



HAL
open science

Modèles physiques pour la visualisation d'objets très déformables. Relations Mouvement-Forme-Image

Arash Habibi

► **To cite this version:**

Arash Habibi. Modèles physiques pour la visualisation d'objets très déformables. Relations Mouvement-Forme-Image. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997. Français. NNT: . tel-01201022

HAL Id: tel-01201022

<https://hal.science/tel-01201022>

Submitted on 17 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Arash HABIBI

pour obtenir le grade de **DOCTEUR**

de **L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(Spécialité : Informatique)

VISUALISATION D'OBJETS TRÈS DÉFORMABLES

Relations

Mouvement - Forme - Image

Date de soutenance : 9 Janvier 1997

Composition du jury :

Jean FRANÇON

Michel MERIAUX

Gérard HEGRON

Augustin LUX

Jean LOUCHET

Annie LUCIANI

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur,

Directeur de recherche

ACROE (Association pour la Création et la Recherche sur les Outils d'Expression)

CLIPS (Laboratoire de Communication Langagière et Interaction Personne Système)

46, av. Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Messieurs Jean FRANÇON, Michel MÉRIAUX, Gérard HÉGRON, Jean LOUCHET, et Augustin LUX qui m'ont fait le plaisir et l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Un très grand merci à Annie LUCIANI qui m'a encadré pendant cinq ans, dont l'engagement professionnel et humain a été considérable, et avec qui le travail a été passionnant et passionné. Je remercie également Claude CADOZ et Jean-Loup FLORENS dont l'apport a été important et stimulant.

Merci beaucoup à tous les chercheurs, ingénieurs et doctorants de l'ACROE : Guy DIARD et Pirouz DJOHARIAN qui a beaucoup contribué à certaines parties de ce travail. Je remercie tout particulièrement Nicolas SZILAS qui ne s'est pas épargné et dont le soutien a été constant à travers le temps et l'espace. Un grand merci à Eric INCERTI, Claude UHL, Benoît CHANCLOU et surtout à Ali BOUZOUITA, mes compagnons de route pendant la rédaction, sans oublier Arnaud GODARD, Patrick FOURCADE, Olivier GIRAUD et Patrick REBOUD. Une pensée reconnaissante aux chercheurs et thésards du laboratoire iMAGIS pour les discussions et les encouragements chaleureux.

Le soutien humain de Cécile MONTARNAL, Maria GUGLIELMI, Christophe DISCOURS, Agata OPALACH et surtout de Marie-Paule CANI-GASCUEL a été déterminant dans les moments difficiles, ainsi que celui de Gilles DUBOST, Philippe PLASSON, Nicolas CASTAGNÉ, Arnaud GÓDARD et Pierre POULIN. Enfin un grand merci à Hélène LÈVENBRUCK et à Philippe PICHON qui ont pu endurer mes excentricités de doctorant en période de rédaction.

Par ailleurs Odile et Pierre SACCOMAN, Elsa BRION, Armelle BOUCHETY, Caroline VAN DAELE, Dominique CALVEL, Elsa COLLIN, Pascale SERPAGGI et ma famille n'ont pas épargné leur patience et leur soutien pendant cette période. Je les en remercie vivement.

TABLE DES MATIÈRES

Préambule.....	7
0.1. Le choix des objets très déformables.....	7
0.2. La forme, le mouvement et l'image.....	8
0.2.1. Première Partie : Principes de modélisation.....	8
0.2.2. Deuxième Partie : Le processus de visualisation.....	9
0.3. Le contexte de ce travail : Le projet ICI.....	10
0.3.1. La situation instrumentale.....	10
0.3.2. La simulation de la situation instrumentale.....	11
Chapitre 1.La physique du point.....	14
1.1. "Du Cristal à la Fumée".....	14
1.2. Analyse des principales méthodes de modélisation.....	15
1.2.1. Les objets rigides.....	15
1.2.2. Les assemblages d'objets rigides.....	16
1.2.3. Les objets déformables structurés.....	17
1.2.4. Les objets non-structurés.....	18
1.3. La physique du point et la physique du solide.....	19
1.3.1. La forme.....	19
1.3.2. Forme explicite et forme émergente.....	19
1.3.3. Physique du solide vs Physique du point.....	20
1.3.4. La question du coût de calcul.....	21
1.3.5. La mécanique des solides.....	21
1.4. La modélisation d'objets très déformables.....	22
1.4.1. La physique du continu vs la physique discrète.....	22
1.4.2. points matériels et partition par domaines spatiaux.....	22
1.4.3. La "physicalité" des deux représentations.....	23
1.4.4. particules vs champs.....	24
1.4.5. Conclusion.....	25
1.5. Cordis-Anima.....	25
1.5.1. Nécessité d'un langage de modélisation et de simulation.....	25
1.5.2. Axiomes de base de Cordis-Anima.....	27
1.5.3. Conséquences : les atomes de Cordis-Anima.....	28
1.5.4. choix de mise en œuvre pour Cordis-Anima.....	29
1.5.5. Les algorithmes mis en œuvre dans Cordis-Anima.....	30
1.5.6. Conclusion.....	34
Chapitre 2 La Modélisation physique multi-échelle.....	35
2.1. De l'objet au signal.....	35
2.1.1. L'objet.....	35
2.1.2. Le signal.....	35
2.2. La notion d'échelle.....	36
2.2.1. L'échelle d'un signal.....	36
2.2.2. L'échelle de capteurs/effecteurs.....	36
2.2.3. L'échelle d'un modèle.....	36
2.2.4. spectres numériques et bandes passantes numériques.....	38
2.3. quantité d'information, Largeur de spectre et largeur de bande passante.....	40

2.3.1. Principe.....	40
2.3.2. Représentations graphiques.....	40
2.4. La modélisation physique multi-échelles.....	43
2.4.1. objets produisant des phénomènes à différentes échelles.....	43
2.4.2. Les objets à grand nombre de ddl.....	46
2.4.3. La modélisation physique multi-échelles.....	48
2.5. Conclusion.....	50

Chapitre 3 L'habillage..... 51

3.1. Habillage et flux d'information.....	51
3.1.1. La représentation Cordis-Anima d'un réseau de modèles.....	51
3.1.2. Flux d'information entre deux modèles d'un réseau.....	52
3.1.3. Flux d'information circulant dans tout le réseau.....	53
3.1.4. La liaison unidirectionnelle : une condition nécessaire pour l'habillage.....	54
3.2. L'influence mutuelle entre deux modèles.....	55
3.2.1. Étude préliminaire.....	56
3.2.2. L'impédance et l'admittance d'un modèle.....	57
3.2.3. L'énergie échangée entre un objet et son extérieur.....	63
3.2.4. La condition de l'influence unidirectionnelle.....	64
3.2.5. Application à un modèle simple.....	68
3.3. L'habillage dans un réseau de modèles couplés.....	72
3.3.1. Le critère pertinent : la coupe.....	72
3.3.2. Les partitions, les macro-graphes, les bi-connexes.....	73
3.3.3. Les EMIs et les E2MIs.....	75
3.3.4. L'algorithme de détermination des E2MIs.....	79
3.3.5. La simulation séparée.....	82
3.4. Conclusion.....	85

Chapitre 4 la mécanique du solide et..... la modélisation géométrique..... 86

4.1. La transmission et le comportement rigide.....	86
4.1.1. Le système étudié.....	86
4.1.2. La condition de transmission.....	87
4.1.3. L'influence des modèles a et B.....	88
4.1.4. la valeur des variables F1, F2, V1, et V2.....	89
4.1.5. Exemple : une masse et un ressort.....	89
4.1.6. Lorsque le modèle I est un élément <LIA>.....	92
4.2. La détermination géométrique des positions.....	92
4.2.1. Le système étudié.....	92
4.2.2. La condition de la dépendance non-dynamique.....	93
4.2.3. Application au système étudié.....	94
4.3. Conclusion.....	95

Chapitre 5 forme, mouvement et image..... 98

5.1. Les phénomènes à modéliser.....	98
5.2. Le mouvement et l'image.....	99
5.2.1. Modélisation mono-échelle / multi-échelle.....	99
5.2.2. Liaison bidirectionnelle / unidirectionnelle.....	101
5.3. La forme.....	104
5.3.1. La notion de contour mécanique et de contour optique.....	104
5.3.2. Contour d'un ensemble de points.....	107
5.4. La forme, le mouvement et l'image.....	112
5.4.1. Des domaines non-disjoints.....	112

5.5. De l'OPP aux contours :	113
5.5.1. Les modèles d'image.....	113
5.5.2. Forme et mouvement.....	115
5.6. Conclusion	121

Chapitre 6 Un générateur de forme pour les objets très déformables.....122

6.1. Les objets très déformables.....	122
6.2. Spécifications pour un modèle de forme.....	123
6.2.1. Changements de topologie	123
6.2.2. La continuité des formes.....	124
6.2.3. La contrainte de la résolution ρ	124
6.3. Spécifications pour un modèle de mouvement à petite échelle	124
(<i>Raffinement dynamique</i>)	124
6.3.1. La nécessité de degrés de liberté supplémentaires	124
6.3.2. Modélisation mono-échelle et multi-échelle	125
6.4. Proposition et description d'un modèle	126
6.4.1. Le principe de la gravure	126
6.4.2. La description de l'écran d'épingles.....	127

Chapitre 7 L'écran et la forme produite (Etude en régime statique)131

7.1. INTRODUCTION.....	131
7.1.1. Démarche.....	131
7.1.2. Hypothèses de la statique.....	131
7.2. Théorie de la réponse impulsionnelle.....	132
7.2.1. Profils de déformation et profils de force.....	132
7.2.2. Linéarité	132
7.2.3. Enoncé de la théorie.....	133
7.2.4. La réponse impulsionnelle unique $\delta\Omega$	133
7.3. La continuité des formes.....	135
7.3.1. Le cas discret Uni-dimensionnel.....	135
7.3.2. principe de la comparaison discret/continu	139
7.3.3. La réponse impulsionnelle en 1D : l'évaluation.....	142
7.3.4. La recherche des profils en 2D et 3D.....	146
7.3.5. Conclusion	150
7.4. L'accentuation des contours.....	151
7.4.1. les bandes de Mach.....	151
7.4.2. Une modélisation descriptive de l'inhibition latérale	152
7.4.3. L'inhibition latérale par conservation de volume	154
7.5. Conclusion	167

Chapitre 8 Le contrôle des déformations dynamiques.....168

8.1. Les grandeurs en jeu	168
8.2. Analyse Modale.....	170
8.2.1. Le calcul des modes.....	170
8.2.2. Les déformées modales.....	171
8.3. Le fonctionnement d'une cellule numérique.....	172
8.3.1. Les zones de fonctionnement d'une cellule.....	172
8.3.2. Stabilité	174
8.3.3. Description des comportements stables.....	174
8.3.4. 4 points cardinaux, 4 comportements prototypes.....	174
8.4. Le comportement dynamique de l'écran d'épingles	175

8.4.1. Le segment modal	175
8.4.2. Comportements dynamiques.....	177
8.5. Images obtenues	179
8.5.1. Conditions expérimentales	179
8.5.2. Prototype S.....	180
8.5.3. Prototype C	182
8.5.4. Prototype I	183
8.5.5. Prototype II	186
8.5.6. Prototype III	187
8.5.7. prototype IV.....	188
8.5.8. Prototype V	188
8.6. Conclusion	190
Chapitre 9 Les surfaces implicites	191
9.1. Les origines	191
9.1.1. Une méthode de visualisation scientifique.....	191
9.1.2. Les fonctions implicites : une définition mathématique	192
9.2. Utilisation de ces surfaces en modélisation de Formes.....	193
9.2.1. Une formulation puissante	193
9.2.2. Le contrôle des surfaces implicites	193
9.2.3. La discrétisation et la visualisation des surfaces implicites	197
9.2.4. L'assemblage avec raccord (Blending)	201
9.2.5. La modélisation d'objets et de comportements par surfaces implicites.....	202
9.3. Conclusion	204
Chapitre 10 Un modèle élémentaire pour l'image	205
10.1. Les pixels et les épingles	205
10.2. L'opérateur Chroma	206
10.2.1. Chroma_W	206
10.2.2. Chroma_RGB	207
10.3. Conclusion.....	208
Conclusion.....	209
Références bibliographiques.....	210
Annexe A La transformée de Fourier.....	215
A.1. Définition.....	215
A.2. La dérivation et l'intégration	215
A.3. Le théorème de Plancherel	215
A.4. La densité spectrale d'énergie.....	216
Annexe B Images obtenues	217

0. PRÉAMBULE

0.1. LE CHOIX DES OBJETS TRÈS DÉFORMABLES

Ce travail se situe dans le domaine de l'animation par ordinateur et de la synthèse d'images. Nous nous plaçons plus particulièrement dans le cadre des mouvements produits par modèles générateurs¹. Dans ce cadre, la modélisation de la forme et du mouvement des objets rigides ou peu déformables est étudiée, et souvent maîtrisée depuis longtemps. Par contre, celle des objets très déformables (i.e. à grand nombre de degrés de liberté) fait l'objet de travaux relativement récents et de nombreuses questions restent encore sans réponse.

La modélisation des objets très déformables soulève certes des questions qui ne concernent que les objets très déformables. Mais elle pose également un certain nombre d'autres questions propres à tous les types d'objets, et qui, dans le cas des objets très déformables, se sont posées avec une acuité particulière.

Il s'agit notamment de la relation entre la forme et le mouvement. Pour les objets rigides ou peu déformables, la forme est fixe ou reste proche d'une forme fixe. Donc dans le cas de ces objets, la relation entre la forme et le mouvement est réduite à sa plus simple expression. Cependant, plus le nombre de degrés de liberté de l'objet à modéliser augmente, et moins la géométrie de l'objet modélisé peut être donnée par des primitives de forme prédéterminée. Nous verrons que pour la modélisation du mouvement des objets très déformables, il est nécessaire de travailler avec une primitive de forme minimale : le point. D'ailleurs la modélisation par points ne se limite pas au cas des objets très déformables. Elle permet de représenter un éventail d'objets qui vont des objets rigides, articulés ou non, de toutes topologies, aux liquides, aux fumées et aux flammes.

Cependant un ensemble de points n'est pas, à lui seul, suffisant pour définir une forme. C'est pourquoi le modèle physique composé de points, pour pouvoir générer une forme et une image, doit être associé à un processus de *visualisation* (La portée de ce terme est défini dans § 0.2.). Mais là aussi, la visualisation se révèle d'autant plus difficile que l'objet de référence est déformable.

Ainsi le grand nombre de degrés de liberté des objets très déformables fait d'eux des cas difficiles susceptibles d'éprouver des méthodes de modélisation et de visualisation. Cela signifie qu'indépendamment des questions d'efficacité, des méthodes applicables aux objets très déformables peuvent toujours être appliquées aux objets moins déformables. Ainsi le choix des objets très déformables pour le cadre de ce travail a certes été motivé par la beauté des formes et des mouvements générés par ces objets. Mais ils joueront aussi et surtout le rôle d'objet test pour nos méthodes de modélisation et de visualisation.

¹Les modèles générateurs sont définis par opposition aux modèles *phénoménologiques*. Dans les modèles phénoménologiques, on décrit explicitement le phénomène (mouvement, son, forme) comme une fonction explicite du temps et/ou de l'espace. Dans les modèles générateurs, on définit des objets et des propriétés intemporelles que ces objets doivent vérifier. Les phénomènes sont générés par ces propriétés [Luc 85]

0.2. LA FORME, LE MOUVEMENT ET L'IMAGE

Ce travail se situe dans le cadre de la production de séquences animées par modèles physiques visibles et manipulables. Le processus d'élaboration de ces séquences consiste en un travail sur le mouvement, la forme et l'image. Le travail sur le mouvement a trait aux interactions dynamiques entre l'objet et son environnement. Le travail sur la forme a trait à l'étendue spatiale des objets et enfin le travail sur l'image a trait aux interactions entre les objets et la lumière.

Dans le cas général, ces trois aspects sont très imbriqués, surtout dans le cas des objets très déformables. Mais le travail mené dans la première partie de cette thèse, essentiellement aux chapitres § 2, § 3 et § 4 nous permet, dans certains cas de découpler les différents aspects. Ainsi, grâce à la modélisation multi-échelle (§ 2) l'objet pourra être simulé par des modèles de mouvements, des modèles de forme, et des modèles d'image, à différentes échelles, autonomes mais couplés. Grâce au principe de l'habillage (§ 3) nous verrons que certains modèles peuvent être découplés des autres et faire l'objet d'une simulation séparée. Etant donné ces résultats, le processus d'élaboration d'une séquence animée commence typiquement par la mise en mouvement de l'objet physique par la main et le geste de l'opérateur et il s'achève par la production d'une image visible et par le regard de l'homme.

Comme nous l'avons dit, un modèle à base de points matériels capable de représenter les principaux comportements d'un objet donné ne peut pas, à lui seul, définir la forme de cet objet. L'ensemble du processus menant de ce modèle composé de points matériels à l'image finale est le *processus de visualisation* (cf figure 0.1). La première partie de ce travail est consacrée aux principes de modélisation utilisés dans la seconde partie. La seconde partie est consacrée au processus de visualisation.

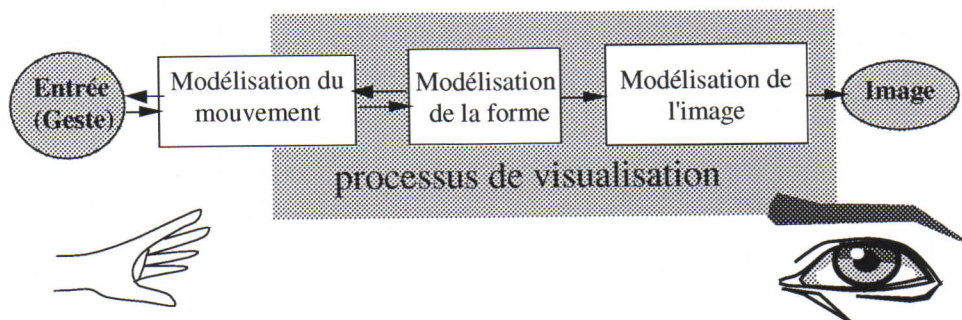


figure 0.1 Le processus de Visualisation

NB. La figure 0.1 représente schématiquement cette situation par des entités nettement séparées modélisant le mouvement, la forme et l'image. En réalité la plupart des modèles sont a priori susceptibles de contribuer de manière plus ou moins importante aux trois aspects. Notamment les modèles de mouvement ont une grande influence sur la forme et réciproquement.

0.2.1. PREMIÈRE PARTIE : PRINCIPES DE MODÉLISATION

Chapitre 1 : La physique du point

La physique du point permet la modélisation physique des objets très déformables, mais la relation qu'elle établit entre la forme et mouvement des objets est différente de celle établie par des méthodes où les objets sont définis par leur forme. Dans ce premier chapitre, nous tentons de montrer que dans le cadre de la modélisation d'objets très déformables, il est nécessaire d'adopter la physique du point par opposition à toute autre méthode où la forme est définie explicitement. Dans un second temps, nous décrivons le

système de modélisation et de simulation physique à base de points matériels (Cordis-Anima) qui a été utilisé dans le cadre des modèles développés dans ce travail.

Chapitre 2 : La modélisation physique multi-échelles

Les objets très déformables sont souvent le siège de phénomènes se déroulant à différentes échelles (d'un point de vue spatial et temporel, énergétique). Dans le cas de ces objets, mais aussi dans un grand nombre d'autres cas, la modélisation de l'ensemble de ces phénomènes par un seul modèle se révèle difficile voire impossible. La modélisation physique multi-échelles consiste à modéliser ces phénomènes complexes avec plusieurs modèles couplés chacun rendant compte d'une partie des comportements globaux de l'objet, chacun à une échelle différente et selon ses propres spécificités.

Chapitre 3 : L'habillage

Dans le contexte de la modélisation d'un même objet avec plusieurs modèles différents, (par exemple la modélisation multi-échelle) nous montrons qu'il existe des cas où certains modèles de cet ensemble peuvent être découplés et simulés séparément des autres. Autrement dit, certains modèles sont *l'habillage* des autres modèles. Dans ce chapitre, nous étudions la notion de l'habillage et nous spécifierons les conditions dans lesquelles la simulation séparée produit les mêmes résultats que la simulation simultanée.

Chapitre 4 : Les solides rigides et la modélisation géométrique

Certains comportements physiques, typiquement des comportements rigides, peuvent être représentés et simulés par des éléments de longueur constante. Dans la première partie de ce chapitre, nous verrons quelles sont les propriétés physiques des objets qui peuvent être représentés par de tels éléments. Par ailleurs d'autres comportements physiques peuvent être modélisés par des principes non-dynamiques (par exemple géométriques). Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous déterminerons également les propriétés physiques de ce type d'objet.

0.2.2. DEUXIÈME PARTIE : LE PROCESSUS DE VISUALISATION

Chapitre 5 : La relation forme-mouvement-image

Dans ce chapitre nous définissons la notion du contour d'un objet et d'un ensemble de points matériels. Ensuite nous étudierons les relations entre les signaux de mouvement, de forme et d'image, à la lumière des critères mis au point dans la première partie. Nous verrons que selon les différents types d'objet et les différents phénomènes en cause, les relations entre ces trois entités ne sont pas identiques. Ceci sera illustré par différents modèles mis au point pendant cette thèse.

Chapitre 6 : Un générateur de forme pour les objets très déformables

Plusieurs modèles physiques représentant des objets très déformables (matériaux granulaires, fluides turbulents) ont été réalisés à l'ACROE. Ces modèles, dits *macroscopiques*, sont composés de points matériels et rendent compte des mouvements à grande échelle de ces objets. Dans ce chapitre nous définissons les propriétés requises pour un générateur de forme capable de modéliser le contour et la dynamique à petite-échelle de ce type d'objet. Nous proposerons un modèle appelé *l'écran d'épingles*, et nous en décrirons la structure. Dans les chapitres § 7 et § 8 nous analyserons les comportements respectivement statique et dynamique de ce modèle.

Chapitre 7 : L'écran et la forme produite

Les formes générées par l'écran d'épingles ne sont pas une image exacte du contour des objets qui sont à représenter. Ces formes dépendent en partie de la forme de ces objets et en partie des propriétés de l'écran d'épingles. Nous pouvons rendre la contribution de l'écran d'épingles très faible, mais nous pouvons également l'utiliser pour produire des contours nouveaux plus riches ou ayant d'autres propriétés spécifiques. Le chapitre § 7 nous permettra de connaître la contribution des diverses propriétés et paramètres de l'écran d'épingles sur les formes produites. Notamment nous verrons comment il est possible d'uniformiser un contour accidenté et de mettre en valeur un contour.

Chapitre 8 : Le contrôle des déformations dynamiques

L'écran d'épingles n'est pas seulement un modèle de forme mais également un modèle de mouvement. De même que pour la forme, les mouvements générés par l'écran d'épingles ne proviennent pas seulement des objets à représenter, mais également des propriétés dynamiques de l'écran d'épingles. Le chapitre § 8 permet de rendre le comportement dynamique de l'écran d'épingles tout à fait neutre ou au contraire de l'utiliser pour introduire dans l'animation des degrés de liberté supplémentaires que l'on peut contrôler.

Chapitre 9 : Les surfaces implicites

Les surfaces implicites ont été introduites en 1982. Il s'agit d'une méthode de génération de formes plus générale que les surfaces paramétriques et permettant notamment d'animer des contours à topologie variable. Elles ont souvent été utilisées pour la modélisation d'objets très déformables. Dans ce chapitre nous définirons la position de l'écran d'épingles par rapport aux surfaces implicites.

Chapitre 10 Un modèle élémentaire pour l'image

La structure de l'écran d'épingles est très semblable à la structure d'une grille de pixels. Etant donnée une forme produite par l'écran d'épingles, les images correspondantes sont déduites par un opérateur linéaire appelé Chroma. Dans ce chapitre nous décrirons brièvement cet opérateur.

0.3. LE CONTEXTE DE CE TRAVAIL : LE PROJET ICI

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet IMAG mené par l'ACROE², et l'équipe ICA³ du LIFIA⁴ puis l'équipe ICA du CLIPS⁵. C'est le projet ICI (Interface de Communication Instrumentale).

0.3.1. LA SITUATION INSTRUMENTALE

Ceci vise les applications où l'on est amené à manipuler des représentations informatiques d'objets et où il est nécessaire d'avoir un contrôle dynamique de ces objets. Il s'agit en particulier d'applications telles que la robotique, la télémanipulation, et surtout la musique

². ACROE : Association pour la Création et la Recherche sur les Outils d'Expression
(Centre de recherche du ministère de la culture)

³. ICA : Informatique et Création Artistique

⁴. LIFIA : Laboratoire d'Informatique Fondamentale et d'Intelligence Artificielle

⁵. CLIPS : Communication Langagière et Interaction Personne-Système

et l'animation par ordinateur où une grande partie de l'expressivité est véhiculée par des mouvements fortement dynamiques.

L'introduction de l'ordinateur dans le domaine de la musique et dans celui de l'animation a ouvert un grand nombre de voies jusque là inexplorées. En effet tout signal numérique peut être produit par l'ordinateur. Donc s'il est vrai que tous les sons, toutes les formes et tous les mouvements peuvent être représentés par des signaux numériques, alors l'ordinateur peut produire tous ces phénomènes moyennant les interfaces adéquates. Ceci semble offrir une liberté de création surpassant tout ce qu'ont pu offrir les instruments réels traditionnels.

Cependant en pratique, la manipulation symbolique de signaux numériques ne permet pas de produire les mêmes mouvements dynamiques et les mêmes sons que les instruments traditionnels. Toutes les impulsions dynamiques de la main, quelquefois de faible amplitude, toutes les attaques violentes ou feutrées et qui véhiculent l'expressivité sont très difficiles voire impossibles à transcrire en termes de signaux numériques. En effet ces mouvements, que produit l'instrumentiste, ne sont pas des commandes moteurs prédéterminées mais sont le résultat d'une véritable interaction entre l'instrumentiste et l'instrument. L'instrument physique est en général nécessaire pour la génération de ces mouvements et joue le rôle de guide pour l'instrumentiste.

La notion de l'instrument est une notion assez générale et peut s'appliquer à d'autres domaines qu'à la musique et à l'animation. Cependant, nous nous limiterons ici à ces deux cas. En animation, l'instrument est typiquement l'objet qui produit le mouvement dans la séquence. C'est un objet physique comme une marionnette par exemple. On peut caractériser l'instrument par le fait qu'il est en interaction visuelle, auditive et gestuelle avec l'homme. Nous qualifions cette relation d'"instrumentale". Nous pensons que cette *situation instrumentale* est une condition nécessaire pour la production de séquences dynamiquement riches, et que les animateurs traditionnels y ont systématiquement recours.

Cette affirmation peut surprendre car, si dans le cas de l'animation par manipulation (marionnette, sable, pâte à modeler) l'objet ou l'instrument est clairement désigné, il n'en est pas de même dans le cas de l'animation par composition (le dessin animé et ses variantes). En effet le dessin animé ne semble pas exiger davantage d'instruments que le dessin non animé. En fait, s'il est vrai que le dessinateur sur cellulo ne dispose pas d'une marionnette réelle pour réaliser la séquence, il n'en est pas moins vrai qu'il doit remplacer ce guide par un autre objet qui est une représentation mentale. L'animation par composition, aussi bien que l'animateur par manipulation exigent tous deux que l'animateur "habite" les objets à animer. Ce que l'animateur par manipulation apprend sur un objet réel, l'animateur sur cellulo doit l'apprendre, dans un premier temps, sur son corps en mimant les mouvements, ou sur d'autres objets qu'il tient dans sa main. Dans un deuxième temps, l'expérience permet de faire abstraction de ces objets concrets pour produire des mouvements avec seulement des représentations mentales dynamiques [Luc 85].

Ainsi, tant que l'ordinateur ne peut pas produire un objet visible et manipulable, l'animation par manipulation ne sera pas possible sur l'ordinateur. Par contre, pour le dessin animé, la composition du mouvement intervient après l'appréhension de l'objet mental par l'animateur. Et l'ordinateur intervient après cette étape. Il joue le rôle à la fois de planche à dessin, de mémoire, et d'intervalliste, mais ce n'est pas l'ordinateur qui génère le mouvement.

0.3.2. LA SIMULATION DE LA SITUATION INSTRUMENTALE

L'ordinateur, en privant l'artiste de cet instrument physique, ferme aussi la voie à ce type d'expressivité.

L'objectif du projet ICI est donc de réintroduire dans l'informatique l'instrument avec ses propriétés physiques et de rétablir entre l'homme et l'ordinateur la relation instrumentale perdue. Il ne s'agit plus de générer directement des signaux auditifs ou visuels, mais de construire des objets, des marionnettes, des instruments de musique, des robots et de les manipuler de les voir, de les entendre et de les sentir. Cela nécessite :

1. les interfaces appropriées : l'interface visuelle (écran), l'interface auditive (haut-parleur) et l'interface tactilo-proprio-kinesthésique permettant d'une part de communiquer à l'objet virtuel le geste de l'opérateur (fonction capteur) et d'autre part de communiquer à l'opérateur les forces générées par l'objet virtuel (fonction moteur). Cette dernière interface a été nommée TGR (Transducteur Gestuel Rétroactif).

2. Pour générer les signaux visuels auditifs et gestuels qui doivent attaquer l'entrée de ces interfaces, nous avons recours à la modélisation physique. En effet les instruments simulés devront pouvoir réagir de manière consistante aux actions, a priori imprévisibles de l'opérateur. D'autre part pour pouvoir générer la plus grande variété possible d'objets physiques différents, nous devons avoir un langage permettant de construire des instruments physiques les plus variés. Ce langage implique d'une part un principe de modélisation permettant de construire des modèles d'instruments virtuels ayant des propriétés dynamiques et d'autre part un principe de simulation permettant d'implémenter ces modèles. La simulation produit des signaux qui, une fois envoyés aux interfaces produisent des stimuli visuels, auditifs et gestuels représentant l'instrument modélisé. (figure 0.2)

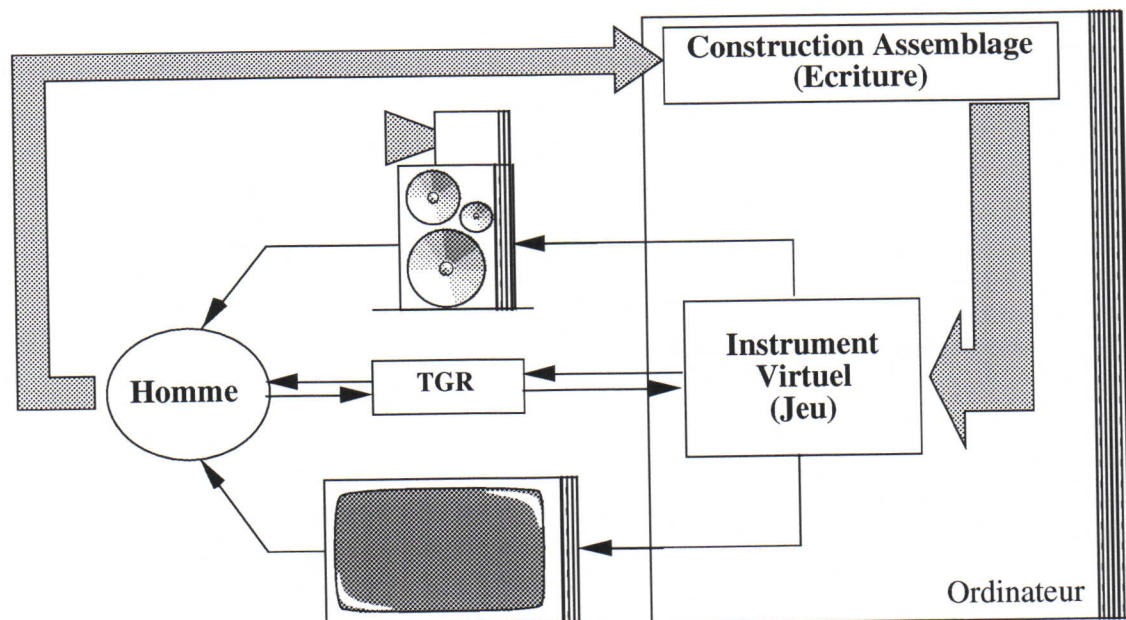


figure 0.2 L'architecture de la station ICI Interface de Communication Instrumentale

L'étude des interfaces ne sera pas abordée dans ce travail. Elle a fait l'objet d'autres travaux au sein de l'ACROE et de l'équipe ICA. L'objet du présent travail est d'une part les modèles d'objets physiques, et d'autre part, le chemin qui mène de ces objets jusqu'à l'image visible et qui représente le processus de visualisation.

PREMIÈRE PARTIE

PRINCIPES DE MODÉLISATION

CHAPITRE 1.

LA PHYSIQUE DU POINT

L'objectif de ce chapitre est de montrer que pour modéliser le mouvement d'objets très déformables, il est nécessaire que la forme ne soit pas considérée comme un attribut a priori de l'objet. La forme doit émerger de la distribution et du mouvement d'entités sans forme, à savoir des points.

Historiquement, la synthèse d'images animées s'est inspirée d'abord des principes de la géométrie et la CAO pour générer des images fixes et des animations cinématiques. Plus tard, pour l'animation dynamique d'objets rigides, la synthèse d'image a utilisé la physique des solides.

Pour les autres types d'objet, avec un plus grand nombre de degrés de liberté, il fallait avoir recours à d'autres méthodes. De manière plus générale, chaque degré de liberté supplémentaire a été "gagné" en adoptant des méthodes différentes et notamment en adoptant des compromis entre la géométrie et la physique.

1.1. "DU CRISTAL À LA FUMÉE" OU DU RIGIDE AU TRÈS DÉFORMABLE

Dans cette section, nous allons présenter une typologie des objets à modéliser classés par ordre croissant de nombre de degrés de liberté dynamiques. Chacun est caractérisé par un prototype. A chaque type d'objet correspond un nouveau type de modèle pour le mouvement, et éventuellement un nouveau type de modèle pour la forme et pour l'image. Cette typologie et son ordre intègrent l'histoire de l'animation par modèles physiques (Cf. figure 1.1)

Les *objets rigides* sont des objets dont la forme et la topologie peuvent être considérées comme fixes. Les grandeurs spatiales qui caractérisent l'objet (comme la distance entre deux points) restent constantes. Le degré de liberté en déformation peut être négligé. Dans l'espace 3D, le nombre de degrés de liberté ne peut pas dépasser six : trois degrés en translation et trois degrés en rotation (exemple : cristaux, pierres, briques)

Un ensemble de n objets rigides peut avoir au plus $6n$ degrés de liberté. Ce nombre de degrés de liberté diminue lorsque ces objets sont rigidement liés entre eux (exemple : bras articulé, chaîne, véhicules etc.)

Les *objets déformables structurés* (ou les solides déformables) sont des objets dont la topologie reste fixe mais dont la géométrie est variable. Les grandeurs spatiales caractérisant l'objet (longueurs, distances etc.) sont susceptibles de varier au cours du temps. Ainsi, aux degrés de liberté de déplacement s'ajoutent les degrés de liberté de déformation (exemple : ballon, tissu, etc).

Tous les types d'objet cités ci-dessus sont caractérisés par des topologies constantes, c'est à dire que malgré les changements de forme, la structure se conserve. Deux éléments de matière topologiquement voisins restent voisins au cours du temps. Notamment un élément de matière appartenant au contour de l'objet reste sur le contour, et surtout l'objet reste connexe c'est à dire en un seul morceau.

Les *objets déformables non-structurés* (ou à topologie variable) ne vérifient pas ces propriétés. Deux éléments de matière voisins peuvent ne pas rester voisins au cours du temps. Il n'est pas toujours facile de définir un contour pour ce genre d'objet. Lorsque c'est possible, ce contour n'est pas toujours composé des mêmes éléments de matière. Enfin, la connexité de ces objets est variable : ils peuvent facilement se scinder en plusieurs morceaux et éventuellement se recombinaient (exemples : matériaux granulaires, pâtes, liquides, gaz).

Enfin les *objets déformables à changement d'état* ont des degrés de liberté supplémentaires correspondant aux changements d'état physique (solide \leftrightarrow liquide \leftrightarrow gazeux ou ionisé \leftrightarrow non-ionisé). Un exemple typique de cette catégorie est celui de la flamme ou des stalactites. Dans la genèse et l'entretien de ces phénomènes, la dynamique du changement d'état a un rôle important et intervient clairement dans la modélisation.

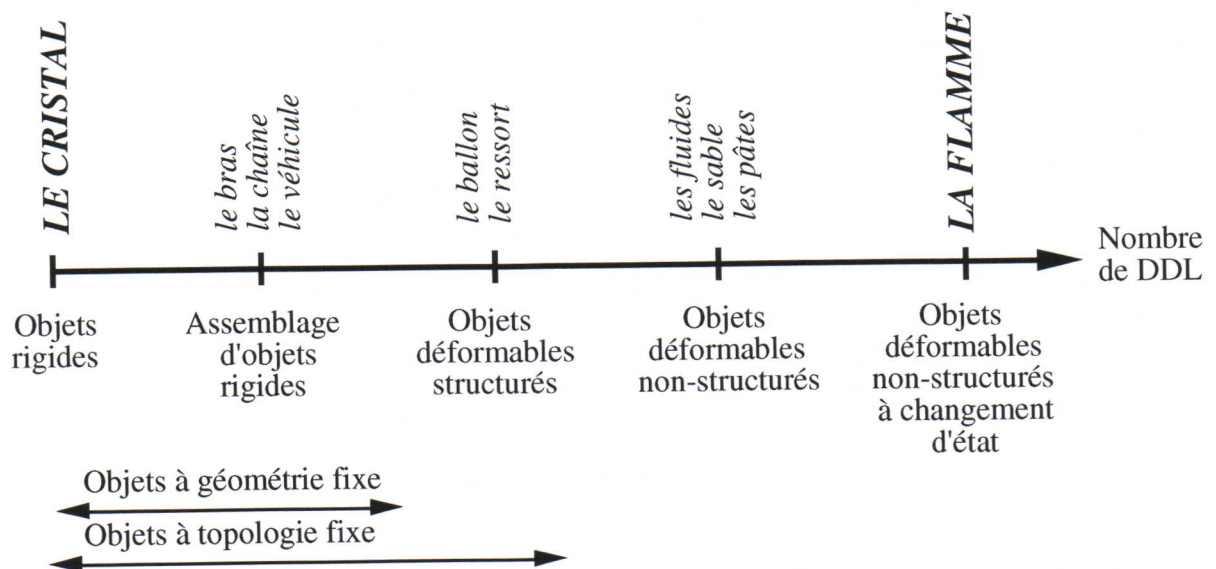


figure 1.1. Du cristal à la flamme, l'étude d'un échantillonnage de l'espace des objets à modéliser

1.2. ANALYSE DES PRINCIPALES MÉTHODES DE MODÉLISATION

Dans ce chapitre, nous allons exposer les différentes méthodes couramment utilisées pour la modélisation physique de ces divers types d'objets, avec les problèmes qu'elles soulèvent. Le débat dynamique/cinématique n'est pas abordé ici. En ce qui nous concerne, et comme nous l'avons développé dans l'introduction de ce document (cf. § 0.3 le projet ICI) l'exigence de la consistance et de la cohérence du mouvement généré par une action quelconque nous limite aux méthodes d'animation par simulation, à l'exclusion des méthodes d'animation cinématiques ou plus généralement descriptifs.

1.2.1. LES OBJETS RIGIDES

Dans un premier temps, et sans doute en continuité avec ce passé et avec les méthodes de la CAO, la modélisation informatique s'est inspirée directement des principes de la géométrie et de la physique des solides.

Avec la physique des solides, l'objet à animer est défini géométriquement. Cette forme géométrique définit une distribution de masse. Elle permet de calculer une masse, un

centre de gravité et une matrice d'inertie. A chaque instant l'ensemble des forces appliquées à cet objet sont équivalentes, d'une part à une force résultante appliquée au centre de gravité et qui produit une accélération égale à la force appliquée divisée par la masse totale, et d'autre part à un couple qui produit une accélération angulaire égale au couple fois l'inverse de la matrice d'inertie. Ainsi à partir d'un ensemble quelconque de forces appliquées en un instant sur l'objet, on peut produire une translation et une rotation pendant l'instant suivant.

Aussi pour animer de tels objets, il est nécessaire et suffisant de générer des forces. Dans certains cas, ces forces sont directement spécifiées en direction et en intensité [WB 85] [AG 85]. Dans d'autres cas, on utilise les méthodes de la dynamique inverse pour générer ces forces [IC 87] [BB 88] : au départ de la simulation, on spécifie des conditions (des contraintes) qui devront être vérifiées pendant la simulation. Et grâce à la dynamique inverse, l'on calcule les forces qu'il faut appliquer à ces objets pour que ces conditions soient effectivement respectées. On pourra par exemple fixer un point d'un objet à un autre point dans l'espace. Alors pendant la simulation on génère des forces qui garantissent que les deux points restent confondus. Si le second point se déplace, l'objet se déplacera avec lui (s'il n'est pas contraint par d'autres conditions).

La forme géométrique de l'objet a permis, avant la simulation, de construire la matrice d'inertie. Dans certains travaux, elle permet, pendant la simulation de détecter les collisions. Lorsque deux surfaces géométriques représentant le contour de deux objets s'intersectent, il y a collision. Les collisions peuvent être traitées cinématiquement (par des chocs impulsionsnels conservant la quantité de mouvement, et permettant de déterminer la vitesse après le choc d'après la vitesse avant le choc [MW 85]) ou dynamiquement : la collision dure un temps fini et génère des forces s'opposant à une plus grande interpénétration [CLF 93].

Les objets rigides peuvent également être modélisés par la physique du point. La distribution de masse est définie par des masses ponctuelles liées par des interactions physiques. [TPF 89] et [Ton 91] modélisent des solides par des particules et modélisent la fusion de ces objets solides en objets fluides. [Godard 94] traite de la construction d'objets manufacturés par des éléments de base quasi-rigides. Les éléments quasi-rigides sont composés à leur tour de points matériels. L'objet ainsi construit peut se scinder en plusieurs morceaux sans possibilité de recombinaison. Ici les collisions sont traitées dynamiquement. L'interaction entre objets se ramène alors à une interaction entre les points constituant l'objet.

1.2.2. LES ASSEMBLAGES D'OBJETS RIGIDES

Les assemblages d'objets rigides peuvent être simulés par la mécanique des solides associée à des règles d'assemblage qui déterminent les degrés de liberté relatifs des objets les uns par rapport aux autres.

En continuité avec les principes de la physique du solide rigide, on utilise souvent la méthode des contraintes pour construire des solides articulés [AG 85] [WB 85] [IC 87][BB 88][WK 88] [GG 92]. Le principe est le même que celui décrit au paragraphe précédent. Pour les objets articulés, on utilise typiquement des contraintes liant un point d'un objet en mouvement à un point d'un autre objet, qu'il soit fixe ou en mouvement. Il arrive souvent aussi qu'un point soit contraint de rester sur une courbe ou une surface.

Beaucoup de méthodes ne traitent que les cas où les objets liés les uns aux autres ne forment que des chaînes ouvertes. En effet, ces contraintes ne sont pas symétriques : chaque contrainte entre deux objets définit un objet père et un objet fils. La vérification des contraintes est effectuée séquentiellement en montant des pères aux fils (ou l'inverse). Toute structure en chaîne fermée est ainsi exclue. D'autre part, il arrive souvent que la position des solides fils soit calculée dans le référentiel du solide père. Dans ce cas, la

connaissance de la position absolue de l'objet dans l'espace est d'autant plus difficile que le nombre de degrés de liberté total de l'objet est grand. Dans ce cas, les calculs de collision et d'auto-collision en deviennent d'autant plus complexes.

Pourtant d'autres méthodes fondées sur la mécanique du solide font un calcul global des contraintes. Ainsi, elles ont pu intégrer les boucles fermées et les collisions [IC 87] [GG 92].

Ces objets articulés peuvent également être modélisés par la physique du point [Van Overveld 91]. [NCL 96] a modélisé une horloge entièrement simulée, composée uniquement de points matériels. [CL 95] a modélisé des véhicules à roue, motorisés, ayant un grand nombre de degrés de liberté. Ces véhicules sont également construits par des points matériels. Dans ces cas, le calcul de toutes les interactions se fait à un même niveau sans hiérarchie. Il en résulte que toutes les structures, arborescentes ou non, sont permises. Les positions de chaque membre sont calculées dans le référentiel terrestre, ce qui facilite le calcul des collisions.

1.2.3. LES OBJETS DÉFORMABLES STRUCTURÉS

De manière triviale il n'est pas possible d'appliquer la formulation des solides rigides à des objets dont nous ne voulons précisément pas négliger les déformations.

Les méthodes comme celle des éléments finis permettent de décrire et de simuler les déformations d'objets très divers. [GTT 89] simulent la saisie d'un objet par une main. La méthode des éléments finis leur permettent de reproduire les déformations de l'objet saisi, ainsi que des déformations de la main pendant cette saisie. Dans [TPBF 87] les objets sont caractérisés par des propriétés physiques (élasticité, viscosité). Ces objets sont divisés en éléments finis chacun caractérisé par des variables dynamiques dépendant de la position relative des éléments les uns par rapport aux autres. Ensuite les équations de la dynamique sont résolues pour chaque élément. Cette méthode permet de simuler des déformations très complexes. Elle reste valable même pour les déformations de grande amplitude.

Par contre, si la méthode des éléments finis permet effectivement de calculer les déformations, elle s'avère difficile d'usage pour les déplacements dans l'espace et pour le traitement des collisions. En effet cela reviendrait à prendre en compte, dans un même modèle, d'une part les déformations à petite échelle et d'autre part les déplacements à grande échelle. L'unicité du modèle implique que tous ces phénomènes, quelque soit leur échelle émergent des phénomènes à petite échelle. Pour engendrer des objets quasi-rigides à grande échelle, les interactions à petite échelle doivent avoir des constantes de temps extrêmement faibles. Ceci rend ces modèles très coûteux. Dans le cas des objets rigides, la physique des solides résout ce problème en éliminant toutes les interactions locales.

Une des solutions adoptées pour modéliser les déformations ainsi que les déplacements est de combiner les éléments finis et la physique des solides. Les éléments finis modéliseraient les déformations et la physique des solides les déplacements. C'est le principe du modèle de [TF 88] où un objet est caractérisé par deux représentations. L'une est rigide et se déplace dans l'espace. L'autre est déformable. Sa position est donnée par celle de la première et les forces subies par la seconde sont transmises à la première. Dans [Gasc 93] le principe est analogue, même si toutes les déformations ne sont pas modélisées par des principes dynamiques.

Dans les deux cas, la distribution de masses de l'objet reste la même, i.e. celle de l'objet rigide, et ce, même si la composante déformable de l'objet subit des déformations de grande amplitude. Pour tenir compte des changements de la distribution de masses, il faudrait calculer, à chaque instant la matrice d'inertie. Cet écart entre la forme

physique/visuelle et la distribution de masses peut produire un comportement incohérent. De ce fait, cette méthode est valable lorsque les déformations de l'objet sont assez faibles pour que la distribution de masses puisse être considérée comme constante (i.e. pour les objets peu déformables).

Pour pallier à ces limites, certains travaux [WW 90] [BW 92] et [MT 92] modélisent les déformations non pas à travers des interactions locales (comme dans le cas des éléments finis) mais par des déformations globales de l'objet. Par exemple, dans [MT 92] ces transformations comprennent les fuselages, les torsions axiales, les flexions etc. Les déformations sont dues à la fois à un modèle de type solide rigide déformé par des transformations géométriques et à un modèle de type éléments finis tenant compte des déformations locales. Les paramètres de ces transformations géométriques sont définis comme des variables dynamiques. Dans [BW 92] les déformations sont limitées à des transformations géométriques linéaires. Les paramètres de ces transformations sont définis dynamiquement de manière à minimiser la différence ($F - m.a$) pour chaque point de l'objet. Comme [TF 88] et [Gasc 93], ces méthodes permettent de modéliser les déformations des objets en même temps que leurs déplacements et leurs collisions. Ceci permet dans beaucoup de cas à décrire des déformations de plus grande amplitude. Cependant, en général, le type de ces déformations est limitée à celles permises par la fonction de déformation choisie.

De même que pour les autres types d'objets, les solides déformables peuvent être modélisés par la physique des points. La physique des points prend en compte en même temps, les déplacements et les déformations des objets. Il existe une seule représentation pour la forme de l'objet et pour sa distribution de masses. Celle-ci change au fur et à mesure que change la forme de l'objet. De cette manière la physique des points permet de modéliser des objets peu déformables ou très déformables tout en restant dans le domaine de la validité physique. [Luc 85] et [Jim 89] ont modélisé de nombreux objets (jeu de tennis sonore avec retour d'effort, tissus et surfaces déformables) par le système Cordis-Anima, sous forme de réseaux de masses ponctuelles liées par des interactions linéaires viscoélastiques. [Miller 88] a modélisé le mouvement de serpents et de vers par des chaînes de masses attachées par des ressorts et des viscosités. De même dans [CHP 89] les personnages déformables sont animés par des modèles cinématiques. Mais les déformations locales des membres, elles, sont définies par des modèles dynamiques. Les déformations dynamiques sont modélisées par des réseaux de masses attachées par des interactions de même type.

1.2.4. LES OBJETS NON-STRUCTURÉS

Ces objets n'ont pas de forme propre et leur topologie même varie au cours du temps. Aussi la définition d'une forme de référence fixe, ou même d'une structure fixe, perd toute signification. Donc la modélisation de ce type d'objet avec des méthodes fondées sur des formes explicites (la physique du solide) se révèle tout à fait impossible.

[Jim 89] a modélisé des liquides et des pâtes visco-plasto-élastiques en interaction avec des obstacles solides, ainsi que d'autres objets non-structurés comme des pâtes. Miller et Kass [MK 90] ont modélisé l'écoulement fluide en représentant la surface du fluide par un champ de hauteurs. Ils résolvent ensuite l'équation de propagation à chaque point de ce milieu. Xin Li et Moshell [XM 93] ont modélisé les empilements de matériaux granulaires et les avalanches de surface en modélisant le sable comme un champ de hauteurs. Ensuite, ils modélisent le glissement de tranches de matière d'un point à un autre en calculant les frottements secs selon la loi de Coulomb. Miller et Pearce [MP 89] ont modélisé les poudres et les fluides utilisant des particules. Pour les poudres, les particules se repoussent lorsqu'elles sont proches et s'ignorent à plus longue distance. Pour les fluides, il existe une distance intermédiaire où les particules s'attirent modélisant ainsi les forces de cohésion (Interactions de Lennard-Jones). [DG 95] ont élaboré un modèle de fluide avec des particules en interaction de type Lennard-Jones. Ces particules

gènèrent des surfaces implicites qui régissent l'interaction du fluide avec son environnement.

[TPF 89] intègre deux modèles à base de particules, l'un rendant compte des comportements solides, et l'autre les comportements fluides. L'un des modèles est de type structuré, (petits solides formés de masses et de ressorts permanents) alors que l'autre est un modèle non-structuré où tous les points sont reliés à tous les autres points par des fonctions d'interaction de type Lennard-Jones. Tonnessen [Ton 91] a réalisé un modèle unique tenant compte à la fois des comportements solides et liquides. Ce modèle est composé de particules "thermales" (thermal particles). Le changement d'état peut se faire dans le sens solide-fluide aussi bien que fluide-solide. Les objets présentent alors des degrés divers de déformabilité. Dans les deux cas, la notion de forme prédéfinie géométriquement a tout à fait disparu. Les formes générées sont émergentes et proviennent d'interactions entre points. Dans [TPF 89] elles sont visualisées à l'aide de surfaces implicites engendrées par les points matériels.

En conclusion, ce sous-chapitre § 1.2 nous a permis d'examiner quelques méthodes de modélisation, fondées ou non sur la physique du point. La suite de ce chapitre sera consacrée plus particulièrement à la physique du point et sa situation par rapport aux autres méthodes de modélisation.

1.3. LA PHYSIQUE DU POINT ET LA PHYSIQUE DU SOLIDE

1.3.1. LA FORME

Jusqu'ici, nous avons discuté essentiellement de la modélisation des degrés de liberté dynamiques des objets. Notre propos était la modélisation du mouvement des objets. Nous n'avons pas encore abordé la modélisation de leur forme. Dans la physique du solide, la modélisation de la forme est antérieure à la modélisation du mouvement. Donc l'objet en mouvement est déjà caractérisé par une forme fixe ou faiblement déformable.

Il n'en va pas de même pour un ensemble de points. Si les points peuvent générer un mouvement et avoir des comportements dynamiques très variés, un ensemble de points à lui seul ne peut pas définir une forme ou un volume caractéristique. Le point n'a pas de forme. Un même mouvement, un même comportement physique peut être parfaitement cohérent avec une infinité de formes sous-jacentes différentes. La modélisation de la forme d'un ensemble de points relève d'un choix explicite et non-trivial. Cette opération fait partie du processus de visualisation et sera plus amplement étudiée aux chapitres § 5 et § 6.

Dans les sections suivantes, nous allons voir que, précisément grâce à cette absence de forme, le point est capable de représenter des mouvements beaucoup plus variés que les primitives ayant une forme.

1.3.2. FORME EXPLICITE ET FORME ÉMERGENTE

En étudiant l'ensemble des modèles décrits au sous-chapitre § 1.2, on peut observer qu'il y a plusieurs manières de définir des formes. Cette définition est soit *explicite*, soit *émergente*.

Les formes explicites sont définies par des principes géométriques. Ce sont les éléments de base, les éléments les plus simples d'une scène géométrique. Les algorithmes de modélisation géométriques permettent aujourd'hui de définir explicitement des formes très complexes. Mais ce sont des formes constantes. Il est certes possible d'appliquer à ces formes des transformations géométriques qui les modifient. Cependant, dans une

animation dynamique, il est difficile de faire varier ces formes de manière physiquement consistante. Donc dans une séquence dynamique la définition explicite de formes, permet de définir essentiellement des solides rigides (six degrés de liberté).

Pour modéliser des objets déformables, la forme explicite n'est pas suffisante. On peut obtenir des modèles d'objets déformables par des assemblages d'objets de forme explicite en interaction physique et/ou liés par des contraintes géométriques. La forme globale ainsi obtenue est en partie explicite (la forme de chaque élément) et en partie émergente (la forme de l'ensemble). Dans ces combinaisons, l'importance relative des composantes explicites et émergentes peut être très variée. Pour un solide rigide la forme peut être décrite de manière entièrement explicite. La forme d'un solide rigide articulé composé de deux solides liés peut être définie de manière quasi-explicite. Un amas de sable peut aussi être modélisé par des empilement de solides [ABT 87]. Mais dans ce cas, la forme globale de l'amas dépend beaucoup plus des positions relatives des solides que de la forme individuelle de chaque solide. La contribution de la forme émergente est alors beaucoup plus importante que celle de la forme explicite. Toutes les formes ne peuvent pas être définies avec une composante explicite. C'est par exemple le cas des fluides. Dans ce cas la forme doit être définie de façon purement émergente et la forme explicite doit être réduite à sa plus simple expression, c'est à dire le point.

De manière plus générale, plus le nombre de degrés de liberté de l'objet est grand et plus sa forme devra être émergente, et moins important sera le rôle de la forme explicite. Or les objets à faible nombre de degrés de liberté sont des cas particuliers d'objets à grand nombre de degrés de liberté. Donc la forme explicite est un cas particulier de la forme émergente. En effet un processus dynamique peut générer aussi bien des formes variables que des formes constantes. Le seul avantage des formes explicites sur les formes émergentes est que, dans le cas des objets considérés comme rigides, les degrés de liberté de déformation, considérés comme contraints ne sont pas calculés. C'est une réduction de la complexité du problème à résoudre.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons essentiellement aux objets très déformables, i.e. à grand nombre de degrés de liberté. Donc notre attention sera tournée essentiellement vers les modèles où la forme des objets est émergente.

1.3.3. PHYSIQUE DU SOLIDE VS PHYSIQUE DU POINT

La question que nous nous posons ici se place toujours dans le contexte de la génération de formes émergentes. La physique du point et la physique des solides sont toutes deux capables de générer des formes émergentes. Mais nous allons voir que la physique du solide ne peut produire qu'un ensemble limité de formes émergentes.

Dans la physique du solide, un objet est défini par un contour. Ce contour définit un intérieur et un extérieur de l'objet. Pour la physique des solides ce contour doit être infranchissable. Ainsi, les objets qui ne sont pas en contact avec ce contour n'interagissent pas avec le solide, mais ceux qui tendraient à entrer à l'intérieur de l'objet subissent une forte répulsion.

Par contre dans la physique du point, un point n'a pas d'encombrement physique autre que celui que définissent ses interactions physiques avec son environnement. Ces interactions peuvent être fortes ou faibles selon les propriétés de l'objet de référence. Dans certains cas, ces interactions peuvent être du même ordre de grandeur que celles de la physique du solide. Un point matériel peut avoir les propriétés d'une bille d'acier. Un ensemble de points peut représenter un solide quasi-rigide, et les frontières d'interaction entre ces points et leur environnement définit le contour de ces objets. Mais pour d'autres ordres de grandeur, les forces de répulsion ne sont pas aussi exclusives que dans le cas des solides. Le fait qu'un point contienne dans sa zone d'interaction un très grand nombre d'autres points est même une situation très courante notamment dans le cas des

modèles de fluide. Les formes et les mouvements ainsi générées ne peuvent pas être produites par la physique du solide.

Ainsi, l'ensemble des objets représentables par la physique des solides semble être inclus dans celui des objets représentables par la physique du point. En pratique, comme nous l'avons vu dans le sous-chapitre § 1.2, si la physique du solide ne peut modéliser que les objets solides rigides ou peu déformables, la physique du point, elle, peut modéliser aussi bien les objets quasi-rigides, que les objets peu ou très déformables et les fluides. A ce sujet, le modèle le plus significatif est celui de David Tonnessen [Ton 91], qui avec un seul modèle à base de particules, peut passer continûment d'un modèle solide à un modèle totalement fluide.

1.3.4. LA QUESTION DU COÛT DE CALCUL

A ce stade, nous n'abordons pas la question de l'efficacité des deux types de modèles. En effet, nous avons vu que la physique des solides génère aussi bien des formes explicites que des formes émergentes, alors que la physique du point produit seulement des formes émergentes. Comme nous l'avons brièvement évoqué à la fin de la section § 1.3.2, les formes rigides-émergentes peuvent être moins économiques (en termes de temps de calcul) que les formes rigides-explicites.

Mais dans un premier temps, le propos est uniquement de montrer que tous les comportements de la physique du solide sont accessibles à la physique du point, quitte à utiliser un grand nombre de points, alors que l'inverse n'est pas vrai. Dans un deuxième temps, nous verrons au chapitre § 2 (*modélisation physique multi-échelles*), que ce nombre de points peut être réglé pour chaque phénomène, en fonction du nombre de degrés de liberté effectivement exigé par ce phénomène.

1.3.5. LA MÉCANIQUE DES SOLIDES

Historiquement, la synthèse d'images a commencé par représenter l'image fixe et cela, essentiellement par des objets géométriques. Ensuite, l'introduction de l'animation, cinématique dans un premier temps, a consisté à déplacer et à déformer ces objets géométriques. Jusqu'ici, ces objets n'ont pas d'autres caractéristiques que leur forme. Ainsi, lors de l'introduction du modèle physique, l'objectif a été d'intégrer les modèles physiques dans les objets usuellement manipulés en synthèse d'images.

D'autre part, les modèles de la physique du point les plus simples représentant les solides les plus élémentaires (par exemple un tétraèdre) ont un nombre de degrés de liberté couplés trop important pour que les équations différentielles couplées correspondantes puissent être résolues formellement. En négligeant les degrés de liberté de déformation, la physique du solide met l'analyse de ce comportement dynamique à la portée de la démarche formelle, pour une très grande variété d'objets manufacturés. Aussi, la synthèse d'images, en continuité avec la géométrie, la CAO et avec les méthodes de résolution formelles a adopté d'abord la physique du solide.

Cependant, le calcul numérique change les données du problème. La résolution d'un grand nombre d'équations différentielles couplées, linéaires ou non, devient possible (Cf. par exemple la méthode des éléments finis). Dans ce contexte, la diminution du nombre de degrés de liberté de déformations n'est plus une question vitale. Elle peut être considérée comme une question d'optimisation. Cette optimisation reste valable aussi longtemps que les déformations de l'objet peuvent effectivement être négligées. Cependant, pour des phénomènes qui font intervenir précisément la déformation la physique des solides, du fait de ses hypothèses de départ, est confrontée à des problèmes. Il faut alors faire appel à la physique du point.

1.4. LA MODÉLISATION D'OBJETS TRÈS DÉFORMABLES

La modélisation des objets très déformables (fluides, matériaux granulaires etc.) se trouve tout à fait en dehors de la portée des méthodes comme la physique du solide qui définissent les objets par une forme ou une topologie a priori. Par contre la physique du point peut modéliser des objets très déformables (cf. sous-chapitre § 1.2). Dans le présent sous-chapitre, nous allons étudier la situation de la physique du point dans le contexte de la modélisation des objets très déformables.

1.4.1. LA PHYSIQUE DU CONTINU VS LA PHYSIQUE DISCRÈTE

En physique, il est courant d'adopter une représentation continue du temps, de l'espace et de la matière, car souvent, les équations produites par les modèles continus se prêtent plus aisément à la résolution formelle. Dans un grand nombre de cas, et notamment dans les modèles continus régissant le comportement des fluides, les grandeurs en jeu sont des champs continus. Cependant dans le cadre d'interactions complexes ou de systèmes à grand nombre de degrés de liberté, la résolution formelle doit faire place à la résolution numérique. Celle-ci nécessite une représentation discrète du temps, de l'espace et de la matière.

Greenspan [Gre 73] soutient que dans le contexte général de la démarche scientifique et dans le contexte plus particulier de l'utilisation de calculateurs numériques, les modèles explicitement discrets sont plus pertinents que les modèles continus. *"Classiquement l'expérimentation scientifique produit des données discrètes. Les théoriciens analysent des données et en déduisent des modèles continus. Si les équations de ces modèles sont non-linéaires, elles seraient alors discrétisées pour être résolues par des calculateurs et fourniraient des données discrètes. (figure 1.2)*

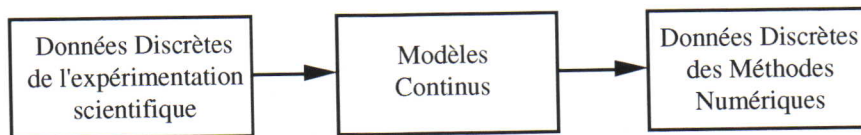


figure 1.2.

*D'un point de vue philosophique, l'étape intermédiaire de la séquence de la figure 1.2. n'est pas consistante par rapport aux deux autres étapes. En effet, il serait plus simple et plus consistant de remplacer l'inférence du modèle continu par l'inférence d'un modèle discret ainsi que le montre la figure 1.3. et ceci serait réalisé en niant le concept de l'infinité."*⁶

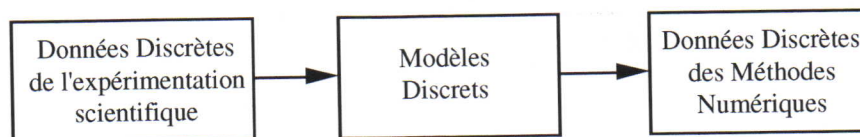


figure 1.3.

1.4.2. POINTS MATÉRIELS ET PARTITION PAR DOMAINES SPATIAUX

Dans la suite de ce travail, nous ne nous intéresserons qu'aux modèles numériques donc discrets. Parmi les modèles discrets utilisés pour la modélisation d'objets très déformables, (cf. § 1.2) on peut distinguer deux types de représentation :

⁶ Traduit par nous (page 3)

- a. Les représentations à partition par domaines spatiaux (champ)
- b. Les représentations à base de points matériels (particules)

Dans la représentation à partition par domaines spatiaux, l'espace est divisé en éléments discrets de position fixe. Chacun de ces éléments est caractérisé par une variable caractérisant la matière qui, à un instant donné se trouve dans cet espace. Typiquement ces variables sont des densités, des pressions, des vitesses, des potentiels etc. Dans la représentation par particules, c'est la matière qui est divisée en éléments discrets de masse fixe. Chacun de ces éléments est caractérisé par une variable représentant sa position.

Ce sont deux représentations duales. Dans les deux cas, les formes créées sont émergentes. Elles permettent toutes deux de représenter des objets très déformables. Elles ont chacune des spécificités qui les rendent aptes à certains types de modèles.

1.4.3. LA "PHYSICALITÉ" DES DEUX REPRÉSENTATIONS

1.4.3.1. L'emploi fréquent de la partition par domaines spatiaux

Certains modèles utilisés en physique font appel à une représentation par particules et produisent des équations qui peuvent être formellement résolues. (Cf. par exemple la mécanique statistique [Sua 85]).

Cependant dans la plupart des cas pour exprimer les propriétés d'objets très déformables, la physique a recours à une représentation continue. Les équations produites dans le cadre de ces représentations établissent des relations entre champs continus comme par exemple des champs de pression ou des champs de vitesse. Tel est le cas de l'équation de Navier-Stokes régissant les comportements d'un fluide Newtonien :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

C'est l'expression de l'équation fondamentale de la dynamique ($m\Gamma = F$) appliquée à une parcelle de fluide. Le premier membre est l'accélération fois la masse de la parcelle. Le second membre représente l'ensemble des forces volumiques s'appliquant à cette parcelle de fluide : les forces de pression, la gravitation, et les forces visqueuses. (u représente la vitesse de la parcelle de fluide. ρ est la masse volumique et μ est la viscosité du fluide.) Lorsque le fluide est incompressible, ($\text{div } u = 0$) le quatrième terme du second membre est nul [Candel 91].

Dans la plupart des cas, cette équation ne peut pas être résolue formellement. Or la résolution numérique suppose que l'espace de la simulation soit discrétisé et que les champs continus soient échantillonnés sur cette grille. Ensuite, la simulation consiste à résoudre l'équation de Navier-Stokes en chacun des points de cette grille en remplaçant les dérivations par des différences finies. Le modèle discret résultant correspond à une représentation à partition par domaines spatiaux.

Cette méthode de résolution est la plus fréquemment utilisée. Malgré la lourdeur des calculs, et malgré d'autres difficultés, notamment en ce qui concerne la spécification des conditions aux limites, ces méthodes de simulation, après une quarantaine d'années d'expérience, sont maintenant très bien connues. C'est sans doute la raison pour laquelle, dans le domaine de la synthèse d'images animées, les représentations par points matériels (lorsqu'elles sont utilisées à une échelle très supérieure à celle des molécules) ont la réputation d'être "moins physique" que les représentations par champ.

1.4.3.2. Automates cellulaires pour l'hydrodynamique

Ce paragraphe mentionne des exemples de résolution de l'équation de Navier-Stokes par une méthode utilisant la représentation par particules.

Les méthodes appelées *gazes sur réseaux* ou *automates cellulaires pour l'hydrodynamique* sont nées il y a à peu près vingt ans. Dans ces méthodes, le modèle sous-jacent est le suivant : le fluide est représenté par des particules à une échelle très supérieure à celle de la molécule. Ces particules ont un nombre très limité de positions : elles se déplacent sur les nœuds d'un réseau à maillage régulier couvrant l'espace. Chaque nœud du réseau est caractérisé par un nombre limité d'états dépendant de la présence ou d'absence de particules à ce nœud. A chaque pas de temps sont effectuées deux opérations : la première est le calcul des interactions entre particules et celui des forces s'exerçant sur chacune d'elles en fonction de leur positions respectives. La seconde opération est le calcul des déplacements résultants. Pour la simulation, chaque nœud est représenté par un automate cellulaire devant effectuer, à chaque pas de temps, des calculs simples et répétitifs de manière autonome.

Hardy, Pomeau et de Pazzis ont élaboré en 1973 un modèle de gaz sur réseau particulièrement simple composé d'un réseau 2D à maille carrée [HPP 73]. Malgré sa simplicité, ce modèle (appelé HPP d'après le nom de ces auteurs) possède une vitesse du son. Il est porteur d'ondes acoustiques. Cependant, ses propriétés de transport (la viscosité) ne sont pas conformes à celles d'un gaz réel. En 1983 Frisch, Hasslacher et Pomeau proposent un modèle (FHP également d'après le nom des auteurs) comportant un réseau plan à maille hexagonale [FHP 83]. Chaque nœud peut contenir au plus six particules. Les auteurs ont pu démontrer qu'avec cette topologie et avec leurs règles de collision, le comportement macroscopique associé au réseau est conforme à celui d'un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes. En 3D, il n'existe pas de topologie offrant des propriétés de symétrie nécessaires à ce type de modèle. Cependant en 1986, D'huilières, Lallemand et Frisch surmontent cette difficulté en travaillant dans un espace 4D [HLF 86]. Ils ont mis au point un modèle (appelé FCHC) sur un réseau de type hyper-cubique à faces centrées (FCHC en anglais) dans un espace 4D. Le résultat est projeté dans un espace 3D. On peut ainsi simuler des comportements fluides 3D obéissant aux équations de Navier-Stokes. Aujourd'hui le domaine des gaz sur réseau produit une littérature assez abondante.

La conclusion de ce paragraphe est que la modélisation et la simulation physiques de la matière fluide à une échelle très supérieure à celle de la molécule n'implique nullement une représentation à partition par domaines spatiaux. Une représentation à base de points matériels peut également y parvenir.

De manière plus générale, indépendamment des méthodes et des représentations utilisées les plus fréquemment dans le domaine de la physique, nous ne pensons pas qu'il soit possible de juger, a priori, de la consistance d'une représentation. Chacune des deux représentations (particules et partition par domaines spatiaux) a des spécificités propres. L'efficacité et la pertinence de chacune est maximale dans certaines conditions. Dans la section suivante (§ 1.4.4) nous présentons quelques unes de ces conditions.

1.4.4. PARTICULES VS CHAMPS

Dans les représentations à partition par domaines spatiaux, tous les points sont immobiles. Même s'ils sont caractérisés par un champ de pression ou de vitesse ou de densité. Le mouvement n'est pas explicitement défini. Il peut au besoin être reconstitué, mais il est implicite. Pour cette même raison, il est très difficile d'intégrer dans de telles simulations, des objets solides en mouvement et, en particulier, la main d'un opérateur humain.

Les particules sont des quantités de matière explicitement en mouvement. Ainsi, il devient possible d'intégrer dans une même simulation des particules représentant un fluide et des particules représentant des solides. En particulier cette représentation se prête assez facilement à une interaction avec un opérateur humain.

Par contre la topologie d'un champ reste toujours la même. Une unité de discrétisation spatiale échange de l'information seulement avec ses voisins et non pas avec des unités de discrétisation distantes. Aussi, la complexité du calcul à effectuer est assez réduite $O(n)$ (n étant le nombre d'unités de discrétisation). Enfin, la quantité d'information échangée entre unités voisines reste toujours constante, si bien que la parallélisation et le calcul synchrone en sont facilités.

Par contre dans certains modèles, et notamment dans le cas des objets très déformables chaque particule peut être en interaction avec toutes les autres particules en même temps. Donc la complexité de calcul peut s'élever jusqu'à $O(n^2)$ (n étant le nombre de particules) à moins que des optimisations ne simplifient ces calculs dans des cas particuliers. La quantité d'information échangée entre une particule et son environnement peut varier dans les mêmes proportions et pour les mêmes raisons. Ceci rend la parallélisation et le calcul synchrone d'autant plus difficiles.

1.4.5. CONCLUSION

La conclusion des développements de ce chapitre jusqu'à ce point est ce que nous pourrions appeler *l'universalité de la physique du point*, puisque celle-ci peut représenter des objets solides, des objets très déformables et plus généralement toute la gamme des comportements présentés sur la figure 1.1. Les représentations par particules ou par champ ont chacune leurs spécificités et dans le cadre de ce travail, nous aurons recours aux deux représentations.

1.5. CORDIS-ANIMA

Dans le sous-chapitre suivant nous présenterons un langage de modélisation et de simulation fondé sur la physique du point. C'est le langage *Cordis-Anima*. Tous les modèles présentés dans ce travail ont été réalisés grâce à ce système. La représentation la plus fréquemment utilisée est la représentation par particules, mais nous aurons également affaire à des représentations par champ (cf. l'écran d'épingles chapitres § 6 à § 10). Dans le présent sous-chapitre, nous décrivons la syntaxe et les algorithmes de ce modéleur.

1.5.1. NÉCESSITÉ D'UN LANGAGE DE MODÉLISATION ET DE SIMULATION

1.5.1.1. Modélisation et Simulation

Le modèle physique d'un objet est une représentation permettant de décrire formellement les propriétés physiques de cet objet. Une telle représentation peut être définie indépendamment de tout contexte de résolution numérique. Notamment, elle peut être discrète ou rigoureusement continue dans le temps et/ou dans l'espace.

L'algorithme de simulation informatique d'un modèle est la résolution *numérique* des équations dérivées du modèle implémenté dans un ordinateur. Les grandeurs en jeu dans ces simulations sont des grandeurs exclusivement discrètes dans le temps et dans l'espace.

1.5.1.2. Un langage de modélisation

Plus les objets physiques sont complexes et plus il devient difficile de décrire leur comportements directement en termes d'équations différentielles et plus il devient difficile de résoudre ces équations différentielles couplées. La difficulté concerne la relation entre

les deux termes cités ci-dessus : le modèle physique et l'algorithme de simulation. Autrement dit, tous les modèles ne sont pas simulables et, parmi ceux qui le sont, l'algorithme de simulation peut être assez difficile à établir.

Pour faciliter la relation entre modèle et algorithme, on peut décomposer le modèle en plusieurs composants simples, dont l'algorithme de simulation est connu. L'algorithme de simulation du modèle global est alors obtenu par assemblage des algorithmes de simulation de chacun des composants. D'autre part le choix d'un nombre limité de modèles élémentaires associés à des règles d'assemblage spécifiques permet de constituer un langage de modélisation.

Ces modèles élémentaires constituent un alphabet. Tous les modèles sont construits par assemblage de ces éléments. Les règles d'assemblage doivent prendre en compte les contraintes de la simulation, notamment celle de la discrétisation et de l'enchaînement causale. Ces règles d'assemblage syntaxiques garantissent la simulabilité des modèles ainsi générés et fournissent directement l'algorithme de simulation correspondant. Grâce à ces règles, le modèle et l'algorithme de simulation sont isomorphes par construction.

1.5.1.3. L'exemple de l'électronique

Un exemple très éprouvé d'isomorphie entre langage de modélisation et réalisation pratique est donné par l'électronique. Les composants électroniques ne sont rien d'autre que des opérateurs et fonctions formelles localisées et matérialisées. Supposons que la variable d'entrée est le courant i et la variable de sortie est la tension v . Trois exemples d'opérateurs simples sont : la dérivation ($v=Ldi/dt$), l'intégration ($v=(1/C)\int i dt$) et la multiplication par une constante ($v=Ri$). Le comportement d'un grand nombre de dipôles réels peut être modélisé à l'aide de ces trois opérateurs.

Réciproquement, lorsque l'on recherche un comportement particulier faisant intervenir à la fois ces trois fonctions, (par exemple le comportement décrit par (1.1)) on peut utiliser un seul dipôle caractérisé par des coefficients (R,L,C)

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (1.1)$$

Or la démarche généralement adoptée est l'assemblage : on associe un dipôle avec un fort coefficient L mais où R et $1/C$ sont négligeables (une inductance), un autre composant de où $1/C$ est prépondérant par rapport à R et L (un condensateur) et enfin un composant où R l'emporte sur L et $1/C$ (une résistance), et on les assemble de manière adéquate (en l'occurrence on les monte en série) pour obtenir le comportement décrit par (1.1). Donc lorsque la variable de sortie est la tension et l'entrée le courant, l'inductance est la matérialisation de l'opérateur dérivation, la capacité est associée à l'intégration et la résistance à la multiplication par une constante.

Ceci est vrai non seulement pour ces trois composants mais pour les composants électriques en général. Tout composant électronique concentre en lui deux fonctions : d'une part une fonction de représentation d'un opérateur (intégration, dérivation, multiplication par une constante) et d'autre part une fonction électrique proprement dite. La première fonction permet d'exprimer des opérateurs plus complexes (filtres, oscillateurs, amplificateurs, régulateurs etc.) à partir d'un assemblage d'opérateurs simples. On peut dire qu'il s'agit là d'un langage de description des fonctions électriques. La seconde fonction caractérise le composant matériel. Elle entre en jeu lorsque le circuit est mis sous tension.

Soit un réseau d'opérateurs assemblés en un schéma électrique décrivant une fonction globale f . Chaque opérateur de ce schéma est associé à un composant réel qui effectue

électriquement la même opération. Donc la réalisation électrique de la fonction f nécessite simplement que les composants réels soient câblés selon le même réseau que les opérateurs électriques et que le circuit soit mis sous tension.

1.5.2. AXIOMES DE BASE DE *CORDIS-ANIMA*

Le système Cordis-Anima est un autre exemple de langage de modélisation fournissant directement l'algorithme de simulation. Ce qui suit (§ 1.5.2 à § 1.5.4) a été très largement inspiré de [CLF 93].

1.5.2.1. Modularité

Un objet Cordis-Anima est en général constitué de sous-objets agencés selon une certaine structure. Les propriétés de l'objet global sont déterminées par la structure des relations entre ces composants et par les propriétés intrinsèques de chacun d'eux. Cette modularité est la condition même d'une certaine généralité, c'est à dire de la possibilité de construire une grande variété d'objets à partir d'un ensemble limité de composants différents.

1.5.2.2. Physicalité

Les modules (les composants) d'un objet Cordis-Anima sont de même nature que l'objet global. Ils doivent comme lui être accessibles à nos sens et à nos actions gestuelles. Cette clause signifie que tous les éléments auxquels l'utilisateur a affaire, même s'ils ne correspondent à aucun objet existant, ont une réalité physique expérimentable.

1.5.2.3. Points de Communication

Toute simulation se déroule par l'échange de deux variables physiques duales, l'une intensive, l'autre extensive. (e.g. force/position, vitesse/pression, tension/intensité, etc). Lorsque plusieurs modules sont couplés, les algorithmes de simulation correspondants échangent des variables dynamiques.

Dans un contexte de simulation numérique cette communication ne peut être faite qu'en un nombre fini de points. Chaque module sera donc caractérisé par un nombre fini de *points de communication*. D'autre part, dans chaque cas, la communication est nécessairement unidirectionnelle. Donc il existe nécessairement deux types de points de communication

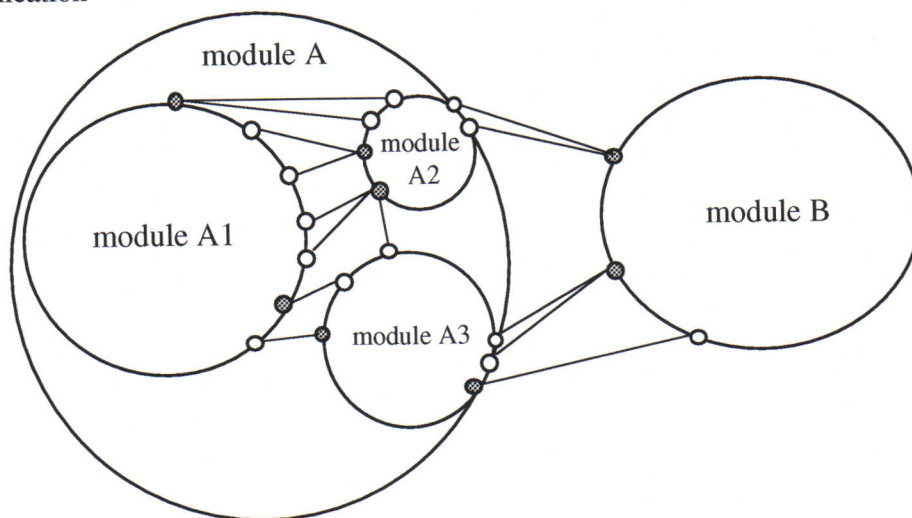


figure 1.4. Les modules en communication

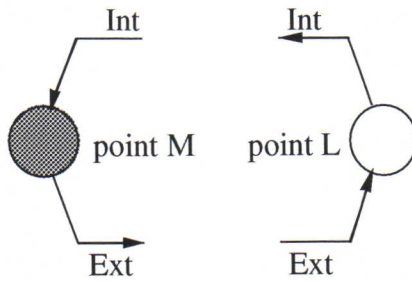


figure 1.5. Les points M et les points L

Le point M admet en entrée une variable du type intensif et produit en sortie une variable du type extensif.

Le point L admet en entrée une variable du type extensif. et produit en sortie une variable du type intensif.

Connecter un point M et un point L signifie faire de la sortie de l'un l'entrée de l'autre et vice-versa. Voici les règles syntaxiques de connexion :

α . Il est interdit de connecter deux points M entre eux ou deux points L entre eux.

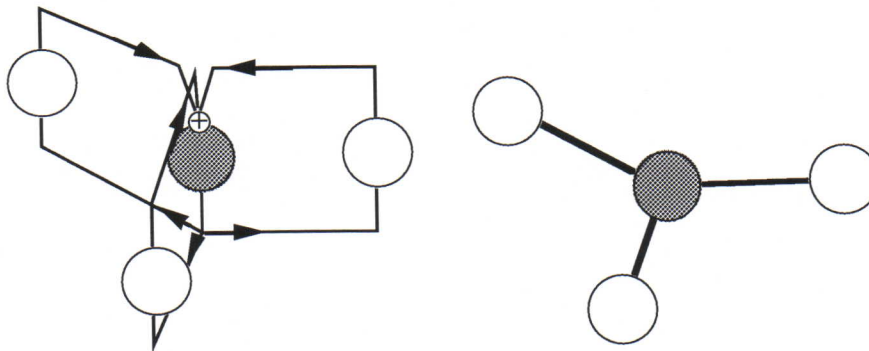


figure 1.6. Plusieurs points L connectés à un point M

Notation complète (à gauche) et notation compacte (à droite)

β . On peut connecter plusieurs points L à un seul point M. Mais à un point L on ne peut connecter qu'un seul point M.

γ . Dans le cas de plusieurs points L connectés à un seul point M l'entrée du point M est la somme des variables intensives produits par les points L, et l'entrée de tous les points L est l'unique sortie extensive du point M.

1.5.3. CONSÉQUENCES : LES ATOMES DE CORDIS-ANIMA

Les atomes sont les éléments indivisibles et grâce auxquels il est possible d'obtenir tous les autres objets. Les éléments les plus simples que l'on puisse concevoir en Cordis-Anima sont des modules ne contenant pas d'autre module et ayant un seul point de communication. Il en résulte deux types de modules : l'un avec un point de communication M et l'autre avec un point de communication L.

Or s'il s'agit effectivement là des éléments les plus simples concevables, en revanche ils ne permettent pas de générer un grand nombre de réseaux différents. Les objets les plus simples permettant de générer une infinité de réseaux différents sont :

un module ne contenant aucun autre module et ayant un point de communication M :
l'élément <MAT>

un module ne contenant aucun autre module et ayant deux points de communications L :
l'élément <LIA>



figure 1.7. Les atomes de Cordis-Anima. Les notations adoptées par la suite sont celles de droite

Avec ces atomes, il est possible de générer une infinité de réseaux où les nœuds seront les atomes <MAT> et les arcs seront les atomes <LIA>. Et réciproquement tous les modules doivent pouvoir être exprimés comme un réseau de <MAT> et de <LIA>.

Les réseaux générés par ces automates peuvent être de topologie très diverses : ligne ouverte ou fermée, surfaces, volumes, agglomérats. Un agglomérat est une topologie particulière où tous les nœuds (<MAT>) d'un module sont liés à tous les autres nœuds du même module par des atomes <LIA>.

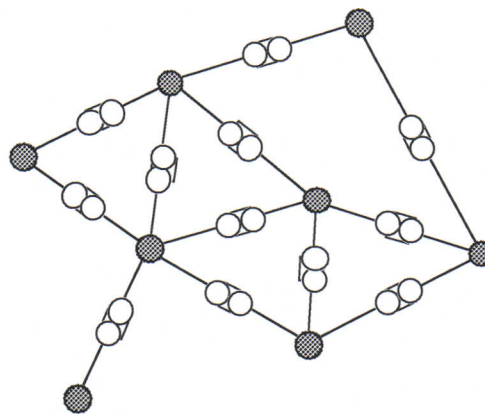


figure 1.8. Un réseau Cordis-Anima

Tous les modèles *Cordis-Anima* peuvent être exprimés en fin de compte par un assemblage de <MAT> et de <LIA>. Certains sont des modules intégrés mais l'algorithme sous-jacent est toujours extérieurement équivalent à un assemblage de <MAT> et de <LIA>.

La simulation de tout modèle consiste à chaque pas d'échantillonnage, à exécuter :

pour tous les <MAT> l'algorithme correspondant et ensuite

pour chaque <LIA> l'algorithme correspondant

1.5.4. CHOIX DE MISE EN ŒUVRE POUR CORDIS-ANIMA

Les éléments exposés précédemment sont les bases de Cordis-Anima. Ce sont les conditions dans lesquelles on garantit la diversité des objets créés et la cohérence physique de ces objets. Dans la présente section, nous exposerons les choix qui ont été faits pour la mise en œuvre de Cordis-Anima. Ces choix ont été faits pour des raisons

pratiques d'économie de calcul. La remise en cause de ces choix n'affecte en rien les propriétés fondamentales de Cordis-Anima.

1.5.4.1. Les variables intensives et extensives

Étant donné le choix de la physique du point, la variable intensive et la variable extensive peuvent être respectivement le couple force/position force/vitesse ou force/accélération. Mais on peut également adopter le système dual où la variable extensive est la force et la variable intensive est, par exemple la vitesse. Dans Cordis-Anima, la variable intensive et la variable extensive sont respectivement la force et la position. Il en résulte que :

Chaque élément <MAT> reçoit en entrée une force et produit une position

Chaque élément <LIA> reçoit en entrée deux positions et produit deux forces opposées.

1.5.4.2. Le schéma de discrétisation

Le choix des schémas de discrétisation est très important et peut affecter le déroulement d'une simulation de manière sensible. Le choix retenu dans l'implémentation standard de Cordis-Anima est celui de la vitesse retardée et de l'accélération avancée.

$$\vec{V}_n = \frac{\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1}}{T_e} \quad (1.2)$$

$$\vec{\Gamma}_n = \frac{\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_n}{T_e} = \frac{\vec{X}_{n+1} - 2\vec{X}_n + \vec{X}_{n-1}}{T_e^2} \quad (1.3)$$

1.5.5. LES ALGORITHMES MIS EN ŒUVRE DANS CORDIS-ANIMA

Les algorithmes implémentés dans les automates de *Cordis-Anima* sont ceux de la physique du point. Nous verrons que nous utiliserons aussi bien la représentation particules que la représentation champ. Cependant la plupart des modèles que nous présenterons auront la représentation particules (Ce sont des modèles susceptibles de réagir avec le geste d'un opérateur)

Tous les modèles exprimés avec *Cordis-Anima* doivent pouvoir être exprimés, en dernière analyse, avec les deux éléments <MAT> et <LIA> connectés en réseau. Il en résulte que d'un point de vue sémantique, les algorithmes implantés dans ces deux types d'automate constitueront l'alphabet avec lequel il faudra construire tous les algorithmes de simulation.

1.5.5.1. L'élément <MAT>

Chaque élément <MAT> représente un point matériel. La position qu'il produit à chaque instant d'échantillonnage représente la position de ce point matériel et la force que le <MAT> lit à son entrée représente la somme de toutes les forces appliquées à ce point matériel. L'algorithme <MAT> calcule cette position en fonction de la force lue à l'entrée.

L'algorithme implémenté dans <MAT> est l'algorithme de l'inertie c'est à dire la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m \vec{\Gamma} \quad (1.4)$$

où m est la masse du point matériel, F est la force subie par ce point et Γ l'accélération qui en résulte. Plus précisément l'algorithme continu correspondant est :

$$\vec{X} = \frac{1}{m} \iint \vec{F} dt^2 \quad (1.5)$$

Étant données les relations (1.2) et (1.3) l'algorithme à temps discret effectivement implémenté pour l'inertie est :

$$\vec{X}_{n+1} \leftarrow 2 \cdot \vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} + \frac{T_e^2}{m} \vec{F}_n \quad (1.6)$$

1.5.5.2. L'élément <LIA>

On peut dire que chaque élément <LIA> est connecté à deux éléments <MAT> et représente l'interaction physique qui s'exerce entre ces deux éléments. Les deux forces opposées produites par l'élément <LIA> représentent la force exercée par un des points matériels sur l'autre et vice-versa. L'algorithme <LIA> calcule cette force en fonction de des deux variables position (ou position retardée) produites par les deux points matériels

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons des cas particuliers où la force générée par les fonctions d'interaction dépend de la distance entre les points matériels reliés par les fonctions d'interaction ou des variations de cette distance. Pour une scène où les points matériels se déplacent en 1D cette distance est simplement la différence entre les positions des deux points. Soient deux points M^1 et M^2 séparés par une distance d . Le vecteur unitaire correspondant au segment $[M^1M^2]$ et dirigé de 1 vers 2 est u^{12} .

$$d = \|\vec{M^1M^2}\| \quad u^{12} = \frac{\vec{M^1M^2}}{\|\vec{M^1M^2}\|} \quad (1.7)$$

Le principe de l'action et de la réaction exige que les forces échangées entre ces deux points soient nécessairement portées par u^{12} .

Dans la suite de ce paragraphe nous allons étudier deux cas particuliers de fonctions d'interaction linéaires. L'un correspond à un comportement élastique, il est caractérisé par une raideur k et prend en compte la distance entre les deux points matériels. L'autre correspond à un comportement visqueux, il est caractérisé par une viscosité z et prend en compte la variation de la distance dans le temps. On montre qu'un grand nombre d'interactions plus complexes (par exemple les interactions plastiques) peuvent être obtenues par une combinaison d'un nombre plus ou moins grand de ces deux interactions de base.

