3$ construits sur les éléments de situation respectifs des surfaces.
Un mécanisme ne peut exister (i.e. fonctionner) que si chaque boucle topologique (1) est satisfaite. La relation (1) est indépendante du formalisme mathématique utilisé pour définir les écarts de pièce ou de liaison ; de plus elle ne dépend d'aucune condition fonctionnelle. Les écarts dans les pièces et liaisons peuvent être définis par un torseur de petits déplacements (Bourdet et al. 1996) : c'est l'outil le plus employé dans la communauté française. Il existe d'autre modèles pour définir ces écarts : une matrice homogène (Mantripragada 1998), le Relative Positioning Operator (Turner 1990) intégré dans une structure d'assemblage (Sodhi & Turner 1994), une approche vectorielle (Wirtz 1993), un modèle paramétrique (Serre et al. 2010), (Sacks & Joskowicz 1997), ou par exemple un modèle cinématique (Rivest et al. 1994).
Le nombre de cycles fermés indépendants ou de boucles topologiques indépendantes est donné par le nombre cyclomatique $\gamma$.

On a :
$\gamma = a - s + 1$ avec : $a$ nombre d'arêtes et $s$ nombre de sommets (3)

***Remarques*** *: le nombre d'arêtes a est le nombre de surfaces de substitution additionné au nombre de liaisons ; le nombre de sommets s est le nombre de surfaces de substitution additionné au nombre de pièces.*

Soit $LC$ l'ensemble des relations (2) garantissant l'existence du mécanisme :
$LC = \left\{ d_{i,0/i,j} + d_{i,j/u,v} + ... + d_{i,k/i,0} = 0 \right\}$ avec $j \neq 0, k \neq 0, j \neq k, u \neq i$ et $v \neq 0$ (4)
Le nombre cyclomatique $\gamma$ est le cardinal de $LC$.
L'ensemble $LC$ définit les Lois de Comportement d'un mécanisme.
Ballot (Ballot 1995) a cherché à résoudre formellement l'ensemble de relations $LC$ où les écarts sont modélisés par des petits déplacements. Les écarts correspondant aux mobilités relatives des surfaces en contact et des déplacements laissant globalement invariant une surface de substitution sont appelés « variables indéterminés » ou simplement « indéterminées » (Ballot & Bourdet 1995). La résolution de $LC$ consiste à exprimer les variables indéterminées en fonction des autres écarts. Avec la notation choisie au §1.1, cela signifie que la résolution de $LC$ consiste à déterminer les écarts notés $r_x, r_y, r_z, e_{N,x}, e_{N,y}$ et $e_{N,z}$ en fonction des écarts notés $\rho_x, \rho_y, \rho_z, \varepsilon_{N-x}, \varepsilon_{N-y}$ et $\varepsilon_{N-z}$.

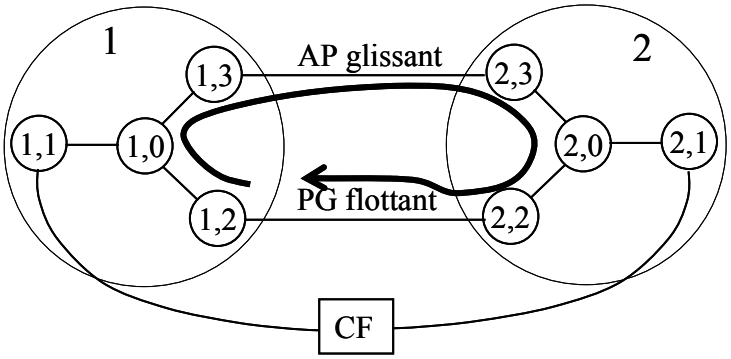



Figure 12 : Boucle topologique.

La détermination d'un écart spécifié par une condition fonctionnelle consiste à résoudre l'ensemble de relation $LC$ auquel il convient d'ajouter une relation provenant d'une boucle supplémentaire contenant l'arête de la condition fonctionnelle labellisée CF:

$$\begin{cases} (LC : \gamma\ relations)\ d_{i,0/i,j} + d_{i,j/u,v} + ..... + d_{i,k/i,0} = 0 \\ (CF : 1\ relation)\ \ d_{p,q/p,0} + ... + d_{r,0/r,s} - d_{p,q/r,s} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

L'ensemble de relations $LC$ du mécanisme présenté en figure 9, figure 10 et figure 11 a un cardinal égal à :

$\gamma = 8 - 8 + 1 = 1$.

On obtient alors : $LC = \left\{ d_{1,0/1,3} + d_{1,3/2,3} + d_{2,3/2,0} + d_{2,0/2,2} + d_{2,2/1,2} + d_{1,2/1,0} = 0 \right\}$ (6)

La détermination du jeu $J$ spécifié par la condition CF définie par (1) consiste à résoudre l'ensemble des relations suivant :

$$\begin{cases} LC : d_{1,0/1,3} + d_{1,3/2,3} + d_{2,3/2,0} + d_{2,0/2,2} + d_{2,2/1,2} + d_{1,2/1,0} = 0 \\ CF : d_{1,1/2,1} = d_{1,1/1,0} + d_{1,0/1,3} + d_{1,3/2,3} + d_{2,3/2,0} + d_{2,0/2,1} \end{cases} \tag{7}$$

On a alors :

$$J = \frac{1}{2}\left( \left( D_{2,1n} + d_{2,1} \right) - \left( D_{1,1n} + d_{1,1} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}_{M-1,1/2,1}.\mathbf{v} \right) \tag{8}$$

avec :

$\mathbf{v}.\mathbf{x} = 0$

$D_{2,1n}$ : diamètre nominal cylindre 2,1, $d_{2,1}$ : écart de dimension cylindre 2,1

$D_{1,1n}$ : diamètre nominal cylindre 1,1, $d_{1,1}$ : écart de dimension cylindre 1,1

### 2.2.5 Gestion des hyperstatismes dans les méthodes de tolérancement

La prise en compte des hyperstatismes repose sur plusieurs stratégies possibles.

La première stratégie consiste à faire des hypothèses de prépondérances de contacts au niveau des liaisons. Cela consiste à modéliser le guidage en rotation du rotor 1 par une liaison linéaire annulaire (centrage court) et une liaison appui plan, ou alors par une liaison pivot glissant (centrage long) et une liaison ponctuelle. Les degrés de liaison ainsi supprimés ou relaxés impliquent l'ajout de conditions techniques (Bourdet et al. 2010), (Ballu et al. 2010). Les outils Anatole développé par EADS IW (Marguet et al. 2003) et MECAmaster développé par MECAmaster Sarl (Clozel & Rance 2010) fonctionnent sur ce principe. On parle aussi de relaxer des degrés de liaison dans les architectures hyperstatiques. D'autres méthodes suggèrent au concepteur de ne définir que des architectures isostatiques en choisissant des types de mise en position prédéfinis (Soderberg et al. 2006), (Spensieri et al. 2009) et (Anselmetti 2006).

L'intérêt de cette stratégie est que toute exigence fonctionnelle peut être formalisée par une simple fonction linéaire d'écarts (Ledoux & Teissandier 2012). C'est la plus utilisée dans les solutions de tolérancement du commerce.

L'application 3DCS (DCS 2011) se distingue des précédents outils car la dépendance entre une caractéristique fonctionnelle (angle ou distance entre deux surfaces) et les écarts géométriques de pièces et de liaison est obtenue par des relations non linéaires reposant uniquement sur des tirages de Monte Carlo réalisés sur les écarts géométriques. Une relation est déterminée pour chaque tirage.

La seconde stratégie consiste à prendre en compte toutes les configurations possibles ou au moins considérer les configurations les plus critiques au regard d'une exigence fonctionnelle. Cette stratégie est détaillée dans (Ballot et al. 2001). Toute exigence fonctionnelle peut être formalisée par une simple fonction linéaire d'écarts mais il y aura autant de fonctions linéaires que de configurations. Dans une architecture fortement hyperstatique où le cardinal de l'ensemble $LC$ est élevé, le nombre de configurations peut croître très rapidement et devenir rédhibitoire.
La troisième stratégie consiste à manipuler des ensembles d'écarts. Ces ensembles d'écarts sont générés localement par des contraintes de contact entre les pièces et par des contraintes géométriques provenant de spécifications géométriques sur les pièces. Chaque relation (3) de la loi de comportement $LC$ consiste alors à ne plus additionner des écarts mais des ensembles d'écarts : cela consiste à effectuer la somme de Minkowski d'ensemble d'écarts. Toute loi de comportement $LC$, consistera à effectuer des intersections entre des sommes de Minkowski d'écarts. Ces ensembles d'écarts sont appelés domaines (Giordano & Duret 1993), (Dantan & Ballu 2002), espace de faisabilité (Turner 1993), T-Maps (Davidson et al. 2002) ou simplement objet polyédrique (Roy & Li 1999).
Les travaux sur les polytopes que j'ai réalisés s'inscrivent dans cette stratégie. Ils ont été initié avec Vincent Delos en 1997-1998 lors d'un stage de DESS de d'Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques au LMP en 1997, suivi d'un contrat d'ingénieur d'études en 1998.

## 2.3 Caractérisation d'une spécification par un polytope

### 2.3.1 Hyperplan, demi-espace et polytope

Un hyperplan est un sous-espace affine de dimension 0, 1, 2 ou $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ et est respectivement appelé point, droite, plan ou hyperplan. Un hyperplan de dimension $n-1$ est désigné un $(n-1)$-hyperplan, un plan est un 2-hyperplan (Boissonnat & Yvinec 1998).

Considérons un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ : $a_1x_1+...+a_ix_i+...+a_nx_n=b$.

$\bar{\mathrm{H}}^+$ est le demi-espace fermé : $a_1x_1+...+a_ix_i+...+a_nx_n \geq b$

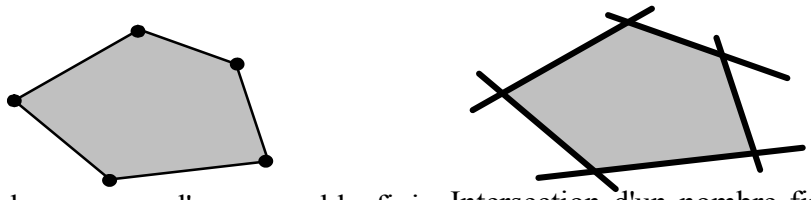
$\bar{\mathrm{H}}^-$ est le demi-espace fermé : $a_1x_1+...+a_ix_i+...+a_nx_n \leq b$

Un polytope $\mathcal{P}$ est une intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$.
Cette définition par des demi-espaces est aussi appelée h-définition (Ziegler 1995), (Fukuda 2004).

Dans ce chapitre, un système d'inégalités de $m$ demi-espaces $\bar{H}^-$ est choisi pour définir un polytope $\mathcal{P}$ (voir figure 13) tel que :

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}.\mathbf{x}\leq\mathbf{b}\} \text{ avec } \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n} \text{ et } \mathbf{b}\in\mathbb{R}^m\\ &\mathbf{A}.\mathbf{x}\leq\mathbf{b} \text{ est l'écriture usuelle du système d'inégalités :}\\ &\mathbf{a_1}.\mathbf{x}\leq b_1,...,\mathbf{a}_m.\mathbf{x}\leq b_m, \text{ où } \mathbf{a_1},...,\mathbf{a}_m \text{ sont les lignes de la matrice } \mathbf{A}\\ &\text{et } b_1,...,b_m \text{ sont les composantes du vecteur } \mathbf{b}\end{aligned} \tag{9}$$

Un polytope $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$ (Ziegler 1995).
Considérons $\mathcal{V}$, un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ (voir figure 13) : $\mathcal{P}=\mathrm{conv}(\mathcal{V})$.
Cette définition par des points est aussi appelée v-définition (Avis et al. 1997), (Fukuda 2004).



Ensemble convexe d'un ensemble fini de points dans $\mathbb{R}^2$

Intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés dans $\mathbb{R}^2$

Figure 13 : définitions d'un 2-polytope dans $\mathbb{R}^2$ d'après (Ziegler 1995).

Un polytope de dimension $k$ est désigné un *k*-polytope dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$.
Un 0-polytope est un sommet, un 1-polytope est une arête et un 2-polytope est une face.

Considérons un k-polytope $\mathcal{P}$.
Un hyperplan $H$ est un hyperplan support de $\mathcal{P}$ si l'intersection entre $\mathcal{P}$ et $H$ est non vide et si $\mathcal{P}$ est inclus dans $\bar{H}^+$ ou $\bar{H}^-$.

Une face est l'intersection entre $\mathcal{P}$ et l'un de ses hyperplans support.
Les faces d'un *k*-polytope $\mathcal{P}$ sont convexes et sont des sous-ensembles de dimension $p$ avec $0 \leq p \leq k-1$.
Une face de dimension $p$ est désignée une $p$-face.
Une $k-1$ face est désignée une facette.

Trois propriétés fondamentales doivent être prises en compte dans la mise en œuvre de chaînes de cotes 3d par des opérations sur des polytopes :

- les frontières des polytopes sont linéaires, or en tolérancement, certaines limites de déplacements ne sont pas linéaires ; par exemple les limites de déplacements d'un segment de droite dans une zone de tolérance cylindrique (Giordano & Duret 1993).
- un polytope est un ensemble borné, or en tolérancement, certains déplacements ne sont pas bornés ; par exemple les déplacements correspondant aux mobilités d'une liaison.
- un polytope est un ensemble convexe ; au contraire des deux autres propriétés, il sera possible de tirer directement profit de celle-ci dans la simulation du respect d'une exigence fonctionnelle, par l'inclusion d'un polytope calculé (ou résultant) dans un polytope fonctionnel.

### 2.3.2 Caractérisation d'un ensemble de contraintes par un ensemble de demi-espaces

Trois types d'ensembles de contraintes ont été définis : les ensembles de contraintes géométriques, les ensembles de contraintes de contact et les ensembles de contraintes fonctionnelles (Teissandier, Couétard, et al. 1999), (Teissandier, Delos, et al. 1999).
Un ensemble de contraintes géométriques définit les déplacements d'une surface à l'intérieur d'une zone de tolérance : il est inhérent à une spécification géométrique et définit un polytope géométrique.
Un ensemble de contraintes de contact définit les déplacements relatifs entre deux surfaces de deux pièces distinctes potentiellement en contact : il est inhérent à une spécification de contact et définit un polytope de contact.
Un ensemble de contraintes fonctionnelles définit les déplacements relatifs entre deux surfaces quelconques d'un système mécanique : il est inhérent à une condition (ou exigence) fonctionnelle et définit un polytope fonctionnel.

Les polytopes géométriques et les polytopes de contact sont les polytopes opérandes d'une chaîne de cotes 3d. Le polytope fonctionnel est un polytope cible. Le respect d'une condition fonctionnelle est formalisé par l'inclusion d'un polytope calculé dans le polytope fonctionnel. En général le polytope calculé est obtenu par diverses sommations et intersections réalisées sur les polytopes opérandes (Teissandier, Delos, et al. 1999).

Un ensemble de contraintes peut généralement s'écrire sous la forme (Teissandier, Couétard, et al. 1999), (Teissandier, Delos, et al. 1999) :

$$\forall N_i \in E_g : d_i \inf \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{Ni}.\mathbf{n}_i \leq d_i \sup \quad \left(\text{par hypothèse : } d_i \inf \leq d_i \sup\right) \tag{10}$$

avec :

- $E_g$ : élément géométrique idéal (surface, ligne ou point),
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{Ni}$ : vecteur translation au point $N_i$,
- $\mathbf{n}_i$ : vecteur unitaire normal à $E_g$ en $N_i$,
- $d_i \inf$ : écart inférieur de $N_i$ suivant $\mathbf{n}_i$,
- $d_i \sup$ : écart supérieur de $N_i$ suivant $\mathbf{n}_i$.

D'une manière générale, l'élément géométrique idéal $E_g$ est discrétisé en $n$ points $N_i$ : la définition (10) repose sur une approche discrète. Cela permet de modéliser l'ensemble des déplacements définis par la définition (10) par un polytope : c'est la principale différence conceptuelle entre une approche par des polytopes et les approches par les domaines et les T-Maps. Les domaines ont été développés par Giordano à l'Université de Savoie depuis 1991 (Tichadou 1991), (Giordano et al. 1992), alors que Davidson a commencé à développer les T-Maps à l'Université d'Arizona une dizaine d'années plus tard (Mujezinovic et al. 2001), (Davidson et al. 2002). Les polytopes sont des ensembles dont les frontières sont linéaires ce qui en général n'est pas le cas des domaines et des T-Maps.

Un nombre minimal de points $N_i$ est requis en fonction de la nature (surface, ligne ou point) et du type (plan, cylindre, cône, cercle, segment de droite ...) de l'élément géométrique $E_g$. Par exemple, trois points non alignés sont requis pour générer le polytope géométrique d'une surface plane ou le polytope de contact d'une liaison appui plan. Le choix du nombre minimal de points est très similaire au choix du nombre minimal de points de mesure, pour initialiser le processus d'association d'une surface idéale à un ensemble de points, obtenus en métrologie par coordonnées (Bourdet 1987).

Le choix du nombre de points conditionne la précision de la définition (10). Nous reviendrons sur cet aspect dans les perspectives de développement liées aux polytopes.

Pour un point $M$ de l'espace euclidien on a d'après la propriété des champs de petits déplacements et (10) :

$$\forall N_i \in E_g : d_i \inf \leq \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M + \mathbf{N_i M} \wedge \boldsymbol{\rho}\right).\mathbf{n}_i \leq d_i \sup \tag{11}$$

avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_M$ : vecteur translation au point M de $E_g$,
- $\boldsymbol{\rho}$ : vecteur rotation de $E_g$.

Définissons dans une base $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, les projections suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M \begin{bmatrix} \varepsilon_{M-x} \\ \varepsilon_{M-y} \\ \varepsilon_{M-z} \end{bmatrix},\ \mathbf{N_iM} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{N_iM_x}} \\ d_{\mathrm{N_iM_y}} \\ d_{\mathrm{N_iM_z}} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\rho} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{n_i} \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Finalement avec (11) et (12), on obtient les deux inéquations (13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_z}} - n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_y}}\right)\rho_x - \left(n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_x}} - n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_z}}\right)\rho_y - \left(n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_y}} - n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_x}}\right)\rho_z \\ \qquad - n_{ix}.\varepsilon_{M-x} - n_{iy}.\varepsilon_{M-y} - n_{iz}.\varepsilon_{M-z} \le -d_i \inf \\ \left(n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_z}} - n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_y}}\right)\rho_x + \left(n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_x}} - n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_z}}\right)\rho_y + \left(n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_y}} - n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_x}}\right)\rho_z \\ \qquad + n_{ix}.\varepsilon_{M-x} + n_{iy}.\varepsilon_{M-y} + n_{iz}.\varepsilon_{M-z} \le d_i \sup \end{array} \right\} \tag{13}$$

Les deux inéquations (13) correspondant aux deux contraintes définies au point $N_i$ caractérisent deux demi-espaces de $\mathbb{R}^6$.

D'une manière générale, pour $n$ points $N_i$ $(1 \le i \le n)$, $2n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$ sont crées $(1 \le k \le 2n)$.

Soit $h$ le coefficient d'homogénéisation. Ce coefficient est homogène à une longueur permettant de définir des demi-espaces dont toutes les variables sont conformes à un écart de translation.

***Remarque :*** *la détermination du coefficient d'homogénéisation est empirique. La proposition d'une méthode de détermination de ce coefficient fait partie du travail actuellement en cours dans la thèse de L. Homri.*

Un demi-espace $\bar{H}_k^-$ peut généralement se définir de la manière suivante :

$$\bar{H}_k^- : a_{k1}.x_1 + a_{k2}.x_2 + a_{k3}.x_3.a_{k4}.x_4 + a_{k5}.x_5 + a_{k6}.x_6 \le b_k \tag{14}$$

Avec :

$$x_1 = h.\rho_x,\ x_2 = h.\rho_y,\ x_3 = h.\rho_z,\ x_{k4} = \varepsilon_{M-x},\ x_{k5} = \varepsilon_{M-y},\ x_{k6} = \varepsilon_{M-z} \tag{15}$$

si $k$ impair :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k1} = \left(-n_{(k+1)/2-y}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_z}} + n_{(k+1)/2-z}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_y}}\right)/h \\ a_{k2} = \left(-n_{(k+1)/2-z}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_x}} + n_{(k+1)/2-x}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_z}}\right)/h \\ a_{k3} = \left(-n_{(k+1)/2-x}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_y}} + n_{(k+1)/2-y}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_x}}\right)/h \\ a_{k4} = -n_{(k+1)/2-x} \\ a_{k5} = -n_{(k+1)/2-y} \\ a_{k6} = -n_{(k+1)/2-z} \\ b_k = -d_{(k+1)/2}\inf \end{array} \right\} \tag{16}$$

si $k$ pair :

$$\left.\begin{aligned}
a_{k1} &= \left(n_{k/2-y}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_z} - n_{k/2-z}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_y}\right)/h \\
a_{k2} &= \left(n_{k/2-z}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_x} - n_{k/2-x}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_z}\right)/h \\
a_{k3} &= \left(n_{k/2-x}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_y} - n_{k/2-y}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M}_x}\right)/h \\
a_{k4} &= n_{k/2-x} \\
a_{k5} &= n_{k/2-y} \\
a_{k6} &= n_{k/2-z} \\
b_k &= d_{k/2}\sup
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

### 2.3.3 Prise en compte des déplacements non bornés

En général, l'intersection des $2n$ demi-espaces $\overline{H}_k^-$ n'est pas bornée dans $\mathbb{R}^6$ et ne définit donc pas un polytope de $\mathbb{R}^6$. Cela est du aux déplacements laissant globalement invariant une surface qui ne sont pas limités par les contraintes géométriques. De même, les déplacements correspondant aux degrés de mobilité d'une liaison ne sont pas limités par les contraintes de contact. Il convient alors de définir des demi-espaces bouchon $\overline{H}_j^-$ afin de limiter les déplacements non limités soit par des contraintes géométriques, soit pas des contraintes de contact. Deux demi-espaces bouchon sont nécessaires pour limiter un déplacement non limité. Dans $\mathbb{R}^6$, le nombre $m$ de demi-espaces bouchon $\overline{H}_j^-$ est défini par :

$$m = 2.d_{inv} \quad \text{ou} \quad m = 2.d_{mob} \tag{18}$$

avec $d_{inv}$ : degré d'invariance d'une surface, $d_{mob}$ : degré de mobilité d'une liaison.

Les demi-espaces $\overline{H}_j^-$ sont fonction de la classe d'invariance et des éléments de situation de la surface considérée ou alors sont fonction du type de la liaison et des éléments de situation de la liaison.

L'intersection des $m$ demi-espaces $\overline{H}_j^-$ et des $2n$ demi-espaces $\overline{H}_k^-$ d'une même surface définit le polytope géométrique de $\mathbb{R}^6$ de la surface.

L'intersection des $m$ demi-espaces $\overline{H}_j^-$ et des $2n$ demi-espaces $\overline{H}_k^-$ d'une même liaison définit le polytope de contact de $\mathbb{R}^6$ de la liaison.

Le tableau de la figure 14 résume le nombre $m$ de demi-espaces bouchon qu'il est nécessaire de définir en fonction de la classe d'une surface.

| Classe d'une surface | Nombre de demi-espaces bouchon de $\mathbb{R}^6$ |
|---|---|
| Plane | 6 |
| Cylindrique | 4 |
| Sphérique | 6 |
| De révolution | 2 |
| Prismatique | 2 |
| Quelconque | 0 |

Figure 14 : Nombres de demi-espaces bouchon des classes de surfaces.

La tableau de la figure 15 résume le nombre $m$ de demi-espaces bouchon qu'il est nécessaire de définir en fonction des principaux types de liaison.

| Type de liaison | Nombre de demi-espaces bouchon de $\mathbb{R}^6$ |
|---|---|
| Appui plan | 6 |
| Pivot glissant | 4 |
| Rotule | 6 |
| Pivot | 2 |
| Glissière | 2 |
| Linéaire annulaire | 8 |
| Linéaire rectiligne | 8 |
| Ponctuelle | 10 |

Figure 15 : Nombres de demi-espaces bouchon des liaisons.

Par exemple déterminons les 6 demi-espaces $\bar{H}_j^-$ d'une surface plane.

Définissons une base orthonormée directe $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ tel que $\mathbf{w}$ soit un vecteur normal à la surface plane. Au point M où sont définis les $2n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$ on a :

$$\begin{aligned} &-b \le h.\boldsymbol{\rho}.\mathbf{w} \le b \\ &-b \le \boldsymbol{\varepsilon}_M.\mathbf{u} \le b \\ &-b \le \boldsymbol{\varepsilon}_M.\mathbf{v} \le b \end{aligned} \tag{19}$$

La valeur de la variable $b$ est choisie telle que $b$ soit très supérieure à la dimension de la zone de tolérance afin de pouvoir différencier les demi-espaces bouchons des $2n$ demi-espaces $H_k$ ; $h$ est le coefficient d'homogénéisation.

***Remarque :*** *la détermination de la variable $b$ est empirique. La proposition d'une méthode de détermination de cette variable fait partie du travail actuellement en cours dans la thèse de L. Homri.*

Finalement, définissons dans une base $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, les projections suivantes :

$$\mathbf{u}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \mathbf{v}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{w}\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \tag{20}$$

Avec (19) et (20) on obtient d'une manière analogue aux demi-espaces $\bar{H}_k^-$ les 6 demi-espaces $\bar{H}_j^-$ suivants, $h$ étant le coefficient d'homogénéisation :

$$\left.\begin{aligned} -w_x.x_1 - w_y.x_2 - w_z.x_3 &\le b \\ w_x.x_1 + w_y.x_2 + w_z.x_3 &\le b \\ -u_x.x_4 - u_y.x_5 - u_z.x_6 &\le b \\ u_x.x_4 + u_y.x_5 + u_z.x_6 &\le b \\ -v_x.x_4 - v_y.x_5 - v_z.x_6 &\le b \\ v_x.x_4 + v_y.x_5 + v_z.x_6 &\le b \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

### 2.3.4 Définition générale d'un polytope opérande

D'une manière générale, un polytope opérande de $\mathbb{R}^6$ résulte de l'intersection des $m$ demi-espaces $\bar{H}_j^-$ et des $2n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$, par la relation suivante :

$$\mathcal{P} = \left( \bigcap_{j=1}^{j=m} \left\{ \bar{H}_j^- \right\} \right) \cap \left( \bigcap_{k=1}^{k=2n} \left\{ \bar{H}_k^- \right\} \right) \tag{22}$$

La relation (22) est la définition générale (aussi appelée la h-description) d'un polytope opérande dans $\mathbb{R}^6$.

La détermination de la v-description d'un polytope consiste à :

- déterminer les sommets obtenus par l'intersection des demi-espaces définis par la relation (22),
- déterminer les frontières auxquelles chaque sommet est attaché à une tolérance numérique près.

La détermination de la v-description d'un polytope repose sur un algorithme de troncature (Delos 1997). Cet algorithme consiste à déterminer les intersections entre un hypercube initial de $\mathbb{R}^6$ et les $m+2n$ demi-espaces. Au total $m+2n$ intersections sont à réaliser où l'hypercube initial doit circonscrire le polytope opérande.

***Remarque :*** *la détermination des dimensions de l'hypercube initial est empirique. La proposition d'une méthode de détermination de ces dimensions fait partie du travail actuellement en cours dans la thèse de L. Homri.*

#### 2.3.4.1 Définition d'un polytope géométrique

La définition (11) est spécialisée pour les contraintes géométriques de la façon suivante :

- $E_g$ : est une surface nominale,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{Ni}$ : caractérise au point $N_i$ la translation d'une surface de substitution correspondant à une réalisation physique particulière de la surface nominale $E_g$,
- $\mathbf{n}_i$ : vecteur unitaire normal à $E_g$ en $N_i$ orienté positivement du coté extérieur matière,
- $d_i \inf = (k-1).t_i$ et $d_i \sup = k.t_i$ avec $0 \le k \le 1$,
- $t_i$ est la dimension locale de la zone de tolérance au point $N_i$.

La zone de tolérance est obtenue par un offset intérieur et un offset extérieur de la surface nominale (Rossignac & Requicha 1986). Le paramètre $k$ positionne la zone de tolérance par rapport au modèle nominal ; si $k = 0,5$ la surface nominale est la surface médiane de la zone de tolérance : voir figure 16.

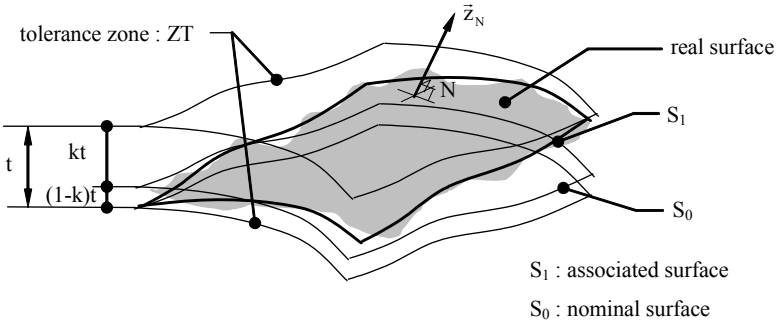



Figure 16 : Contraintes géométriques d'une surface quelconque (Teissandier, Couétard, et al. 1999).

Si $k > 0,5$, la zone de tolérance est décalée du coté extérieur matière : cela peut se traduire avec un écart positif spécifié derrière le modificateur UZ introduit dans la dernière mise à jour norme (ISO1101 2004).
Si $k < 0,5$ la zone de tolérance est décalée du coté intérieur matière : cela peut se traduire avec un écart négatif spécifié derrière le modificateur UZ introduit dans la dernière mise à jour norme (ISO1101 2004).

La dimension locale $t_i$ de la zone de tolérance en fonction du point $N_i$ a vocation à pouvoir prendre en compte les récentes évolution de la norme (ISO1101 2004) introduisant le concept de dimension de zone de tolérance variable. Cette variante n'a jamais été encore publiée et utilisée dans les travaux développés sur les polytopes.

Dans tous le reste de ce document, nous nous en tiendrons au cas où : $\forall i \quad t_i = t$ et $k = 0.5$.

2.3.4.2 Définition d'un polytope de contact

La définition (11) est spécialisée pour les contraintes de contact de la façon suivante :

- $E_g$ : est un élément de contact : il peut être surfacique, linéique ou réduit à un point (voir figure 6 et figure 7),
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{Ni}$ : caractérise au point $N_i$ la translation d'une surface de substitution par rapport à une autre surface de substitution de deux pièces potentiellement en contact,
- $\mathbf{n}_i$ : vecteur unitaire normal à $E_g$ en $N_i$ ; $\mathbf{n}_i$ est orienté généralement de façon aléatoire pour les liaisons de type appui plan, linéaire rectiligne ou ponctuelle ; $\mathbf{n}_i$ est orienté positivement de l'arbre vers l'alésage pour les liaisons pivot glissant, linéaire annulaire et rotule,
- $d_i \inf = -\dfrac{J}{2}$ et $d_i \sup = \dfrac{J}{2}$ en tous points $N_i$ pour les liaisons linéaire annulaire, rotule et pivot glissant. Dans ce cas $J$ est conforme à la définition indiquée dans (ISO286-1 1988). En général un polytope de contact sera défini avec une valeur minimale ou maximale de $J$,
- $d_i \inf = J_{\min}$ et $d_i \sup = J_{\max}$ en tous points $N_i$ pour les liaisons ponctuelle, linéaire rectiligne et appui plan. Dans ce cas $J_{\min}$ ou $J_{\max}$ définit les contraintes de non interpénétration entre les surfaces en contact : cela dépend du sens choisi par la normale $\mathbf{n}_i$ . $d_i \sup = J_{\max}$ (respectivement $d_i \inf = J_{\min}$ ) est un attribut de la

spécification de contact indiqué dans la définition de la liaison. Si cet attribut n'est pas spécifié, le polytope de contact n'est défini que par $n$ contraintes de contact ; l'ensemble des contraintes de contact est conformé à un polytope par l'adjonction de $n+m$ demi-espaces bouchon aux $n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$ de contact.

La définition (11) a été mise en œuvre avec des écarts inférieurs $d_i \inf$ et des écarts supérieurs $d_i \sup$ ayant potentiellement des valeurs différentes en fonction des points $N_i$ dans les travaux intégrant les écarts de forme et de dimensions d'origine thermomécanique (Pierre 2011).

### 2.3.5 Propriétés d'un polytope opérande

#### 2.3.5.1 Dimension intrinsèque d'un polytope opérande

La dimension intrinsèque $d_{\text{int}}$ est la dimension du polytope définie par :

$$\mathcal{P} = \bigcap_{k=1}^{k=2n} \left\{ \bar{H}_k^- \right\} \tag{23}$$

Le polytope défini par la relation (23) ne dépend d'aucun demi-espace bouchon. Les $2n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$ sont exprimés dans une base locale construite sur les éléments de situation de la surface.
Les variables d'un polytope géométrique de dimension intrinsèque ne comprennent que les écarts correspondant aux composantes primaires définies au paragraphe 2.2.

La dimension intrinsèque $d_{\text{int}}$ peut être obtenue directement par l'une des relations suivantes :
pour un polytope géométrique : $d_{\text{int}} = 6 - d_{inv}$ ($d_{inv}$ : degré d'invariance de la surface) (24)
pour un polytope de contact : $d_{\text{int}} = 6 - d_{mob}$ ($d_{mob}$ : degré de mobilité de la liaison) (25)

Exceptées pour les surfaces de classe complexe, la dimension intrinsèque $d_{\text{int}}$ d'un polytope opérande est toujours inférieure à 6.
On va désormais désigner la relation (23) comme étant la définition intrinsèque d'un polytope géométrique. C'est la définition la plus courante donnée pour un polytope car elle suffisante pour déterminer les variations des écarts de situation d'une surface à l'intérieur d'une zone de tolérance, ou bien les écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact.

#### 2.3.5.2 Propriétés de la structure topologique d'un polytope opérande

La structure topologique d'un polytope opérande est constituée :

- de la liste des demi-espaces du polytope constituée des $m$ demi-espaces $\bar{H}_j^-$ et des $2n$ demi-espaces $\bar{H}_k^-$,
- des sommets obtenus par l'intersection des demi-espaces définis par la relation (22),
- des frontières des demi-espaces sur lesquelles est attaché chaque sommet à une tolérance numérique près.

Désignons par :
$n_v$ le nombre de sommets d'un polytope géométrique dans $\mathbb{R}^6$ (obtenus par (22)),
$n_{v\text{int}}$ le nombre de sommets de ce polytope dans $\mathbb{R}^{d\,\text{int}}$ (obtenus par (23)).

La définition des demi-espaces bouchon implique que :

$$n_v = 2^{6-d\,\mathrm{int}}.n_{v\mathrm{int}} \tag{26}$$

Considérons $v_s$ un sommet d'un polytope opérande dans $\mathbb{R}^6$, on a : $1 \le s \le n_v$.

Les coordonnées de $v_s$ sont désignées : $v_s\left(x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}, x_{s4}, x_{s5}, x_{s6}\right)$.

Soit $e_{si}$ l'écart en $N_i$ de la surface S suivant $\mathbf{n}_i$ dans le cas où les composantes de petits déplacements de S sont conformes aux coordonnées du sommet $v_s$.

On a d'après (13) et le coefficient d'homogénéisation $h$ :

$$\begin{aligned} e_{si} = {} & \frac{1}{h}\left(n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_z}} - n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_y}}\right)x_{s1} + \frac{1}{h}\left(n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_x}} - n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_z}}\right)x_{s2} + \frac{1}{h}\left(n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_y}} - n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_x}}\right)x_{s3} \\ & + n_{ix}.x_{s4} + n_{iy}.x_{s5} + n_{iz}.x_{s6} \end{aligned} \tag{27}$$

A chaque sommet $v_s$ correspond $n$ écarts $e_{si}$. Pour un polytope opérande, il est possible de déterminer $n_v \times n$ écarts $e_{si}$.

Soit $\mathbf{E}$ la matrice contenant les $n_v \times n$ écarts $e_{si}$ telle qu'une ligne de $\mathbf{E}$ corresponde aux $n$ écarts $e_{si}$ du sommet $v_s$.

Pour tout polytope opérande de $\mathbb{R}^6$, il est possible de déterminer une matrice $\mathbf{E}$.

### 2.3.6 Structure topologique d'un polytope opérande

#### 2.3.6.1 Cohérence du nombre de sommets

La vérification du nombre de sommets $n_v$ du polytope dans $\mathbb{R}^6$ est immédiate en appliquant la relation (26). Cela suppose cependant de connaître le nombre de sommets dans $\mathbb{R}^{d\,\mathrm{int}}$ par une heuristique.

Une seconde vérification consiste à analyser la matrice $\mathbf{E}$ qui doit contenir $n_{v\mathrm{int}}$ ensembles de $2^{6-d\,\mathrm{int}}$ lignes identiques.

Ceci est dû aux demi-espaces bouchons dont la définition a été donnée au §2.3.3. Dans $\mathbb{R}^{d\,\mathrm{int}}$, aux $n_{v\mathrm{int}}$ sommets d'un polytope correspondent respectivement $n_{v\mathrm{int}}$ ensembles de $n$ écarts $e_{si}$ distincts. Dans $\mathbb{R}^{d\,\mathrm{int}+1}$, le nombre de sommets de ce même polytope est de $2.n_{v\mathrm{int}}$. A chaque sommet d'un polytope dans $\mathbb{R}^{d\,\mathrm{int}}$ correspond deux sommets de ce même polytope dans $\mathbb{R}^{d\,\mathrm{int}+1}$ générés par l'ajout de deux demi-espaces bouchons. A ces deux sommets correspondent respectivement les mêmes ensembles de $n$ écarts $e_{si}$. Ceci est récursif jusqu'à $\mathbb{R}^6$ et même dans les dimensions supérieures à 6.

#### 2.3.6.2 Consistance des coordonnées des sommets

Une première vérification consiste à vérifier simplement que les points $N_i$ restent à l'intérieur d'une zone de tolérance ou que les deux surfaces potentiellement en contact respectent le jeu spécifié; pour cela :

$$d_i\,\inf \le e_{si} \le d_i\,\sup \quad \text{avec } 1 \le i \le n \text{ et } 1 \le s \le n_v \tag{28}$$

Une seconde vérification plus lourde à mettre en œuvre consiste à vérifier que chaque ensemble de $n$ écarts $e_{si}$ provenant d'un sommet $v_s$ correspond à une position extrémale de

la surface à l'intérieur de la zone de tolérance ou à une position extrémale entre deux surfaces potentiellement en contact.
Les critères de vérification sont à spécialiser en fonction de la classe de la surface et éventuellement de son type pour les polytopes géométriques ; ils sont à spécialiser en fonction du type de la liaison pour les polytopes de contact.

### 2.3.6.3 Application à un polytope géométrique d'une surface plane

Considérons le cas d'une surface plane de normale $\mathbf{z}$ dont la plus petite enveloppe convexe du contour est définie par $n$ points $N_i$. Pour chaque point $N_i$, on a donc deux contraintes géométriques définies par les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} -\left(n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_z}} - n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_y}}\right)\rho_x - \left(n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_x}} - n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_z}}\right)\rho_y - \varepsilon_{A-z} \leq -\dfrac{t}{2} \\ +\left(n_{iy}.d_{\mathrm{N_iM_z}} - n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_y}}\right)\rho_x + \left(n_{iz}.d_{\mathrm{N_iM_x}} - n_{ix}.d_{\mathrm{N_iM_z}}\right)\rho_y + \varepsilon_{A-z} \leq \dfrac{t}{2} \end{array}\right\} \tag{29}$$

Chaque demi-espace $\overline{H}_k^-$ selon la relation (14) avec :

$$x_{k1} = h.\rho_x,\ x_{k2} = h.\rho_y,\ x_{k3} = h.\rho_z,\ x_{k4} = \varepsilon_{M-x},\ x_{k5} = \varepsilon_{M-y},\ x_{k6} = \varepsilon_{M-z} \tag{30}$$

si $k$ impair :

$$\left.\begin{array}{l} a_{k1} = \left(-n_{(k+1)/2-y}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_z}} + n_{(k+1)/2-z}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_y}}\right)/h \\ a_{k2} = \left(-n_{(k+1)/2-z}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_x}} + n_{(k+1)/2-x}.d_{\mathrm{N}_{(k+1)/2}\mathrm{M_z}}\right)/h \\ a_{k3} = 0 \\ a_{k4} = 0 \\ a_{k5} = 0 \\ a_{k6} = -n_{(k+1)/2-z} \\ b_k = -\dfrac{t}{2} \end{array}\right\} \tag{31}$$

si $k$ pair :

$$\left.\begin{array}{l} a_{k1} = \left(n_{k/2-y}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M_z}} - n_{k/2-z}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M_y}}\right)/h \\ a_{k2} = \left(n_{k/2-z}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M_x}} - n_{k/2-x}.d_{\mathrm{N}_{k/2}\mathrm{M_z}}\right)/h \\ a_{k3} = 0 \\ a_{k4} = 0 \\ a_{k5} = 0 \\ a_{k6} = n_{k/2-z} \\ b_k = \dfrac{t}{2} \end{array}\right\} \tag{32}$$

Les 6 demi-espaces bouchons $\bar{H}_j^-$ $(1 \le j \le 6)$ s'écrivent :

$$\left.\begin{array}{r} -x_3 \le b \\ x_3 \le b \\ -x_5 \le b \\ x_5 \le b \\ -x_6 \le b \\ x_6 \le b \end{array}\right\} \tag{33}$$

Dans ce cas $d_{\text{int}} = 3$ ; le polytope géométrique intrinsèque est donc un 3-polytope. D'après (29), (30), (31) et (32), on montre facilement que quelque soit le point d'expression $M$ les frontières des demi-espaces $\bar{H}_k^-$ pour $k$ pair et les frontières des demi-espaces $\bar{H}_k^-$ pour $k$ impair contiennent respectivement deux sommets $A$ et $B$ du polytope. Ce 3-polytope peut être défini comme étant l'intersection de deux cônes polyédriques de dimension 3 $\text{Cone}(A)$ et $\text{Cone}(B)$ disposés symétriquement par rapport à l'origine : voir figure 17.

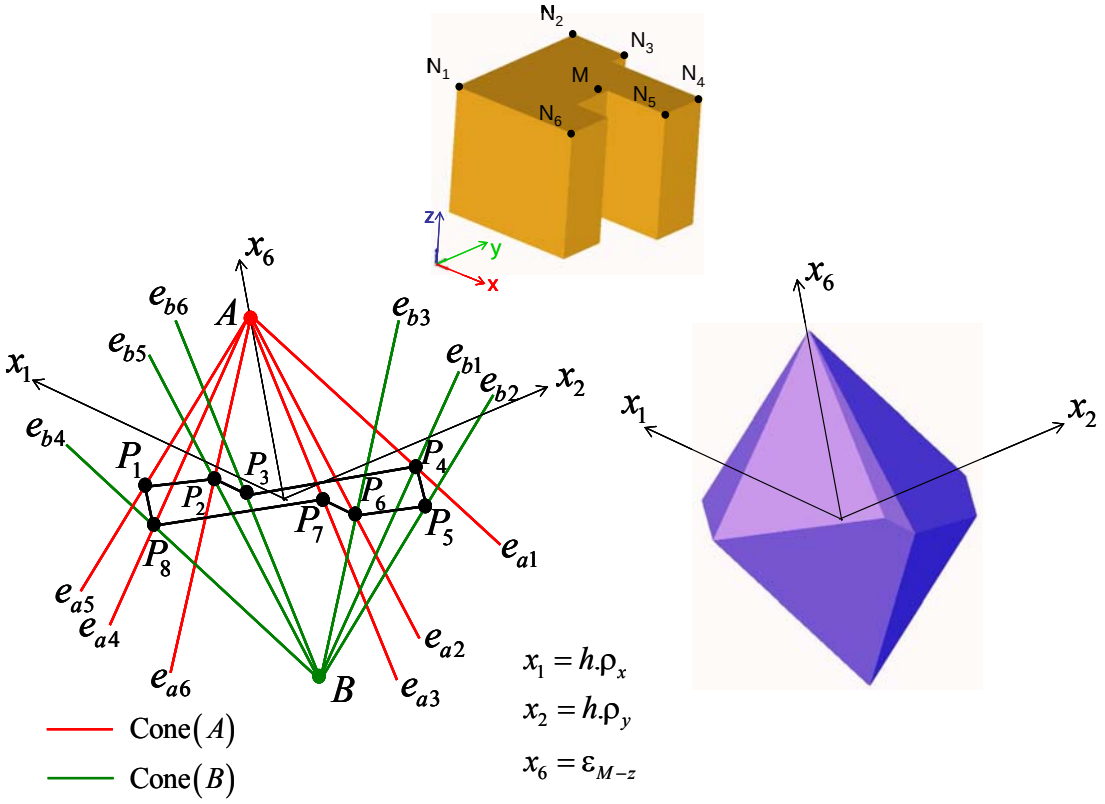



Figure 17 : Caractérisation d'un polytope associé à une surface plane.

Pour le sommet $A$, les $n$ écarts $e_{si}$ selon (27) sont tels que : $\forall i, \quad e_{si} = \dfrac{t}{2}$.

Pour le sommet $B$, les $n$ écarts $e_{si}$ selon (27) sont tels que : $\forall i, \quad e_{si} = -\dfrac{t}{2}$.

