



**HAL**  
open science

# Comparaison des méthodes de sélection de structures de modèles non-linéaires en prédiction de séries temporelles: Application à la prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie

Mohsen Alimi

## ► To cite this version:

Mohsen Alimi. Comparaison des méthodes de sélection de structures de modèles non-linéaires en prédiction de séries temporelles: Application à la prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie. Statistiques [stat]. Faculté des Sciences Economiques et de Gestion, Université de Sfax (Tunisie), 2011. Français. NNT: . tel-01199614

**HAL Id: tel-01199614**

**<https://hal.science/tel-01199614>**

Submitted on 15 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE SFAX  
FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION



# THESE

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Méthodes Quantitatives :

---

**Comparaison des méthodes de sélection de structures de modèles non-linéaires en prédiction de séries temporelles: Application à la prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie**

---

*Présentée et soutenue publiquement le 18 juillet 2011 par :*

**Mohsen ALIMI**

**Membres du Jury**

**Président :** Mr. Younes BOUJELBENE  
Professeur d'enseignement supérieur à la FSEG - Sfax

**Directeur de thèse :** Mr. Abdelwaheb REBAI  
Professeur d'enseignement supérieur à la FSEG - Sfax

**Rapporteurs :** Mr. Jamel TRABELSI  
Professeur d'enseignement supérieur à la FSEG - Sfax  
Mr. Abdeljelil FARHAT  
Professeur d'enseignement supérieur à la FSEG - Mahdia

**Membre :** Mr. Nejib HACHICHA  
Professeur d'enseignement supérieur à la FSEG - Sfax

*« Toute avancée des connaissances génère autant  
d'interrogations qu'elle apporte de réponses. »  
Pierre Joliot*

## Résumé

La prévision non-linéaire de séries temporelles univariées à temps discret est un domaine passionnant de recherche. Pour élaborer des modèles de prévision performants, il faut pouvoir comprendre précisément les problèmes en relation, non encore résolus, dans leurs particularités. La difficulté majeure est de choisir parmi une famille possible de processus générateurs de données celui qui est capable d'être qualifié comme étant le meilleur processus générateur de données futures. Or, normalement en économétrie, un processus générateur de données réelles observées d'une série temporelle est modélisé à l'aide d'un processus stochastique. Mais, le plus important ici est de supposer qu'une série temporelle est générée par un système dynamique déterministe plutôt qu'un processus aléatoire. Dans ce cas, le véritable problème évoqué est celui de la dichotomie entre partie déterministe et partie résiduelle d'un processus générateur de données.

Cette thèse s'articule dans le cadre de l'économétrie des processus non linéaires en moyennes et de la théorie de chaos. Elle admet pour objet l'analyse et la prévision de la conjoncture en Tunisie. Notre fil conducteur provient tout simplement de la nécessité d'étudier et de prédire le phénomène contemporaine de l'instabilité endogène des fluctuations des variables macro-économiques qui est un sujet d'intérêt primordial aujourd'hui. Ainsi, notre apport originel consiste on l'explication et la modélisation des fluctuations du cycle endogène de l'indice de la production industrielle en Tunisie et son analyse prévisionnelle par les modèles à seuil avec transition lisse de type STAR (Smooth transition autoregressive) univariée.

Dés lors, on essayant de suivre une démarche méthodologique permettant d'apporter quelques éclairages théoriques qu'empiriques sur ce sujet d'actualité, nos résultats préconisent d'une part l'idée selon laquelle l'instabilité de l'équilibre dynamique qui est un mécanisme de fragilisation endogène est à l'origine des dynamiques des structures cycliques par bifurcation (cycles endogènes), suite à un changement des propriétés qualitatives de l'équilibre au niveau de la dynamique du modèle économétrique non linéaire avec changement de régime par transition lisse. D'autre part, cette fragilisation croissante peut se traduire parfois par des asymétries massives et persistantes qui traduisent la sensibilité aux conditions initiales (effet papillon), qui

## Résumé

---

cause l'instabilité endogène du modèle non linéaire via une dynamique chaotique qui est la majeure source de son inefficacité en matière de prévision surtout sur une longue période.

Les travaux présentés dans ce thèse, ayant comme but d'appréhender une meilleure représentation des dynamiques non-linéaires des fluctuations auto-entretenues des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie à l'aide de la modélisation STAR univariée. Ils sont issus d'une réflexion personnelle très intéressante mettant en évidence l'apport des diverses techniques d'analyse et de prévision de la conjoncture, sachant non seulement l'intérêt grandissant pour l'effort de diagnostic et d'évaluation de l'efficacité des décisions de planification stratégiques, mais aussi de la pertinence des résultats qu'elles fournies pour la prédiction dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques. Néanmoins, cette présentation reste insuffisante pour fournir une étude complète et finale d'une part, des dynamiques des modèles non linéaires en économétrie des séries temporelles et d'autre part, des performances prévisionnelles des modèles à changement de régimes avec transition lisse, ainsi spécifiés, pour répondre définitivement à de nombreux points d'interrogations qui restent ouverts jusqu'à maintenant.

**Mots-clés** : Série temporelle non linéaire, Production industrielle en Tunisie, Tests de non-linéarité, Asymétrie, Analyse prévisionnelle, Modélisation STAR univariée, Cycle endogène, Fonction de transition, Système dynamique, Théorie de chaos, Attracteurs, Cycle limite, Bifurcation, Effet papillon, Analyse et quantification des récurrences, Approche ensembliste, Séries temporelles par intervalles, Prévision par l'analyse par intervalles à erreurs bornées, Problème de satisfaction de contraintes, Prévision non-paramétrique par méthodes locales, Prévision ponctuelle, Prévision par intervalle de confiance, Prévision par densité, Causalité non-linéaire.

## *DEDICACES*

*Je dédie ce travail à mes parents, mes frères et mes sœurs.*

*En fait, je ne saurai leur exprimer, en ces quelques lignes, la reconnaissance et la gratitude qui j'éprouve à leur égard pour leur soutien moral et matériel et notamment pour les sacrifices qu'ils ont consentis pour que je poursuive, jusqu'au bout, mes études supérieures.*

*Mohsen ALIMI*

## **Remerciements**

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein de l'Unité de Recherche en Gestion Industrielle et Aide à la Décision (99 / UR-GIAD / 06-08) à la Faculté des Sciences Économiques et de Gestion (FSEG) de Sfax.

Je tiens tout d'abord à remercier tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler au cours de ces années de thèse. J'adresse également mes remerciements à Monsieur le Professeur Habib CHABCHOUB pour m'avoir accueilli au sein de l'Unité de Recherche qu'il dirige.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent spécialement à mon Directeur de recherche Monsieur le Professeur Abdelwaheb REBAI pour m'avoir appris le sens secret de la recherche grâce à sa disponibilité et son soutien inconditionnel tout au long de ces années de thèse. Son sens de précision et sa profondeur d'esprit laisseront, sans aucun doute, des marques profondes et durables dans ma formation en méthodes quantitatives. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour avoir pris le risque de m'accepter en thèse sur un sujet exotique. Sa grande connaissance du sujet, ses directives et conseils précieux m'ont permis d'avancer sereinement et efficacement. Je ne saurais vous agréer assez pour tout ce que j'avais appris grâce à votre encadrement, votre humanisme et le sens du détail et l'esprit de synthèse de votre rigueur scientifique ont été pour moi des valeurs réconfortantes sans lesquelles ce travail n'aurait pas été bien mené.

Mes remerciements sont destinés également à l'ensemble des membres du jury, qui m'ont honoré en acceptant la tâche d'évaluer ces travaux.

Je voudrais, enfin, que mes collègues doctorants et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué, par leur présence ou par leur intérêt, à faire de ces années de thèse une expérience extrêmement enrichissante sachent que je les en remercie vivement.

## SOMMAIRE

Sommaire.....	i
Liste des figures .....	vi
Liste des tableaux .....	xii
<b>Introduction générale .....</b>	
<b>1</b>	
1. Généralités sur l'origine du projet de recherche.....	2
2. Cadre théorique et empirique .....	3
3. Champ et problématique .....	6
4. Méthodologie de la recherche .....	10
5. Contributions.....	19
6. Organisation du document.....	23
<b>Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles.....</b>	
<b>29</b>	
Sommaire Partie I.....	30
<b>1.0. Introduction de la partie I.....</b>	<b>32</b>
<b>1.1. Présentation des données.....</b>	<b>37</b>
<b>1.2. Dynamiques économiques : fluctuations et asymétrie des séries industrielles.....</b>	<b>39</b>
1.2.1. Typologies, mesures et détection d'asymétries cycliques.....	39
1.2.1.1. <i>Mesure et définition des cycles.....</i>	40
1.2.1.2. <i>Typologies d'asymétries cycliques.....</i>	50
1.2.1.3. <i>Mesure d'asymétries cycliques.....</i>	53
1.2.1.4. <i>Procédures et test d'asymétrie de Verbrugge (1997) .....</i>	59
1.2.2. Les implications d'asymétries cycliques.....	63
1.2.3. Transition et dépendances structurelles.....	68
1.2.3.1. <i>Transition de phase dans les criticités auto-organisées : du local au global.....</i>	68
1.2.3.2. <i>Rapports de dépendance structurelle.....</i>	71
<b>1.3. Ruptures structurelles de tendances : Justifications théoriques et validation empirique .....</b>	<b>77</b>
1.3.1. Justification de l'introduction de ruptures structurelles en tendances déterministes..	77
1.3.1.1. <i>Changement de structure : Aspect théorique et pratique.....</i>	77
1.3.1.2. <i>Test de changement de structure avec rupture simple de Andrews et Ploberger (1994).....</i>	89



1.3.1.3. <i>Test de tendances déterministes avec ruptures multiples de Bai et Perron (2003a)</i> .....	91
<b>1.3.2. Tests de racine unitaire contre stationnarité avec ruptures structurelles endogènes de tendances déterministes</b> .....	96
1.3.2.1. <i>Test de Perron et Vogelsang (1992)</i> .....	102
1.3.2.2. <i>Test de Perron (1997)</i> .....	104
1.3.2.3. <i>Test de Zivot et Andrews (1992)</i> .....	107
1.3.2.4. <i>Test de Lee et Strazicich (2004)</i> .....	113
1.3.2.5. <i>Test de Lumsdaine et Papell (1997)</i> .....	118
1.3.2.6. <i>Test de Lee et Strazicich (2003)</i> .....	122
<b>1.4. Construction d'un modèle non-linéaire de prévision</b> .....	125
1.4.1. <b>Les insuffisances des modèles linéaires de prévision classique de séries temporelles</b> .....	125
1.4.1.1. <i>Justifications économiques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions</i> .....	126
1.4.1.2. <i>Justifications économétriques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions</i> .....	127
1.4.2. <b>Limites du problème général de sélection de modèle</b> .....	129
1.4.3. <b>Position du problème et les principales approches de résolutions utilisées</b> .....	131
1.4.4. <b>L'approche ensembliste</b> .....	136
1.4.4.1. <i>Comparaison entre l'approche ensembliste et l'approche probabiliste (économétrique)</i> .....	136
1.4.4.2. <i>Opérations sur les ensembles pures</i> .....	139
1.4.4.3. <i>Calcul par intervalles</i> .....	140
1.4.4.4. <i>Opérations sur les intervalles</i> .....	143
1.4.4.5. <i>Propriété d'inclusion et décorrélation des variables</i> .....	145
1.4.4.6. <i>Fonction d'inclusion</i> .....	147
1.4.4.7. <i>Contracteurs</i> .....	153
1.4.5. <b>L'approche du bootstrap</b> .....	155
<b>1.5. Conclusion de la première partie</b> .....	160
<b>Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes : Vers une approche dynamique en prédiction de séries temporelles non-linéaires</b> .....	
	163
<b>Sommaire Partie II</b> .....	164
<b>2.0. Introduction de la partie II</b> .....	165
<b>2.1. Cadre théorique de cycles et de fluctuations économiques</b> .....	173
2.1.1. <b>Les nouvelles théories économiques du cycle</b> .....	173
2.1.1.1. <i>Théorie exogène du cycle et sa remise en cause</i> .....	173
2.1.1.2. <i>Théorie endogène du cycle et révolution de la pensée économique</i> .....	177

<b>2.1.2.</b>	<b>La non-linéarité issue de la dynamique des fluctuations cycliques : perte de stabilité locale de l'équilibre dynamique.....</b>	<b>185</b>
2.1.2.1.	<i>Une approche de modélisation de la dynamique des fluctuations cycliques.....</i>	185
2.1.2.2.	<i>Existence de cycle endogène.....</i>	206
<b>2.2.</b>	<b>Cycle limite et bifurcation de Hopf.....</b>	<b>218</b>
2.2.1.	Cycles limites.....	218
2.2.2.	Doublement de périodes, bifurcations et chaos.....	234
2.2.2.1.	<i>Justification de l'introduction de ruptures déterministes.....</i>	234
2.2.2.2.	<i>Convergence et justification de formation de cycle endogène .....</i>	248
2.2.2.3.	<i>Stabilité des cycles (super-attractivité).....</i>	282
2.2.2.4.	<i>Dynamique chaotique et couplage des périodes.....</i>	294
2.2.2.5.	<i>Les outils de détection du chaos.....</i>	312
<b>2.3.</b>	<b>Une approche dynamique en prédiction de séries temporelles non-linéaires.....</b>	<b>318</b>
2.3.1.	Structures cohérentes et prévisibilité par des techniques non-paramétriques locales.	318
2.3.1.1.	<i>Prédiction ponctuelle.....</i>	325
2.3.1.2.	<i>Prédiction par intervalle de confiance.....</i>	325
2.3.2.	Structures incohérentes et croissance de l'erreur de prévision.....	327
<b>2.4.</b>	<b>Prévision dynamique par l'approche à erreur bornée.....</b>	<b>336</b>
2.4.1.	Les concepts de base.....	336
2.4.2.	Méthodologie et applications.....	348
2.4.2.1.	<i>Technique d'optimisation globale et de contrôle.....</i>	351
2.4.2.2.	<i>Prévision par intervalle à erreur bornée.....</i>	357
<b>2.5.</b>	<b>Conclusion de la deuxième partie.....</b>	<b>366</b>
<b>Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR.....</b>		<b>371</b>
Sommaire Partie III.....		372
<b>3.0.</b>	<b>Introduction de la partie III.....</b>	<b>375</b>
<b>3.1.</b>	<b>Présentation des modèles autorégressifs à changement de régime lisses.....</b>	<b>382</b>
3.1.1.	Rappels sur les processus autorégressifs avec changement de régimes.....	382
3.1.2.	Le modèle autorégressif à transition lisse.....	389
3.1.3.	Dynamique des processus de transitions lisses associées à la modélisation STAR....	394

## Sommaire

3.1.3.1. <i>Fonction de transition LSTAR</i> .....	399
3.1.3.2. <i>Fonction de transition ESTAR</i> .....	415
3.1.3.3. <i>Fonction de transition ALSTAR</i> .....	427
3.1.3.4. <i>Fonction de transition DLSTAR</i> .....	434
3.1.3.5. <i>Fonction de transition QLSTAR</i> .....	439
3.1.3.6. <i>Fonction de transition QESTAR</i> .....	446
3.1.3.7. <i>Fonction de transition AESTAR</i> .....	452
3.1.3.8. <i>Fonction de transition TVSTAR</i> .....	459
3.1.3.9. <i>Fonction de transition BSTAR</i> .....	462
<b>3.2. Estimation, spécification et validation d'un modèle STAR</b> .....	470
3.2.1. <b>L'estimation du modèle STAR</b> .....	470
3.2.1.1. <i>Estimation du modèle LSTAR/ESTAR</i> .....	470
3.2.1.2. <i>Détermination du nombre de régimes AR</i> .....	473
3.2.2. <b>La spécification du modèle STAR</b> .....	476
3.2.2.1. <i>Test de spécification d'un processus de transition LSTAR</i> .....	478
3.2.2.2. <i>Test de spécification d'un processus de transition ESTAR</i> .....	484
3.2.2.3. <i>La méthodologie de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) du choix entre le modèle LSTAR et le modèle ESTAR</i> .....	486
3.2.3. <b>La validation du modèle STAR</b> .....	489
3.2.3.1. <i>Test de Granger et Teräsvirta (1993)</i> .....	490
3.2.3.2. <i>Tests d'Eitrheim et Teräsvirta (1996)</i> .....	491
3.2.3.2.1 <i>Test de non autocorrélation résiduelle</i> .....	491
3.2.3.2.2 <i>Test de non-linéarité restante</i> .....	491
3.2.3.2.3 <i>Test de constance des paramètres</i> .....	493
<b>3.3. La stationnarité des modèles STAR</b> .....	495
3.3.1. <b>Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles ESTAR selon Kapetanios, Shin et Snell (2003)</b> .....	495
3.3.2. <b>Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles LSTAR selon Leybourne, Newbold et Vougas (1998)</b> .....	498
<b>3.4. Prévisions à l'aide des modèles STAR univariés</b> .....	502
3.4.1. <b>Construction d'un modèle à seuil de prévision ponctuelle</b> .....	509
3.4.2. <b>Construction d'un modèle à seuil de prévision par intervalle de confiance</b> .....	513
3.4.3. <b>Construction d'un modèle à seuil de prévision par densité</b> .....	514
3.4.4. <b>L'évaluation des performances prédictives</b> .....	515
<b>3.5. Tentative empirique de modélisation et de prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie</b> .....	516
3.5.1. <b>Analyses descriptives de la stationnarité</b> .....	516

## Sommaire

<b>3.5.2.</b>	<b>Test de changements structurels : Test de Lin et Teräsvirta (1994).....</b>	<b>526</b>
<b>3.5.3.</b>	<b>Test de linéarité contre le chaos déterministe.....</b>	<b>535</b>
3.5.3.1.	<i>Exposition du problème de non-linéarité dans le cadre de sélection de la structure d'un modèle de prédiction.....</i>	535
3.5.3.2.	<i>Test de BDS.....</i>	542
3.5.3.3.	<i>Tests de l'exposant de Lyapunov.....</i>	547
3.5.3.4.	<i>Tests de Hinich (1996).....</i>	550
<b>3.5.4.</b>	<b>Tests généraux de linéarité contre l'alternative est ou non nécessairement bien spécifiée.....</b>	<b>553</b>
3.5.4.1.	<i>Tests de Ramsey (1969).....</i>	553
3.5.4.2.	<i>Test de Tsay (1989).....</i>	555
3.5.4.3.	<i>Test de Hansen (1996).....</i>	558
<b>3.5.5.</b>	<b>Construction d'un modèle de prévision STAR.....</b>	<b>563</b>
3.5.5.1.	<i>Organigramme de spécification d'un modèle STAR.....</i>	563
3.5.5.2.	<i>Construction d'un modèle STAR.....</i>	564
<b>3.5.6.</b>	<b>Diagnostic de tests et évaluation d'un modèle non-linéaire de prévision.....</b>	<b>592</b>
3.5.6.1.	<i>Évaluation des prévisions ponctuelles.....</i>	592
3.5.6.1.1	<i>Tests de Diebold et Mariano (1995).....</i>	496
3.5.6.1.2	<i>Tests de Harvey, Leybourne et Newbold (1997).....</i>	600
3.5.6.2.	<i>Évaluation des prévisions par Intervalles de Confiance.....</i>	601
3.5.6.2.1	<i>Tests de Christoffersen (1998).....</i>	602
3.5.6.2.2	<i>Tests de Wallis (2002).....</i>	605
3.5.6.3.	<i>Évaluation des Densités de prévisions.....</i>	607
3.5.6.3.1	<i>Tests de Diebold, Gunther et Tay (1998).....</i>	612
3.5.6.3.2	<i>Tests de Bai (2003).....</i>	614
3.5.6.3.3	<i>Tests de Bao, Lee et Saltoglu (2007).....</i>	617
<b>3.6.</b>	<b>Test de causalité non-linéaire.....</b>	<b>623</b>
<b>3.7.</b>	<b>Conclusion de la troisième partie.....</b>	<b>633</b>
	<b>Conclusion Générale.....</b>	<b>636</b>
	<b>Bibliographie.....</b>	<b>644</b>
	<b>Annexes</b>	

---

## Liste des figures

<i>Préface</i>	<i>Page</i>
1.1 Décomposition cycle tendance d'une série temporelle	42
1.2 Les phases de récessions des séries de la production industrielle tunisienne	45
1.3 Représentation illustrative de fluctuations cycliques symétriques	49
1.4 Représentation illustrative de typologie d'asymétries cycliques (de pente et d'amplitude)	53
1.5 Les proportions des résidus qui doivent tomber dans un intervalle donné d'une distribution symétrique (normale)	56
1.6 Asymétrie dans la distribution de la série temporelle de l'indice de production industrielle tunisienne	64
1.7 Asymétrie dans les distributions des séries temporelles de la production industrielle tunisienne	66
1.8 Simulation de la matrice des distributions marginales bivariées des séries	76
1.9 Présence des fluctuations des séries et prévision imparfaite	81
1.10 Présence d'une tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	99
1.11 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	104
1.12 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	107
1.13 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	110
1.14 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	111
1.15 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	112
1.16 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	117
1.17 Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	117
1.18 Présence de deux ruptures en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne	121
1.19 Présence de deux ruptures en niveau et en tendance déterministe simultanément de chaque série de la production industrielle tunisienne	122
1.20 Pavé [Y] avec son plan principal	142
1.21 Fonction d'inclusion	151
1.22 Fonction d'inclusion minimale	151
1.23 Fonction d'inclusion monotone et convergente	152
1.24 Contraction d'un pavé [Y] par rapport à S	154

## Liste des figures

2.1	Équilibre et stabilité	195
2.2	Point fixe globalement stable	200
2.3	La dynamique non-linéaire peut être expliquée par l'existence de plusieurs points fixes instable (source de complexité)	200
2.4	Dynamique chaotique et d'une courbe invariante associée à un point d'un cycle pair de type col	201
2.5	Configuration optimale de la perturbation pour que son énergie cinétique croisse (a) ou décroisse (b)	203
2.6	Dynamiques hyperboliques	205
2.7	Fonction de transition de freinage logistique en fonction de r	207
2.8	Simulation d'un cycle limite : $Y_0=0.3$ ; $w=0.5$ ; $a=1$ ; $b=0.25$ ; $\lambda=4.4$	210
2.9	Une vue 3-D de la série $Y_t = -2 \times (0.9)^t \times \cos(4t - 1/2)$ , $t \in \mathbb{Z}$	213
2.10	Cycle limite	219
2.11	Condition d'existence d'un cycle limite	221
2.12	Les trois types de stabilité que peut offrir un cycle limite	222
2.13	Cycle limite dans un espace de phase à 3 dimensions : Le cycle à une variété stable à 2 dimensions (localement un cylindre) et une variété instable à 2 dimensions (localement un plan)	223
2.14	Cycle limite stable	224
2.15	Bassin d'attraction d'un cycle limite	225
2.16	Orbit périodique d'ordre $s=4$	226
1.17	Représentation du champ d'une trajectoire	230
2.18	Représentation du champ et une trajectoire	230
2.19	Solution stable	231
2.20	Simulation d'un cycle limite	231
2.21	Diagrammes planes de bifurcation de Hopf supercritique et sous-critique	238
2.22	Diagrammes spatiales de bifurcation de Hopf supercritique et sous-critique	240
2.23	Diagramme des bifurcations de Hopf pour $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $0 < r < 4$	242
2.24	Diagramme de bifurcation : mélange de chaos et des cycles instables multi-périodiques	245
2.25	Diagramme de bifurcation : dynamique purement chaotique	246
2.26	Graphique de la quatrième itération	261
2.27	Graphique itérative d'un équilibre	262
2.28	Les statistiques descriptives pour les 24 points générés par $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	264
2.29	Diagramme de phase pour $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	264
2.30	Série temporelle pour $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	265
2.31	Diagramme des bifurcations pour $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	266
2.32	Graphique itérative de 2-cycle et 3-cycle	268
2.33	Graphique itérative de 4-cycle	269
2.34	Les statistiques descriptives pour les 60 points générés par $Y_{n+1} = 3.1 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	272
2.35	Diagramme de phase pour pour $Y_{n+1} = 3.1 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	273
2.36	Série temporelle pour $Y_{n+1} = 3.1 Y_n (1 - Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	274

## Liste des figures

2.37	Cycle limite d'ordre 2 pour $Y_{n+1}=3.1 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	274
2.38	Les statistiques descriptives pour les 38 points générés par $Y_{n+1}=3.5 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	276
2.39	Diagramme de phase pour pour $Y_{n+1}=3.5 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	276
2.40	Cycle d'ordre 4 pour $Y_{n+1}=3.5 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	277
2.41	Cascade de 2n-cycle pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $3 \leq r < 3.57$	278
2.42	Les distances $b_1$ , $b_2$ et $b_3$ pour 2-cycle et 4-cycle superstables pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $3 \leq r < 3.57$	279
2.43	Cascade de 2n-cycle pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $3 \leq r < 3.57$	280
2.44	Basin de paramètres pour les cycles périodiques pour $Y_0=0.8$ et $3 \leq r \leq 4$	284
2.45	Cascade de doublement de périodes pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $2.9 \leq r \leq 4$	289
2.46	Dynamique chaotique pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $3.57 \leq r \leq 4$	290
2.47	Les statistiques descriptives pour les 600 points générés par $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	291
2.48	Diagramme de phase pour $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	292
2.49	Chaos et d'intermittence pour $Y_{n+1}=r Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$ et $3.82 \leq r \leq 3.86$	293
2.50	Simulation numérique du bifurcation et du cycle limite	303
2.51	Représentation graphique de récurrence (Dimension=1, Delai=1, Threshold=1) des N=600 observations générées par $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	306
2.52	Représentation spatio-temporelle (Dimension=1, Delai=1, Threshold=1) des N=600 observations générées par $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	307
2.53	Réduction du noise de 0.52% (Dimension=8, Delai=1, Neighbors=10) des N=600 observations générées par $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	309
2.54	Réduction du noise de 33.24 % (Dimension=13, Delai=1, Neighbors=10) des N=600 observations générées par $Y_{n+1}=3.82 Y_n (1-Y_n)$ avec $Y_0=0.8$	310
2.55	Détection du chaos par les exposants de Lyapunov	313
2.56	Quelques exemples de recurrence plots	314
2.57	Evolution des conditions initiales	329
2.58	Conceptualisation d'évolution de l'information prédictive sur une partition d'intervalle	334
2.59	Zone de région admissible garantissant la prévision robuste pour quelques modèles dynamiques	346
2.60	Principe de la méthode à erreurs bornées	349
2.61	Représentation par intervalles des processus de transitions	350
2.62	Principe de l'approche prédiction-correction par estimation ensembliste	354
2.63	Méthode ellipsoïdale récursive	361
3.1	Simulation d'un modèle LSTAR : $Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-1}[1 - G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c = 0)]$	401
3.2	Une vue 3-D de la fonction logistique $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c)$	401
3.3	L'effet de $\gamma$ sur le lissage pour la fonction logistique $G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0)$	402
3.4	L'effet de $\gamma$ sur le lissage pour la fonction logistique pour $c=0.5 ; 1 ; 1.5$	404
3.5	Exemple des séries générées par LSTAR	406
3.6	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par LSTAR	407

## Liste des figures

3.7	Représentation graphique de récurrence (Dimension=1, Delai=1, Threshold=1) des N=200 observations générées par LSTAR	413
3.8	Représentation graphique de récurrence (Dimension=4, Delai=1, Threshold=1) des N=200 observations générées par LSTAR	414
3.9	Simulation d'un modèle ESTAR ( $\gamma=1, c=0$ ) et comparaison avec le modèle LSTAR	415
3.10	Une vue 3-D de la fonction exponentielle $G(Y_{t-1}; \gamma=1, c=0)$	418
3.11	L'effet de $\gamma$ sur le lissage pour la fonction exponentielle $G(Y_{t-1}; \gamma, c=0)$	419
3.12	L'effet de $\gamma$ sur le lissage exponentielle pour $c=0.5$ ; $c=1$ ; $c=1.5$	422
3.13	Exemple des séries générées par ESTAR	424
3.14	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par ESTAR	425
3.15	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 4; c = 0.2$	426
3.16	Simulation d'un processus ALSTAR ( $\gamma=1$ ; $c=-1$ ; $\theta=0.5$ )	427
3.17	Une vue 3-D de la fonction logistique asymétrique $G(Y_{t-1}; \gamma=1, c=-1, \theta=0.5)$ .	428
3.18	L'effet de $\theta$ sur le lissage pour la fonction logistique asymétrique	429
3.19	Exemple des séries générées par ALSTAR	431
3.20	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par ALSTAR	432
3.21	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; \theta = -1; c = 0.2$	433
3.22	Bifurcation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; \theta = -1; c = 0.2$	434
3.23	Simulation d'un processus DLSTAR	435
3.24	Une vue 3-D de la fonction logistique double $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = 2.5, c_1 = -1, c_2 = 1)$	435
3.25	Une vue 3-D de la fonction logistique double $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = -2.5, c_1 = -1, c_2 = 1)$	436
3.26	L'effet de $\gamma$ sur le lissage pour la fonction de transition d'un processus DLSTAR	436
3.27	Exemple des séries générées par DLSTAR	438
3.28	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par DLSTAR	438
3.29	Simulation d'un modèle QLSTAR ( $\gamma=1$ ; $c_1=-1, c_2=1$ )	440
3.30	Une vue 3-D de la fonction logistique quadratique $G(Y_{t-1}; \gamma=1, c_1 = -1, c_2 = 1)$	441
3.31	L'effet de $\gamma$ sur le lissage logistique quadratique pour $c_1=-1$ et $c_2=1$	442
3.32	Exemple des séries générées par QLSTAR	443
3.33	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par QLSTAR	444
3.34	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.5; \gamma = 0.6; c_1 = 0.0, c_2 = 10$	445
3.35	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; \theta = -1; c = 0.2$	445
3.36	Simulation d'un modèle QESTAR ( $\gamma=1$ ; $c_1=-1, c_2=1$ )	446
3.37	Une vue 3-D de la fonction exponentielle quadratique $G(Y_{t-1}; \gamma=1, c_1 = -1, c_2 = 1)$	447
3.38	L'effet de $\gamma$ sur le lissage exponentiel quadratique pour $c_1=-1$ et $c_2=1$	447
3.39	Exemple des séries générées par QESTAR	448
3.40	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par QESTAR	449
3.41	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 4; c_1 = 0.1, c_2 = 1.2$	451



## Liste des figures

3.42	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; \theta = -1; c = 0.2$	451
3.43	Simulation d'un modèle AESTAR	453
3.44	Une vue 3-D de la fonction exponentielle asymétrique $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, \delta = 0.5, c_1 = 0, c_2 = 0)$	453
3.45	L'effet de $\gamma$ sur le lissage exponentiel asymétrique pour $\lambda_1 = 17$ ; $\lambda_2 = -17$ et $c_1 = c_2 = 0$	454
3.46	Exemple des séries générées par AESTAR	455
3.47	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par AESTAR	456
3.48	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; c_1 = 0.2, c_2 = 0.2, \delta = 4$	457
3.49	Simulation d'un cycle limite : $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; \theta = -1; c = 0.2$	457
3.50	Simulation d'un modèle TVSTAR	459
3.51	La fonction de transition logistique asymétrique $G(Y_t; \gamma, c = 1.5, \sigma_Y = 1.10)$	460
3.52	Une vue 3-D de la fonction logistique asymétrique $G(Y_t; \gamma = 3.38, c = 1.5, \sigma_Y = 1.10)$	461
3.53	Exemple des séries générées par TVSTAR	461
3.54	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par TVSTAR	462
3.55	Simulation d'un modèle BSTAR	463
3.56	La fonction de transition bi-paramétrique $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$	464
3.57	La fonction de transition bi-paramétrique $G(Y_{t-1}; \gamma_1 \neq \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$	464
3.58	La fonction de transition bi-paramétrique $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$	465
3.59	Une vue 3-D de la fonction bi-paramétrique $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 10)$	466
3.60	Exemple des séries générées par BSTAR	467
3.61	L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par BSTAR	468
3.62	Série temporelle non stationnaire en niveau de l'indice de production industrielle tunisien	519
3.63	Séries mensuelles de la production industrielle en Tunisie non stationnaires en niveaux	520
3.64	Séries temporelles non stationnaires en logarithme	522
3.65	Dessaisonnalisation des séries de la production industrielle tunisienne	523
3.66	Séries temporelles stationnaires en premier différence logarithmique	524
3.67	Séries temporelles stationnaires en premier différence logarithmique	529
3.68	Cycles et fluctuations de la production industrielle tunisienne	530
3.69	Co-mouvement de cycles et fluctuations de la production industrielle tunisienne	533
3.70	Les spectres des maximums d'entropies des séries de la production industrielle en Tunisie	538
3.71	La SRC pour 70% des observations utilisées parmi tout l'échantillon	577
3.72	La somme des résidus au carré	578
3.73	L'émergence des fluctuations endogènes des séries	585
3.74	La prévision ponctuelle des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie sur la période 2006:12-2007:04	594
3.75	Évaluations des intervalles de prévisions	602
3.76	Évaluations des distributions inconditionnelles des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie	608

- 
- 3.77 Évaluations des densités inconditionnelles et des régions de confiances des prévisions par la méthode de HDR pour un seuil de risque  $\alpha = 5\%$  en utilisant la technique de bootstrap 611

---

## Liste des tableaux

<i>Préface</i>	<i>Page</i>
1.1 Description des données mensuelles	38
1.2 Les coefficients d'asymétrie d'une distribution	55
1.3 Test de l'asymétrie d'amplitude de Verbrugge (1997)	61
1.4 Test de l'asymétrie de pente de Verbrugge (1997)	62
1.5 Résultats du Test de Andrews-Quandt et de Andrews et Ploberger (1994)	91
1.6 Résultats du Test de Bai et Perron (2003a)	94
1.7 Résultats du Test de Perron et Vogelsang (1992)	103
1.8 Résultats du Test de Perron (1997)	106
1.9 Les valeurs critiques du test de $LM\tau$ minimum	109
1.10 Résultats du Test de Zivot et Andrews (1992)	113
1.11 Les valeurs critiques du test de $LM\tau$ minimum	115
1.12 Résultats du Test de Lee et Strazicich (2004)	116
1.13 Résultats du Test de Lumsdaine et Papell (1997)	120
1.14 Résultats du Test de Lee et Strazicich (2003)	124
1.15 L'algorithme de bootstrap pour l'estimateur bootstrap de l'écart-type	157
2.1 Comportement asymptotique des solutions	197
2.2 Certaines mesures de quantifications de récurrences	258
2.3 Génération des valeurs numériques pour $Y_0 = 0.8$ et $r = 1.8$	263
2.4 Génération des valeurs numériques pour $Y_0 = 0.8$ et $r = 3.1$	271
2.5 Génération des valeurs numériques pour $Y_0 = 0.8$ et $r = 3.5$	275
2.6 Présence de $2n$ -cycle par localisation du paramètre de contrôle $r$	278
2.7 Recherche analytique des cycles super-attractifs (stables)	283
2.8 Classification des différents types de dynamiques non-linéaires selon l'ordre du système	305
2.9 Certaines mesures de quantifications de récurrences	307
2.10 Résultats of out-of-sample forecast	326
2.11 Quelques exemples de fonctions de transition	340
2.12 Fonctions d'inclusions pour quelques exemples de fonctions de transition	342
2.13 Algorithme de SIVIA récursive	344
2.14 Algorithme (Estimation-Prédiction-Correction)	356
3.1 Quelques exemples de fonctions de transition	395
3.2 Quelques exemples des modèles simulés	397
3.3 Estimation du modèle LSTAR par NLS	406
3.4 Estimation du modèle ESTAR par NLS	420

## Liste des tableaux

3.5	Analyse descriptive pour les modèles LSTAR et ESTAR	421
3.6	Estimation du modèle ALSTAR par NLS	430
3.7	Estimation du modèle DLSTAR par NLS	437
3.8	Estimation du modèle QLSTAR par NLS	443
3.9	Estimation du modèle QESTAR par NLS	448
3.10	Analyse descriptive pour les modèles QLSTAR et QESTAR	450
3.11	Estimation du modèle AESTAR par NLS	455
3.12	Estimation du modèle BSTAR par NLS	466
3.13	Les valeurs critiques du test de Kapetanios, Shin et Snell (2003)	497
3.14	Les valeurs critiques du test de Leybourne, Newbold et Vougas (1998)	500
3.15	Les caractéristiques statistiques des séries mensuelles (1996:04- 2006:12)	525
3.16	Test de threshold break	527
3.17	Les résultats de BDS test	546
3.18	Résultats du calcul de l'exposant de Lyapunov	550
3.19	Résultats du Test de Hinich (1986)	552
3.20	Résultats du Test de RESET	554
3.21	Résultats du test de Tsay (1989)	558
3.22	Résultats du test de Hansen (1996)	561
3.23	Recherche des attracteurs et du nombre de régimes	567
3.24	Choix du nombre de retards $p$	568
3.25	Résultats de l'estimation des données pour un modèle AR( $p^*$ )	569
3.26	Ljung-Box Q-Statistics du modèle AR( $p^*$ )	571
3.27	Résultats des tests d'existence des tendances stochastiques sur les résidus	572
3.28	Estimation des données par NLS pour un modèle SETAR	573
3.29	Ljung-Box Q-Statistics du modèle SETAR avec $c$ connu	574
3.30	Résultats du test d'égalité entre les coefficients de deux régimes	575
3.31	Résultats de la recherche de la valeur optimale de $c$	576
3.32	Estimation du modèle SETAR avec le $c$ déjà trouvé	579
3.33	Ljung-Box Q-Statistics du modèle SETAR avec $c$ inconnu	580
3.34	Test de choix entre le modèle LSTAR et le modèle ESTAR	582
3.35	Test de stationnarité non-linéaire	583
3.36	Estimation du modèle STAR avec $\gamma$ et $c$ inconnus	586
3.37	Résultats de comparaison d'out-of-sample prévision	595
3.38	Résultats du test de Diebold et Mariano (1995)	599
3.39	Tests de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation des lois prédictives inconnues	607
3.40	Évaluations des distributions inconditionnelles	609
3.41	Estimation des distributions inconditionnelles et des régions HDR pour un seuil de risque $\alpha = 5\%$ en utilisant la technique de bootstrap	611
3.42	Les valeurs critiques du test de Bai (2003)	616
3.43	Les valeurs critiques du test de Hiemstra-Jones (1994)	628

## Liste des tableaux

---

3.44	Résultats du Test de Hiemstra-Jones (1994)	629
3.45	Résultats du Test Réciproque de Hiemstra-Jones (1994)	630

# Introduction générale

*Comprendre les fluctuations économiques, c'est construire un modèle, c'est-à-dire une économie artificielle complètement explicitée qui se comporte dans le temps de façon à reproduire fidèlement le comportement des séries.*

*Lucas. R (1977)  
(Understanding Business Cycles)*

# Introduction générale

## 1. Généralités sur l'origine du projet de recherche

L'accord de libre-échange avec l'Union Européenne (EU), en janvier 2008, a ouvert la voie à de nombreuses opportunités de restructuration, surtout, au niveau du développement de l'industrie tunisienne<sup>1</sup>. Cette dernière, malgré qu'elle soit composée d'un tissu industriel fort<sup>2</sup>, a des défis majeurs, pour planifier et préparer convenablement cette intégration. La planification et la préparation concerne les stratégies internes de stabilisations sectorielles et de positionnements actualisés, dues principalement à la mise en marche, depuis 1995, d'un programme national de mise à niveau<sup>3</sup>.

C'est dans ce sens que la sélection d'un modèle de prévision<sup>4</sup> est l'étape capitale exigée, puisqu'elle occupe une place fondamentale dans un tel processus de prise de décision. Cependant, malgré la nécessité de la prévision dans l'opération de prise de décision, dans la plupart des cas, les prévisionnistes feront face au même problème risqué : Comment choisir parmi une famille de modèles possibles, l'idéal modèle de prévision? L'enjeu est donc de comprendre dans quelle

---

<sup>1</sup> La Tunisie est le premier pays du Sud de la Méditerranée a intégré la zone de libre-échange avec l'Union Européenne et c'est depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2008.

<sup>2</sup> Ce tissu inclut en 2007 de plus de 5700 entreprises dont environ de 2200 entreprises à participation européenne opèrent en Tunisie. D'après l'étude intitulée « *Stratégie industrielle nationale à horizon 2016* » commandée par le Ministère de l'Industrie, de l'Energie et des PME conduite au cours du premier semestre 2008.

<sup>3</sup> Ce programme national de mise à niveau admet comme objectif principal : la stabilisation de l'industrie afin d'appuyer les entreprises industrielles tunisiennes dans une démarche de modernisation de leur tissu interne (équipements, ressources et mode de management) et ceci à travers l'amélioration substantielle de la compétitivité interne des entreprises tunisiennes.

<sup>4</sup> Le terme « *prévision* » signifie annoncer, sous une forme ou autre, ce qui doit ou peut se produire dans l'avenir. Une telle annonce peut s'accompagner de diverses restrictions et conditions qui précisent son objectif et son esprit.

mesure la sélection de la structure optimale, d'un modèle estimé, sur des données du passé, doit-elle être valable et même bénéfique dans le futur?

Plusieurs études ont contribué à la résolution de ces problèmes. Mais, la majorité de ces études ont été abordées pour les pays développés. Ainsi, concernant la prévisibilité des cycles endogènes des séries temporelles de la production industrielle, les travaux qui ont été faits sont basés sur des données qui proviennent des pays industrialisés. En effet, peu d'études ont été consacrées au marché industriel tunisien. Pour cette raison, notre objectif principal dans ce travail de thèse, est d'analyser la dynamique non-linéaire des séries temporelles de la production industrielle en Tunisie. Notre dessein est de voir si les cycles endogènes sont prévisibles, après caractérisation du type de relations qui peuvent exister entre ces séries macroéconomiques et voir si l'étude du comportement dynamique non-linéaire, améliore ou non les prévisions des cycles endogènes de ces séries temporelles industrielles.

## 2. Cadre théorique et empirique

L'analyse classique des séries temporelles univariées à temps discret se base sur des modèles autorégressifs linéaires de type ARMA. Or, bien que ces techniques aient l'avantage d'être relativement simples et bien définies, puisqu'elles se réfèrent implicitement au paradigme linéaire, elles souffrent de certaines limites.

Tout d'abord, celles-ci sont destinées à la prévision de court terme et nécessitent des données représentées sous forme de séries temporelles stationnaires (ou encore transformées en différences premières ou secondes, afin de les rendre stationnaires). Or, de façon empirique, le fait de filtrer les données par différenciation, afin de stationnariser la série, ceci va imposer une certaine régularité qui provoque le gaspillage d'une partie très importante de l'information sur la dynamique de son comportement futur. Ceci, permet aussi d'éliminer l'effet de la tendance et suppose une symétrie parfaite dans le comportement cyclique de l'évolution des variables macroéconomiques étudiées. Ce qui marque leurs insuffisances, non seulement, pour la prévision de long terme des séries non stationnaires, en présence de l'effet des changements structurels



graduels, mais, aussi pour capter certains effets instables, qui caractérisent l'aspect asymétrique en dynamique non-linéaire de ces variables.

En plus, les études récentes, dans ce domaine d'analyse, sont parvenues à conclure qu'en présence des comportements asymétriques caractérisant, l'évolution de la dynamique non-linéaire des variables macroéconomiques, les mouvements cycliques fluctuent différemment dans toutes les directions en échangeant de stabilité, en fonction des paramètres et des inflexions de tendances, identifiant ainsi des changements qualitatifs de leurs régimes. Tandis que, la modélisation à l'aide des modèles autorégressifs linéaires, qui sont caractérisés par l'unirégime, où le comportement du variable étudiée reste vraisemblable à chaque instant, rend ces modèles incapables, de prendre compte de l'effet de seuil qui accompagne les phénomènes de bifurcation, ainsi que de modéliser correctement des séries temporelles dont les paramètres changent de comportement qualitatif selon les périodes, avec des régimes asymétriques, ayant des structures dynamiques différentes.

D'autre part, la prévision en économétrie des séries temporelles a été dominée par les techniques classiques de prévision (technique de Box-Jenkins, technique de lissage exponentiel,...), qui ont été largement développées et mises en œuvre. Néanmoins, ces méthodes, qui se réfèrent à la théorie probabiliste pour représenter l'incertitude, se sont avérées insuffisantes à une profonde maîtrise et analyse de nombreux phénomènes complexes de dynamiques économiques, qui gouvernent la non-linéarité, l'endogénéité des fluctuations cycliques, l'instabilité des structures endogènes, les changements endogènes qualitatives des structures dynamiques, les interactions non-linéaires des comportements couplées et les phénomènes résultants des effets de seuils et d'asymétries cycliques. C'est pourquoi nous sommes intéressés, ici, à d'autres méthodes de prévision des modélisations non-linéaires, en moyenne des données.

Ce travail de thèse, s'inscrit dans le cadre de l'économétrie des processus non-linéaires, et ayant pour objet la prévision et la modélisation des séries temporelles univariées, à temps discret. En effet, l'approche non-linéaire des séries temporelles est une ouverture très riche du fait qu'elle englobe, dans un cadre général, des problèmes multiples pour les théoriciens.

Nous voyons la nécessité de prendre en compte l'hypothèse de la non-linéarité, afin d'expliquer un ensemble d'observations quelconques. Jusqu'à nos jours, les recherches effectuées dans ce domaine, ont exploré la difficulté de sélectionner la structure idéale d'un modèle de série temporelle non-linéaire, parmi un ensemble de modèles candidats. De nombreuses raisons, peuvent justifier l'utilité de poser cette question autrement: le problème standard est de distinguer, parmi une famille de modèles candidats, celui qui explique le mieux un jeu de données substitué par un autre formalisme. Lequel de cet ensemble de modèles prédit le mieux des données futures, générées selon le même processus?

Plusieurs études de synthèse sur ce thème sont abordées de divers aspects, aussi bien sur le plan théorique que sur le plan empirique. Le premier problème du choix de modèles est posé d'une façon vague et générale. Le deuxième est plus spécifique, car il est relié à un objectif bien précis de prédiction. Pourtant, l'effort de recherche en dynamique non-linéaire, dans le domaine des instabilités<sup>5</sup> des structures des modèles macroéconométriques, dûs à la présence des cycles endogènes, est très intense. La prévision de ce type de processus constitue encore un défi.

Une explication possible pourrait être fournie, suite à l'introduction de la dynamique non-linéaire. Ceci nous a incité à nous rendre compte que la caractérisation de la dépendance non-linéaire, dans les séries temporelles de la production industrielle en Tunisie, peuvent rendre prévisibles, les cycles endogènes de ces séries. Pour ce faire, d'abord, au niveau théorique, nous fondons notre raisonnement sur l'interaction entre trois axes de recherche : la théorie de cycle endogène, la théorie de chaos et la théorie des systèmes dynamiques. Nous avons comme objectif de mettre en évidence la présence d'un mécanisme de récurrence non-linéaire, assurant la dynamique endogène des structures, à l'aide du changement et de la transformation de structures dynamiques, par recombinaison des invariances. Ensuite, au niveau empirique, ce travail de thèse tentera de fournir quelques éléments de réponse à la question: Que peuvent apporter une étude de

---

<sup>5</sup> Les problèmes d'instabilités ayant comme source originale la présence des fluctuations endogènes, stimulent la dynamique du processus et causent la transformation de sa structure à la suite du passage d'un état d'équilibre à un autre état par transition. Ceci affecte considérablement l'évolution du système dans le temps et par conséquent sa prévision.

la structure et de la dynamique des modèles macroéconométriques aux modèles de prévision non-linéaires.

### 3. Champ et problématique

La prévision de séries temporelles est un domaine passionnant de recherche. L'un des objectifs principaux de la statistique appliquée est d'établir des modèles de prévision, à partir de données observées, sans utiliser, ni les mêmes outils, ni les mêmes méthodes. Statisticiens, économètres, économistes, financiers ont toujours la volonté massive de modéliser les séries chronologiques et d'en prédire leurs comportements futurs. Dans la plupart des cas, leurs inputs, ce sont les données observées, qui sont le produit d'un phénomène très complexe et loin d'être reconnu avec exactitude. Le modèle générateur est la représentation paramétrique et/ou non-paramétrique la plus proche de la réalité.

Par conséquent, on se retrouve avec plusieurs formes d'approximation possibles pour le modèle générateur des données. Les prévisionnistes essaient toujours de répondre à la question capitale suivante : Comment sélectionner la structure du meilleur modèle, ayant la capacité de fournir des prévisions fiables?

Cependant, le problème majeur en prévision demeure la dominance d'un cadre restrictif imposé par le principe de linéarité, qui stipule que les petits effets sont les produits des petites causes, accordant ainsi tout comportement irrégulier ou complexe, à un composant aléatoire exogène.

Mais, dans ce travail de thèse, dans la mesure où l'on accepte l'hypothèse d'un changement structurel de nature endogène, nous tenterons de prouver, qu'à l'inverse, des comportements irréguliers ou complexes, évoluant dans le temps, peuvent être générés par des systèmes dynamiques non-linéaires complètement déterministes ou chaotiques.

C'est pour cette raison, que nous allons fonder notre raisonnement sur la critique dûe à l'imperfection des méthodes classiques de prévision, puisqu'elles n'arrivent pas à modéliser correctement ce type de comportement dynamique de séries temporelles non stationnaires, ce qui donne comme résultats, de médiocres prévisions qui risquent d'être non précises.

À très court terme, le prévisionniste peut identifier l'écart de prévision, après avoir comparé la prévision réalisée avec la réalité observée. Mais, pour le long terme, il doit faire des hypothèses restrictives sur l'évolution de cet écart. Malgré qu'en réalité, cet écart devient amplifié sous l'influence de la croissance exponentielle de l'erreur commise en prévision, qui peut provenir de non réduction et d'immersion de l'incertitude lors des estimations inexactes, affectant la mesure flottante et imprécise des perturbations des dynamiques des fluctuations des variables macroéconomiques.

Ainsi, bien que les techniques classiques de prévision à court terme se basent sur l'hypothèse de la présence d'une forte corrélation entre les observations successives des variables explicatives et exploitent ainsi les modèles stochastiques de régression linéaire autoregressifs, elles souffrent du problème de raccord entre prévisions et observations. Ceci se traduit techniquement par le fait qu'en pratique, l'analyse basée sur la modélisation purement économétrique, reste très restreinte, parce qu'elle ignore tout comportement dynamique qui justifie l'endogénéité des structures de dépendances non-linéaires, entre les observations successives, lors de l'évolution des variables macroéconomiques dans le temps.

Donc, si sophistiqué qu'il soit, une technique de prévision ne peut produire que des prédictions approximatives et par conséquent, le fait de négliger l'importance de l'approche dynamique en modélisation macroéconométrique dans l'analyse empirique prévisionnelle des fluctuations des variables macroéconomiques, ceci nous laisse penser qu'il permet l'omission de plusieurs faits stylisés importants, sur la dynamique des différentes phases de l'évolution cyclique de ces variables, tout en discriminant les changements permanents des faits accidentels.

Donc, le fait d'accepter qu'il existe dans l'évolution dynamique non-linéaire des variables macroéconomiques, des cycles endogènes et des phénomènes de bifurcation, ces différents arguments nous invitent, avant d'accéder à la spécification d'une formalisation directe de modèle macroéconométrique capable de généraliser le vrai processus générateur de données, de chercher à élargir notre champ d'investigation sur l'approche dynamique, afin de pouvoir distinguer la dynamique purement déterministe, dont le chaos, d'un comportement stochastique.

Pour palier ce problème, plusieurs solutions ont été proposées. La plus intéressante consiste à la caractérisation de la dynamique discrète des séries temporelles, par des invariants dynamiques qui quantifient le degré de complexité des processus sous-jacents. Ceci revient à tester la non-linéarité des processus générateurs de ces données. C'est-à-dire, d'essayer de connaître la pertinence statistique de leur utilisation en faveur de celle d'un modèle autorégressif classique. Nous chercherons, ici, à donner une nouvelle vision à la problématique de la sélection de structure de modèle de prévision, à partir de l'étude de la structure et de la dynamique endogène des modèles macroéconométriques.

La sélection de la structure idéale d'un modèle de prévision doit être conditionnée par l'objectif de l'analyse et la connaissance du vrai processus générateur de données. Choisir entre deux structures, revient à choisir entre les pouvoirs explicatifs pour un modèle prédictif. Ce choix devrait donc être argumenté en fonction de l'objectif des utilisateurs. Mais, nous voyons que la tâche de sélection se complique davantage, surtout lorsque le prévisionniste suppose d'établir sa démarche d'analyse prévisionnelle, dans un cadre instable et trop compliqué, fréquemment perturbé et très fluctuant, mais aussi qui obéir à des règles à la fois détruisant et constructives du chaos créative, caractérisé, essentiellement, par des dynamiques endogènes engendrant des changements intenses de structure.

Dans ce domaine d'analyse caractérisé par des instabilités des structures dynamiques, un modèle sera immédiatement exposé à des changements structurels, surtout endogènes et subir des transformations radicalement complexes, causant parfois son imprévisibilité.

Ainsi, si nous admettons comme hypothèse de base, que le futur n'est jamais parfaitement le développement linéaire du passé, bien qu'il soit conditionné par ce dernier, alors notre champ d'investigation de sélection de structure de modèle en prédiction des séries temporelles non-linéaire, reste donc ouvert.

En ce sens, afin de bien respecter notre hypothèse capitale de l'évolution dynamique et du changement structurel endogène, nous nous sommes intéressés au problème de la sélection de la structure de modèle non-linéaire de prévision, parmi une classe de modèles candidats pour expliquer au mieux, le mécanisme générateur des données et sa tendance à la prévisibilité dynamique.

Pour élaborer des modèles de prévision performants, il faut comprendre précisément les problèmes dans leurs particularités. Nous devons appliquer les différentes techniques déterministes et/ou probabilistes à l'analyse des séries industrielles macroéconomiques. La prévision de la plupart de ces séries réelles, complexes reste encore une tâche améliorable.

Cette dissertation s'inscrit dans le cadre de la combinaison de la modélisation macrodynamique, à l'économétrie du chaos et celle des processus non-linéaires avec changement structurel endogène et ayant pour objet la prévision et la modélisation des séries temporelles univariées, non-linéaires à temps discret.

En effet, l'approche de prévision non-linéaire des séries temporelles à temps discret est une ouverture très riche, du fait qu'elle expose un même modèle selon différentes manières, où il peut être traité différemment, selon diverses visions déterministes et/ou stochastiques et ainsi englobant des problèmes multiples pour les théoriciens.

En particulier, nous nous sommes intéressés, ici, au problème de découpage entre dynamique déterministe et dynamique stochastique, d'un modèle macroéconométrique, mais pour notre étude, il s'agit d'analyser cette dichotomie dans le sens très spécifique conduisant à une large complémentarité, là où se pose notre problématique : Faut-il utiliser, en prévision des séries temporelles univariées discrètes, des modèles non-linéaires stochastiques et/ou des modèles non-linéaires déterministes dont le chaos?

Sur le plan économétrique, l'objectif de cette thèse est d'établir la démarche et de décrire certaines méthodes qui permettent de donner un sens à la notion de supériorité d'un test de sélection, sur l'autre et son validation dans une analyse prévisionnelle lors de son application à des données de séries temporelles relatives au secteur industriel tunisien.

Économiquement, nous voudrions fournir un élément de réponse à la citation de Sims, (1994, p.1886) : « *Le fait que les fluctuations soient générées de manière endogène ou exogène, stochastique ou déterministe, est une propriété du modèle, et non du monde réel. C'est seulement, s'il existait un véritable modèle correspondant de manière beaucoup plus précise au monde réel, qu'il serait utile de savoir si le cycle des affaires actuel est plutôt stochastique ou déterministe.* ». De ce fait, le véritable problème évoqué, dans ce travail de recherche, est celui de la dichotomie, entre partie déterministe et partie résiduelle de la modélisation proposée.

## 4. Méthodologie de la recherche

Suite aux échecs répétés des tentatives linéaires de modélisations et surtout de prévisions, l'analyse et la prédiction de séries temporelles non-linéaires à temps discret seront des défis scientifiques importants, qui trouvent leurs exigences dans de nombreuses applications économiques, qui touchent des domaines importants de l'analyse conjoncturelle, telle que l'analyse prévisionnelle de la production industrielle.

Durant la dernière décennie, sur le plan macroéconométrique, la recherche s'est orientée vers l'utilisation des modèles empiriques d'ajustement non-linéaire. Ces modèles flexibles sont capables de fournir une meilleure caractérisation du comportement des séries chronologiques non-linéaires à temps discret, ont été développées dans ce cadre d'analyse conjoncturelle, afin de capturer les propriétés phases-dépendances liées aux phénomènes de changements de régime.

Le plus ancien a été le modèle autorégressif à changement de régimes markovien MS-AR (*Markov Switching AutoRegressive modèle*), employé par Hamilton (1989) et beaucoup d'autres, en vue de modéliser le changement de régimes liés au passage du cycle économique d'une phase

à une autre où les régimes sont dépendants entre eux et la transition entre ces régimes est exogène et assurée à l'aide d'une loi de transition probabiliste, vérifiant une chaîne de Markov cachée. Ce type de modèle est capable de bien caractériser les changements de régime occasionnels de la conjoncture économique, lors de la transition du cycle du phase de l'expansion, à la phase de récession et inversement.

Par contre, une autre approche différente pour la caractérisation de la conjoncture économique en périodes d'expansion et de récession consiste à indiquer le changement de régimes indépendants entre eux de manière endogène, en fonction des valeurs passées de la variable étudiée. Cette fois la modélisation appropriée pour étudier ce phénomène trouve sa justification dans la classe des modèles autoregressifs à seuil avec transition lisse, STAR (*Smooth Transition AutoRegressive modèle*), développés par Teräsvirta et Anderson (1992), puis favorisés par Granger et Teräsvirta (1993), Teräsvirta (1994b), et beaucoup d'autres.

Or, les résultats obtenus de la majorité des études empiriques antérieures ont prouvé la réussite des modèles STAR, dans la validation de l'hypothèse de la non-linéarité, due à la présence des irrégularités, dans les comportements cycliques endogènes, ainsi que des ruptures endogènes déterministes, dans les dynamiques non-linéaires de l'évolution des variables macroéconomiques. Ceci ouvre un cadre privilégié pour notre étude de caractérisation des mécanismes endogènes d'ajustements structurels non-linéaires des fluctuations cycliques asymétriques.

Concernant notre objectif que nous avons déjà signalé et qui se résume non pas dans l'analyse théorique des sources des fluctuations économiques, mais plutôt dans la modélisation et la sélection rationnelle de la structure d'un modèle non-linéaire de prévision, capable de prévoir le cycle endogène de la production industrielle en Tunisie. Du fait qu'un cycle suppose le changement<sup>6</sup> et que la théorie de cycle endogène vise à expliquer les fluctuations autoentretenues

---

<sup>6</sup> La notion de changement est une caractéristique fondamentale du cycle et dont les origines sont différemment expliquées par les analystes des fluctuations économiques. Par exemple, pour Marx ou pour Samuelson, le changement est le produit du système économique lui-même, donc endogène. Par contre, dans l'analyse de Friedman, le changement est provoqué par un facteur extérieur, ou exogène à savoir la variation de l'offre de monnaie.



de type cycle limite. Ceci justifie notre recours à ce type de modélisation, autorisant des ajustements non-linéaires avec changements structurels endogènes, au niveau de la tendance déterministe. Nous aurons, donc, tendance à utiliser des modèles non-linéaires en moyenne, qui appartiennent à la classe des modèles autorégressifs de changement de régimes, avec transition lisse.

Pour étudier l'aspect cyclique endogène des séries de la production industrielle, l'idée la plus intéressante est celle de l'apparition de cycle endogène par bifurcation, en dehors de toute explication exogène. Ainsi, l'hypothèse retenue, ici, est qu'un cycle endogène est avant tout le produit de l'instabilité structurelle inhérente du dynamisme de l'industrie. C'est pour cette raison, le fait d'accepter que la non-linéarité fournit une explication endogène des fluctuations, ceci explique l'utilité de chercher à modéliser une éventuelle non-linéarité des fluctuations, à travers les processus d'ajustement non-linéaire en moyenne, nous a guidé vers la modélisation STAR, qui admet la non-linéarité comme hypothèse de base et prend en compte les effets de seuils dans la tendance et les asymétries des effets taille, caractérisant les fluctuations du cycle industriel endogène. Le recours à ce type de modélisation non-linéaire, afin de décrire la dynamique du cycle industriel endogène, trouve sa justification dans le fait que le cycle industriel endogène peut être asymétrique.

Dans ce contexte, nous focaliserons sur les résultats obtenus, à partir d'un survol de la littérature empirique sur la validité des modèles d'ajustement non-linéaires de type STAR. Ainsi, le passage par plusieurs tests de linéarité permet, non seulement de valider l'hypothèse de non linéarité pour les modèles retenus de type STAR, mais aussi de mettre en évidence certaines propriétés du modèle STAR, qui seront très intéressantes dans le cadre de notre contexte de modélisation, concernant la possibilité que l'activité industrielle peut être placée dans un état intermédiaire, mais se comporte différemment entre la phase de récession et celle de l'expansion<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> D'après Teräsvirta (1994a), le modèle à seuil avec transition lisse entre les états dynamiques alternatifs STAR repose sur l'hypothèse selon laquelle les dynamiques locales du processus autorégressif changent avec le régime auquel appartient l'indicateur économique. C'est l'idée largement partagée par de nombreux chercheurs, à titre indicatif Öcal et Osborn (2000) disent : « *The Markov switching and threshold models imply that the economy must be within a single regime in each time period, whereas the smooth transition model allows the possibility that the economy may be in an intermediate state between, say, recession and expansion.* ».

Dès lors, ces modèles qui autorisent une transition lisse entre régimes et un ajustement symétrique ou asymétrique des fluctuations, par rapport à son niveau d'équilibre peuvent, donc, générer des cycles endogènes des fluctuations dynamiques aux caractères asymétriques.

Dès lors, l'idée consiste à commencer par identifier la typologie d'asymétrie cyclique, afin de distinguer entre l'asymétrie d'amplitude et l'asymétrie de pente, ce qui exige le passage par deux types de tests d'asymétrie au sens de Verbrugge (1997). Ensuite, le fait de supposer la possibilité d'existence de ruptures structurelles en tendances déterministes, nécessite d'identifier les dates inconnues de ruptures endogènes, dans la dynamique des séries temporelles étudiées, afin de définir les différents régimes, pendant lesquels les caractéristiques dynamiques du modèle STAR restent inchangées. Ceci, nous a amené à établir plusieurs tests statistiques qui peuvent être classés suivant deux catégories : la première est consacrée aux tests qui ont été étudiés dans le cadre d'une seule rupture, par contre, la seconde regroupe des tests de ruptures multiples successives qui peuvent être détectées.

Or, comme nous sommes intéressés dans cette thèse, plus spécialement au problème de caractérisation de la dynamique endogène des structures cycliques, alors un modèle macro-économétrique non-linéaire de changement de régimes avec une transition lisse de manière endogène, entre les régimes alternatifs, sera traité selon deux approches. D'abord, dans un cadre déterministe, ce modèle sera constitué d'un modèle dynamique déterministe non-linéaire, basé sur une équation récurrente non-linéaire en différences. Ensuite, dans un cadre stochastique, ce modèle économétrique sera traité dans sa globalité comme étant un modèle de type STAR.

Au premier niveau, plusieurs études empiriques élaborées dans un cadre déterministe ont essayé d'identifier le caractère chaotique, à travers l'étude de l'évolution du comportement dynamique non-linéaire des variables macroéconomiques, aussi bien qu'au niveau des rapports de dépendances non-linéaires entre elles. Dans ce contexte, nous allons limiter l'exposé pour trois procédures de tests : test de dimension de corrélation ; test de l'exposant de Lyapunov et test de bispectre au sens de Hinich. Ces trois tests restent, jusqu'à nos jours, parmi les outils empiriques les plus usuels, pour la détection du chaos.

Au second niveau, l'intérêt pour tester la non-linéarité trouve sa confirmation dans plusieurs études empiriques, qui ont essayé de tester les degrés de l'adéquation des modèles macroéconométriques de type STAR, à des théories économiques qui adoptent la non-linéarité comme hypothèse de base. Dans ce contexte stochastique, nous allons tester la présence de non-linéarité, dans le comportement des modèles STAR, retenus par la procédure de test la plus usuelle, au sens de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988). Puis, au cas où l'hypothèse de non-linéarité sera retenue, alors sur la base du test au sens de Teräsvirta (1994b), nous passerons à l'identification du type de modèle STAR le plus approprié. Cette étape nous permet de choisir le modèle LSTAR ou ESTAR, comme spécification de base, pour modéliser un cycle limite pour chacune des séries temporelles analysées.

Puis, nous allons traiter quelques aspects de la sélection de modèles non-linéaires, en prédiction des séries temporelles univariées à temps discret. La sélection de modèles est l'art de la recherche du modèle optimal, selon certains critères bien connus des spécialistes. Dans le cadre de ce travail, nous considérons le problème de sélection de modèles non-linéaires avec changement de structure endogène. Cette stratégie de recherche se base sur diverses étapes.

La recherche d'une représentation bien sophistiquée, autorisant la prévision de la dynamique endogène des fluctuations cycliques des séries de la production industrielle tunisienne, nous a conduit à évoquer le problème de bifurcation, qui cherche d'étudier qualitativement le phénomène d'évolution dynamique de l'organisation structurelle, au niveau d'une modélisation macroéconométrique non-linéaire, afin d'établir un contrôle optimal de la dynamique endogène des structures, caractérisant le dynamisme de notre secteur productif industriel, généralement, instable. Or, cette instabilité, c'est elle qui provoque la dynamique endogène des structures.

Étant donnée la complexité de la prévision des modèles non-linéaires qui seront étudiés. L'étude de la dynamique déterministe, dans un modèle macroéconométrique basé sur la modélisation STAR, se justifie par le fait que nous ne pouvons jamais dissocier la notion de prévision, de celle de la marche du temps. Du fait que la précision des prévisions qui seront étudiées dépend non seulement de la qualité de la mesure statistique du passé, mais aussi de

l'importance jouée par l'analyse des enchaînements dynamiques, qui représentent des interactions dans de multiples échelles de temps dans les relations de récurrences, définies par la dynamique déterministe du modèle STAR, qui donnent une mesure de l'intensité des fluctuations cycliques des variables macroéconomiques analysées.

C'est la marche du temps, définie par la cohésion des relations de récurrences dans la partie dynamique déterministe du modèle STAR, qui conditionne une invariance par changement d'échelle spatio-temporelle, où les enchaînements dynamiques, jouent un rôle fondamental pour montrer comment un processus déterministe transite d'un état à un autre et comment il se comporte au voisinage d'un état d'équilibre : nous parlons alors de *loi de changements par recombinaison des invariances*<sup>8</sup>.

Ceci nous laisse penser qu'un processus de transition défini et continu sur l'intervalle  $[0, 1]$ , soit capable de générer la dynamique endogène des fluctuations cycliques et même asymétriques, n'est pas intéressant uniquement du point de vue d'une perspective théorique, il est en train d'être reconnu comme un outil utile, pour le contrôle de la prévision et l'analyse qualitative de la nature d'ajustement structurel endogène, basée sur la technique de bifurcation, en modélisation macroéconométrique.

L'amélioration des techniques de prévision d'un modèle STAR, suite à un contrôle rationnel des propriétés qualitatives de la dynamique endogène de son processus d'ajustement par lissage entre les différents états de régimes rencontrés, est une tâche fondamentale, dans la caractérisation des transitions critiques et l'étude qualitative des propriétés dynamiques de l'équilibre multiples. Cependant, malgré tous ces avantages, les propriétés dynamiques du processus de transition intégré dans un modèle STAR, restent ignorées par les travaux de recherches actuelles. Pourtant, nous pensons que la connaissance de ces propriétés qualitatives du processus de transition permettent une bonne adéquation des prédictions d'un modèle et les politiques macroéconomiques envisagées.

---

<sup>8</sup> C'est Mandelbrot B., (1963), le premier qui a introduit l'idée qui tient à chercher de mettre en évidence une invariance par changement d'échelle sur les fluctuations des rentabilités boursières.

Donc, nous désirons suivre une méthodologie basée, tout d'abord, sur la théorie de la morphologie mathématique, visant la compréhension géométrique de l'endocyclogénèse induite par des systèmes dynamiques déterministes, puis sur l'approche de prédiction capable de nous permettre de sélectionner la structure d'un modèle "*meilleur*" de prévision. Pour ce faire, nous considérons le problème de la sélection de modèle dans un cadre unifié, où l'objectif essentiel de la modélisation est la prédiction. C'est une approche intuitive et marque une importance considérable, lorsque les données futures sont indirectement observées ou manquantes.

Notre axe de recherche consiste à proposer, après la comparaison au moyen de tests, un critère de choix de modèle générateur, entre les modèles non-linéaires candidats de l'ajustement. Ce problème est vu comme un problème de choix de la bonne densité prédictive pour les données futures. Les critères que nous venons de comparer seront exploités dans des tests statistiques qui quantifient par la mesure fine, la qualité de prédiction pour les séries étudiées. Le critère choisi permet de sélectionner le modèle ayant la capacité de prédiction la plus élevée.

Premièrement, dans un cadre déterministe, sous l'hypothèse que les séries étudiées, qui caractérisent le dynamisme du secteur industriel instable, échangent leurs intervalles d'instabilité. Alors, pour élaborer des prévisions fiables dans ce contexte d'instabilité des structures dynamiques, nous proposons une nouvelle technique de prévision déterministe basée sur le principe d'estimation par intervalle dans un contexte à erreurs bornées.

Dans ce cadre, nous justifions le recours aux méthodes ensemblistes d'analyse par intervalles pour deux raisons. D'une part, ces outils ont l'avantage de traiter des problèmes d'optimisation non-linéaire sans l'utilité de passer par des transformations préliminaires de linéarisations, et, d'autre part, ils ont la capacité de garantir un résultat pour n'importe quelles sortes d'incertitudes (erreurs de mesure, erreurs d'arrondis, etc.), sans chercher à éliminer aucune partie de la solution.

Dès lors, cette approche qui s'appuie sur la technique d'analyse par intervalles, sera considérée comme la méthode la plus adaptée pour garantir la prévision dans un domaine

d'instabilité des structures dynamiques approximé par des intervalles. Là où l'instabilité engendrée par la variation de certains paramètres de transitions lors de la dynamique endogène des structures à la suite de la modification des propriétés qualitatives au voisinage de l'équilibre dynamique tend à influencer la qualité des prévisions des modèles STAR.

Ainsi, pour accéder à l'application rigoureuse de la propagation d'intervalles dans le cas de la modélisation STAR, nous allons approximer les domaines des variables étudiées par des intervalles. Donc, l'erreur de prévision qu'il faut quantifier sera traitée comme étant le rayon du pavé contracté par propagation. Nous espérons donc, que l'application des techniques de bisection par la propagation de contraintes sur ces intervalles permet d'apporter de nouvelles réponses raisonnables à la problématique traitée.

Deuxièmement, dans un cadre stochastique, sur la base de notre échantillon, nous employons la méthode de bootstrap, en blocs chevauchés, telle qu'elle est proposée par Künsch (1989) et Skalin (1998), basée sur le ré-échantillonnage par simulation empirique de la série de donnée, appartenant à la classe des modèles STAR et nous tenons compte de la possibilité d'existence des changements endogènes de structure.

Ces simulations nous permettent, par la suite, d'engendrer une riche variété de comportements dynamiques du cycle endogène. Par l'analyse théorique et l'examen graphique de ces processus, nous souhaitons parvenir à saisir les caractéristiques dynamiques de chaque spécification de cette famille de modèles non-linéaires en moyenne.

Si nous limitons notre étude pour le cas des modèles STAR avec deux fonctions de transition logistique et exponentielle. Ces genres de modèles ne devraient, considérer qu'un nombre limité de dynamiques endogènes sous-jacentes et, en plus de la modélisation de chacune de ces dynamiques, doit tenir compte des phénomènes de transition qui provoquent le passage d'un régime à l'autre.

Nous pensons que cette étape nous permet de choisir entre le modèle LSTAR et ESTAR, comme spécification de base pour modéliser un cycle limite pour chacune des séries temporelles analysées. Nous essayons de montrer que la connaissance des caractéristiques de ces deux processus de transition permet d'engendrer une riche variété de comportements dynamiques endogènes du cycle industriel.

Par ailleurs, ces modèles sont relativement simples à développer, et adaptés en fonction des données disponibles. Bien que cette méthode puisse être appliquée à n'importe quelle série temporelle, le souci originel de modéliser plusieurs dynamiques, la rend plus particulièrement intéressante, dans le cadre de prévoir la dynamique endogène des fluctuations du cycle de la production industrielle en Tunisie.

À la manière de Teräsvirta (2006), notre but est donc de montrer, empiriquement, que le fait de développer un modèle STAR correctement spécifié, recouvrant plusieurs dynamiques, ceci est capable d'améliorer les prédictions du cycle endogène d'une série temporelle.

Concernant la nature des données, elles se réduisent à des séries des indices de la production industrielle, qui autorisent à la fois, la lecture en termes de cycle économique et en termes d'évolution structurelle<sup>9</sup>. Car, ces indices fournissent par construction, le suivi de la production de chaque série-témoin, plutôt que de celle des branches industrielles et de l'ensemble de l'industrie<sup>10</sup>. Le dispositif des indices de la production industrielle est très utile, puisque dans son enregistrement mensuel, l'indice d'ensemble de la production industrielle en Tunisie, est l'un des quatre grands indicateurs macroéconomiques de la santé de l'économie, avec les prix, le commerce extérieur et l'emploi<sup>11</sup>.

---

<sup>9</sup> la production de chaque famille élémentaire de produits industriels est retracée sous la forme d'une série chronologique mettant en évidence aussi bien une tendance de fond que des infléchissements cycliques, l'ensemble de ces deux composantes étant d'ailleurs appelé "*tendance-cycle*".

<sup>10</sup> Ils permettent donc à la fois un suivi macroéconomique et un suivi par famille fine de produits industriels, encore que dans cette direction les quelques séries témoins de l'indice base 1995 ne permettent pas toujours un détail extrême.

<sup>11</sup> Il constitue ainsi l'un des quatre vecteurs de ce que nous appelons parfois le « *carré magique* ».

Pour procéder à l'application de la méthodologie supra aux cas des activités industrielles en Tunisie, nous avons eu recours, à titre principal, aux données mensuelles base 100 en 1990 de l'INS, durant la période 1996 : 04 à 2006 : 12 et nous procédons au découpage sectoriel de l'industrie comme suit : Industries Agricoles et Alimentaires (IAA) ; Industries Matériaux de Construction Céramiques et Verres (MCCV) ; Industries Mécaniques et Électriques (IME) ; Industries Chimiques (IC) ; Textiles, Habillement et Cuir (IHC) ; Industries Diverses (ID) ; Industries Manufacturière Diverses (ID) ; Mines (M) et Energie (E). Chacun de ces secteurs sera représenté par une série temporelle  $y$  associée celle de l'Indice de Production Industrielle (IPI).

## 5. Contributions

La contribution majeure de la recherche menée au cours de l'élaboration de cette thèse, consiste à aborder une problématique très pertinente, à savoir la prévision dans le domaine des instabilités des structures dynamiques, par une analyse double : l'une déterministe, basée sur les modèles dynamiques non-linéaires, et l'autre stochastique, fondée sur les modèles économétriques à seuils avec transitions lisses.

La vision conjointe entre les deux pôles déterministes et stochastiques de la modélisation macroéconométrique non-linéaire de type STAR, tend à réduire la dichotomie fréquemment rencontrée dans la littérature empirique, et nous a permis d'essayer de participer à la compréhension intéressante des aspects non-linéaires des dynamiques endogènes des structures de dépendances inhérentes, plus particulièrement, aux processus de transitions et de changements structurels endogènes, caractérisant les modèles autorégressifs à seuils avec transition lisse.

En ce sens, afin de prendre en compte ces changements endogènes de structure, une innovation de ce travail réside, donc, dans l'étude de la dynamique non-linéaire des modèles autorégressifs à seuil avec transitions lisses, qui se sont révélés utiles pour la mise en évidence de cycles endogènes asymétriques, qui caractérisent l'évolution dynamique instable des séries temporelles macroéconomiques. Suite à la prise en considération de la présence de ruptures



structurelles déterministes de telle sorte que le modèle STAR, autorise, simultanément, des changements de régime de deux types : l'un est sous forme des sauts en niveau pour sa partie déterministe et l'autre est sous forme des effets de seuil, pour sa partie stochastique.

Ceci semble bien en concordance parfaite avec notre volonté de chercher un fondement endogène aux fluctuations cycliques autoentretenues de types cycles limites, qui peuvent être modélisés à l'aide des modèles STAR. Nous entendons que ce raisonnement permet, non seulement, de mieux caractériser ces changements endogènes de régime, mais aussi, de minimiser le risque de tomber dans une interprétation fallacieuse des effets de seuil détectés. Ainsi, nous attendons que les majeures nouveautés viennent du fait que ce sujet nécessite de mener une étude conjointe, de l'instabilité structurelle (non stationnarité) et de la non-linéarité.

De ce fait, l'idée générale de ce travail de recherche est d'essayer de comprendre : Comment sélectionner un modèle non-linéaire et optimal, en prédiction de série temporelle, capable de modéliser l'asymétrie du cycle endogène de la production industrielle<sup>12</sup> en Tunisie, dûe à un mécanisme non linéaire d'émergence endogène des fluctuations?

Par la présente recherche, nous adoptons une hypothèse qui considère les fluctuations endogènes comme étant le produit de l'instabilité inhérente du fonctionnement de l'industrie. Nous essayons de montrer, qu'en présence des fluctuations endogènes, le fait que le cycle se répète à un rythme irrégulier, est une source d'incertitude importante qui influence la qualité de la prévision. Dans ce cadre d'analyse, nous essayons de montrer que ces phénomènes sont de deux types : soient des dynamiques endogènes déterministes, dûs aux oscillations périodiques auto-entretenues, soient des dynamiques chaotiques, résultant des fluctuations complexes et

---

<sup>12</sup> Les indices de la production industrielle (IPI) ont pour population de référence l'ensemble des entreprises industrielles installées en Tunisie. Ce sont des indices de Laspeyres des volumes de production (pondération constante par les valeurs ajoutées brutes au coût des facteurs de l'année de base 100 en 1990). Ils sont calculés par l'Institut National de la Statistique (INS) à partir de sources, principalement les enquêtes de branche, issues de services statistiques ministériels (Observatoire de l'énergie) ou d'organismes professionnels. Les produits suivis dans les enquêtes sont situés à tous les niveaux des processus de fabrication: ils représentent ainsi au mieux l'activité de l'ensemble de l'industrie. Les données sont collectées trimestriellement auprès des entreprises industrielles regroupées dans 5 groupes industriels à savoir les industries alimentaires, les industries textiles, les industries chimiques, l'énergie et les autres industries.

apériodiques et qui tendent à converger vers un schéma auto-organisée, fractale, après une phase de doublement de périodes.

L'apport récent de l'explication de la dynamique endogène des fluctuations des variables macroéconomiques est double. D'une part, il permet de fournir un cadre conceptuel important pour comprendre puis quantifier l'évolution temporelle des phénomènes irréguliers, par la modélisation non-linéaire et d'autre part, selon cette nouvelle conception, l'évolution tendancielle de l'activité industrielle va converger, non plus vers un point ou une droite, mais plutôt vers un cycle. En ce sens, nous sommes attachés de démontrer comment le recours à la théorie de cycle endogène, est avantageux pour comprendre le dynamisme de l'industrie tunisienne et en conséquence, comment il permet de contrôler les chocs structurels endogènes et même de traverser les effets locaux, très prononcés, des périodes d'expansions et de récessions récurrentes et non périodiques du cycle industriel.

Sans vouloir nous engager théoriquement dans un problème de débat sur l'identification des origines des fluctuations de l'activité industrielle tunisienne, nous admettons l'hypothèse d'endogénéité du cycle industriel, par laquelle nous cherchons de prouver que les erreurs de prévision dépendent, souvent, de la prise en compte des caractéristiques structurelles dans la conjoncture. Plus précisément, nous voudrions mener une étude tant qualitative que quantitative afin de permettre une analyse de sensibilité de la structure d'un modèle non-linéaire de prévision à l'incertitude due à la variabilité de l'information prédictive suivant différentes échelles de temps. Ceci nous incite de savoir : Comment les erreurs de prévision prennent naissance endogènement dans les fluctuations industrielles? Comment ces erreurs de prévision entretiennent les fluctuations industrielles? La manière selon laquelle l'économie répond aux différents chocs endogènes, qui contribuent aux fluctuations industrielles?

Les objectifs de la recherche proposée dans cette dissertation sont doubles. Dans un premier temps, cette recherche apporte, comme renouveau de l'approche théorique de fluctuations économiques, un raisonnement qui autorise l'utilisation des méthodes qualitatives d'analyse de la conjoncture, capable de rendre compte de la dynamique endogène des fluctuations

de l'activité industrielle, par la présence d'un changement structurel, en tendance déterministe dans des modèles non-linéaires autorégressifs à seuils avec transition lisse. Dans un second temps, nous proposons une méthode d'évaluation économétrique qui permet d'estimer et de tester, dans un cadre unifié, les changements endogènes induits par des transitions des paramètres structurels.

Ces tests exposent les dynamiques endogènes des structures ainsi qu'ils permettent de mettre, à point de nouvelles méthodes expérimentales de sélectionner le meilleur modèle de prévision. Nous allons aborder, en particulier, la problématique de l'évaluation des performances prédictives d'un modèle non-linéaire STAR estimé, non plus d'un point de vue qui consiste à quantifier puis à comparer les trois indicateurs statistiques les plus usuels: MSE (*Mean Squared Error*), RMSE (*Root Mean Squared Error*), MAE (*Mean Absolute Error*), mais plutôt d'un point de vue basé sur des tests statistiques de comparaison de la qualité prédictive.

Ces tests statistiques seront utilisés pour comparer la qualité prédictive en trois niveaux: les tests d'évaluation des prévisions ponctuelles ; les tests d'évaluation des prévisions par intervalle de confiances et les tests d'évaluation des densités de prévisions. Dans ce travail, il s'agit d'exploiter de telles méthodes pour proposer un critère de choix, fondé sur l'approche prédictive, pour les modèles non-linéaires en moyenne. Nous établissons une comparaison entre plusieurs tests statistiques pour l'évaluation de ce choix, dans l'approche prédictive sur des données futures.

Comme perspective de la présente recherche, nous espérons qu'elle permette de palier des insuffisances de quelques tests, en cas d'insuffisance de données, comme par exemple le test de cointégration qui nécessite, au moins, trente observations pour l'élaborer. Nous cherchons à ce que les résultats empiriques que nous tenterons d'obtenir, seront riches et concluants et permettent de fournir une nouvelle vision, par laquelle, il sera capable de donner une autre interprétation des dynamiques des fluctuations macro-économiques et de leurs autorégulation et auto-organisation reproductible, qui a pour substance, la transformation endogène des structures dynamiques et en conséquence, elle influence la prévision.

Or, comme l'industrie nationale subit, en permanence, des fluctuations récurrentes et des transformations endogènes, suite aux chocs structurels, qui perturbent continuellement, le dynamisme interne de ses branches et causent l'instabilité de leurs structures économiques sectorielles et locales, ces perspectives sont globalement favorables, dans les conditions internes qui se fondent, actuellement, sur le maintien des politiques macroéconomiques prudentes, capables d'identifier et prévoir les chocs structurels, en industrie et ayant pour substance, la poursuite des réformes structurelles et notamment, d'expliquer et d'analyser le dynamisme du secteur industriel et d'éclairer les stagnations attendues de certaines branches sectorielles.

## 6. Organisation du document

L'ouvrage de thèse contient trois parties et s'organise comme suit:

La première partie intitulée « *Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévisions de séries temporelles* », introduit le cadre général de la thèse, à partir d'une analyse historiographique des causes des cycles endogènes, de la production industrielle en Tunisie, durant la période qui s'étend du 4<sup>ème</sup> mois de 1996, jusqu'au dernier mois de 2006. L'objet de cette partie est, tout d'abord, de situer les problématiques de sélection de modèle de prévision et de la détection, après avoir signalé les insuffisances des modèles linéaires de prévisions pour rendre en compte de plusieurs spécificités et mettre l'accent sur des mécanismes d'instabilité économique, qui reflètent des problèmes de non stationnarité et d'asymétrie. Ceci, rend la modélisation non-linéaire de grande importance pour tenir compte de ces phénomènes.

L'essor principal de cette partie consiste à se pencher sur l'étude de la sélection d'un modèle de prévision, dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques, qui s'effectuent, essentiellement, par une famille des processus autorégressifs à seuils (univariés). Pour ce faire, après un examen rétrospectif de l'écart conjoncturel de l'indice de production industrielle, nous allons, en particulier, consacrer notre effort à fournir un diagnostic économique des causes des mouvements cycliques. Ceci, nous permet une présentation préliminaire de la problématique

d'asymétrie, due à l'endogénéité des fluctuations et du principe de *changement par recomposition des invariances*, qui accompagnent simultanément le fonctionnement dynamique des processus endogènes d'adaptation, d'auto-organisation et de transformation de structures.

Cette première partie comporte l'introduction de plusieurs tests statistiques de détection et de validation des changements des structures endogènes, en particulier, les tests de la présence des changements des régimes endogènes (inconnus) en tendance déterministe et les tests des racines unitaires, contre stationnarité avec rupture de la tendance déterministe, à date de rupture inconnue.

Le principal résultat retenu de cette première partie montre qu'à l'inverse de la théorie des cycles exogènes, les fluctuations de l'indice de la production industrielle et ses composantes sont purement endogènes et déterministes, dues à l'interdépendance des branches de notre secteur industriel. La présence d'un cycle limite nous paraît adaptée à l'analyse de la dynamique endogène déterministe et non-linéaire, par un modèle non-linéaire avec transition lisse, de la production industrielle. Pour cette raison, nous avons essayé d'étudier la structure du cycle à l'équilibre. En face de telles fluctuations, une politique contra-cyclique peut être avantageuse pour redynamiser le secteur industriel Tunisien? Pour répondre à cette question, il est intéressant de passer, tout de suite, par une étape de construction d'un modèle de prédiction.

Deux outils, nécessaires à l'élaboration de la tâche de sélection, sont présentés et qui se déroulent autour de l'approche d'arithmétique par intervalle, introduite par Moore (1966), et la technique de bootstrap en blocs chevauchés, telle qu'elle est proposée par Künsch (1989). De ce fait, cette question se réduit à la sélection de la « *meilleure* » structure d'un modèle non-linéaire, en prédiction de séries temporelles, capables de modéliser et prévoir la dynamique endogène du cycle industriel. L'extension prévue de ce travail concerne une simulation de plusieurs processus de transition, de la famille de modèles non-linéaires, de changements avec transitions douces, nous permettant d'identifier, de caractériser et d'analyser les propriétés dynamiques de chaque processus à part.

La deuxième partie de cette thèse est intitulée « *Endocyclogenèse et dynamique des changements de structures endogènes : vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries temporelles non-linéaires* » et se rapportera au cadre de la modélisation non paramétrique chaotique et plus exactement à l'analyse dynamique non-linéaire d'un modèle économétrique à seuil avec transition lisse. Elle tend à décrire la modélisation dynamique des différents concepts (présence des asymétries, des distributions multimodales, des ruptures structurelles, des changements endogènes de structure, des dynamiques non-linéaires) définis dans la première partie, après une brève introduction historique sur sa base théorique solide, suivie d'une présentation générale des grandes écoles de pensées économiques, sur la problématique de modélisation des fluctuations économiques et du cycle. Après avoir cité les principales limites d'expliquer un cycle, exclusivement à partir des chocs exogènes, l'analyse va dépendre, cette fois, d'un nouveau mécanisme purement endogène, où les fluctuations sont liées à la structure même de l'économie, sans aucune intervention externe. D'où un cycle sera doté de deux propriétés : il est à la fois endogène et non-linéaire. Bien que les modèles non-linéaires en moyennes de séries temporelles offrent des performances supérieures, par rapport aux techniques de la modélisation et prévision traditionnelle, ils posent également des problèmes complexes, tels que la présence des minima locaux pour la fonction à optimiser, ce qui rend difficile une sélection de structure de modèle non-linéaire de prévision.