Supposons que les points matériels 1 et 2 soient liés par une interaction élastique.

$$\vec{F}^{12} = -k |d - d_0| u^{12} \quad (1.8)$$

représente la force élastique exercée par la masse 1 sur la masse 2. k est la raideur de l'interaction élastique et d_0 est sa longueur au repos.

A présent si les points 1 et 2 sont liés par une interaction visqueuse, alors la force exercée par 1 sur 2 est :

$$\vec{F}^{12} = -z \frac{\partial d}{\partial t} \vec{u}^{12} \quad (1.9)$$

où z est la viscosité de l'interaction visqueuse.

D'après les relations (1.3) et (1.4), les implémentations discrètes effectives des deux algorithmes sont respectivement :

$$\vec{F}_n^{12} \leftarrow -k |d_n - d_0| \vec{u}_n^{12} \quad (1.10)$$

pour l'interaction élastique (ressort)

$$\vec{F}_n^{12} \leftarrow -z \left(\frac{d_n - d_{n-1}}{T_e} \right) \vec{u}_n^{12} \quad (1.11)$$

pour l'interaction visqueuse (frein).

1.5.5.3. La liaison conditionnelle <LIC>

La liaison conditionnelle est le cas le plus général d'élément <LIA>. Il englobe les deux cas d'interaction linéaire évoqués ci-dessus. Le fonctionnement d'une liaison conditionnelle, dans le cas le plus général est déterminé par des automates d'état. Une liaison conditionnelle est caractérisée par un nombre fini d'états E_i . Chaque état E_i est caractérisé d'abord par un ensemble de variables d'état et par un ensemble de paramètres. D'autre part chaque état E_i est caractérisé par un ensemble de conditions de passage C_{ij} à d'autres états E_j et par des dispositions à prendre au changement d'état. Les conditions de passage C_{ij} peuvent porter sur les variables d'état caractérisant l'état E_i .

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons des cas particuliers où les variables d'état sont : la force créée par la liaison, la distance entre les points et/ou la variation de cette distance. Les paramètres caractérisant les états sont la raideur k_i , la viscosité z_i et la longueur au repos d_{0i} . La force que produit la liaison lorsqu'elle est dans l'état E_i est la suivante :

$$F_i^{12} \leftarrow - \left(k_n |d_n - d_{0i}| + z_n \left(\frac{d_n - d_{n-1}}{T_e} \right) \right) \vec{u}_n^{12} \quad (1.12)$$

Lorsque les conditions de changement d'état portent sur la variable d'entrée, alors la relation entre la variable d'entrée et la force produite est une fonction linéaire par morceaux. C'est le cas des butées élastiques, des butées élastiques creuses, de l'interaction de cohésion. Ces fonctions d'interaction non-linéaires sont décrites ci-dessous.

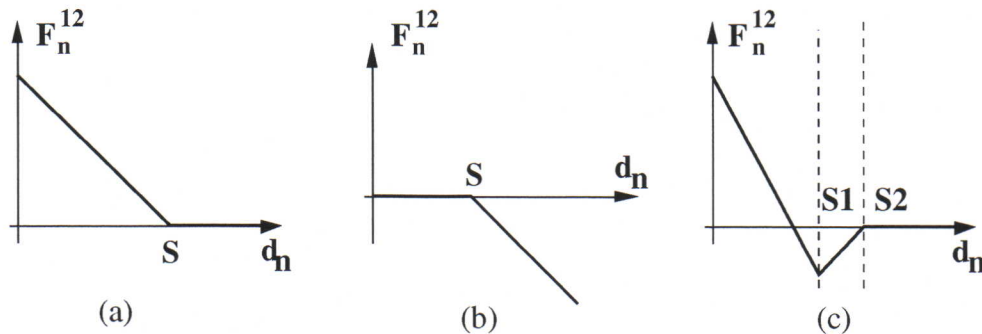


figure 1.9. Les fonctions d'interaction (a) butée élastique (b) butée élastique creuse et (c) cohésion.

a. La butée élastique

La butée élastique est caractérisée par deux états. L'un est caractérisé par une raideur k et l'autre par une raideur nulle. La condition de passage d'un état à un autre porte sur la longueur de la liaison. Soit d_n la longueur de la liaison à l'instant n . Si d_n est supérieur à un seuil S alors la liaison est dans le premier état : la raideur est nulle et la force produite aussi. Si d_n est inférieure à S alors la butée élastique agit comme un ressort de raideur k et de longueur à vide S . (Cf. figure 1.9)

$$\text{si } d_n < S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow -k |d_n - S| \vec{u}_n \quad (1.13)$$

$$\text{si } d_n > S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow 0$$

La butée élastique est toujours répulsive.

b. La butée élastique creuse

La butée élastique creuse a un comportement inverse. Si d_n est inférieur à S alors la force exercée est nulle. Si d_n est supérieur à S alors la butée élastique creuse agit comme un ressort de raideur k et de longueur à vide S . (Cf. figure 1.9)

$$\text{si } d_n < S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow 0 \quad (1.14)$$

$$\text{si } d_n > S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow -k |d_n - S| \vec{u}_n$$

La butée élastique creuse est toujours attractive.

c. L'interaction de cohésion

Cette fonction d'interaction a été utilisée d'abord par [Jim 89]. Elle est caractérisé par trois états. Le premier est caractérisé par une raideur nulle, la seconde par une raideur négative et la troisième par une raideur positive. La condition de passage d'un état à un autre est donnée par deux seuils de distance $S1$ et $S2$. Tant que d_n est supérieur à $S2$, la raideur est nulle et les deux points matériels sont libres. Lorsque d_n est compris entre $S1$ et $S2$, la raideur est négative, les deux points matériels s'attirent. Et lorsque d_n est inférieur à $S1$ la raideur est positive. Si, comme dans le cas de la figure 1.9, cet état est susceptible de produire des forces positives alors le comportement global de la liaison est répulsive pour les faibles longueurs, libre pour les grandes longueurs et attractives pour les longueurs intermédiaires. (Cf. [Jim 93]).

d. La viscosité non-linéaire

Dans cette fonction d'interaction, la variable d'entrée n'est pas la position des deux points reliés par l'interaction, mais la vitesse des deux points. Par contre, la condition de changement d'état porte toujours sur la longueur de la liaison, comme dans le cas des fonctions précédentes. La viscosité non-linéaire est caractérisée par une viscosité et par un seuil S . Si d_n est supérieur à S alors les deux points matériels sont libres. Si d_n est inférieur à S alors les deux points matériels sont en interaction visqueuse de viscosité z .

$$\text{si } d_n > S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow 0 \quad (1.15)$$

$$\text{si } d_n < S \quad \vec{F}_n^{12} \leftarrow -z \left(\frac{d_n - d_{n-1}}{T_e} \right) \vec{u}_n^{12}$$

e. La butée viscoélastique

Dans cette fonction d'interaction, les variables d'entrée sont à la fois la position et la vitesse des points reliés par l'interaction. La force générée est donnée par la relation (1.12). Cette interaction est la mise en parallèle d'une interaction de butée élastique de raideur k , de seuil S et d'une viscosité non-linéaire de viscosité z et de même seuil S .

Autres fonctions d'interaction

D'autres fonctions d'interaction intégrés ont été modélisés. Ils correspondent à des propriétés plus complexes. Il s'agit essentiellement de l'interaction frottement sec et de l'interaction plastique. Pour davantage de précision voir [Jim 93].

1.5.6. CONCLUSION

En pratique le système *Cordis-Anima* permet effectivement de modéliser une très grande variété d'objets. Il s'agit aussi bien d'objets déformables et très déformables que d'objets structurés rigides articulés ou non. En particulier, les prototypes de chacune des classes définies sur la figure 1.1 (cristal, marionnette, horloge, véhicule, tissus, pâtes, liquides, sables, fumées etc.) ont pu être modélisés grâce à ce même modéleur. Cet ensemble d'objets réalise un échantillonnage de l'espace des objets à modéliser.

Les notions et les principes étudiées dans ce travail visent les modèles basés sur la physique du point. Tous ont été réalisés avec le système *Cordis-Anima*.

CHAPITRE 2

LA MODÉLISATION PHYSIQUE MULTI-ÉCHELLE

Ce chapitre ainsi que le chapitre suivant présentent des pré requis pour la modélisation d'objets très déformables. Nous allons voir que la modélisation d'objets très déformables implique la modélisation de phénomènes à de différentes échelles. Or la modélisation à petite échelle (temporelles, spatiales, énergétiques etc.) , sur de grandes étendues (temporelles, spatiales, énergétiques) nécessite le traitement de très grandes quantités d'informations et par conséquent est très coûteuse. Nous verrons qu'il peut s'avérer intéressant, du point de vue scientifique ou technique de modéliser un même objet par plusieurs modèles autonomes mais couplés chacun produisant des signaux à une échelle temporelle, spatiale ou énergétique spécifique.

2.1. DE L'OBJET AU SIGNAL

2.1.1. L'OBJET

Il est impossible de modéliser intrinsèquement un objet réel en général et un objet très déformable en particulier. La raison en est qu'un observateur, même doté de tous les instruments, aussi perfectionnés soient-ils ne peut jamais appréhender un objet en soi. Il peut seulement percevoir les *phénomènes* (visuels, vibratoires, dynamiques) que cet objet produit. Il en résulte que la modélisation d'un objet X consiste à produire les phénomènes produits par l'objet X, et l'évaluation du modèle consiste nécessairement en une comparaison des phénomènes réels et des phénomènes produits par le modèle.

Un *phénomène*, par définition, est une entité susceptible d'être perçue. Il implique donc l'existence d'un capteur (un capteur naturel comme nos sens, ou un capteur artificiel comme un instrument). Un capteur n'est pas un observateur neutre. Il est lui-même un objet avec des propriétés physiques spécifiques. Il ne peut être sensible qu'à un nombre limité de phénomènes produits par notre environnement. Ainsi, les phénomènes que nous pouvons connaître dépendent des capteurs dont nous disposons.

2.1.2. LE SIGNAL

Un phénomène a un effet sur le capteur. Pour quantifier un phénomène, on peut comparer l'effet qu'il produit sur un capteur avec l'effet produit sur le même capteur par un phénomène de référence. Le résultat de cette comparaison est un nombre. L'ensemble de ces nombres produits au cours du temps et/ou de l'espace est un *signal* temporel et/ou spatial, i.e. une fonction $s(x,y,z,t)$ du temps et de l'espace. Dans le cadre de ce travail, nous aurons affaire seulement à des signaux $X(t)$ de position et $F(t)$ de force en fonction du temps, ainsi que des champs $V(x,y,z,t)$ et des intensités lumineuses $I(x,y,t)$ en fonction du temps et de l'espace.

Parmi les entités évoquées ci-dessus, le phénomène est la seule entité que nous puissions percevoir avec nos sens, et le signal est la seule entité sur laquelle nous puissions mener une analyse quantitative. L'ordinateur seul ne peut produire que des signaux. Pour produire des phénomènes, l'ordinateur doit être équipé d'effecteurs.

2.2. LA NOTION D'ÉCHELLE

2.2.1. L'ÉCHELLE D'UN SIGNAL

Un signal $s(X,t)$ peut être caractérisé, à chaque instant et en chaque point par une fréquence spatiale $F(X)$, par une fréquence temporelle $F(T)$ et par une puissance $s^2(X,t)$. Sur une étendue temporelle et/ou spatiale finie, un signal peut être caractérisé par un spectre spatial $[F(X)_{\min}, F(X)_{\max}]$, un spectre temporel $[F(T)_{\min}, F(T)_{\max}]$, et par l'intervalle $[\Delta s^2_{\max}, \Delta s^2_{\min}]$ que nous appellerons, par commodité de langage "le spectre énergétique" du signal. Δs^2_{\max} est le carré de la variation maximale du signal, et Δs^2_{\min} le carré de la variation minimale du signal. L'échelle (temporelle, spatiale, énergétique) d'un signal est donnée respectivement par son spectre temporel, spatial, et énergétique. Dans la suite, la notion de l'échelle pour le signal nous permettra de définir celle de l'échelle pour d'autres entités produisant ou recevant des signaux : des capteurs, des effecteurs, des modèles numériques.

2.2.2. L'ÉCHELLE DE CAPTEURS/EFFECTEURS

Les capteurs sont des objets physiques ayant leurs propriétés spécifiques (par exemple une inertie, un facteur d'amortissement, une précision etc.). Et le signal produit par ce capteur dépend, d'une part du phénomène incident et d'autre part des propriétés du capteur. En deçà de certaines limites, le signal est une bonne image du phénomène observé. Au delà de ces limites les propriétés du capteur deviennent prépondérantes par rapport au phénomène incident. Ces limites peuvent être exprimées par les caractéristiques du signal lui-même : dans le domaine temporel un capteur peut être caractérisé par une fréquence minimale et une fréquence maximale (une rapidité maximale). L'intervalle résultant est la *bande passante temporelle* du capteur. Dans le domaine spatial, un capteur peut être caractérisé par une fréquence minimale (une étendue spatiale) et une fréquence maximale (précision spatiale). L'intervalle résultante est la *bande passante spatiale* du capteur. Dans le domaine énergétique, le capteur est caractérisé par une variation minimale (précision dans les valeurs du signal) et une variation maximale du signal (au delà de laquelle on peut avoir saturation ou destruction). L'intervalle entre le carré de ces deux grandeurs sera la *bande passante énergétique* du capteur, alors que l'intervalle en décibels sera la *dynamique* du capteur. Ces bandes passantes déterminent l'échelle du capteur.

Le raisonnement que nous avons effectué pour les capteurs transformant un phénomène en signal est également valable pour les effecteurs transformant un signal en phénomène sensible. L'échelle d'un effecteur est déterminée par celle des signaux qu'il peut transformer en phénomènes sensibles. Elle est caractérisée par des bandes passantes temporelle, spatiale et énergétique.

2.2.3. L'ÉCHELLE D'UN MODÈLE

L'ordinateur seul, quelque soit le modèle qu'il implémente, ne peut produire que des signaux (des ensembles de nombres). Comme pour les capteurs/effecteurs, l'échelle d'un modèle est définie par le nombre de signaux indépendants et par l'échelle de chacun de ces signaux.

2.2.3.1. Le nombre de signaux indépendants (le nombre de ddl)

Un modèle peut produire un ou plusieurs signaux. Considérons un modèle produisant plusieurs signaux et prenons un sous-ensemble de n signaux ($n > 1$). Si, en un point de l'espace-temps, la valeur d'aucun de ces signaux ne peut être entièrement déterminée par la valeur des $n-1$ autres signaux, alors ces n signaux sont dits *indépendants entre eux*. (Il est à noter que n signaux peuvent être indépendants entre eux, mais néanmoins fortement

corrélés.) Parmi l'ensemble des signaux produits par un modèle, le plus grand ensemble⁷ de signaux indépendants entre eux contient m signaux. m sera appelé le *nombre de signaux indépendants produits* par le modèle, ou encore, de manière équivalente, le *nombre de degrés de liberté* du modèle.

L'échelle d'un modèle dépend beaucoup de son nombre de degrés de liberté. Dans la suite, nous ne prendrons en considération que les signaux indépendants. Les paragraphes suivants s'intéressent à la relation entre l'échelle du modèle et celle de chaque signal produit par ce modèle.

2.2.3.2. Le système {ordinateur, capteurs, effecteurs}

Comme nous l'avons dit, l'ordinateur seul ne peut produire que des signaux. Or dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à la production d'images, de sons, de gestes et de mouvements qui sont, non pas des signaux, mais des phénomènes sensibles. L'ordinateur ne peut produire ces phénomènes que s'il est associé à des effecteurs (écran, haut-parleur, moteur etc). D'autre part l'observation et l'évaluation de ces phénomènes sensibles implique l'emploi de capteurs (éventuellement nos capteurs naturels). Donc le système que nous devons prendre en compte est composé, non seulement de l'ordinateur, mais aussi de ses capteurs et effecteurs, et des capteurs de l'observateur.

Dans ce cas, la simulation d'un modèle met en jeu plusieurs types de signaux : *des signaux d'entrée* provenant d'un capteur (C_{ordi}), les *signaux de sortie* destinés à un effecteur (E_{ordi}), et les *signaux intermédiaires* qui ne sont pas directement liés à des transducteurs. Les signaux d'entrée ont un spectre appartenant à la bande passante du capteur. Les signaux de sortie ont a priori un spectre quelconque, mais l'effecteur a une bande passante finie et effectue un filtrage de ce signal. Ces phénomènes sensibles sont destinés à un observateur équipé de capteurs (C_{obs}) (éventuellement nos capteurs naturels) qui ont également une bande passante finie et qui effectuent un second filtrage sur les phénomènes modélisés.

Ainsi, dans les signaux de sortie, seule la composante appartenant à la fois à la bande passante de E_{ordi} et de C_{obs} peuvent être effectivement perçus.

2.2.3.3. Relation entre l'échelle du modèle et celle des signaux

Étant donné un signal d'entrée $E_i(j\omega)$ et un autre signal $S_k(j\omega)$ (qui est, soit un signal de sortie soit un signal intermédiaire) généré par le modèle, on peut définir une fonction de transfert $T_{ik}(j\omega) = S_k(j\omega)/E_i(j\omega)$ et en déduire une bande passante⁸. La réunion de toutes ces bandes passantes définit *la bande passante globale* du modèle. C'est de cette bande passante que dépend l'échelle du modèle.

En conclusion l'échelle d'un modèle est entièrement définie par le nombre de signaux indépendants et par la bande passante de tous les signaux qu'il produit. En pratique, nous sommes souvent amenés à réduire volontairement la bande passante des signaux (et donc du modèle), pour que les signaux de sortie puissent engendrer des phénomènes perceptibles (i.e. soient conformes aux bandes passantes des transducteurs). C'est ce que nous allons développer au paragraphe suivant.

⁷ Un ensemble de signaux est plus grand qu'un autre s'il contient un nombre plus grand de signaux.

⁸ Lorsqu'il n'y a pas de signal d'entrée, on peut tout de même définir des bandes passantes en considérant l'entrée comme un signal constant. La bande passante est alors le spectre de $S_k(j\omega)$

2.2.3.4. Relation entre l'échelle du modèle et celle des transducteurs

L'ordinateur seul peut produire tous les signaux discrets. Pour les simulations en temps différé, il n'est limité que par la capacité de sa mémoire, et pour les simulations en temps-réel, il est limité surtout par sa vitesse de calcul. Donc, en principe, l'ordinateur considéré comme générateur de signaux a une bande passante très large. Mais en pratique, dans le cadre d'une association avec les transducteurs E_{ordi} et C_{obs} , toutes les composantes des signaux de sortie ne sont pas des composantes utiles car elles ne seront pas perçues par l'observateur. En effet nous avons vu (cf. § 2.2.3.2) que les seules composantes perçues sont les composantes comprises dans la bande passante de ces deux transducteurs. Donc en pratique, on ne cherchera pas à produire que des signaux de sortie appartenant à ces deux bandes passantes.

Cette limitation concerne les signaux de sortie. Elle ne s'applique pas nécessairement aux signaux intermédiaires. En effet, un signal de sortie dont le spectre est compris dans la bande passante des transducteurs, peut avoir été produit par des signaux intermédiaires à une échelle très différente. C'est par exemple le cas dans la modélisation des phénomènes *émergents*. Il s'agit de phénomènes observés à grande échelle mais qui ne peuvent être analysés et physiquement modélisés qu'à des échelles inférieures.

Voici quatre exemples :

- 1/ Les avalanches dans les amas de sable peuvent être modélisés comme le résultat d'interactions entre éléments d'échelle plus petite que celle de l'amas [LHM 95].
- 2/ Les surfaces solides présentent quelquefois des anisotropies microscopiques invisibles mais qui, sous l'effet de la lumière, produisent des effets parfaitement visibles à grande échelle. Ce phénomène a été modélisé dans [PF 90].

Le troisième et le quatrième exemple concernent une simulation d'objets physiques produisant des images animées.

- 3/ Dans le domaine temporel, pour produire des séquences animées à 25 Hz, il est souvent nécessaire de faire la simulation à des fréquences beaucoup plus élevées.
- 4/ Enfin dans le domaine énergétique : la position des objets sur une grille de pixels (i.e. le signal de sortie) est typiquement codée sur 32 voire 16 bits. Mais la simulation de ces objets exige que, dans un premier temps, ces positions soient codées par des flottants double précision (64 bits) sous peine de comportements incohérents.

Dans tous les cas, la modélisation de ces phénomènes nécessite la production de signaux intermédiaires à spectre large, éventuellement plus large que la bande passante des transducteurs. Il s'ensuit que la bande passante d'un modèle est au moins aussi large que le spectre de ses signaux de sortie, mais elle peut être plus large.

En conclusion, l'échelle d'un modèle dépend d'une part du nombre de signaux indépendants et d'autre part de la réunion des spectres de ces signaux (la bande passante globale du modèle). Pour connaître une limite inférieure de cette bande passante, nous prendrons le spectre des signaux de sortie. Si on considère que ces signaux devront produire tous les phénomènes que l'effecteur puisse produire et que l'observateur puisse percevoir, alors le spectre des signaux de sortie est déterminée par la bande passante des transducteurs E_{ordi} et C_{obs} .

2.2.4. SPECTRES NUMÉRIQUES ET BANDES PASSANTES NUMÉRIQUES

Ce que nous avons dit au sujet des signaux, transducteurs et modèles en général, est vrai pour les entités numériques en particulier. Mais les limites de bande passante que nous avons évoquées ci-dessus sont dues aux propriétés physiques des transducteurs et des modèles. Le caractère discret des signaux, et donc des transducteurs et des modèles, implique d'autres limitations pour l'échelle de ces entités. Dans cette section, nous nous intéresserons à ces limites.

Les signaux numériques sont caractérisés par une fréquence d'échantillonnage temporelle et des fréquences d'échantillonnage spatiales : $F_{\text{ech}}^{(T)}$, $F_{\text{ech}}^{(X)}$. (X représente x, y et z) ainsi que par des dimensions spatiales finies ΔX et une durée ΔT également finie. Enfin, les nombres y sont codés sur un nombre fini de bits : nb_bits . Les relations liant ces grandeurs à l'échelle de ces signaux sont les suivantes :

α . Les fréquences minimales que l'on puisse produire dépendent de la durée totale du signal et de la taille spatiale du signal :

$$F_{\text{min}}^{(T)} > \frac{1}{\Delta T} \quad F_{\text{min}}^{(X)} > \frac{1}{\Delta X} \quad (2.1)$$

β . D'autre part, le théorème de Shannon impose :

$$F_{\text{ech}}^{(T)} > 2 F_{\text{max}}^{(T)} \quad F_{\text{ech}}^{(X)} > 2 F_{\text{max}}^{(X)} \quad (2.2)$$

γ . Enfin le nombre fini de bits limite la dynamique :

$$nb_bits = E \left(\log_2 \frac{\Delta s_{\text{max}}}{\Delta s_{\text{min}}} \right) + 1 \quad (2.3)$$

où la fonction $E(x)$ représente la fonction valeur entière. De ces relations il résulte que, pour un signal numérique caractérisé par $\{F_{\text{ech}}^{(T)}, F_{\text{ech}}^{(X)}, \Delta T, \Delta X$ et $nb_bits\}$ la fréquence temporelle, la fréquence spatiale, et la valeur du rapport $\Delta s_{\text{max}}/\Delta s_{\text{min}}$ appartiennent respectivement aux trois intervalles de (2.4).

$$\left[\frac{1}{\Delta T}, \frac{F_{\text{ech}}^{(T)}}{2} \right] \left[\frac{1}{\Delta X}, \frac{F_{\text{ech}}^{(X)}}{2} \right] [1, 2^{nb_bits} - 1] \quad (2.4)$$

Ces trois intervalles constituent le *spectre numérique* d'un signal numérique. Le spectre d'un signal est nécessairement inclus dans son spectre numérique.

Un modèle numérique est également caractérisé par les grandeurs $\{F_{\text{ech}}^{(T)}, F_{\text{ech}}^{(X)}, \Delta T, \Delta X$ et $nb_bits\}$. Tous les signaux produits par ce modèles sont nécessairement caractérisés par ces mêmes grandeurs $\{F_{\text{ech}}^{(T)}, F_{\text{ech}}^{(X)}, \Delta T, \Delta X$ et $nb_bits\}$. Donc le spectre numérique de ces signaux est donné par (2.4). Ces trois intervalles caractérisent le modèle. On les appellera les *bandes passantes numériques* du modèle. De même que pour les signaux, la bande passante dynamique d'un modèle est nécessairement incluse dans sa bande passante numérique. Enfin ce que nous avons évoqué pour les modèles numériques peut être dit pour les transducteurs numériques⁹.

A ce stade, nous considérons que la notion d'échelle est définie pour toutes les entités que nous aurons à étudier. A présent nous nous attacherons à montrer le lien entre l'échelle de ces entités et la quantité d'information qu'elle véhiculent.

⁹ Un transducteur numérique est associé à un convertisseur (analogique-numérique ou numérique-analogique)

2.3. QUANTITÉ D'INFORMATION, LARGEUR DE SPECTRE ET LARGEUR DE BANDE PASSANTE

Nous allons voir que plus le spectre d'un signal est large et plus la quantité d'information véhiculée par ce signal est grande. De même plus la bande passante d'un modèle est large, et plus la quantité d'information qu'il peut générer est grande.

2.3.1. PRINCIPE

2.3.1.1. L'information véhiculée par un signal

Un signal à spectre spatial large signifie que ce signal présente des détails spatiaux fins sur de grandes étendues. Un signal à spectre temporel large signifie que ce signal peut présenter des évolutions très rapides sur une longue durée. Enfin, un signal à spectre énergétique large signifie que le signal aura une valeur très précise dans les petites variations comme dans les grandes variations. Ainsi la quantité d'information véhiculée par un signal est une fonction croissante de la largeur de son spectre. On peut avoir une limite supérieure I de cette quantité d'information par la relation (2.5)

$$I = \frac{F_{\max}^{(T)} F_{\max}^{(X)}}{F_{\min}^{(T)} F_{\min}^{(X)}} \log_2 \left(\frac{\Delta s_{\max}}{\Delta s_{\min}} \right) \quad (2.5)$$

Dans le cas de plusieurs signaux, il faut prendre en compte le nombre de signaux indépendants nb_sign_indp . Une limite supérieure de la quantité d'information véhiculée est donnée par (2.6)

$$I = \sum_{i=1}^{nb_sign_indp} \frac{F_{\max i}^{(T)} F_{\max i}^{(X)}}{F_{\min i}^{(T)} F_{\min i}^{(X)}} \log_2 \left(\frac{\Delta s_{\max i}}{\Delta s_{\min i}} \right) \quad (2.6)$$

2.3.1.2. L'information produite par un modèle

De même que pour les signaux, les grandeurs $\{F_{\text{éch}}^{(T)}, F_{\text{éch}}^{(X)}, \Delta T, \Delta X \text{ et } nb_bits\}$ caractérisant un modèle définissent une limite supérieure pour l'information que le modèle peut générer. Cette quantité maximale d'information dépend du nombre de signaux, du nombre d'échantillons dans chaque signal et du nombre de bits dans chaque échantillon :

$$I_{\max} = nb_sign_indp \cdot nb_éch^{(X)} \cdot nb_éch^{(T)} \cdot nb_bits$$

$$I_{\max} = nb_sign_indp \cdot F_{\text{éch}}^{(X)} \Delta X \cdot F_{\text{éch}}^{(T)} \Delta T \cdot nb_bits \quad (2.7)$$

La relation (2.7) lie la quantité d'information qu'un modèle peut générer à la largeur de sa bande passante numérique et à son nombre de ddl. D'après les relations (2.1), (2.2) et (2.3) on montre que la grandeur I de la relation (2.6), majorant la quantité d'information portée par les signaux est nécessairement inférieure à la grandeur I_{\max} de la relation (2.7). Elle exprime le fait que la somme des informations effectivement générées par les signaux (2.6) est inférieure à la quantité totale d'informations que ce modèle peut générer.

2.3.2. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Ces représentations graphiques nous aideront à comparer la quantité d'information véhiculée par les signaux et la quantité d'information que peut produire le modèle. Nous

verrons que la valeur relative de ces deux grandeurs sera déterminante pour connaître la pertinence de la modélisation multi-échelles.

Dans un premier temps, nous étudierons le cas de signaux temporels $s(t)$ et des modèles qui produisent des signaux temporels. Dans un deuxième temps, nous intégrerons les signaux spatio-temporels $s(t,X)$

2.3.2.1. Cas des signaux temporels

Considérons un espace tridimensionnel (temps, énergie, degrés de liberté) ou (T,E,ddl) . Dans cet espace, un modèle numérique peut être représenté par un parallélépipède dont les dimensions sont respectivement : $F^{(T)}_{ech} \Delta T/2$, nb_bits et nb_sign_indp . La quantité d'information que ce modèle peut générer est représentée par le volume de ce parallélépipède (voir la relation (2.7)). Ce volume est également une fonction croissante de la largeur de la bande passante du modèle et de son nombre de ddl. (Cf. figure 2.1)

Un signal temporel scalaire est caractérisé par $F^{(T)}_{min}$, $F^{(T)}_{max}$, Δs^2_{min} et Δs^2_{max} . Dans un espace (T,E,ddl) on peut représenter un signal par un volume d'épaisseur $ddl=1$, parallèle au plan (T,E) et dont le volume représente la quantité d'information véhiculée par le signal. Ce volume est encadré par un parallélépipède d'épaisseur $ddl=1$ dont les dimensions sont respectivement $F^{(T)}_{max}/F^{(T)}_{min}$ et $\log_2 \Delta s_{max} - \log_2 \Delta s_{min}$ et 1. Le volume de ce parallélépipède représente la grandeur I de la relation (2.6) majorant la quantité d'information que ce signal peut véhiculer. Cf. figure 2.1.

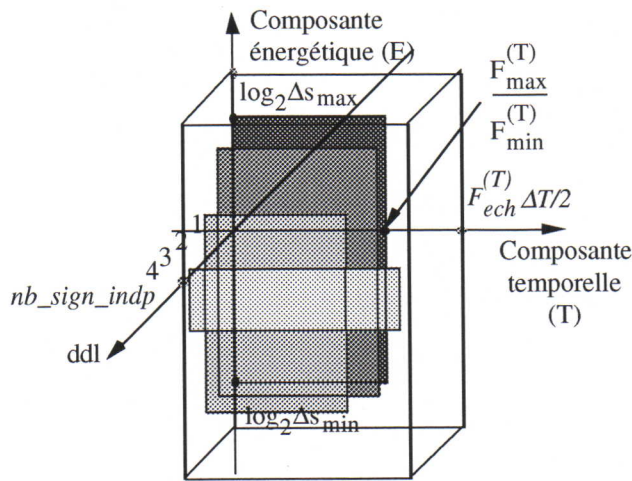


figure 2.1 Un modèle M représenté par un parallélépipède P_M dont le volume représente la quantité maximale d'information qu'il peut produire. Ses dimensions sont écrites en italique. Ce modèle génère quatre signaux indépendants ($nb_sign_indp=4$) représentés chacun par un volume d'épaisseur $ddl=1$ respectivement dans les plans $ddl=1, ddl=2, \dots, ddl=4$. Ces volumes sont encadrés par des parallélépipèdes représentés en gris. Seules les dimensions du premier signal sont indiquées (style standard)

Soit un modèle M représenté par un parallélépipède P_M et soient les signaux S_i produits par ce modèle représentés par des parallélépipèdes P_{S_i} d'épaisseur 1. D'après les relations (2.1), (2.2) et (2.3) tous les parallélépipèdes P_{S_i} sont inclus dans P_M . Et d'après la relation (2.7) la somme des volumes des P_{S_i} est inférieure au volume total de P_M . (Cf. figure 2.1)

Nous regrouperons souvent les signaux en groupes de signaux ayant les mêmes caractéristiques $F^{(T)}_{min}$, $F^{(T)}_{max}$, Δs^2_{min} et Δs^2_{max} . Dans ce cas, chaque groupe pourra être représenté par un parallélépipède dont les dimensions seront respectivement $F^{(T)}_{max}/F^{(T)}_{min}$, $\log_2 \Delta s_{max} - \log_2 \Delta s_{min}$ et le n_ind , le nombre de signaux indépendants dans le groupe. De même que pour les

signaux à 1 ddl , tous les parallélépipèdes-signaux doivent être inclus dans le parallélépipède-modèle, et la somme des volumes des parallélépipèdes-signaux doit être inférieure au volume total du parallélépipède-modèle.

2.3.2.2. Cas des signaux spatio-temporels

Tous les résultats vus précédemment sont valables, sauf que dans le cas présent, il faut travailler dans un espace quadri-dimensionnel (temps, espace, énergie, degrés de liberté) ou (T,X,E,ddl).

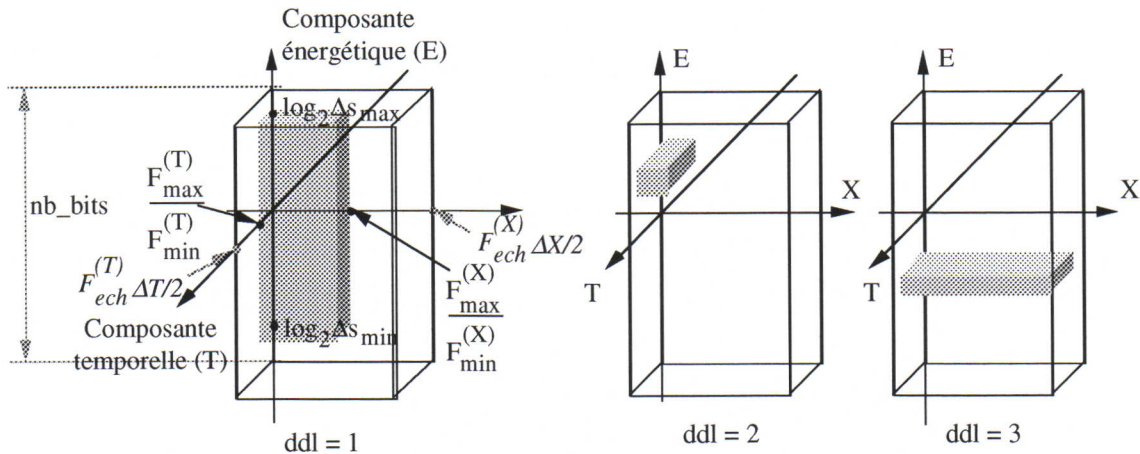


figure 2.2 Un modèle générant trois signaux spatio-temporels. Chaque espace correspond à une valeur de la variable ddl et à un des trois signaux. Les signaux sont représentés par des parallélépipèdes gris dont les dimensions sont indiquées pour le premier signal.. Le modèle, lui, est représenté par les trois parallélépipèdes noirs, qui sont les projections du parallélépipède 4D dans les espaces ddl=constant.

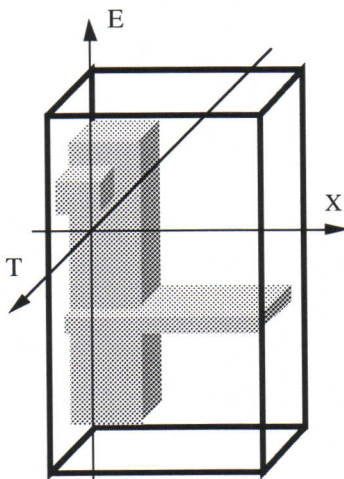


figure 2.3 Le même modèle que celui de la figure 2.2, mais où les trois espaces (T,X,E) ont été superposés. Le parallélépipède aux traits gras représente un parallélépipède 4D dont le volume est le triple du parallélépipède 3D.

Les signaux sont représentés par des volumes dans les espaces d'équation (ddl=constant) c'est à dire dans des espaces (T,X,E). Ces volumes sont encadrés par des parallélépipèdes dont les dimensions sont respectivement $F_{\max}^{(T)}/F_{\min}^{(T)}$, $F_{\max}^{(X)}/F_{\min}^{(X)}$ et $\log_2 \Delta s_{\max} - \log_2 \Delta s_{\min}$. Le volume de chaque parallélépipède est de 1 (cf. relation (2.6)). C'est une limite supérieure de l'information que ce signal véhicule. Un modèle spatio-temporel est représenté par un parallélépipède 4D dont les dimensions sont respectivement : $F_{\text{ech}}^{(T)} \Delta T / 2$, $F_{\text{ech}}^{(X)} \Delta X / 2$, nb_bits et nb_sign_indp . La quantité d'information que ce modèle peut générer est donnée par le volume de ce parallélépipède 4D (voir la relation (2.7)).

Soit un modèle M représenté par un parallélépipède P_M en 4D et soient les signaux S_i produits par ce modèle représentés par des parallélépipèdes P_{S_i} en 3D. D'après les relations (2.1), (2.2) et (2.3) tous les parallélépipèdes P_{S_i}

sont inclus dans P_M . Et d'après la relation (2.7) la somme des volumes des P_{S_i} est inférieure au volume total de P_M . Pour les représentations graphiques, on pourra représenter ce parallélépipède 4D par un nombre fini (nb_sign_indp) de parallélépipèdes dans des espaces (T,X,E) (cf. figure 2.2)

Cependant, le plus souvent on représentera ces parallélépipèdes dans le même espace (T,X,E) en les superposant. On les représentera par des traits gras et on gardera à l'esprit

qu'il s'agit d'un parallélépipède 4D dont le volume est égal au volume du parallélépipède 3D multiplié par nb_sign_indp . (cf. figure 2.3)

En conclusion, étant données ces relations entre échelle et quantité d'information accompagnées des représentations graphiques associées, nous pouvons estimer l'adéquation entre la quantité d'information produite par un modèle d'objet et la quantité d'information véhiculée par ses signaux.

2.4. LA MODÉLISATION PHYSIQUE MULTI-ÉCHELLES

Nous allons voir (§ 2.4.1 et § 2.4.2 respectivement) le cas d'objets produisant des phénomènes à des échelles très différentes et celui d'objets à grand nombre de degrés de liberté. Dans le premier cas, il faudra produire des signaux à des échelles très différentes et dans le second cas, il faudra produire un grand nombre de signaux. Dans les deux cas, le modèle sera caractérisé par une large gamme d'échelles et devra traiter une grande quantité de nombres (cf. § 2.3). Quelque soit la complexité des traitements qu'effectue le modèle sur ces données, la manipulation de ces grandes quantités de nombre rend ces modèles coûteux.

Quelquefois les signaux que nous cherchons à produire véhiculent effectivement une très grande quantité d'information. L'emploi d'un modèle à large bande s'avère alors inévitable. Mais souvent nous nous intéressons en fait à plusieurs signaux à spectre étroit mais à des échelles différents. La réunion des spectres présente certes des limites inférieure et supérieure éloignées, mais les signaux véhiculent globalement peu d'information. Donc si l'objet est modélisé par un seul modèle, (i.e. si les signaux sont produits par le même modèle) la bande passante numérique de ce modèle devra être large, et le modèle sera coûteux.

Nous verrons (§ 2.4.3.) que dans certains cas, il est possible et très intéressant de modéliser l'objet qui produit ces signaux, non pas par un seul modèle à large bande passante, mais par plusieurs modèles à bande passante étroite physiquement couplés.

2.4.1. OBJETS PRODUISANT DES PHÉNOMÈNES À DIFFÉRENTES ÉCHELLES

2.4.1.1. La difficulté de la modélisation mono-échelle

Pour modéliser de tels objets, il faut produire des signaux à des échelles différentes. Un modèle mono-échelle (caractérisé par une seule fréquence d'échantillonnage temporelle, spatiales, et par un même nombre de bits) produisant plusieurs signaux doit être conforme aux échelles de tous ces signaux. Temporellement, ce modèle doit être à l'échelle du signal le plus rapide et le plus long. Spatialement, ce modèle doit être à l'échelle du signal le plus fin et le plus étendu. Énergétiquement, ce modèle devra décrire toutes les plages de variation, les grandes ainsi que les petites avec la même précision, qui sera celle du signal le plus précis. Enfin si, de plus, ce modèle doit produire un grand nombre de signaux indépendants, alors tous ces signaux sont a priori produits avec les mêmes caractéristiques temporelles, spatiales et énergétique, et cela, même lorsque la plupart de ces signaux sont à spectre très étroit.

2.4.1.2. L'exemple les modèles multi-sensoriels

Pour modéliser un objet visible, audible et manipulable il faut avoir recours à des modèles multi-sensoriels produisant des images, des sons et des gestes, qui sont des signaux à des échelles très différentes. Pour évaluer l'échelle de ces modèles, nous adopterons le raisonnement développé en conclusion de la section § 2.2.3. En réalité nous chercherons une borne inférieure de la bande passante du modèle, donnée par le spectre de ses signaux de sortie. Si on considère que ceux-ci auront à produire a priori tous les phénomènes que les effecteurs puissent produire et les capteurs puissent percevoir, alors

le spectre des signaux de sortie est déterminé par la bande passante des capteurs et effecteurs. Les sous-paragraphes suivants présentent précisément quelques éléments d'information sur les performances de notre perception et des effecteurs disponibles dans le cadre de ce travail.

Quelques résultats expérimentaux sur notre perception

Nos connaissances sur la perception évoluent au cours de l'histoire, parallèlement à l'évolution de la technologie des effecteurs. Pendant longtemps, la bande passante du système visuel a été évaluée à environ 15 Hz. Pourtant les fréquences d'échantillonnage typiques utilisées pour l'image animée (cinéma, vidéo, etc.) n'ont cessé de progresser (18 Hz, 25 Hz, 50 Hz). Dans les simulateurs de vol et les simulateurs de conduite, les images se suivent à une fréquence de 60 Hz qui est le point de fusion critique, i.e. la fréquence à partir de laquelle une lumière clignotante paraît continue [Norman 80]. Mais pour lutter contre "le mal des simulateurs" imputé aux difficultés de synchronisation geste-image, cette fréquence de visualisation est destinée à être augmentée à 72 Hz. Enfin il s'avère que jusqu'à une fréquence de 300 Hz la différence reste sensible. Et la recherche suit son cours, pour la vision, mais aussi pour l'audition et le geste, dans le domaine temporel, spatial et énergétique.

Dans le domaine spatial, il a été observé qu'une surface discrète où chaque unité de discrétisation occupe un angle visuel inférieur 22' 50" horizontalement et 28' 12,5" verticalement est perçue comme une surface continue [Corn 70]. Il en résulte qu'à une distance de 46 centimètres (distance typique entre un observateur et un écran) le détail observable le plus fin mesure 10^{-5} mètre. Il est à noter que la taille du pixel (de l'ordre de 10^{-4} mètre) est sensiblement en deçà de cette limite.

Pour le son, on considère que les harmoniques les plus aiguës que l'oreille puisse percevoir se trouvent en deçà de la fréquence de 22 kHz.

Le geste est un cas particulier. En effet, la perception gestuelle met en jeu une interaction entre l'homme et l'objet perçu, alors que dans la vision et l'ouïe la perception est plutôt passive. Aussi, faut-il distinguer la bande passante du "geste libre" et celle du "geste couplé" a priori plus élevée. Pour le geste libre, diverses valeurs ont été avancées. Elles s'étendent de 25 Hz jusqu'aux fréquences de 200 Hz. Pour le geste couplé, on montre que cette bande passante est supérieure à 1 kHz [Florens 78]. Il est difficile de distinguer ce qui est du au sens tactile et au sens kinesthésique. Dans les doigts le seuil de détection d'un déplacement est de 10 μ [Winter 90].

Le cas de l'image animée

L'image animée est au centre des études menées dans ce travail. La perception de l'image et la perception du mouvement sont très liés. La perception de l'un influence sensiblement la perception de l'autre [Hab 93]. Pourtant, tout deux sont caractérisés par des propriétés et des constantes très différentes.

L'image en mouvement fait intervenir d'une part des phénomènes qui adressent l'œil et qui ont trait à l'optique, et d'autre part des phénomènes qui adressent le geste et qui ont trait à la dynamique. Il a été montré [VS 90] [VS 91] que le processus de la perception du mouvement visuel est très lié au système moteur. Notamment la perception et l'évaluation de la vitesse d'un objet vu par l'œil implique des processus de type moteur [OB 93]. L'intervention des aires motrices dans la perception du mouvement a même été mise en évidence de manière physiologique [Pell 92]. Il semble donc que l'image en mouvement soit un cas particulier de phénomène multi-sensoriel.

Rappelons que la simulation d'objets manipulés par le geste nécessite une fréquence d'échantillonnage de l'ordre du kHz. Cependant il s'avère que même lorsque le geste

humain n'intervient pas dans la simulation, si l'on veut produire une grande variété de mouvements visuellement perceptibles, il faut avoir recours aux mêmes fréquences d'échantillonnage.

Les effecteurs (écrans, haut-parleurs, transducteurs gestuels)

La bande passante des effecteurs est généralement un compromis entre les connaissances sur la perception, et l'évolution des technologies. Dans ce travail, les caractéristiques des effecteurs sont les suivantes. Les supports de visualisation auront une fréquence temporelle limitée au standard vidéo de 25 Hz et auront une discrétisation en pixels carrés d'une dimension de 265,62 μ . La fréquence spatiale minimale, i.e. la taille maximale de l'image sera de 1280 x 1024 pixels (340 x 272 mm). Cependant, le standard vidéo actuel est de 768 x 576 pixels (204 x 153 mm). La luminosité de chaque pixel dépendra de trois composantes (rouge, verte, bleue) dont l'intensité sera exprimée chacun par un nombre entier entre 0 et 255. Ainsi chaque pixel peut avoir $256^3 \cong 16$ millions d'états différents.

Pour le son, nous nous en tiendrons au standard international actuel adopté pour l'échantillonnage du son numérique (44,1 kHz). Nous considérerons le signal sonore comme deux ou quatre signaux temporels (stéréo ou quadriphoniques). Quant à la dynamique, la simulation physique du son doit être faite par des nombres de 64 bits alors que le signal de sortie du modèle sera codé sur 16 bits.

En ce qui concerne le geste, le capteur-effecteur gestuel développé à l'ACROE (le TGR) est échantillonné à une fréquence de 1050 Hz. la précision de son déplacement est de 7 μ et l'amplitude maximale de déplacement est de 27 mm. Comme pour le son, la simulation physique du geste sera effectuée avec des nombres codés sur 64 bits, alors que le signal envoyé à l'effecteur sera, lui, codé sur 16 bits.

Nous avons vu que la fréquence d'échantillonnage temporelle que nécessite la simulation d'une grande variété de mouvements pour l'image est comparable à celle que nécessite le geste. De fait, la fréquence de simulation de l'ensemble des modèles présentés ici et de manière générale, de l'ensemble des modèles de l'ACROE sera de 1050 Hz ¹⁰.

En *Cordis-Anima*, les signaux produits sont du type X(t) et F(t). Ce sont des signaux temporels. Donc pour ces signaux, on ne pourra généralement pas parler de spectre spatial. Pour la production d'une image, nous attribuons un signal X(t) à chaque pixel (ou chaque ensemble de n^2 pixels) et nous obtenons ainsi un signal spatial caractérisé par un spectre spatial.

L'échelle d'un modèle multi-sensoriel

Le sous-paragraphe précédent nous donne le spectre des signaux de sortie d'un modèle multi-sensoriel. Dans ce sous-paragraphe, nous en déduisons la bande passante d'un modèle multi-sensoriel.

D'après la relation (2.7) la quantité d'information véhiculée est environ de 265 Moctets par seconde pour un signal visuel, 2,8 Moctets par seconde pour un son quadriphonique et 256 koctets par seconde pour un signal gestuel à 16 degrés de liberté. La somme des informations véhiculées par les signaux est donc environ de l'ordre de 270 Moctets par seconde. Si nous devons simuler séparément une séquence animée, un son et un geste, les nombres seraient codés sur 32 bits pour l'image et sur 64 bits pour le son et le geste. Donc les quantités d'information mises en jeu au niveau du signal de sortie seraient de

¹⁰ 1050 est un multiple de 25 Hz (pour l'image) et un sous multiple de 44 100 Hz (pour le son)

354 Moctets par seconde pour l'image, 113 Moctets par seconde pour le son et de 1 Moctet par seconde pour le geste, soit au total 468 Moctets d'information par seconde.

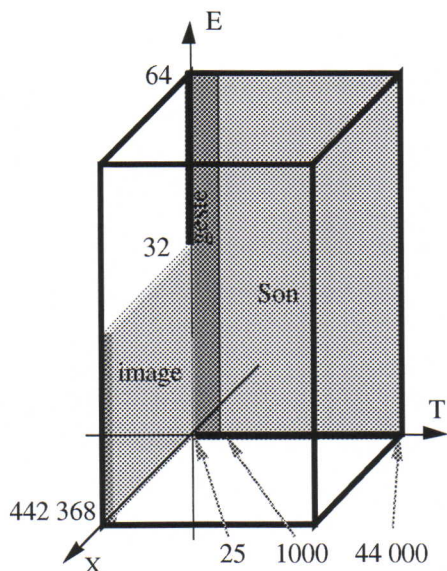


figure 2.4. Un modèle multi-sensoriel représenté par un parallélépipède 4D produisant un signal visuel représenté par un parallélépipède, un signal auditif et un signal gestuel représentés par deux parallélépipèdes d'épaisseur 1 (selon X)

A présent étudions le cas où ces signaux seraient produits par le même modèle. Nous avons vu (§ 2.4.1.1.) que la bande passante d'un modèle doit recouvrir le spectre de tous ses signaux. Ainsi un modèle multi-sensoriel (geste-son-image) devra être échantillonné temporellement à 44,1 kHz, spatialement à 10^{-4} mètres sur une surface de (204 x 153 mm) et énergétiquement les nombres doivent être codés sur 64 bits. D'après la relation (2.7) un tel modèle devrait produire pour chaque seconde de signal, quelques 1,25 Toctets d'information, ce qui représente une quantité d'information 3500 fois plus importante que la somme des informations à la sortie de chaque modèle pris séparément. Cette situation est graphiquement représentée sur la figure 2.4.

N B . Pour un son quadriphonique et pour un geste à 16 degrés de liberté, il faudrait donner à ces parallélépipèdes une épaisseur, respectivement de 4 et de 16 selon la composante ddl (non représenté sur la figure 2.4). D'autre part, par souci de clarté, les proportions entre les valeurs temporelles (25, 1000 et 44000) ont été quelque peu modifiées.

Pour l'image en mouvement, les modèles simulés séparément produisent 354 Moctets par seconde pour l'image et $3n.64$ Moctets pour un modèle de mouvement contenant n points matériels. Un modèle pouvant produire les deux signaux à la fois génère 28,3 Moctets d'information par seconde ce qui, comparé aux modèles séparés représente 80 fois plus d'information, si $n=1$ et 40 fois plus d'information si $n=5000$. Graphiquement la situation est presque la même que celle de la figure 2.4 si on fait abstraction du parallélépipède son.

On note que la presque totalité du volume de parallélépipède-modèle n'est pas occupé par les parallélépipèdes signaux. Cela signifie que ce modèle peut produire, non seulement les signaux visuels, auditifs et gestuels, non seulement des images en mouvement, mais également une très grande variété d'autres signaux qui ne nous intéressent pas (parmi lesquels des signaux de grande précision, à grande résolution temporelle et spatiale). Autrement dit, comme nous l'avons évoqué plus haut, ce modèle produit une quantité de nombre disproportionnée par rapport à la quantité d'information effectivement produite.

2.4.2. LES OBJETS À GRAND NOMBRE DE DDL

Pour les modèles d'objets à grand nombre de degrés de liberté, la situation est équivalente à celle des modèles multi-sensoriels. Pour modéliser des objets à grand nombre de degrés de liberté, et notamment des objets très déformables, nous devons avoir recours à des modèles produisant un grand nombre de signaux. Si ces signaux sont produits par un modèle mono-échelle alors ils devront être produits à l'échelle du signal dont le spectre est le plus large. Lorsque ces signaux sont non-corrélés, il y a peu de redondance entre

les signaux et la quantité d'information à produire peut effectivement être grande. Dans ce cas, le modèle devra nécessairement traiter une grande quantité de nombres. Cependant dans la plupart des cas, ces signaux sont corrélés et la quantité totale d'information est moindre. Ce fait est mis en évidence par la décomposition décrite au paragraphe suivant.

2.4.2.1. Signaux prototypes et signaux d'écart

Un ensemble de n signaux sont dits *indépendants entre eux* lorsqu'aucun d'eux ne peut être entièrement déterminé par une fonction des $n-1$ autres.

Soit un grand nombre N de signaux s_i ($i \in [1, N]$) indépendants entre eux. Ces signaux peuvent toujours être exprimés en fonction d'un petit nombre n de signaux dits *prototypes* σ_j ($j \in [1, n]$) moyennant des transformations mathématiques f_j , et moyennant N signaux d'écart δs_i :

$$\forall i \in [1, N] \quad s_i = f_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) + \delta s_i$$

Les signaux s_i sont indépendants donc les signaux d'écart ne peuvent pas être nuls. Par contre plus les s_i sont corrélés et plus la valeur des signaux d'écart pourra être faible et leur spectre énergétique pourra être étroit. De manière plus générale, les notions de signal prototype et de signal d'écart n'ont d'intérêt que si les signaux d'écart sont en grand nombre mais de spectre étroit et si les signaux prototypes sont en nombre faible, mais avec un spectre large. Ceci implique que les signaux s_i soient corrélés.

Prenons le cas de signaux temporels. Dans ce cas, en adoptant la représentation graphique de la figure 2.1, et en regroupant en deux parallélépipèdes, les volumes correspondant respectivement aux signaux prototypes et aux signaux d'écart, nous obtenons qualitativement la situation de la figure 2.5.

Dans ce cas, comme dans le cas des modèles produisant des signaux à spectre large, (Cf. § 2.4.1) si tous ces signaux devaient être produits par un seul modèle physique, alors ce modèle devra traiter une quantité d'information beaucoup plus grande que celle qui, en fin de compte sera produite par les signaux. En particulier, ce modèle pourra produire, non seulement les signaux que nous voulons obtenir, mais également une très grande variété de signaux très riches (à spectre large et à grand nombre de ddl) et qui ne nous intéressent guère.

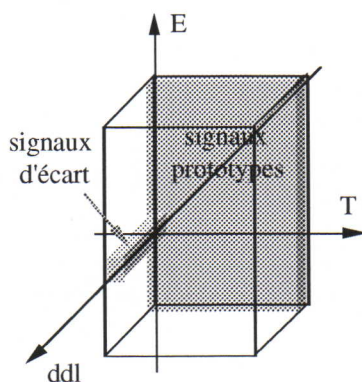


figure 2.5. Les signaux prototypes et les signaux d'écart représentés par des parallélépipèdes dans l'espace (T,E,ddl). Leur épaisseur (selon l'axe ddl) est respectivement de n et de N .

2.4.2.2. L'exemple de l'objet solide

Supposons que les signaux s_i ($i \in [1, N]$) représentent les mouvements de N points d'un objet solide en mouvement. Si cet objet est rigide, alors il a seulement 6 degrés de liberté de déplacement, donc parmi les signaux s_i , il n'y a que 6 signaux indépendants. Tous les autres signaux peuvent être déduites de ces 6 signaux. On peut considérer que ces 6 signaux sont des signaux prototypes et que les signaux d'écart sont nuls.

Pour un objet peu déformable les signaux s_i sont indépendants entre eux mais très corrélés. Si ce comportement est quasi-rigide, alors le mouvement global peut encore être décrit par 6 signaux prototypes auquel on devra ajouter de faibles signaux d'écart pour tenir compte des déformations

de l'objet. Pour des objets plus déformables, les signaux sont moins corrélés. On ne pourra plus utiliser seulement 6 signaux prototypes, sous peine d'avoir des signaux d'écart de valeur élevée.

En général, les signaux prototypes et les signaux d'écart, correspondent à des phénomènes se déroulant à des échelles différentes. Ainsi, dans les sections § 2.4.1 et § 2.4.2, nous avons certes distingué le cas des objets à grand nombre de degrés de liberté et celui des objets produisant des phénomènes à des échelles différentes. Mais en réalité, dans les deux cas, la problématique sous-jacente est la même.

2.4.3. LA MODÉLISATION PHYSIQUE MULTI-ÉCHELLES

Dans les deux sections précédentes (§ 2.4.1 et § 2.4.2) nous avons mis en évidence des cas d'objets pouvant être représentés par plusieurs signaux à spectre étroit mais à des échelles différentes.

La modélisation multi-échelles, par opposition à la modélisation mono-échelle consiste à produire des signaux non pas par un seul modèle à large bande passante numérique, mais par un ensemble de modèles autonomes mais couplés, chaque modèle étant caractérisé par une bande passante numérique plus étroite, par une échelle spatiale, temporelle, énergétique spécifique, et par un nombre de degrés de liberté propre.

Graphiquement, la figure 2.6.a représente l'approche du modèle mono-échelle et la figure 2.6.b., celle de la modélisation multi-échelles.

2.4.3.1. Les cas où la modélisation multi-échelle est possible

La possibilité de modéliser un objet par plusieurs modèles séparés ne dépend pas seulement des quantités d'information en jeu, mais aussi et surtout de la signification physique que l'on peut attribuer aux relations entre les phénomènes observés à une échelle donnée.

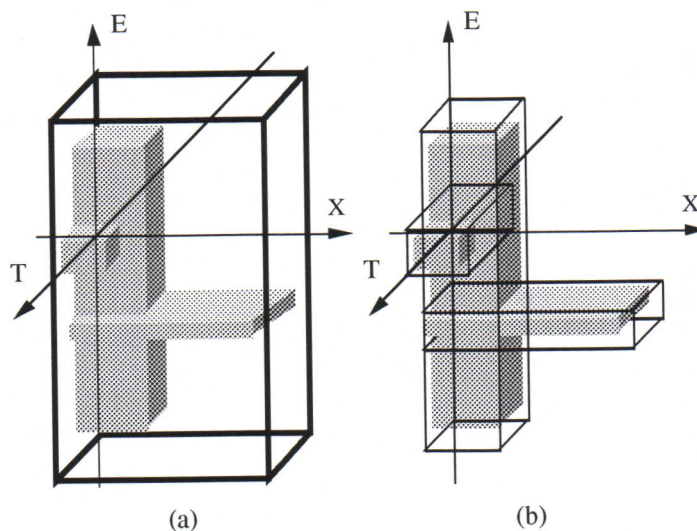


figure 2.6. La représentation graphique (a) d'un modèle mono-échelle produisant trois signaux à des échelles différentes (b) d'un modèle multi-échelle produisant les mêmes signaux. Chaque parallélépipède noir représente un modèle différent.

Soit un objet produisant des phénomènes à deux échelles différentes. Il arrive souvent que les phénomènes observés à grande échelle puissent être analysés et modélisés à partir de propriétés énoncées à petite échelle. Pendant la simulation, les phénomènes à grande échelle émergent à partir de la réalisation de propriétés à petite échelle. C'est l'approche mono-échelle.

Il arrive également que dans ces même phénomènes on puisse déceler des relations à grande échelle, suffisamment cohérentes et permanentes pour pouvoir être modélisées à leur propre échelle, et

indépendamment des phénomènes de petite échelle. Dans ce cas, le même objet pourra être modélisé, avec une précision équivalente, par deux modèles autonomes et éventuellement couplés, l'un à grande échelle et l'autre à petite échelle. Le modèle à

grande échelle exprime la relation cohérente décelée dans les phénomènes à grande échelle, alors que le modèle à petite échelle modélise les phénomènes spécifiquement à petite échelle. C'est l'approche multi-échelle.

De manière plus générale, la modélisation physique multi-échelle d'un objet est possible lorsque les phénomènes produits par cet objet à une échelle donnée peuvent être liés par des relations suffisamment cohérentes et permanentes pour être exprimées par un modèle physique à cette même échelle. Les corrélations entre les phénomènes à différentes échelles peuvent être modélisés par un couplage entre les différents modèles.

La démonstration de la possibilité de la modélisation multi-échelles est une question à part entière que nous ne développerons pas dans ce travail. Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons implicitement que la modélisation multi-échelles est toujours possible et nous chercherons uniquement à déterminer dans quels cas celle-ci est intéressante.

2.4.3.2. Les cas où la modélisation multi-échelle est avantageuse

Critère de décision

Étant donné le spectre des signaux que nous cherchons à produire, on peut évaluer la quantité d'information que véhiculeront ces signaux. Graphiquement on pourra les représenter par un ensemble de parallélépipèdes dont le volume représentera cette quantité d'information.

Ces signaux devront être produits par un modèle ou plusieurs modèles selon que l'on opte pour l'approche mono-échelle ou multi-échelle. La bande passante numérique du modèle mono-échelle (respectivement la réunion des bandes passantes numériques des modèles) devra inclure la réunion des spectres de tous les signaux. Graphiquement, le parallélépipède 4D représentant le modèle mono-échelle (respectivement la réunion des parallélépipèdes-modèles) devra englober les parallélépipèdes représentant les différents signaux. Cette situation est illustrée par le cas de la figure 2.6.

Le critère essentiel permettant d'évaluer ces deux approches dans chaque cas sera l'adéquation entre le coût des modèles et la richesse des signaux à produire, autrement dit entre la quantité d'information que le modèle peut produire et la quantité d'information que le signal doit effectivement produire. Il faudra donc évaluer cette différence dans les deux cas : mono-échelle et multi-échelle, et ensuite choisir l'approche qui permet de réduire cette différence à sa valeur minimale.

Le coût minimal d'un modèle

Étant donné un ensemble de signaux à produire, la valeur minimale pour la largeur de la bande passante d'un modèle est la largeur de la réunion du spectre de tous ces signaux. Si un modèle donné a une bande passante numérique de cette largeur, alors aucun autre modèle produisant ces signaux ne pourra être moins coûteux. Si un modèle mono-échelle a le coût minimal, alors on peut dire que pour ces signaux, la modélisation multi-échelle, même lorsqu'elle s'avère possible, ne présente que peu d'intérêt, puisqu'elle ne pourra pas être moins coûteuse. (Cependant elle n'est pas nécessairement plus coûteuse.)

Cependant, la situation décrite ci-dessus n'est pas très fréquente. Un ensemble de signaux dont le spectre puisse recouvrir toute la bande passante d'un modèle mono-échelle doit vérifier des propriétés particulières : tous les signaux doivent avoir le même spectre. (Ceci est vérifié notamment lorsque le nombre de signaux est de 1.) De plus dans l'espace énergie-fréquence (temporel, spatial), ce spectre commun doit être un parallélépipède. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, alors aucun modèle mono-échelle ne pourra avoir le coût minimal, autrement dit, sa bande passante d'aucun modèle mono-échelle ne pourra exactement correspondre à la réunion du spectre de tous les signaux.

CONCLUSION

LES POSSIBILITÉS D'ADAPTATION DES MODÈLES MULTI-ÉCHELLES

Il faut noter que, dans tous les cas, la modélisation multi-échelle présente un avantage significatif par rapport à la modélisation mono-échelle : même lorsque la quantité d'information produite par les deux approches est équivalente, la modélisation multi-échelle présente l'avantage de permettre de tenir compte et de tirer profit des éventuelles spécificités de chaque échelle (linéarité, homogénéité, cohérence temporelle et/ou spatiale etc.)

Mais dans un grand nombre de cas, la modélisation multi-échelle permet également d'adapter la quantité d'information à celle que véhiculent les signaux. En effet la bande passante numérique d'un modèle multi-échelle est la réunion des bandes passantes numériques de tous les modèles composants. Dans l'espace énergie-fréquence (temporelle, spatiale) cette bande passante est constituée d'un ensemble de parallélépipèdes. Ainsi la forme de cette bande passante est contrôlable et permet de s'adapter à la forme du spectre des signaux à produire. (Ceci est loin d'être le cas dans la modélisation mono-échelle.) En particulier si la réunion du spectre des signaux à produire est également un ensemble de parallélépipèdes, alors le modèle multi-échelle a le coût minimal.

Dans le cas de la figure 2.6, nous devons produire trois signaux représentés par des parallélépipèdes gris. Dans la figure 2.6.b (modélisation multi-échelle) on peut voir que chaque modèle recouvre de très près le spectre du signal à produire, approchant ainsi le coût minimal. Une comparaison avec le cas de la figure 2.6.a (modèle mono-échelle) met en évidence la différence de volume entre les parallélépipèdes modèle, qui représente la différence de coût entre les deux approches.

Les modèles multi-sensoriels sont un autre cas où la modélisation multi-échelle s'avère très avantageuse. Nous avons déjà calculé (cf. quatrième sous-paragraphe de § 2.4.1.2) que la bande passante d'un modèle geste-son-image mono-échelle serait beaucoup plus large que le spectre des signaux de sortie. La modélisation multi-échelle permet de produire chaque signal avec un modèle dont la bande passante est adaptée au spectre du signal. On montre que le rapport entre le coût d'un modèle multi-échelle et celui d'un modèle mono-échelle est de 3500 pour un modèle geste-son-image et d'au moins 40 pour l'image animée.

[NCL 96] présente le cas d'une horloge visible et sonore réalisé par le couplage de deux modèles l'un modélisant le mouvement et l'autre le son. Un autre cas de modélisation de type multi-échelle, dans un contexte purement visuel est le travail effectué par [PF 90] sur le comportement des surfaces anisotropes à la lumière.

Dans le cadre de ce travail centré autour de l'image animée, nous aurons souvent affaire à la modélisation multi-échelle, en particulier pour les objets très déformables (cas particulier d'objets à grand nombre de degrés de liberté) dont la situation est qualitativement représentée sur la figure 2.5. [LHM 95] étudie la modélisation multi-échelles de matériaux granulaires et [HLV 96] étudie celle des fluides turbulents. Ce principe permet de modéliser des phénomènes très complexes avec des modèles assez minimaux.

Donc dans la suite de ce travail un grand nombre d'objets seront représentés non pas par un seul modèle mais par un réseau de modèles couplés. Le chapitre suivant étudie les conditions dans lesquelles ces modèles peuvent être simulés non pas simultanément mais par groupes successifs.

CHAPITRE 3

L'HABILLAGE

Il est fréquent qu'un objet soit analysé comme une réunion de sous-objets (O_i) et soit modélisé par un ensemble M de sous-modèles (M_i). Un cas particulier d'obtention d'un comportement global par plusieurs modèles liés est celui de la modélisation multi-échelles (cf. chapitre précédent). Mais dans le cas général, les modèles (M_i) ne sont pas nécessairement à des échelles différentes.

En règle générale, tous les modèles doivent être simulés ensemble. Pourtant il arrive que le comportement d'un sous-ensemble A de modèles soit indépendant du comportement d'un autre sous-ensemble B de modèles, alors que celui de B n'est pas indépendant de celui de A . On dit alors que B est un *habillage* de A . La conséquence est qu'il devient possible de retirer B du réseau de modèles, sans que la simulation de A en soit changée. B pourra être simulé après A . L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode pour la mise en évidence de tels sous-ensembles de modèles.

Grâce au principe de *l'habillage* la charge de la simulation d'un modèle peut souvent être répartie sur plusieurs étapes, qui sont chacune beaucoup moins coûteuses que la simulation de tout le modèle. Ainsi des modèles qui sont impossibles à simuler dans leur globalité, peuvent être décomposés en parties qui sont chacune plus faciles à simuler. Cette répartition des charges permet aussi quelquefois d'interagir en temps-réel avec une partie d'un modèle qui, dans sa globalité, n'aurait pas été simulable en temps-réel.

Les notions élémentaires de traitement du signal, des réseaux de Kirchhoff et de la théorie des graphes qui nous ont permis d'effectuer le travail décrit dans ce chapitre proviennent respectivement de [Max 72] [BN 83] et de [Kauf 70]

3.1. HABILLAGE ET FLUX D'INFORMATION

3.1.1. LA REPRÉSENTATION CORDIS-ANIMA D'UN RÉSEAU DE MODÈLES

Le système Cordis-Anima est modulaire. Un objet peut être représenté comme un ensemble de sous-objets O_i . Chaque objet (ou sous-objet) Cordis-Anima est caractérisé par un modèle physique (en l'occurrence M_i), par son algorithme de simulation et par un ensemble de points de communication permettant le couplage de ces objets. Les points de communication sont liés par des connexions. La figure 3.1 représente un exemple de réseau de modèles couplés. Comme nous l'avons décrit à la section § 1.5.2, les points de communication sont soit du type M (gris) ou du type L (blanc). Les points M reçoivent une variable intensive et produisent une variable extensive, alors que les points L font le contraire.

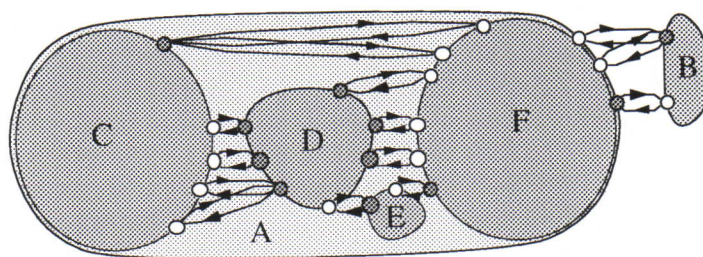


figure 3.1. Un objet Cordis-Anima composé de deux sous-objets A et B. A à son tour est composé des sous-objets B,C,D,E et F.

Dans la mise en œuvre de Cordis-Anima, les variables intensives et extensives choisies ont été respectivement la force et la position (Cf. § 1.5.3).

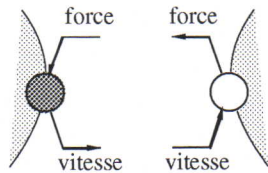


figure 3.2 Un point M (à droite) et un point L (à gauche). Implicitement, la connexion supérieure véhicule la force et la connexion inférieure véhicule la vitesse.

Sans remettre en cause les axiomes de Cordis-Anima (§ 1.5.2) nous choisissons plutôt les variables force et vitesse. Dans le cas de cette étude ce choix facilitera les raisonnements. Ainsi, dans notre cas, les points M reçoivent une force et produisent une vitesse, alors que les points L reçoivent une vitesse et produisent une force. Chaque point de communication possède deux connexions. Dans toutes les représentations graphiques de ce chapitre, en l'absence d'une indication explicite, la connexion supérieure véhiculera la variable force et la connexion inférieure véhiculera la vitesse. (cf. figure 3.2).

De plus nous nous intéressons à des modèles 1D ou à la projection des modèles 3D dans un espace 1D. Dans tous les cas, les grandeurs force et vitesse seront des scalaires.

3.1.2. FLUX D'INFORMATION ENTRE DEUX MODÈLES D'UN RÉSEAU

3.1.2.1. Influence dissymétrique entre modèles

Soient deux modèles liés à travers leurs points de communication. Du fait du principe de l'action et de la réaction, la simulation d'un modèle ne peut pas influencer celle d'un autre sans être elle-même influencée en retour. La circulation de l'information est toujours bidirectionnelle. Cependant, dans certains cas, même si les forces échangées entre M_i et M_j sont identiques, l'influence de ces forces sur le mouvement de M_i peut être négligeable par rapport à leur influence sur le mouvement de M_j . Ainsi on dira que le comportement de M_i influence celui de M_j mais que celui de M_i est indépendant de celui de M_j (cf. [LC 86]). Ainsi en pratique, la circulation de l'information tout en étant bidirectionnelle peut être fortement dissymétrique. Un exemple de ce type de relation est celui du coureur (M_i) et de ses vêtements (M_j) (cf. § 3.1.3.3)

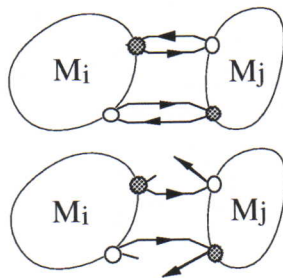


figure 3.3. Le fait que M_i ignore les informations venant de M_j sera représentée par un coupure des connexions allant de M_j vers M_i .

3.1.2.1. Coupures de connexions

Dans une telle situation, (où l'information allant de M_j à M_i n'a presque pas d'influence sur la simulation de M_i) si nous modifions le modèle M_j de manière à ce qu'il ignore explicitement les informations venant de M_j , le résultat de la simulation n'en sera pas sensiblement changé. Cette modification du modèle M_i sera désormais schématiquement représentée par une coupure des connexions allant de M_j à M_i . (cf. figure 3.3)

Au sous-chapitre § 3.2 nous verrons dans quelles conditions les connexions allant d'un modèle à l'autre peuvent être coupées sans que le comportement des modèles en soit sensiblement affecté. Et nous nous attacherons à couper toutes les connexions qui peuvent être coupées. On obtient ainsi des réseaux de modèles où coexistent les connexions coupées et les connexions non-coupées.

3.1.2.2. La liaison

Modèles *amont* et modèles *aval*

Supposons qu'entre deux modèles M_i et M_j , toutes les connexions susceptibles d'être coupées aient été coupées. Nous devons alors tirer des conclusions sur la circulation

globale de l'information sur toutes ces connexions liant M_i et M_j . Pour faire un tel bilan on utilisera souvent une macro-connexion appelée *liaison* liant M_i et M_j . Une liaison entre deux modèles peut être soit unidirectionnelle, soit bidirectionnelle. Entre deux modèles il peut y avoir au plus une liaison.

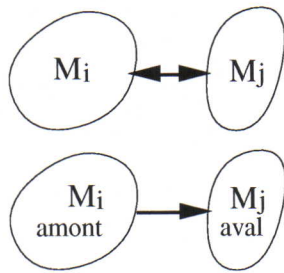


figure 3.4. La liaison bidirectionnelle et la liaison unidirectionnelle.

1. Il existe une liaison entre M_i et M_j si et seulement si il existe au moins une connexion non-coupée entre M_i et M_j .

2. La liaison entre M_i et M_j est bidirectionnelle si et seulement si il existe au moins une connexion allant de M_i à M_j et au moins une connexion allant de M_j à M_i . Ceci équivaut à dire que globalement l'information circulant sur les connexions entre M_i et M_j va dans les deux sens. (cf. figure 3.4.a)

3. La liaison entre M_i et M_j est unidirectionnelle si et seulement si toutes les connexions non-coupées entre M_i et M_j vont de M_i à M_j . Ceci équivaut à dire que, sur les connexions entre M_i et M_j , l'information va seulement de M_i à M_j . On dira alors que le modèle M_i est *en amont* de la liaison alors que le modèle M_j est *en aval* de la liaison. On pourra également dire simplement que M_i est le *modèle amont* et M_j le *modèle aval*.

3.1.3. FLUX D'INFORMATION CIRCULANT DANS TOUT LE RÉSEAU

3.1.3.1. Les modèles *moteur* et les modèles *habillage*

Considérons un réseau de modèles où coexistent les connexions coupées et non-coupées. Dans ce réseau considérons deux sous-ensembles disjoints A et B. (A et B peuvent être des singletons i.e. contenir un seul modèle). Dans certaines conditions que nous définirons au sous-chapitre § 3.3, l'information circulant entre A et B ira seulement de A vers B. Autrement dit, une information produite par la simulation d'un modèle de A pourra influencer la simulation d'un modèle de B, mais la réciproque ne sera pas possible. Dans ce cas, on pourra dire que B est un *habillage* de A. On dira aussi que A est le *moteur* de B. (Les deux propositions sont équivalentes)

La qualité de moteur ou d'habillage n'est pas une propriété inhérente à un ensemble de modèles. Chaque ensemble de modèles ne peut être moteur ou habillage que s'il est comparé à un autre ensemble de modèles. Ainsi un même ensemble de modèle, lié à deux ensembles de modèles différents et disjoints pourra être le moteur de l'un et l'habillage de l'autre. Cependant étant donné deux ensembles de modèles quelconques, l'information circule a priori dans les deux sens et les deux ensembles de modèles ne seront ni moteur ni habillage.

3.1.3.2. La simulation en plusieurs étapes

Dans le cas d'une relation moteur/habillage, le comportement des modèles moteur ne dépend pas du comportement des modèles habillage. Donc les modèles moteurs peuvent être simulés sans les modèles habillage. Par contre la simulation des modèles habillage dépend des informations transmises du moteur vers l'habillage. Donc les modèles habillage ne peuvent être simulés séparément que si ces informations leur sont fournies. Ceci suppose que les modèles moteurs soient simulés avant les modèles habillage et que pendant la simulation des modèles moteurs, les informations destinées aux modèles habillage soient enregistrées.

La figure 3.5 montre un exemple de ce type de situation. Nous verrons au sous-chapitre § 3.3. que dans un tel cas, chacun des ensembles A et B (composé respectivement des

modèles M_1 , M_2 et M_3 et des modèles M_4 et M_5) doit faire l'objet d'une simulation globale. Mais les modèles de B peuvent être simulés après les modèles de A. Ceci est réalisé en enregistrant les informations circulant sur la liaison $M_1 \rightarrow M_5$ pendant la simulation des modèles de A. Cet enregistrement permet ensuite de réaliser la simulation des modèles de B, comme si ceux-ci étaient liés aux modèles de A.

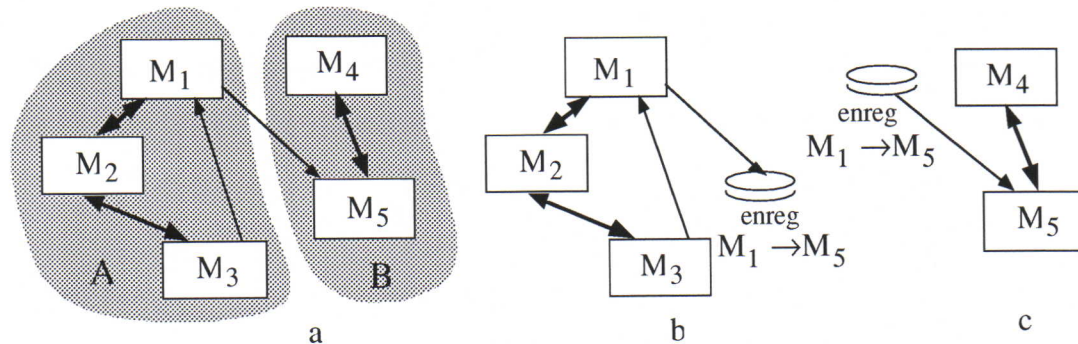


figure 3.5 (a) Le modèle global composé de deux ensembles de modèles A et B. L'information circule seulement de A vers B. Donc B est l'habillage de A, A est le moteur de B. La première étape (b) est la simulation du moteur (A) et l'enregistrement des signaux à destination des de l'habillage. La deuxième étape (c) est la simulation de l'habillage (B) à partir de cet enregistrement.

3.1.3.3. L'exemple du coureur

Prenons le cas d'un coureur. La force exercée par le corps du coureur sur ses habits est la même que la force exercée par les habits sur le corps. Pourtant, s'il est vrai que le mouvement des habits est très influencé par le mouvement du corps, la réciproque n'est pas vraie (lorsque ces habits sont légers et souples.)

Pour la modélisation physique d'un tel coureur nous pouvons avoir recours à deux modèles couplés, liés a priori par des connexions non coupées. Dans le cas d'habits légers et souples, nous sommes en droit de négliger l'influence des vêtements sur le mouvement du corps et de couper les connexions allant des vêtements au corps. En l'absence d'autres modèles l'information entre le corps et les vêtements va seulement du corps vers les vêtements. Dans ce cas, le modèle du corps est *moteur* et le modèle des vêtements est *habillage*.

Cela signifie que la simulation du coureur habillé et celle du coureur nu donnera le même résultat. Nous pouvons donc simuler le coureur nu sans simuler les habits. Si, pendant cette simulation nous enregistrons la position des points du corps qui auraient été en interaction avec les habits, alors nous pourrions également simuler les habits sans simuler le corps. Ces habits seraient alors mus non pas par le corps, mais par un enregistrement des positions du corps par exemple.

3.1.4. LA LIAISON UNIDIRECTIONNELLE : UNE CONDITION NÉCESSAIRE POUR L'HABILLAGE

3.1.4.1. Moteur/Habillage et Amont/aval

Par définition, toute liaison unidirectionnelle définit un modèle amont et un modèle aval. Ces qualificatifs énoncent une propriété locale. Ils ne font que décrire le sens des connexions non-coupées entre deux modèles d'un réseau. Ces connexions ne peuvent porter l'information que du modèle amont au modèle aval.

Par contre les qualificatifs "habillage" et "moteur" énoncent une propriété globale. Ils caractérisent toute l'information circulant entre deux modèles ou ensemble de modèles,

quelque soit le chemin empruntée par cette information, et quelque soit le nombre de modèles et de liaisons intermédiaires.

Si un modèle est l'habillage d'un autre modèle et que les deux modèles sont directement liés, alors cette liaison est nécessairement unidirectionnelle. Le moteur est en amont et l'habillage est en aval.

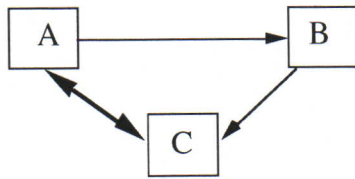


figure 3.6 Malgré unidirectionnalité des liaisons dans ce réseau, aucun couple de modèle n'est en relation moteur/habillage. Tous les modèles doivent être simulés en même temps.

Lorsque le réseau contient deux modèles alors la réciproque est également vraie. Toute l'information véhiculée entre les deux modèles passe par la liaison qui les relie. Si cette liaison est unidirectionnelle, alors l'information entre les deux modèles circulera dans un seul sens. Donc le modèle amont sera moteur et le modèle aval sera habillage.

Mais le cas d'un réseau de deux modèles, comme celui du coureur, est un cas particulier. Dès que le nombre de modèles dans un réseau dépasse deux la réciproque cesse d'être vraie : deux modèles liés par une liaison unidirectionnelle ne sont pas nécessairement moteur et habillage (cf figure 3.6) En effet lorsque le réseau contient plus de deux modèles, toute l'information circulant entre deux modèles A et B ne passe pas nécessairement par la liaison qui les lie directement, mais par l'intermédiaire d'autres liaisons et d'autres modèles. Donc même si la liaison directe $A \rightarrow B$ est unidirectionnelle, une information produite par B peut influencer indirectement le comportement de A. Donc B n'est pas nécessairement un habillage de A.

3.1.4.2. Conclusion : la nécessité des liaisons unidirectionnelles

Soit un réseau de n modèles ayant des liaisons bidirectionnelles. Si aucune de ces liaisons bidirectionnelles ne peut être remplacée par une liaison unidirectionnelle, alors à chaque instant la simulation de tous les modèles dépend du résultat des simulations d'autres modèles et réciproquement. Donc tous les modèles doivent être simulés ensemble. L'habillage est alors tout à fait impossible. L'habillage ne peut s'avérer possible que si le comportement de certains modèles a plus d'influence sur le comportement des autres modèles que réciproquement, i.e. si la liaison entre ces modèles, a priori bidirectionnelle, peut être remplacée par une liaison unidirectionnelle. C'est une condition nécessaire et non suffisante (cf. § 3.1.4.1).

Dans le sous-chapitre § 3.2 nous verrons dans quelles conditions la liaison bidirectionnelle entre deux modèles peut être remplacée par une liaison unidirectionnelle. Grâce à ces conditions, un réseau de modèles liés par des liaisons bidirectionnelles pourra quelquefois être remplacé par un autre réseau où coexistent liaisons bidirectionnelles et unidirectionnelles. A ce stade nous connaissons les modèles amont et aval, mais nous ne connaissons pas encore les habillages et les moteurs. Ensuite étant donné un tel réseau, le sous-chapitre § 3.3 présente les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles l'habillage est possible. Il présente également une méthode pour la mise en évidence de tous les sous-réseaux de modèles qui peuvent être simulés séparément des autres.

3.2. L'INFLUENCE MUTUELLE ENTRE DEUX MODÈLES

Dans ce sous-chapitre nous allons voir dans quelles conditions une liaison bidirectionnelle entre deux modèles A et B d'un réseau peut être remplacée par une liaison unidirectionnelle. Pour cela, nous allons étudier l'influence mutuelle entre A et B à travers une paire de points de communication. Les deux connexions sont non coupées i.e. la liaison entre A et B est bidirectionnelle. Nous déterminerons dans quelles conditions l'influence d'un des modèles sur l'autre est négligeable par rapport à l'influence inverse et

ainsi dans quelles conditions une des connexions peut être coupée sans que la simulation des deux modèles en soit changée. Lorsque toutes les connexions allant de B vers A peuvent être coupées, alors la liaison bidirectionnelle entre A et B peut être remplacée par une liaison unidirectionnelle allant de A vers B.

Une première étude (§ 3.2.1) nous permettra de mettre en évidence les différentes grandeurs en jeu et ensuite d'extraire du réseau les deux modèles A et B dont la connexion est à étudier. Ensuite (§ 3.2.2) nous introduirons la notion d'impédance et d'admittance d'un objet vu depuis un de ses points de communication et nous présenterons une méthode pour le calcul de l'admittance des réseaux Cordis-Anima. Pour cela nous aurons recours à une autre représentation : les réseaux de Kirchhoff. Nous verrons (§ 3.2.3) que l'influence du modèle A sur le modèle B et l'influence réciproque dépendent de l'énergie échangée entre les deux modèles. L'admittance de A vu de B nous permettra d'évaluer cette énergie et donc l'influence de A sur B directement à partir des paramètres du modèle.

3.2.1. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

3.2.1.1. Les différents paramètres en jeu

L'exemple du coureur, montre que le rapport des masses de deux modèles A et B a un rôle important dans la mise en évidence d'influences unidirectionnelles dans ces modèles. Cependant la condition portant sur le rapport des masses n'est pas suffisante pour montrer cette unidirectionnalité. En effet dans l'exemple du coureur l'unidirectionnalité dépend non seulement de la masse des vêtements, mais aussi de leur souplesse. Donc de manière plus générale, même si la masse de A est très supérieure à celle de B, il ne sera pas impossible que le comportement de A soit influencé par le comportement de B.

Réciproquement ce rapport de masse n'est pas non plus une condition nécessaire pour l'unidirectionnalité de l'influence. Le fait qu'un coureur frôle les feuilles souples d'un grand arbre n'entrave pas nécessairement sa course, même si la masse de l'arbre est très supérieure à la masse du coureur. Donc plus généralement, le fait que A influence B et que B n'influence pas A, ne signifie pas nécessairement que la masse de A soit supérieure à celle de B.

Par contre lorsque ce même coureur rencontre les branches ou le tronc de cet arbre, il ne peut pas les ignorer. Le comportement de l'arbre a alors une grande influence sur celui du coureur. Donc plus généralement, l'influence entre le comportement de A et de B dépend également du point auquel le contact a lieu (au niveau des feuilles, des brindilles, des branches ou du tronc).

De manière générale l'influence entre le comportement de A et le comportement de B dépend de la masse des modèles, des raideurs et des viscosités en jeu, des points par lesquels les deux modèles communiquent. Enfin elle dépend aussi de la vitesse des mouvements en jeu : l'influence peut être unidirectionnelle pour des excitations rapides et cesser de l'être pour des excitations plus lentes (ou le contraire).

3.2.1.2. Le système étudié

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe précédent, l'information véhiculée entre deux modèles dépend du point de contact, (i.e. en termes Cordis-Anima, du point de communication.)

Dans ce sous-chapitre nous nous intéresserons d'abord à un modèle A extrait du réseau auquel il appartient. (§ 3.2.2 et § 3.2.3) et plus particulièrement à l'information et à l'énergie qu'il est susceptible d'échanger avec l'extérieur à travers un de ses points de communication. Le système étudié est représenté dans l'encadré gris de la figure 3.7.a.

Ensuite (§ 3.2.4) le système étudié sera étendu à deux modèles A et B également extraits de leur réseau. Nous étudierons plus particulièrement la communication entre ces modèles à travers un point de communication aux connexions non-coupées. Le système étudié est représenté dans l'encadré de la figure 3.7.b.

C'est au comportement interne de ces systèmes que nous nous intéressons. Pour cela nous les isolons de l'extérieur (i.e. des autres modèles du réseau) et nous modélisons l'influence de l'extérieur par un ensemble d'excitations (signaux) indépendantes du comportement de notre système.

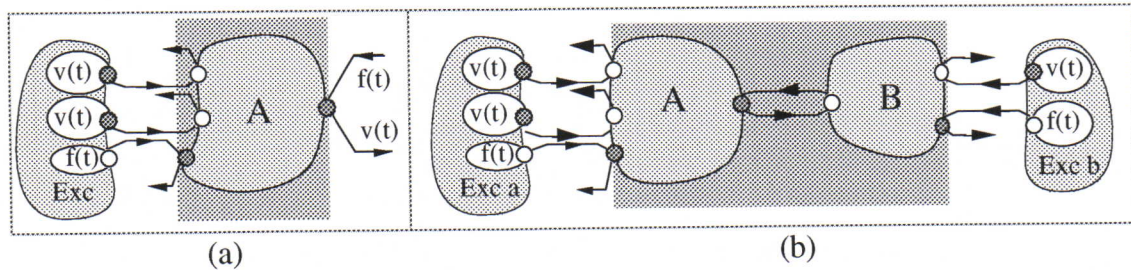


figure 3.7. Les systèmes étudiés dans ce sous-chapitre. (a) Un modèle extrait du réseau et communiquant avec l'extérieur par un point de communication (b) Deux modèles extraits du réseau et communiquant ensemble. Le nombre de signaux d'excitation sur cette figure est arbitraire. Ce nombre dépendra du nombre de points de communication de chaque modèle.

Ces excitations sont produites par des générateurs de signaux (en l'occurrence force et vitesse). Pour représenter le fait que ces excitations sont indépendantes du comportement du système, nous avons coupé les connexions allant de notre système aux générateurs de signaux.