Les sommets des deux cônes polyédriques $A$ et $B$ correspondent respectivement aux deux configurations où la surface plane est confondue avec l'une des deux frontières de la zone de tolérance. Ces deux sommets correspondent donc aux deux translations extrémales de la surface tolérancée dans la zone de tolérance.
En général, $\text{Cone}(A)$ et $\text{Cone}(B)$ ont respectivement $n$ arêtes $e_{ai}$ et $e_{bi}$ $(1 \le i \le n)$.
On a donc :

- la frontière de $\text{Cone}(A)$ comprend : le sommet $A$, les frontières des demi-espaces $\bar{H}_k^-$ pour $k$ pair et $n$ arêtes $e_{ai}$ $(1 \le i \le n)$.
- la frontière de $\text{Cone}(B)$ comprend : le sommet $B$, les frontières des demi-espaces $\bar{H}_k^-$ pour $k$ impair et $n$ arêtes $e_{bi}$ $(1 \le i \le n)$.

Les sommets du polygone obtenu en intersectant les frontières de $\text{Cone}(A)$ et $\text{Cone}(B)$ correspondent aux rotations extrémales de la surface plane dans la zone de tolérance.
Dans l'exemple de la figure 17, on a pour $1 \le i \le 6$ :

- 6 points $N_i$ sur la plus petite enveloppe convexe du contour du plan,
- 6 arêtes $e_{ai}$ sur la frontière de $\text{Cone}(A)$,
- 6 arêtes $e_{bi}$ sur la frontière de $\text{Cone}(B)$,
- 8 sommets $P_j$ $(1 \le j \le 8)$ situés sur l'intersection des frontières de $\text{Cone}(A)$ et $\text{Cone}(B)$.

Considérons les sommets $P_2$, $P_4$, $P_6$ et $P_8$. Quatre facettes du polytope géométrique sont concourantes en ces quatre sommets. (Ils contiennent une arête de $\text{Cone}(A)$ et une arête de $\text{Cone}(B)$). Cela signifie que ces 4 sommets correspondent respectivement à quatre rotations extrémales où :

- deux écarts $e_{si}$ sont tels que : $e_{si} = \dfrac{t}{2}$
- deux écarts $e_{si}$ sont tels que : $e_{si} = -\dfrac{t}{2}$.

Considérons les sommets $P_1$, $P_3$, $P_5$ et $P_7$. Trois facettes du polytope géométrique sont concourantes en ces quatre sommets. Cela signifie que ces quatre sommets correspondent respectivement à quatre rotations extrémales où trois écarts $e_{si}$ sont tels que : $|e_{si}| = \dfrac{t}{2}$, les trois écarts $e_{si}$ n'étant pas de même signe.
Si le sommet est sur une arête $\text{Cone}(A)$ : deux écarts $e_{si}$ sont positifs, un écart $e_{si}$ est négatif.
Si le sommet est sur une arête de $\text{Cone}(B)$ : un écart $e_{si}$ est positif, deux écarts $e_{si}$ sont négatifs.
Le tableau de la figure 18 présente la matrice **E** de la surface tolérancée de la figure 17, correspondant aux différents écarts $e_{si}$ en fonction des dix sommets du polytope et des six points $N_i$ pour une zone de tolérance (deux plans parallèles) de dimension 0,1 centrée sur la surface nominale. Pour illustrer les propriétés des écarts $e_{si}$ associés aux dix sommets du polytope, les écarts tels que : $|e_{si}| = \dfrac{t}{2} = 0,05$ ont été grisés.

| | N1 | N2 | N3 | N4 | N5 | N6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| B | -0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,05 |
| P1 | -0,021 | -0,05 | -0,017 | 0,041 | 0,05 | 0,05 |
| P2 | 0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,038 | -0,007 | 0,05 |
| P3 | 0,05 | -0,043 | -0,05 | -0,05 | -0,021 | 0,035 |
| P4 | 0,05 | 0,05 | 0,013 | -0,05 | -0,05 | -0,031 |
| P5 | 0,021 | 0,05 | 0,017 | -0,041 | -0,05 | -0,05 |
| P6 | -0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,038 | 0,007 | -0,05 |
| P7 | -0,05 | 0,043 | 0,05 | 0,05 | 0,021 | -0,035 |
| P8 | -0,05 | -0,05 | -0,013 | 0,05 | 0,05 | 0,031 |

Figure 18 : Matrice $\mathbf{E}$ de la surface plane tolérancée de la figure 17.

Le polygone intersection des frontières de $\text{Cone}(A)$ et $\text{Cone}(B)$ possède au moins $n$ sommets ce qui signifie que le 3-polytope intrinsèque à une surface plane possède $n+2$ sommets au minimum.
Dans ce cas, quatre facettes du polytope sont concourantes en chacun des $n$ sommets du polygone. Cela signifie que pour chaque rotation extrémale, deux points $N_i$ sont sur une limite de la zone de tolérance et deux autres points $N_i$ sont sur l'autre limite de la zone de tolérance.

Cela est le cas si les $n$ points $N_i$ ont un centre de symétrie ; par exemple pour un plan de contour rectangulaire ou pour un plan de contour circulaire, où les $n$ points de discrétisation du contour sont équirépartis, $n$ étant un nombre pair : voir figure 19 et figure 20.

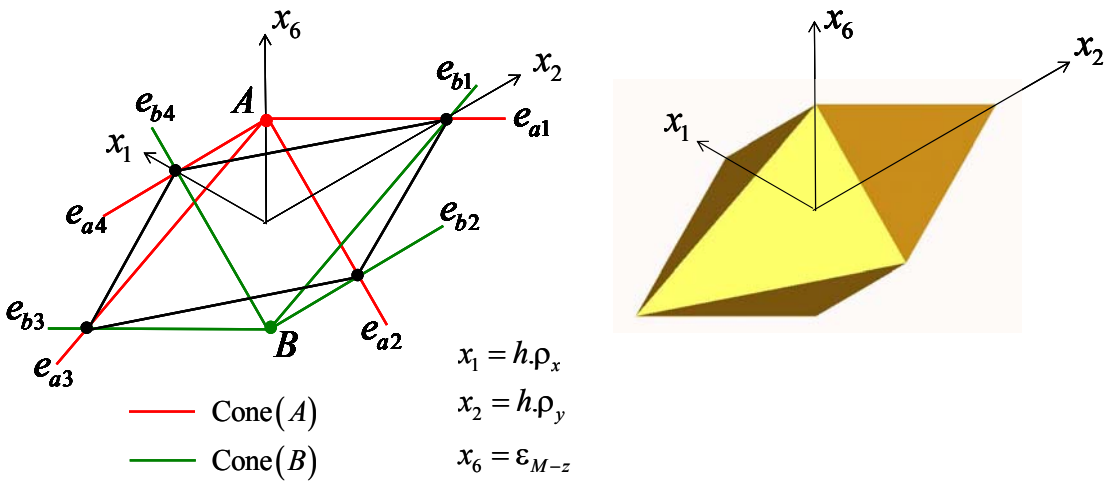



Figure 19 : Polytope associé à une surface plane de contour rectangulaire (point d'expression : intersection des diagonales du contour rectangulaire).

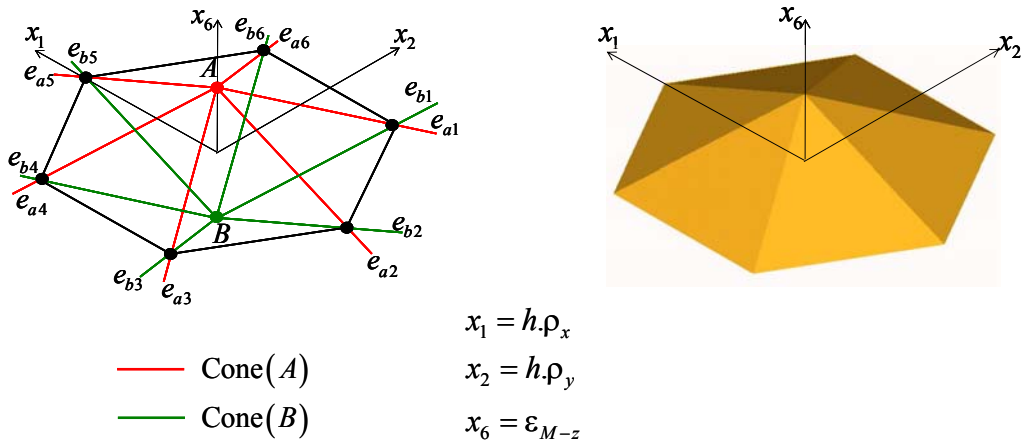



Figure 20 : Polytope associé à une surface plane de contour circulaire discrétisée en 6 points équirépartis (point d'expression : centre du contour circulaire).

Par ailleurs, ce polygone possède $2n$ sommets au maximum ce qui signifie que le 3-polytope possède $2n+2$ sommets au maximum. Dans ce cas, trois facettes du polytope sont concourantes en chacun des $n$ sommets. Cela signifie que pour chaque rotation extrémale, deux points $N_i$ sont sur une limite de la zone de tolérance et un point $N_i$ est sur l'autre limite de la zone de tolérance.
C'est le cas d'un plan de contour circulaire, où les $n$ points de discrétisation du contour sont équirépartis, $n$ étant un nombre impair : voir figure 21.

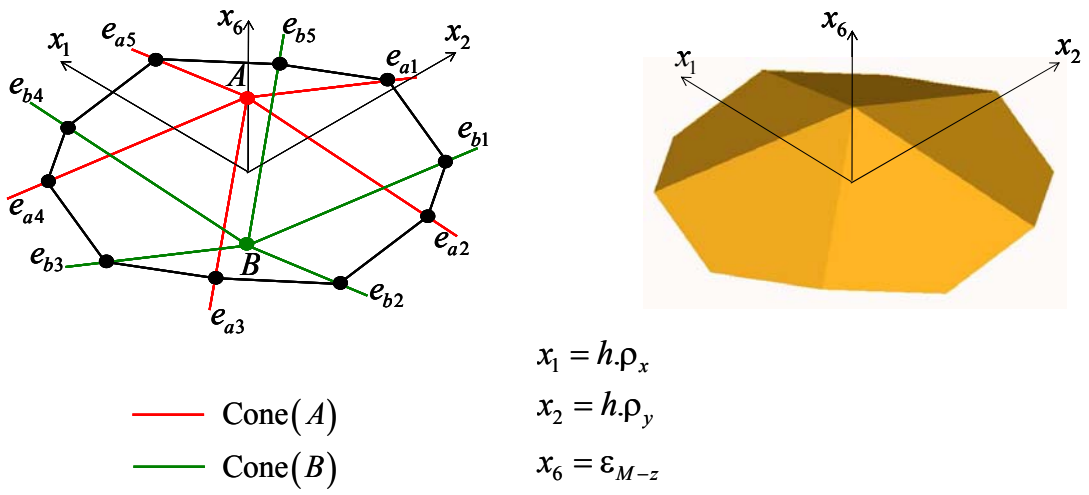



Figure 21 : Polytope associé à une surface plane de contour circulaire discrétisée en 5 points équirépartis (point d'expression : centre du contour circulaire).

Ce dernier exemple montre en outre que le polytope géométrique intrinsèque d'une surface plane de contour circulaire, dont le contour est discrétisé en 5 points équirépartis, possède 12 sommets ; alors que pour 6 points de discrétisation ce polytope possède 8 sommets.

Ce paragraphe augure de ce que pourrait être une famille paramétrique de polytopes mise en œuvre en tolérancement. Le principe d'une famille paramétrique consiste à tirer profit des propriétés topologiques des polytopes associés à une classe de surface particulière en spécialisant la h-définition d'un polytope opérande. Cela permet de corréler les propriétés

topologiques d'un polytope avec les propriétés intrinsèque à une classe de surfaces, les attributs géométriques spécifiant les limites physiques de la surface et le nombre de points de discrétisation. Ici, la famille des polytopes associée à la classe des surfaces planes est parfaitement transposable aux polytopes de contact d'une liaison appui plan.

## 2.4 Mise en œuvre d'une chaîne de cotes 3d par des opérations sur des polytopes

### 2.4.1 Opérations mises en œuvre

Fleming a établi la corrélation entre le cumul des limites de défauts sur des pièces en contact et la somme de Minkowski d'ensembles finis de contraintes géométriques (Fleming 1987), (Fleming 1988). Une synthèse de cette problématique est détaillée dans (Srinivasan 1993). Des algorithmes de sommes de Minkowski appliqués à la problématique de l'analyse de tolérance ont été développés (Wu et al. 2003), (Teissandier & Delos 2011a). Giordano a montré que la modélisation de la position relative entre deux pièces résultant de plusieurs contacts potentiels peut se formaliser par une opération d'intersection d'ensembles de contraintes géométriques (Giordano & Duret 1993). Plus généralement, cette approche du tolérancement consiste à caractériser la position relative entre deux surfaces appartenant respectivement à deux pièces quelconques d'un système par des intersections et des sommes de Minkowski d'ensembles de contraintes géométriques résultant de spécifications ISO exprimées sur les pièces et de spécifications formulées entre deux pièces potentiellement en contact (Teissandier, Delos, et al. 1999).

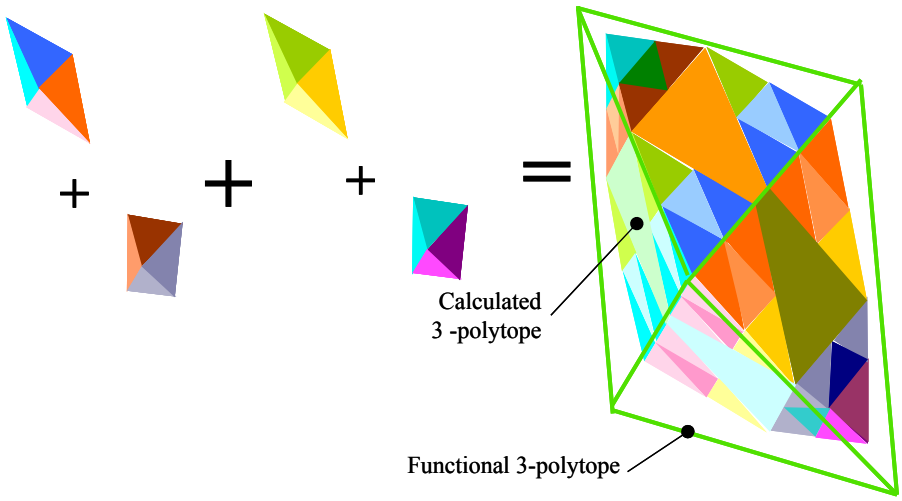



Figure 22 : Vérification de l'inclusion d'un 3-polytope (Teissandier, Delos, et al. 1999).

#### 2.4.1.1 Intersection de polytopes

Considérons deux $n$-polytopes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ définis selon (9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}.\mathbf{x} \le \mathbf{b}\right\} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mp\times n} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{mp} \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}(\mathbf{C},\mathbf{d}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{C}.\mathbf{x} \le \mathbf{d}\right\} \text{ avec } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{mq\times n} \text{ et } \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{mq} \end{aligned} \tag{34}$$

Définissons le polytope $\mathcal{R}$ comme l'intersection du polytope $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{R}(\mathbf{E},\mathbf{f}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{E}.\mathbf{x} \leq \mathbf{f}\right\} ; \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(mp+mq)\times n} \text{ et } \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{mp+mq}$$

$$\text{avec : } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \dots \\ \mathbf{a_{mp}} \\ \mathbf{c_1} \\ \dots \\ \mathbf{c_{mq}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{mp} \\ d_1 \\ \dots \\ d_{mq} \end{bmatrix} \tag{35}$$

La figure 23 illustre l'intersection de deux polytopes de dimension 3 $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

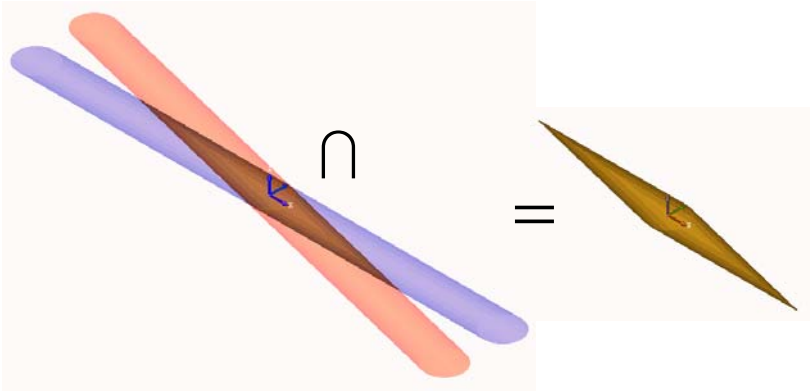



Figure 23 : Intersection de 3-polytopes.

2.4.1.2 Somme de Minkowski de polytopes

La somme de Minkowski de deux polytopes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{R} = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \exists \mathbf{q} \in \mathcal{Q} : \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\right\} \tag{36}$$

En dimension 1, cela consiste à additionner des variables bornées par des intervalles. Cette méthode est utilisée en chaînes de cotes unidirectionnelles. En dimension 2 et 3, la somme de Minkowski consiste à effectuer un balayage d'un point de référence d'un opérande sur la frontière de l'autre opérande (Barki et al. 2009).

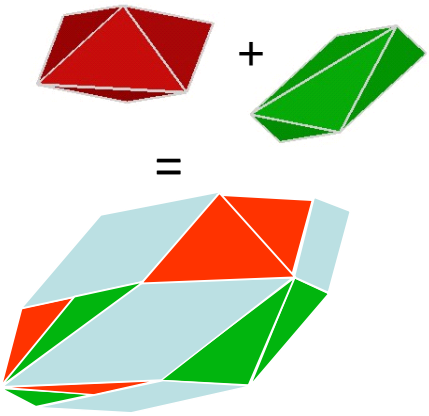



Figure 24 : Représentation de $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{R}$ (Teissandier & Delos 2011a).

### 2.4.2 Caractérisation d'une spécification géométrique ISO ou d'une condition fonctionnelle

#### 2.4.2.1 Spécification de position

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N \in S_{i,j} \qquad -\frac{t}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N}\text{-}i,j/i,k}.\mathbf{n}_{\mathrm{N}} \leq +\frac{t}{2} \tag{37}$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N}\text{-}i,j/i,k}$ : vecteur écarts de translation entre $S_{i,j}$ (élément tolérancé) et $S_{i,k}$ (référence spécifiée) au point $\mathrm{N}$,
- $\mathbf{n}_{\mathrm{N}}$ : normale de la surface $S_{i,j}$ au point $\mathrm{N}$,
- $t$ : dimension de la zone de tolérance $ZT$,

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N}\text{-}i,j/i,k} = \mathbf{0}$ correspond au cas où $S_{i,j}$ est confondue avec la surface de médiane de la zone de tolérance $ZT$.

***Remarque*** *: pour une spécification ISO de position, si la zone de tolérance est définie par deux plans parallèles,* $\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}}$ *est la normale au plan médian. Si la zone de tolérance est cylindrique,* $\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}}$ *est orthogonal à l'axe de la zone de tolérance : dans ce cas* $\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}}$ *est un vecteur "tournant". La zone de tolérance peut également être sphérique, dans ce cas* $\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}}$ *décrit l'espace euclidien. Si la zone de tolérance est générée par des offsets conformément à (ISO1101 2004), la définition est analogue à celle d'un polytope géométrique.*

***Remarque*** *: une condition fonctionnelle de position peut être unidirectionnelle, bidirectionnelle ou tridirectionnelle (Pierre 2011). Elle est définie de manière analogue à une spécification ISO de position.*

#### 2.4.2.2 Spécification d'orientation

Toute spécification d'orientation entre une surface $S_{i,j}$ et une surface de référence $S_{i,k}$ peut être définie d'après la relation (38).

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \begin{cases} \forall N_1, \forall N_2 \in S_{i,j} \text{ avec } N_1 \neq N_2 \\ -t \leq \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N1}\text{-}i,j/i,k} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N2}\text{-}i,j/i,k}\right).\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}} \leq +t \end{cases} \tag{38}$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N1}\text{-}i,j/i,k}$ : vecteur écarts de translation entre $S_{i,j}$ (élément tolérancé) et $S_{i,k}$ (référence spécifiée) au point $N_1$,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N2}\text{-}i,j/i,k}$ : vecteur écarts de translation entre $S_{i,j}$ et $S_{i,k}$ au point $N_2$,
- $\mathbf{n}_{\mathrm{ZT}}$ : normale à la surface médiane de la zone de tolérance,
- $t$ : dimension de la zone de tolérance $ZT$.

***Remarque :*** *pour une spécification ISO d'orientation, si la zone de tolérance est définie par deux plans parallèles,* $\mathbf{n}_{ZT}$ *est la normale à au plan médian. Si la zone de tolérance est cylindrique,* $\mathbf{n}_{ZT}$ *est orthogonal à l'axe de la zone de tolérance : dans ce cas* $\mathbf{n}_{ZT}$ *est un vecteur "tournant".*

***Remarque :*** *une condition fonctionnelle d'orientation peut être unidirectionnelle ou bidirectionnelle (Pierre 2011). Elle est définie de manière analogue à une spécification ISO d'orientation.*

#### 2.4.2.3 Analyse des tolérances d'une pièce

Considérons les deux spécifications de la figure 25.
Toute pièce conforme à ces deux spécifications est telle que le cumul des défauts géométriques de la surface tolérancée et de la surface de référence doit satisfaire la spécification de parallélisme et la spécification de localisation. En terme de polytopes, cela se traduit par l'inclusion de la somme de Minkowski des polytopes géométriques $\mathfrak{D}^{g}_{i,j/i,0}$ et $\mathfrak{D}^{g}_{i,0/i,k}$ respectivement de la surface tolérancée i,j et de la surface de référence i,k dans l'intersection des polytopes (fonctionnels) respectivement des spécifications d'orientation $\mathfrak{D}^{g1}_{i,j/i,k}$ et de position $\mathfrak{D}^{g2}_{i,j/i,k}$ :

$$\left(\mathfrak{D}^{g}_{i,j/i,0} + \mathfrak{D}^{g}_{i,0/i,k}\right) \subseteq \left(\mathfrak{D}^{g1}_{i,j/i,k} \cap \mathfrak{D}^{g2}_{i,j/i,k}\right) \qquad (39)$$

La relation (39) illustrée par la figure 26 traduit formellement le langage du mécanicien stipulant "qu'une cote varie par les deux bouts".

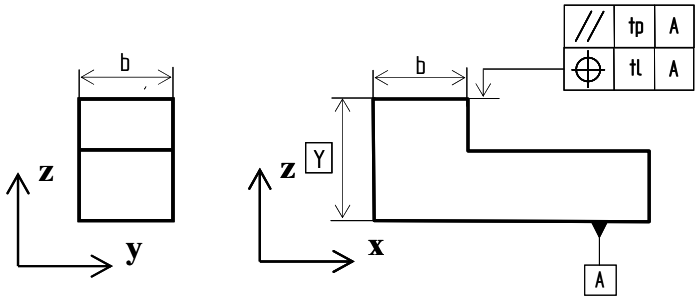



Figure 25 : parallélisme et localisation entre les deux mêmes surfaces (Pierre 2011).

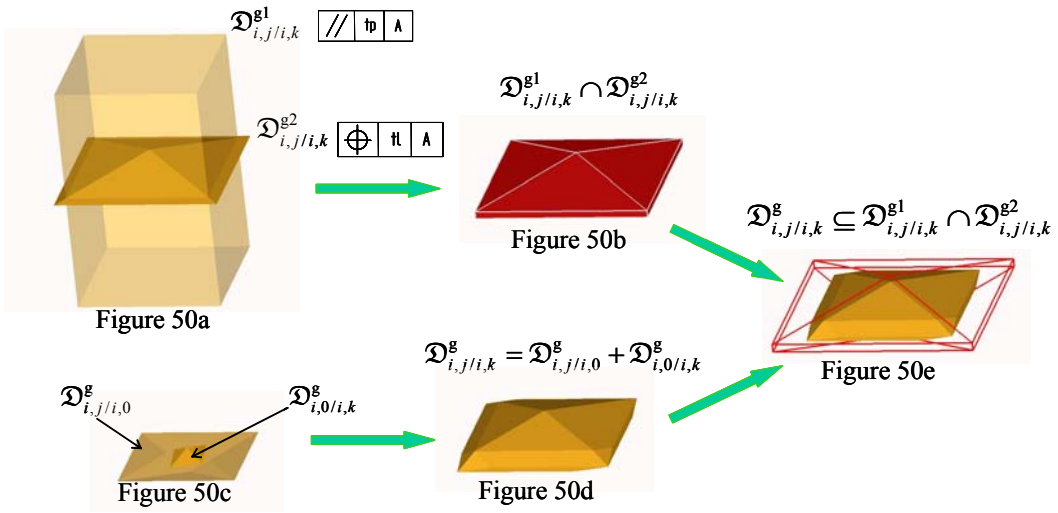



Figure 26 : Analyse des tolérances d'une pièce (Pierre 2011).

### 2.4.3 Caractérisation des lois de comportement géométrique d'un système mécanique

Petit a proposé une classification des différentes architectures de mécanisme : voir figure 27.
Les lois de comportement géométriques d'un mécanisme consistent à écrire pour un mécanisme à une boucle simple comme celui de la figure 11 (Pierre 2011) :

$$\left(\mathfrak{D}^{g}_{2,2/2,3} + \mathfrak{D}^{g}_{1,3/1,2}\right) \subseteq \left(\mathfrak{D}^{c}_{1,2/2,2} + \mathfrak{D}^{c}_{2,3/1,3}\right) \tag{40}$$

Les travaux menés dans le DEA de Jérôme Dufaure ont caractérisé une boucle simple analogue à la relation (40) dans un guidage en rotation (Dufaure 2001). Les défauts de rectitudes de l'arbre et du bâti ont été maximisés sans dépasser les angles de rotulage des roulements (Teissandier & Dufaure 2002).

Petit a introduit la notion de domaine jeu résiduel (Petit 2005) : "*Le domaine jeu résiduel d'une liaison modélise les positions relatives atteignables entre deux pièces constituant une liaison et ce quels que soient les défauts des surfaces de contact*".

Ce concept est la transposition des quantificateurs définis par Dantan en opérations sur des domaines pour un mécanisme dont l'architecture est dépourvue de boucles complexes (Dantan 2000).

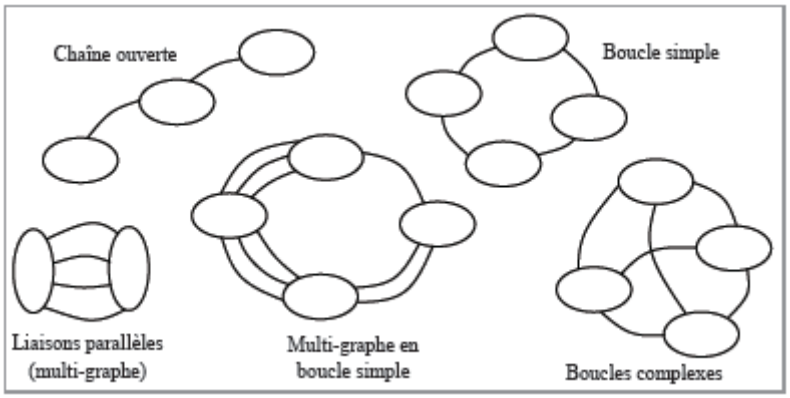



Figure 27 : Architectures de mécanismes (Petit 2005).

Dans une chaîne de mise en position entre deux pièces, on a :

$$[R_{1A2}] = [J_{1A2}] \ominus ([E_{1A}] \oplus [E_{A2}]) \tag{41}$$

[J1A2] est le domaine jeu de la liaison de la chaîne de mise en position ; E1A $\oplus$ EA2 est la somme de Minkowski des domaines écarts de la chaîne. L'opérateur $\ominus$ est l'opérateur de sweeping intersection. Cette relation est transposable en une relation analogue sur des polytopes.

Quand deux pièces sont mises en position par plusieurs chaînes (cas des liaisons parallèles de la figure 27), l'assemblage est possible si l'intersection entre les domaines jeu résiduel n'est pas vide. Cette approche ne permet pas de simuler l'assemblage des architectures de mécanismes contenant une boucle complexe.

### 2.4.4 Simulation du respect d'une condition fonctionnelle

Dans un mécanisme dont la structure topologique est dépourvue de boucles complexes, il est toujours possible d'exprimer la position relative entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme par des sommes et des intersections d'ensembles de contraintes. Cela est vrai pour des ensembles de contraintes modélisés par des polytopes mais aussi par des domaines ou des T-Maps.

Par exemple, s'agissant de la condition fonctionnelle définie dans la relation (8), l'ensemble des écarts $e = \boldsymbol{\varepsilon}_{M-1,1/2,1}.\mathbf{v}$ est donné par le polytope $\mathfrak{D}_{1,1/2,1}$, voir figure 28.

$$\mathfrak{D}^{g}_{1,1/2,1} = \mathfrak{D}_{1,1/1,0} + \left(\mathfrak{D}_{1,0/1,2} + \mathfrak{D}_{1,2/2,2} + \mathfrak{D}_{2,2/2,0}\right) \cap \left(\mathfrak{D}_{1,0/1,3} + \mathfrak{D}_{1,3/2,3} + \mathfrak{D}_{2,3/2,0}\right) + \mathfrak{D}_{2,0/2,1} \tag{42}$$

$$\mathfrak{D}^{g}_{1,1/2,1} \subseteq \mathfrak{D}^{f}_{1,1/2,1} \tag{43}$$

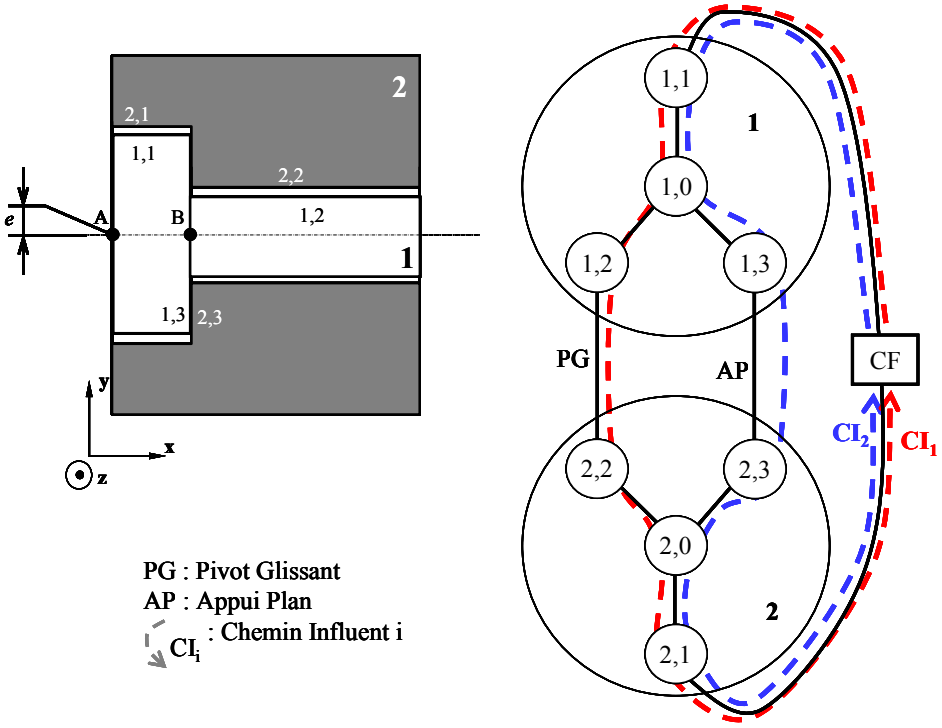



Figure 28 : Description des chemins influents sur la condition fonctionnelle (Pierre 2011).

La figure 31 illustre la construction graphique en 2d du polytope $\mathfrak{D}^{g}_{1,1/2,1}$ mettant en œuvre les relations (42) et (43) en prenant en compte les spécifications ISO des pièces 1 et 2 de la figure 29. La figure 30 illustre les cycles influents résultant des choix des spécifications de la figure 29. La figure 32 illustre l'inclusion du polytope calculé dans le polytope fonctionnel.

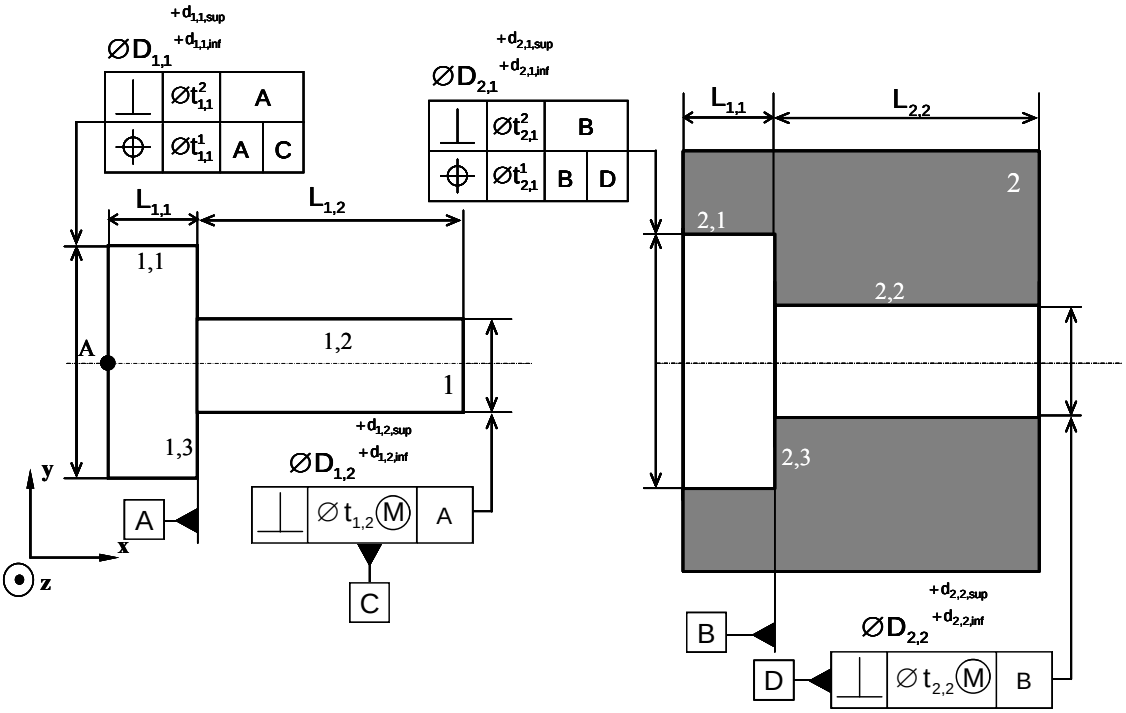



Figure 29 : Spécifications ISO influentes sur CF (Pierre 2011).

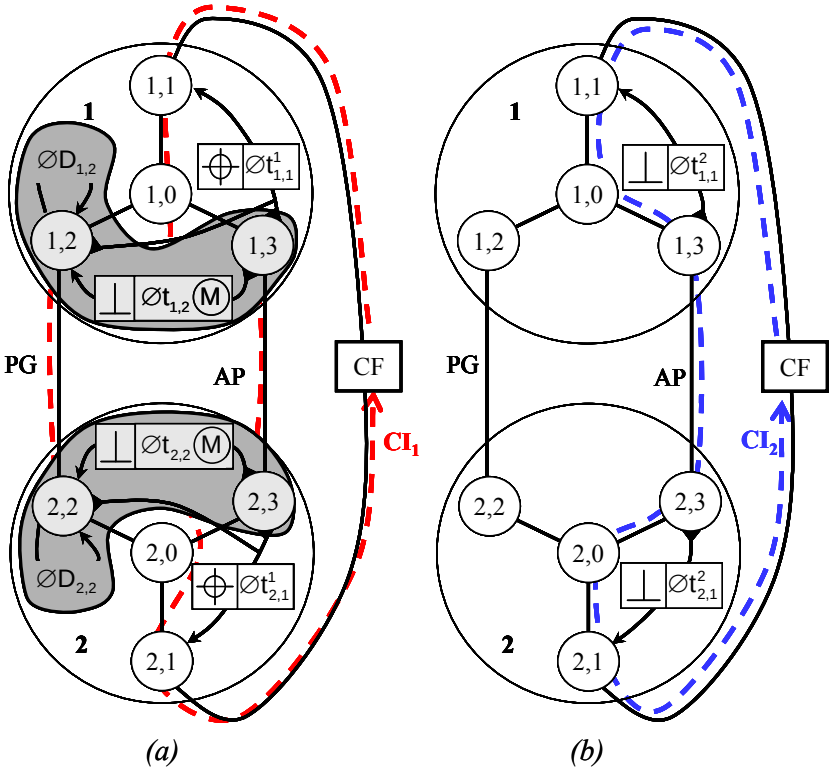



Figure 30 : Sous-graphe influent dans le graphe de contacts (Pierre 2011).

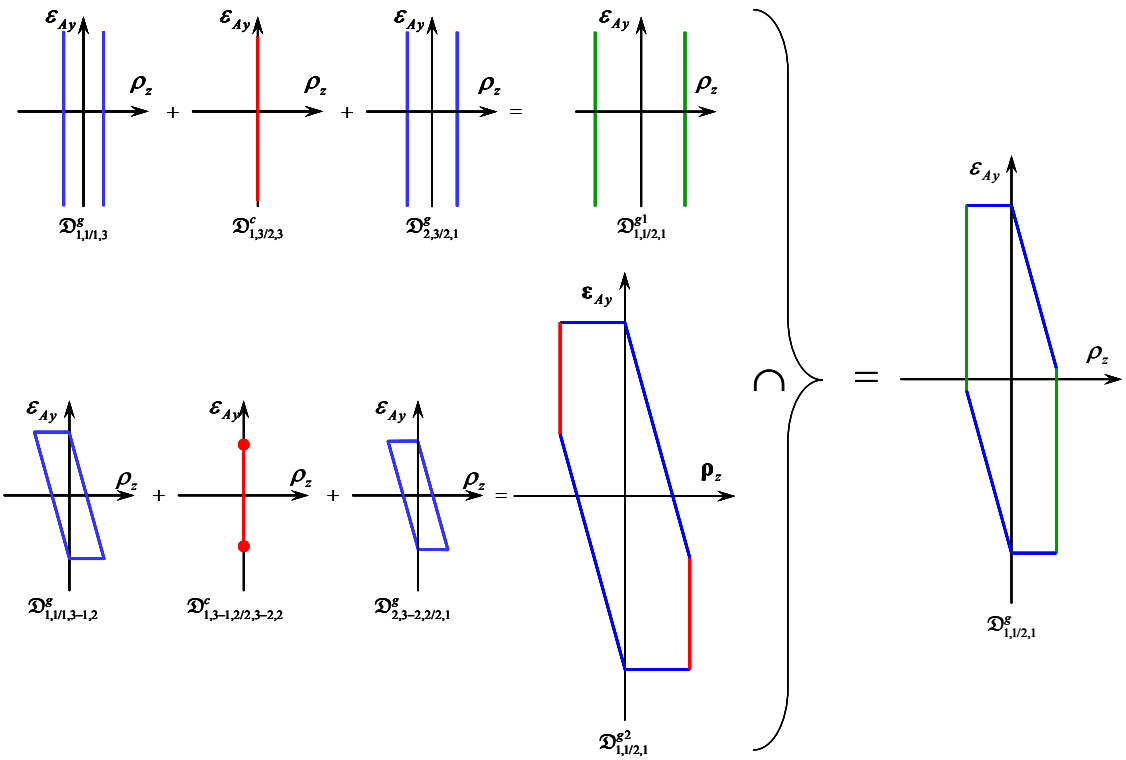



Figure 31 : Construction du polytope de géométrique $\mathfrak{D}^g_{1,1/2,1}$ (Pierre 2011).

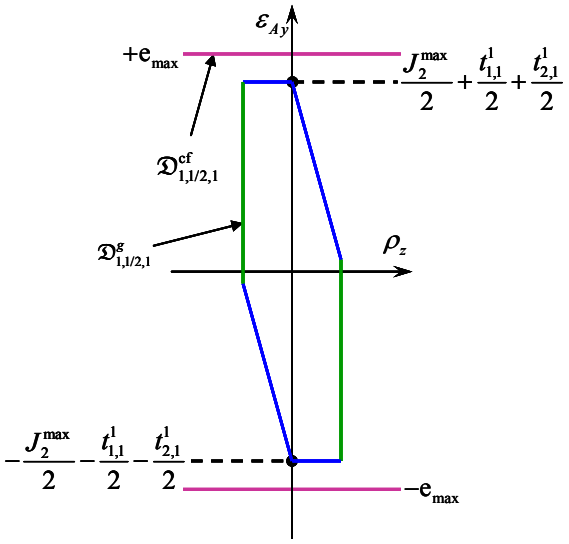



Figure 32 : 2-polytopes caractérisant le respect de l'exigence fonctionnelle (Pierre 2011).

## 2.5 Intersection et somme de Minkowski de polytopes

### 2.5.1 Préambule

Le principe d'une démarche d'analyse de tolérances consiste à vérifier si des spécifications géométriques et de contacts exprimées dans un mécanisme, permettent de satisfaire une condition fonctionnelle. Dans une approche par des opérations sur des polytopes, le paragraphe précédent a montré que la satisfaction d'une condition fonctionnelle repose sur

l'inclusion d'un polytope calculé dans un polytope fonctionnel. Etant donné qu'un polytope est convexe par définition, il n'est pas très difficile de vérifier l'inclusion d'un polytope (calculé) dans un autre polytope (fonctionnel) (Petit 2005), (Bueler et al. 2000). Le problème sous-jacent à cette condition d'inclusion est de trouver une stratégie permettant de remplir le mieux possible le polytope fonctionnel.
Dans une approche paramétrique reposant sur des petits déplacements, la contribution de chaque liaison influente sur une condition fonctionnelle est caractérisée par un coefficient d'influence non nul. Il est toujours possible de déterminer un écart de position ou d'orientation entre deux surfaces d'un mécanisme, par une fonction linéaire d'écarts géométriques indépendants (Clozel & Rance 2010), (Marguet et al. 2003), (Anselmetti 2010), (Spensieri et al. 2009). Toute stratégie consistant à maximiser les tolérances dimensionnelles et les dimensions des zones de tolérance, en respectant une condition fonctionnelle, peut être facilement mis en œuvre en faisant des hypothèses de répartitions parmi les différentes contributions. Ces différentes répartitions pourront prendre en compte des capabilités de moyens de production. Cela peut se réaliser au pire des cas ou dans différentes approches statistiques. Les différentes approches paramétriques sont très performantes en temps de calcul. Le fait de devoir réaliser plusieurs simulations pour une condition fonctionnelle n'est en général pas rédhibitoire.
Dans une approche par des opérations sur des polytopes, la contribution de chaque polytope opérande n'est pas triviale. Nous avons donc cherché à développer des algorithmes d'intersection et de somme de Minkowski assurant une traçabilité complète sur les sommets et les facettes. Cela consiste à déterminer de quels sommets et facettes parmi les polytopes opérandes sont obtenus les sommets et les facettes d'un polytope calculé. Sans une traçabilité complète, l'optimisation du remplissage d'un polytope fonctionnel ne peut se faire que de façon empirique. La complexité d'une somme de Minkowski de polytopes (Fogel et al. 2009) ne permet pas d'envisager de déterminer de nombreuses fois une chaîne de cotes, pour des valeurs de tolérances différentes. Au contraire d'une approche paramétrique, le fait de devoir réaliser de nombreuses simulations pour une condition fonctionnelle est très coûteux en temps de calcul et devient rédhibitoire.

Cette traçabilité est donc essentielle pour être efficace dans la recherche d'un optimum parmi les polytopes opérandes contribuant à remplir le polytope cible que constitue le polytope fonctionnel. De plus, d'un point de vue opérationnel, cette traçabilité est pénalisante d'un point de vue temps de calcul.
Depuis 2009, des travaux ont été repris avec Vincent Delos à ce sujet et sont aujourd'hui poursuivis dans la thèse de Lazhar Homri.

### 2.5.2 Intersection de polytopes

La détermination de l'intersection entre deux polytopes définie par les relations (34) et (35) repose sur la même problématique que celle qui consiste à déterminer l'intersection entre les demi-espaces d'un même polytope opérande définie par (22).
Considérons la détermination de l'intersection des demi-espaces d'un même polytope opérande. Les travaux initiés par Vincent Delos en 1997 ont permis l'élaboration d'un algorithme de troncature.

Définissons un hyperplan de séparation $H$ .
$H$ sépare le polytope $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\mathcal{P} \not\subset \bar{H}^{-}$ et $\mathcal{P} \not\subset \bar{H}^{+}$ (44)

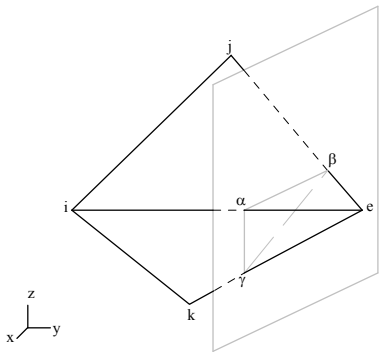



Figure 33 : Exemple de séparation d'un polytope par un hyperplan (Delos 1997).

L'algorithme de troncature est mis en œuvre pour résoudre la relation (22).

Le principe de l'algorithme de troncature est le suivant (Delos 1997) :

- détermination d'un hypercube $\mathcal{A}$ incluant le polytope défini par une liste de $(m+2n)$ demi-espaces de type $\bar{H}^-$,
- pour le demi-espace $\bar{H}_1^-$ (premier demi-espace de la liste) deux cas se présentent :
  - $\mathcal{A} \subset \bar{H}_1^-$ : le demi-espace est redondant, il est supprimé de la liste des $(m+2n)$ demi-espaces,
  - $H_1$ sépare le polytope $\mathcal{A}$ : un nouveau sommet sera crée par l'intersection de toute arête constituée d'un sommet inclus dans $\bar{H}_1^-$ et d'un sommet inclus dans $H_1^+$ avec l'hyperplan $H_1$. On met ainsi à jour la liste des sommets initialement constituée des $2^k$ sommets de l'hypercube $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^k$. On obtient ainsi un polytope $\mathcal{A}'$ en tronquant le polytope $\mathcal{A}$. Cette opération est réitérée pour les $(m+2n)-1$ demi-espaces restants pour déterminer la liste des sommets du polytope $\mathcal{P}$.