En effet, nous aborderons notamment une terminologie sur l'ensemble des outils de la *Nonlinear Time Series Analysis* (NTSA), nécessaire à l'étude des similitudes dynamiques non-linéaires, fondamentalement complexes et qui s'accompagne souvent d'une interrogation sur la nature déterministe ou stochastique, des mécanismes endogènes générés, par les non-linéarités impliquées dans le comportement dynamique, d'un modèle économétrique avec changements de régimes par transitions lisses. Ainsi, le recours à la théorie endogène du cycle économique (industriel), nous permet, non plus de jeter un coup de lumière sur la formation des cycles limites spécifiant les fluctuations autoentretenues, mais aussi de caractériser, à travers l'analyse du phénomène qualitatif de la bifurcation du comportement dynamique non-linéaire, un mécanisme intrinsèquement complexe de dédoublement de période, capable d'induire des fluctuations chaotiques compliquées, de manière endogène.

En particulier, la prise en compte d'un cadre théorique de cycle endogène, nous incite à focaliser notre intention, sur l'étude du phénomène de transition de phase, qui est à l'origine de la bifurcation, source de la transformation et du changement par recombinaison des structures cycliques endogènes et parfois complexes, induites par les perturbations singulières de la dynamique lente ou rapide suite à la perte de la stabilité endogène, qui suit les changements des propriétés qualitatives au voisinage de l'équilibre dynamique, caractérisant la famille de modèles dynamiques non-linéaires de premier ordre. Les principaux phénomènes (attracteur ; transitions de phases ; bifurcation ; récurrence ; auto-organisation topologique, portrait de phase ...) associés à l'apparition d'un cycle limite sont alors abordés.

Nous donnons, ensuite, des éléments de principe, concernant l'équilibre et la stabilité d'un système économique. Puis, nous mettons en place des outils adéquats, capables d'améliorer les techniques de sélection des modèles de prévision de séries temporelles non-linéaires, notamment, en cas des fluctuations chaotiques, où il y a toujours sensibilité, vis-à-vis des conditions initiales et le cycle des erreurs de prévisions à tendance d'être explosif exponentiellement. Dès lors, le recours à l'approche ensembliste et plus particulièrement aux techniques de simulation numériques de prévision par intervalle à erreur bornée, va nous aider à majorer l'imprédictibilité des séries temporelles, surtout en présence des fluctuations dynamiques chaotiques où l'erreur à tendance de s'amplifier. Dans le cadre de modèles STAR étudiés, l'analyse par intervalle fournit une nouvelle approche, approximative mais garantie, pour la modélisation non-linéaire et la prédiction par intervalle à erreur bornée des séries temporelles, basée sur des algorithmes très complexes d'optimisation globale non-linéaire sous contraintes, assurant le découpage et la réduction d'un pavé sous contrainte (*bisection*), à l'aide d'une méthode numérique de sous-pavage, par partition récursive de l'espace des phases reconstruit associé au domaine admissible, sur lequel le processus d'ajustement dynamique est défini, combiné à un filtre dynamique non-linéaire de kalman.

Comme extension directe de la partie précédente, une troisième partie purement économétrique intitulée « *Techniques de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR* », comporte une analyse pratique de

la dynamique endogène des fluctuations cycliques de la production industrielle en Tunisie. Dès lors, nous allons commencer cette partie par examiner l'existence des cycles limites, dans des comportements dynamiques des variables macro-économiques. Compte tenu de ces propriétés, nous avons conclu qu'il n'y a pas de cycle industriel régulier, en Tunisie, et que les modèles à seuils avec transitions lisses STAR sont les plus appropriés pour modéliser et prévoir les dynamiques des cycles endogènes des fluctuations autoentretenues des séries industrielles en Tunisie.

En plus, nous avons pu remarquer qu'il est ainsi, non seulement possible, d'introduire séparément des modèles déterministes et des modèles stochastiques, pour décrire un même phénomène, mais également de relier leurs variables et leurs paramètres respectifs, puisqu'il s'agit d'un mélange, entre ces deux phénomènes, dans un seul mécanisme qui pourrait commander le fonctionnement réel du mécanisme générateur de données. Ainsi, le recours aux techniques de l'économétrie du chaos va mettre notre problème de sélection de structure de modèles non-linéaire, dans un cadre plus unifié, qui se développe à la croisée de ces deux domaines opposés.

Cette dernière partie est consacrée à l'étude empirique sur données réelles, des techniques de modélisations et de prévisions de la production industrielle, à l'aide des modèles non-linéaires en moyenne de changements de régimes avec transitions lisses. La méthode de simulation numérique de bootstrap des prévisions classiques : ponctuelles ; par intervalles de confiances et par densité est exposée.

Après avoir pu spécifier puis sélectionner les structures des modèles non-linéaires pour les différentes séries étudiées, nous allons traiter le même problème de sélection de structure de modèle non-linéaires, mais cette fois, dans un cadre de prévision. Comme extension de cette partie, nous allons continuer la procédure de l'illustration empirique, par construction des modèles de prévision, au moyen de la technique de bootstrap (un algorithme en langage Rats est mis en marche).



À cet égard, nous allons consacrer une section à la comparaison des méthodes d'évaluation des modèles non-linéaires de prévisions. Nous allons distinguer trois niveaux de comparaisons : les modèles non-linéaires de prévisions ponctuelles ; les modèles non-linéaires de prévisions par intervalles de confiances et les modèles non-linéaires des densités de prévisions. Ce travail sera fondé sur la littérature concernant les différents tests, qui ont été proposés pour comparer les qualités prédictives des modèles concurrents. Puis, nous allons appliquer cette procédure sur nos données (simulées par la technique de bootstrap en blocs chevauchés), afin de sélectionner les structures des « *meilleurs* » modèles de prédictions des séries temporelles non-linéaires des cycles endogènes, des séries de la production industrielle en Tunisie. En particulier, nous allons exhiber trois niveaux :

- Évaluation des prévisions ponctuelles (test de Diebold et Mariano (1995) et test de Harvey, Leybourne et Newbold (1997)).
- Évaluation des prévisions par intervalles de confiance (test de couverture non-conditionnelle, test de couverture conditionnelle et test d'indépendance des violations de Christoffersen (1998)).
- Évaluation des densités de prévision (test de spécification correcte de Bai (2003) et test de comparaison de densités conditionnelles mal spécifiées de Bao, Lee et Saltoglu (2007)).

Enfin, l'analyse empirique et les résultats ainsi élaborés, permettent de suggérer d'autres perspectives de développement. Par exemple, nous allons consacrer nos prochaines perspectives de la recherche à la comparaison des méthodes de sélection de structures des modèles de prévisions de séries temporelles à cointégrations non-linéaires.

# Partie I

## **Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévisions de séries temporelles**

*Je dirais, qu'aujourd'hui, le terme « prévision » est utilisé lorsque l'on tente de prévoir la survenue de phénomènes qui ont de l'intérêt pour la société (météo, catastrophe naturelle, etc.), alors que la prédiction cherche plutôt à comprendre l'univers par validation d'un modèle en le confrontant avec le futur.*

*Jean-Marie Hameury, astronome*

<b>Sommaire Partie I</b> .....	30
<b>1.0. Introduction de la partie I</b> .....	32
<b>1.1. Présentation des données</b> .....	37
<b>1.2. Dynamiques économiques : fluctuations et asymétrie des séries industrielles</b> .....	39
<b>1.2.1. Typologies, mesures et détection d'asymétries cycliques</b> .....	39
<i>1.2.1.1. Mesure et définition des cycles</i> .....	40
<i>1.2.1.2. Typologies d'asymétries cycliques</i> .....	50
<i>1.2.1.3. Mesure d'asymétries cycliques</i> .....	53
<i>1.2.1.4. Procédures et test d'asymétrie de Verbrugge (1997)</i> .....	59
<b>1.2.2. Les implications d'asymétries cycliques</b> .....	63
<b>1.2.3. Transition et dépendances structurelles</b> .....	68
<i>1.2.3.1. Transition de phase dans les criticités auto-organisées : du local au global</i> .....	68
<i>1.2.3.2. Rapports de dépendance structurelle</i> .....	71
<b>1.3. Ruptures structurelles de tendances : Justifications théoriques et validation empirique</b> .....	77
<b>1.3.1. Justification de l'introduction de ruptures structurelles en tendances déterministes</b> ..	77
<i>1.3.1.1. Changement de structure : Aspect théorique et pratique</i> .....	77
<i>1.3.1.2. Test de changement de structure avec rupture simple de Andrews et Ploberger (1994)</i> .....	89
<i>1.3.1.3. Test de tendances déterministes avec ruptures multiples de Bai et Perron (2003a)</i> .....	91
<b>1.3.2. Tests de racine unitaire contre stationnarité avec ruptures structurelles endogènes de tendances déterministes</b> .....	96
<i>1.3.2.1. Test de Perron et Vogelsang (1992)</i> .....	102
<i>1.3.2.2. Test de Perron (1997)</i> .....	104
<i>1.3.2.3. Test de Zivot et Andrews (1992)</i> .....	107
<i>1.3.2.4. Test de Lee et Strazicich (2004)</i> .....	113
<i>1.3.2.5. Test de Lumsdaine et Papell (1997)</i> .....	118
<i>1.3.2.6. Test de Lee et Strazicich (2003)</i> .....	122
<b>1.4. Construction d'un modèle non-linéaire de prévision</b> .....	125
<b>1.4.1. Les insuffisances des modèles linéaires de prévision classique de séries temporelles</b> .....	125
<i>1.4.1.1. Justifications économiques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions</i> .....	126
<i>1.4.1.2. Justifications économétriques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions</i> .....	127
<b>1.4.2. Limites du problème général de sélection de modèle</b> .....	129
<b>1.4.3. Position du problème et les principales approches de résolutions utilisées</b> .....	131
<b>1.4.4. L'approche ensembliste</b> .....	136
<i>1.4.4.1. Comparaison entre l'approche ensembliste et l'approche probabiliste (économétrique)</i> .....	136

## Sommaire Partie I

---

<i>1.4.4.2. Opérations sur les ensembles pures</i> .....	139
<i>1.4.4.3. Calcul par intervalles</i> .....	140
<i>1.4.4.4. Opérations sur les intervalles</i> .....	143
<i>1.4.4.5. Propriété d'inclusion et décorrélation des variables</i> .....	145
<i>1.4.4.6. Fonction d'inclusion</i> .....	147
<i>1.4.4.7. Contracteurs</i> .....	153
<b>1.4.5. L'approche du bootstrap</b> .....	155
<b>1.5. Conclusion de la première partie</b> .....	160

## 1.0. Introduction de la partie I

La prévision de séries temporelles est un domaine passionnant de recherche. Jusqu'à une époque relativement récente, les modèles macro-économétriques, par référence aux approches actuellement dominantes de type néo-classique, traitent des séries temporelles en admettant que les dynamiques des fluctuations des séries macroéconomiques n'étaient que le fait du hasard et étaient dépourvues de mémoire ou d'interdépendance. Cela signifie que l'histoire est sans apports à l'économie et qu'il n'y a plus de dynamique économique, ni d'apprentissage historique apporté par le passé de la série, où les observations deviennent rapidement indépendantes au cours du temps et se traduisent techniquement par la décroissance des autocorrélations à un taux géométrique vers zéro. Pour cela, les processus linéaires (généralement désignés par la famille des modèles ARMA : *AutoRegressive Moving Average* dans le cas univarié ou encore par la famille des modèles VAR : *Vectorielle AutoRegressive* dans le cas multivarié) sont des processus avec mémoires courtes compte tenu de la décroissance rapide de leurs fonctions d'autocorrélations<sup>13</sup>.

Les dernières décennies ont vu un regain d'intérêt pour maîtriser le comportement dynamique non-linéaire des séries temporelles quotidiennes (économiques ; financières ; industrielles...), afin de fonder une réalité qui ne peut avoir naissance que dans un cadre original, traitant l'économie en mouvement. C'est le seul cadre qui est capable de bien comprendre, en

---

<sup>13</sup> La fonction d'autocorrélation (FAC) permet d'informer, si la série est stationnaire ou si elle comporte une tendance qui décrit les mouvements de la série. Le ralentissement de la décroissance de l'autocorrélogramme simple est un indicateur essentiel qualifiant soit une série avec racine unitaire, soit une série non stationnaire autour d'une tendance déterministe. Rappelons que l'autocorrélogramme d'un processus stationnaire présente une décroissance "rapide", puisque les autocorrélations simples  $\gamma(k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Il est donc possible de montrer que, pour un processus ARMA stationnaire, sa (FAC) est bornée, pour une certaine constante  $C$  strictement positive et  $r$  compris entre 0 et 1,  $|\gamma(k)| \leq Cr^k$  pour  $k = 1, 2, \dots$  quand l'horizon  $k$  tend vers l'infini, elle subit une décroissance exponentielle.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

détail, les apports de l'histoire de la dynamique économique au fonctionnement de l'économie et de prévoir sa sensibilité vis-à-vis des fluctuations récurrentes des variables macroéconomiques. D'abord, l'analyse de la dynamique économique, comme un champ focalisé sur l'étude de la croissance et des fluctuations, a offert un terrain tout à fait privilégié pour Abraham-Frois (1995a), Boldrin et Woodford (1991), Venditti (1996), de Vilder (1996), Gandolfo (1996), Schmitt-Grohé (2000), Pintus et Cazzavillan (2006), Venditti, Nishimura et Yano (2006) et Sushko, Wegener, Westerhoff et Zaklan (2009), afin d'illustrer la possibilité d'existence des fluctuations récurrentes comme sources de genèse des cycles endogènes dans les modèles non-linéaires de croissance optimale.

Ensuite, après avoir admis qu'il est humainement impossible d'éliminer le cycle économique à caractère endogène et non-linéaire, ni d'accepter techniquement l'extraction du cycle stochastique de l'évolution tendancielle de l'économie compte tenu, de l'hypothèse de sa formation purement déterministe. Outre la prévision, l'objectif ici est d'exhiber, à partir de l'analyse empirique des fluctuations macroéconomiques, les principaux faits stylisés sur la dynamique d'une série temporelle à temps discrets, associés à l'évolution d'une variable macroéconomique. Ceci revient à étudier deux aspects : Quel(s) lien(s) entre la dynamique des fluctuations économiques et la dépendance entre les observations des différentes séries? Quelle est la structure de modélisation nécessaire pour le(s) prédire(s)? Ces deux interrogations auxquelles les spécialistes dans le domaine d'application des méthodes quantitatives d'analyse de la conjoncture et de la prévision économique sont censés y répondre, ont des implications politiques et économiques très importantes, mais les réponses apportées jusqu'aujourd'hui sont insatisfaisantes, à une bonne maîtrise et compréhension du mécanisme réel, mettant l'économie en continuité évolutive, par continuelle recombinaison adaptative sans cesse de ses structures internes. En conséquence, ceci nécessite un franchissement adéquat ce qui pose des problèmes multiples aux praticiens des techniques d'analyse et de prévision des fluctuations économiques.

Pour détecter et traiter les principales particularités de ces difficultés, l'adoption de l'hypothèse fondatrice, selon laquelle la transition des structures évolue suivant un processus

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

d'ajustement dynamique non-linéaire, nous conduit à consacrer cette première partie comme étant une préparation pour notre raisonnement, avant d'implanter l'idée fondamentale de mise en évidence du caractère dynamique non-linéaire, de l'évolution et du changement de structure endogène et plus particulièrement de la découverte de l'aspect chaotique du processus de transition. Alors, notre intuition, c'est que l'examen de la dynamique non-linéaire de changement de structure endogène de l'industrie, peut nous aider à comprendre la nature du changement socioéconomique et institutionnel, en Tunisie, qui se trouve en phase de transition d'une économie d'endettement à une économie de marché.

Dans cette première partie, nous allons donc examiner l'état de la littérature sur les déterminants du changement structurel endogène, ainsi que les problèmes auxquels ces études ont été confrontées lorsqu'elles sont traitées par des méthodes classiques non appropriées. En particulier, nous cherchons à mettre en évidence la place des études, soulignant la réflexion sur les mécanismes des changements structurels endogènes, par permanente recombinaison des structures invariantes, postulant qu'il y a, d'une part, une évidence pour l'existence d'une composante prédictible, tant au niveau des séries de court terme, qu'au niveau des séries de long terme. D'autre part, la recherche menée à travers l'étude de la dynamique économique des variables a soutenu que la plupart de séries chronologiques macroéconomiques et financières contiennent des tendances déterministes, avec ruptures endogènes où la dynamique de la variable étudiée (moyenne, variance, autocorrélation) dépend du régime dans lequel elle sera défini. De ce fait, ces séries avec changements de régimes (*regimes switching séries*) sont structurellement instables et non stationnaires par construction et ainsi faire échouer toute tentative à la prévision classique. Cet échec résulte principalement, au fait que les techniciens ont l'habitude de traiter les séries temporelles à temps discret, dans le contexte unirégime et statique par des modèles linéairement stables ; cas du processus univarié ARMA ou multivarié VAR ; bien que la simple observation de l'évolution de ces séries, dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques, montre la confrontation de différentes échelles d'espace et de temps qui traduise la non-linéarité, notamment, en moyenne suite à la présence des changements structurels endogènes, causés par

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

présence de tendances déterministes, segmentées, caractérisant leurs comportements dynamiques asymétriques.

Premièrement, cette étude porte sur dix séries de la production industrielle, en Tunisie. Nous définissons quelques concepts de base, qui serviront, par la suite, à introduire le cadre d'analyse. Il est connu depuis longtemps que, l'enfermement des économistes sur la modélisation linéaire, des séries temporelles macroéconomiques et financières traduit une déconnexion totale, entre réalité économique mettant des variables de la conjoncture économique en continues évolutions et dynamique des structures endogènes macroéconomiques, ce qui se traduit techniquement par une mauvaise confrontation entre des comportements dynamiques purement déterministes et des comportements stochastiques, qui pose des problèmes spécifiques, qui influencent sensiblement la qualité des prévisions ainsi obtenues. En effet, l'analyse traditionnelle, ou méthodologie de Box et Jenkins (1976), essentiellement fondée sur les propriétés du second ordre, des séries non stationnaires ARMA, est impuissante car la plupart des séries ont, une fois différenciées, les propriétés au second ordre d'un bruit blanc<sup>14</sup>. Pour confirmer ceci, nombreux exemples macro-économiques et financiers de la littérature des séries temporelles valident cette situation.

Dans une deuxième section, nous présenterons le problème de dynamique économique et de fluctuations, en précisant que parallèlement à l'idée habituellement acceptée par les tenants des cycles réels (des nouveaux classiques), selon laquelle la conception des fluctuations ne s'éliminent pas, mais elles s'amplifient par le postulat, prévoyant la présence de chocs exogènes, perturbant constamment l'état de l'économie et dérangeant l'équilibre statique du système économique. Dans le sillage de la théorie des fluctuations endogènes<sup>15</sup>, notre propos tiendra à montrer comment des mécanismes au cœur des dynamiques du système économique, peuvent

---

<sup>14</sup> Un processus de bruit blanc « *white noise* » est le processus le plus simple. Il est fort si et seulement si les observations sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*). Il est faible si et seulement si sa moyenne est nulle et sa variance est constante et indépendante du temps.

<sup>15</sup> Pour une revue de littérature récente sur les fluctuations endogènes, voir Guesnerie et Woodford (1992).



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

aussi induire des pertes de stabilité locale de l'équilibre du système au profit de sa stabilité globale? Ces fluctuations provenant de la dynamique endogène des structures qui aident à changer la stabilité structurelle du modèle dynamique, sous l'effet de son propre fonctionnement, sont de deux types : des oscillations cycliques autoentretenues et des fluctuations complexes résultant de l'incertitude liée à l'écart entre prévision et réalisation.

Dans une troisième section, nous procédons à une justification théorique et à une validation empirique des ruptures structurelles en tendances déterministes. Puis, une revue de la littérature des études appliquées aux tests économétriques les plus connus, de racine unitaire, en présence de ruptures structurelles endogènes. Cette littérature vise à faire ressortir les facteurs dynamiques nécessaires, pour affirmer qu'il y a bel et bien des changements structurels endogènes.

Dans une quatrième section, nous exposerons quelques directives de construction d'un modèle non-linéaire de prévision. Dès lors, sans entrer en détail dans les procédures traditionnelles de prévision de séries temporelles, nous mettons l'accent sur le fait que ces dernières sont généralement incapables, tant sur le plan économique qu'économétrique, de modéliser et prévoir un cycle endogène à caractère non-linéaire. De même, ces procédures traditionnelles ne sont capables ni d'identifier, ni de caractériser les propriétés qualitatives de l'équilibre dynamique de long terme.

De plus, le traitement des séries temporelles, orientées vers la prévision, stipule que l'exactitude de prévision est importante parce que les prévisions précises sont employées de manière fiable, pour guider des décideurs dans leurs prises de décision, du fait qu'une gamme de méthodes de prévoir est disponible, pour faire une prévision optimale. Il faut donc, sélectionner d'une manière rationnelle, adopter une approche méthodologique rigoureuse afin d'évaluer leurs forces relatives, est nécessaire. En s'appuyant sur la connaissance d'une base de données passée, le prévisionniste cherche à générer une nouvelle base de données représentative du phénomène

## Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

étudié, puis, à résoudre le problème de choix d'un modèle de prévision, parmi un ensemble de modèles candidats, afin de prédire le comportement non-linéaire des variables.

Étant donné la complexité de la prévision des modèles non-linéaires qui seront étudiés, nous présentons dans la dernière section, deux techniques qui nous aideront, plus tard, à la construction d'un modèle non-linéaire de prévision. Tout d'abord, l'approche d'analyse par intervalle est une technique ensembliste, apportée par les statisticiens, au problème de sélection de modèles non-linéaires, en prévision par intervalle à erreur bornée. Ensuite, la technique de bootstrap paramétrique est mise en œuvre pour la sélection d'un modèle de prévision. Dans ce cas, nous pouvons traiter les données simulées, comme des données qui servent à la prévision. Nous pouvons comprendre qu'une gamme de modèles utilisés pour ces prévisions a été rigoureusement vérifiées et a été jugées pour être adaptées à l'étude du comportement irrégulier de la série. Pour un modèle sélectionné, nous voulons étudier les dynamiques de sa structure d'innovation. De cela, nous percevons, donc bien, l'intérêt de maîtriser les différentes méthodes de rééchantillonnage et de choisir celle qui est la plus adaptée à la situation dans laquelle nous trouverons.

### 1.1. Présentation des données

La présente recherche est menée en utilisant dix séries temporelles mensuelles de la production industrielle, en Tunisie, couvrant la période 1996 :4-2006 :12. Ces séries de la production industrielle, données (en millions de DT) sur le tableau (1.1), sont enregistrées sous forme de valeurs à base 100 en 1990 (à partir du mois d'avril 1996)<sup>16</sup>, par l'Institut National de la Statistique dans les Bulletins Mensuels de Statistique, ne concernent pas de mesurer la valeur, en dinars courant, de la production industrielle des entreprises industrielles. Mais, nous voulons

---

<sup>16</sup> Avant cette date, l'IPI est chiffré en valeur à base 100 en 1983. C'est la raison pour laquelle les séries temporelles fictives liées à cet indicateur ou à ces composantes débutent à partir du mois d'avril 1996.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

que les observations ne réagissent qu'aux mouvements sur les quantités produites, en ignorant les mouvements des prix<sup>17</sup> et l'effet des unités de compte<sup>18</sup>.

**Tableau 1.1: Description des données mensuelles\***

<b>Variables</b>	<b>Tailles</b>	<b>Descriptions</b>
<b>IPI</b>	129	Indices de Production Industrielle
<b>Industries Manufacturières</b>		
<b>IAA</b>	129	Industries Agro-Alimentaires
<b>ICCV</b>	129	Industries Matériaux Construction Céramiques et Verre
<b>IME</b>	129	Industries Mécaniques, Electriques et Electronique et Electroménager
<b>IC</b>	129	Industries Chimiques
<b>IHC</b>	129	Industries Textiles Habillements, Cuir et Chaussures
<b>IMD</b>	129	Industries Manufacturières Diverses
<b>IM</b>	129	Industries Manufacturières de Bois, Liège et Ameublement
<b>Industries non Manufacturières</b>		
<b>M</b>	129	Mines
<b>E</b>	129	Energies

<sup>(\*)</sup> Source : Les données (en millions de DT) sont enregistrées sous forme de valeurs à base 100 en 1990 (à partir du mois d'avril 1996 jusqu'au mois décembre 2006) dans les Bulletins Mensuels de Statistique N°484–N°601 élaborés par l'Institut National de la Statistique (I.N.S.) de la Tunisie.

Or, bien entendu, l'entrée en vigueur de l'accord euro-méditerranéen, d'association de la Tunisie avec l'Union Européenne (UE), à partir de janvier 1996, signé le 17 juillet 1995, et prévoyant, notamment, le libre échange industriel, après une phase de transition de douze ans et surtout de restructuration industrielle, c'est-à-dire, l'intégration réelle aura lieu, en janvier 2008, ayant pour substance la restructuration du tissu productif national, par le développement rationnel et stratégique et la diversification de la production locale, assurant la productivité rentable et compétitive de l'entreprise tunisienne justifie bien que la période, ainsi choisie pour élaborer cette recherche, est en concordance parfaite avec les objectifs visés. Voilà, après cette phase dynamique de restructuration industrielle et de transition vers l'adhésion en coopération avec UE, l'industrie tunisienne a-t-elle, vraiment, bien saisie les propriétés dynamiques du mécanisme de son processus d'ajustement structurel graduel et continu? Aura-t-elle, donc, des chances de supporter

<sup>17</sup> L'évolution de la production industrielle en dinars courants résulte à la fois de variation des quantités produites et de variations des prix à la production des entreprises. Pour faire abstraction la variation des prix, l'IPI mesure uniquement ce qui sort en quantités physiques à chaque période des usines, chantiers, mines et carrières nationales.

<sup>18</sup> Nous exigeons que l'IPI ne dépende pas des unités de mesure.

la concurrence industrielle locale? De résister contre la vive concurrence industrielle euro-méditerranéenne et surtout de réussir à accaparer une part importante du marché industriel?

Pour répondre à ces fameuses questions, nous sommes partis de l'hypothèse qui consiste à considérer la dynamique endogène du secteur industriel Tunisien subissant en permanence des transformations vives, qui servent à enrichir son tissu et tendent à modifier radicalement sa structure. Ces transformations cycliques sont engendrées par la présence des fluctuations et des phénomènes d'asymétries, qui se manifestent par l'apparition des changements structurels endogènes, liés à l'instabilité intrinsèque du secteur industriel. Notre but n'est pas de fournir à l'intéressé une synthèse supplémentaire sur le sujet. Nous avons plutôt choisi de focaliser aux intéressés sur un aspect particulier très intéressant : l'apport de la dynamique chaotique à la prévision. Donc, allons très vite, il n'est pas encore tôt pour mener une analyse prévisionnelle, qui aide à calibrer le positionnement de l'industrie tunisienne et retracer son avenir. Dès lors, pour commencer, partons d'une situation utile d'économie dynamique sous la loupe.

## **1.2. Dynamiques économiques : fluctuations et asymétrie des séries industrielles**

### **1.2.1. Typologies, mesures et détection d'asymétries cycliques**

Dans le souci de maintenir une homogénéité et un équilibre au niveau du contenu de ce travail, il est intéressant de mettre ce sujet dans un cadre original, qui fait rappel à la notion du cycle, capable de fournir une explication synthétique pour la compréhension lisible du mécanisme source, du dynamique des fluctuations cycliques, afin d'appréhender les phénomènes de changement structurel. Ceci s'inscrit dans le but de saisir la nature des difficultés, auxquelles est confrontée la Tunisie engagée dans une transition, vers l'économie de marché, depuis juillet 1995, suite à un accord d'association avec l'Union Européenne, prévoyant, notamment, le libre

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

échange industriel, après une phase de transition de douze ans<sup>19</sup>. L'un des moyens propres à évaluer les étapes réalisées du processus de réforme structurelles et d'appréhender ces effets attendus, est de s'intéresser à l'identification et à la caractérisation du cycle endogène, caractérisant les dynamismes des fluctuations, du secteur industriel et les interactions interbranches, qui sont censées manifester les répercussions de ces réformes. Donc, il est nécessaire avant tout, de définir : Qu'est ce qu'un cycle? D'identifier sa nature? Et de comprendre le mode de son fonctionnement?

### ***1.2.1.1. Mesure et définition des cycles***

Aucun ne peut douter que l'étude empirique des fluctuations économiques, atteindra son essor, avec les travaux de Burn et Mitchell (1946), du N.B.E.R. (*National Bureau of Economic Research*)<sup>20</sup>. Toutefois, l'analyse dynamique des fluctuations restera longtemps, hors du champ de la théorie économique, où les cycles sont considérés comme exogènes. Pourtant, l'importance du cycle, sa définition et sa mesure pose de très nombreux problèmes, tant sur le côté théorique, qu'empirique. Ainsi, il est habituellement partagé que le repérage des cycles et la dotation des points de retournement (*points d'inflexions*) ne fournissent que des faits sans théorie. Ce qui fait échouer toute tentative de prévision et même de modélisation du cycle endogène. C'est récemment, qu'à la suite du prolongement dynamique de l'analyse keynésienne (Kalecki, Kaldor), initié par Samuelson (1939a-b), Hicks (1950) et Goodwin (1951), que l'analyse contemporaine des fluctuations économiques s'est penchée sur l'explication, qui sera la base des théories de cycle endogènes, les explications possibles, pour tenter de comprendre d'abord, par souci opérationnel. Ensuite, d'y améliorer la prévision. C'est, dans ce cadre d'analyse, que s'inscrit ce travail qui tend à prévoir les retournements de la conjoncture, après avoir expliqué les mouvements de l'activité économique, tels que les fluctuations de la conjoncture par les réactions du système économique, aux différents chocs subis par le système. Le N.B.E.R. définit les

---

19 Pour une revue de littérature sur ce sujet, voir F. Charfi et A. Ghorbel (1997) : « *Zone de libre échange, Tunisie-Union Européenne : les défis d'un partenariat* », in *L'Europe et la Méditerranée : Intégration économique et libre échange*, sous la direction de Benhayoun, G., Catin, M. et Regnault, H., L'Harmattan, pp. 127-145.

<sup>20</sup> [www.nber.org](http://www.nber.org)

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

fluctuations économiques comme étant des mouvements simultanés d'une ou de plusieurs séries macroéconomiques à la hausse et à la baisse, mouvements récurrents mais de durée et d'amplitudes variables. En ce sens, les cycles économiques peuvent être définis comme suit :

*« les cycles économiques sont un type de fluctuations qui affectent l'activité économique générale des pays dans lesquels la production est essentiellement le fait d'entreprises privées : un cycle est constitué d'expansions qui se produisent à peu près au même moment dans les nombreuses branches de l'activité économique, expansions qui sont suivies par des récessions, des contractions et des reprises qui affectent elles aussi l'ensemble des activités économiques, les reprises débouchant sur la phase d'expansion du cycle suivant : cette suite de phases n'est pas parfaitement périodique mais seulement récurrente ; la durée des cycles des affaires est comprise entre un et dix ou douze ans ; ils ne sont pas divisibles en cycles plus courts de même type dont l'amplitude serait à peu près semblable à la leur »*

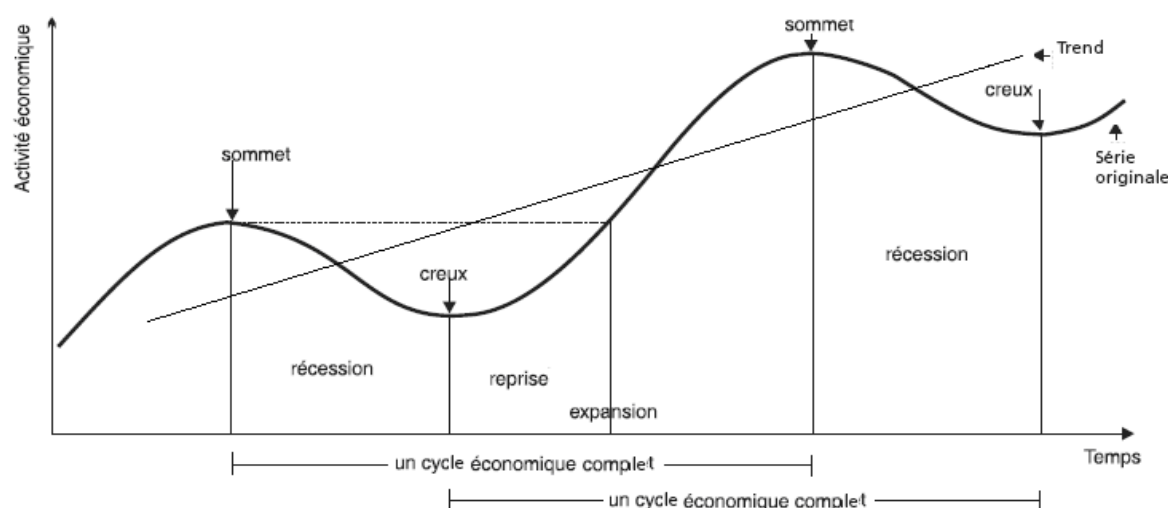
(Burns, A.F. et Mitchell, W.C., (1946), p. 3)

Selon cette définition, traditionnellement adoptée par les tenants de cycle à l'équilibre, un cycle exogène correspond à une réponse optimale du système économique, aux chocs exogènes, qui le frappent, en permanence, et tendent à modifier sa structure. C'est, donc, le comportement erratique des variables économiques, de nature exogène qui explique le comportement cyclique des variables endogènes. En ce sens, la dynamique du cycle exogène est en fonction d'un processus aléatoire (marche au hasard ou fluctuations aléatoires autour d'un trend déterministe) caractérisant la source des chocs exogènes, auxquels le système économique est exposé, continuellement, mais aussi de la façon, dont ces chocs exogènes sont propagés par les comportements (dynamique endogène). Selon cette première vision, l'explication de l'évolution, généralement, irrégulière des séries économiques par croissance dans le temps, trouve sa substance dans deux arguments. La première idée dominante fait appel à la théorie de la croissance et stipule que le trend est constitutif de situations d'équilibre de long terme. Or, l'autre idée lui est complémentaire et exposée, notamment, par Harvey et Jaeger (1993), Burnside (1998), Canova (1998), Canova (1999) et Zarnowitz et Ozyildirim (2006), stipule que les évolutions autour de cette tendance correspondent à des faits de court terme, sans impacts, sur le

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

pouvoir tendanciel de la série traitée. En ce sens, il nous paraît, évidemment, logique de penser à une décomposition entre le trend et les écarts à ce trend qui forment le cycle.

Ainsi, nous constatons que pour apprécier l'amplitude d'un cycle, il est commode, tout d'abord, de décomposer l'évolution à travers le temps de l'activité économique, entre une tendance et des fluctuations autour de cette tendance. C'est vrai que cette décomposition montre, nettement, que le cycle est subdivisé en quatre phases qui se suivent : expansion, récession, contraction et reprise. La figure (1.1), représente l'alternance des phases d'expansions et de récessions d'un cycle autour d'une tendance linéaire. Il est évident, selon cette décomposition cycle-tendance, qu'un cycle se caractérise par des phases récurrentes mais pas forcément régulières, ni symétriques. Il peut être mesuré de sommet à sommet, ou encore de creux à creux.



**Figure 1.1 : Décomposition cycle-tendance d'une série temporelle**

Or, cette succession de phases représente un coût de bien-être qui se traduit, en réalité, par une détérioration de l'équilibre macroéconomique, puisqu'elle va engendrer deux fléaux économiques coûteux, qui s'expliquent en termes de variations simultanées ou non des deux taux d'inflation et du chômage. Bien sûr, ceci explique pourquoi nous sommes attirés par l'analyse des fluctuations, mais le plus intéressant c'est qu'elle nous renseigne aussi, sur deux indications méthodologiques qui doivent être distinguées lors de la précaution avec aversion pour le risque

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

d'incertitude engendrée par les perturbations de l'équilibre en présence des fluctuations économiques : la croissance tendancielle et la croissance potentielle nécessaires afin de contribuer à la mesure et définition des cycles. Notons que l'explication pratique de ces deux notions dépasse le cadre initié, pour cette première partie, et fait l'objet d'un développement ultérieur, seuls les développements, à caractère très général, sont retenus ici. En ce qui concerne la notion de croissance tendancielle, elle repose sur l'idée que le profil de la croissance passée permet d'extrapoler un rythme de croissance moyen pour le futur. En ce sens, nous montrons, plus tard, que l'existence de forces de rappel que nous nommerons (*cycles limites*), empêcherait la croissance économique de connaître des fluctuations explosives qui l'éloigneraient trop de son rythme tendanciel. La détermination de cette croissance tendancielle s'opère par des techniques d'extraction de tendance. Or, ces techniques dépendent de l'hypothèse qui est fondée sur la nature de la tendance (déterministe ou stochastique) et de l'interprétation que nous désirons retenir, pour les fluctuations, autour de cette tendance. Concernant la notion de croissance potentielle, elle repose sur l'idée qui consiste dans l'utilisation des facteurs de production disponibles, nécessaires, pour une modélisation de l'économie et en particulier, du processus de production.

Afin de fournir des véritables éléments de réponse pour la question capitale à savoir : Comment résoudre le problème de prise de décision, lorsque nous sommes confrontés à des problèmes de prévisions? Suite à l'insuffisance de l'explication des fluctuations économiques, par l'apparition de chocs exogènes<sup>21</sup>, fournie par l'école classique. Les théories modernes de cycle, ayant notamment une inspiration orthodoxe, visent à expliquer les fluctuations économiques qu'ont connues, et que connaissent encore, les économies du marché capitaliste. Ces fluctuations ont des caractéristiques propres (endogènes), qui sont dues au fonctionnement du système lui-même. Mais, qu'elle condition technique faut-il admettre pour nous assurer de l'existence ou non d'un cycle?

---

<sup>21</sup> Selon cette idée de précapitalistes, l'économie de marché obéit à des lois générales qui la mettent systématiquement dans une position d'équilibre, ou au voisinage immédiat de celle-ci. De ce fait, les fluctuations ou cycles ne peuvent parvenir que comme des perturbations de nature plus ou moins stochastique occasionnées par des chocs affectant la productivité ou les préférences.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Si la révolution de la pensée économique a réussi de produire une reformulation de la définition du cycle qui a intégré, notamment, la nature récurrente, les causes endogènes, où les cycles économiques correspondent à la succession de phases de récession et de prospérité, qui se produisent de façon pas parfaitement périodique mais seulement récurrente, qui affectent l'activité économique de tout un pays, et qui s'alimentent d'elles-mêmes. Mais, jusqu'à maintenant, nous avons pu répondre à l'interrogation antérieure par la mise en évidence des trois principales caractéristiques, d'un cycle économique, essentiellement, vérifié, au début du siècle dernier, par les économistes du N.B.E.R. à savoir : primo, les périodes de croissance sont plus longues que celles de récession, et connaissent un taux de croissance moyen plus élevé. Secondo, cette spécificité se retrouve dans de nombreuses séries économiques, issues de tous les secteurs de l'économie. Tertio, les évolutions de ces séries présentent des co-mouvements susceptibles de détecter une dynamique commune des séries étudiées. C'est pour cette raison, Abraham Frois (1995b) affirme que : « *l'observation ou la mise en évidence du cycle passe par l'observation non pas d'une série du PIB ou de la production industrielle, qui se produisent à peu près au même moment, d'un certain nombre de séries* ». Consacré à l'hypothèse de l'économie en mouvement, si les contributions de Mizrach (2008) et de Kyrtsov et Vorlow (2009), préconisent le caractère de co-mouvement en modélisation non-linéaire des séries temporelles, c'est parce que la volonté de chercher un fondement endogène, aux fluctuations cycliques, pose le problème d'évoquer, non seulement, l'importance des fluctuations autoentretenues dans l'explication des mouvements des variables, mais aussi le caractère récurrent des fluctuations constatées, dans les séries dynamiques en co-mouvements. Bref, ces deux conceptions fondent, simultanément, la continuité structurelle et l'absence de rupture, dans les trajectoires décrivant les évolutions dynamiques des variables

Mais, à ce niveau d'analyse, la question qui se pose, comme le suggèrent Guay et St-amant (1996), est de savoir : Est-il profitable de penser à un véritable découpage, prévoyant notamment, la décomposition cycle-tendance?

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

### Le cycle de Juglar : Les récessions

Taux de croissances annuelles des séries de productions industrielles: 1996:04 - 2006:12

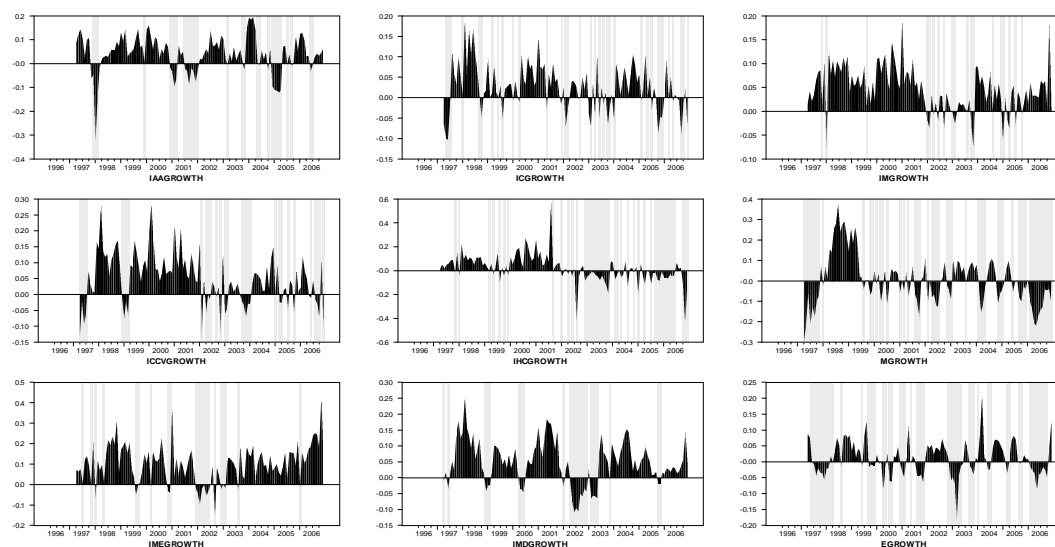


Figure 1.2 : Les phases de récessions des séries de la production industrielle tunisienne

L'examen graphique (1.2), montre que la période, allant de 1996 : 04 à 2006 : 12, a eu des fluctuations conjoncturelles, non négligeables des séries de la production industrielle en Tunisie. Celles-ci montrent en particulier de fortes disparités dans la durée du cycle industriel, ainsi qu'une asymétrie entre les phases de récession marquées par des courtes périodes de décroissance brutale et celles d'expansion marquées par de longues périodes de croissance lisse. Cela indique une plus forte sensibilité de l'ensemble de l'industrie tunisienne, aux fluctuations conjoncturelles. Ceci a comme particularité de laisser croire, que ces fluctuations récurrentes autoentretenues sont causées par des facteurs endogènes, suite à la perte d'influence des facteurs stabilisateurs, sur le dynamisme de notre secteur industriel. Selon cette deuxième vision, le cycle ainsi détecté est de nature endogène et il reflète une évolution systémique du secteur industriel, en déséquilibre, suite aux chocs structurels internes qui touchent la stabilité de sa dynamique et tendent à modifier sa structure. C'est, donc, le produit de la dynamique interne du système industriel. Selon cette conception, il paraît, évidemment, intéressant de ne pas nier l'idée de présence des fluctuations aléatoires, autour d'une tendance déterministe, mais le plus important est d'accepter que les chocs

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

affectent la dynamique, sans affecter le trend et, en conséquence, il est inacceptable de penser à isoler le cycle et la tendance, comme l'anticipe Grandmont (1994) et l'écrivent Stock et Watson (1998), Pedersen (2001) et le confirment King, Plosser, Stock et Watson (1991).

De toute évidence, Gandolfo (1996), préconise que, habituellement les fluctuations récurrentes autoentretenuës, ayant comme idéale source de naissance la dynamique économiques, elles sont de façon très générale le produit des modèles non-linéaires<sup>22</sup>. Or, compte tenu du constant d'échec, relatif des modèles macro-économétriques prévisionnels classiques, dans les années soixante-dix. Cette hypothèse exige une nouvelle orientation, pour les recherches contemporaines, en économie vers d'importante complémentarité, qui domine une réflexion méthodologique, tout à fait récente, sur la modélisation intégrant un changement structurel endogène, qui touche la structure même de l'économie, ainsi que ses extensions dynamiques. Elle pose, dès lors, la nécessité de recourir à l'analyse, tant quantitative que qualitative, permettant la connaissance des lois économiques, pour sélectionner la structure idéale d'un modèle non-linéaire, capable de mettre en place des politiques prédictives, de stabilisation conjoncturelle et de sortie de crise. Cette orientation se justifie par le fait que, la Tunisie a entamé, depuis une vingtaine d'années, un changement structurel majeur de son économie qui était dirigée vers une économie d'endettement, pour aller graduellement, vers une économie de marché, où l'initiative privée et capitaliste remplace l'État dans plusieurs secteurs, notamment, industriels. Dès lors, le gouvernement tunisien déclenche un changement structurel, ayant pour but d'assigner la privatisation de plusieurs secteurs publics. Ceci nécessite la prise en compte de la dynamique non-linéaire, dans le modèle macroéconométrique non-linéaire, afin d'étudier sa complexité et de déterminer sa structure endogène qui caractérise son dynamisme. Elle repose sur un choix stratégique de politique, affirmé en vue de planifier l'économie.

*« Les modèles sont construits par un processus de choix et d'intégration d'un ensemble d'éléments qui sont considérés comme pertinents pour accomplir une tâche particulière. ».*

(Morgan, M.S. et Morrison, M., (1999), p. 13)

---

<sup>22</sup> À l'inverse, les modèles linéaires excluent, en général, les fluctuations autoentretenuës.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

Notons que les réalités détectées sur l'histoire des fluctuations macroéconomiques sont à l'origine de la première critique majeure, reconnue sous le nom de critique de Lucas (1976). Il note que : « *Bien qu'il n'y ait aucune raison d'anticiper un tel phénomène, nous sommes amenés à conclure que les cycles économiques sont tous les mêmes. Cela suggère la possibilité d'une explication unifiée, fondée sur la compréhension du fonctionnement des économies de marché, plutôt que sur l'étude des caractéristiques institutionnelles et historiques des économies.* ».

Selon Lucas (1977), les paramètres des modèles économétriques peuvent évoluer, sous l'influence de la politique économique, lorsque les agents intègrent les changements de règles de politique économique dans leur comportement. Les débats récents sur l'identification et la prévision des chocs structurels endogènes ont été dominés par la question de la brisure de la symétrie des fluctuations cycliques, sous l'effet de l'instabilité structurelle et dynamique, qui ont enrichi l'abondante littérature sur ce thème.

Par conséquent, en matière de prévision, le modèle non-linéaire, tourné vers le passé, se caractérise par un équilibre multiple et présente, alors, une forte instabilité, tant structurelle, que dynamique, surtout lorsque les paramètres de sa structure dynamique changent. D'où, nous pouvons détecter facilement, qu'en réalité, l'élaboration de la prévision, dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques est un défi pour les prévisionnistes. Nous voyons, dans la deuxième partie, comment se modifient les propriétés de stabilité, d'un point fixe, quand un paramètre de l'équation définissant sa structure dynamique change?

Ceci n'est qu'un premier pas vers une nouvelle vision, autorisant la nécessité d'intégrer des changements structurels, dans l'analyse et la prévision des séries temporelles. Toutefois, malgré la richesse des apports récentes en modélisations économétriques, jusqu'à maintenant, il n'existe pas de test, à proprement parler, capable d'identifier un changement structurel. Ceci, ce n'est pas parce qu'il y a, en réalité, un enfermement des économistes dans l'histoire de la pensée économique, ou faute de panoplie d'outils statistiques et de procédures d'inférence, à la

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

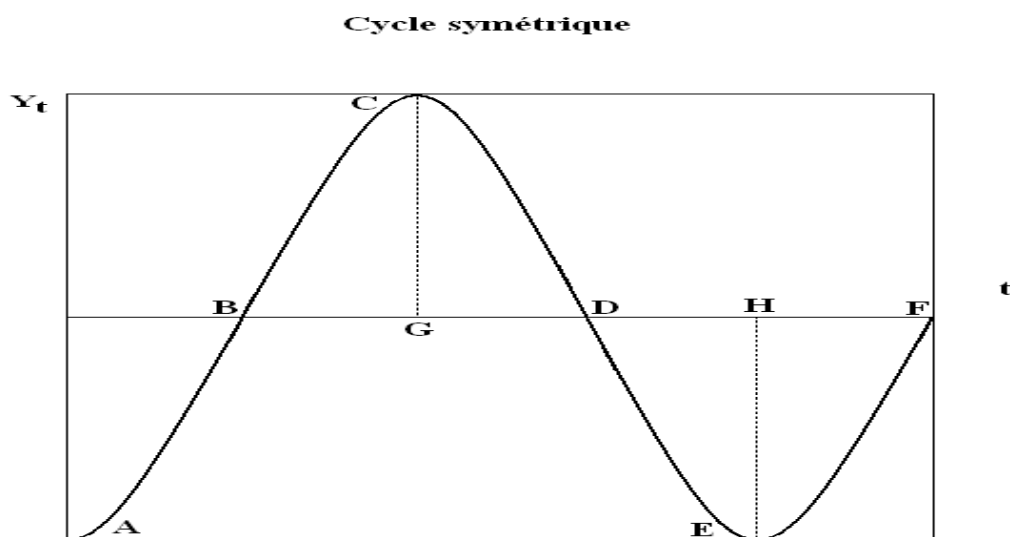
disposition de l'économètre lui permettant de d'identifier, modéliser et prévoir la structure dynamique des variables macroéconomiques.

Mais, à notre avis, le problème de fond est plus grave et touche le noyau dur de la dynamique économique, qui souffre, jusqu'à nos jours, d'une déconnexion totale, ou parfois quasi-totale, entre réalité économique et modélisation macro-dynamique, effective, mettant en évidence, les apports de l'histoire des effets critiques à l'économie, à travers l'analyse de la dynamique économique. Donc, face à cette coupure, nous soutenons l'idée que si l'on souhaite rendre plus lisible et moins abstrait le raisonnement, mettant l'économie en mouvement, d'une part, il ne faut pas se limiter à une simple analyse descriptive des cycles, en dehors de la théorie économique. D'autre part, il ne faut pas se limiter à un cadre statique, prévoyant tant l'unicité que l'immobilité de l'équilibre. C'est-à-dire, en totalité, il faut justifier, puis étudier les mécanismes sous-jacents, des changements structurels afin de bien les maîtriser, dans ses particularités, pour pouvoir expliquer, entre autres, les transitions entre différents états associés aux divers processus d'ajustements structurels. À cette fin, notre première tâche consiste à déterminer les comportements dynamiques des structures des données macroéconomiques, en vue d'analyser les conditions, dans lesquelles elles ne soient pas en contradiction, avec la théorie économique retenue, lors de la modélisation économétrique.

À ce niveau d'analyse, l'identification des caractéristiques dynamiques des variables macroéconomiques commence toujours de préférence par analyse graphique, puis par analyse historique: Observe-t-on une asymétrie dans la dynamique des variables? Connaît-on un événement important qui aurait pu changer la distribution des variables dans le temps?

**Définition 1.1**

*Dans un cycle, nous distinguons une phase de croissance, de A à C, et une phase de décroissance, de C à E. Si l'image de AC par rapport à l'axe vertical passant par C est CE, le cycle est symétrique. Sinon le cycle est qualifié d'une certaine asymétrie.*



**Figure 1.3 : Représentation illustrative de fluctuations cycliques symétriques**

Comme le montre la figure (1.3), notons, tout d'abord, que les pentes des segments AC et CE sont égales en valeur absolue. Nous parlons ainsi, de symétrie verticale, ou encore de symétrie des phases de croissance et de décroissance. D'autre part, nous pouvons finir à la conclusion, selon laquelle un cycle symétrique est composé de deux phases : une phase à la hausse définie par l'arc BD, et une phase à la baisse définie par l'arc DF. Ces deux phases sont, alors, symétriques par une symétrie centrale de centre le point D. Dans ce cas, nous disons qu'un cycle symétrique se comporte par une alternance des phases. C'est cette dernière propriété qui caractérise la nature de la dynamique cyclique, en particulier, lorsque l'amplitude du pic est égale à l'amplitude du creux.

Or, Westlund et Öhlén (1991), ont souligné que la notion de symétrie est riche. Elle couvre les modes d'organisation de plusieurs phénomènes naturels. En plus, c'est un outil puissant de notre perception de la dynamique économique, car elle joue un rôle moteur dans le synchronisme du dynamisme et la régularité des fluctuations économiques. C'est pour cette

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

raison, que les manquements à cette régularité nécessitent un fondement par la recherche des mécanismes sous-jacents, aux brisures de symétrie. En particulier, Barnhart et Dwyer (1996) et Stock et Watson (2002a), ont imploré que les implications de l'asymétrie des fluctuations cycliques, en dynamique économique sont nombreuses et concluantes. Selon Filardo (1994), elles aident à une bonne compréhension complémentaire, à la fois qualitative et quantitative du phénomène de transition de phases.

Voici devant une brisure de symétrie aux implications, si profonde, que les économistes se mobilisent pour la comprendre, en tous détails élémentaires. En particulier, cette brisure aboutit à une restructuration continue de l'information prédictive, émergente à travers le dynamisme des fluctuations économiques. Ceci ouvre, sans doute, la voie à une démarche sérieuse, vers la possibilité de fonder une véritable théorie de la prédiction dynamique, basée sur les techniques récentes d'optimisation inter-temporelle, prévoyant, notamment, le contrôle optimal des asymétries des fluctuations économiques endogènes (voir la deuxième partie). D'un autre côté, l'étude des symétries cycliques et leurs brisures, nous ouvre l'horizon sur les limites de prévoir la dynamique des fluctuations cycliques. Dans ce qui suit de cette section, l'accent est mis sur une identification et caractérisation de l'asymétrie des fluctuations économiques et son implication.

### *1.2.1.2. Typologies d'asymétries cycliques*

Il est admis dans la littérature des fluctuations économiques, qu'un cycle est souvent caractérisé par une évidente asymétrie dans la dynamique de la moyenne conditionnelle. Afin de pouvoir caractériser cette notion d'asymétrie, nous considérons un processus stationnaire au sens strict  $\{Y_t\}$  de moyenne  $\bar{Y}$ , alors la notion d'asymétrie découle du fait que le processus  $\{Y_t\}$  peut avoir une distribution asymétrique. Selon cette conception, le processus stationnaire  $\{Y_t\}$  est dit inconditionnellement symétrique, par rapport à la moyenne, si la distribution marginale de  $\{Y_t\}$  vérifie que la probabilité d'avoir des observations, dont les valeurs sont inférieures à la moyenne

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$\bar{Y}$ , étant égale à celle d'avoir des observations, dont les valeurs sont supérieures à la moyenne. Ceci, peut être exprimé par la condition suivante :

$$\Pr(Y_i < \bar{Y} - \tau) = \Pr(Y_i > \bar{Y} + \tau), \quad \forall \tau \in \mathfrak{R}$$

contrairement, le processus est dit asymétrique en amplitude.

Selon la même logique, le processus en différence premier stationnaire  $\{\Delta Y_t\}$  est dit symétrique, si la distribution marginale de  $\{\Delta Y_t\}$  vérifie la condition suivante :

$$\Pr(\Delta Y_t < -\tau) = \Pr(\Delta Y_t > \tau), \quad \forall \tau \in \mathfrak{R}$$

contrairement, le processus en différence premier est dit asymétrique en pente.

La littérature empirique menée par Falk (1986), Verbrugge (1997), Acemoglu et Scott (1997), Speight et McMillan (1998), Chakley et Lee (1998), Westlund et Öhlén (1991), Mittnik et Niu (1994), Potter (1994), Ramsey et Rothman (1996), Stock et Watson (2002a), Jovanovic (2006) et Van Nieuwerburgh et Veldkampy (2006), assure que la dynamique du cycle économique est généralement asymétrique. Les recherches réalisées, dans cette perspective, tirent leurs fondements, des travaux sur le phénomène d'asymétrie cyclique de Rothman (1991), Sichel (1993), McQueen et Thorley (1993), Juraczko (1999) et Galvão (2002), effectués dans un cadre de modèles à changement de régimes. En ce sens, plusieurs types de modélisation à changement de régimes ont été adoptés. Pour Clements et Krolzig (2003), les modèles autorégressifs avec changements de régime markovien et pour Proietti (1998), les modèles autorégressifs avec changements de régime lisse présentent deux champs, particulièrement adaptés, à l'analyse des dynamiques cycliques asymétriques et à la précision des différentes formes et typologies d'asymétries. En particulier, l'étude typologique du phénomène d'asymétrie cyclique, mené par certains chercheurs, montre que l'asymétrie verticale et l'asymétrie horizontale, peuvent générer d'autres formes d'asymétries. Dans ce contexte, Neftçi (1984), a défini l'asymétrie longitudinale, rencontrée lorsqu'une variable croît moins vite, dans les périodes favorables, qu'elle ne décroît



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

dans les périodes défavorables, par le terme « *steepness* » pour indiquer l'asymétrie de pente, entre les phases de croissance et de décroissance<sup>23</sup> défini par :

**Définition 1.2 (Neftçi (1984))**

Un processus  $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit non asymétrique en pente « non-steep » si  $\Delta Y_t$  est de skewness nulle :

$$E[\Delta Y_t^3] = 0$$

où  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  est un processus de différence premier et  $E(\cdot)$  est l'opérateur espérance mathématique.

Par contre, Sichel (1993), a défini l'asymétrie transversale, entre le régime haut et le régime bas, par le terme « *deepness* », pour qualifier l'asymétrie d'amplitude, qui résulte d'une différence entre l'amplitude<sup>24</sup> des pics et des creux<sup>25</sup> comme suit :

**Définition 1.3 (Sichel (1993))**

Un processus  $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit non asymétrique en amplitude « non-deep (non-tall) » si  $Y_t$  est de skewness nulle :

$$E[(Y_t - \bar{Y})^3] = 0$$

où  $\bar{Y}$  est la moyenne empirique du processus  $Y_t$  et  $E(\cdot)$  est l'opérateur espérance mathématique.

Dans la littérature de cycle réel, la symétrie du cycle correspond à la valeur nulle de la *Skewness*, sinon le cycle est donc asymétrique. Teräsvirta et Granger (1996), ont montré la possibilité d'avoir des valeurs négatives de *Skewness* de  $Y_t$  et de  $\Delta Y_t$  lorsqu'il y a, respectivement, une récession d'amplitude (*deepness*) et de pente (*steepness*). Notons que, par analogie au *deepness*, nous pouvons définir *steepness* comme *Skewness* du processus en différence premier. La figure (1.4) illustre ces deux formes d'asymétries cycliques.

---

<sup>23</sup> Neftçi (1984), a mis en évidence l'asymétrie de pente « *steepness* » en appliquant des tests non paramétriques sur des séries de chômage de U.S. Sur une série annuelle de même nature, la même conclusion est aboutie par Sichel (1989) et de même par Falk (1986).

<sup>24</sup> En général, l'amplitude correspond à une mesure en pourcentage du niveau tendanciel d'un agrégat macro-économique.

<sup>25</sup> Sichel (1993, p.224), définit l'asymétrie d'amplitude comme « *one in which some phase of the cycle is different from the mirror image of the opposite phase* », et montre que la production industrielle américaine, incorpore une asymétrie d'amplitude.

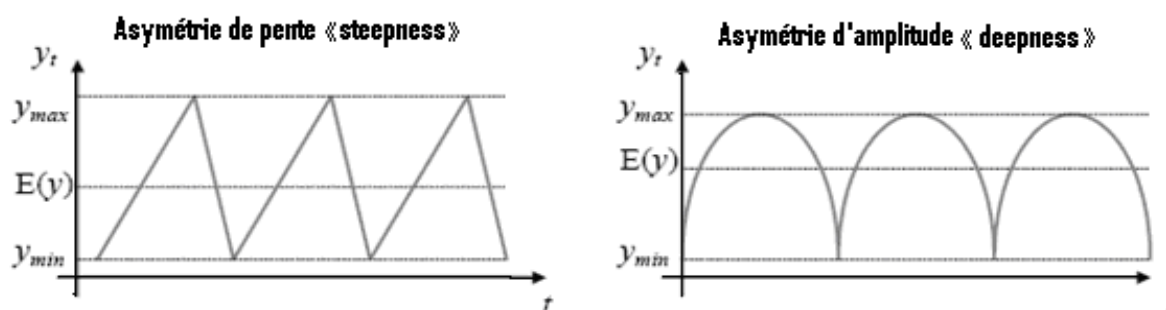


Figure 1.4 : Représentation illustrative de typologie d'asymétries cycliques  
(de pente et d'amplitude)

En plus, McQueen et Thorley (1993), ont dégagé un troisième type d'asymétrie, dite « sharpness », qui peut être générée afin de caractériser l'asymétrie entre le profit des fluctuations, au voisinage des points de retournement (*Turing points*) : c'est-à-dire, les différences de courbures entre les pics et les creux. Selon ces auteurs, ce type d'asymétrie est défini comme suit :

**Définition 1.4 (McQueen et Thorley (1993))**

Un processus  $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit non asymétrique en profit « non-sharp » si  $Y_t$  garde la même probabilité de transition d'un régime à un autre.

Notons que Ramsey et Rothman (1996), ont souligné que l'asymétrie de pente (*steepness*), est un exemple de l'asymétrie (*longitudinal*) : c'est-à-dire, celle liée à la direction du cycle. Par contre, l'asymétrie d'amplitude (*deepness*) et l'asymétrie de profit « sharpness » sont deux exemples de l'asymétrie (*transversal*) : c'est-à-dire, celle liée à l'orthogonale, à la direction du cycle.

### 1.2.1.3. Mesures d'asymétries cycliques

Après avoir exposé une typologie d'asymétrie cyclique, il est intéressant, maintenant, d'indiquer une technique permettant de quantifier l'asymétrie à partir de quelques mesures statistiques, les plus fréquemment utilisées, permettant de caractériser les fluctuations des agrégats macroéconomiques. En ce sens, la caractérisation des grandeurs variant d'un cycle

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

particulier à un autre, qui sont la durée des phases ascendantes (creux-pic) et des phases descendantes (pic-creux) et l'amplitude, joue un rôle pertinent pour caractériser le cycle économique.

Dans ce cadre, Sensier (1996) et Juraczko (1999), ont montré que le coefficient de *Skewness*<sup>26</sup> peut être utilisé pour mesurer l'asymétrie de pente et l'asymétrie d'amplitude, selon que la dynamique asymétrique est différente, suivant la taille ou le niveau. Mais, avant tout, rappelons que, statistiquement, la notion de *Skewness* est attachée au moment centré d'ordre trois. C'est aussi une mesure de la symétrie de la distribution, du fait que pour des distributions symétriques, la valeur de la *Skewness* est nulle, ceci est une propriété attendue exceptionnellement pour la loi normale. En revanche, pour des distributions asymétriques, la valeur du *Skewness* est positive, si la partie épaisse de la distribution se situe dans la direction positive et elle est négative dans le cas inverse. L'expression du coefficient de *Skewness* se présente comme suit :

$$S(Y_t) = \frac{\mu_Y^3}{\sigma_Y^3}$$

où  $\mu_Y^k$  est le moment centré d'ordre  $k$  et  $\sigma_Y$  est l'écart type empirique.

Sur le plan purement statistique, pour décrire les faits stylisés, concernant le phénomène d'asymétrie et assimiler la signification de sa présence, nous devons tout d'abord, établir la définition suivante :

---

<sup>26</sup> Le coefficient de *Skewness* (S) est le moment d'ordre trois, il mesure le degré d'asymétrie de la distribution. Une valeur négative de *Skewness* signifie une distribution asymétrique (distribution vers la gauche), quand la valeur de *Skewness* est positive ceci implique une distribution asymétrique (distribution vers le droit), si la valeur de *Skewness* est nulle, alors la distribution est normale. Par contre, le moment d'ordre quatre est le coefficient de *Kurtosis* (K), il mesure le degré d'aplatissement de la distribution. Lorsque le *Kurtosis* qui constitue une mesure de concentration de la distribution autour de sa moyenne excède la valeur 3, la distribution est dite *leptokurtique*, lorsque la *Kurtosis* est inférieure à 3, la distribution est dite *platikurtique*, et si le *Kurtosis* égale à 3, alors ceci correspond à une distribution normale.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

**Définition 1.5**

Une distribution est dite asymétrique si les valeurs de la variable statistique ne sont pas également dispersées de part et d'autre d'une valeur centrale (le mode "Mo", la médiane "Me", ou la moyenne " $\bar{Y}$ ").

Fisher a défini le coefficient d'asymétrie (*Skewness*) suivant :

$$\delta = \frac{\mu_Y^3}{\sigma_Y^3}$$

où  $\sigma_Y^3$  est la valeur cubique de l'écart type des observations et  $\mu_Y^3$  étant le moment centré d'ordre 3. Par contre, Pearson a défini le coefficient d'asymétrie suivant :

$$v = \frac{3(\bar{Y} - Me)}{\sigma_Y}$$

où  $\bar{Y}$  est la moyenne,  $Me$  est la médiane et  $\sigma_Y$  est l'écart type empirique.

Nous pouvons distinguer les cas illustrés dans le tableau suivant :

<b>Tableau 1.2: Les coefficients d'asymétrie d'une distribution</b>		
	<b>Signe</b>	<b>Nature de distribution</b>
<b>Coefficient de Fisher</b>  <b>ou</b> <b>Coefficient de Pearson</b>	$\delta \text{ ou } v < 0 \Rightarrow \bar{Y} < Me < Mo$	Asymétrie négative (leptokurtique)
	$\delta \text{ ou } v = 0 \Rightarrow \bar{Y} = Me = Mo$	Symétrique (normale)
	$\delta \text{ ou } v > 0 \Rightarrow \bar{Y} > Me > Mo$	Asymétrie positive (platykurtique)

Or, d'après le tableau (1.2) nous pouvons constater qu'un premier moyen de vérification de l'asymétrie (anormalité) d'une distribution, part de son examen graphique et de sa description : une distribution unimodale, approximativement asymétrique, quand ses caractéristiques statistiques (mode, médiane et moyenne) ne sont plus voisines en valeurs. En plus, nous savons que dans le cas de la distribution symétrique (normale) des résidus, qui est une hypothèse essentielle à notre estimation et à l'ensemble des tests à établir dans le cadre de ce travail, la

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

proportion de résidus, qui doivent tomber dans un intervalle de confiance donné, est affichée dans la figure (1.5).

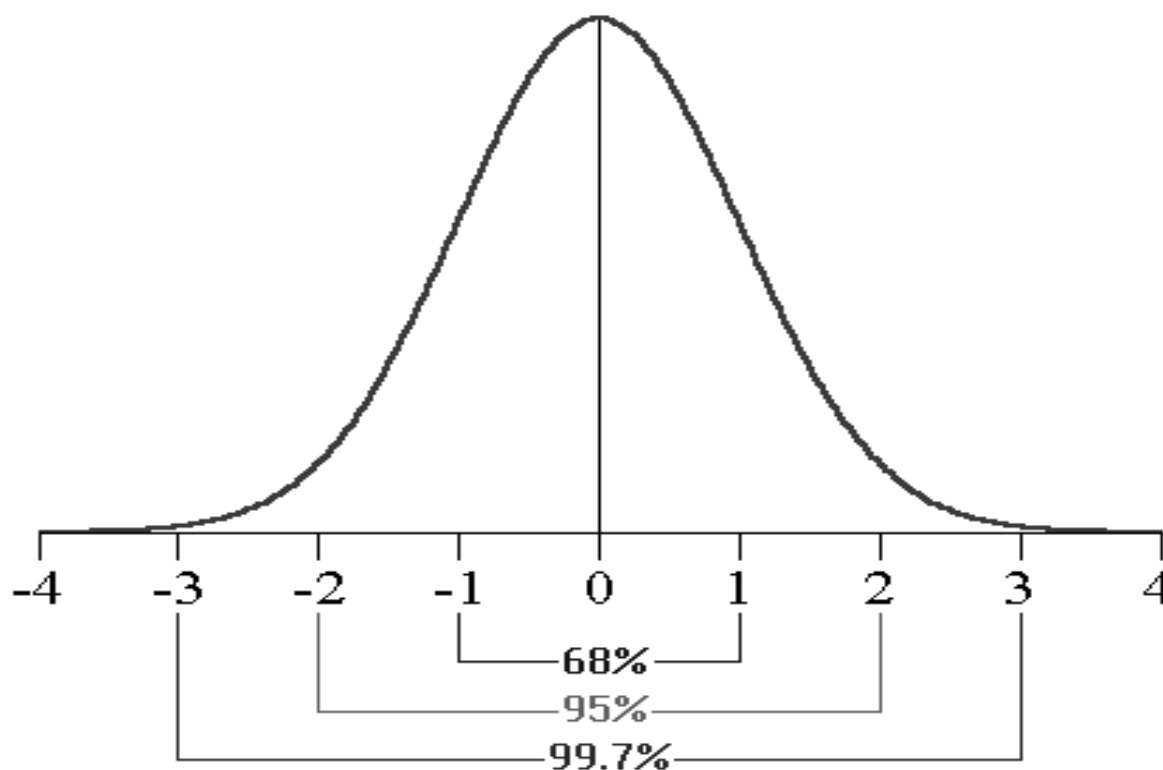


Figure 1.5: Les proportions des résidus qui doivent tomber dans un intervalle donné d'une distribution symétrique (loi normale)

Nous pourrions élaborer un test de symétrie de la distribution des résidus, basé sur le coefficient d'asymétrie de Fisher. Le test d'hypothèse s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{cases} H_0 & : \text{Les résidus suivent une loi normale symétrique } (\delta = 0) \\ H_1 & : \text{Les résidus ne suivent pas une loi symétrique } (\delta \neq 0) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test est celui du coefficient d'asymétrie empirique, donnée par:

$$\delta_{emp} = \frac{1/T \sum_i \hat{\varepsilon}_i^3}{\left(1/T \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2\right)^{3/2}}$$

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

qui est distribuée asymptotiquement, selon une loi normale d'espérance  $\mu \approx 0$  et d'écart type  $\sigma \approx \sqrt{6/T}$ . Si nous posons le rapport  $\tilde{S} = \delta_{emp} / \sigma$ , alors, pour un test bilatéral au risque  $\alpha$ , la région critique du test est définie par:

$$R.C. : |\tilde{S}| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

où  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le fractile d'ordre  $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  de la loi normale centrée réduite. Comme le montre la figure (1.5), par exemple, dans le cadre du test de normalité des résidus, un résidu normalisé hors l'intervalle  $[-3; 3]$  doit suspecter un point aberrant qu'il faut éliminer. Nous pouvons retenir la valeur approximative :  $t_{0,05} \approx 2$ , et l'intervalle de confiance approché au risque 5% :  $[-2; 2]$ . Une propriété fondamentale explique l'importance des lois normales selon laquelle : la somme d'un grand nombre de quantités aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suit, approximativement, une distribution normale. Cet énoncé littéraire, est connu sous le nom de théorème *central-limite* ou de *loi forte des grands nombres*. Cela explique pourquoi beaucoup de variables, qui peuvent être considérées comme la résultante additive d'un grand nombre de déterminants, dont aucun n'est dominant, montrent des distributions normales. Malgré l'importance des lois normales, nous garderons à l'esprit qu'il existe bien d'autres lois de distribution. Si une grandeur aléatoire ne suit pas, nécessairement, une loi normale, alors, une telle hypothèse doit, en principe, être confirmée (ou infirmée) par l'examen d'observations, aux tests statistiques de normalité<sup>27</sup>. Il peut alors être utile de réclamer que, si les indicateurs de *Skewness* et de *Kurtosis* sont suffisamment proches de la valeur zéro, l'hypothèse de compatibilité

---

<sup>27</sup> Un test possible est celui de Jarque et Berra, basé sur le coefficient d'asymétrie de la distribution (*Skewness*)  $S = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$  et le coefficient d'aplatissement ou épaisseur des queues de la distribution (*Kurtosis*)  $K = \mu_4 / \mu_2^2$ . Sous des hypothèses de normalités, nous avons normalité des estimateurs  $\hat{S}$  et  $\hat{K}$  respectivement de  $S$  et  $K$ , ou  $\hat{S} \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} N(0, \sqrt{6/T})$  et  $\hat{K} \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} N(3, \sqrt{24/T})$ .

Par conséquent, sous  $H_0$  l'hypothèse de normalité de la distribution, la statistique  $JB$  associée au test de Jarque et Berra, vérifie :  $JB = (T/6)s^2 + (T/24)(3-k)^2 \sim \chi^2(2)$ . Si  $JB \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)$  nous rejetons, au seuil  $\alpha\%$  l'hypothèse de normalité.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

avec la loi normale ne peut pas être rejetée. Mais, lorsque la distribution des résidus est asymétrique, nous perdons une part importante de l'information qui sera utile, pour la prévision. Ainsi, Juraczko (1999), a énoncé deux types de problèmes :

- Les modèles linéaires et gaussiens sont incapables de générer le fait des fluctuations soient asymétriques. Ainsi, les développements des modèles théoriques et empiriques nécessitent un nouveau fondement, basé sur l'hypothèse de dynamique non-linéaire, selon laquelle les fluctuations asymétriques sont caractéristiques des cycles endogènes.
- Si le problème de prédiction des modèles non-linéaires est traité dans un cadre linéaire, alors l'estimation du comportement dynamique de la série temporelle libère une part importante de l'information qui reste imprédictible. Ainsi une telle prédiction est biaisée.

**Définition 1.6 (Juraczko (1999))**

L'asymétrie de pente d'un processus  $\{\Delta Y_t, t \in \mathbf{Z}\}$  est indiquée par le coefficient de Skewness  $ST(\Delta Y_t)$  donné par :

$$ST(\Delta Y_t) = \frac{E[(\Delta Y_t - \Delta \bar{Y})^3]}{\sigma_{\Delta Y}^3}$$

où  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  est un processus de différence premier de taille  $T$ .

Si  $ST(\Delta Y_t) = 0$ , alors la distribution de  $\{\Delta Y_t, t \in \mathbf{Z}\}$  est dite qu'elle n'exhibe pas une *asymétrie de pente*. Si  $ST(\Delta Y_t) < 0$ , alors la distribution de  $\{\Delta Y_t, t \in \mathbf{Z}\}$  est dite qu'elle exhibe une *asymétrie de pente négative* et si  $ST(\Delta Y_t) > 0$ , alors la distribution de  $\{\Delta Y_t, t \in \mathbf{Z}\}$  est dite qu'elle exhibe une *asymétrie de pente positive*.

De même, Juraczko (1999), a formulé un coefficient de *Skewness*, permettant de mesurer l'asymétrie en amplitude, défini comme suit :

**Définition 1.7 (Juraczko (1999))**

L'asymétrie d'amplitude d'un processus  $\{Y_t, t \in \mathbf{Z}\}$  est indiquée par le coefficient de Skewness  $D(Y_t)$  donné par :

$$D(Y_t) = \frac{E[(Y_t - \bar{Y})^3]}{\sigma_Y^3}$$

où  $\bar{Y}$  est la moyenne empirique du processus  $Y_t$  de taille  $T$ .

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Si  $D(Y_t) = 0$ , alors la distribution de  $\{Y_t, t \in Z\}$  est dite qu'elle n'exhibe pas une *asymétrie d'amplitude*. Si  $D(Y_t) \neq 0$ , mais le signe de  $D(Y_t)$  n'est pas intéressant, alors la distribution de  $\{Y_t, t \in Z\}$  est dite qu'elle exhibe une *asymétrie d'amplitude*. Il est important de préciser que la distribution de  $\{Y_t, t \in Z\}$  exhibe une *asymétrie d'amplitude*, si  $D(Y_t) \neq 0$  ou  $D(Y_t) < 0$ . Mais l'absence d'une *asymétrie d'amplitude* n'est pas une condition suffisante pour que la distribution de  $\{Y_t, t \in Z\}$  soit symétrique.

#### 1.2.1.4. Procédures et test d'asymétrie de Verbrugge (1997)

De toute évidence, une des propriétés essentielles des fluctuations économiques, est leur capacité d'avoir des structures asymétriques. L'objet de cette sous-section est de mettre en œuvre des procédures de tests, permettant de justifier l'intuition, selon laquelle les difficultés de prévision, à long terme, des séries de la production industrielle proviennent de la non-linéarité, induite par les fluctuations asymétriques. Selon Fornari et Mele (1997), la justification de la nature de cette non-linéarité est une étape indispensable, qui doit précéder toute tâche de modélisation. Pour le moment, sans penser à établir des tests joints, envahis, de l'asymétrie et de la non-linéarité, chacune de ces deux hypothèses est testée séparément. Plusieurs tests sont élaborés, afin de détecter ces effets asymétriques, puis les classer suivant leurs degrés de significativités.

##### ➤ Procédure du test

Dans le but d'étudier la dynamique asymétrique des séries temporelles, Verbrugge (1997), a proposé de tester l'asymétrie cyclique<sup>28</sup>, de la distribution d'une série filtrée tout en se basant sur les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 & : \text{Distribution symétrique} \\ H_1 & : \text{Distribution asymétrique} \end{cases}$$

---

<sup>28</sup> Si les données ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées (*iid*), Verbrugge (1997), suggère l'utilisation de la technique de bootstrap.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

Soit, le triplet  $(Y_i, Y_j, Y_k)$  de données aléatoires générées à partir de  $F(Y - \theta)$ , où  $F(\cdot)$  désigne une fonction cumulative continue de la population  $Y$  médiane  $\theta$ , vérifiant  $F(0) = 1/2$ .

$$f^*(Y_i, Y_j, Y_k) = \frac{1}{3} [\text{sign}(Y_i + Y_j - 2Y_k) + \text{sign}(Y_i + Y_k - 2Y_j) + \text{sign}(Y_j + Y_k - 2Y_i)]$$

où la fonction  $\text{sign}(x)$  est définie par son expression explicite égale 1 si  $x > 0$ , 0 si  $x = 0$ , et -1 si  $x < 0$ . La fonction est ordonnée par les valeurs  $\left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\}$ ; un Triple à droite est un Triple qui correspond au coefficient  $\frac{1}{3}$ , alors qu'un Triple à gauche correspond au coefficient  $-\frac{1}{3}$ .

La statistique du test de Triple est asymptotiquement distribuée, selon la loi normale standard:

$$t^{\text{Triple}} = \frac{\hat{\eta} - \eta}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^2 / N}} \sim N(0,1)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\eta} := \frac{\text{nombre de Triples à droite} - \text{nombre de Triples à gauche}}{3 \binom{N}{3}} \\ := \binom{N}{3}^{-1} \sum_{i < j < k} f^*(Y_i, Y_j, Y_k) \\ \hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^2 / N := \binom{N}{3}^{-1} \sum_{c=1}^3 \binom{3}{c} \binom{N-3}{3-c} \hat{\xi}_c \\ \hat{\xi}_c := \text{Var}[f_c^*(Y_1, \dots, Y_c)] \\ f_c^*(Y_1, \dots, Y_c) := E[f_c^*(Y_1, \dots, Y_c, Y_{c+1}, \dots, Y_3)] \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\xi}_1 := \text{Var}[f_1^*(Y_i)] \\ := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_1^*(Y_i) - \hat{\eta})^2 \text{ telque } f_1^*(Y_i) := \binom{N-1}{2}^{-1} \sum_{\substack{j < k \\ i \neq j, j \neq k}} f^*(Y_i, Y_j, Y_k) \\ \hat{\xi}_2 := \binom{N}{2}^{-1} \sum_{j < k} \sum (f_2^*(Y_j, Y_k) - \hat{\eta})^2 \text{ telque } f_2^*(Y_j, Y_k) := \frac{1}{N-2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k \\ i \neq k}} f^*(Y_i, Y_j, Y_k) \\ \hat{\xi}_3 := \frac{1}{9} - \hat{\eta}^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

Ce test est équivalent à vérifier les hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\eta} = 0 \\ H_1 : \hat{\eta} \neq 0 \end{cases}$$

C'est un test non-paramétrique qui permet formellement de distinguer, entre l'asymétrie d'amplitude ou transversale<sup>29</sup> (*deepness asymmetry*) et l'asymétrie de pente ou longitudinale<sup>30</sup>, (*steepness asymmetry*). Sous l'hypothèse alternative, une série est asymétrique. Elle peut être, soit transversalement asymétrique, lorsqu'elle admet une asymétrie, dans la distribution de la série filtrée par le filtre de Hodrick-Prescott (HP), soit longitudinalement asymétrique, lorsqu'elle admet une asymétrie dans la distribution de la série en différence premier (DP). Ce test peut fournir une première justification de l'hypothèse de non-linéarité et un guide de sélection des modèles non-linéaires, de séries temporelles étudiées.

➤ **Résultats du test**

**Tableau 1.3: Test de l'asymétrie d'amplitude de Verbrugge (1997)**

Variables	series length	filtre	eta	variance	t-statistique	p-value
IPI	129	HP	-0.07233*	1.46384e-04	-5.97847	2.25249e-09
IAA	129	HP	-0.03937	2.59857e-04	-2.44254	0.01458
ICCV	129	HP	-0.08314*	3.05083e-04	-4.75997	1.93618e-06
IME	129	HP	0.00233	1.30816e-04	0.20413	0.83825
IC	129	HP	-0.07243*	2.25925e-04	-4.81904	1.44250e-06
IHC	129	HP	-0.04776*	2.06081e-04	-3.32714	8.77410e-04
IMD	129	HP	-0.03861	1.50188e-04	-3.15012	0.00163
IM	129	HP	-0.07232*	1.69189e-04	-5.55964	2.70326e-08
M	129	HP	-0.10467*	8.31970e-05	-11.47565	0.00000
E	129	HP	0.00139	9.51486e-05	0.14256	0.88664

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 10%. HP indique le filtre de Hodrick-Prescott avec un paramètre de lissage  $\alpha=129600$ , t-statistique indique la statistique du test Triple qui est asymptotiquement distribué selon la loi normale standard  $(N(0,1))$ , p-value indique la p-value de la variable normale standard.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Les résultats, portés sur le tableau (1.3), du test d'asymétrie d'amplitude montrent que le secteur industriel est, généralement, vu comme étant plutôt sensible aux variations d'amplitude

<sup>29</sup> L'asymétrie transversale indique une asymétrie dans le niveau de la tendance de la série filtrée par le filtre de Hodrick-Prescott (HP), le filtre linéaire (LF) ou encore par le filtre de Beveridge-Nelson (BN).

<sup>30</sup> L'asymétrie longitudinale indique une asymétrie dans de la tendance en premier différence (FD) de la série filtrée.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

des pics et des creux des fluctuations du cycle industriel. Cette instabilité apparente vient du fait que, les séries de la production industrielle réagissent plus ou moins entre le régime haut et le régime bas cycliques. L'asymétrie d'amplitude est plus évidente pour les séries IPI ; ICCV ; IC ; IHC ; IM et M, alors que la série IAA et IMD exhibent une signification d'une asymétrie marginale d'amplitude. Tandis que, la symétrie d'amplitude est plus évidente pour les séries IME et E.

**Tableau 1.4: Test de l'asymétrie de pente de Verbrugge (1997)**

Variables	series length	filtre	eta	variance	t-statistique	p-value
<b>IPI</b>	129	DP	-0.04878*	1.72687e-04	-3.71200	2.05625e-04
<b>IAA</b>	129	DP	-0.02302	1.76766e-04	-1.73116	0.08342
<b>ICCV</b>	129	DP	-0.03999	2.96119e-04	-2.32402	0.02012
<b>IME</b>	129	DP	-0.00240	1.92488e-04	-0.17296	0.86269
<b>IC</b>	129	DP	-0.01084	2.15720e-04	-0.73806	0.46048
<b>IHC</b>	129	DP	-0.06826*	2.26785e-04	-4.53302	5.81475e-06
<b>IMD</b>	129	DP	-0.02379	1.79739e-04	-1.77434	0.07601
<b>IM</b>	129	DP	-0.05526*	1.84377e-04	-4.06932	4.71511e-05
<b>M</b>	129	DP	-0.06189*	1.21247e-04	-5.62042	1.90488e-08
<b>E</b>	129	DP	0.00868	2.05135e-04	0.60570	0.54471

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 10%. DP indique le filtrage par différence premier de la série, t-statistique indique la statistique du test Triple qui est asymptotiquement distribué selon la loi normale standard  $(N(0,1))$ , p-value indique la p-value de la variable normale standard.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Les résultats, portés sur le tableau (1.4), du test d'asymétrie de pente montrent que les séries de la production industrielle ont réagi, davantage, à la récession que pendant la phase d'expansion. Toutefois, certaines industries réagissent de façon plus rapide que d'autres, aux fluctuations du cycle industriel. Bien que les industries productrices de biens soient, généralement, les plus durement touchées, pendant une récession, les industries des services commerciaux subissent, aussi, les effets des variations de la demande des consommateurs. Les séries IPI, IHC, IM, et M sont plus touchées que les séries IAA, ICCV et IMD, par les fluctuations économiques asymétriques en pentes. Tandis que la symétrie de pente est plus évidente pour les séries IME, IC et E. La présence apparente de sensibilité cyclique, dans le secteur producteur de services, s'explique dans une large mesure par la composition de ce secteur. En effet, les services non commerciaux sont à l'origine de l'instabilité caractéristique du secteur, tandis que les services commerciaux sont presque aussi sensibles aux fluctuations cycliques de

## Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

l'économie, que les industries du secteur producteur de biens. Ainsi, les industries primaires des mines sont souvent les dernières, à subir les effets négatifs d'une récession, puisque, les prix des matières premières augmentent, en général, enfin de la phase d'expansion industrielle. Par contre, les industries d'énergie sont inaffectées, ni par une asymétrie d'amplitude ni par une asymétrie de pente. Nous pourrions, donc, constater que, comme la majorité des autres pays sous-développés, moins avancés technologiquement et ouverts à l'investissement direct étranger, la situation générale du secteur industriel, en Tunisie, subit en permanence des fluctuations cycliques, asymétriques et des transformations radicales, qui causent, tant son instabilité structurelle, que son instabilité dynamique.

Pour conclure, les résultats présentés, jusqu'à cette étape, dans ce travail, montrent qu'il n'y a pas de cycle régulier de la production industrielle pendant une longue période, en Tunisie. La satisfaction de ce fait stylisé nous pousse à poser l'hypothèse, selon laquelle cette irrégularité peut provenir du fait que les fluctuations macroéconomiques de ces variables s'apparentent plutôt à des changements structurels, correspondant à la théorie des cycles endogènes. Kiani et Bidarkota (2004), ont prouvé qu'à la présence d'une asymétrie en moyenne conditionnelle, il y a une grande évidence d'accepter l'existence d'une non-linéarité, dans la dynamique de la moyenne conditionnelle. Cependant, il se peut nécessairement que ceci soit accompagné d'autre problème d'hétéroscédasticité et/ou de persistance de longue mémoire. Rappelons que notre objet captivé est de déterminer une meilleure caractérisation de la dynamique asymétrique des séries industrielles, permettant de distinguer, entre une asymétrie en moyenne conditionnelle et une asymétrie en variance conditionnelle. À cette fin, nous allons passer à l'analyse graphique des dynamiques asymétriques, en distributions conditionnelles, des séries étudiées.

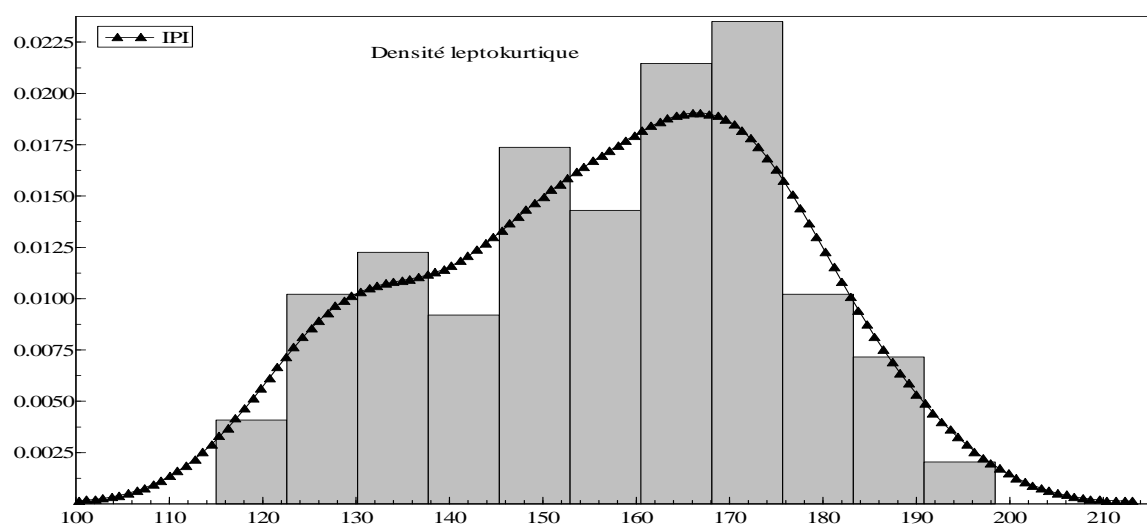
### **1.2.2. Les implications d'asymétries cycliques**

Avant de passer à la modélisation, nous signalons que le recours aux outils importants de traitement exploratoire, des données empiriques, autorise, ainsi, le passage systématique par l'analyse des principales caractéristiques, de la statistique descriptive. Car, la recherche et la

## Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

sélection d'une spécification de modèle se font, toujours, à partir de faits stylisés empiriques. Par conséquent, nous espérons que ce passage préliminaire nous aidera à vérifier la validité d'un modèle et à juger le degré de sa capacité à reproduire ces faits stylisés. C'est une étape nécessaire pour l'appréhension du mécanisme réel, générateur des données et de sa bonne spécification.