3.2.2. L'IMPÉDANCE ET L'ADMITTANCE D'UN MODÈLE VU À TRAVERS UN POINT DE COMMUNICATION

Dans la présente section nous étudions le calcul de l'admittance des modèles linéaires composés d'éléments du second ordre et notamment des réseaux Cordis-Anima linéaires ou fonctionnant dans un domaine linéaire. Nous verrons dans les sections suivantes que la connaissance de cette admittance calculée à partir des paramètres du modèle permet d'évaluer l'influence d'un modèle sur un autre.

L'étude des admittances nous conduit à travailler non seulement avec des signaux temporels ($v(t)$, $f(t)$, $p(t)$ etc.) mais également avec les transformées de Fourier de ces signaux ($V(\omega)$, $F(\omega)$, $P(\omega)$ etc.).

3.2.2.1. La notion d'impédance et d'admittance

Dans l'annexe A, nous donnons quelques brèves définitions et relations sur les transformées de Fourier. Dans la suite, les signaux temporels seront représentés par des lettres minuscules, alors que les transformées de Fourier, qui sont fonctions de la variable ω (la fréquence temporelle à un facteur 2π près) seront représentées par des lettres majuscules. L'opérateur transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse seront notés respectivement $\mathcal{F}\{\}$ et $\mathcal{F}^{-1}\{\}$

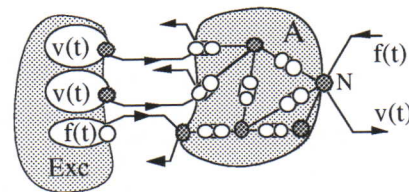


figure 3.8 Tout objet Cordis-Anima A vu à travers un de ces points de communication peut être caractérisé par une admittance

Un objet A susceptible d'interagir avec d'autres objets en un point donné N, peut être caractérisé par une admittance $Y_N(\omega)$. En particulier dans le formalisme Cordis-Anima, tout objet A (quelque soit l'importance du modèle sous-jacent) vu à travers l'un de ses points de communication N, où les variables force et vitesse en jeu sont $f(t)$ et $v(t)$ peut être caractérisé par une *admittance* $Y_N(\omega)$ ou par son *impédance* $Z_N(\omega) = 1/Y_N(\omega)$.

$$Y_N(\omega) = \frac{F(\omega)}{V(\omega)} \quad (3.1)$$

où $V(\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}$ et $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. Pour nous, l'admittance sera plus facile à utiliser que l'impédance. Dans la suite de ce travail nous aurons affaire essentiellement à des admittances. Plus l'admittance d'un objet vu à travers un point est grand et plus il faudra fournir de force pour le déplacer. Un élément <MAT> a un seul point de communication. Si c'est un point matériel de masse m , ses variables force et vitesse vérifient :

$$f(t) = m \frac{dv}{dt}(t) \Leftrightarrow F(\omega) = mj\omega V(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{V(\omega)} = jm\omega \quad (3.2)$$

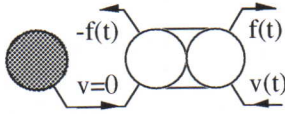


figure 3.9. La mesure de l'admittance d'un élément <LIA> à travers l'un de ses points de communication.

Un élément <LIA> a deux points de communication symétriques. Nous observons son admittance à travers un de ces points de communication, tandis qu'à son autre point de communication, nous plaçons un générateur de vitesse nulle (cf. figure 3.9). S'il s'agit d'une interaction élastique linéaire alors ses variables force et vitesse

vérifient :

$$f(t) = -k \int_0^T v(t) dt \Leftrightarrow F(\omega) = -\frac{k}{j\omega} V(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{V(\omega)} = -\frac{k}{j\omega} \quad (3.3)$$

S'il s'agit d'une interaction visqueuse linéaire alors ses variables force et vitesse vérifient

$$f(t) = -z v(t) \Leftrightarrow F(\omega) = -z V(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{V(\omega)} = -z \quad (3.4)$$

3.2.2.2. L'admittance des modèles plus complexes (réseaux de Kirchhoff)

Calcul d'admittances équivalentes

Pour des modèles linéaires plus complexes observés par un point de communication N, la relation entre force et vitesse sera toujours linéaire donc on pourra encore parler d'admittance. Autrement dit, la force $F(\omega)$ au point N pourra s'exprimer comme la somme d'un terme $F_z(\omega)$ dépendant linéairement de la vitesse $V(\omega)$ et d'un terme $F_{\text{éq}}(\omega)$ indépendant de la vitesse

$$F(\omega) = F_{\text{éq}}(\omega) + F_z(\omega) = F_{\text{éq}}(\omega) + Y_{\text{éq}}(\omega)V(\omega) \quad (3.5)$$

$Y_{\text{éq}}(\omega)$ est l'admittance équivalente de A au point N. $F_{\text{éq}}(\omega)$ est le générateur équivalent ramené au point N. Il tient compte de l'influence des excitateurs au niveau du point N. Si ces excitateurs produisent une force et une vitesse nulle, alors l'objet A vu du point N est un objet passif et $F_{\text{éq}}(\omega)$ sera nul pour tout ω .

Au paragraphe précédent, nous avons calculé l'admittance des trois objets élémentaires de Cordis-Anima directement à partir de la relation force/vitesse qui les caractérise. Cette démarche directe ne sera pas possible dans le cas général. Par contre lorsqu'A est composé de constituants dont les admittances y_i sont connues (et en particulier lorsque ces constituants sont des masses, des élasticités et des viscosités) alors il devient possible de calculer $Y_{\acute{e}q}(\omega)$ par composition à partir de l'admittance des constituants. Le paragraphe § 3.2.2.4 rappelle ces règles de composition.

L'existence de $Y_{\acute{e}q}(\omega)$ et de $F_{\acute{e}q}(\omega)$ suppose que le réseau étudié soit un modèle linéaire. Or les réseaux Cordis-Anima correspondent souvent à des modèles non-linéaires. Cependant une grande partie des non-linéarités des réseaux Cordis-Anima sont dues à des automates d'état fini. En dehors des changements d'état, le modèle peut être considéré comme un assemblage de masses et d'interactions élastiques et visqueuses linéaires. Les non-linéarités interviennent aux changements d'état. Donc le domaine D de fonctionnement d'un modèle Cordis-Anima (i.e. la plage de variation des variables) peut être divisé en sous-domaines d_i où le comportement du modèle est linéaire. Sur chaque sous-domaine d_i , le modèle Cordis-Anima vu à travers un point de communication N peut être caractérisé par une admittance équivalente $Y_{\acute{e}q}(\omega)$ et une excitation de force équivalente $F_{\acute{e}q}(\omega)$. Sur d'autres sous-domaines d_i , ces grandeurs pourront être différentes.

Le calcul de l'admittance équivalente d'un modèle directement grâce au réseau Cordis-Anima n'a pas été abordé ici. Nous nous sommes contentés d'utiliser une autre représentation déjà utilisée, notamment en électronique, pour le calcul d'admittances équivalentes. Il s'agit du formalisme des réseaux de Kirchhoff. Pour calculer l'admittance d'un réseau Cordis-Anima, on calculera l'admittance du réseau de Kirchhoff équivalent.

les réseaux de Kirchhoff

Le domaine d'application des réseaux de Kirchhoff [BN 83] s'étend à tous les systèmes linéaires constitués d'éléments du second ordre. Ils sont utilisés en électricité, mais aussi en mécanique en acoustique et en thermodynamique. Dans tous les cas les objets sont modélisés par un assemblage de dipôles formant un réseau. Ce réseau est un graphe orienté parcouru par une variable intensive et chaque paire de nœuds peut être caractérisé par une variable extensive. Il s'agit respectivement des variables courant/tension en électricité, force/vitesse en mécanique ou vitesse/pression en acoustique).

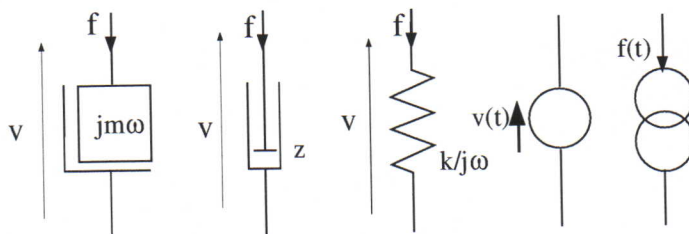


figure 3.10 La masse le frottement, le ressort, le générateur de vitesses et le générateur de forces

Pour la présente étude, nous avons choisi la force comme variable intensive et la vitesse comme variable extensive. Le choix inverse aurait également été possible. Mais ce choix est fondé sur la facilité de la correspondance avec les réseaux de type Cordis-Anima. Ainsi chaque dipôle

(masse, ressort, frottement, générateur de vitesse ou de force) est parcouru par une force. A leur borne s'établit une différence de vitesses. (cf. figure 3.10) Comme pour les potentiels électriques, toutes les vitesses du réseau sont définies à une constante près. Le fait de considérer la vitesse du sol comme nulle lève cette indétermination.

Le réseau de Kirchhoff est régi par la loi des mailles et la loi des nœuds. La première stipule que la somme des différences de vitesse aux bornes de tous les dipôles d'une maille du réseau (un cycle) est nulle. La seconde est la loi duale. Elle stipule qu'à chaque nœud du réseau, la somme des forces est nulle.

L'équivalent Kirchhoff d'un réseau Cordis-Anima

Les réseaux Cordis-Anima, ainsi que les réseaux de Kirchhoff, sont parcourus par des variables intensives et extensives. Certains modèles admettent à la fois une représentation Cordis-Anima et une représentation Kirchhoff. On parlera d'équivalent Cordis ou d'équivalent Kirchhoff d'un modèle.

Les réseaux de Kirchhoff correspondent à des modèles linéaires. Les réseaux Cordis-Anima eux peuvent être linéaires ou non-linéaires. Donc tous les modèles Cordis-Anima n'admettent pas d'équivalent Kirchhoff. Par contre nous avons vu que l'on peut diviser le domaine de fonctionnement d'un modèle Cordis-Anima en sous-domaines d_i où son comportement est celui d'un réseau de masses, d'élasticités et de viscosités linéaires. Donc sur chaque sous-domaine d_i un réseau Cordis-Anima admet un équivalent Kirchhoff. Sur un autre sous-domaine, le réseau de Kirchhoff pourra être différent.

Notons que la réciproque est également vraie : tous les réseaux de Kirchhoff n'admettent pas d'équivalent Cordis-Anima. Les modèles Cordis-Anima ont des propriétés qui font que les équivalents Kirchhoff de réseaux Cordis-Anima possèdent des propriétés particulières que nous utiliserons pour la construction de l'équivalent Kirchhoff d'un réseau Cordis-Anima. Ces propriétés sont au nombre de trois :

1. Dans les réseaux de type Cordis-Anima, la vitesse des masses est toujours évaluée par rapport à un référentiel commun. Il en résulte la première propriété : *Dans l'équivalent Kirchhoff d'un réseau Cordis-Anima, tous les dipôles masse sont liés par une borne à un même nœud : le nœud sol.*

2. En Cordis-Anima il n'est pas possible de monter deux interactions en série sans interposer une masse. Il en résulte la seconde propriété : *Dans l'équivalent Kirchhoff d'un réseau Cordis-Anima, chaque nœud est lié à l'une des bornes d'un dipôle masse.*

De ces deux propriétés il résulte que : (1) *Il y a bijection entre l'ensemble des nœuds du réseau de Kirchhoff (sans compter le sol) et l'ensemble des masses.* (2) *Tous les nœuds du réseau sont liés au nœud sol par exactement un dipôle masse.*

3. Considérons un nœud N de l'équivalent Kirchhoff d'un modèle Cordis-Anima

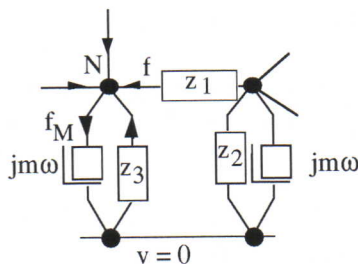


figure 3.11. Trois nœuds extraits d'un réseau de Kirchhoff. Le nœud correspondant au sol est ($v=0$). Les deux autres nœuds sont liés à celui-ci par des dipôles masses

branches. Autrement dit l'accélération de la masse associée à ce nœud est déterminée par la somme des forces produites par les élasticités et les viscosités qui se trouvent sur les branches qui arrivent au nœud N.

a. D'après les règles qui précèdent, parmi les branches arrivant en N, une branche et une seule contient un dipôle masse. Toutes les autres ne contiennent que des dipôles correspondant à des élasticités et des viscosités.

b. D'après l'algorithme de la masse, la force f_M circulant sur cette branche de N vers le sol est égale au produit de la masse et de l'accélération du point. ($f_M = m \Gamma$)

c. A ce nœud N, la loi des nœuds exprime le fait que cette force f_M est égale à la somme de toutes les autres forces arrivant à ce nœud par les autres

$$f_M = \sum_{\text{nœud N}} f_i = m \Gamma \quad (3.6)$$

Ainsi au nœud N, la loi des nœuds est une expression de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à la masse de ce nœud N. Les dipôles élasticité et viscosité liés au nœud N représentent l'ensemble des interactions qui exercent des forces sur la masse du nœud N.

Enfin un dipôle élasticité ou viscosité dont une des bornes est liée au nœud N possède une autre borne qui est nécessairement liée à un autre nœud N', donc soit au sol, soit à une autre masse. Si la force arrivant au nœud N est de f , alors la force arrivant au nœud N' est nécessairement de $-f$. Donc si ce dipôle exerce une force f à la masse du nœud N alors il exerce la force opposée sur la masse du nœud N'. Ceci exprime le principe de l'action et de la réaction. Dans une représentation Cordis-Anima ce dipôle aurait été représenté par une interaction liant les deux masses.

Il en résulte la troisième propriété : *Lorsque dans un réseau Cordis-Anima deux masses sont reliées par une interaction visqueuse et/ou élastique linéaires, les nœuds correspondants du réseau de Kirchhoff équivalent sont également liés par les dipôles correspondants à ces interactions. Ces dipôles sont également montés en parallèle.*

La construction de l'équivalent Kirchhoff d'un réseau Cordis-Anima

Grâce à ces trois propriétés, étant donné un réseau Cordis-Anima linéaire quelconque, nous pouvons construire le réseau de Kirchhoff équivalent en trois étapes :

1. Si le réseau Cordis-Anima contient n masses mobiles, alors le réseau de Kirchhoff équivalent est un réseau constitué de $n+1$ nœuds.
2. Un des $n+1$ nœuds représente le sol. Les n nœuds restants sont reliés à ce nœud par un dipôle masse. Les caractéristiques de chacun de ces dipôles correspondent à celles des masses du réseau Cordis-Anima.
3. Enfin si dans le réseau Cordis-Anima deux masses (ou une masse et le sol) sont liées par une interaction, alors dans le réseau Kirchhoff équivalent les nœuds correspondant à ces masses doivent être liés par les dipôles correspondant à ces interactions.

3.2.2.3. Deux exemples

Ce paragraphe présente deux exemples simples de réseau Cordis-Anima dont nous construisons le réseau de Kirchhoff équivalent grâce à ces trois règles.

La cellule Cordis

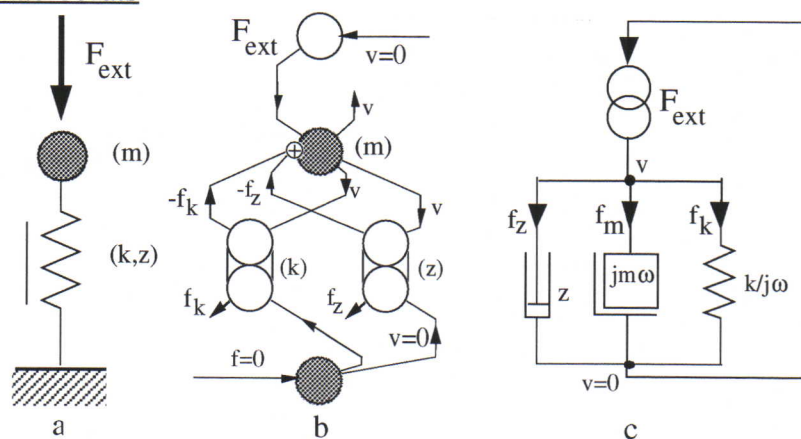


figure 3.12. (a) La cellule : une masse attachée au sol par un ressort et une viscosité (b) la cellule en réseau Cordis-Anima (c) la même cellule en réseau de Kirchhoff

Il s'agit d'un point matériel unidimensionnel de masse m lié au sol par une interaction viscoélastique de raideur k et de viscosité z . La figure 3.12.b montre le réseau Cordis-Anima. Ce réseau contient une masse mobile donc le réseau de Kirchhoff équivalent contient deux nœuds dont l'un représente le sol. L'autre nœud est lié au nœud sol par un dipôle masse représentant la masse de la cellule. D'autre part, dans la représentation Cordis-Anima, la masse est liée au sol par deux interactions donc dans le réseau de Kirchhoff équivalent les deux nœuds sont également liés par des dipôles en parallèle représentant ces interactions. Le réseau résultant est représenté sur la figure 3.12.c

Trois cellules Cordis liées

A présent nous allons étudier un réseau plus complexe composé de trois cellules de masse m , de raideur k_s et de viscosité z_s liées par des interactions viscoélastiques de raideur k_v et de viscosité z_v . Les deux cellules aux extrémités sont liées au sol par des interactions du même type (raideur k_v et viscosité z_v)

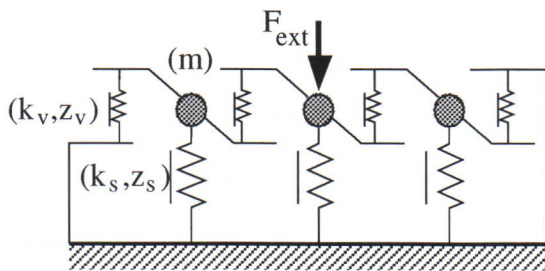


figure 3.13 Trois cellules liées par des interactions viscoélastiques

Ce modèle contient trois points mobiles de masse m , donc le réseau de Kirchhoff équivalent contient quatre nœuds dont un représente le sol. Les trois autres nœuds sont liés au nœud sol par des dipôles de masse m . Chacune des masses est liée au sol par un ressort de raideur k_s et une viscosité z_s . Donc dans le réseau de Kirchhoff équivalent, les trois nœuds représentant les trois masses sont liés au nœud sol par deux dipôles en parallèle

représentant respectivement une élasticité de valeur k_s et une viscosité de valeur z_s . Dans le réseau Cordis-Anima, les trois masses sont liées les unes aux autres par des élasticités de valeur k_v et des viscosités de valeur z_v . Donc dans le réseau de Kirchhoff équivalent, les nœuds correspondant à ces masses sont liés par des dipôles correspondant à des élasticités de valeur k_v et des viscosités de valeur z_v . La figure 3.14 représente le réseau de Kirchhoff résultant.

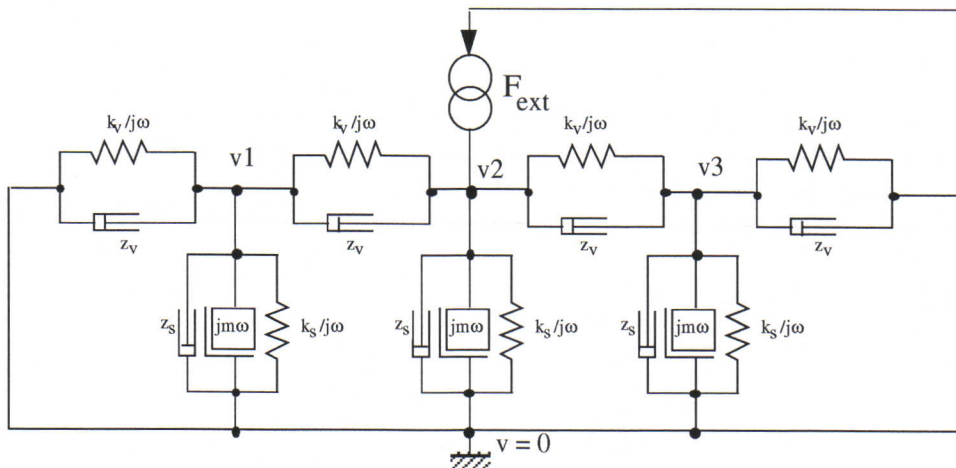


figure 3.14. Le même modèle représenté par un réseau de Kirchhoff.

3.2.2.4. Le calcul d'admittances équivalentes dans les réseaux de Kirchhoff

Nous avons introduit les réseaux de Kirchhoff pour permettre le calcul d'admittances équivalentes, i.e. pour pouvoir calculer l'admittance d'un modèle à partir de l'admittance

de ses constituants. Dans ce paragraphe nous rappelons (cf [BN 83]) les règles de composition des admittances dans les réseaux de Kirchhoff.

Dans les réseaux de Kirchhoff, pour calculer une admittance on observe le réseau par deux bornes. Autrement dit on considère tout le réseau comme un grand dipôle. (Ces deux bornes jouent le même rôle que le point de communication dans les réseaux Cordis-Anima.)

Des dipôles en série sont parcourus par la même force et la vitesse aux bornes de l'ensemble des dipôles est la somme des vitesses aux bornes de chaque dipôle donc l'admittance équivalente est la somme des admittances des constituants en série. Des dipôles montés en parallèle ont la même vitesse à leur borne mais les forces qui les parcourent s'ajoutent. Donc ici on ajoute l'inverse des admittances. Les règles de composition ainsi obtenues sont énoncées sur la figure 3.15 pour le cas de deux dipôles.

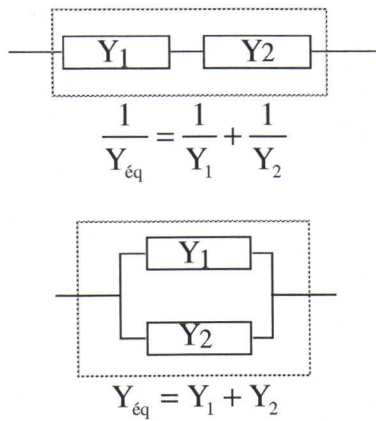


figure 3.15. La composition des admittances, en série et en parallèle, dans les réseaux de Kirchhoff

Grâce à ces règles d'assemblage, l'admittance de réseaux très complexes constitués de la mise en série et/ou de la mise en parallèle de dipôles ou de groupes de dipôles peut être exprimée en fonction de celle de ses constituants.

Conclusion sur les calculs d'admittance

Nous pouvons à présent calculer l'admittance d'un réseau Cordis-Anima linéaire (ou étudié dans un domaine linéaire) quelconque en un de ses points de communication N. Pour cela, nous construisons son équivalent Kirchhoff et nous repérons les deux nœuds correspondant au point de communication N. Nous calculons l'admittance équivalente Y_{eq} du réseau de Kirchhoff entre ces deux points grâce aux règles d'assemblage ci-dessus. Y_{eq} est alors l'admittance équivalente du réseau Cordis-Anima

vu à travers N.

3.2.3. L'ÉNERGIE ÉCHANGÉE ENTRE UN OBJET ET SON EXTÉRIEUR

3.2.3.1. La densité spectrale d'énergie (la D.S.E.)

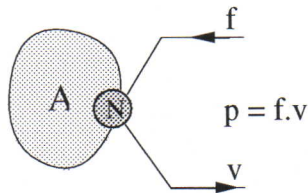


figure 3.16 La puissance p échangée entre un objet Cordis-Anima A et son environnement par l'intermédiaire du point de communication N (en l'occurrence un point de type M)

La puissance $p(t)$ instantanée développée par une force $f(t)$ appliquée à un point se déplaçant à une vitesse $v(t)$ est égale au produit scalaire des deux vecteurs $p(t) = f(t) \cdot v(t)$. La puissance échangée entre un objet Cordis-Anima A et son environnement à travers un point de communication N (de type L ou M) avec une force f et une vitesse v s'exprime de la même façon. Cf. figure 3.16. Cette puissance est toujours finie.

La durée T d'une simulation est également finie donc on peut définir l'énergie totale E échangée par A et son environnement :

$$E = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T f(t) \cdot v(t) dt \quad (3.7)$$

Le théorème de l'intégrale de Fourier énonce que, moyennant certaines conditions de continuité et d'intégrabilité (cf. Annexe A) tous les signaux peuvent être décomposés en

une somme continue de signaux harmoniques de fréquence ω . Pour les considérations énergétiques, nous verrons qu'il est souvent plus intéressant de travailler, non pas avec l'énergie totale E , mais avec l'énergie correspondant à chaque composante harmonique de fréquence ω . Ainsi, la grandeur qui nous intéresse est $\Gamma_{fv}(\omega)$ la *densité spectrale d'énergie (DSE) croisée entre f et v* .

$$\Gamma_{fv}(\omega) = V(\omega) F^*(\omega) \quad (\text{A.16})$$

La somme des énergies de ces composantes harmoniques est égale à l'énergie totale E . (Théorème de Parseval cf[Max 72]). La DSE croisée $\Gamma_{fv}(\omega)$ est une grandeur complexe.

3.2.3.2. DSE et admittance

La DSE croisée $\Gamma_{fv}(\omega)$ caractérisant l'énergie échangée avec un objet A à travers un point de communication N peut s'exprimer en fonction de l'admittance de l'objet A vu à travers le point N et en fonction du spectre de la vitesse en ce point N : $|V(\omega)|^2$.

$$\Gamma_{fv}(\omega) = V(\omega) F^*(\omega) = Y(\omega) |V(\omega)|^2 \quad (3.9)$$

Si l'objet A est une masse, alors $\Gamma_{fv}(\omega) = jm\omega |V(\omega)|^2$. D'après cette expression, si la vitesse $V(\omega)$ est donnée, alors la force générée et l'énergie échangée sont maximales lorsque la masse est grande, et lorsque l'amplitude de l'excitation de vitesse aux hautes fréquences est élevée. Elles sont minimales lorsque la masse est faible et lorsque l'amplitude de la vitesse aux hautes fréquences est faible.

Si l'objet A est une interaction élastique linéaire alors $\Gamma_{fv}(\omega) = k |V(\omega)|^2 / j\omega$. D'après cette expression, si la vitesse $V(\omega)$ est donnée, alors la force générée et l'énergie échangée sont maximales lorsque la raideur est grande, et lorsque l'amplitude de l'excitation de vitesse aux basses fréquences est élevée. Elles sont minimales lorsque la raideur est faible et lorsque l'amplitude de la vitesse aux basses fréquences est faible.

Si l'objet A est une interaction visqueuse linéaire alors $\Gamma_{fv}(\omega) = z |V(\omega)|^2$. D'après cette expression, si la vitesse $V(\omega)$ est donnée, alors la force générée et l'énergie échangée ne dépendent pas de la fréquence. Elles sont proportionnelles à la viscosité.

Dans les trois cas, l'énergie échangée augmente avec le carré de la DSE de la vitesse. Pour connaître l'énergie échangée avec l'extérieur par un réseau complexe composé de ces trois éléments, il faut calculer l'admittance équivalente du réseau vu du point de communication qui nous intéresse. A priori cette densité d'énergie aura à la fois une composante réelle et imaginaire.

3.2.4. LA CONDITION DE L'INFLUENCE UNIDIRECTIONNELLE

A présent notre système d'étude n'est pas un modèle A mais deux modèles A et B extraits d'un réseau de modèles. Ces points sont liés par une paire de points de communication. Cf. figure 3.7.b.

3.2.4.1. La quantification de l'influence entre deux modèles

L'influence entre deux objets n'est possible que lorsqu'il y a échange d'énergie. Le fait qu'une interaction entre ces deux objets puisse ou non influencer sensiblement le comportement de l'un d'eux, dépend de l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par cette interaction, comparé à celui de l'énergie mise en jeu par les comportements propres respectifs des deux objets.

Ces énergies sont représentées par des DSE croisées $\Gamma_{fv}(\omega)$. Nous nous intéresserons aussi bien aux parties réelles qu'aux parties imaginaires de ces DSE, puisqu'un objet peut en influencer un autre quelque soit la valeur moyenne des échanges d'énergie. Les grandeurs pertinentes sont les modules de DSE croisée $|\Gamma(\omega)|$.

Le comportement du modèle A influence celui du modèle B si et seulement si l'énergie échangée entre les deux modèles par leurs points de communication est supérieure ou du même ordre de grandeur, que l'énergie globalement mise en jeu dans le comportement interne de B en ce point. Cette condition est exprimée par : $|\Gamma(\omega)| \geq \approx |\Gamma_B(\omega)|$

De même le comportement d'un modèle A n'influence pas celui de B si et seulement si l'énergie échangée entre les deux modèles par leurs points de communication est négligeable devant l'énergie globalement mise en jeu dans le comportement interne de A en ce point. Cette seconde condition est exprimée par : $|\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_B(\omega)|$

En fin de compte trois cas peuvent se présenter :

$$1. |\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_A(\omega)| \text{ et } |\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_B(\omega)| \quad (3.10)$$

Dans ce cas, et seulement dans ce cas, le comportement de A n'a pas d'influence sur celui de B et réciproquement. Les connexions entre A et B peuvent être coupées dans les deux sens.

$$2. |\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_A(\omega)| \text{ et } |\Gamma(\omega)| \geq \approx |\Gamma_B(\omega)| \quad (3.11)$$

Dans ce cas, et seulement dans ce cas, le comportement de B n'a pas d'influence sur celui de A mais le comportement influence celui de B. La connexion allant de B vers A peut être coupée, mais celle de A vers B doit rester. Le cas $|\Gamma(\omega)| \geq |\Gamma_A(\omega)|$ et $|\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_B(\omega)|$ est le cas exactement symétrique du précédent : c'est la connexion de A vers B qui peut être coupée et la connexion qui va de B vers A qui doit être laissée.

$$3. \text{ Tous les autres cas : } |\Gamma(\omega)| \geq \approx |\Gamma_A(\omega)| \text{ et } |\Gamma(\omega)| \geq \approx |\Gamma_B(\omega)| \quad (3.12)$$

Dans ce cas, l'influence entre les deux modèles est réciproque. Aucune des connexions ne peut être coupée.

Grâce à ce principe, nous pouvons évaluer l'influence d'un modèle A sur un autre modèle B à tout moment ou à toute fréquence. Mais nous voulons connaître cette influence, non pas en fonction des signaux de vitesse et de force, mais en fonction des caractéristiques intrinsèques des deux modèles A et B en jeu. Pour cela nous aurons recours aux admittances (§ 3.2.2.)

3.2.4.2. Une condition d'unidirectionnalité portant sur les modèles

Soient les deux modèles A et B en communication à travers les points de communication N_A et N_B . D'après le paragraphe § 3.2.2.2, si les modèles A et B sont linéaires (ou étudiés dans un domaine linéaire) alors la relation entre la force et la vitesse échangées entre les modèles A et B aux points N_A et N_B est linéaire (cf relation (3.5))

$$F(\omega) = F_{\acute{e}qA}(\omega) + F_{zA}(\omega) = F_{\acute{e}qA}(\omega) + Y_{\acute{e}qA}(\omega)V(\omega) \quad (3.13)$$

$$F(\omega) = F_{\acute{e}qB}(\omega) + F_{zB}(\omega) = F_{\acute{e}qB}(\omega) + Y_{\acute{e}qB}(\omega)V(\omega) \quad (3.14)$$

où $Y_A(\omega)$ et $Y_B(\omega)$ sont les admittances équivalentes respectives de A et de B vus à travers N_A et N_B . $F_{\acute{e}qA}(\omega)$ et $F_{\acute{e}qB}(\omega)$ sont les générateurs équivalents ramenés aux points N_A et N_B . Cette situation est décrite sur la figure 3.17 sous la forme d'un réseau de Kirchhoff. Dans cette représentation, les points de communication N_A et N_B correspondent respectivement aux bornes du modèle A et B. Ces bornes sont reliées et parcourues par une force f . La différence de vitesses entre les deux bornes est de v .

Dans la suite, pour alléger l'écriture, nous omettrons d'expliciter la dépendance par rapport à la variable ω . A titre d'exemple $F(\omega)$, $V(\omega)$, $\Gamma_A(\omega)$, $Y_A(\omega)$, $F_{zA}(\omega)$, $F_{\acute{e}qB}(\omega)$ seront notés respectivement F , V , Γ_A , Y_A , F_{zA} , et $F_{\acute{e}qB}$.

L'énergie mise en jeu dans le comportement interne de A et de B est celle portée par les forces F_{zA} et F_{zB} traversant respectivement les admittances Y_A et Y_B .

$$\Gamma_A = V F_{zA}^* = Y_A |V|^2 \quad \Gamma_B = V F_{zB}^* = Y_B |V|^2 \quad (3.15)$$

La DSE croisée caractérisant l'énergie échangée entre les deux modèles est de

$$\Gamma = V F^* = V F_{\acute{e}qB} + Y_B |V|^2 = -V F_{\acute{e}qA} - Y_A |V|^2 \quad (3.16)$$

D'après le paragraphe précédent, (§ 3.2.3.2) l'influence mutuelle des modèles A et B dépend des valeurs relatives de $|\Gamma_A|$, $|\Gamma_B|$ et de $|\Gamma|$. Or à un facteur $|V|$ près, l'étude de ces valeurs relatives équivaut à celle de $|F_{zA}|$, $|F_{zB}|$ et de $|F|$

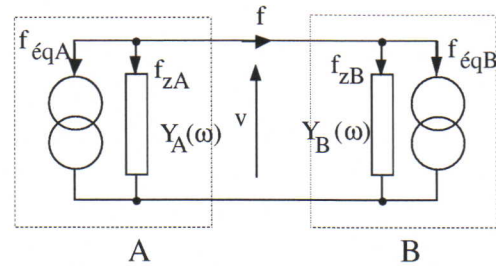


figure 3.17 Les modèles A et B vus à travers deux bornes échangeant une vitesse v et une force f . A et B sont caractérisés par des admittances équivalentes $Y_A(\omega)$ et $Y_B(\omega)$ et par des générateurs $f_{\acute{e}qA}$ et $f_{\acute{e}qB}$ ramenés aux bornes.

Des deux relations (3.13) et (3.14) on tire :

$$V = -\frac{F_{\acute{e}qA} + F_{\acute{e}qB}}{Y_A + Y_B} \quad (3.17)$$

Il en résulte les expressions de $|F_{zA}|$, $|F_{zB}|$ et de $|F|$

$$|F_{zA}| = |Y_A V| = \left| \frac{Y_A}{Y_A + Y_B} \right| |F_{\acute{e}qA} + F_{\acute{e}qB}| \quad |F_{zB}| = |Y_B V| = \left| \frac{Y_B}{Y_A + Y_B} \right| |F_{\acute{e}qA} + F_{\acute{e}qB}| \quad (3.18)$$

$$|F| = |F_{zB} + F_{\acute{e}qB}| = |Y_B V + F_{\acute{e}qB}| = \left| \frac{Y_A F_{\acute{e}qB} - Y_B F_{\acute{e}qA}}{Y_A + Y_B} \right| \quad (3.19)$$

3.2.4.3. Conclusion

Ce paragraphe est la conclusion de l'ensemble du sous-chapitre § 3.2. Il énonce les conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les paramètres des modèles A et B, dans lesquelles on peut couper des connexions entre deux modèles A et B.

Influence mutuelle négligeable

D'après la relation (3.10) pour que le comportement du modèle B n'influence pas celui de A et réciproquement, il faut et il suffit que : $|\Gamma| \ll |\Gamma_A|$ et $|\Gamma| \ll |\Gamma_B|$

$$\Leftrightarrow |F| \ll |F_A| \text{ et } |F| \ll |F_B|$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{cases} \left| Y_A F_{\text{éqB}} - Y_B F_{\text{éqA}} \right| \ll \left| Y_A (F_{\text{éqA}} + F_{\text{éqB}}) \right| \\ \left| Y_A F_{\text{éqB}} - Y_B F_{\text{éqA}} \right| \ll \left| Y_B (F_{\text{éqA}} + F_{\text{éqB}}) \right| \end{cases} \quad (3.20)$$

L'influence entre les deux modèles est strictement nulle si et seulement si :

$$\boxed{Y_A F_{\text{éqB}} = Y_B F_{\text{éqA}}} \quad (3.21)$$

Si (3.20) est satisfaite, A et B sont indépendantes. Les deux connexions liant le modèle A au modèle B peuvent être coupées.

Influence unidirectionnelle de A sur B

D'après (3.11) pour que le comportement du modèle B n'influence pas celui de A, mais que celui de A puisse influencer celui de B, il faut et il suffit que $|\Gamma_B| \leq |\Gamma| \ll |\Gamma_A|$

$$\Leftrightarrow |F_B| \leq |F| \ll |F_A|.$$

ou, de manière équivalente :

$$\boxed{\left| Y_B (F_{\text{éqA}} + F_{\text{éqB}}) \right| \leq \left| Y_A F_{\text{éqB}} - Y_B F_{\text{éqA}} \right| \ll \left| Y_A (F_{\text{éqA}} + F_{\text{éqB}}) \right|} \quad (3.22)$$

Lorsque (3.22) est satisfaite, alors la connexion allant de B vers A peut être coupée, alors que la connexion allant de A vers B ne doit pas être coupée. Réciproquement, pour que le comportement du modèle A n'influence pas celui de B, mais que celui de A puisse influencer celui de B, la condition nécessaire et suffisante s'obtient à partir de (3.22) en échangeant les indices A par B.

Dans le cas particulier mais néanmoins fréquent, où un des modèles (par exemple B) est passif (i.e. $F_{\text{éqB}}=0$) alors toute influence unidirectionnelle ne peut être dirigée que de A sur B. La condition (3.22) se simplifie :

$$\boxed{|Y_B| \ll |Y_A|} \quad (3.23)$$

Dans la suite, c'est essentiellement cette relation qui sera utilisée.

NB. Il est à noter que dans ce qui précède nous avons utilisé des vitesses et des forces scalaires. Donc ces relations sont vraies pour des modèles où force et vitesse sont parallèles et unidimensionnelles (modèles 1D). Dans le cas d'un modèle 3D, \mathbf{V} et \mathbf{F} sont des vecteurs 3D. Si on considère le modèle dans un domaine linéaire alors l'impédance et l'admittance ne sont plus des nombres mais des matrices (respectivement $[Z]$ et $[Y]$). Dans ce cas, on peut montrer que les résultats ci-dessus (3.20, 3.21 et 3.22) s'appliquent également au cas 3D (en remplaçant Y par $[Y]$ et le scalaire force F par le vecteur force \mathbf{F}). Par contre (3.23) devient :

$$\left| [Y_B] F_{\text{éqA}} \right| \ll \left| [Y_A] F_{\text{éqA}} \right|.$$

Cependant l'utilisation de cette représentation n'est pas aisée. Donc le cas échéant, pour l'application de ces relations aux cas 3D, plutôt que d'utiliser ces relations, nous projeterons les situations 3D dans plusieurs espaces 1D où on pourra utiliser la relation (3.22)

3.2.5. APPLICATION À UN MODÈLE SIMPLE

3.2.5.1. Principes

Nous allons appliquer ce principe à un modèle simple. Il s'agit d'une cellule Cordis (cf. § 3.2.2.3) de masse m , de raideur k et de viscosité z , en interaction de butée viscoélastique (de raideur K de viscosité Z et de seuil S) avec un point matériel de masse M appelé marqueur. Ce marqueur est mu par un générateur de force F_A représentant l'influence des autres objets interagissant avec le marqueur. (cf. figure 3.18) Dans les chapitres suivants cette étude sera appliquée au cas de l'écran d'épingles en interaction avec des marqueurs. (Cf. chapitres § 6)

L'utilisation d'une butée viscoélastique introduit un élément de non-linéarité. Lorsque la différence des vitesses $|\Delta v| = |v - v_M|$ entre le marqueur et la cellule reste, en module, supérieure à S , alors la force d'interaction entre la cellule et le marqueur est nulle. Nous sommes dans un sous-domaine de fonctionnement où le système est linéaire et où le marqueur et la cellule sont tout à fait indépendants. Si nous restons dans ce sous-domaine, les deux connexions liant A et B peuvent être coupées. Lorsque $|\Delta v|$ est inférieur à S , alors l'interaction entre le marqueur et la cellule est équivalente à un ressort de raideur k , de viscosité z et de longueur à vide S . Donc nous sommes également dans un sous-domaine de fonctionnement linéaire. Dans la suite de ce paragraphe, nous remplacerons donc la butée viscoélastique par un tel ressort et nous nous intéresserons à l'étude de ce système linéaire. Nous construirons le réseau de Kirchhoff équivalent et nous en déduirons les admittances équivalentes Y_A et Y_B de A et de B vues à travers leur point de communication respectifs.

Le modèle B est passif donc il ne peut pas y avoir de liaison unidirectionnelle allant de B vers A. Par contre il est possible d'avoir une liaison unidirectionnelle allant de A vers B à condition que (3.23) soit vérifiée. Nous chercherons donc à déterminer dans quelles conditions portant sur $(m, k, z, M, K, Z, \omega)$ cette relation est vraie.

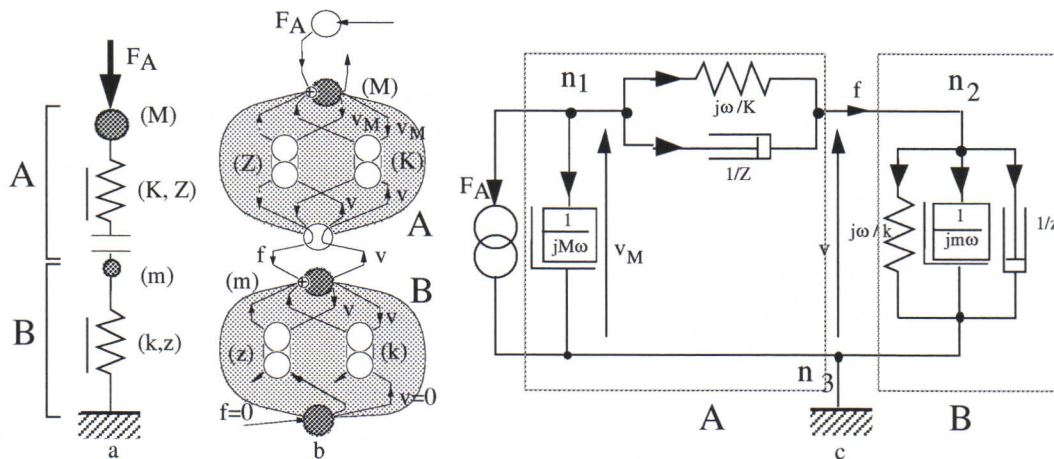


figure 3.18 Le point marqueur (A) interagissant avec une cellule (B) avec une représentation masse-ressort (a) une représentation Cordis-Anima (b) et une représentation en réseau de Kirchhoff (c)

La figure 3.18.b décrit ce modèle avec la représentation Cordis-Anima. Dans cette représentation, il y a deux masses mobiles. Donc dans le réseau de Kirchhoff il y a trois nœuds n_1 , n_2 , et n_3 le dernier correspond au sol. n_1 et n_2 sont liés à n_3 par deux dipôles masses représentant respectivement la masse du marqueur et la masse de la cellule. Dans la représentation Cordis-Anima, la masse de la cellule est liée au sol par une élasticité et une viscosité, donc n_2 sera aussi lié à n_3 par un dipôle élasticité en parallèle avec un dipôle viscosité. Enfin la masse de la cellule est liée à la masse du marqueur par une

élasticité de raideur K et une viscosité Z , donc dans le réseau de Kirchhoff équivalent, les nœuds n_1 et n_2 seront également liés par deux dipôles correspondant montés en parallèles. La figure 3.18.c montre le réseau Kirchhoff résultant.

L'évolution de $\log|Y_A|$ et de $\log|Y_B|$ sera décrite en fonction de $\log\omega$ (diagrammes de Bode). Nous nous contenterons de décrire ces courbes par leurs asymptotes et leur points singuliers. Nous supposons ainsi qu'entre ces points singuliers ces courbes sont quasi-linéaires, ce qui est raisonnable pour une large gamme de valeurs.

3.2.5.2. Détermination de $|Y_A|$

$$Y_A = \frac{1}{\frac{1}{jM\omega} + \frac{1}{\frac{K}{j\omega} + Z}} \quad (3.24)$$

$$\log|Y_A| = \log M - \log \left| \frac{K}{j\omega} + Z + jM\omega \right| + \log|K + jZ\omega| \quad (3.25)$$

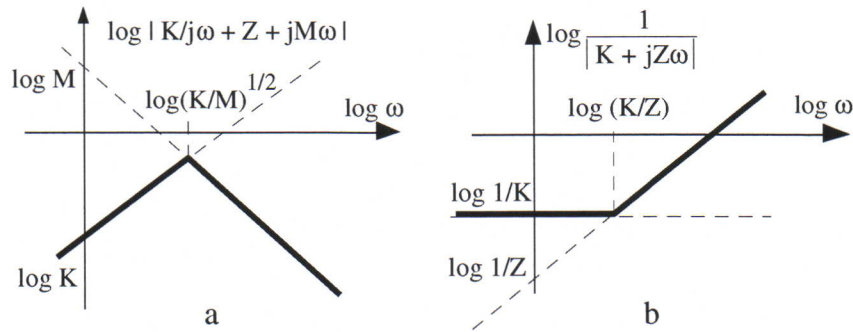


figure 3.19 Les courbes représentant le deuxième terme (a) et le troisième terme (b) de $\log|Y_A|$.

L'allure générale de la courbe finale dépendra de la valeur relative des fréquences de coupure : $\log(K/M)^{1/2}$ et $\log(K/Z)$ ou, autrement dit, de la valeur relative de Z^2 par rapport à $M.K$

Si $Z^2 < MK$ les équations des trois asymptotes sont :

$$\log \omega \ll \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \log|Y_A| \approx \log M + \log \omega \quad (3.26)$$

$$\sqrt{\frac{K}{M}} \ll \log \omega \ll \frac{K}{Z} \quad \log|Y_A| \approx \log K - \log \omega \quad (3.27)$$

$$\log \omega \gg \frac{K}{Z} \quad \log|Y_A| \approx \log Z \quad (3.28)$$

Si $Z^2 > MK$ les équations des trois asymptotes sont :

$$\log \omega \ll \frac{K}{Z} \quad \log|Y_A| \approx \log M + \log \omega \quad (3.29)$$

$$\frac{K}{Z} \ll \log \omega \ll \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \log|Y_A| \approx \log \frac{K}{MZ} + 2 \log \omega \quad (3.30)$$

$$\log \omega \gg \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \log|Y_A| \approx \log Z \quad (3.31)$$

On notera que seul le second segment a une expression différente du cas précédent.

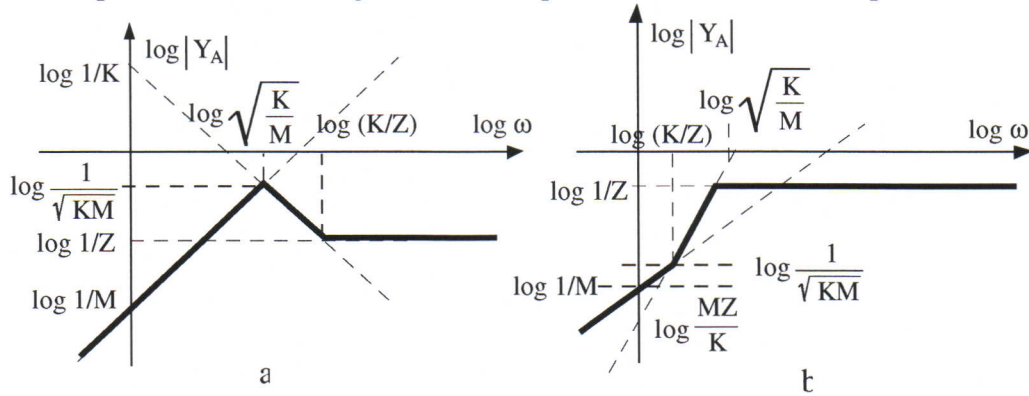


figure 3.20 L'évolution de $\log |Y_A|$ dans le cas $Z^2 < MK$ (a) et dans le cas $Z^2 > MK$ (b)

3.2.5.3. Détermination de $|Y_B|$

$$Y_B = \frac{k}{j\omega} + z + jm\omega \Leftrightarrow \log |Y_B| = \log \left| \frac{k}{j\omega} + z + jm\omega \right| \quad (3.32)$$

Les équations des deux asymptotes sont :

$$\log \omega \ll \log \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \log |Y_B| \approx \log k - \log \omega \quad (3.33)$$

$$\log \omega \gg \log \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \log |Y_B| \approx \log M + \log \omega \quad (3.34)$$

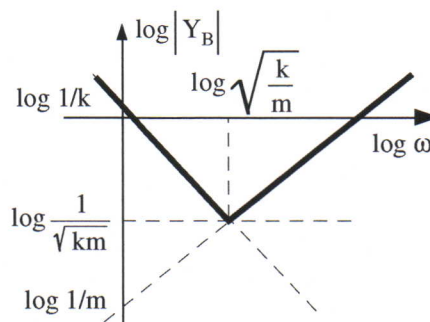


figure 3.21 L'évolution de $\log |Y_B|$

Le comportement de A vu de B aux hautes fréquences est essentiellement visqueux lorsque $Z \neq 0$ ($|Y_A| \approx Z$) et essentiellement élastique lorsque $Z=0$ ($|Y_A| \approx K/\omega$). Aux basses fréquences ce comportement est massique ($|Y_A| \approx M\omega$).

Le comportement de B vu de A est essentiellement massique ($|Y_B| \approx m\omega$) aux hautes fréquences et essentiellement élastique aux basses fréquences ($|Y_B| \approx k/\omega$).

3.2.5.4. Adaptation d'impédance

Étant donné les résultats des paragraphes précédents, il reste à déterminer dans quels cas $|Y_A|$ est très inférieur à $|Y_B|$. Dans ces cas, la connexion allant de B vers A pourra être coupée. Le fait de choisir les paramètres de A et de B de manière à ce que $|Y_B| \ll |Y_A|$ est une *adaptation d'impédance* bien connue en électronique et en électromagnétisme.

L'impossibilité de l'adaptation d'impédance pour toutes les fréquences

D'après les comportements aux hautes et aux basses fréquences, on notera que quelque soient (m,k,z,M,K,Z) , il existe une fréquence ω_{\max} et une fréquence ω_{\min} telles que :

$$\text{Si } \omega < \omega_{\min} \text{ ou } \omega > \omega_{\max} \text{ alors } |Y_A| \ll |Y_B| \quad (3.35)$$

Donc il n'existe aucun jeu de paramètres (m,k,z,M,K,Z) pour lequel la condition $|Y_B| \ll |Y_A|$ soit vérifiée à toutes les fréquences. Donc a priori, la connexion allant de B vers A ne peut jamais être coupée pour toutes les fréquences ω . On ne peut tout au plus qu'élargir l'intervalle $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Pour ce faire, on baisse le diagramme de $|Y_B|$ par rapport à celui de $|Y_A|$, en diminuant la masse m et la raideur k de la cellule (le modèle B).

Cette impossibilité signifie qu'une cellule même très peu raide (faibles valeurs de k) pourra tout de même influencer le comportement d'un marqueur même très lourd lorsque le temps de l'interaction se prolonge ($\omega < \omega_{\min}$). De même une cellule même très légère (faibles valeurs de m) aura une très grande inertie dans les mouvements rapides ($\omega > \omega_{\max}$) et pourra de même influencer le comportement du marqueur.

L'adaptation d'impédance pour les fréquences de la simulation

Le diagramme représentant $|Y_A|$ est composé de trois segments (cf. figure 3.20). Un segment pour les basses fréquences, un segment pour les hautes fréquences et un segment intermédiaire. Nous nous plaçons dans le cas où m et k sont assez faibles pour que les diagrammes de $|Y_A|$ et de $|Y_B|$ s'intersectent seulement en deux points, l'un correspondant à ω_{\min} et appartenant au segment basse fréquence de $|Y_A|$ et l'autre correspondant à ω_{\max} et appartenant au segment haute fréquence de $|Y_A|$. Dans ce cas :

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Si } Z \neq 0 & \omega_{\max} = \frac{Z}{m} \\ \text{Si } Z = 0 & \omega_{\max} = \sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases} \quad (3.36)$$

Or nous avons vu au chapitre précédent (relations (2.1) et (2.2)) que les signaux produits par un modèle numérique ont un spectre compris dans l'intervalle $[F_{\text{éch}}/2, 1/\Delta T]$ où $F_{\text{éch}}$ est la fréquence d'échantillonnage du modèle et où ΔT est la durée de la simulation.

En conclusion, si l'intervalle $[F_{\text{éch}}/2, 1/\Delta T]$ est compris dans l'intervalle $[\omega_{\min}/2\pi, \omega_{\max}/2\pi]$, alors pour toutes les fréquences de la simulation, on aura $|Y_B| \ll |Y_A|$. Dans ce cas la connexion allant de B vers A peut être coupée. Cette condition équivaut à :

$$\Delta T < \pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Si } Z \neq 0 & F_{\text{éch}} < \frac{Z}{m\pi} \\ \text{Si } Z = 0 & F_{\text{éch}} < \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases} \quad (3.37)$$

Il s'agit là de conditions suffisantes. Pour des cas plus particuliers, on pourra calculer les admittances précisément et conclure à la possibilité ou à l'impossibilité de couper les connexions allant de B vers A.

3.3. L'HABILLAGE DANS UN RÉSEAU DE MODÈLES COUPLÉS

Le travail du sous-chapitre précédent se situe au niveau de couples de modèles extraits d'un réseau. Grâce à ce travail, nous pouvons couper un certain nombre de connexions entre les modèles d'un réseau sans que la simulation globale en soit affectée. Le résultat est un réseau de modèles où coexistent les connexions coupées et non-coupées.

Le travail du présent sous-chapitre se situe au niveau du réseau global. L'information circulant entre deux modèles sera caractérisée globalement par des *liaisons* bidirectionnelles ou unidirectionnelles (cf. § 3.1.2.2). Notre objectif sera d'une part de déterminer dans quelles conditions une partie du réseau est l'habillage d'une autre partie, et d'autre part de mettre en évidence toutes les relations moteur/habillage dans un réseau.

3.3.1. LE CRITÈRE PERTINENT : LA COUPE

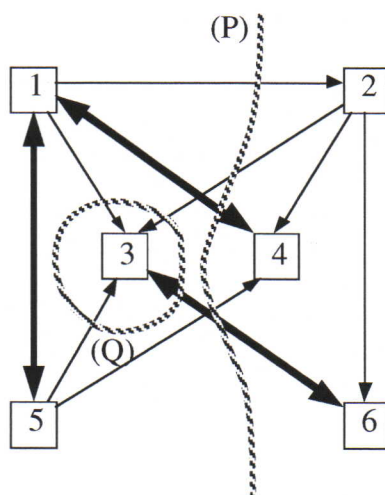
3.3.1.2. les coupes

α. Principe

D'après notre définition, (§ 3.1.3.1) deux sous-ensembles disjoints e_1 et e_2 de modèles dans un réseau sont en relation de moteur/habillage si et seulement si l'ensemble des informations circulant entre e_1 et e_2 va exclusivement de e_1 à e_2 . Pour vérifier cette condition nous aurons recours à une notion utilisée souvent dans les graphes orientés et notamment dans les réseaux de Kirchhoff à savoir la notion de *coupe*.

Dans un réseau de modèles, une coupe est un ensemble minimal de liaisons dont l'extraction augmente d'une unité le nombre de parties connexes du réseau. [BN 83]

Dans cette définition, "minimal" signifie que toute sous-partie d'une coupe n'est pas une coupe. Dans la suite, on représentera une coupe par une ligne séparant l'ensemble des modèles du réseau en deux sous-réseaux de modèles disjoints. Cette ligne peut être ouverte ou fermée. Il va de soi que cette ligne doit traverser seulement des liaisons et non des modèles.



La figure 3.22 montre un réseau de 6 modèles. Dans cette figure, nous avons représenté deux coupes (P) et (Q) par des lignes pointillées. La coupe (P) contient les liaisons (1-2), (1-4) (2-3) (3-6) et (4-5). Elle sépare le réseau en deux ensembles connexes : les modèles 1,3 et 5 d'une part et les modèles 2,4 et 6 d'autre part. La coupe (Q) comprend toutes les liaisons incidentes au modèle 3. Elle comprend les liaisons : (3-1) (3-2) (3-5) (3-6). Elle sépare le réseau en deux ensembles connexes : les modèles 1,2,4,5 et 6 d'une part et le modèle 3 d'autre part.

β. Les coupes unidirectionnelles et bidirectionnelles

figure 3.22 Deux exemples de coupe. Les liaisons bidirectionnelles ont été représentées par des flèches épaisses. Une coupe sépare le réseau en deux sous-ensembles connexes e_1 et e_2 de modèles. Si toutes les liaisons de la coupe sont unidirectionnelles et si toutes vont de e_1 vers e_2 , alors on dit que la coupe est *unidirectionnelle* de e_1 vers e_2 . S'il existe au moins une liaison allant de e_1 vers e_2 et au moins une allant de e_2 vers e_1 alors on dira que la coupe est *bidirectionnelle*.

Soit une coupe séparant le réseau en deux sous-réseaux e_1 et e_2 . Toute information circulant entre les modèles de e_1 et les modèles de e_2 passe nécessairement par les liaisons de la coupe. Si cette coupe est unidirectionnelle, alors aucune information ne peut circuler de l'ensemble e_1 vers l'ensemble e_2 . On peut en conclure que l'ensemble de modèles e_1 est moteur et que l'ensemble e_2 est habillage. De ceci on peut déduire un critère que nous appliquerons tout au long de cette section :

Soient deux ensembles e_1 et e_2 de modèles dans un réseau connexe E de modèles. L'ensemble e_2 est l'habillage de l'ensemble e_1 si et seulement si e_1 et e_2 peuvent être séparés par une coupe unidirectionnelle de e_1 vers e_2 .

A présent, nous disposons d'un critère (la coupe unidirectionnelle) pour déterminer si un ensemble de modèles dans un réseau est l'habillage d'un autre ensemble de modèles. Cependant dans la suite, notre objectif sera d'élaborer un algorithme permettant systématiquement de mettre en évidence toutes les coupes unidirectionnelles qu'il est possible de faire dans un réseau quelconque.

3.3.2. LES PARTITIONS, LES MACRO-GRAPHES, LES BI-CONNEXES

Dans un réseau E de n modèles, on peut regrouper les modèles en ensembles de modèles. Ces ensembles de modèles contiennent au moins un modèle. Un ensemble contenant un seul modèle est un *singleton*.

3.3.2.1. partitions

Soient $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ des ensembles de modèles. On dit que $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ forment une *partition* du réseau si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

- 1/ $(\forall i \in [1, p]) e_i \neq \emptyset$
- 2/ $\bigcup_{i=1}^p e_i = E$
- 3/ $(\forall (i, j) \in ([1, p])^2) (i \neq j \Rightarrow e_i \cap e_j = \emptyset)$

3.3.2.2. macro-graphes, macro-modèles, macro-liaisons

Si $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ forment une partition du réseau E , alors chacun des e_i sera appelé un *macro-modèle*.

Étant donné une partition d'un réseau de modèles, on peut définir un graphe orienté où les nœuds sont, non pas les modèles mais les macro-modèles. Les arcs liant ces nœuds seront alors des *macro-liaisons*. Les macro-liaisons peuvent être unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ce *macro-graphe* est le reflet du réseau de modèles sous-jacent :

Soient deux macro-modèles e_1 et e_2 .

- 1/ Si aucun modèle appartenant à e_1 n'est lié à un modèle appartenant à e_2 , alors il n'y a aucune macro-liaison entre e_1 et e_2 .
- 2/ S'il existe au moins une liaison allant de e_1 vers e_2 et au moins une liaison allant de e_2 vers e_1 alors, entre e_1 et e_2 il y a une macro-liaison bidirectionnelle.
- 3/ S'il existe au moins une liaison bidirectionnelle entre un modèle de e_1 et un modèle de e_2 alors, entre e_1 et e_2 il y a une macro-liaison bidirectionnelle.

4/ Si les liaisons entre les modèles de e_1 et ceux de e_2 sont dirigées exclusivement de e_1 vers e_2 alors la macro-liaison sera dirigée de e_1 vers e_2 (et réciproquement).

Les macro-liaisons caractérisent la circulation de l'information entre ensembles de modèles, de la même manière que les liaisons caractérisent la circulation de l'information entre modèles.

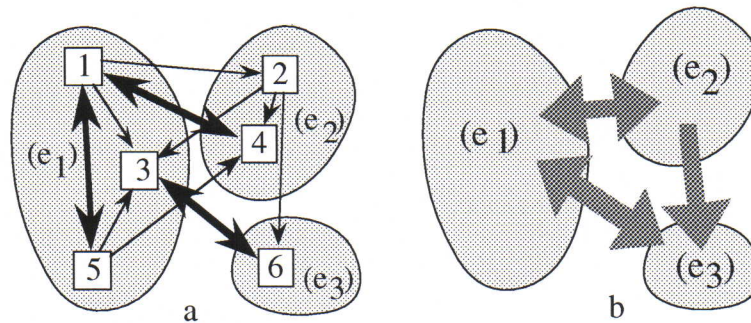


figure 3.23 Une partition d'un réseau en trois macro-modèles e_1 , e_2 , et e_3 et le macro-graphe qui en résulte. Les macro-liaisons sont représentées par des flèches grises

Prenons le cas simple du réseau de la figure 3.22. Les ensembles de modèles $\{e_1, e_2, e_3\}$ (avec $e_1 = \{1, 3, 5\}$, $e_2 = \{2, 4\}$ et $e_3 = \{6\}$) forment une partition du réseau. Donc e_1 , e_2 , et e_3 sont des macro-modèles. Le macro-graphe résultant est alors déduit des liaisons entre les modèles dans le réseau. Ce macro-graphe est représenté sur la figure 3.23.b

NB. Un cas particulier de partition d'un réseau E de n modèles est une partition en n singletons. Dans ce cas, la topologie du macro-graphe sera exactement identique à celle du réseau E .

3.3.2.3. Regroupement de macro-modèles

Soit E un réseau de n modèles. Soient $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ des ensembles de modèles formant une partition de E . Le *regroupement* de deux macro-modèles e_i et e_j ($i \neq j$) est une opération consistant à remplacer e_i et e_j par un seul ensemble de modèles e_{p+1} dont les éléments sont la réunion des éléments de e_i et les éléments de e_j .

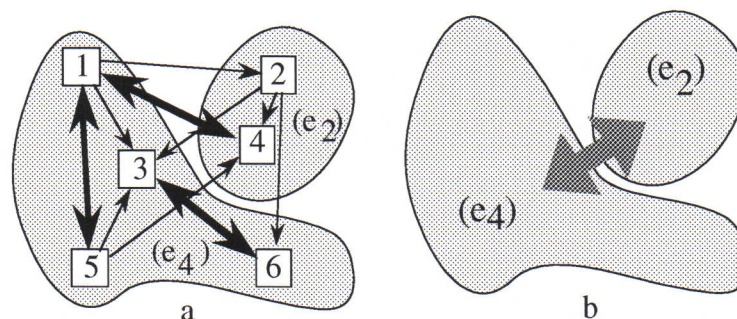


figure 3.24. Le regroupement de e_1 et e_3 , en un ensemble de modèles e_4 . $\{e_2, e_4\}$ est toujours une partition de E . e_2 et e_4 sont des macro-modèles. La bidirectionnalité de la liaison entre les modèles 1 et 4 implique que la macro-liaison entre e_2 et e_4 soit bidirectionnelle.

(P₁) → On montre facilement que $\{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_p, e_{p+1}\}$ qui est l'ensemble des modèles résultant du regroupement de e_i et e_j forme également une partition de E .

Un regroupement est une opération agissant sur un macro-graphe. Cette opération résulte en un nouveau macro-graphe, dont le nombre de macro-modèles a diminué d'une unité. Dans le cas du graphe de la figure 3.23, la figure 3.24 montre le regroupement des macro-modèles e_1 et e_3 en un macro-modèle e_4 . Le macro-graphe $\{e_1, e_2, e_3\}$ est ainsi transformé en le macro-graphe $\{e_2, e_4\}$

3.3.2.4. Les bi-connexes et les macro-circuits

Un *bi-parcours* est une suite ordonnée de macro-modèles telle que chaque macro-modèle de la suite est lié au macro-modèle précédent par une macro-liaison bidirectionnelle.

Un *bi-connexe* est un ensemble de macro-modèles tel que deux macro-modèles de cet ensemble peuvent toujours être reliés par au moins un bi-parcours.

Un *macro-circuit* est une suite ordonnée $(e_i)_{i \in [1,n]}$ de n macro-modèles telle que :

- 1/ Pour $i \in [1, n-1]$ e_i est lié à e_{i+1} , soit par une macro-liaison bidirectionnelle, soit par une macro-liaison unidirectionnelle allant de e_i vers e_{i+1}
- 2/ e_n est lié à e_1 , soit par une macro-liaison bidirectionnelle, soit par une macro-liaison unidirectionnelle allant de e_n vers e_1 .

3.3.3. LES EMIS ET LES E2MIS

Dans un réseau fini de modèles, le nombre de coupes unidirectionnelles est également fini. Donc un couple de modèles est soit séparable soit inséparable par une coupe unidirectionnelle. (En termes de simulation, un couple de modèles est soit découplable soit indécouplable)

3.3.3.1. Les Ensembles de Modèles Indécouplables (EMI)

Un ensemble de modèles dans un réseau est un EMI si et seulement si aucun couple de modèles appartenant à cet ensemble ne peut être séparé par une coupe unidirectionnelle.

(P₂) → Comme l'indique le nom, les modèles appartenant à un EMI doivent tous être simulés ensemble et en une seule étape. Réciproquement si deux modèles doivent être simulés ensemble, alors ils appartiennent à un même EMI.

Le fait qu'un ensemble de modèles soit un EMI exprime une propriété interne à cet ensemble de modèles. Il ne présage en rien de la relation entre les modèles de cet EMI et les modèles extérieurs à cet EMI. Par exemple, il est impossible de dire, a priori, si deux EMIs distincts peuvent être séparés par une coupe unidirectionnelle ou non.

(P₃) → Un ensemble composé d'un seul modèle (un singleton) doit être simulé en une seule étape. Donc un singleton est un EMI.

(P₄) → La réunion de deux EMIs distincts e_1 et e_2 qui ne peuvent pas être séparés par une coupe unidirectionnelle est encore un EMI e_3 .

Donc deux EMIs distincts ne sont pas nécessairement disjoints. (cf e_1 et e_3)

(P₅) → L'ensemble des EMIs d'un réseau de modèles ne forme pas nécessairement une partition du réseau.

3.3.3.2. Les Ensembles Maximaux de Modèles Indécouplables (EMMI ou E2MI).

Un EMI e est un E2MI si et seulement si tout ensemble e' de modèles contenant e , au sens strict, n'est pas un EMI.

NB. On notera que, contrairement aux EMIs, le fait qu'un ensemble de modèles forme un E2MI exprime une propriété à la fois interne et externe à cet ensemble.

Les E2MIs et la relation moteur/habillage

Une conséquence est que, si e est un E2MI, alors il peut être séparé de tout ensemble e'' de modèles non-vide disjoint de e'' par une coupe unidirectionnelle, car sinon, l'ensemble de modèles $e \cup e''$ serait un EMI tout en contenant e au sens strict. Réciproquement, si un EMI e peut être séparé de tout le reste du réseau par des coupes unidirectionnelles, alors tout ensemble e' contenant e au sens strict, contient par définition un élément n'appartenant pas à e et qui peut donc être séparé de e par une coupe unidirectionnelle. Donc un tel ensemble e' n'est pas un EMI. Il en résulte que e est un E2MI. En bref :

(P₆) → Un EMI est un E2MI si et seulement si il peut être séparé de tout le reste du réseau par des coupes unidirectionnelles.

Donc un E2MI est en relation de moteur ou d'habillage avec les autres modèles du réseau. Et réciproquement si un EMI est en relation de moteur/habillage avec le reste du réseau, alors cet EMI est nécessairement un E2MI. Donc l'objectif de ce chapitre, i.e. la recherche de l'ensemble des modèles qui sont en relation de moteur/habillage, équivaut à la recherche de l'ensemble des E2MIs.

La partition unique d'un réseau en E2MIs

Une conséquence de (P₆) est qu'entre deux E2MIs distincts, il est toujours possible de définir une coupe unidirectionnelle. Par conséquent :

(P₇) → Deux E2MIs distincts sont nécessairement disjoints.

Le nombre de coupes unidirectionnelles qu'il est possible de faire dans un réseau est fini. Donc tout couple de modèles est soit découplable soit indécouplable. Donc à chaque modèle A dans un réseau, on peut associer l'ensemble de tous les autres modèles qui sont indécouplables de A . Cet ensemble n'est pas vide car il contient A . De plus, cet ensemble est un E2MI car tout ensemble de modèles plus grand (au sens de l'inclusion) contiendrait un modèle que l'on peut séparer des autres par une coupe unidirectionnelle. Donc :

(P₈) → Tout modèle appartient à au moins un E2MI.

(P₉) → Donc la réunion de tous les E2MIs d'un réseau de modèles est tout le réseau.

D'après (P₇) et (P₉) on peut déduire (P₁₀)

(P₁₀) → L'ensemble des E2MIs d'un réseau forme une partition de ce réseau.

D'après (P₇) et (P₈), un modèle e appartient à un et un seul E2MI. Cette proposition associée à (P₁₀) implique (P₁₁)

$(P_{11}) \rightarrow$ Tout réseau admet une et une seule partition en E2MIs

L'ensemble des E2MIs d'un réseau et l'ensemble des coupes unidirectionnelles sont deux notions duales. L'unique partition d'un réseau en E2MIs détermine toutes les possibilités de coupure unidirectionnelle dans ce réseau. Notre objectif est la mise en évidence de cette partition unique.

3.3.3.3. Graphe orienté sans circuit et l'unique partition en E2MIs

Soient (e_1, e_2, \dots, e_n) un ensemble de n macro-modèles

Dans ce paragraphe nous allons montrer que :

1. Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une partition du réseau
 2. Si tous les (e_i) sont des EMIs
 3. S'ils sont liés seulement par des macro-liaisons unidirectionnelles
 4. Si ce macro-graphe est connexe et ne présente pas de macro-circuit
- (3.38)

alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est l'unique partition du réseau en E2MIs.

L'unicité de la partition en E2MIs a déjà été montrée (P_{11}). Donc nous nous contenterons de montrer que si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors les (e_i) sont des E2MIs.

Nous allons donc étudier (e_1, e_2, \dots, e_n) un ensemble de n macro-modèles vérifiant les quatre conditions de (3.38). Et nous allons montrer que chacun des e_i peut être séparé de e_j ($j \neq i$) par une coupe unidirectionnelle et que par conséquent e_i est un E2MI (P_6).

α . EMIs sources et EMIs puits

Chaque macro-liaison définit un EMI *amont* et un EMI *aval*. On dit que l'EMI amont est l'*antécédent* de l'EMI aval, et que l'EMI aval est le *successeur* de l'EMI amont.

Un *parcours* est une suite ordonnée (e_i) d'EMIs avec un EMI initial et un EMI final telle que chaque EMI e_i , autre que l'EMI initial, est le successeur de l'EMI e_{i-1} .

Un EMI est *source* s'il n'a pas d'antécédents. Un EMI est *puits* s'il n'a pas de successeurs.

β . Le rang d'un EMI

(e_1, e_2, \dots, e_n) est sans circuits. Les trois propositions suivantes s'ensuivent :

$(P_{12}) \rightarrow (e_1, e_2, \dots, e_n)$ comprend au moins un EMI source

$(P_{13}) \rightarrow \forall i \in [1, n]$ il existe toujours au moins un parcours reliant un EMI source à e_i .

$(P_{14}) \rightarrow$ Ce parcours est de longueur finie.

Il en résulte qu'à chacun des e_i on peut associer un *rang* $\mathcal{R}(e_i)$. Ce rang est la longueur du parcours le plus long liant e_i à l'un des EMIs source.

Soient deux macro-modèles e_i et e_j liés par une macro-liaison allant de e_i vers e_j . Il existe un parcours de longueur $\mathcal{R}(e_j)$ entre e_j et un des EMIs source. Donc il existe au moins un parcours de longueur $\mathcal{R}(e_j)+1$ entre e_i et le même EMI source. Donc $\mathcal{R}(e_i) \geq \mathcal{R}(e_j)+1$:

(P₁₅) → Si e_j est un antécédent de e_i alors $\mathcal{R}(e_j) < \mathcal{R}(e_i)$.

Il résulte de (P₁₅) que :

(P₁₆) → Si $\mathcal{R}(e_j) < \mathcal{R}(e_i)$ et si e_i et e_j sont liés alors e_j est en amont de e_i .

(P₁₇) → Si $\mathcal{R}(e_i) = \mathcal{R}(e_j)$ et si $i \neq j$ alors ils ne sont pas liés.

γ . La partition en E2MIs

On suppose toujours que les quatre conditions (3.38) sont vérifiées. Le nombre d'EMIs dans un réseau est fini et le parcours le plus long du graphe a une longueur finie. Donc tout graphe d'EMIs est caractérisé par un rang maximal que nous appellerons *RangMax*.

Soit un entier quelconque $i_0 \in [1, \text{RangMax}-1]$. On peut définir une coupe entre les EMIs de rang $j < i_0$ et les EMIs de rang $j \geq i_0$. On peut également définir une coupe entre les EMIs de rang $j \leq i_0$ et les EMIs de rang $j > i_0$. D'après (P₁₀) les deux coupes sont unidirectionnelles :

(P₁₈) → Un EMI de rang i_0 peut être séparé de tous les EMIs de rang $j < i_0$, ainsi que de tous les EMIs de rang $j > i_0$ par une coupe unidirectionnelle.

Il reste à savoir si un EMI peut également être séparé des EMIs ayant le même rang. Considérons un réseau où le nombre de EMIs de rang i_0 est supérieur à 1. On peut définir une coupe (C) entre les EMIs de rang $j \geq i_0$ et les EMIs de rang $j < i_0$. Toutefois nous plaçons l'un des EMIs (e) de rang i_0 du côté des EMIs de rang $j < i_0$ i.e. du côté opposé à celui de tous les autres EMIs de rang i_0 . En fin de compte la coupe (C) contient :

1. Des liaisons allant d'EMIs de rang $j < i_0$ à des EMIs de rang $j > i_0$.
2. Des liaisons allant d'EMIs de rang $j < i_0$ à des EMIs de rang i_0 différents de e .
3. Des liaisons allant de e à des EMIs de rang $j > i_0$.

D'après (P₁₇) il n'existe aucune liaison entre les EMIs de rang i_0 . D'après (P₁₆) la coupe (C) est une coupe unidirectionnelle.

(P₁₉) → Un EMI peut être séparé de tous les EMIs de même rang par une coupe unidirectionnelle.

Les propositions (P₁₈) et (P₁₉) entraînent la proposition (P₃₀) :

(P₂₀) → Deux EMIs quelconques peuvent être séparés par une coupe unidirectionnelle.

Conclusion : Dans un macro-graphe (e_1, e_2, \dots, e_n) vérifiant les quatre conditions de (3.38), un EMI peut être séparé de tous les autres EMIs par des coupes unidirectionnelles. Donc d'après la proposition (P6) ces EMIs sont des E2MIs. Autrement dit :

Si une partition d'un réseau en EMIs ne contient ni macro-liaisons bidirectionnelles ni macro-circuits, alors cette partition est l'unique partition du réseau en E2MIs.

3.3.4. L'ALGORITHME DE DÉTERMINATION DES E2MIS

Nous allons utiliser les propriétés démontrées ci-dessus pour élaborer l'algorithme de détermination de la partition unique d'un réseau de modèles en E2MIS.

3.3.4.1. Principe

Cet algorithme opère seulement sur des partitions du réseau en EMIs. Toutes les opérations sont effectuées sur des partitions en EMIs et doivent produire des partitions en EMIs. La seule opération possible est le regroupement de macro-modèles. (cf. § 3.3.2.3). Un regroupement n'est autorisé que lorsque le graphe résultant est une partition du réseau en EMIs. Nous montrons qu'après un certain nombre de regroupements, on aboutit à un graphe final qui est une partition en EMIs contenant ni macro-liaison bidirectionnelle ni macro-circuit. Nous avons montré à la section précédente qu'une telle partition est la partition unique du réseau en E2MIS.

Si ce graphe final contient seulement un macro-modèle, i.e. si l'ensemble du réseau de modèles forme un seul grand E2MI, alors cela signifiera qu'aucune partie du réseau ne peut être simulé indépendamment d'une autre partie. Si elle contient plusieurs E2MIS, alors ces E2MIS nous indiqueront l'ensemble de toutes les coupes unidirectionnelles qu'il est possible d'effectuer dans ce réseau.

3.3.4.2. Les règles de regroupement d'EMIs

D'après (P₁) un regroupement effectué sur une partition du réseau résulte en une autre partition du réseau. Pour la conduite de notre algorithme nous devons encore savoir dans quels cas un regroupement dans une partition d'EMIs donne une autre partition en EMIs.

Soient deux macro-modèles e_i et e_j liés par une macro-liaison bidirectionnelle. Alors il existe au moins une liaison allant de e_i à e_j et au moins une liaison allant de e_j à e_i . Donc toute coupe séparant e_i et e_j est nécessairement bidirectionnelle. Donc d'après (P₄) :

(P₂₁) → Le regroupement de deux macro-modèles liés par une macro-liaison bidirectionnelle est un EMI.

De manière plus générale, supposons e_i et e_j soient liés non pas directement par une macro-liaison bidirectionnelle mais par un bi-parcours (Cf. § 3.3.2.3). Toute coupe séparant e_i et e_j contient au moins l'une des macro-liaisons de ce bi-parcours. C'est donc nécessairement une coupe bidirectionnelle.

(P₂₂) → Le regroupement de deux macro-modèles liés par un bi-parcours est un EMI.

Le regroupement de tous les modèles du bi-parcours est également un EMI. Notamment dans un bi-connexe tout couple de macro-modèles peut être lié par un bi-parcours. Donc :

(P₂₃) → Le regroupement de tous les macro-modèles d'un bi-connexe est un EMI

Tout couple (e_i, e_j) appartenant à un macro-circuit peut être lié par un parcours de liaisons allant de e_i vers e_j et par un parcours distinct du premier, allant de e_j vers e_i . Donc toute coupe (C) séparant e_i et e_j contient au moins une liaison appartenant à chacun des deux parcours. Donc (C) est une coupe bidirectionnelle. Donc :

(P₂₄) → Le regroupement des macro-modèles d'un circuit est un EMI.

3.3.4.3. L'algorithme

L'ensemble des singletons est une partition du réseau. D'après (P₂) un singleton est un EMI. Le point de départ de notre algorithme sera donc la partition du réseau de modèles en singletons.

1/ Au départ le macro-graphe est la partition du réseau en singletons ;

2/ Regrouper tous les macro-modèles formant des bi-connexes ;

*/*Ces regroupements peuvent donner naissance */
/* à d'autres macro-liaisons bidirectionnelles. */*

3/ Tant qu'il reste des macro-liaisons bidirectionnelles

Regrouper les macro-modèles liés par une macro-liaison bidirectionnelle ;

/ Le nombre de macro-modèles est fini, donc */
/* l'itération ci-dessus s'arrête toujours. */
/* A ce stade, il n'y a plus de liaisons */
/* bidirectionnelles dans le macro-graphe */*

4/ Si le nombre de macro-modèles dans le macro-graphe est supérieur à 1

Si le macro-graphe comporte des circuits

Regrouper les macro-modèles composant le circuit ;

/ A présent, la structure du graphe est */
/* celle d'un graphe orienté sans-circuit */*

3.3.4.4. Exemple

Soit E un réseau de 14 modèles liés par des liaisons unidirectionnelles et bidirectionnelles. (Cf. figure 3.25). Nous allons partitionner ce réseau en EMI. Ensuite, en appliquant l'algorithme ci-dessus, nous allons regrouper les macro-modèles jusqu'à ce que le graphe obtenu soit orienté et sans circuit.

Etape 1/ "Au départ le macro-graphe est la partition du réseau en singletons ;".

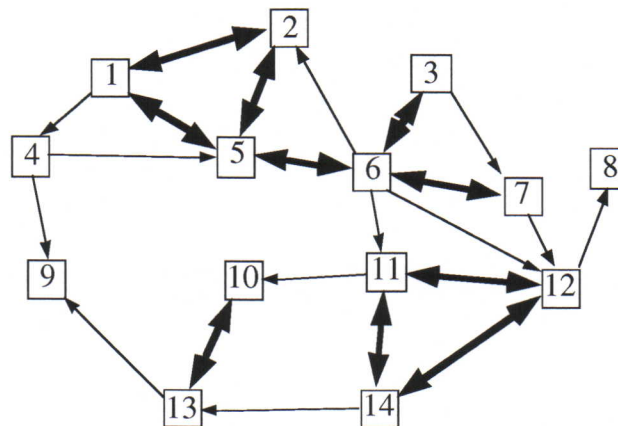


figure 3.25. Le réseau exemple que nous allons partitionner en un EMI et dont nous allons regrouper les macro-modèles jusqu'à ce que le macro-graphe résultant soit un graphe orienté sans circuits.

Pour être cohérent avec la représentation des figures 3.23 et 3.24, nous représenterons les macro-modèles par des surfaces grises et les macro-liaisons par flèches grises. Dans les figures 3.26 à 3.28, le côté droit (a) de la figure montre le réseau de modèles avec le contenu de chaque macro-modèle. Le côté gauche montre le macro-graphe proprement dit. La figure 3.26 montre le résultat de la première étape de l'algorithme.

Etape 2/ "Regrouper tous les macro-modèles formant des bi-connexes ; "

Ce réseau contient 6 bi-connexes dont trois contiennent plus d'un seul modèle. Ces trois ensembles sont : $\{1,2,3,5,6,7\}$, $\{11,12,14\}$ et $\{10,13\}$. Chacun de ces ensembles est EMI car bi-connexe, donc dans chacun, nous regroupons les macro-modèles en un seul. Le résultat de ce regroupement est représenté sur la figure 3.27.

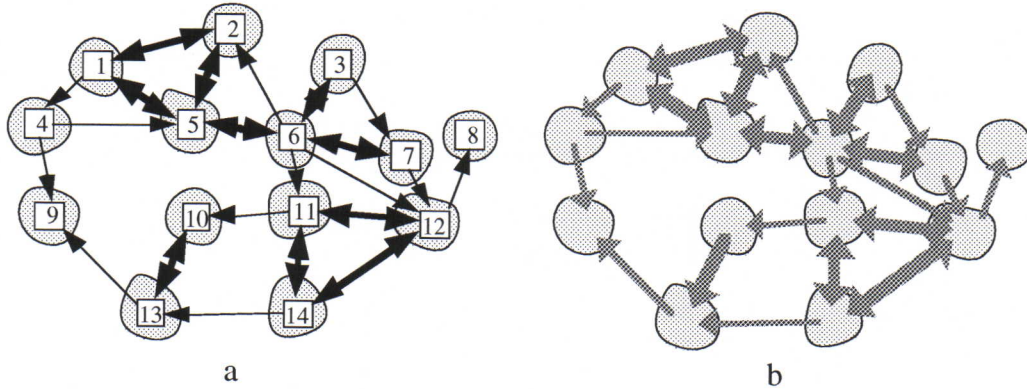


figure 3.26. (a) montre le contenu des macro-modèles En l'occurrence chaque macro-modèle contient un seul modèle. (b) montre le macro-graphe proprement dit.

On peut noter sur la figure 3.27.b que tous les macro-modèles sont liés par des macro-liaisons unidirectionnelles, sauf la macro-liaison entre le macro-modèle A et le macro-modèle B qui, elle, est bidirectionnelle. En effet, dans tous les cas, sauf dans celui-ci, les liaisons entre les modèles appartenant aux macro-modèles vont dans le même sens. Ceci indique que l'information entre les deux macro-modèles circule en sens unique (Cf. § 3.3.2.1). Ceci se traduit donc par une macro-liaison unidirectionnelle indiquant ce sens unique. Par contre, le modèle 4 unique élément du macro-modèle B, est lié aux modèles 1 et 5 qui, tous les deux appartiennent au macro-modèle A. Le modèle 4 est en aval du modèle 1 mais en amont du modèle 5. Ces deux liaisons unidirectionnelles de sens opposé indiquent que globalement l'information circulant entre les macro-modèles A et B effectivement dans les deux sens. (Cf. § 3.3.2.1). Ceci se traduit par une macro-liaison bidirectionnelle.

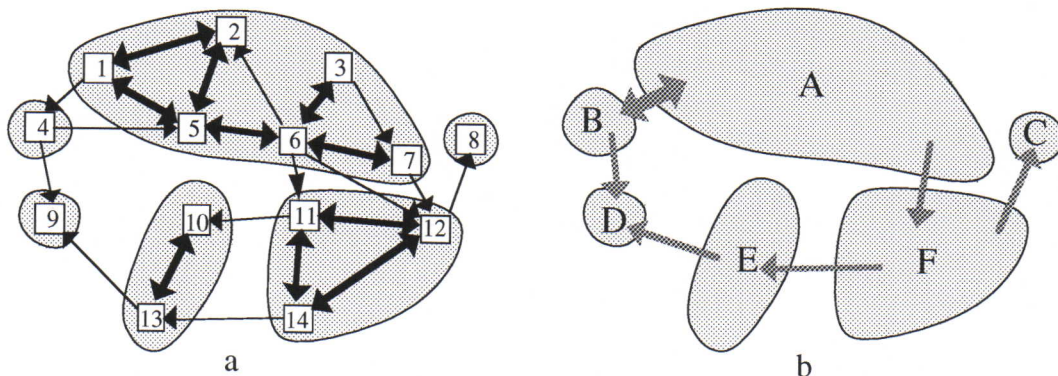


figure 3.27. Le résultat du premier regroupement : celui des bi-connexes.

Etape 3/ "Tant que le nombre de macro-modèles dans le macro-graphe est supérieur à 1

Regrouper les macro-modèles liés par une macro-liaison bidirectionnelle ;"

Dans notre cas, cette étape consiste simplement à regrouper les macro-modèles A et B, puisqu'ils sont liés par une macro-liaison bidirectionnelle et que, par conséquent, ils forment un EMI. (Cf. figure 3.28)

A partir de cette étape, le macro-graphe a une structure de graphe orienté sans liaison bidirectionnelle, dont les nœuds sont les macro-modèles C, D, E, F et G.

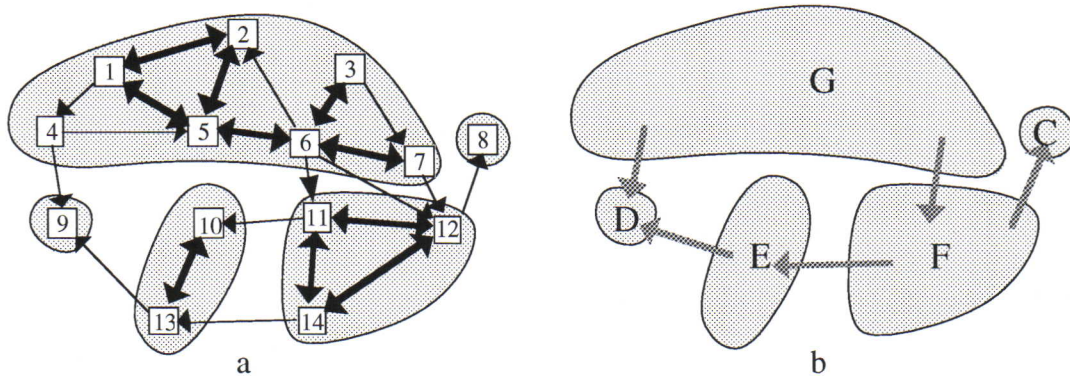


figure 3.28 Les macro-modèles A et B ont été regroupés pour donner le macro-modèle G. Ce dernier, contrairement aux autres macro-modèles n'est pas un bi-connexe, mais est tout de même un EMI.

Etape 4/ "Si le nombre de macro-modèles dans le macro-graphe est supérieur à 1

Si la macro-graphe comporte des circuits

Regrouper les macro-modèles composant le circuit ;"

Dans le cas, de notre macro-graphe, il n'y a pas de circuit : aucun parcours ne passe deux fois pas le même macro-modèle. Donc nous avons déjà un graphe orienté sans circuit. Mais imaginons un instant que la macro-liaison entre les macro-modèles ne soit pas dirigée de G vers D mais au contraire de D vers G. Dans ce cas, nous aurions eu un circuit comportant les macro-modèles D, E, F, et G. Du fait de ce circuit, ces quatre macro-modèles auraient formé un EMI. Nous les aurions donc regroupés en un seul macro-modèle H. Dans le macro-graphe final, nous aurions eu seulement deux macro-modèles : C et H, reliés par une macro-liaison allant de H vers C. Ce graphe final (H→C) aurait été un graphe orienté sans circuit.

3.3.5. LA SIMULATION SÉPARÉE

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment, étant donné une partition d'un réseau en E2MIs, comme celle de la figure 3.28.b, il est possible de procéder à une simulation séparée des modèles.

3.3.5.1. Principe

Le comportement d'un E2MI source ne dépend pas de celui des autres E2MIs. Chaque E2MI source peut être séparé de tout le reste du réseau par une coupe unidirectionnelle où cet E2MI source est en amont et le reste du réseau en aval. Donc Un E2MI source est moteur par rapport à tout le reste du réseau et peut être simulé indépendamment.