L'algorithme de troncature permet d'obtenir un polytope dont le cardinal de l'ensemble des demi-espaces le définissant est minimal. En d'autres termes, cet algorithme permet de supprimer les contraintes géométriques ou de contact redondantes.

La détermination de l'intersection entre deux polytope $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ consiste à mettre en œuvre l'algorithme précédemment décrit en substituant le polytope $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{Q}$) à l'hypercube $\mathcal{A}$. La liste des demi-espaces est alors celle du polytope $\mathcal{Q}$ (ou $\mathcal{P}$).

D'une manière générale l'intersection entre deux polytopes n'est constituée que de facettes dont les hyperplans support respectifs sont aussi les hyperplans support des facettes des opérandes.

### 2.5.3 Somme de Minkowski de polytopes

#### 2.5.3.1 Avant-propos

La communauté du tolérancement géométrique détermine depuis longtemps le cumul de plusieurs cotes suivant une direction particulière en additionnant :

- les cotes moyennes algébriquement (un sens suivant la direction étudiée doit être choisi),
- les intervalles de tolérances centrés entre eux (ici le sens choisi suivant la direction étudiée pour la détermination des cotes moyennes n'intervient pas).

Le concept des $\Delta l$ en cotation de fabrication repose sur le même principe (Bourdet 1973).

Ces opérations réalisées en cotation unidirectionnelle sont des sommes de Minkowski de polytopes de dimension 1. Elles sont très facilement implémentables sur un simple tableur.

En général, le résultat de la somme de Minkowski entre deux polytopes est obtenu en réalisant un balayage du point de référence d'un opérande sur la frontière de l'autre opérande. Peu importe quel opérande sert de référence pour le balayage, cette opération est commutative.

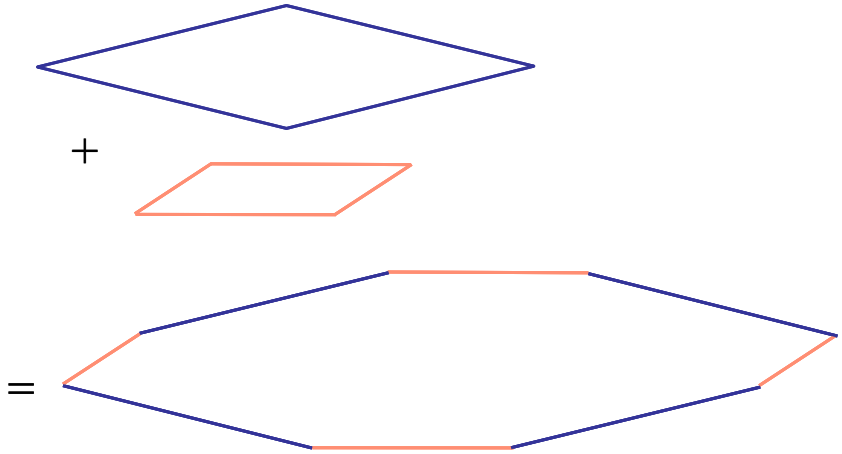



Figure 34 : Somme de Minkowski de 2-polytopes (Teissandier & Delos 2011a).

En dimension 2, les frontières du polytope somme sont obtenues par une translation des arêtes des opérandes.

En dimension 3, certaines facettes du polytope somme sont obtenues par une translation des facettes des opérandes, mais de nouvelles facettes de raccord apparaissent (Barki et al. 2009). Les facettes de raccord apparaissent pour une somme dont la dimension est supérieure ou égale à 3.

Toute la complexité d'une somme de Minkowski repose sur l'apparition de ces facettes de raccord. Contrairement à l'intersection, la somme de Minkowski génère des facettes dont les hyperplans support respectifs ne sont pas des hyperplans support des facettes des opérandes.

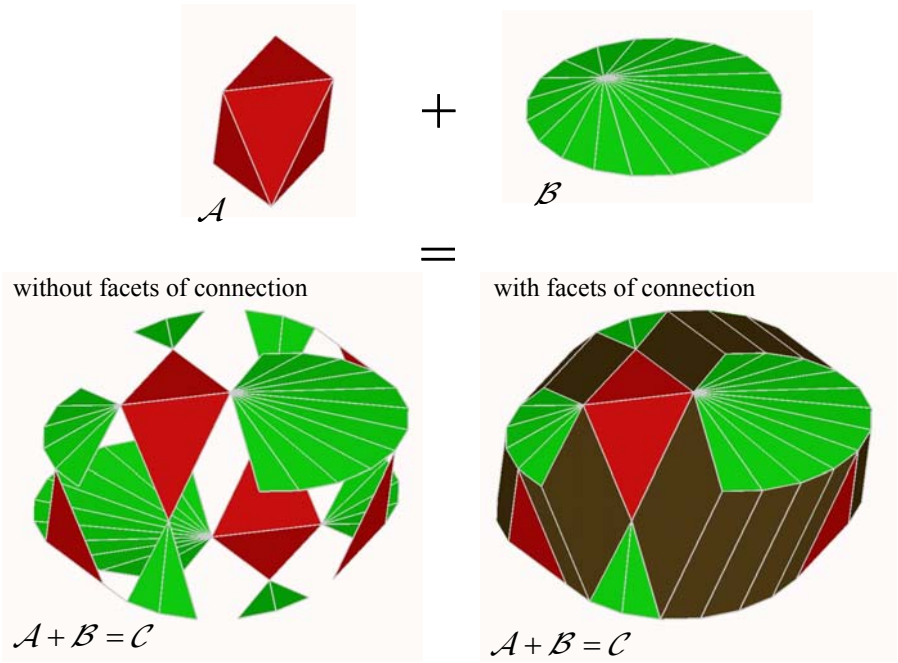



Figure 35 : Somme de Minkowski de 3-polytopes (Teissandier & Delos 2011a).

#### 2.5.3.2 Cône primal, cône dual et éventail normal

Un cône polyédrique désigné $\mathrm{Cone(O)}$ est défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces contenant le point origine O (Ziegler 1995) :

$$\mathrm{Cone(O)} = \bigcap_{i=1}^{m} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq 0 \right\} \tag{45}$$

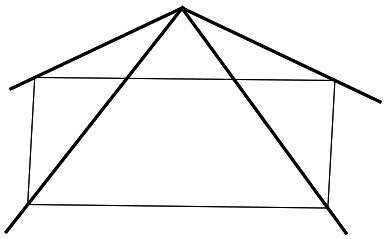


Figure 36 : Cône de $\mathbb{R}^3$ (Teissandier & Delos 2011a).

A tout sommet $v$ d'un polytope $\mathcal{P}$ est associé un cône primal et un cône dual.
En dimension 3, la frontière du cône primal PrimalCone($v$) est constituée du sommet $v$, des faces $f_{\mathrm{p}i}$ de $\mathcal{P}$ concourantes au sommet $v$ et des arêtes $e_{\mathrm{p}ij}$ concourantes au sommet $v$ telle qu'une arête $e_{\mathrm{p}ij}$ soit la frontière commune aux faces adjacentes $f_{\mathrm{p}i}$ et $f_{\mathrm{p}j}$, voir figure 37.
Considérons le cône dual du polytope $\mathcal{P}$ DualCone($v$) associé au sommet $v$. Dans $\mathbb{R}^3$, ce cône est de dimension 3 étant donné que le sommet $v$ est de dimension 0 (Gritzmann & Sturmfels 1993). Sa frontière est constitué du sommet $v$, des faces $f_{\mathrm{d}ij}$ concourantes en $v$ ayant respectivement pour normales les arêtes $e_{\mathrm{p}ij}$ et des arêtes $e_{\mathrm{d}i}$ concourantes en $v$ respectivement normales aux faces $f_{\mathrm{p}i}$ (Ziegler 1995).
La figure 37 illustre le cône primal et le cône dual associé au sommet $v$ du polytope $\mathcal{P}$.

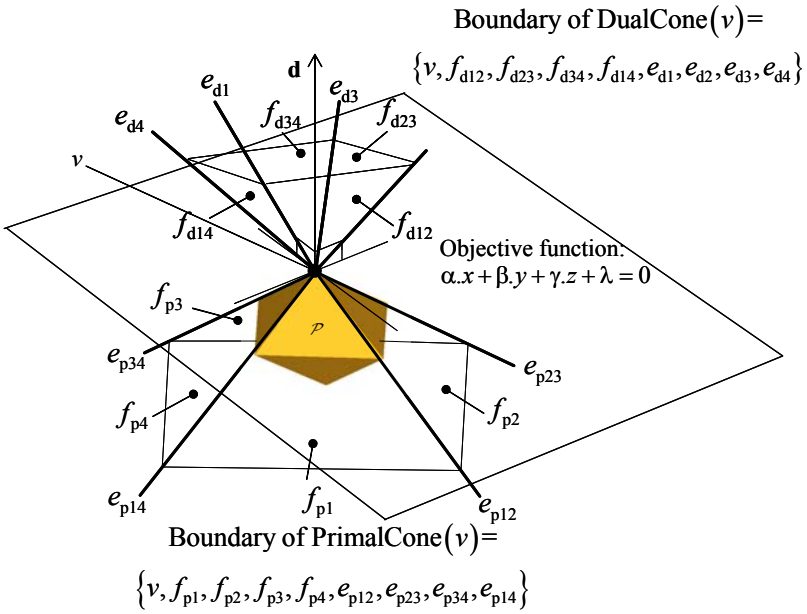



Figure 37 : Cône dual et cône primal attachés à un sommet (Teissandier & Delos 2011a).

Un éventail dans $\mathbb{R}^n$ est une famille $\Phi = \{C_1, ...., C_k\}$ de cônes polyédriques ayant les propriétés suivantes :

- chaque face non vide d'un cône de $\Phi$ est aussi un cône de $\Phi$.
- l'intersection de deux cônes de $\Phi$ est une face commune aux deux cônes.

L'éventail $\Phi$ est complet si et seulement si : $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \mathbb{R}^n$ (Ziegler 1995).

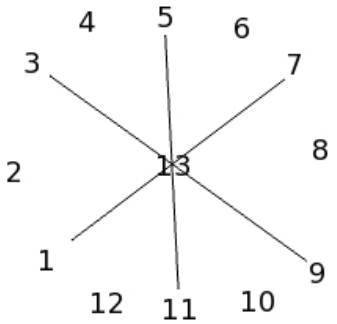



Figure 38 : Eventail complet de $\mathbb{R}^2$.

Pour toute face $F$ d'un polytope $\mathcal{P}$, la réunion des cônes duaux DualCone($F$) partitionne $\mathbb{R}^n$. La réunion des cônes duaux définit un éventail, que l'on appellera éventail normal (Ziegler 1995), (Gritzmann & Sturmfels 1993).
L'éventail normal associé au polytope $\mathcal{P}$ est : $\mathrm{N}(\mathcal{P})$.

La figure 39 illustre l'éventail normal d'un polytope de dimension 3.

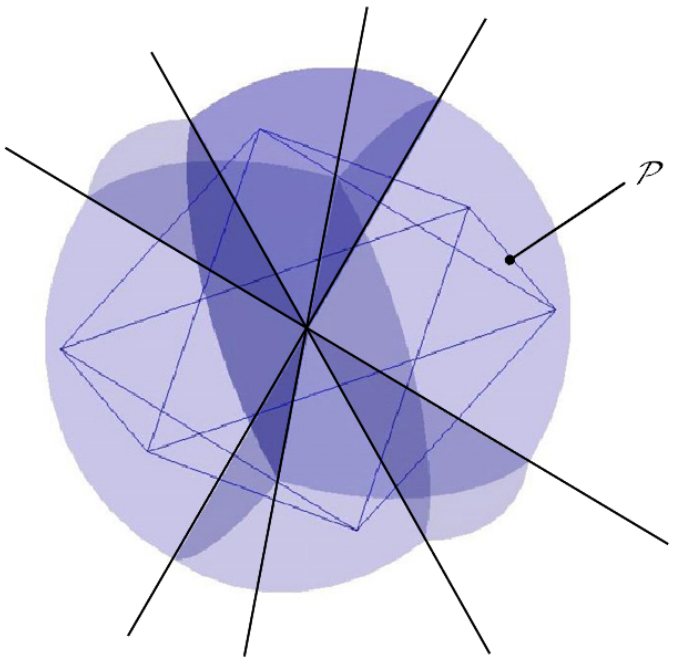



Figure 39 : Eventail normal $N(\mathcal{P})$ d'un polytope $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ (Teissandier & Delos 2011a).

Soient $\phi_1$ et $\phi_2$ deux éventails de $\mathbb{R}^n$.
On appelle le raffinement commun de $\phi_1$ et $\phi_2$ (Ziegler 1995) :

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 = \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \Phi_1, C_2 \in \Phi_2\} \tag{46}$$

La détermination du raffinement commun de deux éventails $\Phi_1$ et $\Phi_2$ consiste à déterminer un éventail normal qui est l'union de toutes les intersections des cônes duaux des deux éventails $\Phi_1$ et $\Phi_2$ pris deux à deux.

#### 2.5.3.3 Détermination des sommets

Les deux propriétés suivantes ont été montrées voir figure 40 et figure 41 (Teissandier & Delos 2011a) :

Si $(\text{DualCone}(a) \cap \text{DualCone}(b))$ est de dimension 3,
alors $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ avec $c$ sommet de $\mathcal{C}$. (47)

Si $(\text{DualCone}(a) \cap \text{DualCone}(b))$ est de dimension strictement inférieure à 3,
alors $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$. (48)

De plus, d'après (Gritzmann & Sturmfels 1993), on a :

$$N(\mathcal{C}) = N(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = N(\mathcal{A}) \wedge N(\mathcal{B}) \tag{49}$$

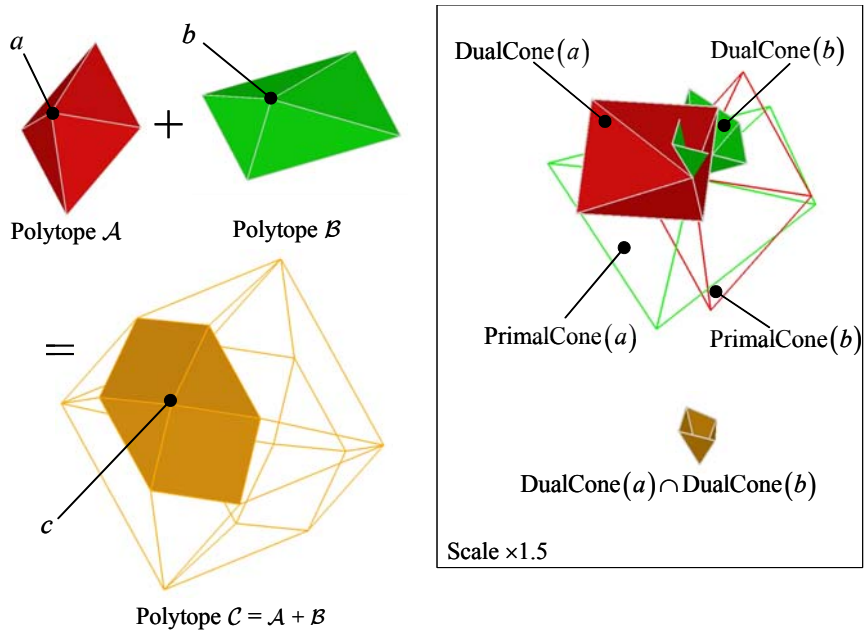



Figure 40 : Intersection de cônes duaux générant un sommet (Teissandier & Delos 2011a).

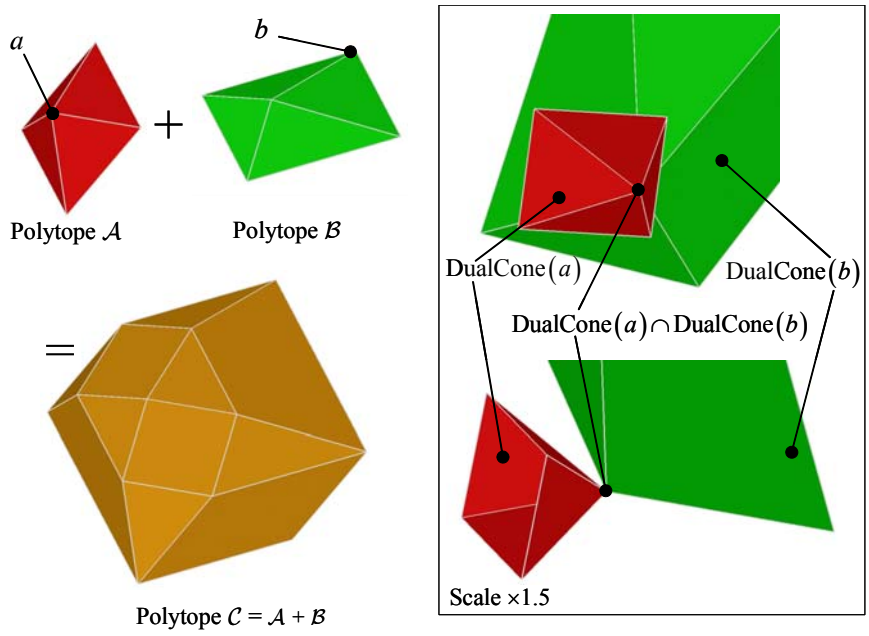



Figure 41 : Intersection de cônes duaux ne générant pas un sommet (Teissandier & Delos 2011a).

Les propriétés (47) et (48) ont permis de spécifier un algorithme déterminant (voir figure 42) :

- les sommets de $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$ ,
- le raffinement commun de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'après (46) et donc de déduire l'éventail normal $N(\mathcal{C})$ d'après (49).

Les données d'entrée de l'algorithme sont les polytopes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ .

Le polytope $\mathcal{A}$ est caractérisé par sa liste des sommets $L_{v,A}$ et sa liste des facettes $L_{f,A}$.
Soit $a_i$ le i$^{\text{ème}}$ sommet de $L_{v,A}$. On a : $1 \le i \le n_{v,A}$ avec $n_{v,A}$ nombre de sommets de $\mathcal{A}$.

D'une manière analogue, le polytope $\mathcal{B}$ est caractérisé par $L_{v,B}$ et $L_{f,B}$.
Soit $b_j$ le j$^{\text{ème}}$ sommet de $L_{v,B}$. On a : $1 \le j \le n_{v,B}$ avec $n_{v,B}$ nombre de sommets de $\mathcal{B}$.

En sortie d'algorithme, le polytope $\mathcal{C}$ est caractérisé par sa liste de sommets $L_{v,C}$, sa liste de cônes duaux $L_{\text{DualCone},C}$ et son éventail normal $\mathrm{N}(\mathcal{C})$.
Soit $c_k$ le k$^{\text{ème}}$ sommet de $L_{v,C}$. On a : $1 \le k \le n_{v,C}$ avec $n_{v,C}$ nombre de sommets de $\mathcal{C}$.
Soit $\mathrm{DualCone}(c_k)$ le k$^{\text{ème}}$ cône dual de $\mathcal{C}$ associé à $c_k$ de $L_{\text{DualCone},C}$.

General algorithm for 3-polytopes

**Require:** two 3-polytopes $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$
**Ensure:** determination of $L_{v,C}$, $L_{\text{DualCone},C}$ and $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ with $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C}$

```
1 :   k = 0
2 :   for each vertex a_i of A with L_{f,A} do
3 :       DualCone(a_i)
4 :           for each vertex b_j of B with L_{f,B} do
5 :           DualCone(b_j)
6 :           compute intersection I_ij = DualCone(a_i) ∩ DualCone(b_j)
7 :               if dimension of I_ij = 3 then
8:                k = k + 1
9:                compute c_k = a_i + b_j
10 :          add c_k in L_{v,C}
11 :          add I_ij=DualCone(c_k) in L_DualConeC
12 :          endif
12 :      end for
13 :  end for
14: n_{v,C} = k
15: N(C) = ∪_{k=1}^{n_{v,C}} DualCone(c_k)
```

Figure 42 : Algorithme de détermination des sommets et de l'éventail normal d'un polytope somme (Teissandier & Delos 2011a).

#### 2.5.3.4 Détermination des facettes

Les deux propriétés suivantes ont été montrées voir figure 40 et figure 41 (Teissandier & Delos 2011a) :

- dans $\mathbb{R}^3$, les cônes duaux associés aux $k$ sommets $v_i$ d'une même facette d'un polytope partagent une seule et même arête dans l'éventail normal du polytope. (50)

- les deux cônes duaux associés aux deux sommets d'une même arête d'un polytope partagent une même face dans l'éventail normal du polytope. (51)

La figure 43a illustre les 4 cônes duaux $\mathrm{DualCone}(c_k)$ respectivement associés aux sommets $c_1, c_2, c_3$ and $c_4$ d'une même facette $f$ du polytope $\mathcal{C}$. Les 4 cônes duaux $\mathrm{DualCone}(c_k)$ sont translatés sur le sommet $c_1$. Ils définissent un sous-ensemble de l'éventail normal $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ translaté en $c_1$. L'arête commune des 4 cônes duaux $\mathrm{DualCone}(c_k)$ respectivement associés aux sommets $c_k$ (avec $1 \le k \le 4$) est normale à la facette $f$ : figure 43b.

La figure 43c illustre la propriété (51) pour l'arête du polytope $\mathcal{C}$ limitée par les sommets $c_1$ et $c_2$.

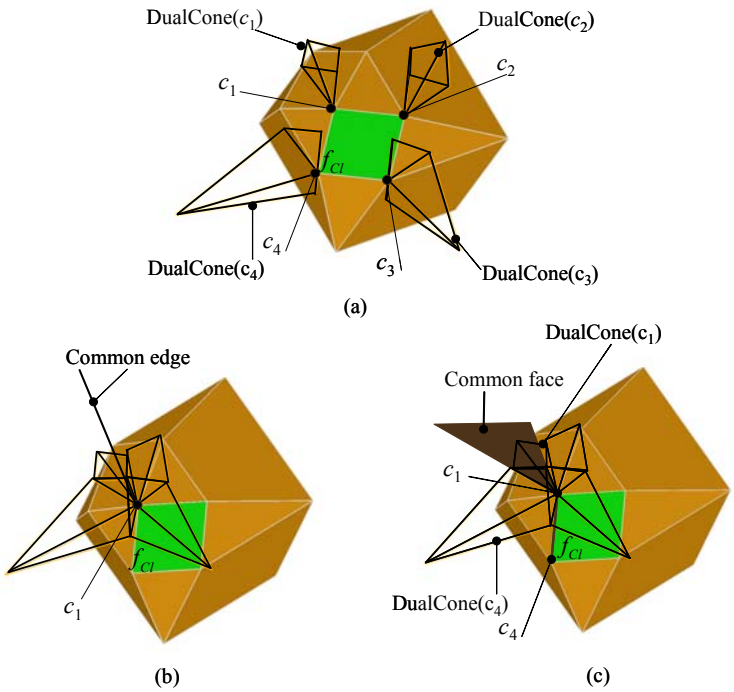



Figure 43 : Cônes duaux associés aux sommets d'une facette du polytope $\mathcal{C}$ (Teissandier & Delos 2011a).

Les propriétés (50) et (51) ont permis de spécifier un algorithme déterminant les facettes $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$ connaissant les sommets de $\mathcal{C}$ ainsi que son éventail normal $\mathrm{N}(\mathcal{C})$, voir figure 43. La détermination des facettes du polytope $\mathcal{C}$ s'effectue uniquement en explorant son éventail normal $\mathrm{N}(\mathcal{C})$.
L'algorithme de détermination des facettes d'une somme est présenté en figure 44.

Les données d'entrée de l'algorithme sont la liste de sommets $L_{v,C}$, la liste de cônes duaux $L_{\mathrm{DualCone},C}$ et l'éventail normal $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ du polytope $\mathcal{C}$.

Soit $c_k$ le k$^{\text{ème}}$ sommet de $L_{v,C}$. On a : $1 \le k \le n_{v,C}$ avec $n_{v,C}$ nombre de sommets de $\mathcal{C}$.
Soit $\mathrm{DualCone}(c_k)$ le k$^{\text{ème}}$ cône dual de $\mathcal{C}$ associé à $\mathbf{c}_k$ de $L_{\mathrm{DualCone},C}$.
On pose $\mathrm{DualCone}(c_k) = \{c_k, e_{\mathrm{d}u}, f_{\mathrm{d}v}\}$ avec :
$e_{\mathrm{d}u}$ u$^{\text{ème}}$ arête de $\mathrm{DualCone}(c_k)$ et $f_{\mathrm{d}v}$ v$^{\text{ème}}$ facette de $\mathrm{DualCone}(c_k)$.

Soit $L_{f,C}$ la liste des facettes de $\mathcal{C}$.
On désigne $f_{Cl}$ la l$^{\text{ème}}$ facette de $L_{f,C}$ ($1 \le l \le n_{f,C}$ avec $n_{f,C}$ nombre de facettes de $\mathcal{C}$).
Soit $L_{h,C}$ la liste des hyperplans supports de $\mathcal{C}$.
Soit $h_{Cl}$ le l$^{\text{ème}}$ hyperplan de $L_{h,C}$ ($1 \le l \le n_{f,C}$)
Soit $L_{e,f_{Cl}}$ la liste ordonnée des arêtes de la facette $f_{Cl}$. Deux arêtes consécutives de $L_{e,f_{Cl}}$ partagent un même sommet ainsi que les première et dernière arêtes.
Soit $e_{f_{Clw}}$ la w$^{\text{ème}}$ arête de $f_{Cl}$.($1 \le w \le n_{e,f_{cl}}$ avec $n_{e,f_{cl}}$ nombre d'arêtes de $f_{Cl}$).

**Algorithm 2** - Determining the facets of the Minkowski sum of 3-polytopes

**Require:** $L_{v,C}$, $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ and $n_{v,C}$ $\mathrm{DualCone}(c_k)$
**Ensure:** $L_{f,C}$ and $L_{e,f_{Cl}}$ for each $f_{Cl}$
1: **for** each $\mathrm{DualCone}(c_k)$ of $N(\mathcal{C})$ **do**
2: **for** each $e_{\mathrm{du}}$ of $\mathrm{DualCone}(c_k)$ **do**
3: compute $h_{Cl}$ defined by $c_k$ and $e_{\mathrm{du}}$
4: **if** $h_{Cl}$ is not in $L_{h,C}$ **then**
5: add $h_{Cl}$ in $L_{h,C}$
6: find the $q$ $\mathrm{DualCone}(c_m)$ in $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ such that:
$e_{\mathrm{du}} \subseteq \mathrm{DualCone}(c_m) \cap \mathrm{DualCone}(c_k)$ with $m \neq k$.
7: find $\mathrm{DualCone}(c_{m1})$ among the $q$ $\mathrm{DualCone}(c_m)$ such that:
$\mathrm{DualCone}(c_{m1}) \cap \mathrm{DualCone}(c_k) = f_{dv1}$, facet of $\mathrm{DualCone}(c_k)$
8: find $\mathrm{DualCone}(c_{m2})$ among the $q$ $\mathrm{DualCone}(c_m)$ such that:
$\mathrm{DualCone}(c_{m2}) \cap \mathrm{DualCone}(c_k) = f_{dv2}$, facet of $\mathrm{DualCone}(c_k)$
with $f_{dv1} \neq f_{dv2}$
9: $h_{Cl}$ is the support hyperplane of $f_{Cl}$ and $n_{e,f_{cl}} = q+1$.
10: $c_k$ and $c_{m1}$ limit the first edge $e_{f_{Cl1}}$ of $f_{Cl}$, add $e_{f_{Cl1}}$ in $L_{e,f_{Cl}}$
11: $\mathrm{DualCone}(c_{mp}) = \mathrm{DualCone}(c_{m1})$
12: $\mathrm{DualCone}(c_{mp-1}) = \mathrm{DualCone}(c_k)$
13: **while** $\mathrm{DualCone}(c_{mp}) \neq \mathrm{DualCone}(c_{m2})$ **do**
14: find $\mathrm{DualCone}(c_{mp+1})$ among the $q$ $\mathrm{DualCone}(c_m)$ such that:
$\mathrm{DualCone}(c_{mp+1}) \cap \mathrm{DualCone}(c_{mp}) = f_{dmp}$, facet of $\mathrm{DualCone}(c_{mp})$
with $\mathrm{DualCone}(c_{mp+1}) \neq \mathrm{DualCone}(c_{mp-1})$
15: $c_{mp}$ and $c_{mp+1}$ limit the next edge $e_{f_{Clw}}$ of $f_{Cl}$, add $e_{f_{Clw}}$ in $L_{e,f_{Cl}}$
16 : $\mathrm{DualCone}(c_{mp-1}) = \mathrm{DualCone}(c_{mp})$
17: $\mathrm{DualCone}(c_{mp}) = \mathrm{DualCone}(c_{mp+1})$
18: **end while**
19: $c_{mp} = c_{m2}$ and $c_k$ limit the last edge $e_{f_{Clq}}$ of $f_{Cl}$, add $e_{f_{Clw}}$ in $L_{e,f_{Cl}}$
20: determine $f_{Cl}$ with $h_{Cl}$ and $L_{e,f_{Cl}}$
21: add $f_{Cl}$ in $L_{f,C}$
22: **end if**
23: **end for**
24: **end for**

Figure 44 : Algorithme de détermination des facettes (Teissandier & Delos 2011a).

#### 2.5.3.5 Discussion sur la méthode proposée

La méthode de détermination de la somme de Minkowski de polytopes, développée en collaboration avec V. Delos, ne repose que sur des intersections de paires de cônes duaux, associées à des recherches d'arêtes communes et de faces communes de cônes duaux dans un éventail normal.
Une des spécificités de cette méthode est que l'opération d'intersection de paire de cônes duaux repose également sur le principe de troncature décrit au paragraphe 2.5.2. Ainsi le même algorithme, permet de déterminer :

- l'intersection des demi-espaces d'un même polytope opérande,
- l'intersection entre deux polytopes,
- la somme de Minkowski de deux polytopes.

Une autre spécificité de cette méthode est qu'elle assure une traçabilité complète des sommets et des facettes du polytope $\mathcal{C}$ depuis les sommets et les facettes des opérandes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Cette traçabilité a vocation à être exploitée afin d'optimiser le remplissage d'un polytope fonctionnel par un polytope calculé. On dit aussi d'une telle méthode qu'elle travaille en double description (i.e. par les sommets et par les facettes).
L'intérêt de la double description se justifie par la problématique générale d'une démarche d'analyse de tolérances par des opérations sur des polytopes. La détermination de la position relative entre deux surfaces est en général obtenu par sommation et intersection de polytopes. Considérons par exemple la détermination du polytope $\mathfrak{D}^{g}_{1,1/2,1}$ par les relations (42) et (43) provenant de l'exemple fil rouge de ce chapitre. On peut en déduire que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{1,1/2,1} &= [\mathcal{A}]+[\mathcal{B}] \\ &= \left[\mathfrak{D}_{1,1/1,0}+\mathfrak{D}_{2,0/2,1}\right]+\left[\left(\mathfrak{D}_{1,0/1,2}+\mathfrak{D}_{1,2/2,2}+\mathfrak{D}_{2,2/2,0}\right)\cap\left(\mathfrak{D}_{1,0/1,3}+\mathfrak{D}_{1,3/2,3}+\mathfrak{D}_{2,3/2,0}\right)\right].\end{aligned}$$

Une traçabilité par les sommets suffit pour caractériser les contributions des polytopes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Il en est de même pour les polytopes $\mathfrak{D}_{1,1/1,0}$ et $\mathfrak{D}_{2,0/2,1}$. En revanche, si l'on souhaite caractériser les contributions des six polytopes opérandes de $\mathcal{B}$, une traçabilité par les facettes s'impose étant donné que $\mathcal{B}$ est le résultat d'une intersection entre deux sommes. La double description de la méthode de détermination d'une somme de Minkowski permet d'envisager d'identifier la contribution de chaque opérande dans une chaîne de cotes 3d, comme il est d'usage de le faire dans une simple relation linéaire d'écarts obtenue dans une approche paramétrique.
De plus, la traçabilité par les facettes est indispensable afin d'identifier les facettes générées par les demi-espaces bouchon des opérandes.

Aujourd'hui, ces opérations sont opérationnelles dans $\mathbb{R}^3$ dans une distribution d'Open Cascade (Open CASCADE 2011). Elles ont contribuées à tester la méthode sur des systèmes mécaniques dont les variations géométriques sont modélisées en 2d (Teissandier & Delos 2011b), (Teissandier et al. 2012).

Ces opérations ont été développées dans $\mathbb{R}^n$ en C++ dans l'application politopix par V. Delos au MAP5. L'application politopix est aujourd'hui le solveur utilisé dans les travaux de la thèse de L. Homri.

## 2.6 Pris en compte des déformations thermomécaniques

### 2.6.1 Problématique et contexte industriel

La prise en compte des déformations thermomécaniques dans des chaînes de cotes 3d par des opérations sur des polytopes concernent les travaux de thèse de Laurent Pierre (2007-2011).

Les travaux de cette thèse ont été menés dans le cadre de l'ERT 1070 IMPACT (Equipe de Recherche Technologique Innovation Moteur pour l'Anneau et le Contrôle du jeu Turbine haute pression). Le partenaire industriel de ces travaux est l'entreprise Turbomeca située à Bordes (64). L'objectif des travaux conduits par l'ERT 1070 IMPACT était d'apporter des solutions techniques pour améliorer les performances des moteurs d'hélicoptère pour chacun des différents régimes de fonctionnement. Une des voies pour améliorer les performances de ces turbomoteurs est l'optimisation du rendement énergétique des différents composants constitutifs et, plus particulièrement, la maîtrise des jeux entre les sommets des aubes de la turbine haute pression et le stator.
Cette maîtrise passe pour l'industriel, lors de la conception, par une démarche de choix de types de liaison, de formes, de dimensionnement et de tolérancement géométrique (Pierre et al. 2007).

### 2.6.2 Intégration des déformations thermomécaniques dans les variations géométriques

#### 2.6.2.1 Description du cycle de fonctionnement thermomécanique d'un système

Afin de pouvoir intégrer les déformations thermomécaniques dans les variations géométriques d'un système mécanique, plusieurs situations de vie différentes vont être considérées :

- une situation de vie de référence,
- une ou plusieurs situations de vie thermomécaniques.

Un modèle de référence est défini à partir de la situation de vie de référence, où toutes les pièces sont à 20°C. Ce modèle de référence repose sur les hypothèses émises classiquement en tolérancement géométrique formulées à la fin du §2.1. Une situation de vie thermomécanique correspond à un point de fonctionnement particulier du système où certaines pièces sont soumises à des contraintes thermomécaniques. Les contraintes thermomécaniques sur les pièces entraînent des déformations provoquant des écarts de situation, de dimension et de forme devant être pris en compte dans la modélisation des variations géométriques. Le fonctionnement du système étudié dans le temps est discrétisé en plusieurs situations de vie thermomécaniques différentes. Aucun régime transitoire ne sera considéré (Pierre et al. 2008).
Les hypothèses suivantes sont alors émises :

- invariance de la structure topologique du graphe de contacts,
- prise en compte des variations de forme et de dimensions des pièces,
- pas de déformation locale des surfaces en contact.

L'invariance de la structure topologique du graphe de contacts signifie qu'il n'y a pas de contact supplémentaire et pas de suppression de contact entre deux situations de vie. De plus, le type de chaque contact reste le même : un pivot glissant reste pivot glissant, un appui plan reste appui plan, etc. Par contre, les différents paramètres caractérisant un contact (jeu minimal, jeu maximal, nature de contact …) peuvent évoluer.

Le comportement thermomécanique du système est supposé élastique ; il est modélisé en petites déformations et en petits déplacements.

2.6.2.2 Intégration des déformations thermomécaniques des pièces à l'état libre

Une simulation thermique par des éléments finis est réalisée sur le système complet afin de déterminer les divers champs de température des composants constitutifs. Ensuite, pour chaque pièce, une simulation thermomécanique par des éléments finis est réalisée à l'état libre. Le but d'une simulation est de déterminer les variations géométriques d'origine thermomécanique d'une pièce, en ne considérant aucune contrainte de contact avec les pièces environnantes.

Les variations géométriques d'origine thermomécanique d'une pièce à l'état libre sont évaluées d'une manière analogue à la détermination des écarts de fabrication couramment mis en œuvre en métrologie tridimensionnelle (Clément & Bourdet 1988). Une pièce déformée est modélisée par un nombre fini de points correspondant respectivement aux nœuds du maillage de la pièce déformée. Une surface idéale (plan, cylindre, cône ...) est associée aux nœuds du maillage selon le critère des moindres carrés. Il est alors possible de caractériser les écarts géométriques induits par une déformation thermomécanique entre deux surfaces associées, par un torseur de petits déplacements duquel sera déduit un polytope réduit à un sommet de $\mathbb{R}^n$.

Considérons la pièce 1 représentée en figure 45. La figure 45a représente le modèle nominal de la pièce à partir duquel est déterminée la déformée de la pièce soumise à des sollicitations thermomécaniques. La figure 45b illustre les associations de deux surfaces cylindriques 1,1th et 2,2th respectivement aux déformées déduites des surfaces cylindriques nominales 1,1n et 2,2n. De même, la surface plane 1,3th est associée à la déformée déduite de la surface plane nominale 1,3n.

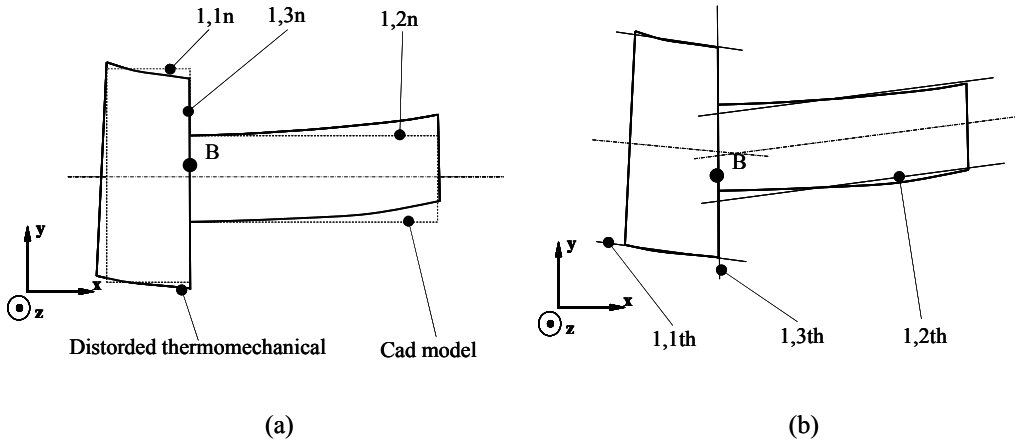



Figure 45 : Détermination des écarts thermomécaniques d'une pièce.

La position relative entre la surface 1,3th et 1,2th peut être caractérisée par la relation suivante d'après (3) :

$$\left[d_{1,2th/1,3th}\right]=\left[d_{1,2th/1,2n}\right]+\left[d_{1,3n/1,3th}\right] \tag{52}$$

Dans la base $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, on a :

$$\left[d_{1,2th/1,3th}\right] = {}_B\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}_{1,2th/1,3th}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,2th/1,3th}\end{bmatrix} \text{ with } \boldsymbol{\rho}_{1,3th/1,2th}\begin{bmatrix}0\\ \rho_{1,2th/1,3th-y}\\ \rho_{1,2th/1,3th-z}\end{bmatrix} \text{ and } \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,2th/1,3th} = \mathbf{0} \tag{53}$$

On peut caractériser les écarts géométriques définis par $\left[d_{1,2th/1,3th}\right]$ par le polytope $\mathfrak{D}^{g,th}_{1,2/1,3}$. Ce polytope est un sommet de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont données par $\rho_{1,2th/1,3th-y}$ et $\rho_{1,2th/1,3th-z}$.

On pose comme hypothèse que dans toute situation de vie thermomécanique, le polytope $\mathfrak{D}^{g,ma}_{1,3/1,2}$ caractérisant les variations géométriques inhérentes au procédé d'obtention de la pièce est défini par :

$$\mathfrak{D}^{g,ma}_{1,3/1,2} = \mathfrak{D}^{g}_{1,3/1,2} \text{ défini dans la situation de référence} \tag{54}$$

Le polytope géométrique caractérisant les variations géométriques entre les surfaces 1,3 et 1,2 induites par les procédés de fabrication, cumulées aux variations induites par les déformations thermomécaniques, se définit alors par la somme de Minkowski suivante (Pierre et al. 2009b) :

$$\mathfrak{D}^{g}_{1,3/1,2} = \mathfrak{D}^{g,ma}_{1,3/1,2} + \mathfrak{D}^{g,th}_{1,3/1,2} \tag{55}$$

La détermination du polytope $\mathfrak{D}^{g}_{1,3/1,2}$ est représentée dans la figure 13.

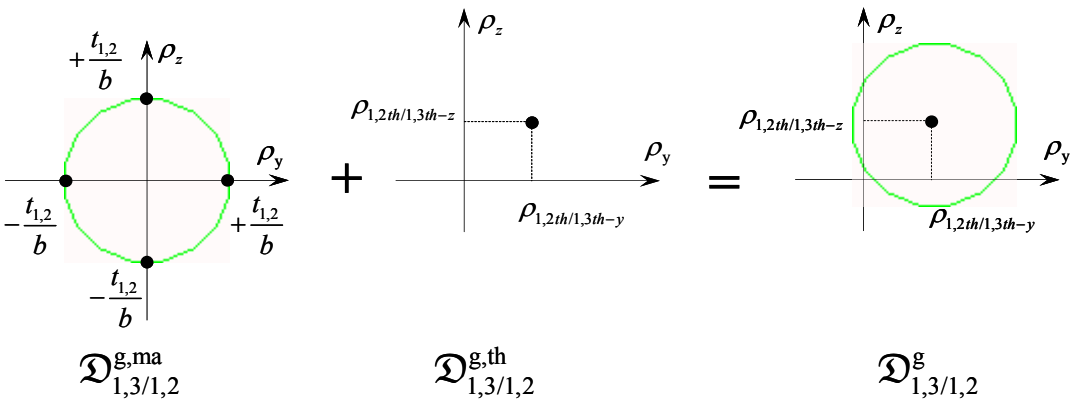



Figure 46 : Caractérisation des écarts géométriques induits par le processus de fabrication et le comportement thermomécanique.

### 2.6.2.3 Intégration des déformations thermomécaniques dans les contacts

La simulation d'une liaison entre deux pièces potentiellement en contact consiste à déterminer le polytope de contact dans le cas où les surfaces en contact sont déformées thermomécaniquement. Les contraintes définies dans (10) spécialisées pour définir un polytope de contact au §2.3.4.2 dans le cas des liaisons à contact bilatéral, ne dépend plus uniquement du jeu dû aux écarts de fabrication entre les deux surfaces mais aussi du jeu local dû aux écarts de dimension et de forme d'origine thermomécanique.

Dans ce cas, les contraintes de contact bilatéral entre les surfaces i,j et u,v formalisées par la relation s'écrivent au point $N_i$ en fonction du jeu local $d_i$ :

$$\forall N_i \in E_g \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{N}i-i,j/u,v}.\mathbf{n}_i \le d_i \tag{56}$$

Le jeu local $d_i$ au point $N_i$ est défini en fonction du jeu $J$ entre les deux surfaces de substitution et en fonction des écarts de forme d'origine thermomécanique $dev_{\text{N-}i,j-th}$ et $dev_{\text{N-}u,v-th}$ respectivement des surfaces i,j et u,v :

$$d_i = \frac{J}{2} + \left( dev_{\text{N-}i,j-th} - dev_{\text{N-}u,v-th} \right) \tag{57}$$

La figure 47 illustre le cas de la liaison pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2 de l'exemple fil rouge (voir figure 9) dans une situation de vie thermomécanique. Dans ce cas, le jeu $J$ entre les deux surfaces de substitution est défini par la relation suivante :

$$J = \mathrm{D}_{2,2} - \mathrm{D}_{1,2} = \left( \mathrm{D}_{2,2n} + d_{2,2_\mathrm{ma}} + d_{2,2_\mathrm{th}} \right) - \left( \mathrm{D}_{1,2n} + d_{1,2_\mathrm{ma}} + d_{1,2_\mathrm{th}} \right)$$

avec :

$\mathrm{D}_{1,2n}, \mathrm{D}_{2,2n}$ : diamètres nominaux (58)

$d_{1,2_\mathrm{ma}}, d_{2,2_\mathrm{ma}}$ : écarts de diamètre dus au procédé de fabrication

$d_{1,2_\mathrm{th}}, d_{2,2_\mathrm{th}}$ : écarts de diamètre dus aux déformations thermomécaniques

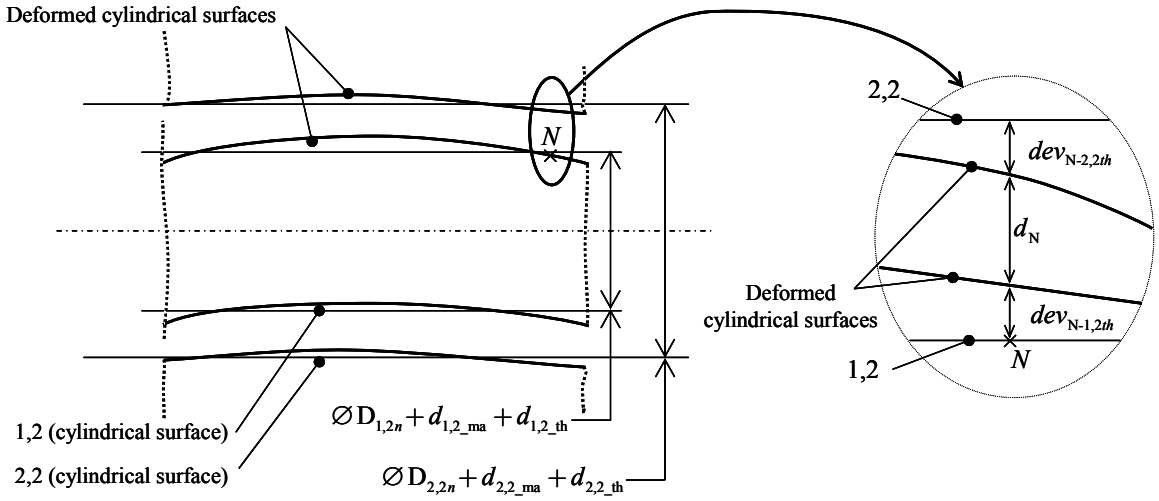



Figure 47 : Ecarts géométriques entre deux surfaces nominalement cylindriques déformées potentiellement en contact (Pierre 2011).