Afin d'établir une analyse descriptive de la dynamique asymétrique des cycles, de la production industrielle tunisienne, nous retenons comme hypothèse : si le diagnostic met en évidence de graves récessions successives, causant un affaiblissement de la densité du tissu industriel, alors une telle situation peut être à l'origine d'une insuffisance de la dynamique endogène. Tout d'abord, sachant, toujours, que notre but est de chercher une famille de modèle dotée d'une certaine forme de flexibilité, en moyenne asymétrique capable de reproduire les effets leptokurtiques<sup>31</sup>, qui caractérisent la forme de la distribution aigue, de la série de l'indice de production industrielle tunisienne, représentée sur la figure (1.6).



**Figure 1.6: Asymétrie dans la distribution de la série temporelle de l'indice de production industrielle tunisienne**

<sup>31</sup> Dans certains cas, l'asymétrie pouvait être due de l'accroissement des queues de distribution par agrégation temporelle. Lorsque les queues de distribution empirique sont plus épaisses que celle d'une loi gaussienne standard, la série est asymétrique. Ce phénomène d'asymétrie est dit leptokurtique, l'importance des queues étant mesurée par la *Kurtosis*, rapport du moment centré d'ordre quatre par le carré de la variance. Plus la *Kurtosis* est grande, plus les queues sont épaisses, ceci pour des distributions suffisamment irrégulières. En ce sens, si la *Kurtosis* est largement et significativement supérieure à la valeur 3, alors la distribution du processus générateur de données est leptokurtique.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Le simple examen du graphique de la série en niveau de l'indice d'ensemble de la production industrielle en Tunisie, nous permet de constater qu'elle est asymétrique. Or, l'asymétrie de la distribution implique qu'il y a plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse. À l'évidence, ceci nous permet d'admettre, pour le moment, qu'un modèle linéaire est inapte de prendre en compte les éventuelles asymétries et multi-modalités, qu'un modèle non linéaire en moyenne.

Pour nous assurer, d'avantage, de la nature du caractère asymétrique de la densité de probabilité des autres processus générateurs des données, nous avons tracé, sur une même graphique de la figure (1.7), les histogrammes et les courbes des densités. Nous remarquons que la distribution avec une queue est plus longue à gauche, car elle présente un étalement des observations inférieur au mode  $\bar{X} < Me < Mo$ .

Cette application pratique illustrée graphiquement à l'aide de la figure (1.7), a permis de confirmer qu'en Tunisie, les évolutions de la plupart des séries temporelles de la production industrielle avaient des distributions qui se caractérisent par la présence des fortes queues. Donc, ces séries sont dites asymétriques. Nous pourrions, donc, conclure que nous sommes en train d'étudier un processus générateur de données, dont la distribution est avec asymétrie négative, pour les séries (IPI ; ICCV ; IHC ; IMD ; IM ; M) et positive pour les séries (IME et E). Ces résultats, ainsi obtenus, montrent que, dans la plupart des cas, il s'agit d'une distribution asymétrique avec un mode assez prononcé et des queues épaisses. Ceci vient de confirmer notre première impression que ces distributions sont leptokurtiques et nous aide à comprendre l'attrait de la dynamique des processus non-linéaires, générateurs des distributions leptokurtiques asymétriques.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

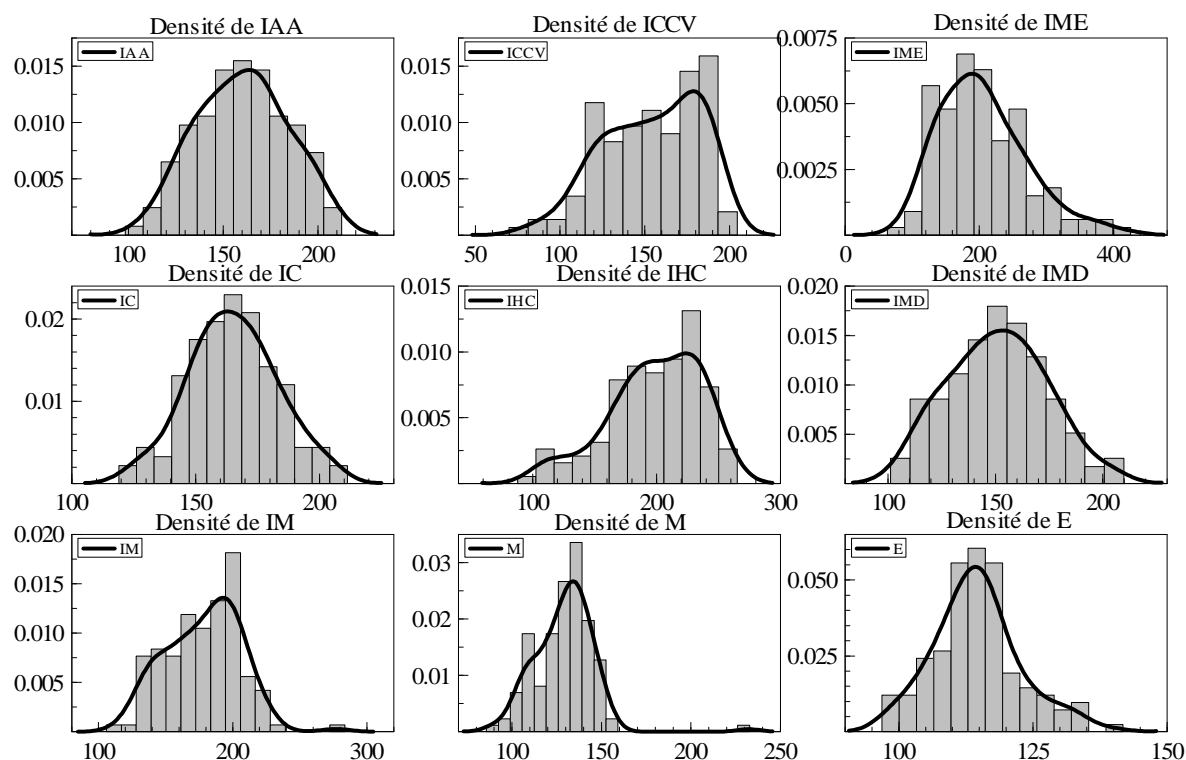


Figure 1.7: Asymétrie dans les distributions des séries temporelles de la production industrielle tunisienne

Or, Engle (1982) montre que l'asymétrie leptokurtique de la distribution d'une série temporelle, peut être expliquée par la présence d'un problème d'hétéroscédasticité conditionnelle. Cependant, Gray (1996), a montré que la modélisation ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), n'est pas suffisante pour tenir compte de l'asymétrie leptokurtique. Compte tenu de cette remarque et de l'examen graphique de la figure (1.7), nous pouvons constater que, les données de chaque série temporelle étudiée suivent une distribution asymétrique et révèlent de nombreux épisodes de périodes, à travers lesquelles la dynamique de la série est différente. Mais, malgré ceci la modélisation ARCH n'est pas la bonne spécification capable de généraliser les processus générateurs des données. Car elle néglige le phénomène de changement de régimes.

Ce résultat confirme notre intuition, en vérifiant la présence des multi-modalités, nous permet de nous attendre que les dynamiques des cycles relatifs à ces séries évoluent suivant des

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

dynamiques distinctes, selon les régimes d'expansion ou de récession, en termes de durées et de variations moyennes des variables, mises en vigueur. Par conséquent, sur le plan économique, nous pouvons interpréter ce résultat par le fait que, d'une part la non conformité dans la dynamique des différentes séries étudiées, peut être due à la faiblesse des relations inter-industrielles, qui résulte, entre autres, soit de l'absence de maîtrise de technologie et/ou d'une gestion industrielle mal planifiée, en effet à titre illustratif la sous-traitance industrielle reste à faire vu l'absence de vrai sous-traitants. En conséquence, Les entreprises tunisiennes restent en manque de techniques à promouvoir et pour récompenser ce manque, le tissu industriel sera toujours alimenté par importation des moyens d'apprentissage et de transfert de la technologie. D'autre part, le moral des agents économiques évolue différemment, suivant les phases ascendantes ou descendantes de notre cycle industriel. Plus précisément, les changements de symétrie, ainsi observés, peuvent correspondre à des transitions de phases où de bifurcations, dans la dynamique du processus générateur de données. Or, puisque la notion d'asymétrie est étroitement reliée à la notion de structure et à son apparition, alors expliquer les brisures de symétries, nous pousse à chercher une réponse à une question capitale de la morphogenèse, c'est-à-dire l'ensemble des mécanismes expliquant l'apparition recomposable des structures et contrôlant leurs formes. Ceci nécessite, sans doute, de centrer nos efforts sur la compréhension des dynamiques des structures, de leur émergence et de leur éventuelle fonctionnement. Toutefois, cette étape (qui fait l'objet d'un développement ultérieur), préconise l'identification du processus inhérent au changement de structure, ainsi que des mécanismes qui les induisent et les contrôlent.

L'étude menée à ce stade a permis de préciser, tant sur le côté théorique qu'empirique, surtout, que la plupart des séries étudiées sont asymétriques et leurs processus, dont elles ont été générées, sont non gaussiens. Ceci a de grandes implications pour l'avancement de cette analyse, car il nous guide vers l'hypothèse, selon laquelle cette brisure de symétrie et non gaussianité sont les substances d'une dynamique irrégulière des fluctuations endogènes, caractérisant les dynamismes des comportements des processus, dont elles sont sous-jacentes. Ainsi naît l'utilité de concevoir quelques pistes, pour parcourir le monde de genèse des structures qui sont à la base



de la brisure d'asymétrie. Comme la question de morphogenèse des structures peut être reformulée, autour d'une interrogation centrale, qui cherche dans la cause des structures ainsi générées. À cette fin, notre premier et idéal fil conducteur pour comprendre la morphogenèse des structures par brisure de symétrie, ce n'est autre que le mécanisme générateur de ces structures (données). Or, l'étude d'un tel mécanisme passe, sans doute, par sa caractérisation, en termes de transition et de dépendance des structures dynamiques.

### **1.2.3. Transition et dépendances structurelles**

#### ***1.2.3.1. Transition de phase dans les criticités auto-organisées : du local au global***

Rappelons que nous avons admis la possibilité de l'apparition des cycles endogènes, caractérisant la dynamique et l'émergence des fluctuations récurrentes endogènes et mettant, en présence des mécanismes d'attraction (orbites), nécessaires à la bifurcation de l'équilibre. Or comme le fait remarqué Puu (2003), ceci est conditionné par un mode de fonctionnement du processus d'ajustement, assurant la transition douce de phases, tout en respectant le principe du changement par « *recomposition des invariances* », visant essentiellement à maintenir un cadre dynamique invariant par changement d'échelle, à caractère durable, favorable, à la genèse des fluctuations autoentretenuës et surtout aux réformes graduelles mais continues des structures endogènes. Il est évident, d'adopter ce type de raisonnement, puisque dans le cadre de la modélisation classique, où un tel type de mécanisme d'ajustement est absolument interdit, l'équilibre est unique et pris comme linéairement statique et par la suite, l'absence de ruptures atténuées par un processus de lissage, implique l'absence de transitions et le processus linéaire garde, généralement, une structure statique bien fixe et déterminée. Par contre, dans le cadre de cette étude, puisque nous accordons une portée non négligeable au changement structurel endogène, le processus de transition lisse est au cœur de la dynamique de l'équilibre mobile et multiple. Dans ce cadre de l'économétrie des modèles à changement de régimes, il est donc important de connaître le processus de transition de phase, dans ses spécificités afin de pouvoir le caractériser.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Le rôle, joué par des transitions douces dans le lissage des états auto-organisés, au voisinage des états critiques (*self-organized criticality*), est mis en évidence, essentiellement par Thom (1972), Nicolis et Prigogine (1977) et Bak, Tang et Wiesenfeld (1988), et plus récemment par Goodwin, Kaufmann et Murray (1993), Kaufmann (1993), Kaufmann (1995), Solé et Goodwin (2000) et Velupillai (2005). Leurs fondements découlent d'une idée simple mais abstraite, selon laquelle la genèse des structures auto-organisées est possible, selon un aspect plus caché de l'invariance par symétrie et/ou de transformation par brisure de symétrie, comme critère d'instabilité structurelle, ce qui peut avoir comme principale source, des simples interactions composées de contraction et de dilatation des composantes infinitésimales, *a priori*, non auto-organisées. Ce sont ces transformations endogènes de l'invariance dynamique des processus qui apparaissent, parfois, sous le nom de déformations structurelles, qui sont à l'origine du principe de changement par « *recomposition des invariances* », et qui contribuent de leur part, à générer d'autres structures par réplifications morphologiques et spatio-chronologiques, représentant notre fil conducteur, vers l'étude des mécanismes abstraits de transition endogène. Lordon (1995), souligne que cette corrélation, simple mais abstraite, produit l'évolution des structures dynamiques, à travers l'émergence des fluctuations cycliques autoentretenuées ou des fluctuations complexes et parfois fractales qui sont comprises comme la dynamique endogène des structures.

À l'évidence, une intuition très importante suggère que la dynamique endogène des structures, implique que les structures changent (cette idée se nourrit de l'idée traditionnellement admise des multiplicateurs dynamiques de Keynes), mais, Kaufmann (1995), précise que, puisqu'elles changent sous l'effet de leur propre fonctionnement, elles font intervenir un mécanisme abstrait et fonctionnel de cohérence lors de l'émergence<sup>32</sup> des structures par recomposition, pendant l'opération de transition de phases. Tout d'abord, la propriété d'émergence des fluctuations endogènes souligne le caractère spontané des structures ainsi générées, et par la suite l'impossibilité de les prédire, au vu d'un seul composant. D'autre part, la propriété de cohérence, accompagnant le changement qualitatif de phases, est liée, en réalité, à

---

<sup>32</sup> Ce concept signifie dans ce contexte : l'apparition de structures spatiales ou spatio-temporelles spécifiées à partir d'un processus de transition formé d'un ensemble initialement homogène d'éléments identiques.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

l'apparition de modifications virtuelles des comportements critiques de certaines grandeurs (comme par exemple le champ d'attraction), ou caractéristiques (comme par exemple la longueur de corrélations), décrivant les états de dynamisme, ayant comme source de naissance, notamment, les bifurcations au voisinage de l'équilibre dynamique. La criticité est, donc, indispensable pour s'assurer de l'adaptation par un enchaînement auto-organisé, entre deux critères, à la fois opposés mais complémentaires : ordres et désordres (chaos) lors du passage d'un état d'équilibre à un autre, par transition lisse.

Nous aurons l'occasion de monter, en deuxième partie, que le passage par un état critique correspond au changement radical de propriétés qualitatives des paramètres, au voisinage de l'équilibre dynamique. À cet égard, nous allons prouver que lors de la transition de phases, il y a un changement de la longueur de corrélation, dans le champ d'attraction au voisinage de l'équilibre localement instable, qui peut se manifester physiquement par l'existence d'une succession de périodes d'orientation et de recherche de stabilité, qui tendent à accroître l'inertie de l'auto-organisation d'attracteurs par reconstruction du portrait de phase selon le théorème de plongement de Takens (1981), et vont avoir pour résultat, la naissance d'une structure de cohérence, entre les éléments dynamiques déclenchant ainsi, comme le fait remarqué Pintus, van Sands et de Vilder (2000), la perte de stabilité locale de l'équilibre au profit de sa stabilité globale. Haggan, Heravi et Priestly (1984) et Abraham-Frois et Berrebi (1995), précisaient qu'en principe, ce changement dans les propriétés qualitatives de l'équilibre (bifurcation), est en réalité, celui qui détermine les rapports de dépendance structurelle, puisqu'il conduit l'auto-organisation d'un état d'équilibre temporairement stable, à un état apériodique (chaotique) instable, via un comportement périodique intermédiaire (doublement de périodes), traduisant, en conséquence, le caractère dynamique non-linéaire, de l'évolution du processus. Nous verrons, au niveau de la deuxième partie, que le recours à la théorie de bifurcation permet de rendre compte de la perte de stabilité de l'équilibre, lors du passage du local au global, dépendant de la valeur du paramètre de contrôle, pour laquelle a eu lieu cette transition.

### ***1.2.3.2. Rapports de dépendance structurelle***

L'étude menée à ce niveau a permis de préciser le facteur endogène, comme source principale des fluctuations de l'activité économique et notamment industrielle en Tunisie. Compte tenu de cette hypothèse de base, nous avons mentionné que les dynamiques des fluctuations économiques peuvent s'exprimer à travers l'évolution quantitative et la modification, radicalement structurelle, des variables macroéconomiques, et qui contribuent ensemble, à la modification de la structure interne de la dynamique de l'économie et affectent de façon significative son évolution. Donc, il serait très intéressant de mener une analyse fine et approfondie, afin de pouvoir identifier les différents rapports de dépendance structurelle.

Ceci nous conduit à nous interroger sur la possibilité d'appliquer un contrôle optimal des fluctuations endogènes, qui engendrent parfois des perturbations non-modérées, à l'aide des politiques stratégiques de régulation et d'intervention rationnelles, ayant pour but unique est de réduire les incertitudes générées par celles-ci et de corriger leurs effets. Or, la majorité des études empiriques antérieures se sont intéressées à la recherche des relations de dépendance linéaire (autocorrélations), mais, rappelons nous que notre étude est menée, dans un cadre d'instabilité des structures dynamiques non-linéaires. Ainsi, l'introduction de la dynamique non-linéaire a incité les chercheurs à se rendre compte que l'absence de la dépendance linéaire, n'élimine pas la présence de dépendance non-linéaire. En conséquence, comme le recommandent Aloi, Jacobsen et Lloyd-Braga (2000), l'intervention dans ce cadre n'est pertinente, que dans la mesure où nous serons capables d'identifier puis de caractériser avec précision, les relations de dépendance structurelle et de perte de stabilité d'équilibre, qui sont à l'origine des transformations et adaptations spontanées, qui naissent et qui sont opérées, normalement, au cours du dynamisme encore qu'elles sont censées représenter la structure évolutive, dans l'espace et dans le temps de l'économie, au sens préconisé, notamment, par les contributions de bases de Benassy (1984), Beltram (1987), Boldrin et Woodford (1991), Brock et Dechert (1991), Lux et Gemany (1992), Benhabib (1992), Bala et Majumdar (1992), Lorenz (1993a), Dore (1993), Venditti (1996), Grandmont (1998). C'est-à-dire, spécifier, de manière

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

explicite le « vrai » mécanisme, qui conditionne la transformation et le changement des structures dynamiques. Par exemple, pour Goodwin (1967), la dynamique économique repose sur la variation de la répartition des revenus, à l'intérieur de l'économie. Donc, d'après lui, le cycle résulte des variations et des rapports de dépendance structurelle, naissants au cours du mécanisme de répartition endogènes des revenus. D'un autre côté, Nelson et Winter (1982), ont proposé une vision évolutionnaire qui tend à expliquer les changements structurels en économie. Witt (2004), a confirmé ceci, en notant que l'évolution de la production, se génère à partir de la dynamique des structures productives. En ce sens, Klepper et Graddy (1990), ont étudié, en particulier, l'évolution induite par la dynamique des structures des nouvelles industries.

De façon générale, plusieurs mécanismes de transitions dynamiques des structures sont possibles et nous aurons l'occasion d'étudier, plus tard, certains parmi ces instruments au fur et à mesure, que le développement s'avance. Voilà, l'analyse et la modélisation des rapports de dépendances, restent un exercice difficile mais essentiel, en gouvernance des structures économiques instables. Or, les dépendances, entre les structures économiques, correspondent dans cette thèse, à celles qui existent au sein des déséquilibres (perte de stabilité des équilibres dynamiques stationnaires temporaires)<sup>33</sup>, qui provoquent des fluctuations endogènes de l'activité industrielle, source d'instabilité industrielle continue. En ce sens, Granger et Lin (1994), ont développé une méthode permettant de mesurer la dépendance non linéaire, par extension de la notion d'entropie relative de Joe (1989), basée sur le coefficient de l'information mutuelle définie comme suit : pour un couple d'observation  $(Y_t, Y_{t-1})$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , notons  $P(Y, Y_{t-1})$  la fonction de densité de probabilité joint et  $P_{Y_t}(Y_t)$  et  $P_{Y_{t-1}}(Y_{t-1})$  leurs fonctions de densités marginales respectives. L'entropie relative est définie à partir de la statistique :

$$\delta(Y_t, Y_{t-1}) = \sum_{Y_t} \sum_{Y_{t-1}} P(Y_t, Y_{t-1}) \log \left[ \frac{P(Y_t, Y_{t-1})}{P_{Y_t}(Y_t) P_{Y_{t-1}}(Y_{t-1})} \right]$$

---

<sup>33</sup> Cette idée sera développée avec plus de détails au cours de la prochaine partie (partie 2 de ce document).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

où  $\delta$  est une mesure de la distance entre la distribution jointe et la distribution pour laquelle  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  sont indépendants. L'entropie relative entre les deux observations  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  est reliée à l'entropie de Shannon notée  $H(\cdot)$ , qui sert à quantifier l'information contenue dans la série d'observations, par l'expression de l'information mutuelle suivante :

$$\delta(Y_t, Y_{t-1}) = H(Y_t) + H(Y_{t-1}) - H(Y_t, Y_{t-1})$$

où  $H(Y_t) = -\sum_{Y_t} P_{Y_t}(Y_t) \log [P_{Y_t}(Y_t)]$ , avec  $P_{Y_t}(Y_t) = P(Y = Y_t)$  pour tous  $t \geq 0$  et variable  $Y_t$  de dimension  $p$ . Le calcul de cette entropie de Shannon, montre que nous sommes en présence d'un comportement périodique que lorsque l'entropie est nulle ou d'un comportement dynamique non-linéaire de nature déterministe lorsque l'entropie prend une valeur finie bornée, mais il est de nature stochastique quand l'entropie prend des valeurs infinies. Dans ce cas discret, Granger et Lin (1994), ont développé l'expression suivante :

$$R(Y_t, Y_{t-1}) = [1 - \exp\{-2\delta(Y_t, Y_{t-1})\}]^{1/2}$$

Granger et Lin (1994), ont montré que  $R$  vérifie un nombre de propriétés attractives suggérées que :

1-  $R$  est une variable discrète ou continue ;

2-  $R$  est définie sur  $[0, 1]$ , avec des valeurs décroissantes avec  $\delta$ ;  $R$  prend la valeur nulle si  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  sont indépendantes ;  $R$  prend la valeur unitaire si la relation entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  est non linéaire (par exemple de la forme  $Y_t = f(Y_{t-1})$ ) ;

3- si  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  ont une distribution normale bivariée avec taux joints de corrélation noté  $\rho$ , alors nous avons  $R = |\rho|$ .

Par similarité, le coefficient partiel de l'information mutuelle et sa  $R$ -statistique partielle, notée  $R_p$ , pour les variables  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$ , sont donnés par l'expression :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$\delta_Z(Y_t, Y_{t-1}) = \sum_{Y_t} \sum_{Y_{t-1}} P(Y_t, Y_{t-1} \setminus Z) \log \left[ \frac{P(Y_t, Y_{t-1} \setminus Z)}{P_Y(Y_t \setminus Z) P_Y(Y_{t-1} \setminus Z)} \right]$$

où  $P_z(\cdot \setminus z)$  est la distribution conditionnelle de la variable  $Z$ .

Diks et Manzan (2002), ont défini la notion d'intégrale de corrélation comme suit :

**Définition 1.8**

*L'intégrale de corrélation généralisée d'ordre  $q$  de  $Y_t$  est définie par l'expression :*

$$C_q = \left[ \sum \left( \sum I_{(\|Y_t - Y_{t-1}\| \leq \varepsilon)} P_Y(Y_t) \right)^{q-1} P_Y(Y) \right]^{\frac{1}{q-1}}$$

où  $I(\cdot)$  est la fonction indicatrice et  $\|\cdot\|$  est la norme supérieure donnée par  $\|Y\| = \sup_{j=1, \dots, \dim Y} |Y_j|$ .

En employant cette définition, les auteurs ont montré que la relation entre l'entropie Shannon et l'intégrale de corrélation peut être exprimée par l'approximation :

$$H_q(Y_t) \approx -\log[C_q(Y_t; \varepsilon)] + \alpha \log(\varepsilon)$$

où  $\varepsilon$  est un nombre infinitésimal.

En ce sens, étant donné les estimateurs des intégrales de corrélations  $\hat{C}_q(Y_t; \varepsilon)$ ,  $\hat{C}_q(Y_{t-1}; \varepsilon)$  et  $\hat{C}_q(Y_t, Y_{t-1}; \varepsilon)$  alors un estimateur de  $\delta(Y_t, Y_{t-1})$  aura comme expression :

$$\hat{\delta}(Y_t, Y_{t-1}) = \log \left[ \hat{C}_q(Y_t, Y_{t-1}; \varepsilon) \right] - \log \left[ \hat{C}_q(Y_t; \varepsilon) \right] - \log \left[ \hat{C}_q(Y_{t-1}; \varepsilon) \right]$$

Cette transformation sert à tester l'indépendance sérielle et l'hypothèse de la non-linéarité. Nous allons voir, à la suite de la dernière partie, de ce document, que la notion d'information mutuelle est nécessaire, notamment, pour définir deux outils de détection du dynamique complexe (chaotique) : la dimension de corrélation qui sert à mesurer la dimension de l'attracteur reconstruit et l'autre outil c'est l'exposant de Lyapunov, qui sert à mesurer la sensibilité de l'attracteur à la condition initiale.

D'un autre côté, puisque nous sommes intéressés, ici, plus particulièrement, à l'analyse descriptive des séries de la production industrielle tunisienne, l'étude graphique, à l'aide de la matrice des corrélations bivariées de la forme de la liaison entre ces séries deux, à deux passe

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

forcément par vérification de l'hypothèse de codépendance linéaire entre eux. Comme le fait souligné Guégan (1994), que si la connaissance de la distance de l'une détermine avec exactitude la connaissance de l'autre, alors nous parlons d'une liaison de corrélation parfaite, qui signifie la présence d'une liaison fonctionnelle linéaire, nous insistons à réfléchir, en terme de la modélisation classique (linéaire). Alternativement, l'hypothèse d'absence d'une liaison de codépendance linéaire, implique une corrélation sérielle nulle, qui peut être interprétée par la présence d'autres formes fonctionnelles de liaisons non-linéaires. Cette approche globale, intuitive, mais imprécise fournie par la matrice des distributions marginales bivariées, permet donc, d'une part, d'examiner l'hypothèse de codépendance linéaire entre les séries. D'autre part, de vérifier la gaussianité de leur distribution jointe, sachant que dans le cas gaussien, cette distribution admet une forme très spécifique qui ressemble à un ellipsoïde régulier. De ce fait, toute autre forme non ellipsoïdale, obtenue, laisse penser que le processus joint générateur des données n'est pas gaussien. Mais, pourtant que le rejet de la gaussianité ne confirme pas l'hypothèse de non-linéarité. La première étape de cette démarche déductive sert de points pour montrer, ensuite, au niveau de la troisième partie, que le rejet de l'hypothèse de linéarité est notamment vérifié, lorsque nous appliquons des tests plus sophistiqués de la non-linéarité.

L'analyse de sensibilité locale à l'aide de l'examen graphique de la matrice des corrélations bivariées des séries de la production industrielle, portée sur la figure (1.8), prouve que la majorité des liaisons bivariées, entre ces séries, semblent avoir des formes qui ne ressemblent pas à une représentation d'un ellipsoïde régulier. Ceci signifie que le processus générateur des données n'est pas gaussien. En plus, la forme du nuage de points obtenue, sur chaque composante de cette matrice de diagrammes de dispersion, nous donne une idée approchée, qui sert à nous renseigner sur la nature de la corrélation existant entre deux séries. Ainsi, la simple lecture des formes des nuages de points fournies par la figure (1.8), indique des nuages aux formes allongées, où les points sont plus ou moins éparpillés. Ceci, nous conduit à accepter en général, la présence d'une corrélation faible et positive, entre les fluctuations de chacune des deux séries avec une différence près.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

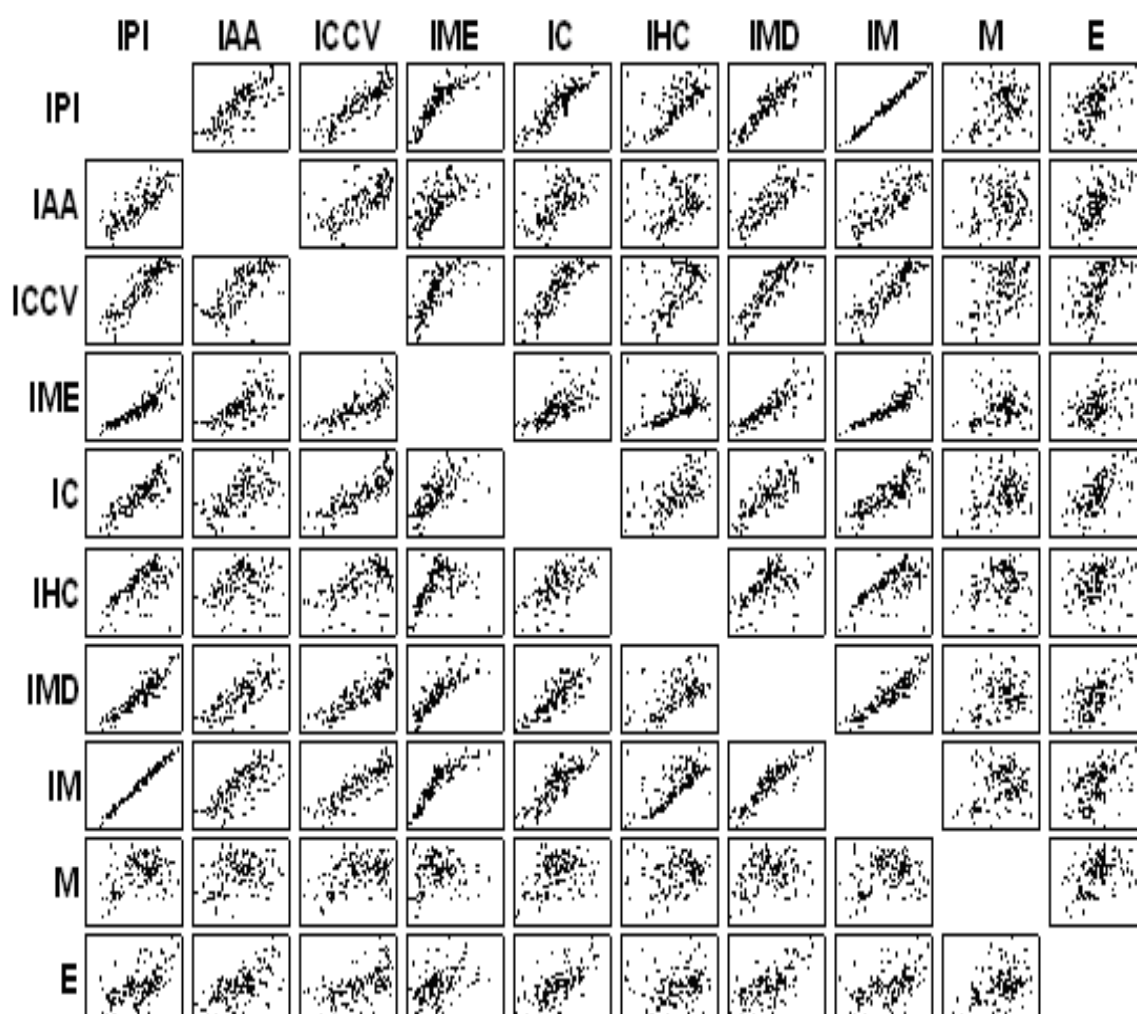


Figure 1. 8: Simulation de la matrice des distributions marginales bivariées des séries

Après avoir admis la possibilité de présence des fluctuations endogènes, qui peuvent être de deux types : soient des fluctuations cycliques autoentretenues, ou encore des fluctuations erratiques plus complexes, nos efforts, dans cette section, sont partis d'un questionnement méthodologique intéressant, à savoir dans quelle mesure la représentation de l'évolution des variables macroéconomiques, sous forme de cycle autour d'une tendance déterministe (appelé également modèle stationnaire en tendance), était-elle la plus pertinente pour appréhender le phénomène du changement de structure endogène? Pour ce faire, nous sommes engagés par

réflexion qui s'organise autour des deux questions suivantes : Comment justifions-nous la prise en compte de l'introduction de ruptures structurelles en tendances? Comment valider ceci, à l'aide des tests économétriques, avec date de changements de structure inconnue ou endogène?

## **1.3. Ruptures structurelles de tendances : Justifications théoriques et validation empirique**

### **1.3.1. Justification de l'introduction de ruptures structurelles en tendances déterministes**

#### ***1.3.1.1. Changement de structure : aspect théorique et pratique***

Après avoir prouvé le caractère asymétrique, des séries de la production industrielle tunisienne et analysé ses implications, nous allons, maintenant, supposer que cette asymétrie ne résulte pas d'un problème de volatilité capable de générer une non-linéarité en variance. Mais, plutôt elle provient d'effet de seuils en tendance. En d'autres termes, nous allons focaliser sur des modèles non-linéaires en moyennes, car nous avons supposé la présence du changement structurel endogène, sous l'effet de seuils en tendance déterministe. La caractéristique d'endogénéité découle du fait que le changement est inconnu et est estimé au lieu d'être fixé. Mais, avant de tester la validité de cette hypothèse concluante et s'interroger sur la nature de la spécification préférable, capable, de généraliser, le plus correctement possible, la présence des non-linéarités qui se manifestent dans la partie déterministe sous forme de saut pour le niveau du processus, il est commode tout d'abord, de passer par un aperçu théorique qui argumente la prise en compte de ce type de changement et qui touche uniquement la tendance déterministe. La démarche à suivre, tout au long de cette sous-section, détaille lisiblement l'avantage de sélectionner, parmi une multitude de classes, des modèles capables de modéliser le changement structurel, celle qui englobe des modèles à changement de régimes, mais également celle qui marque leurs capacités de spécifier, de manière explicite, le mécanisme qui conditionne le

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

phénomène du changement, au niveau de la spécification. En ce sens, les séries temporelles marquent leurs capacités de détecter les chocs structurels endogènes.

**Définition 1.9**

*Un choc structurel endogène est défini comme étant une modification permanente ou temporaire de la façon dont est générée une variable. Il est fréquent, souvent non anticipable et difficile à mesurer. Cependant, il est nécessaire de savoir qu'une rupture endogène a eu lieu, car sa présence change les interactions et les propriétés qualitatives des équilibres dynamiques multiples lors de la transition d'un état d'équilibre à un autre, quand le fonctionnement de l'économie est décrit à l'aide des spécifications non-linéaires en moyennes.*

Bien que la modélisation des évolutions non-linéaires en moyennes en économétrie des processus de changements structurels, où la modélisation macrodynamique date de plus d'un demi siècle, reste privée de tout essai fictif de modéliser l'économie en mouvement. Plusieurs études passées ont parlé des divers phénomènes de changements économiques liés aux fluctuations asymétriques des cycles. Tel que le cas, par exemple, du changement qui se produit à partir des années cinquante, dont le nom les « *Trente Glorieuses* ». Contrairement à l'hypothèse de base, adoptée par l'école néoclassique, sur l'importance du principe d'effet transitoire sur l'équilibre statique, lié à l'exogénéité des origines des fluctuations économiques, que ce soient monétaires, technologiques ou réelles, Venditi (1996), déclarait qu'une dichotomie radicale postulée par l'analyse contemporaine, dans un cadre unifié des fluctuations économiques et de croissance admettant comme principe de base l'effet permanent, sur l'équilibre dynamique lié à l'endogénéité des sources d'instabilité structurelle et des fluctuations récurrentes. En effet, le changement structurel influence les performances tendancielle de la prévision économique en agissant, différemment, suivant que l'on se situe en phase d'expansion ou de récession, sur les comportements des agents confrontés régulièrement, aux problèmes de prise de décision et de prédiction, dans un domaine d'instabilité structurelle et dynamique. Dans ce cas, les fluctuations récurrentes, par exemple en industrie, perturbent les décisions prédictives allouées à la planification des programmes d'investissements, en agissant sur les processus de production industrielle. Ceci a permis à Boyer avec collaboration de Saillard (1995)<sup>34</sup>, de dire que :

---

<sup>34</sup> Boyer et Saillard (1995), « *La théorie de la régulation : l'état des savoirs* », La Découverte.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

« *L'économie pure a voulu se constituer par rupture avec les  
scories de l'histoire [...] mais l'histoire en tant que processus passe au  
cible la pertinence des théories économiques et fort pu en réchappent.* ».  
(Boyer et Saillard (1995), p.12)

Une telle idée n'est pas tout à fait récente, par exemple pour l'école orthodoxe, pour Marx (1967b) ou Samuelson (1939a-b)<sup>35</sup>, les changements ou les fluctuations récurrentes sont d'origine interne : ce sont le produit du système lui-même. En d'autres termes, en théorie de cycle, celui-ci suppose le changement, puisque nous avons, déjà, mentionné le caractère de brisure de symétrie inhérent au dynamique du changement structurel et si nous le voulons, il est endogène. Une explication de ce type nécessite une abstraction totale avec le cadre linéaire d'analyse classique et l'adoption de la non-linéarité comme hypothèse capitale. C'est notre cadre privilégié qui nous autorise pour suivre le comportement de la dynamique des fluctuations cycliques endogènes. C'est, peut être, que ce changement est lié à un changement conjoncturel, cachant derrière lui un raisonnement abstrait en terme d'équilibre et de stabilité, comme le montre l'analyse du cadre de la synthèse classico-keynésienne. Ou encore, c'est peut être que ce changement est dû à une croissance équilibrée, mais instable représentée, par la situation de l'économie sur « *le fil du rasoir* », cachant derrière lui un raisonnement abstrait en termes de déséquilibre et d'instabilité, comme le montre l'analyse du cadre de la synthèse post-keynésienne.<sup>36</sup>

Kim et Yoo (1995), ont proposé les modèles à facteur dynamique avec changements de régimes FDCR (*Factors Dynamics Changing Regims*), permettant de tenir compte de ces

---

<sup>35</sup> Samuelson (1939a-b), a proposé un modèle connu en économie sous le nom du «*Modèle d'oscillateur de Samuelson*», et qui combine l'effet d'accélérateur (générateur d'instabilité économique) et l'effet de multiplicateur (générateur de stabilité économique). Par ce schéma, ce modèle a permis de dynamiser le modèle statique keynésien, en introduisant un décalage temporel d'une période dans la fonction de consommation et en utilisant une fonction d'investissement basée sur le principe de l'accélérateur, selon les spécifications :

$$C_t = cY_{t-1} \text{ et } I_t = \tau(C_t - C_{t-1}).$$

<sup>36</sup> Dans ce cadre, l'analyse contemporaine de l'instabilité et des fluctuations, menée à nos jours, par les travaux de recherches dans le domaine de la modélisation non-linéaire de la dynamique macroéconomique, nous indique l'existence de deux visions symétriques mais complémentaires. Une première de l'école de la synthèse classico-keynésienne, relie le couple équilibre-stabilité, alors que la seconde des post-keynésiens, relie le couple déséquilibre-instabilité.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

caractéristiques du codépendance et comouvements<sup>37</sup> et ils présentent un intérêt particulier, dans l'explication du phénomène d'asymétrie des phases de hausse et de baisse des séries économiques. Les principaux résultats présentés permettent de souligner la présence des points de retournement de l'activité économique américaine, à partir desquels la dynamique de l'économie, change brutalement ou avec souplesse. Il s'agit d'un phénomène de changements de régimes. Or, d'un point de vue pratique, l'expérience de positionnement cyclique des économies menée par Anas et Ferrara (2007), montre que les erreurs de prévision commises par des conjoncturistes apparaissent, le plus fréquemment, lorsque les changements de régimes, de l'économie n'ont pas été correctement anticipés ou pris en compte. Donc, nous constatons qu'en présence de fluctuations économiques asymétriques et de changement de régimes, les prévisions sont imparfaites. Puisque les écarts entre les réalisations et les prévisions sont expliquées, en grande partie, par le fait que les erreurs de prévision ont été effectuées en considérant que l'économie devrait évoluer sur un sentier de croissance stable. Or, l'instabilité des structures endogènes fait que ces erreurs sont dépendantes dans le temps de façon correlative en série ou auto-correlative.

Cette remarque intéressante vient de consolider l'importance empirique, d'une théorie générale des cycles d'erreur, faisant intervenir l'effet Slutsky<sup>38</sup>, dans la mesure où il se produit, certes, des fluctuations récurrentes mais de manière aperiodique. Il convient de bien postuler que l'origine, la nature et les caractéristiques des fluctuations récurrentes, résultent de type de transformations pratiquées, dont le mécanisme d'ajustement, explicitement spécifié, retrace et commande le processus de changement de régimes. Ces transformations adoptées pour un processus d'ajustement, ayant pour objectif de représenter la structure de l'économie. Or, le problème de changement structurel, lié à l'évolution adaptative des structures économiques, ne peut pas être pleinement compris de façon systémique, s'il n'est pas situé dans son cadre réel, autorisant les interactions dynamiques endogènes. Par conséquent, les transformations résultant

---

<sup>37</sup> Le co-mouvement signifie que la plupart des séries macroéconomiques évoluent ensemble au cours d'un même cycle, avec un retard plus ou moins grand selon le type de séries considérées ce qui le montre Diebold et Rudebusch (1999).

<sup>38</sup> Slutsky (1929), a ainsi démontré que les cycles exogènes pouvaient être entièrement causés par un cumul d'événements aléatoires.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

de ces interactions, ainsi mentionnées, peuvent influencer les propriétés de la dynamique déterministe des modèles macroéconométriques non-linéaires comportant des changements de régimes. En ce sens, l'effet Slutsky montre le danger qu'il y a en prévision, à utiliser des méthodes économétriques, en négligeant l'analyse déterministe de la dynamique économique. Par conséquent, une certaine faiblesse des performances prévisionnelles des modèles linéaires, traditionnels, peut être accordée aux changements structurels endogènes, dans la tendance déterministe d'un processus. Ce domaine a attiré, depuis longtemps, l'intention de certains chercheurs qui ont consacré une grande part de leurs travaux de recherches, autour d'une problématique qui étudie les mécanismes sous-jacents, de la dynamique endogène, tel que par exemple Torre (1977), qui s'est intéressé à l'identification et au contrôle du phénomène de *cycle limite*. Par contre, Thom (1974) et Varian (1979), se sont intéressés à l'étude de la théorie de la catastrophe et des crises induites par la dynamique des fluctuations économiques. Toutefois, Thom (1991), a constaté que malgré la richesse de cette littérature traitant des sujets, en relation intime avec le thème général de dynamique économique, il nous paraît que les travaux de recherche, consacrés à la prévision dans ce domaine passionnant de recherche, restent, jusqu'à nos jours, un peu marginaux.

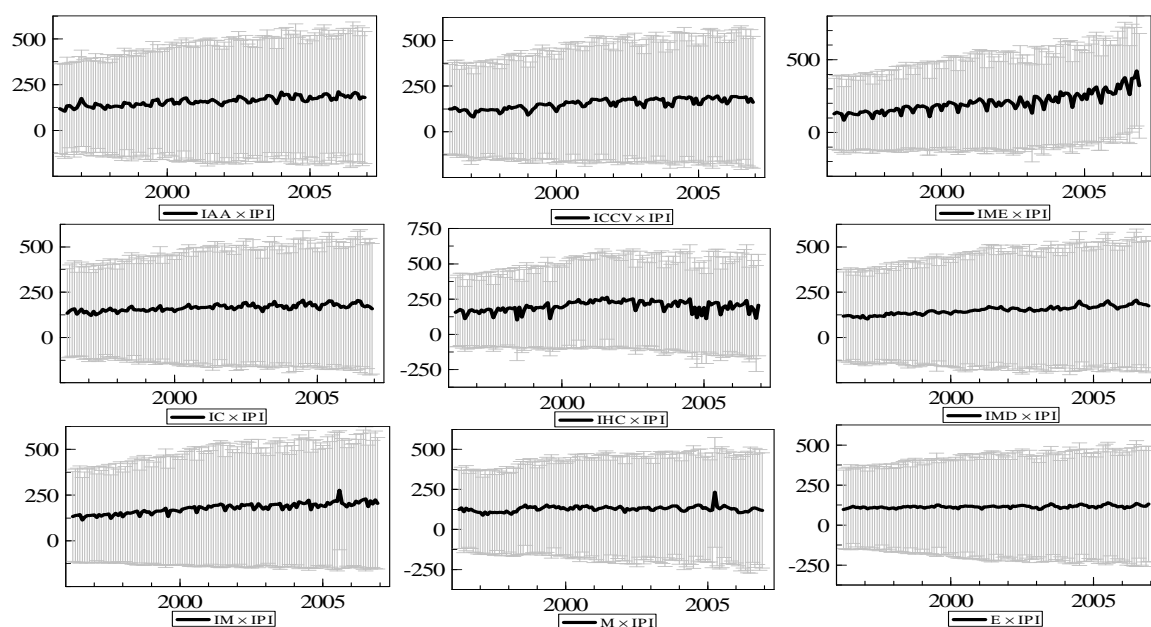


Figure 1.9 : Présence des fluctuations des séries et prévision imparfaite

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

La figure (1.9), illustre des cycles d'erreurs, des séries temporelles de la production industrielle, en Tunisie, issues de la présence des fluctuations récurrentes, induites par l'instabilité structurelle du secteur industriel et qui sont à l'origine des prévisions imparfaites. La présence d'une instabilité structurelle résulte de l'incapacité de la transformation, accordée au processus d'ajustement, de décrire fidèlement la structure de la dynamique déterministe des séries. Ceci se manifeste, pratiquement, par la présence de fluctuations de l'activité industrielle, en Tunisie. En conséquence, ceci nous amène à nous interroger sur la possibilité de maintenir un contrôle rationnel et adéquat de l'émergence des fluctuations cycliques industrielles.

À cet égard, nous pouvons comprendre, aisément, que la présence des fluctuations récurrentes asymétriques est une première indication, vers la présence des changements de régimes qui sont des synonymes d'un comportement de non-linéarité. Ceci signifie que la majorité des agrégats macroéconomiques sont marquées par des faits structurels, elles paraissent non-stationnaires et elles sont caractérisées par des ruptures de tendance déterministes. Ainsi, tout exercice de prévision peut devenir laborieux, car les prévisionnistes doivent tenir compte de la possibilité de changements de régimes endogènes, afin d'optimiser les erreurs de prévision.

Plusieurs travaux de recherche, tant théoriques qu'empiriques, ont essayé d'étudier le phénomène de la non-linéarité accompagné des changements de régimes de diverses manières. À l'issue de ce travail, deux pistes de recherche apparaissent, particulièrement, intéressantes. En premier lieu, un axe de recherche a attiré l'intention de certains économistes, vers la mise en évidence et l'explication de la non-linéarité. Ils partagent l'hypothèse dominante stipulant que la non-linéarité du modèle, provient du fait que les dates de ruptures sont supposées inconnues et estimées de manière endogène. Dans ce cadre, différentes hypothèses ont été avancées par Grandmont (1985a) et Drugeon (2000), pour expliquer le comportement non-linéaire des fluctuations économiques tel que : l'indétermination et l'endogénéité. D'après Boldrin et Montrucchio (1986), l'indétermination est due à la non-unicité de l'équilibre dynamique et de sa perte de stabilité locale, au profit de sa stabilité globale. Elle apporte un raisonnement flou, dont

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

un développement adéquat est nécessaire pour comprendre sa complexité<sup>39</sup>. Cloete (1990), soutient que l'endogénéité des fluctuations est le caractère autoentretenu de celles-ci. Il est, en général, exclus, dans un modèle où les fonctions, qui décrivent sa forme fonctionnelle, sont de type linéaire. Notons que toute tentative de mise en évidence, simultanément, de ces caractéristiques de non-linéarité, d'indétermination et d'endogénéité des fluctuations cycliques, touche en profondeur un problème du fond, de l'économie en mouvement, qui est le noyau dur de la dynamique économique et nécessite l'usage d'une confrontation multidisciplinaire, des diverses approches, ce qui dépasse le cadre initié pour cette première partie et fait l'objet de la deuxième partie de ce document.

En second lieu, l'existence d'une propriété d'asymétrie des fluctuations cycliques nécessite le rejet de l'hypothèse de relation linéaire et l'adoption de la non linéarité, comme hypothèse centrale, qui doit être soulignée comme illustrative, d'une propriété absolument dominante, des modèles non-linéaires avec changements de régimes. Cette explication est à l'origine de la naissance de l'idée, fréquemment partagée, par un autre groupe d'économistes, selon laquelle les phénomènes de cycles économiques sont caractérisés par des ruptures structurelles. D'où, l'apparition d'un deuxième axe de recherche, dont le principal objectif est dirigé vers la modélisation non linéaire, du cycle endogène, à l'aide des spécifications capables de prendre en compte l'existence de changements structurels non visibles, à l'œil nu avec les données étudiées. Franses et van Dijk (2000), ont réclamé que l'idée de base, selon cet axe de recherche, est de fournir des modèles qui reposent sur le fait que, les données sont localement linéaires avec des paramètres qui changent, suivant l'état de nature ou le régime, dans lequel il se trouve. Dans ce cadre, de nombreuses classes de modèles sont étendues et employées, en économétrie des modèles à changement de régimes, dont les plus connus sont les modèles à changement de régimes markoviens, avec probabilités de transition développés, suite aux travaux

---

<sup>39</sup> Ce problème de complexité sera résolu au niveau de la deuxième partie, en se référant à la théorie de bifurcation, qui nous permettons d'analyser qualitativement la nature du changement de comportement d'un système dynamique. La bifurcation est récemment adoptée pour étudier la complexité dynamique dans un modèle déterministe non-linéaire.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

de Hamilton (1989)<sup>40</sup>, et les modèles autorégressifs à seuils avec fonction de transition initiés, par les travaux de Tong (1990) et Luukkonen et Teräsvirta (1991).

Selon Clements et Krolzig (1998), les modèles inclus dans ces deux classes ont en commun la tendance de tenir compte, d'une part, de la non-linéarité en moyenne décrivant les processus des changements structurels, lors du passage de l'économie d'un régime, à un autre. C'est-à-dire, lorsqu'il y a un phénomène de transition cyclique d'un état d'expansion, à un état de dépression ou inversement. D'autre part, de satisfaire une certaine non-stationnarité en tendance déterministe, qui semble inhérente à chacune des séries considérées si sa moyenne varie au cours du temps. Dans cette situation, nous sommes en présence de série TS (*Trend stationary*), qui peut être rendue stationnaire, une fois sa tendance est filtrée après certaines différenciations. De ce fait, à quelques différences près définissant la manière, dont est été établi le lien, entre l'évolution de la dynamique d'une série étudiée et les différents états de natures ou régimes qui les caractérisent, ces deux classes de modèles se révèlent être deux cadres théoriques adéquats, pour décrire et prévoir les évolutions du cycle économique, à caractère non-linéaire et endogène. Ainsi, chacune de ces deux classes de modèles admet ses propres spécificités qui décrivent le mécanisme de transition spécifique, au processus du changement qui le caractérise et qui peut être considéré comme ingrédient de base, pour discriminer entre la possibilité privilégiée d'appliquer une modélisation, appartenant à l'une de ces deux classes.

La première classe de modèle, à changement de régime markovien, a la propriété de faire varier les paramètres des modèles linéaires, selon le régime et d'endogénéiser les changements de régimes, à l'aide d'un mécanisme de transition probabiliste (stochastique) et exogène régi par des processus de type chaîne de Markov cachée. Donc, dans les modèles markoviens, les changements de régimes ne sont pas déterministes et dépendent de la loi de probabilité de sa variable de transition inobservable. Par contre, la seconde classe de modèle autorégressif à seuil, a la propriété de varier, entre deux régimes de types linéaires, dont les paramètres diffèrent en

---

<sup>40</sup> Dans ce cadre, Medhioub (2007), a utilisé les modèles à changements de régimes Markoviens pour l'analyse du cycle industriel en Tunisie.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

fonction de la variable dépendante et d'une certaine valeur seuil et d'endogénéiser les changements de régimes, à l'aide d'un mécanisme déterministe décrit, par une fonction de transition endogène bien spécifiée. Lardic et Mignon (2002), ont réclamé que ce dernier groupe de modèles est particulièrement intéressant, dans la mesure où il permet, d'une part, de généraliser très facilement des distributions leptokurtiques de la variable dépendante étudiée. D'autre part, il est capable de modéliser une asymétrie d'amplitude (*deepness*), surtout pour un même choc endogène, lorsque les mécanismes de propagations diffèrent suivant les valeurs passées de la variable dépendante. C'est-à-dire, pour un choc structurel endogène, les propriétés dynamiques des fluctuations, ainsi générées, s'avèrent différentes, suivant les valeurs passées de la variable dépendante  $Y_{t-d}$ . En ce sens, Brock (1986), a donné la définition suivante :

**Définition 1.10**

*Une série de nombres réels  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  admet un comportement de lissage déterministe, s'il existe un système  $(f, Y_0)$  avec  $f: I \rightarrow I$  tel que pour  $Y_0 \in I \subset \mathfrak{R}$ , donnée :*

$$Y_t = f(Y_{t-1}, \mu) \quad t = 1, 2, \dots, T$$

*où  $f(\cdot)$  est une relation fonctionnelle quelconque de récurrence,  $Y_{t-1}$  est une variable et  $\mu$  est un paramètre de contrôle.*

Prochainement, dans la deuxième partie, nous nous intéresserons plus précisément, au comportement dynamique non-linéaire de long terme de la variable  $Y_{t-1}$ , c'est-à-dire pour une valeur initiale  $Y_0$ , nous allons étudier le comportement itératif de la suite de récurrence  $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$  à travers les fonctions itérées<sup>41</sup> de la fonction composée  $f(\cdot)$ . L'intérêt de ces fonctions itérées est d'assurer la construction des orbites associées, à chaque valeur initiale. Nous voyons donc, qu'étudier le comportement asymptotique des orbites se base sur les points critiques des itérés successifs. Ainsi, cette définition donne la forme fonctionnelle standard, définie à partir des équations, aux différences finies du premier ordre, pour toute fonction de transition de lissage que nous devons respecter.

---

<sup>41</sup> Nous pourrions construire plusieurs fonctions itérées à partir de la fonction composée  $f(\cdot)$ . Par exemple,  $Y_1 = f(Y_0, \mu), Y_2 = f^2(Y_0, \mu), \dots$

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Or, les résultats de cette étude démontrent l'inaptitude de la première classe des processus markovien à changement de régimes à modéliser les cycles endogènes, suite à son incapacité de rendre compte du principe de changement, par reconstitution des structures invariantes qui doit être accompagné, d'un mécanisme d'ajustement déterministe, décrit par une fonction de transition endogène, assurant le lissage, entre les différents états de natures ou régimes. En plus, étant donné la riche typologie du comportement d'asymétrie cyclique, qui peut toucher selon Uctum (2007), soit l'amplitude des fluctuations cycliques, lorsque les creux sont plus marqués que les pics, soit la pente de leurs tendances, lorsque les récessions sont plus rapides et abruptes que les expansions, soit encore les différentes courbures entre les pics et les creux. Alors, aucun ne peut douter qu'un cycle économique est non-linéaire et asymétrique. La présence d'asymétrie, dans les séries temporelles macroéconomiques, peut être considérée comme synonyme de dysfonctionnement systémique de l'économie, dont les origines peuvent dépendre de plusieurs problèmes, desquels souffre la théorie économique contemporaine<sup>42</sup>.

Teräsvirta et Anderson (1992), ont découvert d'une part, qu'il est impossible de générer le phénomène d'asymétries cycliques, des séries temporelles en utilisant des spécifications purement linéaires, univariées ou même multivariées, car ces dernières, sont uniquement utilisables, pour générer les réalisations avec des fluctuations cycliques, stables, et symétriques. D'autre part, la modélisation de l'asymétrie des cycles considérée, par la classe des modèles à changements de régimes markoviens, tient compte, seulement, d'une asymétrie au niveau du taux de croissance, ou de la composante stochastique. En conséquence, les modèles inclus dans cette classe ne peuvent, ni identifier la nature des expansions et des récessions, ni savoir si elles ont des effets transitoires ou permanents. Toutefois, les études ont montré la capacité des modèles autorégressifs à seuils, à étudier l'existence éventuelle des effets asymétriques des cycles économiques, pour la dynamique de la moyenne et la persistance des fluctuations cycliques, ce qui rend cette classe de modèle très connue, par son succès empirique à capturer la non linéarité

---

<sup>42</sup> Nous notons que la non-linéarité du cycle réel est un fait anciennement détecté dans les discussions de Mitchell (1927) et Keynes (1936), mais elle présente un problème dont souffre la théorie de modélisation économique contemporaine.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

due, à la présence des irrégularités reflétant la transition d'un état d'équilibre, à un autre, ainsi que les ruptures graduelles, atténuées par lissage dans les comportements dynamiques. Tous ces avantages ont contribué, par excellence, à accorder à cette classe du modèle, l'avantage non négligeable, afin de fournir un cadre privilégié à l'étude des changements de régimes au niveau de la moyenne, indiqué par des fluctuations cycliques asymétriques et de caractériser puis, de spécifier, explicitement, le mécanisme d'ajustement à des déséquilibres internes, marqués par les présences des ruptures structurelles et qui conditionnent le changement progressif et douce de l'état de la représentation.

À ce niveau, nous pouvons accepter la classe des modèles autorégressifs à seuils pour satisfaire, parfaitement, nos objectifs visés par cette recherche. D'abord, déterminer une meilleure caractérisation des fluctuations cycliques endogènes et analyser leurs dynamiques. Ensuite, comparer des méthodes déterministes et stochastiques de sélection des structures des modèles non-linéaires, en prédiction des séries temporelles. Sur le plan empirique, plusieurs modèles inclus dans cette classe, sont élaborés pour modéliser le mécanisme d'asymétrie et rendre compte du phénomène de non-linéarité et d'endogénéité des fluctuations cycliques. Afin de présenter une nouvelle modélisation capable de faire la description, fidèle le plus possible du mécanisme de génération des données, caractérisant des réalisations nonlinéaires et asymétriques inhérentes au cycle économique.

Dans la famille des modèles à changement de régime, nous avons retenu les modèles à seuil. Dans ce type de représentation, la dynamique du processus est distincte, suivant le régime auquel appartient la variable de transition. Le passage d'un régime à un autre s'effectue de manière endogène, en fonction d'une variable spécifique ou d'un processus déterministe. En ce sens, plusieurs types de spécification sont développés, afin de pouvoir modéliser ces situations. Tsay (1998), a montré la validité des modèles TAR (*Threshold AutoRegressive model*), pour modéliser l'asymétrie des fluctuations cycliques, dans une série temporelle qui dépend des valeurs de ces paramètres. Teräsvirta et Granger (1996) et Skalin et Teräsvirta (1998), ont proposé divers modifications du mécanisme de transition inhérent, du modèle simple STAR

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

(*Smooth Transition AutoRegressive model*), afin de capturer plusieurs types d'asymétrie, suite à l'effet de seuil dans la tendance de la série trimestrielle du chômage. Dans la littérature de la modélisation STAR, plusieurs modèles sont introduits, afin de capturer des phénomènes d'asymétries. En ce sens, Siliverstovs (2000), a proposé le modèle BSTAR (*Bi-parameter Smooth Transition Autoregressive*). En plus, Lundbergh, Teräsvirta et van Dijk (2003) et van Dijk, Strikholm et Teräsvirta (2003), ont proposé le modèle TV-STAR (*Time-Varying Smooth Transition AutoRegressive*), qui est une simple modification du modèle STAR, afin de modéliser l'impact de l'asymétrie des fluctuations cycliques, sur le changement saisonnier des séries de la production industrielle des pays de G7. D'autre part, des extensions diverses sont apparues, mais cette fois en finance. Par exemple, Engle (2002) et Tse et Tsui (2002), ont introduit le modèle DCC (*Dynamic Conditional Correlation*). De plus, Silvennoinen et Teräsvirta (2005), ont développé le modèle STCC-ARCH (*Smooth Transition Conditional Correlation Conditional Heteroskedastic*), afin de capturer, simultanément, l'asymétrie dans le niveau et le changement conditionnel de la variance.

Jusqu'à cette étape, l'utilisation des techniques exploratoires des graphiques et de statistiques descriptives conduit notre raisonnement, vers l'importance de considérer des changements structurels pour la partie déterministe du modèle. C'est-à-dire des ruptures endogènes dans le comportement dynamique de long terme, des séries temporelles étudiées de la production industrielle tunisienne. La justification de ceci provient de deux facteurs. En première raison, le changement structurel sur l'industrie tunisienne, provoqué par une modification radicale, depuis les mutations économiques associées à la politique de libéralisation économique en 1986. Le second, prend en compte l'interaction, entre défis stratégiques endogène et dépendances internes des dynamiques des variables sectorielles et locales. En particulier, ce scénario entraîne la dépendance des structures économiques, à travers la modération des chocs endogènes, par transition discrète ou graduelle. Nous sommes conscients que des changements structurels ont affecté l'activité industrielle, en Tunisie, et ont causé sa complexité technologique et économique. Pour approcher le fonctionnement complexe de l'industrie tunisienne, il faut, donc, chercher un cadre plus persistant, plus large et vraisemblablement plus flou.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Toutefois, avant d'adopter une méthodologie précise de modélisation à changement de régimes, appartenant à la classe des modèles autorégressifs à seuils, capable d'identifier le comportement d'asymétrie cyclique et de fournir une meilleure description des phases de récession et d'expansion de la production industrielle en Tunisie. Nous trouvons très intéressant de commencer, tout d'abord, par justification de la présence de changement, de structure (simple et multiple), à une date inconnue et d'estimation de la date de rupture avant de passer à une caractérisation des ruptures, en tendances déterministes, qui vont être ajustées dans le temps, à l'aide des fonctions de lissage, de manière à modéliser un changement structurel endogène. Or, le dilemme qui rend le diagnostic de prévision plus objectif, passe, essentiellement, par la caractérisation de la non-linéarité, en moyennes des séries étudiées. D'où l'idée d'introduire des tests économétriques, permettant de détecter la possibilité d'avoir des ruptures structurelles en tendances déterministes.

**1.3.1.2. Test de changement de structure avec rupture simple de  
Andrews et Ploberger (1994)**

➤ **Procédure du test**

Dans le cadre de modèle à seuil avec deux régimes, le processus  $Y_t$  peut être décrit par le modèle :

$$Y_t = \mu_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i} + [\mu_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i}] J_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t$  est un processus stationnaire de moyenne nulle et  $J_t$  est la fonction indicatrice vérifiant :

$$J_t = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{t-1} < c \\ 0 & \text{si } Y_{t-1} \geq c \end{cases}$$

où  $c$  est le paramètre de seuil fixé. Pour tester la présence d'un effet de seuil dans le modèle précédent, Andrews et Ploberger (1994), ont proposé un test de changement structurel, à date inconnue, dans une régression linéaire basée sur l'hypothèse suivante :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$\begin{cases} H_0 : \Psi^{(2)} = 0 & \text{et} & \mu_0^{(2)} = \psi_i^{(2)} \\ H_1 : \Psi^{(2)} \neq 0 & \text{ou} & \mu_0^{(2)} \neq \psi_i^{(2)} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle d'absence d'effet de seuil et pour le cas de processus stationnaires, Andrews et Ploberger (1994), ont proposé d'utiliser la moyenne exponentielle de la séquence des tests de Chow<sup>43</sup> qui s'écrit :

$$Exp - LM_T = (1+c)^{-p/2} \int \exp(1/2 (c/1+c) LM_T(\pi)) dJ(\pi)$$

où  $p$  est la dimension de  $\Psi$  et pour un seuil où  $c$  fixé,  $J(\cdot)$  est la fonction indicatrice de valeur  $\pi \in [\pi_0, 1-\pi_0]$ ,  $\pi_0 > 0$ . Les  $p$ -values sont des approximations de Hansen (1997b). Le test au sens de Quandt (1983), utilise la statistique de Chow, sur toutes les dates de ruptures possibles. Le changement de structure et l'estimation de la date de rupture sont identifiés simultanément, mais les valeurs critiques n'ont été simulées, qu'en 1993, par Andrews (1993), ainsi le test au sens de Andrews-Quandt utilise la statistique LM maximum.

➤ **Analyse et résultat du test**

Cette analyse à partir du test de changement de structure unique à date inconnue, au sens de Quandt-Anderws et Andrews-Ploberger (1994), a conduit aux résultats enregistrés dans le tableau (1.5). Les résultats ainsi obtenus justifient bien la possibilité de présence de ruptures simples, dans la régression linéaire. Nous constatons, donc, par cette approche que l'on peut avoir une première idée, sur la non-linéarité des dynamiques des séries de la production industrielle tunisienne.

---

<sup>43</sup> Andrews et Ploberger (1994) ont noté que l'estimation de la date de rupture est de bonne qualité dans le cas d'un modèle linéaire lorsque le test de Chow est construit sous l'hypothèse d'homoscédasticité de la variance covariance.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

**Tableau 1.5: Résultats du Test de Andrews-Quandt et de Andrews et Ploberger (1994)**

Variables	Andrews-Quandt			Date	Andrews-Ploberger		
	t-statistique	p-value	$\lambda$		t-statistique	p-value	$\lambda$
IPI	0.707511	1.000000		2004:01	0.067002	1.000000	
IAA	2.542145	0.654697		2005:01	0.216741	0.766419	
ICCV	0.467906	1.000000		1999:01	0.049804	1.000000	
IME	0.264904	1.000000		1998:09	0.017882	1.000000	
IC	4.940092 <sup>**</sup>	0.253669	1.08	2005:03	0.491726	0.447319	
IHC	1.970609	0.793018		2004:10	0.640856	0.345451	
IMD	5.596211 <sup>**</sup>	0.191616	1.27	1999:02	1.234186	0.140842	
IM	0.900717	1.000000		2004:01	0.109272	1.000000	
M	14.139637 <sup>*</sup>	0.003761	1.49	2003:01	4.947101 <sup>*</sup>	0.000506	1.49
E	4.126809	0.355738		2002:03	0.886359	0.233267	

Les valeurs critiques pour p=1							
$\pi_0$	$\lambda$	Andrews-Quandt			Andrews-Ploberger		
		10%	5%	1%	10%	5%	1%
.50	1.00	2.71	3.84	6.63	1.38	1.97	3.39
.49	1.08	3.47	4.73	7.82	1.40	1.98	3.40
.48	1.17	3.79	5.10	8.26	1.40	1.99	3.42
.47	1.27	4.02	5.38	8.65	1.41	2.00	3.37
.45	1.49	4.38	5.91	9.00	1.41	2.00	3.39

<sup>\*</sup>, <sup>\*\*</sup> et <sup>\*\*\*</sup> indiquent un rejet de l'hypothèse d'absence d'un effet de seuil dans la régression linéaire au seuil de 10 %, 5 % et 1 % respectivement. Les valeurs critiques du test de Andrews et Quandt sont tabulées dans Andrews (1993, p. 840) et les valeurs critiques du test de Andrews et Ploberger sont tabulées dans Andrews et Ploberger (1994, p. 1399-1402).

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Maintenant, nous allons élargir notre champ d'investigation, au cas de ruptures multiples, en nombre inconnu, qui caractérisent la dynamique de chaque série de la production industrielle tunisienne. Pour ce faire, nous allons élaborer le test de changement de structure multiple au sens de Bai et Perron (2003a).

### 1.3.1.3. Test de tendances déterministes avec ruptures multiples de Bai et Perron (2003a)

#### ➤ Procédure du test

La méthodologie de Bai et Perron (2003a), admet comme avantage de prendre en compte le modèle à ruptures structurelles multiples suivant, avec  $k$  ruptures et  $(k + 1)$  régimes :



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \check{Y}_t' \check{\beta} + \widehat{Y}_t' \widehat{\beta}_1 + \varepsilon_t, & t = 1, 2, \dots, T_1 \\
 Y_t &= \check{Y}_t' \check{\beta} + \widehat{Y}_t' \widehat{\beta}_2 + \varepsilon_t, & t = T_1 + 1, T_1 + 2, \dots, T_2 \\
 &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 Y_t &= \check{Y}_t' \check{\beta} + \widehat{Y}_t' \widehat{\beta}_{k+1} + \varepsilon_t, & t = T_k, T_k + 2, \dots, T
 \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_t$  représente un bruit blanc non corrélé ;  $Y_t$  est la variable dépendante, observée à la date  $t$  et disponible en taille  $T$  ;  $\check{Y}_t$  est  $p \times 1$  et  $\widehat{Y}_t$  est  $q \times 1$  ; et  $\check{\beta}$  et  $\widehat{\beta}_i$  ( $i = 1, \dots, k + 1$ ) sont les vecteurs de coefficients correspondants.

Le test de changements de structures multiples, au sens de Bai et Perron (2003a), considère que les points de ruptures ( $T_1, T_2, \dots, T_k$ ) sont tous inconnus, et par la suite, ils sont estimés, simultanément, avec les coefficients avec la taille  $T$ . Notons bien que le changement structurel traité par cette procédure de test, est un changement structurel partiel. C'est-à-dire une partie seulement des paramètres n'est pas constante, au cours du temps, dans la mesure où  $\check{\beta}$  ne change pas, et est effectivement estimé sur  $T$ . Alors que pour  $\check{\beta}$  nulle, le changement structurel est pur, puisque, dans cette situation, tous les paramètres sont modifiés. Or, rappelons-nous que dans le cadre de notre recherche, la rupture touche uniquement la moyenne (*mean-shift model*), du modèle. Cette situation sera couverte par la méthodologie de Bai et Perron (2003a), au niveau d'un modèle avec  $k$  ruptures comme suit :

$$Y_t = \mu_i + \varepsilon_t, \quad t = T_{i-1} + 1, \dots, T_k$$

où  $\mu_i$  est la moyenne vérifiant  $\mu_i \neq \mu_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, k + 1$ ,  $T_0 = 0$  et  $T_{k+1} = T$ .

Les dates de ruptures sont traitées comme inconnues et elles nécessitent une estimation. La procédure d'estimation, fondée sur les moindres carrés ordinaires, ainsi proposée, est détaillée par Bai et Perron (1998), puis dans Bai et Perron (2003b). Cette technique d'estimation consiste dans la résolution d'un programme d'optimisation utile, pour l'évaluation des coefficients  $\mu_i$  en minimisant la somme des résidus, selon la formule suivante :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_j} (Y_t - \mu_i)^2$$

Si nous supposons que le nombre de rupture est connu<sup>44</sup>, par exemple pour  $k = 4$ , soient  $S_T(T_1, T_2, T_3, T_4)$  les sommes des carrés des résidus pour toutes partitions  $T_i = [Tb_i]_{i=1,2,3,4}$  de tailles  $(T_1, T_2, T_3, T_4)$ . Les dates de ruptures  $(Tb_1, Tb_2, Tb_3, Tb_4)$  sont estimées, en minimisant,  $S_T(T_1, T_2, T_3, T_4)$  pour toutes les partitions. En ce sens, Bai et Perron (2003a), ont développé un algorithme à la base de la programmation dynamique, capable d'estimer les paramètres inconnus, de toutes partitions ayant comme forme :

$$(\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3, \hat{T}_4) = \arg \min_{T_1, T_2, \dots, T_k} S_T(T_1, T_2, T_3, T_4)$$

Lorsque les dates de ruptures sont inconnues, Bai et Perron (1998), ont proposé une approche séquentielle pour le déterminer. Cette procédure consiste à tester, en premier lieu, la présence d'une rupture simple contre l'hypothèse de stabilité. Si l'hypothèse alternative de stabilité est rejetée, le modèle est instable. Dès lors, nous devons suivre une démarche séquentielle en augmentant le nombre de ruptures pas à pas. Tout d'abord, nous testons deux ruptures contre l'hypothèse nulle d'une seule rupture et ainsi de suite la procédure est répétée, dans l'ordre croissant de  $k$  et elle est stoppée, dès qu'il sera impossible de rejeter l'hypothèse de stabilité, sachant  $k$  ruptures possibles. À la différence, si cette procédure nécessite l'identification des points de rupture, selon une démarche étape par étape, Bai (1999) et Bai et Perron (2003a), ont développé une seconde version basée sur la détermination simultanée, des point de rupture, où il est nécessaire de calculer la statistique de Fisher  $F_T$ , pour les différentes valeurs estimées  $(\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_k)$ , et de retenir celles qui maximisent la valeur de  $F_T$ . C'est-à-dire, nous devons retenir les dates qui minimisent  $S_T(\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_k)$ . La statistique du test ainsi défini, est noté «  $SupF_T$  » défini par :

---

<sup>44</sup> Lorsque le nombre de rupture est supposé inconnu, ce nombre doit être estimé à l'avance. Noter bien que nous pouvons choisir arbitrairement un nombre de ruptures endogènes dépassant quatre dont nous pouvons identifier leurs dates correspondantes selon la procédure de Bai et Perron (2003a).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

$$Sup F_T(k, q) = \underset{Tb_1, Tb_2, \dots, Tb_k}{Sup} F_T(Tb_1, Tb_2, \dots, Tb_k)$$

Cette statistique est distribuée selon une loi complexe, tablée par Bai et Perron (1998). Notons que Kim et Yoo (1997), ont développé une autre approche, plus simple, de la détermination du nombre de rupture fondée sur le critère d'information BIC « *Bayesian Information Criterion* », défini par :

$$BIC = \log\left(\frac{SSR}{T}\right) + \frac{\log(T)}{T} [(k+1)q + k + p]$$

La règle de décision consiste à estimer le modèle pour l'ensemble de rupture de dates de rupture possibles, puis à choisir le modèle dont le critère BIC est minimal.

➤ **Analyse et résultat du test**

Notons que malgré l'importance de la méthodologie de Bai et Perron (2003a), toutefois, elle admet comme principale limite la détermination arbitraire de nombre des ruptures structurelles qu'elle cherche à identifier. Par exemple, si nous cherchons à identifier les dates des meilleures quatre ruptures possibles, alors les dates résultats du test de Bai et Perron (2003a), sont illustrées selon le tableau (1.6) comme suit :

<b>Tableau 1.6: Résultats du Test de Bai et Perron (2003a)</b>			
<b>Variables</b>	<b>Best 4 breakpoints</b>	<b>Sum of Squared Residuals Achieved</b>	<b>BIC</b>
<b>IPI</b>	1998:02//2000:02//2004:02//2006:04	8076.89244	4.52380
<b>IAA</b>	1996:11//1997:01//1999:06//2003:11	16726.83690	5.25180
<b>ICCV</b>	2000:01//2003:02//2003:10//2004:03	18714.10858	5.36407
<b>IME</b>	1999:08//2004:02//2006:02//2006:09	85324.20527	6.88125
<b>IC</b>	1997:06//2000:04//2004:04//2004:11	13744.02806	5.05539
<b>IHC</b>	1999:06//1999:08//2004:07//2006:07	65097.11882	6.61067
<b>IMD</b>	1997:09//1999:01//2003:05//2004:04	5495.21387	4.13867
<b>IM</b>	1998:02//2000:01//2003:12//2006:02	15730.16389	5.19037
<b>M</b>	1996:10//1998:04//2002:01//2002:08	7752.02823	4.48274
<b>E</b>	1998:04//2003:01//2003:03//2006:10	4096.50399	3.84492

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 5 %. La règle de décision est si la valeur de  $t_\alpha$  est inférieure à la valeur critique, l'hypothèse nulle de non stationnarité est rejetée ; si la valeur de  $t_\alpha$  est supérieure, l'hypothèse nulle est acceptée. Les sommes des carrées des résidus sont obtenues selon un algorithme après minimisation de la t-statistique associée à la variable endogène retardée d'une seule période. Les valeurs critiques sont tablées dans Bai et Perron (2003a-b). BIC est le critère de sélection adopté.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Les résultats ainsi obtenus confirment bien, la possibilité de présence de ruptures multiples endogènes, qui caractérisent la dynamique de chaque série de la production industrielle tunisienne. Nous pouvons choisir, arbitrairement, un nombre de ruptures endogènes, dépassant quatre, dont nous pouvons identifier leurs dates correspondantes, selon la procédure de Bai et Perron (2003a).

Compte tenu de nos déductions préliminaires à propos des résultats précédemment élaborés, il nous paraît intéressant de valider la stationnarité des séries de la production industrielle tunisienne, en présence de tendances déterministes. Dans la suite de la prochaine sous-section, nous tentons d'examiner le rapport entre racines unitaires et ruptures structurelles à des dates de ruptures endogènes où le nombre de ruptures est inconnu. Nous attendons que les tests économétriques récents et les procédures, que nous allons mettre en œuvre, au fur et à mesure, dans l'analyse des fluctuations des variables de la production industrielle tunisienne, serviront pour nous conduire à explorer, successivement, trois dimensions, à la fois, essentielles à l'hypothèse de la non-linéarité et intéressantes à l'identification du mode d'ajustement dynamique, de l'industrie à des chocs structurels endogènes. Premièrement, l'usage des tests de racine unitaire, avec des ruptures structurelles endogènes simples et multiples, ouvre l'horizon d'abord sur l'identification d'un phénomène de variation de moyenne au cours du temps, comme sur l'importance de la prise en compte des ruptures endogènes en tendances déterministes, dans la dynamique des séries disponibles en vue de concevoir la pertinence des modèles de non-stationnarité déterministe pour la présente étude. Deuxièmement, la détection de ruptures simples et/ou multiples dans la dynamique des variables, de la production industrielle tunisienne, est indispensable à l'analyse de la nature des fluctuations endogènes, de types cycliques autoentretenues et/ou de types complexes erratiques. En particulier, en cas de découverte d'une multiplicité de chocs structurels, ceci nous laisse penser que les variables sont dotées des structures endogènes instables. Troisièmement, si les résultats, obtenus à partir des tests économétriques, font apparaître des déductions contradictoires, alors une façon de contourner les oppositions obtenues, consiste à refocaliser l'analyse sur la mesure de la persistance des chocs structurels endogènes. Dès lors, il est important pour le cadre de notre analyse de valider, au

moyen des tests statistiques disponibles, si les dynamiques des séries de la production industrielle tunisienne présentent ou non, des changements endogènes de structures, en présence de tendances déterministes avec ruptures endogènes. Ceci n'est réalisable que par le traitement empirique adéquat, fondé sur les procédures, les plus récentes, des tests de racines unitaires, contre l'alternatif d'une stationnarité, avec rupture structurelle endogène en tendance déterministe.

### **1.3.2. Tests de racine unitaire contre stationnarité avec ruptures structurelles endogènes de tendances déterministes**

Il est bien entendu que l'analyse prévisionnelle de séries temporelles s'appuie sur l'hypothèse de stationnarité. Mais, en absence de la stationnarité, il vient qu'une série temporelle admet une racine unitaire suit un processus stochastique. Toutefois, au lieu de partager l'idée largement dominée en modélisation classique, selon laquelle la non-stationnarité d'une série temporelle résulte fondamentalement, de la présence d'une marche aléatoire, caractérisant sa tendance stochastique, à l'instar de Goldstein (1997), nous défendons, ici, une conception pertinente de la présence des ruptures structurelles, en tendances déterministes, qui font qu'une série est de non-stationnarité déterministe TS (*Trend stationary*), lorsque sa moyenne varie au cours du temps. Car, en présence d'une tendance purement stochastique la variance d'une série, de non-stationnarité stochastique DS (*Difference Stationary*), varie au cours du temps, parce que d'une part, les fluctuations ne peuvent résulter que d'un choc exogène et, d'autre part, l'effet d'un choc très éloigné ne s'estompe pas graduellement, puisqu'il sera considéré comme permanent, pour que la série étudiée se comporte d'une manière non-stationnaire. Or, le plus important de cette idée est de laisser penser que l'économie est soumise, constamment, à des chocs exogènes, pour garantir l'existence d'une tendance stochastique. Mais, dans ce cas, la possibilité de maintenir une certaine durabilité illimitée des chocs exogènes reste une condition très rare, difficilement réalisable en réalité.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Par contre, le retour à l'histoire des fluctuations macroéconomiques illustre que les fluctuations conjoncturelles sont de natures transitoires, autour d'une tendance plus ou moins stable. Sans aucune difficulté, ceci prouve l'ironie de la possibilité de maintenir continûment les impulsions exogènes qui ne peuvent frapper l'économie que rarement, d'une manière occasionnelle. De ce fait, sans nier la sensibilité de l'économie vis-à-vis les perturbations de son milieu extérieur, avant de réfléchir à chercher une datation pour les ruptures structurelles, il est raisonnablement logique de penser, donc, qu'un choc exogène, malgré son existence il n'a qu'un effet transitoire (série stationnaire) et ne peut pas être à l'origine de l'explication de la présence de fluctuations cycliques durables autoentretenuës. Car, sinon il y'aura une contradiction avec l'hypothèse de stationnarité. Pour réduire ce conflit, il est commode de penser que la non-stationnarité des séries, n'est pas nécessairement générée, par une tendance stochastique, mais plutôt par une tendance déterministe avec des ruptures structurelles. En effet, en présence d'une tendance déterministe coudée, la moyenne de la série dépend du temps<sup>45</sup>, augmente au rythme quelques fois supérieur et quelques fois inférieur, selon les valeurs prises par la série. Cette répartition, non équitable, de part et d'autre de la moyenne, justifie la présence des fluctuations asymétriques autour de la vraie valeur de celle-ci. En plus, ceci ne peut être couvert, qu'après un rejet de l'hypothèse de stabilité fondatrice de la modélisation linéaire. Or, selon Kim et Nelson (1999b), Stock et Watson (1996) et Clements et Hendry (1999), l'adoption de l'hypothèse alternative d'instabilité endogène, nécessite de supposer que les valeurs de certains paramètres se modifient, au cours du temps de manière continue ou discrète, ce qui renvoie à se pencher, directement, vers un cadre d'analyse concentré sur la classe des modèles non-linéaires en moyenne et plus précisément, vers les modèles à changement de régimes.

En outre, Lardic et Mignon (2002), ont déclaré que la principale limite, qui découle de l'oubli de prendre en considération la composante déterministe comme siège, dans lequel le

---

<sup>45</sup> Pour garantir que la non-stationnarité ne touche que la moyenne d'une série avec ruptures endogènes de tendance déterministe, nous supposons que la variance ne dépend pas du temps et que les autocorrélations tendent vers zéro à mesure que le délai augmente. En effet, d'une part l'estimation de modèles avec des données non-stationnaires peut occasionner de graves problèmes d'estimation. D'autre part, le mal identification de la source réelle cause de la non-stationnarité (moyenne, variance, autocorrélations) et de sa nature (tendance déterministe, tendance stochastique) peut influencer défavorablement la procédure du choix de la classe de modèle à manipuler.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

changement de structure, notamment, endogène a eu lieu caractérisant le processus générateur de données, réside dans le fait qu'on risque de se tromper, lors de l'interprétation du mécanisme inhérent de la dynamique de structures endogènes des données, qui est à la base de la tâche de sélection du processus générateur des données ainsi étudiées. Dès lors, comme le déclarent Rappoport et Richelin (1989), le majeur problème, dont souffrent les tests de changements de structures, réside dans le fait que ces tâches malgré leurs importances décisives, ils dépendent de la classification par ordre d'intégration des séries chronologiques. C'est-à-dire que si des séries stationnaires, avec changements de structures, sont mal classifiées, comme intégrées d'ordre un ou deux, alors, ceci peut être à l'origine de plusieurs lacunes, qui menacent la fiabilité des inférences et surtout l'analyse prévisionnelle. Puisque le majeur inconvénient de ceci, c'est que l'omission de la tendance déterministe se manifeste, pour les tests de changements de structures, notamment, endogènes, par des risques de se tromper en erreurs, qui peuvent, par la suite, donner des résultats tout à fait étonnants du fait que, sous l'hypothèse nulle la statistique du test sera distribuée, suivant une loi asymptotiquement normale centrée réduite, dont les valeurs sont plus faibles en valeurs absolues, que les valeurs critiques issues de la même distribution, mais, dans les conditions normales (c'est-à-dire lorsque la tendance déterministe est prise en considération). En plus, Hansen (1996a), a déclaré, qu'à côté de la perte possible de la puissance du test de stationnarité, en présence de changements de structures, notamment, endogènes. Une autre lacune qui s'ajoute et qui a comme conséquence le risque de tomber, dans une interprétation statique et imprécise du mécanisme générateur de données, et de même, l'inférence statistique du phénomène, ainsi étudié, sera fallacieux. Si, la non prise en considération d'une tendance déterministe d'une part, néglige totalement l'endogénéité des chocs structurels et d'autre part, les ruptures peuvent être interprétées comme ruptures exogènes, ce qui n'a aucun sens de cohérence avec la thèse défendue par le raisonnement à la base de la théorie de cycle endogène. En ce sens, l'examen graphique de l'évolution dynamique des séries de la production industrielle, en Tunisie, portées sur la figure (1.10), confirme bien visuellement, pour le moment, la présence de tendance déterministe coudée, pour chacune de ces séries.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

## Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12

Tendance déterministe avec lissage de Hodrick et Prescott (1990)  $\lambda=1600$

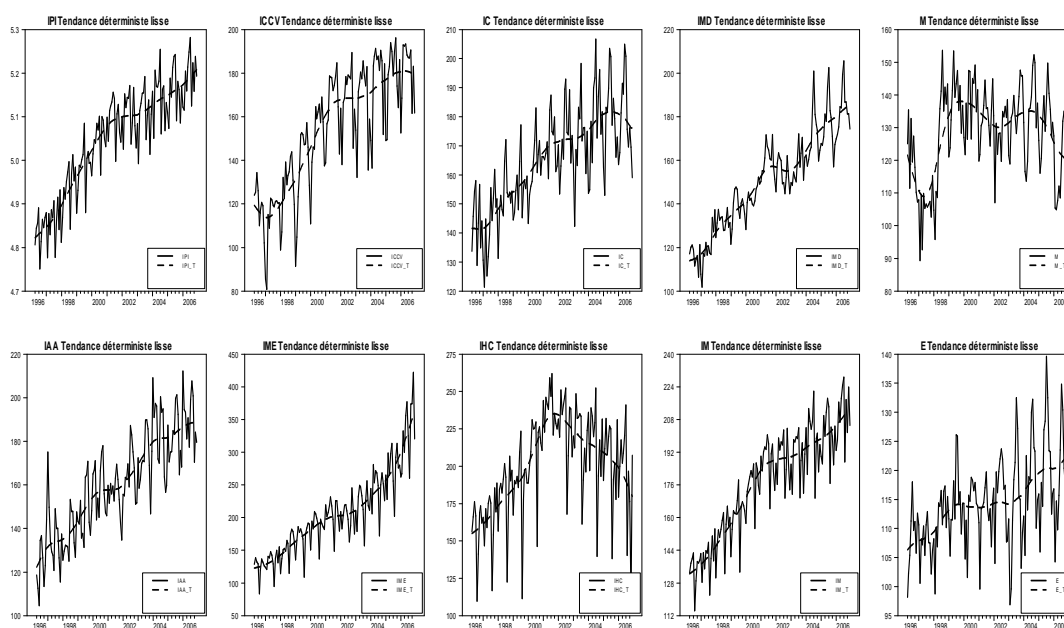


Figure 1.10: Présence d'une tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne

Ainsi, nous sentirons l'importance de ne pas omettre la tendance déterministe brisée, lorsque nous souhaitons établir les tests de changements de structures endogènes. De cela, nous pouvons, facilement, dériver l'intuition de ce résultat, en testant la validité de cette hypothèse. Dans le cadre de notre étude, afin de prendre en compte le phénomène de changement de structure du processus, nous admettons l'hypothèse de non-linéarité, qui se manifeste dans la partie déterministe, à cause de la présence des ruptures endogènes et implique la non-constance de la moyenne du processus. C'est-à-dire, il y'aura des changements de son niveau. En ce sens, la prise en considération des ruptures endogènes est justifiée par deux arguments. La première raison, c'est qu'il permet de mieux caractériser le changement de régimes à base fréquence. La seconde raison, c'est qu'il permet de minimiser le risque de découvrir des effets de seuils fallacieux.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Sur le plan concret, le changement structurel endogène industriel en Tunisie, provient de deux facteurs : le premier ingrédient résulte d'une transition économique, provoquée par un changement radical, suite aux réformes structurelles,<sup>46</sup> qui touche notamment en profondeur l'industrie, dont y engagée la Tunisie, depuis 1987. Le deuxième ingrédient résulte d'un processus d'ajustement graduel, à la suite de la prise en compte des interactions, entre la stratégie économique visant, l'encouragement de l'investissement industriel et les préférences décisionnelles, des entités productrices, par la création des petites et moyennes entreprises, surtout dans le domaine de l'industrie. C'est-à-dire, la prise en compte par les décideurs d'appliquer des politiques stratégiques d'ajustements et de stabilisations à des déséquilibres industriels internes, dynamiquement instables, ayant pour objet, surtout, la favorisation des exportations, l'amélioration, tant qualitatif que quantitatif, de la productivité industrielle et la relance de la consommation intérieure, tout en encourageant la création des entités productrices et l'investissement en industrie. Ainsi, les acteurs en industrie ne cachent plus leurs inquiétudes, envers l'imprévisibilité de ces fluctuations endogènes, enracinées sur la dynamique de l'industrie.