Les E2MIs non-source ont des antécédents, et ne peuvent pas être simulés indépendamment d'eux, à moins que ces antécédents aient été simulés avant eux et que les signaux qu'ils auraient du fournir à leurs successeurs aient été enregistrés. C'est ce que nous avons évoqué au paragraphe § 2.3.1.3 (*Les modèles moteur et les modèles habillage*)

Au départ, seuls les E2MIs source (rang 0) peuvent être simulés. Les signaux que produisent ces E2MIs à l'adresse de leurs successeurs sont enregistrés. Les E2MIs de rang 1 ont pour seuls antécédents des E2MIs de rang 0. Donc dans un second temps, les E2MIs de rang 1 peuvent être simulés et les signaux produits enregistrés. Dans les étapes suivantes, un E2MI de rang R a des antécédents de rang inférieur ou égal à R-1. Donc il peut être simulé si les E2MIs de rang inférieur ou égal à R-1 ont été simulés et leurs signaux enregistrés. (C'est une condition suffisante et non une condition nécessaire)

L'ordre de la simulation est donc celui du rang croissant. Pour R allant de 0 à RangMax, on pourra simuler les E2MIs de rang R en utilisant les enregistrements des simulations des E2MIs de rang inférieur ou égal à R-1. On enregistrera les signaux à l'adresse des E2MIs de rang supérieur ou égal à R+1. Les E2MIs de rang R ne sont pas liés entre eux, donc ils peuvent être simulés indépendamment les uns des autres.

En définitive, si le nombre d'E2MIs de rang R est N(R) alors le réseau total pourra être simulé en N étapes où :

$$N = \sum_{R=0}^{\text{RangMax}} N(R) \quad (3.32)$$

3.3.5.2. Exemple

Nous allons décrire la simulation par étape de l'exemple de la figure 3.25 avec la partition décrite dans la figure 3.28. Ce modèle comporte un E2MI source (G) et deux E2MIs puits (C et D). $\text{RangMax} = \mathcal{R}(D) = 3$. Il existe deux E2MIs de rang 2 (C et E). Pour tous les autres rangs, entre 0 et RangMax, il existe seulement 1 E2MI. Donc d'après (3.32) cette simulation s'effectuera en 5 étapes.

- Étape 1 :** **A.** Simulation des modèles des E2MIs de rang 0 (l'E2MI G). On simulera donc simultanément les modèles 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
B. Pendant cette simulation, on enregistrera les signaux produits par les modèles de l'E2MI G à l'adresse des E2MIs successeurs i.e. les E2MIs F et D. On enregistrera donc les signaux circulant sur les liaisons (4→9) (6→11) (6→12) (7→12).

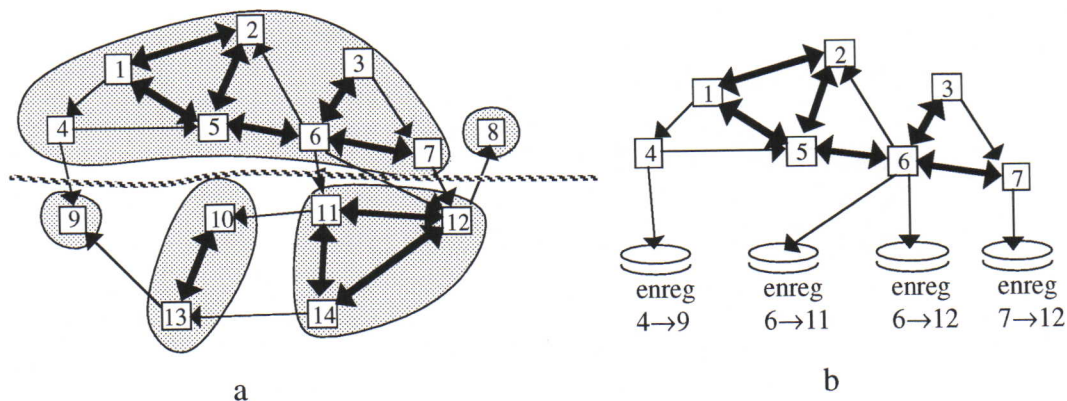


figure 3.29. (a) La coupe entre l'E2MI G et le reste du réseau est unidirectionnelle de G vers les autres E2MIs. (b) Les sept modèles sont extraits du réseau et simulés séparément des autres modèles.

- Étape 2 :** **A.** Simulation des E2MIs de rang 1 (l'E2MI F). On simulera donc simultanément les modèles 11, 12 et 14. Ces simulations sont effectuées grâce à l'enregistrement des signaux de la macro-liaison G→F, i.e. les liaisons (6→11) (6→12) et (7→12).
B. Pendant cette simulation, on enregistrera les signaux circulant sur les

liaisons macro-liaisons $F \rightarrow E$ et $F \rightarrow C$ i.e. les liaisons $(12 \rightarrow 8)$ $(11 \rightarrow 10)$ et $(14 \rightarrow 13)$

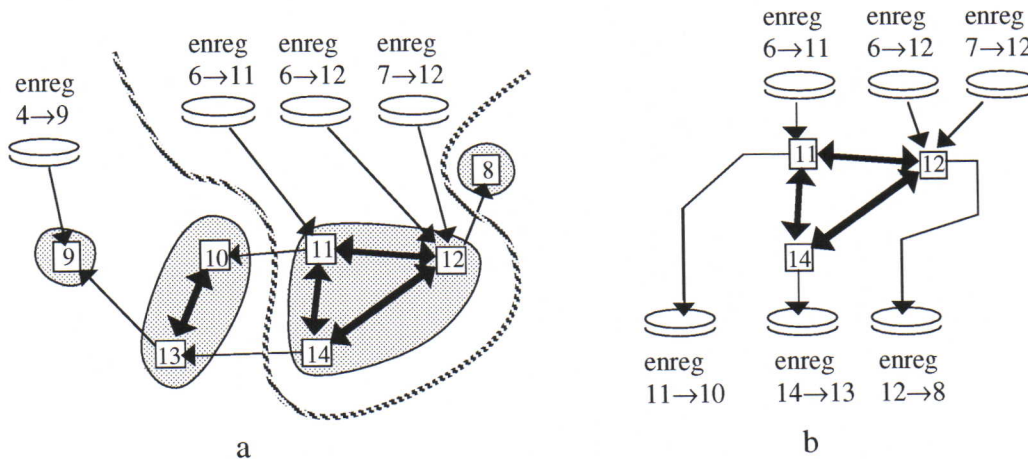


figure 3.30 (a) La coupe entre l'E2MI F et le reste du réseau est unidirectionnelle de F vers les autres E2MIs. (b) Les trois modèles (11,12,14) de cet E2MI sont extraits du réseau et simulés séparément des autres.

Étapes 3 et 4 : Simulation des E2MIs de rang 2 (les E2MIs C et E).

Étape 3 : Simulation de l'E2MI C, i.e. le modèle 8 grâce à l'enregistrement des signaux de la liaison $(12 \rightarrow 8)$. Cet E2MI est un E2MI puits. Il n'a donc pas de successeur.

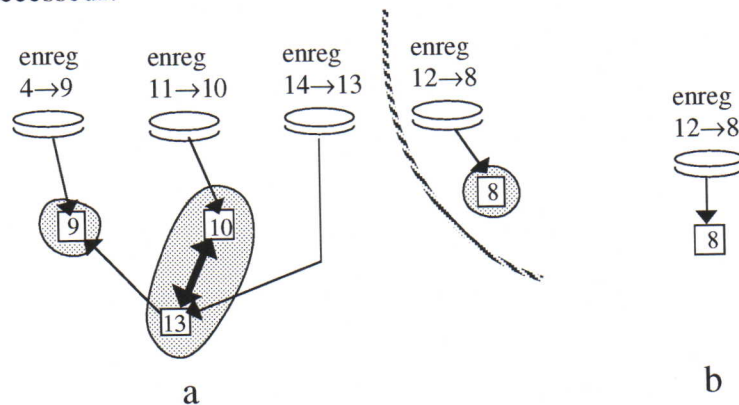


figure 3.31 (a) La coupe séparant l'E2MI C (modèle 8) du reste du réseau est une coupe vide. (b). Le modèle 8 est donc séparé des autres modèles et simulé séparément. Pendant cette simulation, il n'y a pas d'enregistrement puisqu'il s'agit d'un E2MI puits.

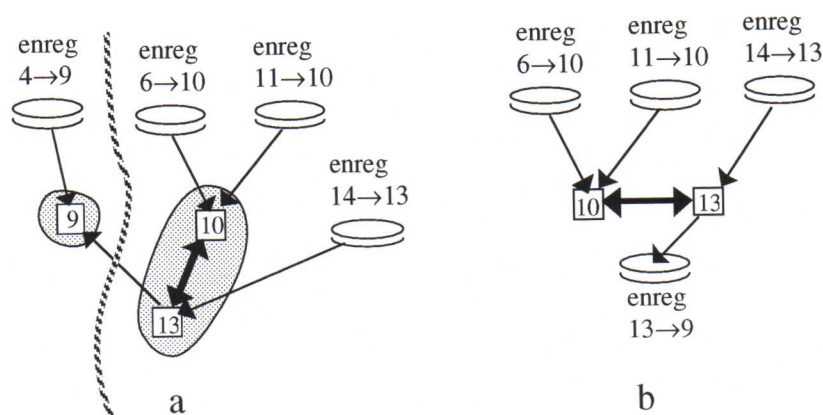


figure 3.32 De même que pour les étapes précédentes, les modèles 10 et 13 de l'E2MI E sont extraits du réseau et simulés séparément.

Étape 4 : A. Simulation de l'E2MI E. On simulera donc simultanément les modèles 10 et 13. Ces simulations sont effectuées grâce à l'enregistrement des signaux circulant sur la macro-liaison $F \rightarrow E$, i.e. sur les liaisons (11 \rightarrow 10) et (14 \rightarrow 13).

B. Pendant cette simulation, on enregistrera les signaux circulant sur la macro-liaison $E \rightarrow D$, i.e. les signaux de la liaison 13 \rightarrow 9.

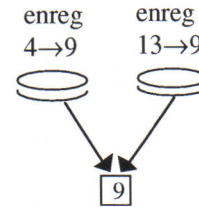


figure 3.33. Dernière étape de la simulation : l'E2MI D composé du modèle unique 9.

Étape 5 : Simulation des E2MIs de rang 3 (l'E2MI D, i.e. le modèle 9) grâce à l'enregistrement des signaux des macro-liaisons $E \rightarrow D$ et $G \rightarrow D$, i.e. des liaisons (4 \rightarrow 9) et (13 \rightarrow 9).

3.4. CONCLUSION

Ce troisième chapitre a été consacré à une étude de l'influence mutuelle des différentes parties (ou sous-modèles) (M_i) d'un modèle physique M . Nous avons montré qu'en prenant ces différents sous-modèles deux par deux (M_i et M_j) et en les extrayant du modèle global, nous pouvons connaître l'influence de M_i sur M_j et réciproquement, en étudiant respectivement l'admittance de M_i vu de M_j et l'admittance de M_j vu de M_i . Ces admittances nous informent sur les flux d'énergie entre ces sous-modèles et nous permettent de couper certaines connexions liant des sous-modèles mais qui véhiculent une énergie très faible et dont l'influence est négligeable.

Etant donné ce réseau où coexistent les connexions coupées et non-coupées, ce chapitre (§ 3.3) nous a permis de mettre en évidence les parties du réseau qui peuvent être découplées du reste du modèle M et simulées séparément. C'est le principe de l'habillage. Mais pour savoir si un tel découplage est possible, l'étude locale des connexions entre sous-modèles n'est pas suffisante. A cette étude locale, il faut associer une étude globale permettant de qualifier l'ensemble des informations circulant entre deux parties du réseau de modèles. Les concepts de coupe et d'E2MI permettent de déterminer quelles parties du réseau doivent être simulées de manière couplée et quelles parties peuvent être séparées sans que le comportement global du réseau en soit modifié. Enfin grâce à l'algorithme présenté à la fin de ce chapitre, nous pouvons mettre en évidence tous les découplages possibles entre les différentes parties d'un modèle M .

Il est à noter que le principe de l'habillage admet une proposition réciproque. Nous savons que lorsque les conditions (3.22) est vérifiée alors la simulation découplée et la simulation couplée produisent des comportements très semblables. Mais en général la réciproque est également vraie : lorsqu'une connexion entre deux modèles A et B est coupée alors quelque soient les propriétés physique effective des deux modèles alors (3.22) est automatiquement vérifiée. Par exemple si B est un modèle passif et que la connexion de A vers B a été coupée alors quelque soit les propriétés de A et de B, la relation (3.23) est automatiquement vérifiée, i.e. l'admittance de A vu de B est infinie. Ainsi même si A est une masse très faible (admittance faible) alors il apparaîtra à B comme une masse infinie.

En d'autres termes le découplage induit des propriétés physiques particulières. Ces propriétés sont les mêmes que celles du modèle d'origine si et seulement si (3.22) est vérifiée. Dans les autres cas, le découplage induit des propriétés physiques inédites et difficilement contrôlables.

CHAPITRE 4

LA MÉCANIQUE DU SOLIDE ET LA MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

Avant d'aborder la partie II et l'étude de la visualisation des objets très déformables, nous devrons étudier un autre aspect de l'étude des influences mutuelles des modèles dans un réseau. Pour cela nous aurons recours à certaines notions introduites au chapitre § 3.

Il est fréquent que dans un modèle dynamique décrivant le comportement d'un solide, les relations géométriques entre certaines parties du modèle restent constantes pendant la simulation. Il s'agira souvent de distances constantes entre points matériels. Ce type de comportement quasi-rigide correspond à des propriétés physiques très particulières. Dans la première partie § 4.1 de ce chapitre nous étudierons la transmission de l'énergie entre deux modèles A et B à travers un modèle I. Nous déterminerons la part des énergies emmagasinée dans I et les énergies transmises. Lorsque le modèle I est un élément <LIA> et qu'il transmet la quasi-totalité de l'énergie de A à B alors et seulement alors la longueur de cet élément <LIA> restera constante. Cet élément pourra être remplacé par une liaison rigide sans que la simulation globale en soit affectée.

Dans un modèle dynamique constitué de points matériels en interaction la position d'un point matériel M n'est jamais totalement déterminée par la position des autres points. Ceux-ci peuvent seulement déterminer la position d'équilibre de M. Mais dans certaines conditions, que nous chercherons à déterminer au sous-chapitre § 4.2, cette position d'équilibre est très stable et le comportement de M est très semblable à celui d'un point dont la position serait géométriquement déterminée par la position des autres points. Là aussi, il s'agit d'un comportement très particulier. Il peut s'agir d'un comportement rigide (cf ci-dessus) ou non-rigide. Dans cette situation, on peut remplacer ce point matériel par un point dont la position est construite de manière explicitement non-dynamique (par exemple géométrique) sans que le comportement global soit modifié.

4.1. LA TRANSMISSION ET LE COMPORTEMENT RIGIDE

4.1.1. LE SYSTÈME ÉTUDIÉ

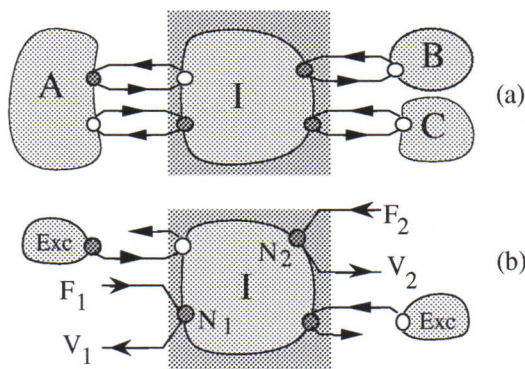


figure 4.1. (a) Un réseau de modèles. On s'intéresse à la communication entre A et B à travers le modèle I par les points de communication N_1 et N_2 . (b) Ce modèle est extrait du réseau.

Soient un réseau de modèles contenant au moins trois modèles A, B et I. I est lié à la fois à A et à B, au moins par un point de communication (respectivement N_1 et N_2). (cf. figure 4.1.a). Nous nous intéressons à l'énergie transmise entre N_1 et N_2 . Pour cela, nous extrayons le modèle I du réseau. Tous les points de communication autres que N_1 et N_2 sont connectés à des excitateurs de force ou de vitesse selon qu'il s'agit d'un point M ou d'un point L.

De même qu'au chapitre § 3 nous nous intéressons essentiellement à des modèles 1D ou projetés dans un espace

1D de manière à ce que les variables f et v soient des scalaires.

Nous nous intéressons à un domaine de fonctionnement linéaire du modèle I. Dans le cadre de ce fonctionnement linéaire :

1. Le modèle I est un quadripôle linéaire dont le fonctionnement peut être décrit par une matrice 2x2 (cf. relation (4.1)). Dans la présente étude nous choisirons la matrice des admittances [Y].
2. Tous les excitateurs de force ou de vitesse connectés aux points de communication autres que N₁ et N₂, lorsqu'ils sont vus du point N₁ (respectivement du point N₂) sont équivalents à des excitateurs de force F_{éq}(N₁) (respectivement F_{éq}(N₂)) (cf. relation (4.1))

$$\begin{pmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}(\omega) & Y_{12}(\omega) \\ Y_{21}(\omega) & Y_{22}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_i F_{\text{éq } i}(N_1)(\omega) \\ \sum_i F_{\text{éq } i}(N_2)(\omega) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.1.2. LA CONDITION DE TRANSMISSION

Nous étudions le système décrit à la figure 4.1.b et régi par la relation (4.1). La DSE croisée $\Gamma_1(\omega)$ entre f et v au point de communication N₁ représente l'énergie moyenne apportée au modèle I par le point N₁ et correspondant à des composantes harmoniques de pulsation ω . On peut dire la même chose de la DSE croisée $\Gamma_2(\omega)$ et du point N₂. Ces deux DSE croisées s'expriment de la manière suivante :

$$\Gamma_1(\omega) = V_1(\omega) F_1^*(\omega) \quad (4.2)$$

$$\Gamma_2(\omega) = V_2(\omega) F_2^*(\omega) \quad (4.3)$$

L'énergie entrant dans I par le point N₁ ($\Gamma_1(\omega)$) est pour une part $\Gamma(\omega)$ emmagasinée dans I et pour une autre part ($-\Gamma_2(\omega)$) émise par le point N₂. Il en va de même pour l'énergie entrant dans I par le point N₂. Les points N₁ et N₂ soit les seuls points par lesquels I échange de l'énergie avec l'extérieur donc :

$$\Gamma(\omega) = \Gamma_1(\omega) + \Gamma_2(\omega) \quad (4.4)$$

Soit $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ la réunion des bandes passantes des signaux entrant et sortant de I, respectivement par N₁ et N₂. La "condition de transmission", i.e. la condition nécessaire et suffisante pour qu'à chaque instant la puissance entrant par N₁ soit presque égale à la puissance sortant par N₂ est que pour toutes les fréquences de $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, l'énergie emmagasinée soit très faible par rapport à l'énergie transmise. Ceci est exprimée par la relation (4.5)

$$\boxed{(\forall \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]) \begin{cases} |\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_1(\omega)| \\ |\Gamma(\omega)| \ll |\Gamma_2(\omega)| \end{cases}} \quad (4.5)$$

La transmission parfaite suppose que toute l'énergie entrant dans I est transmise à une sortie, si bien que l'énergie emmagasinée est strictement nulle. La transmission parfaite suppose donc : $\forall \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \quad |\Gamma(\omega)|=0$

La relation (4.5) associée aux relations (4.2) et (4.3) donne un équivalent de la condition de transmission.

$$(\forall \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]) \begin{cases} |V_1(\omega)F_1^*(\omega) + V_2(\omega)F_2^*(\omega)| \ll |V_1(\omega)F_1^*(\omega)| \\ |V_1(\omega)F_1^*(\omega) + V_2(\omega)F_2^*(\omega)| \ll |V_2(\omega)F_2^*(\omega)| \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans la suite, pour alléger l'écriture, nous omettrons d'expliciter la dépendance par rapport à la variable ω .

4.1.3. L'INFLUENCE DES MODÈLES A ET B

Les propriétés internes du modèle I (4.1) ne permettent pas seules de savoir si la condition de transmission est vérifiée ou non. Cette condition dépend également des modèles A et B vus des points de communication N_1 et N_2 . Donc dans cette section, nous introduisons dans notre système les modèles A et B et nous les connectons au modèle I par les points N_1 et N_2 . Les autres points de communication du modèle I seront toujours connectés à des excitateurs.(cf. figure 4.2)

On supposera que les modèles A et B sont linéaires ou fonctionnent dans un domaine linéaire. Supposons que N_1 soit un point L. Du fait de la linéarité de A, la force V_1 produite par A et lue en N_1 est la somme d'un terme V_A indépendant de la force F_1 et d'un terme $V_{zA} = F_1/Y_A$ dépendant linéairement de la vitesse :

$$V_1 = V_A - F_1/Y_A \quad (4.7)$$

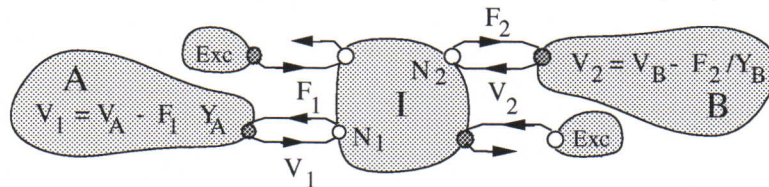


figure 4.2. Nous connectons le modèle I aux modèles A et B

Si N_1 est un point M, alors la relation entre V_1 et F_1 est la même mais la grandeur produite par A n'est plus la force mais la vitesse :

$$F_1 = Y_A V_A - Y_A V_1 = F_A - Y_A V_1 \quad (4.8)$$

Les termes constants F_A ou V_A représentent les sources d'énergie. Si A est un modèle passif (i.e. s'il n'a pas de source d'énergie) alors F_A et V_A sont tous deux nuls. Y_A est l'admittance équivalente du modèle vu par le point N_1 . Les relations (4.7) et (4.8) deviennent alors :

$$V_1 = V_A - F_1/Y_A \quad (4.9)$$

$$F_1 = F_A - V_1 Y_A \quad (4.10)$$

Tout ce qui a été dit pour le modèle A peut être dit pour le modèle B. Les relations résultants sont :

$$V_2 = V_B - F_2/Y_B \quad (4.11)$$

$$F_2 = F_B - V_2 Y_B \quad (4.12)$$

respectivement pour le cas où N_2 est un point M (4.11) ou un point L (4.12). Dans la suite, nous considérerons que N_1 et N_2 sont des points L. A et B sont alors représentés par V_A , V_B et Y_A , Y_B . Les résultats obtenus seront applicables aux cas où N_1 et/ou N_2 sont des points M. Il suffira alors de remplacer V_A par F_A/Y_A et V_B par F_B/Y_B .

4.1.4. LA VALEUR DES VARIABLES F_1 , F_2 , V_1 , ET V_2

Les relations (4.1) (4.9) et (4.11) définissant respectivement le comportement du modèle I et ceux des modèles A et B, nous permettent de déterminer les quatre variables V_1 , V_2 , F_1 et F_2 en fonction des générateurs de vitesse V_A et V_B , et en fonction des admittances des modèles I, A et B. Voici le résultat des calculs.

Des solutions existent lorsque $(Y_{11} + Y_A)(Y_{22} + Y_B) - Y_{12}Y_{21} \neq 0$

4.1.4.1. Si $Y_A \neq 0$ et $Y_B \neq 0$

$$V_1 = \frac{(Y_{22} + Y_B)Y_A V_A - Y_{12}Y_B V_B}{(Y_{11} + Y_A)(Y_{22} + Y_B) - Y_{12}Y_{21}} \quad (4.13)$$

$$V_2 = \frac{-Y_{21}Y_A V_A + (Y_{11} + Y_A)Y_B V_B}{(Y_{11} + Y_A)(Y_{22} + Y_B) - Y_{12}Y_{21}} \quad (4.14)$$

$$F_1 = \frac{(Y_A Y_{11}(Y_{22} + Y_B) - Y_A Y_{12}Y_{21})V_A - Y_{12}Y_A Y_B V_B}{(Y_{11} + Y_A)(Y_{22} + Y_B) - Y_{12}Y_{21}} \quad (4.15)$$

$$F_2 = \frac{-Y_{21}Y_A Y_B V_A + (Y_B Y_{22}(Y_{11} + Y_A) - Y_B Y_{12}Y_{21})V_B}{(Y_{11} + Y_A)(Y_{22} + Y_B) - Y_{12}Y_{21}} \quad (4.16)$$

4.1.4.2. Si $Y_A = 0$ et $Y_B \neq 0$

$$V_1 = V_A \quad V_2 = \frac{Y_B V_B - Y_{21}V_A}{(Y_{22} + Y_B)} \quad (4.18)$$

$$F_1 = \left(Y_{11} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22} + Y_B} \right) V_A + \frac{Y_{12}Y_B}{Y_{22} + Y_B} V_B \quad (4.19)$$

$$F_2 = \frac{Y_B Y_{21}V_A + Y_B Y_{22}V_B}{Y_{22} + Y_B} \quad (4.20)$$

4.1.4.3. Si $Y_B = 0$ et $Y_A \neq 0$

C'est un cas symétrique du précédent.

4.1.4.4. Si $Y_B = 0$ et $Y_A = 0$

$$V_1 = V_A \quad V_2 = V_B \quad F_1 = V_A Y_{11} \quad F_2 = V_B Y_{22}$$

Grâce à ces valeurs il devient possible d'évaluer les énergies échangées entre A, B et I, et ainsi de vérifier si la relation (4.6) est vraie ou non.

4.1.5. EXEMPLE : UNE MASSE ET UN RESSORT

Prenons un exemple simple et appliquons les résultats obtenus ci-dessus.

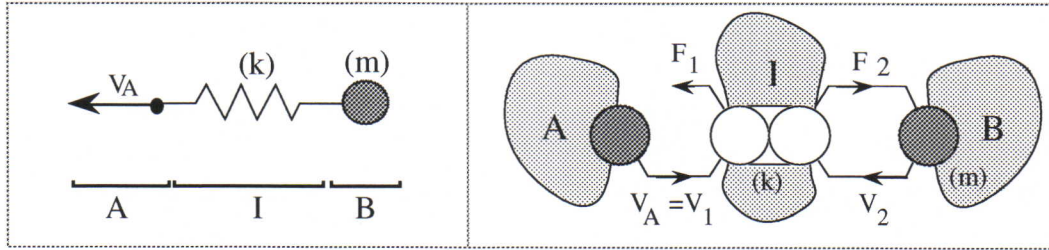


figure 4.3. Le modèle exemple (a) sous forme masse-ressort (b) avec la représentation Cordis-Anima. Une masse (modèle B) attachée par un ressort (modèle I) à un générateur de vitesse (modèle A)

4.1.5.1. Description des trois modèles

Le modèle I

Le modèle I est composé d'un seul élément <LIA> (ayant deux points de communication de type L) représentant une interaction élastique de raideur k . (cf. figure 4.3). Dans le domaine temporel, il réalise l'équation :

$$F_1 = -F_2 = -\frac{k}{j\omega} \Delta V = -\frac{k}{j\omega} V_1 + \frac{k}{j\omega} V_2 \quad (4.21)$$

Il en résulte que la matrice des admittances du modèle I est :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{j\omega} & \frac{k}{j\omega} \\ \frac{k}{j\omega} & -\frac{k}{j\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Le modèle B

Le modèle B est un élément <MAT> représentant une masse ponctuelle. C'est un modèle passif donc $V_B = 0$. La relation (4.11) définissant l'admittance de B donne :

$$V_2 = V_B - F_2/Y_B = -F_2/Y_B \quad (4.23)$$

$$\text{Or la masse ponctuelle réalise l'équation : } F_2 = mj\omega V_2 \quad (4.24)$$

Il en résulte que $Y_B = -jm\omega$

Le modèle A

C'est le seul élément moteur du réseau de modèles. Quelque soit la force F_1 produite par le modèle I, le modèle A produit un signal vitesse $V_A(\omega)$. Le fait que V_1 soit tout à fait indépendant de F_1 signifie que $Y_A=0$.

4.1.5.2. Le test de la condition de transmission

Nous sommes dans un cas où $Y_A=0$ et $V_B=0$. Les résultats sont ceux de § 4.4.2.

$$V_1 = V_A \quad (4.25)$$

$$V_2 = \frac{-Y_{21} V_A}{(Y_{22} + Y_B)} = \frac{k}{k - m\omega^2} V_A \quad (4.26)$$

$$F_1 = \left(Y_{11} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22} + Y_B} \right) V_A = -\frac{mkj\omega}{k - m\omega^2} V_A \quad (4.27)$$

$$F_2 = \frac{Y_B Y_{21} V_A}{Y_{22} + Y_B} \quad (4.28)$$

Il en résulte les DSE croisées $\Gamma(\omega)$, $\Gamma_A(\omega)$ et $\Gamma_B(\omega)$

$$\Gamma_1 = V_1 F_1^* = \left(Y_{11} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22} + Y_B} \right)^* |V_A|^2 = mj\omega \frac{k}{k - m\omega^2} |V_A|^2 \quad (4.29)$$

$$\Gamma_2 = V_2 F_2^* = \frac{-Y_{21}V_A}{(Y_{22} + Y_B)} \left(\frac{Y_B Y_{21} V_A}{Y_{22} + Y_B} \right)^* = -mj\omega \left(\frac{k}{k - m\omega^2} \right)^2 |V_A|^2 \quad (4.30)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = mj\omega \left(\frac{k}{k - m\omega^2} - \left(\frac{k}{k - m\omega^2} \right)^2 \right) |V_A|^2 \quad (4.31)$$

La *condition de transmission* $|\Gamma| \ll |\Gamma_1|$ et $|\Gamma| \ll |\Gamma_2|$ équivaut en l'occurrence à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{k}{k - m\omega^2} - \left(\frac{k}{k - m\omega^2} \right)^2 \right| \ll \left| \frac{k}{k - m\omega^2} \right| \\ \left| \frac{k}{k - m\omega^2} - \left(\frac{k}{k - m\omega^2} \right)^2 \right| \ll \left| \frac{k}{k - m\omega^2} \right|^2 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Or $|\Gamma|$ prend des valeurs faibles dans deux cas : $\frac{k}{k - m\omega^2} \approx 0$ $\frac{k}{k - m\omega^2} \approx 1$

Dans le premier cas, la *condition de transmission* n'est pas vérifiée car $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ ont des valeurs faibles mais de même ordre de grandeur. Dans le second cas, $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ ont des valeurs finies voisines de 1 alors que celle de $|\Gamma|$ est du même ordre que $m\omega^2/k$. La *condition de transmission* est alors vérifiée pour :

$$\boxed{m\omega^2 \ll k} \quad (4.33)$$

4.1.5.3. Conclusion

Lorsque la relation (4.33) est satisfaite, la presque totalité de l'énergie fournie par le générateur de vitesse V_A est transmise à la masse. L'énergie emmagasinée dans le ressort reste toujours très faible par rapport à l'énergie transmise du générateur à la masse.

Étant donnée la bande passante $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ de l'excitation V_A , si on choisit la masse et la raideur telles que $k \geq 100.m.\omega_{\max}^2$, la transmission est garantie à 1% près. Réciproquement, pour une valeur m et une valeur de k donnée, il existe toujours une fréquence de fonctionnement ω en deçà de laquelle l'énergie de l'excitateur est transmise à la masse.

4.1.6. LORSQUE LE MODÈLE I EST UN ÉLÉMENT <LIA>

Lorsque les modèles I sont des éléments <LIA> alors la condition de transmission implique des propriétés très intéressantes. En effet dans les éléments <LIA> le principe de l'action et de la réaction impose $F_1 = -F_2$.

$$\text{Il s'ensuit que : } |\Gamma| = |\Gamma_1 + \Gamma_2| = |V_1 F_1^* + V_2 F_2^*| = |F_1| |V_1 - V_2| \quad (4.34)$$

$$\text{Alors la condition de transmission équivaut à : } \begin{cases} |V_1 - V_2| \ll |V_1| \\ |V_1 - V_2| \ll |V_2| \end{cases} \Leftrightarrow |V_1| \approx |V_2| \quad (4.35)$$

Lorsque la *condition de transmission* est vérifiée pour un <LIA> alors la vitesse des deux extrémités de cet élément est sensiblement égale. Autrement dit, la longueur de cet élément <LIA> reste constante au cours du temps. Dans le cas du modèle exemple étudié ci-dessus la condition de transmission est vérifiée pour de grandes raideurs et/ou des masses faibles et/ou des fréquences d'excitation faibles. Dans ces situations on montre formellement (et on comprend intuitivement) que la longueur du ressort reste presque constante.

Or pour ce ressort, mais aussi pour tous les éléments <LIA> vérifiant la condition de transmission, la constance de la longueur constitue, de fait, une diminution du nombre de degrés de liberté de l'objet. Pourtant dans la simulation, cette longueur est le résultat d'une simulation, au même titre que les interactions dont la longueur varie de manière sensible. Dans la suite, dans l'objectif de diminuer le nombre de degrés de liberté et la complexité des modèles, nous serons amenés à remplacer certains éléments <LIA> vérifiant la condition de transmission, par d'autres des éléments de longueur explicitement fixe.

La condition de transmission est une condition nécessaire pour que la simulation ne soit pas sensiblement modifiée par ce remplacement.

4.2. LA DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DES POSITIONS

4.2.1. LE SYSTÈME ÉTUDIÉ

Le système étudié dans ce sous-chapitre est constitué d'un point matériel M de masse m lié à n autres points matériels par n éléments <LIA>. L'influence de ces points matériels est représentée par n générateurs de vitesse. (cf figure 4.4)

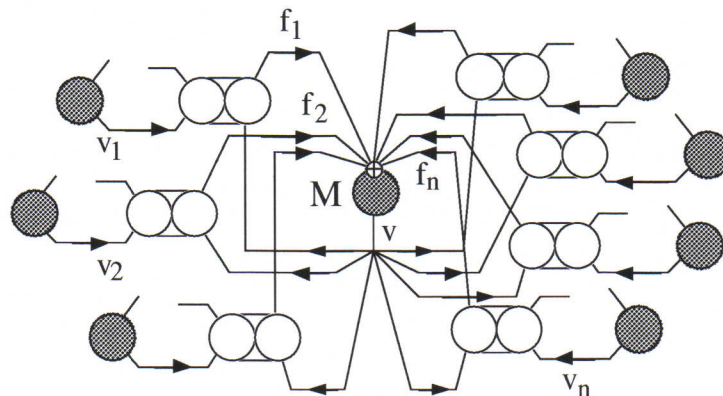


figure 4.4 Un élément <MAT> lié à son environnement par n éléments <LIA> L'environnement a été représenté par n générateurs de vitesse. En l'occurrence n=7.

Nous limitons le cadre de notre étude aux modèles homogènes, donc au cas où tous les éléments <LIA> sont identiques. De plus, comme au sous-chapitre précédent, nous nous intéresserons aux modèles 1D ou projetés dans un espace 1D.

La masse M reçoit une force f et produit une vitesse v. Le i-ième générateur de vitesse produit une vitesse v_i. L'élément <LIA> correspondant reçoit d'une part la vitesse v de la masse M et la vitesse v_i du générateur et produit une force f_i appliquée à M. La somme des forces f_i est égale à la force f. Nous restreignons notre étude aux cas (très fréquent) où les éléments <LIA> liant M à son environnement produisent une force f_i qui dépend de la différence v_i-v.

Dans la suite, nous nous intéresserons souvent aux transformées de Fourier de ces grandeurs :

$$F_i(\omega) = \mathcal{F}\{f_i(t)\} \quad V_i(\omega) = \mathcal{F}\{v_i(t)\} \quad (4.37)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad V(\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\} \quad (4.38)$$

$$\text{Avec } F(\omega) = jm\omega V(\omega) \quad (\text{car } jm\omega \text{ est l'admittance de la masse M})$$

Nous étudierons ce système dans un domaine de fonctionnement linéaire. Dans ce cas un élément <LIA> attaché d'un côté à un générateur de vitesse v_i, et observé de l'autre côté à une admittance de Y(ω).

$$F_i(\omega) = Y(\omega) (V_i(\omega) - V(\omega)) \quad (4.39)$$

Par exemple lorsque ce <LIA> est une interaction visco-élastique de raideur k et de viscosité z alors Y(ω) = -z - k/jω

4.2.2. LA CONDITION DE LA DÉPENDANCE NON-DYNAMIQUE

4.2.2.1. Énoncé

Dans le cas général, la vitesse et la position d'équilibre du point M dépend de celles des autres points (en l'occurrence des générateurs de force). Le point M se stabilise à cette position ou à cette vitesse après un régime transitoire. Lorsque l'amplitude de ce régime transitoire peut être négligée, alors on peut dire que la position et la vitesse du point M sont déterminées, à chaque instant par celles des autres points. Dans ce cas, la position et la vitesse du point M pourront être calculées par des méthodes non-dynamiques, par exemple des méthodes géométriques.

4.2.2.2. Le principe de superposition

Le système que nous étudions est observé dans un domaine de fonctionnement linéaire, donc toutes les variables de ce système (forces ou vitesses) peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des signaux V_i(ω) des générateurs. En particulier il en va ainsi de la vitesse V(ω) du point M.

$$V(\omega) = \sum_{i=1}^n T_i(\omega) V_i(\omega) \quad (4.41)$$

où les T_i(ω) sont des nombres a priori complexes. Ils sont indépendants des V_i(ω). Leur valeur dépend du domaine de fonctionnement linéaire sur lequel on travaille.

V(ω) est la somme de n contributions T_i(ω)V_i(ω) chacune d'elles étant associée à un des générateurs de vitesse. La linéarité du système nous permet d'étudier ces contributions séparément. C'est le principe de superposition (cf [BN 83]). Donc dans la suite, nous

allons d'abord éteindre¹¹ tous les générateurs de vitesse sauf un seul : $V_i(\omega)$. Alors $V(\omega)$ sera égal à la seule contribution de $V_i(\omega)$. Nous étudierons le régime permanent et le régime transitoire de cette contribution, et nous verrons dans quelles conditions le régime transitoire est très faible. (cf paragraphe suivant)

Si toutes ces conditions sont vérifiées, alors le régime transitoire de toutes les contributions sera négligeable. Alors le principe de superposition nous garantit que lorsque toutes les contributions seront présentes, le régime transitoire de l'ensemble sera également négligeable et qu'à chaque instant, $V(\omega)$ sera une fonction des $V_i(\omega)$. La condition de la dépendance non-dynamique sera alors vérifiée.

4.2.2.3. L'étude séparée des contributions

La i -ième contribution est égale à $T_i(\omega)V_i(\omega)$. Cette contribution est le produit d'un régime transitoire et d'un régime permanent. Le régime permanent est le signal vers lequel il tend à long terme (lorsque t tend vers l'infini). Pour connaître ce signal nous faisons tendre ω vers 0.

Soit $T_{0i} = \lim_{\omega \rightarrow 0} T_i(\omega)$

Alors le transformée de Fourier du régime permanent est $V_i^{(\text{perm})}(\omega) = T_{0i}V_i(\omega)$

et donc le transformée de Fourier du régime transitoire est $V_i^{(\text{trans})}(\omega) = \frac{T_i(\omega)}{T_{0i}}$

Donc la condition pour que le régime transitoire de cette i -ième contribution soit négligeable est que :

$$\boxed{\left| \frac{T(\omega)}{T_{0i}} \right| \approx 1} \quad (4.42)$$

Dans ce cas nous aurons $T_i(\omega)V_i(\omega) \approx T_{0i}V_i(\omega) = V_i^{(\text{perm})}(\omega)$

En conclusion, si la relation (4.42) est vérifiée pour chaque contribution alors la condition de la dépendance non-dynamique sera vérifiée pour l'ensemble de $V(\omega)$

4.2.3. APPLICATION AU SYSTÈME ÉTUDIÉ

Dans un premier temps nous allons déterminer les $T_i(\omega)$ dans le cas du système décrit dans § 4.2.1. La force F appliquée à la masse M est la somme des forces F_i . D'après la relation (4.39) il en résulte :

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = Y \sum_{i=1}^n V_i - nYV \quad (4.43)$$

Or la relation entre la force et la vitesse dans une masse est : $F = jm\omega V$. Il en résulte l'expression de V en fonction des V_i .

¹¹ Un générateur V_i de vitesse "éteint" est un générateur où $V_i = 0$ uniformément

$$V = \frac{Y \sum_{h=1}^n V_h}{nY + mj\omega} \quad (4.44)$$

et enfin l'expression des λ_i qui sont tous identiques:

$$\forall i \quad T_i = \frac{Y}{nY + jm\omega} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + j \frac{m\omega}{nY}} \quad (4.45)$$

$$\text{Soit } T_{0i} = \lim_{\omega \rightarrow 0} T_i(\omega) = \frac{1}{n} \quad \text{donc } V_i^{(\text{perm})}(\omega) = T_{0i} V_i(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{n} \quad (4.46)$$

$$V_i^{(\text{trans})}(\omega) = \frac{T_i(\omega)}{T_{0i}} = \frac{1}{1 + j \frac{m\omega}{nY}} \quad (4.47)$$

Etant donnés ces résultats, la relation (4.42) représentant la condition de dépendance non-dynamique équivaut à :

$$\left| \frac{1}{1 + j(m\omega / nY)} \right| \approx 1 \Leftrightarrow \boxed{m\omega \ll |nY|} \quad (4.48)$$

En d'autres mots la condition de dépendance non-dynamique appliquée à notre système équivaut à dire que l'admittance de la masse du point M doit être inférieure à l'admittance des n éléments <LIA>. Donc typiquement cette condition est vérifiée pour les masses faibles et pour les fréquences basses. Par exemple si les <LIA> sont des interactions visco-élastiques de raideur k et de viscosité z alors la condition de dépendance non-dynamique (4.48) équivaut à :

$$m\omega \ll n |z + k/j\omega| \quad (4.49)$$

CONCLUSION

Grâce au critère (4.48) il nous sera possible dans la suite de ce travail de remplacer certains points matériels dont la masse est très faible et qui sont reliées par des interactions fortes par des points dont la position est déterminée géométriquement à partir des positions d'autres points. D'autre part, comme nous l'avons vu au premier sous-chapitre § 4.1, lorsque la condition de transmission (4.5) est vérifiée pour un élément <LIA> alors cet élément peut être remplacé par une liaison rigide sans que la simulation en soit affectée.

Il est à noter que, comme dans le cas du chapitre § 3, ces propositions admettent une proposition réciproque : lorsqu'un point matériel est remplacé par un point dont la position est calculée géométriquement (respectivement lorsqu'un élément <LIA> est remplacé par un élément rigide) alors dans la simulation résultante, la relation (4.48) (respectivement la relation (4.5)) est vérifiée. En d'autres termes, même si un point ou une surface géométrique n'a pas lui-même de propriété physique, il représente des objets ayant bel et bien des propriétés physiques spécifiques. Ces propriétés induites sont déterminées par (4.48) (respectivement (4.5)). En particulier, un point géométrique est souvent l'équivalent d'un point matériel de masse très faible attachée aux autres points par des liaisons très raides et visqueuses. Il produit typiquement le comportement d'un objet peu déformable. Donc dans le cadre de la modélisation d'objets très déformables, ce type de propriété physique induite peut avoir des conséquences néfastes sur l'aspect global du mouvement.

CONCLUSION DE LA PARTIE I

Tout au long de cette première partie, nous avons posé les bases du travail effectué dans la partie suivante. Nous avons d'abord introduit la notion de modélisation physique multi-échelles : lorsqu'il s'agit de modéliser des objets dont nous voulons représenter les comportements à plusieurs échelles distinctes, il est parfois possible et souvent intéressant d'avoir recours à des modèles spécifiques pour les phénomènes propres à chaque échelle. Ainsi, la simulation est celle d'un réseau de modèles échangeant des informations dans les deux sens.

Simuler un modèle M dans sa globalité peut s'avérer difficile et pas toujours nécessaire : en effet, on peut montrer que dans certains cas, certaines parties de ce modèle peuvent être découplées du reste du modèle et simulées séparément. C'est le principe de l'habillage. Le chapitre § 3 nous permet de mettre en évidence toutes les parties qui peuvent être ainsi découplées et l'ordre dans lequel ces différentes parties doivent être simulées.

Enfin le chapitre §4 nous montre dans quelles conditions certains degrés de liberté d'un modèle physique peuvent être contraints sans que la simulation en soit affectée. Ceci permet notamment de remplacer certaines relations physiques par des relations géométriques.

Dans la deuxième partie, nous appliquerons les principes posés dans cette première partie à la modélisation de l'image animée. Celle-ci suppose un travail à la fois sur le mouvement, sur la forme, et sur l'image. Le premier met en jeu des interactions dynamiques, le second des occupations spatiales et la troisième des interactions lumineuses. Nous verrons qu'il est possible de tenir compte de l'ensemble de ces interactions dans un même modèle. Cependant, les ordres de grandeur spatiale, temporelle et énergétique des interactions en jeu étant différents, il sera souvent beaucoup plus intéressant d'élaborer des modèles séparés pour les trois types de phénomènes.

Ces trois types de phénomènes sont en interaction a priori bidirectionnelle. Mais les résultats du chapitre § 3 nous permettront dans un certain nombre de cas, de remplacer certaines liaisons bidirectionnelles par des liaisons unidirectionnelles et ainsi, de découpler les trois modèles.

Enfin les résultats du chapitre § 4 nous permettront, dans des cas spécifiques, d'utiliser des éléments géométriques en remplacement de points matériels physiques, notamment dans la modélisation de la forme de certains objets.

DEUXIÈME PARTIE

LE PROCESSUS DE VISUALISATION

CHAPITRE 5

FORME, MOUVEMENT ET IMAGE

Dans cette partie l'objectif est la production de séquences d'animation représentant des objets très déformables. Pour cela, nous devons réaliser un modèle de ces objets. Plus particulièrement l'objectif de ce chapitre est de montrer comment le mouvement, la forme et l'image peuvent s'articuler pour produire une séquence d'images animées.

Dans un premier temps nous limiterons notre cadre d'étude à celle des phénomènes optiques et mécaniques et nous étudierons le rapport entre ces deux types de phénomènes. Dans la suite de ce travail, les phénomènes mécaniques et optiques seront étudiés séparément et les modèles optiques seront habillages des modèles mécaniques. (§ 5.2). Au sous-chapitre (§ 5.3) nous étudierons la notion de forme et de contour, leurs caractéristiques et les grandeurs qui, dans l'activité de modélisation déterminent ces caractéristiques. La forme et le mouvement peuvent quelquefois être représentés par des modèles autonomes couplés à des échelles différentes. Ils peuvent être quelquefois en relation de moteur/habillage. Mais dans le cas général les trois grandeurs : mouvement, forme et image ne sont pas disjointes (§ 5.4).

Au sous-chapitre § 5.5, nous présenterons plusieurs réalisations où ces trois entités occupent des situations relatives différentes. Enfin nous présenterons les spécifications pour un modèle de génération de forme pour objets déformables.

5.1. LES PHÉNOMÈNES À MODÉLISER

Comme nous l'avons évoqué à la section § 2.1.1 il est impossible de modéliser intrinsèquement un objet réel X en général et un objet très déformable en particulier. La raison en est qu'un observateur, même doté des instruments les plus perfectionnés, ne peut connaître l'objet X que par les interactions qu'il a directement avec cet objet X ou indirectement avec des objets intermédiaires I qui à leur tour interagissent avec l'objet X. L'objet I peut être un instrument qui permet de palper l'objet X. Un autre exemple d'intermédiaire I est la lumière. L'image d'un objet X vu par un capteur est seulement la lumière résultant de l'interaction entre l'objet X et la lumière émise par une source.

Dans le cadre de ce travail, les objets modélisés doivent adresser la perception humaine. Donc parmi les interactions que l'objet X peut avoir avec son environnement, nous nous intéresserons uniquement aux interactions qui sont du même ordre de grandeur que celles qui caractérisent nos capteurs et effecteurs naturels. En particulier comme nous l'avons vu au paragraphe § 2.4.1.2, l'image animée est un cas particulier de phénomène multi-sensoriel impliquant le regard et le geste, et cela, même lorsque l'observateur reste parfaitement immobile pendant la durée du mouvement observé. Donc parmi les interactions que l'objet X à modéliser peut avoir avec son environnement, nous nous intéresserons uniquement aux interactions optiques et mécaniques qui sont du même ordre de grandeur que celles qui caractérisent nos capteurs et effecteurs naturels.

En conclusion, un modèle d'objet est valide lorsqu'on peut interagir avec lui de la même manière qu'on interagit avec l'objet réel X. Dans le cadre de ce travail, ce modèle est valide lorsque les interactions optiques et mécaniques qu'un observateur humain peut

avoir avec ce modèle sont perçues de la même manière que les interactions optiques et mécaniques qu'il peut avoir avec l'objet réel X.

5.2. LE MOUVEMENT ET L'IMAGE

Lorsqu'elle représente des objets physiques, l'image animée est constituée de deux composantes : d'une part un signal spatial représentant une grille de pixels (l'image) et d'autre part des signaux temporels représentant le déplacement des objets représentés (le mouvement). Quelques soient le principe de génération de ces signaux, on peut dire que le signal mouvement représente des phénomènes mécaniques régis par des interactions mécaniques, alors que le signal image représente des phénomènes optiques régis par des interactions électromagnétiques. Nous verrons que le signal de contour représentant la forme peut être lié aux deux types de phénomènes.

Dans ce sous-chapitre nous verrons qu'il est avantageux de modéliser le mouvement et les images par un modèle multi-échelle (§ 2). Nous verrons également dans quelles conditions les modèles image peuvent être un habillage des modèles de mouvement

5.2.1. MODÉLISATION MONO-ÉCHELLE / MULTI-ÉCHELLE

5.2.1.1. Les phénomènes en jeu

En toute rigueur, les interactions optiques et mécaniques ne sont que des cas particuliers d'interactions électromagnétiques. Par exemple les forces de cohésion d'un objet et les forces de non-pénétration résultent d'interactions de type électromagnétique. Mais nous percevons ces interactions par des capteurs/effecteurs différents (les yeux d'une part et la peau, les muscles d'autre part) sensibles à des énergies et à des bandes passantes temporelles et spatiales différentes. Donc les phénomènes auxquels nous sommes effectivement sensibles ont lieu à des échelles différentes. La question qui s'ensuit est celle de la modélisation multi-échelles (cf chapitre § 2). En d'autres termes, étant donnée l'unité des phénomènes optiques et mécaniques, en quoi est-il avantageux ou non de simuler de tels phénomènes avec un seul modèle ou avec des modèles autonomes mais couplés ? (cf figure 5.1)

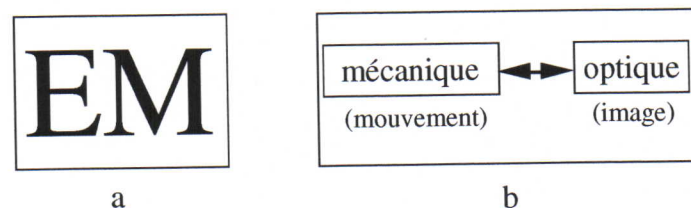


figure 5.1 La modélisation mono-échelle et multi-échelles (a) Un modèle unique pour produire les phénomènes électromagnétiques (optiques et mécaniques) (b) Deux modèles autonomes couplés l'un produisant le mouvement et l'autre produisant l'image

Pour les phénomènes mécaniques et pour produire une grande variété de mouvements et d'objets, la fréquence d'échantillonnage du modèle et du signal de mouvement est typiquement la même que celle du signal gestuel i.e. de l'ordre de 1 kHz. Chaque signal $x(t)$ ou $f(t)$ est en général codé sur 64 bits. Ces signaux n'ont généralement pas de définition spatiale. Le nombre de signaux indépendants mis en jeu dans la simulation dépend du nombre de degrés de liberté du modèle, qui à son tour dépend de la déformabilité de l'objet à modéliser. D'après la relation (2.7) un modèle ayant 1000 degrés de liberté, produit un signal mouvement pouvant véhiculer une quantité d'information maximale de $I=240$ Moctets par minute de signal.

Pour les phénomènes optiques, le signal de sortie que nous devons produire est une image, i.e. une grille d'à peu près 10^5 pixels dont la largeur de chacune est de l'ordre de 10^{-4} m. Chaque pixel est caractérisé par un nombre codé sur 32 bits. On produit

typiquement 25 images à chaque seconde. D'après la relation (2.7) la quantité maximale d'information que ce signal peut véhiculer est de $I = 300$ Moctets d'information par minute de signal.

5.2.1.2. La modélisation mono-échelle

La modélisation mono-échelle consiste à construire un modèle décrivant par les mêmes principes électromagnétiques, à la fois les interactions atomiques (à l'origine des propriétés mécaniques macroscopiques) et la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu homogène (à l'origine des phénomènes optiques).

La propagation des ondes lumineuses est très rapide par rapport aux phénomènes mécaniques macroscopiques tels que nous les percevons, donc un modèle mono-échelle doit être simulé à une fréquence très supérieure à 1 kHz (Fréquence de simulation typique pour lesdites phénomènes mécaniques). Supposons qu'une fréquence de 10 kHz soit suffisante. Le nombre de degrés de liberté d'un tel modèle doit être supérieur ou égal au nombre de pixels de l'image finale. Enfin les nombres portés par ces signaux doivent être codés au moins sur 64 bits, puisqu'à elle seule, la simulation des mouvements macroscopiques tels que nous les percevons, exige 64 bits. D'après la relation (2.7) un tel modèle doit produire au moins 240 Goctets d'information par minute de signal. Ceci est représenté par le parallélépipède blanc de la figure 5.2.a.

5.2.1.3. La modélisation multi-échelle

La modélisation multi-échelle permet d'avoir des modèles dont les bandes passantes sont adaptées aux propriétés des phénomènes à produire : d'une part les mouvements macroscopiques perçus par notre geste et notre regard, et d'autre part les phénomènes optiques perçus seulement par notre regard.

A priori les phénomènes optiques doivent être simulés au moins à 10 kHz avec 10^5 degrés de liberté (nb_pixels) et chaque degré de liberté doit être codé au moins sur 32 bits (autant que pour l'intensité d'un pixel), alors que les caractéristiques du modèle du mouvement sont les mêmes que celles du signal de mouvement décrites dans § 5.2.1.1. Deux modèles autonomes et couplés l'un pour l'image et l'autre pour le mouvement produiraient une quantité d'information I égale à la somme des informations produites par les deux modèles. I est de l'ordre de 120 Goctets par minute de signal (cf relation (2.7)) ce qui représente deux fois moins d'information que pour le modèle mono-échelle. Donc la modélisation multi-échelle permet de réaliser un modèle deux fois moins coûteux. (cf figure 5.2)

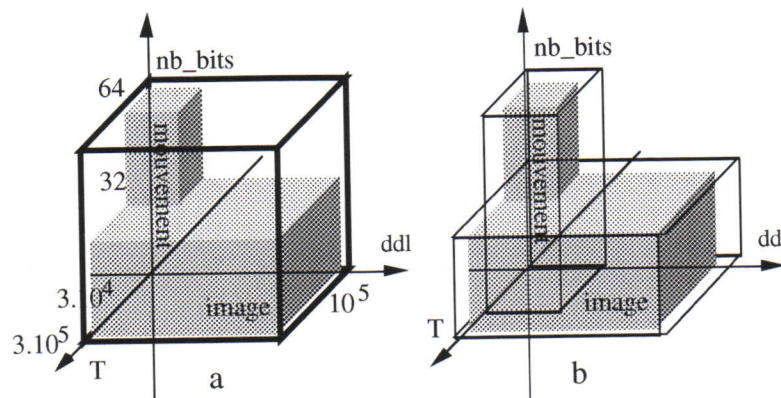


figure 5.2 La modélisation mono-échelle (a) et multi-échelle (b)

5.2.1.4. Autres possibilités de modélisation multi-échelles

La modélisation multi-échelle permet également de prendre en compte des spécificités propres à chaque modèle. Par exemple, dans les phénomènes optiques, les régimes transitoires sont amortis très rapidement (typiquement en moins de 1 ms) et laissent place à un régime permanent (un régime d'équilibre). Donc même si le régime transitoire était correctement modélisé, il n'aurait été perceptible ni sur le signal de mouvement ni sur le signal image (qui sont échantillonnés au plus à 1 kHz). Donc pour représenter tout le phénomène optique perceptible, il suffit d'en représenter le régime permanent. Ceci est possible car la plupart des modèles optiques portent sur les régimes permanents.

Les bandes passantes des phénomènes transitoires dépendent des propriétés électromagnétiques en jeu. Ces bandes passantes sont situées à des fréquences temporelles très hautes. Par contre, les bandes passantes du régime permanent sont incluses dans celles des excitations du système optique. En l'occurrence ce sont des excitations provenant du modèle de mouvement et sont échantillonnées seulement à 1 kHz. Il en résulte que les phénomènes optiques résultants ont une bande passante qui ne dépasse pas les 500 Hz et peuvent donc être également calculés une seule fois pour chaque échantillon mouvement (1 ms). Ainsi le modèle de l'image ne produit plus que 12 Goctets d'information par minute. Le modèle multi-échelle dans son ensemble produit 12,2 Goctets d'information par minute ce qui représente à peu près 20 fois moins d'information que le modèle mono-échelle.

À la section suivante, nous verrons que, dans certains cas, le modèle de l'image pourra être l'habillage du modèle du mouvement. Dans ce cas, le signal produit par le modèle de l'image n'agira plus sur le modèle du mouvement et sera uniquement destiné à la sortie image qui n'est échantillonnée qu'à 25 Hz. Dans ces cas, le modèle de l'image pourra être calculé une seule fois pour chaque échantillon du signal image i.e. à 25 Hz. Dans ce cas, le modèle de l'image ne produit plus que 300 Moctets par minute. Le modèle multi-échelle produit 540 Moctets par minutes ce qui représente à peu près 460 fois moins que pour le modèle mono-échelle. (cf figure 5.3)

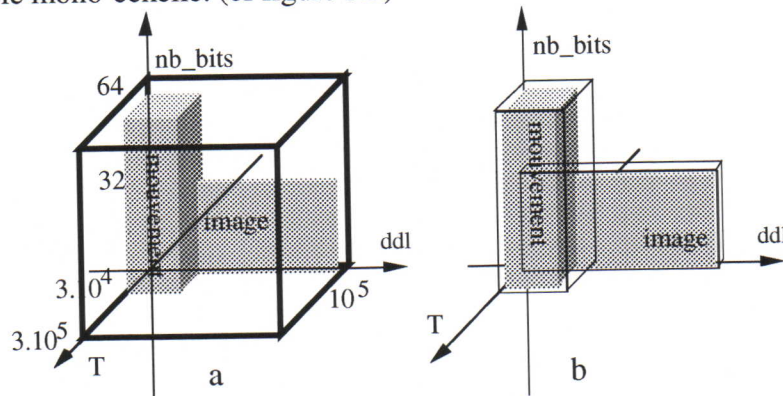


figure 5.3 La modélisation (a) mono-échelle et (b) multi-échelle dans le cas où on ne prend en compte que le régime permanent des phénomènes optiques et où le modèle de l'image est un habillage du modèle du mouvement

5.2.2. LIAISON BIDIRECTIONNELLE / UNIDIRECTIONNELLE

Dans cette section, nous supposons que le mouvement et l'image sont produits par deux modèles autonomes couplés. Notre objectif est de déterminer dans quelles conditions le modèle de l'image est l'habillage (cf § 3) du modèle du mouvement.

L'image produite par l'interaction d'un objet M et de sources lumineuses dépend de la position et de la vitesse de M. Donc la simulation du modèle de l'image dépend des données produites par le modèle du mouvement. Donc les connexions allant du modèle

du mouvement vers le modèle de l'image ne peuvent pas être coupées. Par contre le choix semble plus difficile pour les connexions allant en sens inverse. Autrement dit, le calcul de la position et de la forme d'un objet ou celui des forces qui lui sont appliquées dépend-il des interactions optiques que cet objet a avec son environnement ?

5.2.2.1. La condition de non-influence de la lumière

En toute rigueur la lumière interagissant avec un objet physique M peut exercer des forces $f_{opt}(t)$ sur cet objet et donc modifier son mouvement. Le paragraphe § 5.2.2.2 présente un exemple de ce type de force. Soit $i(t)$ l'intensité lumineuse de la lumière interagissant avec M. Nous allons déterminer si cette force est susceptible d'influencer le comportement de M. Pour cela nous aurons recours à la méthode décrite au sous-chapitre § 3.2. Nous modélisons l'objet M et l'objet L interagissant avec M par l'intermédiaire de la lumière. (L est une source de lumière) Ces modèles contiennent nécessairement au moins un point de communication N véhiculant la force $f_{opt}(t)$ exercée par la lumière sur M et la vitesse $v(t)$ de M au point N qui est renvoyée à L.

Soient les transformées de Fourier $F_{opt}(\omega) = F\{f_{opt}(t)\}$ $V(\omega) = F\{v(t)\}$ et $I(\omega) = F\{i(t)\}$.

Nous étudions M et L dans un domaine de fonctionnement linéaire. Dans ce cas, dans M (respectivement dans L) la force $F_{opt}(\omega)$ peut être exprimée comme la somme d'un terme $F_{zM}(\omega)$ (resp. $F_{zL}(\omega)$) dépendant linéairement de $V(\omega)$ et d'un second terme $F_{\acute{e}qM}(\omega)$ (resp. $F_{\acute{e}qL}(\omega)$) indépendant de $V(\omega)$. (cf les relations (3.13) et (3.14) en remplaçant A par M et B par L). Ces relations appliquées à notre cas donnent respectivement :

$$F_{opt}(\omega) = -F_{\acute{e}qM}(\omega) - F_{zM}(\omega) = -F_{\acute{e}qM}(\omega) - Y_{\acute{e}qM} V(\omega) \quad (5.1)$$

$$F_{opt}(\omega) = F_{\acute{e}qL}(\omega) + F_{zL}(\omega) = F_{\acute{e}qL}(\omega) + Y_{\acute{e}qL} V(\omega) \quad (5.2)$$

où $Y_{\acute{e}qM}(\omega)$ et $Y_{\acute{e}qL}(\omega)$ sont les admittances équivalentes respectivement de M et de L, vues du point de communication N. $F_{\acute{e}qM}(\omega)$ représente typiquement les sources d'énergie de nature mécanique agissant sur M au point N, mais aussi d'autres générateurs comme les générateurs de vitesse nulle (i.e. les sols) vus du point N. $F_{\acute{e}qL}(\omega)$ représente typiquement les sources d'énergie d'origine optique provenant de L et vu du point N.

La condition pour que le comportement de M soit indépendant de celui de L est donnée par la relation (3.11) Dans notre cas, cette relation devient :

$$|F_{zL}(\omega)| \leq |F_{opt}(\omega)| \ll |F_{zM}(\omega)| \quad (5.3)$$

Pour l'étude menée dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas des sources lumineuses L fixes et produisant un champ de force uniforme dans l'espace. Cela revient à considérer que $F_{opt}(\omega)$ ne dépend pas de $V(\omega)$ et que $F_{zL}(\omega)$ est nulle. Cela signifie que l'objet L agit comme un générateur de force $F_{opt}(\omega)$. La relation (5.3) devient alors :

$$0 \leq |F_{opt}(\omega)| \ll |F_{zM}(\omega)| \Leftrightarrow 0 \leq |F_{\acute{e}qL}(\omega)| \ll |F_{\acute{e}qM}(\omega) + F_{\acute{e}qL}(\omega)| \quad (5.4)$$

qui, en fin de compte revient à :

$$\boxed{|F_{\acute{e}qL}(\omega)| \ll |F_{\acute{e}qM}(\omega)|} \quad (5.5)$$

Autrement dit, les forces mécaniques mises en jeu dans M et ramenées au point N doivent être très supérieures aux forces optiques exercées par L et ramenées au point N.

5.2.2.2. La pression de radiation

Dans le paragraphe précédent, nous avons parlé de la force exercée par la lumière sans développer les origines possibles de cette force. Ce paragraphe en présente un exemple. La quantité de mouvement d'un photon est finie et varie lorsque celui-ci est réfléchi, absorbé ou dévié par un objet M. D'après le principe de l'action et de la réaction, la quantité de mouvement de l'objet M varie comme l'opposée de celle du photon. Ainsi lorsque toute la lumière arrivant sur l'objet M vient d'une seule direction, et a une intensité $i(t)$ (exprimée en W/m^2) alors l'objet M subit une pression P appelée *pression de radiation* exprimée en Pascals (cf. [GS 85]) et qui est égale à

$$P = 2 \frac{i(t)}{c} \text{ pour une réflexion totale et perpendiculaire} \quad (5.6)$$

$$P = i(t)/c \text{ pour une absorption totale} \quad (5.7)$$

où $c=3.10^8$ m/s est la célérité de la lumière (en m/s). La force $f_{opt}(t)$ qui s'exerce alors sur l'objet M est de $f_{opt}(t) = P(t).S$ où S est l'aire de la surface de M exposée à la lumière.

Pour que la lumière n'influence pas le comportement dynamique de l'objet M, la condition (5.5) doit être vérifiée. Pour le calcul de $F_{opt}(\omega)$ nous choisissons le cas le plus défavorable, c'est à dire celui où le comportement de M est le plus influencé par la pression de radiation. Il s'agit du cas de la réflexion totale et perpendiculaire

$$f_{opt}(t) = 2 S \frac{i(t)}{c} \Leftrightarrow F_{opt}(\omega) = 2 S \frac{I(\omega)}{c} \quad (5.8)$$

La condition (5.5) est alors équivalente à :

$$\boxed{|F_{eqM}(\omega)| \gg \left| \frac{2S}{c} I(\omega) \right|} \quad (5.9)$$

A titre d'indication, l'ordre de grandeur de l'intensité du rayonnement solaire sur Terre est de $I_T = 1,4.10^3$ W/m². Dans ces conditions, une surface réfléchissante exposée à la lumière solaire peut subir une pression de 9,3 μPa. Pour une surface de $S=10\text{cm} \times 10\text{cm}$ cette pression correspond à une force de $9,3.10^{-10}$ N. On ne peut pas dire que cette pression soit négligeable dans tous les cas. Par exemple, une feuille d'aluminium ordinaire (d'une épaisseur d'à peu près 10μ) soumise à cette pression pendant 100 secondes parcourt une distance de 1,73 mètres, ce qui est loin d'être négligeable.

En conclusion, la condition (5.9) et a fortiori la condition (5.5) n'est pas automatiquement vérifiée. Donc dans la suite, tous les objets modélisés devront vérifier la condition (5.5) faute de quoi les interactions optiques devront être calculées en même temps que les interactions mécaniques. Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons toujours aux cas où la relation (5.5) est vérifiée. Ainsi, les modèles de l'image seront toujours habillage par rapport aux modèles du mouvement (cf figure 5.4)

$$|V(\omega)| = \left| \frac{2SI(\omega)}{c Z_{eqM}(\omega)} \right| \quad (5.10)$$



figure 5.4. Dorénavant, lorsque la relation (5.5) sera vérifiée et seulement dans ce cas, le modèle de l'image pourra être un habillage du modèle du mouvement.

Les modèles que nous avons abordés pendant la durée de cette thèse et qui représentent des phénomènes de nature optique, sont en cours de conception et de réalisation. On ne présentera donc qu'un modèle élémentaire au chapitre § 10. Il s'agit d'un modèle qui sera un habillage du modèle mécanique, qui sera calculé à la même fréquence que la sortie image (25 Hz). Chaque échantillon de ce

signal spatial (un pixel) aura une valeur codée sur 32 bits.

5.3. LA FORME

Dans la section § 5.3.1 nous définissons la notion du *contour* d'un objet. La *forme* d'un objet est très liée à son contour. Plus précisément, la forme qualifie l'organisation géométrique du contour. Par exemple, lorsque nous disons que la forme d'un objet est ronde, nous qualifions l'organisation géométrique de son contour.

5.3.1. LA NOTION DE *CONTOUR MÉCANIQUE* ET DE *CONTOUR OPTIQUE*

D'après les conclusions de § 5.1, nous ne pouvons connaître un objet X, ni son occupation spatiale, ni son contour, autrement qu'en interagissant avec cet objet. Nous allons donc définir le contour en fonction de ces interactions.

5.3.1.1. L'interaction mécanique et le contour mécanique

Soit un objet réel X à connaître et un objet I connu de nous et susceptible d'interagir mécaniquement avec X. Ce sont deux objets autonomes, i.e. ils peuvent être séparés en gardant les mêmes propriétés. I peut être un capteur/effecteur naturel ou artificiel, ou un objet dont nous observons les interactions avec X. Les interactions entre X et I peuvent être mesurées par I avec une précision ϵ .

A chaque instant l'interaction entre X et I définit un champ de force $f(x)$. Ce champ est sensible sur une zone Z. Autrement dit $\forall x \in Z \quad |f(x)| > \epsilon$. Lorsque I est dans Z alors I et X interagissent. Lorsque I est entièrement en dehors de Z, alors I et X sont indépendants et libres. Cette zone Z est l'occupation spatiale de X vu par I. La frontière de Z est le contour de X vu par I.

Il est à noter que le contour de X dépend de la sensibilité ϵ et de l'objet I qui interagit avec lui. Par exemple nous palpons le contour d'un grillage métallique rigide (l'objet X_1) avec notre main (objet I_1). Si la largeur de la maille du grillage X_1 est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre, alors notre main ne peut pas distinguer ce grillage X_1 , d'une simple surface métallique rugueuse, mais étanche (objet X_2). Autrement dit, pour un capteur comme notre main, le contour des deux objets X_1 et X_2 est le même. Par contre l'air ou l'eau ou même des solides (I_2) plus fins que notre main, peuvent traverser X_1 mais non X_2 . Donc pour ces objets (I_2), les objets X_1 et de X_2 ont des contours différents. Mais même pour l'objet X_2 , il existe nécessairement une échelle spatiale où la continuité de ce contour peut être mis en défaut par des objets I_ϵ assez petits. Alors vu depuis cet objet I_ϵ , l'objet X_2 à son tour pourra avoir l'aspect d'un grillage.

Donc le contour mécanique d'un objet X n'est défini qu'en relation avec un objet capteur I et une échelle d'observation. Aucun objet ne peut être caractérisé par un contour intrinsèque.

NB. Il est à noter que les objets X et I ne sont pas nécessairement distincts : Une partie de l'objet X peut jouer le rôle d'objet I pour l'autre partie. L'interaction entre les deux parties peut être caractérisée par un contour.

5.3.1.2. L'interaction électromagnétique et le contour optique

Soit un objet réel X à connaître et qui soit susceptible d'interagir avec les ondes électromagnétiques (I). Nous pouvons capter les ondes I grâce à des capteurs. Si ces ondes sont dans le domaine des fréquences visibles, ces capteurs peuvent être nos yeux.

L'interaction entre X et les ondes I définit une zone Z dans l'espace, telle que lorsque les ondes I traversent Z alors le comportement des ondes I et/ou celui de l'objet X est affecté par ce passage, de manière assez sensible pour être détecté par un capteur donné (i.e. X et I interagissent). Si elles ne traversent pas Z, alors les deux comportements restent indépendants, ou tout au moins leur corrélation n'est pas perceptible par le capteur (i.e. X et I n'interagissent pas).

Par définition, Z est l'occupation spatiale de X vu par les ondes I. Et les frontières de Z constituent le contour optique de l'objet X vu par I.

De même que pour le contour mécanique, un objet ne peut pas être caractérisé par un contour optique absolu. Les contours optiques dépendent des ondes électromagnétiques en jeu et des capteurs disponibles.

Par exemple, un objet métallique X_1 vu à la lumière visible peut apparaître comme un grillage dont la largeur de la maille est, par exemple de l'ordre du centimètre. Mais lorsque ce même objet X_1 est observé par des ondes radar, il apparaît comme une surface continue et d'un seul tenant. De même, un cristal observé à la lumière visible apparaît comme un objet d'un seul tenant, mais certains cristaux, observés aux rayons X apparaissent précisément comme des grillages dont on peut mesurer la largeur de la maille.

Même en limitant les interactions mécaniques et optiques à celles qui peuvent être appréhendées par nos capteurs/effecteurs naturels, l'indétermination n'est pas levée. Par exemple, un tissu touché par la main peut apparaître comme une surface rugueuse mais continue, alors que regardé par transparence, le même tissu révèle une structure de grillage. En l'occurrence, le contour mécanique et le contour optique extraites l'objet ne se recouvrent pas.

Dans ces conditions, il n'est pas possible de parler du contour intrinsèque d'un grillage, d'un cristal, d'un tissu ou de tout autre objet. Dans la suite, nous distinguerons les contours mécaniques et optiques et nous saurons qu'a priori, un objet X peut admettre plusieurs contours distincts selon les différents objets I avec lesquels il interagit.

5.3.1.3. Le signal du contour

Le signal spatial de force $f(x,y,z)$ appliquée par X sur I définit la zone Z représentant l'occupation spatiale et le contour de X vu de I. Nous avons défini cette zone Z comme l'ensemble des positions de I (de coordonnées (x_I, y_I, z_I)) pour lesquelles $|f(x_I, y_I, z_I)|$ est sensible (i.e. supérieur à un seuil ϵ). La notion de contour définit une partition de l'espace

en deux sous-espaces : Z d'une part et l'extérieur de Z d'autre part. Donc le signal contour peut être représenté par un champ $c(x)$ tel que :

$$c(x,y,z)=1 \text{ si } |f(x,y,z)|>\epsilon \quad c(x,y,z)=0 \text{ si } |f(x,y,z)|<\epsilon$$

Ce champ binaire est le *signal de contour* de X vu par I. Il peut être caractérisé par des fréquences spatiales ω (exprimées en 1/m). ω est un vecteur spatial dont les composantes sont $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Elles caractérisent l'évolution de $c(x,y,z)$ respectivement dans les directions x, y et z. Si on se limite aux occupations spatiales finies, alors le signal $c(x,y,z)$ admet un transformée de Fourier

$$C(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = F\{c(x,y,z)\}$$

$|C(\omega_x, \omega_y, \omega_z)|$ définit le spectre du signal de contour $c(x,y,z)$. Le spectre spatial du champ $c(x,y,z)$ caractérisé par une fréquence maximale ω_{\max} et une fréquence minimale ω_{\min} . La fréquence ω_{\max} représente l'état de surface du contour alors que ω_{\min} représente la taille du contour. Plus ce contour possède des rugosités et des pointes et plus ω_{\max} sera grande, alors que les surfaces lisses présentent des ω_{\max} basses. Les objets de grande taille sont caractérisés par des ω_{\min} faibles alors que les objets de petite taille ont des ω_{\min} plus élevées. cf figure 5.5.

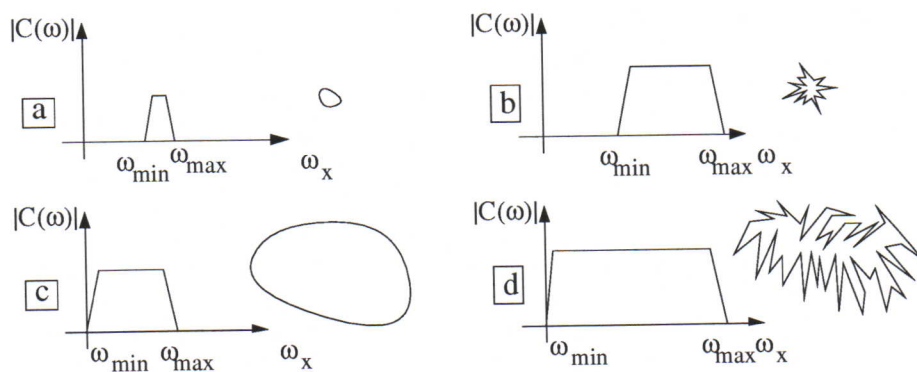


figure 5.5 Quatre exemples de contour et leur spectre respectif schématiquement représenté en fonction de la composante ω_x . Les cas a et b sont des contours de petite taille (ω_{\min} élevée) alors que c et d sont de grande taille (ω_{\min} faible). a et c sont des contours lisses (ω_{\max} faible) alors que b et d sont des contours accidentés (ω_{\max} élevée)

premier est un contour lisse et de petite taille. Son spectre est très étroit et situé de basses fréquences. Le second est un contour accidenté et de petite taille. Son spectre est composé de hautes fréquences.

NB. Dans la suite, pour alléger l'écriture, nous omettrons de spécifier la dépendance des différentes grandeurs par rapport aux variables position ou fréquence spatiale.

D'après § 2.3 la largeur de la bande passante de ce signal décrit la quantité d'information véhiculée par ce signal de contour. D'après la relation (2.5) les signaux de contour véhiculant la plus grande quantité d'information sont les contours qui sont à la fois rugueux, pointus et de grande taille (cf figure 5.5.d), alors que les signaux de contour portant le moins d'information sont les contours lisses et de petite taille (cf figure 5.5.a)

5.3.1.4. La relation entre le contour de I et le contour de X

Soient deux objets réels X et I. Nous supposons que le contour de l'objet I a été finement étudié et assez bien connu. L'objet I nous permettra de connaître le contour de l'objet X. (L'objet I peut être notre main par exemple.)

Le contour de l'objet X vu de l'objet I peut être représenté par un signal de contour ayant un spectre spatial spécifique. Ce spectre dépend de l'objet I. Typiquement les objets I ayant un contour susceptible d'être rugueux ou de comporter des pointes (contour haute fréquence) sont susceptibles de révéler les détails (hautes fréquences) du contour de X.

Par contre les objets I pouvant interagir avec X sur de grandes étendues sont susceptibles de révéler la forme globale de l'objet X (les basses fréquences). Notons que pour interagir avec X sur de grandes étendues, l'objet I peut être, soit un objet de grande taille, déformable et susceptible d'épouser le contour de X sur une grande étendue, soit un objet de taille quelconque mais susceptible de se déplacer et de "palper" le contour de X.

Un objet I capable de révéler aussi bien les détails du contour de X que sa forme globale, doit généralement vérifier les deux propriétés. On peut citer l'exemple d'une plaque d'argile interagissant avec l'objet X sur tout son contour en en conservant la marque. On pourrait également considérer que la lumière est un tel objet I puisqu'elle est susceptible d'interagir avec l'objet X finement et sur une grande étendue.

5.3.2. CONTOUR D'UN ENSEMBLE DE POINTS

5.3.2.1. Définition

Au chapitre § 1 nous avons montré qu'un grand nombre de types d'objets, et notamment les objets très déformables ne peuvent pas être modélisés par des formes explicites et que dans la suite nous nous intéressons en premier lieu aux modèles où la forme est émergente et plus particulièrement aux modèles fondés sur la physique du point. Ainsi la matière sera représentée par un ensemble de points matériels en interaction. Nous continuerons à utiliser le formalisme Cordis-Anima pour décrire ce type de modèles.

Contrairement aux modèles fondés sur la forme explicite, les modèles fondés sur la physique du point ne sont associés à aucune forme a priori. C'est ce qui leur permet de produire des comportements aussi variés. En revanche, pour représenter des objets avec leur forme, nous devons reconstruire la forme des objets à partir du mouvement des points. Or comme les objets réels, les modèles physiques interagissent avec leur environnement, avec notre geste, avec la lumière ou avec d'autres objets. De même manière que pour les objets réels, de ces interactions il émerge un contour.

Soient M_X et M_I des modèles représentant respectivement les objets de référence X et I. Nous supposons que le contour de M_I a été finement étudié et assez bien connu.

L'interaction entre un modèle M_X et un modèle M_I de son environnement définit une zone Z tel que si M_I est dans Z alors M_X et M_I sont en interaction alors que si M_I n'est pas dans Z il n'y a pas d'interaction. La frontière de cette zone est le contour du modèle M_X vu du modèle M_I .

Ainsi comme pour le cas des objets réels, un modèle physique donné peut admettre différents contours selon les divers modèles qui interagissent avec lui. De même le contour d'un modèle M_X vu depuis un modèle M_I pourra être représenté par un signal de contour $c(x,y,z)$ et sa transformée de Fourier $C(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

De même que pour les objets réels, le modèle M_X et le modèle M_I ne sont pas nécessairement distincts. Une partie du modèle M_X peut être caractérisé par un contour spécifique par une autre partie du même modèle M_X jouant le rôle de modèle M_I .

Notre objectif est de modéliser le comportement physique et optique d'un objet X pouvant être très déformable. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux objets X homogènes. L'étude des objets hétérogènes structurés en plusieurs parties homogènes pourra être déduite de celui des objets homogènes. Nous verrons qu'un objet de référence homogène ne sera pas nécessairement représenté par un modèle homogène¹².

5.3.2.2. "Spécialisation" des différentes parties d'un modèle

Dans ce paragraphe, nous cherchons à mettre en évidence des cas où, en observant le comportement d'un modèle, on peut distinguer différentes parties jouant des rôles différents dans le comportement global du modèle. La mise en évidence de telles "spécialisations" n'est pas possible pour tous les types de modèle. C'est pourquoi dans ce paragraphe, nous nous contenterons de donner quelques exemples pour illustrer cette notion.

Spécialisation en fonction du spectre de contour de M_I

Soit un modèle M_X en interaction avec le modèle M_I . Comme nous l'avons mentionné au paragraphe § 5.3.2.1, le contour de M_X dépend en général de l'objet M_I qui extrait ce contour. Si M_{I1} a un contour de spectre étroit (i.e. par exemple si son contour est toujours régulier et dénué d'éléments fins tels que des pointes ou des fils) alors il ne pourra pas interagir avec M_X sur un grand nombre de points. Le spectre extrait aura nécessairement un spectre étroit. Par contre, si M_{I2} a un contour de spectre large (i.e. s'il est fin et si son étendue est grande alors il pourra interagir avec M_X en des points qui sont restés inaccessibles à M_{I1} .

Si M_X est un tissu alors M_{I2} peut être une aiguille et M_{I1} un doigt. Il existe de nombreux points P dans un tissu avec lesquels notre doigt ne pourra pas interagir mais qui pourront être atteints par une aiguille. Pour notre doigt, ces points seront à l'intérieur du tissu alors que pour l'aiguille ce seront des points du contour du tissu.

De manière plus générale, il existe des points dans un modèle qui ne pourront interagir avec des objets extérieurs que si ces objets sont très fins.

Spécialisation en fonction de l'énergie apportée par M_I

La spécialisation peut dépendre de l'énergie apportée par M_I . En général, l'énergie produite par l'action de M_I n'est pas uniformément distribuée sur toutes les parties de M_X . Il peut en résulter une certaine "spécialisation" de ces différentes parties.

Tous les objets I ne peuvent interagir directement qu'avec le contour de M_X . L'interaction avec les autres parties est plus indirecte et se fait par l'intermédiaire des points du contour. L'énergie mise en jeu dans l'interaction est, soit entièrement apportée au contour, soit transite entièrement par le contour¹³.

¹² Dans le domaine des modèles, on peut dire qu'un modèle est *homogène* lorsque ses propriétés (masse, raideurs, transparence, etc) sont les mêmes en tout point.

¹³ Pour un modèle écrit en Cordis-Anima on peut connaître à chaque instant la puissance véhiculée entre deux parties d'un modèle. (Cf. § 3.2)

Lorsque l'énergie mise en jeu dans l'interaction est faible, alors il est fréquent que les points les plus intérieurs du modèle M_X ne reçoivent que très peu de cette énergie et que celle-ci n'ait d'influence sensible que sur les points proches du contour. Par contre des énergies plus importantes peuvent se propager jusqu'aux points intérieurs et même parcourir l'ensemble du modèle.

Supposons que M_X soit un modèle de pâte à modeler constitué de points matériels, deux à deux en interaction. Lorsque M_I est un modèle de lumière alors seule une partie très superficielle de M_X est sollicitée par l'action de M_I . Lorsque M_I est un modèle d'objet mécanique frôlant M_X alors, de même, seuls les points proches du contour sont sensiblement influencés par cette action, alors que la puissance transmise aux parties plus profondes est négligeable. Par contre dans le cas d'un examen plus vigoureux consistant à compresser, étirer, tordre et lancer M_X , l'énergie apportée au modèle atteint des couches plus profondes, voire parcourt l'ensemble des points du modèle. Entre ces deux extrêmes on pourra citer de nombreux autres cas intermédiaires.

D'autre part différents ordres de grandeur d'énergie peuvent également engendrer différents types de phénomènes. Les différentes parties de M_X en interaction avec M_I pourront être caractérisées par différentes valeurs d'admittance¹⁴ et les déformations caractéristiques de ces différents types de phénomènes pourront être d'ordres de grandeur différents.

5.3.2.3. Les contraintes d'une modélisation mono-échelle

Critère d'évaluation d'un modèle

Soit un objet réel X à modéliser. Soit un objet réel I interagissant avec X . I peut être notre main, la lumière ou tout autre objet interagissant avec X . Nous utilisons I pour explorer les propriétés de X . Soient M_X et M_I des modèles représentant respectivement les objets de référence X et I . Nous supposons que dans les domaines de fréquence et d'énergie qui nous intéressent, M_I est un modèle fidèle de l'objet I . Le modèle M_X sera alors jugé fidèle si et seulement si pour une action identique de I et de M_I , les comportements respectifs de X et de M_X sont assez proches.

Or en général, un objet X à représenter interagit avec différents types d'objets I . Chaque type d'objet impose de nouvelles contraintes pour la modélisation de l'objet X . Il interagit avec différentes parties de X en fonction de l'énergie apportée par I et en fonction du contour de I (cf. § 5.3.2.2).

a. La complexité du contour

L'interaction entre X et I peut être caractérisée par un contour avec un spectre de largeur spécifique. Le modèle M_X sera fidèle à X , seulement si le signal de contour de M_X vu par M_I est assez proche du signal de contour de X vu par I . Ceci implique entre autres que les spectres de contour soient proches. Or le contour de M_X est supporté par des points matériels discrets. La largeur du spectre du contour (i.e. sa complexité ou encore la quantité d'information véhiculée par ce signal de contour) est une directement fonction du nombre de points¹⁵ qui constituent ce contour. Autrement dit, plus le contour à

¹⁴ L'admittance de M_X vu par un point P de M_I caractérise la capacité de M_X à échanger de l'énergie avec M_I à travers le point P (cf. § 3.2)

¹⁵ Ici un point est une entité P caractérisée par une position et une vitesse dans l'espace. Il peut s'agir d'un point matériel caractérisé par une masse, ou simplement un point construit géométriquement, un barycentre d'autres points etc.

représenter a un spectre large et plus sa modélisation nécessitera un grand nombre de points.

Par exemple le contour d'un tissu (X) vu par une aiguille (I_1) a un spectre plus large que le contour du même tissu vu par une main (I_2). Donc la modélisation de l'interaction entre un modèle de tissu M_X et d'un modèle d'aiguille M_{I1} nécessitera un nombre beaucoup plus grand de points matériels que la modélisation de l'interaction entre le même tissu et un modèle de main M_{I2} .

Lorsqu'il faut modéliser l'interaction entre l'objet X et une grande variété d'autres objets I ayant des contours très différents, et si nous voulons modéliser X par un modèle M_X homogène (i.e. mono-échelle) alors le nombre de points utilisé dans le modèle devra satisfaire la contrainte la plus forte. L'interaction optique est souvent celle qui impose le plus grand nombre de points. Typiquement pour une résolution de l'ordre de celle des pixels, il faudrait que le contour de l'objet, une fois projeté sur l'écran, ait quelques 10000 points par cm^2 . Une approche mono-échelle exigerait que cette résolution soit non seulement celle du contour mais celle de tout le modèle.

b. La complexité du comportement dynamique

Lorsque X interagit avec un objet I apportant une faible quantité d'énergie, alors typiquement seule une partie externe assez superficielle de l'objet est sollicitée. Ces énergies peuvent produire des phénomènes d'un type spécifique, représentant un degré spécifique de déformabilité. L'admittance de l'objet X vu de l'objet I a une valeur spécifique.

Par contre lorsque ce même objet X interagit avec un objet I apportant une grande quantité d'énergie, alors des parties plus profondes de X sont sollicitées. Par rapport au cas précédent, l'admittance de X vu de I peut être différente, la nature même des phénomènes en jeu peut être différente et la déformabilité globale apparente de l'objet vu de I pourra également être différente.

Pour la modélisation de l'interaction entre X et I, différentes valeurs d'admittance nécessitent différentes valeurs de paramètres physiques (masse, raideur, viscosité) et différentes structures de modèle. Différents degrés de déformabilité nécessitent différents nombres de points matériels¹⁶. Enfin différents types de phénomènes peuvent nécessiter des modèles de type tout à fait différent.

De même qu'au sous-paragraphe précédent, lorsqu'il faut modéliser l'interaction entre l'objet X et une grande variété d'autres objets I apportant chacun des énergies d'ordre de grandeur différent et si, de plus, nous voulons modéliser X par un modèle M_X homogène (i.e. mono-échelle) alors tous les types de phénomènes devront être produits par ce modèle unique. Le nombre de points matériels utilisé dans le modèle doit alors satisfaire au moins le phénomène qui nécessite le plus grand nombre de points. Mais il devra également produire tous les autres types de phénomènes avec ce modèle unique. Cette contrainte peut quelquefois encore augmenter le nombre de points matériels nécessaires.

¹⁶ La déformabilité d'un modèle est directement fonction du nombre de degrés de liberté de ce modèle. Pour un modèle composé de points matériels le nombre de degrés de liberté est égal à trois fois le nombre de points matériels que contient ce modèle. Les "points matériels" sont des points dont la position est déterminée dynamiquement en fonction des forces qui leur sont appliquées. Les points dont la position est déterminée de manière non-dynamique (par exemple géométrique) ne sont pas des points matériels proprement dits. Ils n'ajoutent pas de degrés de liberté supplémentaires au modèle.

c. Les contraintes croisées

La finesse du contour et la complexité dynamique peuvent quelquefois produire deux contraintes distinctes, même si l'objet X à modéliser n'interagit qu'avec un seul objet I. Le nombre de points matériels utilisé pour modéliser X dépend des propriétés physiques de X et de l'énergie apportée par l'objet I. Le nombre de points nécessaires pour le contour de X dépend du spectre de contour de I.

Considérons le cas typique où l'objet X interagit avec un objet I ayant un contour à large bande, mais apportant une énergie trop faible pour pouvoir déformer X de manière considérable. Dans ce cas, le corps de l'objet X pourra avoir très peu de degrés de liberté alors que son contour devra comporter un grand nombre de points.