La configuration la plus défavorable pour l'assemblage vis à vis des écarts de fabrication est celle qui correspond à :

$$J_{\min} = \left( \mathrm{D}_{2,2n} + \left( d_{2,2_\mathrm{ma}} \right)_{\mathrm{mini}} + d_{2,2_\mathrm{th}} \right) - \left( \mathrm{D}_{1,2n} + \left( d_{1,2_\mathrm{ma}} \right)_{\mathrm{maxi}} + d_{1,2_\mathrm{th}} \right) \tag{59}$$

Finalement les relations (56) s'écrivent pour la liaison pivot glissant au point A (voir figure 9) : $\forall N_i \in E_g$

$$\left\{ \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,2/2,2} + N_i A \times \boldsymbol{\rho}_{1,2/2,2} \right) . \mathbf{n}_i \leq \frac{J_{\min}}{2} + \left( dev_{\text{N-2,2}-th} - dev_{\text{N-1,2}-th} \right) \right\} \tag{60}$$

Les seconds membres des demi-espaces ne sont plus tous égaux à une même constante. Il n'est pas possible d'exprimer ce polytope simplement en exprimant uniquement des contraintes de contact aux deux extrémités de l'axe de du cylindre de contact (élément $E_g$).

Le polytope caractérisé par (60) est noté généralement $\mathfrak{D}_{1,2/2,2}^{\mathrm{c,th}}$ ou $\mathfrak{D}_{1,2/2,2}^{\mathrm{c,th,min}}$ en considérant (59).

Deux cas se présentent :

- l'intersection entre les demi-espaces définie par (60) génère un polytope,
- l'intersection entre les demi-espaces définie par (60) génère un ensemble vide.

Le cas (a) est illustrée dans la figure 48 où le polytope $\mathfrak{D}^{c,th,min}_{1,2/2,2}$ , représenté dans deux plans de projections particuliers, caractérise les positions relatives entre les surfaces 1,2 et 2,2 au point A. Le contact entre 1,2 et 2,2 n'induit aucune déformation supplémentaire dans le système mécanique. La liaison est spécifiée avec un attribut de contact flottant.
Le cas (b) correspond à un phénomène de serrage local encore appelé bridage local entre les deux pièces. Aucun mouvement relatif entre les deux surfaces n'est possible: la liaison est spécifiée avec un attribut de contact fixe. Le polytope de contact $\mathfrak{D}^{c,th,min}_{i,j/u,v}$ est un sommet confondu avec l'origine: voir figure 49. Le serrage va localement induire des déformations supplémentaires dans les deux pièces en contact qu'il va falloir déterminer dans une simulation thermomécanique du système complet.

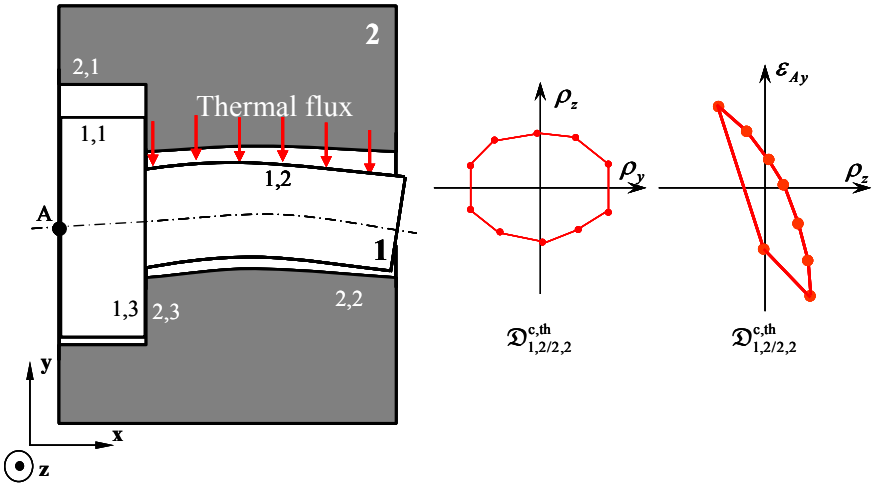



Figure 48 : Caractérisation d'un polytope de contact entre deux surfaces déformées : cas sans bridage (Pierre 2011).

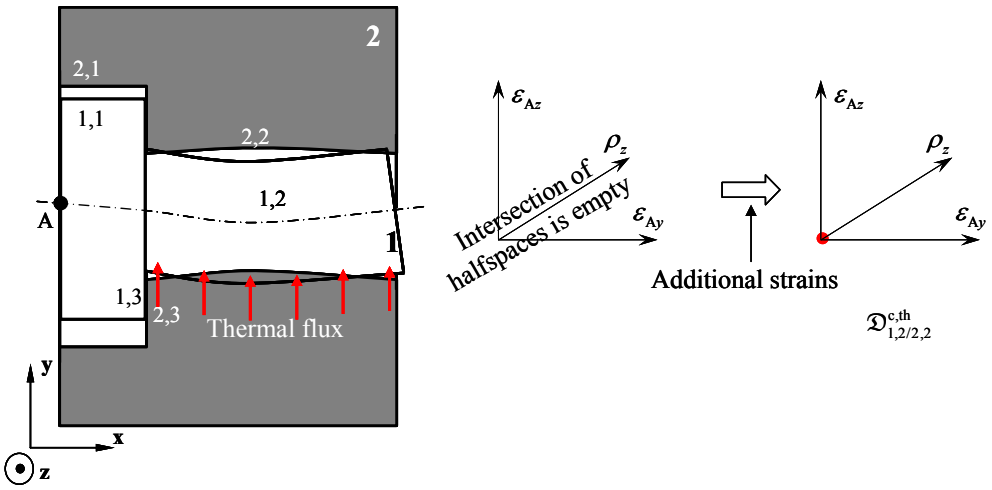



Figure 49 : Caractérisation d'un polytope de contact entre deux surfaces déformées : cas de bridage (Pierre 2011).

#### 2.6.2.4 Condition de fermeture d'un cycle

La condition de fermeture d'un cycle simple repose sur l'inclusion de $\sum \mathfrak{D}^{g}_{i,j/i,k}$ , somme de Minkowski des polytopes géométriques du cycle, dans $\sum \mathfrak{D}^{c}_{i,j/u,v}$ , somme de Minkowski des polytopes de contact du cycle :

$$\left(\sum \mathfrak{D}^{g}_{i,j/i,k}\right) \subseteq \sum \mathfrak{D}^{c}_{i,j/u,v} \tag{61}$$

Dans une situation de vie thermomécanique, la relation (61) devient :

$$\sum\left(\mathfrak{D}^{g,ma}_{i,j/i,k} + \mathfrak{D}^{g,th}_{i,j/i,k}\right) \subseteq \sum \mathfrak{D}^{c,th}_{i,j/u,v} \tag{62}$$

avec :

- $\mathfrak{D}^{g,ma}_{i,j/i,k} + \mathfrak{D}^{g,th}_{i,j/i,k}$ : polytope géométrique caractérisant les variations géométriques entre les surfaces i,j et i,k de la pièce i induites par les procédés de fabrication, cumulées aux variations induites par les déformations thermomécaniques de i à l'état libre,
- $\mathfrak{D}^{c,th}_{i,j/u,v}$ : polytope de contact prenant en compte les déformations thermomécaniques entre les surfaces i,j et u,v potentiellement en contact.

La figure 50 distingue les trois cas possibles représentant la vérification de l'inclusion de la somme des polytopes géométriques dans la somme des polytopes de contact reposant sur l'exemple fil rouge (voir figure 9 et figure 12), dans la configuration la plus défavorable pour l'assemblage.

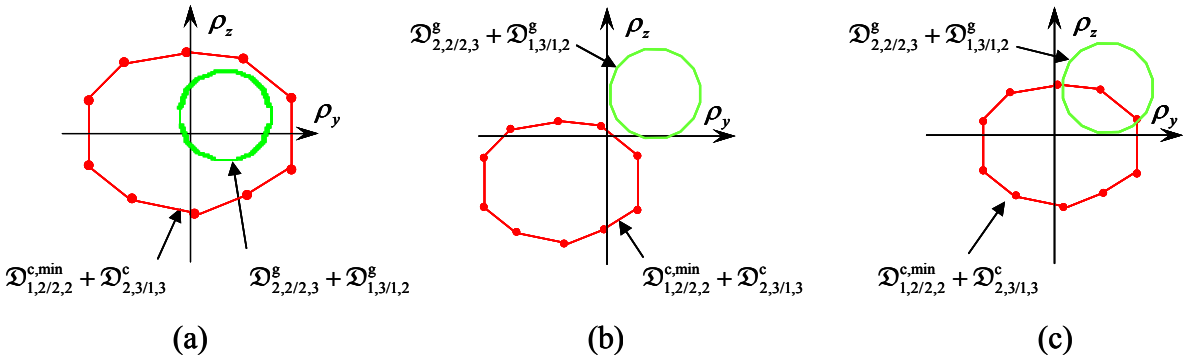



Figure 50 : Inclusion de la somme de polytopes géométriques dans la somme des polytopes de contact intégrant les déformations thermomécaniques (Pierre 2011).

La figure 50a illustre la configuration suivante :

$$\left(\mathfrak{D}^{g,ma}_{2,2/2,3} + \mathfrak{D}^{g,th}_{2,2/2,3}\right) + \left(\mathfrak{D}^{g,ma}_{1,3/1,2} + \mathfrak{D}^{g,th}_{1,3/1,2}\right) \subseteq \left(\mathfrak{D}^{c,min,th}_{1,2/2,2} + \mathfrak{D}^{c,th}_{2,3/1,3}\right) \tag{63}$$

Cela signifie qu'il est possible d'assembler le système sans déformation supplémentaire dans les pièces. Les déformations thermomécaniques des pièces à l'état libre laisse suffisamment de jeu dans les liaisons pour réaliser l'assemblage.

La figure 50b illustre la configuration suivante :

$$\left(\left(\mathfrak{D}^{g,ma}_{2,2/2,3} + \mathfrak{D}^{g,th}_{2,2/2,3}\right) + \left(\mathfrak{D}^{g,ma}_{1,3/1,2} + \mathfrak{D}^{g,th}_{1,3/1,2}\right)\right) \cap \left(\mathfrak{D}^{c,min,th}_{1,2/2,2} + \mathfrak{D}^{c,th}_{2,3/1,3}\right) = \varnothing \tag{64}$$

Cela signifie qu'il n'est pas possible d'assembler le système sans ajouter des déformations supplémentaires dans les pièces. La relation (64) caractérise un bridage de cycle. Les déformations thermomécaniques à l'état libre ont supprimé le jeu dans les liaisons permettant de réaliser l'assemblage. Une simulation thermomécanique par des éléments finis du système

complet doit être réalisée en prenant en compte les conditions de contact entre les pièces de la situation de vie thermomécanique.
La figure 50c illustre la configuration suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{2,2/2,3}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{2,2/2,3}\right)+\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{1,3/1,2}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{1,3/1,2}\right)\not\subset\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{c,min,th}}_{1,2/2,2}+\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th}}_{2,3/1,3}\right)\\ \left(\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{2,2/2,3}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{2,2/2,3}\right)+\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{1,3/1,2}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{1,3/1,2}\right)\right)\cap\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{c,min,th}}_{1,2/2,2}+\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th}}_{2,3/1,3}\right)\neq\varnothing\end{array}\right\} \tag{65}$$

La condition d'inclusion n'est en général pas vérifiée. Cependant certaines configurations permettent aux deux pièces de s'assembler sans déformation supplémentaire : l'intersection des deux polytopes n'est pas vide. Cela caractérise par un bridage incertain du cycle.

#### 2.6.2.5 Simulation du respect d'une exigence fonctionnelle

Considérons la condition fonctionnelle définie par les relations (1) et (8) caractérisée par le polytope fonctionnel $\mathfrak{D}^{\mathrm{f}}_{1,1/2,1}$ (voir figure 32). La relation (43) définissant le respect de la condition fonctionnelle reste la même étant donné que la structure topologique du système entre la situation de vie de référence et une situation de vie thermomécanique reste la même de par les hypothèses formulées en §2.6.2.1.
Si aucun bridage local et aucun bridage de cycle ne sont détectés, d'après la relation (42), il vient (voir figure 31) :

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{g}}_{1,1/2,1}=\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{1,1/1,3\text{-}1,2}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{1,1/1,3\text{-}1,2}+\left(\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th,max}}_{1,2/2,2}\cap\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th}}_{1,3/2,3}\right)+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{2,3-2,2/2,1}+\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{2,3-2,2/2,1} \tag{66}$$

avec :

- $\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{1,1/1,3\text{-}1,2}$ et $\mathfrak{D}^{\mathrm{g,th}}_{2,3-2,2/2,1}$ : polytopes géométriques caractérisant les écarts d'origine thermomécanique à l'état libre respectivement des pièces 1 et 2,
- $\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{1,1/1,3\text{-}1,2}$ et $\mathfrak{D}^{\mathrm{g,ma}}_{2,3-2,2/2,1}$ : polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication respectivement des pièces 1 et 2,
- $\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th,max}}_{1,2/2,2}$, $\mathfrak{D}^{\mathrm{c,th}}_{1,3/2,3}$ : polytope de contact intégrant les déformations thermomécaniques entre les pièces 1 et 2 respectivement de la liaison pivot glissant avec un jeu $J_{\max}$ et de la liaison appui plan avec un jeu nul.

Le respect de la condition fonctionnelle CF dans cette première configuration est défini par (67) et est illustré par la figure 51 :

$$\begin{array}{l}-\dfrac{t_{1,1}}{2}-\dfrac{t_{2,1}}{2}+\varepsilon_{A-1,1th/1,3th-1,2th-y}+\left(\varepsilon_{A-1,3th-1,2th/2,3th-2,2th-y}\right)_{\max}+\varepsilon_{A-2,3th-2,2th/2,1th-y}\geq e_{\min}\\ +\dfrac{t_{1,1}}{2}+\dfrac{t_{2,1}}{2}+\varepsilon_{A-1,1th/1,3th-1,2th-y}+\left(\varepsilon_{A-1,3th-1,2th/2,3th-2,2th-y}\right)_{\min}+\varepsilon_{A-2,3th-2,2th/2,1th-y}\leq e_{\max}\end{array} \tag{67}$$

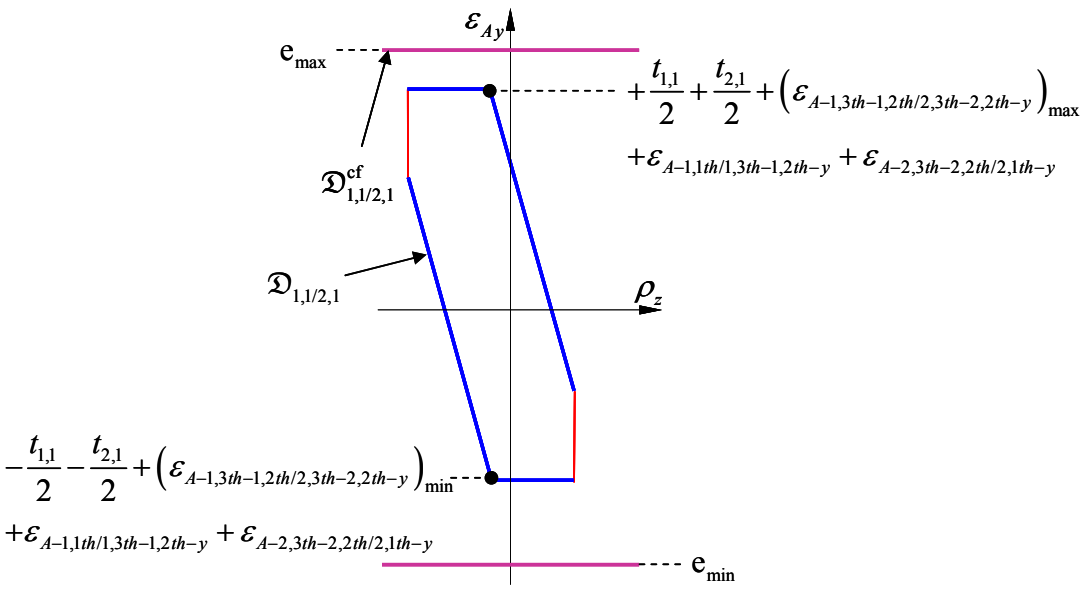



Figure 51 : Respect de la condition fonctionnelle CF : cas de non bridage (Pierre 2011).

Considérons le mécanisme dans une seconde configuration où un bridage local dans la liaison pivot glissant entre 1,2 et 2,2 et un bridage de cycle ont été détectés.
L'apparition d'un ou plusieurs bridages impose une étude thermomécanique supplémentaire prenant en compte les déformations ajoutées par le (ou les) bridage(s) sur les déformations des pièces à l'état libre. Une étude thermomécanique du système complet doit être réalisée afin de prendre en compte ces deux bridages. Les phénomènes de bridage sont modélisés dans les conditions limites de contact entre les pièces dans la modélisation par des éléments finis. Les conditions limites de contact sont définies en respectant les caractéristiques des liaisons définies dans la situation de vie thermomécanique :
- contact de type pivot glissant de nature fixe entre 1,2 et 2,2,
- contact de type appui plan de nature glissant (jeu nul) entre 1,3 et 2,3.
La figure 19 illustre le résultat issu d'un calcul thermomécanique réalisé sur le système complet.

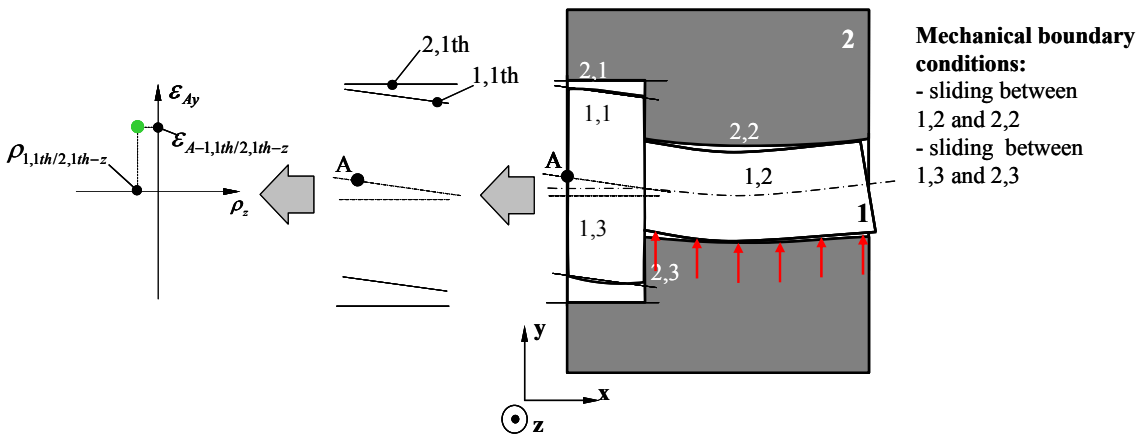



Figure 52 : Caractérisation du comportement thermomécanique su système complet : cas de bridages (Pierre 2011).

L'objectif de la simulation thermomécanique est de définir le polytope géométrique $\mathfrak{D}^{g,th}_{1,1/2,1}$ permettant de déterminer les écarts d'origine thermomécanique entre les surfaces 1,1 et 2,1.
La méthode de détermination est la même méthode que celle mise en œuvre dans le paragraphe 2.6.2.2 pour la détermination des écarts d'origine thermomécanique sur une pièce déformée à l'état libre: voir figure 45.
D'après (42), la relation suivante définit la détermination de ce polytope il vient (voir figure 31) :

$$\mathfrak{D}^{g}_{1,1/2,1} = \mathfrak{D}^{g,th}_{1,1/2,1} + \mathfrak{D}^{g,ma}_{1,1/1,3\text{-}1,2} + \left(\mathfrak{D}^{c,th,max}_{1,2/2,2} \cap \mathfrak{D}^{c,th}_{1,3/2,3}\right) + \mathfrak{D}^{g,ma}_{2,3-2,2/2,1} \tag{68}$$

avec :

- $\mathfrak{D}^{g,th}_{1,1/2,1}$ : polytope géométrique caractérisant les écarts d'origine thermomécanique entre les surfaces 1,1 et 2,1 provenant de la simulation thermomécanique du système complet,
- $\mathfrak{D}^{g,ma}_{1,1/1,3\text{-}1,2}$ et $\mathfrak{D}^{g,ma}_{2,3-2,2/2,1}$ : polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication respectivement des pièces 1 et 2,
- $\mathfrak{D}^{c,th,max}_{1,2/2,2}$ , $\mathfrak{D}^{c,th}_{1,3/2,3}$ : polytope de contact entre les pièces 1 et 2 respectivement de la liaison pivot glissant avec $J_{max}$ et de la liaison appui plan intégrant les déformations thermomécaniques.

Le respect de la condition fonctionnelle CF dans cette seconde configuration est défini par la relation (69) et est illustré par la figure 53 :

$$\begin{aligned} -\frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} + \varepsilon_{A-1,1th/2,1th-y} &\geq e_{\min} \\ +\frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} + \varepsilon_{A-1,1th/2,1th-y} &\leq e_{\max} \end{aligned} \tag{69}$$

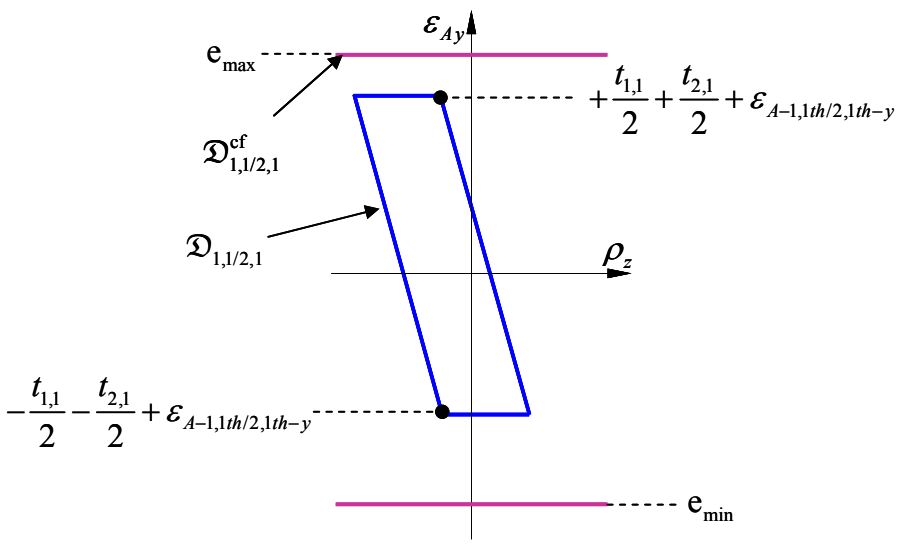



Figure 53 : Respect de la condition fonctionnelle CF : cas de bridage (Pierre 2011).

### 2.6.3 Démarche générale de tolérancement

Un organigramme synthétise la démarche proposée dans la thèse de Laurent Pierre en figure 54. Cette démarche se décompose en deux parties distinctes. La première partie correspond à l'élaboration du modèle d'analyse de tolérances de référence correspondant à la situation de vie de référence. La première partie est une démarche classique d'analyse de tolérances de solides infiniment rigides.

On dispose comme données de départ :

- d'une condition fonctionnelle,
- du modèle CAO du système complet,
- des spécifications de contacts entre les pièces,
- des spécifications géométriques ISO des pièces.

Si le montage du système ne peut pas être assuré sans déformer les pièces (i.e. si la fermeture des cycles indépendants du graphe du système n'est pas possible) ou si le respect de la condition fonctionnelle n'est pas assuré, la méthode générale prévoit de proposer au concepteur de modifier les spécifications géométriques des pièces. Il peut simplement s'agir de diminuer les dimensions des zones de tolérance et d'augmenter les jeux minimum par exemple. Si cela n'est pas suffisant au regard de critères de criticité de fabrication par exemple, il est suggéré au concepteur de modifier des spécifications de contacts. Il peut s'agir de supprimer ou d'ajouter des liaisons et donc potentiellement de modifier le nombre de pièces. En général, cela induit d'importantes modifications dans l'architecture du système.

L'ensemble des situations de vie thermomécanique repose sur le modèle de référence conformément aux hypothèses émises en §2.6.2.1.
Le modèle d'analyse de tolérances d'une situation de vie de thermomécanique particulière est élaboré dans une seconde partie. Les spécifications thermomécaniques du système s'ajoutent aux données de départ nécessaires pour élaborer le modèle de référence. Il s'agit de spécifications de température et de matériaux. Dans une première phase, les spécifications de température sont prises en compte dans une simulation thermique du système complet. Dans une deuxième phase, les déformations thermomécaniques de toutes les pièces à l'état libre sont déterminées. Ces deux phases reposent sur l'utilisation d'un outil de calcul thermomécanique par éléments finis du commerce. Dans une troisième phase, toutes les liaisons sont caractérisées par un polytope de contact thermomécanique intégrant les variations de dimensions et de forme des surfaces potentiellement en contact. Cela permet de déceler les éventuels bridages (ou serrages) locaux entre deux pièces. Finalement, la simulation de fermeture des cycles indépendants permet d'identifier les éventuels bridages de cycles. Si un bridage a été détecté, une étude thermomécanique du système complet permet de déterminer les variations thermomécaniques des surfaces spécifiées par la condition fonctionnelle en termes d'écarts de situation, de dimensions et de forme. Si aucun bridage n'est détecté, le comportement thermomécanique du système ne dépend que des déformations des pièces à l'état libre : aucune autre simulation thermomécanique n'est requise. Les travaux de Bénichou se sont focalisés sur ce cas particulier (Bénichou & Anselmetti 2011).

Enfin, le non respect de la condition fonctionnelle suggère au concepteur de modifier les spécifications thermomécaniques en plus des spécifications géométriques des pièces et des spécifications de contact du système. La modification des spécifications de température, de matériaux ou de contact peut induire en général d'importantes modifications dans l'architecture du système.

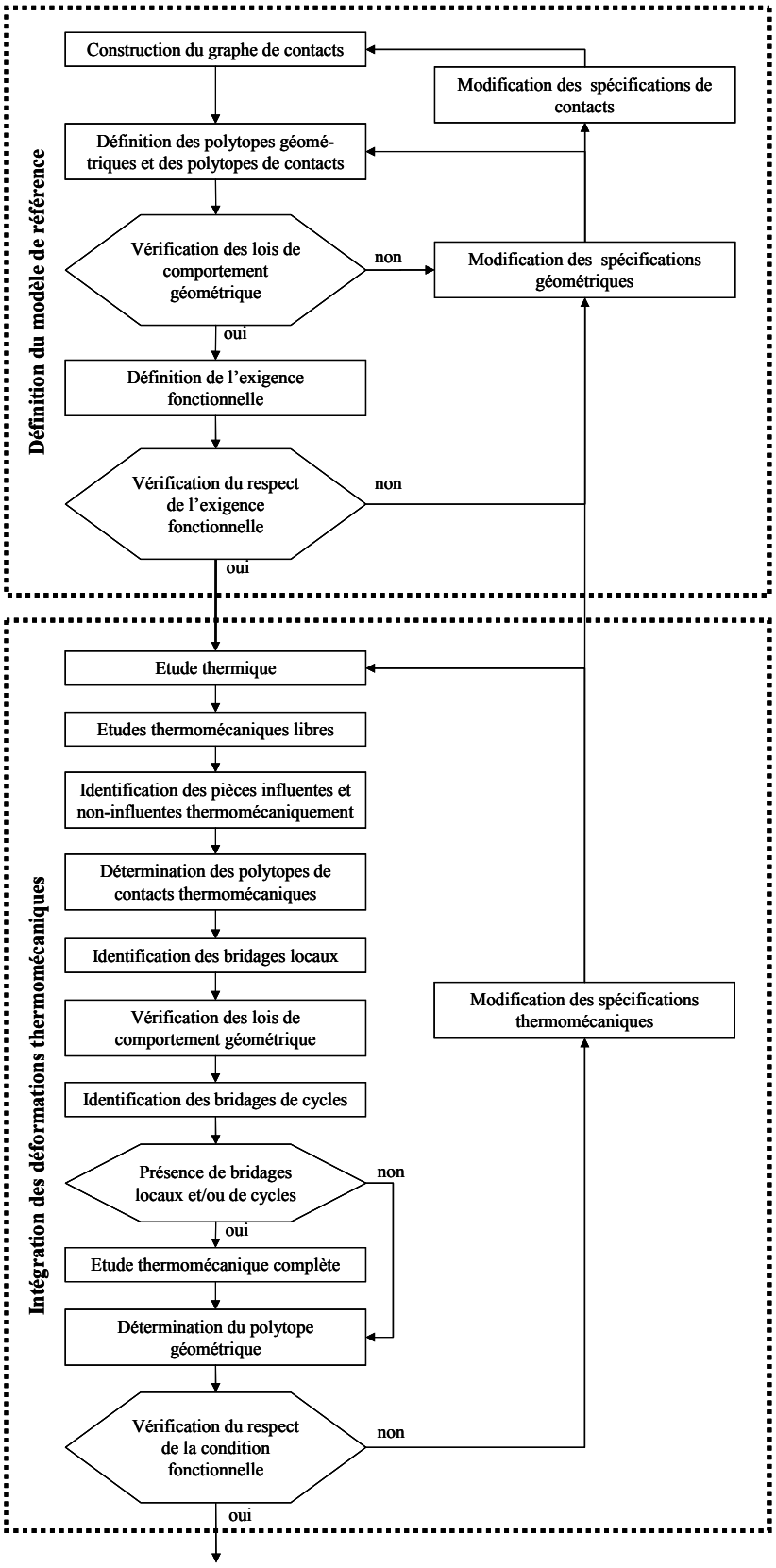



Figure 54 : Organigramme général d'une démarche d'analyse de tolérances (Pierre 2011).

La démarche proposée a permis de caractériser le jeu rotor stator d'une turbine pour une situation de vie particulière en fonction :

- des spécifications géométriques ISO des pièces,
- des spécifications de contacts entre les pièces,
- des spécifications de températures de la turbine,
- des spécifications matériaux des pièces.

Cela a permis de qualifier une turbine vis-à-vis de deux critères de performance : le rendement énergétique et le risque de touche.

### 2.6.4 Qualification d'architectures de turbines

La qualification d'une architecture de turbine repose sur un compromis entre le risque de touche d'une aube sur le stator et le rendement énergétique. Ce compromis entre ces deux critères implique la maîtrise du jeu rotor stator J et de la section de fuite notée $S_{fuite}$ durant toutes les phases de fonctionnement de la turbine (Pierre et al. 2009a).

Le critère de performance d'une turbine est caractérisé par :

- le risque de touche d'une aube sur le stator : il est corrélé à une valeur minimale du jeu à respecter,
- le rendement énergétique : il dépend du débit gazeux qui s'écoule entre les sommets des pales et le stator. Ce débit est corrélé à la section de fuite. La section de fuite est la différence de section entre le rotor et le stator.

Le jeu local entre les aubes et le stator $C(\theta)$ doit être suffisant pour éviter une touche sur l'ensemble de la périphérie de la turbine (voir figure 55).

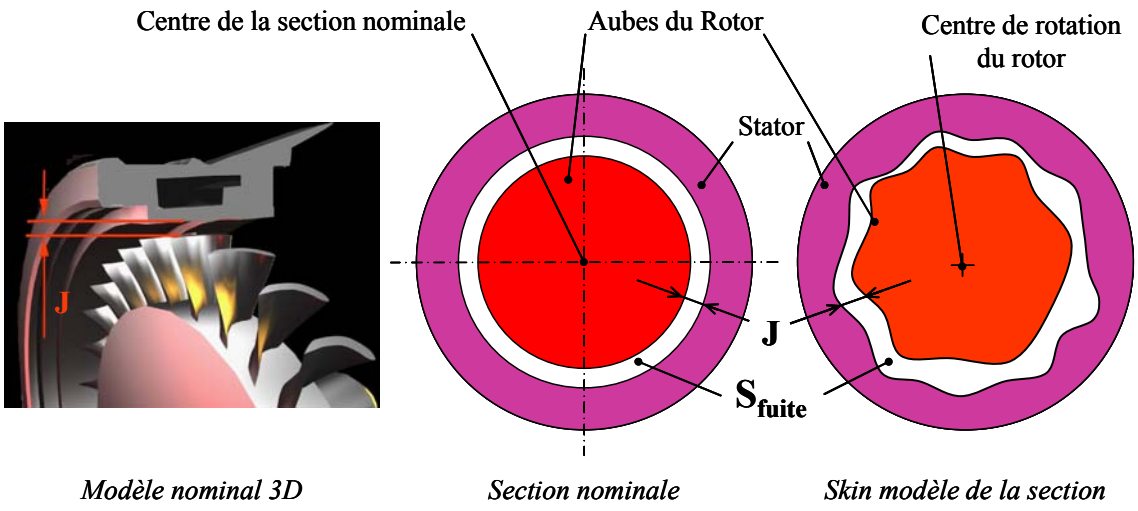



Figure 55 : Section de fuite et jeu en sommet d'aube (Pierre 2011).

Le critère de touche peut être exprimé par la relation (70) où $C_{min}$ représente la valeur du jeu minimum garantissant le fonctionnement correct de la turbine.

$$\forall \theta \in [0;2\pi[ \quad C(\theta) > C_{min} \tag{70}$$

La fuite de gaz entre le stator et le rotor, est déterminée par la section de fuite $S$ : voir figure 55.
Pour maximiser le rendement énergétique d'une turbine il faut minimiser la section de fuite définie par la relation suivante :

$$S < S_{max} \tag{71}$$

Les travaux menés dans la thèse de Laurent Pierre se sont focalisés sur la variabilité architecturale des parties statiques de la turbine haute pression. L'influence des solutions techniques de brides (liaison encastrement entre deux composants du stator : liaison entre le carter 2 et l'anneau 1, voir figure 56) a été analysée (Pierre et al. 2009a), (Pierre et al. 2010).

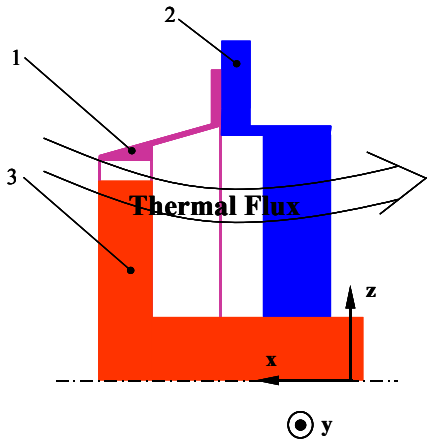



Figure 56 : Modèle simplifié d'une turbine (Pierre et al. 2010).

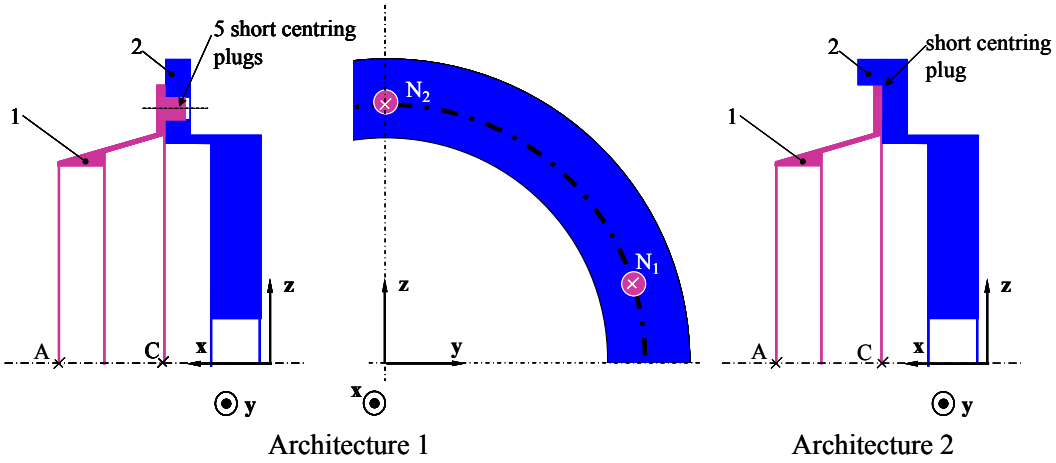



Figure 57 : Architectures étudiées.

Deux variantes d'architectures sont définies où l'architecture 1 est réalisée avec une bride constituée :

- d'une liaison appui plan,
- de plusieurs pions équirépartis sur un cercle encastrés dans 1, respectivement en centrage court dans des alésages de 2.

L'architecture 2 est réalisée avec une bride constituée :

- d'une liaison appui plan,
- d'un centrage court de la collerette de l'anneau 1 dans 2.

La figure 58 illustre les écarts thermomécaniques du profil en bord d'attaque de l'anneau de turbine.

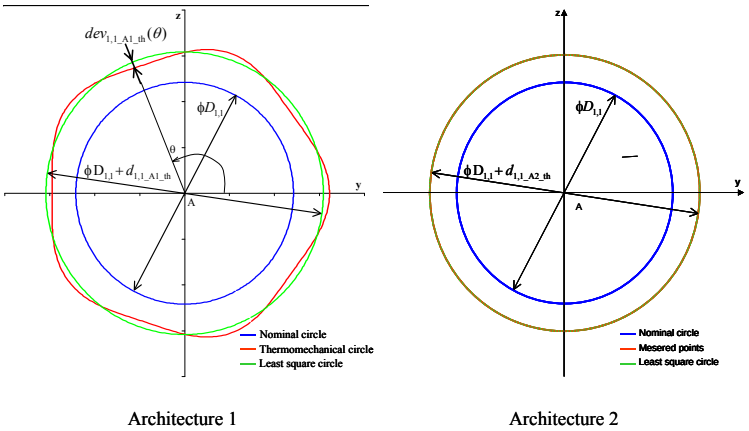



Figure 58 : Ecarts thermomécaniques d'un profil de l'anneau (Pierre et al. 2010).

Les conclusions de cette analyse font état qu'au regard du critère du risque de touche, l'architecture 2 est la meilleure des deux solutions ; alors qu'au regard de la section de fuite, l'architecture 1 est la plus performante.
La démarche proposée permet au concepteur d'évaluer l'influence du choix des formes, des dimensions, des tolérances et des matériaux des pièces, des liaisons entre les pièces très tôt dans le cycle de conception d'une turbine.

Ce travail a contribué à valider des choix d'architectures sur le stator d'un démonstrateur qui ont été validés sur un banc d'essais. Ces choix sont détaillés dans une annexe classée confidentielle au chapitre applicatif de la thèse.

## 2.7 Bilan et perspectives

### 2.7.1 Les enjeux de la double description

#### 2.7.1.1 Un premier bilan

Le respect d'une exigence fonctionnelle est caractérisé par l'inclusion d'un polytope calculé dans un polytope fonctionnel. La double description permet d'estimer l'influence des opérandes sur une exigence à l'image des coefficients d'influence dans une chaîne de cotes 3d d'une approche paramétrique classique. De plus, dans chaque opérande il est possible d'identifier les sommets influents et les demi-espaces associés. Cela est indispensable pour pouvoir optimiser le respect d'une exigence en prenant en compte des règles de répartition des tolérances sur les pièces.
Aujourd'hui nous nous sommes uniquement focalisé sur un traitement au pire des cas. Cependant, cette approche est parfaitement transposable à des approches statistiques. Une solution serait de caractériser des taux de conformité inférieur à 100% sur les opérandes et d'évaluer l'impact de ces non-conformités sur l'inclusion du polytope calculé dans un polytope fonctionnel.

De plus, il existe des travaux sur les polytopes dans des approches probabilistes : ils mériteraient d'être étudiés afin de vérifier si certains concepts ne sont pas transposables en tolérancement géométrique (Calka 2009), (Germain 2007).
Un des inconvénients des polytopes est que les temps de calculs des sommes peuvent devenir très rapidement rédhibitoires quand le nombre de sommets et de facettes augmentent. La double description ne fait qu'accroître la complexité des sommes et donc également les temps de calcul.
Des solutions existent comme la détermination d'enveloppes convexes de points dans $\mathbb{R}^n$ (Qhull 2012). Cependant, ces solutions ne gère pas de traçabilité sur les sommets et ne permettent pas d'entrevoir une optimisation d'un polytope fonctionnel autrement que pas des approches empiriques. Par exemple, une enveloppe convexe de points dans $\mathbb{R}^n$ déterminée par Qhull contient des points ne correspondant pas à des sommets. Mon point de vue est que ce type d'approches permet seulement d'obtenir un résultat plus rapidement qu'avec une approche en double description, mais ce type d'approche n'est pas efficace dans une démarche d'optimisation des tolérances. Cependant les algorithmes d'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^n$ nous sont d'une grande utilité pour la validation des résultats obtenus en double description.
La double description induit un surcoût en terme de complexité algorithmique et donc en temps de calcul par rapport à d'autres approches (Fukuda & Weibel 2010).
Un des axes de recherche que je souhaite développer dans le futur est d'amortir ce surcoût :

- en optimisant le nombre de points de calculs des demi-espaces des opérandes vis-à-vis d'une exigence,
- en optimisant les algorithmes déterminant les sommes en double description,
- en optimisant la mise en œuvre des opérations sur les polytopes dans la détermination d'un polytope calculé.

Ces trois aspects vont être développés dans les paragraphes suivants.

#### 2.7.1.2 Analyse des tolérances par des polytopes adaptatifs

Cette approche est semblable à celles mises en œuvre en calculs par éléments finis où sont uniquement raffinés les maillages dans les zones jugées sensibles d'un point de vue contraintes ou déformations en mécanique du solide par exemple.

Une première simulation du respect d'une exigence peut être réalisée avec très peu de points de discrétisation sur les surfaces d'un mécanisme et donc très peu de demi-espaces et de sommets dans les opérandes. Après une première simulation, les sommets les plus critiques sont détectés dans le polytope cible. Grâce à la double description, il est possible d'identifier les sommets et les facettes des opérandes générant les sommets les plus sensibles. La méthode consiste à ajouter des points supplémentaires sur les surfaces du mécanisme au voisinage des points générant les demi-espaces les plus critiques des opérandes. Cela permettrait de mettre de la précision et donc de passer du temps uniquement sur les zones critiques pour un système mécanique donné au regard d'une exigence. Cela constituerait une méthode d'analyse de tolérances par polytopes adaptatifs.

#### 2.7.1.3 Analyse "top-down" (descendante) des tolérances par des opérations sur des polytopes

Jusqu'à présent, les travaux développés sur les polytopes s'inscrivent dans une démarche classique d'analyse de tolérances alors que la double description laisse entrevoir la possibilité de développer une démarche purement de synthèse de tolérances. Cela consiste à partitionner le polytope cible en polytopes contributeurs. A titre d'exemple, les contributions des T-Maps opérandes dans le remplissage d'un T-Map cible sont caractérisées par le ratio entre le volume

de l'opérande sur le volume de la cible (Mujezinovic et al. 2004). Les polytopes contributeurs sont ensuite transférés sur les polytopes opérandes. Ce transfert du polytope calculé peut être réalisé au travers de la structure topologique d'un système mécanique, grâce à la double description, jusqu'à atteindre le niveau de détail des polytopes opérandes. Les polytopes géométriques obtenus seraient ensuite conformés à des spécifications géométriques qui ne seraient très probablement pas normalisées. Ces spécifications sont à identifier formellement et pourraient servir de force de proposition pour les évolutions des spécifications ISO dans le futur. En usant d'une expression anglo-saxonne, je qualifierais cet axe de travail d'analyse "top-down" (descendante) des tolérances. Sur ce point j'envisage d'y associer les compétences d'A. Ballu.

### 2.7.2 Précision et robustesse des polytopes

#### 2.7.2.1 Précision d'un modèle de spécification formalisé par un polytope

Les variations géométriques par des polytopes repose sur des ensembles finis de contraintes géométriques impliquant une discrétisation d'un élément géométrique (voir 2.3.2). Le nombre de points conditionne la précision du modèle. Le plus souvent, les points de discrétisation définissent une forme géométrique inscrite dans la forme exacte du modèle nominal de l'élément géométrique. Ceci est du à la convexité de la plupart des éléments géométriques délimités par les éléments discrétisés. Par exemple si l'élément géométrique est un plan de contour circulaire, la discrétisation consiste à approximer le contour circulaire par un polygone inscrit; si l'élément géométrique est un cylindre, la discrétisation consiste à approximer le cylindre par une forme extrudée de section polygonale inscrite dans le cylindre : voir figure 59.

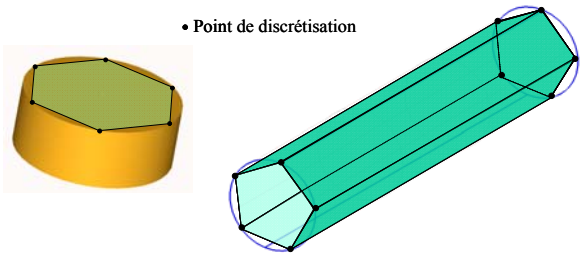



Figure 59 : Plan de contour circulaire discrétisé en 6 points, cylindre discrétisé en 10 points.