Avant d'élaborer une analyse détaillée, il faut noter que la littérature de stationnarité des séries temporelles est riche par les tests de racine unitaire, avec rupture structurelle en tendance déterministe. De plus, les tests de racine unitaire, avec rupture structurelle en tendance déterministe, peuvent être classés en deux groupes, selon que la rupture est de nature exogène ou endogène. Dans le premier groupe, plusieurs tests de racine unitaire, avec un changement structurel en tendance déterministe connu, où la rupture est introduite de manière exogène, sont fondés, tels que par exemples, le test de Amsler et Lee (1995) ; le test de Perron (1989) et le test de stationnarité avec ruptures multiple de Lee (1996). Dans ce cas, le changement de régime est

---

<sup>46</sup> À la suite de la poursuite d'une politique de modernisation visant en particulier à redynamiser le secteur industriel, qui s'est déclenchée par l'accord d'association du 17 juillet 1995 de la Tunisie avec les membres de la zone de libre échange, visant un démantèlement tarifaire douanier progressif des produits industriels, et qui se continue par l'adoption d'un plan d'ajustement structurel en 1987, autorisant la libéralisation des prix ; la libéralisation du commerce extérieur ; la réforme du système bancaire et financier...En particulier, tous ces réformes ont pour objectif d'encourager l'investissement industriel en relançant la production et favorisant l'exportation ce qui permet sans doute la transition de l'industrie tunisienne. Pour plus d'information, nous conseillons l'intéressé de visiter le rapport du SENAT (2003) : « *Accord sur l'investissement entre la république française et la république tunisienne* », site internet : [www.senat.fr](http://www.senat.fr).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

exogène et la rupture structurelle ne pourra pas se reproduire, et en conséquence, les prévisions ne prennent pas en compte d'autres changements. Par contre, dans le deuxième groupe, la rupture structurelle en tendance déterministe est introduite, de manière endogène et traitée comme dépendante des données. C'est-à-dire, aléatoire et inconnue, en conséquence, le point de changement est estimé au lieu d'être fixé. Dans ce cadre, plusieurs tests économétriques sont élaborés, tels que le test de Bai et Perron (1998) ; le test de Zivot et Andrews (1992) et le test de Lee et Strazicich (1999b).

Concernant cette deuxième classe de tests de stationnarité, en présence de changement de structure endogène, les auteurs ont montré que les tests existants avec un changement structurel exogène, peuvent mener à des rejets fallacieux de l'hypothèse de racine unitaire. À une différence près dans les formulations des procédures des tests, sous l'hypothèse nulle la série est considérée intégrée, privée d'un changement structurel exogène, et que la rupture structurelle endogène se produit. Alors, que sous l'hypothèse alternative, la série est supposée stationnaire en tendance, avec la possibilité d'une rupture endogène, dans la fonction de tendance, mais à une date inconnue.

Les simulations numériques de la dynamique des fluctuations endogènes des séries de la production industrielle tunisienne, justifie que ces séries peuvent y intégrer un ou plusieurs changement(s) de structure(s). Afin de pouvoir prendre en considération la présence de ce changement structurel endogène, dérive des transitions des états de nature du processus générateur de données. Nous allons effectuer les tests économétriques d'identification empirique des changements de structures par des chocs structurels endogènes suivants : test de Perron et Vogelsang (1992) ; test de Perron (1997) ; test de Zivot et Andrews (1992) ; Lee et Strazicich (2001) ; Lumsdaine et Papell (1997) et Lee et Strazicich (2003). Dans la démarche que nous allons suivre, tout au long de l'exposition de ces tests économétriques, consiste à commencer tout d'abord, par les tests qui ne font intervenir qu'une seule rupture endogène possible, tel que par exemples, le test de Perron et Vogelsang (1992) ; le test de Perron (1997) ; le test de Zivot et Andrews (1992) et le test de Lee et Strazicich (1999b). Ensuite, nous étalerons la démarche pour

des tests qui peuvent y intégrer, plus qu'une seule rupture endogène, par exemples, le test de Lumsdaine et Papell (1997), et le test de Lee et Strazicich (2003). Pour cela nous allons, donc, commencer par le test de changement de structure, au sens de Perron et Vogelsang (1992).

### ***1.3.2.1. Test de Perron et Vogelsang (1992)***

#### **➤ Procédure du test**

Perron et Vogelsang (1992), ont proposé un test qui reconnaît le fait, qu'un seul point de rupture endogène est dépend de données. Pour identifier ce changement de structure endogène, la procédure de Perron et Vogelsang (1992), prend en compte de l'endogénéité de la date de rupture et cherche, simultanément, à estimer et à sélectionner le point de brisure, qui consiste à optimiser la t-statistique du coefficient du changement de tendance (la variable muette)<sup>47</sup>. Les auteurs ont envisagé quatre cas, qui se diffèrent selon le critère d'optimisation. C'est-à-dire, selon que les données sont détrendées ou non, avant la réalisation du test de stationnarité. Les procédures nécessitant un filtrage sont appelées AO (*Additive Outlier*) et celles qui détrendent et réalisent le test simultanément sont dites IO (*Innovational Outlier*). Ces procédures sont indiquées par les modèles suivants:

Modèle (1): un changement endogène de moyenne des données sans tendance ;

Modèle (2): un changement endogène de niveau des données sans tendance ;

Modèle (3): un changement endogène de niveau et de pente de la tendance ;

Modèle (4): un changement endogène de la pente de la tendance avec une absence de discontinuité intervenant, à la date de rupture.

#### **➤ Analyse et résultat du test**

Puisque la date de rupture est inconnue, dans ce type de test de changement endogène de structure, alors, afin d'estimer la meilleure date du choc structurel endogène, et simultanément de conserver le caractère "*lisse*", nous allons tester le dernier modèle (4). Selon ce test, la date de rupture est prise comme une variable aléatoire inconnue, dont la valeur est déterminée, à l'aide

---

<sup>47</sup> Selon cette procédure de test, il est commode de supposer a priori l'hypothèse faible impliquant que le signe du changement de trend déterministe est connu, alors que sa position dans le temps reste inconnue.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

d'un algorithme décrit par les auteurs. Les résultats du test correspondants au modèle (4) précédent sont tablés comme suit<sup>48</sup>:

**Tableau 1.7: Résultats du Test de Perron et Vogelsang (1992)**

Variables	Best 1 breakpoints	Sum of Squared Residuals Achived	BIC
IPI	2000:08	12261.50354	4.71382*
IAA	2003:11	21068.07383	5.25511*
ICCV	2001:01	23909.96557	5.38165*
IME	2004:08	130858.41499	7.08147*
IC	2000:04	16704.96485	5.03180*
IHC	1999:08	92855.43430	6.73839*
IMD	2003:05	7335.86469	4.20013*
IM	2000:08	23677.81385	5.37189*
M	1998:04	10986.15988	4.60399*
E	2004:02	4796.46749	3.77523*

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 5 %. La règle de décision est si la valeur de  $t_\alpha$  est inférieure à la valeur critique, l'hypothèse nulle de non stationnarité est rejetée ; si la valeur de  $t_\alpha$  est supérieure, l'hypothèse nulle est acceptée. Les sommes des carrées des résidus sont obtenues selon un algorithme après minimisation de la t-statistique associée à la variable endogène retardée d'une seule période. Les valeurs critiques sont tablés dans Perron et Vogelsang (1992). BIC est le critère d'information Schwartz Bayésien adopté pour sélectionner le nombre optimal des retards.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Ainsi, l'hypothèse de présence d'une racine unitaire est largement rejetée, au seuil statistique 5%, confirmant le possible retour dynamique à la moyenne, et même vers une tendance déterministe coude. Or, malgré l'importance de ce résultat, elle reste restrictive et ne satisfait pas complètement le but visé par ce cadre d'analyse, du fait qu'elle se limite à la prise en compte que d'une seule rupture endogène. Donc, pour notre cas, selon le test de changement de structure endogène, au sens de Perron et Vogelsang (1992), nous admettons l'endogénéité d'un seul point de rupture, pour chacune des séries étudiées, à des dates indiquées par le tableau (1.7). Notons que l'hétérogénéité des résultats ainsi obtenus, montre que pour chacune des séries étudiées, il y a une meilleure date de rupture endogène qui lui est propre et qui se diffère des dates des autres séries de la production industrielle tunisienne. Ce résultat se justifie par le fait que, chaque branche industrielle se caractérise par sa propre dynamique et par conséquent, elle admet son propre processus endogène de transition. Mais, généralement, chacune de ces ruptures endogènes, illustre bien la présence d'au moins un « saut », au cours de la même période étudiée,

<sup>48</sup> L'endogénéité de la date de rupture à attirer l'attention de beaucoup de chercheurs tels que Zivot et Andrews (1992), Banerjee, Lumsdaine et Stock (1992) et Lee et Strazicich (1999b).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

pour toutes les séries de la production industrielle tunisienne. Bien sûr, ce qui signifie pour chacune d'elles il y a la présence, d'au moins, un changement endogène de structure et qui seront facilement visualisées, sur la figure (1.11), comme suit :

## Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12

Tendance déterministe avec une seule rupture endogène (Test de Perron et Vogelsang(1992))

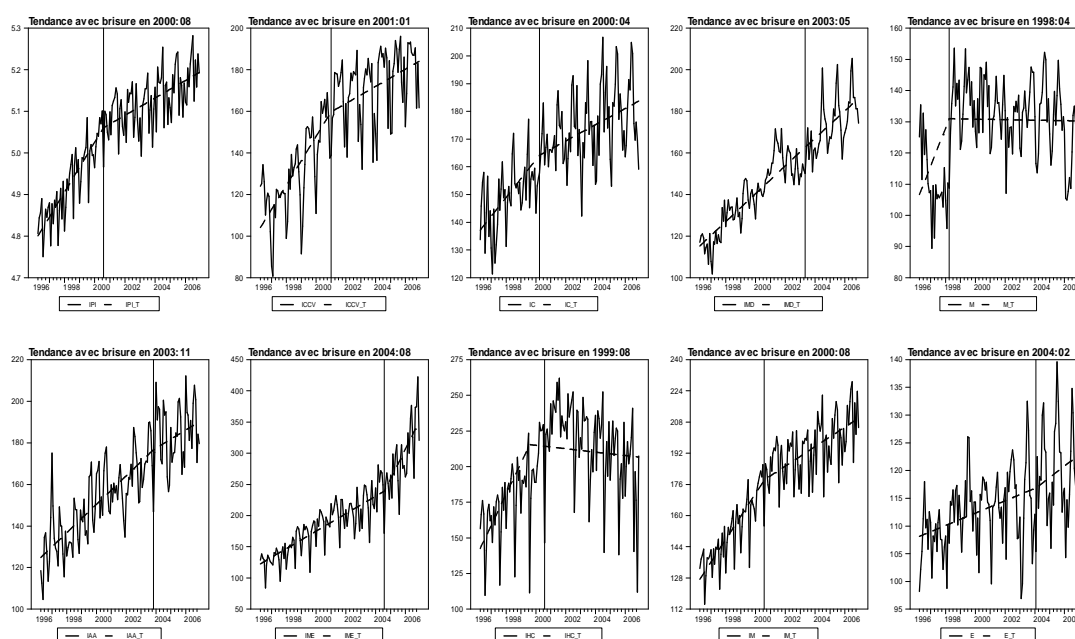


Figure 1.11: Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne

### 1.3.2.2. Test de Perron (1997)

#### ➤ Procédure du test

Dans le même souci que le test de Perron et Vogelsang (1992), qui consiste à détecter et estimer<sup>49</sup> la présence d'une seule rupture endogène en tendance déterministe, Perron (1997), a établi une autre procédure de test basée sur trois modèles : *IO1*; *IO2* ; *AO* décrite comme suit :

<sup>49</sup> Le test a été écrit en langage Rats par Colletaz, G., et Sarranto, F., (Laboratoire d'économie d'Orléans en France) ; source : Estima.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

Le modèle IO1 : concerne un changement progressif de structure au niveau de la constante seulement,

$$Y_t = \mu_0^{IO1} + \mu_1^{IO1} DU_t + \mu_2^{IO1} trend_t + \mu_3^{IO1} D_t(Tb) + \rho^{IO1} Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^{IO1} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{IO1}$$

Le modèle IO2 : concerne un changement progressif de structure, tant au niveau de la constante, qu'au niveau de la pente et seulement,

$$Y_t = \mu_0^{IO2} + \mu_1^{IO2} DU_t + \mu_2^{IO2} trend_t + \mu_3^{IO2} DT_t + \mu_4^{IO2} D_t(Tb) + \rho^{IO2} Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^{IO2} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{IO2}$$

Le modèle AO : concerne un changement brutal de structure au niveau de la pente seulement,

$$Y_t = \mu_0^{AO} + \mu_1^{AO} trend_t + \mu_2^{AO} DT_t^* + \rho^{AO} \bar{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^{AO} \Delta \bar{Y}_{t-i} + \varepsilon_t^{AO}$$

où :  $\varepsilon_t^{IO1}$ ,  $\varepsilon_t^{IO2}$ ,  $\varepsilon_t^{AO}$  représentent deux bruits blancs non corrélés ;  $T_b$  est la date de rupture inconnue ;  $DT_t = 1(t \geq T_b)(t - T_b)$  ;  $D_t(Tb) = 1(t = T_b)(t - T_b)$  ;  $trend_t$  est la tendance linéaire et  $DU_t = 1(t \geq T_b)(t - T_b)$ .

Les résultats tablés en (1.8), du test de changement de structure, avec tendance déterministe, en rupture endogène, au sens de Perron (1997), sont convergents et mettent en évidence, des séries de la production industrielle tunisienne, qui sont stationnaires, par rapport à une tendance déterministe coudée, ou un changement progressif de structure, tant au niveau de la constante qu'au niveau de la pente (*modèle IO2*), comme l'exprime le rejet de l'hypothèse nulle de non stationnarité, sans changement structurel endogène, au seuil, avec un risque de 1%.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

➤ Analyse et résultat du test

**Tableau 1.8: Résultats du Test de Perron (1997)**

Modèle IO2										
Y	CONSTANT	DU	TIME	DT	D(Tb)	Y{1}				
<b>IPI</b>	128.94085 [3.36363]	30.60962 [3.21473]	0.82561 [3.41210]	-0.53693 [-3.35441]	-7.22613(2000:06) [4.94861]	-0.09778 [-0.29428]				
<b>IAA</b>	111.91555 [4.03523]	34.89333 [2.18398]	0.49007 [3.95719]	-0.30769 [-2.09580]	-23.93248(2003:10) [4.94861]	0.09436 [0.42006]				
<b>ICCV</b>	132.29328 [4.02797]	75.11306 [4.11471]	1.47896 [4.15866]	-1.12159 [-4.30372]	-8.26799(2001:01) [4.94861]	-0.39695 [-1.13430]				
<b>IME</b>	48.31490 [1.56412]	-462.23240 [-3.69347]	0.45827 [1.34023]	4.10444 [3.80635]	32.53130(2005:05) [1.58773]	0.65860 [2.39181]				
<b>IC</b>	128.70776 [2.69138]	21.03655 [2.39078]	0.46159 [2.11668]	-0.30131 [-1.97125]	-6.01128(2000:08) [-0.71359]	0.06535 [0.18126]				
<b>IHC</b>	209.10769 [4.48913]	203.20814 [5.00697]	1.70394 [4.33706]	-2.80980 [-5.15052]	-35.96466(2000:11) [-1.67513]	-0.42834 [-1.34709]				
<b>IMD</b>	74.61622 [4.50599]	-5.12617 [-0.94882]	0.49561 [3.98179]	-0.04292 [-0.61401]	11.64879(2002:02) [1.80183]	0.31407 [2.00023]				
<b>IM</b>	100.09516 [3.90062]	26.65942 [3.06363]	0.68847 [2.76850]	-0.41367 [-2.24119]	0.68847(1999:11) [2.76850]	0.22902 [1.01899]				
<b>M</b>	50.51062 [2.32207]	25.02700 [1.50643]	0.18624 [0.23054]	-0.28011 [-0.34439]	-10.64401(1998:03) [-1.15963]	0.48525 [3.75436]				
<b>E</b>	106.97421 [3.48728]	4.68772 [1.26732]	0.34496 [2.94984]	-0.22054 [-2.11441]	5.30604(1999:12) [1.01070]	-0.05369 [-0.18143]				
<b>t<sub>α</sub></b>	<b>-3.303*</b>	<b>-4.031*</b>	<b>-3.991*</b>	<b>-1.239*</b>	<b>-2.592*</b>	<b>-4.491*</b>	<b>-4.368*</b>	<b>-3.430*</b>	<b>-3.982*</b>	<b>-3.560*</b>

**Les valeurs critiques pour le modèle IO2**

	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%
T>100	-5.57	-5.08	-4.82	-3.98	-3.25	-3.06	-2.72

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 1 %. La règle de décision est si la valeur de  $t_{\alpha}$  est inférieure en valeur absolue à la valeur critique, l'hypothèse nulle de non stationnarité est rejetée ; si la valeur de  $t_{\alpha}$  est supérieure, l'hypothèse nulle est acceptée. Les valeurs critiques sont tabléées dans Perron (1997). Les dates de ruptures Tb sont indiquées entre parenthèses. [.]Indique le t-statistique de Student.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Ces résultats sont maintenant, aisément, justifiés au moyen de la figure (1.12), suivante :

## Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12

Tendance déterministe avec une seule rupture endogène (Test de Perron (1997))

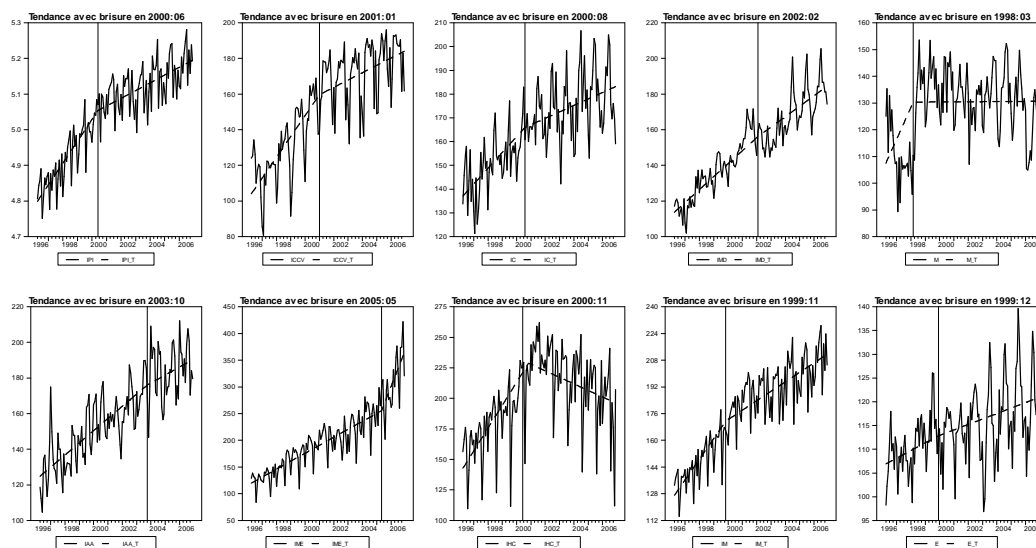


Figure 1.12: Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne

### 1.3.2.3. Test de Zivot et Andrews (1992)

#### ➤ Procédure du test

À l'instar des deux tests établis précédemment, Zivot et Andrews (1992), ont développé une autre méthode séquentielle, qui repose sur un test de racine unitaire, contre l'alternative de stationnarité, en tendance déterministe avec une rupture structurelle endogène, où un seul point de changement possible et qui est dépendant des données. Cette date de rupture est inconnue et elle sera, par la suite, estimée en minimisant le  $DF$   $t$ -statistique. L'objectif de ce test est, donc, de localiser le point de rupture  $\lambda$ , accordant le plus de poids, à l'alternative stationnaire en tendance, tout en minimisant la statistique de Student. La stratégie du test est basée sur les hypothèses nulles de racines unitaires, sans rupture structurelle, contre les hypothèses alternatives de processus stationnaires en tendance, avec un changement structurel dans la tendance, à une date inconnue. Selon la nature de la rupture structurelle, les auteurs ont pris en considération trois hypothèses alternatives possibles (Modèles A, B, C). Soit  $Y_t$ , pour



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$t = 1, 2, \dots, T$ , une série temporelle possédant une racine unitaire, nous pouvons alors définir  $\lambda = T_b/T$  comme étant la location du changement structurel où  $1 < T_b < T$ . Alors, les trois modèles étudiés sont les suivants :

Modèle A : Changement endogène dans le niveau,

$$\begin{cases} H_0 : Y_t = \mu_0^A + Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^A \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^A \\ H_1 : Y_t = \mu_0^A + \mu_1^A t + \mu_2^A DU_t(\lambda) + \rho^A Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^A \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^A \end{cases}$$

Modèle B : Changement endogène dans le taux de croissance,

$$\begin{cases} H_0 : Y_t = \mu_0^B + Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^B \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^B \\ H_1 : Y_t = \mu_0^B + \mu_1^B t + \mu_2^B DT_t^*(\lambda) + \rho^B Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^B \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^B \end{cases}$$

Modèle C : Changement endogène dans la pente et le niveau de la tendance,

$$\begin{cases} H_0 : Y_t = \mu_0^C + \mu_2^C DU_t(\lambda) + Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^C \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^C \\ H_1 : Y_t = \mu_0^C + \mu_1^C t + \mu_2^C DU_t(\lambda) + \mu_3^C DT_t^*(\lambda) + \rho^C Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^C \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^C \end{cases}$$

où  $DU_t(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > T\lambda \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$ ,  $DT_t^*(\lambda) = \begin{cases} 1 - T\lambda & \text{si } t > T\lambda \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$  et  $\varepsilon_t^{(j)} \sim N(0, \sigma_{j\varepsilon}^2)$ ,  $j = A, B, C$

Soit  $\lambda_{\inf}^i$ , la valeur minimisant le modèle ( $i = A, B, C$ ), quand les plus petites valeurs de la statistique mènent au rejet de l'hypothèse nulle pour tester  $\rho^i = 1(A, B, C)$ . La statistique du test est convergente asymptotiquement en distribution et par définition nous obtenons:

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

$$t_{\rho^j}[\lambda_{\inf}^j] = \inf_{\lambda \in I} t_{\rho^j}(\lambda) \sim \inf_{\lambda \in I} \left[ \int_0^1 W^i(\lambda, r)^2 dr \right]^{-1/2} \times \left[ \int_0^1 W^i(\lambda, r)^2 dW(r) \right]$$

où  $W^i(\cdot)$  est un processus stochastique défini sur  $[0; 1]$  et correspond selon Park et Phillips (1988), à la projection résiduelle du processus de mouvement Brownien dans l'espace d'Hilbert  $L_2[0; 1]$ ,  $\lambda = Tb_k/T$ ,  $\forall k \in [2/T, ((T-1)/T)]$  et  $I = [0.001; 0.999] \subset [0; 1]$ .

La règle de décision du test consiste à rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire si :

$$\inf_{\lambda \in I} t_{\rho^j}(\lambda) < k_{\inf, \rho}^i, \quad i = A, B, C$$

où  $k_{\inf, \rho}^i$ , représente la valeur critique asymptotique de  $\inf_{\lambda \in I} t_{\rho^j}(\lambda)_{i=A, B, C}$ , portée sur le tableau (1.9), suivant :

**Tableau 1.9: Les valeurs critiques du test de LM $\tau$  minimum**

Modèle A									
1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97%	99%	
-5.34	-5.02	-4.80	-4.58	-3.75	-2.99	-2.77	-2.56	-2.32	
Modèle B									
1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97%	99%	
-4.93	-4.67	-4.42	-4.11	-3.23	-2.48	-2.31	-2.17	-1.97	
Modèle C									
1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97%	99%	
-5.57	-5.30	-5.08	-4.82	-3.98	-2.25	-3.06	-2.91	-2.72	

Toutes ces valeurs critiques données par Zivot et Andrews (1992, pp. 256-257) sont issues par simulation d'un échantillon constitué de  $T=5000$  répétitions. Les valeurs critiques du modèle A (rupture en niveau), du modèle B (rupture en tendance) et C (rupture en niveau et en tendance) dépend de la localisation du point de rupture ( $\lambda=Tb/T$ ) qui est fonction de la taille totale de l'échantillon.

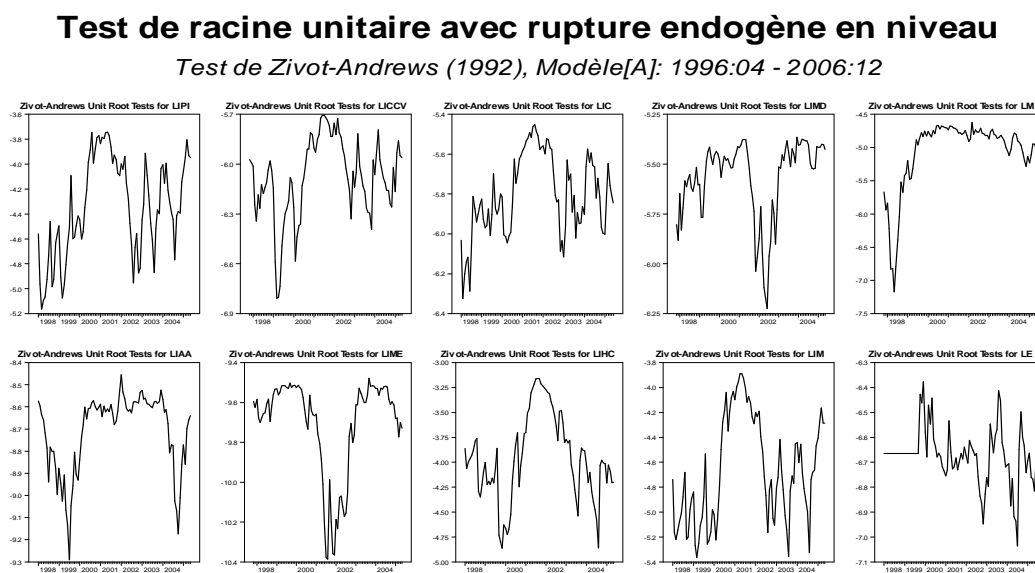
Plusieurs critiques du test de Zivot et Andrews (1992), sont abordées de divers points de vue. En ce sens, Nunes, Newbold et Kuan (1997) ont prouvé que la procédure du test proposée par Zivot et Andrews (1992), exhibe une détorsion en taille, autour de l'hypothèse nulle de la présence de rupture. D'un autre côté, Lumsdaine et Papell (1997), ont signalé que le test proposé par Zivot et Andrews (1992), est restreint, du fait qu'il ne peut pas prendre en considération, qu'une seule rupture structurelle inconnue. Pour combler cette limite, ces chercheurs ont proposé d'étendre ce test, au cas de deux ruptures structurelles inconnues. D'un autre côté, Lee et

## Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

Strazicich (2001), ont montré que l'utilisation de ce type de test de racine unitaire avec rupture endogène ne permet pas, dans la plupart des cas, d'estimer correctement le point de rupture, ni sous l'hypothèse nulle, ni sous l'hypothèse alternative. En plus, Vogelsang et Perron (1998) et Lee et Strazicich (2001), ont montré que sous l'hypothèse nulle de la présence d'une rupture endogène, il y a présence d'une anomalie, au niveau de la taille. Pour réduire cette limite, ces auteurs ont proposé une statistique, qui maximise la statistique de Wald (notée  $F_t^{\max}$ ). Car, ils ont montré, que la puissance de  $F_t^{\max}$  est moins imprévisible et peut être plus grande, pour certains modèles, que le minimum de t-statistique. Mais, Sen (2003), a montré qu'il y a une grande distorsion de puissance, du test de racine unitaire avec rupture structurelle inconnue, au sens de Zivot et Andrews (1992) et au sens de Vogelsang et Perron (1998), si la forme de rupture est mal spécifiée.

### ➤ Analyse et résultat du test

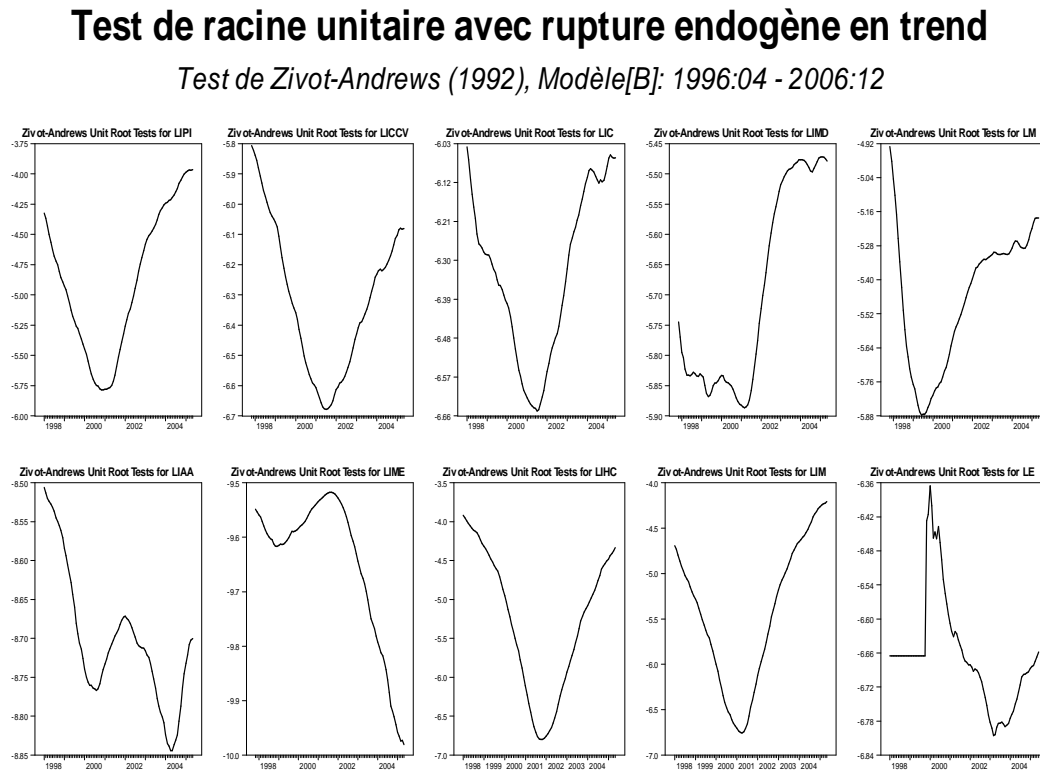
Le Modèle [A], permet de tester un changement structurel endogène, dans le niveau des séries de la production industrielle tunisienne, illustré graphiquement par la figure (1.13), comme suit :



**Figure 1.13: Présence d'une seule rupture en niveau de chaque série de la production industrielle tunisienne**

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

Alors que le Modèle [B], permet de détecter un changement endogène dans le taux de croissance de chaque série de la production industrielle tunisienne, examiné graphiquement par la figure (1.14), suivante :

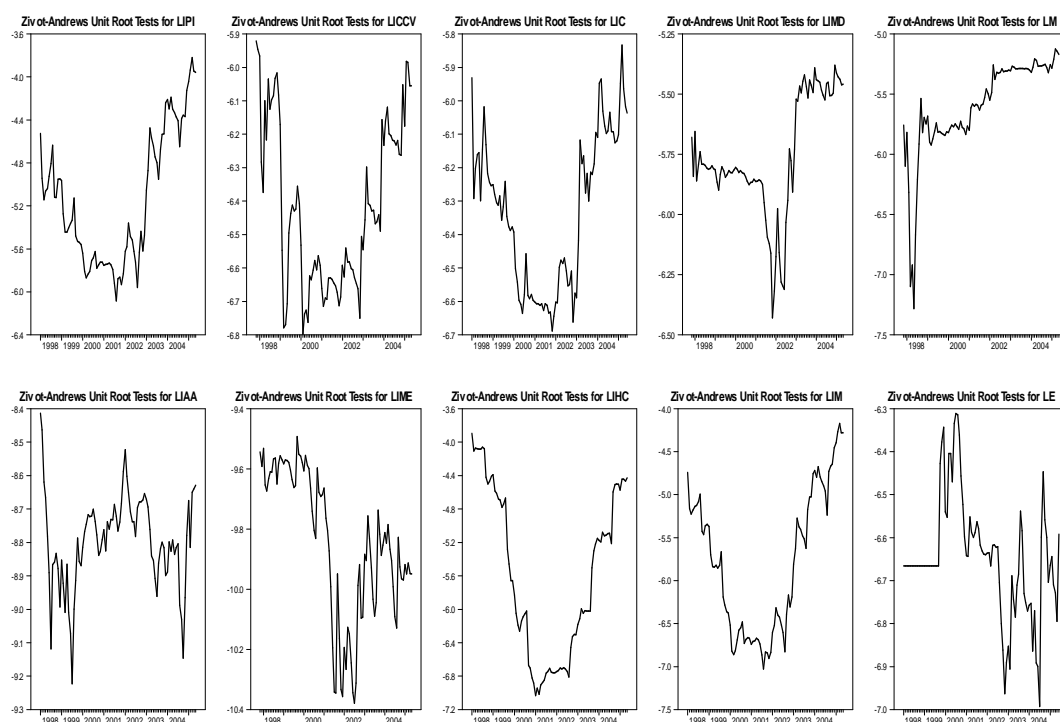


**Figure 1.14: Présence d'une seule rupture en taux de croissance de chaque série de la production industrielle tunisienne**

Finalement, le Modèle [C], un changement endogène, simultanément, dans la pente et dans le niveau de la tendance déterministe, exposé graphiquement à l'aide de la figure (1.15), comme suit :

## Test de racine unitaire avec rupture endogène en niveau et en trend

*Test de Zivot-Andrews (1992), Modèle[C]: 1996:04 - 2006:12*



**Figure 1.15: Présence d'une seule rupture en niveau et en trend de chaque série de la production industrielle tunisienne**

Comme le fait suggérer Zivot et Andrews (1992), l'estimation de ces modèles, se fait par la technique des moindres carrés ordinaires, pour une valeur de  $\lambda$  comprise entre  $i = 2/T$  et  $(T-1)/T$ . Les auteurs ont réclamé que ce test fait recours, aussi à la procédure de Perron (1998), afin de déterminer la haute valeur de  $p$  pour laquelle la t-statistique de Student est significative en valeur absolue. Les résultats du test de racine unitaire contre stationnarité, avec rupture structurelle, endogène en tendance déterministe, au sens de Zivot et Andrews (1992), pour les variables étudiées de la production industrielle, en Tunisie, sont présentés dans le tableau (1.10).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

**Tableau 1.10: Résultats du Test de Zivot et Andrews (1992)**

Une seule rupture						
	Modèle A		Modèle B		Modèle C	
Variables	LM $\tau$	Tb	LM $\tau$	Tb	LM $\tau$	Tb
IPI	-5.16320**	1998:03	-6.66944*	2005:06	-6.65842*	2005:06
IAA	-9.29064*	1999:07	-8.84448*	2004:04	-9.22282*	1999:07
ICCV	-6.80647*	1999:03	-6.67854*	2001:07	-6.79769*	2000:02
IME	-10.38663*	2001:08	-9.98093*	2005:05	-10.37847*	2002:07
IC	-9.62452*	1997:12	-9.55326*	1997:12	-9.59194*	1997:12
IHC	-9.62452*	1997:12	-9.55326*	1997:12	-9.59194*	1997:12
IMD	-6.22347*	2002:06	-6.06280*	2005:06	-6.42934*	2001:11
IM	-5.88251*	1997:12	-6.75750*	2001:04	-7.02621*	2001:08
M	-7.17103*	1998:05	-6.06280*	2005:06	7.28248*	1998:05
E	-7.03637*	2004:07	-6.80568*	2003:03	-6.99247*	2004:07

\*,\*\* et \*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 1 %, 5 % et 10 % respectivement. Les valeurs critiques sont tabulées dans Zivot et Andrews (1992). LM $\tau$  et Tb indiquent la statistique du test de LM $\tau$  minimum et la date d'achèvement du point de rupture.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Les résultats ainsi affichés montrent que, pour les trois Modèles [A], [B] et [C], ils rejettent l'hypothèse d'une racine unitaire, sans changement structurel endogène au seuil de 1%, à l'exception de la série IPI, qui rejette l'hypothèse nulle pour le Modèle [A] au seuil de 5%.

#### 1.3.2.4. Test de Lee et Strazicich (2004)

##### ➤ Procédure du test

Lee et Strazicich (1999a), ont réclamé que le test de racine unitaire contre stationnarité avec rupture structurelle endogène de tendance déterministe, au sens de Zivot et Andrews (1992), est restreint. Du fait qu'il néglige le changement structurel sous l'hypothèse nulle de racine unitaire. En plus, il est basé sur l'utilisation d'un test de type Dickey-Fuller (*DF*) séquentiel, minimum, lors de la détermination du point de rupture. Pour combler cette lacune, Lee et Strazicich (1999b), ont proposé un test de racine unitaire minimum, qui utilise le test de Multiplicateur de Lagrange (*ML*), développé par Schmidt et Philips (1992), au lieu de celui de *DF*, et détecte le point de rupture de manière endogène<sup>50</sup>. Récemment, Lee et Strazicich (2004), ont

<sup>50</sup> Pour plus de détails sur ce sujet, voir Schmidt, P. et Phillips, P.C.B., (1992), « *LM tests for a unit root in the presence of deterministic trends* », Oxford Bulletin of Economics and Statistics, vol. 54(3), pp. 257-287.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

étendu le test précédent pour être capable, non seulement, de détecter la présence d'une rupture structurelle, au niveau de la tendance déterministe, mais aussi de préciser, à quelle date une telle rupture est produite, si elle existe. Le plus important dans ce test, est sa possibilité d'intégrer un changement simultané, tant en niveau qu'en trend déterministe. Dès lors, Lee et Strazicich (2004), ont contribué à la perfection de la version ancienne de leur test, avec le possible changement structurel endogène, en niveau et en tendance déterministe, au cas d'une seule rupture structurelle, inconnue, dans la série temporelle. Ce test basé sur le minimum de la statistique *LM* développé par Schmidt et Philips (1992), au lieu de celui de *DF*, où il n'exhibe plus de détorsion de taille, dans la présence de rupture, sous l'hypothèse nulle et alternative et permet d'estimer, correctement, les points de rupture de manière endogène. Selon la méthodologie proposée par Lee et Strazicich (2004), la stratégie de ce test est basée sur la régression<sup>51</sup> suivante :

$$\Delta Y_t = \delta' \Delta Z_t + \phi \tilde{Y}_{t-i} + \sum_{i=1}^p \psi_i \Delta \tilde{Y}_{t-i} + \eta_t$$

où  $\tilde{Y}_t = Y_t - \tilde{\psi}_x - Z_t \tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\delta}$  est le vecteur des coefficients de la régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\Delta Z_t$ ,  $\Delta \tilde{Y}_{t-h}$ ,  $h = 1, \dots, k$  est un terme de correction de la corrélation sérielle,  $\tilde{\psi}_x$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\psi_x$  donné par  $\tilde{\psi}_x = Y_1 - Z_1 \tilde{\delta}$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$  sont les premières observations de  $Y_t$  et  $Z_t$  et  $\eta_t \sim N(0, \sigma_{j\epsilon}^2)$ ,  $j = A, C$ . Dans le cas d'une seule rupture,  $\Delta Z_t = (1, B_t)'$  pour le modèle A (*Crash model*) et  $\Delta Z_t = (1, B_t, D_t)'$  pour le modèle C (*Trend-shift model*), où  $B_t = \Delta D_t$  correspond au changement en niveau, autour de l'hypothèse alternative,  $D_t = \Delta D T_t^*$  correspond au changement en trend autour de l'hypothèse alternative, où quelque soit  $B_t = 1$  pour  $t \geq T b + 1$  et  $D_t = t$  pour  $t \geq T b + 1$ . Le test de racine unitaire avec date de rupture endogène, traitée comme une variable aléatoire inconnue, consiste à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \phi = 0 \\ H_1 : \phi \neq 0 \end{cases}$$

<sup>51</sup> Nous ne considérons ici que le modèle [A], les extensions aux deux autres modèles sont présentées dans Lee et Strazicich (1999b).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

Puisque la rupture structurelle est endogène, nous utilisons la statistique  $ML$  minimum pour tester la présence d'une racine unitaire. Sous l'hypothèse nulle, la t-statistique du test  $LM_\tau$  minimum est convergente en probabilité et asymptotiquement distribuée<sup>52</sup> et s'écrit :

$$LM_\tau = \inf_{\lambda} SP(\lambda) \sim \inf_{\lambda} [-1/2 \int_0^1 \underline{V}(r, \lambda)^2 dr]^{-1/2}$$

où  $SP$  est le t-statistique de Schmidt et Philips du test sous l'hypothèse nulle,  $\lambda = Tb/T$ , et  $V(\cdot)$  est un pont Brownien de variance unitaire sur l'intervalle  $[0;1]$ , défini par  $V(r, \lambda) = W(r, \lambda) - rW(1)$ , avec  $W(r)$  désigne un mouvement Brownien standard et  $\underline{V}(\cdot)$  est le résidu obtenu par projection du processus  $V(\cdot)$  avec l'espace subordonné généré par la fonction  $\{1, du(r, \lambda)\}$ , avec  $du(r, \lambda) = 1(r > \lambda)$ . La règle de décision du test consiste à rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire si :

$$\inf_{\lambda \in I} SP(\lambda) < SP_{tab, \inf}$$

où  $SP_{tab, \inf}$  représente la valeur critique de  $\inf_{\lambda \in I} SP(\lambda)$  qui est affichée sur le tableau (1.11), comme suit :

**Tableau 1.11: Les valeurs critiques du test de  $LM_\tau$  minimum**

<b>Modèle A</b>			
	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>10%</b>
	-4.239	-3.566	-3.211
<b>Modèle C</b>			
<b><math>\lambda</math></b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>10%</b>
<b>1</b>	-5.11	-4.50	-4.21
<b>2</b>	-5.07	-4.47	-4.20
<b>3</b>	-5.15	-4.45	-4.18
<b>4</b>	-5.05	-4.50	-4.18
<b>5</b>	-5.11	-4.51	-4.17

Toutes ces valeurs critiques sont issues d'un échantillon de taille  $T=100$ . Les valeurs critiques du modèle A (rupture en niveau) et du modèle C (rupture en niveau et en tendance) dépend de la localisation du point de rupture ( $\lambda=Tb/T$ ) et sont symétriques autour de  $\lambda$  et  $(1-\lambda)$ . Les valeurs critiques sont extraites de Lee et Strazicich (2004, p. 12).

<sup>52</sup> Pour plus de détails, sur ce sujet, voir Nunes, L.C., (2004), « *LM-type tests for a unit root allowing for a break in trend* », Australasian Meeting of the Econometric Society, ESAM 2004, Melbourne, Australia.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

Notons que l'élaboration de la présente version du test de Lee et Strazicich (2004), est passée par une gamme d'étapes, dont la plus remarquable est celle de Lee et Strazicich (1999b). D'un autre côté, Lee et Strazicich (1999c), ont étendu le test de Lee et Strazicich (1999b), au cas de deux changements structurels endogènes dans la série temporelle.

➤ **Analyse et résultat du test**

Les résultats ainsi obtenus sur le tableau (1.12), pour les Modèles [A] et [C] rejettent l'hypothèse d'une racine unitaire, sans changement structurel endogène, au seuil de 1%, à l'exception des séries M et E rejettent l'hypothèse nulle, pour le Modèle [A] au seuil de 5%.

**Tableau 1.12: Résultats du Test de Lee et Strazicich (2004)**

Variables	Une seule rupture				
	Modèle [A]		Modèle [C]		
	LM $\tau$	Tb	LM $\tau$	Tb	$\lambda$
IPI	-10.70348*	1998:02	-11.82203*	2001:10	1
IAA	-8.08623*	1999:08	-7.91597*	1999:04	1
ICCV	-5.49241*	2000:01	-6.66398*	2000:03	1
IME	-9.71053*	2005:09	-9.81449*	2005:07	1
IC	-7.55875*	2005:10	-8.12868*	2002:01	1
IHC	-8.95417*	2004:01	11.22054*	2002:05	1
IMD	-5.30994*	1999:01	-6.01404*	1997:08	1
IM	-10.88245*	1999:01	-12.45760*	2000:02	1
M	-3.82149**	1998:02	-7.12331*	1998:04	1
E	-3.96276**	2001:01	-6.88472*	2005:11	1

\*,\*\*et\*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 1%, 5% et 10% respectivement. Les valeurs critiques sont tabléées dans Lee et Strazicich (2004). LM $\tau$  et Tb indiquent la statistique du test de LM $\tau$  minimum et la date d'achèvement du point de rupture.

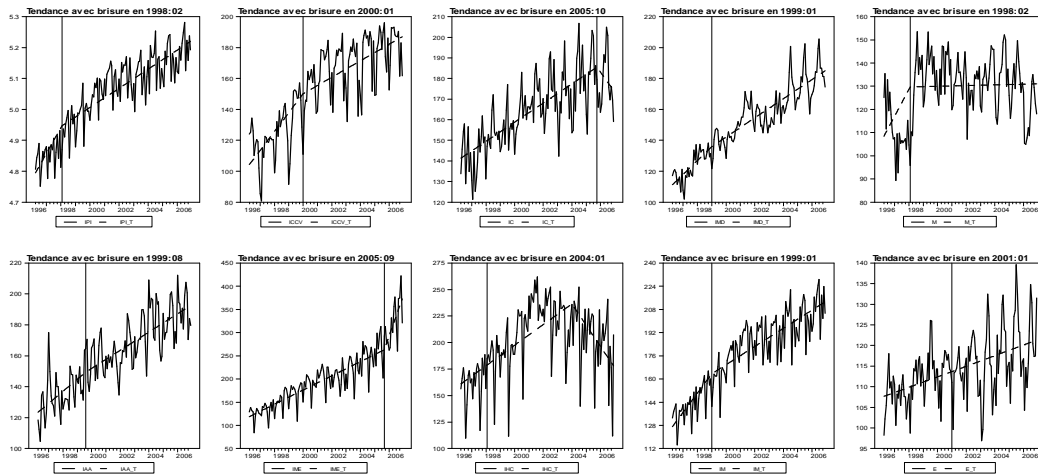
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Pour confirmer ces résultats, l'analyse graphique, à l'aide de la figure (1.16), illustre bien que les séries de la production industrielle tunisienne présentent, apparemment, une rupture endogène de niveau du test au sens de Lee et Strazicich (2004).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

**Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12**

*Tendance déterministe avec une seule rupture endogène ([A]-Test de Lee et Strazicich (2004))*

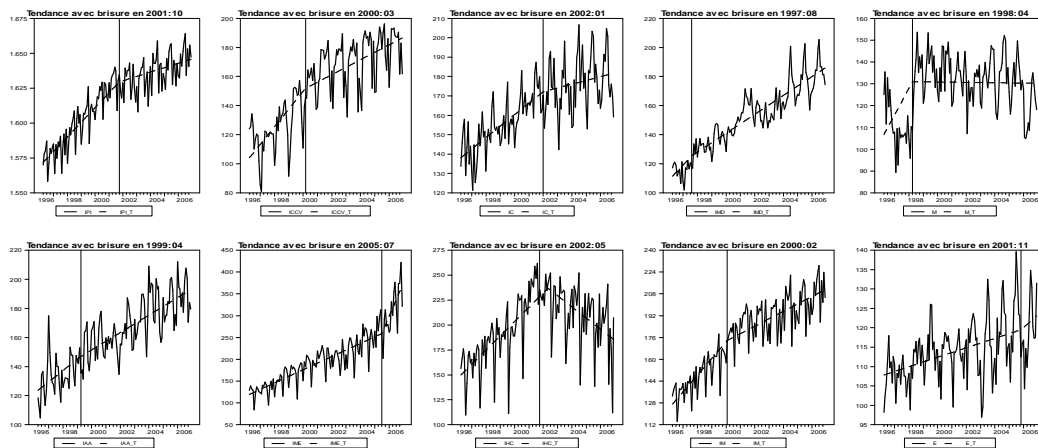


**Figure 1.16: Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne**

De même, l'analyse graphique à l'aide de la figure (1.17), illustre bien que les séries de la production industrielle tunisienne présentent, apparemment, une rupture endogène de niveau et de trend simultanément, au sens du test de Lee et Strazicich (2004).

**Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12**

*Tendance déterministe avec une seule rupture endogène ([C]-Test de Lee and Strazicich(2004))*



**Figure 1.17: Présence d'une seule rupture en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne**

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Jusque là, nous avons concentré notre intention sur la distinction entre, une marche aléatoire et l'existence d'un changement de structure endogène, par les tests avec date de changement de structure inconnue. Il est vrai que cette étape a permis de concevoir, nettement, la possibilité d'existence, d'au moins un changement de structure endogène au niveau de la dynamique déterministe, de chaque série de la production industrielle tunisienne. Mais, ceci est insuffisant étant donné que les tests étudiés, à ce niveau, n'autorisent qu'une seule rupture structurelle endogène. Or, nous savons que dans notre cadre d'analyse, un changement structurel endogène est un processus de fonctionnement spontané, qui s'est produit dans le dynamisme d'une variable macro-dynamique. Si au moins, un des paramètres de contrôle du processus de transition de phase assurant la transition douce, d'un état d'équilibre à un autre, tout en respectant le principe de « *recomposition des invariances* », changent graduellement et continuellement sur l'intervalle réel  $[0, 1]$ . Compte tenu de cette hypothèse, les tests, ainsi étudiés, à ce niveau d'analyse, marquent leur limite, en ce qui concerne le nombre très réduit des ruptures endogènes autorisées. Afin de contourner cette exagère limite, nous allons nous intéresser, maintenant, aux tests autorisant plus d'un seul changement de structure endogène. À cet égard, nous exposerons, en particulier, deux tests : le test au sens de Lumsdaine et Papell (1997), puis le test au sens de Lee et Strazicich (2003).

### **1.3.2.5. Test de Lumsdaine et Papell (1997)**

#### **➤ Procédure du test**

La méthodologie de Lumsdaine et Papell (1997), a l'avantage de prendre en compte le modèle à deux ruptures structurelles, soit de la forme IO (*innovational outlier*), ou de la forme AO (*additive outlier*). Pour les ruptures de types IO, Lumsdaine et Papell (1997), ont utilisé cette forme de rupture comme extension du modèle de Zivot et Andrews (1992), ou du modèle IO2 de Perron (1997). Selon ce premier cas, les ruptures touchent, à la fois, le niveau de la série et sa pente. Ainsi, le modèle testé prend la forme générale suivante :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \Delta Y_t = \mu_0^{IO} + Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Psi_i^{IO} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{IO} \\ H_1 : \Delta Y_t = \mu_0^{IO} + \mu_1^{IO} trend + \mu_2^{IO} DU1_t(\lambda) + \mu_3^{IO} DU2_t(\lambda) + \mu_4^{IO} DT1_t(\lambda) + \mu_5^{IO} DT_t(\lambda) \\ \quad + \rho^{IO} Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Psi_i^{IO} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{IO} \end{array} \right.$$

où  $\varepsilon_t^{IO}$  représente un bruit blanc non corrélé ;  $Y_t$  est la variable dépendante observée, à la date  $t$  et disponible en taille  $T$  ;  $\Delta Y_t$  est la variable dépendante en différence première,  $DU1$  ( $Tb1$  = date du premier break structurel) = 1 si  $t > Tb1$  et 0 ailleurs,  $DU2$  ( $Tb2$  = date du deuxième break structurel) = 1 si  $t > Tb2$  et 0 ailleurs,  $trend$  est la tendance linéaire,  $DT1$  =  $trend - Tb1$  si  $t > Tb1$  et 0 ailleurs et  $DT2$  =  $trend - Tb2$  si  $t > Tb2$  et 0 ailleurs. Pour cette première procédure, les auteurs ont noté que les dates de ruptures sont estimées, en minimisant la valeur de t-statistique de Student pour un niveau de seuil  $\alpha$  et le retard optimal  $k$  est déterminé à la base de l'approche de spécification de Ng et Perron (1995)<sup>53</sup>.

Dans le deuxième cas, Lumsdaine et Papell (1997), ont utilisé une extension du modèle de Zivot et Andrews (1992) ou du modèle AO de Perron (1997), pour tenir compte de deux ruptures en tendance seulement, mais les deux segments de la fonction du trend sont rejointes aux temps de ruptures. Dans ce cas, les auteurs ont noté que l'estimation se fait en deux étapes : la première étape porte sur le modèle d'équation,

$$Y_t = \mu_0^{AO} + \mu_1^{AO} DU1_t + \mu_2^{AO} DU2_t + \bar{Y}_t, \quad t = 1, \dots, T_k$$

puis,  $Y_t = \rho^{AO} \bar{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Psi_i^{AO} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{AO}, \quad t = 1, \dots, T_k$

Le test de l'hypothèse de racine unitaire est fait via le t-ratio de  $\rho^j$ , ( $j = IO, AO$ ) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \rho^j = 0 \\ H_1 : \rho^j \neq 0 \end{array} \right.$$

<sup>53</sup> Pour plus de détails sur cette approche, voir Ng, S. et Perron, P., (1995), « *Unit root tests in ARMA models with data dependent methods for selection of the truncation lag* », Journal of the American Statistical Association, 90(429), pp. 268-281.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

Sous l'hypothèse nulle, la t-statistique du test  $LM_{\tau}$  minimum est convergente en probabilité et asymptotiquement distribuée et s'écrit :

$$LM_{\tau} = \inf_{\lambda} \tilde{\tau}(\lambda) \sim \inf_{\lambda} [-1/2 \int_0^1 \underline{V}(r, \lambda)^2 dr]^{-1/2}$$

où  $\tilde{\tau}$  est le t-statistique de Schmidt et Philips du test sous l'hypothèse nulle,  $Tb_j$  sont les dates inconnues des ruptures qui sont déterminées, de manière endogène sur tous les points de l'intervalle  $[0.1T; 0.9T]$ , et  $\lambda_j = Tb_j / T$  est la fraction de rupture.

En ce sens, Ben-David, Lumsdaine et Papell (2003), ont développé un algorithme afin de tenir compte des ruptures de sens contraires qui se composent, sous la forme :  $\mu_1^{AO} + \mu_2^{AO} = 0$ .

➤ **Analyse et résultat du test**

Les principaux résultats concernant l'identification des dates des meilleures deux ruptures possibles, suivant le test de Lumsdaine et Papell (1997), sont illustrés selon le tableau (1.13), comme suit :

<b>Tableau 1.13: Résultats du Test de Lumsdaine et Papell (1997)</b>						
<b>Deux ruptures : en trend [AO] ou en niveau et en trend [IO]</b>						
<b>Variables</b>	<b>Modèle [AO]</b>			<b>Modèle [IO]</b>		
	<b>LM<math>\tau</math></b>	<b>Tb<sub>1</sub></b>	<b>Tb<sub>2</sub></b>	<b>LM<math>\tau</math></b>	<b>Tb<sub>1</sub></b>	<b>Tb<sub>2</sub></b>
<b>IPI</b>	-6.0557	2001:06	2003:02	-6.3108	2001:07	2002:07
<b>IAA</b>	-9.1767*	1998:05	1999:10	-9.8538*	1999:06	2002:04
<b>ICCV</b>	-6.8727**	1997:04	2001:05	-7.2386**	1998:02	1999:03
<b>IME</b>	-6.3513	2001:09	2002:09	-6.7862***	1999:10	2001:10
<b>IC</b>	-6.6831***	2001:03	2005:10	-7.0863**	2001:05	2004:04
<b>IHC</b>	-7.0671**	1999:11	2001:07	-7.5977*	1999:07	2001:08
<b>IMD</b>	-10.5441*	2001:05	2003:01	-10.8160*	2001:06	2005:06
<b>IM</b>	-7.0221**	2001:07	2003:02	-7.3926*	1999:07	2001:07
<b>M</b>	-7.1235**	1997:05	1998:09	-8.0826*	1998:04	2005:12
<b>E</b>	-7.4823**	1998:08	2003:03	-8.1118*	2002:10	2005:12

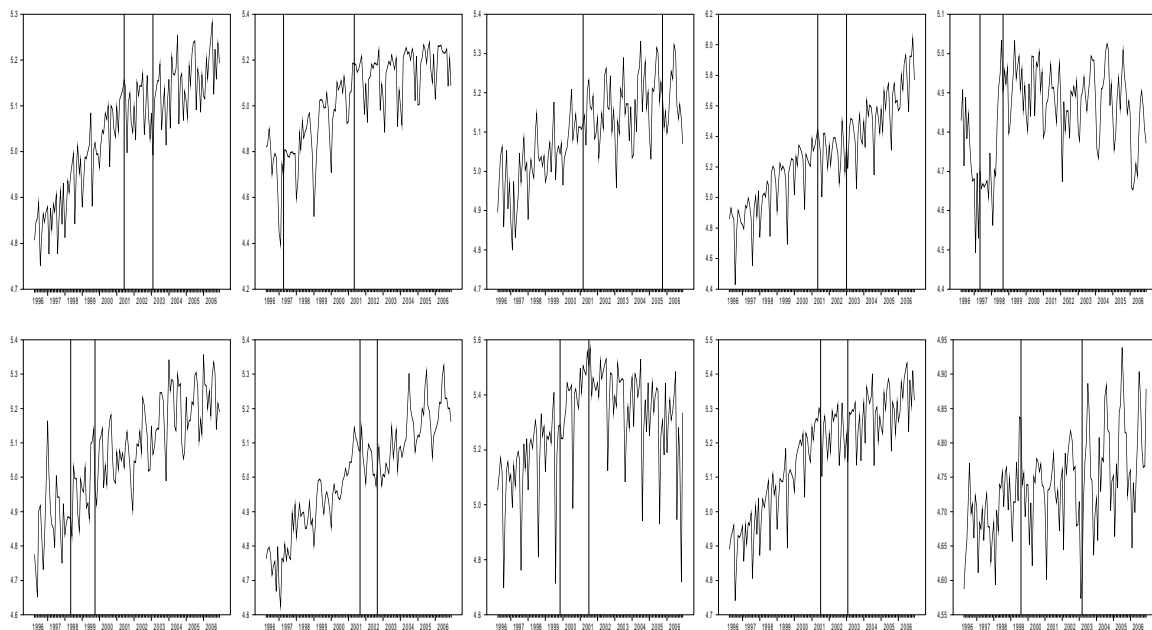
\* \*\* et \*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 1 %, 5 % et 10 % respectivement. Les valeurs critiques sont tabléées dans Lumsdaine et Papell (1997) et ont pour valeurs -7.34, -6.82 et -6.49, respectivement. LM $\tau$  et Tb indiquent la t-statistique du test de LM $\tau$  minimum et la date d'achèvement du point de rupture. La fraction de rupture est de l'ordre de 0.10.  
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

## Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

Les résultats ainsi obtenus illustrent bien la possibilité de présence de ruptures multiples endogènes, qui caractérisent la dynamique de chaque série, de la production industrielle tunisienne.

### Test de racine unitaire avec deux ruptures endogènes en trend

*Test de Lumsdaine et Papell, modèle(AO): 1996:04 - 2006:12*



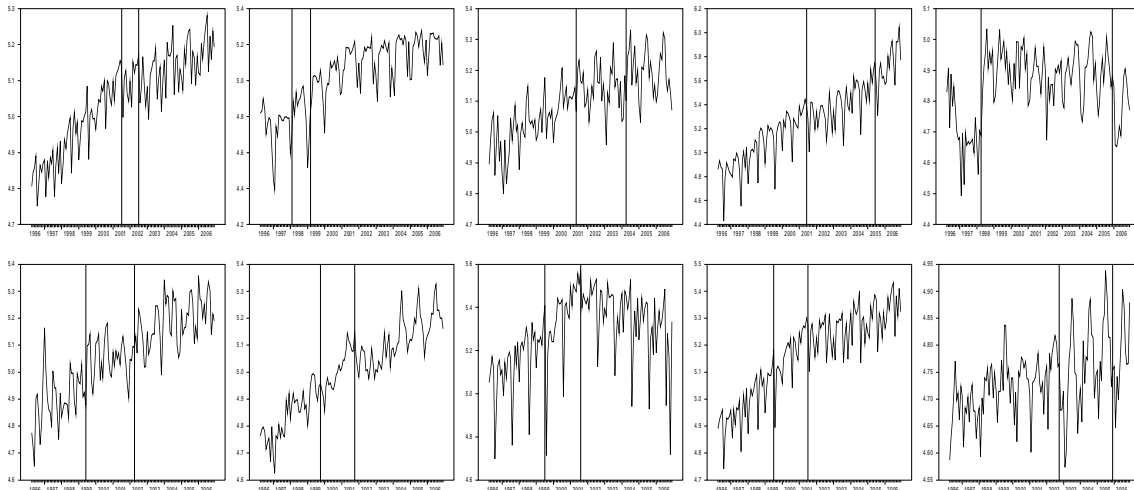
**Figure 1.18: Présence de deux ruptures en tendance déterministe de chaque série de la production industrielle tunisienne**

Noter bien que nous pouvons choisir, arbitrairement, un nombre de ruptures endogènes dépassant quatre, dont nous pouvons identifier les dates correspondantes, selon la procédure de Lumsdaine et Papell (1997). Ainsi, l'examen graphique à l'aide des figures (1.18) et (1.19), montre bien que chaque série de la production industrielle tunisienne présente, apparemment, deux ruptures endogènes de trend pour le modèle [AO] et de niveau et de trend simultanément pour le modèle [IO], au sens du test de Lee et Strazicich (1997).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

**Test de racine unitaire avec deux ruptures endogènes en niveau et en trend**

Test de Lumsdaine et Papell, modèle(10): 1996:04 - 2006:12



**Figure 1.19: Présence de deux ruptures en niveau et en tendance déterministe simultanément de chaque série de la production industrielle tunisienne**

**1.3.2.6. Test de Lee et Strazicich (2003)**

➤ **Procédure du test**

Le test de racine unitaire avec rupture structurelle endogène, au sens de Lee et Strazicich (1999b), est restreint, du fait qu'il ne tient en considération qu'une seule rupture de date inconnue. Pour corriger ce problème, Lee et Strazicich (2003), ont proposé d'étendre ce test de racine unitaire, avec un changement structurel endogène, en niveau et en trend, en cas de deux ruptures structurelles inconnues, dans la série temporelle, basée sur le minimum de la statistique  $LM$  où il n'exhibe plus de détorsion de taille, dans la présence des ruptures sous les hypothèses nulles et alternatives et permet d'estimer, correctement, les points de ruptures. La stratégie de test est appuyée sur la régression<sup>54</sup> suivante :

$$\Delta Y_t = \delta' \Delta Z_t + \phi \tilde{Y}_{t-i} + \sum_{i=1}^p \psi_i \Delta \tilde{Y}_{t-i} + \eta_t$$

<sup>54</sup> Nous ne considérons ici que le modèle [A], les extensions aux deux autres modèles sont présentées dans Lee et Strazicich (2003).

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

où  $\tilde{Y}_t = Y_t - \tilde{\psi}_x - Z_t \tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\delta}$  est le vecteur des coefficients dû de la régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\Delta Z_t$ ,  $\Delta \tilde{Y}_{t-h}$ ,  $h = 1, \dots, k$  est un terme de correction de la corrélation sérielle,  $\tilde{\psi}_x$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\psi_x$  donné par  $\tilde{\psi}_x = Y_1 - Z_1 \tilde{\delta}$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$  sont les premières observations de  $Y_t$  et  $Z_t$  et  $\eta_t \sim N(0, \sigma_{j\epsilon}^2)$ ,  $j = A, C$ . Dans le cas d'une seule rupture,  $\Delta Z_t = (1, t, B_t)'$  pour le modèle A (*Crash model*) et  $\Delta Z_t = (1, t, B_t, D_t)'$  pour le modèle C (*Trend-shift model*), où  $B_t = \Delta D_t$  correspond au changement en niveau autour de l'hypothèse alternative,  $D_t = \Delta DT_t^*$  correspond au changement en trend autour de l'hypothèse alternative, alors que dans le cas des deux ruptures,  $\Delta Z_t = (1, t, B_{1t}, D_{1t})'$  pour le modèle A et  $\Delta Z_t = (1, t, B_{1t}, B_{2t}, D_{1t}, D_{2t})'$  pour le modèle C, où quel que soit  $s = 1, 2$ ,  $B_{st} = 1$  pour  $t \geq Tb_s + 1$  et  $D_{st} = t$  pour  $t \geq Tb_s + 1$ . Le test de racine unitaire avec dates de ruptures endogènes traitées comme des variables aléatoires inconnues consiste à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \phi = 0 \\ H_1 : \phi \neq 0 \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, la t-statistique du test  $LM_\tau$  minimum s'écrit :

$$LM_\tau = \inf_{\lambda} \tilde{\tau}(\lambda)$$

où  $\tilde{\tau}$  est le t-statistique du test sous l'hypothèse nulle,  $\lambda_s = Tb_s / T$ . La décision du test implique que le rejet de l'hypothèse nulle signifie clairement une tendance stationnaire.

➤ **Analyse et résultat du test**

Les résultats du test de Lee et Strazicich (2003), portés sur le tableau (1.14), rejettent pour les séries étudiées de la production industrielle tunisienne, l'hypothèse d'une racine unitaire, sans changement structurel endogène, au seuil de 1%, à l'exception de la série IM, le test rejette l'hypothèse nulle pour le Modèle [C], au seuil de 10%.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

**Tableau 1.14: Résultats du Test de Lee et Strazicich (2003)**

Deux ruptures							
Variables	Modèle [A] : CRASH MODEL			Modèle [C] : TREND-SHIFT MODEL			
	LM $\tau$	Tb <sub>1</sub>	Tb <sub>2</sub>	LM $\tau$	Tb <sub>1</sub>	Tb <sub>2</sub>	$\lambda$
IPI	-11.64075*	1998:02	2000:01	-11.99842*	2002:06	2003:03	1
IAA	-8.26241*	1999:08	2004:07	-8.31849*	1999:05	2001:12	1
ICCV	-5.82839*	1999:02	2001:01	-7.06354*	1997:04	2000:03	1
IME	-10.02848*	2001:06	2001:09	-10.14121*	1998:09	2005:06	1
IC	-7.83535*	2000:06	2005:10	-8.41087*	1997:04	2004:01	1
IHC	-11.33912*	2001:03	2005:05	-5.58144*	2002:05	2005:10	1
IMD	-6.67903*	2001:04	2003:04	-12.23012*	1998:01	2000:01	1
IM	-12.55437*	2000:02	2005:10	-4.26538***	1998:02	2005:08	1
M	-7.47226*	1998:04	2004:04	-5.74194*	2000:03	2002:10	1
E	-5.74194*	2000:03	2002:10	-7.36838*	2002:11	2003:07	1

\*, \*\* et \*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 1 %, 5 % et 10 % respectivement. Les valeurs critiques sont tabulées dans Lee et Strazicich (2003). LM $\tau$  et Tb indiquent la statistique du test de LM $\tau$  minimum et la date d'achèvement du point de rupture.  
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

L'étude menée jusqu'à ce niveau a permis, de préciser les différentes caractéristiques descriptives, des dynamiques des structures endogènes des cycles de la production industrielle, en Tunisie. En particulier, la présence des phénomènes de brisures de symétries des fluctuations cycliques endogènes, qui sont à l'origine de changements de régimes par transition, au niveau de la dynamique de l'activité industrielle, ce qui nous conduit à nous interroger sur la possibilité de mener un contrôle optimal et une modélisation rationnelle des évolutions dynamiques des fluctuations cycliques, en industrie, par des spécifications non-linéaires en moyennes. Une large variété des techniques de séries temporelles non-linéaires ont été développées pour répondre, convenablement, à ce but. Mais, si la non-linéarité en moyenne, est appréhendée, ici, comme une caractéristique inhérente des irrégularités reflétant la transition douce d'un état d'équilibre, à un autre, lorsque le fonctionnement des variables étudiées est représenté à l'aide des équations dynamiques non-linéaires, pour tient compte du changement de structure endogène, c'est parce que c'est la seule manière capable de capter les asymétries cycliques, de faire apparaître des fluctuations autoentretenues, et de fournir ainsi une explication endogène à celles-ci. Dès lors, sachant les caractéristiques détectées, à ce niveau d'analyse et qui ne sont plus en concordance

avec les hypothèses et les fondements théoriques, sur lesquels se basent la modélisation traditionnelle (linéaire). La nouvelle question qui se pose à ce niveau, est de savoir dans quelle mesure les modèles traditionnels (linéaires) marquent leurs incapacités de rendre compte des faits stylisés, de la même manière que ceux fournis par l'approche de séries temporelles, adoptant comme hypothèse de base, la non-linéarité en moyenne?

Nous comprenons, donc, à partir de cette démarche très simple, que la quantification de la qualité d'un modèle, reste encore, aujourd'hui, une question majeure, et que l'application des tests traditionnels d'inférences statistiques, ne peut qu'omettre la dynamique du modèle et conduire à réfuter certaines hypothèses théoriques, pourtant, avérées. Cependant, étudier un problème dynamique, en le considérant comme étant un problème purement statique, peut conduire à une perte d'information préjudiciable et à une bonne compréhension du fonctionnement du processus étudié. Ceci ne peut que nous inciter, à rechercher, quels sont les moyens nécessaires pour détecter la présence de non-linéarité, au sein des processus dynamiques économétriques et des processus économétriques? Mais, avant de passer à l'étude des spécifications et des estimations des processus non-linéaires, les plus couramment utilisés, en analyse des séries temporelles, nous proposons de présenter, au niveau de la section suivante, quelques généralités sur les principales possibilités de construction, de la modélisation non-linéaire de prévision.

## **1.4. Construction d'un modèle non-linéaire de prévision**

### **1.4.1. Les insuffisances des modèles linéaires de prévisions classiques de séries temporelles**

Rappelons qu'une question centrale, à laquelle nous cherchons à répondre est la suivante : Devrons-nous adopter une modélisation statistique, linéaire ou non-linéaire? La réponse à cette interrogation rend toutefois nécessaire, le passage par une identification des

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

justifications du recours, soit à la modélisation linéaire, soit à celle non linéaire. Puisque l'avantage de l'un de ces deux types de modélisation, est de prendre sa naissance dans les désavantages de l'autre. Mais, compte tenu des résultats obtenus jusqu'à ce niveau d'analyse, nous pouvons dire qu'en principe les modèles linéaires de prévision de séries temporelles, ont été exploités, dans un contexte de modélisation, très restreint. Pour justifier ceci, nous essayons d'explicitier ce point de vue, à deux niveaux, tant économique qu'économétrique.

***1.4.1.1. Justifications économiques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions***

Les différentes techniques classiques décrites précédemment, ont été basées sur les modèles économétriques classiques, de séries chronologiques. Malgré leur succès dans la prévision linéaire. Cependant, ils sont dans plusieurs cas imperformants, puisque ces techniques sont basées sur le jugement, au niveau de la prévision linéaire.

Stock et Watson (1999), ont souligné que les modèles linéaires ont couramment été utilisés pour expliquer les cycles économiques, sauf qu'il se trouve, que suite à un choc exogène, un modèle dynamique permet de distinguer quatre trajectoires possibles : (i) oscillatoires et stables, (ii) oscillatoires et instables, (iii) non oscillatoires et stables et (iv) non oscillatoires et instables. Mais, la modélisation classique linéaire est traitée dans un cadre stable et statique, qui est inapte de générer ces comportements dynamiques périodiques et/ou quasipériodiques liés au caractère qualitatif localement instable au voisinage d'un état stationnaire. En conséquence, cette modélisation est incapable d'intégrer, ni le phénomène d'endogénéité des fluctuations cycliques, ni le phénomène d'asymétrie, marqués au niveau des phases d'un cycle endogène. De ce fait, elle reste très restrictive pour au moins deux principales raisons. La première tient du fait, qu'elle est linéaire et la seconde résulte du fait qu'elle est statique et non dynamique. Or, nous avons vu que le dynamisme est le siège, dans lequel un cycle endogène, prend sa naissance et son évolution. Dès lors, la modélisation classique ne présente que le siège des chocs exogènes et n'incorpore plus de changement structurel endogène. De même, elle est incapable d'expliquer le caractère

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

autoentretenu des fluctuations. D'ailleurs, l'oscillateur linéaire de Samuelson n'a donné lieu qu'à deux types de fluctuations : les fluctuations amorties et les fluctuations explosives. Or, l'existence des fluctuations qui disparaissent (les fluctuations amortissables) est un cas peu réaliste, surtout, dans une économie, où les chocs interviennent de façon répétée. L'existence des fluctuations explosives n'est pas aussi réaliste, en raison de la présence des contraintes d'ordre technique ou institutionnel, sur des variables, dont certaines butent sur des valeurs planchées ou plafond. Les fluctuations explosives ne sont pas, alors pertinentes, en matière de prévision. Tout cela, confirme l'inaptitude de la modélisation classique de spécifier un cycle endogène à caractère non-linéaire. En ce sens, selon Pintus, Kozlovski, van Strien et de Vilder (2006), les modèles linéaires ne peuvent pas rendre compte des mécanismes d'asymétrie, précédemment, mentionnés, ni des ruptures de forte amplitude. Pourtant, l'asymétrie est une caractéristique des phases du cycle économique, du fait que les phases d'expansion et les phases de récession du cycle, n'ont pas toujours la même durée.

Reste à présenter, maintenant, les insuffisances économétriques, en s'appuyant sur des exemples issus de la littérature. Ces exemples nous semblent aptes à illustrer, parfaitement, les défaillances du recours à la modélisation linéaire, au lieu de la modélisation non-linéaire. C'est ce qui va, d'ailleurs, nous inciter à opter pour cette seconde forme de modélisation.

#### ***1.4.1.2. Justifications économétriques de l'insuffisance des modèles linéaires de prévisions***

L'économétrie des séries temporelles à été, pendant longtemps, dominée par la modélisation linéaire, et plus particulièrement par les modèles de type ARMA. La linéarité a été considérée comme étant une hypothèse, qui restreint les dynamiques possibles du cycle économique. Cependant, d'après le théorème de Wold<sup>55</sup>, tout processus ARMA peut s'écrire sous la forme d'un processus moyenne mobile infinie, de type :

---

<sup>55</sup> Pour plus de détails sur ce théorème, voir Wold, H., (1954), « *A study in the analysis of stationary time series* », Uppsala. Almqvist and Wicksell.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

En ce sens, le passé ne fournit aucune information relative au comportement futur de la série. Cette formulation signifie simplement, que les phases d'expansion et les phases de récession engendrent des dynamiques similaires. D'où l'incapacité des modèles ARMA de prendre en compte les phénomènes d'asymétrie, ainsi que les ruptures de forte amplitude. De plus, les modèles ARMA ne prennent en considération, que les moments d'ordre deux de la série et il s'ensuit, alors, une exploitation incomplète de l'information contenue dans la dynamique de la série et qui sera employée, plus tard en prévision. Donc, la modélisation classique à caractère statique est insuffisante pour modéliser des structures endogènes et des relations non-linéaires de séries temporelles dans la prévision. Par contre, nous montrerons, ultérieurement, qu'à travers le recours à la modélisation non linéaire, le passé permet de fournir des informations utiles, pour prévoir le futur de la série et il serait possible d'exploiter toute l'information contenue dans la dynamique de la série, moyennant la prise en considération des moments supérieurs à deux.

Afin de mieux confirmer l'insuffisance des tests usuels, issus de l'économétrie classique, quand ils sont appliqués à des séries engendrées en réalité, par des modèles non-linéaires, nous nous référons à la citation donnée par Lardic et Mignon (2002, p.83), : « *...ces modèles macroéconométriques souffrent d'un certain nombre d'insuffisances, telles que : restrictions a priori trop fortes sur les paramètres par rapport à ce que prédit la théorie ; absence de tests sérieux sur la structure causale ; traitement inadéquat des anticipations.* ».

De plus, l'exemple tiré de l'article de Frank et Stengos (1989), montre que les tests classiques de bruit blanc, tels que le test de Box-Pierce ou le test de Ljung-Box sont incapables de détecter la dépendance temporelle, sur des séries générées par des processus non linéaires. Leur étude est intéressante, car, elle est révélatrice de l'inadéquation des tests classiques de dépendance temporelle en analyse des séries temporelles, lorsqu'ils sont appliqués à des données générées, par des processus non-linéaires, dont la dynamique non-linéaire, est très significative, notamment, en ce qui concerne les relations d'interaction et de dépendance structurelle. Ils

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

montrent que tout observateur peut être induit, en erreur, par ces tests et laisse conclure, tout de suite, au caractère de bruit blanc d'un processus, alors que même qu'il est issu d'une loi d'évolution, dont la dépendance temporelle est dynamique non-linéaire.

Or, l'émergence des fluctuations endogènes d'origines dynamiques non-linéaires se caractérise par une double variation, tant dans l'espace que dans le temps, régi au niveau du processus de transition douce par des forces de rappels<sup>56</sup> (force d'inerties), qui naissent au cours des phénomènes de bifurcation et d'instabilité structurelle, dans les champs d'attractions au voisinage de l'équilibre dynamique et qui assurent, de façon virtuelle la déformation, l'adaptation et le changement des structures dynamiques cycliques et/ou alternées. C'est-à-dire, que l'étude de la dynamique endogène des structures est comprise, ici, comme la caractérisation des séries temporelles par des invariants dynamiques qui justifient le caractère potentiellement non-linéaire des phénomènes étudiés. Toutefois, la modélisation économétrique s'intéresse au modèle stochastique dans sa globalité et ignore le déterminisme induit, partiellement, par la partie dynamique, du modèle économétrique (partie déterministe d'un modèle économétrique), exprimée sous forme de relations en différences. À ce niveau, la modélisation classique est incapable de généraliser un phénomène de dynamique non-linéaire et y intègre un processus dynamique générateur de forces d'inerties virtuelles, nécessaires, aux déplacements des structures dynamiques.

### 1.4.2. Limites du problème général de sélection de Modèle

Habituellement, le problème de sélection de modèle est traité par la littérature statistique et notamment économétrique, des séries temporelles, dans une optique unifiée qui cherche à choisir un type de modèle, à partir de l'identification de la nature du processus générateur de données. En ce sens, Mills et Prasad (1992), ont noté que l'une des réponses apportées, par les

---

<sup>56</sup> Cette notion de force de rappel est employée par Engel et Granger (1987), pour établir la correction au niveau du modèle à correction d'erreur lors de la détermination de l'équilibre statique à long terme par référence à l'approche de cointégration linéaire.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

statisticiens, au problème de sélection de modèles, est la minimisation d'un critère de pénalité. Les premiers critères apparaissant dans la littérature sont le critère d'information d'akaike AIC (*Akaike Information Criterion*), défini par Akaike (1973), le critère d'information bayésienne BIC (*Bayesian Information Criterion*) initié par Schwarz (1978), le critère de taille minimale de description MLD (*Minimum Description Length*), donné par Rissanen (1978). Parmi ces critères, AIC et BIC ont été largement diffusés et appliqués. D'un point de vue théorique, beaucoup de travaux ont été réalisés concernant l'amélioration de leurs propriétés statistiques et leur adaptation à des modèles spécifiques. Récemment, plusieurs versions corrigées, du critère AIC ont été proposées. Par exemples, Hurvich et Tsai (1990), ont préconisé le critère AICC (*Akaike Information Criterion Correction*), d'autres ont défini le critère c-AIC, pour sélectionner un modèle de petite taille d'observations, par rapport au nombre de paramètre à estimer ; Ronchetti (1985), a développé le critère AICR (*Akaike Information Criterion Regression*) pour la sélection d'un modèle de régression avec erreurs non gaussiennes ; Burnham et Anderson (2002), ont proposé le critère QAIC et Shi et Tsai (1998), ont proposé le critère c-QAIC pour sélectionner un modèle pour des données sur-dispersées. De même, concernant l'approche bayésienne, le critère BIC, malgré qu'il soit couramment utilisé par les statisticiens, sa construction et son interprétation restent insuffisantes pour tenir compte de beaucoup de phénomènes réels.

Mais, si l'objectif de la recherche dépasse le cadre habituel du choix de la nature d'un modèle et nous cherchons, plutôt, à sélectionner toute une structure de modèle. Ces critères, précédemment énoncés ne satisfirent pas l'objectif ainsi visé, malgré tous ses développements récents. De plus, si le choix d'une structure de modèle destiné à la prédiction, une autre limite s'ajoute à ces critères, puisqu'ils traitent la problématique de choix du type de modèle, dans un cadre très spécifique, généralement, destiné à la modélisation, et non plus, à la vacation de prédiction. Par contre, San Martini et Spezzaferrri (1984), ont précisé que la recherche d'une structure de modélisation destinée à la prédiction, nécessite, en particulier, de suivre une démarche méthodologique claire et bien définie, qui cherche, derrière cette suivie, une conception de localiser la naissance de l'erreur de prévision, à partir de l'identification de son mécanisme source de génération. Ainsi, domine l'idée selon laquelle, il sera un cadre passionnant de

recherche, si nous évoquons la problématique, qu'un cycle d'erreur de prévision est nécessairement un cycle endogène de fluctuations dynamiques? Notre travail, qui vise à expliquer la récurrence des récessions industrielles et de l'instabilité du secteur industriel, en Tunisie, dépasse, donc, le choix du type de modèle destiné à la modélisation et se concentre sur le noyau dur du dynamisme du processus générateur des erreurs de prévision à partir de ces caractéristiques spécifiques, qui sont liées au fonctionnement du processus générateur de données auxquelles nous nous sommes attachés pour vérifier plusieurs hypothèses qui sont indispensables à la caractérisation de son comportement, telles que, la linéarité contre la non-linéarité ; le statique contre la dynamique ; le déterminisme contre la stochasticité ; la stabilité contre l'instabilité,...). Mais, avant le décollage d'avance en analyse, il sera préférable de partir de la formulation, du problème de sélection de structure, de modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles.

### **1.4.3. Position du problème et les principales approches de résolutions utilisées**

Il est reconnu, maintenant, que la modélisation linéaire basée sur l'hypothèse, de stabilité statique de l'équilibre général, n'est qu'une restriction de la réalité. Car, la pratique de cette procédure de modélisation montre qu'elle est inapte, de présumer plusieurs phénomènes, de la dynamique économique décrivant les comportements des variables macroéconomiques, notamment, celles liées à la présence de l'émergence des fluctuations endogènes, asymétriques et de ruptures inconnues de tendances déterministes. Par conséquent, face aux plusieurs questions, de fond, en dynamique économique, mais pas encore abordées jusqu'à nos jours, et qui portent sur les fonctionnements et le mode de contrôle des mécanismes, de développement national endogène, notamment en industrie, notre apport consiste à suivre une nouvelle approche méthodologique, basée sur le contrôle du dynamisme des processus de transition, entre les différents états de régimes, en vue d'arriver à sélectionner la structure de modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles industrielles tunisiennes. D'autre part, jusqu'à maintenant, les procédures usuelles de sélection de structure d'un modèle non-linéaires, ignorent la dynamique



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

des fonctions des transitions incorporées dans les modèles économétriques, de changement de régimes, avec transition lisse et supposent que celles-ci, n'ont qu'un effet négligeable, sur le comportement non-linéaire de la série. Pour cette raison, l'impact de ces processus de transitions reste mal expliqué, dans la mesure où il est jusqu'à maintenant, dépourvu de tout soubassement théorique qu'empirique. En effet, selon les approches usuelles, ces procédures sont incapables de construire un modèle de prévision non-linéaire, et plus précisément, lorsque la présence de non-linéarité se manifeste dans la partie déterministe, sous la forme de ruptures structurelles endogènes. Devant cette principale limite, le champ d'investigation reste, donc, très ouvert et attaché à la prévision, dans un domaine des instabilités des structures dynamiques. Or, la complexité des structures dynamiques fait que, dans un comportement dynamique d'un processus de transition, purement déterministe, peut provenir l'aléatoire. C'est cette nouvelle conception anormale qui est source de non prédictibilité. De ce fait, sans soubassements théoriques et pratiques nécessaires, la question de comment prédire? Pire encore. À cet égard, deux problématiques s'opposent : faut-il utiliser des modèles non linéaires stochastiques, ou des modèles non linéaires déterministes, dont le chaos?

Plusieurs travaux ont été consacrés à la résolution du problème, de la sélection de structure de modèle non linéaire de prévision. Néanmoins, les plus anciens considéraient ce problème, pour un objectif, de choisir, convenablement, l'ordre de la série, qui assure l'obtention des prédictions optimales, selon un critère bien défini. Dans le cadre de ce travail, nous essayons de traiter le problème de sélection, selon une nouvelle vision plus large, que celle qui découle du raisonnement, habituellement adoptée, par les essais de modélisation de la prévision, et largement diffusée dans la plupart des applications. Ce renouvellement qui touche, radicalement, le problème de sélection qui consiste, non plus à se limiter à la détermination de l'ordre préféré de la série de prédictions selon un critère déterminé *a priori*, mais plutôt doit être compris dans le sens méthodologique, plus général, qui consiste à déterminer une méthode adéquate, garantissant une structure optimale d'un modèle de prédiction en séries temporelles non linéaires. Or, la structure d'un modèle de prédiction, en séries temporelles non-linéaires, n'est optimale que si elle satisfait, simultanément, un certain nombre de conditions, bien précises, telles que la réduction du

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

risque d'instabilité et le degré et la nature de la complexité liée, à la capacité d'ajustement. En plus, il est bien commode qu'une telle structure doit être obtenue avec le plus possible de précision requise, afin de garantir la fiabilité qui caractérise, en quelque sorte, la qualité des prédicteurs ainsi préférés. C'est dans ce cadre d'analyse que se pose, réellement, la problématique de prise de décision, par l'agent économique confronté aux problèmes de prévision, dans un domaine d'instabilité des structures. Or, l'incapacité de l'approche usuelle de remplir ces conditions qui est à l'origine d'une nécessité massive, d'un renouvellement méthodologique, capable de détecter, de classer et d'analyser la complexité noyée, dans la dynamique d'un modèle non-linéaire, en moyenne et en plus de contrôler cette complexité.

Ce n'est qu'actuellement, à la suite du développement multidisciplinaire, mené par la richesse des travaux, plus récents, en économie mathématique et en éconophysics, réalisés, notamment, par l'apport en modélisation macroéconométrique de l'usage de l'économétrie des modèles à changements de régimes et en mathématique, de l'utilisation des systèmes dynamiques et de l'approche ensembliste et finalement, par le recours à la théorie physique du chaos, à laquelle nous pourrions accorder un regain d'intérêt, sur le problème de sélection de structure de modèle de prévision non linéaire. Ceci grâce à l'utilisation des outils issus, de la théorie du contrôle optimal des perturbations, qui peuvent être aussi bien liées, à la complexité dynamique d'un modèle, qu'à l'incertitude relative à l'anticipation réalisée du comportement. Sachons que les équations de comportement déterminant, les structures des modèles économétriques, modélisant un processus générateur des données observées proviennent, par hypothèse, d'une optimisation dynamique des prévisions. Obéissant au principe, selon lequel, tout changement structurel induit par une modification au niveau de la politique économique s'accompagne, automatiquement, d'une modification de la manière, selon laquelle, sont établies ces prévisions. Ainsi, pour conceptualiser notre problématique, il faut admettre un consensus dynamique, sous-jacent, à l'économétrie moderne des processus non-linéaires.

Dans notre travail de recherche, nous focalisons nos intentions, uniquement, sur la classe des modèles de séries temporelles non-linéaires en moyenne, et plus spécifiquement les modèles

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles linéaires de prévision de séries temporelles

---

à seuil<sup>57</sup>, avec transition lisse. Nous discuterons les différentes approches déterministes et stochastiques de sélection, de structures de modèles non-linéaires de prévision, tant d'un point de vue théorique, que dans un cadre pratique. Devant la multitude des classes de modèles non-linéaires, en prédiction de séries temporelles existantes dans la famille de modèles à changement structurels, notre objectif est d'établir, selon chacune de ces deux approches déterministes et stochastiques, un critère qui permet de sélectionner, parmi toutes sortes de modèles non-linéaires, le plus adapté pour générer des données futures.