Dans un tel cas, la modélisation mono-échelle exigerait que tout l'objet soit modélisé à l'échelle des points du contour. Mais l'interaction entre ces points devra faire de ce modèle M_X un objet très peu déformable. Mais on montre que pour qu'un objet composé d'un grand nombre de masses soit peu déformable, la raideur de chaque interaction doit être beaucoup plus grande que pour un modèle comparable avec un nombre plus faible de points matériels. Ce modèle mono-échelle serait alors très coûteux.

5.3.2.4. La modélisation multi-échelle

L'objet X que nous cherchons à modéliser est homogène. Mais d'après les conclusions du paragraphe précédent, si le modèle M_X est également homogène (i.e. mono-échelle) et s'il doit interagir avec une grande variété d'objets I alors le modèle résultant est souvent composé d'un très grand nombre de points matériels et/ou géométriques. C'est donc un modèle coûteux.

Dans les sous-paragraphe précédents, nous avons présenté trois cas typiques :

- a. Le cas de plusieurs objets I interagissant avec X, qui ont des contours de spectre différent et qui "voient" X avec des contours différents. Chaque contour exige un nombre de points N_{cont} différent.
- b. Le cas de plusieurs objets I interagissant avec X, apportant des énergies différentes et qui sont capables de déformer X à des degrés divers. Chaque déformation exige un nombre de degrés de liberté (i.e. un nombre de points matériels N_{ddl}) différent des paramètres différents et même des types de modèles différents.
- c. Le cas d'un seul objet I interagissant avec X. Le nombre de points matériels N_{ddl} exigé pour la déformation de tout l'objet X et le nombre de points N_{cont} exigé pour la modélisation du contour de X vu de I sont très différents.

La modélisation mono-échelle se révèle coûteuse dans ces trois cas typiques, et dans toutes les combinaisons qu'il est possible de faire entre eux. Dans ces cas il est souvent intéressant de modéliser l'interaction entre l'objet X et les différents objets I par plusieurs modèles autonomes couplés. C'est la modélisation multi-échelle.

Dans les trois cas en général et dans le cas c/ en particulier la modélisation multi-échelle consiste à recourir à des modèles distincts pour l'intérieur de l'objet et pour les contours. Dans le cas a/ elle consiste à modéliser chaque contour différent par un modèle différent. Dans le cas b/ elle consiste à modéliser l'intérieur de l'objet avec plusieurs modèles aux nombres de degrés de liberté et aux propriétés physiques différentes. (cf figure 5.6.b)

La figure 5.6.a représente un modèle homogène (mono-échelle) dont le nombre de points est celle exigée par l'interaction avec la lumière. Par contre la figure 5.6.b représente un

modèle M_X comparable mais hétérogène (multi-échelle). La lumière interagit seulement avec une couche superficielle de matière. C'est donc cette couche seule qui est modélisée à la finesse exigée par l'interaction lumineuse. D'autre part, l'objet I a un contour de spectre relativement étroit donc le contour de X vu par I pourra être modélisé par un nombre de points relativement restreint. Enfin on estime qu'avec l'énergie que l'objet I peut apporter à X, les déformations de celui-ci seront assez faibles pour pouvoir être modélisés par 36 degrés de liberté soit 12 masses.

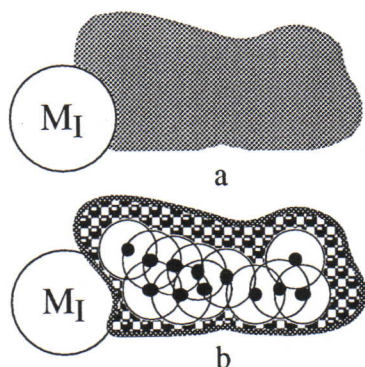


figure 5.6. Un objet homogène X modélisé par un modèle homogène (a) par un modèle hétérogène M_X (b) modélisation multi-échelle

La modélisation multi-échelle n'est pas toujours intéressante. Il en est ainsi notamment lorsque le nombre de points et les propriétés physiques exigées par l'interaction avec les différents objets I et entre les différentes parties de l'objet X sont à peu près identiques.

Dans les cas de modélisation multi-échelle étudiés jusqu'ici nous avons fourni des données quantitatives (notamment concernant les modèles multi-sensoriels cf § 2.4.1.2 et concernant l'interaction entre les modèles mécaniques et optiques cf § 5.2.1.3.). Il est vrai qu'on peut aisément distinguer quantitativement les ordres de grandeurs caractérisant les systèmes visuels, auditifs et moteurs, ou ceux caractérisant les phénomènes mécaniques et optiques. Mais il est

beaucoup plus aléatoire de chercher à distinguer dans le cas général, les ordres de grandeur caractérisant différents objets mécaniques I interagissant avec un objet X donné. Les énergies apportées peuvent être très faibles ou très fortes. Le spectre du contour peut être très étroit ou très large.

Nous nous contenterons donc de mener un raisonnement quantitatif seulement dans des cas particuliers où les propriétés et caractéristiques respectives des objets I et X seront instanciés.

5.4. LA FORME, LE MOUVEMENT ET L'IMAGE

5.4.1. DES DOMAINES NON-DISJOINTS

5.4.1.1. Les modèles de mouvement

Jusqu'ici nous avons surtout étudié des modèles d'image et des modèles du mouvement, l'un ayant trait aux phénomènes optiques et l'autre aux phénomènes mécaniques.

Par définition un modèle de mouvement génère des signaux de mouvement (position, vitesse, force etc.) indépendants. En toute rigueur le principe de l'action et de la réaction interdit que le mouvement d'un point soit entièrement déterminé par le mouvement d'autres points.

Cependant en pratique, il est possible que le mouvement d'un point soit dépendant du mouvement d'autres points avec de très courtes périodes transitoires. Dans ce cas, nous avons vu (chapitre § 4) que ce point matériel peut être remplacé par un point dont la position est calculée par des principes non-dynamiques. Mais le modèle construisant le mouvement de ce point à partir du mouvement des autres points n'est pas à proprement parler un modèle de mouvement puisqu'il n'apporte aucun degré de liberté de mouvement au modèle global.

5.4.1.2. Les modèles de forme

Nous avons vu qu'un modèle représentant un objet X peut admettre plusieurs contours selon les objets I qui interagissent avec lui. La modélisation de ces contours peut faire l'objet de modèles séparés ou non. (cf § 5.3.2.4). Par définition, les modèles supports de ce contour seront des modèles de forme.

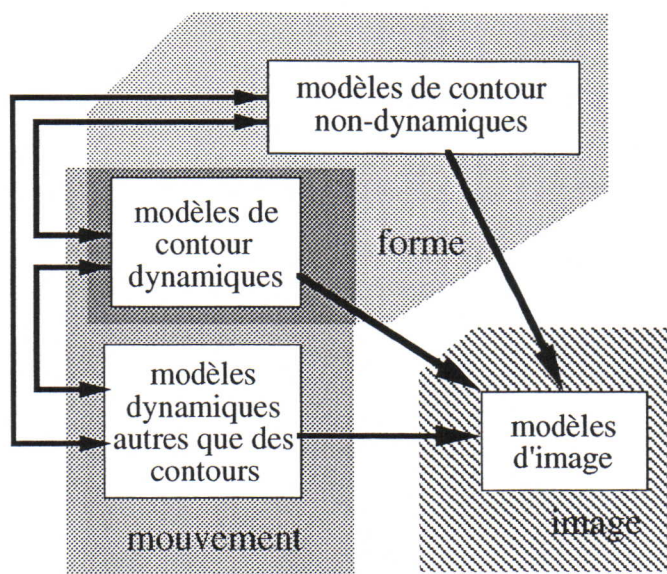


figure 5.7. La relation entre les modèles de mouvement de forme et d'image.

objet. Ce sont des modèles de mouvement sans être des modèles de forme. Réciproquement nous verrons que, dans certaines circonstances, un contour peut être modélisé par un ensemble de points dont la position n'est pas déterminée par des principes dynamiques mais par des principes géométriques. L'ajout de ce type de points peut élargir le spectre du contour, mais n'augmente pas le nombre de degrés de liberté de l'objet global. Ces modèles ne sont pas des modèles de mouvement mais purement des modèles de forme.

5.4.1.4. La relation avec le modèle de l'image

Les modèles de forme et de mouvement génèrent tous deux des phénomènes de l'ordre de la mécanique alors que les modèles d'image génèrent des phénomènes de l'ordre de l'optique. Nous avons montré au sous-chapitre § 5.2 que dans le cas général, les phénomènes mécaniques et optiques ne sont a priori pas indépendants, mais nous avons également vu que dans un très grand nombre de cas, les phénomènes mécaniques peuvent être modélisés indépendamment des phénomènes optiques (§ 5.2.2.2). La relation qui en résulte entre les modèles de forme, de mouvement et d'image est décrite sur la figure 5.7.

5.5. DE L'OPP AUX CONTOURS : PLUSIEURS COUCHES DE MODÈLES

Dans ce sous-chapitre, nous allons montrer comment les trois phénomènes : mouvement, forme et image peuvent s'articuler dans un modèle. Nous allons partir d'une situation considérée comme la plus générale à savoir celui de la figure 5.7.

5.5.1. LES MODÈLES D'IMAGE

Comme pour le mouvement, les images peuvent être obtenues par des modèles descriptifs ou des modèles générateurs.

5.4.1.3. Les modèles de forme et de mouvement

On notera que ces définitions ne s'opposent pas. Un modèle de contour est souvent constitué de points matériels (i.e. génère un mouvement indépendant de celui des autres points.) Ce modèle de contour participe donc à la modélisation du mouvement au même titre que les autres composantes du modèle. Il s'agit donc à la fois d'un modèle de forme et d'un modèle de mouvement.

Il existe également des modèles de points matériels qui ne modélisent le contour d'aucun

5.5.1.1. Modèles descriptifs

Le modèle de l'image peut être fondé sur un principe descriptif. Cela consiste à produire une image en assignant explicitement des couleurs et des intensités particulières aux pixels¹⁷. Une telle méthode permet de produire tous les signaux image possibles. Le réalisme du résultat dépendra du choix et de la répartition des couleurs. Ce choix est d'autant plus difficile que la forme de l'objet à représenter est complexe.

Lorsque l'image est produite à partir de points dont la position et la vitesse sont produites par d'autres modèles, alors la modélisation de l'image consiste simplement à assigner des propriétés visuelles (couleurs) à ces points et à les projeter sur le plan image. C'est ce type de méthode que nous avons utilisé pour obtenir l'image de la figure 5.11.

5.5.1.2. Modèles générateurs

Le modèle de l'image est fondé sur des règles de comportement et même quelquefois sur des principes de simulation optique. Dans ce cas, le modèle de l'image peut comprendre un modèle de lumière avec des propriétés spécifiques. Contrairement au modèle descriptif, le modèle générateur ne permet pas de produire tous les signaux possibles, mais seulement des images consistantes au regard du modèle de lumière adopté. Par contre étant donné un tel modèle, le réalisme du résultat pourra ne pas dépendre de la complexité de la forme des objets à représenter.

Lorsque l'image est constituée de points dont la position et la vitesse sont produites par d'autres modèles, alors la modélisation de l'image consiste à assigner des propriétés optiques (transparence, brillance, émission etc.) à ces points, à calculer la réponse de ces points à l'action des sources de lumière, et d'en déduire l'image résultant. C'est ce type de méthode que nous avons utilisé pour obtenir l'image de la figure 5.13 avec un modèle d'illumination de Phong.

5.5.1.3. La contrainte de la résolution ρ

Nous considérons que toutes les positions et les vitesses caractérisant l'objet à représenter sont calculées par les modèles de mouvement et de forme. La fonction du modèle d'image est uniquement de donner à ces points des propriétés optiques ou visuelles, éventuellement de simuler le modèle optique sous-jacent et enfin d'afficher l'image résultante.

L'interaction d'un objet X avec la lumière produit un contour de large spectre. D'après § 5.3.2.3.a, cette largeur de spectre détermine le nombre de points qu'un modèle M_X doit avoir sur son contour optique pour pouvoir reproduire le contour optique de X. Ce nombre de points est déterminé, non seulement par cette largeur de spectre, mais également et surtout par la résolution des supports de visualisation utilisée. Typiquement une image contient à peu près 10^4 pixels par cm^2 . Pour un grand nombre de cas, cette résolution est suffisante pour modéliser le contour des objets¹⁸.

¹⁷ C'est à dessein que nous évoquons seulement le cas de points à l'exclusion des primitives géométriques comme des courbes, surfaces et volumes. En effet la modélisation géométrique sera abordée dans le cadre de la modélisation de la forme.

¹⁸ Dans certains cas, il est nécessaire de recourir à des résolutions beaucoup plus grandes. C'est le cas des modèles d'image décrits dans [PF 90] où des formes de tailles très inférieures à celle du pixel produisent des phénomènes qui sont visibles à grande échelle.

Par conséquent nous considérerons que l'ordre de grandeur de la résolution ρ des contours fournis au modèle d'image par les modèles de forme et de mouvement est également de 10^4 points par cm^2 . C'est ce que nous appellerons désormais *la contrainte de la résolution ρ* .

5.5.1.4. Le modèle SCO

Soit M_ϕ un modèle composé de points matériels et représentant les propriétés dynamiques de l'objet de référence X. Le contour mécanique (ou "physique") de M_ϕ contient un nombre assez important de points pour rendre compte des comportements de X. Si de plus, l'on attribue à ce même modèle M_ϕ des propriétés optiques alors on pourra également parler du contour optique de M_ϕ . Si le nombre de points satisfait *la contrainte de la résolution ρ* , alors les points de ce contour peuvent être directement fournis au modèle d'image. Dans ce cas, le nombre de points du modèle M_ϕ est suffisant à la fois pour la modélisation des mouvements, de la forme et de l'image. (cf figure 5.8.a)

Mais en pratique de nombreuses catégories de mouvements peuvent être générés par un plus petit ensemble de points. Donc dans un très grand nombre de cas, nous pourrions avoir recours à la modélisation multi-échelles. Dans la plupart des cas cités dans ce travail les modèles de forme et de mouvement seront au moins au nombre de deux : l'un contenant un nombre limité de points et produisant un type de mouvement spécifique et l'autre contenant un nombre de points satisfaisant la contrainte de la résolution ρ . Ce modèle sera le *Support du Contour Optique* (le SCO). Cf figure 5.8.b.

Typiquement le SCO effectue au moins un suréchantillonnage spatial. Selon les cas, ce suréchantillonnage est de nature géométrique ou de nature dynamique. Un cas typique de suréchantillonnage géométrique d'un ensemble de points consiste à lier ces points par des courbes ou surfaces géométriques.

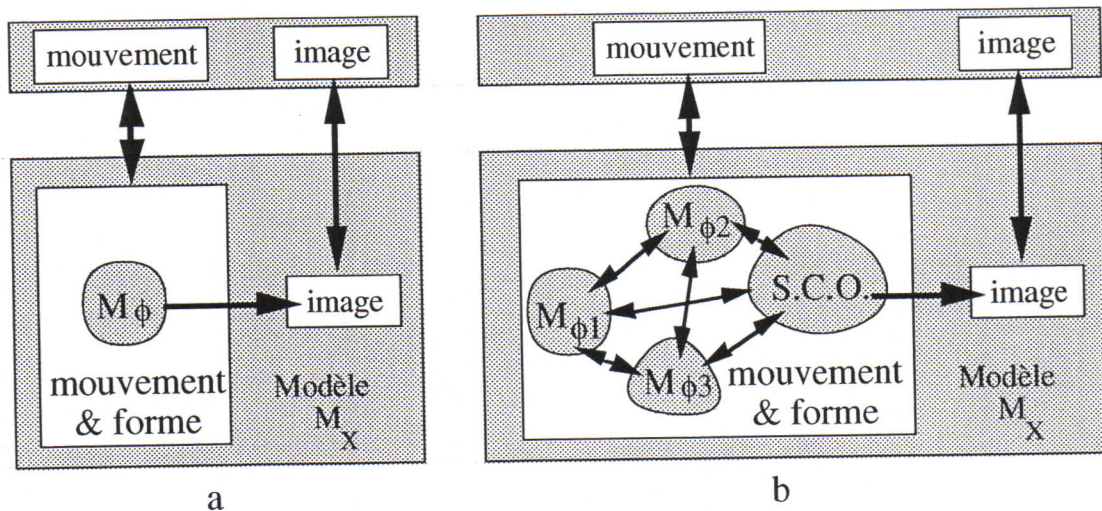


figure 5.8 (a) Modélisation mono-échelle du mouvement. Comme le modèle du mouvement doit fournir les positions au modèle de l'image, tout doit être modélisé à cette échelle. (b) Modélisation multi-échelle du mouvement : seul un des modèles (le SCO) a la résolution ρ nécessaire pour le modèle image.

Un modèle d'image élémentaire sera présenté au chapitre § 10 mais dans la suite de ce sous-chapitre nous nous intéresserons essentiellement aux modèles du mouvement et de forme. La seule influence du modèle de l'image sur ces derniers sera la satisfaction de la contrainte de la résolution ρ . Ce rôle sera rempli par le modèle SCO.

5.5.2. FORME ET MOUVEMENT

5.5.2.1. L'OPP et le SCO

Dans le domaine de la synthèse d'image, les seules interactions électromagnétiques que nous prenons en compte sont des interactions entre X et un seul objet I, dont les caractéristiques sont assez bien connues : la lumière visible. Pour l'interaction mécanique, il n'en est pas de même. Les objets I susceptibles d'interagir avec l'objet peuvent avoir des propriétés très variées. Ils peuvent avoir des contours de spectre varié et apporter divers ordres de grandeur d'énergie à l'objet.

Les caractéristiques physiques globales du modèle mécanique $M_{\phi X}$ d'un objet X sont déterminées par l'interaction entre cet objet X et l'objet I_{\max} qui lui apporte la plus grande quantité d'énergie (typiquement le geste). Le modèle physique qui rend compte de cette interaction sera appelé *l'Objet Physique Profond* (ou l'OPP).

Lorsque l'OPP ne permet pas de rendre compte des interactions entre cet objet X et d'autres objets I_i , lui apportant moins d'énergie, on aura recours à d'autres modèles $M_{\phi X_i}$. (cf figure 5.9) L'OPP exprime les propriétés physiques globales de l'objet. alors que les autres modèles rendent compte de phénomènes moins énergétiques.

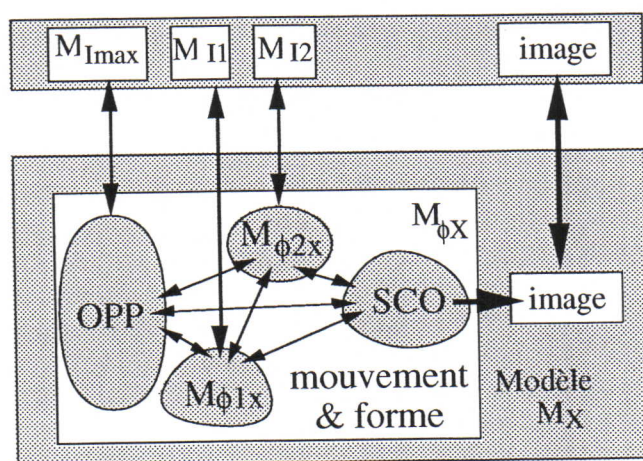


figure 5.9. De l'OPP au SCO. Le modèle M_X de l'objet X. Le modèle du mouvement et de la forme est $M_{\phi X}$. Ce modèle physique est constitué de quatre composants : l'OPP, les modèles $M_{\phi X_i}$ et enfin le SCO.

De manière générale, lorsque $M_{\phi X}$ (le modèle du mouvement et de la forme) est composé de plusieurs modèles en interaction, alors nécessairement l'un d'eux sera l'OPP et un autre sera le SCO. S'il ne contient que deux modèles alors ce seront nécessairement l'OPP et le SCO.

Dans la suite de ce sous-chapitre, nous considérerons que le cas le plus général sera celui où le modèle du mouvement et de la forme contient seulement deux modèles : l'OPP et le SCO en interaction bidirectionnelle. Ensuite, selon les propriétés des différents objets à modéliser et des différentes interactions, nous

pourrons utiliser le principe de la modélisation multi-échelle (§ 2) le principe de l'habillage (§ 3) et celui de la transmission et de la dépendance non-dynamique (§ 4) pour adapter ce modèle général aux cas typiques que nous allons examiner.

5.5.2.2. L'habillage géométrique

Nous allons commencer par un cas où le modèle $M_{\phi X}$ ne contient effectivement que deux modèles : l'OPP et le SCO (cf figure 5.10)

La marionnette

Le premier modèle a également été décrit dans [HL 93]. L'OPP est constitué d'une marionnette construit par 14 points matériels (4 pour la tête, 5 pour les bras et l'épaule et 5 pour les jambes et la hanche) qu'un opérateur manipule par les pieds avec une interface gestuelle à retour d'effort (le TGR). Ce nombre de points est suffisant pour rendre compte de l'interaction entre la marionnette et le marionnettiste. Mais ces 14 masses ne

vérifient pas la contrainte de la résolution ρ . Il faut donc associer ce modèle à un modèle SCO. En l'occurrence le modèle SCO retenu est un ensemble de courbes splines dont les points de contrôle sont les points matériels de l'OPP.

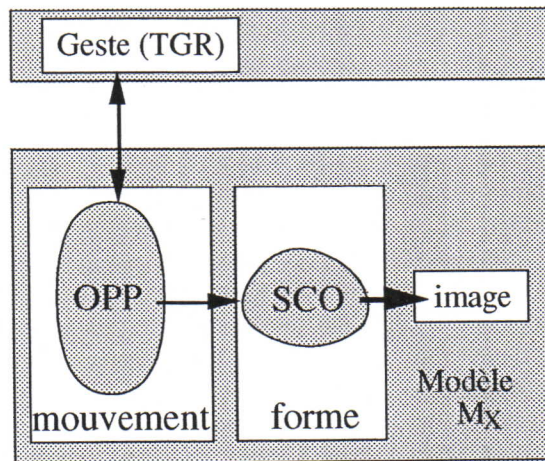


figure 5.10. L'habillage géométrique

Autrement dit, SCO est un habillage de l'OPP et d'autre part il s'agit d'un habillage géométrique. Donc ces points n'ont pas intrinsèquement de propriétés physiques, donc nous ne pouvons pas appliquer les critères de § 3.2 pour savoir si l'habillage est valable ni appliquer ceux de § 4.2 pour savoir si on peut utiliser des points géométriques au lieu de points matériels. Par contre grâce à ces deux conditions nous pouvons dire que ces points définis géométriquement ont le même comportement qu'un modèle physique constitué de masses très légères liées par des interactions très raides et très visqueuses.

En effet pendant l'animation, cet habillage constitué de "splines" prend son sens étymologique. En effet malgré la construction géométrique de ces points, l'observateur peut attribuer à cet habillage des propriétés physiques qui sont celles de lattes légères et tendues. Ceci est effectivement un comportement prévu par la condition de la dépendance non-dynamique (cf § 4.2)

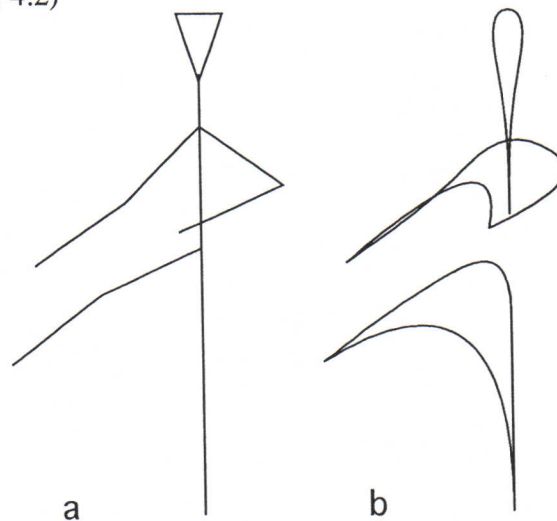


figure 5.11. (a) l'OPP seul, la marionnette. (b) l'OPP avec le SCO, en l'occurrence un habillage géométrique à base de courbes splines.

Les briques

L'OPP est constitué de quatre groupes de 45 masses ponctuelles (3x3x5) (cf figure 5.12.a) représentant chacun des briques deux à deux en interaction de butée visco-élastique. Ces briques sont également en interaction de butée visco-élastique avec un sol.

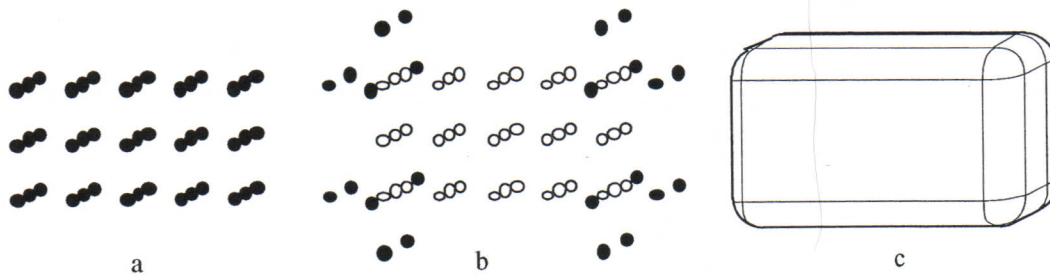


figure 5.12. (a) L'OPP : un des quatre briques constituées de 45 points matériels.(b) Un premier habillage géométrique constitué de barycentres appartenant au contour des briques.(c) Le SCO proprement dit, liant ces barycentres par des polygones et des portions d'ellipsoïde et de cylindre.

Les objets I interagissant physiquement avec chacune des briques est d'une part le sol et d'autre part les autres briques. Nous avons choisi de représenter le contour des briques vu par le sol. Cependant aucun des points de l'OPP n'appartiennent pas à ce contour. Donc par un premier habillage géométrique, nous avons construit des points de contrôle appartenant à ce contour. Ce sont des barycentres des poins de l'OPP. Ensuite un second habillage géométrique a consisté à relier ces points de contrôle par des polygones, des portions d'ellipsoïde et des portions de cylindre.

Là aussi, le modèle physique équivalent aurait vérifié la condition de la dépendance non-dynamique ($k \gg m\omega^2$). Le modèle d'image est constitué d'un modèle d'illumination de Phong (cf figure 5.13).

5.5.2.3. Modélisation du contour physique

Voici une situation plus complexe où le modèle $M_{\phi X}$ contient un nouveau modèle : l'OPP, le SCO et un modèle de contour. A priori ce contour est composé de points matériels. La fonction de ce contour est de transmettre à l'OPP les actions de l'environnement M_I et de transmettre à l'environnement M_I les actions de l'OPP.

Lorsque ni l'objet M_I ni l'objet $M_{\phi X}$ ne sont en relation de moteur habillage alors, quelques soient les propriétés de ce contour, il ne pourra pas être en relation de moteur habillage avec l'OPP ou avec l'objet M_I . Par contre si $M_{\phi X}$ est l'habillage de M_I ou inversement alors la relation d'habillage/moteur devient envisageable en fonction des propriétés de l'objet contour.

la peau

L'objet de référence est un ballon fait avec une peau. Ce modèle a été décrit dans [HL 92]. L'opérateur (un objet M_I) manipule le modèle $M_{\phi X}$ et sent ses réactions. Les obstacles de la scène sont également des instances d'objet M_I . Le modèle de contour est composé de vingt points d'une part en interaction avec l'OPP et d'autre part en interaction avec les objets extérieurs à l'OPP (le TGR et les obstacles de la scène). La fonction de ce contour est de transmettre à l'OPP les actions de l'opérateur et des obstacles de la scène, et réciproquement de transmettre aux objets extérieurs l'action de l'OPP. Ainsi l'OPP et ces objets extérieurs ne sont plus en interaction.(cf figure 5.13)

En l'occurrence un seul contour suffit pour les interactions entre l'OPP et les objets extérieurs. Mais le cas échéant il peut y avoir autant de modèles de contour que d'objets

extérieurs susceptibles d'interagir avec $M_{\phi X}$. Le modèle SCO est constitué de segments de droite reliant les points du contour.

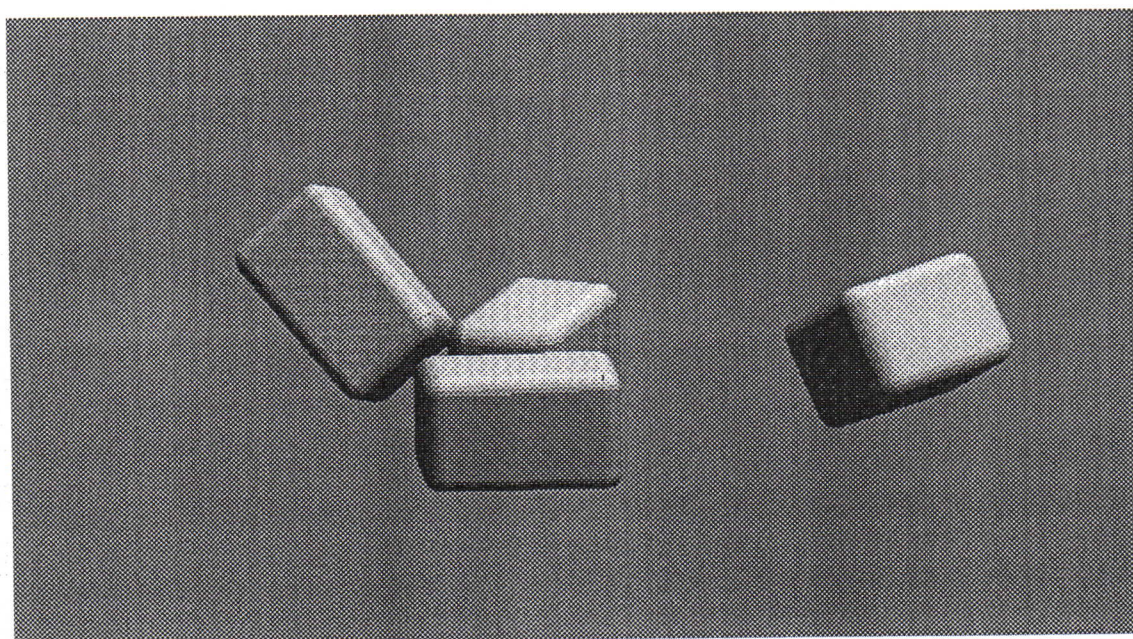
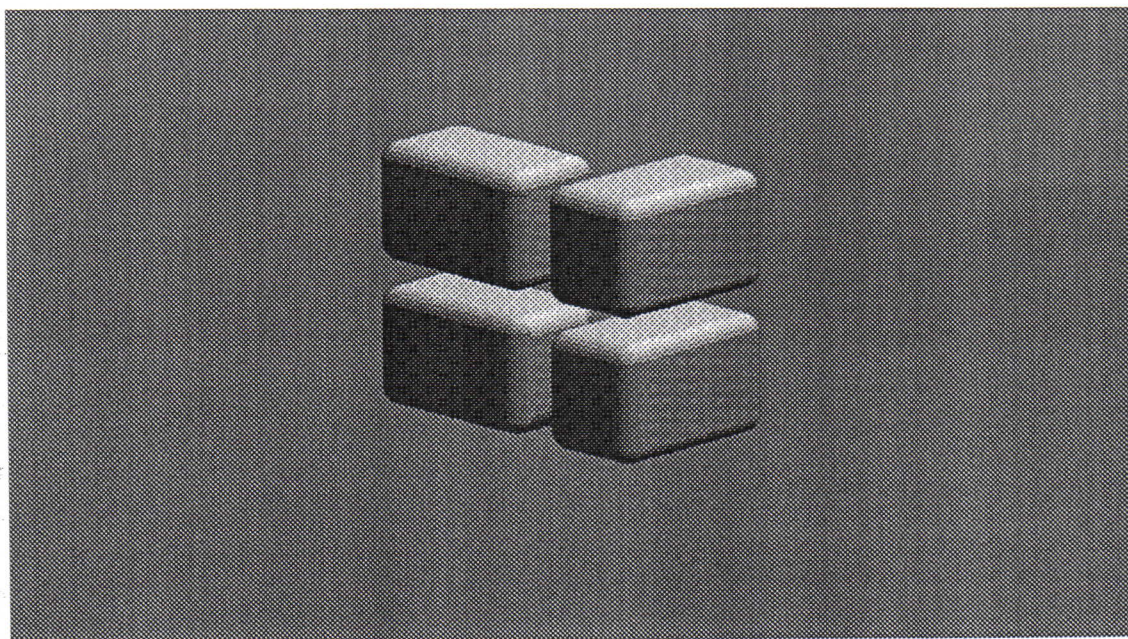


figure 5.13. Quatre ensembles de 45 points matériels liés par des interactions visco-élastiques forment quatre briques en interaction. Ces briques ont été habillées géométriquement par des primitives géométriques. (a) La simulation à l'instant $t=0$ (b) La simulation à l'instant $t=2$ secondes

Le nombre de degrés de liberté de ce modèle dépend de celui de l'OPP et de celui du contour. Si le nombre de ddl de l'OPP est suffisant pour rendre compte de la déformabilité de l'objet alors cela signifie que les interactions entre l'OPP et le contour vérifient la condition de transmission (cf § 4).

Dans ce cas, il devient possible de remplacer les points matériels du contour par des points transmetteurs (cf. [CL 86]). Ces points n'ont pas de propriété physique intrinsèque. Ils transmettent simplement les forces et les positions qui leur sont fournies de part et d'autre. Ce dernier principe a été mis en œuvre dans [Gasc 93].

5.5.2.4. Modélisation physique du contour visuel

Dans ce cas, l'interaction entre l'OPP et les objets extérieurs n'a pas besoin d'un objet intermédiaire. Il s'agit simplement de modéliser le contour visuel de $M_{\phi X}$. Contrairement au cas du paragraphe § 5.5.2.3. nous considérons que le nombre de degrés de liberté de l'OPP n'est pas suffisant pour rendre compte de la déformabilité de l'objet global. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter au modèle un nouvel objet M_h constitué de points matériels. Contrairement au contour étudié au paragraphe précédent, M_h ne joue pas le rôle d'interface dynamique entre deux objets. Lorsque ses propriétés le permettent (lorsqu'elles vérifient la condition de l'habillage) alors M_h peut être simulé indépendamment de l'OPP.

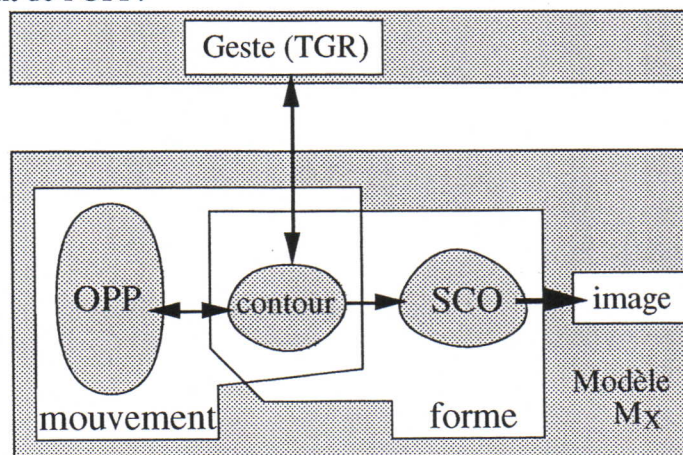


figure 5.14. Le contour physique

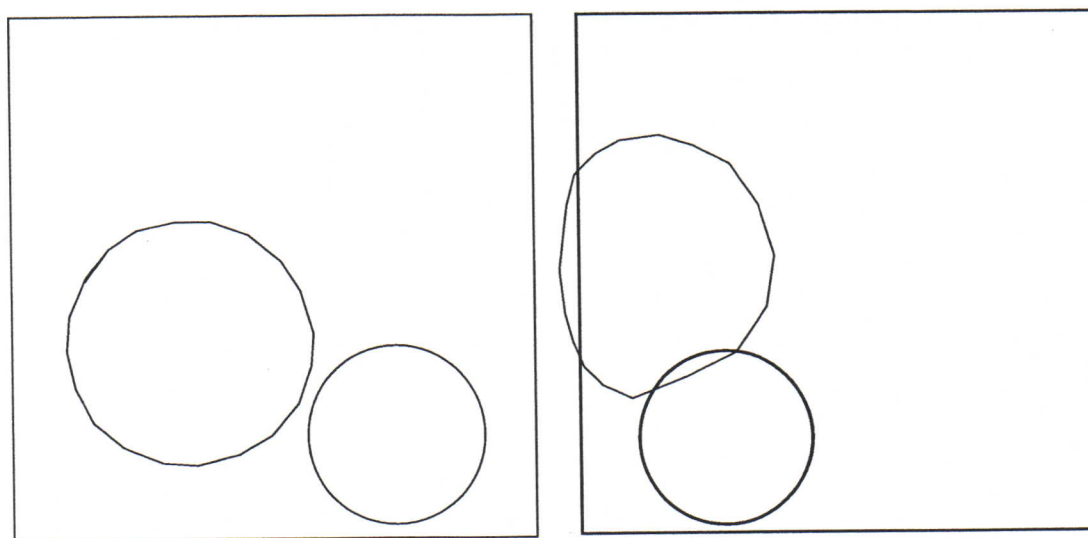


figure 5.15 La peau. L'opérateur qui déplace l'objet circulaire par l'intermédiaire du TGR interagit avec un objet contenant six points matériels (l'OPP) et un contour qui transmet les interactions du TGR vers l'OPP et réciproquement. Deux rôles : interface (la surface est bien lisse et déformable) et tension superficielle

L'habillage physique de la marionnette

L'OPP est de nouveau la marionnette (figure 5.17.a). Pour pouvoir contrôler les propriétés de cet habillage, pour pouvoir le rendre plus souple et plus expressif que celui du paragraphe § 5.5.2.3. nous ajoutons une masse à chaque bras et deux masses pour chaque jambe (cf figure 5.17.b). Ces six masses attachées à la marionnette constituent le modèle M_h . Ensuite un modèle SCO constitué de courbes spline construit l'aspect final

du modèle. Le nombre de points matériels ajoutés peut sembler faible mais la conséquence sur l'aspect dynamique de l'habillage est très sensible.

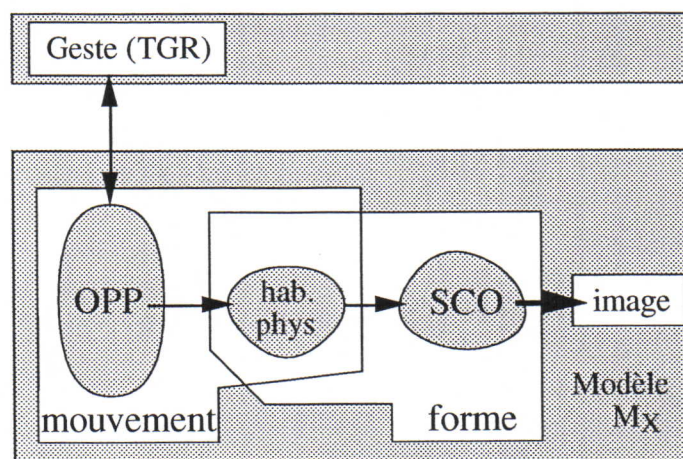


figure 5.16. habillage physique

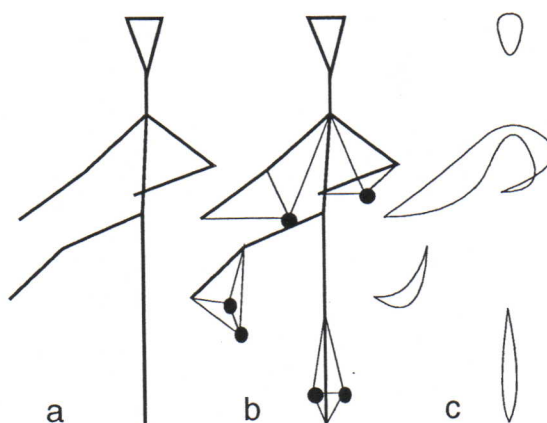


figure 5.17. (a) Le même modèles de marionnette que ci-dessus (b) avec un habillage physique constitué de six points matériels (c) suivi d'un habillage géométrique (splines)

5.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons exploré les notions de contour, d'occupation et de forme. Nous avons vu que l'élaboration de l'image animée consiste en une modélisation des trois grandeurs mouvement, forme et image.

Ces grandeurs ne sont pas de nature fondamentalement différentes mais elles ne remplissent pas les mêmes fonctions vis-à-vis de notre perception. En particulier ils ne fons pas appel aux mêmes capteurs. Dans de nombreuses situations on pourra les représenter par des modèles séparés à des échelles différentes. Cependant dans la plupart des cas les trois grandeurs ne sont pas entièrement découplables. Un modèle de mouvement influence la forme (typiquement les basses fréquences du signal de contour) et réciproquement un modèle de forme produit souvent des mouvements (typiquement les mouvement à petite échelle i.e. à haute fréquence spatiales)

Dans le chapitre suivant nous mettrons ces principes en œuvre pour produire un générateur de forme adapté aux objets très déformables et capable de produire les formes et les mouvements à petite échelle.

CHAPITRE 6

UN GÉNÉRATEUR DE FORME POUR LES OBJETS TRÈS DÉFORMABLES

6.1. LES OBJETS TRÈS-DÉFORMABLES

Les objets très déformables sont caractérisés par un grand nombre de degrés de liberté dynamiques (cf. chapitre § 1). Deux exemples typiques d'objets très déformables sont les matériaux granulaires et les fluides. Ces deux types d'objets ont déjà été étudiés et modélisés à l'ACROE (cf [LHM 95] [LHV 95] et [HLV 96]). Les matériaux granulaires et les fluides turbulents sont caractérisés par des phénomènes complexes. Il s'agit respectivement des tourbillons de Kelvin-Helmholtz et des allées tourbillonnaires de Von Karman (pour les fluides) et des phénomènes d'empilement, d'avalanches, de clef de voûte, de champ de pression hétérogène, d'effondrement interne et de criticalité auto-organisée (pour les matériaux granulaires). Ces phénomènes ont pu être obtenus par des modèles Cordis-Anima composés de points matériels, deux à deux en interaction élastique et visqueuse non-linéaires. Ces modèles sont des OPP.

Malgré le grand nombre de degrés de liberté qui caractérise les objets de référence (matériaux granulaires et fluides réels) les phénomènes décrits ci-dessus ont pu être simulés avec un nombre n relativement faible de points matériels. Dans [LHM 95] le nombre de points utilisé pour un amas a été de $n=300$ à 1000 points. Dans [LHV 95] on montre que les tourbillons de Kelvin-Helmholtz peuvent être obtenus avec des fluides constitués de $n=400$ points. Or le nombre N de grains de sable dans un empilement réel comparable, et le nombre de molécules dans un fluide réel sont beaucoup plus élevés ($n \ll N$).

Le fait que les phénomènes les plus énergétiques ayant lieu dans un amas de sable de N grains puisse être modélisé par un nombre $n \ll N$ de points matériels signifie que ces n points matériels ne représentent pas des grains de sable individuels mais des *macro-grains* ou *macro-particules*¹⁹ représentant le comportement d'un grand nombre de grains. Il en va de même pour les fluides et pour les molécules.

Pourtant ces n points matériels de l'OPP ne permettent pas de modéliser tous les phénomènes spécifiques caractérisant les matériaux granulaires et les fluides turbulents. En particulier ce nombre de points n'est pas assez grand pour permettre une interaction avec la lumière ou une visualisation directe. Il sera donc nécessaire de recourir à un modèle de SCO capable de générer la forme visuelle de ces objets et satisfaisant la contrainte de la résolution p . Ces spécifications seront développées au sous-chapitre § 6.2.

D'autre part, nous verrons que même si les n points matériels de l'OPP permettent d'obtenir les phénomènes caractéristiques qui mettent en jeu les plus grandes énergies, ils ne permettent pas d'obtenir un contour visuel très déformable. Or par définition un objet très déformable est caractérisé par un grand nombre de degrés de liberté, et les n points matériels de l'OPP ont exactement $3n$ degrés de liberté et pas davantage. Donc pour produire un contour visuel très déformable, il faudra recourir à des modèles possédant

¹⁹ Dans la mécanique des fluides les macro-particules correspondent à la *parcelle de fluide* [Les 94].

plus de $3n$ degrés de liberté. Les spécifications pour ce modèle dynamique est l'objet du sous-chapitre § 6.3.

Enfin au sous-chapitre § 6.4 nous proposerons un modèle appelé *l'écran d'épingles*, générant des formes et des mouvements à petite échelle que nous pourrions coupler aux modèles d'OPP, pour obtenir aussi bien les mouvements à grande échelle (contribution de l'OPP) que les mouvements à petite échelle (contribution de l'écran d'épingles). Aux chapitres § 7 et § 8 nous étudierons les comportements statiques et dynamiques de l'écran d'épingles et nous verrons dans quelle mesure celui-ci satisfait les spécifications posées dans les sous-chapitres § 6.2 et § 6.3.

6.2. SPÉCIFICATIONS POUR UN MODÈLE DE FORME

6.2.1. CHANGEMENTS DE TOPOLOGIE

Les modèles dynamiques de contour que nous avons étudiés au chapitre précédent sont des modèles composés d'interactions permanentes. Autrement dit, deux points du contour qui sont en interaction restent en interaction pendant toute la simulation. Typiquement lorsque cette interaction est une interaction élastique ou visco-élastique, les deux points matériels en interaction restent également voisins au cours du temps. Il s'agit là d'un modèle à topologie constante.

Il en va de même pour les primitives de forme non-dynamique. Les primitives utilisées au chapitre précédent (polygones, splines, portions de cylindre et de sphère) sont des primitives très couramment employées, mais ils supposent que les objets modélisés vérifient certaines constances de topologie. Les courbes et surfaces que nous avons vues doivent être sous-tendues par au moins deux points voire davantage. Une droite est sous-tendue au moins par deux points, une facette par trois points et un tétraèdre au moins par quatre points. La définition de primitives plus complexes comme les splines, peut nécessiter encore davantage de points. Les points liés par une droite ou une surface ou un volume de ce type restent graphiquement liés pendant toute la simulation. Donc ce type de primitive de forme ne peut être sous-tendue par les points matériels du modèle que si ces points restent effectivement voisins au cours de la simulation. Autrement dit il s'agit de modèles de forme adaptés aux modèles d'objets à topologie constante.

Or une propriété importante des objets très déformables est que leur topologie est susceptible de varier au cours du temps. En effet deux points matériels voisins peuvent ne pas rester voisins au cours du temps. D'autre part, un point appartenant au contour de cet objet est susceptible de ne plus appartenir à ce contour à un instant suivant. Autre exemple plus global, un objet connexe peut se fracturer et produire un objet composé de plusieurs parties connexes. Réciproquement un objet composé de n parties connexes peut se recombinaison en un nombre plus limité de parties connexes.

Donc dans un modèle d'objet très déformable, il faut pouvoir associer une forme à tout ensemble de points. Ces formes doivent pouvoir évoluer et changer de topologie au fur et à mesure que les relations de voisinage entre les points changent. Il faut pouvoir associer une forme aussi bien à une masse isolée qu'à un ensemble de points voisins. Donc les primitives comme les courbes et surfaces, qui doivent être sous-tendues par au moins deux points restant voisins, ne peuvent pas être utilisées ici de la même manière que ci-dessus.

Typiquement nous devons associer à chaque point matériel, un encombrement fini et une forme constante ou variable. Ces formes devront éventuellement pouvoir se combiner de manière à former des volumes plus grands. Ceci est la première spécification que devra satisfaire notre générateur de forme.
--

6.2.2. LA CONTINUITÉ DES FORMES ET LA MISE EN VALEUR DES CONTOURS

Supposons que chaque point P est associé à une forme élémentaire Φ_P et que Φ soit une forme obtenue à partir de plusieurs formes Φ_P distinctes. Dans ce cas, pour que Φ puisse représenter la forme d'un objet autonome et non un assemblage de formes associées à des objets séparés, chaque forme Φ_P doit pouvoir perdre son identité et être indiscernable dans l'ensemble Φ . Donc l'obtention de Φ à partir des Φ_P ne peut pas être une simple réunion. Elle suppose que les frontières entre les différents Φ_P puissent être estompées. Ceci correspond à un lissage ou à un filtrage passe-bas du signal de contour. Cependant, en même temps, le contour de la forme globale Φ doit pouvoir rester parfaitement net malgré le lissage des formes Φ_P . Ceci correspond au contraire à un filtrage passe-haut du signal de contour.

Ceci est d'autant plus difficile que, dans le cas d'un objet très déformable, la topologie de Φ peut évoluer pendant la simulation. L'ensemble des formes Φ_P qui contribuent à la forme de Φ ne sont pas les mêmes durant la simulation. Enfin Φ peut être scindée en plusieurs parties ou rejoindre une autre forme Φ' pour ne former qu'une seule grande forme. Dans tous les cas, les contours des formes constituantes Φ_P doivent être estompés et les contours des formes globales doivent être mises en valeur.

Nous verrons que ceci implique que notre modèle de forme puisse remplir les fonctions de filtrage passe-bas et passe-haut des formes à des degrés paramétrables. Ceci est la seconde spécification que devra satisfaire notre générateur de forme.

6.2.3. LA CONTRAINTE DE LA RÉOLUTION ρ

Les formes produites par notre modèle seront éventuellement des formes visuelles. Elles doivent donc pouvoir interagir avec la lumière. Comme le modèle SCO, notre modèle devra vérifier la contrainte de la résolution ρ . Il devra donc pouvoir produire des contours ayant jusqu'à 10^4 points par cm^2 (la résolution typique des pixels).

Enfin comme pour tout modèle traitant un grand nombre de points, une spécification essentielle a trait au coût de calcul de ce modèle et à la possibilité de paralléliser le calcul.

La contrainte de la résolution ρ et la rapidité et le parallélisme sont respectivement la troisième et la quatrième spécification que devra satisfaire notre générateur de forme.

6.3. SPÉCIFICATIONS POUR UN MODÈLE DE MOUVEMENT À PETITE ÉCHELLE (RAFFINEMENT DYNAMIQUE)

Le fait d'associer au modèle d'OPP (contenant n points matériels) un autre modèle (par exemple un modèle de forme) contenant N points ($n \ll N$) constitue un *raffinement*. Si le second modèle est de nature dynamique il s'agira d'un *raffinement dynamique*.

6.3.1. LA NÉCESSITÉ DE DEGRÉS DE LIBERTÉ SUPPLÉMENTAIRES

Si le modèle de forme évoqué ci-dessus n'est pas un modèle de mouvement (i.e. s'il est de nature non-dynamique) alors le nombre de degrés de liberté de l'ensemble des N points obtenus sur le contour final sera toujours le même que celui de l'OPP, à savoir n .

Or de même qu'au chapitre précédent, le fait d'utiliser un modèle non-dynamique suppose que la condition de la dépendance non-dynamique est respectée. Ainsi les points ajoutés par le modèle de forme ont le même comportement que des points matériels de masse m attachés aux points de l'OPP par des interactions d'admittance Y vérifiant la relation $|Y| \gg m\omega$. Pour une interaction élastique de raideur k , ceci équivaut à $k \gg m\omega^2$, ce qui est une condition acceptable pour des objets peu déformables mais qui ne peut pas être considéré comme un cas général pour des objets très déformables. En pratique lorsque les modèles d'OPP ([LHM 95] et [LHV 95]) sont raffinés par un modèle de forme non-dynamique alors les formes résultantes apparaissent comme celles d'un objet peu déformable.

Cela signifie qu'avec n degrés de liberté on peut sans doute obtenir les principaux phénomènes à grande échelle, mais que de nombreux phénomènes restent à modéliser à petite échelle pour que l'objet apparaisse comme très déformable. Notamment il reste à modéliser la diffusion dans les fluides, l'écoulement dans les matériaux granulaires et les micro-avalanches dans les sols etc. De manière plus générale, pour la représentation du mouvement des objets très déformables, on ne peut pas faire l'économie d'un grand nombre de degrés de liberté (par définition des objets très déformables).

Donc le nombre de degrés de liberté du modèle global doit augmenter. Cette situation soulève la question de la modélisation multi-échelle du mouvement.

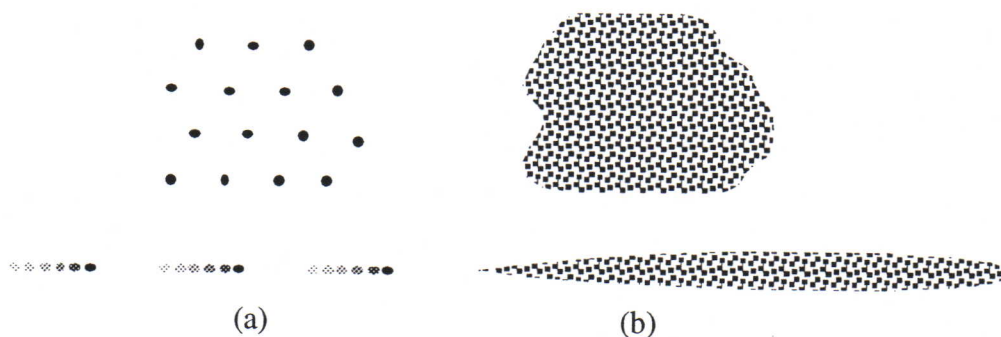


figure 6.1 Deux objets l'un représentant une étendue de sable et l'autre un filet de sable en mouvement, tous deux représenté par quelques points matériels (a) et par un modèle raffiné (b)

6.3.2. MODÉLISATION MONO-ÉCHELLE ET MULTI-ÉCHELLE

Pour produire un objet très déformable, il est nécessaire de recourir à un modèle ayant un grand nombre N de degrés de liberté. Pour y parvenir, nous pouvons, soit recommencer la simulation mais avec N points matériels au lieu de n , soit conserver le modèle d'OPP avec n points et de le coupler à un autre modèle de mouvement comportant N points matériels.

Or nous avons vu dans § 6.1 que les points matériels des modèles d'OPP représentent non pas des grains ni des molécules, mais des *macro-particules* ou *macro-grains* représentant le mouvement global d'un grand nombre (N/n) de grains réels. Cela signifie que le mouvement de ces N/n grains réels est assez corrélé. (Ils ne sont pas tout à fait redondants puisque ces macro-grains ne sont pas des objets rigides.)

Le fait que le mouvement d'un macro-grain (point matériel de l'OPP) représente le mouvement global de N/n grains réels signifie que chacun de ces N/n mouvements peut être exprimé comme la somme du mouvement du macro-grain et d'un signal d'écart. Le signal d'écart est a priori différent pour chaque grain. Donc globalement nous pouvons dire que le mouvement des N grains d'un amas peut être exprimé comme la somme de n *signaux prototypes* (le mouvement des macro-grains de l'OPP) et de N *signaux d'écart* (cf § 2.4.2.1 et § 2.4.2.2).

Nous avons vu au paragraphe § 2.4.2.1. que plus ces N signaux de référence sont corrélés et plus l'amplitude des signaux d'écart est faible. Dans ce cas la production du mouvement des N grains revient à produire n signaux prototypes (en nombre faible mais de grande énergie) et N signaux d'écart (en nombre important mais d'énergie faible). D'après la conclusion du paragraphe § 2.4.2.1 pour de faibles signaux d'écart, la modélisation multi-échelle est avantageuse (cf figure 2.5).

Indépendamment de la corrélation objective du mouvement des grains de sable, nous verrons qu'avec des signaux d'écart très faibles (représentant des signaux très corrélés) nous pouvons simuler les mouvements à petite échelle des amas de sable et des fluides turbulents et ainsi obtenir une animation représentant un objet très déformable.

Donc nous choisissons la modélisation multi-échelle. Les signaux prototypes sont déjà produits par les OPP. Nous devons à présent mettre au point un modèle produisant les signaux d'écart (les signaux de mouvement à petite échelle). Le choix de la modélisation multi-échelle est d'autant plus justifiée que les signaux d'écart, de faible amplitude, peuvent être approximativement décrits par des modèles linéaires alors que ce n'est pas le cas des signaux prototypes. D'autre part, la bande passante temporelle des signaux d'écart est beaucoup moins large que celle des signaux prototypes (qui sont simulés à 1050 Hz).

Ce modèle de raffinement doit ajouter au mouvement des points matériels de l'OPP les mouvements de petite échelle qui caractérisent ces phénomènes très déformables (écoulements, diffusions, micro-avalanches etc). Enfin la spécification du faible coût de calcul et de la possibilité de paralléliser les calculs s'applique également à ces modèles à grand nombre de degrés de liberté.

La conclusion des sous-chapitres § 6.2 et § 6.3 est que nous devons mettre au point un modèle de raffinement dynamique produisant les phénomènes à petite échelle dans des objets très déformables. Nous devons également mettre au point un modèle de forme pour la représentation de ce type d'objet, et vérifiant les conditions énoncées au § 6.2.

6.4. PROPOSITION ET DESCRIPTION D'UN MODÈLE L'ÉCRAN D'ÉPINGLES

6.4.1. LE PRINCIPE DE LA GRAVURE

Le modèle que nous allons proposer et décrire est un modèle fondé sur la métaphore de la gravure. Soit un modèle M_X composé de points matériels. Si M_X ne possède pas de contour visuel et ne peut pas interagir avec la lumière, alors il est parfaitement invisible. Cependant tout en étant invisible il continue à interagir dynamiquement avec son environnement. Notamment si M_X rencontre un objet déformable M_I , il pourra y imprimer sa trace. Ainsi, au lieu de voir directement la forme de M_X nous pouvons voir les traces qu'il laisse dans les objets déformables M_I qu'il rencontre. C'est le principe de la gravure.

Grâce à ce principe, si l'objet M_X change de topologie, se scinde en plusieurs morceaux ou se recombine, la trace qu'il laisse dans un objet déformable M_I est susceptible d'en faire de même. Ainsi ce type d'objet satisfait la première contrainte du sous-chapitre § 6.2 (le changement de topologie).

Les objets déformables M_I peuvent avoir des propriétés très diverses. Il ne s'agit pas nécessairement d'une plaque d'argile. Il peut s'agir d'une étendue de sable, ou de neige, d'un tissu, ou même d'un fluide. Selon les propriétés de cet objet M_I , la forme de la trace que l'objet M_X y laisse peut soit comporter des détails, ou au contraire être très lisse. Il peut soit accentuer les contours de M_X soit au contraire les gommer. D'un point de vue dynamique, si nous pouvions regarder le mouvement de la trace laissée par M_X dans M_I ,

nous verrions une forme dont les propriétés dynamiques sont non seulement celles de M_X mais également celles de M_I . La connaissance et le contrôle des propriétés de l'objet M_I permet de contrôler l'aspect des formes que nous générons et les propriétés dynamiques que nous ajoutons au mouvement.

A la section suivante, nous décrivons un tel modèle d'objet déformable M_I recouvrant toute la scène. Cet objet est appelé *l'écran d'épingles*. Les objets que nous voulons visualiser y marqueront leur trace. C'est pourquoi ces objets M_X seront désormais appelés des objets *marqueurs*. Nous verrons que les propriétés physiques et spatiales de l'écran d'épingles peuvent être aisément modifiées. Dans les chapitres § 7 et § 8 nous étudierons les comportements statiques et dynamiques de l'écran d'épingles et nous verrons comment nous pouvons utiliser et contrôler ces propriétés pour contrôler l'aspect des formes et des mouvements qu'elles peuvent produire.

6.4.2. LA DESCRIPTION DE L'ÉCRAN D'ÉPINGLES

6.4.2.1. La structure

Nous nous plaçons dans le cas d'une simulation 1D, 2D ou 3D²⁰. Autrement dit, les objets *marqueurs* (définis au paragraphe précédent) M_X se déplacent respectivement sur l'axe x , dans le plan (x,y) ou dans l'espace (x,y,z) . L'écran d'épingles recouvre toute la scène. Donc selon les cas il s'agira d'un objet qui s'étend sur un espace 1D, 2D ou 3D. Par contre la déformation de l'écran d'épingles sera transversale i.e. perpendiculaire à son étendue. En fait la déformation se fera selon l'axe ω , une direction qui est à la fois perpendiculaire aux axes x , y et z et qui fait intervenir ω une quatrième dimension²¹. ω sera exprimé en mètres, comme x , y et z . Les figures 6.2 et 6.3 représentent respectivement un écran d'épingles 1D et 2D.

L'écran d'épingles est modélisé grâce au système *Cordis-Anima*. Il est un objet composé d'un grand nombre de points matériels se déplaçant uniquement selon la direction ω . C'est pourquoi ces masses seront appelées des *épingles*. Les épingles sont réparties sur toute la scène et discrétisent celle-ci en une grille 1D, 2D ou 3D à maille carrée. Les dimensions de cette maille sont respectivement de δx , δy , δz dans chaque direction.

Dans le cas 3D	$\delta x = \delta y = \delta z = \delta \neq 0$	
Dans le cas 2D	$\delta x = \delta y = \delta \neq 0$	$\delta z = 0$
Dans le cas 1D	$\delta x = \delta \neq 0.$	$\delta z = \delta y = 0$

Le nœud N_{ijk} d'indice ijk de ce réseau est le point $M(x,y,z)$ de la scène tel que :

$$x=i.\delta \qquad y=j.\delta \qquad z=k.\delta$$

Ce nœud N_{ijk} représente également la position de l'épingle e_{ijk} . La valeur de la déformation de l'écran d'épingles au nœud N_{ijk} est de ω_{ijk} . et elle correspond à la position de l'épingle e_{ijk} selon la direction ω . Ainsi dans le cas le plus général l'épingle chaque épingle e_{ijk} est caractérisée par quatre coordonnées : $(i\delta x, j\delta y, k\delta z, \omega_{ijk})$.

²⁰ En pratique le cas 1D ne sera pas utilisé pour le raffinement. Son intérêt est essentiellement théorique.

²¹ Il est entendu que cette quatrième dimension n'a aucun rapport avec la quatrième dimension w des coordonnées homogènes couramment utilisées dans la synthèse d'images.

Ainsi, le cas 1D fait intervenir les axes (x, ω) , le cas 2D fait intervenir les axes (x, y, ω) et le cas 3D, les axes (x, y, z, ω) . Dans les cas 1D et 2D, ceci ne pose aucune problème de représentation. Le cas 3D sera difficile à représenter sur les figures. C'est la raison pour laquelle la plupart de nos figures correspondront aux cas 1D et 2D.

Les objets marqueurs M_X doivent pouvoir interagir avec les épingles et les pousser dans la direction ω . Donc même si ces marqueurs se déplacent dans l'espace (x, y, z) ils seront également caractérisés par une position ω_M constante dans la direction ω . L'espace $\omega=0$ est occupé par un substrat rigide et immobile appelé *sol*.

6.4.2.2. Les interactions entre épingles.

Chaque épingle a 2, 4 ou 6 épingles voisines selon que l'écran est 1D, 2D ou 3D. Chaque épingle est liée à ses 2, 4 ou 6 voisines par une interaction visco-élastique linéaire F_V , de raideur k_V , z_V et de longueur à vide nulle. Toutes les épingles sont également liées au sol par une interaction visco-élastique linéaire F_S de raideur k_S , de viscosité z_S et de longueur à vide L_{0S} . (Toutes les raideurs sont exprimées en Nm^{-1} et toutes les viscosités sont exprimées en Nm^{-1}s .) Ces interactions sont 1D. En effet elles ne produisent que des forces selon la direction ω .

Chaque objet marqueur M_i est lié à toutes les épingles par une interaction F_{M_i} non-linéaire. Il s'agit typiquement d'une interaction de butée visco-élastique caractérisée par une raideur k_{M_i} , une viscosité z_{M_i} et un seuil S_{M_i} . Ces interactions ne sont pas unidirectionnelles. Elle produisent une force dans l'espace (x, ω) (x, y, ω) ou (x, y, z, ω) selon que la scène est 1D, 2D ou 3D et elles dépendent de la distance euclidienne qui séparent les points qu'elles relie. (cf figure 6.2)

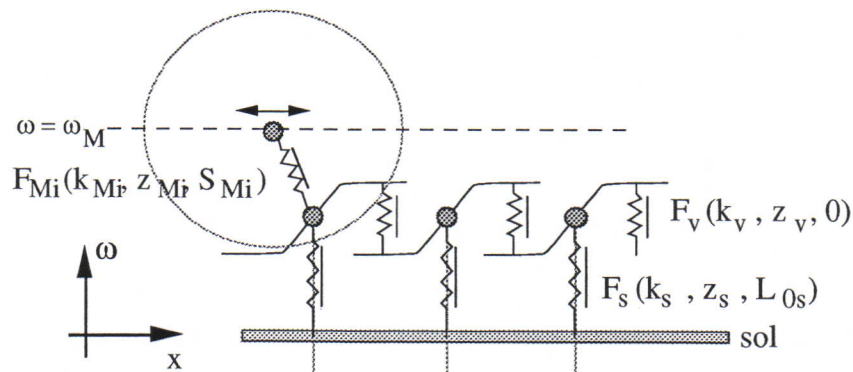


figure 6.2. Une portion (de trois épingles) d'un écran d'épingles 1D en interaction avec un point marqueur évoluant sur la droite $\omega = \omega_M$

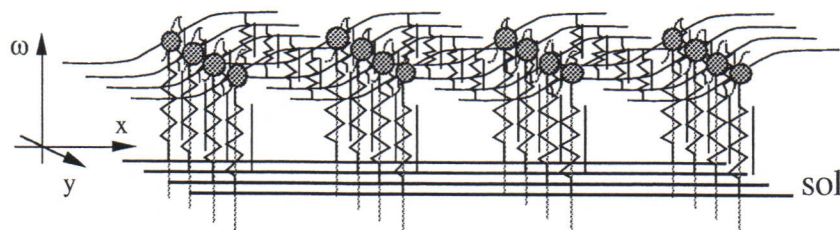


figure 6.3. Une portion d'un écran d'épingles (2D) au repos. Chaque épingle est liée de façon symétrique à ses quatre voisins.

L'écran d'épingles serait difficile à représenter dans le cas 3D, mais son principe de fonctionnement est le même que les écrans d'épingles 1D et 2D.

6.4.2.3. L'écran d'épingles, habillage des objets marqueurs

Nous verrons au chapitre § 8 que le comportement de l'écran d'épingles peut être considéré comme la superposition d'un ensemble d'oscillateurs du second ordre indépendants (une masse attachée au sol par une interaction visco-élastique linéaire). Chacun de ces oscillateurs représente un mode de déformation de l'écran d'épingles.

Ainsi l'interaction entre un objet marqueur et l'écran d'épingles peut se ramener à une interaction entre un objet marqueur et chacun des modes. Or l'interaction entre un objet marqueur et un oscillateur a été étudié à la section § 3.2.5. ("Application à un modèle simple") et nous savons dans quelles conditions l'oscillateur est un habillage du marqueur. Si ces conditions sont vérifiées pour tous les modes de l'écran d'épingles alors l'écran d'épingles dans son ensemble sera également un habillage du marqueur.

Nous choisirons les paramètres de l'écran d'épingles pour que cette condition soit toujours vérifiée.

6.4.2.4. L'écran d'épingles et les spécifications de § 6.2 et § 6.3

Aux sous-chapitres § 6.2 et § 6.3. nous avons énuméré un ensemble de conditions que doit remplir un modèle de génération de forme pour des objets très déformables et un modèle de raffinement dynamique pour les mêmes objets.

Le changement de topologie

La première condition, § 6.2.1. portant sur le changement de topologie est satisfaite par le principe de la gravure.

La continuité des formes et la mise en valeur des contours

Au chapitre § 7 nous verrons que l'écran d'épingles permet de produire des contours plus ou moins uniformes et lisses permettant ainsi de gommer les irrégularité d'une forme due à sa composition en entités discrètes. (Nous verrons qu'il s'agit d'un filtrage passe-bas de la forme). Dans § 7.3. nous verrons que l'écran d'épingles peut également accentuer les contours pour renforcer l'unité d'un objet composé de points matériels (Il s'agit d'un filtrage passe-haut).

Dans ces chapitres nous verrons quels sont les paramètres qui nous permettront de contrôler la continuité des formes et l'accentuation des contours.

La contrainte de la résolution ρ

Dans toute la suite, la largeur de la maille δ de l'écran d'épingles sera égale à un multiple de l_{pix} la largeur du pixel. Typiquement $\delta=l_{\text{pix}}$, $\delta=2.l_{\text{pix}}$ ou $\delta=3.l_{\text{pix}}$. De plus l'écran d'épingles couvre l'ensemble de la scène. Lorsque $\delta=l_{\text{pix}}$, la contrainte de la résolution ρ est satisfaite par l'écran d'épingles. Cette résolution lui donne un spectre de contour

extrêmement large capable de couvrir toutes les fréquences spatiales qu'il est possible de représenter sur une image²²

La simulation dynamique des phénomènes à petite échelle

Au chapitre § 8 nous étudierons le comportement dynamique de l'écran d'épingles. Nous verrons que l'écran d'épingles en interaction avec un objet M_X génère des formes dont les propriétés dynamiques ne sont pas seulement celles de M_X . L'écran d'épingles ajoute des degrés de liberté supplémentaires qui enrichissent le mouvement de la forme.

Au chapitre § 8 nous étudierons les propriétés dynamiques de l'écran d'épingles et nous verrons comment il est possible de contrôler ces degrés de liberté supplémentaires. Dans le même chapitre nous présenterons les images obtenues par l'écran d'épingles dans le cas de plusieurs types d'objets déformables.

La contrainte du coût de calcul

Chaque épingle occupe un espace mémoire de 24 octets et la simulation du comportement libre²³ de l'écran d'épingles nécessite 5 multiplications et 12 additions par échantillon et par épingle.

D'autre part le calcul effectué pour chaque épingle est rigoureusement identique. Un écran d'épingles de 100x100 a pu être implémenté sur une machine massivement parallèle et a pu être simulé en temps-réel avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz [Uhl 96] ce qui correspond à la fréquence d'échantillonnage utilisée pour les modèles décrits dans ce travail.

²² Une image dont les pixels ont une largeur de l_{pix} .

²³ Le comportement libre correspond au comportement en l'absence de marqueur.

CHAPITRE 7

L'ÉCRAN ET LA FORME PRODUITE

ETUDE EN RÉGIME STATIQUE

7.1. INTRODUCTION

7.1.1. DÉMARCHE

L'écran d'épingles peut produire des formes très diverses. Ces formes ne sont pas un reflet neutre du contour de l'objet marqueur. Nous verrons que l'écran d'épingles peut lui-même avoir une certaine contribution dans cette forme. Cette contribution peut être quantitativement et qualitativement contrôlée. Notamment il peut intégrer dans une seule forme homogène les formes de plusieurs marqueurs voisins et mettre en valeur le contour de cette forme globale.

De manière plus générale, dans ce chapitre nous étudions le comportement statique de l'écran d'épingles i.e. son comportement à l'équilibre en fonction des forces que les marqueurs appliquent sur lui. Nous verrons que pour cela, notre principal outil sera la théorie de la *réponse impulsionnelle* (§ 7.2). D'après cette théorie, pour connaître la forme générée à l'équilibre par l'écran d'épingles sous l'effet d'un profil de force quelconque (i.e. pour un marqueur quelconque) il suffit de connaître la forme de l'écran d'épingles sous l'effet d'une impulsion de force (la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles). Toutes les autres formes en découlent.

Au second sous-chapitre § 7.3 nous déterminerons d'abord la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles 1D tel qu'il a été décrit dans § 6.4.2. Pour passer aux cas 2D et 3D, nous aurons recours à une représentation continue de l'écran d'épingles. Nous évaluons la validité de cette représentation continue en 1D (ou les comportements continus et discrets sont connus). Après cette évaluation nous appliquerons les résultats obtenus dans le cas continu au cas discret. Nous verrons ainsi que l'écran d'épingles a le même comportement qu'un champ électrostatique. Sa réponse impulsionnelle décroît soit en exponentielle, soit en $1/r^2$ soit selon la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. Dans tous les cas on montre que l'écran d'épingles effectue un lissage (filtrage passe-bas) et nous verrons comment nous pouvons contrôler ce filtrage.

Lorsque les interactions entre les épingles sont différentes de celles décrites dans § 6.4.2.2, la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles devient qualitativement différente. Le sous-chapitre § 7.4 décrit un modèle particulier d'écran d'épingles où la somme des hauteurs d'épingles (en quelque sorte le volume de l'écran d'épingles) reste constante. Nous verrons que du fait de cette conservation des volumes au cours de la simulation, l'écran d'épingles pourra mettre en valeur le contour des objets marqueurs (filtrage passe-haut)

La conclusion de ce chapitre sera que l'écran d'épingles satisfait la seconde spécification énoncée dans § 6.2.2 : continuité des formes (§ 7.3) et accentuation des contours (§ 7.4)

7.1.2. HYPOTHÈSES DE LA STATIQUE

Ici on étudie la position d'équilibre de la surface en interaction avec les marqueurs. Pour cela, on considère que la constante de temps de la surface est très petite par rapport à celui du mouvement des marqueurs. Autrement dit, la surface est toujours à l'équilibre.

Nous sommes en statique donc $\forall i \dot{\omega}_i = \ddot{\omega}_i = 0$ (7.1)

Ces grandeurs représentent la vitesse et l'accélération de l'épingle indice i . Notamment dans la suite, les phénomènes liés à la viscosité et à l'inertie n'entreront pas en jeu.

L'équilibre suppose que la résultante des forces s'appliquant sur l'épingles soit nulle.

$$F_s + F_v + \sum_j F_{Mj} = 0 \quad (7.2)$$

où $F_s = -k_s \omega_i$ $F_v = -k_v \sum_{u=\text{voisins}} (\omega_i - \omega_{ui})$ (7.3)

$$\boxed{-k_s \omega_i - k_v \sum_{u=\text{voisins}} (\omega_i - \omega_{ui}) + \sum_j F_{Mj} = 0} \quad (7.4)$$

Les interactions F_{Mj} peuvent être de différents types. D'autre part on supposera que F_s a une longueur à vide nulle, ou plus précisément, on prend comme origine des ω , la position d'équilibre des épingles.

7.2. THÉORIE DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE

7.2.1. PROFILS DE DÉFORMATION ET PROFILS DE FORCE

A chaque instant, l'ensemble de toutes les positions ω_i des N épingles d'un écran (1D, 2D ou 3D) forme un vecteur Ω qu'on appelle champ de déformation ou profil de l'écran. De même, à chaque instant l'ensemble de toutes les forces f_i appliquées aux N épingles d'un écran forme un vecteur F qu'on appelle champ de force ou profil de force.

$$\Omega = \left\{ \omega_i, i \in [1, N] \right\} \quad (7.5)$$

$$F = \left\{ f_i, i \in [1, N] \right\} \quad (7.6)$$

Le calcul direct des profils de l'écran d'épingles en interaction avec des marqueurs s'est avéré extrêmement difficile, même lorsque les épingles ne sont pas liées entre elles ($F_v = 0$) et que l'interaction entre le marqueur et les épingles est très simple. Donc dans la suite, l'action exercée sur l'écran d'épingles proviendra d'une impulsion de force et non d'un marqueur. La théorie de la réponse impulsionnelle nous permettra de généraliser cette excitation à tous les profils de force.

7.2.2. LINÉARITÉ

L'écran d'épingles libre est un système dynamique linéaire. La fonction L donnant le profil Ω de l'écran d'épingles à l'équilibre, à partir du profil de force constant F qui lui est appliqué est une fonction linéaire $\Omega = L(F)$. La linéarité de cette fonction entraîne :

$$L\left(\sum_i F_i\right) = \sum_i L(F_i) \quad (7.7)$$

Ce qui signifie que le profil de l'écran d'épingles qui résulterait de l'application simultanée de plusieurs profils de force F_i , est la somme des profils obtenus individuellement par application séparée de chaque profil de force F_i .

7.2.3. ENONCÉ DE LA THÉORIE

Une impulsion spatiale de force est un profil de force particulier

$$\delta F_j = \{f_i, i \in [1, N]\} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} f_i &= 0 \text{ pour } i \neq j \\ f_j &= 1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

C'est un profil où toutes les masses de l'écran sauf une (l'épingle d'indice j) sont soumises à une force nulle. L'épingle d'indice j , elle, est soumise à une force unité. Pour un écran comportant N épingle, il existe N impulsions de force différentes. On montre que tout profil de force peut être exprimé comme une combinaison linéaire d'impulsions de force.

$$\forall F \quad F = \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta F_i \quad (7.9)$$

où les λ_i sont des coefficients réels. De cette relation et de (7.7) il résulte que le profil correspondant à ce profil de force quelconque est :

$$\forall F \quad \Omega = L(F) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot L(\delta F_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \delta \Omega_i \quad (7.10)$$

Ceci exprime que tout profil de l'écran d'épingle est une combinaison linéaire des N profils élémentaires $\delta \Omega_i$, qui sont les N réponses impulsionnelles de l'écran d'épingles. La fonction L est entièrement déterminée par la donnée des N réponses impulsionnelles. En d'autres termes, grâce à ces N réponses impulsionnelles $\delta \Omega_i$, on peut calculer la forme d'équilibre de l'écran d'épingles à partir de n'importe quel profil de force.

7.2.4. LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE UNIQUE $\delta \Omega$

7.2.4.1. Invariance et convolution

Un filtre spatial en général et l'écran d'épingles en particulier est dit *invariant dans l'espace* si la forme de ses réponses impulsionnelles ne dépend pas de l'endroit où l'impulsion de force est appliquée. Autrement dit, toutes les réponses impulsionnelles $\delta \Omega_i$ sont égales moyennant une translation. Si l'écran d'épingles est invariant et seulement à cette condition, l'opérateur L pourra être défini par la donnée d'une seule réponse impulsionnelle $\delta \Omega$. Le profil Ω de l'écran sera obtenu alors par la convolution du profil de force F appliquée par la réponse impulsionnelle $\delta \Omega$.

$$\Omega = \delta \Omega \otimes F \quad (7.11)$$

7.2.4.2. L'hypothèse de l'écran infini

Or dans le cas général, l'écran d'épingles n'est pas invariant. Selon qu'une impulsion de force est appliqué aux bords de l'écran d'épingles ou au centre, les formes de l'écran qui en résultent ne sont a priori pas identiques. Donc, dans le cas général la détermination des profils de l'écran d'épingles à partir d'un profil de force quelconque nécessite bien les N réponses impulsionnelles.

Cependant, pour certaines valeurs de paramètre de l'écran, les réponses impulsionnelles de l'écran d'épingles sont des écrans au repos sauf pour les épingle situées au voisinage

du point d'application de l'impulsion de force. Ce voisinage pouvant comprendre un nombre plus ou moins grand d'épingles.

Si la taille de ce voisinage est petite devant la surface de l'écran, et si les impulsions de force sont appliquées loin des bords de l'écran alors on peut dire que les réponses impulsionnelles correspondantes ne dépendent pas du point de l'application de l'impulsion. En général ceci nécessite que la raideur k_s soit non-nulle. Dans ces conditions, nous avons le droit de considérer l'écran d'épingles comme infini. Dans ce cas, le profil de force et le profil de l'écran d'épingles sont de la forme :

$$\Omega = \left\{ \omega_i, i \in [-\infty, +\infty] \right\} \quad (7.12)$$

$$F = \left\{ f_i, i \in [-\infty, +\infty] \right\} \quad (7.13)$$

Un écran d'épingles infini est rigoureusement invariant par translation. Il en résulte que les réponses impulsionnelles sont rigoureusement identiques quelque soit le point d'application de l'impulsion. Une seule réponse impulsionnelle $\delta\Omega$ suffit alors pour caractériser le profil de l'écran d'épingle Ω à l'équilibre sous l'action d'un profil de force F (Cf. (7.11)). Nous choisissons $\delta\Omega = \delta\Omega_0$ centré sur l'épingle d'indice 0.

Donc dans lorsque l'écran d'épingles peut être considéré comme infini, il suffit de connaître sa réponse impulsionnelle dW pour connaître la forme qu'il génère à l'équilibre sous l'effet d'un profil de force quelconque F . Cette forme est donnée par (7.11) :

$$\Omega = \delta\Omega \otimes F$$

Dans les sous-chapitres suivants, notre objectif sera simplement de connaître la réponse impulsionnelle $\delta\Omega$ de l'écran d'épingles pour différentes valeurs des paramètres.

7.3. LA CONTINUITÉ DES FORMES FILTRAGE PASSE-BAS

7.3.1. LE CAS DISCRET UNI-DIMENSIONNEL

7.3.1.1. La réponse impulsionnelle

Pour certaines valeurs de paramètre de l'écran d'épingle, l'application d'une impulsion de force aboutit effectivement à une position d'équilibre. Il en résulte une position d'équilibre ω_0 pour l'épingle d'indice 0. Dans tous ces cas, la forme de la réponse impulsionnelle peut être connue, soit en appliquant une impulsion de force, soit en forçant la position de l'épingle d'indice 0 à ω_0 . Cette condition aux limites nous permet de trouver analytiquement le profil de l'écran. Dans une deuxième étape (cf. § 7.3.1.2.) nous chercherons le lien entre ω_0 et l'impulsion de force.

D'autre part, nous nous intéresserons seulement aux configurations d'équilibre stable. D'après l'étude menée au chapitre § 8 (comportement dynamique) la stabilité impose deux inégalités :

$$k_s > 0 \quad \text{et} \quad k_s + 4.k_v > 0$$

Il est à noter que k_v peut prendre des valeurs négatives sans pour autant déstabiliser l'écran d'épingles.

a. L'équation caractéristique

Pour les épingles d'indice $i \neq 0$ la condition d'équilibre (7.4) est équivalent à

$$k_v \cdot \omega_{i+1} - (2 \cdot k_v + k_s) \cdot \omega_i + k_v \cdot \omega_{i-1} = 0 \quad (7.14)$$

Le champ des déformation est donné par une relation de récurrence. La résolution de cette équation nous fournira les réponses impulsionnelles de l'écran dans différents cas. Lorsque la position de l'épingle d'indice 0 est forcée à ω_0 , alors le profil de l'écran est donné par

$$\omega_i = \lambda \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^n \quad (\lambda, \mu) \in \mathfrak{R}^2 \quad (7.15)$$

$$\text{où } r_1 = 1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} \quad r_2 = 1 + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} \quad \text{avec } \alpha = k_s/k_v \quad (7.16)$$

On notera que $r_1 r_2 = 1$.

$$\text{On pose } \beta = \text{Log}(r_1) = -\text{Log}(r_2) \quad (7.17)$$

b. Premier cas : $k_s > 0$ et $k_v > 0$ (donc $\alpha > 0$)

On montre que pour $\alpha > 0$ on a $r_1 > 1$ et $\beta > 0$. Sachant que la position de l'épingle d'indice 0 est de ω_0 et qu'à l'infini le profil est au repos ($\omega=0$), la réponse impulsionnelle de l'écran est donnée par :

$$\omega_i = \omega_0 \cdot e^{-\beta|i|} \quad (7.18)$$

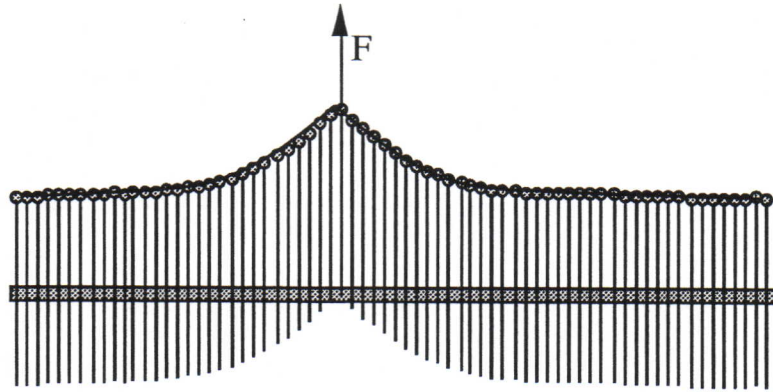


figure 7.1 La réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles

Donc la réponse impulsionnelle de la surface est une exponentielle décroissante centrée autour de l'épingle d'indice 0.

c. Deuxième cas : $k_s > 0$ et $-4k_s < k_v < 0$ (donc $\alpha < -4$)

Ceci implique une raideur négative. Nous décrivons ce cas car ce modèle a été expérimenté pendant l'étude sur les bandes de Mach (cf. § 7.4). On montre que pour $\alpha < 0$, on a $r_2 > 1$ et $\beta' > 0$. Etant donné les mêmes conditions aux limites que ci-dessus, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\omega_i = \omega_0 (-1)^i \cdot e^{-\beta'|i|} \quad (7.19)$$

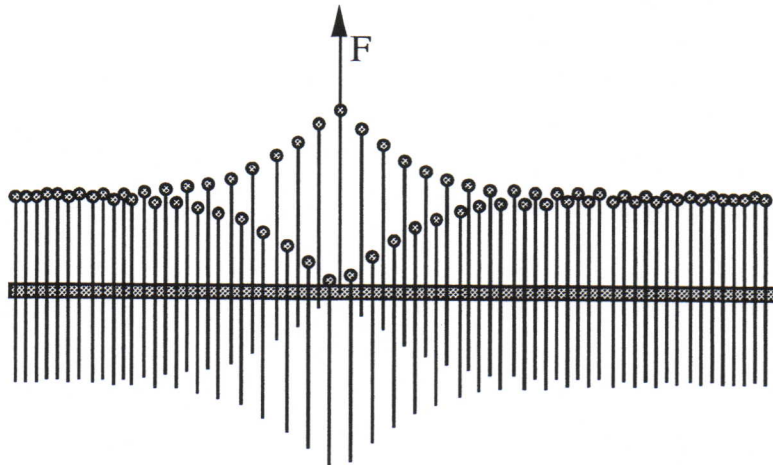


figure 7.2 La réponse impulsionnelle de l'écran pour $k_v < 0$

d. Troisième cas : $k_s = 0$ ($\alpha = 0$)

Dans ce cas l'écran d'épingles est stable. Il se comporte comme une corde et son profil est composé de segments de droite :

$$\omega_i = \lambda \cdot (i - \mu) \cdot r^i = \lambda \cdot (i - \mu) \quad (\lambda \in \mathfrak{R}) \quad (7.20)$$

L'interaction F_s , en liant les épingles au sol, lui donnaient un niveau de repos stable. En l'absence de cette liaison avec le substrat, l'écran d'épingles seul n'a pas de position

d'équilibre. L'influence d'une impulsion de force peut se propager très loin du point d'application de l'impulsion. Autrement dit, la réponse impulsionnelle ne se limite pas nécessairement au voisinage de l'impulsion : l'hypothèse de l'écran infini n'est plus vérifiée. L'écran d'épingles n'est pas invariant (cf. § 7.2.4.2.). La réponse impulsionnelle dépend du point où l'impulsion est appliquée.

Si les extrémités de l'écran sont libres alors à l'équilibre, la pente de l'écran à ses extrémités est nulle. Il s'ensuit que $\lambda=0$. A l'équilibre tout l'écran se trouve à $\omega = \omega_0$. La réponse impulsionnelle est un écran plat.

Si les extrémités sont attachées alors la réponse impulsionnelle est composée de deux segments de droite liant le point d'application de l'impulsion aux deux extrémités.

Le calcul du profil de l'écran dans ce cas est plus long, puisqu'il nécessite le calcul de toutes les réponses impulsionnelles. Or comme le cas $k_s=0$ ne sera pas fréquemment utilisé dans ce travail, nous ne développerons pas plus loin l'étude de ce cas.

7.3.1.2. Position contrainte et impulsion de force

Pour avoir la réponse impulsionnelle de l'écran, en fonction de l'impulsion de force δF_0 et non en fonction de la position forcée ω_0 , nous calculons la force f_0 qu'il faut appliquer sur l'épingle d'indice 0 pour l'amener à ω_0 (δF_0 est une impulsion de force de module 1. Une impulsion de force de module f_0 est $f_0 \cdot \delta F_0$). Pour cela, il suffit de connaître la position des épingles d'indice 1 et -1. La relation (7.14) appliquée à l'épingle d'indice 0 entraîne :

$$f_0 = k_s \cdot \omega_0 + k_v (\omega_0 - \omega_{-1}) + k_v (\omega_0 - \omega_1) \quad (7.21)$$

a. Premier cas : $k_v > 0$

Après calcul on obtient :

$$\omega_0 = \frac{f_0}{\sqrt{4 k_s k_v + k_s^2}} \quad (7.22)$$

Donc la réponse impulsionnelle pour le cas $k_v > 0$ est le profil suivant :

$$\delta\Omega : \omega_i = \frac{e^{-\beta|i|}}{\sqrt{4 k_s k_v + k_s^2}} \quad (7.23)$$

b. Deuxième cas : $-4k_s < k_v < 0$ (donc $\alpha < -4$)

Le même type de calcul conduit à :

$$\omega_0 = \frac{f_0}{2 k_s + \sqrt{4 k_s k_v + k_s^2}} \quad (7.24)$$

Donc l'expression générale du noyau de convolution en fonction de la force f_0 est :

$$\delta\Omega: \omega_i = \frac{(-1)^i \cdot e^{-\beta'|i|}}{2k_s + \sqrt{4k_s k_v + k_s^2}} \quad (7.25)$$

7.3.1.3. Un profil de force quelconque

Au paragraphe § 7.3.1.1. nous avons déterminé les réponses impulsionnelles de l'écran d'épingles. Ici nous appliquons la théorie de la réponse impulsionnelle (§ 7.2) et la relation (7.11) pour trouver le profil de l'écran à des profils de force plus complexes.

Lorsque l'écran d'épingles est stable et, si on néglige le cas où $k_s=0$, le profil de l'écran d'épingles à l'équilibre est le produit de convolution du profil de force et de la réponse impulsionnelle. Pour un profil de force $F = \{f_i, i \in [-\infty, +\infty]\}$ le profil de l'écran respectivement dans les cas $k_v > 0$ et $-4k_s < k_v < 0$ est exprimé par (7.26).