Ceci a pour conséquence qu'un polytope majore le volume théorique que l'on obtiendrait avec un domaine. Plus précisément, le polytope circonscrit la forme théorique obtenue par un domaine. La figure 60 illustre le polytope géométrique d'un plan dont le contour circulaire est discrétisé en 6 points avec le domaine correspondant ; elle illustre une projection dans $\mathbb{R}^3$ du 4-polytope d'un cylindre dont les deux sections sont discrétisées en 5 points avec le domaine correspondant.

Par ailleurs, si l'élément géométrique discrétisé n'est pas convexe (surface de révolution de forme diabolo par exemple), le polytope minore le volume théorique obtenu par un domaine.
Une des solutions pour prendre en compte la précision des polytopes est d'adapter la discrétisation en fonction de la sensibilité des sommets des opérandes vis-à-vis d'une condition fonctionnelle. Cela rejoint la stratégie du §2.7.1.2.

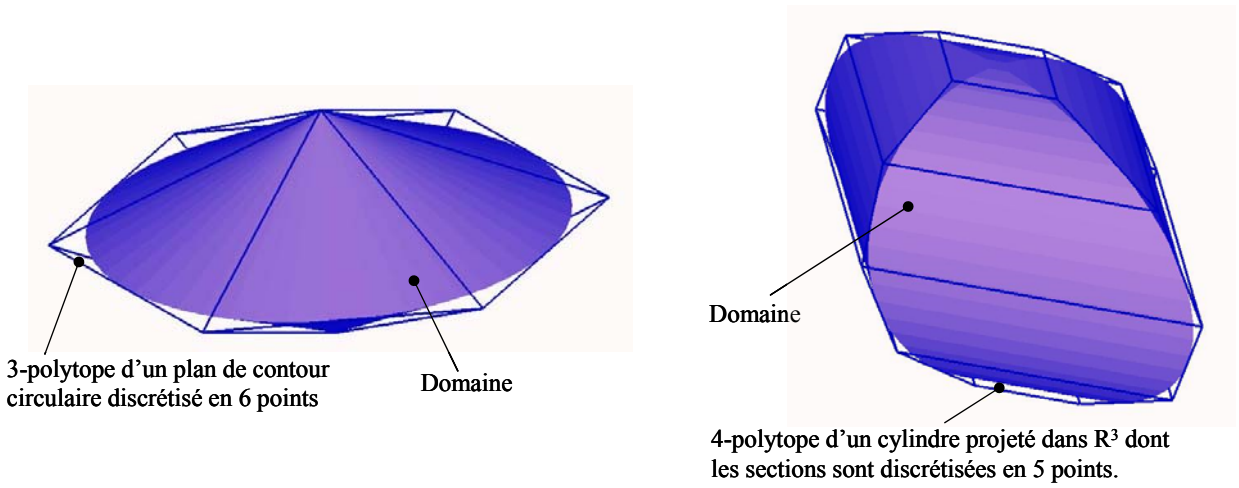



Figure 60 : Polytopes et domaines.

#### 2.7.2.2 Précision numérique et robustesse des résultats

Les opérations consistent à déterminer des intersections entre des demi-espaces définissant soit des cônes primaux (détermination des polytopes opérandes et intersection de polytopes), soit des cônes duaux (somme de Minkowski). Cela est possible grâce à la dualité entre les cônes polyédriques primaux et duaux.
Un polytope calculé est donc le résultat de très nombreuses intersections entre des demi-espaces réalisées les unes à la suite des autres. C'est la somme de Minkowski qui génère le plus grand nombre d'intersections de cônes polyédriques : la détermination de $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C}$ génère $n_{vA}\times n_{vB}$ intersections de cônes duaux (Teissandier & Delos 2011a), $n_{vA}$ et $n_{vB}$ étant les nombres respectifs de sommets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. De plus, beaucoup d'intersections retournent des cônes duaux d'une dimension inférieure à $n$ et ne participe donc pas à la détermination de l'éventail normal de la somme dans $\mathbb{R}^n$.

Une des solutions proposées par V. Delos est de diminuer le nombre d'intersections à réaliser dans une somme en utilisant le concept de calotte polyédrique.
Pour un sommet particulier $a_i$ de $A$ correspond un ensemble de sommets $b_i$ de $B$ tel que : $a_i+b_i\in V_{\mathcal{C}}$ avec $V_{\mathcal{C}}$ ensemble des sommets de $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Cet ensemble noté $V_{\mathcal{B}+}(a_i)$ est la calotte polyédrique du polytope B associé au sommet $a_i$ de $A$. L'ensemble $V_{\mathcal{B}-}(a_i)$ pour un sommet particulier $a_i$ de $A$ correspond un ensemble de sommets $b_i$ de $B$ tel que : $a_i+b_i\notin V_c$. Pour tout sommet $a_i$, l'ensemble $V_{\mathcal{B}+}(a_i)$, ensemble connexe, est parcouru en déterminant sa frontière avec $V_{\mathcal{B}-}(a_i)$. Cela évite de déterminer les intersections de cônes duaux ne participant à la définition de l'éventail normal de $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Une autre alternative possible consisterait à déterminer une somme de Minkowski par des fermetures convexes de cônes primaux correspondant par dualité à des intersections de cônes duaux.

Une intersection entre deux demi-espaces génère un résultat très sensible à la coïncidence des frontières des demi-espaces. Cela signifie que deux normales de demi-espaces presque parallèles peuvent perturber de manière très significative le résultat d'une intersection. Dans la détermination d'une somme, ce cas est rencontré dans la sommation de polytopes

homothétiques, cas très classiques de sommes en analyse de tolérances. Une des conséquences est que numériquement on détermine des sommets d'une somme de Minkowski en trop ce qui est très pénalisant. La sensibilité du résultat est encore un peu plus exacerbée par deux demi-espaces dont les frontières sont presque confondues. Dans la détermination d'un polytope opérande, ce cas est rencontré pour des demi-espaces définissant un polytope aplati analogue à un parallélogramme aplati de $\mathbb{R}^2$. Le paragraphe suivant présentent des perspectives de travail prenant en compte le problème de précision numérique des algorithmes d'intersections par différentes stratégies de mises en œuvre d'opérations sur des polytopes.

### 2.7.3 Stratégies de mises en œuvre des opérations sur les polytopes

Généralement, un système mécanique doit satisfaire plusieurs conditions fonctionnelles simultanément. Chaque condition fonctionnelle est potentiellement exprimée en un point particulier dans une base particulière. L'inclusion du polytope calculé dans le polytope fonctionnel doit être vérifiée tel que les deux polytopes soient exprimés au même point dans la même base.

A cet égard, plusieurs stratégies de mises en œuvre de calcul sont possibles, indépendamment des trois stratégies de calcul décrites dans le paragraphe précédent, pour la détermination des sommes.

Une stratégie de mise en œuvre peut consister à déterminer pour chaque condition les opérandes au point d'expression et dans la base d'expression de la condition. En ce même point, sont ensuite déterminés les opérandes et réalisées les diverses sommes et intersections permettant de déterminer le polytope calculé.

Cela signifie que les opérandes sont déterminés plusieurs fois (autant de fois qu'il y a de conditions fonctionnelles) et certaines sommes et intersections seront également réalisées plusieurs fois. Cela est généralement très pénalisant en temps de calcul, de plus la détermination de certains opérandes et de certaines sommes ne seront pas réalisées dans des conditions optimales au regard de la robustesse des résultats.
Par exemple, le changement de point d'expression modifie l'orientation des demi-espaces (i.e. déforme un polytope). La probabilité d'avoir à déterminer des polytopes aplatis est très grande ; cela pose des problèmes de robustesse dans la détermination des opérandes amplifiée par les diverses sommes et intersections à réaliser.

Une autre stratégie consiste à privilégier certains points pour la détermination des opérandes et des sommes. Ainsi, il est possible d'éviter des cas singuliers générant des coïncidences entre des demi-espaces. De plus, le choix du coefficient d'homogénéisation a une grande influence sur la coïncidence des demi-espaces d'un opérande.
Le changement de point d'expression et le changement de base d'un polytope sont des transformations affines qui conservent la topologie des polytopes. Nous comptons tirer profit de cette propriété inhérente à la problématique du tolérancement pour réaliser certaines opérations dans des points et des bases particulières pour ensuite déduire les résultats par des transformations affine dans la base et au point d'expression de l'exigence.
Cette recherche de stratégies fait partie intégrante de la thèse de Lazhar Homri.

### 2.7.4 Les enjeux de la prise en compte des variations d'origine thermomécanique

#### 2.7.4.1 Un premier bilan

Les travaux conduits dans le cadre de l'ERT 1070 IMPACT ont permis de modéliser les écarts géométriques à caractère multiphysique d'une turbine à gaz, pour plusieurs points de fonctionnement particuliers et dans un modèle unique. Ainsi les effets couplés des différentes variations générant des phénomènes de bridage entre les pièces peuvent être pris en compte. Actuellement, les simulations thermomécaniques et les simulations de chaînes de cotes de solides infiniment rigides sont souvent réalisées de manière indépendante dans deux outils distincts ; elles ne permettent pas de prendre en comptes ces couplages.

Une des perspectives de ce travail est de prendre en compte des déformations plastiques pouvant apparaître au cours du cycle de fonctionnement du système étudié. Pour cela, la situation de vie de référence ne serait plus la même pour toutes les situations de vie thermomécaniques mais évoluerait en intégrant les déformations plastiques au cours du cycle de fonctionnement (Pierre et al. 2009a). La méthode générale proposée au §2.6.3 ne serait pas pour autant remise fondamentalement en cause. De même, les déformations résiduelles générées par les processus d'obtention de pièces et d'assemblages pourraient être prises en compte.

Par ailleurs, les phénomènes transitoires peuvent générer des configurations géométriques singulières plus critiques, au regard de certaines exigences fonctionnelles, que les situations de vie thermomécanique discrétisant le fonctionnement du système. Une des voies envisageables pour modéliser ces phénomènes très complexes serait l'utilisation de la méthode des quadripôles. Des travaux engagés dans l'ERT en collaboration avec le département TREFLE « TRansferts Et FLuidEs » d'I2M doivent être exploités et poursuivis dans un futur proche.

Ces travaux se sont focalisés sur l'estimation des fuites entre le stator et le rotor d'un turbomoteur. Cependant, toutes les liaisons, en amont et en aval, contribuent à des risques de fuites et de réintroductions de flux de refroidissement dans la veine qui vont impacter le rendement énergétique. Notre méthode peut donner des éléments de qualification et d'évolution des ces différents flux. Cette perspective impose de prendre en compte les déformations locales et les défauts de forme des surfaces induits par les procédés d'obtention. Des travaux dans cette direction sont en cours dans le département IMC en particulier ceux de la thèse d'Hoai Nam Lé dirigés par Alex Ballu. Les qualifications des résultats pourront s'appuyer sur les travaux menées dans le cadre de l'ERT et se poursuivent actuellement dans le cadre du département TREFLE.

#### 2.7.4.2 Intégration de paramètres inhérents à des phénomènes physiques dans les polytopes

En §2.3.2, l'ensemble des positions relatives entre deux surfaces a été caractérisé par un ensemble de contraintes définissant un ensemble fini de demi-espaces de type $\bar{H}_k^-$ :

$$\bar{H}_k^- : a_{k1}.x_1 + a_{k2}.x_2 + a_{k3}.x_3.a_{k4}.x_4 + a_{k5}.x_5 + a_{k6}.x_6 \leq b_k$$

Les coefficients $a_{ki}$ dépendent uniquement de la géométrie nominale de l'élément géométrique discrétisé et du point d'expression du polytope. Le second membre $b_k$ dépend de la dimension de la zone de tolérance (polytope géométrique) ou bien du jeu (polytope de contact) dans le cas de systèmes modélisés en solides infiniment rigides. En intégrant des déformations d'origine thermomécanique en §2.6.2, le second membre $b_k$ prend en compte un

déplacement local provoqué par des déformations du système mécanique en plus de la dimension de la zone de tolérance ou du jeu. Ce déplacement local provient d'un calcul par éléments finis.
Un déplacement local provoque une translation du demi-espace entre la situation de vie de référence et une situation de vie thermomécanique : voir figure 61.
Une des perspectives à ce travail est d'exprimer $b_k$ directement en fonction de paramètres de conditions limites thermiques (flux de convection caractérisé par une température de flux et un coefficient de convection par exemple). Les relations exprimant les seconds membres $b_k$ pourraient être obtenues pas des plans d'expériences numériques. Ainsi les polytopes opérandes n'auraient plus une dimension intrinsèque inférieure ou égale à 6 mais seraient de dimension supérieure afin d'intégrer ces paramètres physiques supplémentaires.

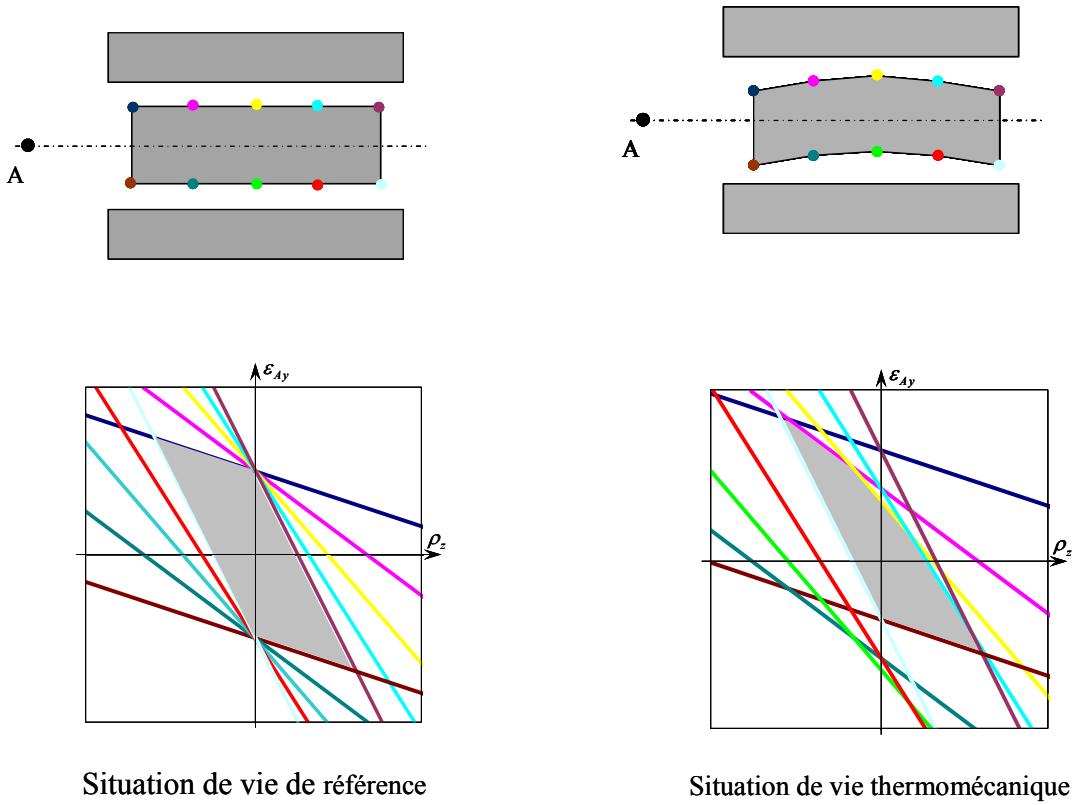



Figure 61 : Evolution d'une section du polytope de contact de la liaison pivot glissant 1,2/2,2 de l'exemple fil rouge (Pierre 2011).

Dans l'ERT IMPACT nous avons étudié des systèmes mécaniques où les déformations sont inhérentes au fonctionnement du système : le cycle thermodynamique d'une turbine à gaz.
Plus généralement, les déformations peuvent aussi provenir de contraintes résiduelles inhérentes à un procédé de mise en forme de pièces métalliques (moulage, forgeage) ou composite (Resin Transfer Molding RTM), infusion), d'usinage, etc. Cela laisse entrevoir de nombreuses perspectives en particulier l'intégration de variations géométriques induites par des contraintes résiduelles de procédés de mise en forme de pièces métalliques (moulage, forgeage) ou composite (Resin Transfer Molding RTM), infusion), d'usinage, etc. La prise en compte des contraintes résiduelles du procédé RTM est l'un des aspect développés dans la thèse de serge Mouton ; nous y reviendrons dans le chapitre 4 de ce mémoire.

### 2.7.5 Architecture logicielle d'une application d'analyse de tolérances

Les travaux liés à l'analyse des tolérances par des polytopes sont développés et intégrés dans une plate-forme logicielle comprenant un outil de pré et post-traitement des données manipulées en tolérancement géométrique et un solveur de polytopes. L'outil de pré et post-traitement est développé dans l'environnement Open CASCADE essentiellement par moi-même avec l'appui de différents stagiaires (Dugois 2011) au sein d'I2M. Le solveur de polytopes est développé principalement par V. Delos au MAP5 de l'Université Paris Descartes. Les trois activités grisées sont aujourd'hui opérationnelles dans $\mathbb{R}^n$ : voir figure 62. Les autres activités ne sont pas encore développées. Elles ont vocation à l'être dans les futurs travaux présentés dans le §2.6. La plate-forme est intrinsèquement dédiée aux systèmes mécaniques de solides infiniment rigides.

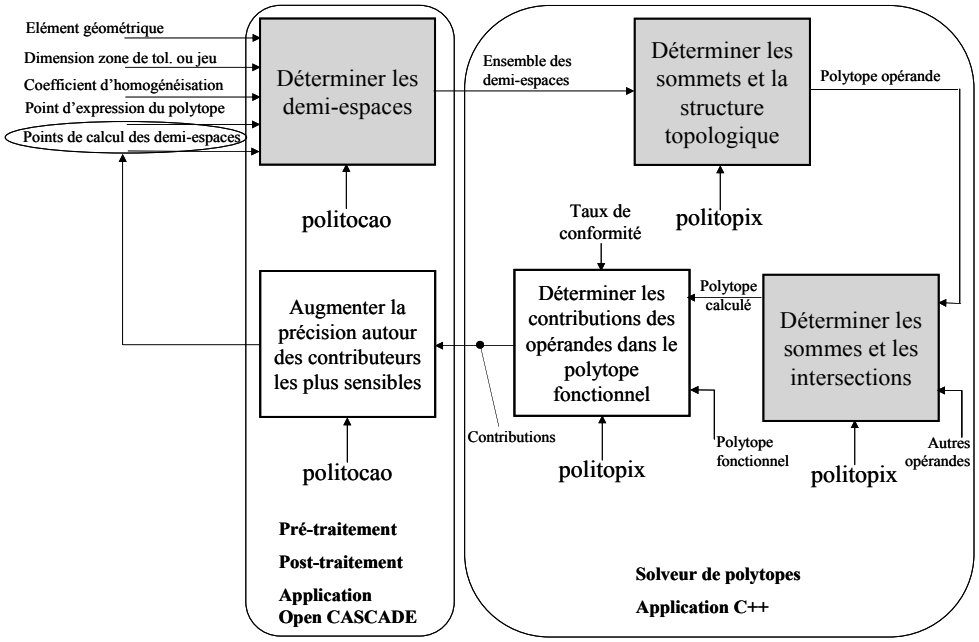



Figure 62 : Plate-forme d'analyse de tolérances.

# 3 TRACABILITE DES SPECIFICATIONS DANS LE CYCLE DE VIE DU PRODUIT

## 3.1 Avant-propos

Les outils de chaînes de cotes mis en œuvre dans une démarche d'analyse et ou de synthèse de tolérances consistent à formaliser une relation entre, d'une part une condition géométrique (exprimée sur le produit), et d'autre part, les spécifications géométriques (exprimées sur les pièces) et les spécifications de contacts (exprimées entre deux pièces potentiellement en contact), garantissant le respect de la condition géométrique.
D'une manière générale, la traçabilité des conditions géométriques n'est pas assurée par les outils de chaînes de cotes. En effet, le lien entre les spécifications géométriques et la condition géométrique dont le concepteur veut garantir la satisfaction n'est en général pas conservé. Cela signifie que le concepteur ne dispose d'aucune aide pour savoir de quelle condition provient une spécification donnée. Etant donné qu'un produit doit satisfaire plusieurs conditions simultanément, le concepteur est incapable d'apprécier ou d'évaluer les conséquences du non respect d'une spécification géométrique vis à vis des fonctions attendues du produit.
De plus, le tolérancement géométrique est mis à disposition d'un acteur du cycle de conception comme une application métier d'une solution de *Conception Fabrication Assistée par Ordinateur* (*CFAO*) dont le noyau est un modeleur géométrique. Or, un modeleur géométrique ne supporte pas la définition incomplète et ne gère pas les alternatives de conception. Cela a pour conséquence de reléguer le tolérancement en conception détaillée. Une des conséquences est que le tolérancement n'influe guère les prises de décision très amont dans le cycle de conception.

Au début des années 2000, motivé par les opportunités de bénéficier d'un soutien ministériel du Réseau National des Technologies Logicielles (RNTL), j'ai abordé la problématique du tolérancement géométrique d'un point de vue structuration et manipulation des données dans le cycle de conception du produit. En collaboration avec Alex Ballu très impliqué dans l'ISO TC 213 et la société Open CASCADE SA, j'ai développé un environnement de pré et post traitement pour le transfert de spécifications géométriques, indépendant de tout outil de chaînes de cotes. Cet environnement repose sur un modèle produit mis en œuvre sur une structure de données, proposant un environnement de travail collaboratif (aspect multi-vues), permettant de couvrir le cycle de conception (aspect multi-niveaux) tout en assurant la traçabilité des spécifications. Ce travail est issu des travaux du projet IPPOP (Intégration Produit, Processus, Organisation pour l'amélioration de la Performance en ingénierie ), projet de type exploratoire labellisé par le RNTL de Décembre 2001 à Juin 2005, auquel prenait part la thèse de Jérôme Dufaure.
Dans la continuité du projet IPPOP, j'ai proposé de généraliser les concepts du mécanisme de transfert de spécifications géométriques à des spécifications techniques (liées au produit) pour ensuite intégrer des spécifications de type organisationnel du cycle de conception. Ces travaux, auxquels ont pris part la thèse de manuel Gonçalves (2006-2010), ont été réalisés avec la collaboration de Philippe Girard coordinateur national du projet IPPOP et membre du groupe de recherche Productique du laboratoire IMS de l'Université Bordeaux 1.

Ce chapitre présente la synthèse des travaux liés à la thèse de Jérôme Dufaure. Elle résume le mécanisme de transfert de spécifications géométriques permettant d'assurer les liens de traçabilité de spécifications géométriques. Le déploiement de ce mécanisme à des

spécifications projet appelées spécifications Produit-Processus-Organisation (PPO) réalisés dans la thèse de Manuel Gonçalves sera abordé de façon très succincte : je n'envisage pas de perspectives de travail dans cette direction à court et moyen terme. Enfin seront introduites quelques perspectives envisagées sur la traçabilité des spécifications inhérentes au cycle de conception d'un produit.

## 3.2 Traçabilité des spécifications géométriques

### 3.2.1 Objectifs et enjeux

Les exigences fonctionnelles d'un produit induisent de nombreuses spécifications dans le cycle de conception sur :

- les pièces constitutives du produit (spécifications géométriques ISO en général),
- les processus d'assemblage des divers sous-ensembles et du produit lui même (spécifications procédés d'assemblage),
- les processus de fabrication des pièces (spécifications procédés de fabrication),
- les processus de contrôle de conformité (spécifications de procédés de métrologie).

Ces spécifications sont générées tout au long du cycle de conception et pour de nombreuses expertises métier liées à l'assemblage, la fabrication et à la métrologie. Dans la communauté anglo-saxonne, cette problématique s'intègre souvent dans des travaux de "*Design for X*". Par exemple le thème "*Design for Manufacturing and Assembly*" (*DFMA*) est très en vogue dans le secteur aéronautique.

Pour asseoir la traçabilité des spécifications il est indispensable de pouvoir décrire un produit à l'aide d'un modèle produit intégrant les notions de multi-niveaux et de multi-vues (Dufaure & Teissandier 2003). Ce modèle doit être le coeur de la modélisation des données produit afin de s'affranchir des problèmes techniques des modeleurs géométriques : voir figure 63. Historiquement, les données partagées entre diverses application métiers dans un système de CFAO sont restreintes aux données pilotant les formes et les dimensions des pièces.

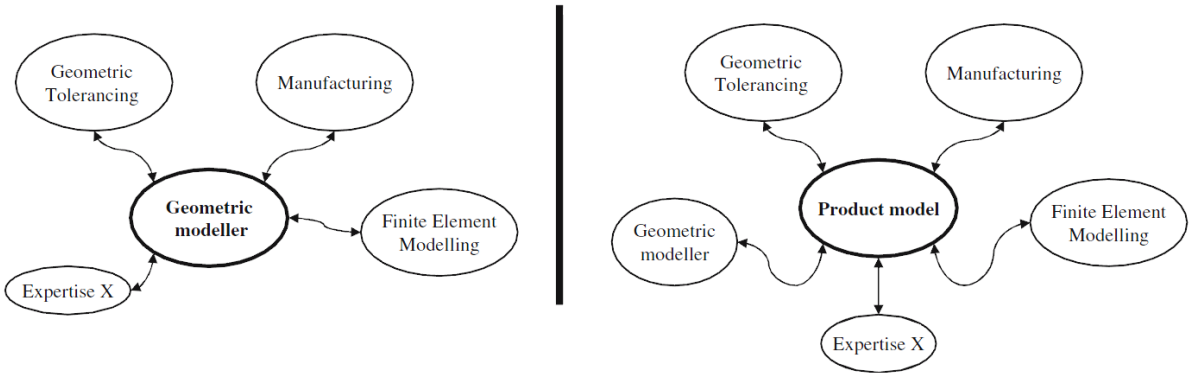



Figure 63 : Environnement de conception basé sur un modeleur géométrique versus environnement de conception basé sur un modèle produit (Dufaure & Teissandier 2008).

Les premiers travaux sur les modèles produit datent du début des années 90 initiant ce que l'on appelle aujourd'hui communément la gestion de cycle de vie du produit (*Product Lifecycle Management (PLM)*). Parmi ceux-ci, on peut citer les travaux de (Krause et al. 1993) jetant les bases des notions de multi-niveaux et multi-vues, de (Gero 1990) définissant la notion de situation de vie par le modèle Function-Behavior-State et enfin ceux de (Dupinet 1991) en France introduisant le concept des graphes technologique, logique et produit. Le

modèle produit pour le tolérancement (Dufaure et al. 2004) est un sous-ensemble du modèle intégré produit/processus/organisation (Roucoules et al. 2006) élaboré par le consortium IPPOP dont le LMP a fait partie.
Un des aspects fondamentaux lié à la structuration des données est que le modèle produit garantit la cohésion des données d'un produit. En aucun cas il en assure la cohérence. La cohérence des données d'un point de vue qualitatif et quantitatif relèvent du savoir faire des acteurs du cycle de conception et des compétences des outils mis en œuvre (outil de chaîne de cotes (MECAmaster SARL 2012), analyseur syntaxique de spécifications (Dassault Systèmes 2012), assistance à la mise en place de spécifications (Anselmetti et al. 2010) ...).
Seuls des outils commerciaux ont été considérés dans ce projet en particulier CATIA/Functional Tolerancing and Annotations et MECAmaster.

### 3.2.2 Formalisation d'un transfert de spécifications

Le transfert de spécifications consiste à déduire les spécifications d'un niveau de détail *n*+1 connaissant les spécifications du niveau de détail supérieur *n* : voir figure 64. Par convention le niveau de détail *n*+1 est positionné plus en aval dans le cycle de conception que le niveau de détail *n*.
Deux types d'évolutions entre un niveau de détail *n* et un niveau de détail *n*+1 ont été définies : les évolutions structurelles et les évolutions fonctionnelles (Teissandier & Dufaure 2010b).

Une évolution structurelle consiste à transformer un composant de type pièce en un composant de type sous-assemblage en le décomposant en plusieurs pièces.
Une évolution fonctionnelle consiste à décomposer une liaison en plusieurs liaisons élémentaires ou alors à substituer une fonction par un composant standard (Dufaure et al. 2007). Souvent une évolution d'un niveau de détail *n* à un niveau *n*+1 est la résultante d'une évolution structurelle combinée à une évolution fonctionnelle.

En général, un transfert de spécifications met en œuvre un outil de chaînes de cotes et prend en compte les modèles de spécifications ISO. De plus, il peut prendre en compte des critères de capabilités de moyens de fabrication ou d'assemblage et des critères de coûts de fabrication : voir figure 64.

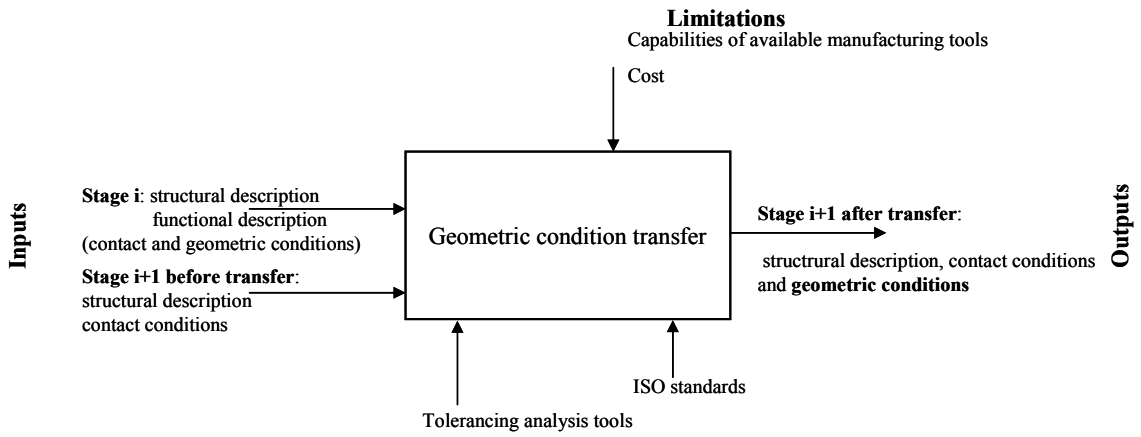



Figure 64 : Transfert de spécifications (Teissandier & Dufaure 2010b).

En considérant que le déroulement d'un projet est jalonné en plusieurs niveaux de détail, cela permet de conceptualiser l'activité tolérancement dans le cycle de conception selon un principe générique : voir figure 65.

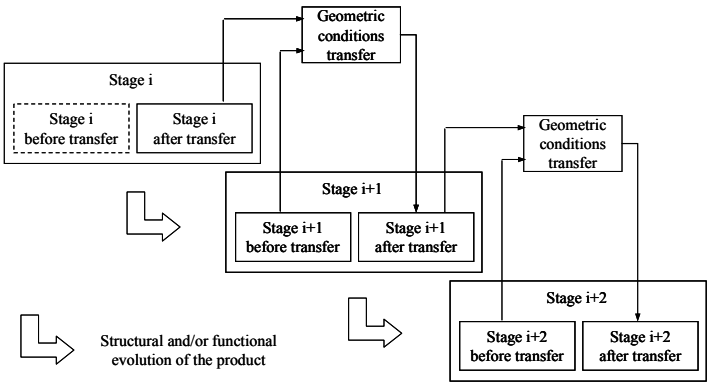



Figure 65 : Activité transfert de spécifications dans un cycle de conception (Teissandier & Dufaure 2010b).

Le paragraphe suivant va préciser les données manipulées avec les liens permettant d'assurer la traçabilité des spécifications.

### 3.2.3 Modèle produit pour le tolérancement géométrique

#### 3.2.3.1 Les entités de base : composant, interface et fonction

Le modèle produit IPPOP repose sur trois entités de base : le composant, l'interface et la fonction, voir figure 66.

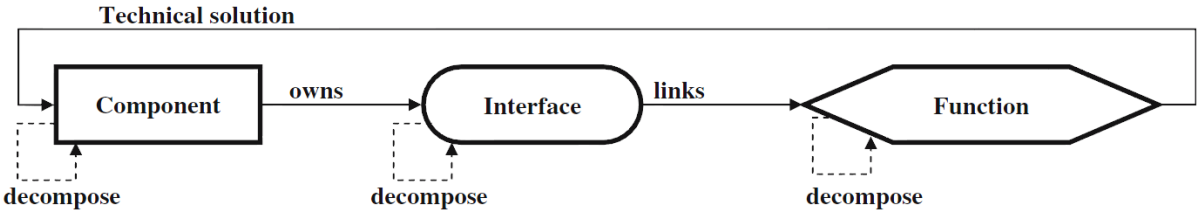



Figure 66 : Diagramme de classes UML du modèle produit (Dufaure 2005).

Voici les trois définitions de ces entités de base (Teissandier & Dufaure 2007a) :

"Les **composants** permettent de donner une représentation structurelle du produit. Un composant peut être le produit tout entier, un assemblage, un sous-assemblage, une pièce ou plus généralement toute partition du produit".

"Une **interface** est le lien entre le composant et le milieu extérieur. Une interface peut être un élément géométrique (vue métier tolérancement), un maillage (vue métier calcul), un squelette (vue métier analyse cinématique), etc."

"Une **fonction** met en relation des composants via leurs interfaces. Une fonction peut être une liaison, une exigence ou une spécification dans la vue tolérancement du modèle produit."

Les entités composant et interface contribuent à définir la vue structurelle du produit alors que l'entité fonction contribue à définir la vue fonctionnelle du produit.

Trois types de liens entre les entités de base ont été définis (Dufaure 2005) :

- le lien composant interface est tel qu'un composant possède une ou plusieurs interfaces,
- le lien interface fonction est tel qu'une ou plusieurs fonctions lient une ou plusieurs interfaces,
- le lien fonction - composant est tel qu'un composant peut être une solution technique d'une fonction.

Ces liens sont représentés en trait continu dans les représentations UML du modèle produit.
La définition évolutive des entités de base permet au modèle IPPOP de supporter une description multi expertises ainsi que les alternatives de conception. La technologie informatique choisie pour le développement de ce modèle produit est un langage orienté objet (C++) utilisant le concept de classes dynamiques. Cela signifie que le nombre et le type des attributs d'une classe ne sont pas figés et peuvent être modifiés par l'utilisateur de la plate-forme IPPOP (Noel et al. 2005).

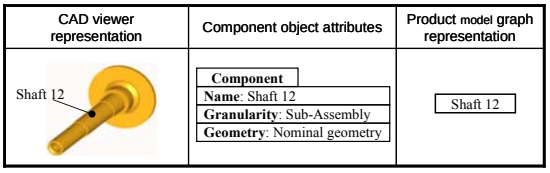



Figure 67 : Définition d'un composant (Dufaure & Teissandier 2008)

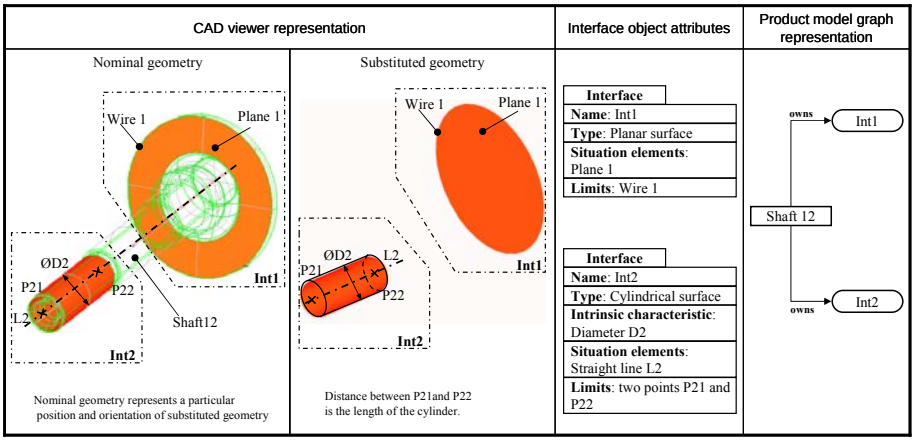



Figure 68 : Définitions d'interfaces (Dufaure & Teissandier 2008)

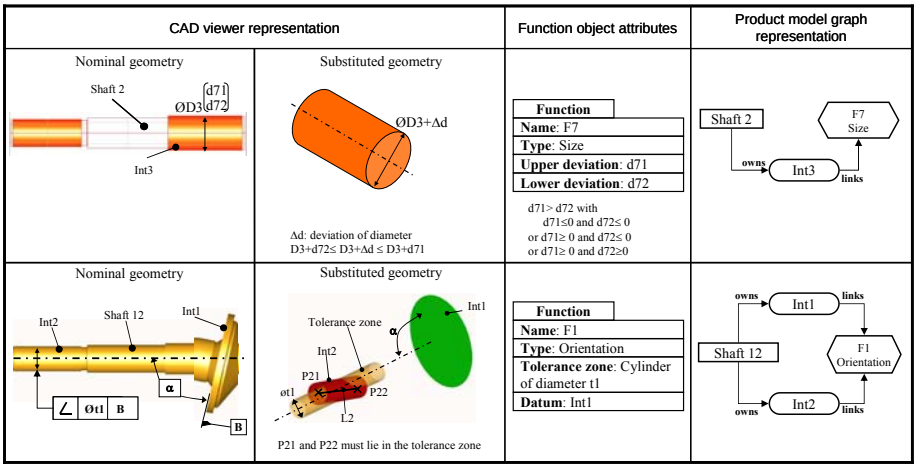



Figure 69 : Définitions de fonctions (spécifications ISO) (Dufaure & Teissandier 2008).

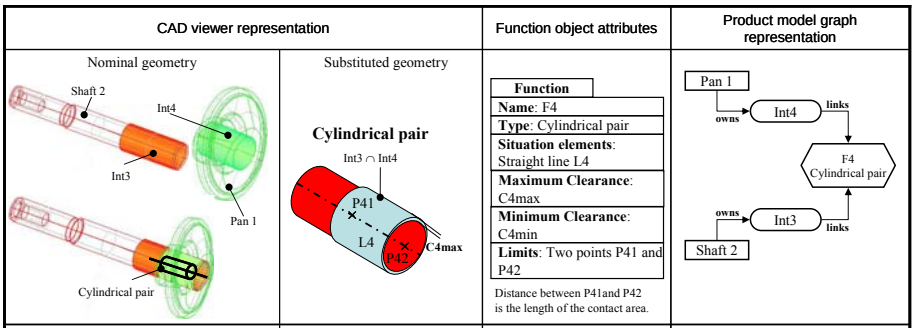



Figure 70 : Définitions d'une fonction (spécification de contact) (Dufaure & Teissandier 2008).

Des attributs ont été définis respectivement pour les trois entités de base permettant d'encapsuler toutes les données nécessaires à la mise en œuvre d'un quelconque outil de chaîne de cotes. La plupart des données encapsulées ont été présentées en §2.2. Voici quelques exemples parmi les plus représentatifs : voir figure 67, figure 68 et figure 69. Dans les représentations de graphe produit les composants sont illustrés par des formes rectangulaires, les interfaces par des formes arrondies et les fonctions par des formes hexagonales.
Les représentations UML des objets et du graphe modèle produit n'ont pas vocation à être utilisées ni même visualisées par un acteur du cycle de conception. Il est primordial de préserver les représentations "métiers". Les modèles de données spécifiques à une application doivent être traduits dans le modèle produit et vice versa. La correspondance entre les données produit et les données manipulées par les graphes mis en œuvre en tolérancement a été présentée (Teissandier & Dufaure 2010a).

#### 3.2.3.2 Mise en œuvre des liens de décomposition pour assurer la traçabilité des spécifications

Chaque entité de base peut se décomposer en plusieurs entités.
Un composant peut se décomposer en plusieurs composants, une interface en plusieurs interfaces et une fonction en plusieurs fonctions.
Les liens de décomposition permettent de formaliser les évolutions structurelle et fonctionnelle du produit entre un niveau de détail $n$ et niveau de détail $n$+1. Les spécifications géométriques résultant du transfert d'une condition géométrique sont des entités filles de l'entité encapsulant la condition géométrique.
Ces liens de décomposition entre une condition fonctionnelle et plusieurs spécifications géométriques caractérisent la traçabilité des spécifications dans un transfert particulier.
La figure 71 illustre ce principe sur un rotor de pompe hydraulique. Le rotor "shaft 12" est constitué d'une seule pièce au niveau de détail $i$ pour être partitionné en deux pièces "pan 1" et "shaft 2" en liaison pivot glissant (contact fixe) au niveau de détail $i$+1 .
Les liens de décomposition sont représentés en traits pointillés dans les représentations UML du modèle produit.

Ce mécanisme étant générique entre deux niveaux de détails, il est alors possible de caractériser les liens entre une condition exprimée dans le niveau de détail le plus amont vers un niveau de détail le plus aval du cycle de conception.

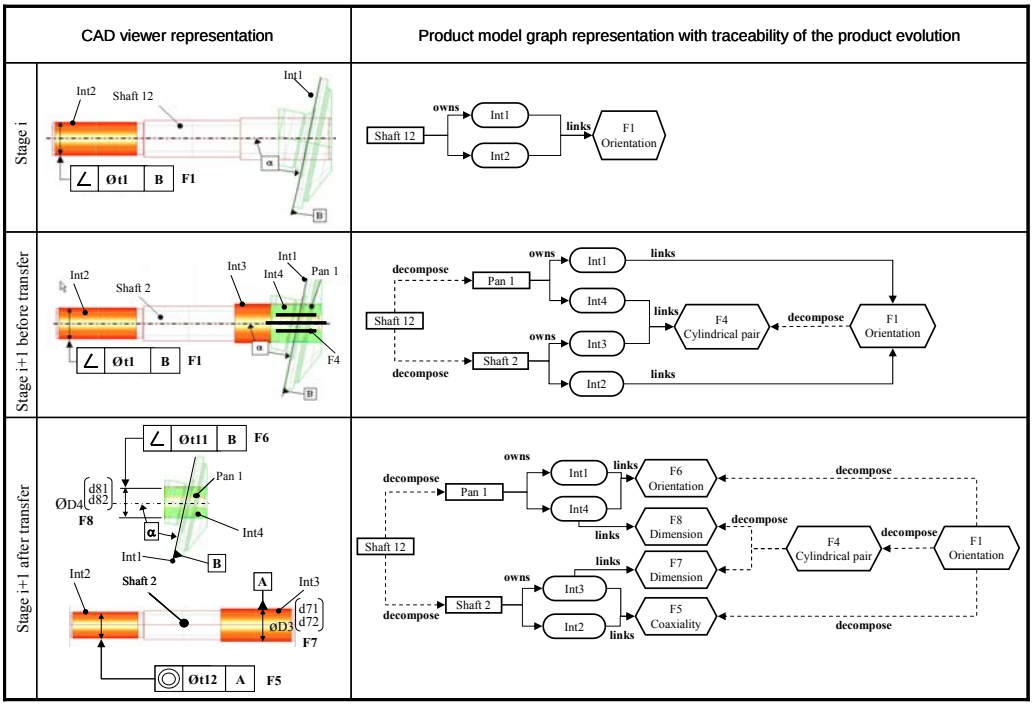



Figure 71 : Traçabilité des évolutions du produit (Dufaure & Teissandier 2008).

### 3.2.3.3 Exemple de scénario de conception

Considérons le scénario de conception d'un système de freinage d'un kart. Ce scénario comprend trois niveaux de détails jalonnant le cycle de conception : voir figure 72.

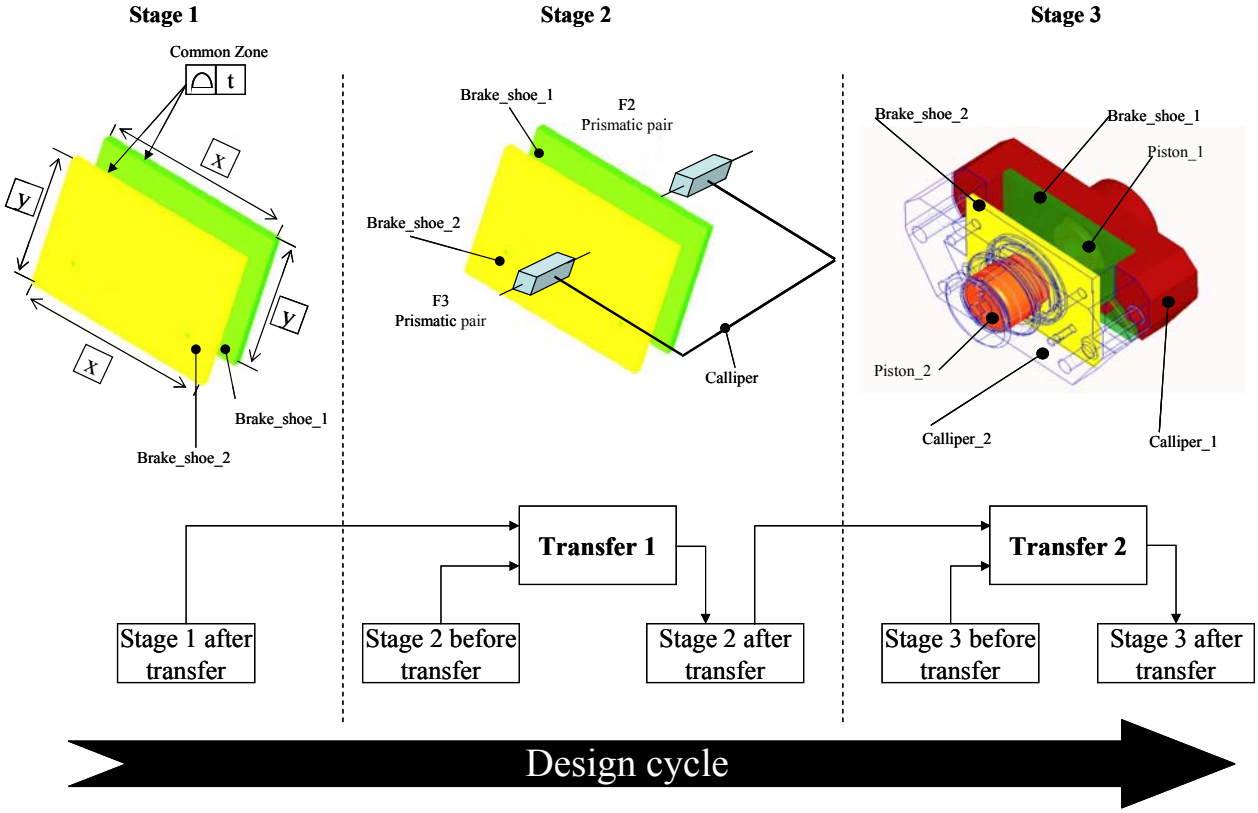



Figure 72 : Scénario de conception d'un système de freinage de kart (Dufaure & Teissandier 2008).