Après avoir posé le problème de la sélection de modèle non-linéaire, en prédiction de séries temporelles, nous allons exposer les concepts élémentaires pour deux techniques, qui nous aideront, ultérieurement, dans la formulation des idées présentées en introduction. Ces techniques sont l'approche ensembliste et le bootstrap. Mais, la question qui se pose à ce niveau : Pour quelles raisons nous trouvons nécessaire de passer par ces deux techniques?

La réponse à cette question nécessite d'énoncer, franchement, l'utilité de chacune de ces deux méthodes pour notre cadre d'analyse. Pour ce faire, débutons tout d'abord, par le premier outil d'arithmétique par intervalle. Walster (1988), a noté que l'apport de l'analyse par intervalle est sans limites, notamment, pour l'analyse du fonctionnement d'un processus dynamique non-linéaire. En effet, rappelons que notre apport est basé sur l'étude du fonctionnement dynamique, du processus de transition, assurant l'ajustement, entre les états dynamiques d'un modèle de changement de régime avec transition lisse. Or, comme nous avons mentionné que ce type de processus fonctionne avec plusieurs modalités de régimes, mais, qui doivent satisfaire tous le principe de transformation adaptative, des structures auto-générées et de changement par recomposition des invariances, qui s'accompagne d'un phénomène de même nature abstraite, de dynamique des structures endogènes par échanges d'intervalles de stabilité. C'est donc, grâce à l'échange par intervalle, de l'instabilité dynamique, lorsque les propriétés asymptotiques, d'un point fixe se modifient, radicalement, que les changements structurels de façon endogène ou

---

<sup>57</sup> Le choix de l'étude de ces modèles est motivé par leur capacité de rendre compte de l'asymétrie des phases du cycle économique. De tels phénomènes d'asymétrie ne peuvent pas être captés par d'autres modèles.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

déterministe, apparaissent et engendrent de fortes irrégularités, dans le comportement dynamique, d'une série temporelle macroéconomique. L'intérêt manifesté pour l'étude de la récurrence non-linéaire est que nous pourrions, alors, expliquer l'apparition de cycles endogènes par bifurcation. Or, ceci n'est réalisable, pratiquement, que si un processus de transition, est intercalé, dans la partie déterministe de la série et qu'un tel processus, soit défini et continu sur le domaine  $[0, 1]$ . De ce fait, sachant cette dernière condition, nous pouvons noter que l'emploi d'un processus purement discret, peut se révéler inapproprié, pour être qualifié d'un générateur du mécanisme de transition douce, sans grimpe ou saut. Donc, l'utilité d'un processus dynamique défini et continu sur le domaine  $[0, 1]$ , justifie bien qu'un modèle économétrique déterministe, de changement de régime, évoluant, à la fois, de façon discrète et continue, puisque il est, fondamentalement, discret mais subissant l'influence continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , de processus de transition de phase lisse existant pour modéliser l'émergence des fluctuations dynamiques, d'un cycle endogène, en industrie structurellement instable, sous l'effet potentiellement non-linéaire, des flux internes intersectoriels et intra-sectoriels dus à la restructuration. Donc jamais, un processus dynamique de transition défini et continu sur l'intervalle  $[0, 1]$  et intercalé dans la partie déterministe, d'un modèle économétrique de changement de régime avec transition lisse est pour rien! Pour cette raison, il passe par l'approche ensembliste pour identifier le fonctionnement continu et dynamique du processus de transition dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Ceci justifie bien, sans doute, notre démarche qui consiste, ici, à proposer une méthode pratique d'analyse, à la base de l'arithmétique par intervalle, capable de traiter la dynamique, de tel processus de transition, grâce à des fonctions de transitions appropriées et qui seront définies et exposées, de façon explicite ultérieurement.

Après avoir justifié notre recours prépondérant à l'approche ensembliste, nous allons justifier de même notre recours à l'usage de la technique de bootstrap. Rappelons, que la qualité de l'analyse prévisionnelle, dépend de la fiabilité des statistiques de tests employés, puisque les méthodes d'estimations sont, généralement, basées sur l'hypothèse, d'une distribution normale, du processus générateur de données. Or, nous avons, déjà, prouvé que les séries industrielles d'observations étudiées sont non gaussiennes. Par conséquent, une première solution nous mène à

penser, à leurs lois asymptotiques, comme approximations des vraies lois. Toutefois, la méthode d'approximation par une loi de distribution asymptotique requiert un échantillon de grande taille, pour que l'inférence statistique à la base de cette loi asymptotique, soit non biaisée. Si non, l'approximation peut être de mauvaise qualité et l'inférence statistique perdra, en conséquence, sa précision. Pour relâcher cette limite, nous préférons le recours à une autre méthode, plus simple, basée sur la technique du bootstrap appliquée aux modèles de régressions. Elle consiste à obtenir des approximations de la distribution des coefficients, ainsi que la distribution des erreurs de prévision. Plus précisément, le bootstrap en bloc chevauché ou « *Moving Block Bootstrap* », va nous aider à réduire cette lacune. Notons que cette technique traite les données des séries temporelles stationnaires, par regroupement en blocs non-disjoints, pour générer des données appartenant à différentes structures de dépendances, ce qui convient avec les données disponibles, des séries temporelles industrielles, qui montrent, à partir de l'analyse préliminaire déjà effectuée, qu'elles sont sous-jacent d'être générées par des processus de changement de structures.

#### **1.4.4. L'approche ensembliste**

Afin d'expliquer le principe de l'approche d'analyse par intervalle, nous commençons tout d'abord, par rappeler les principales opérations usuelles, nécessaires pour manipuler les intervalles. Par la suite, nous nous limiterons à la présentation des définitions et les concepts de base liés à la manipulation des intervalles fermés bornés.

##### ***1.4.4.1. Comparaison entre l'approche ensembliste et l'approche probabiliste (économétrique)***

Nous tentons d'expliquer à l'aide d'un exemple l'importance de la représentation ensembliste, en faveur de la représentation probabiliste et notamment économétrique. Dans le cadre de l'approche économétrique, une variable aléatoire scalaire ou vectorielle  $Y$ , est

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

représentée par sa loi ou densité de probabilité<sup>58</sup>  $p(Y)$ . Par contre, dans l'approche ensembliste la variable  $Y$  est représentée par un domaine ou ensemble de vraisemblance  $[Y]$ , supposé contenir  $Y$ . Notons que dans le premier cas, la loi de  $Y$  n'est pas définie que pour le support de définition  $\Delta$  de  $Y$ . Par contre, pour le second, le domaine  $[Y]$  peut inclure des parties où  $Y$  n'est plus défini. Supposons par exemple, que la variable aléatoire réelle continue  $Y$  admet comme densité de probabilité<sup>59</sup>  $p(Y) = (3/16)(4 - Y^2)$ , pour  $0 \leq Y \leq 2$ . Dans ce cas, le support de la loi est  $\Delta = [0, 2]$  pour lequel est définie en tout point. Par contre, si nous considérons, dans l'approche ensembliste la variable aléatoire réelle continue  $Y$ , admet comme domaine  $[0, 3]$ , alors  $[0, 3]$  est un domaine de  $Y$  pourtant il contient une zone  $]2, 3]$  où  $Y$  n'est pas définie quand elle est traitée dans un cadre probabiliste. À partir de cet exemple, nous constatons que malgré la commodité plus répandue en statistique, de la représentation probabiliste, où la manipulation des données dans ce cadre incertain nécessite un soubassement théorique et statistique considérable, plus précisément, en ce qui concerne la manière dont est distribuée la variable aléatoire associée aux données sur leur support de définition, la manipulation des données à l'aide de la représentation ensembliste est plus simple, car celle-ci ne pose aucune hypothèse pour sa mise en œuvre. D'où, nous pensons que le recours à la manipulation des ensembles, grâce à l'approche ensembliste, permet d'envisager une résolution plus garantie, que dans le cadre très particulier de l'approche probabiliste dédiée à l'usage des réels.

Afin de mieux comprendre la simplicité, dont est dotée l'applicabilité de la représentation ensembliste, nous avons recours de nouveau à une confirmation à l'aide d'un exemple explicatif. Considérons donc, deux variables aléatoires réelles continues  $Y$  et  $\tilde{Y}$  distribuées selon la loi

---

<sup>58</sup> La loi ou densité de probabilité d'une variable aléatoire  $Y$  nous informe sur la manière dont est distribuée à et elle vérifie la relation :  $\int_{\Delta} p(Y) dY = 1$  où  $\Delta$  est le support de la densité. Ce support forme l'ensemble pour laquelle la variable aléatoire  $Y$  est bien définie.

<sup>59</sup> Nous pourrions essayer de vérifier que  $\int_0^2 p(Y) dY = 3/16 [4Y - 1/3 Y^3]_0^2 = 1$ .

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

uniforme et admettant les lois de densités uniformes respectives  $p_Y(Y)=1/3$  sur  $[1, 4]$  et  $p_{\tilde{Y}}(\tilde{Y})=1/4$  sur  $[2, 6]$ . Cherchons à calculer la loi de densité de la variable aléatoire réelle continue  $X$  définie par  $X = Y + \tilde{Y}$ .

Si nous admettons l'indépendance des variables aléatoires, alors dans ce cas probabiliste, inutile de chercher à calculer la loi conjointe de  $Y$  et  $\tilde{Y}$  et un simple calcul donne sans difficulté  $p_X(X)=1/12$  sur le pavé  $[1, 4] \times [2, 6]$ . Mais, le calcul devient plus compliqué, lorsque nous rejetons l'hypothèse restrictive de l'indépendance<sup>60</sup> des variables aléatoires. Dans cette situation, nous devons, tout d'abord, passer par le calcul de la loi conjointe des variables. Or, ce calcul est, généralement, difficile et même impossible dans certains cas. Par contre, par simplicité nous pourrions chercher la loi de densité de la variable  $X$ , par une représentation ensembliste. Alors, le calcul donne :  $[X] = [1 + 2, 4 + 6] = [3, 10]$ . Notons qu'en réalité, la représentation de  $X$  par un ensemble  $[X]$  cela veut dire, tout simplement, que  $X$  est dans  $[X]$  et bien sûr ne veut pas dire que  $X$  est munie d'une loi uniforme. En terme de probabilité, cela signifie que  $X$  est à support borné et que ce support contient  $[X]$ .

Étant donné la connaissance et le soubassement théorique et statistique nécessaires pour manipuler l'approche probabiliste, le principal obstacle qui se présente est que la mise en œuvre de cette approche très particulière met en critique leur manipulation pratique, notamment, pour certains cas de résolutions non-linéaires et d'optimisation dans des domaines non convexes. Par opposition, les manipulations des problèmes d'optimisations non linéaires, dans des domaines non convexes, ainsi que la prise en compte de l'erreur de mesure sont traitées avec d'autres problèmes, plus simplement, dans un cadre plus général, avec l'approche ensembliste.

---

<sup>60</sup> Si les variables aléatoires  $Y$  et  $\tilde{Y}$  ne sont plus indépendantes, alors le calcul de la loi jointe dépend de la monotonie de relation de transformation indiquée par la variable aléatoire  $X$  et en plus du degré de complexité des lois de densités des variables.

### 1.4.4.2. Opérations sur les ensembles pures

#### Définition 1.10

Un compact de  $\mathfrak{R}^n$  est un ensemble fermé borné de  $\mathfrak{R}^n$ .

Par exemple, considérons un ensemble compact  $Y$  de  $\mathfrak{R}^n$ . Nous appelons ensemble compact *enveloppe* de  $Y$  le plus petit compact qui englobe  $Y$ , noté  $[Y]$ . Soient  $[Y]$  et  $[\tilde{Y}]$  deux compacts respectifs de  $\mathfrak{R}^n$  et  $\mathfrak{R}^p$ . Nous définissons les opérations ensemblistes pures suivantes (le produit cartésien, la projection canonique, l'intersection, l'union et l'union convexe), comme suit :

- *Produit cartésien*

$$[Y] \otimes [\tilde{Y}] = \left\{ (Y^T \ \tilde{Y}^T)^T \in \mathfrak{R}^{n+p} \mid Y \in [Y] \text{ et } \tilde{Y} \in [\tilde{Y}] \right\}$$

- *Projection canonique*

$$proj([Y])_i = \left\{ Y_i \mid \exists \bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n)^T \in \mathfrak{R}^n, \bar{Y} \in [Y] \right\}$$

- *Intersection*

$$[Y] \cap [\tilde{Y}] = \{ Y \cap \tilde{Y} \mid Y \in [Y] \text{ et } \tilde{Y} \in [\tilde{Y}] \}$$

- *Intersection convexe*

$$[Y] \cap [\tilde{Y}] = [[Y] \cap [\tilde{Y}]] = \begin{cases} \left[ \max(\underline{Y}, \underline{\tilde{Y}}); \min(\bar{Y}, \bar{\tilde{Y}}) \right] & \text{si } [Y] \cap [\tilde{Y}] \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sin on} \end{cases}$$

- *Union*

$$[Y] \cup [\tilde{Y}] = \{ Y \cup \tilde{Y} \mid Y \in [Y] \text{ ou } \tilde{Y} \in [\tilde{Y}] \}$$

- *Union convexe<sup>61</sup>*

$$[Y] \cup [\tilde{Y}] = [[Y] \cup [\tilde{Y}]] = \left[ \min(\underline{Y}, \underline{\tilde{Y}}); \max(\bar{Y}, \bar{\tilde{Y}}) \right]$$

---

<sup>61</sup> À la différence de l'union, l'union convexe de deux compacts, définit le compact enveloppe de leur union.



### 1.4.4.3. Calcul par intervalles

Comme nous l'avons déjà constaté, un intervalle peut jouer le rôle d'un ensemble de nombres réels. Alors, nous commençons notre exposition par la présentation de quelques opérations ensemblistes, pures, liées aux intervalles fermés bornés.

#### Définition 1.11

Un intervalle  $[Y] \in \mathfrak{R}$  ou intervalle réel est un sous-ensemble connexe fermé et borné de  $\mathfrak{R}$ , défini par :

$$[Y] = \{Y \in \mathfrak{R} \mid \underline{Y} \leq Y \leq \bar{Y}, \underline{Y} \in \mathfrak{R}, \bar{Y} \in \mathfrak{R}\},$$

où  $\underline{Y}$  et  $\bar{Y}$  sont respectivement des bornes inférieures et supérieures de  $[Y]$ . Nous pourrions le noter tout simplement par :

$$[Y] = [\underline{Y}, \bar{Y}]$$

L'ensemble de tous les intervalles de  $\mathfrak{R}$  est noté  $\mathcal{IR}$ . Un intervalle est caractérisé par :

- Sa longueur (en anglais : width)

$$w([Y]) = \bar{Y} - \underline{Y}, \quad w([Y]) \in \mathfrak{R}$$

- Son centre

$$m([Y]) = \frac{\bar{Y} + \underline{Y}}{2}, \quad m([Y]) \in \mathfrak{R}$$

- Son rayon

$$r([Y]) = \frac{\bar{Y} - \underline{Y}}{2}, \quad r([Y]) \in \mathfrak{R}$$

Notons que la longueur  $w([Y])$  de  $[Y]$  indique l'incertitude avec laquelle  $Y$  est bien défini par majoration avec la borne inférieure  $\underline{Y}$  et la borne supérieure  $\bar{Y}$ . Si  $\underline{Y} = \bar{Y} = Y$  le vecteur est dit dégénéré. Le cas scalaire des intervalles, peut être généralisé, dans le cas vectoriel comme suit :

#### Définition 1.12

Un vecteur intervalle  $[Y] \in \mathcal{IR}^n$  ou pavé réel est le produit cartésien de  $n$  intervalles réels de  $\mathfrak{R}$ , noté par :

$$[Y] = \bigotimes_{i=1}^n ([Y_i])$$

ou encore par :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$[Y] = \begin{pmatrix} [Y_1] \\ \vdots \\ [Y_n] \end{pmatrix}$$

où  $[Y_1], \dots, [Y_n]$  sont respectivement des vecteurs composants du pavé  $[Y]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $[Y_i] = [\underline{Y}_i, \bar{Y}_i]$  avec  $\underline{Y}_i$  et  $\bar{Y}_i$  sont les bornes respectivement inférieures et supérieures de  $[Y]$  et possédant les coordonnées  $(\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n)$  et  $(\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)$  respectives.

L'ensemble de tous les pavés de  $\mathfrak{R}$  est noté  $I\mathfrak{R}^n$ . Un pavé illustré par la figure (1.20) est caractérisé par :

- Sa longueur

$$w([Y]) = \max_{1 \leq i \leq n} (\bar{Y}_i - \underline{Y}_i), \quad w([Y]) \in \mathfrak{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Son centre

$$m([Y]) = \left( \frac{\bar{Y}_1 + \underline{Y}_1}{2}, \dots, \frac{\bar{Y}_i + \underline{Y}_i}{2}, \dots, \frac{\bar{Y}_n + \underline{Y}_n}{2} \right), \quad m([Y]) \in \mathfrak{R}^n$$

- Son rayon

$$r([Y]) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{\bar{Y}_i - \underline{Y}_i}{2} \right), \quad r([Y]) \in \mathfrak{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

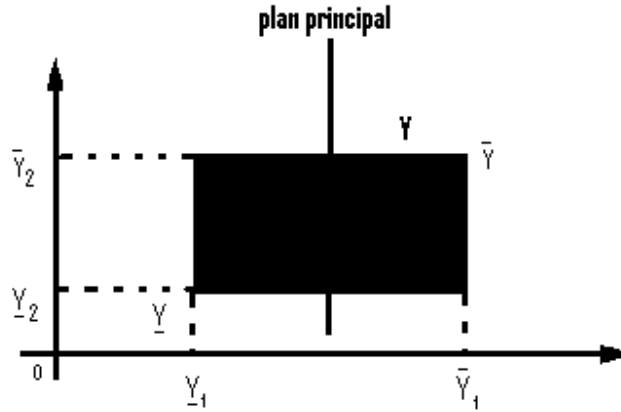
- Sa magnitude

$$mag([Y]) = \max(|\underline{Y}|, |\bar{Y}|)$$

- Sa mignitude

$$mig([Y]) = \min(|\underline{Y}|, |\bar{Y}|)$$

En ce sens, l'examen graphique de la figure (1.20), montre un pavé  $[Y]$  avec son plan principal.


**Figure 1.20: Pavé [Y] avec son plan principal**

Notons que la bisection d'un pavé  $[Y]$  est l'opération de découpage, suivant l'axe de symétrie perpendiculaire à son plus grand côté. Cette opération notée  $\vartheta$  permet de générer deux pavés fils  $[Y](1)$  et  $[Y](2)$ , à partir du pavé père noté  $[Y] = ([Y](1) | [\tilde{Y}](2))$ . Par convention de langage,  $[Y](1)$  est appelé *fils gauche* et  $[Y](2)$ , *fils droit* de  $[Y]$ .

$$\vartheta: \mathcal{IR}^n \rightarrow \mathcal{IR}^n$$

$$[Y] \mapsto \begin{cases} [Y](1) = [Y_1] \times \dots \times [\underline{Y}_i, Y_{ic}] \times \dots \times [Y_n] \\ [Y](2) = [Y_1] \times \dots \times [Y_{ic}, \bar{Y}_i] \times \dots \times [Y_n] \end{cases}$$

où  $Y_{ic} = \frac{\bar{Y}_i + \underline{Y}_i}{2}$  et  $i = \min\{k \mid w([Y]) = w([Y_k])\}$ . À titre d'exemple, la bisection du pavé

$[Y] = [-1, 1] \times [2, 5]$  génère deux pavés *fils* :

$$[Y](1) = [-1, 0] \times [2, 5] \text{ et } [Y](2) = [0, 1] \times [2, 5]$$

Après avoir défini la notion d'intervalle dans le cas univarié, ainsi que dans le cas multivarié, nous notons que les opérations usuelles, sur les ensembles connus sont aussi valides

pour rendre faisable le calcul sur les intervalles. Nous rappelons dans la suite les opérations usuelles sur les intervalles<sup>62</sup>.

#### 1.4.4.4. Opérations sur les intervalles

Les opérateurs  $\{+, -, \times, /\}$  sur les intervalles dans le cas scalaire sont définis par l'application  $\tau$  comme suit :

$$\begin{aligned} \tau \in \{+, -, \times, /\}: \mathcal{IR} \times \mathcal{IR} &\rightarrow \mathcal{IR} \\ ([Y]; [\tilde{Y}]) &\mapsto [Y] \tau [\tilde{Y}] = \{Y \tau \tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} \end{aligned}$$

De la même manière, les opérateurs vectoriels  $\{+, -, \times, /\}$  sur les pavés sont définis par l'application  $\Gamma$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma \in \{+, -, \times, /\}: \mathcal{IR}^n \times \mathcal{IR}^n &\rightarrow \mathcal{IR}^n \\ ([Y]; [\tilde{Y}]) &\mapsto [Y] \Gamma [\tilde{Y}] = \{Y \Gamma \tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous disons que  $\tau$  et  $\Gamma$  vérifient la propriété d'*inclusion monotone*<sup>63</sup> tel que :

$$[Y_1] \subset [Y_2] \text{ et } [\tilde{Y}_1] \subset [\tilde{Y}_2] = [Y_1] \tau [\tilde{Y}_1] \subset [Y_2] \tau [\tilde{Y}_2]$$

ou

$$[Y_1] \subset [Y_2] \text{ et } [\tilde{Y}_1] \subset [\tilde{Y}_2] = [Y_1] \Gamma [\tilde{Y}_1] \subset [Y_2] \Gamma [\tilde{Y}_2]$$

#### ➤ Cas d'un vecteur

- *Égalité de deux intervalles* :  $[Y] = [\tilde{Y}] \Leftrightarrow \underline{Y} = \underline{\tilde{Y}} \text{ et } \bar{Y} = \bar{\tilde{Y}}$
- *L'addition d'un réel* :  $\alpha + [Y] = \{\alpha + Y \mid \alpha \in \mathcal{R}, Y \in [Y]\} = [\alpha + \underline{Y}; \alpha + \bar{Y}]$
- *L'addition* :  $[Y] + [\tilde{Y}] = \{Y + \tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} = [\underline{Y} + \underline{\tilde{Y}}; \bar{Y} + \bar{\tilde{Y}}]$

<sup>62</sup> Pour plus de détails sur cette exposition sur les opérations arithmétiques usuelles généralisées pour le cas d'intervalle, nous conseillons les intéressés de voir les travaux de Jaulin, Kieffer, Didrit et Walter (2001).

<sup>63</sup> En  $\mathcal{IR}$  l'addition et la multiplication les lois d'associativité et de la commutativité ne sont plus valides. C'est-à-dire :

$$[Y] \left( [\tilde{Y}] + [\tilde{\tilde{Y}}] \right) \neq [Y] [\tilde{Y}] + [Y] [\tilde{\tilde{Y}}], \text{ alors que } [Y] \left( [\tilde{Y}] + [\tilde{\tilde{Y}}] \right) \subseteq [Y] [\tilde{Y}] + [Y] [\tilde{\tilde{Y}}]$$

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

• *La multiplication par un réel* :  $\alpha \times [Y] = \{\alpha \times Y \mid Y \in [Y]\} = \begin{cases} [\alpha \times \underline{Y}; \alpha \times \bar{Y}], & \text{si } \alpha \geq 0 \\ [\alpha \times \bar{Y}; \alpha \times \underline{Y}], & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases}$

• *La soustraction* :  $[Y] - [\tilde{Y}] = \{Y - \tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} = [\underline{Y} - \bar{\tilde{Y}}; \bar{Y} - \underline{\tilde{Y}}]$

• *Le maximum* :  $\max([Y], [\tilde{Y}]) = [\max(\underline{Y}, \underline{\tilde{Y}}); \max(\bar{Y}, \bar{\tilde{Y}})]$

• *La multiplication* :

$$[Y] \times [\tilde{Y}] = \{Y \times \tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} \\ = [\min(\underline{Y} \times \underline{\tilde{Y}}; \underline{Y} \times \bar{\tilde{Y}}; \bar{Y} \times \underline{\tilde{Y}}; \bar{Y} \times \bar{\tilde{Y}}); \max(\underline{Y} \times \bar{\tilde{Y}}; \underline{Y} \times \underline{\tilde{Y}}; \bar{Y} \times \underline{\tilde{Y}}; \bar{Y} \times \bar{\tilde{Y}})]$$

• *La puissance entière*:

$$\forall n \in \mathbb{N}, [Y]^n = \begin{cases} [1; 1], & \text{si } n = 0 \\ [\underline{Y}^n; \bar{Y}^n], & \text{(si } \underline{Y} \geq 0 \text{) ou (si } \underline{Y} \leq 0 \leq \bar{Y} \text{ et } n \text{ impair)} \\ [\bar{Y}^n, \underline{Y}^n], & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ [\underline{Y}^n; \bar{Y}^n], & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ [0, \max(\underline{Y}^n; \bar{Y}^n)], & \text{si } \underline{Y} \leq 0 \leq \bar{Y} \text{ et } n \text{ pair} \end{cases}$$

• *L'inverse* :  $1/[Y] = \{1/Y \mid Y \in [Y]\} = \begin{cases} [1/\bar{Y}; 1/\underline{Y}], & \text{si } 0 \notin [Y] \\ \text{non défini} & \text{si non} \end{cases}$

• *La division* :  $[Y]/[\tilde{Y}] = \{Y/\tilde{Y} \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} = \begin{cases} [Y] \times 1/[\tilde{Y}], & \text{si } 0 \notin [\tilde{Y}] \\ [-\infty, +\infty], & \text{si non} \end{cases}$

Notons que la division par un intervalle contenant zéro n'est pas définie. Pour résoudre ce problème, il faut ajouter à l'ensemble des réels  $-\infty$  et  $+\infty$ . Par conséquent, si  $[Y] = [\underline{Y}, \bar{Y}]$  et

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

$[\tilde{Y}] = [\underline{Y}, \bar{Y}]$  avec  $\underline{Y} \leq 0 \leq \bar{Y}$  et  $\underline{Y} < \bar{Y}$ , alors nous complétons la définition de la division par un intervalle contenant zéro.

$$[Y]/[\tilde{Y}] = \begin{cases} [\bar{Y}/\underline{Y}, +\infty], & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \text{ et } \bar{\tilde{Y}} = 0 \\ [-\infty, \bar{Y}/\bar{\tilde{Y}}] \cup [\bar{Y}/\underline{Y}, +\infty], & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \text{ et } \underline{\tilde{Y}} < 0 < \bar{\tilde{Y}} \\ [-\infty, \bar{Y}/\bar{\tilde{Y}}], & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \text{ et } \underline{\tilde{Y}} = 0 \\ [-\infty, +\infty], & \text{si } \underline{Y} < 0 < \bar{Y} \\ [-\infty, \underline{Y}/\underline{Y}], & \text{si } \underline{Y} \geq 0 \text{ et } \bar{\tilde{Y}} = 0 \\ [-\infty, \underline{Y}/\underline{\tilde{Y}}] \cup [\underline{Y}/\bar{\tilde{Y}}, +\infty], & \text{si } \underline{Y} \geq 0 \text{ et } \underline{\tilde{Y}} < 0 < \bar{\tilde{Y}} \\ [\underline{Y}/\bar{\tilde{Y}}, +\infty], & \text{si } \underline{Y} \geq 0 \text{ et } \underline{\tilde{Y}} = 0 \end{cases}$$

➤ **Cas d'un pavé**

Notons que toutes les définitions précédentes des opérations arithmétiques, pour le cas d'un vecteur, restent valables dans le cas général d'un pavé. En plus nous avons,

$$[Y]^r \times [\tilde{Y}] = \{Y^r \mid Y \in [Y], \tilde{Y} \in [\tilde{Y}]\} = \sum_{i=1}^n \prod ([Y_i], [\tilde{Y}_i])$$

**1.4.4.5. Propriété d'inclusion et décorrélation des variables**

Notons que les définitions précédentes des opérations arithmétiques et ensemblistes ne sont pas suffisantes toutes seules, notamment, lorsqu'il s'agit de démontrer une épreuve. Cependant, une telle tâche nécessite, en plus, de vérifier certaines propriétés qui caractérisent ces opérations sur les intervalles. Parmi ces propriétés, nous définissons la propriété fondamentale

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

d'inclusion pour les opérations sur les intervalles, comme suit : si  $Y \in [Y]$  et  $\tilde{Y} \in [\tilde{Y}]$ , alors nous aurons :

$$Y + \tilde{Y} \in [Y] + [\tilde{Y}]$$

$$Y - \tilde{Y} \in [Y] - [\tilde{Y}]$$

$$\alpha Y \in \alpha [Y]$$

$$Y \times \tilde{Y} \in [Y] \times [\tilde{Y}]$$

$$Y / \tilde{Y} \in [Y] / [\tilde{Y}] \quad \text{si } 0 \notin [\tilde{Y}]$$

$$Y \in [Y] \cup [\tilde{Y}] \quad \text{et} \quad \tilde{Y} \in [Y] \cup [\tilde{Y}]$$

$$Y \in [Y] \cap [\tilde{Y}] \quad \text{si} \quad Y \in [Y] \quad \text{et} \quad Y \in [\tilde{Y}]$$

L'un des problèmes fréquemment rencontrés, lors de la manipulation de l'arithmétique des intervalles, réside dans la présence de décorrélation partitionnement d'intervalles. Ceci s'exprime par le fait que lorsqu'une variable se répète plusieurs fois dans une expression, l'arithmétique des intervalles ignore cette répétitivité et considère les variables comme décorréliées, ce qui permet d'élargir le résultat obtenu. Afin de saisir le problème de décorréliations des variables, nous considérons l'exemple illustratif suivant : si  $Y \in [1, 2]$  et que nous voulons calculer  $(Y - Y)$ . Il est évident, que l'expression  $Y - Y$  est bornée par  $[0, 0]$ , ce qui n'est plus le cas en arithmétique des intervalles<sup>64</sup>, car  $[1, 2] - [1, 2] = [-1, 1]$ . Ce résultat satisfait bien la propriété d'inclusion, mais il est plus large que le résultat attendu  $[0, 0]$ . Pour remédier à ce problème, Moore (1979), suggère d'utiliser une méthode, dite de *raffinement*, basée sur la fonction d'inclusion, pour améliorer l'approximation d'une fonction rationnelle d'intervalle.

---

<sup>64</sup> En arithmétique des intervalles  $(Y - Y) \neq 0$ , si par exemple  $Y = [1, 2]$  alors  $Y - Y = [-1, 1] \neq 0$ . Ceci car chaque intervalle contient la différence entre tous les résultats possibles de deux nombres indépendants pour les quels  $Y$  est calculé, en particulier la différence entre deux nombres identiques.

#### 1.4.4.6. Fonction d'inclusion

Avant de définir la notion de fonction d'inclusion, nous commençons par présenter quelques fonctions élémentaires, ainsi que les fonctions intervalles qui leurs correspondent. Ratschek et Rokne (1988) et Hansen (1992), ont qualifié le théorème de Moore (1966), de théorème fondamental de l'arithmétique des intervalles.

##### **Théorème 1.1 (Moore (1966)<sup>65</sup>).**

Soit  $\text{nat}(f)([Y])$  l'extension naturelle sur les intervalles de  $f(Y)$ . Alors,  $\text{nat}(f)([Y])$  contient toutes les valeurs de  $f(Y)$  pour tout  $Y \in [Y]$ .

##### ➤ Quelques fonctions élémentaires

Soit  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction élémentaire monotone sur l'intervalle  $[Y] = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ . Alors nous désignons par  $f([Y]) = [\min\{f(\underline{Y}), f(\bar{Y})\}; \max\{f(\underline{Y}), f(\bar{Y})\}]$  l'image de cet intervalle. Si  $f \in \{\exp, \log, \cos, \sin, \text{carré}, \text{racine carrée}, \text{abs}, \dots\}$ , est une fonction élémentaire définie et continue sur une partie non vide  $A \subset \mathfrak{R}$  dans  $\mathfrak{R}$ , alors, la fonction intervalle notée  $[f]$  qui lui correspondra, dans le cas scalaire, sera indiquée par l'application définie comme suit :

$$[f] \in \{\exp, \log, \cos, \sin, \text{carré}, \sqrt{(\cdot)}, \text{abs}, \dots\} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$[Y] \mapsto [f]([Y]) = \{f(Y) \mid Y \in [Y]\}$$

Nous disons que, sous l'hypothèse de la continuité de  $f$ , l'intervalle  $[f]([Y])$  n'est autre que l'image par  $f$  de  $[Y]$  ce qui signifie que  $[f]([Y]) = f([Y])$ . Par exemples :

- La fonction exponentielle :

$$\exp([Y]) = [\exp(\underline{Y}), \exp(\bar{Y})]$$

- La fonction logarithmique :

$$\log([Y]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \bar{Y} \leq 0 \\ [\log(\underline{Y}), \log(\bar{Y})], & \text{si } \underline{Y} > 0 \\ ]-\infty, \log(\bar{Y})], & \text{si } 0 \in [Y] \end{cases}$$

<sup>65</sup> Moore, R. E., (1966), « *Interval analysis* », Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

- La fonction cosinus :

$$\cos([Y]) = [\underline{\cos(Y)}, \overline{\cos(Y)}], / \begin{cases} \underline{\cos(Y)} = \begin{cases} -1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z} \mid (2k+1)\pi \in [Y] \\ \min(\cos(\underline{Y}), \cos(\overline{Y})), & \text{sin on} \end{cases} \\ \overline{\cos(Y)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2k\pi \in [Y] \\ \max(\cos(\underline{Y}), \cos(\overline{Y})), & \text{sin on} \end{cases} \end{cases}$$

- La fonction sinus :

$$\sin([Y]) = [\underline{\sin(Y)}, \overline{\sin(Y)}], / \begin{cases} \underline{\sin(Y)} = \begin{cases} -1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z} \mid (2k-1/2)\pi \in [Y] \\ \min(\sin(\underline{Y}), \sin(\overline{Y})), & \text{sin on} \end{cases} \\ \overline{\sin(Y)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z} \mid (2k+1/2)\pi \in [Y] \\ \max(\sin(\underline{Y}), \sin(\overline{Y})), & \text{sin on} \end{cases} \end{cases}$$

- La fonction carrée :

$$[Y]^2 = \begin{cases} [\underline{Y}^2, \overline{Y}^2], & \text{si } Y > 0 \\ [\overline{Y}^2, \underline{Y}^2], & \text{si } Y < 0 \\ [0, \max(\underline{Y}^2, \overline{Y}^2)], & \text{si } 0 \in [Y] \end{cases}$$

- La fonction racine carrée :

$$\sqrt{[Y]} = \begin{cases} [\sqrt{\max(\underline{Y}, 0)}, \sqrt{\overline{Y}}], & \text{si } \overline{Y} \geq 0 \\ \emptyset, & \text{si } \overline{Y} < 0 \end{cases}$$

- La fonction valeur absolue :

$$|([Y])| = \min\{|Y| \mid Y \in [Y]\}$$

À titre illustratif, nous rappelons l'exemple de Lhomme (1993), qui a considéré comme fonction réelle définie par l'expression explicite  $f(Y) = (Y+1)/Y$ . Nous pouvons donc, extraire les deux extensions naturelles  $f_1$  et  $f_2$  définies chacune sur  $\mathcal{IR}$  par :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$f_1([Y]) = ([Y]+1)/[Y] \text{ et } f_2([Y]) = 1+1/[Y]$$

Pour  $[Y] = [1, 2]$ , l'évaluation des deux extensions naturelles donne respectivement  $f_1([Y]) = [1, 3]$  et  $f_2([Y]) = [3/2, 2]$ . À propos de cet exemple, nous pouvons faire deux remarques. La première c'est que l'extension naturelle pour une fonction n'est pas unique, alors que la seconde implique que, plus l'extension naturelle de  $f$  contient une occurrence multiple de  $[Y]$ , moins elle sera précise. De ce fait,  $f_2([Y])$  est plus précise que  $f_1([Y])$ . Nous constatons donc, que le choix de l'extension naturelle possède des conséquences décisives sur la qualité de performance des calculs et par la suite, sur les résultats obtenus en analyse par intervalles. Par conséquent, il est souhaitable d'éviter ou de minimiser le plus possible, des occurrences multiples des variables, lors de l'établissement d'une extension naturelle. En particulier, si la fonction  $f$  est sans occurrence multiple de variable. Alors, l'extension naturelle  $nat(f)([Y])$  de l'expression de  $f$  dans un domaine  $[Y]$  est égale à l'intervalle exacte, de variation de  $f$  dans  $[Y]$  noté  $exact(f)([Y])$ .

➤ **Fonction d'inclusion**

Moore (1966), a défini la fonction d'inclusion comme suit :

**Définition 1.13**

Soit  $F([Y])$  l'extension sur les intervalles de  $f : D^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  évaluée sur un domaine  $[Y] \in I\mathfrak{R}$ . S'il existe une constante  $K$ , indépendante de  $[Y]$  tel que :

$$w(F([Y])) - w(exact(f)([Y])) \leq K w([Y])^\lambda$$

Pour tout les domaines  $[Y]$  avec  $w([Y])$  suffisamment petit,  $exact(f)([Y])$  est l'intervalle exacte de variation de  $f$  dans  $[Y]$  et un réel strictement positif  $\lambda$  fixé, nous disons que  $F$  est une fonction d'inclusion d'ordre  $\lambda$ . Si  $\lambda = 1$  (resp.  $\lambda = 2$ ), alors la fonction d'inclusion  $F$  est dite de premier ordre ou linéaire (resp. de second ordre ou quadratique).

À partir de la définition proposée par Moore (1966), nous pouvons fournir simplement la définition suivante :

**Définition 1.14**

Soit  $f : D^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  une fonction réelle définie sur un domaine  $D^n \subset \mathfrak{R}^n$ . Nous définissons une fonction d'inclusion de  $f$  la fonction ensembliste  $[f] : ID^n \rightarrow I\mathfrak{R}^m$  tel que pour tout pavé  $[Y] \in ID^n$  elle vérifie :

$$f([Y]) \subseteq [f]([Y])$$

où  $f([Y]) = [\inf_{Y \in [Y]}(f(Y)), \sup_{Y \in [Y]}(f(Y))]$ .

Généralement, la valeur numérique, donnée par l'encadrement de la fonction d'inclusion n'est pas unique. Elle dépend de la manière de gestion de son expression explicite, lors du calcul. Par exemple, lors du calcul nous pourrions constater que les valeurs numériques des deux expressions  $([Y] \times [Y])$  et  $[Y]^2$  ne donnent pas les mêmes résultats. De même, pour les trois expressions  $1/([Y] \times [Y])$ ,  $(1/[Y]) \times (1/[Y])$  et  $[Y]^{-2}$  ne sont pas équivalentes. Selon Ratschek (1985) et Moore et Ratschek (1988), ceci peut être interprété du fait que, les occurrences d'une même variable  $Y$  peuvent varier indépendamment l'une des autres. Empiriquement, il n'y pas de méthode standard, permettant de donner l'encadrement minimal d'une fonction d'inclusion. Mais, nous remarquons, comme l'ont fait Jaulin, Kieffer, Didrit et Walter (2001), que plus la présence de la variable  $Y$  est fréquente, dans l'expression explicite de sa fonction d'inclusion  $[f]$ , plus le nombre des valeurs numériques des encadrements de  $[f]([Y])$ . D'une manière générale, la fonction d'inclusion sera traitée, comme si chaque occurrence de la variable, qui apparaît plusieurs fois, serait différente. En cas d'absence d'occurrence multiple, l'évaluation de la fonction d'inclusion donne des intervalles plus précis. Ceci peut être schématisé à l'aide de la figure (1.21).

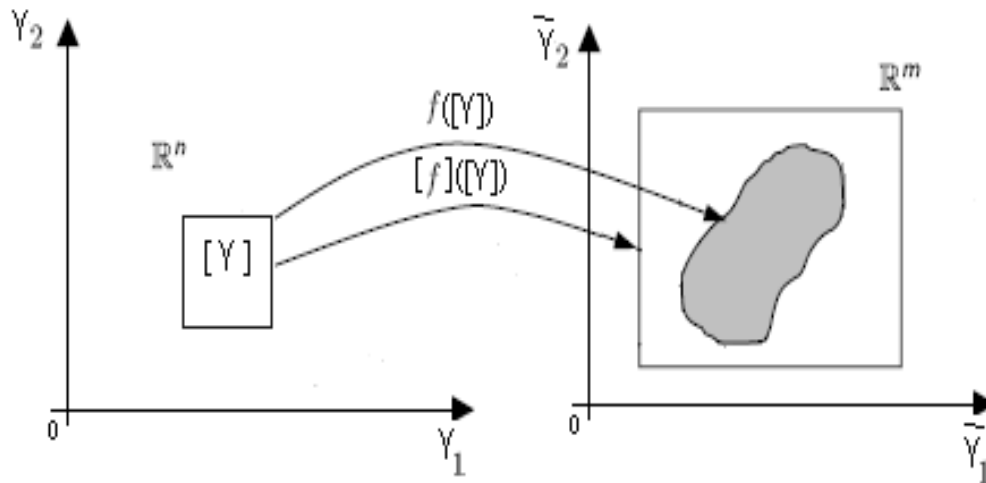


Figure 1.21: Fonction d'inclusion

Notons que pour tout  $([Y], [\tilde{Y}]) \in \mathcal{IR}^n \times \mathcal{IR}^n$ , la fonction d'inclusion  $[f]$  est :

- Minimale, si elle vérifie  $[f]^*([Y]) = [f]([\tilde{Y}])$ .

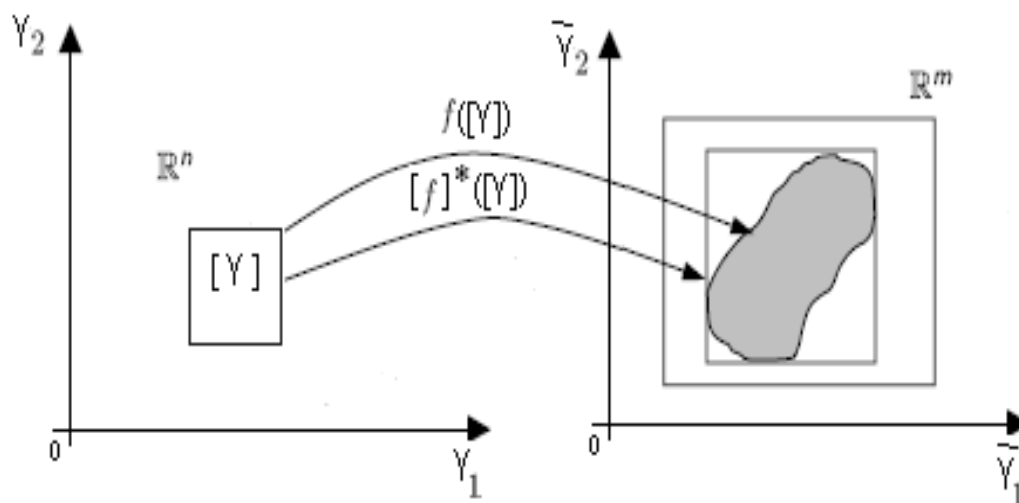


Figure 1.22: Fonction d'inclusion minimale

- Monotone, si elle vérifie  $([Y] \subset [\tilde{Y}]) \Rightarrow ([f]([Y]) \subset [f]([\tilde{Y}]))$ .

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

- Convergente, si elle vérifie  $\lim_{k \rightarrow \infty} w([Y](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w([f]([\tilde{Y}](k))) = 0$ .

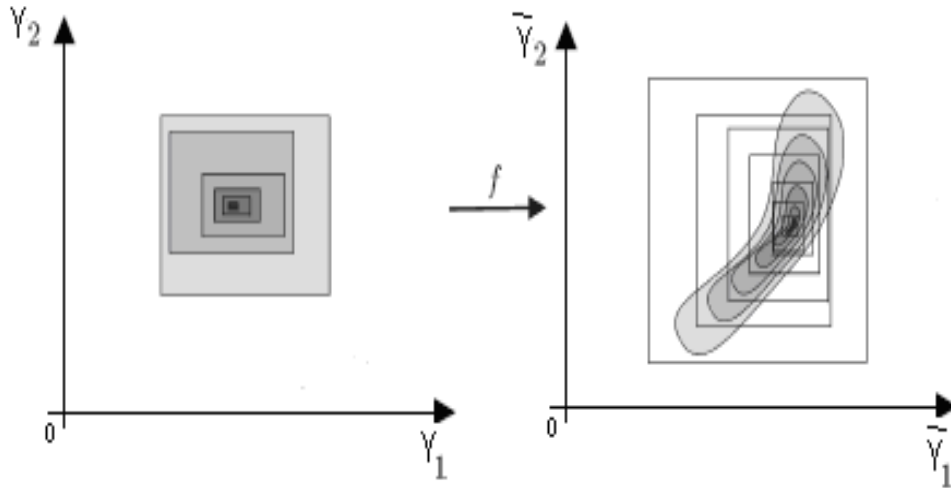


Figure 1.23: Fonction d'inclusion monotone et convergente

Notons qu'à partir de l'inclusion suivante  $[Y] \subseteq [\tilde{Y}] \Rightarrow f([Y]) \subseteq f([\tilde{Y}])$ , nous aurons la possibilité d'appliquer la méthode dite, de *raffinement*, de Moore (1966), pour améliorer l'approximation d'une fonction rationnelle d'intervalle. Ceci nous conduit à définir ces deux propriétés, qui illustrent l'idée d'améliorer la précision de l'intervalle image, par partitionnement de l'intervalle antécédent. Cette idée consiste, donc, à subdiviser en  $K$  portions d'intervalle initial  $[\underline{Y}, \bar{Y}]$ , de la manière suivante :

$$[\underline{Y}, \bar{Y}] = \bigcup_{k=1}^K \left[ \underline{Y} + (k-1) \frac{(\bar{Y} - \underline{Y})}{K}, \underline{Y} + (k) \frac{(\bar{Y} - \underline{Y})}{K} \right]$$

et par conséquent ;

$$\{f(Y) | Y \in [\underline{Y}, \bar{Y}]\} \subseteq \bigcup_{k=1}^K f \left( \left[ \underline{Y} + (k-1) \frac{(\bar{Y} - \underline{Y})}{K}, \underline{Y} + (k) \frac{(\bar{Y} - \underline{Y})}{K} \right] \right) \subseteq f([\underline{Y}, \bar{Y}])$$

#### 1.4.4.7. Contracteurs

Neumaier (2004), a proposé la définition suivante :

##### Définition 1.15

Soient  $f$  est une fonction vectorielle continue de  $\mathfrak{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}$  et de dimension  $n$ ,  $[Y]$  un pavé de  $\mathfrak{R}^n$  et  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$  un vecteur de taille  $n$ . Une contrainte  $f(\tilde{Y}) \in [Y]$ , notée  $C$  est un sous-ensemble de  $\mathfrak{R}^n$  défini par :

$$C = \{ \tilde{Y} \in \mathfrak{R}^n \mid f(\tilde{Y}) \in [Y] \} = f^{-1}([Y])$$

La réduction de  $[\tilde{Y}]$  sous la contrainte  $C$ , consiste à trouver un pavé  $[\hat{Y}] \subset [\tilde{Y}]$ , qui contient de façon garantie l'ensemble  $S = C \cap [\tilde{Y}]$ .

Dans nombreuses applications, notamment en prévision déterministe d'un modèle dynamique non-linéaire à temps discret par l'approche ensembliste, se pose le problème de satisfaction de contraintes CSP « *Constraint Satisfaction Problem* » défini, à partir d'un ensemble de variables  $Y_1, \dots, Y_n$ ; d'un ensemble d'intervalles  $[Y_1], \dots, [Y_n]$  et d'un ensemble de contraintes reliant ces variables comme suit :

$$\Sigma : ( f(Y) = 0, Y \in [Y] )$$

L'objectif est de déterminer le plus petit domaine  $\Sigma^* \in [Y]$  contenant les solutions de CSP. Ce problème peut être vu, comme un problème d'optimisation globale non-linéaire déterministe avec contraintes, dont la résolution optimale donne  $\Sigma^*$  dite ensemble admissible, nécessite une réduction (contraction) de l'ensemble initial, à l'aide d'un contracteur, défini par :

##### Définition 1.16

Soient  $[Y]$  un pavé de  $\mathfrak{R}^n$  et  $S$  un ensemble défini par des inégalités non-linéaires. Un contracteur pour  $S$  est l'opérateur

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

$$C_S : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$$

$$[Y] \mapsto C_S([Y]) \supseteq [[Y] \cap S]$$

tel qu'un contracteur optimal ou idéal pour  $S$  est un contracteur  $C_S^*$  vérifiant :

$$C_S^*([Y]) = [[Y] \cap S].$$

En se référant à cette définition, un opérateur  $C_S^*$  est l'idéal contracteur pour le problème de CSP de l'ensemble de contraintes  $S$ , s'il vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall [Y] \in \mathcal{R}^n, \begin{cases} C_S^*([Y]) \subset [Y] \Rightarrow \text{contraction} \\ C_S^*([Y]) \cap \Sigma = [Y] \cap \Sigma \Rightarrow \text{correction} \end{cases}$$

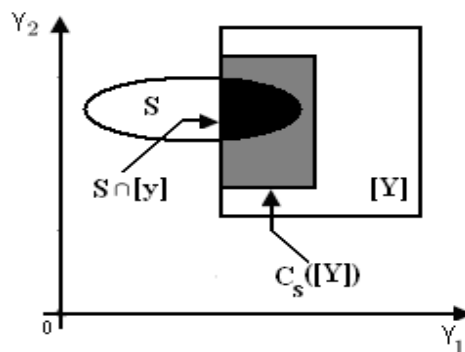


Figure 1.24: Contraction d'un pavé  $[Y]$  par rapport à  $S$

Cependant, dans le domaine de la prévision d'un modèle dynamique, non linéaire, déterministe, où règne l'incertitude, qui provient des erreurs structurelles sur les données prédictives, tant pour la modélisation, due à l'approximation des variables, en réalité évolutionnistes, que pour la mesure due aux arrondis des paramètres dynamiques flottants. Kearfott (1990), Belforte, Bona et Cerone (1990) et Jaulin (2000), ont suggéré qu'il n'y a pas des techniques pouvant fournir des résultats tout à fait parfaits.

Afin de faire face à cette insuffisance, récemment, Jaulin et Walter (1993a-b), Jaulin, (2000), Jaulin, Kieffer, Braems et Walter (2001), ont adopté une technique d'arithmétique des intervalles basée sur la propagation de contraintes sur les intervalles, en vue d'apporter une solution globale et garantie à la représentation des données imprécises. Jaulin, Kieffer, Didrit et Walter (2001), ont énoncé plusieurs types de contracteurs basés sur différents principes.

### 1.4.5. L'approche du bootstrap

Flachaire et Hollard (2007), ont insisté que la construction et la sélection d'un modèle de prévision, nécessite le recours à des méthodes statistiques non-paramétriques de simulation par technique de Bootstrap. Soit un modèle non-linéaire de la forme :

$$Y_t = S(Y_{t-1}, \Psi) + \varepsilon_t$$

Ces méthodes ont montré leur efficacité, pour beaucoup d'applications, dans des domaines très variés. En particulier, le bootstrap a fait preuve de son efficacité pour évaluer la qualité des modèles de prévisions. Cette technique de bootstrap introduite par Efron (1979), est basée sur le ré-échantillonnage et elle requiert que l'on dispose d'un échantillon, sans l'obligation que sa loi de répartition soit connue, à l'inverse de la technique de simulation paramétrique de Monte Carlo.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons comment utiliser le bootstrap dans le cadre de construction des modèles de prévisions des séries temporelles, et nous énonçons ses propriétés dans le cadre du modèle non-linéaire, avant de les étendre au cas empirique dans la deuxième partie. Flachaire (2003, p. 50), énonce le principe de bootstrap comme suit :

*« Dans les modèles de régression, le principe du bootstrap consiste à spécifier un DGP (Data Generating Processes), nommé DGP bootstrap, en remplaçant les paramètres et distributions de probabilités inconnus dans le modèle, par des estimations empiriques de ces derniers. La distribution de probabilité de la statistique de test sous ce DGP artificiel est appelée loi bootstrap. On calcule un test bootstrap ou une p-value bootstrap en utilisant la loi bootstrap pour loi normale. ».*



Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Davidson et MacKinnon (2004), ont souligné que la technique de bootstrap occupe une place privilégiée, dans les méthodes économétriques, basées sur les nouvelles techniques de ré-échantillonnage. C'est une technique d'estimation non-paramétrique, qui permet d'évaluer le biais, la variance ou toute autre mesure de dispersion autour de l'estimer.

Soit  $B_0$ , un échantillon de  $n$  variable aléatoire indépendant et de même loi que le couple la  $(Y, \check{Y}) = (Y_1, \dots, Y_p; \check{Y})$  de variables réelles. Le vecteur  $(Y, \check{Y})$  de variables admet une distribution bidimensionnelle  $S$ , inconnue et dépendante d'un vecteur de paramètres  $\Psi$ . Le problème consiste à estimer  $\Psi$ , par une statistique  $\Psi = \tilde{S}(Y, \check{Y})$ . La question qui se pose est, donc, d'établir la précision de cet estimateur, sachant que la distribution  $S$  est inconnue?

Dans le but d'évaluer cette précision, nous répliquons  $B$  échantillons, à partir de l'échantillon initial  $B_0 = \{(Y_i, \check{Y}_i); 1 \leq i \leq n\}$  de  $(Y, \check{Y})$ , par ré-échantillonnage. Ces échantillons  $B^{*bootstrap}$  sont appelés échantillons bootstrappés de même loi que le couple  $(Y, \check{Y})^{*bootstrap}$  et nous obtiendrons :

$$B^{*bootstrap} = \{(Y_i^{*bootstrap}, \check{Y}_i^{*bootstrap}); 1 \leq i \leq n\}$$

construit par un tirage aléatoire uniforme et avec remise sur les composantes de l'échantillon  $B_0$  tel que,

$$P_U \left( (Y_i^{*bootstrap}, \check{Y}_j^{*bootstrap}) = (Y_j, \check{Y}_j) \right) = \frac{1}{n}; \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

où  $P_U$  est la loi uniforme sur les données originales  $B_0$ . La fonction de distribution de l'échantillon bootstrappé  $B^{*bootstrap}$  est la distribution empirique  $\hat{S}$  de la variable  $(Y, \check{Y})$ . Une réplique bootstrap de l'estimateur  $\Psi = \tilde{S}(Y)$  est donnée par :

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

$$\hat{\Psi}^{*bootstrap} = \tilde{S}(Y^{*bootstrap})$$

Par exemple, pour la moyenne de l'échantillon  $Y$ , l'estimateur est  $\tilde{S}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$  et une réplique bootstrap de cet estimateur sera donnée par :

$$\tilde{S}(Y^{*bootstrap}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{*bootstrap}$$

Ainsi, l'estimateur bootstrap  $\hat{\sigma}_{bootstrap}(\hat{\Psi})$  de l'écart type de  $\hat{\Psi}$  est calculé par:

$$\hat{\sigma}_{bootstrap}(\hat{\Psi}) = \left[ \frac{1}{B-1} \sum_{bootstrap=1}^B (\hat{\Psi}^{*bootstrap} - \overline{\hat{\Psi}^*})^2 \right]^{1/2}$$

où

$$\overline{\hat{\Psi}^*} = \frac{1}{B} \sum_{bootstrap=1}^B \hat{\Psi}^{*bootstrap}$$

**Tableau 1.15: L'algorithme de bootstrap pour l'estimateur bootstrap de l'écart type**

Distribution empirique	Échantillons bootstrappés	Répliques bootstrap de $\Psi$
	$Y^{*1}$	$\hat{\Psi}^{*1} = \tilde{S}(Y^{*1})$
	$Y^{*2}$	$\hat{\Psi}^{*2} = \tilde{S}(Y^{*2})$
	$Y^{*3}$	$\hat{\Psi}^{*3} = \tilde{S}(Y^{*3})$
	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{F}$	$Y^{*B}$	$\hat{\Psi}^{*B} = \tilde{S}(Y^{*B})$
	$\hat{\sigma}_b$	

Le nombre  $B$  de répliques est généralement compris entre 25 et 200.

Davidson et MacKinnon (2003), montrent que par conjonction avec ces procédures de ré-échantillonnage, des tests d'hypothèses et des régions de confiance peuvent être construits. Puisqu'il existe une relation duale entre les intervalles de confidences et les tests d'hypothèses : un intervalle de confiance avec un niveau de confiance  $(1-\alpha)\%$  contient l'ensemble des valeurs

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

des paramètres, qui ne rejettent pas l'hypothèse nulle, au risque d'erreur  $\alpha\%$ . Comment construisons-nous, donc, des intervalles de confiance par bootstrap en blocs chevauchés?

Par construction, Efron (1987), prouve qu'un intervalle de confiance bootstrap par la méthode de percentile, aura la forme suivante :

$$[\hat{\Psi} - \zeta_{1-\alpha}^* \hat{\sigma}_{bootstrap}(\hat{\Psi}) ; \hat{\Psi} + \zeta_{\alpha}^* \hat{\sigma}_{bootstrap}(\hat{\Psi})]$$

où, les seuils critiques de la loi de bootstrap de la quantité  $\xi^* = (\hat{\Psi}^{bootstrap} - \hat{\Psi}) / \hat{\sigma}(\hat{\Psi}^{bootstrap})$  suit un pivot asymptotique.  $\zeta_{1-\alpha}^{bootstrap}$  et  $\zeta_{\alpha}^{bootstrap}$  sont respectivement les percentiles  $100(1-\alpha)$  et  $100\alpha$  de la loi bootstrap. Hall (1994), affirme que cet intervalle tient compte d'une possible asymétrie de la distribution de probabilité.

Plusieurs travaux de recherches ont essayé d'améliorer la technique de bootstrap et faire étendre son champ d'applicabilité, pour les séries temporelles. Dans ce cadre, nous pouvons distinguer entre les séries temporelles stationnaires et les séries temporelles non stationnaires. Bühlmann, (1997-1998), Flachaire (2001) et Davidson et MacKinnon (2003), affirmaient que le ré-échantillonnage doit tenir compte du caractère de dépendance, dans le temps du processus générateur de données.

Pour les séries stationnaires, Freedman (1984) et Bose (1988), ont proposé la méthode de bootstrap récursif pour un modèle paramétrique, avec une structure sous-jacente indépendante et identiquement distribuée. Efron et Tibshirani (1993), ont proposé le bootstrap par blocs, qui est une généralisation de la méthode de bootstrap récursif, pour les séries temporelles stationnaires, lorsque nous ignorons toute information sur la forme de la dépendance des données. Son principe consiste à regrouper les résidus centrés dans des blocs de longueur  $\rho$ , afin de capter, le mieux possible, la dépendance existante. Breusch (1980), a évoqué la possibilité selon laquelle le ré-échantillonnage se fait en tirant de manière indépendante et avec remise ces blocs.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

Cette contribution de base a amené les chercheurs à penser de deux manières différentes de construire des blocs. Carlstein (1986) et Carlstein, Do, Hall, Hesterberg et Künsch (1995), ont proposé une première manière, qui consiste à tirer des blocs disjoints qui sont composés d'observations ne pouvant pas appartenir à un autre bloc. Künsch (1989), a proposé une deuxième technique, dite le bootstrap en blocs chevauchés MBB « *Moving Block Bootstrap* », qui consiste à tirer des blocs non disjoints.

L'avantage de cette seconde technique MBB, comme l'indique Lahiri (1999), c'est qu'elle permet de répliquer la structure dépendante des données et de passer outre l'hypothèse forte d'erreurs indépendantes et identiquement distribuée. De plus, la longueur de chaque bloc reste fixe. Les quatre étapes de cette procédure sont décrites comme suit :

**1<sup>ère</sup> Étape:**

Construire  $b = T - k + 1$  blocs de longueur  $k$  à partir des données.

**2<sup>ème</sup> Étape:**

Créer un nouvel échantillon en tirant avec remplacement parmi les  $b$  blocs précédemment construits au moyen d'une loi uniforme de grandeur  $b$ .

**3<sup>ème</sup> Étape:**

Pour chaque nouvel échantillon, calculer les coefficients à l'aide de moindres carrés non-linéaires.

**4<sup>ème</sup> Étape:**

Répéter les étapes 2 et 3  $B$  fois ( $B$  étant le nombre de réplifications de bootstrap).

Ces  $B$  réplifications créeront ainsi une distribution de bootstrap à partir de laquelle il sera possible d'inférer des valeurs critiques, aux seuils de significations désirées, pour obtenir des conclusions appropriées aux tests d'hypothèses.

L'inconvénient principal de ces techniques, c'est qu'elles génèrent des données qui n'ont pas la même structure de dépendance que les données d'origines. La construction de blocs indépendants laisse supposer que les données sont indépendantes, après un certain nombre de

retards. Basawa, Mallik, McCormick, Reeves et Taylor (1991), ont proposé la technique de bootstrap appliquée aux modèles non stationnaires. Les recherches réalisées dans cette perspective tirent leur fondement, des contributions sur la méthode de bootstrap en blocs chevauchés de Künsch (1989), réalisées dans un cadre d'analyse linéaire. Elles se sont enrichies à partir des années quatre-vingt-dix, grâce aux apports de Davidson et MacKinnon (1999), issus d'un cadre d'analyse non-linéaire. Dans la même perspective, Breiman (1996) et Lee et Yang (2006), ont proposé une méthode de prévision basée sur l'agrégation bootstrap dite (*Bagging bootstrap aggregating*), capable de prendre en considération l'effet d'asymétrie d'une série temporelle.

## 1.5. Conclusion de la première partie

L'intérêt que nous pourrions accorder pour la prévision, à repérer des cycles endogènes est, tellement évident, que nous sommes attirés, ici, par l'étude de la dynamique des fluctuations cycliques des séries de la production industrielle, en Tunisie. L'étude descriptive par identification et caractérisation de l'émergence des fluctuations industrielles est tellement intéressante, qu'elle exhibe les faits stylisés, inhérents, de la dynamique non-linéaire du secteur industriel. En ce sens, la présence des distributions multimodales, d'une asymétrie des caractéristiques dynamiques, des fluctuations cycliques sectorielles en industrie et l'évidence des changements de structures endogènes, constituent des thèmes fondamentaux qui attirent nos intentions, vers l'éclairage de la problématique qui s'interroge sur le noyau dur de la modélisation macroéconométrique contemporaine à savoir : Comment sélectionner un modèle de prévision dans le domaine des instabilités endogènes des structures dynamiques?

Certes, compte tenu de la dynamique non-linéaire des fluctuations cycliques endogènes, il est intéressant de suivre chaque trajectoire décrivant l'évaluation de l'information prédictive, à travers le mouvement cyclique, ayant comme source de naissance et d'émergence, la dynamique d'un processus d'ajustement, garantissant le lissage par transition, entre les différents régimes

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

possibles et obéir, à la théorie d'auto-génération par transformation adaptative, des structures endogènes et de changement par recombinaison des invariances. L'éclairage de ce principe guide, graduellement, notre intension, vers la présence des non-linéarités, qui se manifestent à travers l'irrégularité des formes dynamiques dans la partie déterministe, sous forme de saut en niveau (en moyenne) du processus générateur de données. Bien sûr ces ruptures endogènes sources d'instabilité endogène sont atténuées par des continues transitions générées par des processus d'ajustement dynamique définis et continus sur l'intervalle  $[0,1]$ . Ceci malgré qu'il nécessite une preuve mathématique<sup>66</sup>, pourtant il justifie pour le moment la raison pour laquelle nous sommes guidés, vers la modélisation non-linéaire à changement de régimes endogènes, qui est en concordance parfait avec l'événement, selon lequel la Tunisie a suivi une gamme très sophistiquée de politiques de réformes structurelles et de changements radicaux, notamment, de restructuration industrielle.

Naturellement, les prévisions élaborées à partir de modèles classiques de séries temporelles n'étaient fondées que sur des combinaisons linéaires de valeurs présentes et passées de chocs. Néanmoins, ces propriétés statiques sont difficiles, voire même rares à reproduire dans la réalité. En effet, le théorème central de l'analyse des séries temporelles, qui est le théorème de Wold, indique que tout processus faiblement stationnaire, peut être réécrit sous la forme d'une moyenne mobile, infinie, de processus de type bruits blancs. C'est-à-dire, sous la forme d'une combinaison linéaire d'une séquence de variables aléatoires, non-corrélées, dans le temps. Par conséquent, l'hypothèse d'un processus linéaire stationnaire ne permet pas de prendre en compte, d'une part les mécanismes d'asymétrie et d'autre part les ruptures endogènes de fortes amplitudes. De ce fait, l'analyse statique fondée sur les propriétés statistiques des méthodes classiques (variabilité, non-stationnarité) reste, toujours, incapable d'identifier correctement la structure optimale d'un modèle de prévision associé à un processus quelconque générateur de données, caractérisant une série temporelle. Puisque, l'utilisation de ces méthodes, ignore le caractère endogène des structures, qui justifie l'approche dynamique discrète, selon laquelle le

---

<sup>66</sup> Cette preuve fait l'objet de la deuxième partie de ce document.

Partie I : Asymétrie des fluctuations, ruptures de tendances et insuffisances des modèles  
linéaires de prévision de séries temporelles

---

comportement d'un processus générateur de données est issu d'un système déterministe récurrent, généralement, complexe, qui évolue dans le temps, en changeant constamment sa structure selon le principe de changement par *recomposition des invariances*. D'où, si nous admettons comme hypothèse qu'en présence d'une fluctuation endogène, il arrive que la dynamique discrète non-linéaire montre qu'il y a des fortes interactions entre les différentes structures endogènes engendrées par la coexistence d'échelles spatiales de diverses dimensions, alors l'invariance par changement d'échelle, qui est une caractéristique spécifique du changement des comportement qualitatifs par bifurcations suite à la perte de stabilité des cycles endogènes des séries temporelles non-linéaires n'est réalisable que grâce à la quantification discrete des invariants dynamiques ou *variétés invariantes* qui caractérisent les degrés de complexités des processus dynamiques non-linéaires sous-jacents, leurs degrés d'irrégularités et leurs dimensions lors de la divergence des échelles après itérations successives. Ceci, justifie la nécessité d'aller vers des modélisations économétriques non-linéaires en moyennes. Il semble donc, important, de conclure cette première partie, en attirant l'attention sur un point méthodologique essentiel, gouverné par la nécessité de débiter la deuxième partie, à partir de l'analyse des propriétés dynamiques discrètes non-linéaires et de la complexité, associées aux processus autorégressifs à seuil avec transitions lisses, capables en plus de généraliser ces phénomènes, de modéliser économétriquement des cycles endogènes.

## Partie II

# **Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes : Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries temporelles non-linéaires**

*Avec toutes ces armes, enquêtes, modèles, machines, etc., la prévision semble orientée dans une voie toute nouvelle. Elle paraît s'être définitivement affranchie (ce serait encore à vérifier) des restes de magie qui subsistent au coeur de chacun. On est donc enclin à rejeter au musée les vieux baromètres de conjoncture. Il faut se garder, cependant, d'un geste trop prompt.*

*Alfred Sauvy (Conjoncture et prévision économiques, 1962)  
(Économie et statistiques N° 359-360, 2002)*



<b>Sommaire Partie II.....</b>	<b>164</b>
<b>2.0. Introduction de la partie II.....</b>	<b>165</b>
<b>2.1. Cadre théorique de cycles et de fluctuations économiques .....</b>	<b>173</b>
2.1.1. Les nouvelles théories économiques du cycle.....	173
2.1.1.1. <i>Théorie exogène du cycle et sa remise en cause .....</i>	<i>173</i>
2.1.1.2. <i>Théorie endogène du cycle et révolution de la pensée économique.....</i>	<i>177</i>
2.1.2. <b>La non-linéarité issue de la dynamique des fluctuations cycliques : perte de stabilité locale de l'équilibre dynamique.....</b>	<b>185</b>
2.1.2.1. <i>Une approche de modélisation de la dynamique des fluctuations cycliques.....</i>	<i>185</i>
2.1.2.2. <i>Existence de cycle endogène.....</i>	<i>206</i>
<b>2.2. Cycle limite et bifurcation de Hopf.....</b>	<b>218</b>
2.2.1. <b>Cycles limites.....</b>	<b>218</b>
2.2.2. <b>Doublement de périodes, bifurcations et chaos.....</b>	<b>234</b>
2.2.2.1. <i>Justification de l'introduction de ruptures déterministes.....</i>	<i>234</i>
2.2.2.2. <i>Convergence et justification de formation de cycle endogène .....</i>	<i>248</i>
2.2.2.3. <i>Stabilité des cycles (super-attractivité).....</i>	<i>282</i>
2.2.2.4. <i>Dynamique chaotique et couplage des périodes.....</i>	<i>294</i>
2.2.2.5. <i>Les outils de détection du chaos.....</i>	<i>312</i>
<b>2.3. Une approche dynamique en prédiction de séries temporelles non-linéaires.....</b>	<b>318</b>
2.3.1. <b>Structures cohérentes et prévisibilité par des techniques non-paramétriques locales.</b>	<b>318</b>
2.3.1.1. <i>Prédiction ponctuelle.....</i>	<i>325</i>
2.3.1.2. <i>Prédiction par intervalle de confiance.....</i>	<i>325</i>
2.3.2. <b>Structures incohérentes et croissance de l'erreur de prévision.....</b>	<b>327</b>
<b>2.4. Prévision dynamique par l'approche à erreur bornée.....</b>	<b>336</b>
2.4.1. <b>Les concepts de base.....</b>	<b>336</b>
2.4.2. <b>Méthodologie et applications.....</b>	<b>348</b>
2.4.2.1. <i>Technique d'optimisation globale et de contrôle.....</i>	<i>351</i>
2.4.2.2. <i>Prévision par intervalle à erreur bornée.....</i>	<i>357</i>
<b>2.5. Conclusion de la deuxième partie.....</b>	<b>366</b>

## 2.0. Introduction de la partie II

Tout au long de cette dernière décennie, l'économétrie des séries temporelles, à temps discret, a été dominée par la modélisation linéaire, et plus particulièrement, par les modèles de type ARMA, qui ont été largement développés et expérimentés.

Néanmoins, l'intérêt porté à l'analyse prévisionnelle des séries temporelles n'a cessé de croître. Parce que les méthodes traditionnelles de prévision (méthodes de Box-Jenkins, méthodes de lissage exponentiel,...), de la modélisation linéaire des données admettent, en général, plusieurs restrictions sur la réalité vécue, surtout en ce qui concerne les hypothèses de Gauss Markov qui sont imposées, afin de rendre un peu simpliste, l'effort de la recherche, dans le domaine des instabilités des structures<sup>67</sup> et simplifier, profondément, la compréhension de nombreuses relations d'interactions conjoncturelles, induites par des phénomènes de dynamique économique. Or, plaçons-nous immédiatement, dans un cadre d'analyse dynamique et abandonnons, maintenant, l'hypothèse de stochasticité, au profit de celle de déterminisme. En réalité, l'observation des importantes transformations économiques, périodiques exige l'étude approfondie des propriétés dynamiques près de l'équilibre mobile de ces processus. L'examen au moyen de l'approche asymptotique confirme qu'ils sont assurés, dans la plupart des cas, dans le régime non-linéaire, dans lequel les systèmes naturellement oscillent au cycle limite.

Toutefois, le rôle clef joué par les cycles limites dans la compréhension de la dynamique des structures instables, apparaît, clairement, comme un outil puissant permettant de rendre compte des changements structurels endogènes, qui engendrent de fortes irrégularités dans les comportements des séries macroéconomiques et financières. Ces irrégularités caractérisent les mécanismes de transitions d'équilibres dynamiques, dans les régimes non-linéaires, ayant un haut

---

<sup>67</sup> Le concept de stabilité structurelle est introduit en 1937 par les mathématiciens Russe Andronov et Pontrjagin.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

degré d'instabilité structurelle, puisqu'ils montrent comment changent, radicalement, les propriétés qualitatives, d'un point fixe, quand un paramètre de contrôle de l'équation de mouvement suit une modification minimale. C'est dans ce cadre, où se forge l'essentiel des outils, tout à fait, récents d'analyses dynamiques non-linéaires des structures instables. Ainsi, l'analyse dynamique des séries temporelles connaît un essor considérable, depuis les années quatre-vingt. Marqué par le rôle attribué à des transitions de phases, dans la criticité auto-organisée, qui nous conduit vers un prolongement méthodologique, capable d'une part d'appréhender le mécanisme réel, sous-jacent de l'endocyclogenèse et l'émergence des structures de cohérence dans la dynamique économique, et d'autre part, d'identifier les tendances évolutives du système industriel. Car, un grand nombre de relations d'interdépendance sont ignorées par la modélisation économétrique classique, surtout, en ce qui concerne la formation du cycle endogène et par conséquent, la prise en compte de l'hypothèse de la linéarité, en prévision, dans un mode de fonctionnement, en réalité, structurellement instable, évolutionnaire, dynamique et décrit à l'aide d'équations non-linéaires s'est avérée insuffisante, à une profonde maîtrise et analyse de nombreux phénomènes économiques complexes, qui gouvernent notamment la dynamique endogène des fluctuations cycliques<sup>68</sup>, les asymétries et l'évolution des trajectoires des séries temporelles industrielles.

---

<sup>68</sup> L'idée d'explication des fluctuations économiques par des chocs n'est pas nouvelle, elle est apparue au milieu des années 1970, avec l'École des Anticipations Rationnelles (Nouvelle Économie Classique), qui a introduit l'idée de « *cycle à l'équilibre* », selon laquelle les agents économiques réagissent de façon rationnelle et optimale aux chocs affectant leur environnement. Leur hypothèse de base est que les fluctuations rencontrées dans les économies sont de nature exogène : d'origine monétaire (Friedman, Lucas, etc.), ou réelle (Kydland, Prescott, etc.). Dans ces modèles d'équilibre général, les fluctuations proviennent des interventions exogènes qui trouvent leur source dans les contingences extérieures et imprévisibles qui ne se révèlent pas du fonctionnement des marchés. Nous appelons ces fluctuations les « *aléas* » ou les « *états* » de la nature. Elles peuvent être dues aussi aux interventions des autorités publiques qui visent à affecter les valeurs des variables fondamentales suivant leurs préférences politiques (voir à ce sujet les travaux en économie publique par exemple, l'école des « *choix publics* »). Selon l'école considérée, ces effets peuvent être temporaires ou inexistant, affecter à court ou à long terme l'équilibre économique initial. Mais, la limite de cette hypothèse réside dans le fait que quelque soit le choc exogène, stimulant l'économie, de nature monétaire ou réelle il provient d'un même système de propagation. De ce fait, une approche alternative de la macroéconomie contemporaine basée sur l'étude du fonctionnement des modèles macrodynamiques et admettant comme hypothèse de départ les fluctuations endogènes comme le produit de l'instabilité naturelle des économies de marché. Dans les modèles keynésiens, post-keynésiens ou marxistes, les fluctuations sont expliquées par les dynamiques internes des marchés instables, incomplets ou imparfaits dont il convient de réguler le fonctionnement par des interventions hors marché.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Afin d'expliquer le cycle économique industriel, contrairement à l'hypothèse largement admise par le N.B.E.R., qu'il y a continuité structurelle et absence de rupture, dans l'évolution de l'industrie, où un régime industriel unique est considéré comme suffisamment stable et défini indépendamment des conditions de sa genèse. Nous rapportons son comportement ici (dans cette partie), à celui d'un processus déterministe avec dynamique discrete non-linéaire, où ce phénomène est dû, essentiellement, à des changements structurels. La prise en compte de la non-linéarité induite par la présence des fluctuations récurrentes dans les indicateurs industriels, via un mécanisme simultané d'interaction endogène, de la détérioration des structures, *a priori*, non organisées et la reproduction des structures organisées, au cours du processus de changement d'états par « *recomposition des invariances* », présente une base originale et solide pour les explications théoriques, de la caractérisation des propriétés dynamiques qualitatives camouflées, derrière la morphologie des cycles endogènes, dites endocyclogenèse et plus, spécifiquement, de l'existence des relations déterministes non-linéaires, des dynamiques économiques complexes, localement instables, mais globalement stables, prévoyant la continuité évolutive de la dynamique endogène des structures aux effets novatrices et susceptibles d'analyser, finement, les processus cycliques, en permettant d'y améliorer les prévisions, par la prise en compte des chocs endogènes, qui engendrent des modifications qualitatives radicales, induites par des changements structurels endogènes, tend à modifier profondément les approches de l'économétrie des processus, de changements structurels appliqués, à la macroéconomie et à la finance. Mais, cette fois les changements structurels endogènes sont systémiques et se présentent dans la partie dynamique du modèle non-linéaire et suivent un comportement cyclique, ce qui explique leur relative nouveauté.

En dehors d'une manipulation statique et comme nous pourrions nous y attendre ces cycles endogènes apparaissent, génériquement, sous une forme instable. Le rôle crucial joué par les cycles endogènes, engendre de nouveaux schémas de récurrences, non-linéaires en économétrie, nécessaire surtout à la compréhension de la dynamique endogène des structures, dans les séries temporelles non-linéaire. Donc, grâce au maintien de la propriété d'instabilité structurelle, la présence des brisures de symétries atténuées, à l'aide d'un mécanisme d'ajustement lisse, garantit,

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

alors, la robustesse des cycles endogènes autoentretenus, ce qui signifie selon Kahn (2008, p. 37), que des changements par « *recomposition des invariances* » persistent, sans qu'il y ait eu « *'rupture'* ni même *'saut qualitatif'* ». Cette vision mérite d'être commentée, à la fois parce qu'elle soulève des problèmes intéressants et d'actualité, mais, aussi parce qu'elle ouvre de nombreuses pistes de recherche : Comment résoudre, donc, la problématique de prise de décision confrontée, à des problèmes de prévision dans un domaine complexe des instabilités structurelles, liées aux propriétés de récurrences et des instabilités dynamiques, dues au sensibilité, aux conditions initiales et au fait, qu'à chaque période les erreurs de prévision ne cessent d'évoluer de façon récurrente, très irrégulière, pour les périodes futures?

C'est la thèse que nous souhaitons défendre dans cette deuxième partie. Voilà, la raison pour laquelle, afin d'étudier le rôle des structures instables dans la dynamique de la croissance des erreurs récurrentes de prévision à long terme, nous nous sommes intéressés, ici, aux autres modèles dynamiques non-linéaires de prévision des données<sup>69</sup>, qui permettent de mieux suivre les comportements cycliques des séries temporelles, en tenant compte, des hypothèses d'instabilité des structures. En effet, habituellement, les erreurs de prévisions sont supposées comme les réalisations d'un vecteur aléatoire de densité de probabilité, connue et par conséquent, elles sont supposées stables et modélisées, par recours à l'approche probabiliste, notamment, économétrique. Cependant, lorsque ces anomalies sont d'origines endogènes, il n'est pas, toujours, possible d'obtenir des informations définitives et exactes, sur les bruits et les lois des perturbations, affectant la topologie de la structure dynamique du modèle. Ainsi, admettons que nous sommes entrain de modéliser un monde composite de la dynamique économique dont le tissu est très sensible et variable, qui affecte tous ses ingrédients et simultanément il est sensible de tout changement de ces éléments, alors le recours à la théorie de chaos permet d'expliquer que

---

<sup>69</sup> D'une part, il est reconnu que la plupart des séries économiques et financières présentent des dynamiques non-linéaires, des phénomènes de changement de régimes, des asymétries, des distributions multimodales. D'autre part, étant donné qu'il est impossible de rendre compte de ces phénomènes à partir des modèles linéaires autorégressifs usuels de type ARMA ou VAR, on a nécessairement recours à des processus non-linéaires capables de reproduire ces caractéristiques.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

même très petits changements peuvent causer l'effondrement de l'équilibre macro-économique très stable. De ce point de vue, il semblait, donc, logique de considérer qu'une théorie de cycle endogène, est une théorie des erreurs, visant à expliquer la récurrence des échecs économiques. Dans ce contexte, en accordant une grande importance à l'hypothèse d'instabilité, le fonctionnement de la prévisibilité ne peut être appréhendé que par l'articulation de plusieurs niveaux d'analyse. Dans ce sens, comme la dynamique non-linéaire est fortement interdisciplinaire, le recours à la théorie du système dynamique et à la théorie d'optimisation globale, appliquée à l'approche ensembliste, par la modélisation par intervalle dans un cadre d'erreurs bornées, peut être une solution avantageuse.

Quotidiennement, le traitement de l'information prédictive, robuste joue un rôle primordial, dans la compréhension et la maîtrise de l'évolution dynamique, de l'activité économique et notamment industrielle. Mais, malgré que la principale condition d'obtention d'une bonne prévision soit l'observation constante du passé le plus récent, rien ne garantit que dans un cadre déterministe, un modèle dynamique non-linéaire basé sur des données passées, soit capable de fournir les meilleures prévisions attendues. Dans ce cadre, Abraham Frois et Berrebi (1995), ont signalé que l'incidence du caractère cyclique est très importante, quand les fluctuations endogènes sont violentes. Les fluctuations endogènes violentes seront, alors, une cause floue et abstraite d'erreurs de prévisions qui seront à caractère flottant.

Certainement, l'approche de modélisation déterministe dépend du choix d'une relation de simulation dynamique utilisée et donc elle suppose la présence d'un rapport fonctionnel entre les variables observées. Néanmoins, le traitement des modèles déterministes, dynamiques, non-linéaires de prévision fait apparaître un nouveau problème. Ainsi, à la différence du modèle linéaire, la plupart des modèles non-linéaires souffrent de l'absence d'information pertinente, quand l'horizon de prévision est plus grand qu'un pas. En pratique, les données prédictives sont affectées par des incertitudes de modélisation provenant de l'approximation de la réalité, à l'aide des hypothèses simplificatrices et/ou des erreurs de mesure résultant de l'arrondi des nombres rationnels et de la troncature ou d'observation par des méthodes non fiables, qui ne stipule que

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

dans un cadre plus réaliste, basé sur l'hypothèse d'instabilité des structures, les variables dynamiques peuvent évoluer et passer d'un état à un autre. Ce caractère de changement d'état implique que, dans ce cadre déterministe non-linéaire, les variables sont modélisées et mesurées, à l'aide des intervalles. Sinon, la modélisation et l'approximation hors bande de façon exacte, sans l'acceptation d'aucune marge de tolérance, ne garantit pas de fournir des prévisions précises.

En pratique, vu la complexité de la prévision flottante qui gouverne l'évolution discrète des modèles dynamiques, non-linéaires qui seront étudiés, dans cette partie, et représentés d'une manière déterministe par des équations récurrentes, nous présentons les techniques, les plus récentes, assurant le suivi et le contrôle de la propagation des erreurs déterministes, dues au mauvais choix de la structure du modèle et aux incertitudes, sur les données disponibles. Ainsi, l'analyse contemporaine des fluctuations s'est développée dans diverses directions. En particulier, l'étude des fluctuations endogènes nous a permis d'aborder le problème des trajectoires, non stationnaires, en incluant des moyennes de trajectoires qui sont, soit des cycles limites, soit des attracteurs chaotiques. Dans le cadre de ce travail, l'analyse du cycle et des fluctuations économiques qui reposent, dans la plupart des cas, sur des modèles dynamiques non-linéaires, conduit à un profond renouvellement de la problématique de la prévision, surtout, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques. Notre objectif dans cette deuxième partie, est d'essayer de répondre aux questions : Comment les erreurs de prévisions prennent naissance dans les fluctuations économiques? Comment les erreurs de prévisions entretiennent les fluctuations économiques? La manière selon laquelle l'économie répond aux différents chocs endogènes qui contribuent aux fluctuations économiques?

Cette partie est consacrée à l'étude déterministe des modèles dynamiques, non-linéaires notamment les modèles STAR « *Smooth Transition AutoRegressive* », qui sont, par construction, structurellement instables sous la présence d'effet de seuil. Elle est organisée comme suit: tout d'abord, dans une première section, nous allons commencer notre étude par la présentation du cadre théorique de cycles et fluctuations économiques et introduire, à l'aide de modèles dynamiques non-linéaires et déterministes, les notions essentielles de dynamiques endogène et

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

illustrer, par la suite, un type particulier d'attracteur dite de *cycle limite*, sous l'effet de la perte de stabilité de l'équilibre dynamique. Dans cette perspective, nous allons consacrer une deuxième section pour étudier l'ensemble des mécanismes expliquant la cyclogenèse, c'est-à-dire l'apparition productible de structures et contrôlant la transition des fluctuations endogènes, dans un cycle limite et de la bifurcation de second ordre, à la suite de la transition d'un équilibre stable, à un équilibre instable. En ce sens, les fluctuations endogènes ont permis de montrer que les oscillations de séries chronologiques utilisées, sont des sources non négligeables d'instabilités. Ainsi, le développement mathématique permet d'élucider le caractère fonctionnel de ces structures cycliques, qui est à l'origine d'un phénomène de doublements de périodes. D'autre part, les résultats indiquent que les fluctuations de période de ce type d'oscillations, peuvent converger, vers un comportement dynamique, bizarre, qui peut s'expliquer par la présence d'un dynamique déterministe complexe induit par l'apparition d'un attracteur chaotique.

L'étude du changement qualitatif du comportement de la fonction de transition a, donc, été poursuivie, dans une troisième section, où nous allons essayer de faire la distinction entre un régime de structure cohérente et structure incohérente, de la dynamique chaotique, à l'aide d'une discussion justifiée par la récurrence de la dynamique, au niveau de la fonction de transition logistique et, plus généralement, induite par plusieurs autres formes de transition d'état, assurant le lissage dans les modèles économétriques à seuil capable de modéliser la dynamique endogène des fluctuations cycliques (nous allons y revenir ensuite dans la troisième partie), puis nous essayons d'étudier sa caractérisation mathématique qui tend à montrer, qu'à la suite de l'adoption de l'hypothèse d'existence des fluctuations périodiques gouvernant la dynamique non-linéaire d'un système, la stabilité des solutions cycliques de ce système nécessite le retour à l'hypothèse de prévisions parfaites. Dans ce cadre, nous rejetons les hypothèses d'équilibres stochastiques. Le recours à l'analyse de récurrence, au niveau des fonctions de transitions qui peuvent être associées à des modèles STAR, est une première étape, pour rendre intelligible les notions mathématiques fondamentales d'invariants dynamiques et d'asymétrie, qui nous offrent une piste pour réconcilier les formes abstraites spatio-temporelles. En particulier, la notion de chaos recouvre les idées d'imprédictibilité, nous verrons que la récurrence itérative assure la



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

transformation du chaos par intervalle où les prévisions sont imparfaites. Afin d'analyser la prédictibilité des processus parfois très complexes, un outil puissant d'analyse quantitative de la récurrence de séries temporelles non-linéaires a été proposé dans le but de quantifier la prédictibilité de la structure dynamique et même de détecter la présence des changements qualitatifs d'état, ce qui peut donner des éclairages supplémentaires sur la nature du processus générateur de données et son évolution.

Par constat, l'échange d'intervalles de stabilité accompagnant le fonctionnement du processus dynamique de lissage par transition au principe de déformation adaptative des structures et de changement par recombinaison des invariances lors des itérations, nous incite au recours, dans une quatrième section, à l'optimisation globale et à l'approche ensembliste, en utilisant le calcul par intervalle, qui peut aboutir à des solutions rigoureuses, au problème de prévision, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques. De plus, l'émergence d'une structure implique, le plus souvent, une sélection, dont nous cherchons d'identifier les critères. Toutefois, la quantification de la qualité d'un modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles, reste encore, aujourd'hui, une question majeure. Puisque l'analyse dynamique des processus de transitions, montre que le dynamisme de ces processus continus sur  $[0, 1]$ , variant à la fois dans le temps et dans l'espace en conséquence les structures ainsi générées, peuvent être classées en sollicitations déterministes cycliques périodiques et/ou aperiodiques chaotiques.

En conclusion, ce travail d'analyse et de synthèse nous conduira à développer notre problématique et les hypothèses de recherche, qui nous incitent, après traitement adéquat, à ne pas négliger les modèles dynamiques économétriques (partie déterministe d'un modèle économétrique) et plus spécifiquement les processus dynamiques de transitions, dont l'examen est très concluant et reste un domaine passionnant de recherche.