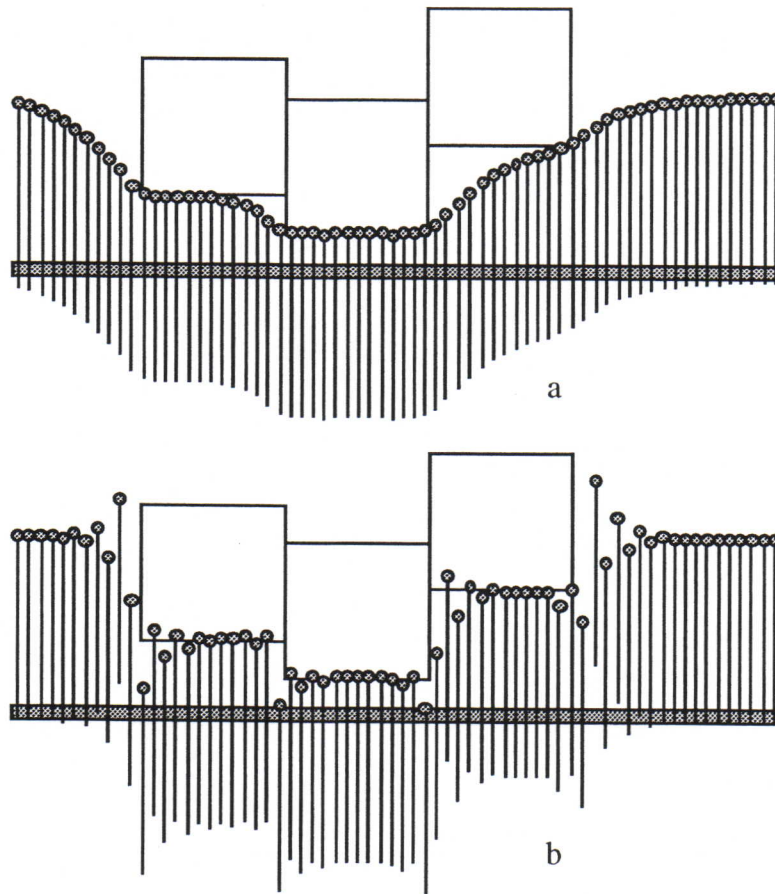


figure 7.3 Trois marqueurs produisant un champ de force. (a) en interaction avec un écran où $k_s > 0$ et $k_v > 0$ (b) en interaction avec un écran où $k_s > 0$ et $-4k_s < k_v < 0$.

$$\omega_i = \frac{f_{i-j} \cdot e^{-\beta \cdot |i|}}{2 \sqrt{4k_s k_v + k_s^2}} \quad \omega_i = \frac{f_{i-j} \cdot (-1)^i \cdot e^{-\beta'|i|}}{2k_s + \sqrt{4k_s k_v + k_s^2}} \quad (7.26)$$

Ces deux cas sont représentés respectivement sur les figures 7.3.a et 7.3.b.

Donc une fois que le profil de force est connue, il est aisé d'en déduire précisément le profil de l'écran d'épingles. Par contre il est plus difficile de connaître exactement le profil de force à partir de la position des marqueurs, car le profil de force lui-même dépend de la position d'équilibre des épingles, que l'on ne peut pas connaître a priori. En pratique en faisant l'approximation de la faible déformation de l'écran nous considérerons que le profil de force à l'équilibre peut être approximé par le profil de force lorsque les épingles sont à leur position de repos $\omega=0$ en présence du marqueur.

7.3.1.4. Les cas pluri-dimensionnels

Les 2D et 3D sont beaucoup plus difficiles à résoudre dans le cas discret. L'homologue bidimensionnel de l'équation (7.14) exprimant la condition d'équilibre est du type :

$$-k_s \cdot \omega_{ij} + k_v \left(\omega_{i+1j} + \omega_{i-1j} + \omega_{ij+1} + \omega_{ij-1} - 4 \cdot \omega_{ij} \right) = 0 \quad (7.27)$$

Cette équation nous semble difficile à résoudre. Les variables de cette équation ne sont pas très liées aux phénomènes sous-jacents : en effet nous savons expérimentalement que la réponse impulsionnelle d'un écran 2D et 3D sont des formes à symétrie sphérique (en (x,y) ou en (x,y,z)). Du fait de cette symétrie, la réponse impulsionnelle dépend d'une seule variable qui est la distance euclidienne $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ par rapport au point d'application de l'impulsion de force. Ainsi pour pouvoir résoudre l'équation (7.27) il faudrait pouvoir exprimer cette équation, non pas en fonction de i et de j , mais en fonction de r . Il nous semble que ceci n'est pas possible sur un maillage carré.

C'est pour cette raison que, dans ce travail, les cas 2D et 3D ont été traités, non pas en discret, mais en continu où le changement de variable $(x,y) \rightarrow r$ est plus aisée.

7.3.2. PRINCIPE DE LA COMPARAISON DISCRET/CONTINU

7.3.2.1. Principe général

Nous allons voir que l'étude analytique du comportement statique d'un écran d'épingles continu se révèle beaucoup plus facile qu'en discret. De plus il peut s'appliquer aux cas 2D et 3D. Cependant, l'objectif de notre étude n'est pas l'étude de l'écran continu, mais celle de l'écran discret. Dans quelles conditions peut-on appliquer les résultats obtenus pour un écran continu à un écran discret ?

Une condition nécessaire est que cette analogie continu-discret soit valable au moins en 1D. Dans le cas des écrans 1D, nous connaissons les comportements statiques, à la fois en continu et en discret, et nous pouvons comparer le résultat des études analytiques. Cette condition nécessaire n'est a priori pas suffisante. En effet des caractéristiques comme la topologie du maillage ont une grande importance en 2D et 3D et n'interviennent pas en 1D.

Avertis des limites de cette analogie, nous entreprenons l'étude comparée des comportements statiques d'un écran 1D en continu et en discret. (§ 7.3.3.3.) Nous verrons que pour les valeurs positives des raideurs le comportement discret tend vers le comportement continu lorsque la résolution augmente. Nous généraliserons ce comportement aux cas 2D et 3D. A la section § 7.2.5. nous étudierons le comportement statique de l'écran continu en 2D et 3D.

7.3.2.2. Description de l'écran continu

On peut penser à un modèle purement théorique d'écran d'épingles qui serait l'homologue continu de l'écran discret. L'écran d'épingles continu est représenté sur la

figure 7.4 pour le cas 1D et sur la figure 7.5. pour le cas 2D. En 1D c'est une corde continue de masse linéique finie m_c attachée au sol par une membrane visco-élastique continue de masse nulle. L'écran continu 2D peut être décrit comme une membrane élastique de masse surfacique finie et attachée au sol par un bloc de matière élastique de masse nulle. Les mouvements de l'écran et les déformations de la membrane et du bloc élastique sont parallèles à la direction ω .



figure 7.4. Une corde continue se déplaçant selon ω et éventuellement liée au sol par une membrane visco-élastique.

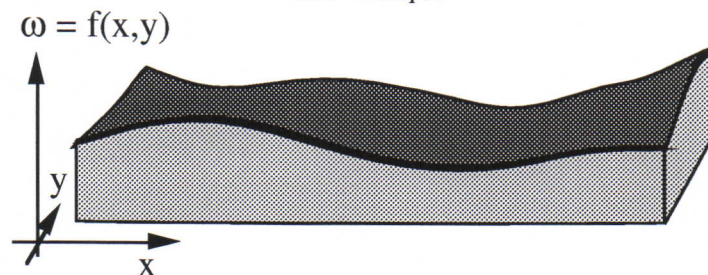


figure 7.5 L'écran d'épingles continu en 2D

Les grandeurs continues seront distinguées des grandeurs discrètes par un indice 'c'. Les écrans d'épingles continus sont tous caractérisés par les grandeurs suivantes :

m_c : la masse linéique, surfacique ou volumique

k_{vc} : la raideur linéique, surfacique ou volumique de la surface de l'écran

k_{sc} : la raideur linéique, surfacique ou volumique de l'interaction liant l'écran au substrat immobile.

Grandeur	1D	2D	3D	homologue discret
k_{sc}	N/m ²	N/m ³	N/m ⁴	k_s (N/m)
k_{vc}	N	N/m	N/m ²	k_v (N/m)
m_c	kg/m	kg/m ²	kg/m ³	m (kg)

7.3.2.3. Méthode de comparaison Continu/Discret

Nous ne pouvons pas comparer directement les modèles continus et discrets. Notamment les paramètres décrits ci-dessus et leur homologue discret ne sont pas comparables tels quels. Nous ne pouvons les comparer qu'à travers les phénomènes qu'ils produisent sous l'effet d'une action identique. Cependant, même au niveau des phénomènes, la comparaison pose des questions non-triviales :

1. Comment comparer deux profils l'un continu et l'autre discret.
2. Comment comparer deux actions (impulsions de force) l'un exercée sur un écran continu et l'autre exercée sur un écran discret. Notamment comment s'assurer que les profils que nous comparons sont dus à des actions identiques en discret et en continu ?

La comparaison d'un profil discret et d'un profil continu

L'écran d'épingles discret et l'écran d'épingles continu, tels qu'ils ont été décrits respectivement dans les sections § 6.4.2 et § 7.3.2.2 sont intrinséquement incomparables tels quels. En effet, contrairement à l'écran continu, l'écran discret n'a pas d'occupation spatiale. A la section § 7.3.1 nous avons étudié le comportement des écrans discrets sans avoir à définir la position des épingles les unes par rapport aux autres dans l'espace (x,y,z) . Nous n'avons pris en compte que les positions relatives selon ω et les relations topologiques (les connexions physiques) entre les épingles. Pour pouvoir comparer l'écran continu et l'écran discret :

1/ il faut attribuer à l'écran discret une occupation spatiale en définissant la distance δl entre chaque épingles, ou, de façon équivalente, la résolution $n = 1/\delta l$ de l'écran. δl s'exprime en mètres et n en épingles par mètre.

2/ D'autre part il faut échantillonner l'écran d'épingles continu avec une période d'échantillonnage de longueur δl . On obtient alors un profil discret qui est isomorphe et donc comparable à celui de l'écran discret.

La comparaison d'une impulsion de force en discret et en continu

En continu la matière est répartie sur un espace fini. Elle est quantifiée en kg/m (1D) kg/m^2 (2D) ou kg/m^3 (3D). En discret on condense la matière en masses ponctuelles. Elle est alors quantifiée en kg . En continu les actions appliquées à la matière sont des champs de force exprimés en N/m (1D) N/m^2 (2D) ou N/m^3 (3D). Ces champs sont répartis sur des zones d'étendue finie, alors qu'en discret les actions sont des forces (en Newtons) appliqués sur des points.

Or dans le cadre de la comparaison de réponses impulsionnelles dans le domaine continu et dans le domaine discret, il faut pouvoir appliquer sur les écrans continus un champ de force élémentaire F qui soit comparable aux impulsions de force d'intensité f_d (en Newton) que nous avons appliquées sur l'écran discret. L'intensité de la force totale f_c (en Newtons) appliquée sur l'écran continu doit être égale à l'intensité f_d de la force appliquée sur l'écran discret. (L'indice 'd' signifie *discret* alors que l'indice 'c' signifie *continu*). De plus il faut que tous les champs de force en continu puissent s'exprimer en fonction de cette action élémentaire, comme dans le cas de l'impulsion de force discrète.

Pour une question de clarté de représentation, nous étudierons le cas 1D. Cependant ce qui suit est facilement généralisable aux cas 2D et 3D. Nous choisissons un champ de force F uniforme dirigée selon ω , non-nul sur l'intervalle $[-x_0,+x_0]$ et nul partout ailleurs. Sa valeur sur l'intervalle $[-x_0,+x_0]$ est de F (en N/m). (Cf figure 7.6). La force totale f_c exercée sur la surface est de :

$$f_c = \int_{-x_0}^{x_0} F \cdot dx = 2 \cdot F \cdot x_0 \quad (7.28)$$

L'égalité entre f_c et f_d impose : $2 F x_0 = f_d \quad (7.29)$

Pour que tous les profils de force puissent être exprimés en fonction de celui-ci, on fera tendre x_0 vers 0. f_d étant donné, F tendra nécessairement vers l'infini. On obtient ainsi une impulsion de Dirac. Tout champ de force uni-directionnel (pouvant s'exprimer comme un champ scalaire) peut s'exprimer comme une somme continue d'impulsions de Dirac.

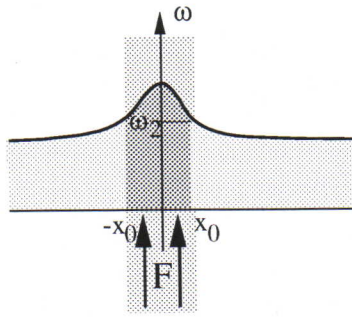


figure 7.6. L'écran continu soumis à un champ de force uniforme F sur $[-x_0, +x_0]$

comparer avec la réponse impulsionnelle de l'écran discret.

Dans la suite de ce sous-chapitre, pour connaître la réponse impulsionnelle d'un écran continu, on lui applique un champ de force de valeur F (en N/m (1D) N/m² (2D) ou N/m³ (3D)) sur un segment un disque ou une sphère de rayon x_0 . On peut alors calculer le profil de l'écran continu, qui dépend de x_0 et de F. Ce résultat obtenu, on fait tendre x_0 vers 0 et F vers l'infini en conservant la relation (7.29). La limite obtenue est la réponse impulsionnelle de l'écran continu. Il ne reste plus qu'à l'échantillonner et à le

7.3.3. LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE EN 1D : L'ÉVALUATION

7.3.3.1. Discussion de l'équilibre avec une position forcée

Ici, nous nous donnons pour objectif d'examiner le modèle décrit à la section § 7.3.2.2 (Cf figure 7.4) à savoir une corde continue attachée au sol par une membrane élastique continue de masse nulle. Dans un premier temps et de la même manière qu'en discret, on remplacera une impulsion de force en $O(0,0,0)$ par une position forcée. C'est une condition aux limites imposant une hauteur $\omega_0 \neq 0$ au point O. Dans un deuxième temps, on étudiera la relation entre l'impulsion de force et la position forcée. Dans les cas 2D et 3D on pourra directement appliquer une impulsion de force.

L'état de l'écran à l'équilibre est décrit par une fonction $\omega = f(x)$. Si on considère une portion infinitésimale de corde, de longueur dx, le bilan des forces au repos sera le suivant :

$$dF_s = -k_{sc} \cdot dx \cdot \omega(x) \quad (7.30)$$

$$dF_v = \frac{k_{vc}}{dx} (\omega(x+dx) - \omega(x)) - \frac{k_{vc}}{dx} (\omega(x) - \omega(x-dx)) \quad (7.31)$$

L'équilibre suppose $dF_s + dF_v = 0$. En exprimant cette relation à l'aide de (7.30) et (7.31) et en différenciant, on obtient la condition d'équilibre de l'écran continu 1D :

$$\omega''(x) - \frac{k_{sc}}{k_{vc}} \cdot \omega(x) = \frac{F(x)}{k_{vc}} \quad (7.32)$$

Premier cas : $k_{sc} > 0$ et $k_{vc} > 0$ (donc $\alpha_c > 0$)

Le profil de l'écran continu à l'équilibre est de :

$$\omega(x) = \omega_0 e^{-\sqrt{\alpha_c} \cdot |x|} \quad (7.33)$$

Deuxième cas : $k_{sc} > 0$ et $-4k_{sc} < k_{vc} < 0$ (donc $\alpha_c < -4$)

Le profil de l'équilibre est de :

$$\boxed{\omega(x) = \omega_0 \cos(\sqrt{\alpha_c} \cdot x + \Phi)} \quad (7.34)$$

Ceci n'est pas du tout comparable au discret, ni quantitativement, ni qualitativement. Les oscillations obtenues en discret étaient dues purement à la discretisation de l'écran d'épingles et n'ont pas d'équivalent en continu. Dans la suite, nous ne prendrons en considération que le cas $k_{vc} > 0$.

7.3.3.2. Position forcée et champ de force.

Appliquons à l'écran un champ de force de valeur F sur l'intervalle $[-x_0, x_0]$. Soit ω_2 la hauteur de la corde à l'abscisse x_0 (et aussi en $-x_0$ puisque la configuration est symétrique. Cf. figure 7.6). Après calculs, on obtient les résultats suivants :

$$\text{Pour } x < -x_0 \quad \omega(x) = \omega_2 e^{-\sqrt{\alpha_c}(x-x_0)} \quad (7.35)$$

$$\text{Pour } x > x_0 \quad \omega(x) = \omega_2 e^{\sqrt{\alpha_c}(x-x_0)} \quad (7.36)$$

$$\text{Pour } -x_0 < x < x_0 \quad \omega(x) - \frac{F}{k_{sc}} = -\left(\omega_2 - \frac{F}{k_{sc}}\right) \frac{\text{sh}(\sqrt{\alpha_c} x_0)}{\text{sh}(2 \cdot \sqrt{\alpha_c} x_0)} 2 \text{ch}(\sqrt{\alpha_c} x) \quad (7.37)$$

Pour calculer ω_2 en fonction de F et de x_0 , on exprime la continuité de la pente en $\pm x_0$.

$$\omega_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{th}(\sqrt{\alpha_c} x_0)}} \frac{F}{k_{sc}} \quad (7.38)$$

La limite de ω_2 quand x_0 tend vers 0 (tout en conservant la relation $F x_0 = f_c$) est :

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ 2F x_0 = f_c}} = \frac{f_c}{\sqrt{4 \cdot k_{sc} \cdot k_{vc}}} \quad (7.39)$$

En fin de compte, la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles continu en 1D est :

$$\boxed{\delta\Omega : \omega(x) = \frac{e^{-\sqrt{\alpha_c} \cdot |x|}}{\sqrt{4 \cdot k_{sc} \cdot k_{vc}}}} \quad (7.40)$$

7.3.3.3. La comparaison discret/continu

Une comparaison qualitative

La comparaison entre les comportements en continu et en discret revient à une simple comparaison entre les réponses impulsionnelles en discret et en continu. En discret la réponse impulsionnelle est décrite par la relation (7.23) alors que la réponse impulsionnelle en continu est donnée par (7.40).

Etant donnés δl la distance entre deux épingles en discret, et $n = 1/\delta l$ la résolution de l'écran, l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle continue donne :

$$\omega_i = \frac{e^{-\sqrt{\alpha_c} \cdot \frac{|i|}{n}}}{\sqrt{4 \cdot k_{sc} \cdot k_{vc}}} \quad (7.41)$$

Une première constatation est que les réponses impulsionnelles sont de même nature et qualitativement comparables.

Les correspondances

Pour une comparaison quantitative, il est nécessaire de pouvoir comparer d'une part k_s et k_{sc} et d'autre part k_v et k_{vc} . Or comme on l'a mentionné au début du paragraphe § 7.3.2.3, il n'y pas de correspondance objective entre les deux types de paramètres. Ainsi, notre but est de déterminer s'il existe une correspondance particulière pour laquelle les comportements sont les mêmes, ou tout au moins tendent vers une même limite au fur et à mesure que la résolution n de l'écran d'épingles tend vers l'infini. Il est clair que s'il existait une correspondance pour laquelle on ait à la fois :

$$\sqrt{4k_s k_v + k_s^2} = \sqrt{4k_{sc} k_{vc}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\alpha_c}}{n} = \text{Log} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} \right) \quad (7.42)$$

les deux comportements continus et discrets seraient toujours les mêmes. Nous n'avons pas pu trouver une telle correspondance. Mais nous pouvons en proposer une autre.

Correspondance entre k_s et k_{sc}

Prenons d'un côté une tranche d'un mètre de l'écran continu (figure 7.7) et une tranche d'un mètre de l'écran discret (contenant n épingles) (figure 7.8). Sur les deux tranches nous posons une planche rigide parfaitement horizontale mais mobile dans le sens des ω . Aussi bien en discret qu'en continu, le comportement global du système {écran, planche} est celui d'un ressort dont la raideur est k_{sc} en continu et $n \cdot k_s$ en discret. Dans cette situation, les comportements discret et continu sont les mêmes si :

$$k_{sc} = n \cdot k_s \quad (7.43)$$

Correspondance entre k_v et k_{vc}

Cette fois-ci nous prenons un écran continu avec $k_{sc}=0$. (Une corde continue) et un écran discret avec $k_s=0$ (une corde discrète). Tous deux mesurent 1 mètre. L'écran discret est donc composé de n masses. Avec un raisonnement analogue à celui du sous-paragraphe précédent, on peut dire que, dans cette situation, les comportements discret et continu sont identiques à l'équilibre si $k_{vc} = k_v/n$

$$(7.44)$$

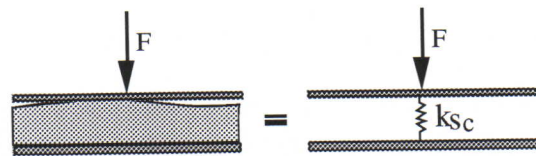


figure 7.7 L'écran continu comprimé par une planche est équivalent à un ressort de raideur k_{sc} si la longueur de la tranche est de 1 mètre.

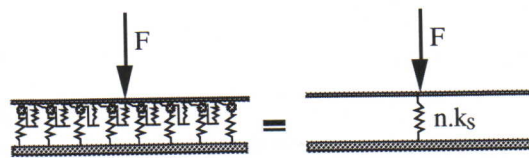


figure 7.8 L'écran discret comprimé par une planche est équivalent à un ressort de raideur $n \cdot k_s$ si la longueur de la tranche est de 1 mètre (s'il y a n épingles)

(7.44) est moins générale que (7.43) puisqu'elle est vraie seulement si la corde n'est pas attachée à un substrat fixe. (7.43) et (7.44) impliquent :

$$\alpha = \frac{k_s}{k_v} = \frac{\alpha_c}{n^2} \quad (7.45)$$

Comparaison quantitative

Avec les relations (7.43) et (7.44) nous allons comparer les réponses impulsionnelles de l'écran d'épingles en discret et en continu. Plus précisément nous allons éprouver les deux égalités de (7.42). D'après ces deux relations, on peut écrire :

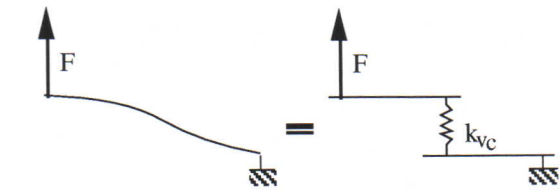


figure 7.9 Une corde continue est équivalente à un ressort de raideur k_{vc} si la longueur de la corde est de 1 mètre.

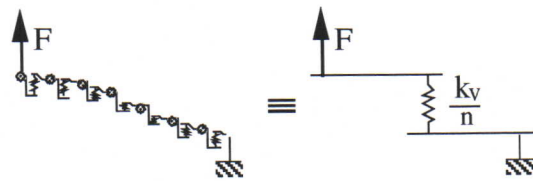


figure 7.10 Une corde discrète est équivalente à un ressort de raideur k_v/n s'il y a n épingles dans la corde

$$\sqrt{4k_s k_v + k_s^2} = \sqrt{4k_{sc} k_{vc} + \frac{k_{sc}^2}{n^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{4k_{sc} k_{vc}} \quad (7.46)$$

Donc avec les correspondances (7.43) et (7.44) la première égalité de (7.42) n'est pas vérifiée dans tous les cas, mais seulement lorsque la résolution tend vers l'infini. Il en est de même pour la seconde égalité :

$$\text{Log} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} \right) = \text{Log} \left(1 + \frac{\alpha_c}{2n^2} + \sqrt{\frac{\alpha_c}{n^2} + \frac{\alpha_c^2}{4n^4}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{\alpha_c}}{n} \quad (7.47)$$

Là aussi l'égalité avec le continu est vérifiée lorsque la résolution n tend vers l'infini. Il en résulte que les réponses impulsionnelles sont également équivalentes aux hautes résolutions :

$$\frac{e^{-\beta|l|}}{\sqrt{4k_s k_v + k_s^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{\alpha_c} \frac{|l|}{n}}}{\sqrt{4k_{sc} k_{vc}}} \quad (7.48)$$

Ceci ne signifie nullement que pour des résolutions plus basses il soit impossible de trouver une correspondance quantitative entre discret et continu en utilisant des correspondances plus élaborées que celles que nous avons prises (7.43) et (7.44). Nous avons simplement montré qu'aux hautes résolutions, une telle correspondance existe.

La conclusion du cas unidimensionnelle est que, pour l'étude des comportements statiques d'un écran discret 1D vérifiant ($k_s > 0$, $k_v > 0$) et dont la résolution n est très haute, on peut utiliser un écran continu dont les paramètres sont donnés par les correspondances (7.43) et (7.44).

7.2.5. LA RECHERCHE DES PROFILS EN 2D ET 3D (OU L'ANALOGIE AVEC L'ÉLECTROSTATIQUE)

Nous allons extrapoler le résultat de la section précédente aux cas 2D et 3D : nous admettrons que l'équivalence entre le continu et le discret aux hautes résolutions est valable en 2D et 3D. Nous calculerons donc les réponses impulsionnelles des écrans continus et nous admettrons que celles des écrans discrets sont identiques aux hautes résolutions.

7.3.3.4. Une équation différentielle à une variable

Dans le cas, bidimensionnel, nous prenons l'équation (7.32) comme point de départ. (On supposera que k_{vc} est non-nulle). A l'équilibre, la hauteur ω de l'écran d'épingles 2D ou 3D en chaque point M doit vérifier l'équation :

$$\nabla^2 \omega(M) - \alpha_c \omega(M) = \frac{F(M)}{k_{vc}} \quad (7.49)$$

L'opérateur ∇^2 est l'opérateur laplacien et $M(x,y,z)$ est un point dans l'espace. Nous rappelons que $F(M)$ est un champ de force parallèle à l'axe ω . La résolution de cette équation permet de trouver le profil de l'écran d'épingles à l'équilibre.

Dans le cas d'une impulsion de force, ou un champ de force appliqué sur une région sphérique autour de l'origine $O(0,0,0)$, la configuration est invariante par rotation, il en sera de même pour l'état de l'écran. Donc nécessairement, l'état de l'écran est déterminé par une seule variable r représentant la distance euclidienne entre le point $M(x,y,z)$ ou l'on observe l'état et l'origine O où est appliquée l'impulsion de force. Autrement dit, $\omega(M)$ est une fonction de r . Cette symétrie sphérique nous permet de transformer l'équation multidimensionnelle (7.49) en une équation uni-dimensionnelle. Etant donnée l'expression de l'opérateur Laplacien dans les coordonnées respectivement cylindriques et sphériques, on obtient les équations caractérisant le profil d'équilibre de l'écran d'épingles respectivement 2D et 3D :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \alpha_c \omega = \frac{F(r)}{k_{vc}} \quad \text{en 2D} \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \alpha_c \omega = \frac{F(r)}{k_{vc}} \quad \text{en 3D} \quad (7.51)$$

Ce sont des équations de Bessel. La solution générale est une fonction de Bessel. Cependant, pour des cas particuliers, ces équations se simplifient grandement.

7.3.3.5. La résolution pour $\alpha_c = 0$

Dans ce cas, l'équation (7.49) est équivalente à (7.52)

$$\nabla^2 \omega(M) = \frac{F(r)}{k_{vc}} \quad (7.52)$$

Analogie avec l'électrostatique

Cette expression met en évidence les ressemblances de notre système mécanique avec l'électrostatique puisque (7.52) est l'homologue mécanique de l'équation de Poisson de l'électrostatique (7.53) régissant le potentiel électrostatique $V(M)$ qui règne dans un milieu de permittivité ϵ , en fonction d'une distribution de charges $\rho(M)$ (en C/m^3)

$$\nabla^2 V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (7.53)$$

L'équation de Poisson est dérivée de l'équation de Maxwell-Gauss. Ainsi pour calculer le profil de l'écran d'épingles, nous pouvons utiliser les mêmes méthodes que celles utilisées en électrostatique et notamment le théorème de Gauss :

Le Théorème de Gauss :

Soit une surface fermée quelconque S (appelée *surface de Gauss*) et le volume V qu'elle délimite. Le flux du champ électrique à travers S est égale à la somme de toutes les charges contenues dans le volume V .

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho \cdot d\tau \quad (7.54)$$

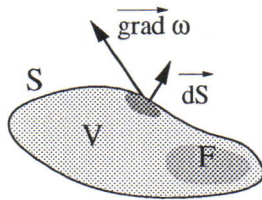


figure 7.11. le théorème de Gauss appliqué à l'écran d'épingles sur une surface de Gauss S

où $d\tau$ représente un volume infinitésimal appartenant au volume V . Ce théorème est la conséquence directe de l'équation de Maxwell-Gauss, et de la formule d'Ostrogradski. Dans le cas de l'écran d'épingles, la distribution de charge ρ est remplacé par l'opposé du champ de force $-F$ (parallèle à ω) appliqué à l'écran. L'analogue du champ électrostatique est le champ $-\text{grad}\omega$ et celui du potentiel électrostatique est le champ ω .

$$\iint_S \vec{\text{grad}}\omega \cdot d\vec{S} = \frac{-1}{k_{vc}} \iiint_V F \cdot d\tau \quad (7.55)$$

Le choix de la surface de Gauss se fait généralement en fonction des propriétés de symétrie de l'écran d'épingles et de celles du champ de force F qui lui est appliqué.

L'excitation de l'écran d'épingles

Dans le cadre de la théorie de la réponse impulsionnelle, F sera une impulsion de Dirac dirigée selon l'axe ω . Pour l'obtenir nous procéderons d'une manière analogue à celle décrite au second sous-paragraphe de § 7.3.2.3 : nous calculerons le champ Ω en présence d'un champ de force F uniforme défini sur une boule (au sens général : en 1D, 2D ou nD) de rayon r_0 . Ensuite, nous ferons tendre ce rayon vers 0 tout en maintenant constant le produit $F \cdot V_0$ (où V_0 est le volume de la boule de rayon r_0 . $V_0 = \pi r_0^2$ en 2D et $V_0 = 4/3\pi r_0^3$ en 3D). Ainsi le champ de force tend vers une impulsion de Dirac.

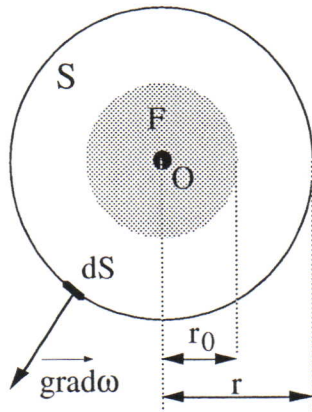


figure 7.12. Le champ de force défini sur une boule de centre O et de rayon r_0 et la surface de Gauss S de centre O et de rayon r .

L'écran d'épingles est homogène et infini donc le champ F sera appliqué sur une boule centrée sur l'origine O. Le système Σ constitué par l'écran d'épingles et le champ F, présentent des propriétés de symétrie. S est invariant par toute rotation autour de O, donc il en est de même pour les champs ω et $\text{grad}\omega$. En d'autres termes, la valeur de ces champs en un point M ne dépend que de la distance euclidienne r entre M et O. Enfin Σ est aussi invariant par symétrie autour de tout plan (de l'espace (x,y,z)) passant par O. Donc il en est de même pour le champ $\text{grad}\omega$. Ceci signifie que ce champ est nécessairement radial. Autrement dit, il est perpendiculaire à toute sphère de centre O.

En conclusion de ces considérations sur les symétries de Σ , la surface de Gauss que nous prendrons sera une sphère de rayon r centrée sur O. (cf figure 7.12). Etant donnée cette surface, le théorème de Gauss nous permettra de connaître $\text{grad}\omega(r)$. Ensuite, nous ferons varier r pour connaître toutes les valeurs de $\text{grad}\omega(r)$ et ensuite de $\omega(r)$.

Le calcul du profil en 2D

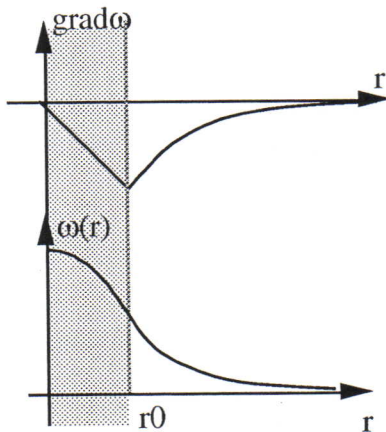


figure 7.13 Le profil (parabole + logarithme) de l'écran d'épingles en 2D

Le flux de $\text{grad}\omega(r)$ sur la surface de Gauss est de :

$$\phi(r) = 2\pi r \text{ grad}\omega(r) \quad (7.56)$$

Le théorème de Gauss donne :

Si $r < r_0$

$$\text{grad } \omega(r) = \frac{-rF}{2k_{vc}} \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{-r^2F}{4k_{vc}} + \text{Const}$$

Si $r > r_0$

$$\text{grad } \omega(r) = \frac{-r_0^2F}{2 \cdot k_{vc}} \frac{1}{r} \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{-r_0^2F}{2 \cdot k_{vc}} \text{Log } r + \text{Const}$$

Donc, lorsqu'on fait tendre r_0 vers 0 et F vers l'infini pour obtenir un pic de Dirac, (le terme $F\pi r_0^2 = f_c$ restant constant) la partie droite du profil ne change pas. Donc, la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles 2D est en logarithme.

$$\delta\Omega : \omega(r) = \frac{-\text{Log } r}{2\pi k_{vc}} \quad (7.57)$$

Ainsi, qualitativement les résultats en 1D et en 2D ne sont pas semblables.

Le calcul du profil en 3D

Le flux de $\text{grad}\omega(r)$ sur toute sphère centrée sur l'origine et de rayon r sera :

$$\phi(r) = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (7.58)$$

Donc l'équation de Gauss sur cette sphère donne :

$$\text{Si } r < r_0 \quad 4\pi r^2 \vec{\text{grad}}\omega(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{-F}{k_{vc}} \Leftrightarrow \vec{\text{grad}}\omega(r) = \frac{-r F}{3 \cdot k_{vc}} \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{-r^2 F}{6 \cdot k_{vc}} + \text{Const}$$

$$\text{Si } r > r_0 \quad 4\pi r^2 \vec{\text{grad}}\omega(r) = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \frac{-F}{k_{vc}} \Leftrightarrow \vec{\text{grad}}\omega(r) = \frac{-F r_0^3}{3 k_{vc} r^2} \Leftrightarrow \omega(r) = \frac{F r_0^3}{3 k_{vc} r} + \text{Const}$$

(i.e. qualitativement le même comportement qu'un potentiel électrostatique.

Donc, lorsqu'on fait tendre r_0 vers 0 et F vers l'infini pour obtenir un pic de Dirac, (le terme $4/3\pi r_0^3 F = f_c$ restant constant) la partie droite du profil ne change pas. Donc, la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles 3D est en $1/r$.

Ainsi la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles continu 3D soumis à une impulsion de Dirac est :

$$\delta\Omega : \omega(r) = \frac{1}{3 \cdot k_{vc}} \frac{1}{r} \quad (7.59)$$

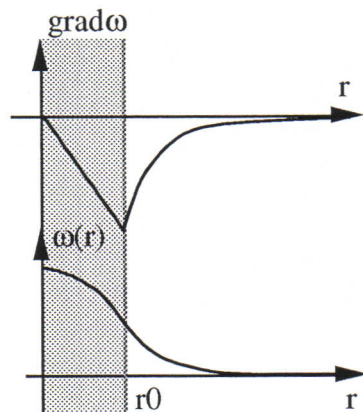


figure 7.14 Le profil (parabole + $1/r$) de l'écran d'épingles en 3D

NB. Remarquons que ce profil se rencontre dans de nombreuses situations. Ce n'est pas seulement le profil de potentiel électrostatique en présence d'une densité sphérique de charge de rayon r_0 . C'est aussi le profil de vitesse d'un cyclone avec un œil de rayon r_0 .

De la même manière que le passage du 1D en 2D, le passage du 2D au 3D semble marquer un saut qualitatif.

7.3.3.6. La resolution pour $\alpha_c \neq 0$

Dans ce cas, on retrouve l'équation (7.50) en entier pour le cas 2D. La solution de l'équation homogène est une fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$\omega(r) = \mu \cdot K_0(r\sqrt{\alpha_c}) + \nu \cdot I_0(r\sqrt{\alpha_c}) + \frac{F(r)}{\alpha_c k_{vc}} \quad (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \quad (7.60)$$

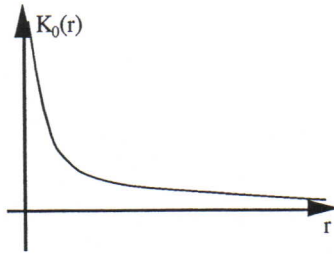


figure 7.15. La fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

si $r > r_0$ ω tend vers une valeur finie lorsque r tend vers l'infini. Or I_0 n'est pas borné à l'infini. Donc $\nu=0$.

$$\omega(r) = \mu \cdot K_0(r\sqrt{\alpha_c}) + \frac{F}{\alpha_c k_{vc}} \quad (7.61)$$

si $r < r_0$ ω tend vers une valeur finie lorsque r tend vers 0. Or K_0 n'est pas borné en 0. Donc $\mu=0$.

$$\omega(r) = \frac{F}{\alpha_c k_{vc}} + \frac{K_{\frac{1}{2}}(r\sqrt{\alpha_c})}{\sqrt{r}} \quad (7.62)$$

Pour le cas 3D, la résolution est la même à un changement de variable près

$$\omega(r) = \frac{K_{\frac{1}{2}}(r\sqrt{\alpha_c})}{\sqrt{r}} + \frac{F}{\alpha_c k_{vc}} \quad (7.63)$$

7.3.4. CONCLUSION

Après une étude menée sur les écrans d'épingles continus en 2D et 3D, nous appliquons ces résultats aux écrans discrets à haute résolution. Nous connaissons les réponses impulsionnelles des divers types d'écran d'épingles et nous savons comment les contrôler quantitativement grâce aux paramètres physiques des modèles. Dans le cas unidimensionnel, il s'agit d'une exponentielle décroissante, en 2D et en 3D il s'agit d'une fonction de Bessel. De plus aux faibles valeurs de k_s , nous pouvons étudier les comportements de l'écran d'épingles par l'intermédiaire des lois de l'électrostatique et notamment par le théorème de Gauss.

Dans tous les cas, (sauf dans celui où k_v est négatif) l'écran d'épingles effectue un filtrage passe-bas. Le contrôle de ce filtrage passe-bas repose essentiellement sur le rapport $\alpha = k_v/k_s$.

7.4. L'ACCENTUATION DES CONTOURS

L'accentuation des contours a une grande importance pour la perception d'un objet. Un ensemble de points matériels ne peut paraître comme un objet autonome que lorsque les frontières entre les points matériels ont été gommées (filtrage passe-bas cf. § 7.3) et lorsque les contours de l'objet global ont été accentués. Notre système visuel effectue cette opération. Une manifestation connue de ce processus a pour nom "les bandes de Mach". Dans ce cas, comme dans un grand nombre d'autres cas, la mise en valeur des contours équivaut à un filtrage passe-haut.

7.4.1. LES BANDES DE MACH

7.4.1.1. La description du phénomène de référence

Dans la rétine, les cellules sont liées selon une structure particulière, telle que l'activité d'une cellule donnée a tendance à inhiber celle des cellules voisines et réciproquement. De cette façon, lorsque des neurones voisins reçoivent des excitations équivalentes aucun des deux neurones ne répond fortement. Par contre avec cette structure, les différences d'excitation entre deux neurones voisins sont accentuées. Cette structure est très courante, non seulement dans le système visuel, mais également dans le système auditif, tactile etc. Elle permet d'accentuer les contrastes. Dans le système visuel, on retrouve cette structure dans la reconnaissance des directions, des couleurs et des intensités.

En particulier grâce à cette structure, une palette de luminosités croissantes (cf. figure 7.16.a) constituée de cases d'intensité homogène (cf. figure 7.16.b) est perçue comme constituée de cases où les intensités ne sont pas homogènes. (figure 7.16.c). C'est un phénomène qui aide notre système visuel à percevoir les variations brusques de luminosité et notamment les contours. C'est le phénomène dit des *bandes de Mach*.

7.4.1.2. Le choix de la modélisation physique pour les *bandes de Mach*

Nous nous donnons pour but d'intégrer le filtrage passe-haut aux phénomènes que l'écran d'épingles peut produire. Les bandes de Mach constitueront notre phénomène de

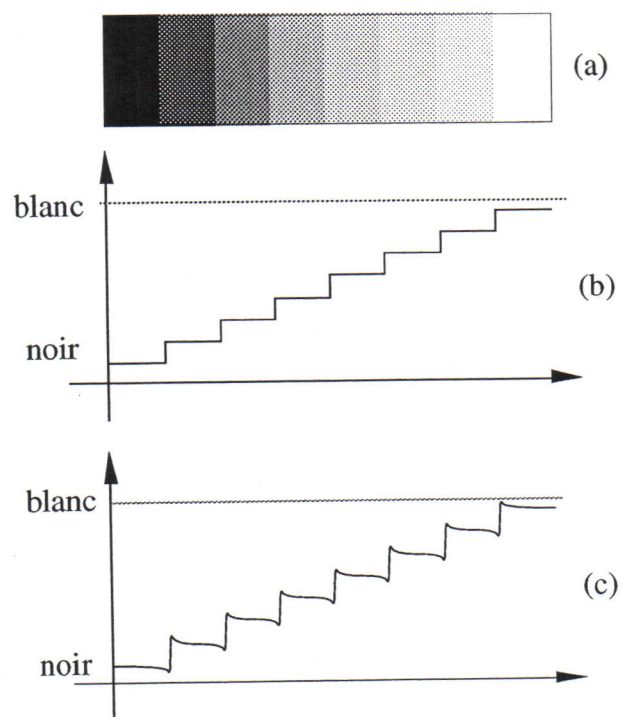


figure 7.16 Le phénomène des bandes de Mach (a) une palette allant du noir au blanc. C'est l'objet à percevoir (b) la luminosité perçue sans filtrage passe-haut (c) la luminosité perçue, avec filtrage passe-haut. C'est le phénomène des bandes de Mach.

référence. La structure de l'écran d'épingles restera identique. Mais nous aurons recours à d'autres types d'interactions.

7.4.1.3. Le principe de l'inhibition latérale pour le filtrage passe-haut

Le phénomène des bandes de Mach dans la rétine, nous l'avons vu, est du au fait que chaque neurone excité (par un rayon de lumière) tend à inhiber ses voisins. Il en va de même pour les filtres passe-haut dans le domaine de l'image. Pour un filtrage passe-haut, il s'agit de calculer la différence des intensités des pixels voisins. L'intensité I_{ij} d'un pixel p_{ij} dans l'image filtrée est la différence entre l'intensité des pixels très proches de p_{ij} et celles des pixels moins proches de p_{ij} . Typiquement, le profil des noyaux de convolution sont des fonctions positives au centre et négatives pour des points plus éloignés du centre. (voir figures 7.17.c et 7.17.d). La largeur de ces noyaux détermine la force du filtrage : toute composante qui soit constante sur la largeur du noyau est éliminée de l'image filtrée.

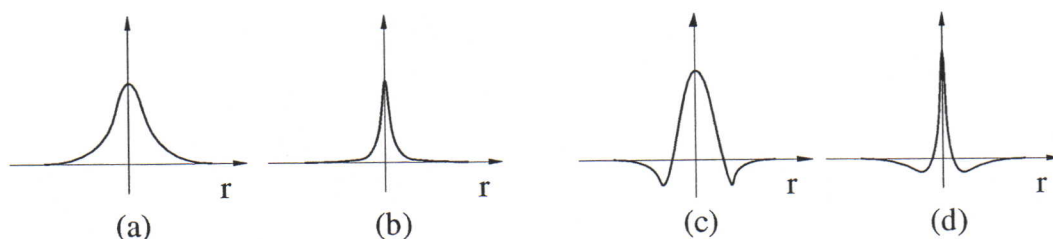


figure 7.17 Quatre exemples de noyaux de filtres pour le traitement d'images. (a) et (b) sont des noyaux de filtre passe-bas, alors que (c) et (d) sont des noyaux de filtres passe-haut.

NB. Typiquement, le profil des noyaux de convolution sont des fonctions positives (voir figures 7.17.a et 7.17.b). La largeur des noyaux détermine la force du filtrage : tous les détails de taille inférieure à cette largeur de noyau seront éliminés dans l'image filtrée.

Les neurones inhibiteurs dans la rétine, et les parties négatives du noyau de ces filtres passe-haut jouent le même rôle. Ainsi le principe sous-jacent dans les bandes de Mach et les filtres passe-haut est le même. Dans le cadre des neurones ce principe est appelé *l'inhibition latérale*. Par extension, nous utiliserons ce terme pour le filtrage passe-haut en général. Pour notre modèle de SV nous avons choisi de mettre en œuvre physiquement ce principe commun en attachant une importance très grande au contrôle de la force du filtrage.

Une transcription de ce principe dans le cas de l'écran d'épingles consisterait à élaborer des interactions entre épingles telles que, toute épingle enfoncée tendrait à relever les épingles voisines. La réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles devra alors être similaire aux noyaux des figures 7.17.c, 7.17.d dans le sens où elle devra présenter un centre positif et une périphérie négative avant de s'annuler pour des distances plus grandes. Dans les paragraphes suivants, nous nous attacherons à proposer différentes interactions de ce type, et différentes façons de contrôler la portée du voisinage mentionné.

7.4.2. UNE MODÉLISATION DESCRIPTIVE DE L'INHIBITION LATÉRALE

Au paragraphe § 7.3.1.1.c, nous avons calculé le comportement à l'équilibre de l'écran d'épingles 1D. Nous avons vu que pour $-k_s/4 < k_v < 0$ (ce qui implique des raideurs négatives) nous obtenons une réponse impulsionnelle stable représentée sur la figure 7.18.

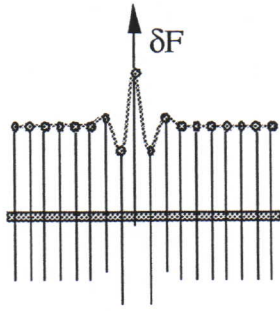


figure 7.18. La réponse impulsionnelle d'une chaîne de points matériels 1D liés par des interactions à raideur négative

difficile interprétation physique d'un tel modèle.

Nous pouvons contrôler la largeur de cette réponse impulsionnelle et obtenir un noyau de convolution semblable à ceux des figures 7.17.c et 7.17.d. De manière plus générale, dans une situation dynamique, ce type de situation est obtenue en attribuant aux modes de déformation d'ordre élevé, un comportement plus libre qu'aux premiers modes. On montre que cela implique, soit des raideurs négatives, soit des viscosités négatives. (plus spécifiquement $k_v < 0$ et/ou $z_v < 0$). Ce modèle permet effectivement de faire un filtrage passe-haut. Mais il n'est pas très satisfaisant précisément à cause de ces signes négatifs et de la

Cependant, on montre que la position d'équilibre d'un tel modèle est la même que celle d'un autre modèle avec seulement des raideurs et des viscosités positives. Il s'agit du modèle dit *des leviers* : tout couple d'épingles voisines est lié par un levier souple, fixé sur un piquet rigide à mi-chemin entre les deux épingles. Ainsi, lorsque l'une des épingles est enfoncée, les voisines sont relevées par le jeu du levier et réciproquement. (Cf. figure 7.19)

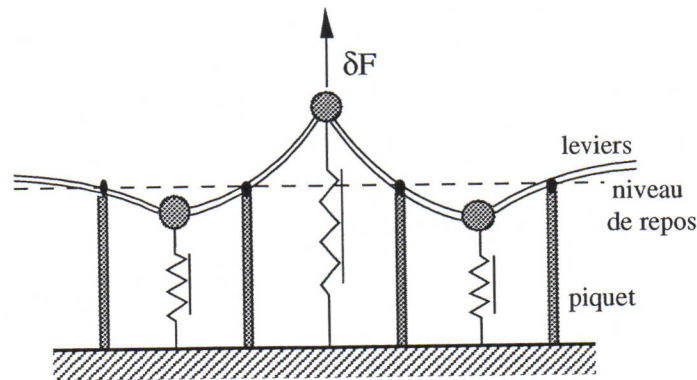


figure 7.19. Une épingle tirée par une impulsion de force δF enfonce les épingles voisines, qui à leur tour enfonce les épingles adjacents etc.

Ce modèle a la même réponse impulsionnelle que les modèles à raideurs négatives décrits plus haut. Pour une description plus précise de la métaphore du levier, voir [Hab 93].

Les modèles décrits ci-dessus présentent cependant un problème fondamental. La réponse impulsionnelle de ces modèles de surface présente des ondulations. Les ondulations en elles-mêmes ne constituent pas une difficulté. Mais la période de ces ondulations est toujours égale à deux fois la largeur de la maille de l'écran d'épingles. Autrement dit, nous avons un phénomène (les ondulations) produit par un système discret dont la fréquence d'échantillonnage est exactement le double de la fréquence spatiale des oscillations. Le critère de Nyquist n'est pas satisfait. Il en résulte des comportements comparables aux repliements de spectre. Dans l'exemple de la figure 7.20, on peut voir que selon la position du marqueur, les ondulations obtenues sont une amplitude nulle (figure 7.20.b) ou une amplitude maximale (figure 7.20.a).

D'une manière plus générale, en utilisant une approche descriptive du principe de l'inhibition latérale, à l'échelle de l'épingle, nous lions de manière systématique, la discrétisation de l'écran en épingles et la période des ondulations ce qui entraîne nécessairement ces repliements de spectre.

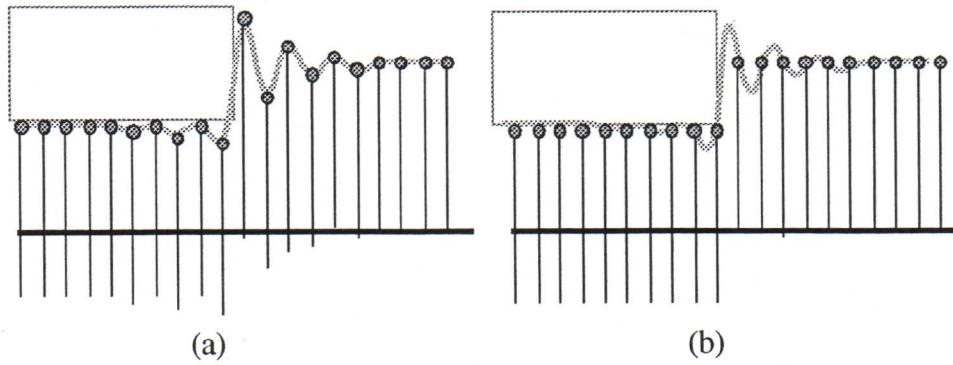


figure 7.20. Un écran d'épingles marqué par un objet parallélépipédique. La figure (a) et (b) ne diffèrent que par une translation du marqueur de $d/2$ (d étant la largeur de la maille de l'écran) Dans un cas, on peut voir les ondulations, dans l'autre cas non. Pourtant, dans les deux cas, le profil des épingles est une discrétisation de la même courbe ondulée continue.

Dans la suite, nous abandonnons la description de l'inhibition latérale à l'échelle de l'épingle. Nous adopterons plutôt l'inhibition latérale par une approche plus physique : un objet physique peut spontanément effectuer une inhibition latérale par simple conservation de volume.

7.4.3. L'INHIBITION LATÉRALE PAR CONSERVATION DE VOLUME

7.4.3.1. Le principe du modèle deux fois 1D

Lorsqu'un objet imprime sa trace sur une plaque constituée d'une matière déformable et peu compressible, alors ce marquage entraîne un déplacement de matière dans la plaque. Dans certains cas, le déplacement de matière se propage jusqu'au bords de la trace et reste dans cette région. Le profil résultant est similaire à celui des bandes de Mach. (Cf. figure 7.21) Ce comportement peut être obtenu avec une étendue de sable ou une plaque d'argile fraîche, formant un cratère autour de la trace de l'objet marqueur.

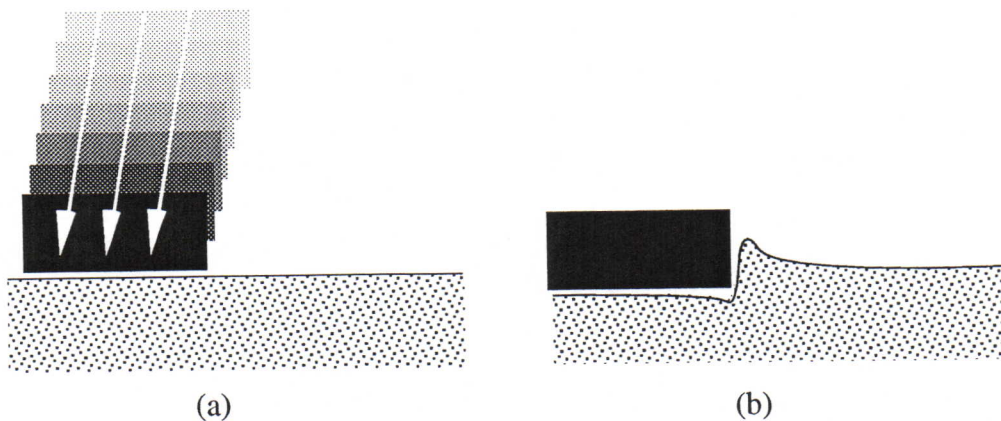


figure 7.21 (a) Un objet solide est appliqué sur une étendue plane de sable. (b) Après le retrait de l'objet, la forme de la trace n'est pas une forme parallélépipédique, mais présente un cratère et un profil comparable à celui des bandes de Mach

La propriété qui cause ce phénomène est la conservation du volume. Il y a plusieurs manières de modéliser la conservation de volume. On peut réaliser un contrôle explicite du volume. Par exemple, [DG 95] réalise la conservation de volume dans les surfaces implicites en calculant localement le volume des parties déformées et en changeant localement la fonction potentielle au fur et à mesure de ces déformations de manière à ce

que le volume calculé reste constant. Cependant, la conservation de volume peut être modélisée d'une autre manière. En effet, si un objet est constitué d'éléments dont le volume reste constant, le volume global résultant sera également constant au cours des déformations qu'il subit. [Jim 93] a élaboré de tels modèles d'objets à volume constant.

Notre objectif ici est d'élaborer un modèle d'écran d'épingles ayant des propriétés de conservation de volume. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la seconde approche consistant à construire un objet global par un assemblage d'éléments à volume constant.

Dans ce chapitre nous proposerons des modèles d'écran d'épingles à 1D, (où l'écran d'épingles a une épaisseur et une étendue en 1D (une longueur). Pour chaque modèle, nous discuterons de l'extension d'un tel modèle à l'espace tridimensionnel où l'écran a non seulement une épaisseur mais aussi une étendue en 2D. Dans le premier cas, on étudiera les modèles d'écran à surface constante, alors que dans le second cas, on cherchera un modèle d'écran à volume constant.

Nous ne chercherons pas à modéliser un amas de matériau granulaire (cf figure 7.21) capable d'avoir un tel comportement. En effet un tel amas comme celui décrit dans [LHM 95] serait capable non seulement d'avoir un encombrement constant, mais pourrait produire un grand nombre d'autres phénomènes.

Nous modélisons cette plaque de matière peu compressible non pas comme un ensemble isotropes de points matériels, mais un ensemble de colonnes de matière. Chaque colonne est caractérisée par une certaine quantité de matière. Ces colonnes sont susceptibles de s'échanger de la matière si bien qu'à l'équilibre la somme des hauteurs de ces colonnes reste constante. Au paragraphe § 7.4.3.2, nous proposons un modèle de colonnes composée de quatre points matériels (six points matériels pour le cas 2D) et où la quantité de matière dans les colonnes peut varier continûment.

7.4.3.2. La métaphore du piston

Nous définissons un module *Cordis-Anima* composé de quatre points L regroupés en deux groupes de deux points L (cf. figure 7.22.a).

Ce module est caractérisé par une raideur et une longueur totale L_0 au repos. Les forces générées par les deux paires de points L sont identiques, avec :

$$F = -k_{\text{pist}} \cdot ((X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1) - L_0)$$

Chaque paire de point L est utilisé comme un élément de liaison entre deux points matériels et exerce des forces sur ceux-ci. Mais ces éléments de liaison ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Chaque paire de points L est un ressort 1D dont la longueur au repos dépend de l'élongation de l'autre ressort. D'après la relation ci-dessus, la longueur au repos de l'un des ressorts est de $L_0 - Y_2 + Y_1$, alors que celle de l'autre est de $L_0 - X_2 + X_1$. De manière plus générale, le module est globalement au repos lorsque la somme des longueurs des deux ressorts est égale à L_0 . Lorsque cette somme est supérieure à L_0 , alors les ressorts génèrent des forces attractives alors que lorsque cette somme est inférieure à L_0 , alors les ressorts génèrent des forces répulsives de manière à ce que la somme des longueurs reprenne la valeur L_0 . On peut comparer ce comportement à celui de deux pistons (sans frottement) qui seraient reliés l'un à l'autre de manière à ce que la pression dans les pistons soit toujours égale (Cf. figure 7.22.b). Du fait de la conservation de la matière dans les échanges entre les deux pistons, la somme des longueurs des deux pistons reste la même à l'équilibre.

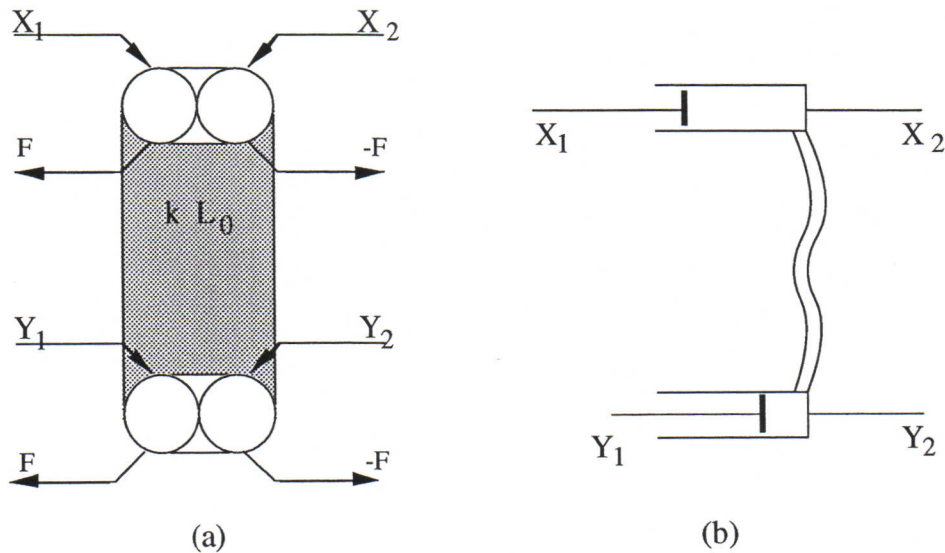


figure 7.22. Le module piston double

NB. Dans un modèle 2D, nous aurons recours à un modèle similaire mais avec six points L regroupés en éléments de liaison. Le principe de fonctionnement sera le même :

$$F = -k_{\text{pist.}}((X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1) + (Z_2 - Z_1) - L_0) \quad (7.64)$$

L'analogie hydraulique est donnée par trois pistons dont les élongations respectives sont : $X_2 - X_1$, $Y_2 - Y_1$ et $Z_2 - Z_1$.

Pour cette raison, le module présenté ci-dessus sera appelé le module *piston double* (et le module *piston triple* dans le cas 2D).

7.4.3.3. Le *EEshco* un modèle d'écran d'épingles à somme de hauteurs constante

Dans ce paragraphe nous présentons le modèle *EEshco* (Ecran d'épingles à somme de hauteurs constante). Dans les paragraphes suivants, nous étudierons essentiellement les modèles 1D. Nous discuterons plus loin de la généralisation de ce principe au cas 2D.

Le modèle de la colonne

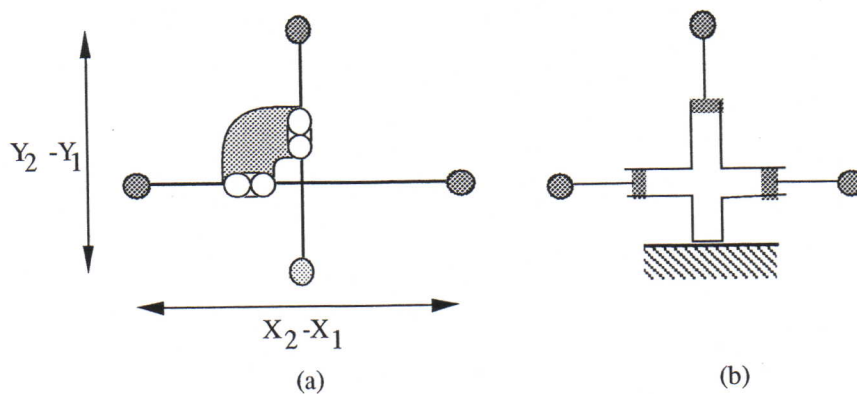


figure 7.23. Le modèle de la colonne : une épingle représentant la colonne proprement dite, et deux points matériels horizontaux représentant l'échange de matière avec les autres colonnes.

Le *EEshco* est construit par *Cordis-Anima* et constitué d'un ensemble d'un ensemble de colonnes de matière. Chaque colonne est constituée d'une part d'une épingle se déplaçant

en 1D selon la direction ω et interagissant avec les marqueurs. Chaque colonne est également liée à deux autres points matériels 1D se déplaçant perpendiculairement à ω (i.e. en x pour un EEshco 1D. L'épingle, le sol et les deux masses 1D sont liées par un modèle piston double (cf figure 7.23). De cette manière le déplacement des points horizontaux représente l'échange de matière entre les colonnes.

Lorsque l'épingle est enfoncée (par exemple par un marqueur), alors les deux points horizontaux se repoussent, alors que lorsque les points horizontaux d'une colonne sont rapprochés alors l'épingle tend à augmenter de hauteur. Dans tous les cas, la somme des longueurs $X_2 - X_1 + Y_2 - Y_1$ tend à rester constante.

Comparé à une colonne modélisée par un ensemble de points matériels, notre modèle ne tient pas compte de la variation de la masse des colonnes ni de la variation de la raideur lors des échanges de matière entre les colonnes. Notre modèle tient seulement compte de la variation de la longueur au repos.

L'assemblage des colonnes

Pour construire le EEshco, une épaisseur de matière posée sur un substrat rigide, et susceptible de conserver son encombrement, nous assemblons ces colonnes en mettant en commun les masses horizontales. Les deux masses horizontales à l'extrémité de la chaîne horizontale sont des points fixes. (Cf. figure 7.24)

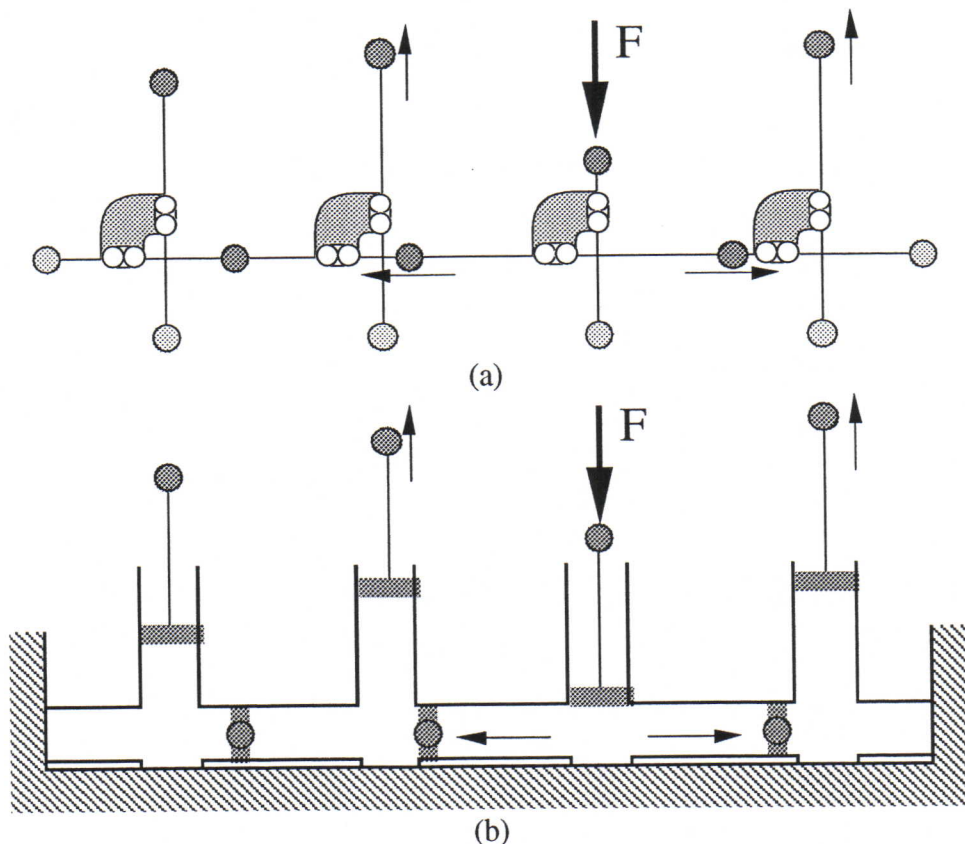


figure 7.24. Un assemblage de colonnes formant un EEshco : le EEshco élémentaire (a) Les points représentés en gris sont des points fixes. Les autres points sont des points matériels 1D. Le fait qu'une des épingle soit enfoncée relève les épingle de part et d'autre. (b) L'équivalent de cet assemblage en termes de pistons.

La longueur $X_2 - X_1 + Y_2 - Y_1$ tend à rester constante pour chaque colonne. Donc

$$\sum_{i=1}^{\text{nb_colonnes}} X_{2i} - X_{1i} + Y_{2i} - Y_{1i} = L_0 = \text{constante} \quad (7.65)$$

Le fait d'avoir fixé les deux extrémités de la chaîne horizontale nous permet de dire que :

$$\sum_{i=1}^{\text{nb_colonnes}} X_{2i} - X_{1i} = l_0 = \text{constante} \quad (7.66)$$

Il en résulte que :

$$\sum_{i=1}^{\text{nb_colonnes}} Y_{2i} - Y_{1i} = L_0 - l_0 = \text{constante} \quad (7.67)$$

Ce qui signifie que la somme des hauteurs de toutes les épingles est constante à l'équilibre. Sachant que la distance entre les épingles est constante, on en déduit que la surface du EEshco (son volume, dans le cas d'un modèle 2D) tend à rester constante. Ainsi lorsque l'une des épingles est enfoncée, (par exemple par un marqueur) les points horizontaux correspondants se repoussent. Ainsi ils compriment les pistons horizontaux de part et d'autre de l'épingle enfoncée. Le fait que ces pistons horizontaux soient comprimés entraîne une hausse globale du niveau des épingles de part et d'autre de l'épingle enfoncée (Cf. la figure 7.24).

Le EEshco 2D serait constitué de réseaux de points matériels 1D se déplaçant en X, de réseaux se déplaçant en Y, et d'épingles. Chaque épingle est liée à deux masses en Y et deux masses en X qui modélisent l'échange de matière entre la colonne et les colonnes voisines. La version 2D du EEshco n'a pas encore été mise en œuvre.

7.4.3.4. Complément au modèle

Le EEshco tel qu'il est décrit ci-dessus permet effectivement de modéliser la somme des hauteurs. On l'appellera le EEshco *élémentaire*. (cf. figure 7.24.a).

Avec la seule propriété de la conservation du volume, on ne peut pas modéliser un grand nombre d'objets différents. Le EEshco élémentaire a des comportements très particuliers. Notamment, il n'est pas caractérisé par une position d'équilibre pour les colonnes. La seule condition d'équilibre porte sur la somme des hauteurs. Par exemple, si la situation de la figure 7.25.a correspond à une situation d'équilibre, alors il en est de même pour celle de la figure 7.25.b, car dans les deux cas, la somme des hauteurs des épingles du EEshco est identique. On peut passer d'une situation à l'autre tout en restant parfaitement à l'équilibre.

Il en résulte que cette surface ne peut pas être caractérisée par une réponse impulsionnelle. Si à partir de la configuration de la figure 7.25.a on fixait une des épingles à une hauteur différente des autres, il n'y aurait pas de réponse déterminée pour l'objet. En pratique, la forme de l'objet continue à varier tout en gardant une somme de hauteurs constante.

Ceci peut être un comportement intéressant mais très particulier. C'est pourquoi en général, on ajoute d'autres interactions au modèle du EEshco élémentaire. Ces interactions lèvent l'indétermination. Grâce à elles, les positions d'équilibre sont des positions d'équilibre stables et les surfaces modélisées pourront être caractérisées par des réponses impulsionnelles.

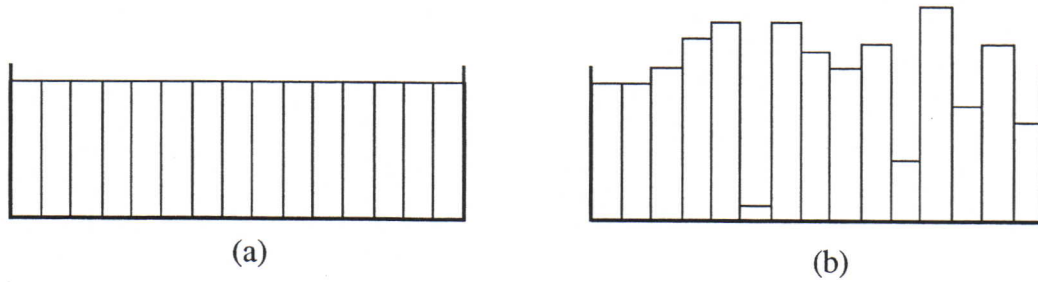


figure 7.25. Deux configurations d'équilibre pour le EEshco élémentaire. L'énergie potentielle des deux configurations est la même et on peut passer de l'une à l'autre tout en restant en équilibre.

Nous proposons six types de EEshco. Quatre sont des modèles de *EEshco simples* (avec l'ajout d'une seule interaction linéaire visco-élastique). Deux autres modèles sont des modèles de *EEshco composé* (en l'occurrence avec deux interactions supplémentaires). On pourra obtenir des modèles plus complexes en combinant ces modèles simples.

1. Le EEshco VS (Vertical-Sol)

Les épingles sont liées au sol par des interactions visco-élastique.

2. Le EEshco VV (Vertical-Voisins)

Les épingles sont liées à leurs épingles voisines

3. Le EEshco HS (Horizontal-Sol)

Les masses horizontales sont liées au sol

4. Le EEshco HV (Horizontal-Voisins)

Les pistons horizontaux sont doublés par des interactions visco-élastiques.

5. Le EEshco HSHV (Horizontal-Sol, Horizontal-Voisins)

C'est une combinaison des EEshco HS et HV

6. Le EEshco HSVV (Horizontal-Sol, Vertical-Voisins)

C'est une combinaison des EEshco HS et VV

Dans les quatre modèles, la position d'équilibre de l'objet global en l'absence du marqueur est la position plane (cf. figure 7.27.a). Mais dans chaque cas, la réponse impulsionnelle et les propriétés globales du EEshco sont différentes. Dans tous les cas une images extraite d'une séquence simulée illustre les propriétés des modèles.

Le EEshco VS.

Ce modèle est constitué du EEshco élémentaire, auquel s'ajoutent des interactions F_{VS} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{VS} , de viscosité z_{VS} et de longueur à vide S_{VS}) entre les épingles et le sol. (Cf. figure 7.26)

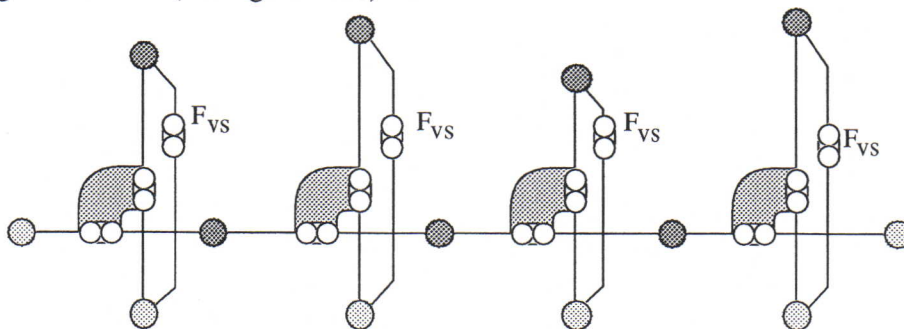


figure 7.26. Le EEshco VS : les épingles sont liées au sol par une interaction ressort

Comme dans les modèles EEshco VV et EEshco HV, (et contrairement au EEshco HS) les points horizontaux qui rendent compte du transport de matière entre colonnes et de sa propagation ne sont pas attachés au sol. Ils sont attachés l'un à l'autre seulement par les pistons horizontaux. Dans ce cas, on peut montrer très simplement, qu'à l'équilibre, les forces générées par tous les pistons horizontaux ont la même valeur absolue. Le module piston applique la même force f_0 sur les épingles et sur les pistons horizontaux. Il s'ensuit que la force appliquée aux épingles a également la même valeur f_0 partout. Cette valeur f_0 caractérise tout le EEshco à l'équilibre et dépend de la position des marqueurs : la force appliquée par un marqueur en un point du EEshco est répartie sur tous les points du EEshco (pistons horizontaux et verticaux). Plus le marqueur s'enfonce et plus cette force f_0 répartie sur le EEshco est grande. Cette répartition uniforme nous permet d'utiliser la métaphore de la *pression* dans un EEshco. On dira que la force f_0 est la force résultant de la pression dans le EEshco.

Dans le cas particulier du EEshco VS, en l'absence de tout marqueur, les épingles subissent d'une part la force du piston et d'autre part celle de l'interaction F_{VS} . Les pistons verticaux exercent sur les épingles la force f_0 résultant de la pression dans le EEshco. Ces masses sont en équilibre donc la force générée par F_{VS} est aussi égale à f_0 . Comme F_{VS} est une interaction visco-élastique, ceci implique qu'en l'absence de marqueur la configuration d'équilibre du EEshco est plane. Ce niveau de repos est représenté sur les figures 7.27 par une ligne pointillée.

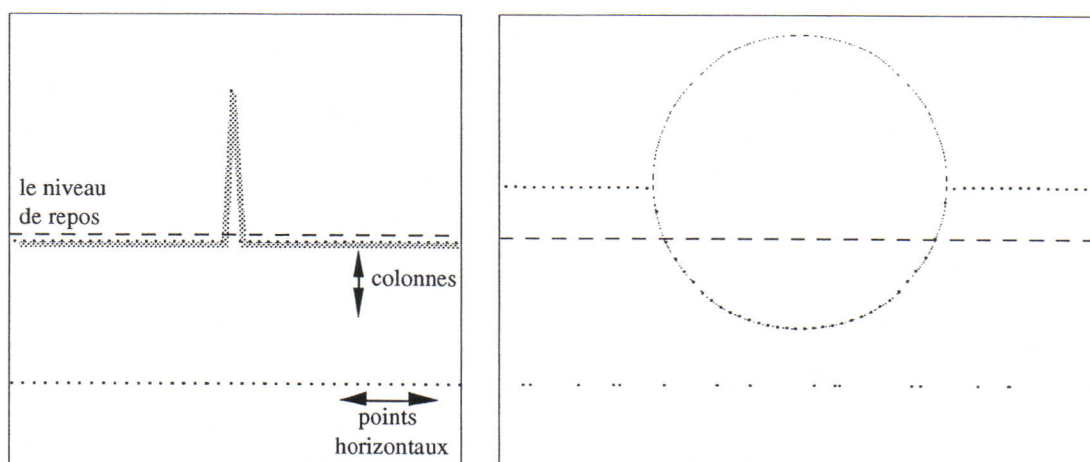


figure 7.27. La simulation du EEshco VS. Les points matériels sont représentés par des points noirs. Ils forment une ligne en bas de la figure (les points matériels horizontaux toujours disposés en ligne) et une courbe en haut de la figure (les épingles) (a) La réponse impulsionnelle du EEshco VS. Les épingles ont été reliés par des segments de droite (b) Le profil du EEshco en interaction avec un point marqueur mobile en interaction de butée élastique avec les épingles.

Ceci prouve également, que même en présence d'un marqueur, toutes les épingles qui ne sont pas en interaction avec le marqueur sont au même niveau. Dans la simulation de la figure 7.27.a. l'application d'une impulsion de force (force constante dans le temps, appliquée à une seule épingle) baisse le niveau général du EEshco (pour conserver la somme des hauteurs) mais toutes les épingles qui n'ont pas subi cette force sont au même niveau.

La simulation de la figure 7.27.b montre un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles. On vérifie encore que les épingles qui ne sont pas en interaction avec le marqueur restent au même niveau. Ceci modélise la conservation du volume telle qu'elle peut être observée dans le comportement d'un objet liquide peu compressible.

NB. F_{VS} ne perturbe pas la conservation du volume si la raideur k_{VS} est faible par rapport à la raideur du module piston double.

Le EEshco VV

Ce modèle est constitué du EEshco élémentaire auquel s'ajoutent des interactions F_{VV} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{VV} , de viscosité z_{VV} et de longueur à vide nulle) entre les épingles et leurs voisines. Grâce à cette interaction, les épingles s'attirent et ont tendance à se mettre sur un même niveau (Cf. figure 7.28)

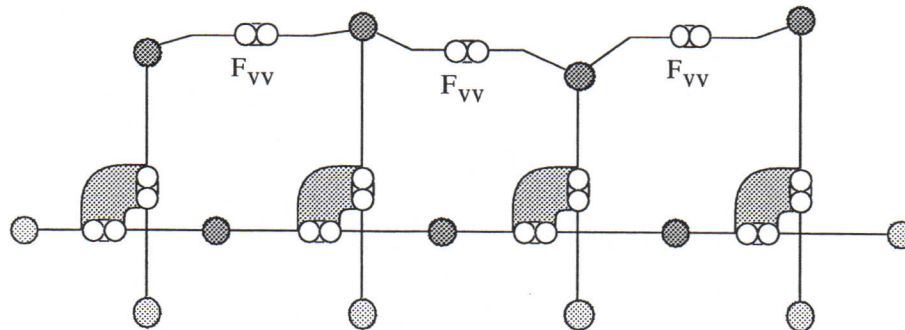


figure 7.28. Le EEshco VV : les colonnes sont liées entre voisines par une interaction ressort

Comme dans le cas du EEshco VS, les masses horizontales sont attachées seulement par les pistons. On pourra donc encore parler de force f_0 "de pression" répartie uniformément dans tout le EEshco. Quand toutes les masses 1D d'une chaîne à déformation transversale subissent la même force, le profil d'équilibre qui en résulte est constitué de paraboles.

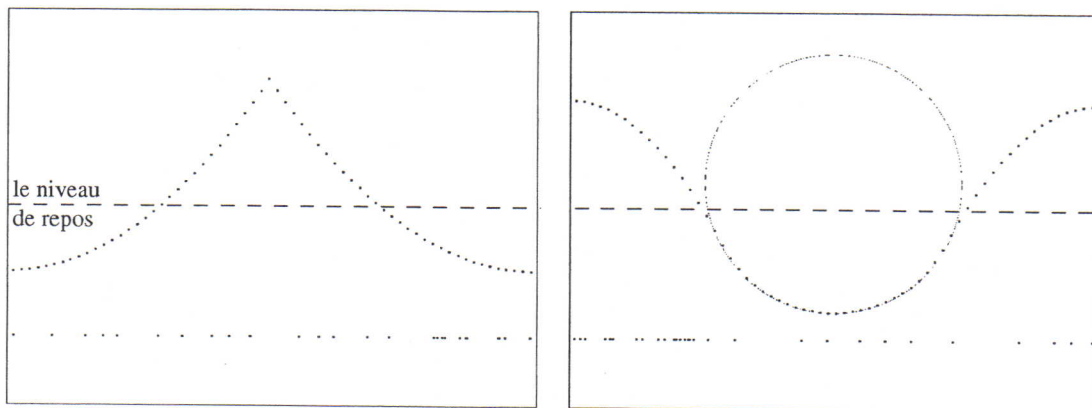


figure 7.29. La simulation du modèle VV. Les différents éléments ont la même signification qu'à la figure précédente. (a) La réponse impulsionnelle du EEshco VV (b) Le profil du EEshco en interaction avec un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles.

En l'absence de marqueur, la courbure de ces paraboles est nulle et la surface du EEshco reste plane. De même que précédemment, ce niveau est représenté sur la figure 7.29 par une ligne pointillée. L'application d'une impulsion de force (cf. figure 7.29.a) résulte en une surface composée de deux paraboles. Les épingles proches du point d'application de l'impulsion sont au dessus du niveau de repos alors que les points plus éloignés sont en dessous de ce niveau. La somme de la hauteur de toutes les épingles reste constante. Un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles produit un résultat similaire (figure 7.29.b)

On peut interpréter ce comportement comme celui d'une membrane tendue sur la surface d'un liquide peu compressible

NB. Contrairement au modèle VS, la conservation du volume à l'équilibre est rigoureusement respectée quelques soient les paramètres de F_{VV} .

Le modèle HS

Ce modèle est constitué d'un EEshco élémentaire auquel s'ajoutent des interactions F_{hs} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{hs} , de viscosité z_{hs} et de longueur à vide nulle) liant les masses horizontales au sol. (Cf. figure 7.30)

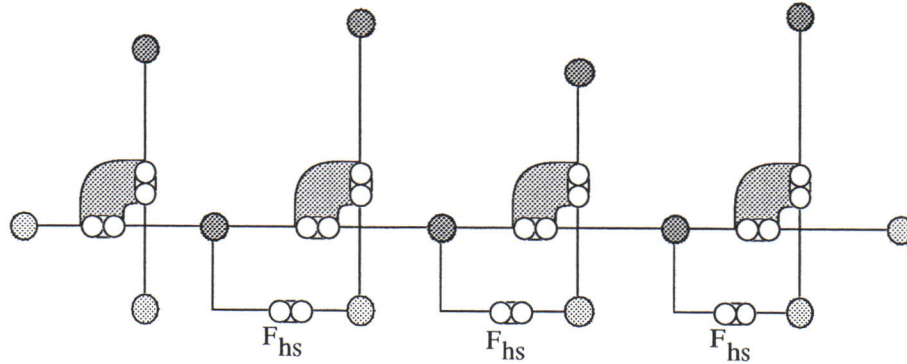


figure 7.30. Le EEshco HS : les masses horizontales sont liées au sol par une interaction ressort

Contrairement aux EEshco VS, VV, cette interaction n'a aucune influence directe sur la hauteur des épingles. Contrairement aux EEshco VS, VV et HV, les masses horizontales sont liées, non seulement par les pistons horizontaux, mais également par des interactions qui lient ces masses au sol. Donc on ne peut plus dire que la force générée par tous les pistons horizontaux et verticaux sont égales sur tout le EEshco. Ce modèle ne peut pas être caractérisé par une "pression" uniforme sur toute la surface. Il en résulte que les forces exercées par les marqueurs ne se répartissent pas sur toute la surface. En pratique elles concernent les épingles se trouvant au voisinage immédiat du point d'application de la force. Ces forces ne se propagent plus loin que dans le cas où les épingles voisins ne sont pas en mesure de garantir la conservation du volume.

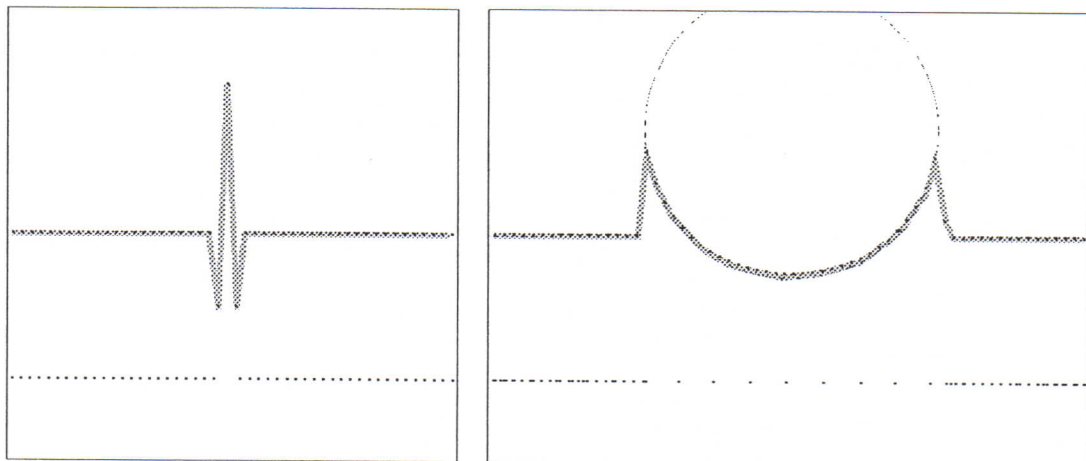


figure 7.31 La simulation du EEshco HS. Par souci de clarté, les épingles ont été reliées par des segments de droite. (a) La réponse impulsionnelle du EEshco HS. (b) Le profil du EEshco en interaction avec un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles.

La position d'équilibre est celle où les interactions F_{hs} sont au repos. La position résultante pour les épingles est donnée par la conservation du volume pour chaque colonne. Lorsque le point d'attache des points horizontaux sont espacés régulièrement, alors la configuration d'équilibre du EEshco est plane.

Dans la simulation de la figure 7.31.a, le EEshco est soumis à une impulsion de force. Seuls se sont déplacés le point subissant l'impulsion et ses deux voisins. La réponse impulsionnelle obtenue est à comparer aux noyaux de filtres passe-haut de la figure 7.17. La portée de ce noyau est d'une seule épingle. Nous verrons plus loin comment on peut contrôler cette portée.

Le comportement global de cette surface correspond effectivement à un filtrage passe-haut. Dans la simulation de la figure 7.31.b, un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles déforme le EEshco. La trace laissée par ce marqueur est la plus proéminente aux contours du marqueur. Le comportement ainsi modélisé s'éloigne sensiblement du comportement d'un objet liquide incompressible.

NB. Il est à noter qu'en l'absence de marqueur, la conservation de volume à l'équilibre sera rigoureusement vérifiée. Par contre, pour une interaction F_{hs} très forte (par rapport au module piston double) la conservation du volume pendant les déformations pourra ne pas être vérifiée.

Ce modèle a le comportement d'un objet où le transport de la matière se fait localement et ne se répartit pas dans tout l'objet.

Le modèle HV

Ce modèle est constitué d'un EEshco élémentaire auquel s'ajoutent des interactions F_{hv} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{hv} , de viscosité z_{hv} et de longueur à vide S_{hv}) liant les pistons horizontaux. (Cf. figure 7.32).

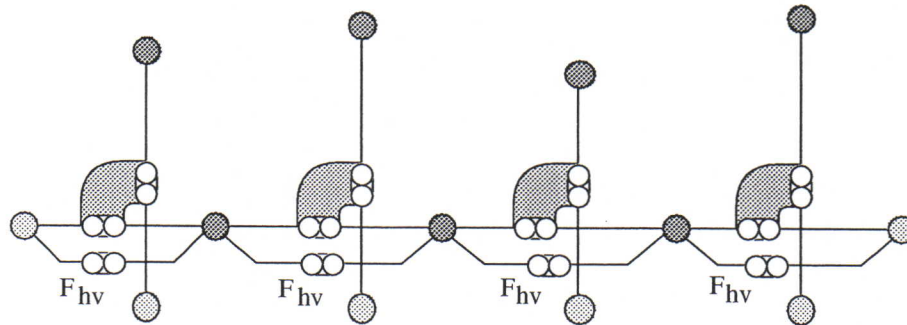


figure 7.32. Le EEshco HV : les pistons horizontaux sont liés par des interactions ressort

Dans ce modèle, comme dans les modèles VS et VV, les points horizontaux ne sont pas attachés au sol. Il en résulte que les forces appliquées à toutes les masses horizontales (dues aux pistons horizontaux et à F_{hv}) a le même module.

Étudions le comportement d'une portion de EEshco qui n'est pas en interaction avec un marqueur. Contrairement aux EEshco VS et VV, les épingles ne sont attachées ni au sol ni à leurs voisins. Donc la force appliquée au piston vertical est nulle. Donc il en est de même pour le piston horizontal. Donc la force appliquée aux points horizontaux provient de la seule interaction F_{hv} . Les points horizontaux forment une chaîne de masses 1D aux déformations longitudinales. Si les bords de cette chaîne n'étaient pas attachés alors la longueur d'équilibre des pistons horizontaux aurait été la longueur S_{hv} . Si les bords sont fixes, si la distance entre les bords est de L et si le nombre d'épingles est de N alors la longueur des pistons horizontaux à l'équilibre est de L/N . Dans tous les cas, pour tous les points du EEshco qui n'interagissent pas avec un marqueur, la longueur d'équilibre des pistons horizontaux est la même. Donc en dehors de toute interaction avec un marqueur la hauteur des épingles sera à une hauteur de repos représentée sur la figure 7.33 par une ligne pointillée.

L'interaction F_{hv} influence la propagation du transport de matière entre les colonnes. Grâce à cette interaction le flux d'une colonne C_n à une autre colonne C_{n+1} est lié au flux allant de C_{n+1} à C_{n+2} et au flux allant de C_{n-1} à C_n .

Il est à noter que, même en l'absence de F_{hv} , ces flux sont tout de même liés par l'intermédiaire du piston vertical : lorsque les épingles sont bloquées, alors le module piston agit comme un ressort de raideur k_{pist} (la raideur du module piston double) entre les points horizontaux adjacents. On obtient un comportement semblable lorsque les épingles sont très inertes ou attachées au sol par une interaction (cf. EEshco VS) D'ailleurs sur la figure 7.33 on pourra remarquer la ressemblance frappante entre le comportement à l'équilibre du EEshco HV et du EEshco VS (cf. figure 7.27).

En pratique, l'introduction de l'interaction F_{hv} permet de renforcer le couplage entre les pistons horizontaux, notamment lorsque l'épingle est libre et peu inerte.