La condition fonctionnelle consiste à garantir que les deux contours rectangulaires des plaquettes de frein soient en vis à vis, c'est à dire dans une zone de tolérance commune aux deux contours. Cette condition désignée F12 permet aux deux plaquettes d'exercer sur le disque de frein (non représenté dans la figure 72) un moment colinéaire à l'axe de rotation du disque, au point de l'axe de rotation situé dans le plan médian du disque : voir figure 73.
La figure 74 illustre la spécification F9 (localisation) de l'étrier 2 (calliper 2) dans le niveau de détail 3 résultant du transfert de la condition F12 définie au niveau de détail 1 du scénario.

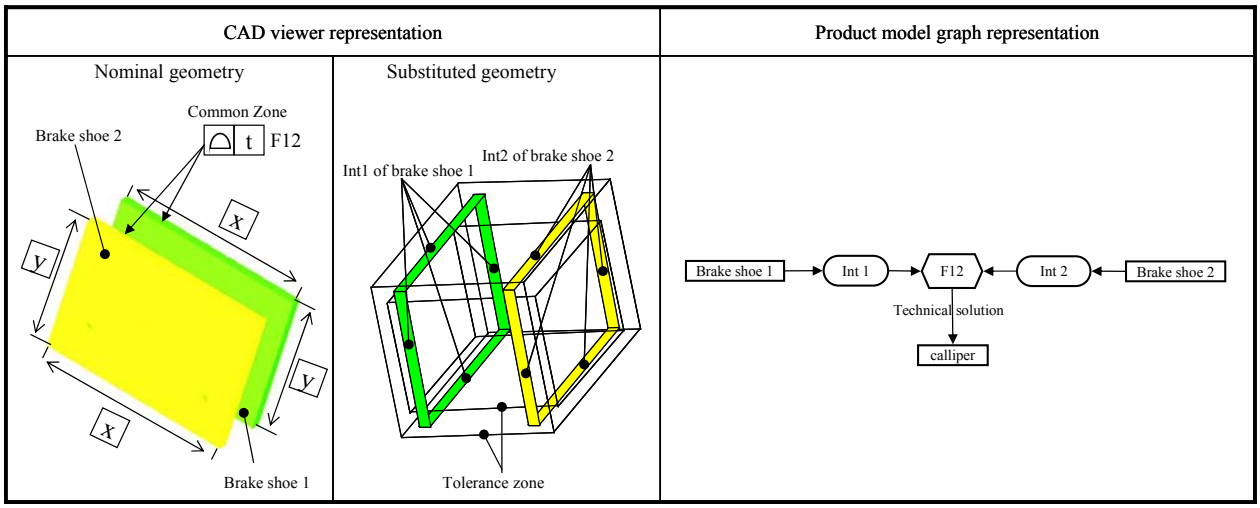



Figure 73 : Niveau de détail 1 du scénario de conception (Dufaure & Teissandier 2008).

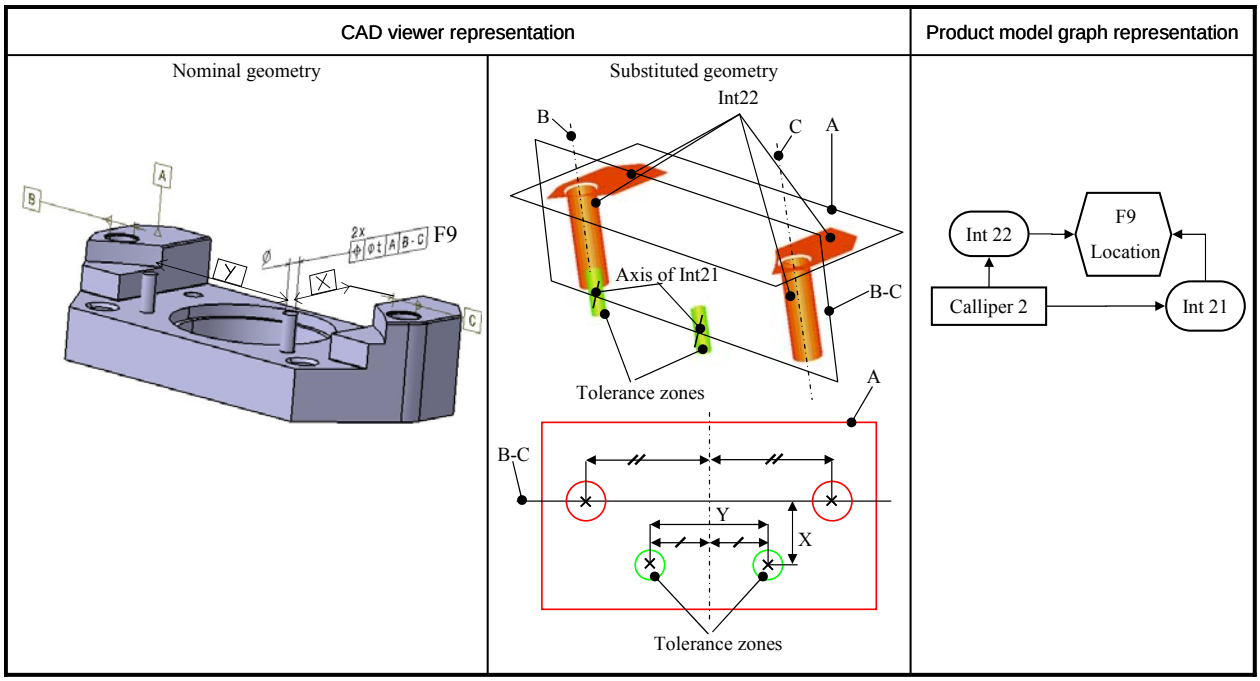



Figure 74 : Résultat du transfert de la condition F12 sur "calliper 2" (Dufaure & Teissandier 2008).

Les liens de traçabilité sont parfaitement bidirectionnels. Ils caractérisent les dépendances entre une condition d'un niveau donné vers plusieurs conditions d'un niveau plus aval dans le cycle de conception : en général ces dépendances sont des relations surjectives. De plus les

liens de traçabilité permettent d'identifier pour une condition d'un niveau donné la (ou les) condition(s) d'un niveau plus amont du cycle de conception dont elle dépend : voir figure 75.

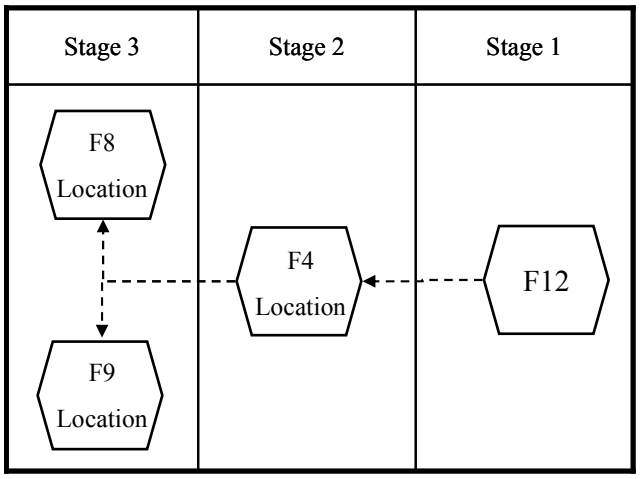



Figure 75 : Arbre de causalité caractérisant les liens de traçabilité issus de la condition F12 dans le scénario de conception (Dufaure & Teissandier 2008).

Ainsi, il est possible par exemple d'identifier la fonction de service issue du cahier des charges, potentiellement impactée par une non-conformité d'une pièce décelée en métrologie, au regard d'une spécification particulière.

### 3.2.4 Traduction bidirectionnelle entre le modèle de données produit IPPOP et le modèle de données MECAmaster

Le modèle produit IPPOP a été développé sur une plate-forme OpenCASCADE en exploitant la structure de données interne à OpenCASCADE.

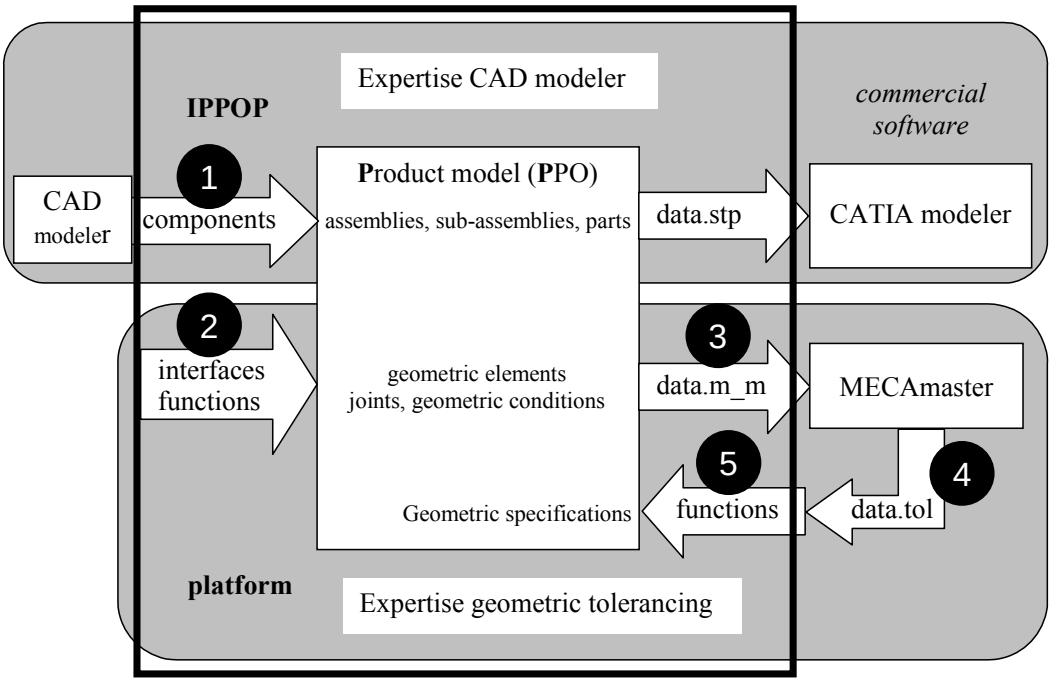



Figure 76 : Maquette du démonstrateur IPPOP-MECAmaster (Dufaure & Teissandier 2006).

Un démonstrateur a été développé au LMP afin d'illustrer les bénéfices potentiels de la plate-forme IPPOP interfacée avec un outil de tolérancement du commerce : MECAmaster. Le choix s'est porté sur MECAmaster parce que cette application offre la possibilité de lire un modèle de données d'entrée par un fichier texte (data.m_m) ; de même elle offre la possibilité d'écrire les résultats de simulation dans un autre fichier texte (data.tol).

Le principe du démonstrateur est illustré dans la figure 76 :

❶ Le modèle nominal du système à étudier est crée par un quelconque modeleur géométrique et exporté vers la plate-forme IPPOP par le biais d'un fichier au format STEP (API 213). La lecture d'un fichier STEP par la plate-forme IPPOP crée automatiquement les entités de type composant (assemblages, sous-assemblages et pièces) dans le modèle de données IPPOP.

❷ Par l'intermédiaire de deux Interfaces Homme-Machine (IHM) de la plate-forme IPPOP, l'utilisateur ajoute les entités de type interface (i.e. les éléments géométriques) et les entités de type fonction (i.e. les liaisons et les exigences fonctionnelles) dans le modèle de données produit.

❸ Le modèle de données IPPOP est automatiquement traduit dans un fichier "data.m_m". L'application MECAmaster lit le fichier de données d'entrée "data.m_m", exécute une simulation et écrit les résultats de cette simulation dans un fichier de données "data.tol".

❹ Le fichier "data.tol" est traduit par la plate-forme IPPOP. Les liaisons dont le coefficient d'influence n'est pas nul permettent d'identifier les pièces influentes. Dans chaque pièce influente, les surfaces influentes sont identifiées par le biais des liens de connexion des entités de type interface avec les entités de type composant et de type fonction (Dufaure & Teissandier 2006), voir figure 66.

❺ L'utilisateur est invité à définir les spécifications requises sur les surfaces influentes ; pour la détermination des dimensions des zones de tolérances et des intervalles de tolérances, il peut s'aider de la feuille de calcul MECAmaster. Les spécifications définies sont des entités de type fonction résultant d'une décomposition de l'entité de type fonction caractérisant l'exigence fonctionnelle.

La figure 77 illustre l'utilisation du démonstrateur sur le système de freinage de kart. Les surfaces non influentes sur la condition fonctionnelle F12 définie en figure 73 sont affichées avec de la transparence afin de faire ressortir les surfaces influentes dans le visualiseur graphique de la plate-forme IPPOP.

De manière plus générale ce démonstrateur illustre les fonctionnalités d'un environnement de pré et post-traitement pour le tolérancement géométrique (Teissandier & Dufaure 2007b). Parmi les environnements de pré et post-traitement pour le tolérancement, on peut citer l'application GAIA développée par EADS IW reposant sur un graphe dédié au tolérancement inspiré des travaux de Ballu et Mathieu (Ballu et al. 2006).

L'étape 5 est automatisable et faisait partie intégrante d'un projet ANR PICS-PPO (**P**late-forme d'**I**ntégration logicielle pour la gestion des **C**onnaissances et la **S**imulation du comportement **P**roduit-**P**rocessus-**O**rganisation en Ingénierie) déposé en 2006 et de nouveau déposé en 2007, coordonnée par la société LASCOM, auquel devait collaborer la société

MECAmaster SARL. Ce projet ANR n'a jamais été labellisé et les développements liés à la plate-forme IPPOP ont été stoppées depuis 2006.
Bernard Anselmetti a apporté un début de réponse à ce problème par le projet QUICK GPS.

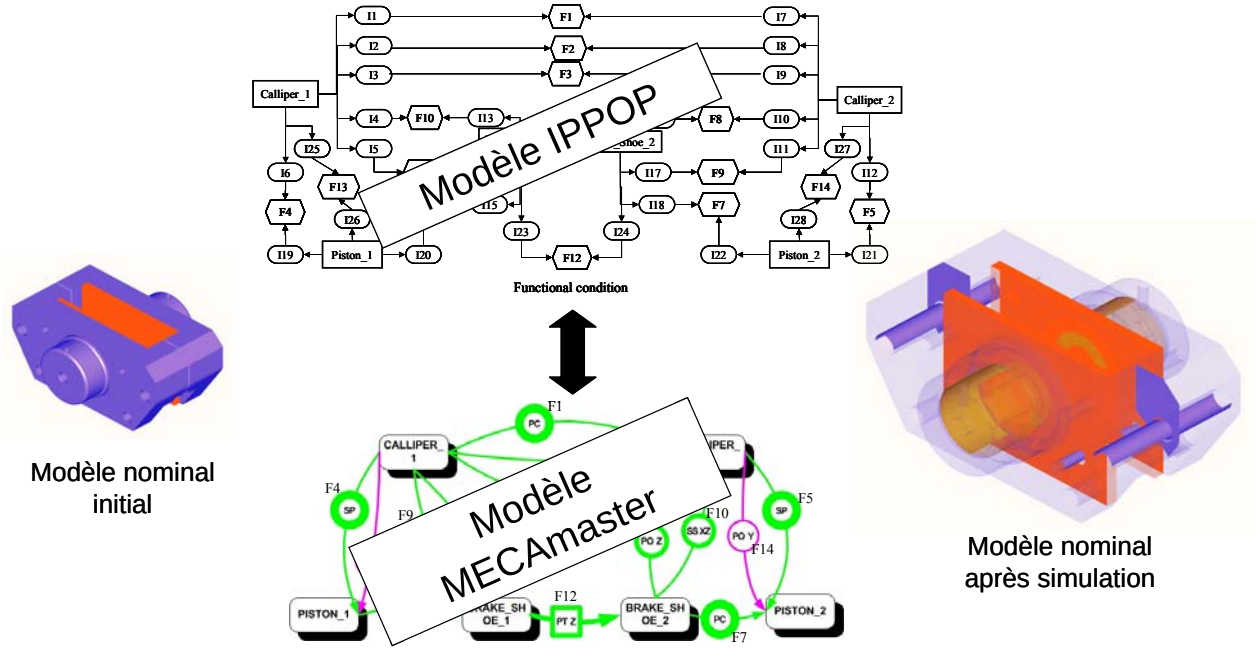



Figure 77 : Mise en œuvre du démonstrateur sur le système de freinage.

## 3.3 Des spécifications géométriques aux spécifications projet

La quantité d'informations manipulées par les différents outils de *CFAO* déployés dans l'industrie au début des années 80 a augmenté de manière considérable, et il a fallu commencer à imaginer des plateformes pouvant gérer toutes les données numériques liées au produit, également appelées données techniques (définitions géométriques, calculs de structures, simulations de fabrication, ...). Le besoin de ce type de plateforme s'est d'autant plus accru que commença à apparaître le concept d'ingénierie concourante (ou ingénierie simultanée) dans un contexte d'entreprise (Sohlenius 1992), (Hyeon et al. 1993). La gestion des données de conception est devenue un enjeu majeur pour les éditeurs de solutions *CFAO* et a entraîné de nombreux investissements et travaux sur la problématique du *PLM*.

De manière similaire, la planification des activités d'une entreprise et la gestion des ressources reposent désormais sur des outils informatiques experts se substituant aux traditionnels tableaux de planification. Les origines des méthodes et des outils traitant de cette problématique sont essentiellement issues des travaux réalisés dans le domaine de la productique, avec la planification de la production industrielle et la gestion des ressources machines et humaines. Les systèmes *Enterprise Resource Planning (ERP)*, dérivés des *Manufacturing Resource Planning* (*MRP*), ont permis d'intégrer les informations issues de différentes origines de l'entreprise dans une base de données unique (Esteves & Pastor 2001). Ces données font partie des données manipulées pendant le cycle de conception mais ne font pas directement référence au produit (utilisation des ressources, taux d'externalisation, partenariat, …). Elles sont fortement dépendantes de la stratégie industrielle et sont tout aussi influentes sur le cycle de conception que les données techniques.

Un projet de conception vise à créer, sur une durée déterminée, la définition d'un produit. Les données projet sont définies par l'ensemble des données utilisées pendant la durée d'un projet.

Une plateforme de données produit permet de gérer les données produit tout au long du cycle de conception à travers tous les métiers techniques (modélisation géométrique, tolérancement, calculs de structures, usinage, fonderie, etc.). Alors que les *Systèmes de Gestion de Données Techniques* (*SGDT)* permettent d'optimiser la performance des produits, les systèmes *ERP* se focalisent sur l'optimisation de l'utilisation des ressources. Pour autant, ces outils ne sont que peu mis en relation alors qu'ils agissent conjointement sur le cycle de conception tout en revendiquant des compétences sur le *PLM*. Les coûts et les délais sont des indicateurs que l'on cherche à optimiser en permanence et qui dépendent de données projet. En effet, cette optimisation ne peut être efficace que si elle est étudiée avec une vision globale du projet, c'est-à-dire en prenant en compte l'ensemble des données projet. C'est la principale vocation des plateformes *PPO*.

Par analogie avec les spécifications géométriques, nous avons défini une spécification projet ou spécification Produit Processus Organisation comme étant une condition sur une caractéristique d'un projet. Une caractéristique projet est défini par un ensemble de données projet.

Pour atteindre ses objectifs, l'état du projet est mesuré par l'intermédiaire d'indicateurs de performance associés à des leviers d'action. L'effet d'un levier d'action sur le projet ne peut être réellement connu qu'au travers des liens de traçabilité entre les spécifications du projet. La traçabilité des spécifications est donc un enjeu majeur du pilotage d'un projet de conception. La connaissance de ces liens doit permettre d'aider les acteurs du cycle de conception à :

- évaluer l'influence d'une décision ou d'un choix sur le projet en cours,
- mettre en place les bons leviers d'action associés à ces indicateurs,
- évaluer les risques à utiliser ou non les leviers d'action.

Un transfert est un mécanisme permettant de formaliser les liens de causalité entre les spécifications manipulées par le processus de conception et plus particulièrement entre les spécifications projet. Ces mécanismes de transferts doivent :

- prendre en compte l'ensemble des spécifications projet,
- pouvoir être utilisés tout au long du cycle de conception,
- être force de proposition dans la mise en place d'indicateurs de performance.

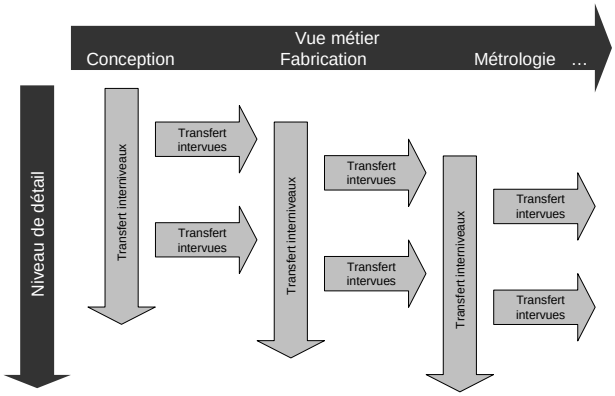



Figure 78 : Transferts de spécifications interniveaux et intervues adapté de (Ballu et al. 2007).

Le projet IPPOP a permis de caractériser le mécanisme de transfert d'une condition géométrique d'un niveau de détail donné désigné *n* à un niveau de détail "plus fin" désigné *n*+1. Nous avons par la suite désigné ce type de transfert, un transfert interniveaux. Dans le projet IPPOP, le concept de transfert de spécification géométrique intervues a été défini avec Alex Ballu entre une vue conception et une vue métrologie (Ballu et al. 2007) : voir figure 78. Un exemple sur une pièce industrielle a été présentée à l'aide du modèle produit IPPOP, voir figure 79.

Dans la continuité du projet IPPOP, une proposition de généralisation des mécanismes de transferts interniveaux et intervues des spécifications géométriques à des spécifications projets à été réalisée dans la thèse de Manuel Gonçalves. Ces mécanismes de transfert interniveaux et intervues doivent permettre la mise en place d'indicateurs de performance mieux à même de répondre aux problèmes liés à la prise de décisions. En s'appuyant sur une traçabilité des spécifications projet, les indicateurs de performance doivent permettre d'apprécier les risques et de remédier efficacement aux problèmes. Les leviers d'action associés à des indicateurs de performances devront permettre de savoir quoi modifier ou négocier pour résoudre les difficultés liées à des problèmes techniques et/ou liés à l'entreprise : voir figure 80.

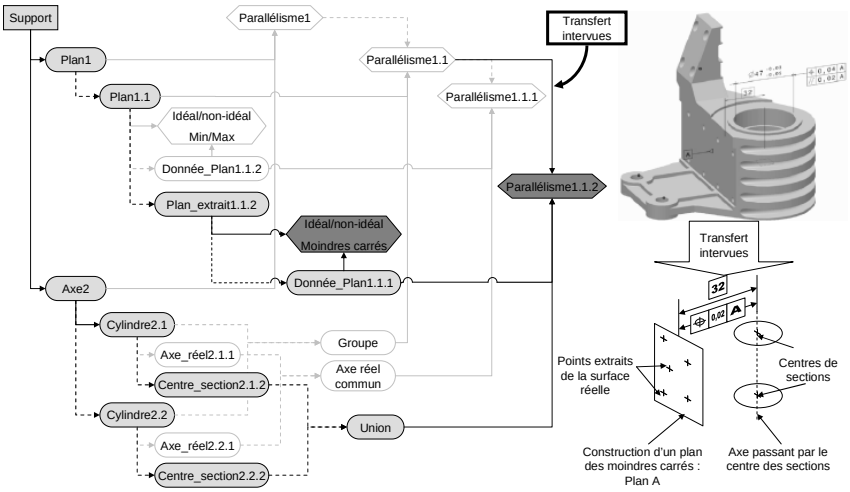



Figure 79 : Exemple de transfert intervues d'une spécification géométrique ISO d'après (Ballu et al. 2007).

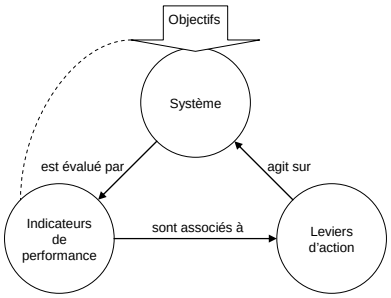



Figure 80 : Relations entre objectifs, système, indicateurs de performance et leviers d'action (Gonçalves 2010).

Ces travaux se sont appuyé sur la plate-forme globale du projet IPPOP, c'est à dire en utilisant la partie organisation des activités de conception reposant sur la structure GRAI R&D (Girard & Doumeingts 2004).

Je ne détaillerai pas plus ces travaux dans ce document étant donné que je n'envisage pas de perspectives de recherche incluant la gestion de spécifications techniques et organisationnelles à court et moyen terme.

## 3.4 Premier bilan et perspectives sur la traçabilité des spécifications

Le projet IPPOP a montré l'aptitude d'un modèle produit a déployer des liens de traçabilité des spécifications géométriques depuis l'expression du cahier des charges jusqu'au niveau de détail d'un dessin de définition d'une pièce isolée. De plus, ce type de modèle permet d'amorcer une démarche de tolérancement très tôt dans le cycle de conception. Cela a été validé par un démonstrateur, développé uniquement avec des plate-formes et outils open source. Plusieurs problèmes restent cependant à aborder. Dans les travaux de thèse de Jérôme Dufaure, seules les expertises de modélisation géométrique et de tolérancement géométrique ont été considérées dans un environnement de conception affichant des prétentions de conception collaborative.
Bien que faisant partie des objectifs initiaux du projet IPPOP, les liens de traçabilité avec d'autres expertises métier restent à étudier. Pour cela il convient de formaliser une activité de transfert de spécifications intervues. Par exemple, dans le périmètre des activités liées au tolérancement, de nombreux travaux existent sur la cotation de fabrication ; ils sont très souvent restreints aux procédés d'usinage. La tâche est immense car il est nécessaire de faire ce travail pour toutes les expertises liées à la fabrication. De même, cela est envisageable pour les expertises liées à l'assemblage et la métrologie. Certains mécanismes de transfert ne seront pas formalisable analytiquement ou numériquement et ne pourront être définis que par des approches expérimentales ou par des règles métiers reposant directement sur le savoir faire et l'expérience des acteurs. Nous y reviendrons dans les travaux de thèse de Serge Mouton liés à l'industrialisation de la fabrication de pièces en matériaux composites par procédé Resin Transfer Molding (RTM) dans le chapitre suivant.

Une des voies pour simuler de manière plus fine les variations géométriques est d'intégrer les déformations des pièces induites par les divers phénomènes physiques interagissant sur un système mécanique.
Des travaux ont été réalisés dans ce sens sur les problématiques d'assemblage au LURPA dans le cadre d'Inno'campus (Breteau 2009). Ces travaux consistent à intégrer la déformation des pièces dans la simulation du processus d'assemblage, afin de diminuer des temps de réglages fastidieux. Soderberg propose des modèles permettant de simuler les variations géométriques de tôles souples de sous-ensembles de carrosserie automobile (Soderberg et al. 2006).

De même les travaux de thèse de Laurent Pierre s'inscrivent dans cette démarche avec la prise en compte du comportement thermomécanique d'un système. Un des verrous à lever est la description des données manipulées. Dans l'hypothèse où les chaînes de cotes sont modélisés par des solides infiniment rigides, la définition d'un système mécanique où les pièces sont uniquement définies par des éléments géométriques est très vertueuse notamment en conception préliminaire. Si la définition de la forme d'une pièce par des éléments géométriques reste incomplète cela ne pose aucun problème. Dès l'instant où l'on intègre la déformation des pièces, ce n'est plus le cas. Ce n'est plus trivial de qualifier une surface d'influente ou de non influente sur une exigence fonctionnelle dans le comportement d'un système mécanique où les déformations sont prises en compte.
D'autres données comme les propriétés des matériaux sont également à prendre en compte. On rejoint de ce point de vue les problématiques des plateformes de pré et post traitement dédiées à des simulations de calcul de thermique, de structure, etc.

Les travaux sur les mécanismes de transferts de spécifications PPO ont permis de proposer une généralisation des mécanismes de transferts interniveaux et intervues de spécifications géométriques à des spécifications inhérentes à un projet industriel incluant les spécifications techniques du produit et les spécifications organisationnelles d'une entreprise. Cette généralisation a du sens dans le système de pilotage du processus de conception proposé par l'environnement GRAI-R&D. Sa transposition vers d'autres environnement reste à montrer. De plus, ce type de plateforme est très complexe à développer dans un logiciel et encore plus complexe à expérimenter.
Cependant la formulation des mécanismes de transfert de spécifications PPO m'a permis de prendre du recul sur les problèmes purement géométrique. Dans un avenir proche, je n'entrevois pas de travaux liés à la problématique de transfert de spécifications PPO.

J'envisage de poursuivre de développer des travaux liés à la structuration des données pour le tolérancement mais en prenant désormais en compte la déformation des pièces. Les spécifications transférées d'un niveau donné à un niveau inférieur ne seront plus seulement géométriques.

# 4 INDUSTRIALISATION DE PIECES EN MATERIAUX COMPOSITES ELABOREES PAR LE PROCEDE RESIN TRANSFER MOLDING (RTM)

## 4.1 Avant-propos

La conception d'un produit comprenant des pièces en matériaux composites est potentiellement très vertueuse, d'un point de vue satisfaction des fonctions attendues dans un cahier des charges. En effet, il est possible de concevoir le matériau simultanément avec la géométrie des pièces. Ceci est notoirement très différent des conceptions de systèmes mécaniques exclusivement en matériaux métalliques, où la définition d'une pièce implique la plupart du temps de choisir un matériau dans une base de données en fonction de différents critères. En comparant la structure d'un aéronef conçue dans les années 60 ou 70 avec la structure d'un aéronef d'usage comparable conçue de nos jours, les évolutions des pièces constitutives d'un point de vue formes et dimensions et les évolutions des solutions techniques d'assemblage ne sont pas aussi spectaculaires, que la virtuosité d'une conception incluant les matériaux composites le laisserait supposer. Certes les matériaux composites ont permis de sensiblement diminuer les masses des structures et d'optimiser les formes et les dimensions des pièces au regard de leurs tenues mécaniques. Cependant ces gains de performances sont très souvent réalisés en dupliquant les structures métalliques dans lesquelles les matériaux métalliques sont remplacés par des matériaux composites. Cette frilosité apparente des principaux avionneurs a des origines multiples provenant de contraintes techniques autant qu'économiques.
Les matériaux composites (non naturels) sont utilisés pour la première fois lors de la seconde guerre mondiale, soit il y a environ une cinquantaine d'années et il existe aujourd'hui déjà plus d'une douzaine de procédés de mise en œuvre, soit plus qu'il n'existe de grandes techniques de transformation des métaux développées au cours des 200 dernières années (Berreur et al. 2002). Pour un procédé de mise en œuvre donné, il existe une très grande diversité de matériaux en considérant les différentes natures de fibres, les différentes structures de renforts auxquelles il convient d'ajouter les différentes natures de résines. Il est très difficile de capitaliser du savoir faire et des connaissances sur autant de variantes de matériaux. Ce travail chronophage nécessite des investissements très lourds que les avionneurs ne sont pas capables d'assumer. A cela, s'ajoute les contraintes de certification aéronautique, ajoutant des coûts et des délais supplémentaires dans le processus de développement d'une structure aéronautique.
Comparée aux 18 millions de tonnes de métaux ouvrées chaque année, l'industrie des composites n'est encore aujourd'hui qu'une petite industrie : elle ne représente que 300 à 350.000 tonnes de produits finis (Berreur et al. 2002).

Quels que soient les procédés de fabrication mis en œuvre, quels que soient les matériaux mis en œuvre, une pièce fabriquée n'est jamais géométriquement parfaite. Toute caractéristique géométrique de forme ou de dimension d'une pièce fabriquée ne sera jamais égale à la caractéristique nominale dont elle représente une réalisation physique particulière. Ce constat dû à la variabilité des procédés de fabrication peut se généraliser à toute caractéristique fonctionnelle d'une pièce ou d'un sous-assemblage : résistance mécanique, aérodynamisme,

etc. Au niveau d'un sous-assemblage il faut considérer la variabilité des procédés d'assemblage venant se superposer à la variabilité des procédés de fabrication.
Les caractéristiques mécaniques et géométriques d'une pièce réalisée en Resin Transfer Molding (RTM) dépendront surtout de la variabilité du drapage, de l'injection et de la cuisson. Le drapage génère des écarts géométriques dans la réalisation de la préforme, l'injection génère des micro et macro porosités et enfin la cuisson génère des contraintes résiduelles. Toutes ces défauts de fabrication ne sont pas pris en compte dans un calcul de tenue mécanique d'une pièce en phase de conception. Pourtant ils peuvent compromettre le comportement attendu d'une pièce. Très souvent, ces défauts sont décelés à un stade où la conception du produit est complètement figée ce qui génèrent des coûts et délais supplémentaires dans le cycle de conception. Actuellement, le concepteur ne dispose d'aucun outil permettant de qualifier la faisabilité technique de fabrication d'une pièce en matériau composite. A un stade de conception préliminaire, avant que la détermination du nombre de pièces d'un ensemble avec leurs formes et leurs dimensions ne soient complètement figées, il est très important de pouvoir apprécier les faisabilités technique et économique de réalisation de l'ensemble. Cela apporte des critères supplémentaires de fabrication qui s'ajoutent aux critères de conception : cela permet d'asseoir la robustesse des choix de conception aux regards des spécifications fonctionnelles et des coûts attendus.

Ce chapitre présente la synthèse des travaux de la thèse de Serge Mouton (2006-2010).
Ce travail de type exploratoire a consisté à appliquer la problématique générale de tolérancement de fabrication très (ou trop ?) souvent restreinte aux procédés d'usinages de pièces métalliques (Teissandier et al. 1998), au procédé RTM. La genèse de ce travail a été fortement stimulée par le contexte aquitain incitant les acteurs du pôle Aerospace Valley à développer des compétences liées aux matériaux composites. Ce travail de thèse s'est déroulé avec Dassault Aviation (site Anglet (64)) par l'intermédiaire du centre Arts et Métiers ParisTech de Talence.

## 4.2 Problématique et contexte industriel

La tenue mécanique d'une pièce élaborée par le procédé RTM est étroitement corrélée au niveau d'imprégnation de la préforme. Le niveau d'imprégnation de la préforme altère les propriétés mécaniques de la pièce fabriquée par rapport aux propriétés mécaniques nominales de la pièce. Le niveau d'imprégnation d'une pièce peut être caractérisé par des macro et des micro pores apparaissant pendant la phase d'injection du renfort. Les macro et micro pores sont simplement désignés défauts volumiques d'imprégnation. De plus, la phase de cuisson de la pièce génère des contraintes résiduelles inhérentes aux différences de coefficients de dilatation thermique entre la résine et les fibres constitutives du renfort. Ces contraintes résiduelles sont la cause d'écarts géométriques qui peuvent être relativement importants.
Une des conséquences des contraintes résiduelles est que le processus d'assemblage installe des contraintes supplémentaires dans le sous-ensemble dans lequel la pièce est intégrée.
Les contraintes résiduelles et les défauts d'imprégnation ne sont en général pas pris en compte dans les calculs de tenue mécanique justifiant les formes et les dimensions des pièces.
Ce travail a consisté à spécifier des solutions d'industrialisation cherchant le meilleur compromis d'un point de vue technique entre :

- les défauts volumiques d'imprégnation,
- les contraintes résiduelles,
- la tenue mécanique de la pièce.

En plus d'une qualification technique du processus de fabrication a été menée une qualification économique. La qualification économique reposant sur des données et règles métiers confidentielles n'a pas été publiée et ne sera pas synthétisée dans ce document.
La méthode de qualification technique et économique a été appliquée à un longeron d'un plan horizontal d'un empennage : voir figure 81.

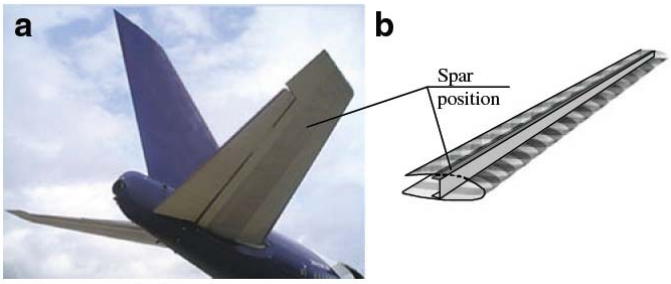



Figure 81 : Pièce étudiée : un longeron du plan horizontal d'un empennage (Mouton et al. 2011).

Ce longeron réalisé par le procédé RTM était en cours de fabrication en série sur le site industriel pendant la durée de la thèse de Serge Mouton.
La phase d'industrialisation de ce longeron était déjà donc achevée. Toute cette phase s'est déroulée en prenant en compte le savoir-faire et l'expérience des différents acteurs.

Dans un premier temps, la connaissance requise pour la mise en œuvre d'un processus de fabrication par procédé RTM a été acquise par différentes interviews. Ces différentes interviews ont été réalisées auprès des acteurs impliqués sur le site industriel. Ces acteurs sont experts du procédé RTM, du Contrôle Non Destructif (CND) et du procédé d'assemblage. Cela a permis d'identifier quatre situations de vie du longeron (voir figure 82) :

- l'état libre : le processus de fabrication est terminé, la pièce est à 20°C,
- l'état "mise sous contrainte" : la pièce est mise en contact avec un sous-ensemble considéré infiniment rigide et géométriquement parfait,
- l'état "sous-ensemble" : la pièce est intégrée dans le sous-ensemble de l'aéronef,
- l'état avion : la pièce est en service pendant l'utilisation de l'avion.

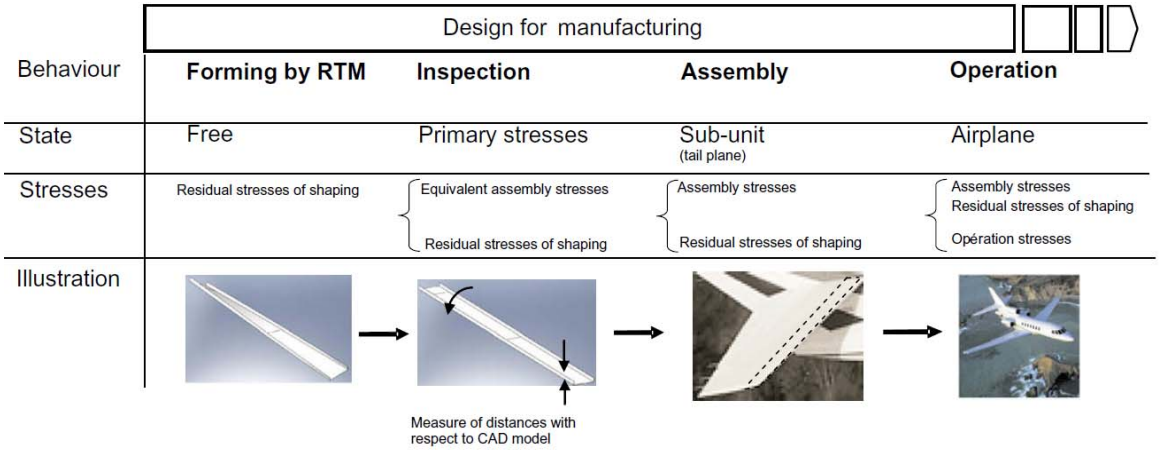



Figure 82 : Situations de vie du longeron (Mouton, Teissandier, et al. 2010).

Dans un second temps, les différentes phases d'une gamme industrielle ont été analysées permettant d'extraire les phases considérées comme étant discriminantes dans le choix d'une gamme de fabrication au regard du compromis entre les écarts de fabrication et la tenue mécanique de la pièce. Puis, les écarts de fabrication ont été caractérisés en utilisant deux outils de simulation :

- PAM RTM pour la simulation de l'injection (ESI Group 2008),
- Samcef pour la simulation des contraintes résiduelles (Samtech S.A 2008).

Enfin, trois critères de performance ont été retenus afin de qualifier un processus de fabrication :

- un critère outillage lié à la disposition des buses et des évents sur le moule de la pièce (Jiang et al. 2002),
- un critère cycle RTM lié à la pression et à la température de la résine pendant l'injection du renfort (Luo et al. 2001),
- un critère de rupture (critère de Hashin) lié aux mécanismes de dégradation du matériau (Hashin 1983).

Finalement, la pratique de l'entreprise partenaire de ce travail a permis de définir des seuils sur les critères énoncés. Ces seuils permettent de qualifier un processus de fabrication vis-à-vis d'un seul critère. La mise en œuvre d'outils de statistiques descriptives a permis d'analyser plus finement l'influence de chaque critère (Tukey 1977). L'influence simultanée des trois critères est réalisée par des relations de couplage entre les différents critères, permettant de déterminer une performance globale pour un processus de fabrication particulier. Un outil graphique d'analyse du risque de rupture (élaboré dans Matlab) permet au concepteur de visualiser sous forme de cartographie la performance d'une solution d'industrialisation (Mathworks 2010).

## 4.3 Caractérisation des écarts de fabrication des pièces obtenues par RTM

Les différents transferts de spécifications spécialisés pour le procédé RTM sont présentés en figure 83.

La quantification des écarts de fabrication admissibles permet de spécifier des caractéristiques du procédé de fabrication très tôt en phase de conception. Cela permet d'optimiser la conception de l'empilement de fibres de la pièce composite. La maîtrise de ces écarts garantit l'interchangeabilité du composant vis-à-vis du montage et de sa résistance à différentes sollicitations (thermique, mécanique, etc.).

Dans le cadre de la conception et de la fabrication de pièces en matériaux composites pour l'industrie aéronautique, la problématique de réduction des masses implique une augmentation des fonctions que doit assurer un composant. L'addition de fonctions pour un composant est caractérisée par son niveau d'intégration fonctionnelle. Le niveau d'intégration fonctionnelle d'un sous-ensemble aéronautique est caractérisé par un ratio entre le nombre de composants assemblés et le nombre de fonctions à assurer par le sous-ensemble. Le niveau d'intégration fonctionnelle est optimal si le sous-ensemble est constitué d'un seul composant. Une augmentation du niveau d'intégration fonctionnelle a pour effet d'accroître la complexité géométrique du composant (dimensions, épaisseur, type d'inserts).

L'utilisation de matériaux composites implique d'étudier l'incidence du couplage des écarts de fabrication sur la tenue mécanique de la pièce fabriquée.

Le couplage des écarts de fabrication permet de vérifier la tenue mécanique en statique de la pièce dans l'assemblage. A partir de la quantification des écarts de fabrication, des critères de rupture ont été formulés. L'étude de ces critères permet potentiellement de réaliser des

comparaisons entre les différentes alternatives de conception et de fabrication des pièces en matériaux composites. Chaque solution sera associée à un risque de rupture. L'estimation du risque de rupture à partir du couplage des écarts de fabrication n'a pas pour but de rechercher des moyens de réduire ces écarts, mais plutôt d'estimer quel est le niveau d'écarts de fabrication admissibles.

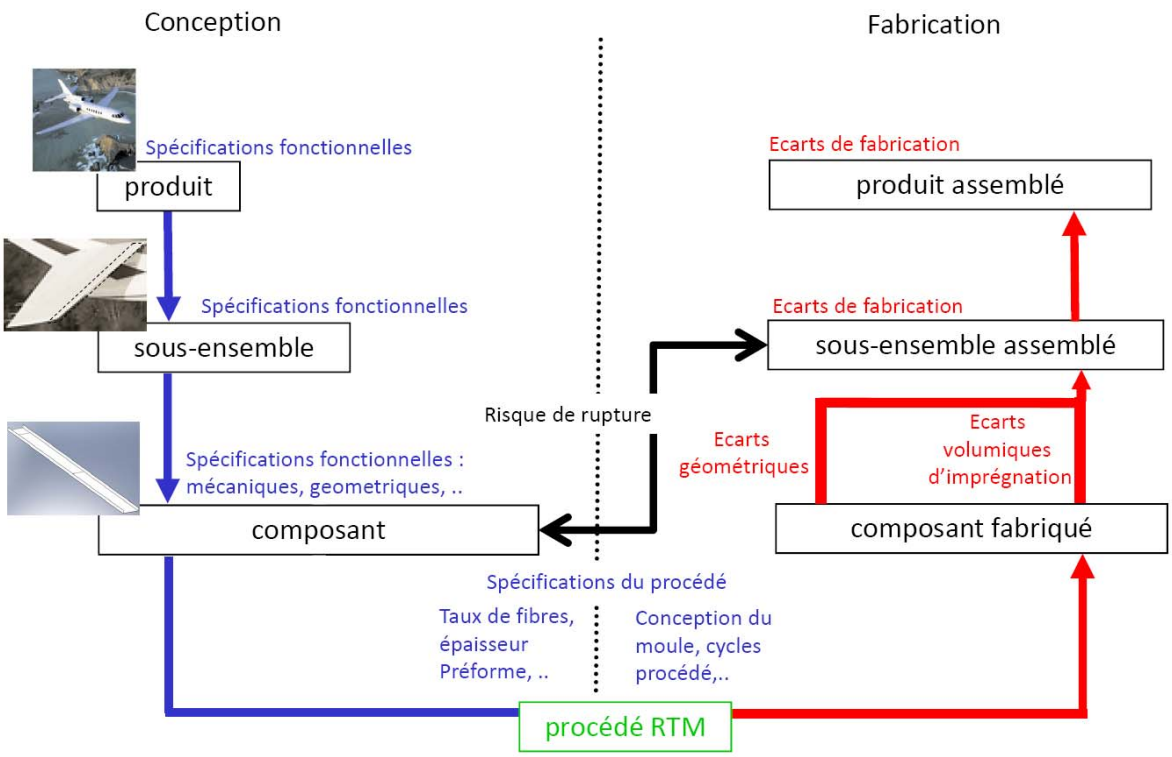
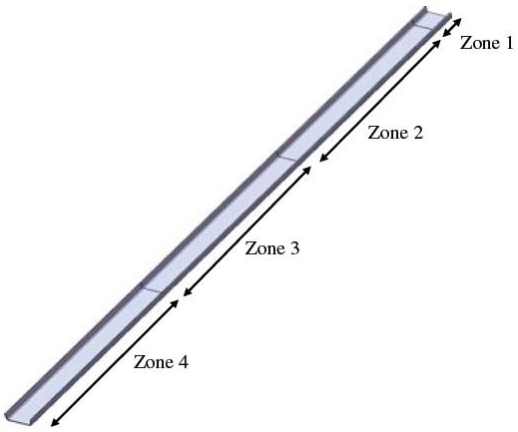



Figure 83 : Transferts de spécifications dans le cycle de conception (Mouton 2010).