## **2.1. Cadre théorique de cycles et fluctuations économiques**

### **2.1.1. Les nouvelles théories économiques du cycle**

De nombreuses théories ont tenté d'expliquer les mouvements de l'activité économique, par l'analyse des fluctuations des économies de marché. Dans un contexte marqué, généralement, par l'instabilité des économies contemporaines, plusieurs économistes pensent que les fluctuations économiques et les crises sont partie prenante de la dynamique du capitalisme et essayent, par conséquent, en s'appuyant au cours des années quatre-vingt, sur la théorie de fluctuations endogènes, d'expliquer les causes et les caractéristiques des cycles économiques, en vue de fournir un élément de réponse à la problématique : Les cycles sont-ils produits par la dynamique même des économies capitalistes ou, au contraire, ne sont-ils que la résultante de chocs contingents? Face à cette question, l'analyse contemporaine l'explication des sources des fluctuations s'est développée, particulièrement, dans deux directions différentes. Une première approche se qualifie d'exogène et une seconde dite endogène. Nous présentons dans cette section ces deux approches théoriques de la modélisation des fluctuations économiques.

#### **2.1.1.1. *Théorie exogène du cycle et sa remise en cause***

Considérer que les cycles sont exogènes, revient à affirmer que les origines du cycle économique résultent des facteurs en dehors de la marche du système économique, c'est-à-dire des éléments impulsions externes, exotiques à son mode de fonctionnement et qui assurent sa stimulation. En ce sens, plusieurs économistes ont largement contribué à la naissance de la théorie du cycle exogène, tels que par exemple : Slutsky (1929), a démontré que les cycles pouvaient être, entièrement, causés par un cumul d'évènements aléatoires ; Frisch (1933), a établi une distinction entre le mécanisme de propagation du cycle et celui de transmission des chocs aléatoires, qui empêchent l'économie d'atteindre sa position d'équilibre et Kydland et Prescott (1982), se sont rendu compte de certaines caractéristiques cycliques d'évolution

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

économique où l'économie, étant toujours supposée, converge vers l'équilibre à long terme stable et les fluctuations de la conjoncture sont expliquées par les réactions du système économique, aux différents chocs exogènes subis par le système. C'est-à-dire, un cycle est interprété à partir des conséquences du mécanisme de transmission-propagation de chocs stochastiques sur le système économique. En effet, la contagion des politiques économiques, adoptées par des gouvernements sur d'autres ; les tempêtes et les catastrophes climatiques ; les guerres et les conflits politiques peuvent influencer, favorablement ou défavorablement, le déroulement de l'activité économique et troubler la progression de quelques systèmes et même y causer des crises, dont l'influence peut se diffuser sur une longue période et peut même toucher plusieurs générations.

Selon cette première voix de recherche, un cycle est le conjugué d'un choc exogène, qui se propage par un mécanisme de transmission stable<sup>70</sup>. C'est la raison pour laquelle la modélisation traditionnelle du cycle, fondée sur l'hypothèse de stabilité de structure, trouve son fondement dans l'approche linéaire. Lucas (1977), définit le cycle comme étant un cycle d'équilibre, c'est-à-dire il reflète une tendance spontanée de l'économie à revenir à son niveau habituel d'équilibre statique. Le cycle s'explique par l'adaptation des anticipations rationnelles, prises, par les agents économiques à de nouvelles situations, par contre, la fluctuation résulte alors d'un effet de surprise, lié aux chocs exogènes et qui entraîne de mauvaises anticipations. Mais, l'impact de celle-ci sur l'équilibre du système économique reste négligeable, puisque l'économie est considérée, atteint toujours son état d'équilibre naturel.

Cependant, les soubassements d'origines exogènes, que ce soit pour les modèles économiques d'imperfection de marchés ou pour les modèles de marchés équilibrés, se heurtent à différents problèmes, qui remettent en cause sa pertinence théorique qu'empirique. Ceci pour

---

<sup>70</sup> Selon cette conception qui domine les réflexions du courant de la Nouvelle Économie Classique (NEC), le système économique peut être modélisé à l'aide d'une spécification stable qui retourne de nouveau à son état d'équilibre chaque fois à la suite d'une perturbation par ces chocs exogènes. Par conséquent, il est logique d'adopter une technique de filtrage permettant la décomposition cycle-tendance afin de récupérer uniquement le comportement du trend qui généralise le comportement de la série.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

plusieurs raisons : tout d'abord, le mécanisme qui transforme l'impulsion extérieure, en phénomène cyclique est stochastique et incapable d'expliquer la morphologie du cycle, ni de retracer sa chronologie<sup>71</sup>. De plus, l'insuffisance des modèles, admettant les hypothèses de la théorie exogène, d'expliquer quelques phénomènes irréguliers de croissance<sup>72</sup>. Ainsi sa limite principale réside, dans son inaptitude de donner des preuves mécanistes du phénomène de changement structurel<sup>73</sup> et ne rend pas compte de quelques faits stylisés, liés aux fluctuations macroéconomiques<sup>74</sup>. Toutes ces limites de la théorie exogène prouvent, comme l'a fait remarquer Hicks (1950), l'insuffisance de cette théorie d'expliquer la genèse d'un cycle économique.

*« Établir que les cycles d'affaires sont essentiellement dus à des chocs erratiques<sup>75</sup>, c'est comme si l'on disait que nous ne savons pas comment ils se produisent. ».*

(Hicks (1950), pp.90-91)

Ceci nous a amené, sans doute, à penser que le cycle économique est causé diversement, d'une façon endogène. Selon cette nouvelle perspective théorique, nous essayons d'expliquer les raisons et les modalités de développement de fluctuations endogènes, auto-entretenues qui sont dues aux rétroactions instables et non-linéaires dans le système économique, au moyen de la théorie de cycle endogène. Or, une telle démarche et réflexion impliquent une certaine mutation des esprits, qui abandonnent l'hypothèse de stochasticité ne sont-elles réalisables que dans un cadre déterministe, comme le déclarent Lardic et Mignon (2002, p. 386): *« ...du fait de son caractère déterministe, elle présente l'intérêt d'éliminer les spécifications stochastiques ad-hoc et donc d'appréhender les fluctuations non plus au travers de chocs exogènes, mais de façon purement endogène. ».*

---

<sup>71</sup> Les fluctuations aléatoires (*imprévus*) ne permettent pas d'expliquer la structure récurrente des fluctuations cycliques, du fait que le cycle économique est inobservable. En ce sens, dans les modèles macroéconométriques le cycle économique est un concept flou et difficile à quantifier, c'est la raison pour la quelle les composantes cycliques sont souvent filtrés.

<sup>72</sup> Tel que le phénomène de croissance cyclique introduit par le modèle de Goodwin (1967).

<sup>73</sup> En ce sens, Lordon (1994), remarque que la théorie exogène du cycle ignore l'idée d'évolution ou de changement structurel résultante d'une perturbation dans sa reproduction dynamique.

<sup>74</sup> Nous trouvons un résumé de plusieurs faits stylisés importants dans Zarnowitz (1985).

<sup>75</sup> Pour plus de détails sur ce point de vue voir le travail de Benhabib et Day (1982).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Avant de présenter la théorie des cycles endogènes et de déclarer son importance, il est intéressant, voire nécessaire, d'énoncer les principales limites, tant sur le plan théorique qu'empirique, de la théorie des cycles exogènes.

Sur le plan théorique, d'abord, cette théorie (exogène) néglige la propriété de dynamique économique et surtout la conception qualitative qui en découle, et elle accorde une existence parfaite aux chocs exogènes, où les irrégularités apparentes étaient les effets transitoires des perturbations externes, qui ont frappé le système qui retournerait, plus tard rapidement, à son état naturel d'équilibre statique. C'est-à-dire, même à long terme les fluctuations persistent et ne perdurent pas. En ce sens, cette théorie explique un cycle comme l'adaptation optimale d'une économie, à l'équilibre stable, ce qui fait que le rôle de l'Etat est négligé et inefficace. Ensuite, elle explique les périodes de ralentissement de la croissance par l'inefficience du système.

Empiriquement, d'une part, elle explique le cycle par les variations de la tendance et non plus par des fluctuations, autour d'une tendance. D'autre part, la confrontation des résultats et des modèles avec la réalité, à travers lesquels nous insistons sur l'évolution des différentes variables macroéconomiques, au moyen de la transition d'un état à un autre assurée à l'aide d'un processus d'ajustement dynamique, a permis Plosser (1989), de conclure que les prédictions faites sont erronées<sup>76</sup>. En ce sens, la théorie traditionnelle du cycle est fallacieuse, en ce qu'elle cherche à interpréter le cycle économique, comme un phénomène statique d'équilibre stable et par conséquent, elle essaye d'expliquer l'erreur de prévision de façon aléatoire, comme une conséquence d'événements précédents. Or, cette hypothèse nécessite l'acceptation de la connaissance parfaite du comportement futur. Rotemberg et Woodford (1996), ont déclaré que la plupart des modèles s'appuyant sur des chocs exogènes, rencontrent des difficultés substantielles, en reproduisant les co-mouvements et les corrélations entre les variables. En particulier, les chocs exogènes de productivité les rendent peu adaptés aux prévisions économiques, puisque les prévisions des qualifications fourniraient une validation contraignante de la théorie.

---

<sup>76</sup> Plosser (1989), a établi cette critique en particulier pour la série du produit réel américain à la suite d'un modèle simple avec choc de productivité.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Toutes ces limites, ainsi citées de la théorie du cycle exogène représentent, sans doute, les points forts de la révolution contemporaine de la pensée économique, en ce qui concerne la théorie qui favorise la conception dynamique assurant l'émergence des fluctuations endogènes, qui ont donné l'impression que l'équilibre stable statique était manifestement absent, pour fonder dans une perspective analogue mais plus réaliste que celle qui considère que l'agrégation des fluctuations macroéconomiques, résulte de l'imperfection du marché à structure dynamique d'équilibre non walrasienne. Dès lors, Dore (1998), donne une nouvelle explication, plus pragmatique, à la morphogenèse du cycle économique, en intégrant la dynamique non-linéaire, ainsi Hülsmann (1998), à établi qu'une explication essentialiste d'une théorie générale des cycles d'erreurs, basée sur la récurrence de groupe d'erreurs. Celle-ci, peut être développée, au fur et à mesure, dans le cadre de ce travail.

### ***2.1.1.2. Théorie endogène du cycle et révolution de la pensée économique***

Depuis la contribution de base de la théorie dynamique postkeynésienne, la révolution de la pensée économique, engendrée notamment par les travaux d'Albert Aftalion<sup>77</sup> et Friedrich Hayek, a élaboré la théorie des cycles endogènes. Celle-ci découle de la perturbation endogène, à l'équilibre impossible et elle fournit une illustration logique, sur les fondements morphologiques du cycle économique. Elle interprète le cycle de l'activité économique comme étant une manifestation de l'instabilité intrinsèque de l'économie. Ceci implique que les fluctuations ont des caractéristiques dynamiques propres, qui sont rattachées au fonctionnement du système économique lui-même et propose, dans ce cadre intéressant d'analyse, des modèles

---

<sup>77</sup> Albert Aftalion (1874-1956) est un économiste français du xx<sup>ème</sup> siècle. À la suite de ses deux ouvrages publiés à Essai d'une théorie, Paris: Marcel Rivière en 1913, le Tome I portant sur « *Les crises périodiques de surproduction : Les variations périodiques des prix et des revenus* » et le Tome II sur « *Les théories dominantes : Les mouvements périodiques de la production* », il est considéré parmi les premiers théoriciens pré-keynésiens du cycle d'affaire qui a essayé de systématiser le rôle conjoint des délais de production et du mécanisme de l'accélérateur au sein d'une théorie de la surcapitalisation réelle. Son constat est que l'investissement amplifie, que ce soit à la hausse ou à la baisse, les fluctuations de l'activité économique. Donc, sa théorie du cycle endogène, de surproduction générale et d'équilibre constituée, sans doute, son cadre analytique original pour l'explication des crises périodiques de surproduction.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

économiques<sup>78</sup>, fournissant des explications endogènes des fluctuations des phases conjoncturelles. En ce sens, les récessions conduisent aux expansions et inversement, sans que le cycle ait existé, ni au moyen d'une impulsion exogène, ni par une source environnementale extérieure au modèle. Ainsi, dans ce cadre théorique, Aftalion et Hayek ont largement contribué à la formation de la pensée scientifique moderne, notamment en ce qui concerne la question qui explique la théorie des fluctuations, par des crises périodiques de surproduction<sup>79</sup>, ou encore par des crises le mal-investissement.

Pour Aftalion, l'idée de fournir des explications des fluctuations liées à la structure même de l'économie, est justifiée par un déséquilibre entre production des biens de consommation et production des biens d'investissement<sup>80</sup> (ou dans la structure de production de biens d'investissement), qui représente le caractère émergent de la théorie de surinvestissement et inhérent des crises économiques<sup>81</sup>. Cloete (1990), suggère que pour Aftalion, les fluctuations cycliques dans l'activité économique, sont essentiellement liées aux fluctuations dans la production du capital. C'est-à-dire, elles sont générées par les retards temporels et par l'effet du mécanisme Keynesien de multiplicateur-accélérateur, entre les variables économiques proposées par Kalecki (1935), et Samuelson (1939a). En d'autres termes, comme l'a fait remarquer Grandmont (1985a) puis Raybaut (2002), qu'en présence des retards temporels et des relations d'interactions de multiplicateur et d'accélérateur, l'économie est stimulée et ayant comme réponse l'apparition des fluctuations cycliques endogènes, en y incluant des processus de déstabilisation, qui l'écarte de toute situation permanente de l'équilibre stable. Alors que pour Hayek, l'idée de fournir une théorie endogène des fluctuations conjoncturelles qui explique la

---

<sup>78</sup> À titre indicatif, dans le cadre des modèles économiques théoriques de fluctuations qui fournissent divers aspects d'explications des phases conjoncturelles, nous pourrions suivre l'une de deux orientations sur l'interprétation du cycle à partir de mécanisme endogène. La première direction englobe les modèles endogènes de cycle avec interactions du multiplicateur et de l'accélérateur (le modèle d'oscillateur de Samuelson (1939a) ; le modèle de Hicks (1950)). Concernant la seconde orientation elle rappelle les endogènes du cycle avec accumulation du capital (le modèle de Kalecki (1935) ; le modèle de Goodwin (1967)).

<sup>79</sup> Nous notons que les travaux attachés à ce domaine nécessitent une connaissance fine et originale de la structure de la production et par la suite de l'industrie et des groupes professionnels.

<sup>80</sup> Voir Aftalion, A., (1909).

<sup>81</sup> Voir Aftalion, A., (1913).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

crise économique par le sous-investissement. Il rejette le caractère naturel du cycle économique et insiste sur la notion d'anti-cycle. En reprenant la distinction opérée par Wicksel, entre taux d'intérêt du marché et taux d'intérêt naturel, Hayek a considéré que les facteurs monétaires sont la cause déterminante de la rupture de l'équilibre économique.

*« Selon Jean-Gabriel Bliet, Aftalion et Hayek ont en commun d'avoir tous deux établi une théorie endogène des fluctuations conjoncturelles. Ils ont pris comme point de départ théorique l'œuvre de Böhm-Bawerk et son analyse du capital. Hayek a cherché à élaborer une théorie des fluctuations qui explique la crise par le mal-investissement. Aftalion tente d'expliquer les fluctuations conjoncturelles par les spécificités du capital en insistant sur les liens macro-économiques entre la demande et l'investissement. Il débouche sur le caractère inévitable et inhérent des crises économiques. Hayek rejette le caractère naturel du cycle économique et insiste au contraire sur la notion d'anti-cycle. Mais l'antagonisme entre les deux économistes ne vient pas seulement de l'opposition entre une théorie fondée sur la technique capitaliste et une théorie de la perturbation monétaire endogène. Aftalion et Hayek s'opposent sur leur conception du système économique. Paradoxalement, ils se retrouvent dans leur conclusion que l'équilibre est impossible. »<sup>82</sup>.*

(Dormard, S., (2002), p.11)

De ces points de vue, l'utilité de la théorie des cycles endogènes c'est qu'elle donne, que ce soit par les modèles économiques liés à l'accumulation du capital, ou par les modèles liés au partage de la valeur ajoutée, une explication des faits stylisés additionnels<sup>83</sup> et participe pour combler les insuffisances du modèle de base, par l'introduction des mécanismes innovateurs, donnant ainsi, une explication pertinente et satisfaisante de la morphologie du cycle, dans la structure et le fonctionnement dynamique du système économique, basée sur l'étude de la topologie des singularités et des discontinuités, inspirées, essentiellement, de la théorie des catastrophes développée par Thom (1972, 1974)<sup>84</sup>, et ceci est ressenti sur deux niveaux : l'un est

---

<sup>82</sup> Voir Dormard, S., (2002).

<sup>83</sup> Les principaux faits stylisés additionnels fournis par le recours à la théorie des cycles endogènes sont : la reproduction des amplitudes réalistes de cycle avec de petits changements non négatifs ; l'explication de l'asymétrie de cycle ; l'explication de la persistance et de la corrélation du cycle économique entre les variables nominales et réelles et l'explication de la sensibilité aux conditions initiales telle que la grande réponse de l'emploi à de petits changements de la productivité et le co-mouvement du rendement et des salaires de Hall (2005).

<sup>84</sup> La théorie des catastrophes élaborée par René Thom à partir de l'exemple de ses conceptions synthétisées dans ses deux ouvrages : Thom, R., (1972), intitulé « *Structural Stability and Morphogenesis* » et Thom, R., (1974), intitulé « *Mathematics Models of Morphogenesis* ».



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

relativisé et l'autre est structurel. Ainsi, compte tenu de la mutation de la pensée moderne, de Vroey et Malgrange (2006), n'hésitent pas à déclarer que ce changement, est à l'origine d'une large révolution scientifique et épistémologique au sens de Kuhn (1970), pouvant toucher à terme, toutes les disciplines scientifiques. À l'instar des réflexions de Anderson, Arrow et Dines (1988) et Leydesdorff et Van den Besselaar (1994), ces deux niveaux orientent les chercheurs, en économie contemporaine, vers une révolution de la pensée économique, qui considère que le système économique est un système dynamique, complexe et évolutif et se présente comme suit :

- Primo, l'interprétation du cycle à partir des mécanismes endogènes stipule l'intégration de la théorie des fluctuations, dans la théorie de l'évolution économique<sup>85</sup>. Même dans la tradition néoclassique, où l'économie est considérée comme étant un système, qui a été régi par l'équilibrage des forces garantissant d'une manière rationnelle, l'utilisation optimale de toutes les ressources disponibles, Grandmont (1985b), Day (1992), Day et Chen (1993), Guesnerie et Woolford (1993) et Chen (1995), ont proposé les modèles, dans lesquels les fluctuations endogènes résultent des effets de richesse et le mouvement de taux d'intérêt, du comportement d'épargne et des interactions entre les générations imbriquées ou les interactions entre différents secteurs. Mais dans un cadre nouveau Keynesien, nous déclarons que cette intégration autorise, automatiquement, un dépassement de la vision néoclassique, en ce qui concerne un mode de fonctionnement pur et parfait, avec anticipation rationnelle, en se plaçant, notamment, dans un cadre imparfait avec anticipation limitée, plus réaliste dynamique et évolutionnaire en avenir incertain, intégrant des contraintes attribuées par la mémoire du passé de l'information, et nécessitant comme l'a affirmé Barucci, Bischi et Gardini (1999), un traitement optimal au sens d'une rationalité limitée, en prenant en compte les particularités de la multiplicité de l'équilibre et du mode d'auto-organisation interne et de leurs interactions structurelles endogènes. À titre illustratif, cette intégration prend naissance dans

---

<sup>85</sup> L'idée de l'économie évolutionniste n'est pas récente, c'est Schumpeter (1939), qui est le premier qui a parlé d'une relation d'équivalence entre l'évolution biologique et l'évolution économique.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

les travaux de Lordon (1994), qui avait essayé d'analyser les comportements des cycles dans le temps. Selon l'auteur, ce premier motif d'intégration conduit à l'étude, de la non-linéarité, induisant ainsi une interrogation théorique, qui cherche derrière le phénomène d'irrégularité résultant de la convergence, l'une vers l'autre, des théories des fluctuations et de croissance, une réalité de type évolutionniste, tenant compte simultanément, de la disposition dynamique et l'interprétation en termes d'instabilité et de changement structurel, où naît la problématique de sélection d'une structure optimale. Celle-ci est comprise, dans un domaine qui fait intervenir, régulièrement, une modification de la stabilité structurelle, comme le processus, par lequel des agents (prévisionnistes) dotés de moyens et de caractéristiques distincts sont confrontés au problème d'adaptation<sup>86</sup>, au sein d'un système ouvert et généralement fluctuant. La délimitation de leurs frontières est une tâche généralement complexe impliquant nécessairement un certain niveau d'arbitrage, en termes d'optimisation globale et structure dynamique de prédiction.

Ce problème fait l'objet de récentes recherches intensives, sur le thème de la prévision imparfaite et les fluctuations économiques, qui ont permis d'engendrer de vives discussions théoriques, par exemple pour Albin et Foley (1998), la prévision se fait par tâtonnement récursif, pas à pas sous la forme d'un processus d'adaptation progressive. L'adaptation est traitée dans un cadre de rationalité procédurale dite rationalité limitée<sup>87</sup> « *bounded rationality* ». Dans ce cadre, Simon (1982), a noté que : « *Le processus rationnel est celui qui intègre progressivement*

---

<sup>86</sup> L'adaptation peut être statique si elle correspond à une réponse automatique ou dynamique si elle correspond à une réaction pragmatique bien réfléchie. Dans ce deuxième cas, elle envisage un nouveau mode de décision basé sur l'apprentissage par expérience acquise, par mémoire et/ou par raisonnement. En ce sens, le prévisionniste doté d'une rationalité limitée doit formuler ses objectifs sur la base des informations observées puis adapter ses règles de prévisions quand il génère une base de données supplémentaire. Mais, la nature incertaine et imprévisible d'un environnement généralement en fluctuation permanente, rend l'adaptation plus difficile. Donc, l'adaptation contribue à son tour à l'incertitude puisqu'elle influence l'erreur de prévision. Par conséquent, le prévisionniste s'engage pas à pas dans un processus d'adaptation dynamique structurelle ou organisationnelle afin de choisir la bonne structure du modèle de prévision lui permettant de minimiser au maximum l'erreur de prévision commise.

<sup>87</sup> Pour une étude bien développée, l'intéressé pourra s'adresser à l'article de Sargent, T.J., (1993).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

*l'information acquise au processus de choix, permettant ainsi de parvenir à une solution considérée parmi les meilleures possibles mais qui n'est plus nécessairement la solution optimale au regard de la rationalité parfaite. ».*

- Secondo, l'explication du cycle de façon endogène, à partir de l'analyse du mode de fonctionnement dynamique du système économique, nécessite l'intégration de la théorie des fluctuations, dans la théorie des structures. Boldrin et Woodford (1991), Brock, Hsieh et LeBaron (1991), Guesenerie et Woodford (1992), Benhabib (1992), Lorenz (1993b), Day (1994) et Granger (2001), ont déclaré que cette intégration confirme une conception mécanique du cycle, selon laquelle le système reflétant la dynamique économique oscille au cycle limite, ou avec un régime plus complexe chaotique et même fractal parfois. Dans ce contexte, l'approche structurelle du cycle présente l'avantage de prouver, qu'une structure purement endogène, peut être engendrée par des transformations mécanistes, ayant pour origine les pertes de stabilités de l'équilibre, lorsqu'il est confronté à un processus endogène d'ajustement structurel. En effet, Arthur (1990) et Bak et Chen (1991), ont montré, que si des fluctuations minimales à l'intérieur du système économique passent souvent inaperçues, il arrive parfois que certaines fluctuations du marché puissent déclencher une réaction en chaîne, qui provoque la création de nouvelles structures imprévues, source de développement économique<sup>88</sup>. L'argument est simple, il repose sur l'idée selon laquelle, les fluctuations macroéconomiques sont liées à des dynamiques des structures endogènes, où les changements structurels sont engendrés par des dynamiques purement déterministes, modifiant les régimes de croissances des économies. L'avantage de ce type déterministe d'analyses c'est qu'il garantit la caractérisation des séries temporelles à l'aide des invariants dynamiques, qui permettent de mesurer le degré de complexité des processus générateurs de données. Cet aspect

---

<sup>88</sup> Pour plus de détails, voir l'ouvrage de Cieret de Langavant, G., (2001, p. 72), intitulé « *Bioéthique : Méthode et complexité* », Presses de l'Université du Québec.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

de la complexité qui résulte de l'instabilité structurelle<sup>89</sup>, porte sur la difficulté d'isoler et de modéliser des problèmes, qui sont essentiellement liés à des niveaux structurellement différents. Ainsi, contrairement à la pensée économique traditionnelle, basée sur des principes de la physique newtonienne, avec une solution unique de l'équilibre fixe, la théorie économique contemporaine des rendements croissants trouve son fondement, dans la physique moderne non linéaire basée sur l'approche des systèmes dynamiques, structurellement instables, avec une multiplicité de l'équilibre dynamique.

Malgré qu'il y ait longtemps, que les différents courants de pensée économique : les keynésiens, post-keynésiens et également les néoclassiques ont insisté sur le caractère endogène des cycles conjoncturels. Ce n'est que récemment, que nous remarquons qu'une véritable renaissance de la théorie de cycle endogène semble se produire, notamment avec les travaux de Chiarella, Flaschel et Franke (2005), Hallegatte, Ghil, Dumas et Hourcade (2006) et Hallegatte, Hourcade et Dumas (2006), qui se fondent sur une théorie de système dynamique, où la dynamique macroéconomique s'exprime essentiellement à travers l'évolution quantitative et la modification structurelle des séries temporelles des variables macro-économiques. Ces modèles sont capables de reproduire des cycles économiques, de façon purement endogène, comme caractéristiques de la dynamique des structures instables et résultent des rapports potentiellement non-linéaires. En effet, à condition que le temps d'ajustement augmente, l'équilibre dynamique perd sa stabilité et le modèle possède, alors, une solution périodique stable. Selon Andronov (1929), ce « *cycle limite* » est caractérisé par les variables qui oscillent, autour de leurs valeurs d'équilibre instable. Mais, dès que l'équilibre s'écarte de son bassin d'attraction, les variables tendent vers un comportement chaotique. À partir de cela, naît le problème de recherche sur le thème de l'étude de la dynamique de l'équilibre impossible (temporaire), dans le domaine des

---

<sup>89</sup> Le concept de la stabilité structurelle a été introduit par Andronov, A. A. et Pontryagin, L., (1937). Dans le cadre de ce travail, nous admettons comme hypothèse de base l'instabilité structurelle. Celle-ci doit être comprise dans le sens constructif induit par le changement structurel. Par « *changement structurel* » nous désignons tout ce qui tend à déformer les régularités macroéconomiques constitutives d'un régime de croissance à une période donnée, tout en générant de nouvelles formes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

instabilités des structures dynamiques, qui fait l'objet de notre contribution de base dans le présent travail. Dans ce cadre, nous consacrons notre effort de recherche, autour de la question centrale : Comment identifier et contrôler la structure purement endogène d'un processus dynamique et évolutionnaire de changement structurel?

Mais avant tout, comment justifions-nous le recours aux nouvelles modélisations des fluctuations endogènes dans ce travail de recherche? Nous précisons que pour des raisons de réformes structurelles, où s'engage la Tunisie, les valeurs de certains paramètres du modèle se modifient, au cours du temps, ce qui induit l'instabilité du modèle, sous l'effet des dynamiques endogènes, dont l'influence change d'un régime à un autre. Il est donc clair, que le recours à la théorie des cycles endogènes, répond bien à l'objectif visé, par ce travail de recherche, qui consiste à analyser, modéliser et prévoir notre secteur industriel qualifié d'instable en vue d'essayer de fournir des résultats pertinents, nécessaires pour le redynamiser et le planifier.

Par conséquent, selon Harvey (1989), ce choix, qui consiste de mener une analyse dynamique, basée sur des séries temporelles non linéaires, est rationnel du fait que l'observation de l'historique des données montre que chaque donnée, est reliée à une autre, par le temps et l'analyse dynamique des séries temporelles permet de suivre et caractériser l'évolution structurelle de l'information prédictive dans le temps. Ce qui fait que la théorie des cycles endogènes remplit, convenablement, le cadre théorique mené par cette recherche et satisfait son objectif visé. En ce sens, Grandmont (1985a), Grandmont et Malgrange (1986), Guesnerie et Woodford (1992), de Vilder (1997), Jacobsen (2000) et Dos Santos Ferreira et Lloyd-Braga (2005), ont confirmé que la dynamique non linéaire offre une nouvelle perspective, tout à fait apte, à modéliser les fluctuations cycliques endogènes.

À l'instar de la plupart des chercheurs, ayant une approche empirique de la théorie des cycles endogènes, nous signalons que l'étude de l'émergence de fluctuations endogènes stochastiques et déterministes, à savoir, l'indétermination de l'équilibre stationnaire et l'apparition

des phénomènes de bifurcations locales s'appuient sur une méthode purement géométrique proposée par Grandmont, Pintus et de Vilder (1998), qui s'avère insuffisante, quant-à la bonne maîtrise et la compréhension du vrai mécanisme sous-jacent de la genèse du cycle endogène et, donc, elle nécessite un effort additionnel de modélisation adéquate. Dans ce cadre, récemment les efforts de modélisations analytiques viennent d'enrichir la méthode géométrique, puisqu'ils s'appuient sur l'hypothèse, selon laquelle les cycles endogènes sont, nécessairement, des explications de la théorie des erreurs récurrentes, qui reposent, d'une part sur le mode de génération des écarts prévisions-réalisations, à partir de fluctuations, d'autre part, sur l'étude de l'incidence des écarts sur les fluctuations.

## **2.1.2. La non-linéarité issue de la dynamique des fluctuations cycliques : Perte de stabilité locale de l'équilibre dynamique**

### ***2.1.2.1. Une approche de modélisation de la dynamique des fluctuations cycliques***

Ces dernières années, de nombreux économistes ont commencé à employer des techniques de la dynamique non-linéaire, pour modéliser quelques phénomènes économiques, fondamentaux, incluant, en particulier, des processus non stochastiques de type changement de régime ou changements structurels, or des processus dynamiques complexes qui se caractérisent par des fluctuations aléatoires, non-périodiques, reflètent des comportements erratiques (*exotiques*) ou turbulents. La théorie de la morphologie mathématique a trouvé un cadre adapté à une modélisation non-linéaire de la dynamique des fluctuations cycliques. Pour cette raison, en vue de décrire ce nouvel outil pour comprendre le mécanisme endogène des cyclogenèses économiques nécessaires, à la mise en marche d'une politique de bonne gouvernance industrielle basée sur la stabilisation et la réalisation des prévisions conjoncturelles, qui sont devenues indispensable pour l'instoration des nouveaux programmes de restructuration, de mise à niveau et de planification stratégique et économique, les prévisionnistes essaient d'examiner certaines

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

questions essentielles : Comment la dynamique des fluctuations cycliques et chaotiques surgit-elle, dans les modèles de l'équilibre impossible? Comment les méthodes empiriques peuvent-elles être employées pour détecter des non-linéarités et des structures cycliques et chaotiques, dans les modèles dynamiques déterministes?

Avant d'émerger davantage dans cette étude, pour des raisons affirmatives, nous allons commencer franchement par fournir quelques arguments élémentaires de base, afin d'expliquer le recours à la théorie des systèmes déterministes non-linéaires capables, de mettre en évidence la présence, sous certaines conditions, du phénomène de cycle limite, caractérisant des fluctuations périodiques ou des dynamiques complexes ni périodiques, ni équilibrés, comme solution de modèle. D'autre part, tout au long de cette seconde partie, en nous basant sur divers outils de la dynamique déterministe non-linéaire, nous allons essayer de vérifier l'hypothèse largement adoptée, par la théorie de la morphologie mathématique, selon laquelle l'évolution des structures dynamiques, dans le temps, induite par l'émergence des fluctuations endogènes plus ou moins complexes, n'est qu'une étude qui vise la lente et endogène transformation des structures du « *mouvement incessant de naissance, de développement et de destructions* » des formes, comme le confirme les premières contributions sur ce sujet qui ont été publiées par Thom (1972, p. 17), et dans leurs « *discontinuités phénoménologiques* », comme le prouve Thom (1991, p. 28). Selon Ekeland (1984, p. 110), elle modélise « *la disparition d'un équilibre stable et l'établissement d'un autre, consécutifs à une modification continue du potentiel* » d'un système dissipatif.

Dans ce contexte de réflexion, historiquement, Schumpeter (1954), montre à l'aide de son mécanisme des innovations que les innovations se développent irrégulièrement et successivement par vagues, sous forme de grappes d'innovations. Le cycle traduit le flux et le reflux de ces innovations. En effet, ce schéma théorique, reconnu par le concept de la destruction créatrice, permet à Schumpeter la mise en lumière, de la théorie de cycle économique afin d'expliquer la mutation endogène et permanente des structures de production du système capitaliste. Hicks (1950) et Goodwin (1951), parlent du cycle autour du sentier de croissance et Goodwin (1967), fournit une illustration de la dynamique économique, qui repose sur les variations de la

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

répartition des revenus<sup>90</sup>. Il en résulte la présence du cycle de croissance<sup>91</sup>. Ce principe de la croissance cyclique<sup>92</sup> est présenté dans une contribution récente par Day (1982) et Goodwin (1992), à l'aide d'un système structurellement et dynamiquement instable, autour de l'équilibre multiple.

Pour des raisonnements suffisamment précis, au niveau de la première partie<sup>93</sup>, nous pourrions garantir l'apparition du cycle endogène provenant de l'émergence des fluctuations périodiques de systèmes déterministes non-linéaires, caractérisant des situations distinctes, qui se répètent à des intervalles de temps réguliers, comme des fluctuations récurrentes de l'activité économique. Ces intervalles correspondent aux périodes, pendant lesquelles les points fixes de l'équation dynamique, échangent leur stabilité.

*« Ces considérations expliquent pourquoi les théoriciens des cycles économiques soulignent le caractère récurrent du cycle, et pourquoi nous pouvons espérer qu'ils ont eu raison de le faire. Dans la mesure où les cycles économiques peuvent être considérés comme des exemples répétés d'événements essentiellement semblables, il sera raisonnable de considérer que les agents réagissent à des changements cycliques comme risqués, ou de supposer que leurs anticipations sont rationnelles, qu'ils ont des modalités relativement stables de collecte et de traitement de l'information, et qu'ils utilisent l'information nécessaire à la prévision d'une façon stable, sans biais systématiques et facilement corrigeables. ».*

(Abraham-Frois, G., et Berrebi, E., (1995), p.72)

Par conséquent, nous sommes sûrs que le cycle suppose le changement, et compte tenu de la théorie endogène des fluctuations économiques, le changement est le produit du système lui-

---

<sup>90</sup> Le modèle de Goodwin (1967), est basé sur les hypothèses selon lesquelles le marché des biens est toujours maintenu en équilibre alors qu'au contraire le marché du travail est déséquilibré.

<sup>91</sup> Il faut se rappeler, qu'historiquement des taux de croissance élevés ne signifient pas toujours un taux de croissance élevé examinant le futur, le processus (*Différence Stationary*) *DS* plus le modèle de cycle n'incorpore pas en juste proportion les cycles endogènes. Même dans le cas d'un cycle de croissance, la condition de stationnarité dans les spécifications de *DS* élimine les cycles endogènes de croissance.

<sup>92</sup> D'après Goodwin (1992), ce principe de croissance cyclique signifie que lorsque le produit ou l'emploi augmente au-delà d'un certain niveau, cela induit, non pas une non linéarité produisant la bifurcation de l'instabilité à la stabilité, mais la mise en mouvement d'une variable, paramètre de contrôle, qui, progressivement, inhibe la croissance du produit et de l'emploi.

<sup>93</sup> Dans la première partie, nous avons fourni une représentation logique de certains concepts de base : asymétrie cyclique ; co-dépendance et co-mouvements ; fluctuation autoentretenu...



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

même. En ce sens Smale (1980), déclare qu'un cycle peut être expliqué par le fonctionnement même de l'économie. C'est-à-dire, il résulte des modifications des paramètres de base de l'économie. Ceci nous laisse penser que la formalisation canonique du modèle mathématique du cycle endogène qu'on doit présenter dans ce document doit remplir tous les cinq critères<sup>94</sup> mentionnés ainsi: la *persistance* des fluctuations, l'*asymétrie* cyclique signifiant que les variables étudiées ont des comportements cycliques non sinusoidaux, la *multiplicité* des équilibres, l'*instabilité* locale des équilibres et la *non-linéarité* intrinsèque dans les relations économiques associées aux comportements des variables définissant les fluctuations macroéconomiques. Selon ces critères, nous insistons à la manière de Sedaghat (1997), donc, sur le rôle essentiel, du recours à la théorie des systèmes déterministes, pour analyser le comportement dynamique, non-linéaire et endogène du cycle, afin de pouvoir identifier son évolution et sa structure. Ainsi, nous partageons l'idée admise par Lordon (1994), selon laquelle un système économique est soumis, en permanence, à des forces internes qui tendent à modifier son évolution et sa structure.

« Les démarches théoriques qui accordent de l'importance aux idées d'évolution ou de changement structurel peuvent alors se sentir particulièrement concernées : une intuition très heuristique suggère en effet que l'irrégularité manifestée dans les trajectoires temporelles d'un système économique témoigne de l'existence de perturbations dans sa reproduction dynamique. C'est fondamentalement la reproduction à l'identique<sup>95</sup>, même sous la forme dynamique de l'expansion homothétique régulière qui semble interdite. ».

(Lordon, F., (1994), p.01)

Selon Brock et Dechert (1991), cette approche, que nous pourrions qualifier de structurelle du cycle, présente l'avantage de prouver qu'un système complètement déterministe, peut rendre prévisible les trajectoires non-linéaires. Boldrin et Woodford (1991), ont déclaré que le chaos est un comportement apparemment stochastique, généré par un système dynamique déterministe et

---

<sup>94</sup> Selon la vision orthodoxe du fonctionnement du système économique dans les économies industrielles avancées, les hypothèses économiques clés qui sous-tendent ces idées sont: la *multiplicité* des équilibres, l'*instabilité* locale des équilibres et la *non-linéarité* des relations de comportements des variables étudiées. Les faits stylisés permettent d'enrichir le diagnostic conjoncturel sont : la *persistance* et l'*asymétrie* des fluctuations macroéconomiques.

<sup>95</sup> Nous remarquons que la « *reproduction à l'identique par recombinaison* », reflète la propriété fondamentale d'*invariance* ( $f \circ f = f$ ) d'un processus dynamique déterministe non-linéaire basé sur l'équation récurrente non-linéaire de premier ordre.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

dans certains cas, le comportement du système chaotique est plus ou moins prédictible. Nous attendons que ce type de modèles non-linéaires offre probablement, des performances prédictives, supérieures à celles d'un modèle linéaire, mais sans cacher qu'il pose, également, des problèmes complexes, tels que la présence des minima locaux pour la fonction à optimiser, une prédiction des valeurs futures, des variables ne serait possible que si les conditions initiales pouvaient être mesurées, avec une précision infinie, ce qui n'est pas, malheureusement, le cas dans beaucoup d'études, des temps de calcul très longs et la sélection de structure de modèle déterministe non-linéaire de prédiction rendue plus difficile dans certains cas. La question centrale est alors, comment identifier cette structure purement endogène du cycle et/ou du chaos<sup>96</sup>? En ce sens, pour étudier un système déterministe, nous allons construire un modèle mathématique, connu par les mathématiciens sous l'appellation, d'un *système dynamique*.

La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de Poincaré, à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Elle est utilisée pour étudier les systèmes physiques, qui évoluent au cours du temps. En fait, comme le constate Sordi (1996), le terme dynamique renvoie à l'évolution dans le temps du comportement du système. L'approche dynamique apparaît, donc, comme l'étude de la morphogenèse, c'est-à-dire de la formation, dans le temps des modèles et des structures. Dufrenot et Mathieu (1998), ont montré qu'un système dynamique est formé de deux parties. Premièrement, il possède un espace de phases : c'est un espace euclidien abstrait qui représente l'ensemble des états possibles du système. Deuxièmement, il est caractérisé par la nature de la dynamique elle-même. Elle prend la forme d'une équation récurrente, non-linéaire d'ordre un, dont la solution est l'évolution du système, représentée par une courbe dans l'espace des phases, passant par tous les états décrits par le système à travers le temps. Ceci mène Kaneko et Tsuda (2000), de qualifier la plupart des systèmes dynamiques comme étant des systèmes complexes : « *qui se constituent des composants variés, multiples, non-linéaires, parmi lesquels existent les*

---

<sup>96</sup> Le chaos a été défini par Stewart, I. (1997, p. 12), comme un comportement apparemment stochastique se produisant dans la dynamique non linéaire d'un système déterministe.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

*interactions non-linéaires qui est la source de la propriété globale émergente, et réciproquement, les composants mêmes sont sous l'influence de l'état globale. ».*

Comme l'ont fait remarquer Goodwin, Kauffman et Murray (1993), il est impossible de comprendre les transformations endogènes complexes d'un système dynamique adaptatif, non-linéaire, sans faire référence à son histoire, à sa dimension et à ses lois d'évolution et de transition. Parce que, d'une part, cette endogénéité est une propriété émergente très difficile à découvrir, car elle est conditionnée par l'échelle d'observation et d'autre part, les transitions critiques et le facteur temps jouent, donc, un rôle fondamental, dans la détermination endogène de toute recombinaison active, pour laquelle une complexité structurelle et fonctionnelle récurrente, permet la ré-organisation adaptative de la dynamique endogène des structures, par génération de nouvelles formes auto-organisées « *self-organisation* », à partir des mutations irréversibles. Dans ce sens, Nicolis et Prigogine (1977), ont montré la conception attribuée aux transitions de phases dans la criticité auto-organisée, suite à la divergence d'échelles et à la reproduction de structures de cohérences, au cours du passage d'un état à un autre, via l'émergence des mécanismes de la stabilité structurelle des formes, lorsque ces transitions critiques ou bifurcations s'accompagnent d'un changement de phase, induit par un passage des points critiques, du local au global, pendant des intervalles d'échange de stabilité<sup>97</sup> de l'équilibre multiple. L'idée, donc, consiste à employer la logique d'analyse qualitative camouflée, sous la dynamique symbolique et la formation de structures de cohérences, afin de pouvoir analyser le phénomène d'émergence de la stabilité structurelle via des structures économiques dynamiques. De ce fait, nous voyons que la transition de phase, en tant que mutation des formes structurellement auto-organisées, a poussé Kauffman (1995), en s'inspirant de l'idée de Rosen (1991), à dire « *Life may exist near a phase transition* ».

Afin de partager avec ces approches ci-dessous, surtout l'idée dominante sur le rôle important joué par les transitions de phases dans l'émergence de structures de cohérence, en se

---

<sup>97</sup> Notons que lors d'échanges de stabilité de l'équilibre multiple le passage du local au global se manifeste à l'aide de plusieurs caractéristiques, dont les plus importantes sont : Les interactions se caractérisent par la divergence de la longueur de corrélation et l'apparition d'un phénomène de brisure de symétrie.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

référant à la méthode proposée par Grandmont (1994), nous signalons que pour étudier le fonctionnement des fluctuations endogènes du secteur industriel, nous rapprochons ce dernier d'un système dynamique, à temps discret, et nous supposons, par la suite, que l'état du système, à un instant donné, peut être représenté par un élément  $Y_t$  (une variable de la production industrielle) d'un espace d'état  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$ . L'apport et l'originalité de ce travail par rapport à la littérature existante est que peu d'études, sur la dynamique économique, ont considéré un mécanisme de formation endogène du cycle. Par ailleurs, aucune étude antérieure n'a porté sur le processus de changement induit par « *recomposition des invariances* ». Ainsi, suite à l'intégration de l'idée originale d'invariance par changement d'échelle où le changement se fasse par « *recomposition des invariances* », nous étalons un éclaircissement de la genèse des structures cycliques autosimilaires, invariantes pour différents changements d'échelle. Selon cette nouvelle manière de penser, nous essayons de prouver qu'une sorte de tendance à l'évolution s'opérant par la « *recomposition* » de structures invariantes, qui ne sont pas réadaptées, resteraient en plan ou disparaîtraient. D'où, l'évolution déterministe dans le temps discret du système dynamique est décrite par l'équation récurrente non-linéaire, d'ordre un sur  $\Omega$  désignée par la relation de la forme:

$$Y_t = f(Y_{t-1}) = \dots = f^t(Y_0), \quad Y_0 \in I \subseteq \Omega \subseteq \mathfrak{R}$$

où :  $Y_t$  pour  $t = 1, 2, \dots, T$  représente l'état complet du système,  $Y_0$  est l'état initial du système et  $f(\cdot)$  est une fonction non-linéaire d'ordre un, définie sur l'intervalle fermé borné zéro-un noté  $I$  dans  $\mathfrak{R}$  et de classe  $C^1$  sur son domaine de définition : *espace des phases*. Elle satisfait deux relations mathématiques de base : la première est de la forme  $f \circ f = f$ , dont la résolution donne les points d'équilibres, s'ils existent, du  $(f \circ f)$  qui sont pour l'instant stables. La deuxième relation, est de la forme  $f \circ f \circ \dots \circ f = f$ , où pour chaque composition possible nous avons une autre forme d'équilibre, qui naît à partir de l'état d'équilibre précédente, nous disons que l'équilibre est dynamique. Ainsi à partir du moment où la structure d'équilibre de  $(f \circ f)$  s'est stabilisée localement, elle est devenue invariante. Ensuite, cette première structure d'équilibre va perdre sa stabilité locale, au profit de la deuxième structure d'équilibre de la recomposition  $(f \circ f) \circ f$  qui

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

est à son tour localement stable et va subir le même processus sans cesse. Dès lors, nous constatons que seule la recombinaison d'une structure invariante, dite choc structurel endogène, constitue le moteur de la dynamique d'équilibre et d'une évolution continue. C'est le phénomène reconnu par les mathématiciens, sous le nom de la « *variété invariante* ». C'est-à-dire, que ces recombinaisons ne détruisent pas la structure de l'équilibre, mais chaque fois, elles l'acceptent, en lui changeant les propriétés qualitatives de sa stabilité structurelle. C'est donc, précisément ces lois microscopiques, floues ou chocs structurels endogènes, inobservables à l'œil nu, qui établissent qu'il faut que, structurellement et apparemment, rien ne change (toujours nous devons respecter la relation d'invariance  $f \circ f = f$ ), pour que, fonctionnellement et réellement, tout change (pour avoir la relation de la continuité évolutive par recombinaisons de l'identité<sup>98</sup>  $f \circ f \circ \dots \circ f = f$ ). Elles participèrent ainsi à la recombinaison, radicalement évolutive, d'une invariance dynamique. Celle liée à la dynamique endogène des structures, par transition continuellement adaptative, de la structure dynamique, d'un équilibre localement instable, vers un nouvel équilibre globalement stable, ayant des propriétés nouvelles. En ce sens : rien ne change<sup>99</sup>! Tout évolue. Voyons, donc, que ceci se manifeste techniquement sur le plan économique, par le fait que le cycle endogène est un concept, pratiquement, inobservable directement, et souvent reste difficile à quantifier. De ce fait, la majeure difficulté pour un conjoncturiste, généralement, engagé dans une tâche qui consiste à commenter l'évolution récente de l'économie et évaluer sa situation présente, afin d'en prédire son évolution, nécessite de localiser cette économie, par rapport à un cycle<sup>100</sup> à caractère endogène, non-linéaire et flou.

Notons tout d'abord que, la condition d'existence du processus récurrent exige que la fonction  $f(\cdot)$ , soit définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathfrak{R}$  tel que  $f(I) \subseteq I$ . Qu'en plus, l'inversibilité de

---

<sup>98</sup> L'identité pour la loi de composition est  $f \circ f = f$ . Ceci définit une certaine invariance d'échelle qui s'explique par le fait que les caractéristiques des lois statistiques restent les mêmes à un changement d'échelle près.

<sup>99</sup> Ici le terme changement doit être compris dans le sens absolu d'une rupture sans transformation, par contre le terme d'évolution est un processus continu y intègre le sens d'un passage progressif et adaptatif des structures.

<sup>100</sup> Notons que cette idée repose sur le fait qu'en général, la décomposition tendancielle des variables macroéconomiques met en évidence des fluctuations cycliques autour d'un trend. Ce trend exprime la croissance de l'économie à l'équilibre alors que les cycles ou fluctuations expriment les déséquilibres autour de ce trend.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

---

la fonction  $f(\cdot)$ , rend possible de suivre l'évolution dynamique, de son comportement futur dans le temps. Ensuite, malgré qu'un système dynamique non-linéaire ou simplement linéaire par morceau, soit parfaitement déterministe, il peut suivre un comportement complexe et même aléatoire, plus ou moins imprévisible. Hasselblatt et Katok (2003), ont déclaré que cette imprédictibilité est appelée *chaos*. Nous allons étudier, ici, le comportement d'un système dynamique induit par une transformation ponctuelle, basée sur l'équation récurrente, non linéaire d'ordre  $un$ , pour laquelle les solutions critiques, peuvent présenter des comportements chaotiques. En particulier, notre tâche consiste à vérifier que ces comportements sont, essentiellement, commandés par des propriétés de l'espace d'état (attracteurs chaotiques, bassins d'attraction et leur frontières) et de l'espace paramétrique (structures des bifurcations). L'objectif est, donc, de mettre en lumière les propriétés du chaos et d'exploiter ensuite, ces propriétés, pour contrôler l'émergence de formes organisées, en présence de transitions critiques. Car en présence du chaos, le caractère non périodique, rend l'information prédictive inaccessible, puisqu'elle peut être transformée ou masquée.

La prise en compte de ce principe de « *recomposition des invariances* », comme caractéristique de base de la dynamique endogène des structures, assurée à l'aide d'un processus de transition, se justifie par une conception fondamentale en dynamique et notamment en dynamique économique, qui laisse penser, qu'en principe l'étude de la dynamique en économie, ne peut être appréhendée, en l'absence d'une observation ou d'un raisonnement, mettant l'économie en mouvement. Ainsi, toute transition doit refléter le principe, de tout change parce que rien ne change, qui découle de la conception de « *recomposition des invariances* ». En ce sens, le changement caractérisant la transition, au niveau de la dynamique de l'économie en mouvement, n'est possible que grâce à la constante reproduction et résynthèse de ce qui ne change pas. Par conséquent, afin de garantir une durabilité répétitive du mécanisme fictif, il faut avoir une force de rappel imaginaire, qui tend à maintenir toute structure invariante, en continuelle adaptation, en se recomposant et simultanément, en se réorganisant, dans un sens révolutionnaire, mais pas destructeur, qui accepte la détérioration, de tout ce qui n'est pas d'avant. Cette vue, nous offre une véritable analyse révolutionnaire gouvernée, par le ferme vouloir de

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

recomposer la structure de la dynamique économique, autour d'un cycle endogène non-linéaire, par référence à la théorie du changement par « *recomposition des invariances* ».

L'étude du comportement d'un système dynamique est, donc, indispensable et passe, essentiellement, par la caractérisation de sa loi d'évolution, ou de transition de phase. Ceci, commence par la détermination des valeurs critiques de la variable, pour lesquelles elle n'évolue plus avec le temps. C'est-à-dire, les états stationnaires ou les points fixes. Ainsi que par la spécification de ces états qui se répètent d'une façon semblable, au bout d'un certain nombre de pas. C'est-à-dire les points périodiques.

**Théorème 2.1 (Brouwer, (1959)<sup>101</sup>).**

*Toute application continue d'un intervalle de  $\mathfrak{R}$ , dans lui-même, admet au moins un point fixe.*

De ce théorème, dit « *du point fixe* », découle la condition nécessaire et suffisante pour caractériser la situation d'équilibre  $Y_e$  vérifiant :  $Y_e = f(Y_e)$ , pour tout  $t$ .

**Proposition 2.1**

*Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction continue.*

*Si  $f([a, b]) \subset [a, b]$  ou  $f([a, b]) \supset [a, b]$ , alors  $f$  admet un point fixe.*

**Preuve**

Nous posons  $g(Y_t) = f(Y_t) - Y_t$ .

Si  $f([a, b]) \subset [a, b]$  alors  $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$ ; par continuité de  $g$  il existe au moins  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ .

Si  $f([a, b]) \supset [a, b]$  alors il existe  $c_1, c_2 \in [a, b]$  tel que  $f(c_1) \leq a$  et  $f(c_1) \geq b$ .

Nous aurons alors,  $g(c_1) = f(c_1) - c_1 \leq a - c_1 \leq 0$  et  $g(c_2) = f(c_2) - c_2 \geq b - c_2 \geq 0$ , de ce fait il y a un  $c \in [c_1, c_2]$  tel que  $g(c) = 0$ . Par conséquent, dans les deux cas,  $c$  est le point fixe pour  $f$ .

**Définition 2.1**

*Un équilibre stationnaire d'un système dynamique correspond à une position invariante quelque soit le sens dans lequel est envisagée la dynamique.*

**Définition 2.2**

*Un processus est en équilibre stable s'il est apte à trouver sa valeur donnée d'équilibre « normal », lorsqu'il s'en est accidentellement écarté.*

---

<sup>101</sup> Voir Brouwer, F. F., (1959), « *On a generalization of the schauder fixed point theorem* », Duke Math. J., t. 26, pp. 291-303.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Ces définitions constituent notre élément de départ pour comprendre la liaison entre le terme «équilibre» et le terme «stabilité». Monique (1981), souligne que l'équilibre économique, général, transitif et intransitif. Pohjola (1981) et Glendinning (1994), affirment que la stabilité et l'instabilité constituent le principal moteur décrivant la dynamique du système. L'analyse de la stabilité, consiste à étudier l'évolution de perturbations minimales des états d'équilibres. Boldrin et Woodford (1991), ont prouvé que la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre dynamique, d'un système, forment un ingrédient de base pour l'apparition des fluctuations endogènes et du dynamique chaotique. Nous pourrions postuler que l'équilibre ou le déséquilibre est un facteur prévisionnel de première importance. À cet égard, afin de bien maîtriser ceci, nous conceptualisons l'idée sous-jacente de ce liaison mécanique élémentaire, au moyen de la figure (2.1), comme suit :

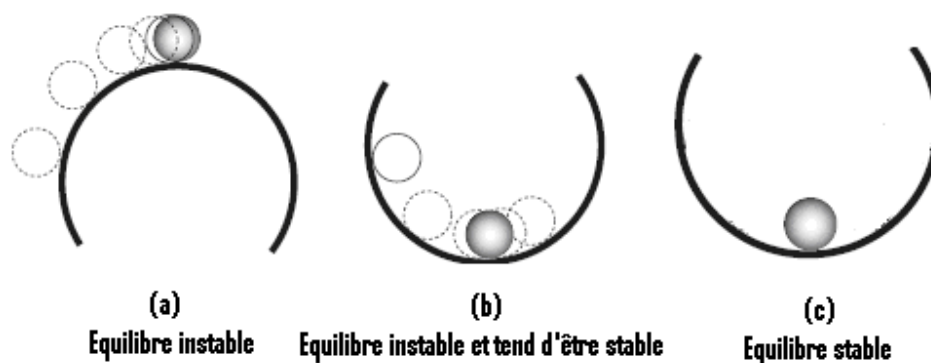


Figure 2.1: Équilibre et stabilité

Dans la situation (a), toutes les trajectoires issues de conditions initiales, proches de l'équilibre, tendent à diverger de celui-ci et le système qui est à l'équilibre à un moment donné, ne peut y revenir jamais. Même un mouvement d'intensité très légère va déclencher sa chute. Nous disons, que l'équilibre est *instable*.

Dans la situation (b), toutes les trajectoires issues de conditions initiales proches de l'équilibre convergent vers lui. C'est le cas où l'équilibre est plus ou moins stable. Nous disons, que l'équilibre est *localement stable*.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Dans la situation (c), toutes les trajectoires issues de conditions initiales quelconques convergent vers la même position d'équilibre initial. Le système se trouve dans une position stable, au fond d'une vallée, d'un bassin. Nous disons, que l'équilibre est *globalement stable*.

À cet égard, nous pouvons imaginer que les fluctuations endogènes qui résultent des phénomènes de rupture et de lissage par des mécanismes fonctionnels de transitions critiques via les procédures de modifications qualitatives, induites par les processus d'ajustements, suite aux modifications paramétriques au niveau des fonctions de transitions caractérisant les modèles dynamiques d'irrégularité, plus ou moins forte, et exploitant les capacités morphogénétiques de l'instabilité structurelle, se fondent sur une propriété d'instabilité dynamique locale des états stationnaires. Selon le principe de moindre action, dans cet espace dynamique, le système étudié essaye de se placer en des situations d'équilibres où une certaine fonction est minimum. Lorsque la structure du système dynamique se déforme lentement, il arrive que l'équilibre du système passe, soudainement, d'un bassin localement instable, vers un autre bassin globalement stable : c'est une *catastrophe*. Donc, comprendre les lois d'évolution des structures macrodynamiques induites par l'émergence des fluctuations endogènes en dynamique économique, c'est comprendre, tout simplement, la théorie de l'émergence de formes organisées, en présence de transitions critiques et la nature des catastrophes qui apparaissent en général. Ce qui est intéressant dans ces transitions critiques, est que la structure de cohérence globale, qui se forme dans la transition, est intégralement dense dans les activités dynamiques locales. Or, la dépendance de la structure locale de celle globale, par une structure de cohérence, qui conditionne la longueur de corrélation caractérisant les changements d'états, lors d'un passage par un état critique, qui modifie radicalement les propriétés et les paramètres. À ce propos, nous constatons donc, que pour prévoir, il est fondamentalement nécessaire de se rendre compte du degré de stabilité des équilibres observés. En effet, Haken (1983), a remarqué qu'un déséquilibre peut probablement résulter d'une rupture non certaine<sup>102</sup>, dans un temps bref. C'est le cas par exemple de la situation (b), où un tatonnement rapide de l'équilibre, autour de sa position

---

<sup>102</sup> Non certaine, puisque les conditions de l'équilibre sont susceptibles de se modifier.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

d'équilibre première se manifeste par un changement permanent de la structure dynamique du système, à la suite de la transition de l'équilibre d'un état à un autre.

**Définition 2.3**

L'équilibre  $Y_e$  est globalement stable sur un domaine  $I$  si, quelle que soit la condition initiale  $Y_0$ , la suite de terme général  $Y_{t-1}$  converge vers  $Y_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

L'équilibre  $Y_e$  est localement stable au voisinage  $\Lambda$  de  $Y_e$  tel que, quelle que soit la condition initiale  $Y_0$  appartenant à ce voisinage  $\Lambda \subset I$ , la suite de terme général  $Y_{t-1}$  converge vers  $Y_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

L'équilibre  $Y_e$  est instable s'il ne possède pas de voisinage dans lequel toute condition initiale  $Y_0$  assure la convergence de la suite de terme générale  $Y_{t-1}$  vers  $Y_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Théorème 2.2**

Soit  $Y_e$  une situation d'équilibre de  $Y_t = f(Y_{t-1})$ .

Si pour tout  $Y$  de  $I$ , nous avons  $|f'(Y)| < 1$ , alors,  $Y_e$  est un équilibre globalement stable.

**Théorème 2.3**

Soit  $Y_e$  une situation d'équilibre de  $Y_t = f(Y_{t-1})$ .

Si pour tout  $Y_e$  de  $I$ , nous avons  $|f'(Y_e)| < 1$ , alors,  $Y_e$  est un équilibre localement stable.

Si pour tout  $Y_e$  de  $I$ , nous avons  $|f'(Y_e)| > 1$ , alors,  $Y_e$  est un équilibre instable.

Les différentes dynamiques des solutions  $Y_t$  au voisinage de  $Y_e$  sont illustrées dans le tableau (2.1) suivant :

Tableau 2.1 : Comportement asymptotique des solutions			
Si $ f'(Y_e)  > 1$		Si $ f'(Y_e)  > 1$	
alors $Y_e$ est globalement stable		alors $Y_e$ est globalement stable	
$1 < f'(Y_e)$	$f'(Y_e) < -1$	$0 < f'(Y_e) < 1$	$-1 < f'(Y_e) < 0$
divergence régulière	divergence oscillatoire	convergence régulière	convergence oscillatoire

Source : Dameron P. (2001), *Mathématiques des Modèles Économiques : Analyse Dynamique, Economica, chapitre 2, p.90.*

Après avoir défini la liaison entre les notions de stabilité et d'équilibre, il faut mener une analyse, plus fine, capable de calibrer l'importance, d'identifier les interactions camouflées entre ces notions de base. À cet égard, aucun ne peut douter de la présence des fluctuations endogènes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Ceci se présente d'une manière plus évidente et moins floue, si nous essayons de répondre à la question : Qui fait bouger la structure de notre globe terrestre, sachant que les célèbres géologues ont prouvé que les continents, notamment, l'Europe et l'Afrique étaient liés auparavant?

Bien sûr la réponse ici est nette, ce sont les tremblements séismiques, les agitations des magmas volcaniques et les tourbillonnements dynamiques des fluides du noyau terrestre. Toutes ces causes d'origine interne attaquent les plaques tectoniques et modifient, graduellement, la structure endogène de la terre. Sans oublier que le facteur exogène tel que par exemple, l'être vivant agit constamment sur l'environnement externe de la terre, sans affecter sa structure endogène. Admettons, maintenant, un raisonnement de rapprochement autorisant une analogie, entre la sphère terrestre et la sphère économique. D'où l'évidence de laissons-nous croire, comme l'a remarqué Lux (1992), que les cycles économiques observés, seront interprétés comme une manifestation de l'instabilité endogène, de la structure dynamique de l'économie. Car il ne suffisait pas de changer la boule de place dans la figure (2.1) ; il fallait agir aussi sur la forme du bol.

En dynamique économique, nous constatons donc, le danger grave d'ignorer l'étude de stabilité, de l'équilibre dynamique et de supposer *a priori*, comme cela a raisonné traditionnellement, qu'elle est toujours en équilibre statique et stable. Par équilibre dynamique, nous désignons une situation instable, identifiée, à partir des facteurs intrinsèques de la microstructure. Par facteurs intrinsèques de la microstructure, nous entendons des lois scientifiques (des lois physiques, mathématiques, économiques, thermodynamiques,... qui ont participé dans le fonctionnement du système dynamique, sans nécessairement être identifiable), qui caractérisent le fonctionnement du système dynamique, à travers un mécanisme interne de transition de phases et de transformation adaptatives des structures dynamiques, tout en respectant le principe de changement par « *recomposition des invariances* », qui aide à établir les relations de causes à effets, définissables tant qualitativement que quantitativement. Saari (1991) et Chiarella, Flaschel et Franke (2005), ont signalé que c'est ce défaut qui est à l'origine de la mauvaise interprétation de plusieurs relations d'interdépendances structurelles dans le

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

comportement des variables économiques, ce qui risque d'influencer négativement les résultats attendus et d'affecter, par la suite les décisions.

À cet égard, nous pourrions citer par exemple, que de nos jours, de nombreuses décisions stratégiques mondiales pour freiner la hausse des prix, notamment, celui du carburant ont échoué pour ne pas avoir agi correctement sur les facteurs fondamentaux, causant ce problème. C'est tout à fait logique, qu'il fallait maîtriser correctement et d'une manière très globale le problème dans ses particularités, pour manifester dans le bon sens. Sinon une lecture passagère du problème va forcément le compliquer davantage.

Donc, dans la suite de cette section, notre but sera d'identifier la structure purement endogène du cycle. Nous essayons de répondre à l'interrogation de base : Comment expliquer la morphologie structurelle de la relation entre stabilité et équilibre?

Pour répondre à cette question, nous distinguons trois situations possibles :

1<sup>ère</sup> situation :

Dans ce cas, nous supposons que, quelle que soit la condition initiale  $Y_0$ , le système dynamique possède une solution unique  $Y_e$  et que la suite définie, à partir de l'équation de récurrence non-linéaire d'ordre un converge, alors l'équilibre est globalement stable et l'état du système est totalement identifié, par simple précision de l'expression explicite de la fonction  $f(\cdot)$ . Cette modalité est illustrée à l'aide de la figure (2.2), montre que même s'il existe des perturbations qui stimulent les variables représentées par  $Y_t$  et modifient instantanément leur trajectoire, mais leur effet reste toujours négligeable, sur la convergence du système vers la même situation d'équilibre unique. Nous disons, donc, qu'un choc a un effet transitoire sur l'équilibre globalement stable du système.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

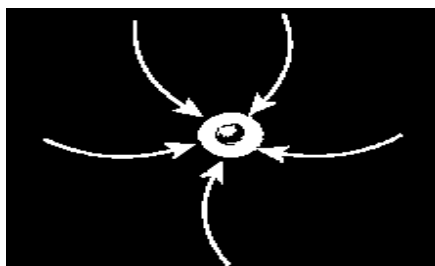


Figure 2.2: Point fixe globalement stable

2<sup>ème</sup> situation :

Dans cette situation, illustrée à l'aide de la figure (2.3), nous analysons le problème, d'une manière plus générale, et complexe telles que la présence de plusieurs minima locaux pour la fonction à optimiser  $f(.)$ . Nous constatons que le résultat de convergence du processus dépend de sa condition initiale  $Y_0$ . Pour prouver ceci, nous supposons que le système dynamique se trouve au départ, à sa première position d'équilibre  $Y_e^{(1)}$  et qu'une perturbation, ayant un effet permanent permet de modifier l'évolution du système. Dans ce sens, sous l'effet de la persistance du choc, le système s'éloigne de sa position d'équilibre  $Y_e^{(1)}$  et converge vers une autre condition d'équilibre nouvelle  $Y_e^{(2)}$ . Dans ce cas, nous disons qu'un choc a un effet permanent sur le fonctionnement du système et affecte constamment son équilibre. La persistance de la dynamique non linéaire, peut être expliquée, donc, par la multiplicité de l'équilibre induite par rupture de cet équilibre dynamique, produit une instabilité structurelle dynamique qui y constitue une source de complexité, lors du fonctionnement du système. La dynamique non linéaire provient, alors du changement de la propriété de stabilité d'un point fixe quand un paramètre de l'équation varie.

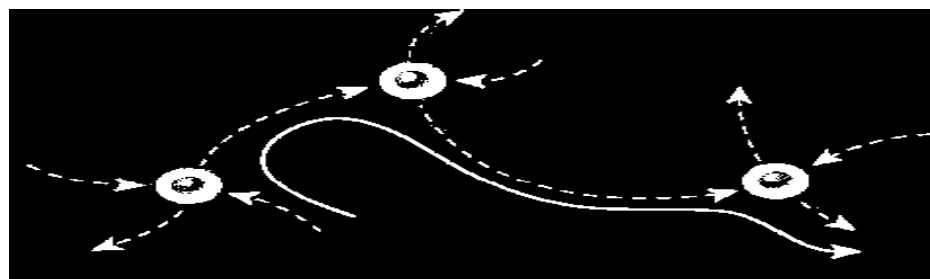


Figure 2.3: La dynamique non-linéaire peut être expliquée par l'existence de plusieurs points fixes instables (source de complexité)

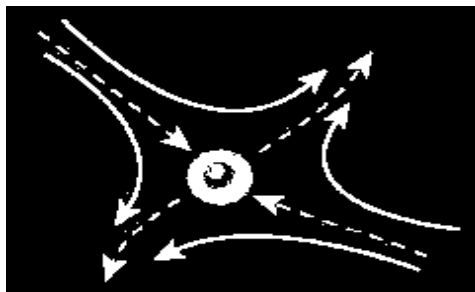
Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Johnson (1991), a signalé que la forte instabilité de l'équilibre dynamique peut être à l'origine de l'apparition d'un comportement chaotique du système dynamique. Ce dynamisme peut prendre une forme bizarre et provient, du fait que les solutions du système sont incapables de générer des trajectoires périodiques régulières.

3<sup>ème</sup> situation :

Dans ce dernier cas, illustré à l'aide de la figure (2.4), nous supposons que la fonction à optimiser  $f(.)$  varie en cours de processus. C'est-à-dire, au moins un paramètre de l'équation change, en d'autres termes, l'équilibre dépend du chemin suivi (ou conditions initiales). Donc, même une légère modification des conditions initiales (choc) va effectivement engendrer une modification, au niveau de la direction de la trajectoire décrivant l'évolution du système et par conséquent, le processus génère une nouvelle trajectoire qui convergera, vers une nouvelle situation d'équilibre. Dans ce cas, l'équilibre fluctue d'une manière perturbative, suivant une direction imprévue et sensible des conditions initiales : c'est le cas de la dynamique chaotique.



**Figure 2.4: Dynamique chaotique et d'une courbe invariante associée à un point d'un cycle pair de type col**

Pour élargir le champ de l'investigation, il convient de remarquer que seuls les cycles d'ordre pair peuvent être de type col, au voisinage d'un point selle (col), les trajectoires sont des hyperboles, dont les deux asymptotes passent par le col ; l'une d'entre elle joue le rôle d'un axe de contraction, tandis que l'autre joue le rôle d'un axe de dilatation. Dans ce cas bidimensionnel illustré par la figure (2.4), l'origine et les deux demi-trajectoires séparatrices instables (divergentes), forment la variété variante (instable) du point selle. Par contre, la variété invariante

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

(stable) du point selle est formée par l'origine et les deux demi-trajectoires séparatrices stables (convergentes). Dans le cas tridimensionnel, le point selle devient un point hyperbolique. Nous pouvons distinguer, à l'aide d'une coupe perpendiculaire, deux cas possibles qui sont envisagés<sup>103</sup> sur la figure (2.5).

Cette notion d'hyperbolicité<sup>104</sup> joue un rôle crucial, dans la compréhension du mécanisme de la divergence exponentielle des trajectoires, initialement, très proches : selon la direction de l'axe de dilatation ; les points figuratifs s'écartent de l'origine, alors que, dans la direction perpendiculaire de l'axe de contraction, les points figuratifs se rapprochent de l'origine. Ainsi, lorsque nous observons le comportement dynamique des processus de transitions, qui constituent les principales sources de générations des fluctuations endogènes, nous devons rendre compte que les déplacements de l'équilibre  $y$  ont l'aptitude à s'auto-organiser, suivant des bassins d'attractions qui demeurent assez stables, de façon que les vecteurs directeurs décrivant leurs directions dynamiques, ne font sans cesse, que s'écarter modérément, puis se rapprocher d'un équilibre dynamique synthétisant les mouvements indispensables de leurs structures auto-organisées. De ce fait, la multiplicité de l'équilibre dynamique, induite par rupture de cet équilibre, quand la valeur d'un paramètre de contrôle traverse une valeur critique, génère une instabilité structurelle dynamique, dont les causes sont généralement associées à une modification intense, des propriétés qualitatives de l'équilibre dynamique sous l'effet de la présence des fluctuations endogènes. À partir de ce constat, nous postulons que, lors de la transition de phases, la structure même du cycle endogène conduit à discriminer entre deux directions privilégiées. Comme le montre schématiquement la figure (2.5), l'alignement de la perturbation se fait selon deux directions différentes des axes de déformation (contraction/dilatation), l'une de ces directions est orientée suivant l'axe de contraction (a) où une baisse rapide avec l'amplitude, sous

---

<sup>103</sup> Farrell, B.F., (1982), « *The initial growth of disturbances in a baroclinic flow* », J. Atmos. Sci., 39, pp. 1663-1686.

<sup>104</sup> La propriété d'hyperbolicité signifie que par chaque trajectoire de phase  $Y_t$  passe deux surfaces : les points de variétés stable qui se rapprochent exponentiellement du point  $Y_t$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et les points de variétés instable qui se rapprochent exponentiellement du point  $Y_t$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$ . La mise en évidence de l'hyperbolicité nécessite la dépendance continue des trajectoires des ces deux surfaces.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

l'effet des forces de rappels, a pour conséquence le déclenchement d'une instabilité structurelle conservative, dans la mesure où il y a production d'énergie cinétique de la perturbation, si celle-ci est étalée, selon l'axe de contraction, alors que l'autre direction privilégiée est celle orientée dans le sens porté par l'axe de dilatation, où il y a destruction d'énergie cinétique de la perturbation, sous l'effet de la sensibilité aux conditions initiales, si celle-ci est étendue selon l'axe de dilatation (b). Ces deux tendances caractérisent ensemble, le degré d'attraction des trajectoires, vers un attracteur et leur degré de divergence sur ce dernier.

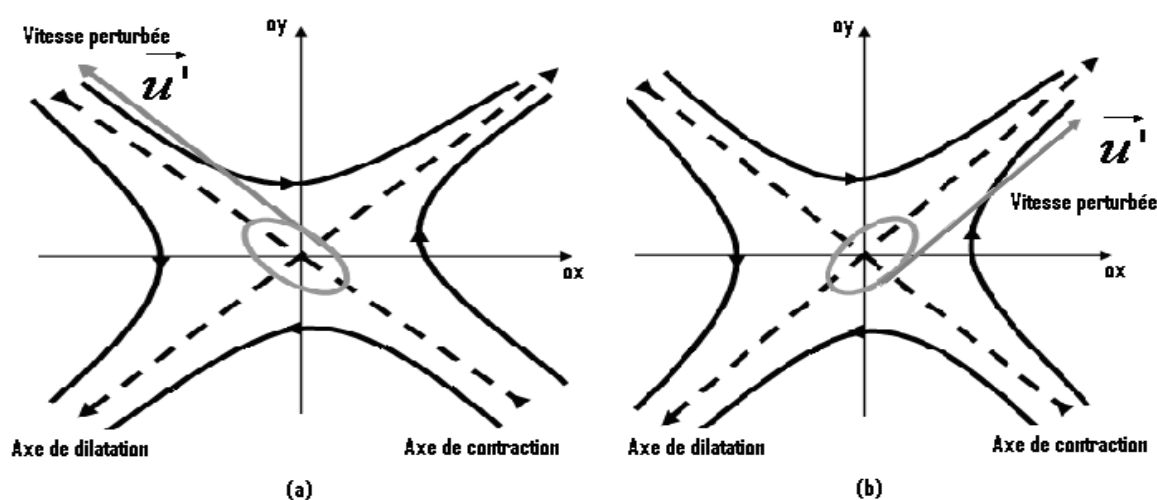


Figure 2.5: Configuration optimale de la perturbation pour que son énergie cinétique croisse (a) ou décroisse (b).

- La première (a) consiste dans la production d'énergie cinétique de la perturbation, si celle-ci est étirée selon l'axe de contraction.
- La seconde (b) consiste dans la destruction d'énergie cinétique de la perturbation, si celle-ci est étirée selon l'axe de dilatation.

À partir de ce développement de microstructure, nous sommes arrivés à la conclusion suivante: l'équilibre dynamique est en continuelle redéfinition, suite à l'exercice de forces multiples contradictoires mais complémentaires, mues par une dynamique des fluctuations endogènes micro-structurelles, pour reprendre à ses conditions propices macro-structurelles de l'endocyclogenèse, qui est porté par un phénomène abstrait, orienté par la confrontation



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

simultanée, entre allongement selon l'axe de contraction, où il y a production de d'énergie cinétique et/ou selon l'axe de dilatation, où il y a destruction de d'énergie cinétique. Ainsi, l'endocyclogenèse est défiée, éventuellement, par un dilemme production-destruction et animé par ce que nous qualifierions de progrès entropique ouvert (*Open entropic progress*). Par progrès entropique ouvert, nous entendons la possibilité de réduire une multiplicité d'équilibres dynamiques à un seul, à cause des facteurs objectifs imposés, par une situation qui dépasse réellement le domaine de dynamique économique, même si les variations de l'entropie servent à conditionner la genèse de l'instabilité structurelle. La conclusion que nous pouvons tirer de cela, est qu'en tout état de cause, nous sommes entrain d'étudier le fonctionnement d'un processus dynamique, évoluant dans un mode, fait partie d'incertitude, et que nous devons, nécessairement, régler une marge de tolérance d'incertitude suffisamment réduite dans notre démarche, en analyse prévisionnelle, dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques.

De ce point de vue, la notion de stabilité structurelle se rattache à la notion d'inertie. Car des conditions initiales presque identiques, peuvent engendrer des trajectoires non conformes, et aperiodiques. À cause de la sensibilité du système aux conditions initiales et de l'imprécision de ces conditions initiales. La prévision consiste, donc, à rechercher des déséquilibres. Nous disons, donc, qu'il y a *l'indéterminisme* dans un système portant *déterministe*. Selon Venditti, Cartigny (1994) et Cazzavillan (2001), c'est dans ce paradigme flou, que prend naissance le paradoxe de *l'indéterminisme dans le déterminisme*. Brock (1986) et Baumol et Benhabib (1989), ont insisté sur l'importance de faire une discrimination, entre le comportement stochastique et déterministe d'un système. Cependant, une lacune qui se pose et affecte la prévision dans le domaine des instabilités des structures dynamiques. Il s'agit, de la présence des ruptures brutales, caractérisant le processus de transition des états. Sans s'engager dans un traitement d'un point de vue physique du problème étudié, juste à titre indicatif, nous signalons que l'intérêt de comprendre le sens de croissance de la perturbation singulière et la caractérisation de sa loi d'évolution dynamique permet d'assimiler comment les erreurs de prévisions prennent naissance dans les fluctuations économiques endogènes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

En dehors des axes principaux, les points se meuvent sur des courbes, dont la projection sur le plan de la figure (2.6), ressemble à des dynamiques hyperboliques. Dans ce contexte, le concept d'hyperbolicité joue un rôle fondamental pour comprendre la formation d'un attracteur étrange. Sur la figure (2.6), ci-dessous, nous avons tracé à l'aide des flèches orientées la dynamique hyperbolique.

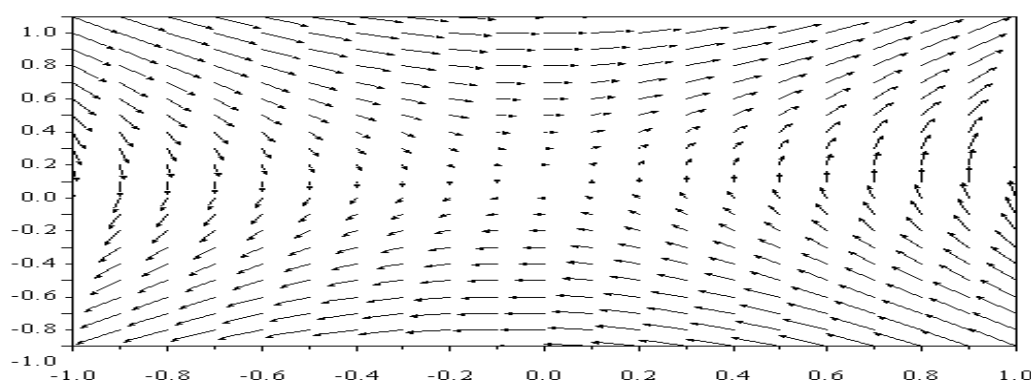


Figure 2.6: Dynamiques hyperboliques

L'examen graphique de la figure (2.6), montre nettement, à l'aide du champ de vecteurs génériques, que l'attraction s'opère dans une direction, alors que la divergence des trajectoires s'opère dans une autre direction. La divergence est nécessaire pour assurer la stochasticité, tandis que l'attraction assure la concentration des trajectoires dans un volume limité de l'espace des phases. Ainsi les formes apparaissant dans les morphogenèses, sont des structures oscillantes auto-organisées de l'endocyclogenèse retraçant une conception de modèles dynamiques, à partir du couplage de périodes<sup>105</sup>, de la diffusion de ses erreurs prédictives, et créant des motifs en bandes, produisant en une sorte des figures différentes successives (tore, résonance de tore, tore fractal, attracteur étrange) ou encore les *structures dissipatives*. Ces structures stationnaires hors d'équilibre, où la dissipation d'énergie crée une organisation locale, ayant une influence sur « toute morphologie future », sont bien un nouveau type des états dynamiques du modèle prédictif.

<sup>105</sup> Ce phénomène de couplage de périodes est décrit en simulation numérique, plus tard, sur la figure (2.50).

En ce sens, la contribution de Bliet (2002), permet de mettre en lumière la perte de stabilité de l'équilibre, comme condition nécessaire et suffisante de la genèse du cycle endogène. Au-delà de la simple oscillation périodique, la morphologie structurelle du cycle montre qu'il naît, de manière endogène, d'une interaction entre le couple instabilité et équilibre. De plus, cette interdépendance peut conduire à des phénomènes chaotiques qui ne sont pas aléatoires, mais obéissent à des lois déterministes. En particulier, la présence d'attracteur étrange s'avère être, fondamentale, pour la juste compréhension du mécanisme de croissance exponentielle d'erreur de prévision, source d'imprédictibilité. De ce point de vue, la caractérisation des fluctuations cycliques et celle des fluctuations chaotiques seront l'objet privilégié du franchissement de l'étape suivante. Dans le cadre des systèmes dynamiques non-linéaires, nous allons, tout d'abord, suivre une démarche mathématique capable, de prouver la présence du cycle.

### ***2.1.2.2. Existence de cycle endogène***

L'étude menée à ce niveau a permis d'affirmer que les propriétés de stabilité et d'instabilité du système dynamique, au voisinage de ses points d'équilibre ont une influence sur l'existence de cycles endogènes. Dans le cadre des systèmes dynamiques non-linéaires, nous allons suivre une démarche mathématique capable de prouver la présence du cycle par exemple d'ordre deux<sup>106</sup>. À cette fin, tout en respectant l'hypothèse de base de l'instabilité structurelle, ainsi garantissant l'évolution spatio-temporelle des structures dynamiques. Ainsi, l'évolution déterministe du processus dynamique est une évolution continue, dans l'espace, mais discontinue dans le temps. De ce fait, compte tenu de la richesse épistémologique et la simplicité technique caractéristiques d'une approximation polynomiale, offrant une grande souplesse à notre analyse, nous considérons, ici, un modèle déterministe, défini par l'équation récurrente non-linéaire d'ordre un, décrivant un modèle dynamique de croissance, avec freinage logistique discret, donné par son expression explicite :

$$Y_t = r(1 - Y_{t-1})Y_{t-1}, \quad r > 0$$

---

<sup>106</sup> Notons que nous pouvons généraliser la même démarche afin de vérifier la présence du cycle d'ordre  $n > 2$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

où  $r$  est le paramètre de bifurcation. Pour que ce processus récurrent de la forme  $Y_t = f(Y_{t-1})$  existe ( $Y_t$  étant une variable positive ou nulle), il faut satisfaire la condition  $f(\mathfrak{R}^+) \subseteq \mathfrak{R}^+$ . La figure (2.7), donne les graphes de cette fonction de transition, il s'agit d'une famille de paraboles passant par deux points fixes  $O(0 ; 0)$  et  $A(1 ; 0)$ . Le sommet de ces paraboles est sur la droite verticale, passant par 0.5, alors que l'ordonnée de ce sommet varie entre 0 pour  $r = 0$  et 1 pour  $r = 4$ . En prenant le premier terme entre 0 et 1, quelle que soit la valeur de  $r$  entre 0 et 4, la fonction de transition est bornée. Ceci implique que  $Y_t \in [0, 1]$  et  $r \in [0, 4]$ .

### Lissage de freinage logistique en fonction de $r$

$$Y(t) = r * Y(t-1) * [1 - Y(t-1)]$$

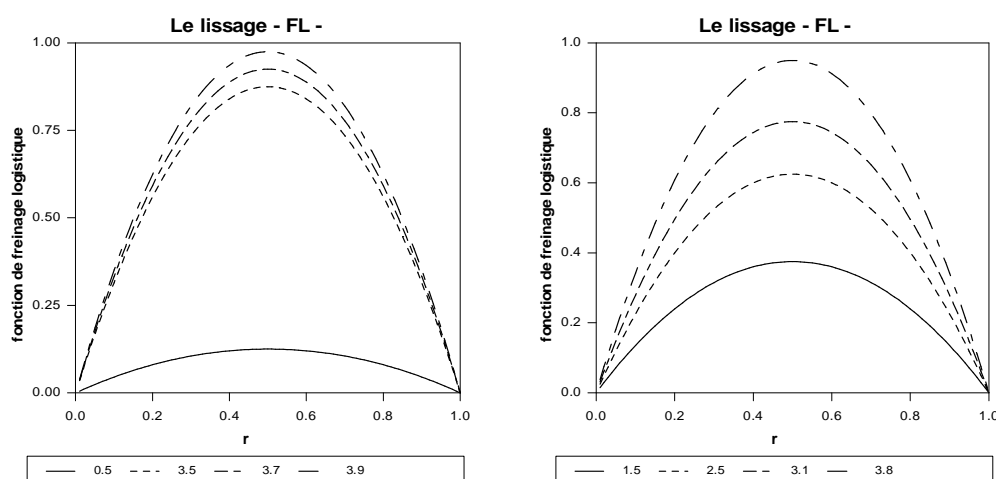


Figure 2.7: Fonction de transition de freinage logistique<sup>107</sup> en fonction de  $r$

<sup>107</sup> Cette formulation découle de l'idée introduite par Thomas Robert Malthus en 1798 de croissance géométrique de la population. Dans notre contexte, elle implique qu'en temps discret, au lieu de travailler sur le taux de croissance  $\tau = (Y_t - Y_{t-1}) / Y_{t-1}$  nous concéderons le multiplicateur  $r = (\tau + 1)$ . Nous constatons que ces deux grandeurs varient dans le même sens. Ainsi, le modèle de croissance avec freinage logistique est basé sur l'hypothèse selon laquelle : le multiplicateur d'une variable économique  $Y_{t-1}$  est la différence entre un terme constant  $r$ , et un terme  $r Y_{t-1}$  proportionnel à la variable. La formulation du problème sous forme d'une équation récurrente non-linéaire de premier ordre de type  $Y_t = f(Y_{t-1})$  donne :  $Y_t / Y_{t-1} = r - r Y_{t-1} \Rightarrow Y_t = r Y_{t-1} (1 - Y_{t-1})$ . D'autant plus que la variable augmente, le multiplicateur  $r$  est infléchi par un effet de saturation appelé : *freinage logistique*.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

La condition d'équilibre est exprimée par :

$$f(Y_e^{(1)}) = Y_e^{(1)} = rY_e^{(1)}(1 - Y_e^{(1)})$$

C'est-à-dire,  $Y_e^{(1)} = 1 - 1/r$  ou  $Y_e^{(1)} = 0$ .

Or, la stabilité de l'équilibre donne :

$$f'(Y) = r(1 - 2Y)$$

Donc,  $f'(Y_e^{(1)}) = (2 - r)$

Après deux périodes ;

$$(f \circ f)(Y_t) = r^2 Y_t (1 - Y_t) (1 - r Y_t (1 - Y_t))$$

Nous aurons :  $d(f \circ f)/dY = (df/dY)^2$  quand  $Y = Y_e^{(1)}$ .

De plus,  $d(f \circ f)/dY = (df/dY)^2$  quand  $df/dY = 0$ .

Les deux équilibres stables de  $(f \circ f)$  apparaissent dès que l'équilibre de  $f$  devient instable. Donc, un cycle d'ordre deux ne peut naitre, que lorsque l'équilibre  $Y_e^{(1)}$  est globalement stable mais localement instable.

**Proposition 2.2**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction de classe  $C^1$ , vérifiant la propriété de récurrence suivante :  $Y_n = f(Y_{n-1})$  où  $Y_0 \in [0, r/4]$  et  $Y_n = r(1 - Y_{n-1})Y_{n-1}$ ,  $r \in [0, 4]$ .

- Si  $r \in ]3, 1 + \sqrt{6}]$ , alors  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un cycle d'ordre 2 attractif, tel que :

$$\{Y_1, Y_2\} \in \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r \pm \frac{\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r} \right\}$$

- Si  $r \in ]1 + \sqrt{6}, 4]$ , alors  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un cycle d'ordre 2, qui cesse d'être attractif.