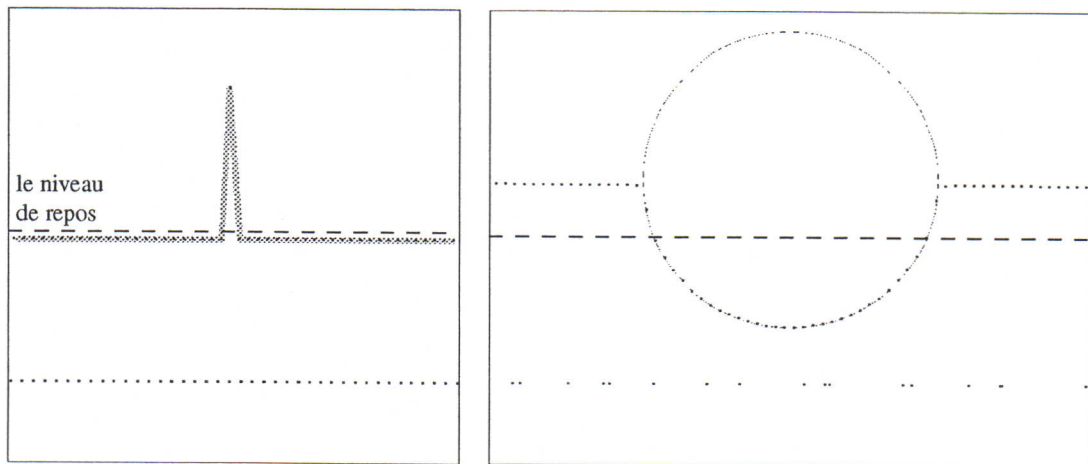


figure 7.33. La simulation du EEshco HV (a) La réponse impulsionnelle du EEshco HV (b) Le profil du EEshco en interaction avec un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingles.

NB. De même que pour le modèle HS, la conservation du volume est toujours vérifiée en l'absence de marqueur. Mais en présence de marqueur et pour de fortes valeurs de k_{vs} et z_{vs} la conservation de volume pourra être affectée.

Conclusion sur les EEshco simples

Nous avons étudié quatre modèles simples de EEshco présentant différents types de comportements respectant la conservation du volume. Cependant, le seul comportement proche du filtrage passe-haut est celui du EEshco HS. La réponse impulsionnelle de ce modèle est celui d'un filtre passe-haut pour l'image. Donc même dans les modèles de EEshco plus complexes, les masses horizontales seront toujours attachées au sol par une interaction F_{hs} .

Cependant, la réponse impulsionnelle du EEshco HS ne peut pas être contrôlé. C'est pourquoi, en pratique, on ajoute au EEshco HS d'autres interactions. Dans les paragraphes suivants nous avons étudié les modèles HSHV (HSVS) et HSVV qui sont des combinaisons du modèle HS et des autres modèles.

Le EEshco HSHV

Il s'agit du EEshco HS (cf. figure 7.31) auquel s'ajoutent des interactions F_{hv} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{hv} , de viscosité z_{hv} et de longueur à vide S_{hv}) liant les pistons horizontaux. (Cf. figure 7.34)

L'interaction F_{hs} restreint la propagation aux voisinage du marqueur, alors que F_{hv} favorise cette propagation. Le résultat de cette combinaison est une réponse impulsionnelle différente de celle du EEshco HS (Cf. figure 7.35.a) Il s'agit toujours d'une réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut. La partie positive de la réponse impulsionnelle est très fine : une épingle, mais les parties négatives sont plus large que dans le cas du EEshco HS.

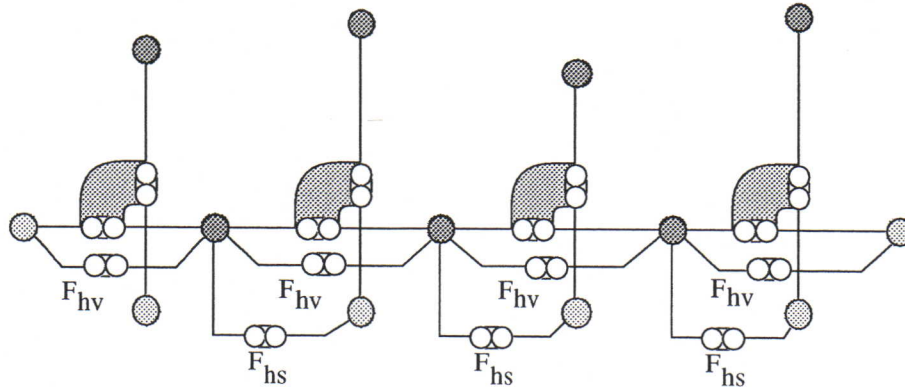


figure 7.34. Le EEshco HSHV : les masses horizontales sont liées au sol et à leurs voisins par des interactions ressort respectivement F_{hs} et F_{hv} .

Cela signifie d'une part, qu'il n'y a pas de filtrage passe-bas, et que le filtrage passe-haut s'effectue sur un domaine plus large que dans le cas du EEshco HS. Plus la raideur de F_{hv} est forte et plus ce domaine est large.

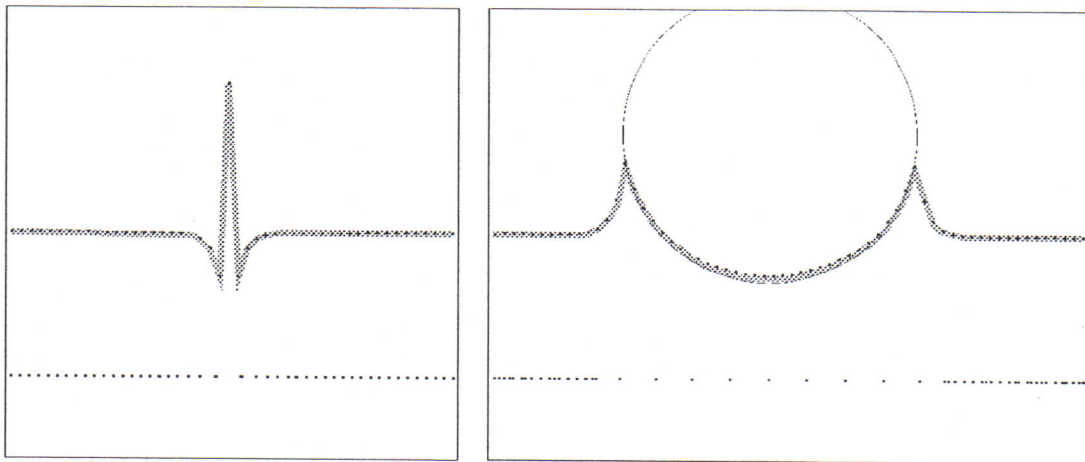


figure 7.35 La simulation du EEshco HSHV. (a) La réponse impulsionnelle du EEshco. (b) Le marquage du EEshco par un point marqueur en interaction de butée élastique avec les épingle. Les masses horizontales sont liées au sol et à leurs voisins par les interactions F_{hs} et F_{hv} viscoélastiques linéaires.

Le comportement du EEshco HSHV est très similaire à celui du EEshco HSHV.

Le EEshco HSVV

Il s'agit du EEshco HS (cf. figure 7.31) auquel s'ajoutent des interactions F_{vv} viscoélastiques linéaires (de raideur k_{vv} , de viscosité z_{vv} et de longueur à vide S_{vv}) liant les pistons horizontaux. (Cf. figure 7.36)

L'interaction F_{hs} effectue un filtrage passe-haut, mais le fait de lier les épingle entre elles par des ressorts, donne des propriétés passe-bas au modèle en ayant tendance à lisser la surface. (Cf. sous-chapitre § 7.3)

Le modèle résultant, le EEshco HSVV a une réponse impulsionnelle de filtre passe-haut, mais aussi de filtre passe-bas. (Cf. figure 7.37). Plus précisément, la zone positive et la zone négative de la réponse impulsionnelle couvrent une étendue S_H . Les composantes continues de cette taille sont éliminées. C'est la portée du filtrage passe-haut. La zone positive de la réponse impulsionnelle couvre une étendue S_B . Les détails dont la taille est plus petite que cette étendue seront éliminés par filtrage passe-bas.

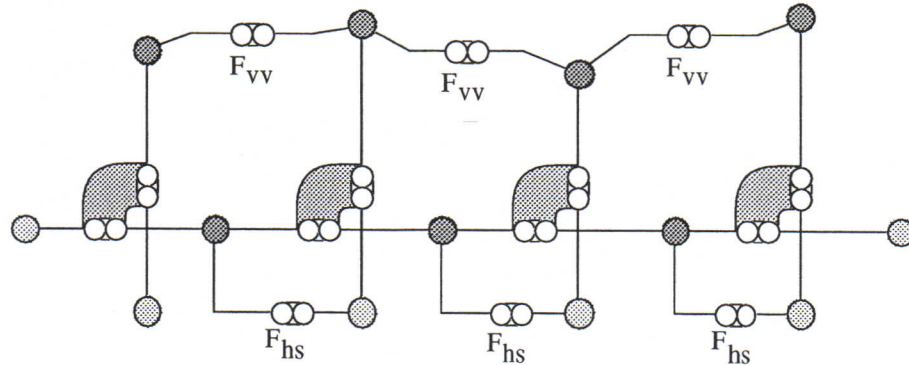


figure 7.36. Le EEshco HSVV : les masses horizontales sont liées au sol et les épingles à leurs voisines par des interactions ressort respectivement F_{hs} et F_{vv} .

Schématiquement, le EEshco HSVV effectue un filtrage passe-haut pour les marqueurs de grande taille et ensuite lisse la surface obtenue. La comparaison entre les figures 7.37.b et 7.31.b illustre ce résultat. Le cratère obtenu par le marqueur sur le EEshco HSVV (figure 7.37.b) peut être obtenu par le cratère obtenu par le marqueur sur le EEshco HS (figure 7.37.b) par un lissage fin de la surface.

Comme on a pu le voir dans § 7.3 la force et la portée du filtrage passe-bas dépendent directement de la valeur de k_{vv} .

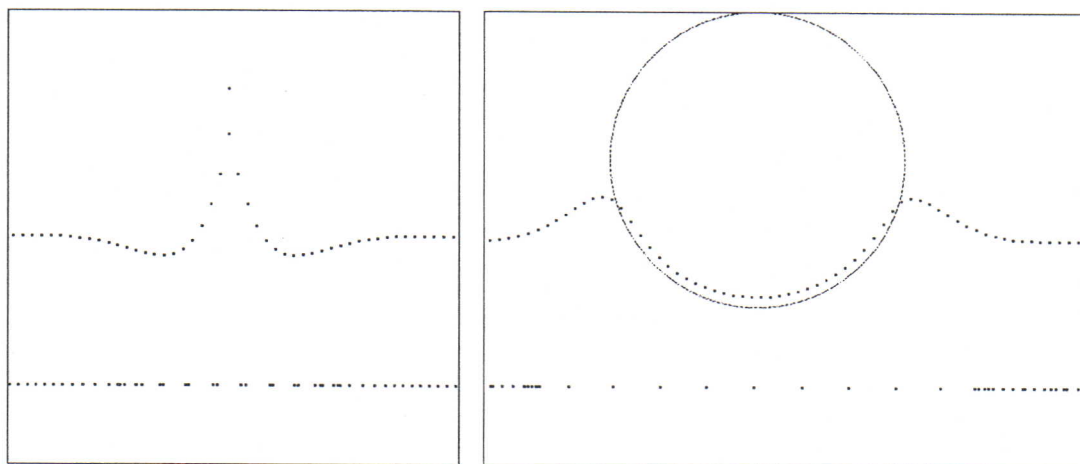


figure 7.37 La simulation du EEshco HSVV. (a) La réponse impulsionnelle du EEshco. (b) Le marquage du EEshco par un point marqueur en interaction de butée élastique avec les colonnes. Les masses horizontales sont liées au sol et à leurs voisines par les interactions F_{sh} et F_{vh} viscoélastiques linéaires.

Parmi les six modèles que nous avons présentés ci-dessus, trois modèles (HS, HSHV et HSVV) permettent d'effectuer physiquement un filtrage passe-haut. Dans chaque cas, la réponse impulsionnelle du EEshco a des parties positives et négatives de largeur différente. Il en résulte un filtrage différent. Dans HS, la réponse impulsionnelle a une partie positive de largeur une colonne et des parties négatives de même largeur. En combinant HS avec HV, (le modèle HSHV) on peut contrôler la largeur des parties

négligables en réglant la raideur des interactions F_{HV} . En combinant HS avec VV, (le modèle HSVV) on peut contrôler la largeur du noyau entier (parties positives et négatives) en réglant la raideur des interactions F_{VV} . Pour contrôler l'ensemble de la réponse impulsionnelle, on pourra être amené à combiner les trois interactions (un modèle HS-VV-HV) dans lequel chaque paramètre règle une partie de la réponse impulsionnelle. Le contrôle de la réponse impulsionnelle nous permet de contrôler le filtrage.

L'extension de ce modèle aux cas 2D et 3D est un travail en cours. Nous avons certes proposé un modèle, sans pour autant l'avoir expérimenté, ni avoir démontré ses propriétés de conservation de volume.

7.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons utilisé la théorie de la réponse impulsionnelle pour étudier le comportement de l'écran d'épingles à l'équilibre (§ 7.2) sous l'effet d'un profil de force i.e. sous l'effet de l'action d'un objet marqueur. Nous avons déterminé les réponses impulsionnelles de l'écran d'épingles dans plusieurs cas (1D, 2D, 3D, EEshcos HS, HV, etc) Nous pouvons à présent contrôler la forme de la réponse impulsionnelle dans tous ces cas.

Lorsque la réponse impulsionnelle est elle-même proche d'une impulsion de position, alors la contribution de l'écran d'épingles à la forme générée est très faible. La forme résultant de l'interaction entre l'écran d'épingles et les marqueurs est essentiellement due aux propriétés des marqueurs. Par contre lorsque cette réponse impulsionnelle est très différente d'une impulsion alors la contribution de l'écran d'épingles est relativement grande.

Lorsque les épingles sont liées par des interactions visco-élastiques linéaires (§ 7.3) la réponse impulsionnelle est du type exponentielle, $1/r^2$ etc. La convolution par ces noyaux revient à un lissage ou à un filtrage passe-bas. Ces types d'écran permettent de constituer une forme globale à partir des formes d'un ensemble de points en gommant les frontières individuelles de chaque forme.

Par contre lorsque les épingles sont liés par des pistons (§ 7.4) et plus précisément dans le cas du EEshco HS la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles est donnée par la figure 7.31.a et la convolution par ce noyau revient à accentuer les singularités et notamment à accentuer les contours.

Enfin des modèles plus complexes comme les EEshco HSHV et HSVV permettent de contrôler de manière indépendante le lissage et l'accentuation des contours (i.e. le filtrage passe-haut ou le filtrage passe-bas. Ainsi nous avons montré que l'écran d'épingles satisfait la spécification énoncée dans § 6.2.2 (La continuité des formes et l'accentuation des contours)

L'ensemble du chapitre § 7 était consacré au comportement de l'écran d'épingles à l'équilibre. Or les comportements les plus intéressants de l'écran d'épingles sont observés dans un régime dynamique et loin de l'état d'équilibre. C'est pourquoi nous allons nous consacrer à l'étude dynamique de l'écran d'épingles. Il s'agira également de vérifier si l'écran d'épingles satisfait la spécification énoncée au § 6.3 et ayant trait au raffinement dynamique.

CHAPITRE 8

LE CONTRÔLE DES DÉFORMATIONS DYNAMIQUES

Au chapitre précédent nous avons vu que la forme générée par l'écran d'épingles dépend non seulement des propriétés du marqueur mais également des propriétés de l'écran d'épingles et que la contribution de l'écran d'épingles pouvait être plus ou moins grande selon les propriétés physiques de celui-ci. Il en va de même pour le mouvement. Les mouvements de la forme générée sont constitués d'une part des mouvements du marqueur et d'autre part de mouvements générés par l'écran d'épingles seul. En effet l'écran d'épingles possède sa propre constante de temps et ajoute des degrés de liberté supplémentaires à ceux du marqueur. Cela permet la génération de contours très déformables, implicitement définies dans leur forme et leurs déformations.

Dans ce chapitre nous verrons que la contribution dynamique de l'écran d'épingles peut être quantitativement et qualitativement contrôlée. Quantitativement on peut rendre cette contribution très faible voire nulle. L'écran d'épingles 2D peut avoir la même dynamique qu'un Zbuffer. On peut également rendre cette contribution prépondérante par rapport à celle des marqueurs. Pour le contrôle qualitatif nous étudions le comportement dynamique de l'écran d'épingles grâce à l'analyse modale et nous proposons une représentation des paramètres physiques de l'écran d'épingles, permettant de caractériser et de contrôler ce comportement et d'obtenir tantôt des comportements liquides plus ou moins pâteux, tantôt des comportements locaux de matériaux granulaires plus ou moins fins, des phénomènes de diffusion, de propagation, d'oscillation etc.

A la fin de ce chapitre nous présenterons un ensemble de formes produites par l'écran d'épingles et représentant des objets très déformables. On pourra trouver d'autres formes encore dans l'annexe B.

8.1. LES GRANDEURS EN JEU

On considérera que l'écran d'épingles est fini et contient n épingles en 1D, $n \times m$ épingles en 2D et $n \times m \times p$ épingles en 3D. La simulation dynamique d'un écran d'épingles met en jeu deux variables dynamiques duales. Il s'agit de F et de Ω , les profils de force et de position. Dans le cas général, ils seront appelés plus volontiers respectivement *champ de force* et *champ de déformation*. Dans la suite ces champs discrets, seront des matrices colonne. (Aussi bien en 1D qu'en 2D et 3D). Chaque ligne de ces colonnes représente respectivement la force et la position d'une épingle. (8.1) représente ces deux matrices dans le cas 2D.

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_{nm}(t) \end{pmatrix} \quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_{nm}(t) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Les deux champs sont liés par la relation fondamentale de la dynamique et par les différentes fonctions d'interactions exprimées ici par des relations matricielles.

$$\text{R.F.D.} \quad M \ddot{\Omega}(t) = F(t) \quad (8.2)$$

où M est la matrice des inerties. Pour un écran homogène où toutes les épingles ont la masse m , on a $M = m \cdot \text{Id}$ (Id étant la matrice identité)

Les épingles sont soumises à un champ de force F avec trois composantes : F_s (du au sol) F_v due aux épingles voisines et F_{Mi} due aux marqueurs. F_s et à F_v sont exprimées par des relations matricielles (8.3) et (8.4)

$$F_s(t) = k_s \Omega(t) + z_s \dot{\Omega}(t) \quad (8.3)$$

$$F_v(t) = A \left(k_v \Omega(t) + z_v \dot{\Omega}(t) \right) \quad (8.4)$$

A est une matrice dont l'expression est différente selon que l'écran d'épingles est 1D, 2D ou 3D (cf. respectivement (8.5), (8.6) et (8.7)).

$A =$ (8.5)

$A =$ (8.6)

$A =$ (8.7)

Cette différence étant mise à part, le raisonnement se fait de la même manière dans les 3 cas. K et Z seront respectivement les matrices raideur et viscosité exprimant les interactions élastiques et visqueuses entre différentes parties de l'écran.

$$K = k_s \cdot \text{Id} + k_v \cdot A \quad Z = z_s \cdot \text{Id} + z_v \cdot A \quad (8.8)$$

Dans tous les cas (1D, 2D et 3D) la RFD s'exprime par une seule équation matricielle.

$$M \ddot{\Omega}(t) + Z \dot{\Omega}(t) + K \Omega(t) = \vec{F}_{Mi}(t) \quad (8.9)$$

Le comportement libre, c'est à dire en l'absence de toute excitation extérieure ($F_{Mi} = 0$) est donné par :

$$M \ddot{\Omega}(t) + Z \dot{\Omega}(t) + K \Omega(t) = 0 \quad (8.10)$$

8.2. ANALYSE MODALE

8.2.1. LE CALCUL DES MODES

Dans les trois cas, la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Autrement dit, il existe une base dans laquelle l'équation matricielle (8.10) devient un ensemble de N équations différentielles indépendantes linéaires du second ordre à coefficients constants. On dit que le mouvement de l'écran d'épingle (1D, 2D ou 3D) peut être considéré comme la somme de N modes. Le comportement de chaque mode est décrit par une seule équation différentielle, scalaire, linéaire du second ordre.

Soit D la matrice diagonale associée à A et soient (λ_i) les valeurs propres de A. P la matrice de passage de l'espace physique à l'espace des modes où A est diagonale. P est composé de N vecteurs propres, qui, on le verra décrivent les *déformées modales*, ou la forme de l'écran correspondant à la vibration de chaque mode.

$$PY = X \quad A = PDP^{-1} \quad (8.11)$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

Dans le cas 1D, 2D et 3D respectivement la matrice D sera caractérisée par les valeurs propres :

$$\lambda_j = 2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{j \cdot \pi}{n+1}\right) \quad \lambda_j \in [0,4] \quad (8.13)$$

$$\lambda_{ij} = 4 - 2 \cdot \cos\left(\frac{i \cdot \pi}{n+1}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{j \cdot \pi}{m+1}\right) \quad \lambda_{ij} \in [0,8] \quad (8.14)$$

$$\lambda_{ijk} = 6 - 2 \cdot \cos\left(\frac{i \cdot \pi}{n+1}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{j \cdot \pi}{m+1}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p+1}\right) \quad \lambda_{ijk} \in [0,16] \quad (8.15)$$

Dans l'espace des modes, l'équation homogène (8.10) devient alors une équation où toutes les matrices sont diagonales.

$$m \cdot \text{Id} \cdot \ddot{Y}(t) + (z_s \cdot \text{Id} + z_v \cdot D) \dot{Y}(t) + (k_s \cdot \text{Id} + k_v \cdot D) Y(t) = 0 \quad (8.16)$$

Ainsi, l'équation matricielle devient un ensemble de N équations différentielles ($j \in [1, N]$)

$$m \cdot \ddot{y}_j + (\lambda_j \cdot z_v + z_s) \cdot \dot{y}_j + (\lambda_j \cdot k_v + k_s) \cdot y_j = 0 \quad (8.17)$$

Le comportement dynamique de l'écran d'épingles peut être décrit par n équations différentielles linéaires du second ordre indépendantes. On peut les interpréter chacune comme le mouvement d'une masse de valeur m attachées à un point fixe par des ressorts de raideur $k_j = \lambda_j \cdot k_v + k_s$ et de viscosité $z_j = \lambda_j \cdot z_v + z_s$. Nous verrons au paragraphe suivant à quelles grandeurs de l'espace physique correspondent les k_j , z_j et $y_j(t)$.

8.2.2. LES DÉFORMÉES MODALES

Dans toute la suite de cette section, je prendrai une seule représentation pour les écrans 1D, 2D et 3D : il s'agit d'un objet de N masses caractérisé par une matrice A avec des valeurs propres λ_j ($j \in [1, N]$). Certes, N sera égal à n , $n \times m$, ou $n \times m \times p$ selon les cas et A aura aussi une structure différente. Mais tant qu'il sera question seulement de A et de N sans qu'intervienne l'instanciation de ces variables, on pourra mener un raisonnement commun au 1D, 2D et 3D.

Appelons P_j la matrice colonne correspondant à la j -ième colonne de P . Elle représente un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ_j . Dans ce cas, on a :

$$X(t) = \sum_{j=1}^N P_j y_j(t) = \sum_{j=1}^N X_j(t) \quad (8.18)$$

Cela signifie que le profil et le mouvement de l'écran à chaque instant est la somme de N profils en mouvement $X_j(t)$ (Cf figure 8.1 pour le cas 1D). Chacun représente un mode de déformation de l'écran. Pour chaque mode, on peut mathématiquement décorréler la forme et le mouvement : la forme spatiale du mode est définie par la matrice colonne P_j (constante dans le temps) alors que son mouvement est défini par la variable scalaire dynamique $y_j(t)$ introduit au paragraphe précédent et qui est indépendante de l'espace.

Cela signifie que le profil du mode j sera toujours le profil donné par P_j moyennant une affinité de coefficient $y_j(t)$. Pour chaque mode donc, toutes les masses se déplacent en phase ou en opposition de phase.

L'intérêt de ce type de représentation n'est pas à démontrer dans les domaines de l'acoustique. Dans les fréquences basses et surtout pour des comportements non-vibratoires, cette analyse est plus inhabituelle.

L'analyse modale permet de distinguer, d'une part les déformations globales de l'écran et les déformations sur de grandes superficies (le mode fondamental et les premières harmoniques) et d'autre part les détails de l'image, c'est à dire des déformations sur de très petites échelles (les modes d'ordre élevés). Selon que les modes d'ordre élevé sont oscillants, amortis ou critiques, l'écran aura une apparence lisse, ou très rugueuse. Selon le comportement des modes d'ordre bas le niveau de l'écran sera constant ou fluctuera en fonction des excitations.

Or le comportement temporelle d'un mode est le même que celui d'une cellule numérique (8.17). Donc pour comprendre celui des modes, étudions brièvement celui de la cellule.

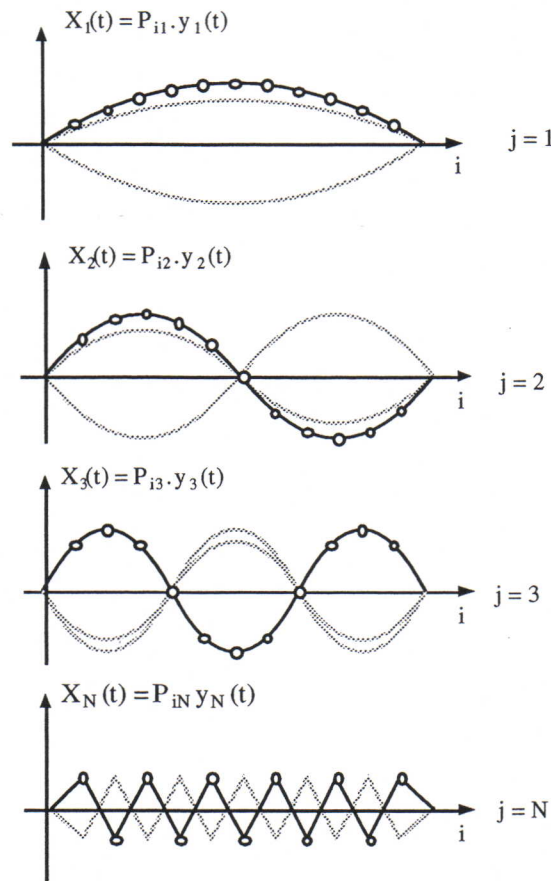


figure 8.1. Chaque courbe représente un mode de l'écran 1D. La forme de base du mode j est donnée par la suite $(P_{ij})_{i < N}$ (la courbe noire) D'autres positions au cours du temps sont représentées par les courbes grises.

8.3. LE FONCTIONNEMENT D'UNE CELLULE NUMÉRIQUE

Les conditions de stabilité d'une corde ou d'une membrane ne sont pas immédiates à déterminer directement. Cependant, avec l'approche modale, si les modes peuvent avoir des formes assez complexes, les mouvements, eux, sont décrits par des équations linéaires du second ordre. Ce sont donc les mouvements d'une cellule numérique (une masse m attachée à un point fixe avec ressort de raideur k et de viscosité z et simulée avec un pas de temps de T_e)

Or le comportement d'une cellule est facile à connaître ([CLF 93], [Incerti 96]). Dans la suite, nous essayerons, à travers les domaines de fonctionnement de la cellule de déduire les domaines de fonctionnement des cordes, membranes et volumes.

8.3.1. LES ZONES DE FONCTIONNEMENT D'UNE CELLULE

La figure 8.2 montre les zones de fonctionnement d'une cellule numérique en fonction des paramètres K et Z (raideur et viscosité algorithmiques).

Une cellule numérique est caractérisée par sa masse m , sa raideur k , sa viscosité z , et par la fréquence $F_e = 1/T_e$ à laquelle elle est simulée. En réalité, le comportement libre d'un tel oscillateur ne dépend que de deux paramètres donc dans ce cas, (m, k, z, T_e) ne sont

pas des paramètres indépendants. Ceci signifie qu'il est possible que deux cellules avec deux ensembles de paramètres différents aient le même comportement libre.

En fait, nous utilisons le schéma de discrétisation accélération centrée-vitesse retardée (AC-VR en abrégé) qui implique les deux relations suivantes pour la vitesse et l'accélération :

$$V(nT_e) = \frac{X(nT_e) - X((n-1)T_e)}{T_e} \quad (8.19)$$

$$\Gamma(nT_e) = \frac{X((n+1)T_e) - 2.X(nT_e) + X((n-1)T_e)}{T_e^2} \quad (8.20)$$

Avec le schéma (AC-VR) le comportement libre de la cellule est entièrement déterminée par la relation de récurrence suivante :

$$X((n+1)T_e) = \left(2 - \frac{z T_e}{m} - \frac{k T_e^2}{m}\right) X(nT_e) + \left(\frac{z T_e}{m} - 1\right) X((n-1)T_e) \quad (8.21)$$

On montre que les paramètres pertinents pour ce comportement, sont les raideurs et viscosité algorithmiques K et Z :

$$K = \frac{k T_e^2}{m} \quad Z = \frac{z T_e}{m} \quad (8.22)$$

Ce sont des grandeurs sans dimension et qui tiennent compte des quatre paramètres. Deux cellules caractérisées par le même couple (K,Z) ont nécessairement le même comportement libre. Donc pour caractériser son comportement libre, on représente un oscillateur par un point représentatif P(K,Z) dans l'espace des paramètres de la figure 8.2.

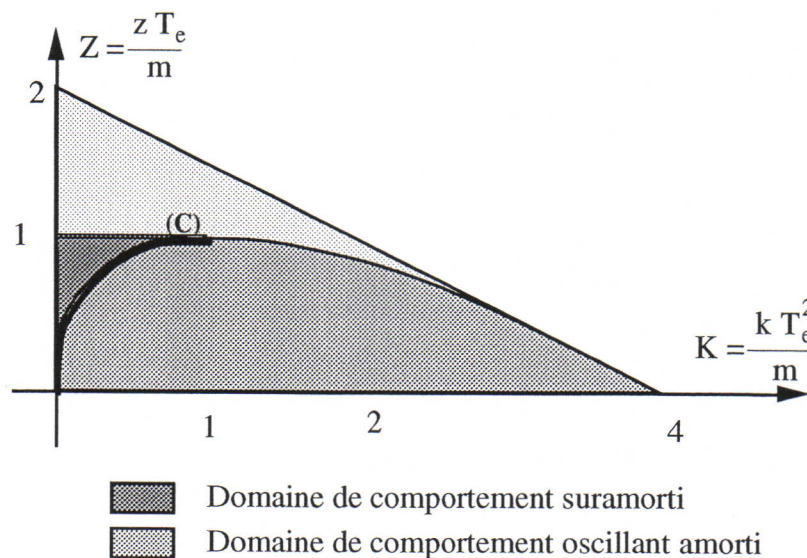


figure 8.2. Le domaine de la stabilité de la cellule est tout le triangle ci-dessus. Les régimes dynamiques (oscillant et amorti) sont également représentés pour le schéma de discrétisation AC-VR

8.3.2. STABILITÉ

Dans la suite, on dira qu'une cellule est stable, quand la suite des positions $X(nT_e)$ reste à l'intérieur d'un intervalle fixe. On dira qu'elle est instable quand, quelque soit l'intervalle fixé au départ, la position de l'oscillateur sort de cet intervalle après un temps suffisamment long.

Dans le schéma de discrétisation AC-VR, les zones de stabilité dans le plan (K,Z) et les régimes (oscillatoire ou suramortis) sont illustrés par la figure 8.2.

Une cellule dont le point représentatif $P(K,Z)$ est à l'intérieur du triangle grisé, a une position qui reste bornée dans le temps (elle est stable) alors que celles dont le point représentatif est à l'extérieur du triangle sont instables.

A l'intérieur de ce triangle de stabilité, on peut distinguer deux zones, l'une hachurée et l'autre non. Pour une cellule numérique située à l'intérieur de la zone hachurée, on peut trouver une cellule continue (i.e. à temps continu) avec les mêmes comportements. Une cellule qui se situe en dehors de cette zone, a des comportements qu'aucun oscillateur continu ne peut avoir et notamment des oscillations de fréquence $F_e/2$.

8.3.3. DESCRIPTION DES COMPORTEMENTS STABLES

Dorénavant nous nous intéresserons essentiellement à cette zone hachurée. A son tour cette zone peut être divisée en deux parties : Une partie hachurée verticalement et une partie hachurée horizontalement. La première correspond aux régimes sur-amortis :

$$X(nT_e) = \lambda.r_1^n + \mu.r_2^n \quad (8.23)$$

où r_1 et r_2 sont des nombres réels positifs inférieurs à 1 dépendant de K et de Z . λ et μ dépendent de r_1 et r_2 et des conditions initiales. La seconde partie, hachurée horizontalement correspond aux régimes oscillants amortis :

$$X(nT_e) = \lambda.(1-Z)^{\frac{n}{2}} \cos(n.\theta - \varphi) \quad (8.24)$$

où θ et φ dépendent de K et de Z et où λ dépend de θ , de φ et des conditions initiales. Les deux parties sont séparées par la courbe (C) :

$$Z = -K + 2.\sqrt{K} \quad (8.25)$$

La partie de cette courbe qui satisfait $K < 1$ représente les comportements critiques :

$$X(nT_e) = (\lambda + \mu.n) r^n \quad (8.26)$$

où r est un nombre réel positif inférieur à 1 et qui dépend de K et de Z . λ dépend de r et des conditions initiales. C'est dans ce régime que la position de la cellule revient le plus vite à l'équilibre.

8.3.4. QUATRE POINTS CARDINAUX, QUATRE COMPORTEMENTS PROTOTYPES

Or cette division des cellules en deux types (oscillant et amorti) ne permet pas en pratique de qualifier tous les comportements. Notamment, le comportement de toutes les cellules dont le point représentatif est dans une large zone autour de la courbe (C) (8.25) ne

peuvent pas être qualifiés d'oscillant ni de suramorti. De même les cellules dont le point représentatif se trouve près de l'origine ont un comportement qui approche la masse libre.

Nous définissons donc une typologie de comportements définie autour de quatre points O, L, S et C du plan (K,Z) qui correspondent à des comportements idéaux :

8.3.4.1. Le point O (comme oscillant)

Le point représente le comportement purement élastique. (K=1,Z=0) la cellule, une fois éloignée de sa position de repos, oscille indéfiniment autour de cette position.

8.3.4.2. Le point L (comme libre)

C'est un point qui correspond à $k=0, z=0$. C'est une masse libre. Lorsqu'on exerce sur elle une brève impulsion de force, elle acquiert un mouvement rectiligne uniforme. Elle n'a aucun point d'équilibre.

8.3.4.3. Le point S (comme suramorti)

C'est un point qui correspond à un comportement purement visqueux. (K=0, Z=1) Il n'y a pas de position d'équilibre. Lorsqu'on exerce sur elle une brève impulsion de force, elle se déplace le temps de l'impulsion, mais s'arrête à l'instant même où la force exercée s'arrête, et reste à cette position jusqu'à ce qu'une autre force lui soit appliquée. Comme dans le cas précédent, il n'y a pas de position d'équilibre.

8.3.4.4. Le point C (comme critique)

Le troisième est le comportement critique. (K=1,Z=1) il y a une position de repos et le mouvement est amorti. Ce comportement est celui de l'objet le plus raide et le plus visqueux que l'on puisse animer à cette fréquence : Si à l'instant $t=0$ la cellule est éloignée de sa position d'équilibre, alors dès l'instant $t=T_e$ elle est définitivement revenue à sa position d'équilibre.

Ainsi, tous les comportements peuvent être qualifiés comme appartenant à un de ces types ou comme des combinaisons, à divers degrés, du comportement élastique-critique ou visqueux-critique.

8.4. LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE L'ÉCRAN D'ÉPINGLES

8.4.1. LE SEGMENT MODAL

8.4.1.1. Les modes de l'écran d'épingles

L'écran d'épingles, 1D, 2D ou 3D, est décrit par un jeu de 6 paramètres. ($m, T_e, k_s, k_v, z_s, z_v$). Il serait difficile de décrire le comportement de l'écran d'épingles dans l'espace de ces six paramètres. De plus l'exploitation d'une telle représentation serait difficile.

Par contre, nous savons que le mouvement de chacun des modes de l'écran d'épingles est décrit par une équation différentielle linéaire du second ordre (8.17). Pour le mode d'ordre j , ce mouvement est le mouvement d'une cellule de masse m , de raideur $k_j = \lambda_j \cdot k_v + k_s$ et de viscosité $z_j = \lambda_j \cdot z_v + z_s$ simulée à une fréquence d'échantillonnage de T_e . Cette cellule est caractérisée par une raideur et une viscosité algorithmique (K_j, Z_j):

$$K_j = \frac{k_j T_e^2}{m} \quad Z_j = \frac{z_j T_e}{m}$$

Donc il est possible de comprendre le comportement du mode d'ordre j en situant le point (K_j, Z_j) sur le plan (K,Z) et en vérifiant s'il s'agit d'un mode oscillant, d'une mode suramorti ou d'un mode critique.

8.4.1.2. La stabilité

De ceci on peut déduire des informations globales sur le comportement de l'écran d'épingles. Notamment un écran d'épingles est stable si et seulement si tous ses modes sont stables. Graphiquement, cela signifie que le segment modal doit se trouver tout entier dans le triangle de stabilité de la figure 8.2. Si, ne serait-ce qu'un seul mode se trouve en dehors de ce segment, le comportement global de l'écran est instable. Notamment cette stabilité impose :

$$\begin{array}{cccc} K_0 > 0 & Z_0 > 0 & K_N > 0 & Z_N > 0 \\ \text{qui équivaut à} & k_s > 0 & z_s > 0 & k_v > -k_s/\lambda_N & z_v > -z_s/\lambda_N \end{array}$$

Ceci montre qu'effectivement un écran stable peut admettre une raideur k_v négative.

8.4.1.3. Le segment modal et la caractérisation de l'écran d'épingles

L'ensemble de tous les modes d'une corde, d'une surface ou d'un volume forment un segment sur le plan (K, Z) que nous appellerons le segment modal. (Voir figure 8.3)

Une des extrémités de ce segment est le point représentant le mode fondamental (K_0, Z_0) caractérisé par une raideur k_s et une viscosité z_s , alors que l'autre extrémité du segment est le mode d'ordre N (K_N, Z_N) caractérisé par une raideur $k_s + \lambda_N \cdot k_v$ et par une viscosité $z_s + \lambda_N \cdot z_v$. (λ_N est égal à 4 en 1D 8 en 2D et 12 en 3D). Dans la suite nous représenterons ce segment par une flèche joignant le mode fondamental au mode d'ordre N .

Ce segment caractérise entièrement le comportement de l'écran d'épingles. Deux écrans d'épingles ayant le même segment modal ont le même comportement et réciproquement. Ainsi le comportement de l'écran d'épingles peut être caractérisé par deux paires de nombres (K_0, Z_0) et (K_N, Z_N) .

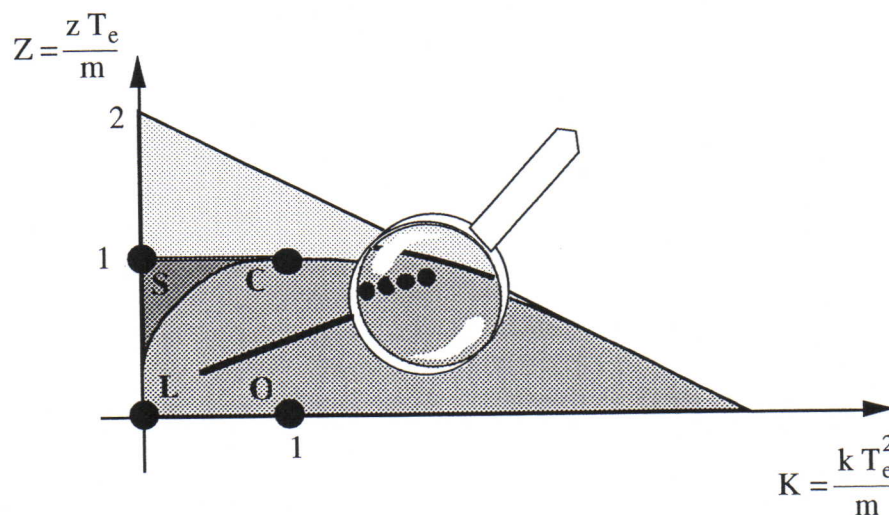


figure 8.3. Dans le plan (K, Z) une cellule (m, k, z) est représentée par un point. Une corde ou une surface, un volume ou l'écran d'épingles sont caractérisés par n modes. Ils sont donc représentés par un ensemble de points représentant chacun de ces modèles. Ces points sont alignés et forment le *segment modal*.

8.4.2. COMPORTEMENTS DYNAMIQUES

8.4.2.1. Les modes d'ordre élevés

Ces modes, ainsi que nous l'avons évoqué plus haut représentent des déformations de petite taille, des "rugosités" de l'écran.

Si les modes d'ordre élevé sont sur-amortis, cela signifie que toute perturbation de petite taille (par exemple le déplacement d'une seule épingle) créera une déformation qui sera permanente ou qui du moins, ne sera effacée qu'après une durée sensiblement longue. Si ces modes sont oscillants alors la même perturbation, produira des oscillations de petite taille. Dans ces deux cas, nous avons des écrans d'aspect potentiellement rugueux.

Si les modes d'ordre élevés sont critiques, alors cela signifie que toute déformation de petite taille est rapidement éliminée. L'écran est alors lisse et le reste malgré les perturbations de grande ou de petite taille.

8.4.2.2. Les modes d'ordre bas

Ces modes représentent les déformations globales de l'écran ou les déformations dont la taille est la moitié, le tiers le quart de l'écran.

Si ces modes sont sur-amortis, alors une excitation pourra déplacer le niveau général de l'écran de manière quasi-permanente. Si ces modes sont oscillants, alors une telle excitation pourra faire vibrer tout l'écran autour de sa position de repos.

Si ces modes sont critiques alors le niveau de l'écran restera stable et égal à son niveau de repos. Les excitations pourront exciter d'autres modes mais les modes d'ordre bas resteront au repos.

Etant donné un comportement de référence, ces principes deviennent un guide pour trouver des paramètres adéquats produisant ces comportements. Etant donné le comportement du mode fondamental et du mode d'ordre N le comportement de tous les modes s'en déduit.

8.4.2.3. Le comportement non-libre

Tout ce que nous avons développé dans ce chapitre a trait au régime linéaire de l'écran d'épingles, donc, en toute rigueur à son comportement libre. En réalité si le marqueur est un modèle moteur par rapport à l'écran d'épingles il peut être considéré comme un objet de type sol.

Or dans la force f exercée par le marqueur M sur une épingle e , seule la composante f_ω selon ω est utile. Donc si nous étudions les interactions par leurs projetés sur ω une interaction 3D $F_M(k_M, z_M)$ reliant un marqueur à une épingle e peut être considérée comme une interaction 1D $F_{M\omega}(k_{M\omega}, z_{M\omega})$ entre cette épingle e et le sol avec $k_{M\omega} \in [0, k_M]$ et $z_{M\omega} \in [0, z_M]$ (cf figure 8.4) Ainsi la raideur et la viscosité de cette interaction peuvent être ajoutées à celles de F_S .

Ainsi le comportement non-libre de l'écran d'épingles pourra être approximativement représenté par une zone obtenue en translatant le segment modal du comportement libre par un vecteur (k_M, z_M) (cf figure 8.5)

C'est ainsi que l'on peut comprendre qu'un écran d'épingle peut être parfaitement stable lorsqu'il est libre mais qu'il devient instable dès qu'il entre en contact avec le marqueur.

C'est également ainsi qu'on comprend que la constante du temps du marquage (régime non-libre) est toujours plus petite que celle de la rémanence (régime libre).

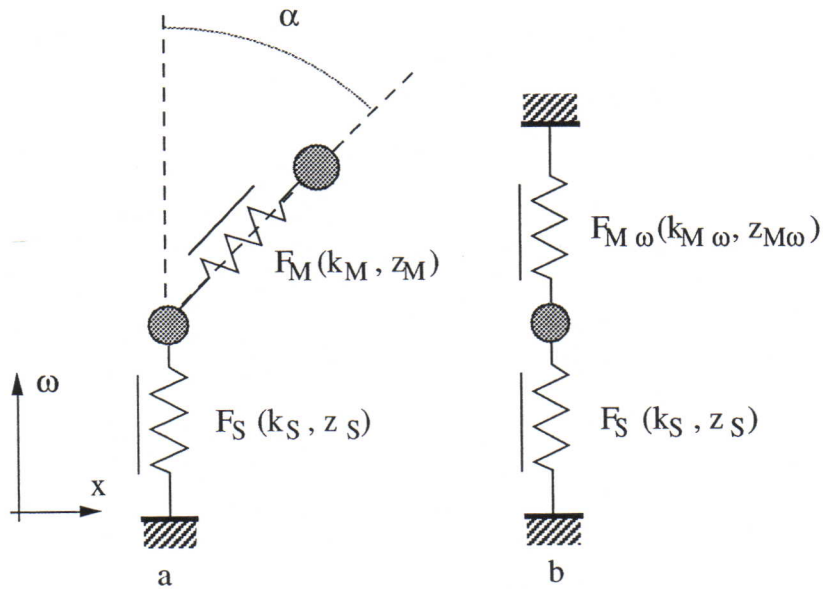


figure 8.4 A chaque instant, l'interaction 3D F_M exercée par le marqueur est équivalente à une interaction 1D $F_{M\omega}$ projetée sur l'axe des ω et dont la raideur et la viscosité s'ajoutent à celles de F_S .

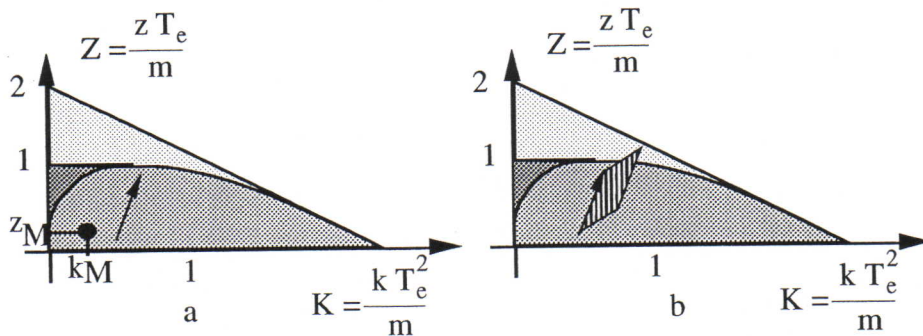


figure 8.5. La relation entre le segment modal représentant le comportement libre et (k_M, z_M) (a) et l'approximation de la zone (hachurée) correspondant au comportement non-libre et qui a été obtenue à partir du segment du comportement libre par une translation de vecteur (k_M, z_M)

8.4.3. Typologie des comportements de l'écran d'épingles

Dans cette section nous allons définir une typologie des comportements de l'écran d'épingles, de la même manière que nous avons défini une typologie des comportements de la cellule en définissant les quatre points cardinaux. Ce sont précisément ces quatre points qui nous permettent de discerner neuf comportements prototypes pour l'écran d'épingles.

Le comportement libre de l'écran d'épingles est entièrement déterminé par les extrémités (K_0, Z_0) et (K_N, Z_N) de son segment modal dans l'espace (K, Z) . Or nous avons vu que dans l'espace (K, Z) il y a essentiellement quatre points remarquables que nous avons appelés les points cardinaux (OLSC). Donc pour l'écran d'épingles il en résulte un nombre fini de comportements remarquables correspondant à des situations où les extrémités du segment modal se trouve sur un point cardinal.

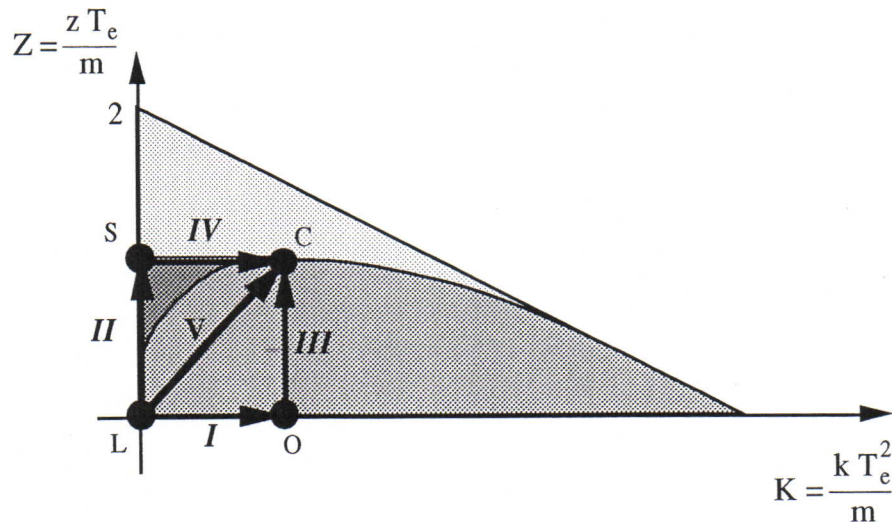


figure 8.6. L'écran d'épingles peut avoir neuf comportements prototypes.

Les deux extrémités du segment modal peuvent être au même point. (Cela signifie que $k_v = z_v = 0$ et que les épingles sont indépendantes) alors nous avons quatre catégories de comportement correspondant aux quatre points cardinaux O, L, S et C.

Les deux extrémités du segment modal peuvent être sur des points cardinaux différents. Dans ce cas il existe possibilités différentes. Parmi ces 12 possibilités nous éliminons toutes celles qui impliquent $z_v < 0$ ou $k_v < 0$. Il reste alors cinq possibilités I, II, III, IV et V qui sont représentées sur la figure 8.6.

L'écran d'épingles peut être caractérisé par neuf comportements prototypes (I, II, III, IV, V, O, L, S, et C) qui constituent en quelque sorte les neufs points cardinaux de l'écran d'épingles.

8.5. IMAGES OBTENUES ET TESTS EXPÉRIMENTALES

L'écran d'épingles a été réalisé en 1D et en 2D. La conception et la réalisation de l'écran d'épingles 3D est en cours. Les images obtenues correspondent donc, pour la plupart à des scènes 2D. Quelques expérimentations ont également été effectuées sur un écran d'épingles 1D. Dans ce sous-chapitre nous allons observer les comportements des prototypes I, II, III, IV, V, S et C. (Le comportement des prototypes L et O ne présentent que peu d'intérêt.

Pour chaque prototype :

- (étape 1) nous observerons les comportements de l'écran d'épingles
- (étape 2) Quelquefois nous observerons le comportement de l'écran d'épingles pour des valeurs de paramètre légèrement différentes des valeurs prototypes.
- (étape 3) Enfin pour les catégories (I, II, IV, V, S et C) nous présenterons une ou plusieurs images extraites de la simulation multi-échelle d'un objet très déformable sur un écran d'épingles 2D.

8.5.1. CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

Les expériences (étape 1 et 2) ont été effectuées avec un écran 1D de 96 masses de 10 grammes chacune avec une période d'échantillonnage temporel de 0.00105 secondes (1050 Hz). Les "coordonnées" (k,z) des points cardinaux (OLSC) dans ces conditions

sont données par le tableau 8.1.

n°	Prototyp e	différence avec prototype	mode fondamentale	mode d'ordre N	k_s	z_s	k_v	z_v
1	S	0	Point S	Point S	0	10	0	0
2	S	≈ Point S	≈ Point S	≈ Point S	10	10	0	0
3	S	marqueur ≠	Point C	Point C	10	10	0	0
4	C	0	Point C	Point C	10000	10	0	0
5	I	0	Point L	Point O	0	0	2500	0
6	I	≈ Point O	Point L	≈ Point O	0	0	2500	0,1
7	II	0	Point L	Point S	0	0	0	2,5
8	II	≈ Point L	≈ Point L	Point S	10	0	0	2,5
9	III	0	Point O	Point C	10000	0	0	2,5
10	III	≈ Point O	≈ Point O	Point C	10000	0	0	2,5
11	IV	0	Point S	Point C	0	10	2500	0
12	IV	≈ Point S	≈ Point S	Point C	10	10	2500	0
13	V	0	Point L	Point C	0	0	2500	2,5

tableau 8.1 Les paramètres des prototypes S, C, I, II, III, IV et V dans l'ordre des expériences effectuées.

Toutes les épingles sont initialement placées au niveau $\omega = 0.03$ mètres. Les bords de l'écran 1D sont attachés. Les actions exercées sur ces modèles ont été de deux types :

action 1 : on attribue à une des épingles (la cinquantième i.e. l'épingle centrale) une position initiale $\omega = 0.1$ mètres, différente de celle des autres

action 2 : manipuler la corde de manière interactive par un objet dont la position est fournie par la souris.

Etant donnée ces conditions, voici la suite des observations.

8.5.2. PROTOTYPE S

8.5.2.1. expérience 1 : Rémanence infinie

Spécificité : Les épingles ne sont pas attachées donc l'écran d'épingles a un seul mode. En l'occurrence ce mode unique est au point S.

action 1 : l'écran reste immobile.

action 2 : lorsque l'objet guidé par la souris déforme l'écran , les déformations ne s'effacent pas.

Interprétation : En l'absence d'élasticité, les marques imprimées dans l'écran d'épingle ne s'effacent pas.

8.5.2.2. expérience 2 : Rémanence finie marquage rapide, démarquage lent

Spécificité : La différence par rapport au prototype S est l'ajout d'une faible interaction élastique entre les épingles et le sol.

action 1 : l'écran revient à sa position d'équilibre mais très lentement.

action 2 : les déformations apportées par l'opérateur s'effacent lentement.

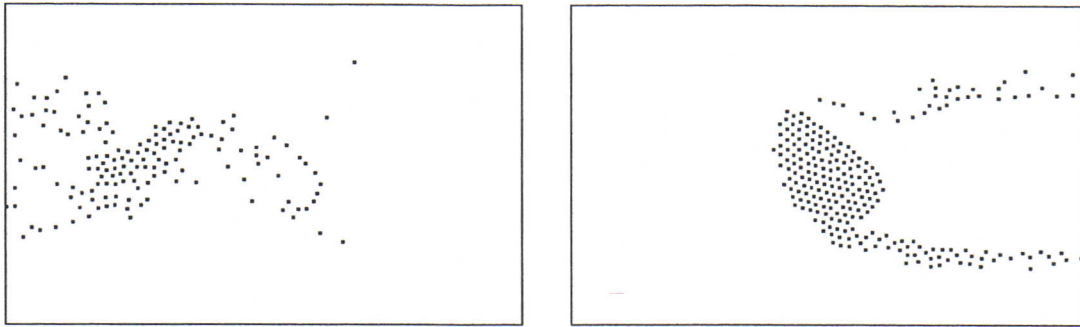


figure 8.7 Sable fin allant de gauche à droite et s'accumulant contre un obstacle aux instants $t=1s$ et $t= 7.8s$

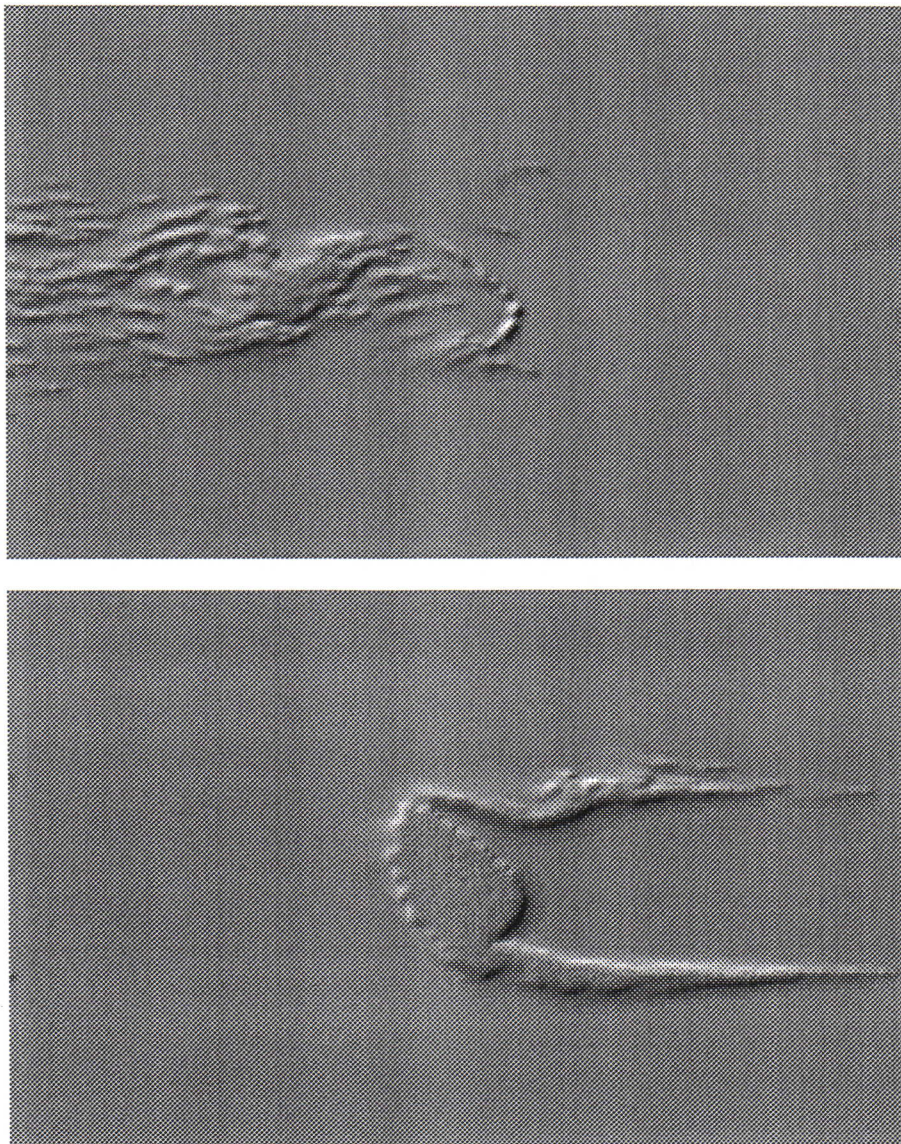


figure 8.8 Les mêmes simulations aux mêmes instants raffinés par un écran d'épingles 2D

Interprétation : L'unique mode de l'écran d'épingles n'est pas sur le point S mais légèrement à côté du point S. Le comportement de l'écran n'est donc pas suramorti.

Le modèle de matériaux granulaires (figure 8.8) obtenu à partir des points de l'OPP (figure 8.7) a été obtenu avec un modèle similaire à celui-ci. Ce modèle a également été présenté dans [LHM 95].

8.5.2.3. expérience 3 : Rémanence finie marquage lent, démarquage lent

Spécificité : la raideur des marqueurs est plus faible que pour l'expérience 2.

action 1 : Identique au comportement de l'expérience 2

action 2 : le marquage et le démarquage ont la même constante de temps.

Interprétation : Le mode du démarquage (rémanence) est déterminée par (k_s, z_s) alors que celui du marquage est compris entre (k_s, z_s) et (k_s+k_M, z_s+z_M) .

Commentaire : Cette expérience met en valeur l'importance des propriétés du marqueur. Nous avons vu au paragraphe § 8.4.2.3. que du fait de la raideur du marqueur le marquage était en général plus rapide que le démarquage. Ainsi, en diminuant la raideur de cette interaction il devient possible d'avoir un temps de marquage qui soit comparable au temps de démarquage tout en gardant des traces visibles.

L'image de la figure 8.9 est obtenu par un modèle similaire à celui-ci.

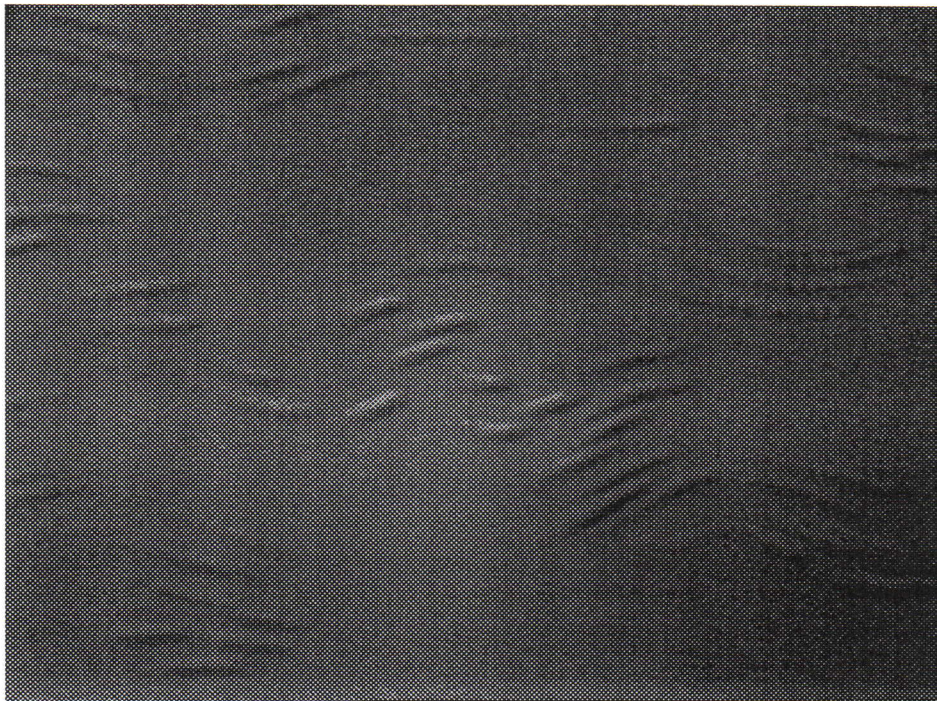


figure 8.9. Des points marqueurs se déplaçant de gauche à droite et marquant l'écran d'épingles. Les paramètres de l'écran sont identiques mais les marqueurs ont des raideurs plus faibles.

8.5.3. PROTOTYPE C

8.5.3.1. expérience 4 : Rémanence nulle

Spécificité : les épingles ne sont pas liées les unes aux autres. Toutes les épingles sont liées au sol par des interactions visco-élastiques critiqueusement amorties (point cardinal C)

action 1 : Après un seul échantillon toute épingle déplacée revient à sa position d'équilibre et y reste. Les autres épingles restent immobiles.

action 2 : L'objet manipulé par la souris laisse instantanément sa forme sur l'écran d'épingles. Aussitôt qu'il est retiré, l'écran d'épingles est au repos.

Interprétation : tous les modes sont critiqueusement amortis. Cela signifie qu'après une excitation quelconque, tous les modes reviennent à leur position d'équilibre après un seul échantillon et restent à cette position. De plus, en choisissant des paramètres d'interaction F_M de manière à ce que F_M/F_s soit également critiqueusement amorti, le marquage et le démarquage de l'écran d'épingles s'effectue instantanément.

Avec ces paramètres, l'écran d'épingles a les mêmes comportements qu'une surface implicite géométrique (cf chapitre § 9)

Entre la rémanence nulle et la rémanence infinie, toutes les valeurs peuvent être atteintes lorsque le mode de l'écran d'épingle évolue entre le point S (rémanence infinie) et le point C (rémanence nulle).

L'image de la figure 8.10.a est obtenu par un écran d'épingles du type de celui du paragraphe § 8.5.3.2. alors que l'image de la figure 8.10.b représente le même objet pendant le même mouvement mais avec un écran d'épingles non-rémanent (§ 8.5.3.4)

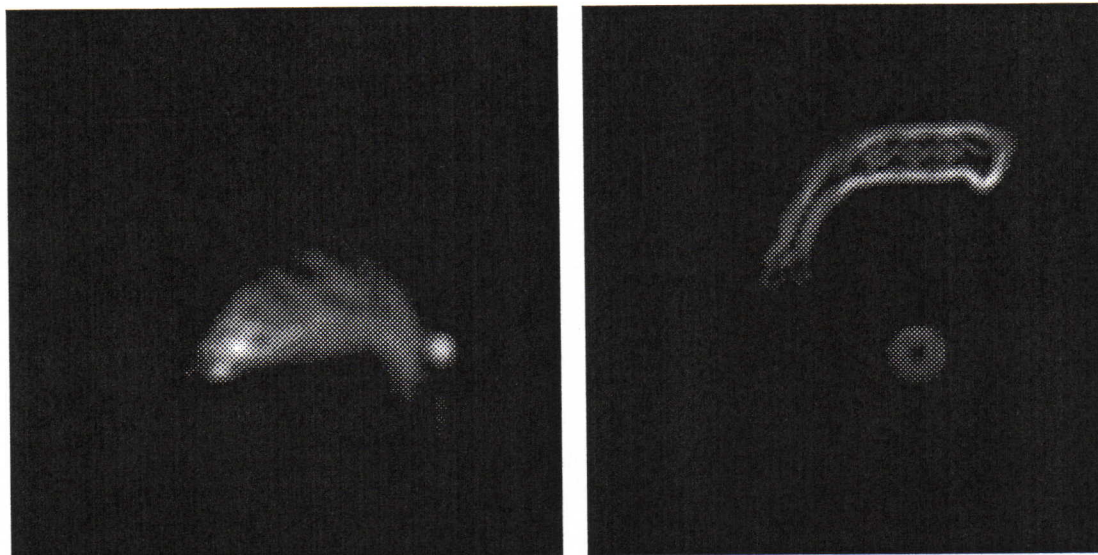


figure 8.10.(a) un objet évoluant sur un écran d'épingles rémanent (b) le même objet avec le même mouvement sur un écran non-rémanent.

8.5.4. PROTOTYPE I

8.5.4.1. expérience 5 : Propagation oscillante

Spécificité : les épingles sont liées seulement entre elles (et non au sol) par des interactions purement élastiques

action 1 : l'épingle centrale déplacée revient vers sa position de repos ($\omega=0.03$). Pendant ce temps. Cette perturbation crée deux ondes symétriques se propageant du centre vers les bords et qui se réfléchissent. Après les premiers instants, il devient difficile de percevoir sur la surface de l'écran de véritables ondes. Les mouvements de chaque épingle par rapport à celui de ses voisins semblent désordonnés. La surface de l'écran n'est pas lisse.

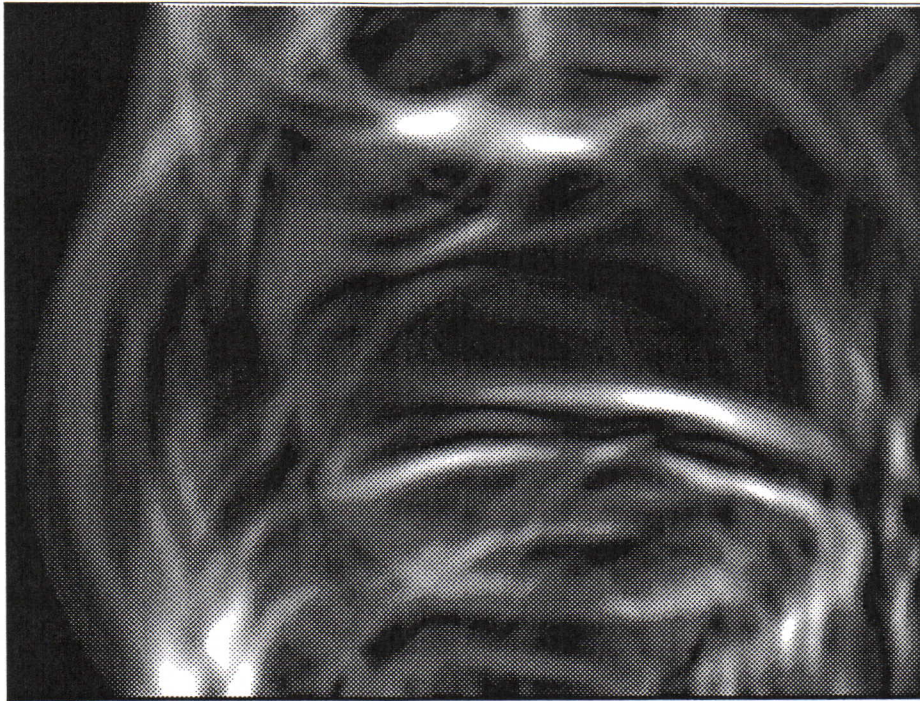


figure 8.11. Le même modèle que celui de la figure 8.10 mais sur un écran présentant des comportements de propagation oscillate.

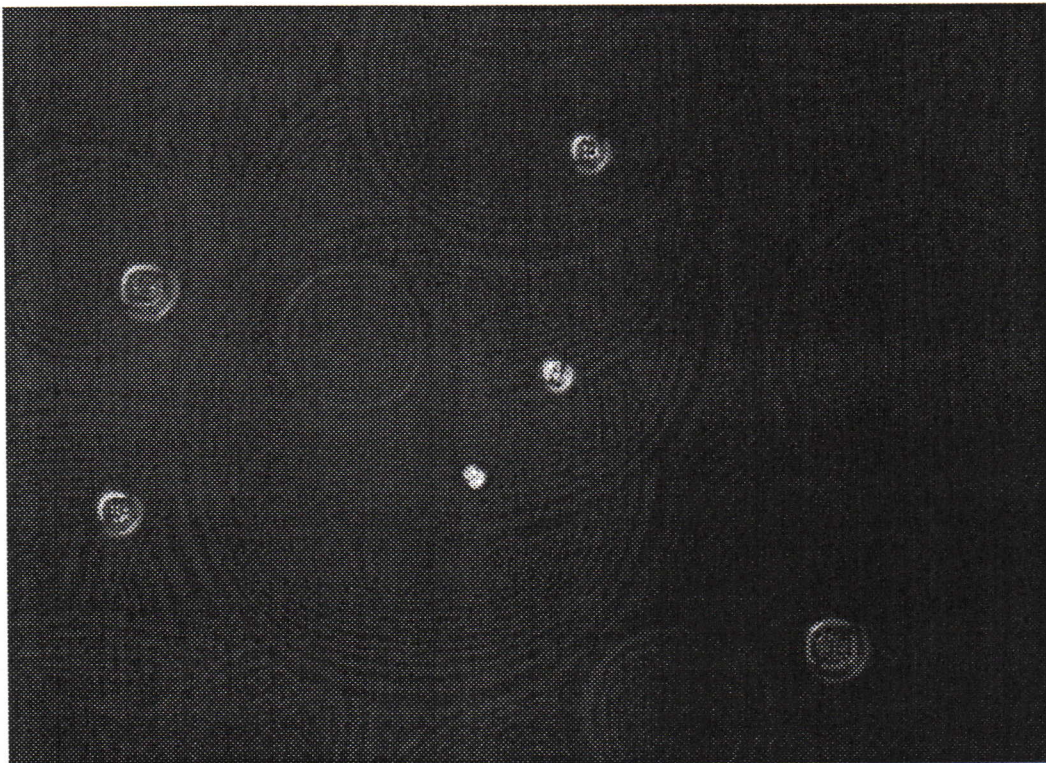


figure 8.12 Une propagation oscillante modélisant une surface liquide

action 2 : Toute perturbation appliquée à l'écran se propage sans déformation le long de l'écran 1D et se réfléchit sur les bords.

Commentaire : le mode fondamental est libre alors que le mode d'ordre N est oscillant. Dans ce cas, l'écran 1D est une ligne à retard.

L'image de la figure 8.11 sont données par le même objet que celui de la figure 8.10. Seule les propriétés de l'écran diffèrent. Le modèle de la figure 8.11 a été obtenu avec un modèle similaire à celui décrit dans ce paragraphe.

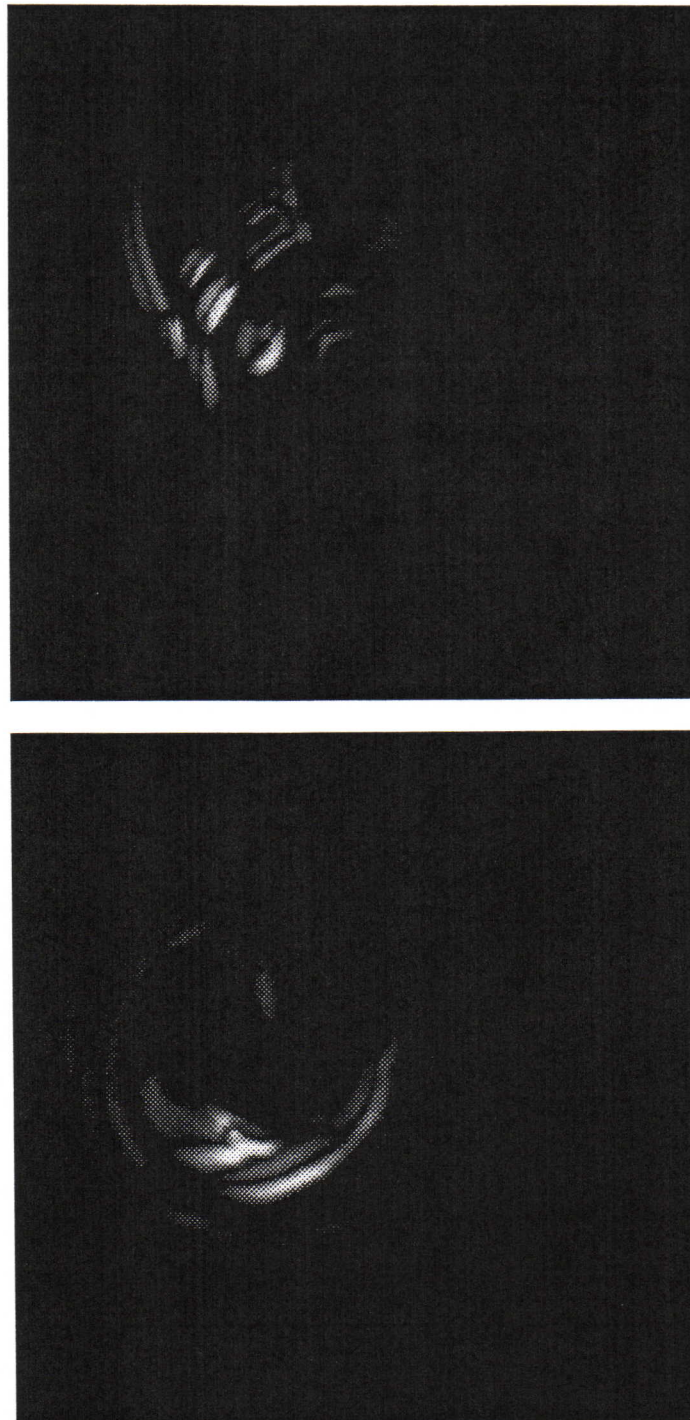


figure 8.13.

8.5.4.2. expérience 6 : Propagation oscillante visqueuse

Spécificité : l'interaction entre les épingles est rendue légèrement visqueuse

action 1 : les résultats sont identiques à l'expérience I sauf pour le fait qu'ici les ondes à la surface de l'écran restent visibles. La surface de l'écran est toujours parcourue par des

ondes fines mais visibles. Les mouvements des épingles les unes par rapport aux autres sont plus visiblement corrélés. La surface semble plus lisse.

action 2 : résultat identique à celui de l'expérience I, sauf pour le fait qu'après les premiers instants, les perturbations qui se propagent et se réfléchissent sur les bords perdent leurs angles les plus saillants pour devenir des perturbations plus rondes.

Interprétation : De manière générale, plus l'ordre d'un mode est élevé et plus sa viscosité dépendra de z_v (puisque $z_i = z_s + \lambda_i \cdot z_v$) alors que l'influence de z_s est la même pour tous les modes. Autrement dit, plus le paramètre z_v est élevé et plus les modes d'ordre élevé sont visqueux (en l'occurrence rapidement amortis). Le contrôle de z_v permet ainsi de lisser plus ou moins la surface de l'écran d'épingles.

Les figures 8.12 et 8.13 représentant des surfaces liquides ont été obtenues avec ce type de modèle.

8.5.5. PROTOTYPE II

8.5.5.1. expérience 7 : la surface visqueuse sans attache au sol.

Spécificité : Les épingles sont liées uniquement entre elles (et non au sol) par des liaisons purement visqueuses.

action 1 : l'écran reste absolument immobile.

action 2 : à la moindre perturbation les épingles concernées se dirigent vers l'infini (plus ou moins rapidement selon la force de la perturbation) et entraînent progressivement les autres épingles.

Interprétation : en l'absence de toute interaction élastique, il n'existe pas de force de rappel vers une quelconque position d'équilibre. C'est pourquoi l'action 1 ne produit aucun mouvement sur l'écran d'épingles. D'autre part, les modes d'ordre élevé sont suramortis et les premiers modes sont libres, ce qui explique le fait que les épingles puissent avoir des mouvements de si grande amplitude.

Commentaire : Dans l'expérience 8 nous limitons ce déplacement en rendant le mode fondamental légèrement oscillant (en attachant l'écran au sol par une interaction très faible)

8.5.5.2. expérience 8 : le fil de fer légèrement attaché au sol.

Spécificité : les épingles sont légèrement liées au sol par une interaction purement élastique

action 1 : l'épingle centrale diminue de taille mais les épingles voisines sont déformées vers le bas. L'ensemble de l'écran oscille autour de sa position d'équilibre.

action 2 : Chaque perturbation déforme localement l'écran d'épingles. Ces déformations de petite taille ne disparaissent pas. Elles semblent être gravées dans un objet très visqueux et subsistent alors même que l'ensemble de l'écran peut fortement osciller autour d'une position d'équilibre. Plus les déformations sont de petite taille et plus elles sont solidement gravées dans l'écran.



figure 8.14 Description schématique du comportement de l'écran d'épingle dans l'expérience 8. action 1

Commentaire : ces déformations semblent avoir été faite dans un morceau de fil de fer.

Interprétation : Contrairement au cas précédent, nous avons ici un niveau d'équilibre et une très faible force de rappel vers ce niveau d'équilibre. Ici les modes d'ordre élevé sont suramortis. Plus l'ordre du mode est élevé et plus la déformation correspondant à ce mode reviendra lentement vers le niveau d'équilibre. Par contre les déformations des premiers modes donnent lieu à des oscillations et à des amortissements critiques. C'est une propriété très intéressante de l'écran d'épingles, mais nous l'avons encore jamais utilisée pour effectuer des raffinement.

8.5.6. PROTOTYPE III

8.5.6.1. expérience 9 : Plaque quasi-rigide

Spécificité : Les épingles sont liées au sol par une interaction purement élastique et entre elles par une interaction purement visqueuse

action 1 : l'épingle centrale revient rapidement vers le niveau d'équilibre. Autour de cette épingle centrale, les épingles vibrent rapidement autour du niveau d'équilibre de l'écran. Ces vibrations ne s'amortissent pas rapidement mais se propagent aux épingles voisines. Après quelques instants, il ne reste plus que le mode fondamentale.

action 2 : Il en est de même pour toutes les autres perturbations appliquées à l'écran.

Interprétation : Le déplacement de l'épingle centrale est une excitation comparable à une impulsion de Dirac excitant tous les modes. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la viscosité z_v amortit davantage les modes élevés que les premiers modes. C'est ainsi qu'après quelques secondes, tous les modes sont amortis sauf le mode fondamental.

8.5.7. PROTOTYPE IV

8.5.7.1. expérience 10 : Le raffinement de sol plastique

Spécificité : les épingles sont liées les unes aux autres par des interactions purement élastiques et au sol par des interactions purement visqueuses.

action 1 : l'épingle centrale, en revenant vers sa position de départ s'é moussse en se propageant aux épingles voisines.

action 2 : Toutes les perturbations produisent des déformations qui après quelques fractions de secondes s'arrondissent.

Interprétation : Comme on peut le voir sur la figure 8.6, dans l'expérience IV, les modes d'ordre élevé sont critiquement amortis. Cela signifie que toutes les déformations du mode d'ordre N sont amorties après un seul échantillon. La vitesse d'amortissement des déformations diminue au fur et à mesure que l'ordre des modes diminue.

Les images de la figure 8.15 représentent un sol constitué d'une part d'un OPP de 28x28 points matériels. Un objet mobile, en l'occurrence un véhicule, déforme ce sol et y laisse une trace. Ce sol est raffiné par un modèle d'écran d'épingles dont les propriétés sont très proches du prototype IV. L'écran d'épingles se trouve entre les roues du véhicule et les points matériels de l'OPP. L'écran d'épingles représente la surface du sol et peut ajouter à la simulation des phénomènes dynamiques que les points de l'OPP ne peuvent pas produire. Il s'agit par exemple des micro-avalanches ayant lieu dans les traces du véhicule après le passage des roues. Ce modèle a été plus amplement décrit dans [CLH 96].

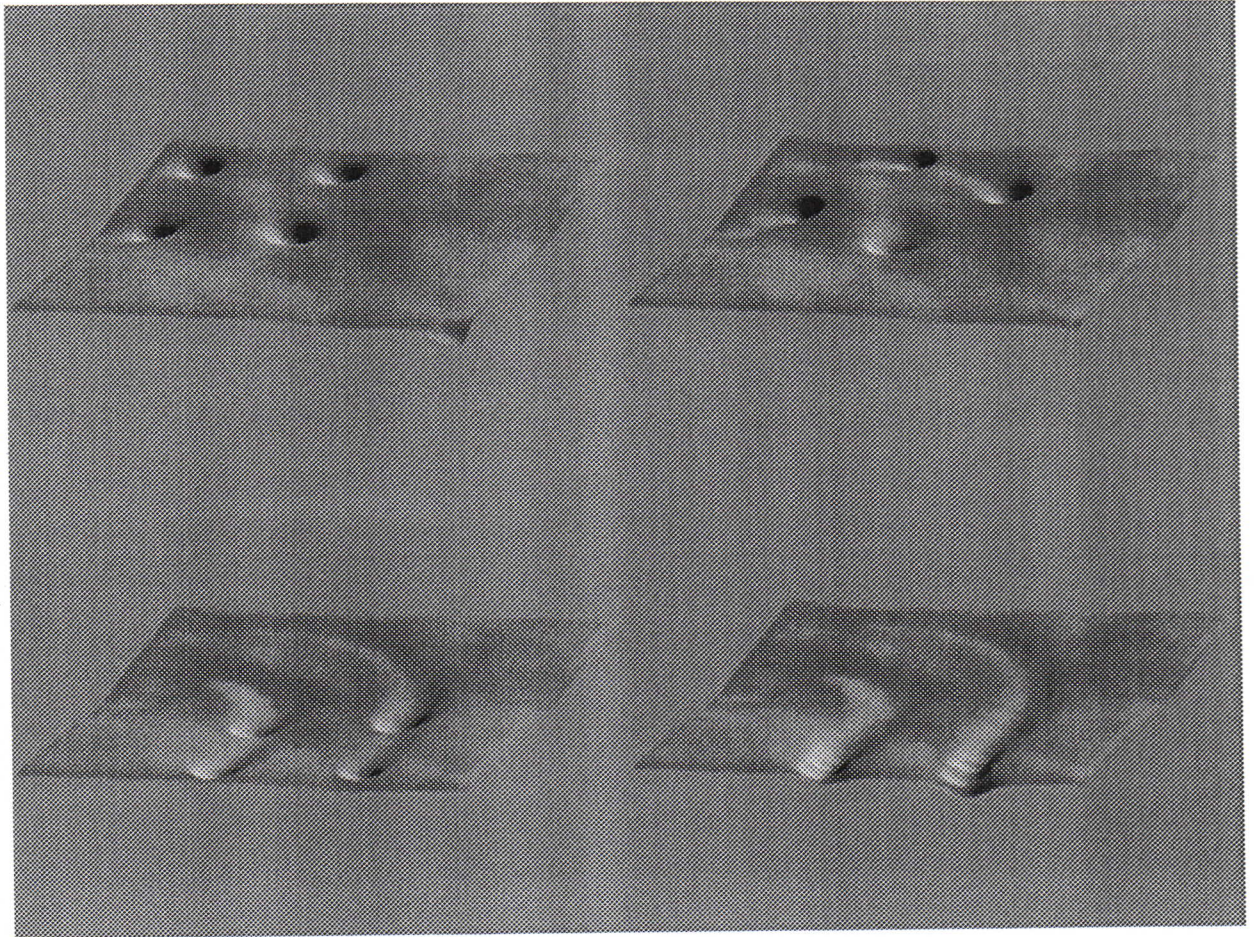


figure 8.15 Un sol déformable raffiné, marqué par un véhicule déformable

8.5.8. PROTOTYPE V

8.5.8.1. expérience 11 Fluide visqueux

Spécificité : les épingles sont liées les unes aux autres (et non au sol) par des liaisons visco-élastiques.

action 1 : l'épingle centrale revient à sa position d'équilibre, alors que des ondes se dirigent du centre vers les bords de l'écran

action 2 : chaque perturbation produit des ondes de forme arrondie qui se réfléchissent sur les bords et qui s'amortissent.

Interprétation : C'est une variante de l'expérience I bis. La viscosité entre épingles est beaucoup plus élevée. La forme de la surface est encore plus lisse.

Commentaire : Ces mouvements évoquent ceux d'un fluide visqueux.

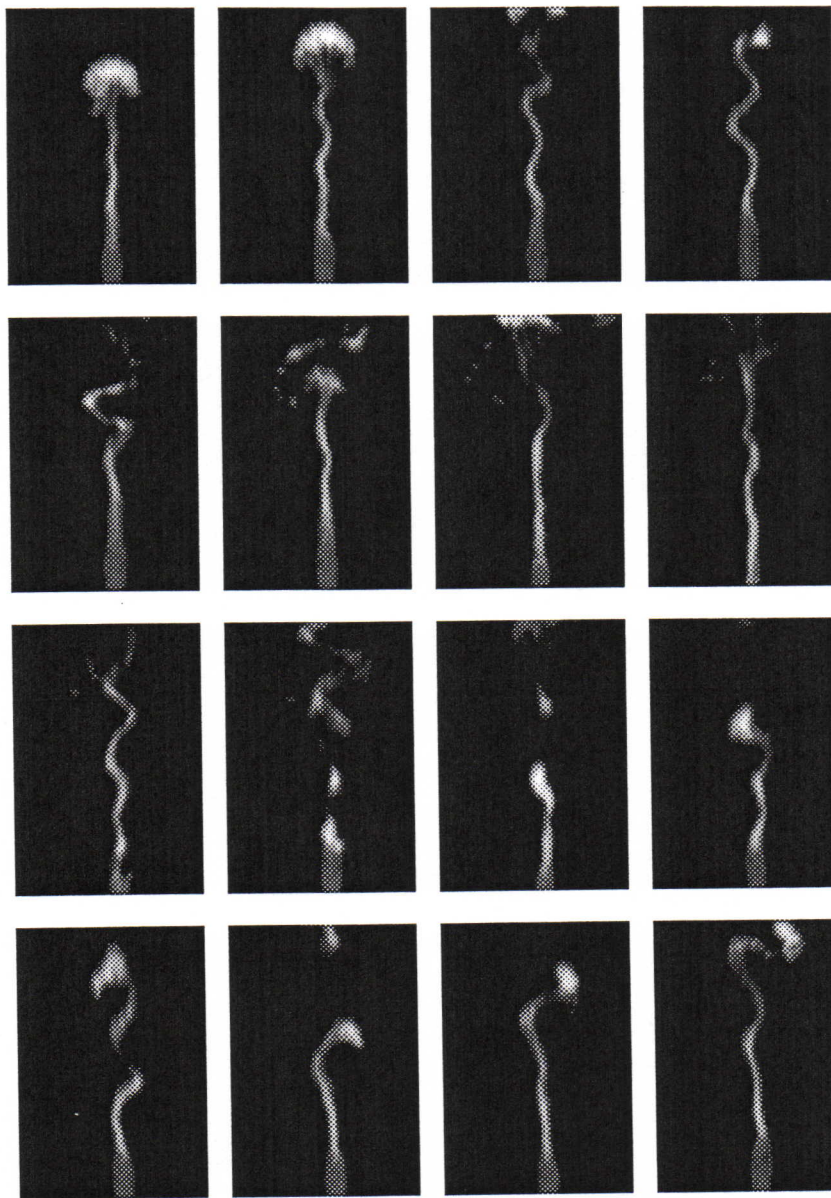


figure 8.17 Un modèle de fumée raffiné par un modèle d'écran d'épingles proche du modèle de prototype (cf [LHV 95])

Les images des figures 8.16 et 8.17 ont été produites par un modèle d'écran d'épingles très semblables à celui du prototype V. Dans la simulation représentée par la figure 8.16, la source du fluide était placée sur un encensoire manipulé par le geste humain.



figure 8.16. Un modèle de fluide émis par un encensoir (cf [HLV 96])

CONCLUSION

Grâce à l'analyse modale, le comportement dynamique de l'écran d'épingles se ramène à celui d'un ensemble de cellules indépendantes. L'ensemble de ces cellules sont représentés par le segment modal. Ce segment constitue une représentation intermédiaire entre les paramètres de l'écran d'épingles et les comportements dynamiques de celui-ci. D'une part il existe une bijection entre les types de comportements de l'écran d'épingles et les positions et orientations du segment modal par rapport aux points O,L,S et C. D'autre part cette position et orientation peuvent être aisément reliées aux paramètres physiques de l'écran d'épingles. Grâce à cet intermédiaire de représentation nous avons produit un éventail assez large de comportements que l'on peut observer sur les figures de ce chapitre ainsi qu'à l'annexe B.

Note à l'intention du jury : pour l'instant cette annexe ne contient aucune image mais vous pourrez observer ces résultats sur la cassette video "Travaux Arash Habibi à l'intention du jury de thèse".

CHAPITRE 9

LES SURFACES IMPLICITES

Parmi les travaux réalisés en synthèse d'images et en animation, ceux dont les objectifs (en termes de formes modélisées) sont semblables à ceux de l'écran d'épingles sont les travaux sur les surfaces implicites. Le principe de la gravure et de l'écran d'épingles, ainsi que ceux du contour physique ne trouvent pas leur origine dans celui des surfaces implicites. C'est pourquoi nous n'avons pas abordé l'étude de ces modèles plus haut. Cependant les surfaces implicites ont un certain nombre de points communs aussi bien avec les contours physiques réalisés ici qu'avec les formes générées par l'écran d'épingles. A la lumière de la description et de l'étude des propriétés de l'écran d'épingles, nous présentons les principaux modèles de surface implicites et nous tentons de situer la contribution de l'écran d'épingles par rapport à ces modèles.