Les caractéristiques du longeron utilisées pour toutes les simulations sont résumées dans la figure 84.




| Zone no. | Length (mm) | Thickness (mm) | No. of layers | Fiber rate (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 6.012 | 36 | 50 |
| 2 | 1,000 | 5.01 | 30 | 50 |
| 3 | 1,000 | 4.008 | 24 | 50 |
| 4 | 1,000 | 3.006 | 18 | 50 |

Caractéristiques géométriques

| | $x$ (fiber direction) | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| Young modulus (MPa) | 106,000 | 8,000 | 8,000 |
| Poisson ratio | 0.35 | 0.3 | 0.3 |
| Thermal expansion coefficient (1/°C) | $-1.2.10^{-6}$ | $34.10^{-6}$ | $34.10^{-6}$ |
| Shear modulus (MPa) | 4,000 | 4,000 | 4,000 |
| Tensile strength (MPa) | 1,270 | 42 | 42 |
| Compressive strength (MPa) | 1,130 | 141 | 141 |
| Shear strength (MPa) | 98 | 98 | 98 |
| Mass density (kg/m$^3$) | | 1,530 | |

Caractéristiques matériaux

Figure 84 : Caractéristiques du longeron (Mouton et al. 2011).

### 4.3.1 Ecarts géométriques

Les différences entre les coefficients de dilatation thermique des éléments constitutifs d'une pièce (renfort et résine) sont la principale cause d'apparition d'écarts géométriques (Dong 2003). Les formes et dimensions du renfort, les empilements des plis constitutifs et l'architecture du renfort sont également très influents sur les écarts géométriques : voir figure 85. Les causes prises en compte sont entourées en gras.

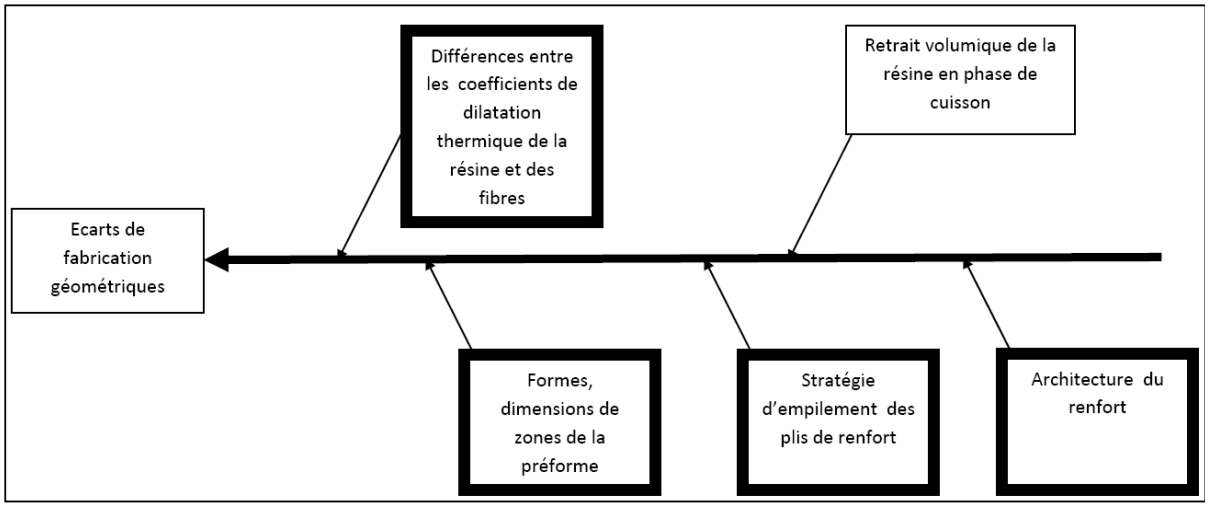



Figure 85 : Causes des écarts de fabrication géométriques par procédé RTM (Mouton 2010).

Les pièces de structure aéronautique sont généralement constituées de résines époxy et de renforts à base de fibres de carbone. Les paramètres sur lesquels il est possible d'agir dans le cadre d'une étude des écarts de fabrication sont principalement le choix de l'architecture du renfort (nombre de couches et orientation des couches), le mode d'empilement des renforts (symétrie ou non) et les formes et dimensions des zones qui constituent la préforme (Mouton, Teissandier, et al. 2010).
La modélisation des écarts géométriques est basée sur la simulation de la phase de refroidissement suite à la cuisson de la résine époxy. Cette phase est simulée comme une variation de température imposée à la pièce ; la température initiale (175 °C) correspond à celle de cycle de fabrication du longeron et la température imposée correspond à la température ambiante dans l'atelier (20 °C). Cette simulation aboutie à des contraintes mécaniques au sein du longeron qui se traduisent dès qu'il est sorti du moule par des écarts géométriques de fabrication. Les écarts géométriques de fabrication sont quantifiés en déplacements et caractérisés par type de déformations.
A titre d'exemple, les contraintes résiduelles du longeron à l'état libre induisent une déformation de type vrillage suivant son axe longitudinal de l'ordre de 25 °(voir figure 84).

### 4.3.2 Ecarts volumiques d'imprégnation

L'injection est l'étape clef du procédé RTM ; c'est aussi l'étape la plus complexe à modéliser. Les phénomènes physiques interagissant pendant l'injection peuvent être pris en compte par (Gouley 1995), voir figure 86 :

- un modèle d'écoulement régi par la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie (variables d'état : pression et vitesse),
- l'équation de la chaleur régie par la conservation de l'énergie (variable d'état : température)

- un modèle cinétique basé sur la conservation des espèces chimiques (variable d'état : degré de polymérisation).

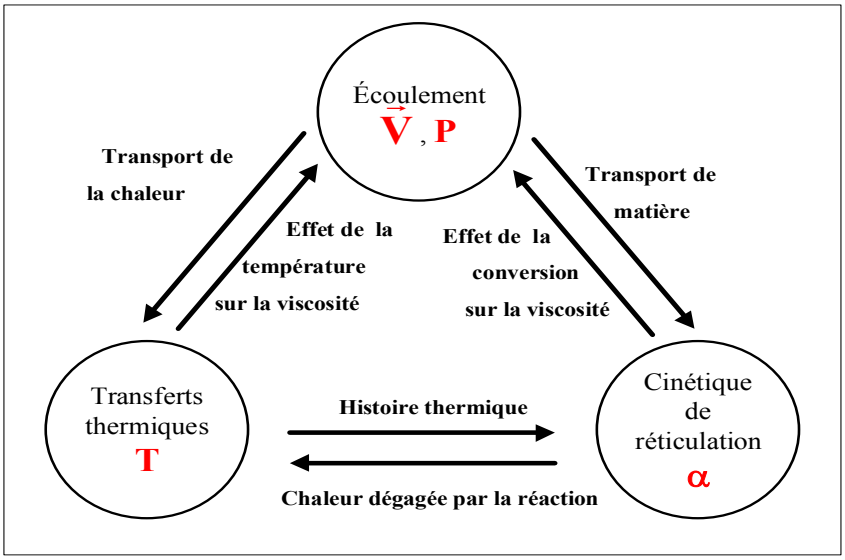



Figure 86 : Modélisation de l'injection RTM (Gouley 1995).

Seul le modèle d'écoulement sera pris en compte dans la démarche d'industrialisation (Mouton 2010). Ce choix est guidé par l'aspect séquentiel de la phase d'injection d'une pièce de structure aéronautique où la température de la résine est considérée comme étant constante, pour un temps d'injection donné, pour lequel la valeur de la viscosité varie faiblement. Dans le but de comparer différents processus de fabrication, la phase d'écoulement de la résine conditionnant la qualité d'imprégnation peut être étudiée indépendamment des phénomènes liés aux transferts thermiques et à la cinétique de réticulation.
La simulation de l'écoulement de la résine dans un milieu poreux caractérisant une préforme a été réalisé avec le logiciel PAM RTM (ESI Group 2008). Cet outil implémentant la loi de Darcy a été développé par la Chaire sur les Composites à Hautes Performances (CCHP) de l'Ecole Polytechnique de Montréal (Ruiz et al. 2006).

Les principales hypothèses physiques émises sont les suivantes (Mouton 2010) :

- le fluide est supposé newtonien et incompressible, ce qui est justifié si la fin de l'injection a lieu bien avant la gélification,
- le milieu poreux est indéformable. Cette condition pourra être mise à mal si des pressions d'injection supérieures aux pressions de préformage du renfort sont employées (Laine 2008),
- l'écoulement doit être laminaire. Cette hypothèse est généralement vérifiée en RTM classique, car l'injection à lieu à débit ou pression faible (Leroy 2000),
- le milieu poreux est supposé totalement saturé en fluide, ce qui est bien sûr faux lors du remplissage où il existe toujours une zone au voisinage du front de matière où la saturation n'est que partielle,
- la taille des pores est supposée faible par rapport aux dimensions du milieu poreux,
- enfin, la perméabilité est définie comme une propriété intrinsèque du milieu poreux, supposée indépendante de la nature du fluide et les effets de diffusion et de capillarité sont négligés. En pratique ces hypothèses ne seront pas vraies, en particulier au voisinage du front de matière. Elles constitueront une bonne approximation

uniquement si l'influence des flux microscopiques et moléculaires sur l'écoulement sont négligeables devant celle du flux macroscopique.

En modélisant le flux de résine par la loi de Darcy, les deux paramètres clés intervenant dans l'apparition des écarts volumiques d'imprégnation sont la perméabilité de la préforme et la viscosité de la résine. A ceux-ci s'ajoutent des paramètres inhérents aux cycles procédé (température/temps et pression/temps) et à l'outillage (positions des buses et des évents) : voir figure 87. Les causes prises en compte sont entourées en gras.

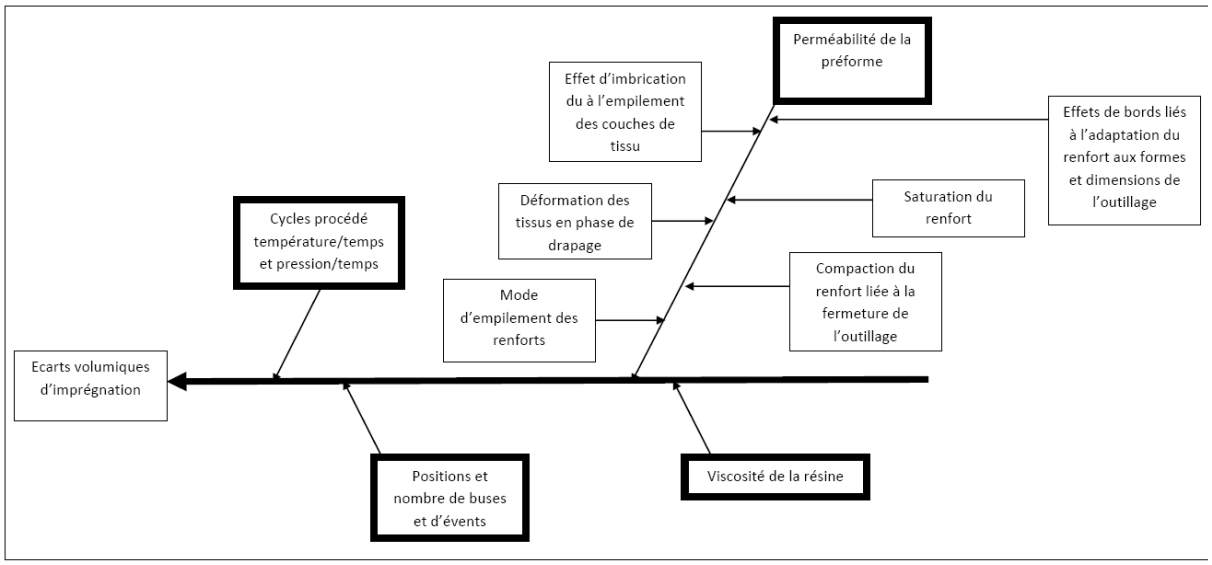



Figure 87 : Causes des écarts volumiques d'imprégnation (Mouton 2010).

## 4.4 Simulation de processus de fabrication

La démarche afin de caractériser le risque de rupture versus les écarts de fabrication d'une pièce est décrite dans la figure 88.

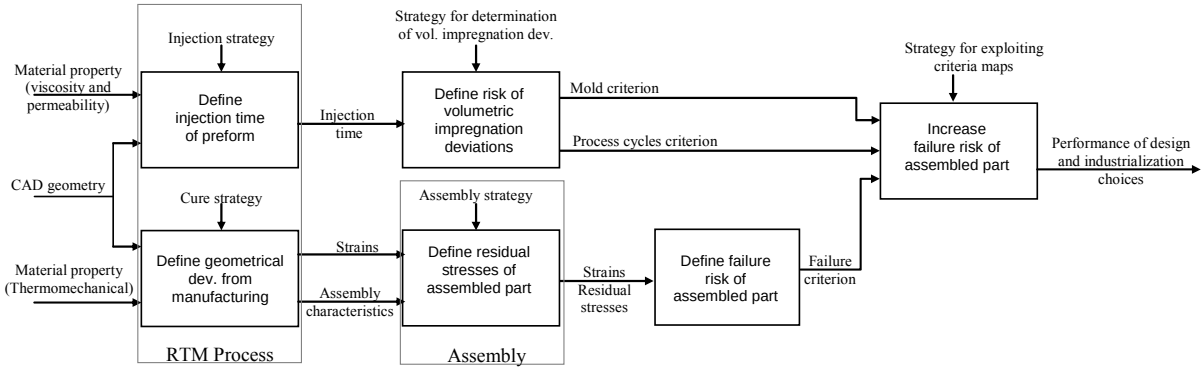



Figure 88 : Processus d'estimation du risque de rupture vs les écarts de fabrication d'une pièce (Mouton et al. 2011).

L'estimation des écarts volumiques d'imprégnation repose sur une simulation de la phase d'injection par PAM-RTM. La vitesse du front d'écoulement de la résine (liée aux conditions d'injection et à la disposition des buses et des évents) conditionne l'apparition des porosités. Le temps d'injection des divers éléments du maillage de la préforme est alors analysé afin

d'estimer des écarts volumiques d'imprégnation. Cela permet de localiser des zones de la pièce potentiellement sèches ou bien mal imprégnée.
La détermination des écarts géométriques dus aux contraintes résiduelles générées par la phase de cuisson est réalisée par Samcef. Cela permet d'estimer le risque de rupture de la pièce fabriquée en lui imposant des conditions de contact avec un composant infiniment rigide, simulant la phase d'assemblage également à l'aide de Samcef. Le risque de rupture est basé sur le critère de rupture de Hashin. Pour prendre en compte le couplage entre les écarts de fabrication (écarts volumiques d'imprégnation et écarts géométriques dus aux contraintes résiduelles) le risque de mauvaise imprégnation est cumulé au risque de rupture.
Ce cumul consiste à majorer le critère de rupture en fonction des écarts volumiques d'imprégnation.

### 4.4.1 Critères de performance d'industrialisation

Trois critères de performances ont été proposés pour privilégier parmi les différentes alternatives de fabrication une alternative particulière. Deux critères $Cr_1$ et $Cr_2$ estiment la performance de l'injection RTM par le risque d'apparition des écarts volumiques d'imprégnation. Le troisième critère $Cr_3$ est le critère de Hashin introduit par Hashin en 1980 (Hashin 1983). Les critères $Cr_1$, $Cr_2$ et $Cr_3$ correspondent respectivement à des ensembles de $n$ valeurs de critères $Cr_{1i}$, $Cr_{2i}$ et $Cr_{3i}$ ; $n$ étant le nombre d'éléments $i$ du maillage de la pièce.

#### 4.4.1.1 Critère 1 : critère d'outillage

Le critère 1 désigné $Cr_1$ est un critère d'outillage. Il détecte les défauts de remplissage des divers éléments du maillage de la pièce. $Cr_{1i}$ est le ratio entre le temps où l'élément $i$ commence à se remplir et la distance le séparant de la buse d'injection la plus proche. La définition de $Cr_{1i}$ est donnée dans la figure 89, illustrée par la figure 90.

$\mathrm{Cr}_{1i} = \frac{\mathrm{tsf}_i}{d_i}$
and
$d_i = \min(||P_i, Pg_j||)$
Such as $i \in \mathrm{N}$ and $\mathrm{i} \leq \mathrm{n}$
$j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

where $\mathrm{Cr}_1 = [\mathrm{Cr}_{11}, \mathrm{Cr}_{12}, \ldots \mathrm{Cr}_{1n}]$

| | |
|---|---|
| $\mathrm{tsf}_i$ | Is the time to start filling the element i |
| $P_i$ | Corresponds to the list of centroid coordinates for every elements $i$ |
| $Pg_j$ | Corresponds to the list of the coordinates of the $j$ gates |
| $n$ | The number of elements of the meshed part. |

Figure 89 : Définition du critère $Cr_1$ (Mouton et al. 2011).

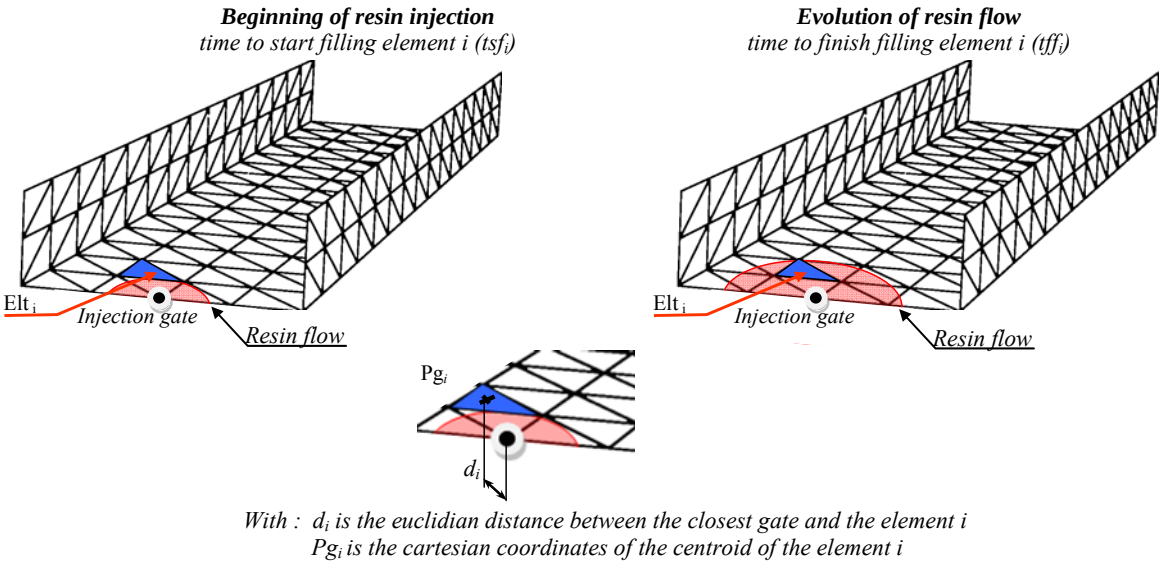



Figure 90 : Illustration de la détermination des critères $Cr_1$ et $Cr_2$ (Mouton et al. 2011).

#### 4.4.1.2 Critère 2 : critère de cycle RTM

Le critère 2 désigné $Cr_2$ caractérise la façon dont les éléments du maillage sont remplis. Ce critère permet de détecter les éléments qui sont remplis pendant un temps très long au regard du temps total d'injection de la pièce ou alors qui sont remplis en plusieurs phases distinctes, de manière discontinue. Une discontinuité de remplissage est souvent responsable de l'apparition de bulles d'air altérant les propriétés mécaniques de la pièce. La définition de $Cr_{2i}$ est donnée en figure 91, voir également la figure 90.

$$\mathrm{Cr}_{2i} = \mathrm{tff}_i - \mathrm{tsf}_i, i \in \mathrm{N} \text{ and } \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$$

where $\mathrm{Cr}_2 = [\mathrm{Cr}_{21}, \mathrm{Cr}_{22}, \ldots \mathrm{Cr}_{2n}]$

$\mathrm{tff}_i$ Is the time to finish the filling of the element $i$
$\mathrm{tsf}_i$ Is the time to start filling of the element $i$
$n$ The number of elements of the meshed part

Figure 91 : Définition du critère Cr2 (Mouton et al. 2011).

#### 4.4.1.3 Critère 3 : critère d'assemblage (Hashin)

Le critère de Hashin introduit des mécanismes de dégradation d'un matériau. Il se caractérise par quatre modes de rupture (Hashin 1983). Ces modes concernent les ruptures du renfort et de la résine respectivement en traction et en compression. Par définition, ces quatre critères doivent tous être inférieurs à 1 pour éviter une rupture. Parmi les quatre critères, nous retiendrons le critère maximal pour déterminer le critère $Cr_{3i}$ d'un élément $i$ du maillage de la pièce (Mouton et al. 2011).

### 4.4.2 Choix d'un processus de fabrication

Une application développée sous Matlab permet de visualiser les cartographies des critères $Cr_1$, $Cr_2$ et $Cr_3$ : voir figure 92, figure 93 et figure 94.

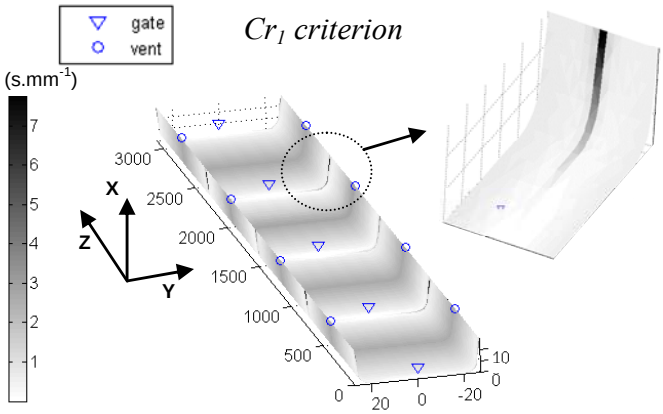



Figure 92 : Cartographie du critère $Cr_1$ (Mouton et al. 2011).

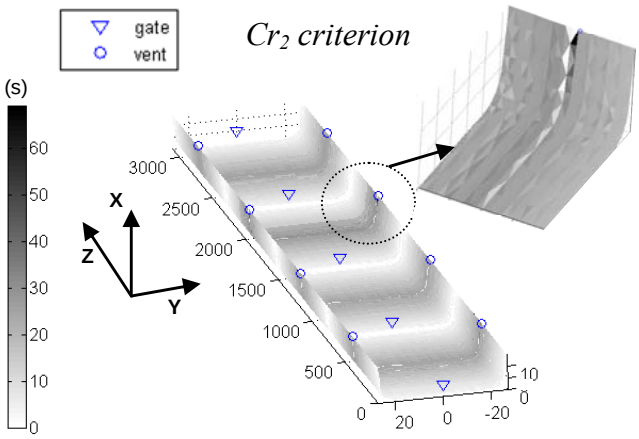



Figure 93 : Cartographie du critère $Cr_2$ (Mouton et al. 2011).

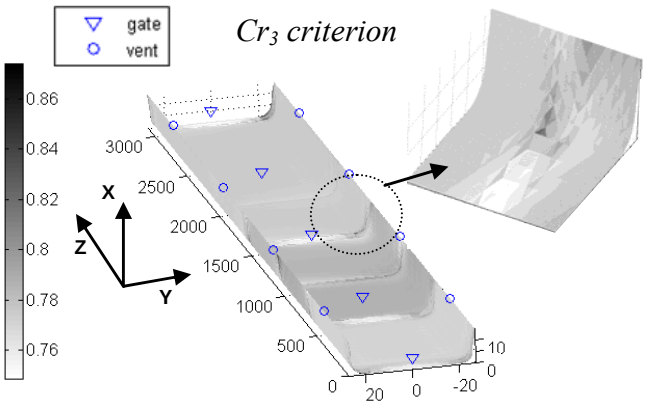



Figure 94 : Cartographie du critère $Cr_3$ (Mouton et al. 2011).

Critère par critère, cela permet d'analyser un processus de fabrication simulé par la méthode décrite en figure 88 (Mouton 2010), (Mouton et al. 2011).
L'analyse du couplage entre les critères a été réalisée à l'aide valeurs seuil $Y_{Crj}$ définies pour chaque critère (Mouton et al. 2011).

Le principe consiste à vérifier que tous les éléments du maillage dépassant une valeur seuil $Y_{Cr3}$ pour le critère $Cr_3$ ne cumule pas un critère $Cr_1$ ou $Cr_2$ dépassant également leurs valeurs seuil respectives $Y_{Cr1}$ et $Y_{Cr2}$.

Ainsi, le risque de rupture $R$ d'une pièce fabriquée correspond à un ensemble de $n$ critères $R_i$ de manière analogue aux critères $Cr_1$, $Cr_2$ et $Cr_3$.
Le risque de rupture $R_i$ d'un élément du maillage d'une pièce fabriquée prenant en compte les défauts couplés de fabrication est déterminée de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
& R_i = \max\left(R_{Cr3i} \times R_{Cr1i}, R_{Cr3i} \times R_{Cr2i}\right) \\
& \text{avec :} \\
& \text{si } Cr_{ji} < Y_{Crj} \text{ alors } R_{Crji} = 0 \text{ sinon } R_{Crji} = 1 \\
& Cr_{ji} : \text{ critère } Cr_j \text{ de l'élément de maillage } i \\
& Y_{Crj} : \text{ valeur seuil du critère } Cr_j \\
& 1 \le j \le 3 \\
& 1 \le i \le n \ (n : \text{nombre d'éléments du maillage})
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Les valeurs seuil peuvent être des valeurs reposant sur le savoir-faire et l'expérience de l'entreprise.

Un outil de statistique descriptive, la boîte à moustaches, a été choisi pour caractériser les trois critères sur les différents éléments du maillage de la pièce (Mouton 2010), (Mouton et al. 2011).
Les valeurs seuil peuvent être fournies par la relation suivante pour chaque critère $Cr_j$ :

$$
\begin{aligned}
& Y_{Crj} = \mu\left(Cr_j\right) + \sigma\left(Cr_j\right) \\
& \text{avec :} \\
& \mu\left(Cr_j\right) : \text{valeur moyenne de } Cr_j \\
& \sigma\left(Cr_j\right) : \text{écart type de } Cr_j
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Par exemple, l'histogramme de la boîte à moustaches du critère $Cr_3$ permet d'obtenir (voir figure 95) :
$\mu\left(Cr_3\right) = 0.77$
$\sigma\left(Cr_3\right) = 0.01$

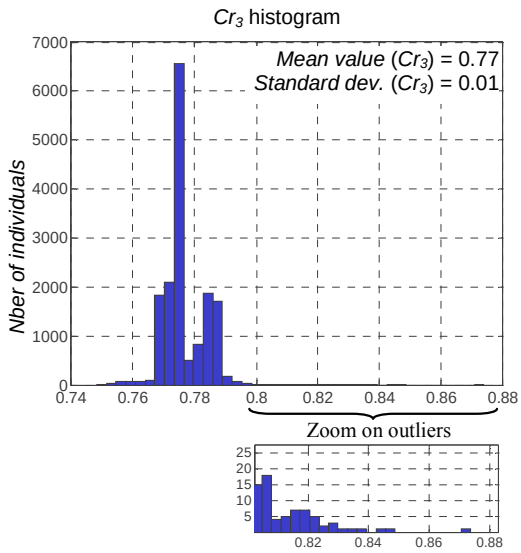



Figure 95 : Histogramme du critère $Cr_3$ (Mouton et al. 2011).

Finalement le risque de rupture $R$ peut être illustré selon le même principe que les critères $Cr_1$, $Cr_2$ et $Cr_3$.

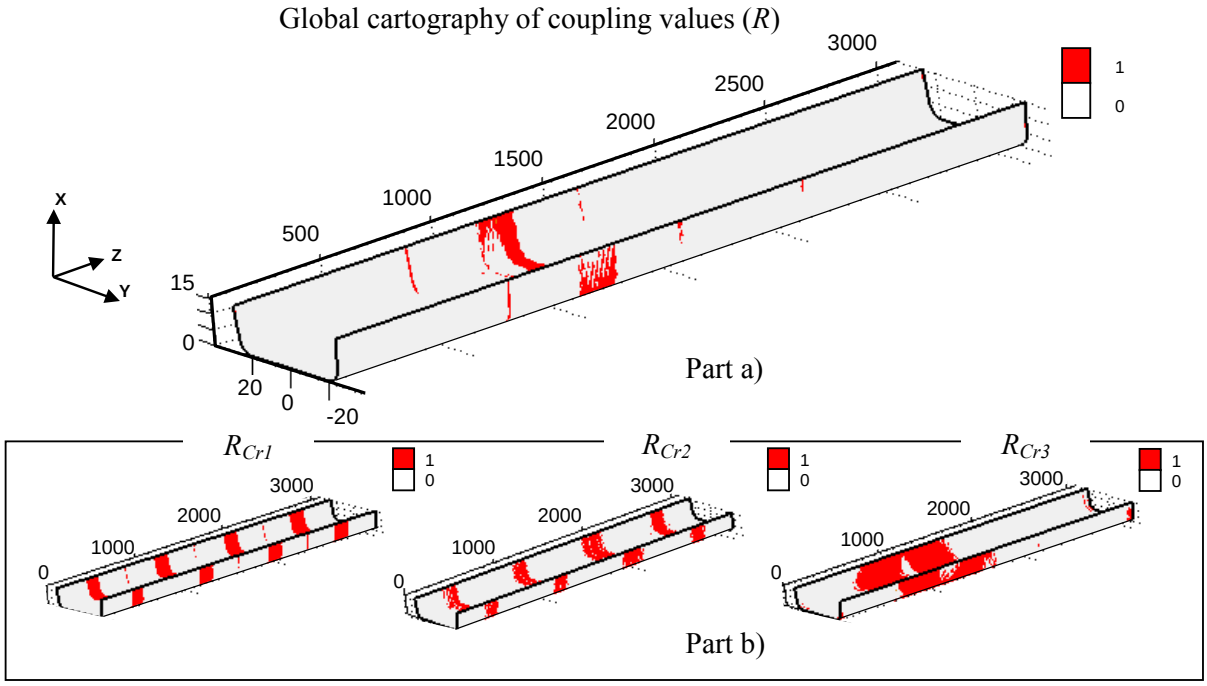



Figure 96 : Analyse du couplage entre les écarts de fabrication par le risque R.

Une analyse du couplage des critères $Cr_1$, $Cr_2$ et $Cr_3$ par un algorithme génétique a également été proposée (Mouton, Ledoux, et al. 2010). Cette analyse avait pour but de définir la position des buses et des évents minimisant le risque de rupture de la pièce.

## 4.5 Bilan et perspectives

### 4.5.1 Un premier bilan

Le premier bilan de ces travaux a conclu sur la nécessité de valider expérimentalement les critères $Cr_1$ et $Cr_2$ ; la caractérisation des défauts d'imprégnation en distinguant les macro et micro pores n'a pas pu être réalisée. De plus, la modélisation du processus de fabrication s'est focalisé sur les phases d'injection et de cuisson ; il reste à considérer les variantes de solutions de drapage pour couvrir le processus de fabrication de la pièce sur ses trois phases principales : drapage, injection et cuisson. D'autre part, afin de prendre en compte la virtuosité d'une conception en matériau composite, il serait très pertinent d'intégrer dans les différentes variantes plusieurs solutions reposant sur différentes intégrations fonctionnelles.

### 4.5.2 Caractériser numériquement et expérimentalement les écarts volumiques d'imprégnation

La participation du Professeur F. Trochu au jury de thèse de Serge Mouton, a permis de nouer une première collaboration avec son équipe, la Chaire sur les Composites à Hautes Performances (CCHP) de l'Ecole Polytechnique de Montréal (2011-2012). Son premier objectif a été d'investiguer sur les principales techniques de mesures destructives et non destructives des pores résiduelles.
L'apparition de macro pores est liée à une mauvaise avancée de la résine entre les faisceaux du renfort et a une taille de l'ordre de 100 μm.
L'apparition de micro pores est liée à une mauvaise pénétration de la résine entre les fibres (mono-filaments) du renfort, et a une taille de l'ordre de 1 μm.

Une fonctionnalité de l'outil PAM-RTM permet d'optimiser l'apparition des micro et macro pores en fonction de la pression d'injection ou du débit. Le modèle mis en œuvre repose sur le nombre capillaire du couple résine/renfort et du coefficient capillaire de la résine (Labat et al. 2001). Cette fonctionnalité de l'outil PAM RTM n'a pas encore été validée expérimentalement. Cela suppose de pouvoir mesurer les micro et macro pores sur une pièce.
Aujourd'hui les techniques destructives par pyrolyse ou par digestion d'acide menées par la Chaire sur les Composites à Hautes Performances de Montréal ont montrées qu'elles ne sont pas suffisamment précises. Les techniques de CND par ultrasons sont adaptées à des pièces de faibles épaisseurs afin de suivre la qualité d'une pièce fabriquée en série. Cela nécessite de connaître les localisations et les types de défauts potentiels à l'avance. Nous avons également collaboré avec l'ICMCB de l'Université Bordeaux 1, plus particulièrement avec la plateforme Tomomat, sur la mesure des pores par tomographie. Nous avons pu constater que définir un Volume Elémentaire Représentatif (VER) n'était pas trivial ; nous rejoignons en cela les problématiques générales de mesures par tomographie couramment rencontrées par d'autres disciplines comme le génie civil. Nous avons pu cependant conclure que la tomographie semble permettre la mesure de micro et macro pores sur une pièce avec un renfort à fibres de verre. Des travaux supplémentaires doivent être réalisés afin d'élaborer un protocole de mesure des micro et macro pores dans une pièce comprenant un renfort en fibres de carbone et une matrice en résine epoxy.

La mise en place de la plateforme ATA sur la place bordelaise a permis l'acquisition en 2010 d'une machine RTM réalisée par la société ISOJET.

Le deuxième objectif de notre collaboration avec la Chaire sur les Composites à Hautes Performances a également permis d'acquérir des connaissances afin de mettre en œuvre ce moyen de fabrication.

Aujourd'hui nous disposons des moyens matériel et des compétences de fabrication et de mesures pour continuer à approfondir la caractérisation des micro et macro pores dans une pièce fabriquée par le procédé RTM sur la place bordelaise.

Une récente expertise réalisée pour la société RATIER Figeac fabriquant des pales de rotor de moteur d'avion sur la simulation de l'injection RTM d'une pale souligne l'intérêt de développer des travaux de ce type.

### 4.5.3 Simuler les trois phases du processus de fabrication par procédé RTM

La modélisation des écarts de fabrication réalisée s'est focalisée sur les phases d'injection et de cuisson. Cela a permis de privilégier certains processus au regard d'un compromis entre les écarts volumiques d'imprégnation, les contraintes résiduelles et la tenue mécanique de la pièce. Les matériaux composites autorisent plusieurs variantes d'architectures de renforts que nous n'avons pas pu considérer dans le périmètre de travail spécifié par notre partenaire industriel. Cela constitue en soi un autre axe de travail à développer.
Des outils logiciels existent afin de définir différentes architectures de renfort obtenues par différents processus de drapage vis-à-vis de critères de tenue mécanique et de forme géométrique.

Une participation a un projet européen est en cours de finalisation avec la société ESI Group, dont le centre de recherche et développement est désormais basée à Mérignac. L'objectif est de qualifier des processus de fabrication en intégrant les phases de drapage, d'injection et de cuisson en s'appuyant sur les outils logiciels de simulation d'ESI Group : Quick Drapping, PAM RTM et PAM Cooling ; de plus des acteurs majeurs du secteur aéronautique mettent à disposition du projet des pièces de structure avec leurs historiques d'industrialisation permettant de pouvoir effectuer une première validation de ce type de travail.

### 4.5.4 Spécifications de fabrication sur un processus mettant en œuvre des matériaux composites

Cet axe de travail nouveau par rapport à mes compétences de génie mécanique m'a permis d'aborder une démarche de transfert de spécifications de la conception vers la fabrication sur un procédé original par rapport aux divers travaux de la communauté CIRP Computer Aided Tolerancing.
Depuis la définition de l'intégration fonctionnelle d'un sous-ensemble figeant le nombre et les formes des pièces constitutives, jusqu'à la définition des processus de fabrication des pièces et d'assemblage, le périmètre de travail est immense. Aujourd'hui, il est peu exploré. J'envisage de m'y investir de manière significative en fonction de la stratégie de recherche de la partie génie mécanique d'I2M.
Cela pose aussi clairement son positionnement dans I2M. Le département Matériaux Procédés et Interactions doit y être associé. Cela relève la problématique du positionnement de travaux de recherche en industrialisation : est-ce de la conception, est-ce de la fabrication ? Sûrement un peu des deux. La frontière entre un travail d'études en conception et un travail d'études en méthodes n'existent pas vraiment dans une conception de structure en matériaux composites.

# 5 CONCLUSION

L'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique consiste à simuler la vérification de la conformité du système au regard des exigences fonctionnelles caractérisant le fonctionnement attendu du système. Cette vérification impose de prendre en compte les spécifications géométriques des pièces constitutives et les spécifications entre les pièces potentiellement en contact.
Je me suis plus particulièrement focalisé sur la simulation de l'analyse des tolérances géométriques par des polytopes (**collaboration laboratoire MAP5 UMR 8145, Université Paris Descartes**). Une approche par des polytopes consiste à ne manipuler que des contraintes caractérisant les variations géométriques entre des surfaces d'une même pièce et entre des surfaces de pièces potentiellement en contact. Cela permet de modéliser la variabilité des défauts géométriques inhérents à tout procédé de fabrication de pièces, inhérents à tout procédé d'assemblage et aussi inhérent au comportement d'un système mécanique, par exemple son comportement thermomécanique (**thèse Laurent Pierre, collaboration laboratoire TREFLE UMR 8508 et Turbomeca**).

La conformité d'un système mécanique doit être assurée pour plusieurs exigences fonctionnelles. D'autre part, une démarche d'analyse de tolérances réalisées à un stade très avancé du cycle de conception peut constater des non conformités sans pour autant influencer les différents choix d'architectures d'un système, ainsi que les formes et dimensions des pièces constitutives. Ce problème est souvent la cause de l'augmentation des délais et des coûts de développement d'un produit.
Cela m'a conduit à m'orienter vers la structuration des données pour le tolérancement dans un modèle produit pour identifier les données manipulées en analyse de tolérances (**thèse Jérôme Dufaure, collaboration laboratoires LAPS, L3S, LASMIS et CRAN ; industriel : Open CASCADE SA**).

La formalisation d'une activité de transfert de spécifications géométriques a mis en évidence la nécessité d'assurer la traçabilité des spécifications géométriques pour :

- couvrir le cycle de conception (aspect multi niveaux du cycle de conception d'un produit)
- partager les données manipulées avec d'autres expertises métiers (aspect multi vues du cycle de conception d'un produit).

Une tentative d'extension des concepts de transfert de spécifications géométriques à des spécifications techniques liées au produit, et à des spécifications organisationnelles inhérentes à l'entreprise assurant la conception du produit a été réalisée (**thèse manuel Gonçalves, collaboration IMS UMR 5218**).

Enfin, une opportunité industrielle fortement stimulée par le contexte aquitain incitant les acteurs du pôle Aerospace Valley à développer des compétences liées aux matériaux composites, m'a conduit à aborder la problématique d'analyse de tolérances pour la fabrication liée au procédé Resin Transfer Molding (RTM) (**thèse Serge Mouton, collaboration laboratoire TREFLE UMR 8508 et Dassault Aviation**). Dans un procédé impliquant des phénomènes physiques extrêmement complexes, les spécifications fonctionnelles d'une pièce de structure aéronautique ont été corrélés à des spécifications de fabrication (spécifications d'outillages, spécifications de pression d'injection et de température ...). Dans ce type travail,

il n'est plus possible de travailler avec des modèles de solides infiniment rigides comme souvent en tolérancement de fabrication restreint aux procédés d'usinage.

Mon activité de recherche peut donc se résumer par le développement d'une approche par des polytopes de l'analyse des tolérances géométriques de systèmes de solides infiniment rigides et de systèmes dont les variations d'origine thermomécanique sont prises en comptes.
Cette approche m'a amené à considérer la problématique de structuration des données pour le tolérancement en se focalisant sur la traçabilité des spécifications déployées dans le cycle de conception d'un produit. Enfin, le transfert de spécifications fonctionnelles d'une pièce élaborée par le procédé RTM a été considéré pour aborder la corrélation de spécifications fonctionnelles avec les spécifications inhérentes au procédé RTM.

# 6 PERSPECTIVES GENERALES

D'une manière générale, ma thématique de recherche ne consiste pas à développer des modèles et des outils destinés à caractériser le comportement physique d'un système mécanique ou d'un procédé de fabrication. Il s'agit de les utiliser, voire de les adapter pour maîtriser la variabilité fonctionnelle d'un produit vis-à-vis de ses fonctionnalités attendues.
Certains axes de recherche nécessitent des investissements en terme de ressources matérielles et de ressources humaines que je préciserai ci-après.

### 6.1.1 Analyse des tolérances par des opérations sur des polytopes

#### 6.1.1.1 Géométrie algorithmique et tolérancement géométrique

Le développement des opérations sur les polytopes, en particulier sur les sommes de Minkowski, doit être poursuivi en considérant les aspects fondamentaux des polytopes mais aussi les spécificités inhérentes au tolérancement géométrique. Aujourd'hui aucun outil de détermination de polytopes n'est adapté à la problématique du tolérancement. Il faut donc adapter des concepts fondamentaux de la géométrie algorithmique pour éprouver leur efficacité dans les problèmes liés au tolérancement.
Cette efficacité doit être étudiée en :

- développant des stratégies algorithmiques prenant en compte la précision numérique et la robustesse des opérations sur les polytopes,
- développant des stratégies de mise en œuvre des opérations sur les polytopes prenant en compte la précision des calculs vis-à-vis des tolérances géométriques simulées, sans négliger les temps de calculs si l'on se projette dans un contexte industriel.

Ce travail a été amorcé avec ma collaboration avec le **laboratoire MAP5 de l'Université Paris Descartes** et est actuellement poursuivi dans la thèse de Lazhar Homri. Ce travail très vaste n'est pas terminé. Des premiers essais de parallélisation des algorithmes vont être menés fin 2012 avec le **Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain** par une collaboration avec **Pierre Gay**.
Le recrutement au sein d'I2M d'une personne compétente d'un niveau ingénieur d'études ou de recherche en calcul scientifique pour mener à bien l'adaptation des concepts de géométrie algorithmique à la problématique du tolérancement géométrique me semble indispensable.

#### 6.1.1.2 Intégration du comportement physique des systèmes mécaniques dans les outils d'analyse de tolérances

Historiquement, le tolérancement géométrique repose sur la modélisation d'un système mécanique en solides infiniment rigides. Le travail d'intégration des déformations élastiques (thèse Laurent Pierre) mais aussi plastiques doit être déployé sous plusieurs axes complémentaires :

- l'intégration dans les ensembles de contraintes géométriques de lois de comportement thermomécanique parcimonieuse,
- la prise en compte des régimes thermiques transitoires ; cela est très pertinent dans la conception d'une turbine à gaz,
- l'application de la maîtrise des variations d'origine thermomécanique à la prise en compte des contraintes résiduelles de certains procédés comme le procédé RTM par exemple,
- la prise en compte des phénomènes d'usure.

Les trois premières actions seront conduites avec mes collègues du **département IMC**.

La collaboration d'industriels tels que **Turbomeca**, concevant, fabriquant et mesurant des sous-ensembles sur un même site constitue un énorme atout afin de pouvoir valider expérimentalement ces travaux.
La prise en compte des phénomènes d'usure sera réalisée en collaboration avec le **département Durabilité des Matériaux, des Assemblages et des Structures (DUMAS)** d'I2M.
Cette problématique s'oriente vers un axe de travail lié à la maintenance d'un système mécanique, par exemple la maintenance du METROCABLE de Medellin en Colombie, où la reconception de pinces assurant la liaison entre le câble et la cabine est indispensable. Des données sont récupérées par des capteurs (optiques et laser) permettant de valider les comportements physiques et les effets induits à intégrer dans la modélisation des variations géométriques durant la vie du mécanisme. Ces variations sont inhérentes aux vibrations, au balancement de la cabine, au battement du câble et à divers phénomènes d'usure. Les partenaires de ce travail sont **l'Université colombienne EAFIT** (Dr R. Mejia) et la **société POMA** développant des METROCABLES.