**Preuve**

Pour chercher une suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers un 2-cycle, il faut résoudre l'équation :

$$\begin{cases} f \circ f(Y) = Y \\ f(Y) \neq Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r^3 Y^4 + 2r^3 Y^3 - r^2 Y^2 + (r^2 - 1)Y = 0 \\ -rY^2 + (r-1)Y \neq 0 \end{cases}$$

Par division des deux équations la première par la seconde :  $-r^2 Y^2 + (r^2 + r)r + (1 + r) = 0$ , ce

qui donne :  $\{Y_1, Y_2\} \in \left\{ \left( r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) / 2r \right\}$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Or,  $\forall r \in ]3, 1 + \sqrt{6}]$ ,  $(f \circ f) \left( \left( r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) / 2r \right) \in [-1, 1[$ ,  $\Rightarrow$  le cycle  $\{Y_1, Y_2\}$  est attractif, et comme  $(f \circ f)$  ne possède pas de cycle d'ordre 2, en d'autre terme,  $f$  ne possède pas de cycle d'ordre 4. Le 2-cycle attractif donc donné par :

$$\{Y_1, Y_2\} \in \left\{ 1/2 + 1/2r \pm \left( \sqrt{(r+1)(r-3)} \right) / 2r \right\}.$$

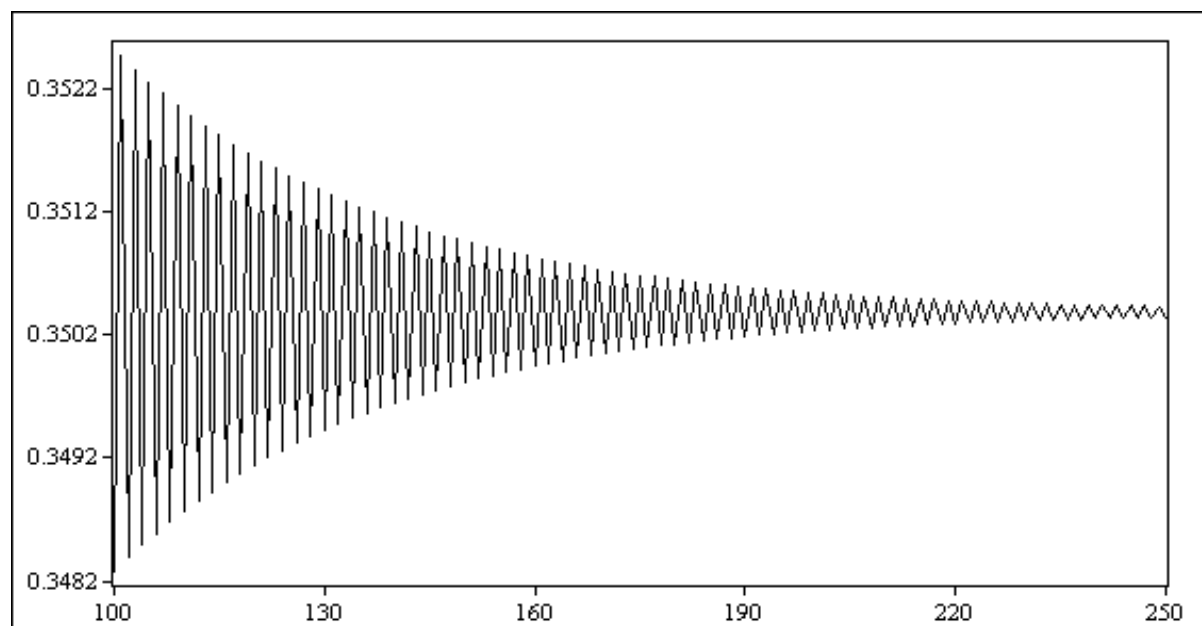
Mais,  $\forall r \in ]1 + \sqrt{6}, 4]$ ,  $(f \circ f) \left( \left( r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) / 2r \right) \in ]-\infty, -1[$  ceci implique que lorsque  $r$  augmente, nous obtenons successivement,  $2^n$  - cycle. À un moment où il n'y a plus de cycle, le comportement de la suite sera imprévisible. Puis, pour une certaine valeur de  $r$ , un 5-cycle ou un 3-cycle, qui se dédouble ensuite en un 6-cycle, puis un 12-cycle, pour retrouver de nouveau l'imprévisibilité.

Sur le plan empirique, nous voyons que l'analyse au niveau microscopique dans ce cadre déterministe, a permis une nouvelle compréhension de l'irrégularité inhérente de la dynamique du cycle économique. La dynamique endogène des structures résulte, comme l'ont fait remarquer Barnett et He (2002), de la perte de stabilité de l'équilibre, qui se caractérise, pratiquement, par un équilibre globalement stable mais localement instable. Sachs, Zinnes et Eilat (2001), ont affirmé que cette situation assure la transition des structures endogènes, comme elle induit une turbulence, au niveau de la dynamique du cycle soumis, d'une manière permanente, à l'effet des forces internes (combinaison entre changement de structure et évolution du modèle économique), où des fluctuations endogènes tendent à modifier son fonctionnement à travers le temps. Bala et Majumdar (1992), ont constaté que ces nouvelles formes endogènes de la dynamique non-linéaire du cycle économique, résultent d'un changement structurel endogène, suite à une modification graduelle de la valeur du paramètre de contrôle au voisinage d'une valeur critique d'un processus d'ajustement. Ce phénomène d'ajustement permet, donc, de caractériser la modification dans les propriétés qualitatives de nature de l'attracteur. Par la suite, il sera modélisé économétriquement, dans la troisième partie, à l'aide de plusieurs fonctions de transitions. Pour des valeurs bien précises du paramètre de contrôle, l'ajustement prend la forme d'une trajectoire sinusoïdale amortie, due à l'émergence endogène des fluctuations. Selon Dockner et Feichtinger (1991), ce tâtonnement autour de l'équilibre asymptotique, de long terme, globalement stable mais localement instable, caractérise donc, un phénomène physique non-linéaire, qui représente une condition technique de réalisation des fluctuations autoentretenuës et que nous appelons : *cycle*

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

*limite*<sup>108</sup>. À titre illustratif, sur la figure (2.8), nous procédons par simulation d'un cycle limite à l'aide d'une base de données de taille  $T = 250$  observations du modèle suit :

$$f_{w,a,b,\lambda}(Y_{t-1}) = (1-w)Y_{t-1} + w \frac{a - \arctan(\lambda Y_{t-1})}{b}$$



**Figure 2.8: Simulation d'un cycle limite :**  $Y_0 = 0.3$ ;  $w = 0.5$ ;  $a = 1$ ;  $b = 0.25$ ;  $\lambda = 4.4$

Avant d'avancer, d'avantage, dans l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes, à cette étape, nous trouvons, nécessaire, même obligatoire de comprendre, dans leur spécificité, le mécanisme de modification graduelle des paramètres du processus d'ajustement qui assure la transition des états dynamiques. Économiquement, ce mécanisme signifie que les processus décisionnels des prévisionnistes, évoluent par apprentissage, en fonction d'informations nouvelles et de l'expérience acquise. En ce sens, le prévisionniste suppose le rejet de l'hypothèse d'une rationalité parfaite, au profit d'une rationalité limitée, lors de l'élaboration d'une prévision.

<sup>108</sup> Notons qu'un cycle limite caractérise un mouvement périodique mais non harmonique ; il est tel que pour des conditions initiales n'appartiennent pas à ce cycle, le mouvement tend asymptotiquement vers ce cycle et le régime amorti de cycle limite correspond à une solution développable en série de Fourier de la forme :

$$Y_t = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Cette dernière est imparfaite et dont la qualité dépend tant de la capacité du prévisionniste à maîtriser les fluctuations endogènes de la dynamique du cycle économique, que de son aptitude de choisir la quantité d'information la plus pertinente, qui lui permettent de sélectionner la structure idéale du modèle non-linéaire de prévision. Cette flexibilité caractérisant l'ajustement graduel du processus décisionnel du prévisionniste, lui permet de réaliser des prévisions robustes, qui tiennent compte de l'irrégularité structurelle du comportement dynamique d'un modèle économétrique, due à la dynamique endogène des structures déterministes exprimées en différences. Par exemple, dans ce contexte, le prévisionniste disposant, en général, d'une information imparfaite, ne cherche pas à réaliser des prévisions optimales et parfaites, il cherche, au contraire, à réaliser des prévisions imparfaites mais robustes. Ceci justifie nettement, le rejet de l'hypothèse d'une rationalité parfaite au profit d'une rationalité limitée.

Jusqu'à présent, nous avons pu montrer la possibilité d'existence du phénomène de cycle limite, sans préciser son utilité, tant sur le plan théorique qu'empirique. L'apport de cette propriété technique de la présence du phénomène de cycle limite, est saisi sur deux niveaux. Théoriquement, ce phénomène justifie bien le rejet de l'hypothèse d'une rationalité parfaite, au profit d'une rationalité limitée. Albin et Foley (1998) et Venditi (1996), défendaient l'idée qui dit que l'agent (le prévisionniste) dispose d'une information imparfaite et ne cherche plus à réaliser une solution optimale, il cherche à choisir parmi des solutions sous-optimales la plus robuste. En ce sens, les préférences des prévisionnistes évoluent en fonction d'informations nouvelles et de compétences techniques, acquises par l'expérience et l'apprentissage. Par exemple, dans la littérature de prévision de séries temporelles non-linéaires, la rationalité limitée est due à une information imparfaite et incomplète, des fluctuations endogènes de la dynamique inhérente de la partie déterministe de ces modèles économétriques et stipule que, nous devons formuler nos attentes, en nous basant sur les informations observables et nous adaptons nos règles de prévision, lors de la réalisation des observations supplémentaires. En ce sens, la capacité d'apparition nous permet de construire, graduellement, nos prévisions. Par exemple, l'application de l'approche minimax, en prévision, ne consiste pas à chercher des prévisions parfaites, mais à établir des prévisions minimisant le risque maximum de prévision. Ce comportement



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

d'ajustements graduels, sans atteindre l'optimalité parfaite, illustre en quelque sorte d'une manière claire et nette, un argument de justification pour les tâtonnements observés au voisinage de l'équilibre de long terme, sans l'atteindre, présentés sous forme de cycle limite.

Empiriquement, la présence du phénomène de cycle limite permet le renouvellement de la pensée de modélisation économétrique standard, sur plusieurs niveaux. D'abord, en présence du cycle limite l'état de convergence du processus, ni un point ni une droite, mais plutôt c'est un cycle dont nous devons tenir compte, lors de la modélisation et non plus le filtrer. En plus, l'ajustement graduel déduit par la présence de cycle limite, permet en pratique, de confirmer la représentation très simplifiée et synthétique des mécanismes de transition et de lissage, par le recours aux fonctions de transitions exponentielles et/ou logistiques, intégrées dans les modèles de changements de régimes, avec transitions lisses. D'autre part, la présence du cycle limite sous forme d'un mécanisme d'ajustement non-linéaire, au voisinage de l'équilibre, à long terme, peut donner une explication de la notion de force de rappel, qui assure la convergence de la cible, vers son équilibre, à long terme, dans un modèle à correction d'erreur. Ceci justifie le recours à la cointégration non linéaire, pour tenir compte de la non-linéarité lorsque nous voulons établir l'équilibre à long terme<sup>109</sup>. De même, nous pourrions signaler que la non prise en compte de la non-linéarité, due à la présence du phénomène non-linéaire du cycle limite, est une limite pour la pratique des modèles autorégressifs linéaires. À titre illustratif, nous allons considérer la partie déterministe du modèle AR(2)<sup>110</sup> définie par une relation en différence première par :

$$f(Y_{t-1}) = (\psi_1 + \psi_2 L)Y_{t-1}$$

où  $L$  est l'opérateur retard.

---

<sup>109</sup> Dans la prochaine partie suivante, Nous exposons avec plus de détails, tout d'abord les modèles comportant un mécanisme d'ajustement non-linéaire ou discontinu dans le temps. Ensuite, nous rappelons brièvement quelques résultats de base de la théorie récente de la cointégration non-linéaire. Enfin, nous présentons les représentations des modèles à corrections d'erreurs non-linéaires qui assurent l'ajustement de court terme avec la dynamique non-linéaire de long terme.

<sup>110</sup> Sans faire intervenir l'opérateur retard, le modèle AR(2) s'écrit:  $Y_t = \psi_1 Y_{t-1} + \psi_2 Y_{t-2}$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Traditionnellement, Yule (1927), a montré que le comportement de cette série dépend des racines (complexes) de l'équation caractéristique associée  $z^2 - \psi_1 z - \psi_2 = 0$ , et plus particulièrement de leur position, par rapport au disque unité. Si leur module est inférieur à 1, alors nous observons un comportement sinusoïdal amorti. En fait, la forme générale des solutions sera de la forme :

$$Y_t = A\rho^t \cos(\omega t - \theta), \quad 0 < \rho < 1$$

Pour  $\psi_1 = 1.8$  et  $\psi_2 = -0.8$ , la figure (2.9) montre que le comportement de série est sinusoïdal amorti. Un cycle limite est donc, une solution d'un système dynamique.

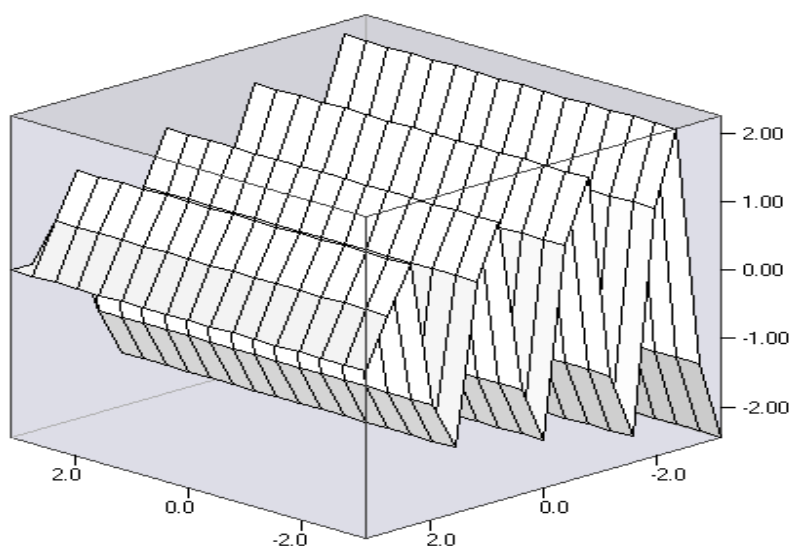


Figure 2.9: Une vue 3-D de la série  $Y_t = -2 \times (0.9)^t \times \cos(4t - 1/2)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$

Après avoir prouvé, en général, la possibilité d'existence d'un cycle limite, qui gouverne le processus inhérent du changement des propriétés de stabilité de l'équilibre, suite à la variation de la valeur, d'au moins, d'un paramètre de contrôle du mécanisme dynamique, qui assure la transition. Comme extension de ce sujet pertinent de recherche, dans cette section, nous allons étudier l'émergence de façon endogène des fluctuations dans les dynamiques stochastiques et/ou déterministes de l'équilibre stationnaire et l'apparition de phénomène de bifurcation locale. En ce sens, nous allons essayer de savoir pour quelle(s) raison(s) il y a présence du cycle limite, c'est-à-dire est ce que tout changement d'un paramètre du mécanisme de transition, cause la perte de

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

stabilité, au voisinage de l'équilibre et donne lieu à l'apparition du cycle limite. Pour cela, nous commençons par définir le concept de cycle limite, puis nous adoptons une méthodologie purement qualitative, basée sur la technique de bifurcation, afin de mieux saisir le phénomène de la dynamique endogène des structures, sous-jacent du mécanisme de formation du cycle limite.

Il convient de noter que la mise en présence des fluctuations endogènes, à partir des chocs récurrents d'un processus dynamique, n'est pas un sujet tout à fait récent. En effet, l'explication des fluctuations endogènes, à partir des solutions complexes d'une équation de récurrence, fait appel à plusieurs modèles dans la littérature, tels que par exemples, le modèle d'oscillateur de Samuelson (1939a), le modèle de Kaldor (1940), le modèle de Goodwin (1951), et le modèle de Goodwin (1967). Quoique ces modèles diffèrent, au niveau de la formalisation, leur résolution permet, en commun, de mettre en évidence des cycles limites asymétriques, où les phases d'expansion sont, généralement, plus longues que les phases de récession. C'est vrai que, l'analyse menée, dès le début des années quarante et soixante, dans le cadre du modèle d'oscillateur de Samuelson (1939a), du modèle de Kaldor (1940), du modèle de Goodwin (1951), et du modèle de Goodwin (1967), a l'intérêt de proposer une vision pertinente qui tend à préciser l'origine des fluctuations endogènes autoentretenuës, par une conception prévoyant, notamment, la présence du phénomène de cycle limite sans apporter aucun approfondissement réel, au mécanisme morphologique d'interaction des hypothèses d'instabilité et de non linéarité, ce qui permet de faire apparaître des fluctuations endogènes. Donc, leurs contributions restent limitées, dans la mesure où il n'était question que d'existence du cycle limite.

À cet égard, le constat que ces approches ne fournissent pas d'une explication, tout à fait nette, qui cherche derrière les hypothèses de modification des propriétés qualitatives d'équilibre dynamique instable et de non-linéarité, une réalité intéressante et convaincante, qui s'interroge sur le prolongement de l'idée, selon laquelle l'instabilité de l'équilibre dynamique argumente, la présence des fluctuations macroéconomiques auto-entretenuës, liées à des mécanismes endogènes de changements structurels, tenant à provoquer, constamment, un processus dynamique de

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

changement de régimes<sup>111</sup>, capable de modifier, radicalement, la structure de l'économie et même d'y causer des crises. De ce fait, notre approche sera fondée sur l'idée de base, selon laquelle l'interliaison entre les équilibres constitue une source d'instabilité dynamique, se manifestant par la naissance des fluctuations autoentretenues, où leurs observations sont effectuées, dans la plupart des cas, dans le régime non-linéaire, dans lequel le système oscille au cycle limite.

Cette logique a stimulé, énormément, notre curiosité et présente, absolument, le fil conducteur de la motivation, qui est à la base de la présente contribution originale de notre travail. L'argumentation de notre contribution retient, donc, comme cadre théorique, celui du modèle dynamique non-linéaire du premier ordre. Puis, sera validé, plus tard, dans la troisième partie, par le recours à la modélisation non-linéaire à seuil, et plus spécifiquement, au modélisation STAR (*Smooth Transition AutoRegressive*), qui satisfait, correctement, les conditions d'applicabilité de notre problématique. Car par construction, une modélisation STAR n'est qu'une interconnexion, entre deux ou plusieurs régimes linéaires, dont chacun parmi eux peut contenir un ou plusieurs point(s) fixe(s). Généralement, l'interliaison entre les régimes est assurée par une fonction de transition, sous différentes formulations (*logistique simple, logistique quadratique, logistique asymétrique, exponentielle simple, exponentielle quadratique, exponentielle asymétrique, time varying, bi-paramétrique...*), mais toutes sont continues et comprises, entre les valeurs zéro et un et caractérisées, plus spécifiquement, par leurs paramètres de transition. Cette fonction de transition assure un rôle double, d'une part elle permet de maintenir un continuum de lissage, entre les différents régimes et d'autre part, sachant qu'il y a une multiplicité de l'équilibre et en assurant le lissage, sous l'action de la variabilité du paramètre de transition, il y a perte de stabilité de l'équilibre en passant d'un équilibre localement instable, mais globalement stable. La création d'un processus d'ajustement dynamique, sous l'effet de conjugaison de forces de répulsion et d'attraction, est à l'origine de l'apparition du cycle limite.

---

<sup>111</sup> Les régimes sont liés notamment aux modes de production ; les relations inter et intra-sectorielles ; les modes d'organisation socioéconomiques des entreprises industrielles ; les plans d'ajustement structurels et les politiques internes de planifications...

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

*« On peut dire que le cycle limite résulte de la "compétition équilibrée" d'un effet d'attraction à grande distance et de répulsion à courte distance de l'équilibre. ».*

(Lordon, F., (1991), p.196)

Il convient, donc, de postuler que les caractéristiques des fluctuations endogènes obtenues, résultent du type d'ajustement induit, par la variabilité du paramètre de la fonction de transition opérée, processus d'ajustement censé dynamiser la structure du modèle STAR. Cette remarque importante vient en fait, renforcer notre objectif d'une part sur l'établissement d'une théorie endogène des fluctuations conjoncturelles et d'autre part sur la caractérisation et le contrôle du cycle endogène. C'est un renouvellement radical de la pensée, qui stipule que sous les conditions de validité d'un cycle limite, cette fois le système économique va converger, vers un cycle endogène et non plus vers une tendance, que les économètres supposés ont l'habitude d'ignorer la présence du cycle et même, ils l'éliminent de leurs champs de modélisation par effet de filtrage.

Face à cette problématique, notre objectif est donc double. Le premier but de notre recherche, que nous essayons d'exposer dans le reste de cette partie, est l'étude des effets d'instabilité de l'équilibre dynamique et la mise en évidence du phénomène de cycle limite. Le second but, qui fait l'objet de la prochaine partie, est la modélisation et la prévision des fluctuations macroéconomique auto-entretenu, par la modélisation STAR, où le cycle endogène et non-linéaire de la production industrielle, s'explique à partir de l'instabilité endogène des équilibres existants, dans la dynamique du secteur industriel en Tunisie. Les arguments qui fondent notre démarche sont de trois types.

Tout d'abord, l'analyse empirique des fluctuations macroéconomiques, nous permet d'étudier des effets d'instabilité d'équilibre dynamique, qui ouvre un premier éclairage, sur le fonctionnement du processus déterministe d'ajustement induit par le changement paramétrique, au niveau de la fonction de transition et qui est à l'origine d'apparition du cycle limite. Puis, l'étude des effets non-linéaires, induits par l'effet de seuil, à l'aide de la méthodologie STAR,

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

montre la capacité de cette spécification, à ajuster des modèles de changement de régimes. Ensuite, la conception de cette analyse qui traite une situation réelle, mais peu complexe faisant intervenir, sans abstraction de l'interaction de deux concepts de base d'instabilité et de non-linéarité, qui émergent dans le champ d'applicabilité des modèles STAR et fondent ses propriétés spécifiques. Car la prise en compte, simultanément, des effets d'instabilité et des effets de non-linéarité, rendent la prévision des modèles STAR une tâche complexe, voire impossible parce que des erreurs de mesure, partant d'une incidence nulle à un accroissement exponentiel des erreurs de prévisions. De ce fait, la prévision linéaire, dans ce contexte, marque son incroyable et elle s'avère incapable de rendre compte, des rapports non-linéaires.

Quoiqu'il en soit, le rapport instabilité non-linéarité montre le danger qu'il y a en dynamique économique, lorsque nous privilégions le recours à des méthodes économétriques, en ignorant les termes aléatoires. Pour cette raison, le reste de ce chapitre sera consacré à l'étude de la dynamique endogène induite par la partie déterministe du modèle et comme complémentarité de ce travail, nous allons traiter, dans la partie suivante, une méthodologie économétrique plus générale. En outre, l'exigence de comprendre le fonctionnement du processus d'ajustement induit par l'instabilité de l'équilibre dynamique, fait que cette logique apparaît, énormément, abstraite et nous paraissait difficile à l'exposer, lisiblement, que par le recours, aux techniques de la simulation numérique. En effet, les processus d'ajustement qui sont, approximativement, des systèmes dynamiques non-linéaires, subissent des changements d'état, sous l'influence des transitions d'un état à un autre, mais il convient de préciser, comme le fait remarquer Blume et Durlauf (1993), que lors des transitions d'états, il y a une modification de la dimension de l'attracteur. Plus la dimension de l'attracteur est élevée, plus la dynamique est complexe et plus le système marque sa tendance à affaiblir les perturbations, et à maintenir, ainsi, une certaine stabilité. Contrairement, si la dimension de l'attracteur est faible, plus il sera rigide et tendra vers une dynamique chaotique sensible aux conditions initiales.

*« -La dimension de l'attracteur- nous renseigne sur le nombre de degrés de liberté effectif et donne une borne inférieure du nombre de variables qu'il sera nécessaire de prendre en compte -un modèle- du système en question. ».*

(Dubois, M. Atten, P. et Bergé, P., (1987), p.199)

Sur la base de ce qui précède, nos propres réflexions nous ont conduits à penser que le fonctionnement d'un cycle endogène, peut être approximé à l'aide d'un système dynamique non linéaire, supportant des changements de ces états de transition. D'une manière analogue, afin de bien maîtriser le mode de fonctionnement d'un système dynamique, capable de modéliser la dynamique non-linéaire d'un cycle endogène. Notre objectif sera, donc, de détecter et de caractériser la présence d'éventuels cycles limites en premier lieu. Puis, en second lieu, de déterminer l'effet de la variation d'un paramètre sur les solutions d'un système dynamique, par le diagramme de bifurcation.

## 2.2. Cycles limites et bifurcation de Hopf

### 2.2.1. Cycles limites

Traditionnellement, la théorie de cycle économique est considérée comme théorie de chocs aléatoires. Selon cette conception, les modèles largement retenus en économie, se trouvent, dans plusieurs situations, incapables de prévoir et même d'expliquer un phénomène cyclique. Cette insuffisance est justifiée par plusieurs raisons, dont la plus intéressante est celle qui fait rappel aux propriétés du cycle, à savoir: la non-linéarité ; l'indétermination et l'endogénéité des fluctuations. Récemment, dans le but de rendre inaccessible, le caractère imprévisible du cycle, une intense littérature<sup>112</sup>, qui est apparue, suite aux travaux de Tong et Lim (1980), considère que l'alternance de phases d'expansion, puis de récession n'est qu'un phénomène essentiellement endogène, résultat de la dynamique économique. Notre objectif ici est de dresser un aperçu des principaux outils de détection du cycle limite, introduit par Tong et Lim (1980). Mais, avant cela, nous commençons par rappeler quelques définitions fondamentales.

#### Définition 2.4

Soient  $I \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  l'application telle que  $Y_t = f(Y_{t-1})$

Un ensemble  $A$  compact est un attracteur s'il existe un ensemble ouvert  $U$  au voisinage de  $A$  dans l'espace des phases tel que :  $\forall Y \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(Y) = A$ ;  $f^t(Y)$  étant l'itéré d'ordre  $t$  de  $f$  et

$\bigcup_{i \in I} U_i(A_i)$  constitue le bassin d'attraction.

---

<sup>112</sup> Pour plus de détails sur cette littérature voir Tong (1983), Tong (1990) et Teräsvirta, Tjøstheim et Granger (2009).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

D'après cette définition, l'attracteur est le sous-ensemble de points, vers lequel convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique. Il décrit le comportement, à long terme, du système du fait qu'il est défini en termes de limites asymptotiques. Un exemple classique d'attracteur est donné par les points fixes, puisqu'ils correspondent aux états, vers lesquels semble converger un système dynamique. C'est-à-dire, un attracteur correspond aux coordinations les plus stables aimées du système dynamique. Par contre, les coordinations les plus instables sont nommées des *repellants*.

### Définition 2.5

Un cycle limite est un attracteur d'une fonction périodique qui se caractérise par son amplitude et sa période. C'est l'orbite<sup>113</sup> fermée sur elle-même dont toutes les trajectoires, de part et d'autre, se rapprochent.<sup>114</sup>

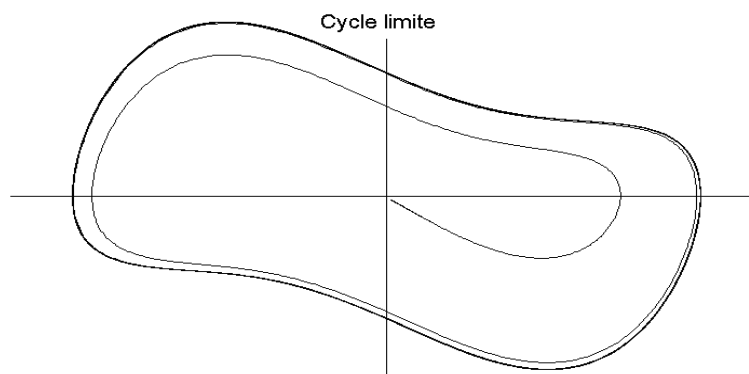


Figure 2.10 : Cycle limite

<sup>113</sup> L'orbite est l'image d'une solution d'un système dynamique : Etant donné un système dynamique et le flot associé à  $f$  sur un espace d'état  $X$ , l'orbite d'un point  $x_0$  de  $X$  est l'ensemble :

$$\lambda(x_0) = \{x \in X; \exists t \in \mathbb{Z} \mid x = f_t(x_0)\}$$

Toute orbite est un ensemble invariant d'un système dynamique discret. Les points d'équilibres (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés de stabilité du système. Si  $x_0$  est un point fixe ( $x_0 = f(x_0)$ ), il est stable si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de module  $< 1$ .

<sup>114</sup> Formellement, un point  $X$  est dit périodique de période  $T$  si  $f^T(X) = X$ , mais  $f^T(X) \neq X$  pour  $X \in ]0, T[$ .  $G = \{f^t(X), 0 < X < T\}$  est l'orbite périodique correspondante.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

D'après cette définition, un cycle limite figuré en (2.10) dans l'espace des phases est constitué par la trajectoire décrite par une solution périodique du modèle dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1})$ , où  $Y(t, Y_0)$  est alors une solution T-périodique vérifiant  $Y(t, Y_0) = Y(t + T, Y_0)$ , avec  $T \neq 0$ . En ce sens, nous parlons d'un cycle limite, lorsqu'une fonction récurrente  $f$  atteint un point d'un cycle. Elle prend un nombre infini de fois les valeurs des points de ce cycle. Dans ce cas, la fonction ne diverge pas et ne converge pas, mais elle est bornée. Pour cette situation, nous pouvons dire que le cycle limite renvoie à la répétition d'une trajectoire bien déterminée. Par exemple, celle décrite par Guckenheimer et Holmes (1983), comme des oscillateurs autoentretenus, caractérisant les systèmes dynamiques non-linéaires. Nous voyons, dans le reste de cette partie, un autre type d'attracteur prenant le nom d'un attracteur *étrange* ou *chaotique*, où il renvoie à la répétition d'une trajectoire complexe, qui ne se répète jamais à l'identique. Un cycle limite stable ou attractif a la propriété d'attirer toutes les trajectoires situées dans le voisinage de l'équilibre quand  $t$  tend vers l'infini. Dans le cas inverse, il s'agit d'un cycle limite instable ou répulsif. De cela, nous pourrions remarquer que, généralement, les trajectoires se convergent vers le cycle limite, ou bien, elles s'en divergent.

Les cycles limites sont des phénomènes non-linéaires, ils ne peuvent donc avoir lieu que dans des systèmes non-linéaires. Dans ce cas, les oscillations du cycle limite sont déterminées par la dynamique endogène de la structure auto-générée du système lui-même. La figure (2.11), montre qu'une condition d'apparence<sup>115</sup> d'un cycle limite dans l'espace des phases est l'existence d'un phénomène de conjugaison de forces de répulsion et d'attraction. Abraham-Frois et Berrebi (1995), montrent que la présence des forces de rappel produit un processus d'ajustement, où les trajectoires peuvent s'enrouler autour d'autre chose qu'un point, ou une droite, par exemple une courbe ou une surface fermée (cercle ou ellipse dans les cas à deux variables les plus simples ; tore ou hyper-tore s'il y a plus de deux variables).

---

<sup>115</sup> Une autre approche est fournie par la méthode de l'approximation au premier harmonique. Cette méthode technique capable au même temps de détecter et de caractériser la présence d'un cycle limite. Elle consiste à déterminer à la fois, la propriété de stabilité: c'est-à-dire de se maintenir après une légère perturbation, et les paramètres représentatifs, tels que l'amplitude et la fréquence du cycle limite.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

« ...le découpage du local et du global, l'inversion des tendances dynamiques à courte et à longue distances expliquent l'émergence endogène d'un cycle limite. ».

(Abraham-Frois, G. et Berrebi, E., (1995), p.161)

### Conditions d'apparition du cycle limite

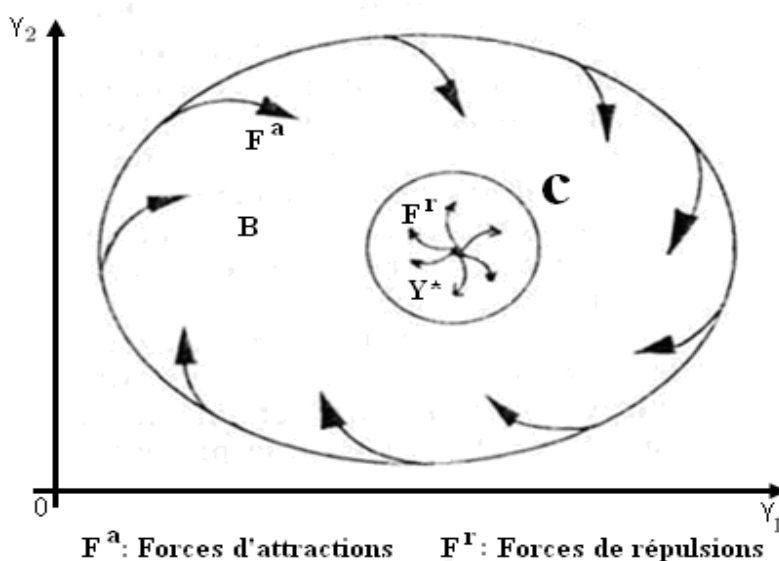


Figure 2.11 : Condition d'existence d'un cycle limite<sup>116</sup>

Dans cette situation, nous obtenons, alors, un attracteur cyclique, ce qui signifie que, quelque soit le point de départ situé dans le bassin d'attraction  $B$ , la trajectoire finit par rejoindre une figure fermée, dite cycle limite, parcourue indéfiniment lorsqu'elle est atteinte.

D'une manière générale, le principal moteur de la dynamique du système est basé sur l'interaction entre les propriétés contradictoires de stabilité et d'instabilité. La stabilité représente la première caractéristique de l'attracteur. Ceci signifie qu'un système expérimenté, par son attracteur, présente un comportement stable (nous parlons de régime monostable s'il s'agit d'un seul attracteur, ou de régime multistable, s'il s'agit de plus qu'un seul attracteur), et reproductible.

<sup>116</sup> Source : Abraham-Frois, G. et Berrebi, E., (1995), p. 160.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

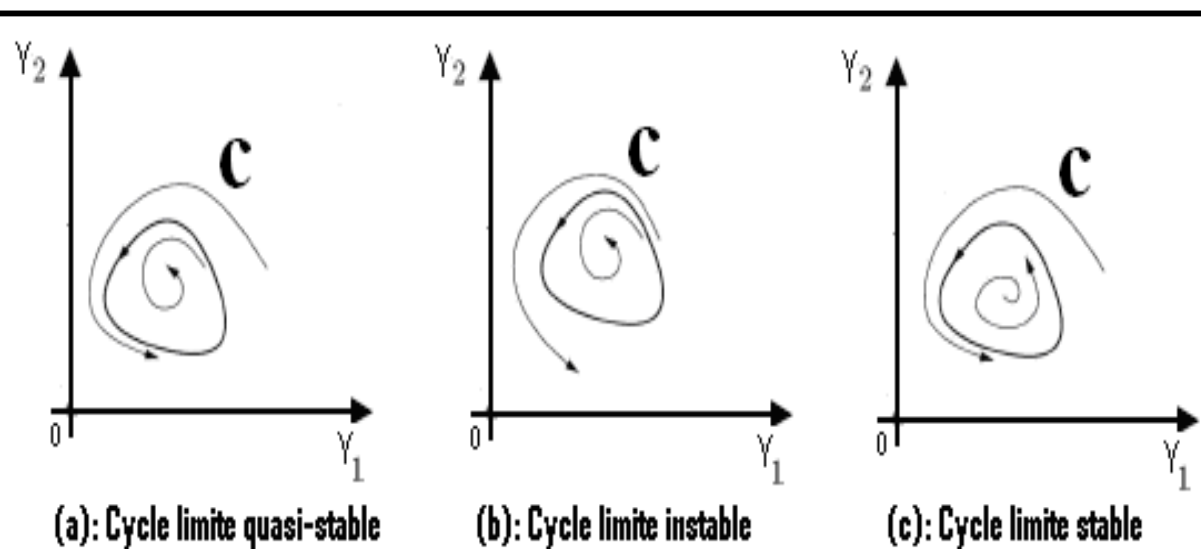


Figure 2.12: Les trois types de stabilité que peut offrir un cycle limite

Par ailleurs, Guckenheimer, Myers et Sturmfels (1997), ont remarqué que les bifurcations ou les transitions de phases sont annoncées par des fluctuations critiques. C'est-à-dire, un accroissement de la variabilité de valeur du paramètre de contrôle, quand-il traverse le domaine d'une valeur critique, à l'approche de la transition. D'où un cycle limite noté  $C$  est une trajectoire fermée, solution du système, que nous pouvons classer selon la figure (2.12) comme : (a) quasi-stable, si quelques trajectoires uniquement convergent vers  $C$  ; (b) instable, si toutes les trajectoires divergent de  $C$  et (c) stable, si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers  $C$ . Un cycle limite stable ou attractif, a la propriété d'attirer toutes les trajectoires situées, dans son voisinage, quand le temps tend vers l'infini. Il décrit, presque, l'ensemble limite au voisinage de l'équilibre. Dans le cas inverse, il s'agit d'un cycle limite répulsif, semi-instable ou instable. Donc, soit les trajectoires tendent vers le cycle limite stable, soit elles s'en éloignent, partiellement ou totalement. Comme le montre la figure (2.13), dans un espace limité à deux dimensions, le cycle limite est la conséquence d'une instabilité à courte distance, conjuguée à une attraction à longue distance. C'est-à-dire, le résultat d'un point d'équilibre globalement stable, mais localement instable.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

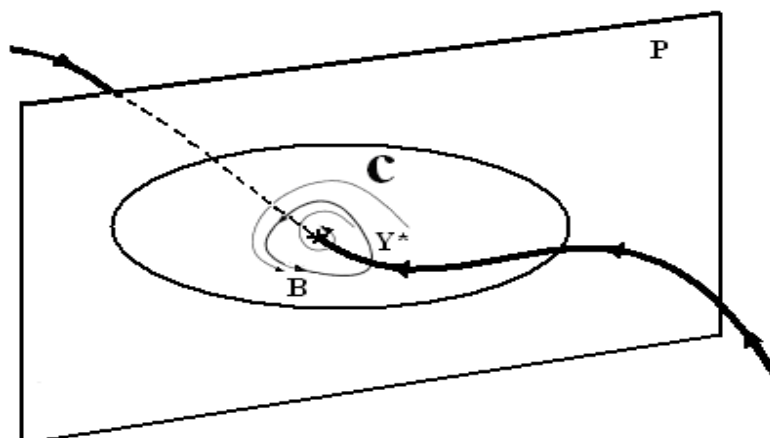


Figure 2.13 : Cycle limite dans un espace de phase à 3 dimensions : Le cycle à une variété stable à 2 dimensions (localement un cylindre) et une variété instable à 2 dimensions (localement un plan)

Notons qu'un système dynamique peut avoir une orbite fermée, mais l'amplitude de cette orbite est entièrement fonction de la condition initiale, et aucune perturbation sur l'amplitude de l'orbite n'apparaît. Si toutes les trajectoires traversant un espace noté  $B$ , convergent vers le même point fixe  $Y^*$  stable appartenant à  $B$ , alors  $B$  est appelée *Surface de Poincaré* ou *Bassin d'attraction*<sup>117</sup> (figure 2.11). Nous voyons sur la figure (2.14), que tous les trajectoires tendent asymptotiquement vers un cycle limite, c'est pour cette raison, il est appelé attracteur.

**Théorème 2.4 (Poincaré-Bendixson, (1886)<sup>118</sup>).**

*Si une trajectoire demeure dans une région finie, alors une des trois propositions suivantes est vraie :*

- 1- *La trajectoire converge vers un équilibre.*
- 2- *La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.*
- 3- *La trajectoire est elle même un cycle limite.*

Ce théorème s'inscrit dans le cadre de la théorie qualitative des équations différentielles ou en différences. Il garantit l'existence à des solutions périodiques pour des équations différentielles en différences dans le plan.

<sup>117</sup> La profondeur de ce bassin est représentative de la force (et corrélativement de la stabilité) de l'attracteur qui le caractérise.

<sup>118</sup> Poincaré, H., (1886), « *Sur les courbes définies par une équation différentielle.* », J. Math. Pures et Appl., Série IV, 2, pp. 151-217.

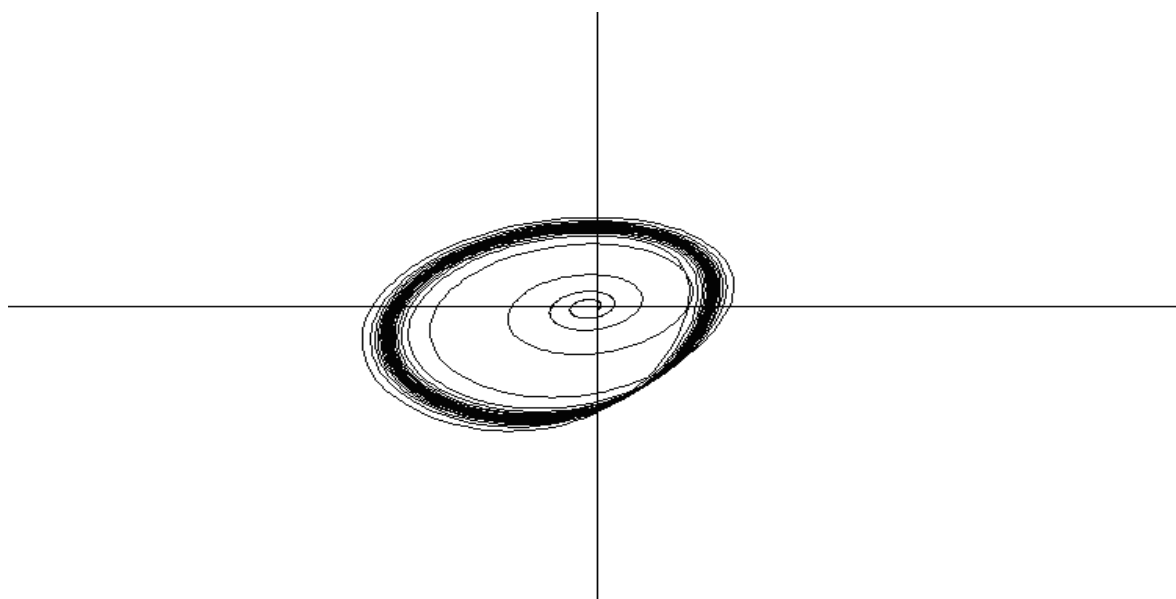


Figure 2.14 : Cycle limite stable

Une application  $f$  dite « application de Poincaré » est une application de  $B$  vers  $B$ , obtenue par intersections des trajectoires d'états avec le plan  $P$  de  $B$ . Pour  $Y_t \in B$  correspondant à la  $k^{\text{ème}}$  intersection, alors le plan  $P$  de Poincaré est défini par la relation dynamique:  $Y_t = f(Y_{t-1})$ . Soit  $Y^*$  un point fixe de  $B$ , c'est à dire tel que  $Y_t^* = f(Y_{t-1}^*)$ . Alors une trajectoire débutant en  $Y^*$  converge en  $Y^*$  après un certain temps  $T$  est une orbite fermée du système initial  $Y_t = f(Y_{t-1})$ , c'est : un cycle limite.

### Définition 2.6

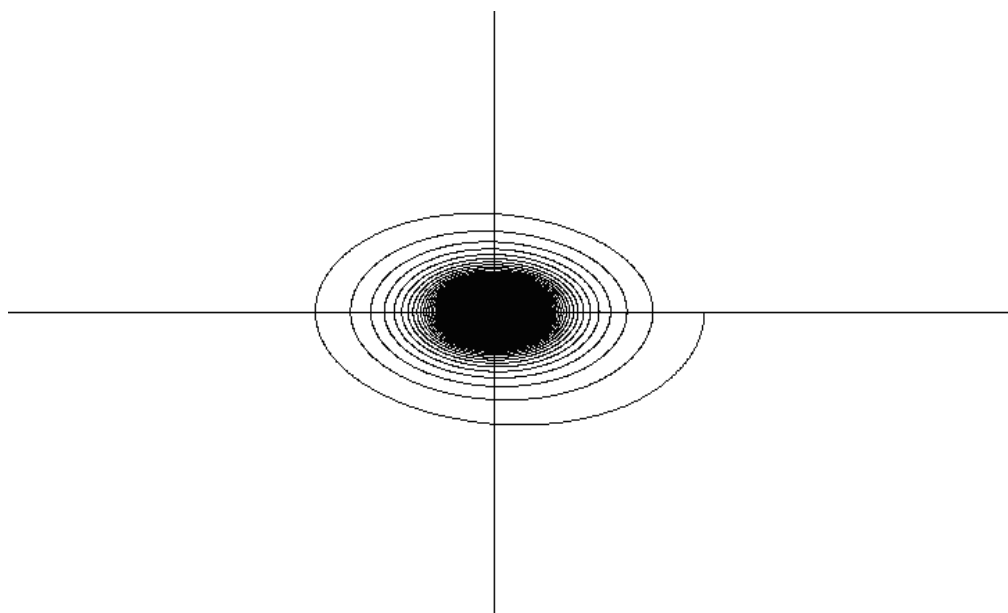
Soit  $f : K \rightarrow K$  une fonction continue de l'espace métrique  $K$ . Soit  $Y \in K$ , alors la  $\omega$ -limite de  $Y$  est définie par  $\omega_f(Y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f^s(Y)}$ . Soit  $A \subseteq K$  vérifiant  $f(A) = A$ , alors le bassin d'attraction de  $A$  est défini par  $B(A) = \{Y \in K \mid \omega_f(Y) \subseteq A\}$ .

Un ensemble-limite (ou attracteur) est un espace ou une courbe vers lequel un système évolue, définitivement, en présence de perturbations singulières et en l'absence de perturbations exogènes. L'exemple le plus simple d'ensemble limite est celui du point d'équilibre attractif : nous rappelons qu'un point d'équilibre est attractif, si dans un voisinage toutes les trajectoires

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

s'en rapprochent. Si nous considérons un point  $Y$  dans un voisinage, l'ensemble limite de  $Y$  est alors constitué par le point attractif  $Y^*$ , ceci découle de la relation  $\lim_{\infty} Y = Y^*$ . Nous pourrions donc définir le bassin d'attraction de la figure (2.15), du point d'équilibre  $Y^*$ , comme étant un ensemble invariant des points, dont l'ensemble limite est constitué du point d'équilibre.



**Figure 2.15 : Bassin d'attraction d'un cycle limite**

Afin d'étudier la stabilité du point fixe, nous allons analyser le comportement de l'application  $f \in B$  au voisinage du point fixe  $Y^*$ . Ainsi, le plan  $P$  de Poincaré transforme un problème sur les orbites fermées en un problème sur le tracé des points fixes. Bischi, Mammana et Gardini (2000), ont remarqué qu'en pratique, la stabilisation asymptotique de points fixes pose deux difficultés majeures.

En premier lieu, la conception locale, autour d'un point d'équilibre  $Y^*$ , n'est pas suffisante pour assurer la présence d'un phénomène régulier de retour d'état, garantissant la stabilisation asymptotique de l'équilibre. Brockett (1983), affirme que le problème de la stabilisation asymptotique de l'équilibre est un problème délicat, dont la résolution nécessite la connaissance et l'analyse d'un processus de retour d'état. Guckenheimer et Holmes (1983), ont

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

déclaré la décomposition entre la fonction  $f$  et le temps  $s$  lui associée pour décrire une orbite périodique de période  $s$ , définie à partir de  $Y \in \mathfrak{R}$ ,  $Y_{t+1} = f(Y_t)$ ,  $t \geq 1$  par les  $s$  points distincts de  $\{Y_i = f^i(Y_0) | i = 0, \dots, s-1\}$  avec  $f^s(Y_0) = Y_0$ . Par exemple, sur la figure (2.16), nous considérons un processus dynamique qui puisse être dans quatre états notés  $\{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3\}$ , décrits schématiquement par l'orbite d'ordre 4 comme suit :

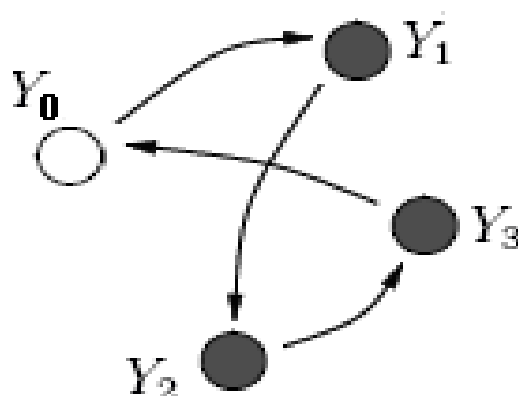


Figure 2.16 : Orbite périodique d'ordre  $s = 4$

Là où les flèches symbolisent les changements d'états. C'est-à-dire, que par exemple, la signification de la flèche  $Y_0 \rightarrow Y_1$  implique que, si le processus dynamique au départ est dans son état initial  $Y_0$  à l'instant  $t$ , alors se déplace par transition après un temps  $t+1$  à l'état  $Y_1$ . Or, il est intéressant de noter qu'en réalité, ces états décrivant le dynamisme du processus sont différentes, selon les régimes de symétries qu'ils représentent. Dès lors, nous allons voir par la suite, que le passage d'un état dynamique à un autre, par bifurcation s'accompagne, généralement, d'un phénomène de brisure de symétrie, là où il se produira de manière métaphysique<sup>119</sup> un changement radical, dans les propriétés qualitatives de l'équilibre dynamique multiple, qui se manifeste par la modification des dynamiques des structures et d'endomorphologie des cycliques.

<sup>119</sup> Selon ce principe abstrait, la dynamique des fluctuations endogènes invisible à l'oeil nu est induite normalement dans un domaine des instabilités des structures dynamiques, là où les points d'équilibres multiples dynamiques s'efforcent de chercher leurs stabilités spatio-temporelles afin de les conserver tout en engendrant à leurs voisinages des champs d'attractions dynamiques.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

**Théorème 2.5 (Brockett, (1983)<sup>120</sup>).**

Soit le système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, \vartheta)$ , avec  $f \in C^0(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m; \mathfrak{R}^n)$  et  $f(0,0) = 0$ . Si ce système dynamique possède un équilibre  $Y^*(\vartheta_0)$ , une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état  $\vartheta(Y_{t-1})$  de classe  $C^0$  qui stabilise asymptotiquement le point d'équilibre  $Y^*(\eta_0)$  est que l'application  $g: (Y_{t-1}, \vartheta) \mapsto f(Y_{t-1}, \vartheta)$  soit localement surjective au voisinage de  $Y^*(\eta_0)$ , i.e. pour tout voisinage  $V$  de  $Y^*(\eta_0)$  dans  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ ,  $f(V)$  doit contenir un voisinage de  $Y^*(\eta_0) \in \mathfrak{R}^n$ .

En second lieu, les recherches menées, depuis d'une décennie sur ce problème, montrent qu'ou bien le retour d'état est continu, caractérisé par un mode de convergence rapide (exponentielle) vers l'équilibre, mais qui sera fortement sensible aux erreurs de modélisation et aux bruits de mesure. Ou bien, la possibilité d'avoir un retour d'état discret, caractérisé par un mode de convergence asymptotiquement lent (pas exponentiel) vers le point d'équilibre. Mais, peu sensible aux erreurs robustes de modélisation et aux perturbations de mesure.

Ce dilemme marque son importance majeure, surtout, sur le plan pratique. En économétrie, le problème est qu'il est extrêmement difficile d'obtenir une expression analytique, d'un cycle limite<sup>121</sup>. Pour remédier à cette difficulté, Teräsvitra et Anderson (1992), Peel et Speight (1996), ont proposé une solution peut être qualifiée de conventionnelle, et qui consiste à déterminer, analytiquement, un cycle limite par l'étude des caractéristiques du *Skeleton* d'un modèle non-linéaire qui défini selon Barnett, Barry, Milka, Travis et Meenkashi (2005), les propriétés dynamiques de sa structure déterministe changeant constamment (cette notion de *Skeleton* nous y reviendrons plus tard, dans la prochaine partie).

Cette difficulté se manifeste, sur le plan économique, par l'ignorance de la structure du cycle qui, en général, immergeant par le mouvement tendanciel et qui retrace avec ce dernier l'évolution temporelle d'une variable. Une première réponse est fournie par les théoriciens qui

<sup>120</sup> Brockett, R. (1983), « *Asymptotic stability and feedback stabilization* », In R. M. R.W. Brockett & H. Sussmann (Eds.), *Differential Geometric Control Theory*.

<sup>121</sup> Les mathématiciens affirment que le cycle limite est développable en série de Fourier.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

autorisent une décomposition cycle-tend par filtrage, telle que la méthode de Kydland et Prescott (1982), dont l'enjeu est de reproduire, le plus fidèlement possible, les fluctuations de l'économie américaine. Hansen (1985) et McCallum (1986), ont essayé de montrer dans quelle mesure le modèle de Kydland et Prescott (1982), reproduit les fluctuations américaines? Leur conclusion commune est que l'opération de filtrage, lors de la décomposition cycle-tend d'une série temporelle, risque de modifier la structure de la dynamique du variable, qui lui est associée. D'une part, les modèles des nouveaux classiques ignorent les cycles de leurs champs d'explication, car ils admettent l'hypothèse d'anticipation rationnelle selon laquelle l'économie va converger, vers un état d'équilibre « *naturel* », qui exclut tout écart de cet état<sup>122</sup>. D'autre part, si nous admettons que les facteurs qui engendrent les variations cycliques sont aussi ceux qui sont à l'origine de l'évolution tendancielle. Les fluctuations cycliques exogènes sont, alors, l'expression des dynamiques transitoires et par conséquent, elles ne sont pas véritablement prévisibles dans le temps.

C'est vrai que les modèles de cycles réels fournissent, une première approche intégrée de la combinaison cycle-tend dans les modèles de la croissance et des fluctuations exogènes. Mais, dans ces modèles de fluctuations exogènes, comme dans ceux de fluctuations endogènes, l'enjeu commun, est de montrer que même à l'équilibre peuvent apparaître des fluctuations cycliques? Cette question d'actualité a poussé plusieurs chercheurs, à diriger leurs visions, vers l'étude des fluctuations économiques et plus spécifiquement, ils essayent d'analyser la relation entre structure dynamique et cycle, d'où l'apparition de la littérature actuelle traitant comme problématique de base : la croissance cyclique? Cette nouvelle approche accorde une importance considérable à la notion du cycle, du fait qu'un système déterministe, peut engendrer des mouvements cycliques réguliers ou non, qui peuvent, d'une part, être prévisibles sous certaines conditions et d'autre part, elles marquent leurs impacts non négligeables dans la détermination de la structure de la dynamique du système économique. Ceci a permis Harvey et Streibel (1998), de

---

<sup>122</sup> C'est l'idée qui a conduit des théoriciens du cycle réel à considérer les chocs réels comme source de stimulation capable de modifier les caractéristiques de base de l'économie telles que les techniques disponibles, les goûts de préférences des ménages, etc.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

tester le caractère déterministe et non déterministe d'un cycle et puis à Goodwin (1992), de souligner qu'il est vrai que des chocs exogènes et stochastiques existent et doivent être considérés, mais il est intéressant, d'après lui, d'accepter qu'une structure déterministe, purement, endogène puisse aussi engendrer des fluctuations internes, stimulant la dynamique du système économique.

De même, plusieurs travaux de recherche trouvant leurs champs d'application, dans le domaine de la finance, ont essayé d'analyser les propriétés de dynamiques endogènes des séries financières. Ce champ de littérature a permis de produire une intense discussion, relative aux concepts de cycle limite et/ou de chaos caractérisant la dynamique observée des séries en finance. En ce sens, Brock et Hommes (1998), ont fourni une discussion générale, portant sur des modèles dynamiques de séries temporelles financières non-linéaires, mettant en évidence la présence du caractère endogène de ces dynamiques.

Cherchons maintenant à mieux comprendre, à l'aide d'un exemple simple, les propriétés dynamiques du cycle limite au voisinage de l'équilibre. À cet égard, nous traçons le portrait de phases<sup>123</sup> par simulation numérique, du système dynamique défini, par l'équation de récurrence  $Y_{t+1} = rY_t(1 - Y_t)$ . À un instant  $t$  donné, cette représentation graphique de la figure (2.15) montre, à l'aide des flèches, le champ des vecteurs du portrait de phase de  $Y_{t+1} = f(Y_t)$ . La simulation des dérivées partielles du paramètre de contrôle  $r$  du modèle de freinage logistique synthétise l'ensemble de la cinétique des flux locaux issus du modèle étudié à l'aide d'un champ de vecteurs de tangence à la courbe représentative du modèle. Le contour de ces vecteurs indique les directions locales dominantes du cycle limite, vers lequel les flux sont convergents. En ce sens, la lecture des trois schémas donnés par les figures (2.17-2.18-2.19), sera très utile, pour avoir une idée préliminaire, sur le comportement dynamique du système. Elles nous permettent de constater que, quelles que soient les conditions initiales, la dynamique au voisinage de

---

<sup>123</sup> Le portrait de phases d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace de phases.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

l'équilibre du système considéré, tend vers un cycle limite quasiment périodique dans l'espace des phases.

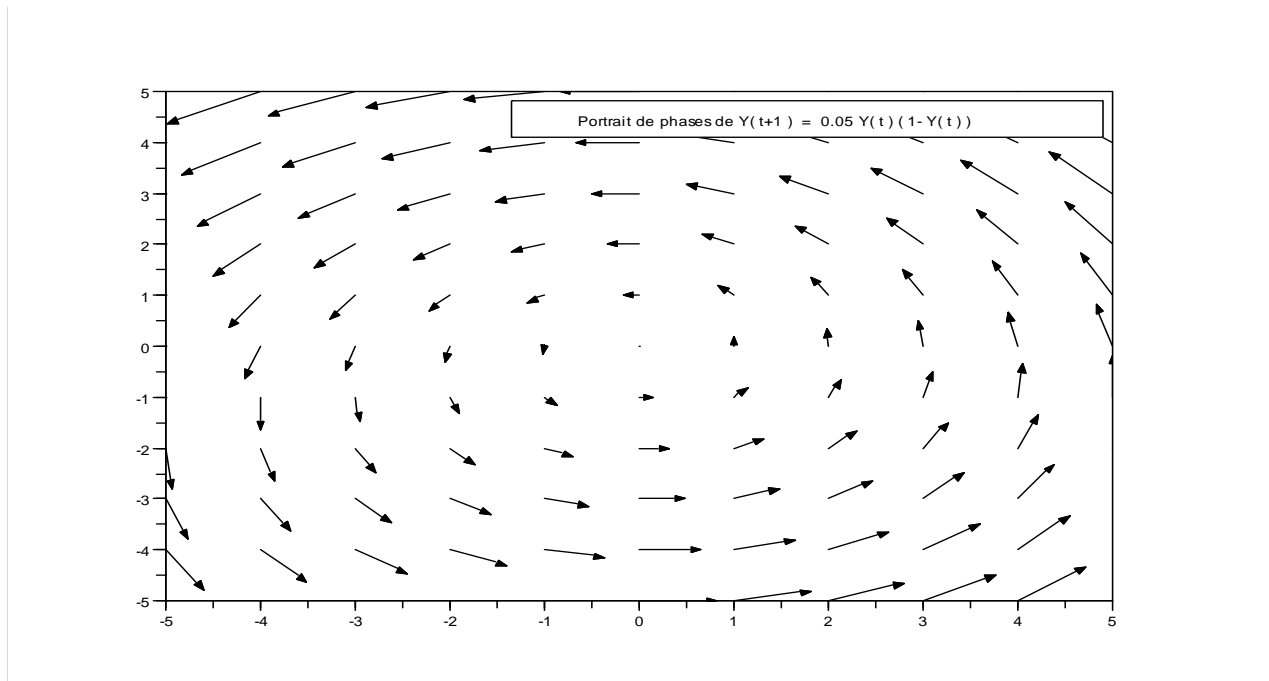


Figure 2.17: Représentation du champ d'une trajectoire

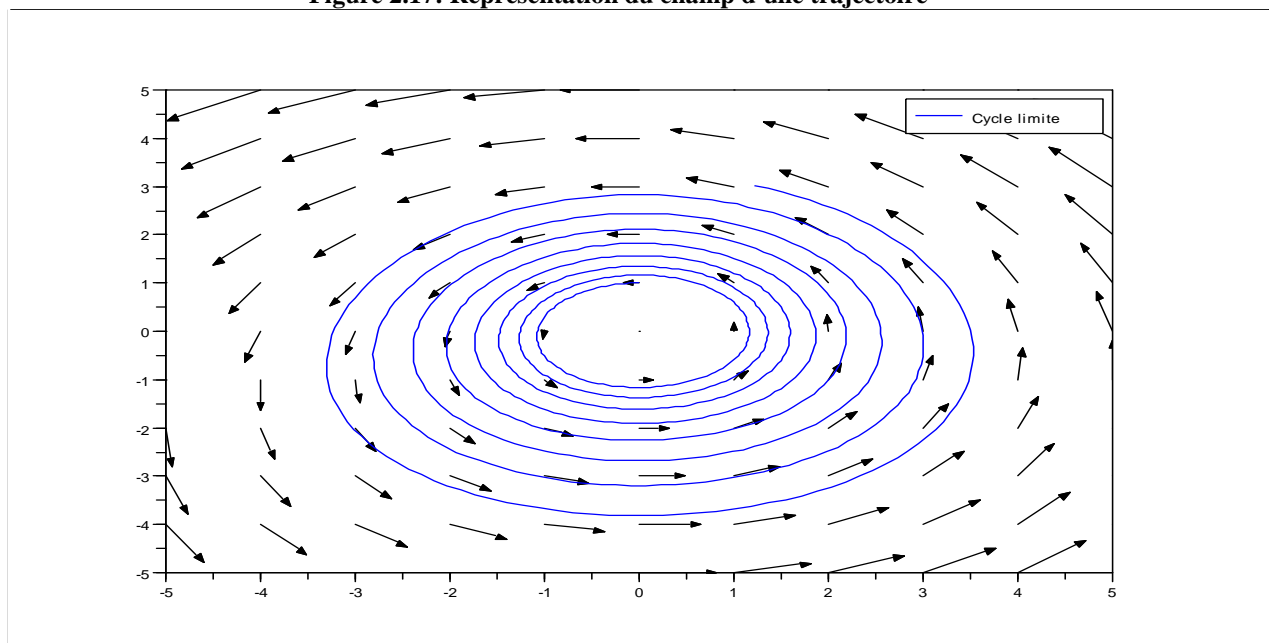


Figure 2.18: Représentation du champ et une trajectoire

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

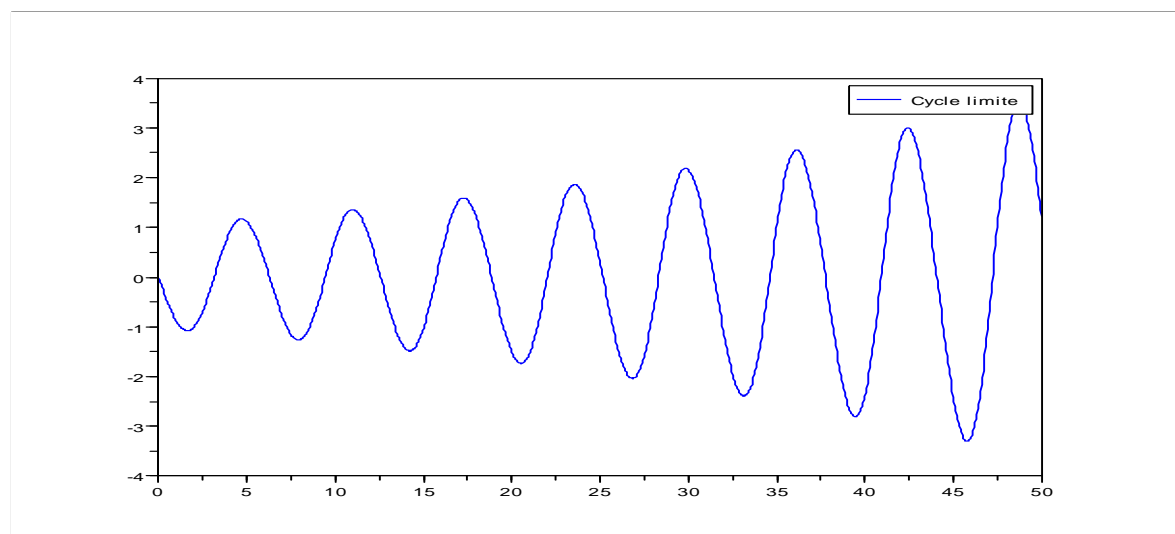


Figure 2.19: Solution stable

Un autre exemple que nous estimons utile, capable d'enrichir notre connaissance de ce phénomène flou, consiste à simuler un cycle limite pour un échantillon de grande taille  $T = 800$ , du processus défini par  $Y_0 = 1$  et  $Y_{t+1} = t \sin(Y_{t-1} - 0.5)$ . L'examen graphique de la figure (2.20), montre comment un cycle limite instable peut affecter la dynamique du système, en assurant la modification de sa structure endogène, ce qui induit pour lui, sans doute, l'instabilité structurelle.

### Simulation numérique du cycle limite

$$Y_0 = 1 \text{ et } Y(t) = t \sin(Y(t-1) - 1/2) \text{ pour } t = 1, \dots, 800$$

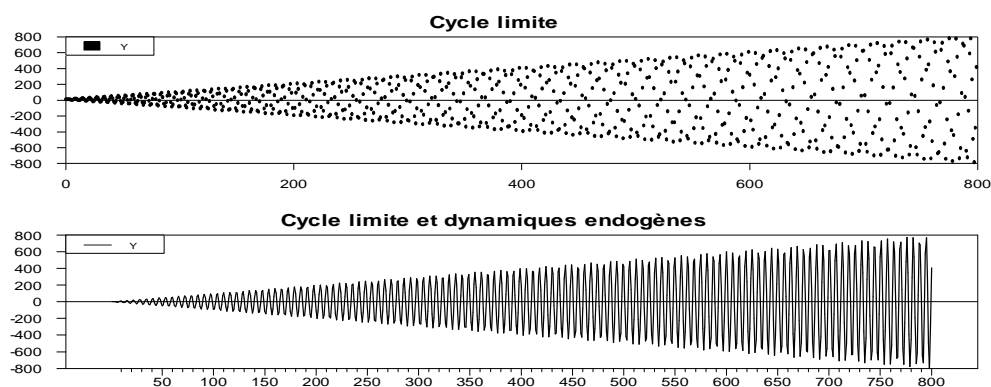


Figure 2.20: Simulation d'un cycle limite

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Ces deux exemples graphiques permettent, donc, de visualiser les propriétés dynamiques, dans le cadre déterministe des modèles non-linéaires. Ces caractéristiques sont fondamentales et servent par la suite, dans la troisième partie, à renforcer l'importance de mener une analyse empirique des fluctuations macroéconomiques et de prévision, dans un cadre stochastique des modèles à changement de régimes. Mais, les questions qui se posent à ce niveau d'analyse, est de savoir : Quelle est la nécessité d'étudier le comportement dynamique d'un cycle limite? Qu'est ce que nous espérons, à propos de cette étude qualitative?

Afin de calibrer l'importance d'étudier un phénomène de cycle limite en économie, nous essayons de suivre une représentation métaphorique, autorisant une analogie bioéconomique, sur la base de la réflexion de Allen et Sanglier (1981). Sachant tout d'abord, que personne ne peut douter que le cœur d'un être vivant est l'organe moteur, assurant la circulation sanguine, nécessaire au le fonctionnement des organes et à la survie du corps. Mais, qui fait fonctionner un cœur? Or, accordons notre confiance absolue pour dieu, nous ne croyons jamais que le fonctionnement d'un cœur au rythme cardiaque dans un régime de cycle limite, n'est qu'un fait du hasard! La présence de force de rappel caractéristique inhérente d'un cycle limite, est effectivement le mécanisme abstrait, assurant la continuité d'une telle marche. D'autre part, comme le prouve Goodwin (1992), Abraham-Frois et Berrebi (1995), Arthur, Durlauf et Lane (1997), la présence de force de rappel, caractéristique intrinsèque d'un cycle limite, accompagnant la dynamique endogène du cycle économique, est le mécanisme de base, qui assure la croissance cyclique et le bon fonctionnement du système économique évolutionniste. Nous espérons, donc, garantir une circulation fiable de l'information, afin de prédire l'évolution de l'économie. Ce processus de tâtonnement induit, par le mécanisme de force de rappel, est sans doute, de première importance en économie, puisqu'il fait l'objet de la théorie de cointégration et l'ajustement, par le modèle à correction d'erreur, introduite par Engel et Granger (1987), afin de corriger le déphasage de l'équilibre, à long terme, à sa cible, par ajout du mécanisme englobant des ajustements à courts termes et des dynamiques à longs termes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

De ce fait, notre tâche dans le reste de cette deuxième partie, sera donc, d'essayer de savoir comment identifier cette structure purement endogène, dans un cadre qui autorise le changement d'état, puisqu'un cycle suppose le changement<sup>124</sup>.

Pour ce faire, dans ce qui suit, nous allons suivre, simultanément, la méthodologie d'Abraham-Frois et Berrebi (1995) et adopter un rapprochement théorique, entre la dynamique endogène d'un système économique et d'un système dynamique déterministe. En plus, la méthodologie de Goodwin (1992), qui consiste à conceptualiser et formaliser la structure de la croissance et des fluctuations, à l'aide d'une analyse, basée sur un changement qualitatif, résultant de l'intérieur du système et assurant sa croissance quantitative.

Selon cette logique, nous sommes capables de proposer, comme premier pas, l'étude qualitative des fluctuations cycliques endogènes, afin d'arriver à maîtriser le mécanisme camouflé, derrière la dynamique endogène d'un système économique. Pour cela, nous allons utiliser, le diagramme de bifurcation<sup>125</sup> donné par la figure (2.21). Nous pouvons, ainsi, déterminer la valeur critique minimale  $\Psi_c$ , qu'il faut donner à la pente de la trajectoire, de manière à obtenir un cycle limite (mono-périodique) stable et régulier. Le cycle limite engendré par la dynamique endogène du système déterministe, est fortement non-linéaire et indépendant des conditions initiales du système<sup>126</sup>. Il est susceptible de dégrader les performances, voire la stabilité du système. Il est important, donc, de pouvoir le prévoir, le caractériser, afin d'être en mesure de le contrôler, voire de l'amplifier.

---

<sup>124</sup> Selon la nature du changement, nous pouvons trouver deux visions : la première traite les fluctuations cycliques endogènes comme origine de la modification des caractéristiques de la dynamique du système économique. Par exemple, pour Marx ou pour le modèle de l'oscillateur de Samuelson le changement est le produit du système lui-même. Par contre, la seconde vision suppose que le changement est provoqué par un facteur exogène. Par exemple, pour Friedman c'est la variation de l'offre de monnaie.

<sup>125</sup> On appelle bifurcation ou transition de phase une modification qualitative du comportement du système. Une bifurcation résulte d'une modification du paysage des attracteurs. Les bifurcations constituent un événement majeur de la dynamique des systèmes complexes. La pertinence d'un paramètre d'ordre est liée au fait qu'il permet de rendre compte des bifurcations. Ce critère est pris en compte lorsque le chercheur dispose de plusieurs variables collectives concurrentes.

<sup>126</sup> À l'inverse de la dynamique chaotique qui est sensible des conditions initiales du système. Voir Guégan (1994).

## 2.2.2. Doublement de périodes, bifurcations et chaos

Après avoir introduit le concept de cycle limite, engendré par la dynamique endogène d'un système déterministe, qui représente un changement, dans la nature de la solution stable, pour des valeurs critiques du système. Nous allons essayer de savoir, comment changent les propriétés de stabilité d'un point fixe, quand un paramètre de l'équation (du modèle) change? Réellement, puisque nous désirons avoir une analyse précise, il serait naturel de chercher des conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, à partir des procédés graphiques usuels : technique de bifurcation et diagramme de phase.

Dans cette sous-section, comme continuité de l'idée précédente, nous allons commencer par présenter l'émergence des fluctuations endogènes stochastiques et déterministes, c'est-à-dire l'indétermination de l'équilibre stationnaire et l'apparition de bifurcations locales.

### 2.2.2.1. Justification de l'introduction de ruptures déterministes

#### Définition 2.7

*Soit un système dynamique non-linéaire à paramètre de contrôle  $\Psi \in \mathfrak{R}$ . Nous appelons une bifurcation ou transition de phase une modification qualitative du comportement du système dynamique, lorsque nous modifions  $\Psi$ . Le diagramme de bifurcation est le tracé de point d'équilibre stable  $Y^*$  en fonction du paramètre de bifurcation  $\Psi$ .*

De ce point de vue, une bifurcation<sup>127</sup> est le résultat du passage des attracteurs. C'est-à-dire, elle décrit la manière, selon laquelle un système dynamique non-linéaire change de propriété de stabilité de ces points d'équilibre, lorsqu'un paramètre de contrôle  $\psi$  de la transition de phase change de valeur, dans l'équation déterministe décrivant l'évolution dynamique du système.

---

<sup>127</sup>De manière plus précise, une bifurcation critique est un changement qualitatif d'une solution d'un système dynamique non-linéaire c'est-à-dire : la disparition, le changement de stabilité (du stable à instable ou l'inverse) et/ou l'apparition de nouvelle(s) solution(s).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Dans le cadre de notre étude, afin de prendre en compte le phénomène de changement de structure du processus dynamique, suite à la perte de stabilité de l'équilibre qui résulte de la variabilité du paramètre d'ordre près de la transition. Lorsqu'il n'y a plus de proportionnalité, c'est-à-dire de petits changements peuvent engendrer des effets importants, nous admettons l'hypothèse de non-linéarité, qui se manifeste dans la partie déterministe, par un phénomène de bifurcation, c'est-à-dire un changement de propriétés de stabilité de point fixe. En d'autres termes, la non-linéarité découle d'une sécession de transition de phases et par la suite, elle est expliquée par la présence d'un effet de seuil, résultant de la présence de divers régimes.

Ces dernières années, la notion de bifurcation occupe une place primordiale, dans l'analyse de la dynamique économique. Elle marque son importance majeure, surtout, dans l'analyse de la stabilité structurelle. L'étude systématique de la propriété de stabilité structurelle en dynamique qualitative, remonte à Andronov et Pontryagin (1937). Il s'agit de savoir, dans quelle mesure les propriétés qualitatives d'un système dynamique non-linéaire, telles que les propriétés de stabilité d'un point fixe changent, quand un paramètre de contrôle  $\psi$  de l'équation déterministe non-linéaire décrivant l'évolution dynamique discrète du système change.

**Définition 2.8**

*Un système dynamique non-linéaire de la forme  $Y_t = f(Y_{t-1}, \Psi)$ ,  $Y_t \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\Psi \in \mathfrak{R}^n$  est structurellement stable, si son portrait de phase n'est jamais modifié, à une équivalence topologique près (une modification quantitative est possible mais pas une qualitative) à la suite d'une légère perturbation paramétrique dans  $f(Y_{t-1}, \Psi)$ . Sinon le système sera qualifié de structurellement instable.*

En d'autres mots, si nous désignons par  $\psi_c$  une valeur critique du paramètre de contrôle  $\psi$ , alors  $Y^*(\psi_c)$  est structurellement stable, si tout  $Y(\psi_c)$  assez voisin de  $Y^*(\psi_c)$  dans le champ d'attraction  $B$  admet même structure que  $Y^*(\psi_c)$ . Nous abordons donc, un thème de recherche extrêmement curieux, qui porte sur la prévision dynamique non-linéaire, dans le domaine d'instabilité structurelle. La contribution de ce travail est devenue d'un intérêt majeur.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

*« Il y a une stabilité structurelle, si les propriétés dynamiques qualitatives du système, subsistent pour de petites variations dans la structure, c'est-à-dire pour des variations de paramètres ou des perturbations restreintes. Inversement, une valeur de bifurcation  $\psi_c$  est une valeur de  $\psi$ , pour laquelle le système devient structurellement instable. ».*

(Abraham-Frois, G. et Berrebi, E., (1995), pp.173-174)

**Théorème 2.6 (Peixoto, (1962)<sup>128</sup>).**

Soit le système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, \psi)$ ,  $Y \in B \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $\psi \in \mathfrak{R}$ .  $Y^*(\psi_c)$  est structurellement stable si et seulement si :

1.  $Y^*(\psi_c)$  n'a qu'un nombre fini de points singuliers, tous non dégénérés;
2.  $Y^*(\psi_c)$  n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques, toutes non dégénérées;
3. l'ensemble  $\omega$ -limite d'une orbite est un point singulier ou une orbite périodique;
4. aucune trajectoire ne connecte deux cols.

Selon la théorie de catastrophe de Thom (1974), une perte de la stabilité structurelle, qui concerne l'ensemble de toutes les trajectoires, du système dynamique et non plus une solution particulière, admet comme conséquence grave, la présence d'une catastrophe ou bifurcation topologique. À cet égard, nous allons essayer de présenter le concept de base de l'analyse de bifurcation, notamment la théorie de bifurcation de Neïmark-Hopf, et sa relation avec l'existence des cycles limites. En ce sens, Nishimura et Takahashi (1992), ont signalé que la bifurcation, est une technique géométrique introduite par Poincaré, pour l'étude de la dynamique non-linéaire, elle est employée pour indiquer un changement qualitatif, des caractéristiques dynamiques d'un système, telles que le nombre et le type de solutions, suite à la variation d'un ou plusieurs de ses paramètres. Hopf a prouvé l'existence des solutions périodiques stables ou instables d'un système dynamique non-linéaire. La contribution de Poincaré et Andronov, comporte le théorème d'identification, qui s'appelle, parfois, le théorème de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf (PAH).

---

<sup>128</sup> Peixoto, M., (1962), « Structural stability on tow-dimensionaml anifolds », Topolog, Vol. 1, pp. 101-120.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

**Théorème 2.7 (Hopf, (1942)<sup>129</sup>).**

Soit le système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, \psi), Y \in \mathfrak{R}^n, \psi \in \mathfrak{R}$ . Si ce système dynamique possède un équilibre  $Y^*(\psi_c)$  et :

1. La matrice jacobéenne du système admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda(\psi)$  et  $\bar{\lambda}(\psi)$ , imaginaires pures quand  $\psi = \psi_c$  avec aucune autre valeur propre à partie réelle nulle.

2. La condition suivante est satisfaite :  $\frac{d \operatorname{Re}(\lambda(\psi))}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi_c} > 0$ , alors, il existe une solution périodique bifurquant  $Y^*(\psi_c)$  en  $\psi = \psi_c$ .

Abraham-Frois et Berrebi (1995), montrent que ce théorème implique que, lorsque  $\psi$  passe d'une valeur inférieure à  $\psi_c$  à une valeur supérieure, à ce même point critique  $\psi_c$ , l'équilibre perd sa stabilité, car les parties réelles des valeurs propres  $\operatorname{Re}(\lambda(\psi))$  deviennent positives. Ce résultat est d'importance majeure pour notre analyse, puisqu'il conditionne l'apparition d'orbite fermée, dans la bifurcation locale de Hopf, suite à la collision d'un équilibre et d'un cycle limite. Mais, malgré son importance évidente, le théorème de Hopf ne garantit que l'existence des solutions (orbites fermées stables ou instables), périodiques dans des systèmes dynamiques, aux équations non-linéaires, si certaines conditions sont satisfaites, sans fournir aucune précision, quant à la stabilité ou l'instabilité des cycles limites aux alentours de  $\psi = \psi_c$ . En effet, les cycles limites peuvent apparaître d'un côté ou de l'autre de  $\psi_c$ . Le problème sera donc, d'essayer de savoir quand nous obtenons un cycle limite stable, c'est-à-dire attractif, le seul capable de mettre en évidence l'apparition de fluctuations endogènes autoentretenues. Pour ce faire, nous allons aborder en détail, deux configurations possibles de ce théorème, à l'aide de la figure (2.21), qui schématise le principe de la méthodologie de bifurcation de Hopf.

---

<sup>129</sup> Hopf. E., (1942), « *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differential Systems.* », *Berichte Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl.*, 94, pp. 1-22, and *Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.*, 95 (1), pp. 3-22. La traduction en Anglais par Howard., L., et Koepfel., N., (1976), apparue à « *The Hopf bifurcation and its applications* », Eds. Marsden., J. E., et McCracken., M., Springer-Verlag, Berlin.

### Diagrammes des bifurcations de Hopf

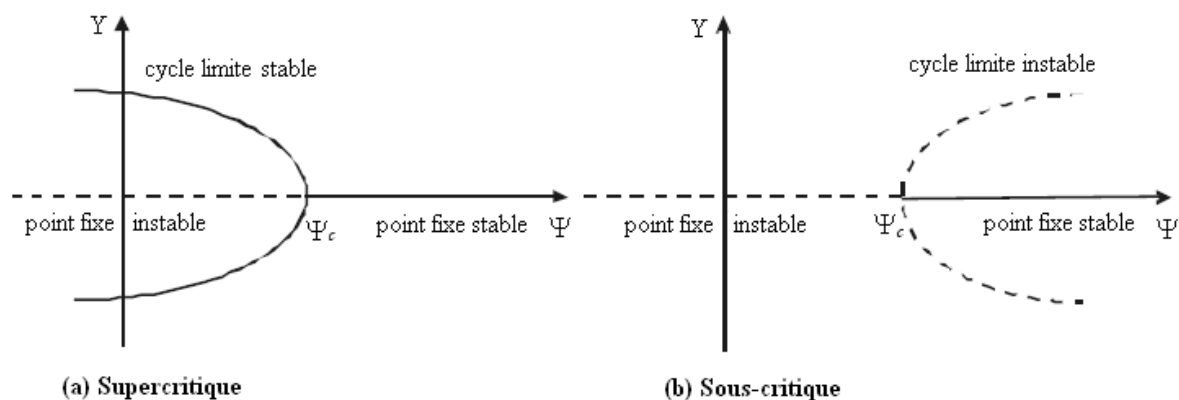


Figure 2.21: Diagrammes planes de bifurcation de Hopf supercritique et sous-critique<sup>130</sup>

Ce diagramme de bifurcation plane de Hopf, est un outil semi-analytique, pour un système situé, au moins, dans un espace de phase à deux dimensions, admettant comme particularité son aptitude de caractériser la bifurcation d'un point fixe, en orbite fermée, aux voisinages de l'équilibre. Ce type de bifurcation de Hopf, nous permet de représenter l'évolution de la trajectoire d'état décrite, par la variable d'ordre  $Y$ , en fonction de la valeur critique  $\psi_c$  d'un paramètre de contrôle  $\psi$ . Afin de concevoir la méthodologie développée, sur le diagramme de bifurcation de Hopf, nous traçons la valeur du paramètre de contrôle  $\psi$ , sur l'axe des abscisses et pour chaque valeur de  $\psi$ , la variable d'ordre  $Y$ , sur l'axe des ordonnées. Nous représentons la valeur de la variable d'ordre  $Y$ , lors de l'intersection avec un plan, appelé surface de Poincaré.

Comme nous l'avons vu, les solutions périodiques existent, seulement, du côté stable ou du côté instable de la figure (2.21). Sur le schéma (a), si les solutions périodiques existent du côté instable, elles sont stables, et la bifurcation de Hopf s'appelle *supercritique*. Nous parlons d'une bifurcation de Hopf supercritique, lorsque l'équilibre est instable pour  $\psi < \psi_c$  et bifurque en  $\psi = \psi_c$ , en un équilibre stable, entouré, par un attracteur de cycle limite stable. Au-delà de la

<sup>130</sup> Source: Rizwan-uddin, (2006, p. 270).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

valeur de bifurcation, le point fixe est stable et il n'existe pas de cycle. D'autre part, sur le schéma (b), si les solutions périodiques existent du côté stable, elles sont instables et la bifurcation de Hopf s'appelle *sous-critique*. Nous parlons d'une bifurcation de Hopf sous-critique, lorsque l'équilibre est instable pour  $\psi < \psi_c$  et bifurque en  $\psi = \psi_c$  en un équilibre stable, entouré, par un attracteur de cycle limite instable pour  $\psi > \psi_c$ . Par contre, pour  $\psi < \psi_c$ , le point fixe est instable et il n'existe pas de cycle. La distinction super/sous-critique est intéressante dans notre cadre d'analyse, car les deux formes de bifurcation n'admettent pas les mêmes significations en termes du mode de transition approprié. En effet, lors d'une bifurcation supercritique le passage d'un régime à un autre est lisse, par contre lors d'une bifurcation sous-critique le passage d'un régime à un autre est brutal, (nous reviendrons à l'explication de l'apparition de ces deux types de bifurcation de Hopf plus tard, après avoir étudié les notions de stabilité du cycle et de chaos).

Muñoz-Cobo et Verdú (1991) et Barnett et He (2002), ont montré que la bifurcation de Hopf, peut être considérée comme le type le plus important de bifurcation observée, pendant l'analyse de stabilité de cycle limite. D'ailleurs, c'est le seul type de bifurcation qui a été produit, pendant la perte de la stabilité du système dynamique. D'une façon générale, la théorie de bifurcation de Hopf, déclare que les solutions périodiques stables ou instables, à un ensemble de  $n$  équations non-linéaires, existent sous certaines conditions.

En termes plus simples, si Hassard, Kazarinoff et Van (1981) et Hassard (1986), ont montré que le théorème de Hopf assure sous certaines conditions que les solutions périodiques bifurquées (orbites closes) aux équations dynamiques non-linéaires, existent pour des valeurs du paramètre de contrôle  $\psi$ . Rizwan-uddin (2006), a prouvé que, généralement, la distinction entre le cas de bifurcation supercritique et sous-critique à partir d'un cycle reste une tâche extrêmement difficile. Dans cette perspective, Lorenz (1993a)<sup>131</sup>, a déclaré que la théorie endogène de cycle économique est seulement un cas supercritique, puisque avec le caractère lisse de la transition

---

<sup>131</sup> Voir Lorenz (1993a), p.105.

entre les régimes, elle est considérée comme utile, pour expliquer le cycle économique, à partir du phénomène de cycle limite structurellement stable.

Une première lecture du diagramme spatial de bifurcation de Hopf donné par la figure (2.22), montre, en quelque sorte, une explication préliminaire du principe de changement par « *recomposition des invariances* » où les fluctuations économiques auto-entretenues sont endogènes et naissent dans le bassin d'attraction d'un cycle limite lors d'une bifurcation de second ordre (transition d'un état stable vers un état instable ou inversement), qui sont localisées au voisinage du point de bifurcation pour  $\psi = \psi_c$ .