9.1. LES ORIGINES

9.1.1. UNE MÉTHODE DE VISUALISATION SCIENTIFIQUE

L'utilisation des surfaces implicites a été introduite par J.F.Blinn [Blinn 82] dans le domaine de la visualisation scientifique, et plus précisément dans celui de la modélisation de molécules.

L'objet à visualiser est constitué d'un ensemble de particules i.e. de points caractérisés seulement par leur position. Ces particules génèrent chacune un champ élémentaire dans l'espace. Le champ global créé dans l'espace par l'ensemble des particules est la somme des champs élémentaires. Dans le modèle de Blinn, le point $S(x_S, y_S, z_S)$ génère au point $M(x, y, z)$ le champ élémentaire :

$$V_S(x, y, z) = C_S \exp(-ar^2) = C_S \exp\left(-a\left((x-x_S)^2 + (y-y_S)^2 + (z-z_S)^2\right)\right)$$

Où C_S est une constante caractérisant la particule S . Ainsi le champ global au point $M(x, y, z)$ est donné par :

$$V(x, y, z) = \sum_{S \in A} V_S(x, y, z) = \sum_{S \in A} C_S \exp\left(-a\left((x-x_S)^2 + (y-y_S)^2 + (z-z_S)^2\right)\right)$$

où A est l'ensemble de toutes les particules à visualiser. Pour visualiser ces particules avec leur champ, Blinn visualise une surface équipotentielle V_0 du champ global.

Pour une valeur V_0 donnée de potentiel, une particule générant un champ isotrope donne une équipotentielle V_0 sphérique. Une particule générant un champ isotrope plus intense a une équipotentielle V_0 également sphérique mais de rayon plus grand. Un ensemble de points générant un champ non-isotrope a une équipotentielle V_0 de forme non-sphérique. Enfin et surtout, la topologie des équipotentiels est variable. Pour deux particules assez éloignées, l'équipotentielle V_0 du système tend vers deux sphères (l'équipotentielle de chacune des particules en l'absence de l'autre). Par contre, pour des distances plus proches, les deux équipotentiels se déforment. Au delà d'une certaine distance, les deux surfaces se rejoignent pour former une seule surface connexe. (Cf figure 9.5 pour l'effet "goutte d'eau").

Un tel comportement (i.e. des variations de topologie en dynamique) est très difficile voire impossible à obtenir avec des surfaces de type paramétrique.

9.1.2. LES FONCTIONS IMPLICITES : UNE DÉFINITION MATHÉMATIQUE

Blinn présente cette méthode, non seulement comme une méthode de visualisation scientifique mais plus généralement comme un moyen de modéliser des formes (autres que des molécules) à partir de points générant des potentiels (avec un sens plus abstrait que le potentiel électrostatique). De tels formes, lorsqu'elles se trouvent en deça d'une certaine distance se joignent pour constituer une seule forme, et lorsqu'elles s'éloignent au delà de cette distance seuil, se séparent en deux formes distinctes. Dans cette perspective, Blinn suggère éventuellement de remplacer le terme isotrope correspondant à la distance euclidienne :

$$\exp\left(-a\left((x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2\right)\right)$$

par un terme a priori non-isotrope :

$$\exp(Q(x,y,z))$$

où Q est une forme quadratique quelconque. Blinn suggère également d'augmenter au delà de 2 la valeur des exposants dans la forme Q, de manière à obtenir différents hyper-ellipsoïdes.

Le formalisme de Blinn a été repris dans de nombreux autres travaux et avec de nombreuses variantes. Elle est considérée comme une méthode très générale permettant de générer des formes. Ces modèles ont reçu plusieurs appellations, quelquefois controversées. Certains font référence à des types d'objets et des types de propriétés physiques. Tel est le cas de "Blobby models" ou de "Soft objects". D'autres sont plus neutres comme "Meta-balls" (Nishimura).

La méthode précise et les détails de la technique utilisée par Blinn n'ont pas tous été repris, mais un certain nombre de principes ont été conservés et généralisés. La définition qui semble la plus communément adoptée définit ces surfaces comme la surface équipotentielle d'une fonction scalaire quelconque. Ce sont les représentations spatiales de fonctions appelées *fonctions implicites*. Soit un champ scalaire V. Le fait que x, y et z soient liés par la relation (x,y,z) signifie que z est une fonction de x et de y, même si cette fonction f ne peut pas être explicitement exprimée. Cette fonction f est une fonction implicite :

$$\begin{aligned} f: \mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (x, y) &\mapsto z \quad \text{tel que } V(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi les surfaces générées par ces fonctions implicites sont des *surfaces implicites*. En pratique, la fonction V est appelée le potentiel et les surfaces implicites seront définies par $V(x,y,z) = V_0$ où V_0 est la valeur de l'équipotentielle.

Les surfaces implicites s'opposent aux surfaces *paramétriques*, (définies par des fonctions paramétriques) qui elles, sont définies explicitement. Etant donné deux paramètres réels u et v, une surface paramétrique est définie par :

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

L'ensemble des points (x,y,z) décrits alors que u et v parcourent l'ensemble des réels produit la surface paramétrique. On peut montrer que toute fonction paramétrique (explicite) peut également être exprimée sous forme implicite. La réciproque n'est pas vraie : certaines fonctions implicites ne peuvent pas être exprimées sous forme explicite. Donc la formulation implicite est plus générale que la formulation explicite.

9.2. UTILISATION DE CES SURFACES EN MODÉLISATION DE FORMES

9.2.1. UNE FORMULATION PUISSANTE

Les surfaces implicites sont aujourd'hui très fréquemment utilisées. Elles sont souvent incontournables pour la modélisation de formes de topologie variable. Elles sont souvent utilisées dans des travaux non consacrés aux surfaces implicites, notamment pour la modélisation d'objets non-structurés, comme les fluides. Stam et Fiume [SF 93] [SF 95] les utilisent pour visualiser leur modèle de fumée. Miller et Pearce [MP 89] les ont utilisées pour modéliser des liquides. Enfin Terzopoulos et al. [TPF 89] y ont eu recours pour visualiser des solides susceptibles de fondre et de devenir liquides.

Les principes évoqués ci-dessus ne sont pas intrinsèquement des principes de modélisation de surface. Un champ spatial $V(x,y,z)$ associé à une équipotentielle V_0 permet certes de construire une fonction "dedans-dehors" ("inside-outside function") et par suite un contour, mais ceci ne représente qu'une partie très limitée des informations véhiculée par le champ $V(x,y,z)$ qui permet de caractériser tout un volume. Le fait de ne considérer qu'une surface équipotentielle de ce champ est une réduction. Ainsi, sans même la nécessité d'une modification, ou d'un apport supplémentaire, le principe des surfaces implicites peut s'appliquer à la modélisation volumique. Inakage [Ina 90] utilise le principe des "méta-balls" pour faire du rendu volumique d'objets totalement ou partiellement transparents. Les rayons lancés dans le champ de potentiel sont déviés selon les propriétés du modèle. Ces propriétés sont déterminées par la valeur du champ. Il en est de même pour Stam et Fiume [SF 93] [SF 95].

D'autre part le principe des surfaces implicites, permet de contrôler une forme par une grandeur scalaire. Dans certains cas, ceci rend un grand nombre d'opérations conceptuellement immédiates. Un grand nombre de transformations géométriques peuvent être exprimées par des fonctions scalaires. [Ina 90] modélise des "objets flous" (fuzzy objects) en ajoutant à la fonction potentiel une fonction scalaire de bruit. C'est également en ajoutant différents types de composantes au champ que [WWM 87] génèrent des textures volumiques. [SP 91] génère des formes très complexes, simplement en modifiant le champ potentiel par un champ de déplacement.

9.2.2. LE CONTRÔLE DES SURFACES IMPLICITES

9.2.2.1. Le principe de l'assemblage

Les surfaces implicites ont résolu un grand nombre de problèmes mais n'ont cependant pas remplacé les surfaces paramétriques. Certes, toutes les surfaces paramétriques peuvent être générées, d'une manière ou d'une autre, par une formulation implicite. Cependant, se pose la question de la manière dont il est possible de générer ces formes. Autrement dit, étant donnée une forme, quelle est la fonction potentielle qui lui correspond ? Comment peut-on construire, modeler, modifier ces formes en agissant sur la fonction potentielle ?

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, dans certains cas, la relation entre la fonction et la forme est immédiate. Mais ce n'est pas toujours le cas. Ces surfaces sont véritablement *implicites*, dans le sens où leur forme n'est pas explicitement spécifiées et dépend des propriétés du champ. Nous allons voir que dans certains cas, les

comportements de ce type de champ peuvent être complexes. Un grand nombre de travaux se sont donnés pour objectif de maîtriser ces propriétés.

Un premier principe dans la construction des surfaces implicites est le principe de *l'assemblage*. En effet, pour la construction et le contrôle du champ, au lieu d'utiliser différentes fonctions "intégrées" et complexes, on a plutôt recours à l'assemblage d'un nombre limité de types de champ élémentaire. Ainsi la complexité de la fonction potentielle globale ne provient pas seulement de la complexité des champs élémentaires mais de la complexité de l'assemblage de ces champs élémentaires. L'assemblage de plusieurs champs élémentaires peut être obtenu de différentes manières. Par exemple, le champ global en un point peut être la valeur maximale atteinte par chacun des champs élémentaires en ce point. Mais en général l'assemblage est obtenu par sommation des champs élémentaires.

Nous avons vu que dans [Blinn 82] (Cf paragraphe § 9.1.1.) le champ a été généré de cette manière. Les champs élémentaires sont des champs centrés autour d'un point, qui ont une symétrie de révolution et dont la décroissance est exponentielle. Le champ global est la somme de tous ces champs élémentaires.

Les champs élémentaires, à leur tour, ne sont généralement pas quelconques. Typiquement le champ élémentaire peut être dissocié en plusieurs éléments fonctionnels. Il est souvent généré par un *squelette* S (Cf [WMW 86]) associé à une fonction *noyau* N_S et à un type de distance D_S (non nécessairement euclidienne, non-nécessairement isotrope). Le champ élémentaire $V_S(M)$ crée en un point $M(x,y,z)$ par le squelette S est la valeur de la fonction noyau N_S pour la distance D_S entre S et M .

$$V_S(M) = N_S(D_S(M,S))$$

9.2.2.2. Différents exemples d'éléments d'assemblage

Dans [Blinn 82] les squelettes S sont exclusivement des points, et la fonction noyau N_S est une exponentielle décroissante et la distance D_S est la distance euclidienne.

Muraki aborde le problème de la composition des champs élémentaires en vue d'obtenir une forme donnée. Comme Blinn, il utilise des squelettes ponctuels, un noyau exponentiel, et une distance euclidienne [Muraki 91]. Etant donné une forme obtenue par des mesures sur un objet réel, Muraki construit une surface implicite dont la forme est comparée à la forme de référence déduite des mesures. Il en résulte une mesure de l'erreur. Dans le but de minimiser cette erreur, la forme de la surface implicite est progressivement raffinée en déplaçant les champs élémentaires et en les subdivisant en champs élémentaires plus fins.

Nous avons déjà évoqué la possibilité d'utiliser des distances non-euclidiennes (Cf § 9.1.2) permettant d'obtenir des champs non-isotropes. [WW 89] ont proposé de nombreuses autres possibilités permettant d'obtenir non seulement des sphères, mais notamment des parallélépipèdes, des ellipsoïdes et hyper-ellipsoïdes de forme complexes etc.

Les noyaux exponentiels utilisés dans [Blinn 82], [Muraki 91], [TPF 89] [BS 91] ne sont pas les seuls à être utilisés. On admet simplement que les noyaux doivent vérifier un ensemble de propriétés. Pour un contrôle local du champ et de la forme, on utilise des champs élémentaires qui sont nuls sur tout l'espace sauf dans une zone très limitée. Donc les noyaux doivent s'annuler au delà d'une distance R appelée *rayon d'influence*. D'autre part, essentiellement pour avoir la possibilité de faire des raccords C^1 entre les formes générées par différents champs élémentaires (blending), le noyau en doit tendre vers 0 en R avec une pente nulle. Etant donné ces spécifications, [WMW 86] ont élaboré une fonction polynomiale vérifiant ces propriétés. Etant donné le nombre de contraintes, le

degré du polynôme doit être au minimum de 3. Dans le but d'éviter le calcul d'une racine carrée, les auteurs doublent les exposants pour avoir une fonction polynomiale de degré 6 :

$$N_s(r) = a \frac{r^6}{R^6} + b \frac{r^4}{R^4} + c \frac{r^2}{R^2} + 1 \quad \text{avec } r = D_s(M,S)$$

Cette fonction polynomiale est utilisée dans d'autres travaux ([WW 89] [BW 90]) D'autres travaux, même s'ils n'ont pas recours à cette fonction précise, utilisent des fonctions polynomiales : [Gasc 93], [SP 91], [HW 90], [NHKKS0 85].

9.2.2.3. L'importance des squelettes ponctuels, Les surfaces de convolution

Enfin, nous avons étudié le cas des squelettes ponctuels [Blinn 82] [WMW 86] [Muraki 91] [OM 93] etc. Cependant, dans d'autres travaux, on s'est intéressé à des squelettes de topologie et de nature très variées : des courbes, des surfaces, des volumes [BW 90], [BS 91], [Gasc 93]. Cela nécessite la définition d'une distance particulière. [BW 90] définissent la distance $D_S(S,M)$ entre un point M de l'espace et un squelette S (point, courbe, surface ou volume) comme la distance entre le point M et le point le plus proche de M sur S.

$$D_S(M,S) = \text{Min}_{N \in S} \|\overrightarrow{MN}\|$$

Dans ce cas, l'entité élémentaire n'est plus le point mais une forme géométrique. Lorsque le squelette est un point, cette distance est équivalente à la distance euclidienne. Dans [BS 91] les surfaces implicites produites de cette manière, en mesurant les distances des points M par rapport aux squelettes pris comme entités insécables sont appelées "*distance surfaces*" (en français : *surfaces-calculées-par-distance*). Bloomenthal et al. montrent que la *surface-calculée-par-distance* générée par un squelette non-ponctuel et celle générée par le même squelette brisé en plusieurs morceaux sont très sensiblement différentes. De plus la relation entre les deux surfaces n'est pas triviale. Bloomenthal note l'existence, au niveau des frontières entre surfaces associées à deux squelettes différents, de "bosses" qui "sont souvent indésirables" (cit.[BS 91]). Ceci rend difficile la pratique de la construction d'une forme par assemblage, puisqu'il n'y pas de relation simple et systématique entre la forme de surfaces séparées et celle des mêmes surfaces réunies.

Par exemple, les deux squelettes de la figure 9.1 (a) et (b), semblables en apparence produisent des surfaces implicites sensiblement différentes.

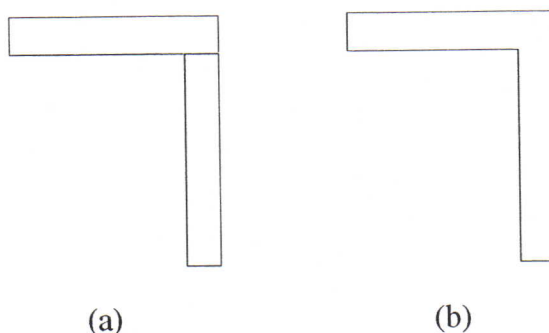


figure 9.1 (a) un squelette formé de deux éléments contigus (b) un squelette de même forme mais composé d'un seul élément

En effet, la *surface-calculée-par-distance* d'un seul squelette correspond à un champ où la valeur en un point de l'espace est la valeur du champ la plus élevée créée en ce point par les

points du squelette. Il n'en est pas de même lorsque plusieurs squelettes sont très proches, et qu'on s'intéresse au champ en un point M proche de la frontière entre deux squelettes. La contribution de chaque squelette est effectivement le champ maximal créé en M par les points du squelette respectif, mais le résultat final n'est le maximum de ces contributions mais la somme des contributions, d'où la singularité à la frontière.

Dans le cas de la figure 9.1, la *surface-calculée-par-distance* a le même aspect loin de l'articulation entre les deux squelettes. Au niveau de l'articulation, dans le cas 3.22.a, les champs élémentaires provenant des deux squelettes s'ajoutent formant ainsi la "bosse" évoquée ci-dessus. Par contre dans le cas 3.22.b le champ généré à ce niveau est non pas la somme, mais le maximum des champs créés par tous les points du squelette en ce point. Ainsi le phénomène mentionné ci-dessus n'a pas lieu.

Bloomenthal et al. proposent de calculer les surfaces implicites, non pas en calculant des distances mais en calculant une convolution. La surface implicite est ainsi le produit de convolution entre le squelette et un noyau de convolution h . Ainsi dans [BS 91], le potentiel généré par un squelette S est exprimé par :

$$V_s(M) = (h \otimes S)(M) = \int_S \exp\left(\frac{-\|\sigma - M\|^2}{2}\right) d\sigma$$

avec $h(M) = \exp\left(\frac{\|M\|^2}{2}\right)$

où \otimes représente le produit de convolution. Les surfaces ainsi générées sont appelées des *surfaces de convolution*, dont le comportement est beaucoup moins surprenant : pour tous les types de squelette, la segmentation du squelette en un élément ou en plusieurs éléments n'influence pas la forme de la surface de convolution. Notamment les squelettes décrits dans la figure 9.1 produisent les mêmes surfaces de convolution. Les "bosses" évoquées par Bloomenthal n'apparaissent pas. Si deux squelettes éloignés ont une forme spécifique, alors le fait de rapprocher les deux squelettes revient à une réunion des formes et à un lissage. Ceci facilite grandement l'activité d'assemblage.

Notons que les surfaces de convolution et les *surfaces-calculées-par-distance* sont les mêmes tant que les squelettes sont ponctuels. C'est seulement dans le cas où les squelettes sont regroupés en entités plus grandes que les *surfaces-calculées-par-distance* ont des comportements difficiles à maîtriser. Et d'ailleurs, ce qui a été mis en cause avec les surfaces de convolution, est moins le calcul de distances elle-même, que l'existence d'entités non-ponctuelles. C'est en niant ces entités et en considérant tous les polygones comme des ensembles de points que les surfaces de convolution ont réussi à résoudre le problème ²⁴.

9.2.2.4. L'écran d'épingles et les surfaces de convolution

L'écran d'épingles est une méthode de génération de forme, semblable aux surfaces implicites. Le "champ potentiel" généré par l'écran d'épingles est le champ de déformation Ω . Comme nous l'avons montré aux sous-chapitres § 7.1 et § 7.2, l'écran d'épingles à l'équilibre, effectue une convolution de la forme des objets marqueurs par un noyau de convolution qui n'est autre que la réponse impulsionnelle de l'écran d'épingles. Pour différentes interactions entre épingles on peut obtenir différents noyaux de convolution : des exponentielles, des fonctions en $1/r^2$, des fonctions de Bessel ou des fonctions plus complexes (cf § 7.4 et les EEshcos).

²⁴ Les auteurs le reconnaissent : l'utilisation des surfaces de convolution revient à "briser les squelettes en des morceaux infinitésimaux, i.e. des points individuels".

Les surfaces implicites en général et les surfaces de convolution en particulier, définissent des noyaux de convolution (typiquement des exponentielles ou gaussiennes) et génèrent des formes à partir de la convolution de ces noyaux avec les squelettes à visualiser. L'écran d'épingles est un outil générateur de ce type de noyaux de convolution. Ces noyaux ne sont explicitement définies mais sont les résultats d'interactions physiques. Pour générer des noyaux de convolution différentes il est suffisant de changer l'interaction entre les épingle et/ou avec le sol. D'autre part et surtout, l'écran d'épingles peut générer des formes dynamiquement déformables, ce qui est impossible pour les surfaces implicites classiques. La dynamique de celles-ci correspond à un cas particulier d'écran d'épingles vérifiant la condition de la dépendance non-dynamique (§ 4) i.e. la masse m de l'épingle et l'admittance des interactions liées à cette épingle vérifient $m\omega^2 \ll |nY|$. (où ω est la variable de Fourier).

Par contre les surfaces implicites peuvent générer des objets hétérogènes en utilisant différents noyaux pour différents squelettes. Avec l'écran d'épingles, le noyau de convolution est le même pour tous les marqueurs. Donc l'écran d'épingles ne modélise que la forme d'objets homogènes. Pour avoir plusieurs noyaux de convolution différents, il est nécessaire d'utiliser plusieurs écrans d'épingles.

9.2.3. LA DISCRÉTISATION ET LA VISUALISATION DES SURFACES IMPLICITES *POLYGONISATION*

Il y a essentiellement deux manières de visualiser les surfaces implicites en 3D : le lancer de rayon direct et la polygonisation suivie de la visualisation de ces polygones. Un grand nombre de travaux sont consacrés à la polygonisation.

9.2.3.1. Le lancer de rayon direct

Le lancer de rayon direct ([Blinn 82], [Ina 90]) ne nécessite pas la construction d'une surface géométrique globale sur l'équipotentielle. Chaque rayon lancé est discrétisé. Tant que la valeur du champ sur un échantillon donné du rayon est inférieure à l'équipotentielle, on peut avancer d'un échantillon. Lorsque la valeur du champ est supérieure à l'équipotentielle, alors l'équipotentielle a été traversée. On détermine le point d'intersection par dichotomie ou interpolations linéaires successives. Cette recherche peut être accélérée lorsque les surfaces sont munies de boîtes englobantes.

Une fois que la position exacte de l'équipotentielle le long du rayon a été déterminée, il faut déterminer le comportement du rayon par rapport à cette surface. Cela dépend d'une part du vecteur normal à la surface en ce point, et d'autre part d'un modèle d'illumination local. Le vecteur normal est porté par le gradient du champ en ce point. Pour le modèle d'illumination locale, il n'y a pas de contrainte particulière dans le cas des surfaces implicites.

9.2.3.2. La polygonisation dans le référentiel de la scène

La polygonisation consiste à construire sur l'équipotentielle du champ une surface géométrique composée de polygones. Ensuite la visualisation de la surface implicite revient simplement à la visualisation d'un ensemble de polygones. C'est là une tâche pour laquelle de nombreux outils existent.

Mais la tâche de loin la plus difficile est la discrétisation et la structuration de la surface implicite en polygones.

Une méthode couramment utilisée pour la polygonisation nécessite une discrétisation en cellules élémentaires, de l'espace dans lequel évoluent les formes modélisées par surfaces implicites. Dans [Bloom 89] l'espace est discrétisé en cubes (par un octree) alors que dans [HW 90] l'espace est discrétisé en tétraèdres. Dans tous les cas, pour chaque

cellule, on évalue le champ à chaque sommet, et par une comparaison avec la valeur de l'équipotentiel on détermine si la cellule est traversée par la surface ou non. Le cas échéant, pour une cellule traversée par la surface, on détermine les intersections entre la surface et les arêtes de la cellule.

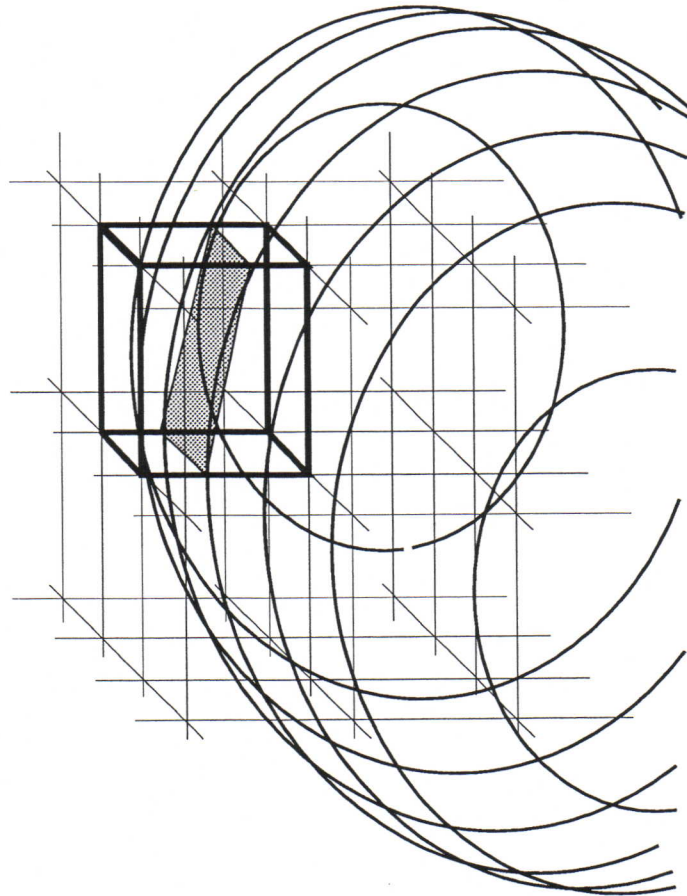


figure 9.2. La surface implicite à visualiser est représentée ici par les traits courbes. Les cellules qui échantillonnent l'espace forment un maillage carré. La cellule représentée en gras est la cellule courante. En déterminant l'intersection de la surface implicite avec tous les arêtes de cette cellule et en reliant ces points d'intersection, on obtient le polygone représenté en grisé. En faisant de même avec toutes les autres cellules, on obtient une approximation de la surface par des polygones.

Ces points d'intersection, liés dans un ordre spécifique représentent un polygone qui est l'approximation de la surface implicite au niveau de cette cellule. Nous avons tenté d'illustrer cela sur la figure 9.2 avec des cellules carrées. Lorsque cette opération a été effectuée pour toutes les cellules, alors une surface fermée approximant la surface implicite et entièrement composée de polygones. Différents algorithmes de recherche permettent de parcourir ces échantillons spatiaux de la manière la plus rapide.

Bloomenthal propose deux méthodes de polygonisation où les cellules sont cubiques [Bloom 89]. Il obtient une partition hiérarchique de l'espace par un octree. Dans sa première méthode, il dispose d'un cube qui englobe la surface implicite à polygonaliser. Ensuite, il subdivise les cubes qui sont traversés par la surface jusqu'à ce que les cubes soient de la taille des cellules. Dans la seconde méthode, il part d'une cellule traversée par la surface implicite et, dans le voisinage de cette première cellule "graine" il cherche d'autres cellules traversées par la surface, et cela jusqu'à ce que toutes les cellules traversées par la surface soient trouvées.

La polygonisation est présentée comme une opération coûteuse. C'est pourquoi, dans un souci d'optimisation, on cherche à adapter la finesse de la discrétisation à celle de la

forme à représenter (le critère retenu est souvent la courbure de la surface). Ainsi, dans les parties où la forme comporte beaucoup de détails, on aura recours à une discrétisation très fine, alors que dans les parties peu accidentées, on se contentera d'une discrétisation plus basse (donc plus économique.)

9.2.3.3. La continuité des surfaces polygonisées

C'est dans ce cadre des méthodes décrites ci-dessus que se pose la question de la continuité de la surface composée de polygones. (Cf figure 9.3).

Dans un octree, chaque face de cube appartient en même temps à deux cubes adjacents de même taille. Avec la discrétisation adaptative, ces deux cubes peuvent ne pas avoir été subdivisés de la même manière. Ainsi, la face commune fait, a priori l'objet de deux discrétisations différentes selon que l'on considère qu'elle appartient à l'un des cubes ou à l'autre.

Le problème de la discontinuité provient de cette multiplicité de discrétisations pour une même face. [Bloom 89] résout ce problème en adoptant une seule discrétisation par face : la discrétisation la plus fine. Une même face aura la même discrétisation quelque soit le cube auquel on l'associe. Dans un même cube, chaque face pourra avoir sa propre discrétisation différente de celle des autres.

Donc quelque soit le côté dont on considère une face donnée, l'intersection entre cette face et la surface implicite est discrétisé de la même manière. Ceci garantit la continuité de l'ensemble de polygones obtenus.

Hall et Warren [HW 90] ont résolu le problème de la discontinuité des surfaces polygonisées en choisissant non pas des cellules cubiques mais des cellules *simpliciales*. (Un *simplexe* est la plus simple décomposition linéaire de l'espace à n dimensions. En 3D, le simplexe est le tétraèdre). Leur pavage initial (avant la subdivision) est un "nid d'abeille" (honeycomb). C'est à dire que chaque face de tétraèdre est adjacente à une seule autre face de tétraèdre. Le processus de subdivision est élaboré de telle manière qu'une subdivision ayant lieu dans un nid d'abeilles produit un autre pavage mais qui est encore un nid d'abeilles. De cette manière cette propriété est conservée tout au long de la subdivision. Ceci garantit la continuité des surfaces obtenues.

La conclusion des deux paragraphes précédents est la suivante : on remarquera que, dans les méthodes de polygonisation décrites ci-dessus, la discrétisation est effectuée dans le référentiel de la scène et non dans le référentiel du squelette qui génère la surface. Il

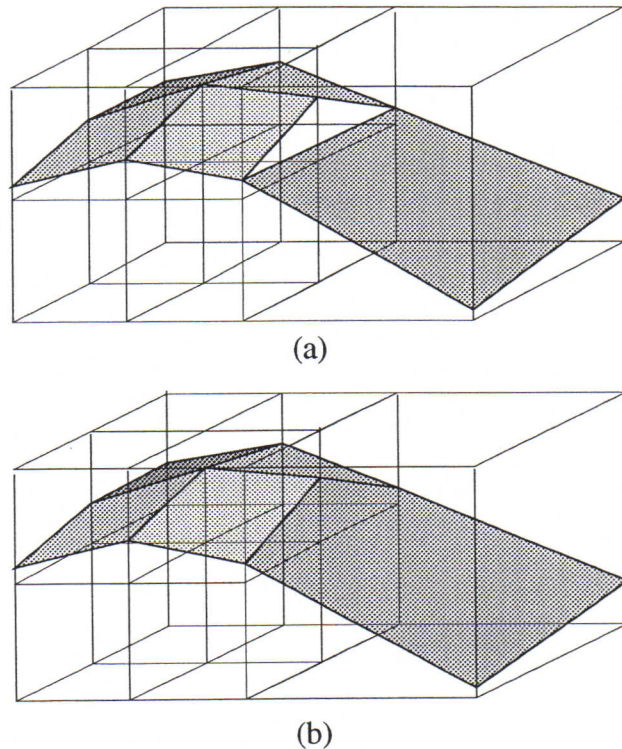


figure 9.3. Le cube de gauche a été subdivisé en huit cubes alors que le cube de droite n'a pas été subdivisé. (a) La face commune est divisée en quatre carrés ou n'est pas divisé selon qu'on considère qu'elle appartient au cube de droite ou au cube de gauche. Ainsi, les sommets du polygone du cube de droite se trouvent uniquement sur les arêtes de ce cube. (b) La face commune admet une seule discrétisation en quatre carrés. Les sommets du polygone du cube de droite ne se trouvent pas tous sur les arêtes de ce cube.

s'ensuit que, si le squelette se déplace, dans le cas général, il sera nécessaire de refaire le calcul de la surface implicite, et donc de refaire le processus de polygonisation. Pour une animation ceci impliquerait que la polygonisation soit refaite à chaque échantillon temporel.

Ceci admet une exception : celle des formes constantes (mobiles ou statiques). Dans ce cas, une première polygonisation permet d'élaborer un prototype. Si le squelette ayant généré la surface implicite est indéformable, alors il n'est pas nécessaire de refaire le calcul de la surface implicite après un déplacement. Il suffit de déplacer la surface implicite de la même manière qu'a été déplacé le squelette. Ainsi, la même discrétisation et les mêmes polygones peuvent être utilisées au cours d'une animation. Ces méthodes de discrétisation ne sont pas adaptées à l'animation de formes variables.

9.2.3.4. La polygonisation dans le référentiel du squelette

Dans les méthodes décrites dans ce paragraphe, la discrétisation est effectuée dans le référentiel du squelette générant la surface. Ceci permet d'utiliser la cohérence temporelle.

Dans [BW 90] on génère des surfaces à partir de squelettes curvilignes. Ils discrétisent la surface implicite par des points appelés "graines" qui sont des points mobiles émises au niveau des sections droites des courbes, au voisinage de l'équipotentielle et qui se dirigent dans la direction opposée à celle du gradient du champ, jusqu'à rencontrer l'équipotentielle. Ces points ne contiennent aucune information de topologie et ne permettent pas de construire une polygonisation. La surface implicite est visualisée simplement par ces points.

On montre qu'avec cette méthode, si les graines sont émises du squelette de manière uniforme, la répartition des graines au niveau de la surface est a priori loin d'être uniforme. Typiquement, pour les surfaces convexes, l'échantillonnage est plus grossier que pour les surfaces planes. Et plus la courbure est grande et plus la surface est grossièrement échantillonnée. Pour les surfaces concaves, l'échantillonnage est plus fine que pour les surfaces planes et devient de plus en plus fin avec la courbure.

[BW 90] n'utilisent pas cette méthode pour élaborer des animations, mais dans la mesure où cette discrétisation a été effectuée dans le référentiel du squelette, et qu'elle peut utiliser la cohérence temporelle pour être mise à jour, cette méthode est susceptible d'être utilisée pour l'animation.

D'après [DTG 95], lorsque la méthode précédente est appliquée à l'animation, indépendamment de la non-uniformité de la répartition des graines, cette répartition change au fur et à mesure des déformations. Après des déformations importantes, et surtout après des changements de topologie, il est nécessaire de procéder à une nouvelle émission de graines. [DTG 95] utilisent également une discrétisation par "graines", mais appliquée, cette fois, à l'animation d'objets déformables. La surface implicite générée par chaque squelette est contenue, toute entière dans une boîte englobante. Au cours des mouvements du squelette, on doit appliquer parallèlement les mêmes déplacements à la boîte englobante, de manière à ce que dans le référentiel du squelette, la boîte englobante soit immobile. Pour discrétiser la surface implicite, [DTG 95] discrétise d'abord la boîte englobante. Chaque point échantillon de la boîte englobante est lié au squelette par un axe. C'est le long de cet axe que se déplacent les graines. Pendant que les graines se déplacent sur leur axe, le champ en chaque graine est comparé à l'équipotentielle V_0 correspondant à la surface. De plus dans ce champ, la contribution de chaque squelette est comparée à la contribution des autres squelettes. Si une graine avant d'atteindre la surface, atteint une zone où la contribution de son squelette n'est pas la plus forte, alors cette graine est désactivée. L'ensemble des graines activées à chaque instant fournit la discrétisation de la surface implicite. Contrairement aux graines utilisées par [BW 90], les graines actives émises par chaque squelette peuvent être caractérisées par un système de

voisinage. Mais entre les graines actives de différents squelettes, les voisinages sont indéterminés. Ainsi, cette discrétisation permet de procéder à une polygonisation partielle. On peut polygonaliser la surface associée à chaque squelette, mais à la frontière des surfaces associées à chaque squelette, à l'endroit où les voisinages sont indéterminés, des discontinuités peuvent être observées.

9.2.3.5. La polygonisation et le contour physique

Enfin la discrétisation peut également être faite physiquement par des points matériels dont l'agencement émerge d'une interaction dynamique. C'est par exemple le cas du modèle appelé "la peau" décrit au paragraphe § 5.5.2.2. Il s'agit d'un modèle 2D dont le principe peut être généralisé au cas 3D. Les interactions physiques régnant entre ces points font émerger une surface structurée avec un maillage qui peut être le support de polygones. L'algorithme de polygonisation est alors contenu dans les propriétés physiques de cette peau.

9.2.4. L'ASSEMBLAGE AVEC RACCORD (BLENDING)

Dans la modélisation par surfaces implicites, une opération très importante est l'assemblage avec raccord de deux formes (blending). Cet assemblage consiste en la mise en commun d'une partie de chacune des deux formes, avec un raccord pour gommer la frontière abrupte entre les deux formes. (figure 9.4.c) Ce type d'opération a une grande importance car la mise en commun sans raccord, produit certes une seule surface. Mais dans cette surface unique, la discontinuité que représente la frontière entre les deux formes continue à les dissocier. (figure 9.4.b)

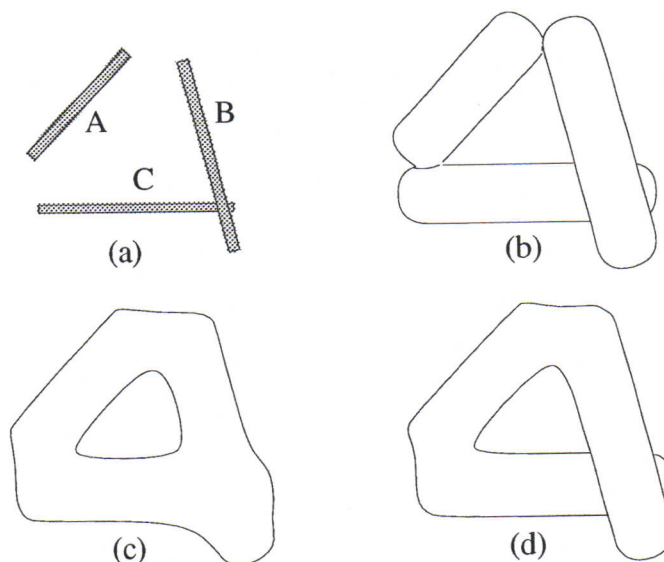


figure 9.4 (a) Un squelette constitué de trois segments A, B et C. (b) Les champs élémentaires générés par chaque segment ne sont pas ajoutés. La forme obtenue est la réunion des équipotentielles des trois champs élémentaires pris séparément (sans raccord) (c) Les champs élémentaires sont ajoutés pour donner un champ global. L'assemblage des formes se fait avec raccord. (d) Les champs générés par A et B s'ajoutent ainsi que les champs générés par A et C. Mais les champs générés par B et C ne s'ajoutent pas. Entre B et C il n'y a pas de raccord.

Prenons le cas de formes finies modélisées par des champs élémentaires s'annulant au delà d'une certaine zone. Dans le principe des surfaces implicites tel qu'il a été décrit précédemment, si ces champs élémentaires s'annulent avec une pente nulle, et si l'opération générant le champ global à partir des champs élémentaires est l'addition, (ces deux conditions sont souvent satisfaites) alors, toutes les formes qui s'approchent en deçà d'une certaine limite, s'unissent automatiquement avec un raccord. Si au contraire au

lieu de s'ajouter les champs élémentaires étaient visualisés séparément, alors les formes se rejoignent plus difficilement et ne forment jamais de raccord.

Le raccord systématique est utilisé très souvent et notamment pour la modélisation d'une seule forme originale à partir de deux formes plus simples. Mais dans le contexte général de la modélisation de formes, l'assemblage avec raccord systématique n'est pas toujours souhaité. Certains travaux ont cherché à produire des règles d'assemblage plus complexes, de manière à ce que certaines formes puissent être assemblées avec raccord et d'autres formes sans raccord (Cf [WW 89] [OM 93] [DTG 95]).

Ceci suppose qu'il existe entre les éléments du squelette une structure, ou tout au moins une relation de voisinage, qui permette de distinguer les éléments du squelette qui doivent être liés avec raccord des autres éléments. Dans tous les travaux cités ci-dessus, les éléments du squelette sont structurés dans un graphe de voisinage.

A chaque instant, pour trouver le champ global $V(M)$ en un point M de l'espace, il faut trouver quel élément du squelette s produit en ce point le champ élémentaire le plus élevé. $V(M)$ sera alors égal à la contribution de l'élément s , à laquelle s'ajoute la contribution des éléments qui sont liés à s par le graphe de voisinage.

Ainsi il devient possible de lier les segments de manière sélective (Cf figure 9.4.d). Dans le contexte de modélisation de forme d'objets, le raccord systématique est utilisé typiquement pour modéliser des formes d'objets non-structurés alors que le raccord sélectif est plutôt associé à des formes d'objets structurés.

L'écran d'épingles réalise systématiquement un raccord. De ce point de vue l'écran d'épingles est beaucoup mieux adapté à la modélisation d'objets homogènes et non-structurés. Pour pouvoir effectuer un raccord sélectif entre deux objets, il faudrait que ces deux objets soient raffinés par deux écrans d'épingles distincts.

9.2.5. LA MODÉLISATION D'OBJETS ET DE COMPORTEMENTS PAR SURFACES IMPLICITES

Jusqu'ici nous nous sommes intéressés à l'usage de surfaces implicites seulement pour la modélisation de formes. Mais le comportement des surfaces implicites pendant une animation, ou même pendant le processus de modélisation interactive, peut évoquer non seulement des formes en mouvement, mais des objets, éventuellement avec des propriétés physiques. Rappelons-nous que les surfaces implicites sont également appelées ("soft objects" ou "blobby models").

9.2.5.1. Exemples

On pourra prendre l'exemple bien connu de l'effet "goutte d'eau". Décrivons grossièrement le phénomène physique comme nous pouvons l'observer. On observe qu'une goutte d'eau en se séparant en deux s'allonge d'abord sous l'effet de la tension superficielle (capillarité). Lorsque les deux parties de cette goutte d'eau tendent à s'éloigner encore, le lien se casse et on obtient ainsi deux gouttes d'eau distinctes. Mais lorsqu'à l'inverse, deux gouttes se rapprochent, le comportement est tout à fait différent. Les gouttes semblent avoir des comportements indépendants jusqu'à la collision. C'est après la collision que l'ensemble se déforme et donne une seule goutte.

A présent considérons un squelette constitué de deux éléments ponctuels, très proches au départ et qui s'éloignent au cours du temps (Cf figure 9.5). Les surfaces générées par ces deux éléments forment d'abord une seule surface ronde. Ensuite on distingue deux parties liées par un raccord. Et enfin on voit les deux parties se séparer en deux surfaces disjointes. Dans les surfaces implicites telles qu'elles ont été décrites dans tous les travaux ci-dessus, le champ dépend seulement de la position des squelettes. Ainsi on

comprendra facilement que si les deux squelettes de la figure 9.6 faisaient le mouvement inverse, les déformations de la surface implicite générées seraient rigoureusement identiques par rapport à la séparation, ce qui, nous l'avons vu n'est pas le cas de la goutte d'eau.

Prenons un autre exemple : lorsqu'un ballon heurte violemment un autre ballon, les deux objets s'aplatissent pendant la collision et se repoussent. A présent considérons le même squelette que précédemment (composé de deux points). Par contre supposons également que les champs générés par les deux points soient de signe contraire. On représente les équipotentielles V_0 et $-V_0$. Le résultat est montré sur la figure 9.6.

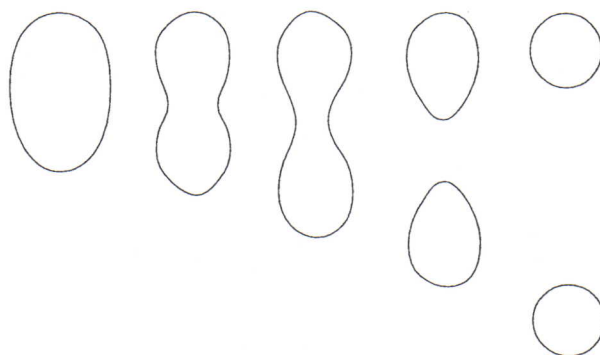


figure 9.5. L'effet "goutte d'eau"

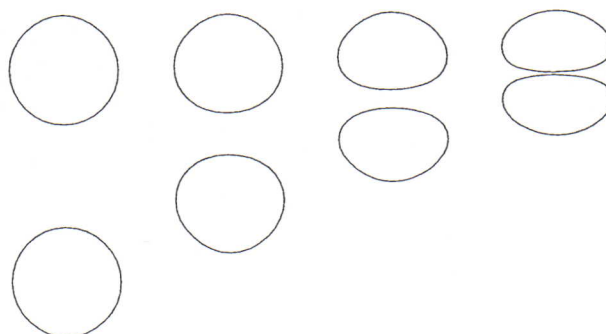


figure 9.6. L'effet d'écrasement entre deux objets

Ces deux exemples montrent la richesse de la représentation par surfaces implicites, et la facilité avec laquelle il est possible de modéliser de nombreux comportements du monde physique. Mais dans le cas de ces deux exemples et dans des cas comparables, il est nécessaire de rester vigilant : ces déformations sont des "effets" et ne peuvent représenter qu'un nombre limité de comportements.

Malgré cela, un grand nombre de travaux dans ce domaine ont tout de même pu obtenir, grâce aux propriétés des surfaces géométriques des surfaces ayant des comportements très proches de ceux d'objets physiques. [ST 95] a pu animer un corps humain dont l'anatomie et les déformations sont très bien rendues. Pour cela, il utilise à la fois la formulation implicite et les surfaces paramétriques. Les déformations d'un bras qui se plie sont modélisées par des surfaces implicites.

Dans d'autres travaux, on ne se contente pas d'interpréter des déformations géométriques comme des déformations physiques : on attribue aux surfaces implicites des propriétés physiques. Par exemple, Opalach et al. cherche à éviter que les éléments distincts d'un squelette en mouvement n'engendrent des surfaces disjointes [OM 93]. Pour cela, le comportement des différents éléments du squelette sont corrélés de manière à ce que la

distance entre les éléments constituant le squelette ne dépasse jamais un seuil, garantissant ainsi la cohérence de la surface générée.

Un travail très important a été effectué dans ce domaine par M.P. Gascuel. Dans [Gasc 93] les objets sont définies par l'équipotentielle $V=V_0=1$ d'un champ f . Ce champ f détermine non seulement la présence ou l'absence de matière à un point donné de l'espace, mais permet également de déterminer la force appliquée à un objet se trouvant en ce point. Les squelettes utilisés sont des objets géométriques indéformables. Mais pendant les collisions entre objets, le contour des objets (la surface implicite) est déformée. La surface de contact est déterminée par le lieu des points où les champs générés par les deux objets sont égaux. Ceci permet de calculer la déformation des surfaces et par suite la force de réaction appliquée aux objets pendant la collision. Dans des travaux suivants, de nombreuses améliorations sont apportées à cet algorithme. La méthode de discrétisation des objets a déjà été décrit plus haut [DTG 95]. L'utilisation des surfaces implicites a également été appliquée à la modélisation d'objets déformables, par l'utilisation de points matériels en interaction physique [DG 94].

9.3. CONCLUSION

Aujourd'hui les surfaces implicites font l'objet d'un ensemble important de travaux et sont utilisées dans d'autres domaines de la synthèse d'images. Elles sont utilisées pour la modélisation d'objets rigides ou très déformables avec ou sans changement de topologie. Cependant c'est dans la modélisation du mouvement d'objets à changement de topologie qu'elles ont rencontré les plus grand succès.

Les surfaces implicites et l'écran d'épingles ont en commun un certain nombre de principes. Dans les deux cas il s'agit d'associer à des points ou à des squelettes, une forme élémentaire définie par une fonction rapidement décroissante. Pour les surfaces implicites, cette fonction est explicitement définie. Dans l'écran d'épingles cette fonction a une définition implicite. Elle est le résultat d'interactions dynamiques. C'est ce que nous avons vu au chapitre § 7.

D'autre part dans la plupart des travaux sur les surfaces implicites, les formes élémentaires sont entièrement définies par la position des éléments du squelette. Ainsi ces surfaces implicites n'apportent aucun degré de liberté supplémentaire au système. Dans certains autres travaux la forme élémentaire dépend également de la vitesse. Avec l'écran d'épingles cette forme est variable en fonction de la position, de la vitesse et de l'accélération des marqueurs. (cf. systèmes du second ordre). Cependant, lorsque cela s'avère nécessaire, il est possible de régler ses paramètres pour qu'il dépende seulement de la position des marqueurs. On montre qu'une très grande variété de systèmes peuvent être modélisés par des assemblages de systèmes du second ordre. Ceci permet d'associer à chaque point d'un marqueur des formes dynamiquement variables et paramétrables (cf chapitre § 8) et de passer continuent d'un comportement dynamique à un autre.

Par contre comme nous l'avons évoqué, les surfaces implicites peuvent aisément produire des objets hétérogènes en associant des noyaux différents à chaque squelette. Par contre, le noyau de l'écran d'épingles dépend des interactions entre épingles, et ces interactions sont homogènes. Un écran d'épingles ne peut générer qu'un seul type de noyau de convolution. Donc il ne peut générer que la forme d'objets de type homogène.

CHAPITRE 10

UN MODÈLE ÉLÉMENTAIRE POUR L'IMAGE

L'étude spécifique d'un modèle de mouvement sort du cadre de ce travail. Le modèle de l'image n'a été utilisé que pour mettre en évidence les formes que nous avons produites. Aussi le modèle d'image décrit ici est particulièrement élémentaire.

A chaque échantillon image, le modèle de l'écran d'épingles fournit la position de toutes les épingles selon la composante Ω . Dans ce chapitre nous allons montrer comment ces positions produisent une image. Comme la structure de l'écran d'épingles est très proche de celle d'une grille de pixels, la production d'une image nécessite seulement des opérations très simples. En l'occurrence l'image sera produite par un simple opérateur linéaire *Chroma* entre la position des épingles et la couleur des pixels.

10.1. LES PIXELS ET LES ÉPINGLES

Les épingles et les pixels sont liées au niveau élémentaire : chaque épingles est associée à un pixel. Les pixels sont caractérisés par trois grandeurs R, G et B qui déterminent la couleur et la luminosité du pixel.

Le nombre d'épingles peut être égal au nombre de pixels, ou être 4 fois moindre, ou 9 fois ou n^2 fois moindre.

Plus précisément, chacune des épingles est associée à un pixel et un seul. Inversement, tous les pixels ne sont pas nécessairement associés à une épingle. Un pixel est associé au plus une épingle. Un pixel effectivement associé à une épingle est un *pixel déterminant* (ou *pixel nœud*) alors qu'un pixel associé à aucun épingle est un *pixel de suréchantillonnage*.

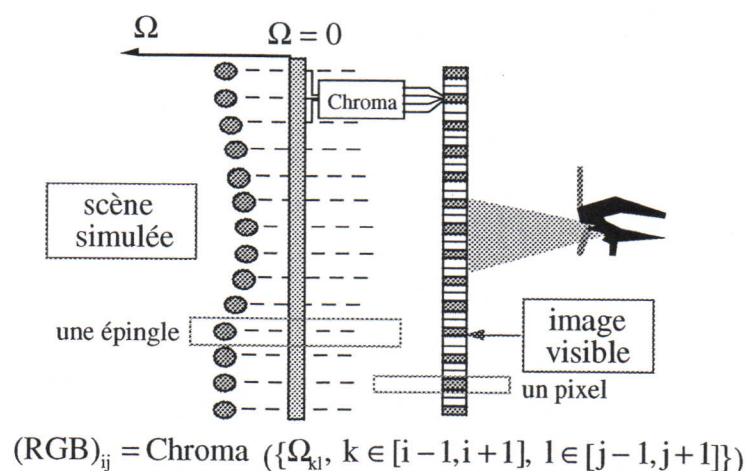


figure 10.1 Une section de l'écran d'épingles en relation avec l'image par l'opérateur Chroma. Les pixels déterminants sont en gris et les pixels de suréchantillonnage en blanc.

Quand tous les pixels sont déterminants, on dit que la résolution de l'écran d'épingles est maximale. Pour des résolutions plus faibles, on aura quatre pixels par épingle, neuf

pixels par épingle etc. A chaque fois, un seul des n^2 pixels est déterminant. La figure 10.1 correspond au cas de la figure 10.2.c.

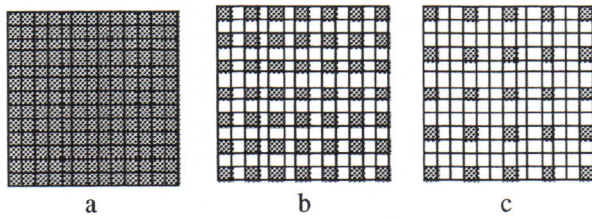


figure 10.2 Trois images composées de pixels. Les écrans d'épingles correspondant ont (a) en pleine résolution, (b) en résolution 1/4 et (c) en résolution 1/9. Les pixels déterminants sont représentés en gris et les pixels de sur-échantillonnage sont en blanc. déterminant associé. (Cf figure 10.3)

10.2. L'OPÉRATEUR *CHROMA*

Le lien entre les épingles et les pixels est un opérateur appelé *Chroma* calculant la couleur de tous les pixels déterminants. L'entrée de *Chroma* est le Ω_{ij} de l'épingle courante et celui de ses voisins (9 entrées au total) et la sortie est constituée de trois valeurs entières R_{ij} , G_{ij} et B_{ij} comprises entre 0 et 255 et représentant la luminosité du pixel

La couleur des pixels de sur-échantillonnage est déterminée par interpolation linéaire à partir de la couleur des pixels déterminants.

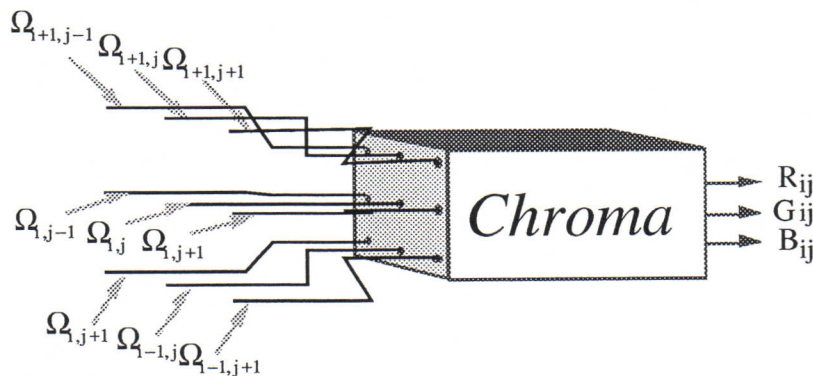


figure 10.3 Le passage de la scène simulée à l'image visible se fait par l'opérateur *Chroma* qui est appliqué à toutes épingles et leurs pixels associés dont il détermine la couleur

L'opérateur *Chroma* se divise à son tour en deux sous-opérateurs : *Chroma_w* et *Chroma_RGB* (cf figure 10.4) *Chroma_RGB* est un opérateur qui, à partir d'une seule grandeur scalaire w , ayant la dimension d'une longueur fournit quatre grandeurs scalaires R, G et B destinées directement au framebuffer. *Chroma_w* est un opérateur qui prend en entrée le Ω_{ij} d'une épingle et de ses plus proches 8 voisins et qui en sortie fournit un grandeur scalaire w_{ij} qui a la dimension d'une longueur.

10.2.1. CHROMA_w

Pour *Chroma_w* il existe sept possibilités. Il correspondent à peu près aux images de l'annexe A.

1. L'identité : $w_{ij} \leftarrow \Omega_{i,j}$
2. Le laplacien : $w_{ij} \leftarrow (4.\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j} - \Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j-1} - \Omega_{i,j+1}) / 4$
3. Le gradient vertical : $w_{ij} \leftarrow | \Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j} |$
4. Le gradient horizontal : $w_{ij} \leftarrow | \Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1} |$

5. Le module du gradient : $w_{ij} \leftarrow [(\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j})^2 + (\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j})^2]^{1/2}$

6. Cadoz1 : $w_{ij} \leftarrow |\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j-1}|$ si $i+j$ est pair

$w_{ij} \leftarrow |\Omega_{i,j-1} - \Omega_{i-1,j}|$ si $i+j$ est impair

7. Cadoz2 : $w_{ij} \leftarrow (|\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}| + |\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}|) / 2$

8. Eclairage45 : $w_{ij} \leftarrow \alpha_1 \cdot (\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}) + \alpha_2 \cdot (\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1})$

où α_1 et α_2 sont des coefficients compris entre 0 et 1. Le contrôle de ces deux coefficients permet de contrôler la direction d'où semble venir la lumière.

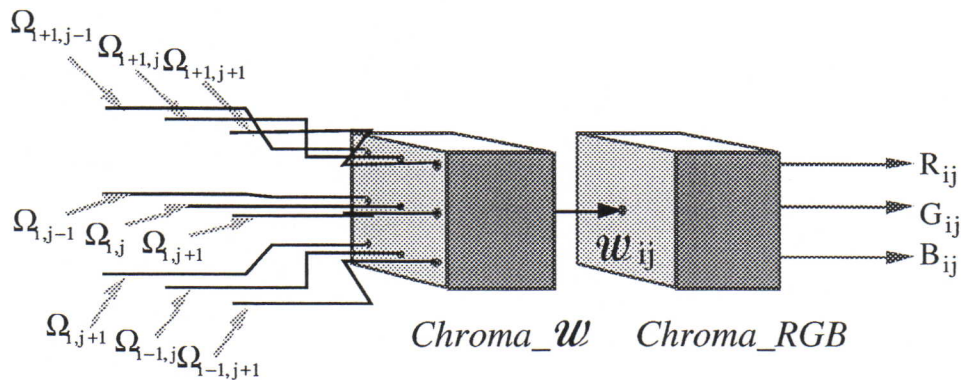


figure 10.4 Les deux sous-opérateur de Chroma

Selon la possibilité retenue, w_{ij} peut représenter soit la hauteur Ω_{ij} des épingles soit la variation spatiale de cette hauteur. Dans tous les cas c'est w_{ij} seul qui détermine la couleur des pixels. La relation entre w_{ij} et la couleur du pixel est déterminée par l'opérateur *Chroma_RGB*.

10.2.2. CHROMA_RGB

Etant donné une grandeur scalaire w_{ij} , il faut définir la luminosité R, G et B du pixel correspondant.

R, G et B sont des valeurs entières comprises entre 0 et 255. Par contre les valeurs de w_{ij} peuvent évoluer arbitrairement. La transformation sera donc globalement non-linéaire. Cependant nous avons fait le choix d'une transformation localement linéaire : tant que les valeurs de R, G et de B restent dans l'intervalle [0,255] ils évolueront linéairement avec la valeur de w_{ij} .

D'autre part, nous avons fait le choix d'images monotointe. Donc les courbes d'évolution de R, G et de B en fonction de w_{ij} devront nécessairement rencontrer l'axe des abscisses pour la même valeur de $w_{ij} = w_{\text{noir}}$. (cf figure 10.5)

La spécification des valeurs $R_0G_0B_0$ obtenues pour une autre valeur de w ($w_{ij} = w_{\text{col}}$) détermine entièrement les trois courbes. La loi d'intensité est donc entièrement déterminée par la donnée de cinq valeurs : w_{noir} , w_{col} , R_0 , G_0 et B_0

Etant donnée ces cinq valeurs la couleur des pixels variera donc linéairement en gardant la même teinte tant que les trois composantes sont comprises dans l'intervalle [0,255].

$$R = R_0 \frac{w - w_{\text{noir}}}{w_{\text{col}} - w_{\text{noir}}} \quad G = G_0 \frac{w - w_{\text{noir}}}{w_{\text{col}} - w_{\text{noir}}} \quad B = B_0 \frac{w - w_{\text{noir}}}{w_{\text{col}} - w_{\text{noir}}}$$

En deçà de la valeur w_{noir} R G et B seront nuls (couleur noire) Au delà de la valeur :

$$w_{\text{satR}} = w_{\text{noir}} + (w_{\text{col}} - w_{\text{noir}}) \frac{255}{R_0}$$

R sera uniformément égal à 255. On définit de même les grandeurs w_{satG} et w_{satB} . Soit w_{satMIN} la plus petite des trois valeurs et soit w_{satMAX} la plus grande. Au delà de w_{satMAX} R, G et B seront à 255 (couleur blanche). Mais entre w_{satMIN} et w_{satMAX} la teinte ne restera pas constante.

En conclusion, le choix des paramètres w_{noir} , w_{col} , R_0 , G_0 et B_0 devra être fait de manière à ce que toutes les valeurs de w restent entre w_{noir} et w_{satMIN} .

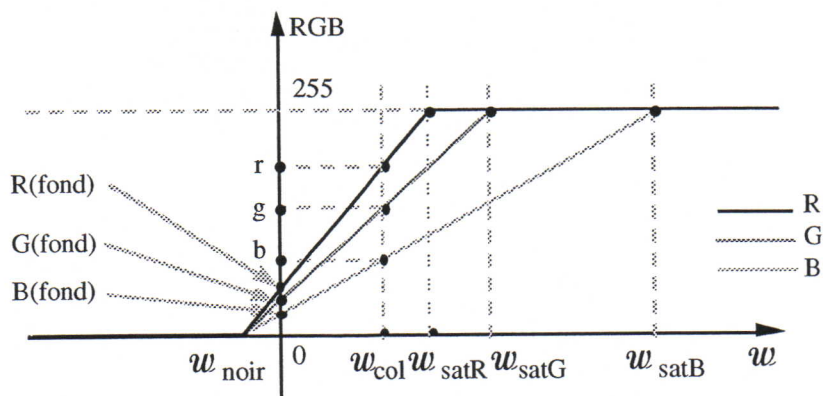


figure 10.5 La loi d'intensité : l'évolution des composantes d'un pixel en fonction de w_{ij} .

Pour tous les types de Chroma_ w qui prennent en compte les variations spatiales (toutes sauf les Chroma_ w de type $I=kz$), le fond est caractérisé par $w=0$. Sur la figure 10.5 la couleur du fond a été indiquée. Il s'agit de l'intersection des trois courbes avec la droite $w=0$. Ainsi, on voit que le contrôle de w_{noir} permet d'obtenir un fond plus ou moins brillant.

10.3. CONCLUSION

Dans le cas de l'écran d'épingles, des lois d'intensité plus complexes ont été expérimentées. On peut voir les images résultantes dans l'annexe B (cf figures B.***). Cependant ce modèle d'image reste très élémentaire. Des modèles d'image plus élaborés sont en cours de conception et de réalisation. Il s'agit de rendre compte de manière plus pertinente des phénomènes optiques en jeu et d'aboutir à un modèle d'image adapté à l'animation et aux modèles physiques.

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons étudié les notions de mouvement, de forme et d'image. Nous avons également étudié les relations entre ces trois entités. Dans un grand nombre de travaux la modélisation d'objets peu déformables nécessite typiquement trois modèles : d'une part un modèle de mouvement, dynamique mais avec peu de degrés de liberté, et d'autre part un modèle de forme ayant des propriétés géométriques, et enfin on peut attribuer à ce modèle de forme des propriétés optiques et produire une image. Il s'agit typiquement d'un modèle non-dynamique mais avec beaucoup de points. Dans cette thèse le modèle de mouvement et le modèle de forme ont été appelés respectivement l'OPP (Objet Physique Profond) et le SCO (Support de Contour Optique).

Les objets très déformables possèdent par définition un grand nombre de degrés de liberté. Plus précisément, les objets que nous percevons comme très déformables, ont un grand nombre de degrés de liberté perceptibles. Pour la représentation de ces objets, on ne peut pas faire l'économie du grand nombre de degrés de liberté. Nous avons vu (§ 4) que l'utilisation de points non-dynamiques (i.e. qui n'ajoutent pas de degrés de liberté supplémentaires) produit des modèles peu déformables. D'un autre côté un degré de liberté par définition est indépendant et doit faire l'objet d'une simulation. Donc les modèles d'OPP à grand nombre de degrés de liberté nécessitent souvent des simulations importantes et coûteuses.

Or les objets très déformables sont souvent le siège de nombreux phénomènes complexes caractérisés par des échelles variées. Le premier apport de cette thèse est d'avoir abordé la formalisation de la modélisation physique multi-échelle : le mouvement des objets très déformables peut être modélisé, non pas par un seul modèle OPP, mais par un ensemble de modèles autonomes et couplés, chacun rendant compte d'un phénomène à sa propre échelle et avec ses propres spécificités. Nous avons vu que dans de nombreux cas cette modélisation s'avère beaucoup moins coûteuse. Dans ce contexte, l'OPP n'est qu'un modèle particulier rendant compte seulement des phénomènes les plus énergétiques et les plus profonds. Entre l'OPP et le SCO, (i.e. entre le geste et le regard) il peut y avoir d'autant plus de modèles en interaction que l'objet est déformable. Parmi ces modèles certains sont des modèles de mouvement, certains des modèles de forme, et un grand nombre participent à la fois aux deux aspects de manière importante. L'ensemble de ces modèles (hormis l'OPP) font partie de ce que nous avons appelé le *processus de visualisation*.

Entre les différentes parties d'un modèle dynamique, et notamment entre les différents modèles constituant un modèle multi-échelles, la communication doit a priori être bidirectionnelle. La communication unidirectionnelle constitue une simplification qui permet d'effectuer les simulations importantes en plusieurs étapes. C'est le principe de l'habillage. Les liaisons rigides et les points géométriques sont également des simplifications. Dans tous les cas, ces simplifications modifient véritablement le modèle global et ses propriétés physiques. Le second apport essentiel de cette thèse a été de déterminer dans quelles conditions ces simplifications n'apportent pas de changement notable dans le comportement du système global. Dans le contexte de la modélisation des objets très déformables, l'habillage nous a permis de simuler de nombreux modèles importants en plusieurs étapes, chacune étant peu coûteuse.

Les principes de la modélisation physique multi-échelle et de l'habillage ont été utilisés pour la conception, la réalisation et l'étude d'un modèle pour la génération de formes en

mouvement adapté à la visualisation des objets très déformables. Ce modèle est l'écran d'épingles ou l'écran de gravure et ce travail constitue le troisième et dernier apport essentiel de cette thèse.

Ce modèle est fondé sur le principe de la gravure. Au lieu de visualiser directement la forme d'un objet physique, il s'agit de visualiser la forme de sa trace dans un substrat déformable. Or la forme et le mouvement de cette trace dépendent aussi bien de la forme et du mouvement de l'objet marqueur que des propriétés physiques du substrat. La trace devient alors un objet à part entière ayant une forme et des propriétés physiques. Celles-ci sont une combinaison de celles du marqueur et de celles du substrat.

Nous avons montré que l'écran d'épingles est un substrat ayant des propriétés très intéressantes pour la visualisation des objets très déformables. Outre son grand nombre de degrés de liberté permettant de représenter des déformations riches, outre sa capacité d'intégrer dans une même forme en mouvement un ensemble de points voisins, enfin outre sa structure qui se prête facilement à la systématisation des opérations et à la parallélisation, l'écran d'épingles permet surtout d'ajouter à un modèle d'OPP des déformations dynamiques riches pouvant être qualitativement et quantitativement contrôlées.

Les images que nous avons obtenues ont été réalisées par un modèle d'écran d'épingles à maillage isotrope, avec des interactions dynamiques simples, et marqué par des marqueurs homogènes simples évoluant dans une scène 2D. Pourtant les comportements obtenus sont assez complexes. C'est pourquoi le contrôle du maillage de l'écran, l'utilisation d'interactions dynamiques plus complexes (par exemple celles de § 7.4), ou la construction de marqueurs plus complexes sont des aspects très prometteurs, mais qui ont seulement été abordés dans cette thèse. Ces aspects nécessitent un travail plus important. Enfin et surtout l'extension du principe de la gravure à des scènes 3D semble une étape inévitable qui n'a été abordée ici que d'un point de vue formel. Cette extension, si elle est porteuse de promesses, pose également un ensemble de questions importantes, notamment celle du coût de la simulation. Pour pouvoir aborder cette étude il semble nécessaire d'utiliser au maximum les possibilités de systématisation et de parallélisation qu'offre la structure de l'écran d'épingles.

Enfin la modélisation de l'image proprement dite et des phénomènes optiques n'a pu être abordée ici que de manière très passagère. Les modèles existants sont fondés sur l'optique géométrique et opèrent sur des surfaces construites géométriquement. Or la forme des objets très déformables ne peut pas toujours être représentée par des surfaces géométriques. A dessein, le modèle d'image ici a été voulu très élémentaire car le propos était essentiellement la modélisation du support du contour optique. Cependant cette étude a permis de construire les bases du travail plus important et plus passionnant qu'est la recherche d'un véritable modèle d'interaction entre la lumière et les objets très déformables.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ABT 87]. M. AMMI, D. BIDEAU, J.P. TROADEC *Geometrical Structure of Disordered Packings of Regular Polygons ; Comparison With Disc Packing Structures* Journal of Physics D : Appl. Phys. 20 (1987) 424-428
- [AG 85] W. ARMSTRONG M. GREEN *The Dynamics of Articulated Rigid Bodies for Purposes of Animation*. Actes de Graphics Interface 85, pages 407-415, Montréal, mai 1985
- [BB 88] R. BARZEL, A. BARR *A Modeling System Based on Dynamic Constraints* Actes de Siggraph'88, 22(4) : 179-188, août 1988
- [Blinn 82] J.F. BLINN *A Generalization of Algebraic Surface Drawing* ACM Transactions on Graphics Vol. 1, No.3 pages 235 - 256 Juillet 1982
- [Blo 88] J. BLOOMENTHAL *Polygonization of implicit surfaces* Computer Aided Geometric Design 5 pages 341-355 North Holland 1988
- [BN 83] R. BOITE, J NEIRYNCK *Théorie des réseaux de Kirchhoff* Presses polytechniques romandes 1983
- [BS 91] J. BLOOMENTHAL, K. SHOEMAKE *Convolution Surfaces* Actes de Siggraph'91 Vol. 25, N° 4 pages 251-256, Las Vegas, 18 Juillet-2 Août 1991
- [BW 90] J. BLOOMENTHAL, B. WYVILL *Interactive Techniques for Implicit Modeling* Computer Graphics Vol. 24 N° 2 pages 109-116, Mars 1990
- [BW 92] D. BARAFF, A. WITKIN *Dynamic Simulation of Non-penetrating Flexible Bodies* Actes de Siggraph'92 Vol. 26 n° 2 : pp 303-308 Juillet 1992
- [Cadoz 90] C. CADOZ, *Simuler pour connaître et connaître pour simuler Réflexions sur la Représentation, la Modélisation, la Simulation et la Création avec l'Ordinateur*, Colloque International Modèles Physiques Créations Musicale et Ordinateur Grenoble 1990
- [Cal 93] P. CALLET *De l'effet de la mouture des pigments sur la couleur des peintures* Premières Journées AFIG-GROPLAN Bordeaux 1993
- [Candel 91] S. CANDEL *Cours de Mécanique des Fluides* Ecole Centrale de Paris (2^e année vol 2) 1991
- [CHP 89] J.E. CHADWICK, D.R.HAUMANN R.E.PARENT *Layered Construction for Deformable Animated Characters* Actes de Siggraph'89 Vol.23 n°3 pp 243-252 Juillet 1989
- [CL 95] B. CHANCLOU A. LUCIANI *Physical Models and Dynamic Simulation of Planetary Vehicles with a Great Number of Degrees of Freedom* Intelligent Autonomous Systems U. Rembold et al. (Eds.) IOS Press 1995
- [CLF 93]. C. CADOZ, A. LUCIANI, JL FLORENS, *CORDIS-ANIMA : A Modeling and Simulation System for Sound and Image Synthesis - The General Formalism* Computer Music Journal, 1993,10(1), 19-29, M.I.T. Press
- [CL 86] C. CADOZ, A. LUCIANI *Utilisation de modèles mécaniques et géométriques pour la synthèse sonore et le contrôle d'images animées*. Deuxième colloque image CESTA Nice 1986

- [CLH 96] B. CHANCLOU, A. LUCIANI, A. HABIBI, *Physical Models of Loose Soils Dynamically Marked by a Moving Object* Actes de Computer Animation Conference 96 à Genève, Confédération Helvétique Juin 1996
- [Corn 70] T. CORNSWEET *Visual Perception* Academic Press Londres 1970
- [DG 94] M. DESBRUN, M.P. GASCUEL *Highly Deformable Material for Animation and Collision Processing* Actes du cinquième Workshop Eurographics sur l'animation et la simulation, Oslo, 17-18 Septembre 1994
- [DG 95] M. DESBRUN, M.P. GASCUEL *Animating Soft Substances with Implicit Surfaces* Actes de Siggraph'95 Annual Conference Series pages 287-290 Los Angeles 6-11Août 1995
- [DTG 95] M. DESBRUN, N. TSINGOS, M.P. GASCUEL *Adaptive Sampling of Implicit Surfaces for Interactive Modeling and Animation* Actes de First International Workshop on Implicit Surfaces pages 171-185 Grenoble 18-19 Avril 1995
- [FHP 86] U. FRISCH, B. HASSLACHER, et Y. POMEAU. *Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation*. Phys. Rev. Lett., 56, 1505-1508, 1986
- [Florens 78] J.L. FLORENS *Coupleur gestuel interactif pour la commande et le contrôle de sons synthétisés en temps réel*, Thèse troisième cycle Electronique INPG Grenoble 1978
- [Gasc 93] M.P. GASCUEL *An Implicit Formulation for Precise Contact Modeling between Flexible Solids* Actes de Siggraph'93 22(4) : 313-320, 1993
- [GG 92] J.D. GASCUEL M.P. GASCUEL *Displacement Constraints : a New Method for Interactive Dynamic Animation of Articulated Solids* Proceedings of 3th Workshop Eurographics on Animation et Simulation, Cambridge UK septembre 1992
- [Godard 94] A. GODARD Mémoire DEA informatique *Construction d'Objets Déformables et Brisables pour l'Animation et la Synthèse d'Images* INPG 21 Juin 1994
- [GS 85] H. GIÉ, J.P. SARMANT *Electromagnétisme* vol. 2 page 57 Ed. Lavoisier (Technique et Documentation) Paris 1985
- [GTT 89] J.P. GOURRET, N.M. THALMANN, D. THALMANN *Simulation of Object and Human Skin Deformations in a Grasping Task* Actes de Siggraph'89 Vol.23 n°3 pp 21-30 Juillet 1989
- [Gre 73] D. GREENSPAN *Discrete Models*, Reading in Applied Mathematics, Addison Wesley, 1973
- [Hab 93] A. HABIBI *Etude par la synthèse, de la relation forme-mouvement. "Du modèle physique au regard" Plusieurs strates de modélisation*. Mémoire de DEA Sciences Cognitives INPG 93
- [Hae 90] P. HAEBERLI *Paint By Numbers : Abstract Image Representations* Actes de Siggraph'90 Vol. 24, No. 4, pp 207-204 Août 1990
- [HL 93] A. HABIBI, A. LUCIANI *Physical models for the visualization of animated images "From the Physical Model to the Eye"*. Proceedings of 4th Workshop Eurographics on Animation et Simulation - Barcelone Septembre 1993, pp 246-264.
- [HLF 86] D. D'HUMIERES, P. LALLEMAND, et U. FRISCH. *Lattice gas models for 3D hydrodynamics*. Europhys. Lett, 2, 291-297 1986

- [HLV 96] A. HABIBI, A. LUCIANI, A. VAPILLON *A physically-based Model for the Simulation of Reactive Turbulent Objects* Actes de la conférence WSCG 96 (Winter School on Computer Graphics) pp 113-122 à Plzen, République Tchèque.
- [HPP 76] J. HARDY, O. DE PAZZIS et Y. POMEAU *Molecular Dynamics of a Classical Lattice gas : transport properties and time correlation functions*. Phys Rev. A, 13, 1949-1961 1976
- [HW 90] M. HALL, J. WARREN *Adaptive Polygonization of Implicitly Defined Surfaces* IEEE Computer Graphics & Applications pages 33-42 November 1990
- [IC 87] P.M. ISAACS , M.F. COHEN *Controlling Dynamic Simulation with Kinematic Constraints Behavior Functions and Inverse Dynamics* Computer Graphics, 21(4) : 215-224, juillet 1987
- [Ina 90] M. INAKAGE "A simple model of flames" Actes de CG International'90 pp 71-81
- [Incerti 96] E. INCERTI *Synthèse de sons par modélisation physique de structures vibrantes* Thèse d'informatique INPG 19 Septembre 1996
- [Jim 89] S. JIMENEZ *Modélisation et simulation d'objets volumiques déformables complexes* DEA informatique INPG 1989
- [Jim 93] S. JIMENEZ *Modélisation et Simulation Physique d'Objets Volumiques Déformables Complexes* Thèse d'Informatique INPG novembre 1993
- [Kauf 70] A. KAUFMANN *Des points et des flèches, la théorie des graphes* Editions Dunod Paris 1970.
- [KB 83] J. KOREIN, N. BADLER *Temporal Anti-Aliasing in Computer Generated Animation* Actes de Siggraph '83 Vol. 17, No. 3, pp 377-388 Juillet 1983
- [Les 94] M. LESIEUR *La Turbulence* Presses Universitaires de Grenoble 1994
- [Lew 84] J.P. LEWIS *Texture synthesis for Digital Painting* Actes de Siggraph '84. Vol 18, No.3 pp 245-252
- [LHM 95] A. LUCIANI, A. HABIBI, E. MANZOTTI, *A Multi-Scale Physical Model of Granular Materials* Actes de la conférence *Graphics Interface 95* pp 136-146 à Québec Canada
- [LHV 95] A. LUCIANI, A. HABIBI, A. VAPILLON, Y. Duroc *A Physical Model of Turbulent Fluids*. Actes du sixième workshop Eurographics sur l'animation et la simulation pp 16-29 à Maastricht Pays-Bas 95.
- [LICP 93] M.A. LAZARO, A. IBORRA, P. CAMPOY, P. BLANC *A realistic depth of field effect based on real cameras for blending real and computer generated images* Quatrième Workshop Eurographics sur l'animation et la simulation Barcelone 1993
- [Luc 85] A. LUCIANI Doctorat d'électronique *Un outil informatique de création d'images animées : Modèles d'objets, langage, contrôle gestuel en temps réel, le système Anima*. Soutenue le 4 Novembre 1985 à l'INPG Grenoble.
- [Max 72] J. MAX *Méthodes & Techniques de Traitement du Signal* Nouvelle édition en deux volumes (1985 et 1987) Masson 1972
- [Miller 88] G. MILLER *The Motion Dynamics of Snakes and Worms* Actes de Siggraph'88 Vol. 22 n°4 pp 169-178 Août 1988

- [MK 90] G. MILLER M. KASS *Rapid Stable Fluid Dynamics for Computer Graphics* Actes de Siggraph'90 24(4) pp 49-55 août 1990
- [ML 85] N.L. MAX, D.M. LERNER *A Two and a Half-D Motion Blur Algorithm* Actes de Siggraph '85 Vol. 19, No.3, pp 85-93
- [MP 89] G. MILLER A. PEARCE *Globular Dynamics : A Connected Particle System For Animating Viscous Fluids* Computers & Graphics Vol. 13, No. 3, pp. 305-309, 1989
- [MT 92] D. METAXAS D. TERZOPOULOS *Dynamic Deformation of Solid Primitives with Constraints* Actes de Siggraph'92 Vol. 26 n°2 pp 309-312 Juillet 1992
- [Muraki 91] S. MURAKI *Volumetric Shape Description of Range Data using "Blobby Model"* Actes de Siggraph'91 Vol. 25, N°4 pages 227-235 Las Vegas, 28 Juillet - 2 Août 1991
- [MW 85] M. MOORE J. WILHELMS. *Collision Detection and Response for Computer Animation* Actes de Siggraph'88, 22(4) : 289-198, août 1988
- [NCL 96] J. NOURI, C. CADOZ, A. LUCIANI *The Physical Modelling of Complex Physical Structures : The Mechanical Clockwork, Motion, Image and Sound* Actes de Computer Animation Conference 96 à Genève Confédération Helvétique Juin 1996.
- [NHKKSO 85] NISHIMURA H., HIRAI A., KAWAI T., KAWATA T., SHIRIKAWA I., OMURA K., *Object modeling by distribution function and a method of image generation.* Journal of papers given at the Electronics Communications Conference 1985, J68-D(4), 1985 (en Japonais)
- [Norman 80] L. NORMAN *Traitement de l'information et comportement humain, une introduction à la psychologie* Editions Etudes Vivantes Montréal Canada 1980.
- [OB 93] J.P. ORLIAGUET L.J. BOE *The role of linguistics for the speed of handwriting movements : effects of spelling uncertainty* Acta Psychologica, 82, 103-114
- [OM 93] A. OPALACH, S. MADDOCK *Implicit Surfaces : Appearance, Blending and Consistency* Actes du quatrième Workshop Eurographics sur l'animation et la simulation, pages 233-245 Barcelone, Septembre 1993
- [Pell 92] G. DI PELLIGRINO et al. *Understanding motor events : a neurophysiological study.* Experimental Brain Research, 91, 176-180
- [PF 90] P. POULIN, A. FOURNIER *A Model for Anisotropic Reflection* Actes de Siggraph'90 Volume 24 n°4 Août 1990 pp 273-281
- [PC 83] M. POTMESIL, I. CHAKRAVARTY *Modeling Motion Blur in Computer-Generated Images* Actes de Siggraph '83 Vol. 17, No. 3, pp 389-399 Juillet 1983
- [PW 89] A.PENTLAND, J. WILLIAMS *Good Vibrations : Modal Dynamics for Graphics and Animation* Actes de Siggraph'89 Vol.23 n°3 pp 215-222 Juillet 1989
- [SF 93] J. Stam and E. Fiume *Turbulent Wind Fields for Gaseous Phenomena* ACM Computer Graphics (SIGGRAPH' 93), p 369-376, August 1993
- [SF 95] J. Stam and E. Fiume *Depicting Fire and Other Gaseous Phenomena Using Diffusion Processes* ACM Computer Graphics (SIGGRAPH' 95), p 129-136, August 1993
- [SP 91] S. SCARLOFF, A. PENTLAND *Generalized Implicit Functions For Computer Graphics* Siggraph'91 pages 247-250 Las Vegas, 28 Juillet-2 Août 1991

- [ST 95] J. SHEN, D. THALMANN *Interactive shape design using metaballs and splines* Actes du premier atelier international sur les surfaces implicites pages 187-196 Grenoble 18-19 Avril 1995
- [Sua 85] R. SUARDET *Thermodynamique* Ed. Lavoisier (Technique et Documentation) Paris 1985
- [TF 88] D. TERZOPOULOS, K. FLEISCHER. *Modeling Inelastic Deformations : Viscoelasticity, Plasticity, Fracture* Actes de Siggraph'88 22(4) : 209-278, août 1988
- [Ton 91] D. TONNESEN *Modeling Liquids and Solids Using Thermal Particles* Actes de Graphics Interface'91 pages 255-262
- [TPF 89] D. TERZOPOULOS, J. PLATT, K. FLEISCHER *Heating and Melting Deformable Models (From Goop to Glop)* Actes de Graphics Interface'89
- [TPBF 87] D. TERZOPOULOS, J. PLATT, A. BARR, K. FLEISCHER *Elastically Deformable Models* Actes de Siggraph'87, 21(4) : 205-214, juillet 1987
- [Uhl 96] C. UHL *Architecture de machine pour la simulation d'objets physiques en temps-réel* Thèse Signal-Image-Parole INPG Juin 1996
- [Van Overveld 91] C. VAN OVERVELD. *An Iterative Approach to Dynamic Simulation of 3D Rigid-Body Motions for Real-Time Interactive Computer Animation* The Visual Computer 7 : 29-38, 1991
- [VS 90] P. VIVIANI et N. STUCCHI *Motor perceptual interactions* Tutorials in Motor behavior II Corse 1990.
- [VS 91] P. VIVIANI et N. STUCCHI *Biological movements look uniform. Evidence of Motor-perceptual Interactions* Journal of Experimental Psychology Juillet 1991
- [WB 85] J. WILHELMS B. BARSKY *Using Dynamic Analysis to Animate Articulated Bodies as Humans and Robots* Actes de Graphics Interface 85, pages 97-104, Montréal, mai 1985
- [Winter 90] D.A. WINTER *Biomechanics and motor control of human movement* 1990
- [WK 88] A. WITKIN, M. KASS *Spacetime Constraints* Actes de Siggraph'88, Vol. 22 n°4 : 159-168, août 1988
- [WMW 86] G. WYVILL, C. McPHEETERS, B. WYVILL *Data structures for soft objects* The Visual Computer Vol.2 N° 4, pages 227-234 Springer-Verlag 1986
- [WW 89] B. WYVILL, G. WYVILL *Field functions for implicit surfaces* The Visual Computer Vol. 5 pages 75-82 Springer-Verlag 1989
- [WW 90] A. WITKIN et W. WELCH. *Fast animation and control of non-rigid structures.* Actes de Siggraph'90 Vol. 24 pp 243-252 Août 1990
- [WWM 87] G. WYVILL, B. WYVILL, Craig McPHEETERS *Solid Texturing of Soft Objects*, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 7 N° 12 pages 20-26 1987
- [XM 93] XIN LI J. MOSHEL M. *Modeling Soil : Realtime Dynamic Models for Soil Slippage and Manipulation* Actes de Siggraph'93 Annual Conference Series 1-6 August 1993 Anaheim California

ANNEXE A

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Voici quelques éléments concernant les transformées de Fourier. Les signaux temporels ($v(t)$, $f(t)$, $p(t)$ etc) sont représentés par des lettres minuscules alors que les transformées de Fourier ($V(\omega)$, $F(\omega)$, $P(\omega)$) seront représentées par des majuscules. L'opérateur transformée de Fourier sera noté $\mathcal{F}\{\}$ alors que l'opérateur transformée de Fourier inverse sera noté $\mathcal{F}^{-1}\{\}$.

A.1. DÉFINITION

Soit g une fonction dérivable de la variable t telle que $g(t)$ et $g'(t)$ soient continues par morceaux dans tout intervalle fini et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{A.1})$$

Soit j défini par $j^2 = -1$. Dans ce cas la transformée de Fourier de g est :

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.2})$$

Et la transformée inverse de G est :

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.3})$$

Nous rappelons que le *support* de $|G(\omega)|$ (i.e. l'ensemble des valeurs de ω pour lesquelles $|G(\omega)|$ n'est pas nul) est le *spectre temporel* de $g(t)$. La variable ω peut être associée à une notion de fréquence ou plus généralement, à une notion de vitesse de variation. Un signal $g(t)$ pour lequel les grandes valeurs de $|G(\omega)|$ sont atteintes pour de grandes valeurs de ω , est un signal rapide, alors que quand elles sont atteintes pour de petites valeurs de ω , alors $g(t)$ est un signal lent.

A.2. LA DÉRIVATION ET L'INTÉGRATION

On montre que la dérivation et l'intégration d'un signal dans le domaine temporel revient à une multiplication et une division de sa transformée de Fourier par $j\omega$ dans le domaine des fréquences :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dg}{dt}(t)\right\} = j\omega \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_c^t g(\tau) d\tau\right\} = \frac{\mathcal{F}\{g(t)\}}{j\omega} \quad (\text{A.5})$$

A.3. LE THÉORÈME DE PLANCHEREL

La convolution de deux fonction $x(t)$ et $y(t)$ est définie par :

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)y(t-\tau)| d\tau \quad (\text{A.6})$$

Lorsque cet intégrale existe, $x(t)$ ne sont pas nécessairement des fonctions du temps. Notamment elles peuvent des fonctions de la pulsation temporelle ω .

Le théorème de Plancherel indique la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse du produit de deux fonctions.

$$\mathcal{F}\{x(t) \otimes y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \mathcal{F}\{y(t)\} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{F}\{x(t) y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \otimes \mathcal{F}\{y(t)\} \quad (\text{A.8})$$

A.4. LA DENSITÉ SPECTRALE D'ÉNERGIE

Les signaux d'énergie totale finie sont des signaux $x(t)$ tels que :

$$\overline{|x(t)|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \quad (\text{A.9})$$

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux réels d'énergie totale finie. La fonction de corrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ sont respectivement définies par :

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)y(\tau-t)| d\tau \quad (\text{A.10})$$

$$c_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)x(\tau-t)| d\tau \quad (\text{A.11})$$

La transformée de Fourier de $c_x(t)$ est $\Gamma_x(\omega)$ la *densité spectrale d'énergie* du signal $x(t)$ et elle caractérise l'énergie totale véhiculée par la composante de fréquence ω du signal $x(t)$.

La transformée de Fourier de $c_{xy}(t)$ est $\Gamma_{xy}(\omega)$ la *densité spectrale croisée* des signaux $x(t)$ et $y(t)$ et elle caractérise l'énergie totale échangée par les composantes de fréquence ω des signaux $x(t)$ et $y(t)$. Or

$$c_{xy}(t) = x(t) \otimes y^*(-t) \quad (\text{A.12})$$

où Z^* est le nombre complexe conjugué du nombre complexe Z . (A.12) et le théorème de Plancherel nous permettent de déterminer l'expression de ces densités spectrales d'énergie. Ainsi la relation (A.12) donne :

$$\mathcal{F}\{c_{xy}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \otimes y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \mathcal{F}\{y(t)\} = X(\omega) Y(\omega) = X(\omega) Y^*(\omega) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{F}\{c_x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \otimes x^*(-t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \mathcal{F}\{x^*(-t)\} = X(\omega) X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma_{xy}(\omega) = X(\omega) Y^*(\omega) \quad (\text{A.16})$$

Résumé

Ce travail se situe dans le domaine de la synthèse d'images par ordinateur et de l'animation par modèles physiques.

La modélisation et la visualisation d'un objet physique suppose un travail sur la forme, le mouvement et l'image. Plus cet objet de référence est déformable et plus la relation entre ces trois entités est complexe. Dans ce travail nous étudions cette relation et nous déterminons dans quelles conditions le comportement (forme, mouvement, image) des objets peut être représenté par des modèles autonomes (modélisation multi-échelles) et découplés (habillage). En particulier nous étudions le cas des objets très déformables. Un générateur de formes pour objets très déformables doit vérifier un certain nombre de propriétés. Nous présentons un modèle de forme en mouvement vérifiant ces propriétés. Nous en étudions le comportement dynamique et nous présentons les images obtenues.

Abstract

This work falls within the field of image synthesis and computer animation by physical modelling.

The modelling and visualization of physical objects consists in a work on shape, motion and image. The more a given reference object is deformable and the more the relation between these three phenomena may grow complex.

We study this relation and determine in which conditions the behaviour (shape, motion and image) of an object may be represented by several models which are autonomous (multi-scale modelling) and decoupled (clothing "habillage").

In particular we study highly deformable objects. A shape modeller for this type of object must verify a certain number of properties. We present a shape model verifying these conditions. We study its dynamic behaviour and present the resulting images.