### 6.1.2 Industrialisation du processus de fabrication de pièces composites

Depuis la définition de l'intégration fonctionnelle d'un sous-ensemble de structure d'un aéronef figeant le nombre et les formes des pièces constitutives, jusqu'à la définition des processus de fabrication des pièces et d'assemblage, le périmètre de travail est immense. Aujourd'hui, il est peu exploré. Le premier bilan des travaux liés à l'industrialisation des pièces composites a conclu sur la nécessité de

- valider expérimentalement l'apparition de défauts volumiques d'imprégnation en distinguant les macro et micro pores,
- définir des critères permettant par simulation de qualifier le processus de fabrication en incluant sur les phases de drapage, d'injection et de cuisson,
- prendre en considération différentes variantes plusieurs solutions reposant sur différentes intégrations fonctionnelles.

La mise en place de la **plateforme ATA** sur la place bordelaise a permis l'acquisition en 2010 d'une machine RTM réalisée par la société ISOJET.
Notre collaboration avec la **Chaire sur les Composites à Hautes Performances de l'Ecole Polytechnique de Montréal** a également permis d'acquérir des connaissances afin de mettre en œuvre ce moyen de fabrication.
Une première collaboration avec l'**ICMCB** (A. Chirazi, D. Bernard), plus particulièrement avec la **plateforme TomoMat** sur la mesure des pores par tomographie, doit permettre de collaborer avec la future plateforme **PLACAMAT** actuellement en cours de création.

Aujourd'hui nous disposons des moyens matériel et des compétences de fabrication et de mesures pour continuer à améliorer la maîtrise des différentes caractéristiques fonctionnelle d'une pièce fabriquée par le procédé RTM sur la place bordelaise.
Une récente expertise réalisée pour la société **RATIER Figeac** fabriquant des pales de rotor de moteur d'avion sur la simulation de l'injection RTM d'une pale souligne l'intérêt de développer des travaux de ce type. Un projet est actuellement en cours de montage sur ce sujet impliquant la société **ESI Group** développant des outils de simulation de drapage et d'injection de pièces en matériaux composites.

# 7 BIBLIOGRAPHIE


Anselmetti, B., 2010. CLIC: A Method for Geometric Specification of Products. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, p. 210‑239.

Anselmetti, B., 2006. Generation of functional tolerancing based on positioning features. *Computer-Aided Design*, 38, p.902‑919.

Anselmetti, B. et al., 2010. Quick GPS: A new CAT system for single-part tolerancing. *Computer-Aided Design*, 42(9), p.768‑780.

ANSI Y14.5M, 1993. Dimensioning and tolerancing.

Avis, D., Bremner, D. & Seidel R., 1997. How good are convex hull algorithms ? *Computational Geometry: Theory and Applications*, 7, p.265‑302.

Ballot, E. & Bourdet, P., 1995. Geometrical behavior laws for computer aided tolerancing. In *Proc. of 4th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 4th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Tokyo (Japan), p. 143‑153.

Ballot, E., Bourdet, P. & Thiébaut, F., 2001. Determination of relative situations of parts for tolerance computation. In *Geometric Product Specification and Verification: Integration of Functionality*. 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Cachan (France): ISBN 1-4020-1423-6 - Kluwer academic publisher, p. 63‑72.

Ballot, Eric, 1995. *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement*. Thèse de Doctorat. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée: Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Ballu, A. et al., 2006. A new design method based on functions and tolerance specifications for product modeling. *CIRP annals of manufacturing technology*, 55(1), p.139‑142.

Ballu, A., Dufaure, J. & Teissandier, D., 2007. An adaptive tolerance model for collaborative design. In *Proc. of 3rd DET CIRP*. 3rd DET CIRP. ISBN 978-0-387-49863-8, Springer, p. 233‑240.

Ballu, A. & Mathieu, L., 1999. Choice of functional specifications using graphs within the frame work of education. In *Global Consistency of Tolerances*. 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Enschede (Netherlands): ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer academic publisher, p. 197‑206.

Ballu, A., Mathieu, L. & Legoff, O., 2010. Representation of Mechanical Assemblies and Specifications by Graphs. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, p. 87‑110.

Ballu, Alex, 2009. *Caractérisation et métrologie de la géométie et des déplacement pour le tolérancement et la biomécanique*. Habilitation à Diriger les Recherches. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Université Bordeaux 1.

Ballu, Alex, 1993. *Identification des modèles géométriques composés pour la spécification et la mesure par coordonnées des caractéristiques fonctionnelles des pièces mécaniques*. Thèse de Doctorat. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée: Université Nancy I.

Barki, H., Denis, F. & Dupont, F., 2009. Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra. *Computer-Aided Design*, 41(7), p.525‑538.

Bénichou, S. & Anselmetti, B., 2011. Thermal dilatation in functional tolerancing. *Mechanism and Machine Theory*, 46, p.1575‑1587.

Berreur, L., De Maillard, B. & Nôsperger, S., 2002. *L'industrie française des matériaux composites. Etude prospective composites, rapport de synthèse*,

Boissonnat, J.D. & Yvinec, M., 1998. *Algorithmic Geometry*, ISBN-13: 9780521565295, Cambridge University Press.

Bourdet, P., 1973. Chaînes de cotes de fabrication. *L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique*, 191.

Bourdet, P. et al., 1996. The concept of the small displacement torsor in metrology. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Advanced mathematical tools in metrology II*, 40, p.110‑122.

Bourdet, P., Thiébaut, F. & Cid, G., 2010. Writing the 3D Chain of Dimensions (Tolerance Stack-Up) in Symbolic Expressions. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, p. 125‑149.

Bourdet, Pierre, 1987. *Contribution à la mesure tridimensionnelle : Modèle d'identification géométrique des surfaces, Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, Correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles*. Thèse pour obtenir le grade de docteur ès-sciences. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée: Université de Nancy I.

Breteau, P., 2009. *Simulation d'assemblage flexible par la mesure - Application au domaine de l'aéronautique*. Thèse de Doctorat. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée: Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Bueler, B., Enge, A. & Fukuda, K., 2000. Exact Volume Computation for Polytopes: A Practical Study. In *Polytopes — Combinatorics and Computation*. Mathematics and Statistics. Springer, p. 131‑154.

Calka, P., 2009. *Mosaïques, enveloppes convexes et modèle Booléen : quelques propriétés et rapprochements*. Habilitation à Diriger les Recherches. Laboratoire MAP5 - UMR 8145: Université Paris Descartes.

Clément, A. & Bourdet, P., 1988. A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model. *Annals of the CIRP*, 37(1).

Clément, A., Desrochers, A. & Rivière, A., 1991. Theory and pratice of 3D tolerancing for assembly. In *Proc. of 2nd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 2nd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Penn State University (USA).

Clément, A., Rivière, A. & Temmerman, M., 1994. *Cotation fonctionnelle des systèmes mécaniques*, PYC édition - ISBN 2-85330-132-X.

Clozel, P. & Rance, P.A., 2010. MECAmaster: a Tool for Assembly Simulation from Early Design, Industrial Approach. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, p. 241‑273.

Dantan, J.Y. & Ballu, A., 2002. Assembly specification by Gauge with Internal Mobilities (G.I.M.) : a specification semantics deduced from tolerance synthesis. *Journal of Manufacturing Systems*, 21(3), p.218‑235.

Dantan, J.Y., Ballu, A. & Mathieu, L., 2008. Geometrical product specifications : model for product lifecycle. *Computer-Aided Design*, 40(4), p.493‑501.

Dantan, Jean Yves, 2000. *Synthèse des spécifications géométriques : modélisation par Calibre à Mobilités Internes*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Université Bordeaux 1.

Dassault Systèmes, 2012. *CATIA, www.3ds.com*,

Davidson, J. K., Mujezinovic, A. & Shah, J. J., 2002. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. *ASME Transactions on Journal of Mechanical Design*, 124, p.609‑622.

DCS, 2011. *DCS - Tolerance Analysis, GD&T, and Quality Solutions, www.3dcs.com*.

Delos, V., 1997. *Opérations sur les polytopes : application à l'analyse des tolérances d'un mécanisme*, Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Mémoire de DESS d'ingénierie mathématiques et outils informatiques de l'Université de Pau et des pays de l'Adour.

Dong, C., 2003. *Dimension variation prediction and control for composites*. PhD thesis. Florida State University College of Engineering.

Dufaure, J. & Teissandier, D., 2008. A tolerancing framework to support geometric specifications traceability. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 36(9-10), p.894‑907.

Dufaure, J. & Teissandier, D., 2003. Geometric tolerancing from conceptual to detail design. In *Proc. of 8th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 8th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Charlotte (North Carolina - USA).

Dufaure, J. & Teissandier, D., 2006. Integration of a tolerance analysis tool (MECAmaster) in a tolerancing framework based on IPPOP, an open collaborative platform. In *Proc. of 6th international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. 6th IDMME. Grenoble (France).

Dufaure, J., Teissandier, D. & Débarbouillé, G., 2007. Influence of the standard components on the tolerancing activity. In *Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing*. 9th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Tempe (Arizona - USA): ISBN 978-1-4020-5437-2, Springer, p. 235‑244.

Dufaure, J., Teissandier, D. & Débarbouillé, G., 2004. Product model dedicated to collaborative design: a geometric tolerancing point of view. In *Proc. of 5th international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. 5th IDMME. Bath (England).

Dufaure, Jérome, 2001. *Etude des spécifications géométriques dans un montage de roulements*, Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Mémoire de recherche du DEA de Production Automatisée de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Dufaure, Jérome, 2005. *Etude et intégration du transfert des spécifications géométriques et intégration dans le processus de conception d'un produit*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Université Bordeaux 1.

Dugois, K., 2011. *Génération Automatisée de Polytopes*, Institut Mécanique et Ingénierie de Bordeaux - UMR 5295: Rapport de stage de 2ème année de l'école ENSEIRB-Matmeca.

Dupinet, E., 1991. *Contribution à l'étude d'un système informatique d'aide à la conception de produits mécaniques par la prise en compte des relations fonctionnelles*. Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Paris.

ESI Group, 2008. *PAM-RTM, www.esi-group.com*.

Esteves, J. & Pastor, J., 2001. Enterprise resource planning systems research: an annotated bibliography. *Communication of AIS*, 7(8), p.1‑52.

Fleming, A.D., 1987. *Analysis of Uncertainties and Geometric Tolerances in Assemblies of Parts*. PhD thesis. University of Edinburgh.

Fleming, A.D., 1988. Geometric relationships between toleranced features. *Artificial Intelligence*, 37(1-3), p.403‑412.

Fogel, E., Halperin, D. & Weibel, C., 2009. On the Exact Maximum Complexity of Minkowski Sums of Polytopes. *Discrete and Computational Geometry*, 42(4), p.654‑669.

Fukuda, K., 2004. From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes. *Journal of Symbolic Computation*, 38(4), p.1261‑1272.

Fukuda, K. & Weibel, C., 2010. A linear equation for Minkowski sums of polytopes relatively in general position. *European Journal of Combinatorics*, 31(2), p.565‑573.

Gaunet, D., 1994. *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanismes en CFAO*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécatronique de l'I.S.M.C.M: Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Germain, F., 2007. *Tolérancement statistique tridimensionnel, intégration en CFAO*. Thèse de Doctorat. Laboratoire Systèmes et Matériaux pour la Mécatronique (SYMME): Université de Savoie.

Gero, J.S., 1990. Design Prototypes: A Knowledge Representation Schema for Design. *A.I. Magazine*, 11(4), p.26‑36.

Giordano, M. et al., 1992. Clearance space in volumic dimensioning. *Annals of the CIRP*, 41(1), p.565–568.

Giordano, M. & Duret, D., 1993. Clearance Space and Deviation Space. In *Proc. of 3rd CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing*. 3rd CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing. Cachan (France): ISBN 2-212-08779-9, p. 179‑196.

Girard, P. & Doumeingts, G., 2004. Modelling of the engineering design system to improve performance. *Computers & Industrial Engineering*, 46(1), p.43‑67.

Gonçalves, M., 2010. *Proposition d'indicateurs pour évaluer l'adéquation entre l'expression du besoin et les spécifications d'un produit*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469, Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système UMR 5218: Université Bordeaux 1.

Gouley, G., 1995. *Etude des écoulements dans les procédés d'injection de résine sur renfort*. Thèse de Doctorat. Université de Lille Flandres Artois.

Gritzmann, P. & Sturmfels, B., 1993. Minkowski addition of polytopes: computational complexity and applications to Gröner bases. *Siam Journal of Discrete Mathematics*, 6(2), p.246‑269.

Hashin, Z., 1983. Analysis of composite materials, a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50, p.481‑505.

Hervé, J.M., 1978. Analyse structurelle des mécanismes par groupe de déplacements. *Mechanism and Machine Theory*, 13(4), p.437‑450.

Homem De Mello, L.S. & Sanderson, A.C., 1989. A correct and complete algorithm for the generation of mechanical assembly sequences. In *Proc. of IEEE International conference on Robotics and Automation*. IEEE International conference on Robotics and Automation. Vol. 1, p. 56‑61.

Hyeon, H.J., Parsaei, H.R. & Sullivan, W.G., 1993. Principles of concurrent engineering. In *Concurrent Engineering: Contemporary issues and modern design tools*. Edited by Hamid R. Parsaei and William G. Sullivan, Chapman & Hall.

ISO1101, 2004. Geometrical Product Specifications (GPS), Geometrical tolerancing, Tolerances of form, orientation, location and run-out.

ISO286-1, 1988. ISO system of limits and fits - Part 1 : Bases of tolerances, deviations and fits.

ISO3952-1, 1981. Kinematic diagrams - Graphical symbols-Part 1.

Jiang, S., Zhang, C. & Wang, B., 2002. Optimum arrangement of gate and vent locations for RTM process design using a mesh distance based approach. *Composite PART A*, 33(4), p.471‑481.

Krause, F.L. et al., 1993. Product Modelling. *Annals of the CIRP*, 42(2), p. 149-152.

Labat, L. et al., 2001. Void fraction prevision in LCM parts. *The European Physical Journal Applied Physics*, 16, p.157‑164.

Laine, B., 2008. *Influence des déformations d'un renfort fibreux sur sa perméabilité : modélisations et expériences*. Thèse de Doctorat. Ecole Supérieure d'Arts et Métiers.

Le Borzec, R. & Lotterie, J., 1975. *Principes de la Théorie des Mécanismes* ISBN 2-04-001018-1., Dunod.

Ledoux, Y. & Teissandier, D., 2012. Geometric variability analysis by a fiabilist approach : application to a turbine. *Research In Engineering Design*, DOI 10.1007/s00163-012-0146-9.

Lee, K. & Gossard, D.C., 1985. A hierarchical data structure for representing assemblies : part 1. *Computer-Aided Design*, 17(1), p.15‑19.

Leroy, E., 2000. *Etude et modélisation des propriétés de systèmes réactifs thermodurcissables en cours de réticulation pour la simulation du procédé RTM*. Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliqués de Lyon.

Liberman, L.I. & Wesley, M.A., 1977. An Automatic Programming System for Computer Controlled Mechanical Assembly. *IBM Journal of Research and Developpement*, 21(4), p.321‑333.

Luo, J. et al., 2001. Optimum tooling design for resin transfer molding with virtual manufacturing and artificial intelligence. *Composite PART A*, 32, p.877‑888.

Mantripragada, R., 1998. *Assembly Oriented Design: Concepts, Algorithms and Computational Tools*. PhD thesis. Department of Mechanical Engineering: Massachusetts Institute of Technology.

Marguet, B., Falgarone, H. & Chevassus, N., 2003. AnaTole: un outil d'analyse 3D des variations géométriques pour la conception de produit aéronautique. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 18(1), p.113‑122.

Mathworks, 2010. *Matlab version 7.10, www.mathworks.com*.

MECAmaster SARL, 2012. *MECAmaster Assembly Software, www.mecamaster.com*.

Mouton, S. et al., 2011. Composite part design based on numerical simulation of the manufacturing process. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 55(5-8), p.421‑431.

Mouton, S., Ledoux, Y., et al., 2010. Genetic algorithm for design and manufacture optimization based on numerical simulations applied to aeronautic composite parts. In

*NUMIFORM 2010, Book Series: AIP Conference Proceedings*. 10th International Numerical Methods in Industrial Forming processes. Pohang (Korea).

Mouton, S., Teissandier, D., et al., 2010. Manufacturing requirements in design: The RTM process in aeronautics. *Composite PART A*, 41, p.125‑130.

Mouton, Serge, 2010. *Formalisation de paramètres techniques et économiques pour l'aide à l'industrialisation de pièces composites*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469, Laboratoire Transferts Ecoulements Fluides Energétique UMR 8508: Université Bordeaux 1.

Mujezinovic, A., Davidson, J. K. & Shah, J. J., 2004. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to polygonal faces. *ASME Transactions on Journal of Mechanical Design*, 126(3), p.504‑518.

Mujezinovic, A., Davidson, J. K. & Shah, J. J., 2001. A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Rectangular Faces. In *DETC01/DAC-21046*. ASME Design Engr. Technical Conf's. Pittsburgh, PA (USA).

Noel, F., Roucoules, L. & Teissandier, D., 2005. Specification of product modelling concepts dedicated to information sharing in a collaborative design context. In *Proc. of 5th international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. 5th IDMME. Bath (England): ISBN 1-4020-3481-4, Springer, p. 135‑146.

Open CASCADE, 2011. *Open CASCADE Technology, www.opencascade.com*, Available at: www.opencascade.com.

Petit, J.P., 2005. *Spécification géométrique des produits : méthode d'analyse de tolérances. Application en Conception Assistée par Ordinateur*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMécA) Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy: Université de Savoie.

Pierre, L., Teissandier, D. & Nadeau, J.P., 2007. Analyse des tolérances géométriques dans un contexte multi-expertises, application à une turbine de moteur d'hélicoptère. In 18ème Congrès Français de la Mécanique.

Pierre, L., Teissandier, D. & Nadeau, J.P., 2009a. Integration of multiple physical behaviours into a geometric tolerancing approach. In *Proc. of 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, in CDRom*. 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Annecy (France).

Pierre, L., Teissandier, D. & Nadeau, J.P., 2009b. Integration of thermomechanical strains into tolerancing analysis. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, 3(4), p.247‑263.

Pierre, L., Teissandier, D. & Nadeau, J.P., 2010. Qualification of turbine architectures in a multiphysical approach: application to a turboshaft engine. In *cdrom*. IDMME - Virtual Concept 2010. Bordeaux (France).

Pierre, L., Teissandier, D. & Nadeau, J.P., 2008. Tolerancing analysis taking into account thermomechanical strains. In *cdrom*. IDMME 2008. Beijing (China).

Pierre, Laurent, 2011. *Analyse des spécifications géométriques pour l'aide à la décision en conception, application à une turbine de moteur d'hélicoptère*. Thèse de Doctorat. Institut Mécanique et Ingénierie de Bordeaux - UMR 5295: Ecole Supérieure d'Arts et Métiers.

Qhull, www. qhull. or., 2012. *Qhull*.

Rivest, L., Fortin, C. & Morel, C., 1994. Tolerancing a solid with a kinematic formulation. *Computer-Aided Design*, 26(6), p.465‑476.

Rossignac, R. & Requicha, A.A.G., 1986. Offsetting operations in solid modelling. *Computer Aided Geometric Design*, 3, p.129‑148.

Roucoules, L. et al., 2006. IPPOP : an opensource collaborative design platform to link product, design process and industrial organisation information platform. In *cdrom*. Proc. of 6th international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering. Grenoble (France).

Roy, U. & Li, B., 1999. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.: Size, orientation and position tolerances. *Computer-Aided Design*, 31(4), p.273‑285.

Roy, U. & Liu, C.R., 1988. Feature-based representational scheme of a solid modeler for providing dimensioning and tolerancing information. *Robotic & Computer-Integrated Manufacturing*, 4(3-4), p.335‑345.

Ruiz, E. et al., 2006. Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formation in resin transfer molding. *Composite Science and Technology*, 66, p.465‑486.

Sacks, E. et al., 2001. Toward robust kinematic synthesis of mechanical systems. In *Geometric Product Specification and Verification: Integration of Functionality*. 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Cachan (France): ISBN 1-4020-1423-6 - Kluwer academic publisher, p. 135‑144.

Samtech S.A, 2008. *Samcef, www.samtech.com*.

Serre, P., Rivière, A. & Clément, A., 2010. Parametric Specification of Mechanisms. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY.

Siestrunck, R., 1973. Quelques aspects nouveaux de la théorie des mécanismes et applications. *Revue française de mécanique*, 45, p.5‑12.

Soderberg, R., Lindkvist, L. & Dahlström, S., 2006. Computer-aided robustness analysis for compliant assemblies. *Journal of Engineering Design*, 17, p.411‑428.

Sodhi, R. & Turner, J.U., 1994. Towards modelling of assemblies for product design. *Computer-Aided Design*, 26(2), p.85‑97.

Sohlenius, G., 1992. Concurrent Engineering. *Annals of the CIRP*, 41(2).

Spensieri, D. et al., 2009. A method to optimize geometrical quality and motion feasibility of assembly sequences. In *Proc. of the 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Annecy (France).

Srinivasan, V., 1993. Role of Sweeps in Tolerancing Semantics. In *CRTD*. International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology. p. 69‑78.

Teissandier, D. et al., 1996. Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L : Unions Pondérées d'Espaces de Liberté). In *ASME Third Biennal Joint Conference on Engineering Systems Design & Analysis*. Montpellier (France): ISBN 0-7918-1503-X, p. 129‑136.

Teissandier, D., Couétard, Y. & Gérard, A., 1999. A Computer Aided Tolerancing Model : Proportioned Assemblies Clearance Volume. *Computer-Aided Design*, 31, p.805‑817.

Teissandier, D., Couétard, Y. & Gérard, A., 1998. Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L : Unions Pondérées d'Espaces de Liberté) : application to setup planning. In *Geometric Design Tolerancing: Theories, Standards and Applications*. 5th CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing. Toronto (Canada): ISBN 13: 9780412830006, Chapman & Hall, p. 171‑182.

Teissandier, D. & Delos, V., 2011a. Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans. *Computer-Aided Design*, 43, p.1567‑1576.

Teissandier, D. & Delos, V., 2011b. Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes dedicated to tolerance analysis. In *cdrom*. IMProVe 2011. Venice, Italy.

Teissandier, D., Delos, V. & Couétard, Y., 1999. Operations on polytopes: application to tolerance analysis. In *Global Consistency of Tolerances*. 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Enschede (Netherlands): ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer academic publisher, p. 425‑433.

Teissandier, D., Delos, V. & Homri, L., 2012. Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes: application to tolerance analysis. In *Proc. of 12th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 12th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Uddersfield (UK).

Teissandier, D. & Dufaure, J., 2010a. Correspondence between Data Handled by the Graphs and Data Product. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY. p. 111‑121.

Teissandier, D. & Dufaure, J., 2007a. Modèle produit pour le tolérancement. In *Tolérancement géométrique des produits*. traité IC2, série productique, ISBN 2-7462-1509-8, Hermès.

Teissandier, D. & Dufaure, J., 2010b. Product Model for Tolerancing. In *Geometric tolerancing of products*. ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY. p. 55‑86.

Teissandier, D. & Dufaure, J., 2007b. Specifications of a pre and post-processing tool for a tolerancing analysis solver. In *Proc. of 10th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 10th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Erlagen (Germany).

Teissandier, D. & Dufaure, J., 2002. Tolerance synthesis with polytopes : application to radial ball bearing arrangements. In *cdrom*. 4th international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering. Clermont-Ferrand (France).

Teissandier, Denis, 1995. *L'Union Pondérée d'espaces de Liberté : un nouvel outil pour la cotation fonctionnelle tridimensionnelle*. Thèse de Doctorat. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Université Bordeaux 1.

Tichadou, S., 1991. *Identification d'un jeu bidimensionnel en vue d'une cotation fonctionnelle*, Mémoire de recherche de D.E.A de Mécanique de l' I.N.S.A de Lyon.

Tukey, J.W., 1977. Exploratory Data Analysis. In *Exploratory Data Analysis*. Reading, Massachusets, Addison Wesley. Addison Wesley, p. 39‑49.

Turner, J.U., 1993. A Feasability Space Appoach for Automated Tolerancing. *Journal of Engineering for Industry*, 115, p.341‑346.

Turner, J.U., 1990. Relative positionning of parts in assemblies using mathematical programming. *Computer-Aided Design*, 22(7), p.394‑400.

Wirtz, A., 1993. Vectorial Tolerancing A Basic Element for Quality Control. In *Proc. of 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. 3rd CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing. Cachan (France): ISBN 2-212-08779-9, Eyrolles, p. 115‑228.

Wu, Y., Shah, Jami J. & Davidson, Joseph K., 2003. Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes. *Computer-Aided Design*, 35(13), p.1181‑1192.

Ziegler, G., 1995. *Lectures on polytopes*, ISBN 0-387-94365-X, Springer Verlag.

# 8 TRAVAUX PERSONNELS

## 8.1 Revues internationales à comité de lecture

[ACL1] **TEISSANDIER D.**, COUETARD Y., GERARD A., *A Computer Aided Tolerancing Model : Proportioned Assemblies Clearance Volume*, Computer-Aided Design, Vol. 31: 805-817, 1999.

[ACL2] DUFAURE J., **TEISSANDIER D.**, *A tolerancing framework to support geometric specifications traceability*, Int J Adv Manuf Technol, 36 (9-10): 894-907, 2008. *les noms et prénoms des auteurs sont permutés dans Web of science et scopus.*

[ACL3] PIERRE L., **TEISSANDIER D.**, NADEAU J.P., *Integration of thermomechanical strains into tolerancing analysis*, Int J Interact Des Manuf, 3:247-263, 2009.

[ACL4] MOUTON S., **TEISSANDIER D.**, SEBASTIAN P., NADEAU J.P., *Manufacturing requirements in design: The RTM process in aeronautics*, Composites: Part A, 41:125-130, 2010.

[ACL5] MOUTON S., LEDOUX Y., **TEISSANDIER D.**, SEBASTIAN P., *Validation of a composite spar design by numerical simulations of the manufacturing process*, Int J Adv Manuf Technol, 55: 421-431, 2011

[ACL6] **TEISSANDIER D.**, DELOS V., *Algorithm for the calculation of the Minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans*, Computer-Aided Design, Vol. 43:1567-1576, 2011.

[ACL7] LEDOUX Y., **TEISSANDIER D.,** *Geometric variability analysis by a fiabilist approach : application to a turbine*, Research In Engineering Design, DOI 10.1007/s00163-012-0146-9, 2012.

[ACL8] PIERRE L., **TEISSANDIER D.**, NADEAU J.P., *Qualification of turbine architectures in a multiphysical approach: application to a turboshaft engine*, Mechanism And Machine Theory, soumis, 2012.

[ACL9] PIERRE L., **TEISSANDIER D.**, NADEAU J.P., *Tolerancing and thermomechanical strains analysis by operations on polytopes*, Computer-Aided Design, soumis, 2012.

## 8.2 Chapitres d'ouvrages

### 8.2.1 Internationaux

[OS1] **TEISSANDIER D.**, DUFAURE J., *Product model for tolerancing, Geometric tolerancing of products*, edited by F. Villeneuve and L. Mathieu, ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010.

[OS2] **TEISSANDIER D.**, DUFAURE J., *Correspondence between Data Handled by the Graphs and Data Product*, Geometric tolerancing of products, edited by F. Villeneuve and L. Mathieu, ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010.

### 8.2.2 Nationaux

[OS3] **TEISSANDIER D.,** DUFAURE J., *Modèle produit pour le tolérancement*, Tolérancement géométrique des produits (traité IC2, série productique) sous la direction de L. Mathieu et F. Villeneuve, ISBN 2-7462-1509-8, Hermès, 2007.

[OS4] **TEISSANDIER D.,** DUFAURE J., *Correspondance entre les données manipulées par les graphes et les données produit*, Tolérancement géométrique des produits (traité IC2, série productique) sous la direction de L. Mathieu et F. Villeneuve, ISBN 2-7462-1509-8, Hermès, 2007.

## 8.3 Conférences internationales avec actes et comités de lecture

### 8.3.1 Sélectionnées pour publication dans un ouvrage collectif à comité de lecture

[ACTI1] COUETARD Y., **TEISSANDIER D.,** A *Tolerancing modes synthesis : Proportioned assembly clearance volume*, Proceedings of 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, pp. 75-83, ISBN 2-212-08779-9, Eyrolles, 1993.

[ACTI2] **TEISSANDIER D.,** COUETARD Y., GERARD A., CENTA P., LE BRETON F., *Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L : Unions Pondérées d'Espaces de Liberté)*, ASME Third Biennal Joint Conference on Engineering Systems Design & Analysis, PD-Vol.80, pp. 129-136, ISBN 0-7918-1503-X, 1996.

[ACTI3] **TEISSANDIER D.,** COUETARD Y., GERARD A., *Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L : Unions Pondérées d'Espaces de Liberté) : application to setup planning*, Geometric Design Tolerancing: Theories, Standards and Applications (5th CIRP Seminar on CAT), edited by Hoda. A. Elmaraghy, pp. 171-182, ISBN 13: 9780412830006, Chapman & Hall, 1998.

[ACTI4] **TEISSANDIER D.,** DELOS V., COUETARD Y., *Operations on polytopes : application to tolerance analysis*, Global Consistency of Tolerances (6th CIRP Seminar on CAT), edited by F. Van Houten and H. Kals, pp. 425-433, ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer Academic Publisher, 1999.

[ACTI5] NOEL F., ROUCOULES L., **TEISSANDIER D.,** *Specification of product modelling concepts dedicated to information sharing in a collaborative design context*, Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, edited by Alan Bramley, Daniel Brissaud, Daniel Coutellier and Chris McMahon, pp. 135-146, ISBN 1-4020-3481-4, Springer, 2005.

[ACTI6] DUFAURE J., **TEISSANDIER D.,** DEBARBOUILLE G., *Influence of the standard components on the tolerancing activity*, Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing (9th CIRP Seminar on CAT), edited by J.K. Davidson, pp. 235-244, ISBN 978-1-4020-5437-2, Springer, 2007.

[ACTI7] BALLU A., DUFAURE J., **TEISSANDIER D.,** *An adaptive tolerance model for collaborative design*, Digital Enterprise Technology perspectives and future challenges (3rd DET CIRP), edited by Pedro F. Cunha and Paul G. Maropoulos, pp. 233-240, ISBN 978-0-387-49863-8, Springer, 2007

[ACTI8] LEDOUX Y., **TEISSANDIER D.**, SID-AHMED S., *Reliability analysis of the functional specification applied to a gas turbine of helicopter*, Product Lifecycle Management – Geometric variations (11th CIRP Seminar on CAT), edited by M. Giordano, L. Mathieu and F. Villeneuve, pp. 77-97, ISBN 978-1-84821-276-3, 2010.

[ACTI9] MOUTON S., LEDOUX Y., **TEISSANDIER D.,** SEBASTIAN P., *Genetic algorithm for design and manufacture optimization based on numerical simulations applied to aeronautic composite parts*, NUMIFORM 2010, Book Series: AIP Conference Proceedings, Vol: 1252, pp: 1150-1159, Pohang (Korea), 2010.

[ACTI10] **TEISSANDIER D.,** DELOS V., HOMRI L., *Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes: application to tolerance analysis*, Procedia CIRP from 12th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, University of Uddersfield (UK) , 18-19 April 2012.

### 8.3.2 Diffusées sur supports numériques

[ACTI11] **TEISSANDIER D.,** DUFAURE J., *Tolerance synthesis with polytopes : application to radial ball bearing arrangements*, IDMME 2002, Clermont-Ferrand (France), May 14-16, 2002.

[ACTI12] DUFAURE J., **TEISSANDIER D.,** *Geometric tolerancing from conceptual to detail design*, 8th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Charlotte (North Carolina - USA), April 28-29, 2003.

[ACTI13] DUFAURE J., **TEISSANDIER D.** DEBARBOUILLE, G., *Product model dedicated to collaborative design: a geometric tolerancing point of view*, In cdrom IDMME 2004, Bath (UK), April 5-7, 2004.

[ACTI14] DUFAURE J., **TEISSANDIER D.,** *Integration of a tolerance analysis tool (MECAmaster) in a tolerancing framework based on IPPOP, an open collaborative platform*, In cdrom IDMME 2006, Grenoble (France), May 17-19, 2006.

[ACTI15] ROUCOULES L., NOEL F., **TEISSANDIER D.,** LOMBARD M., DEBARBOUILLE G., GIRARD P., MERLO C., EYNARD B., *IPPOP : an opensource collaborative design platform to link product, design process and industrial organisation information platform*, In cdrom IDMME 2006, Grenoble (France), May 17-19, 2006.

[ACTI16] **TEISSANDIER D.,** DUFAURE J. *Specifications of a pre and post-processing tool for a tolerancing analysis solver*, 10th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Université d'Erlagen (Allemagne) , 21-23 March 2007.

[ACTI17] PIERRE L., **TEISSANDIER D.,** NADEAU JP., *Tolerancing analysis taking into account thermomechanical strains*, IDMME 2008 – Virtual Concept 2008, Beijing (Chine), October 8-10, 2008.

[ACTI18] PIERRE L., **TEISSANDIER D.,** NADEAU JP., *Integration of multiple physical behaviours into a geometric tolerancing approach,* 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Université de Savoie (France) , 26-27 March 2009.

[ACTI19] MOUTON S., LEDOUX Y., **TEISSANDIER D.**, SEBASTIAN P., *Validation of a composite spar design by numerical simulations of manufacturing process*, 15th International Conference on Composite Structures ICCS 15, Porto, 2009.

[ACTI20] PIERRE L., **TEISSANDIER D.,** NADEAU JP., *Qualification of turbine architectures in a multiphysical approach: application to a turboshaft engine*, IDMME 2010 – Virtual Concept 2010, Arts et Métiers Paristech Talence (France) , 20-22 October 2010.

[ACTI21] GONCALVES M., **TEISSANDIER D.,** GIRARD P., *Transfer of project specifications applied to use of performance indicators*, IDMME 2010 – Virtual Concept 2010, Arts et Métiers Paristech Talence (France) , 20-22 October 2010.

[ACTI22] **TEISSANDIER D.,** DELOS V., *Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes dedicated to tolerance analysis*, In cdrom IMProve 2011, Venice (Italy), June 15-17, 2011.

## 8.4 Conférences nationales

[ACTN1] **TEISSANDIER D.,** DELOS V., *Analyse des tolérances d'un mécanisme*, Journées Utilisateurs d'Euclid (JUE97), GRoupe des Utilisateurs d'Euclid, Charenton, 22-23 Octobre 1997.

[ACTN2] BALLU A., **TEISSANDIER D.,** MATHIEU L., *Cotation à l'aide des graphes le long du cycle de conception*, Journée Thématique AIP-PRIMECA : "Tolérancement le long du cycle de vie du Produit", ENS Cachan, 23 Septembre 2005.

[ACTN3] MOUTON S., SEBASTIAN P., **TEISSANDIER D.,** NADEAU J.P., *Vers l'introduction de contraintes d'industrialisation en conception préliminaire*, 10ème colloque national AIP Primeca, 17-20 Avril 2007.

[ACTN4] PIERRE L., **TEISSANDIER D.,** NADEAU J.P., *Analyse des tolérances géométriques dans un contexte multi-expertises, application à une turbine de moteur d'hélicoptère*, 18ème congrès français de la mécanique, 27-31 Août 2007.

[ACTN5] GONCALVES M., **TEISSANDIER D.,** GIRARD P., *Proposition d'indicateurs produit, processus, organisation pour assurer l'adéquation entre l'expression d'un besoin et les spécifications du produit*, 18ème congrès français de la mécanique, 27-31 Août 2007.

[ACTN6] GONCALVES M., **TEISSANDIER D.,** GIRARD P., *Déploiement de spécifications PPO dans le cycle de conception pour l'aide a la décision : application à un mât de réacteur*, 11ème colloque national AIP Primeca, 22-24 Avril 2009.

## 8.5 Conférences sans actes

[COM1] **TEISSANDIER D.**, *Tolérancement Assisté par Ordinateur*, 10ème anniversaire des Journées Utilisateurs d'Euclid (JUE ) du CNRS, Annecy, Novembre 1995.

[COM2] **TEISSANDIER D.**, *Journée Tolérancement et Cotation*, Séminaire Matra Datavision, Les Ulis, 5 Juin 1996.

[COM3] **TEISSANDIER D.**, *Analyse des tolérances 3D*, Journées Techniques Mécanique du CNRS/IN2P3 (conférencier invité), Centre de Calcul de l'INP3 de Lyon, 31 Mars - 1er Avril, 1998.

[COM4] **TEISSANDIER D.**, *Solveur d'Analyse de tolérances 3D*, Séminaire Matra Datavision, LMP - Université Bordeaux 1 - 30 Mars 1998.

[COM5] **TEISSANDIER D**, BALLU A., *La normalisation : Geometric Specification Product (GPS)*, 1er Forum du réseau des mécaniciens du CNRS, Satilieu, 16-18 Mai, 2000.

[COM6] **TEISSANDIER D.**, *Tolérancement assisté par ordinateur*, Forum régional du réseau des mécaniciens de la délégation Centre – Poitou Charentes, Chizée, 3-4 Juillet, 2008.

[COM7] **TEISSANDIER D.**, *Tolérancement 3D problématique, méthodes et outil*, 9ème Forum national du réseau des mécaniciens, Beirg, 2-3 Octobre, 2008.

[COM8] **TEISSANDIER D.**, LEDOUX Y., MOUTON S., *Integrating industrialization constraints of composite parts for decision support into preliminary design applied to RTM process*, expert seminar organized by ESI Group, Bordeaux, 3-10-2010.

[COM9] **TEISSANDIER D.**, DELOS V., HOMRI L., *Algorithme de calcul de la somme de Minkowski de polytopes : application à l'analyse de tolérances*, Groupe de Recherche en Tolérancement, Supmeca Saint Ouen, 5-6 Juin 2012.

## 8.6 Encadrements scientifiques

### 8.6.1 Thèses de Doctorats

**Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, spécialité : Mécanique**
Nom du diplômé : **Jérôme DUFAURE**
Titre du travail : Etude et intégration du transfert des spécifications géométriques et intégration dans le processus de conception d'un produit
Financement: contrat CIFRE LMP-Open Cascade SA
Date début :.1-12-2001 - Date fin : 8-06-2005 encadrement : 90%
Noms et % des co-directeurs : Prof. Alain GERARD (Bordeaux 1)
Situation actuelle : qualifié CNU 60 en 2007, ingénieur R&D Altep Ing. (Angoulème)

**Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, spécialité : Mécanique et Ingénieries**
Nom du diplômé : **Serge MOUTON**
Titre du travail : Formalisation de paramètres techniques et économiques pour l'aide à l'industrialisation de pièces composites
Financement : professeur agrégé de Bordeaux 1 déchargé à 50% d'enseignements
Date début : 1-12-2006 - Date fin : 21-05-2010 encadrement : 50%
Noms et % des co-directeurs : MCF HDR Patrick SEBASTIAN (Bordeaux 1) 50%
Situation actuelle : qualifié CNU 60 en 2011, professeur agrégé à l'Université Bordeaux 1

**Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, spécialité : Mécanique et Ingénieries**
Nom du diplômé : **Manuel GONCALVES**
Titre du travail : Proposition d'indicateurs pour évaluer l'adéquation entre l'expression du besoin et les spécifications d'un produit
Financement : Allocation couplée (candidat agrégé de Mécanique de l'ENS Cachan)
Date début : 1-10-2006 - Date fin : 16-12-2010 encadrement : 50%
Noms et % des co-directeurs : Prof. Philippe GIRARD (Bordeaux IV/IUFM) 50%
Situation actuelle : professeur agrégé en classe préparatoire aux grandes écoles au Lycée Marceau de Chartres depuis 2011.

**Thèse de Doctorat Paris Tech, spécialité Mécanique**
Nom du diplômé : **Laurent PIERRE**
Titre du travail : Analyse des spécifications géométriques pour l'aide à la décision en conception, application à une turbine de moteur d'hélicoptère
Financement : Allocation couplée (candidat agrégé de Mécanique de l'ENS Cachan)
Date début : 1-09-2007 - Date fin : 4-05-2011 encadrement : 50%
Noms et % des co-directeurs : Prof. Jean Pierre NADEAU (Ensam Bordeaux) 50%
Situation actuelle : qualifié CNU 60 en 2012, nommé Maître de Conférences à l'Université Paris XI (IUT de Cachan) en 2012.

**Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, spécialité : Mécanique et Ingénieries (en cours)**
Nom du diplômé : **Lazhar HOMRI**
Titre du travail : Caractérisation de familles paramétriques de polytopes mis en œuvre en tolérancement géométrique
Financement : Contrat doctoral avec mission enseignement
Date début : 1-09-2011 - Date fin : 31-08-2014 encadrement : 50%
Noms et % des co-directeurs : MCF HDR Alex BALLU (Bordeaux 1) 50%

### 8.6.2 DEA et Masters Recherche

**DEA Production Automatisée (ENS Cachan)**
Nom du diplômé : **Jérôme DUFAURE**
Titre du travail : Etudes des spécifications géométriques dans un montage de roulements
Date début :.1-02-2001 - Date fin : 15-07-2001 encadrement : 100%

**Master Recherche Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Manuel GONCALVES**
Titre du travail : Proposition d'indicateurs pour évaluer l'adéquation entre l'expression du besoin et les spécifications d'un produit
Date début :.1-09-2005 - Date fin : 30-06-2006 encadrement : 100%

**Master Recherche Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Laurent PIERRE**
Titre du travail : Proposition d'un modèle de défauts géométriques intégrant les dispersions de fabrication et les effets thermiques. Application à la turbine de moteur d'hélicoptère
Date début :.1-09-2006 - Date fin : 30-06-2007 encadrement : 100%

### 8.6.3 DESS et Masters Professionnels

**DESS d'Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques (Université de Pau et des pays de l'Adour)**
Nom du diplômé : **Vincent DELOS**
Titre du travail : Opérations sur les polytopes : application à l'analyse des tolérances d'un mécanisme
1997 encadrement : 100%

**Master Professionnel Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Julien FERRIER**
Titre du travail : Démarche de tolérancement d'une turbine haute pression
2006 encadrement : 100%

**Master Professionnel Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Marc SABATIER**
Titre du travail : Démarche de tolérancement du support d'anneau d'une turbine haute pression
2007 encadrement : 100%

**Master Professionnel Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Arnaud COLLIGNAN**

Titre du travail : Simulation des défauts géométriques et des déplacements induits par la thermique dans une turbine haute pression d'un turbomoteur
2008 encadrement : 100%

**Master Professionnel Mécanique et Ingénieries (Université Bordeaux 1)**
Nom du diplômé : **Aurélien LABASTARDE**
Titre du travail : Qualification de simulations de chaînes de cotes 3D par des résultats de mesures tridimensionnelles
2009 encadrement : 100%

## 8.7 Responsabilités scientifiques

### 8.7.1 Organisation de congrès internationaux

[AP1] Membre du comité d'organisation de la conférence internationale IDMME – Virtual Concept 2010, 20/22-10-2010, Ensam ParisTech, centre de Talence.

### 8.7.2 Activités contractuelles

[AP2] Coordinateur contrat LMP - LAL/IN2P3 (1999), *Expertise de tolérancement géométrique dans le projet Atlas*

[AP3] Coordinateur contrat LMP - OpenCASCADE SA (2002-2005), *Traçabilité des spécifications géométriques*, contrat adossé à la convention CIFRE de la thèse de J. Dufaure.

[AP4] Coordinateur contrat I2M – Ecole Polytechnique de Montréal (2010-2012), *Echange d'expertises dans le cadre de la conception et la fabrication des pièces en matériaux composites*, contrat d'appui aux initiatives locales de coopération avec le Québec par la région Aquitaine.

[AP5] Coordinateur contrat I2M - Snecma SPS (2011), *Analyse de la méthodologie de construction des faces propulseur et proposition de voies d'amélioration*.

[AP6] Coordinateur contrat I2M - Ratier Figeac (2011-2012), *Modélisation numérique de l'injection RTM d'une pale*.

### 8.7.3 Reviewer

8.7.3.1 Revues à comité de lecture

- Computers & Industrial Engineering (Elsevier),
- Computer-Aided Design (Elsevier),
- Composite Structure (Elsevier),
- International Journal Of Design and Innovation Research (Springer).

8.7.3.2 Conférences internationales

- CIRP Computer Aided Tolerancing,
- IDMME – Virtual Concept,
- IMProVe.

8.7.3.3 Conférence nationale

- Congrès Français de la Mécanique (CFM),
- Séminaire AIP Primeca

## 8.8 Formation continue

**TEISSANDIER D.**, BALLU A. et CAHUC O.
1999 à 2003 - CNRS : formation d'une semaine de périodicité annuelle sur les normes ISO de spécifications géométriques organisées en collaboration avec la délégation régionale de Paris Ile de France de Gif sur Yvette.

**TEISSANDIER D.**
2000 et 2003 - Decathlon, centre R&D de Villeneuve-d'Ascq (59) : normes ISO de spécifications géométriques

BALLU A., **TEISSANDIER D.**
2005 - Dassault Aviation (33) : normes ISO de spécifications géométriques

BALLU A., **TEISSANDIER D.**
2007 - Teuchos (64) : normes ISO de spécifications géométriques et analyse de tolérances

BALLU A., **TEISSANDIER D.**
2009 - Ateliers Industriels de l'Aéronautique (AIA) de Bordeaux (33) : normes ISO de spécifications géométriques et analyse de tolérances

**TEISSANDIER D.**, A. BALLU
2009 - Formation de type ANGD, normes ISO de spécifications géométriques et métrologie, Délégation régionale d'Aquitaine, Poitou Charentes et Limousin.

BALLU A., **TEISSANDIER D.**
2009 et 2010 - Ajilon (64) : normes ISO de spécifications géométriques et analyse de tolérances.