### Diagrammes des bifurcations de Hopf

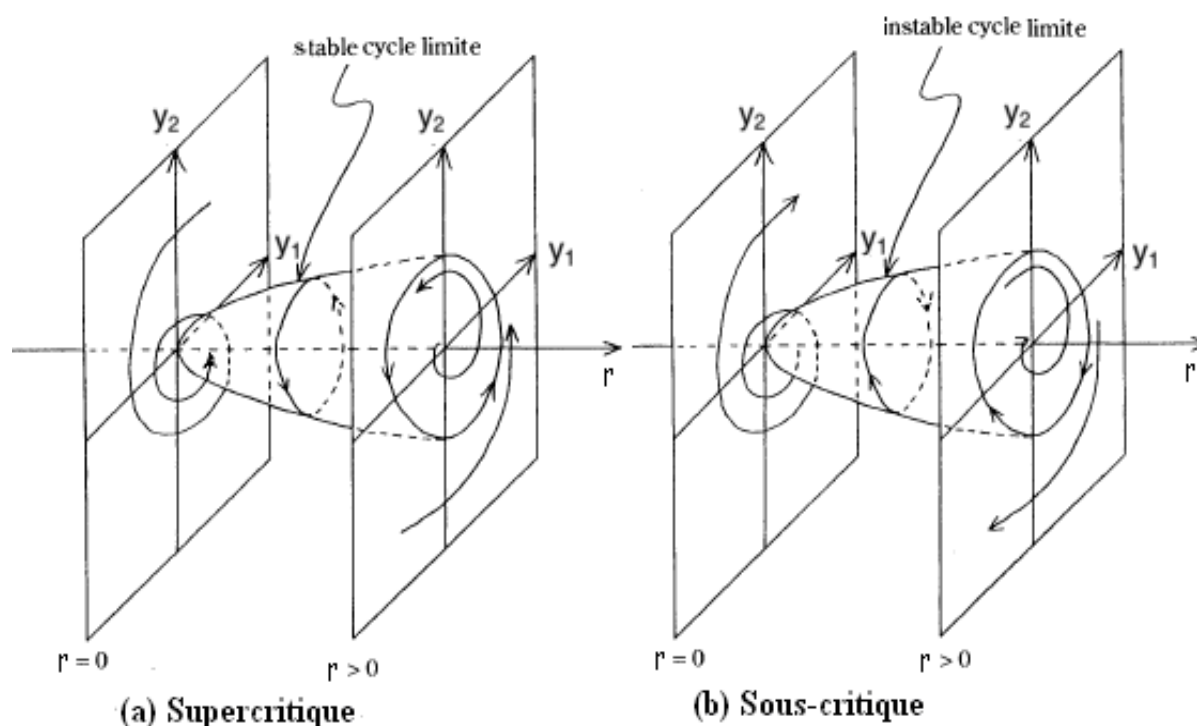


Figure 2.22: Diagrammes spatiaux de bifurcation de Hopf supercritique et sous-critique<sup>132</sup>

<sup>132</sup> Source: Sasakura, K., (1995, p. 16).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

À partir de ce constat, nait l'utilité d'établir une analyse plus approfondie, basée sur le diagramme de bifurcation de Hopf définissant le passage d'un état d'équilibre à un attracteur de cycle limite et de prouver qu'il y a une asymétrie résultant d'une brisure spontanée de la symétrie caractérisant la dynamique du système, puisque au moment de la transition par bifurcation de Hopf, la dynamique adaptative du système possède la volonté arbitraire de choisir une évolution vers l'une des deux voies, tout en respectant le principe du changement par « *recomposition des invariances* ». Cette asymétrie justifie la non-linéarité du système considéré. Afin d'étudier les non-linéarités dues aux effets de seuils et de caractériser les différentes phases de transitions, liées à un diagramme de bifurcation de Hopf, nous considérons l'exemple d'un système dynamique simple décrit par :

$$\left. \begin{array}{l} Y_{n+1} = f(Y_n, r) \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ r \in ]0, 4] \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{array} \right\}$$

et dont la représentation graphique ( $r$  : sur l'axe des abscisses et  $Y_n$  : sur l'axe des ordonnées), permet de tracer les ensembles limites invariants, en fonction des valeurs du paramètre de contrôle  $r$  et donne le diagramme des bifurcations de Hopf représenté sur la figure (2.23) ci-dessus :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

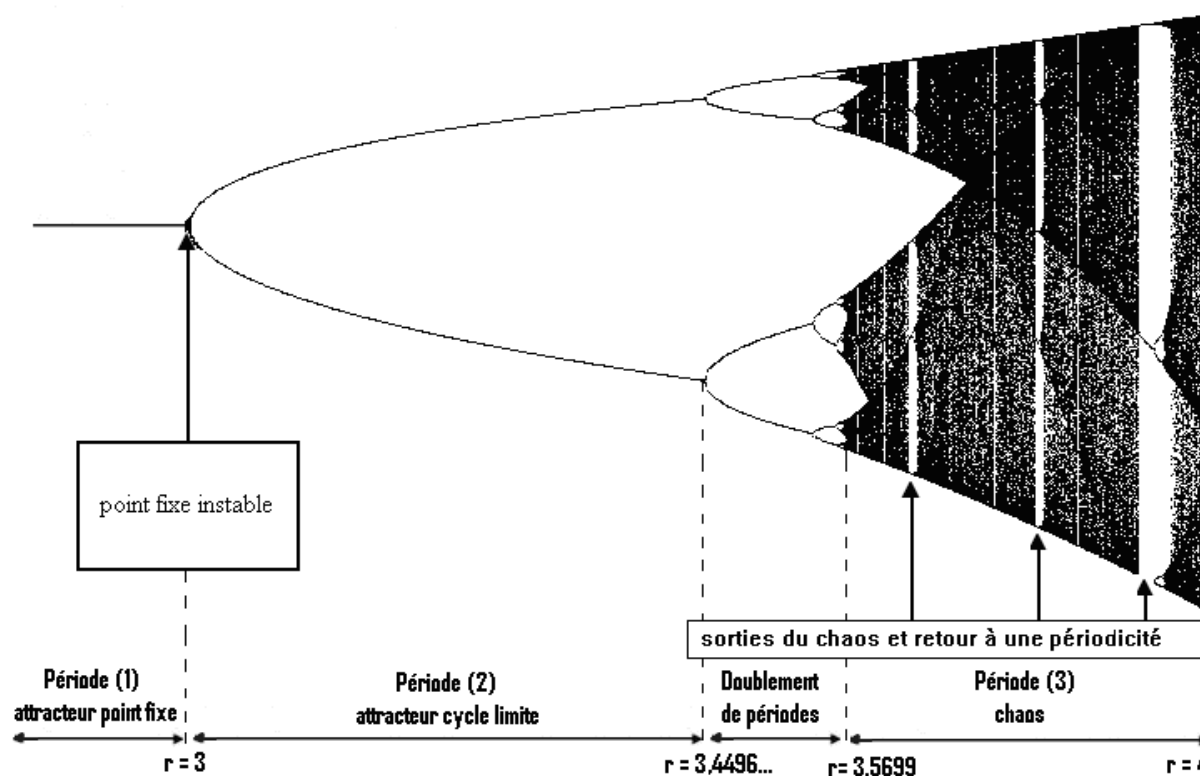


Figure 2.23: Diagramme des bifurcations de Hopf pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $0 < r < 4$

Selon Hassard (1987) et Brock et Hommes (1997), la lecture de ce diagramme des bifurcations de Hopf, permet d'identifier facilement la dynamique asymptotique du système et surtout de découvrir des changements endogènes de nature de cet état dynamique, comme il permet aussi de décrire les scénarios<sup>133</sup> les plus simples de transition, lors de passer continûment vers le chaos dites « routes universelles vers le chaos », qui démarrent sur la base du bifurcation

<sup>133</sup> Ces scénarios sont des événements importants dans la dynamique d'un processus déterministe non-linéaire et se caractérisent par le passage d'un point fixe à un cycle limite périodique de période 2, puis à un cycle limite de période 4, et ainsi de suite. Nous disons qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif des propriétés de stabilité des solutions se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre de contrôle du mécanisme de transition. Simultanément, nous voyons apparaître aussi un enchaînement très rapide de doublements de période qui va tendre le dynamisme du processus vers un comportement chaotique. Ce mécanisme de doublements de période est une des routes vers le chaos. Donc, le diagramme de bifurcation peut visualiser deux types de dynamismes : une dynamique "transitoire" qui dépend de la condition initiale du paramètre de bifurcation  $r$  et une dynamique "stationnaire" qui correspond aux états d'équilibres stables.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

---

des cycles limites et par conséquent, nécessite de prévoir les différents comportements de la variable d'ordre, en fonction de la valeur du paramètre de contrôle  $r$  et en fonction de la condition initiale  $Y_0$ , qui représente la définition de la carte de Poincaré. Or, comme nous l'avons indiqué, le diagramme de bifurcation dépend de la définition du plan de Poincaré. Pour résumer cette étude, sur la figure (2.23), donne le diagramme de bifurcation sur lequel nous pouvons définir des comportements de natures différentes, de la dynamique des fluctuations cycliques pour tout  $0 \leq Y_0 \leq 1$ . Comme nous l'avons nettement exposé plus haut, la succession des bifurcations de Hopf supercritiques, mettant en lumière la transition lisse, vers le chaos par une cascade de doublement de période, lorsque le paramètre de contrôle augmente. En ce sens, le diagramme de bifurcation montre un passage de l'équilibre dynamique, par transition douce d'un état d'équilibre stable, vers un cycle limite, ensuite vers un comportement chaotique « *Hopf bifurcation: from stable equilibrium, to limit cycle, to chaotic behaviour* », tout en manifestant de remarquables propriétés d'échelle universelle, indiquées comme suit :

➤ **Les cas de convergences :  $0 \leq r \leq 3$**

- si  $0 \leq r < 3$

La trajectoire d'état définit un seul point fixe stable, pour tout  $0 \leq r \leq 1$ , le diagramme des bifurcations associe le point  $(r; 0)$  et nous disons que l'intervalle  $[0; 1]$  est stable par  $f$ . Pour  $1 < r < 3$ , le système possède un point fixe attractif  $(r; (r-1)/r)$ .

- si  $r = 3$

Le point fixe attractif  $(r; (r-1)/r)$  devient instable. Donc, à partir de cette valeur, il n'y a plus de convergence vers un point fixe. Mais, il y a un déclenchement de la présence, d'un phénomène de cycle limite. Donc, cette condition de la perte de stabilité, illustre bien l'échange de stabilité de points fixes, qui est à l'origine de l'apparition d'une première bifurcation, jusqu'à la valeur  $r = 3.449$ .



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

➤ **Les cas d'apparitions des cycles et des comportements imprévisibles :  $r > 3$**

- si  $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,4496\dots$

La trajectoire d'état définit un cycle d'ordre 2 stable  $\{c_1, c_2\}$  et pour tout  $3 \leq r \leq 3,449\dots$  le diagramme des bifurcations associe deux points  $(r, c_1)$  et  $(r, c_2)$ .

- si  $r = 3,449\dots$

Ce cas généralise l'apparition d'une deuxième bifurcation ; indiquant ainsi, le début d'un phénomène successif de doublement de période «*compound oscillations*». La trajectoire d'état définit un cycle d'ordre 4 stable  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  et pour tout  $3,449\dots \leq r \leq 3,544\dots$  le diagramme des bifurcations associe quatre points  $(r, c_1)$ ,  $(r, c_2)$ ,  $(r, c_3)$ , et  $(r, 0)$ .

- si  $3,449 < r < 3,5699\dots$

Cette partie couvre la présence d'un attracteur qui est une orbite périodique, de période  $2^n$  où  $n$  est un entier supérieur à l'unité et qui tend vers l'infini quand  $r$  tend vers 3,57.

- si  $r = 3,5699\dots \approx 3,57$

Dans ce cas, nous pouvons mettre en présence, un attracteur de Feigenbaum fractal (mais pas étrange).

- si  $3,57 < r < 4$

Cette zone est caractérisée par une succession de bifurcations de la régularité vers le chaos. Un changement brutal dans la nature de l'orbite périodique, de période  $2^n$  apparaît. Donc, il n'y a plus de cycle stable d'ordre  $2^n$ . Les cycles d'ordre  $2^n$  cessent d'être attractifs, à un moment. Ils disparaissent et le comportement du système sera imprévisible, en l'absence de cycle, puis pour une certaine valeur de  $r$ , il y a apparition d'un cycle d'ordre impaire  $n$  : un *3-cycle* ou un *5-cycle*, qui ait présence ensuite. Il se dédouble continuellement pour donner naissance, à plusieurs cycles d'ordre pair  $2n$ , jusqu'au retour de nouveau, à générer un comportement imprévisible et dès qu'il traverse cette zone d'imprévisibilité, la dynamique du système changera de structure. Dès lors, le chaos sort et revient, successivement, à la périodicité.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

○ si  $r = 4$

Dans ce cas précis, toutes les valeurs de  $[0; 1]$  sont atteintes, c'est le chaos parfait. Ce cas établit l'expression exacte de la mesure invariante ergodique.

En conclusion, nous percevons, qu'à partir du moment où la structure d'un équilibre s'est stabilisée, elle est devenue invariante et seule la recombinaison continue d'une structure invariante, en particulier, autour d'un nouveau équilibre, constitue le moteur d'un processus de doublement de période ou d'évolution. Si nous voulons résumer, nous constatons, aisément, qu'en présence d'un phénomène d'instabilité locale, la caractérisation des différents types de chargements des valeurs critiques sont susceptibles d'identifier les différents modes de bifurcation associés. En plus, qu'une succession de bifurcations de la régularité vers le chaos, lorsque le paramètre augmente. Dès que  $r > 3.449...$  un changement dans la nature de l'orbite périodique apparaît, mais des bizarreries progressivement apparaissent, sous la forme de bifurcation de doublement de période de la dynamique des fluctuations cycliques, dite bifurcation de *flip* jusqu'à la valeur  $r = 3,5699... \approx 3,57$ . Ensuite, pour  $3,5699... \approx 3,57 < r \leq 4$ , la trajectoire d'état décrit un mélange de chaos et des cycles instables multi-périodiques, décrit par la figure (2.24), ou une dynamique purement chaotique représentée par la figure (2.25).

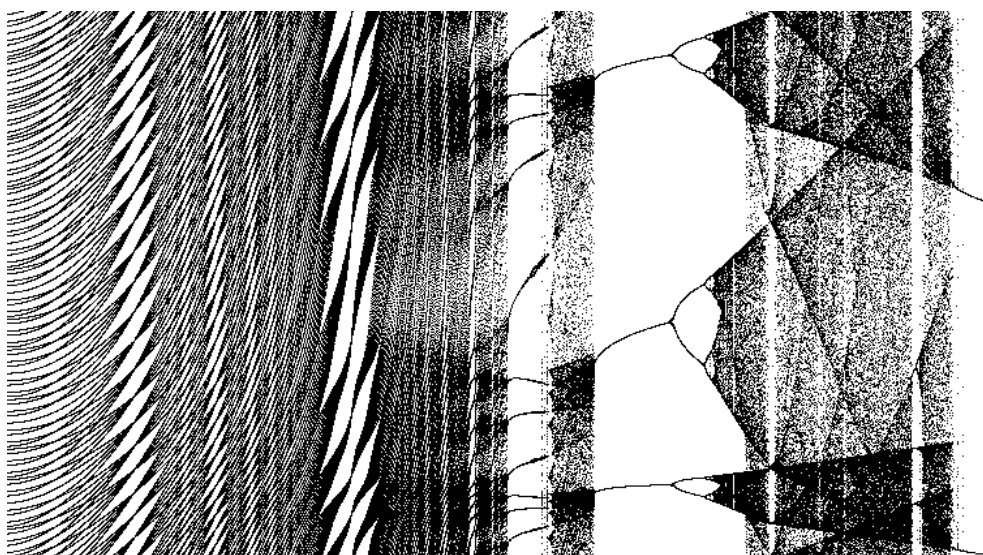
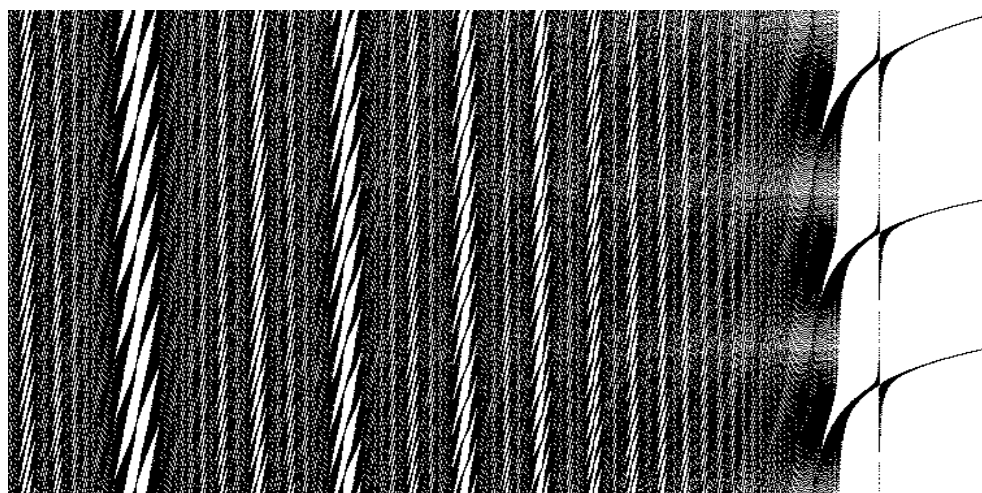


Figure 2.24: Diagramme de bifurcation : mélange de chaos et des cycles instables multi-périodiques

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---



**Figure 2.25 : Diagramme de bifurcation : dynamique purement chaotique**

Nous pouvons facilement remarquer, qu'au niveau de la première graphique (2.24), le chaos est faible ou organisé. Par contre, pour la seconde graphique (2.25), le chaos est parfait. En conclusion, nous constatons que le fonctionnement du système dynamique est régi par des lois, autres que les lois classiques. Dans certains cas, le système évolue vers l'ordre (chaos organisé) et il peut être rendu prévisible. Par contre, dans d'autres cas, la marche du système résulte des lois de désordre complexe (chaos parfait). Le comportement du système sera totalement imprévisible. Il résulte de ce qui précède qu'un processus déterministe, peut induire une dynamique, à la fois complexe et imprévisible. Donc, sous l'effet de la sensibilité aux conditions initiales que, par paradoxe, des causes déterminées pouvaient engendrer des effets imprévisibles : c'est d'après un principe de non-prédictibilité. Ainsi, une cause minime peut avoir des changements radicaux et comme nous voyons, des modifications infinitésimales dans les valeurs du paramètre de contrôle, peuvent induire des résultats totalement distincts : d'après un principe de causalité.

Ce cas d'étude nous a permis d'analyser, par le recours à la théorie de bifurcation de Hopf, les changements de nature topologique de la variable d'ordre  $Y$ , sous l'effet d'une variation paramétrique induite, par le paramètre de contrôle  $r$ . Cette analyse nous permet de constater d'une part, la présence de différentes phases de transition et d'autre part, tout au long du diagramme de bifurcation, à un certain niveau la transition va converger, vers une dynamique

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

chaotique qui se produit de façon imprévisible, mais il peut être organisé. En ce sens, nous pouvons déduire que les fluctuations économiques du cycle endogène, décrivent des trajectoires, non stationnaires, en enfermant des moyennes de trajectoires, qui sont soit des cycles limites, soit des attracteurs chaotiques.

*«...nous montrons que des fluctuations endogènes déterministes et stochastiques peuvent émerger, lorsque le taux de marge est positif et variable. En effet, l'équilibre stationnaire peut être localement indéterminé et des trajectoires déterministes peuvent apparaître, autour de l'équilibre stationnaire, à travers l'émergence d'une bifurcation Hopf ou flip. ».*

(Seegmuller, T., (2003), p. 374)

En plus, nous pouvons aisément constater, combien le recours à la théorie du changement par « *recomposition des invariances* », rend toute théorie de la rupture impossible, dans le sens où cette dernière élimine complètement, tout mécanisme possible d'ajustement dynamique dit de transition, autorisant la transformation et la reconstitution des structures endogènes. Il ne suffit pas de récupérer la condition de reproductibilité à l'identique qui conditionne une transformation des structures cycliques, ou encore l'émergence des fluctuations cycliques, selon une logique économique analogue, pour identifier logiquement, le processus abstrait induit par le changement structurel endogène. Car la caractérisation de ce mécanisme flou, inobservable à l'œil nu, nécessite la satisfaction d'une autre condition indispensable à son fonctionnement réel. Puisque le changement par « *recomposition des invariances* », assure la mutation structurelle, mais cette dernière peut aussi se produire, non plus graduellement, mais brusquement, sous forme de crises chaotiques conformes à celles induites par l'émergence des fluctuations a périodiques, mettant à mal tout fonctionnement de leur processus de génération, généralement imprévisible.

À cet égard, l'analyse et la caractérisation des fluctuations économiques endogènes, qui partagent la même idée de ce principe de changement par « *recomposition des invariances* », nous oblige à reconsidérer notre manière d'appréhender les catastrophes économiques et les crises causées, normalement, par les chocs structurels endogènes, ayant pour source d'apparition les aspects non-linéaires, des structures de dépendance, qui naissent évidemment au cours du fonctionnement du processus de transition, accompagnant la transformation à l'identique, c'est-à-

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

dire le désordre qui naît dans l'ordre. Ainsi, le diagramme de bifurcation de Hopf fournit une idée conceptuelle du mécanisme de transition par ajustement structurel endogène. Cependant, ce diagramme de bifurcation ne nous renseigne pas d'une manière nette, sur la morphologie du cycle, à partir des fluctuations endogènes et en conséquence, il est insuffisant d'offrir une représentation plus compréhensible de l'endocyclogenèse. Pour faire face à cette limite, nous ferons appel à un autre outil de la géométrie itérative, basée sur la représentation en toile d'araignée, qui aide à visualiser la formation du cycle endogène. Cet instrument n'est autre que le diagramme de transition de phases.

Dans le reste de cette section, nous allons aborder l'explication endogène des cycles. Pour ce faire, nous allons étudier un peu plus loin en plus de détail l'émergence des fluctuations endogènes déterministes et stochastiques. Ceci revient d'abord d'étudier, localement, comment se comporte la suite définissant la dynamique du système considéré, dans le domaine de convergence et dans le domaine, où elle cesse de converger.

#### ***2.2.2.2. Convergence et justification de formation de cycle endogène***

En dehors de toute explication exogène, l'idée la plus intéressante développée, dans cette sous-section, est celle de la formation du cycle endogène par bifurcation. Dans ce cadre, nous allons essayer d'appliquer des nouvelles méthodes d'analyse des séries temporelles, à l'aide d'un ensemble de techniques, de la démarche qualitative qui seront utiles à l'étude empirique de la dynamique des fluctuations macroéconomiques, ainsi qu'à la prévision. En ce sens, afin de donner un fondement endogène aux fluctuations, nous admettons, tout d'abord, qu'un cycle peut être défini comme suit :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

**Définition 2.9**

Un cycle d'ordre  $n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul, est un ensemble de  $n$  points  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  tel que :

$$\begin{cases} Y_{k+1} = f(Y_k)_{k=1, \dots, n-1} \\ Y_1 = f(Y_n) \\ Y_k = f^n(Y_k)_{k=1, \dots, n} \\ Y_k \neq f^h(Y_k)_{h=1, \dots, n-1} \end{cases}$$

Un cycle s'identifie à partir de l'ordre d'échange de ses  $n$  points  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , par application successive de l'application dynamique  $f$ , un cycle d'ordre  $n$  sera représenté par  $C_{n,j}$  où  $j$  est l'ordre d'échange successif par  $f$  de ses points. Une intense littérature qui essaie de fournir une justification de la formation de cycle endogène non-linéaire, est exposée par Benhabib et Nishimura (1985), Grandmont (1985a), Hansen (1985), Benhabib (1992) et par Abraham-Frois et Berrebi (1995). Comme l'atteste la revue de Boldrin et Woodford (1991), nous essayons, à l'aide d'un exemple, d'étudier la dynamique discrète d'un système proche de celui fourni par l'équation, décrivant le modèle de croissance avec freinage logistique défini par l'expression :

$$f(Y_{t-1}) = r(1 - Y_{t-1})Y_{t-1}, \quad r > 0$$

où  $r$  est le paramètre de bifurcation. Cette spécification donne une caractérisation endogène des fluctuations de la production, en l'absence de tout choc exogène de nature stochastique qui cause des déviations cycliques à la tendance de croissance, en représentant cette dernière au temps  $t$  comme étant une fonction non-linéaire de celle de la période précédente.

$$Y_{t-1} = f(Y_{t-1})$$

Ce qui permet d'expliquer la structure intrinsèquement instable, mais régulière, de l'économie où la production fluctue de façon endogène et non explosive, indépendamment de tout choc extérieur, c'est-à-dire, même si rien ne change à l'extérieur. Contrairement aux théoriciens du courant classique, cette nouvelle perception de l'économie vient de renforcer l'importance pratique de l'étude de ces fluctuations endogènes qui convergent vers un cycle de période  $n$ ,

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

obtenu à l'aide des mécanismes internes en terme de rythme des variations temporelles qui se répètent pendant des phases successives, clairement identifiables à partir du comportement asymptotique des transformés de la fonction  $f$  dans l'orbite  $\{Y_t, f(Y_t), f(f(Y_t)), \dots, f^n(Y_t)\}$  quand  $r$  et  $Y_0$  changent. Ce qu'il faut garder à la tête, lorsque nous sommes confrontés à la recherche des manières de formation du cycle de différents ordres de périodicité, que telle tâche est complexe car d'une part, les calculs explicites des itérées de  $f$ , deviennent très vite compliqués et d'autre part, le fait que dans certains cas, le comportement du système est parfaitement chaotique, ce qui fait que tout calcul approché sera rapidement équivoque. C'est ce qui nous conduit à préférer un traitement qualitatif, au moyen de la technique de bifurcation et/ou géométrique au moyen de la technique de diagramme de phase. À cet égard, le théorème de récurrence de Poincaré dit que, pour, à peu près, toutes les conditions initiales, un système dynamique conservatif dans l'espace des phases va retourner, au cours du temps, approximativement, aussi près que l'on veut de sa condition initiale, et cela, de manière répétée, une infinité de fois.

**Théorème 2.8 (de récurrence de Poincaré, (1890)<sup>134</sup>).**

*Soit le système dynamique ergodique donné par le triplet  $(I, g, f)$  avec :*

- .  $I$  est l'espace de phase (espace mesurable) ;*
- .  $g$  est une mesure sur  $I$  ;*
- .  $f : I \rightarrow I$  est une application préservant la mesure  $g$ , c'est-à-dire telle que :*

$$\forall B \subset I, (g \circ f^{-1})(B) = g[f^{-1}(B)] = g(B)$$

*Un point  $Y \in B$  est dit récurrent par rapport à  $B$ , si et seulement s'il existe un entier  $j \geq 1$  pour lequel :*

$$f^j(Y) \in B$$

*Soit  $B \subset I$  un sous-ensemble mesurable. Alors, presque tous les points  $Y_0 \in B$  sont récurrents par rapport à  $B$ .*

---

<sup>134</sup> Poincaré, H.J., (1890), « *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* », Acta Mathematica 13, pp. 1-270. A translation by June Barrow-Green (1997), « *Poincaré & the three-body problem* », History of Mathematics, Vol.11, American Mathematical Society & London Mathematical Society.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Ce théorème pose la base morphodynamique, remarquablement inerte, au plan spatio-temporel. Il peut être considéré comme l'un des éléments pertinents, qui spécifient la transition de l'information prédictive, tout en satisfaisant le principe du changement par « *recomposition des invariances* ». Mais, la dynamique de l'information prédictive va dépendre, de façon cruciale, de l'échelle spatio-temporelle, à laquelle elle se rattache, où le changement n'est viable, qu'en présence d'un ordre préexistant et susceptible de le réceptionner, de le soutenir et de le réorganiser. De ce fait, la récurrence joue un rôle primordial dans la formation des structures évolutives s'opérant par la « *recomposition* » des structures invariantes. Mais, la question qui se pose est de savoir comment se propage l'information prédictive, à travers l'émergence des structures récurrentes dans le domaine spatio-temporel? Afin de savoir, si un attracteur reflète ou non, la structure globale du comportement à long terme d'un système dynamique. Ott, Sauer et Yorke (1994), ont considéré deux types de mesures naturelles. La première est la mesure donnée pour un hyper-cube  $C_i$  à une fraction de temps  $\tau$  pour toute condition initiale  $Y_0$ , par :

$$g(C_i, Y_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{N(C_i, Y_0, \tau)}{\tau}$$

où,  $N(C_i, Y_0, \tau)$  est la fraction de temps, pour laquelle l'orbite débutant de  $Y_0$  à  $t = t_0$ , couvre le  $i^{\text{ème}}$  hyper-cube, durant un intervalle de temps  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ .

**Définition 2.10**

Soient  $Y \in I$ ,  $B \subset I$  et  $n \in \mathfrak{N}$ . Nous notons  $N(Y, B, n)$  le cardinal de l'ensemble :

$$\{z \in \mathfrak{N} \mid z < n \text{ et } f^z(Y) \in B\}$$

La fréquence  $\tilde{g}(Y, B)$  de visite de l'orbite de  $Y$  dans  $B$  est la limite, si elle existe, du rapport  $N(Y, B, n)/n$  quand  $n$  tend vers l'infini. Nous notons le temps de retour :

$$\min\{z \geq 1 \mid f^z(Y) \in B\}$$

La seconde est la mesure de probabilité, d'un état  $S$  du système noté  $g(S)$  et vérifiant  $0 \leq g(S) \leq 1$ . Par définition, cette mesure de probabilité doit satisfaire la condition, entre la somme additive et la somme collective disjointe des états d'espace, suivante :

$$g\left(\bigcup_i S_i\right) = \sum_i g(S_i)$$



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Pour une fonction  $f$ ,  $g$  est une mesure invariante pour tout état  $S$  du système dynamique si,

$$g(S) = g[f^{-1}(S)]$$

Si  $g$  ne peut plus être décomposable, en deux autres mesures de probabilités invariantes,  $\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2$ , avec  $0 < \alpha < 1$  et  $g_1 \neq g_2$ , alors la mesure de probabilité  $g$  est dite *ergodique*. À cet égard, la motivation dynamique de la théorie ergodique consiste à l'étude du comportement statistique, à long terme, de systèmes, par exemple, définis par l'itération d'une fonction de transition  $f$  d'un espace  $I$  dans lui-même. Le problème consiste, donc, à tenter de caractériser diverses moyennes temporelles, du temps passé, dans différentes parties de l'espace  $I$ , selon diverses topologies transitives. En particulier, l'ergodicité d'un système dynamique probabiliste implique que tout ensemble invariant, mesurable  $f^{-1}(B) = B$  est presque partout constant. Le théorème de multiplication ergodique de Oseledec (1968), garantit que, si à partir d'une condition initiale  $Y_0$ , une orbite génère une mesure de probabilité ergodique, alors les moyennes définies pour une orbite de longueur infinie existent et ces moyennes sont la somme, pour n'importe quel état initial  $Y_0$ , avec respect de la mesure ergodique. Alors, pour une fonction de transition  $G(\cdot)$  choisie, arbitrairement, parmi les fonctions de transitions données, sur le tableau (2.11), l'équivalence entre la moyenne spatiale, avec respect de la mesure ergodique, et la moyenne temporelle décrivant une trajectoire typique est donnée par :

$$\langle G(Y) \rangle = \int G(Y) dg(Y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N G(Y_i)$$

où,  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne avec respect de la mesure invariante et  $dg(Y)$ , désigne la probabilité de produire une orbite en  $Y$ . Cette formule exprime une illustration imagée de la loi des grands nombres, dans le sens où nous allons supposer que les variables aléatoires  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  représentent les visites aléatoires des pixels d'une trajectoire. Rappelons qu'un pixel correspond à un petit domaine du plan. Nous effectuons un grand nombre d'itérations, et l'on note le nombre de fois où chaque pixel à été visité.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Le lien entre ergodicité et mesures invariantes d'un système dynamique est établi, à l'aide du théorème ergodique ponctuel de Birkhoff suivant :

**Théorème 2.9 (Birkhoff, (1932)<sup>135</sup>).**

*Nous supposons que  $f : I \rightarrow I$  admet une mesure de probabilité  $g$  invariante et ergodique. Alors, pour presque tout  $Y \in I$ ,  $\tilde{g}(Y, B)$  existe et nous avons  $\tilde{g}(Y, B) = g(B)$ . Donc,  $f$  est ergodique.*

Ce théorème découle, en fait, de l'égalité entre la moyenne temporelle et la moyenne spatiale de la fonction de transition  $G(\cdot)$ . McSharry et Smith (1999), ont constaté que la tendance de saisir, convenablement, la forme fonctionnelle d'un système dynamique, dépend, essentiellement, de ses mesures invariantes, et ceci pour deux raisons principales : Premièrement, les observations ne peuvent plus décrire la structure de la dynamique, dans une région de l'état de phase non visitée. Secondement, les fluctuations extrêmes, dans une mesure invariante, tendent à biaiser approximativement la dynamique. La mesure invariante d'un modèle, pour laquelle la dynamique approximative du système est employée, dépend des techniques d'estimations de ses paramètres. Notons que ce théorème, est à l'origine de la logique, dont se base l'idée de construire des grandeurs (dimension de corrélation, exposants de Lyapounov,...), capables de faire la distinction entre dynamique déterministe ou dynamique purement stochastique, d'un processus de séries temporelles non-linéaires (voir la troisième partie).

Jusqu'à ce niveau, nous avons introduit des notions élémentaires concernant les transformations ponctuelles mues, par le principe du changement par « *recomposition des invariances* », dans l'espace d'état. En particulier, les transformations ponctuelles de recomposition peuvent admettre différents types de singularités (point fixe et cycles d'ordres  $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ). La caractérisation des courbes invariantes (horizontales et verticales), limitant les bassins d'attraction d'un cycle, dont les propriétés sont établies par Takana, Sanjuan, Aihara (2005), vérifient l'invariance, par rapport aux transformations ponctuelles  $(f^{\pm n})_{n=1,2,\dots}$  et qu'elles

---

<sup>135</sup> Voir Birkhoff, G.D., (1932), « *Sur quelques courbes fermées remarquables* », Bull. Soc. Math. de France, 60, pp. 1-26.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

englobent les arcs des courbes invariantes, passant par des points fixes et des cycles répulsifs et par leurs antécédents, nécessite une caractérisation spatio-temporelle. Comme l'explique Prigogine (1986)<sup>136</sup>,

«...lorsqu'un système devient instable, une organisation  
spatiale et temporelle fait son apparition...»  
(Prigogine, 1986, cité par Laborit, (1987), p.60)

Dans le but de mener une étude garantie, pour un modèle dynamique en économétrie de séries temporelles à temps discret, en vue d'aboutir à la caractérisation du processus générateur de données à l'aide des invariants dynamiques qui justifient la dynamique endogène de ses structures cycliques par recomposition, alors, il est essentiel d'avoir recours à des techniques d'analyse qualitative qui permettent de préciser le degré de complexité du processus sous-jacent et de discriminer une dynamique purement déterministe dont le chaos d'un comportement stochastique. Pour cela, de nombreux travaux ont visé la compréhension géométrique des déplacements infinitésimaux, de la dilatation morphologique des structures endogènes, en se basant sur la lecture et l'analyse des trajectoires de l'organisation spatiotemporelle à la manière par exemple de Allen et Sanglier (1981), Kaufmann (1993) et Westerhoff (2006a-b). Selon Kahn (2008), l'endomorphologie des structures par réorganisation, montre que la nature de récurrence obéit au principe de changement par « *recomposition des invariances* », d'un système dynamique n'admet pas un comportement unique, à cause de la non unicité de périodicité de l'attracteur, due à l'irrégularité cyclique. Eckmann, Kamphorst et Ruelle (1987), ont permis d'inventer une technique graphique, très avantageuse, basée sur l'analyse dynamique non-linéaire des récurrences de séries temporelles. Le principe de cette technique consiste à visualiser les états de récurrence, dans un espace de phase, tout en se basant sur l'idée qui stipule que les états de récurrences, ont la tendance de s'en renfermer, après un certain temps de divergence. Cette idée fondamentale qui découle du théorème de Poincaré est une propriété caractérisant les systèmes dynamiques et typiquement efficace, pour les systèmes déterministes récurrents, mais moins

---

<sup>136</sup> Par analogie au champ de la dynamique économique, Prigogine a étudié les « *structures dissipatives* », pour lesquelles il a pu contribuer à l'explication du principe de la thermodynamique en chimie organique.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

appropriée pour l'interprétation du phénomène complexe, tel que le cas des systèmes chaotiques non-linéaires.

**Définition 2.11**

*La représentation graphique de la récurrence RP (Recurrence Plot)<sup>137</sup> est une technique d'analyse graphique et de description statistique et de la théorie de chaos. Elle consiste pour un instant donné, de déterminer le temps de couverture que peut prendre une trajectoire d'espace de phase, quand il visite une certaine surface de l'espace de phase, associée à cette trajectoire.*

**Définition 2.12**

*Soit  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,N}$  une série temporelle et  $\Omega_i = \{Y_i, Y_{i+\tau}, \dots, Y_{i+(m-1)\tau}\}_{1 \leq i \leq N-(m-1)\tau}$  l'ensemble des vecteurs à  $m$  dimensions correspondants construits dans l'espace de plongement, où  $m$  est la dimension de plongement et  $\tau$  est un délai. Une récurrence plot est un graphe défini comme une matrice  $N \times N$  où un point  $(i, j)$  est dessiné quand  $\|Y_i - Y_j\| < \varepsilon$ , étant une distance donnée.*

Cette technique permet de déduire, à partir de l'analyse et de l'inspection visuelle de la matrice graphique des récurrences construite avec des distances des vecteurs lorsque chaque portion du courbe est comparée à toutes les autres et représentée sur une carte de récurrence, que les caractéristiques qualitatives sont nécessaires pour l'évaluation des distances, entre les points dans l'espace temporel et dans l'espace des phases. Plusieurs avantages méthodologiques ne sont pas tous autorisés dans le cadre d'analyse dynamique des séries temporelles non-linéaires par d'autres d'outils moins adaptés, justifient la nécessité d'avoir recours à cette technique pertinente, puisqu'elle n'exige pas de contrainte sur la stabilité, dans le temps, des propriétés statistiques ou de stationnarité des séries, ni sur la forme de la distribution statistique des mesures. Marwan, Wessel, Meyerfeldt, Schirdewan et Kurths (2002), ont proposé des mesures fondées sur des structures verticales et/ou horizontales, capables de mettre en évidence, notamment, les transitions chaos-chaos. Ainsi, la RP permet deux approches topologiques à large et à petite échelle.

En ce qui concerne l'interprétation topologique, à large échelle, de la matrice graphique des récurrences, nous distinguons trois niveaux d'analyse : premièrement, une homogénéité dans

---

<sup>137</sup> Une extension multivariée de diagramme de récurrence RP (*recurrence plot*) consiste à considérer dans un espace des phases les trajectoires de deux systèmes dont les portraits de phases sont différents. Cette technique nommée CRP (*Cross Recurrence Plots*) est développée par N., Marwan, et J., Kurths, (1987).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

la représentation graphique implique une distribution homogène des points récurrents, dans la matrice des récurrences, ce qui caractérise la stationnarité du système, tant dans le cas d'un phénomène aléatoire uniformément distribué (bruit blanc), que dans le cas d'une structure chaotique déterministe. Par contre, la non stationnarité du système est à l'origine des changements dans la distribution des points de récurrences, visualisées graphiquement par des surfaces claires (*brighten areas*). Deuxièmement, la périodicité (la rythmicité) d'un système implique la présence de longs segments diagonaux parallèles, à la diagonale principale de la matrice RP. Ces longs segments diagonaux sont affichés par des zones d'ombres liées à l'occurrence des points récurrents, d'une manière dense dans la matrice RP. Troisièmement, la dérive caractérisée par l'éloignement des lignes diagonales, par rapport à la diagonale principale. Plus les lignes diagonales sont éloignées de la diagonale principale, plus la dérive est forte. Au contraire, plus elles sont proches de la diagonale principale, plus la dérive est faible. Une dérive faible de la matrice des récurrences est le synonyme de non stationnaire d'une série chronologique et contrairement.

En ce qui concerne l'interprétation topologique à échelle réduite de la matrice graphique des récurrences, nous distinguons quatre niveaux d'analyse : D'abord, les points récurrents isolés impliquent un comportement stochastique du système. Ensuite, les petits segments diagonaux (petits segments parallèles à la diagonale principale), signifient la présence d'une série de vecteurs qui se répètent, plusieurs fois, pendant une période d'observation. Dans le cadre de dynamique des attracteurs, ceci implique que le système revisite la même région de l'attracteur à différents moments. Alors que, les petits segments perpendiculaires à la diagonale principale, signifient la symétrie des deux moitiés triangulaires la matrice des récurrences, par rapport à la diagonale principale, chaque moitié triangulaire reflète l'image de l'autre. Mais, les petits segments horizontaux ou verticaux signifient la présence d'une séquence de vecteurs proches les uns des autres. Puis, la structure damier induite par un regroupement de segments de lignes parallèles, à la diagonale principale, dans de petites régions de la matrice des récurrences. Dans le cadre de la dynamique des attracteurs, cela signifie que le système revisite différentes surfaces de l'attracteur et bascule de l'une à l'autre, pas mal de fois, pendant une période d'observation.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Enfin, la bande de l'espace blanc caractérise les points non récurrents et indique un changement de structure, ou un changement brutal d'état du système. Zbilut et Webber (1992), ont développé une seconde technique statistique de mesure de complexité, permettant l'analyse de la quantification de récurrence de la matrice des récurrences.

**Définition 2.13**

*L'analyse de quantification de récurrence RQA (Recurrence Quantification Analysis) est une méthode d'analyse non-linéaire de données, qui permet de quantifier le nombre de durée de récurrences d'un système dynamique non-linéaire présentées, par l'espace de phase associé à une trajectoire.*

Trulla, Giuliani, Zbilut et Webber (1996), ont cherché à savoir comment les asymétries trouvent leur prolongement intéressant, ou leur généralisation, dans la perception spatiotemporelle. Pour cette fin, ils ont testé l'hypothèse, selon laquelle la diminution des symétries cachées, correspond à une croissance de l'ordre de l'organisation de l'information, à travers la récurrence. Dans ce cadre, ils ont proposé des mesures basées sur des structures diagonales, assurant la mise en évidence les transitions chaos-ordres, afin de mettre en présence les changements d'état, la non-linéarité et la non-stationnarité d'un système dynamique. Leur aperçu prouve, en particulier, qu'il y a divers liens forts, entre l'émergence asymétrique de l'information, dans l'espace et dans le temps. Ce qui nous ramène à essayer de concevoir le comportement asymétrique spatiotemporel, de l'information prédictive, à travers un processus de transition, afin de comprendre leurs interactions élémentaires cachées.

Les diagrammes de récurrence  $r_{i,j}$  se définissent comme une matrice carrée bidimensionnelle et symétrique avec des points noirs et blancs, où les points noirs marquent une récurrence, et les deux axes sont des axes de temps. Cette représentation caractérisant la possibilité que chaque point du portrait de phase  $\{Y_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  est proche ou non d'un autre point  $Y_j$ . Ainsi, les deux points  $Y_i$  et  $Y_j$  sont dits récurrents (points noirs), que si la distance qui les sépare est inférieure à un seuil prédéfini  $\varepsilon$ ; autrement, ils sont non récurrents (points blancs). La caractérisation d'un système dynamique, par la méthode des récurrences, repose sur l'interprétation des matrices de récurrences définies mathématiquement par :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

$$r_{i,j} = \Xi \left( \varepsilon - \|Y_i - Y_j\| \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

où  $N$  est le nombre d'états considérés,  $\Xi (Y_i)$  est la fonction indicatrice,  $\varepsilon$  est une distance de seuil et  $\|\cdot\|$  est une norme (par exemple la norme euclidienne). L'avantage de cette technique c'est que les espaces de phase de dimensions supérieures peuvent être visualisés par projection dans l'espace de phase à  $m$ -dimensions grâce à une représentation bidimensionnelle de la trajectoire étudiée.

**Tableau 2.2 : Certaines mesures de quantifications de récurrences**

Mesures	Symboles	Définitions <sup>(*)</sup>
Pourcentage de récurrence	PR	$PR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N r_{i,j}$
Pourcentage de déterminisme	PD	$PD = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{i,j}^N r_{i,j}}$
Pourcentage de laminarité	PL	$PD = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)}$
Temps de rattrapage	TR	$TR = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^N P(v)}$
Ratio	R	$R = N^2 \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\left(\sum_{l=1}^N P(l)\right)^2}$
Entropie	E	$PR = - \sum_{l=l_{\min}}^N p(l) \log[p(l)]$
Ligne maximale	$L_{\max}$	$L_{\max} = \max(\{l_i ; i = 1, \dots, N_l\})$
Trend	T	$T = \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2) (PR_i - \langle PR_i \rangle)}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2)^2}$

(\*) Indique que les symboles :  $N$  ;  $r_{ij}$  ;  $P(l)$  ;  $P(v)$  et  $p(l)$  désignent (respectivement) la taille ; le taux de corrélation ; la distribution de fréquence de l'histogramme dont la longueur de la ligne diagonale est  $l$  ; l'histogramme dont la ligne verticale est de longueur  $v$  et l'entropie de Shannon caractérisant la distribution de probabilité de la longueur de la ligne diagonale.

À partir de ces matrices, si nous nous limitons à l'un des deux triangles, en excluant la diagonale principale et en fixant le rayon, il est possible d'évaluer les distances, entre les points

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

dans l'espace temporelle et dans l'espace des phases et d'introduire diverses mesures statistiques, permettant de quantifier les propriétés de récurrence et dont les principaux de ces mesures, sont donnés dans le tableau (2.2).

Dans le but d'autoriser un contrôle adéquat du principe de changement par « *recomposition des invariances* », ce tableau indique les structures et la quantification à l'aide des mesures sur la représentation graphique de la récurrence à savoir :

- Le pourcentage de récurrence (*recurrence rate*), qui est le ratio de tous les états récurrents (points de récurrences), vers tous les états possibles. C'est donc, la proportion des points noirs dans la récurrence.
- Le pourcentage de déterminisme (*determinism*), permettant de quantifier, si des informations peuvent se répéter dans le temps et qui caractérisent la longueur des structures diagonales, hors la diagonale principale. C'est-à-dire que plus les structures diagonales sont longues, plus le comportement est déterministe ( $PD = 1$ ) et plus les structures diagonales sont courtes, plus le comportement est stochastique ( $PD \rightarrow 0$ ). D'où cette mesure est en relation avec la prédictibilité du système dynamique, parce que la représentation graphique de la récurrence d'un système de données stochastiques et décorréolées est formée, uniquement, par des points noirs et très peu de lignes de morceaux de diagonales, à la différence d'un processus déterministe, formé uniquement, par des lignes diagonales et très peu de points noirs.
- Le pourcentage de laminarité (*lamirarity*), donne le pourcentage de points noirs qui forment des lignes verticales de longueurs minimales, c'est une caractéristique de l'intermittence du système lors de la transition chaos-chaos.
- Le temps de rattrapage (*trapping time*), est la longueur moyenne des lignes verticales, qui mesure le temps moyen pour qu'un système garde certains états.
- Le ratio (*ratio*), est la relation entre le pourcentage de récurrence et le pourcentage de déterminisme, qui donne le ratio des points de récurrence, formant la structure des morceaux de diagonales (hors diagonale principale), rapporté au nombre total de points de récurrences. C'est une mesure de déterminisme du système.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

- L'entropie (*Shannon entropy*), est la fréquence de la distribution dont les probabilités sont tirées du pourcentage de l'apparition des segments obliques de longueurs variables, elle qui indique le degré de complexité de la structure déterministe du système, par le nombre de bits d'informations requis pour coder sa trajectoire.
- La longueur maximale des lignes diagonales, donne une mesure de la sensibilité aux conditions initiales. Elle est inversement proportionnelle, à l'exposant de Lyapounov.
- La tendance (*trend*), qui est le coefficient de la régression linéaire caractérisant la relation, entre la densité des points de récurrence de la ligne parallèle à la ligne diagonale avec une distance près. La tendance permet de quantifier le palissement des points récurrents observés, lorsque nous nous éloignons de la diagonale principale et donne, donc, une mesure de la non-stationnarité, décrite par le diagramme de récurrence.

Avec ces mesures, nous serons capables d'étudier la variabilité spatio-temporelle du mécanisme abstrait, derrière un changement structurel endogène et d'évaluer la stabilité, dans le temps de sa répartition spatiale. C'est-à-dire, de quantifier un diagramme de récurrences et d'identifier ses structures.

Afin de permettre une utilisation pratique du cadre spatiotemporel, le recours aux techniques de RP et de RQA permet d'interpréter l'organisation en structures topologiques à travers la représentation discrète de la dynamique des récurrences, dans l'objectif d'autoriser un contrôle adéquat du principe de changement par « *recomposition des invariances* ». Toutefois, l'apport majeur de ces outils et concepts à la théorie du chaos, permet de montrer, comment réconcilier des lois d'évolution déterministes et des comportements d'apparence erratique, aux échelles spatio-temporelles. En particulier, la prédiction non-paramétrique des systèmes complexes, basée sur la réduction de la noise, se développe à la croisée de ces deux domaines. Dans la suite, nous allons étudier la dynamique discrète pour le cas particulier de la dimension 2 dans le plan de paramètre et dans l'espace d'état  $(Y_n, Y_{n+1})$ . Nous supposons qu'au système dynamique est associée une suite de récurrences. Par exemple, nous considérons, donc, la suite de récurrences de freinage logistique, défini par son terme général :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 0 < r \leq 4 \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases}$$

Si nous traçons le graphe de la fonction  $Y_{n+1} = f(Y_n, r)$  et la première bissectrice, alors la nature de la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dépend du paramètre de bifurcation  $r$  et ceci peut être illustré par le traçage de la graphique itérative de la suite.

**Définition 2.14**

Étant donné la valeur initiale  $Y_0 \in ]0, 1[$  et la fonction  $f$ , capable de générer les séquences suivantes :  $Y_1 = f(Y_0), Y_2 = f(Y_1), \dots, Y_{n+1} = f(Y_n)$

La méthode graphique itérative est une technique géométrique de visualisation de ce processus, à travers une alternance collection verticale et horizontale des segments connectant les points :

$$\begin{aligned} (Y_0, 0) &\rightarrow (Y_0, f(Y_0)) \\ (Y_0, Y_1) &\rightarrow (Y_1, Y_1) \\ (Y_1, Y_1) &\rightarrow (Y_1, f(Y_1)) \\ (Y_1, Y_2) &\rightarrow (Y_2, Y_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

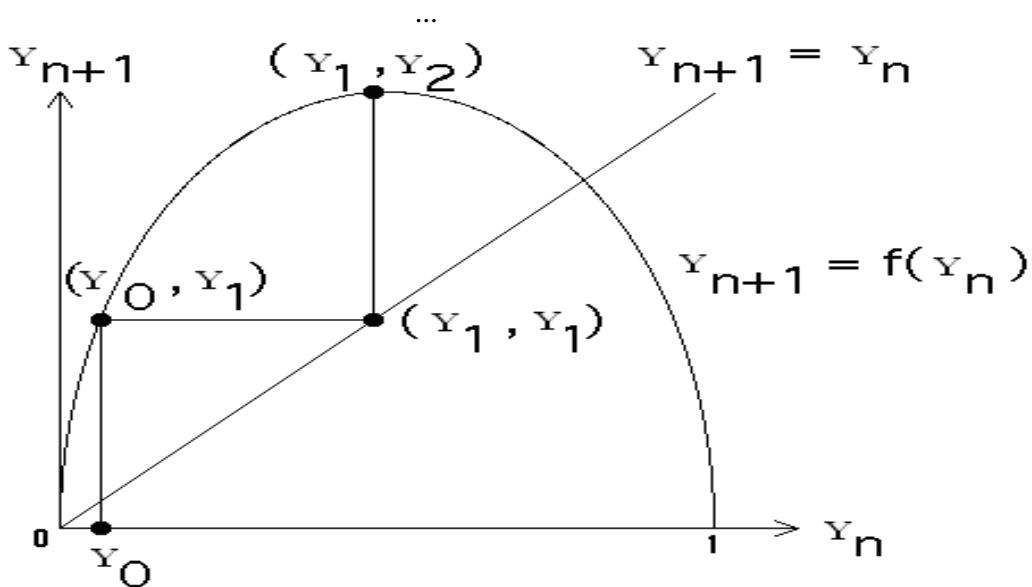


Figure 2.26: Graphique de la quatrième itération

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

La graphique itérative de la figure (2.26), est une technique qui permet de produire des orbites, à travers la génération des points  $(Y_0, Y_1), (Y_1, Y_2), (Y_2, Y_3), \dots$ . En débutant par  $Y = Y_0$ , nous translatons la ligne verticale du graphe  $y = f(Y)$ , de la fonction itérative, ayant comme intersection on  $(Y_0, f(Y_0)) = (Y_0, Y_1)$ . Puis, nous translatons la ligne horizontale, à partir de ce point jusqu'à la ligne diagonale  $y = Y$ , ayant comme intersection le point  $(Y_1, Y_1)$ . Nous répétons, verticalement sur la même graphique, horizontalement sur la même diagonale.

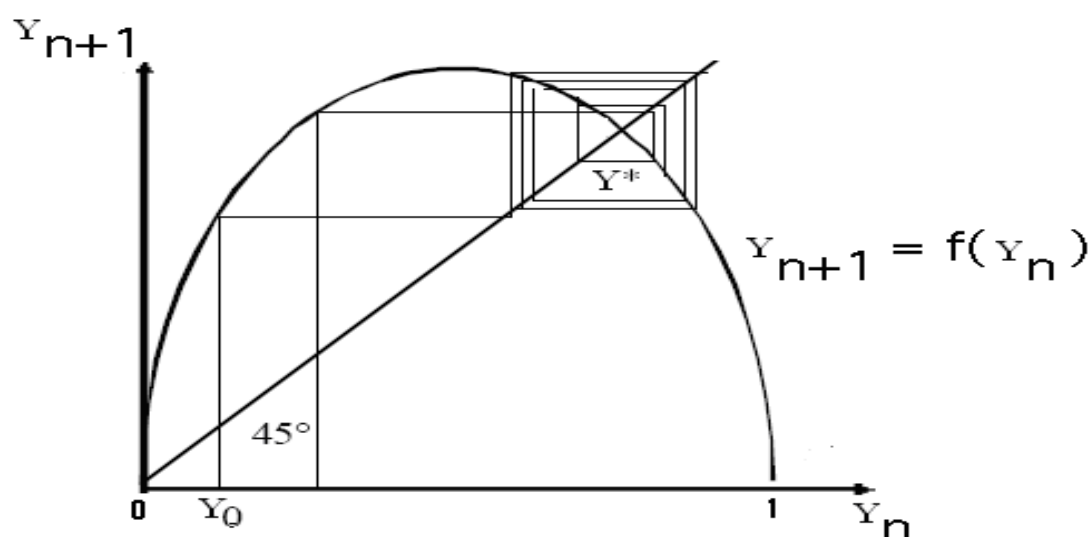


Figure 2.27 : Graphique itérative d'un équilibre

Cette représentation graphique en toile d'araignée de la figure (2.27), montre que le point fixe  $Y^*$  est généralement invariant par la dynamique :  $f(Y^*) = Y^*$  des séquences générées par la fonction itérative  $f(Y)$ . Pour le graphique itératif, le point fixe  $Y^*$  est obtenu par intersections de  $y = f(Y)$  et  $y = Y$ .

**Définition 2.15**

Étant donné un système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, r)$ , l'espace de phase de ce système est le domaine  $D$  où évolue  $Y_t$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

**Théorème 2.10 (Coppel, (1955)<sup>138</sup>).**

Soit le système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, r)$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^n$ ,  $r \in \mathfrak{R}$  et la suite de récurrence définie

$$\text{par : son terme général } (Y_n)_{n \in \mathfrak{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n), & 0 < r \leq 3 \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases}$$

alors, pour toute valeur initiale  $Y_0 \in ]0, 1[$ , la suite  $(Y_n)_{n \in \mathfrak{N}}$  est convergente.

Afin d'être en mesure d'évaluer d'une manière plus quantitative l'applicabilité de ce théorème de convergence pour  $r \in ]0, 3]$  et quelle que soit la valeur initiale  $Y_0 \in ]0, 1[$ . Nous prenons par exemple  $r = 1.8 \in ]0, 3]$  et choisissons comme valeur de départ  $Y_0 = 0.8 \in ]0, 1[$ , nous pourrions générer récursivement les nombres, sur le tableau (2.3), par réutilisation successive de la formule précédente :

**Tableau 2.3: Génération des valeurs numériques pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 1.8$**

$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante	$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante
$Y_1$	2.8800000000000000E-0001	$Y_{13}$	4.444444441038443E-0001
$Y_2$	3.6910080000000000E-0001	$Y_{14}$	4.444444443763244E-0001
$Y_3$	4.19157718990848E-0001	$Y_{15}$	4.44444444308204E-0001
$Y_4$	4.38236146082227E-0001	$Y_{16}$	4.44444444417196E-0001
$Y_5$	4.43133407428603E-0001	$Y_{17}$	4.44444444438995E-0001
$Y_6$	4.44179143168774E-0001	$Y_{18}$	4.44444444443355E-0001
$Y_7$	4.44391257496730E-0001	$Y_{19}$	4.44444444444226E-0001
$Y_8$	4.44433801962969E-0001	$Y_{20}$	4.44444444444401E-0001
$Y_9$	4.44442315744277E-0001	$Y_{21}$	4.44444444444436E-0001
$Y_{10}$	4.44444018696255E-0001	$Y_{22}$	4.44444444444443E-0001
$Y_{11}$	4.44444359294480E-0001	$Y_{23}$	<b>4.44444444444444E-0001</b>
$Y_{12}$	4.44444427414439E-0001	$Y_{24}$	4.44444444444444E-0001

L'examen graphique ainsi que les principales statistiques descriptives pour ces 24 points générés artificiellement par le processus  $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  est illustré à l'aide de la figure (2.28).

<sup>138</sup> Voir Coppel, W.A., (1955), « *Solutions of equations by iteration* », Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 51, pp. 41-43.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

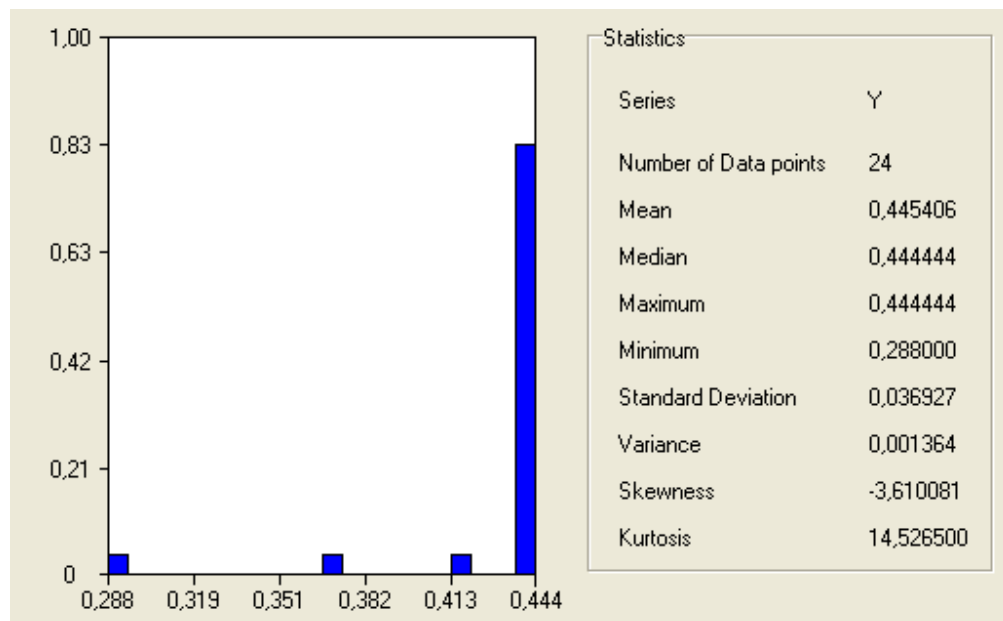


Figure 2.28: Les statistiques descriptives pour les 24 points générés par  $Y_{n+1}=1.8 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$

Nous remarquons que, le diagramme de phase, donné par la figure (2.29), pour les valeurs  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 1.8$ , montre que la suite de nombres  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 24\}}$  converge vers une valeur limite égale à  $Y^* = 4.444444444444444E - 0001$  à partir de la 23<sup>ème</sup> observation.

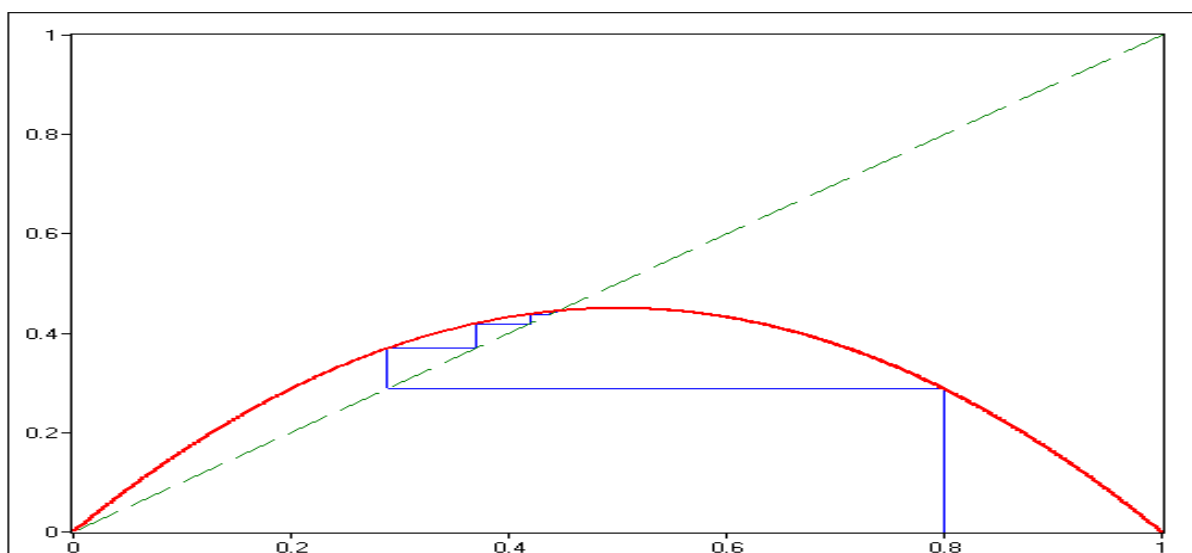


Figure 2.29 : Diagramme de phase pour  $Y_{n+1}=1.8 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Parallèlement au traçage du diagramme de phase, pour mieux comprendre ce mécanisme de convergence, nous pouvons représenter la trajectoire de la suite de nombre du tableau (2.3). La figure (2.30), visualise la série temporelle de l'ensemble des points fixes.

**Définition 2.16**

Une série temporelle de la séquence  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  consiste à représenter les points  $(0, Y_0), (1, Y_1), (2, Y_2), (3, Y_3), \dots$

Comme le montre la trajectoire de la figure (2.30), la série temporelle de l'ensemble des points fixes, forme une ligne de points horizontale.

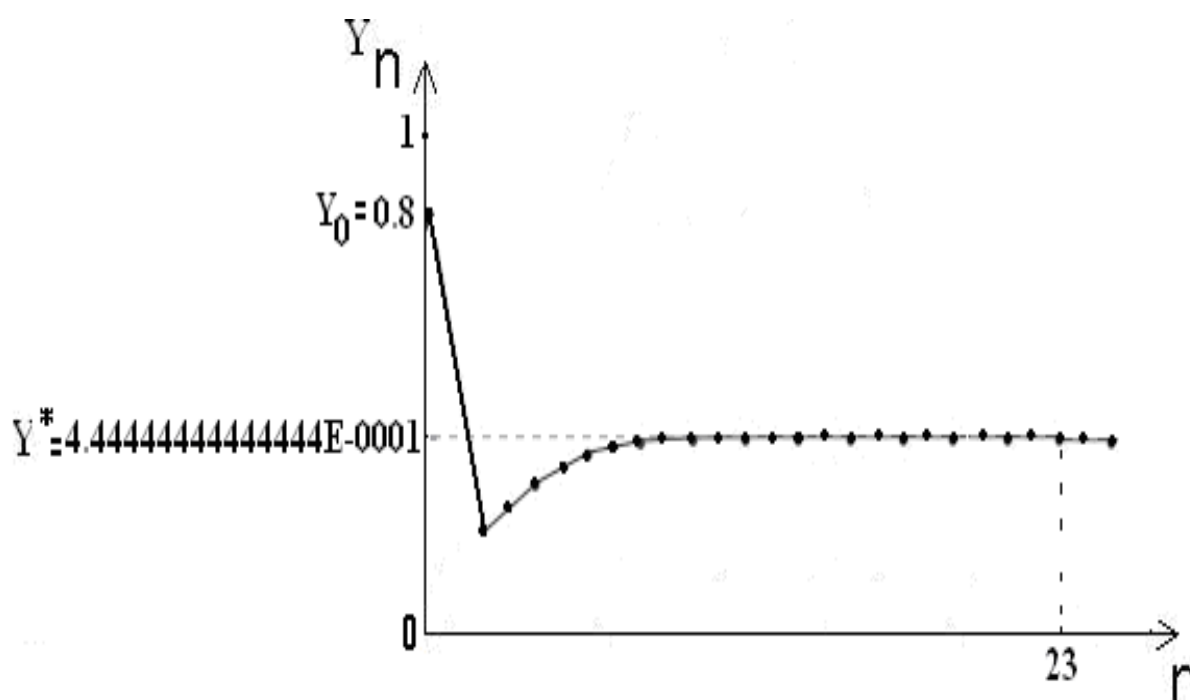


Figure 2.30: Série temporelle pour  $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$

Pourtant la représentation graphique de la série des points fixes, n'est pas un outil d'étude de la stabilité. Elle fournit certes, une première idée sur la présence d'un attracteur point fixe de coordonnées  $(24; 4.444444444444444E-0001)$ . En ce sens, le retour de nouveau à la théorie de bifurcation, permet d'étudier les propriétés de stabilité des points fixes, quand le paramètre de contrôle  $r$ , change de valeur.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

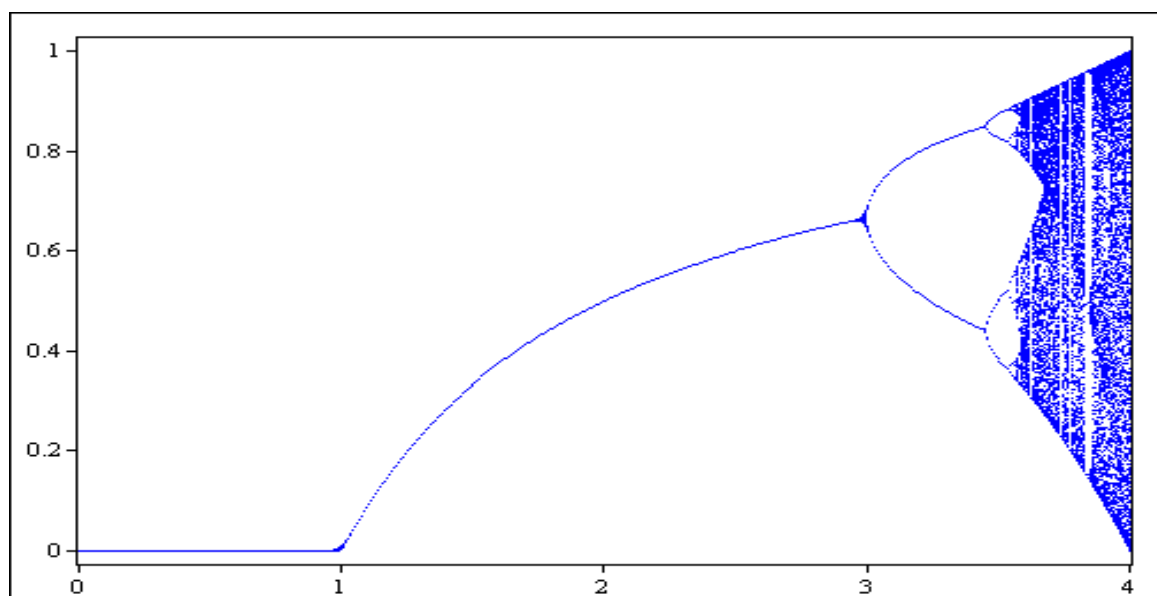


Figure 2.31: Diagramme des bifurcations pour  $Y_{n+1} = 1.8 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$

La figure (2.31), précise la zone de convergence pour  $r \in ]0, 3[$  et quelque soit  $Y_0 \in ]0, 1[$ . Mais, la question qui se pose maintenant : Que se passe-t-il quand  $r$  dépasse la valeur de 3?

Après avoir étudié le phénomène de convergence, nous allons aborder, dans la suite de cette sous-section, un problème extrêmement curieux, à savoir le doublement de période et la formation de cycle endogène par bifurcation, tout en satisfaisant le principe de changement dynamique, par « *recomposition des invariances* », où la mutation cyclique s'opère par la reconstitution de structures invariantes et endogènes.

Dés que le paramètre de contrôle  $r$ , prend une valeur qui dépasse 3, les points fixes sont tous répulsifs. Par conséquent, la suite récurrente  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décrivant la dynamique discrète du système, ne peut plus converger, vers l'un de ces points fixes, que lorsqu'elle sera stationnaire. Cependant, la suite est généralement divergente et nous distinguons divers cas possibles, illustrant les manières de divergences de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Afin d'étudier, en détail, les différents cas possibles qui peuvent apparaître, quand le paramètre de contrôle  $r$ , augmente et devient strictement supérieur à la valeur de 3, nous allons commencer, tout d'abord, par traiter le premier phénomène, qui aura tendance à apparaître et qui sera en mesure d'accorder un rôle très significatif à notre étude, à savoir l'existence de points périodiques attractifs (ou de cycles attractifs). Ce phénomène débute par l'apparition des 2-cycles (ou cycles limites), couvrant la période (2), sur la figure (2.23). Mais avant tout, il est nécessaire de définir la notion de cycle de période  $n$  noté  $n$ -cycle.

**Définition 2.17**

Le  $n$ -cycle généré par la fonction itérative  $f(Y)$ , est une collection de  $n$  membres,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , déterminés séquentiellement par :

$$Y_2 = f(Y_1), Y_3 = f(Y_2), \dots, Y_n = f(Y_{n-1}), Y_1 = f(Y_n)$$

c'est-à-dire,

$$(Y_1, Y_1) \rightarrow (Y_2, Y_2)$$

$$(Y_2, Y_2) \rightarrow (Y_3, Y_3)$$

...

$$(Y_n, Y_n) \rightarrow (Y_1, Y_1)$$

Si pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , nous désignons par  $Df^n(Y_k) = f'(Y_0) f'(Y_1) \dots f'(Y_{n-1})$  la dérivée de  $f$  au point  $Y_k$ . Alors, le  $n$ -cycle est attractif si pour tout  $k$ , nous avons  $|Df^n(Y_k)| < 1$ . Le  $n$ -cycle est super-attractif si pour tout  $k$ , nous avons  $|Df^n(Y_k)| = 0$ .

Sachons nous les points fixes d'une fonction  $f$ , peuvent être déterminés par une simple représentation géométrique de l'intersection de la courbe représentative de  $f$  et la première bissectrice du repère  $y = Y$ . Notons qu'un cycle résulte de l'intersection de  $y = Y$ , avec  $y = f^n(Y) = \underbrace{f(f(\dots f(Y)\dots))}_{n \text{ fois}}$ . Géométriquement, un cycle de  $f$ , peut être détecté par observation que tous les points, de n'importe quelle  $n$ -cycle de  $f$  sont des points fixes de  $f^n$ . Par exemple, supposons,  $\{Y_1, Y_2\}$  est un 2-cycle de  $f$ . C'est-à-dire nous avons  $f(Y_1) = Y_2$  et  $f(Y_2) = Y_1$ . Alors,  $f^2(Y_1) = f(f(Y_1)) = f(Y_2) = Y_1$ . De ce fait, la raison pour laquelle un cycle est visuellement clair, est que l'itération respecte un sens bien déterminé : de  $Y_1$  vers  $Y_2$ , de  $Y_2$  vers  $Y_3, \dots$ , de  $Y_n$  vers



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

$Y_1$ . Si  $f$  est de type "Tent map", alors la figure (2.32) permet de visualiser un 2-cycle, qui apparait lorsqu'un point fixe de  $f(Y)$ , est devenu instable, ainsi que un 3-cycle qui apparait d'une façon concrète. Pour  $Y_0 = 1/2$ , nous obtenons alors, sur la figure (2.33)<sup>139</sup>, la superposition de 4-cycle, dans le cas où  $f$  est de type logistique.

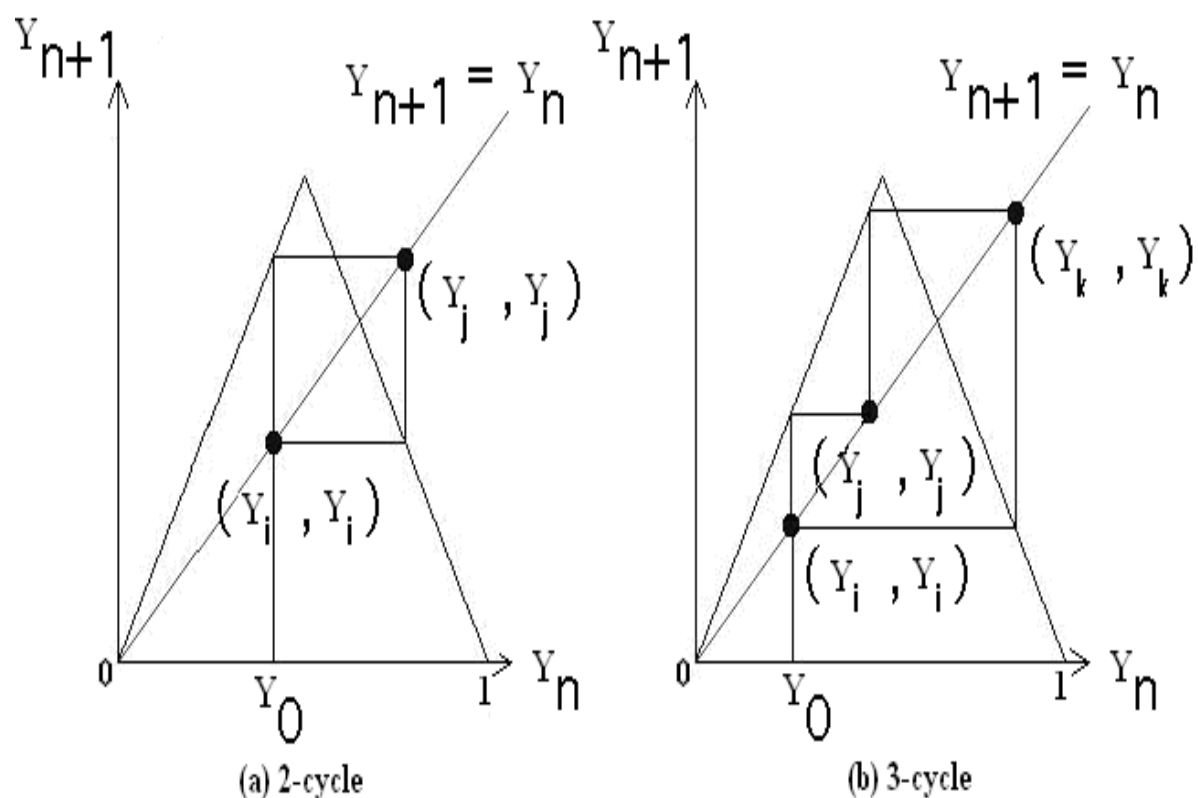


Figure 2.32: Graphique itérative de 2-cycle et 3-cycle

<sup>139</sup> Pour plus de détails, voir les deux articles de P. Fatou (1920), « *Sur les équations fonctionnelles* », Bull. Soc. Math. de France 48, pp. 208-314, et de G. Julia (1918), « *Mémoire sur l'itération des fonctions* », Journal. Math. Pures Appl. 4, pp. 47-245. Ces deux auteurs ont montré que lorsqu'il y a un cycle stable, l'itération de  $1/2$  converge vers le cycle. Par conséquent, le choix de la valeur critique  $Y_0 = 1/2$  est justifié.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Or, comme la stabilité du cycle est analogue à celle d'un point fixe. Lorsque la valeur d'un paramètre de contrôle du système varie, la dynamique peut être assez compliquée, à travers le phénomène de doublement des périodes<sup>140</sup> par bifurcations. Pour une valeur donnée du paramètre de contrôle, où le  $n$ -cycle est instable, un  $2^n$ -cycle stable apparaît et nous pénétrons dans une zone de doublement de périodes : les points communs du cycle donnent lieu à deux points du  $2^n$ -cycle. Lorsque la valeur du paramètre continue à augmenter, le  $2^n$ -cycle sera instable, et les points communs du cycle donnent lieu à deux points du  $4n$ -cycle stable, ainsi de suite. À ce niveau d'analyse, nous pourrions constater que l'idée la plus intéressante, de l'examen graphique, est celle qui consiste à justifier que la genèse des cycliques admet un fondement endogène, qui garantit que la dynamique des récurrences non linéaires, fournit une explication endogène de la formation des fluctuations économiques.

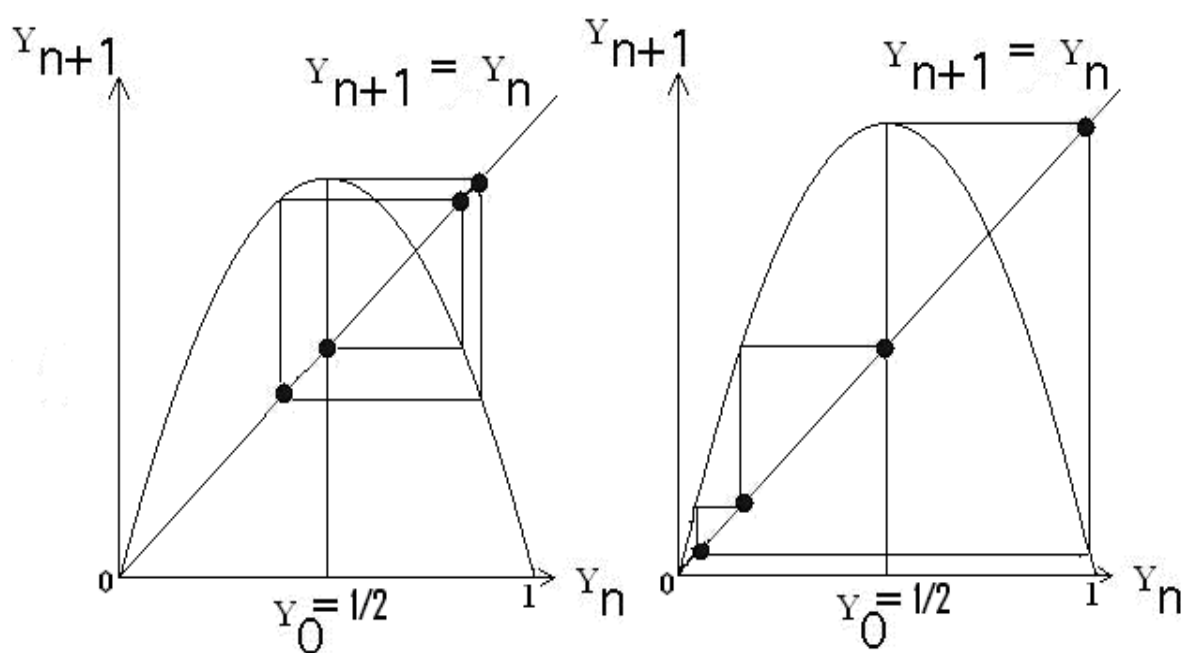


Figure 2.33: Graphique itérative de 4-cycle

<sup>140</sup> Pour 2-cycle, le point fixe original (le 1-cycle), sera instable pour quelques valeurs du paramètre de contrôle  $r$ , pour lesquelles il y a apparence de 2-cycle. Ceci est à l'origine de la nomination du phénomène de doublement des périodes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

**Théorème 2.11 (Coppel, (1955)<sup>141</sup>).**

Soit  $I = [0; 1]$  un intervalle compact et soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue et le système dynamique  $Y_t = f(Y_{t-1}, r)$ , décrit par la suite de récurrence définie par son terme général :

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 3 < r \leq 4 \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases},$$

Nous supposons que  $f$  n'admet pas de 2-cycle. Alors pour toute valeur initiale  $Y_0 \in ]0, 1[$ , la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**Corollaire 2.1**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction de classe  $C^1$ . Nous supposons que les points fixes de  $f$  sont de nombre fini et répulsifs et que  $f^{-1}(\{Y_n\})$  sont finies. Alors,  $f$  admet un 2-cycle.

Nous pouvons constater aisément, que la réciproque de ce résultat est évidemment vraie, car si nous supposons que  $f$  admet 2-cycle :  $f(c_1) = c_2$  et  $f(c_2) = c_1$  avec  $c_1 \neq c_2$  pour tout  $c_1, c_2 \in I$ . Alors la suite récurrente  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour  $Y_0 = c_1$  est divergente. Vu le théorème de Coppel (1955), et sa réciproque, les points fixes de  $f$ , ainsi que de ses itérés successifs vont jouer un rôle essentiel, dans la caractérisation du cycle et la précision de son ordre. Par exemple, la caractérisation du cycle d'ordre deux doit satisfaire les hypothèses du corollaire précédent.

Notons que l'ensemble des points fixes peut être stable ou instable, selon que la suite récurrente, soit convergente et/ou divergente, au voisinage du point fixe. Pour traiter le cas d'instabilité, nous prenons maintenant,  $r = 3.1 \in ]3; 3.4496]$  et nous générons sur le tableau (2.4), une suite de nombres à partir de  $Y_0 = 0.8 \in ]0; 1[$ , pour voir ce que cela signifie:

---

<sup>141</sup> Voir Coppel, W.A., (1955), « Solutions of equations by iteration », Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 51, pp. 41-43.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

**Tableau 2.4: Génération des valeurs numériques pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.1$**

$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante	$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante
$Y_1$	4.960000000000000E-0001	$Y_{31}$	5.58006292476819E-0001
$Y_2$	7.749504000000000E-0001	$Y_{32}$	7.64569337102590E-0001
$Y_3$	5.40647060373504E-0001	$Y_{33}$	5.58009504181797E-0001
$Y_4$	7.69878231097277E-0001	$Y_{34}$	7.64568182016204E-0001
$Y_5$	5.49213795177394E-0001	$Y_{35}$	5.58011398900386E-0001
$Y_6$	7.67491807329136E-0001	$Y_{36}$	7.64567500552623E-0001
$Y_7$	5.53189212336556E-0001	$Y_{37}$	5.58012516719147E-0001
$Y_8$	7.66229813842152E-0001	$Y_{38}$	7.64567098502123E-0001
$Y_9$	5.55277227286877E-0001	$Y_{39}$	5.58013176209521E-0001
$Y_{10}$	7.65527727244772E-0001	$Y_{40}$	7.64566861296858E-0001
$Y_{11}$	5.56434580799100E-0001	$Y_{41}$	5.58013565300941E-0001
$Y_{12}$	7.65126928079093E-0001	$Y_{42}$	7.64566721347328E-0001
$Y_{13}$	5.57093907222765E-0001	$Y_{43}$	5.58013794862129E-0001
$Y_{14}$	7.64894885849919E-0001	$Y_{44}$	7.64566638777654E-0001
$Y_{15}$	5.57475168296731E-0001	$Y_{45}$	5.58013930302272E-0001
$Y_{16}$	7.64759475590713E-0001	$Y_{46}$	7.64566590061738E-0001
$Y_{17}$	5.57697502263284E-0001	$Y_{47}$	5.58014010211624E-0001
$Y_{18}$	7.64680094520993E-0001	$Y_{48}$	7.64566561319413E-0001
$Y_{19}$	5.57827787449511E-0001	$Y_{49}$	5.58014057358025E-0001
$Y_{20}$	7.64633435695952E-0001	$Y_{50}$	7.64566544361465E-0001
$Y_{21}$	5.57904348606445E-0001	$Y_{51}$	5.58014085174362E-0001
$Y_{22}$	7.64605967878636E-0001	$Y_{52}$	<b>7.64566534356284E-0001</b>
$Y_{23}$	5.57949413465331E-0001	$Y_{53}$	<b>5.58014101585986E-0001</b>
$Y_{24}$	7.64589782984975E-0001	$Y_{54}$	7.64566528453230E-0001
$Y_{25}$	5.57975964893889E-0001	$Y_{55}$	5.58014111268840E-0001
$Y_{26}$	7.64580241233330E-0001	$Y_{56}$	7.64566524970429E-0001
$Y_{27}$	5.57991617441630E-0001	$Y_{57}$	5.58014116981722E-0001
$Y_{28}$	7.64574614150161E-0001	$Y_{58}$	7.64566522915576E-0001
$Y_{29}$	5.58000847996609E-0001	$Y_{59}$	5.58014120352321E-0001
$Y_{30}$	7.64571295058190E-0001	$Y_{60}$	7.64566521703214E-0001

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

L'examen graphique ainsi que les principales statistiques descriptives, pour ces soixante points générés artificiellement, par le processus  $Y_{n+1} = 3.1 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$ , est illustré à l'aide de la figure (2.34). Celle-ci met en évidence la présence d'un cycle limite d'ordre deux à cause de l'existence d'une distribution bimodale.

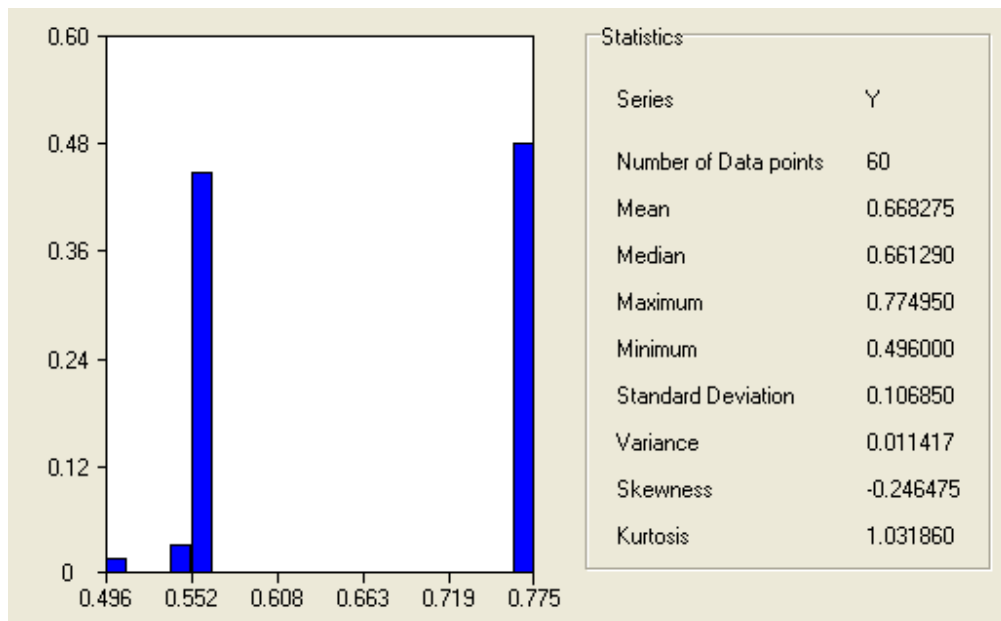


Figure 2.34: Les statistiques descriptives pour les 60 points générés par  $Y_{n+1} = 3.1 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$

Nous remarquons que, le diagramme de phase donné par la figure (2.35), pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.1$ , expose que la suite de nombres  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 60\}}$  converge cette fois, vers deux valeurs limites égales à  $Y_1^* = 0,7645665\dots$  et  $Y_2^* = 0,5580141\dots$  à partir de la 52<sup>ème</sup> observation.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

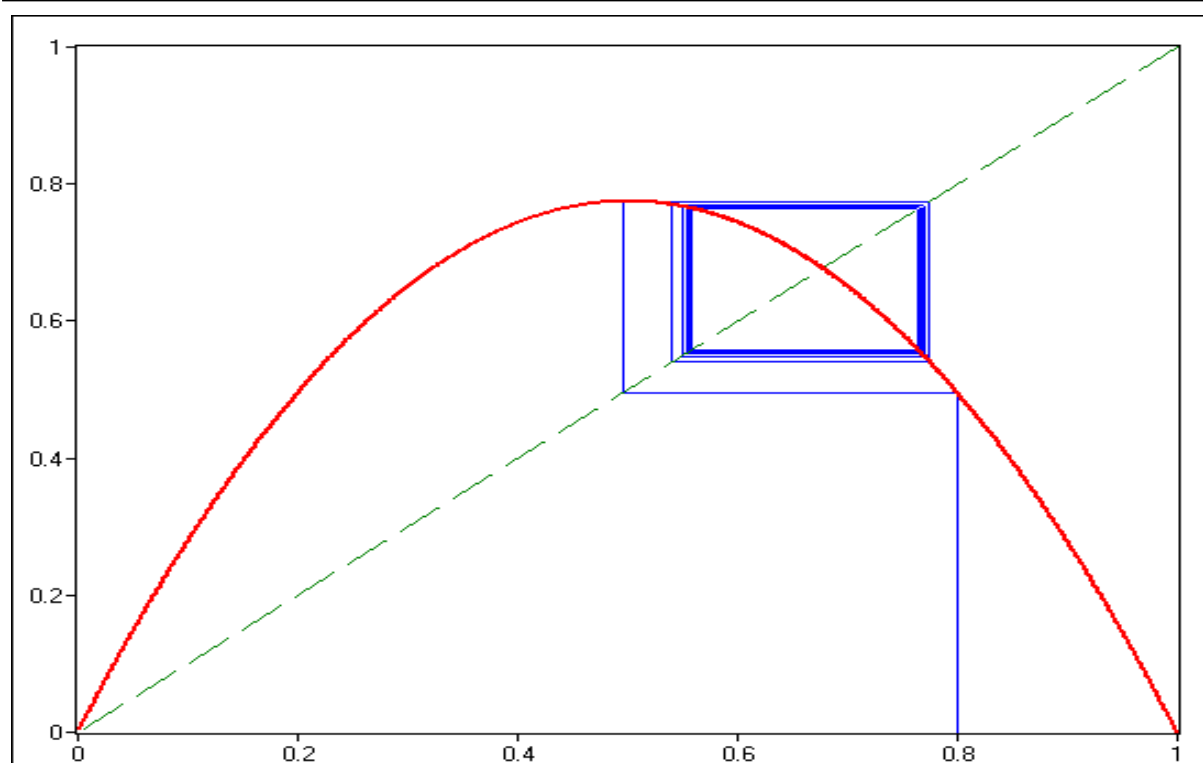


Figure 2.35 : Diagramme de phase pour pour  $Y_{n+1}=3.1 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$

La figure (2.36), montre que dans ce cas, il y a deux points limites. Et en plus, les itérations passent indéfiniment d'un point limite à l'autre. La suite ne diverge pas et ne converge pas, mais elle est bornée. Ainsi, elle atteint un point d'un cycle et elle prend un nombre infini de fois les valeurs des points de ce cycle. Nous parlerons, donc, de la présence d'un cycle limite d'ordre deux. Dans ce cas, le cycle limite d'ordre 2 défini par  $\{c_1; c_2\}$ , est caractérisé par le passage indéfiniment d'un premier point limite  $Y_1^* = 0,7645665\dots$  à un deuxième point limite  $Y_2^* = 0,5580141\dots$ . Comme la montre la trajectoire de la figure (2.36), la série temporelle de l'ensemble des points fixes, forme une courbe qui pivote dans une bande horizontale, bornée par les deux points d'équilibre.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

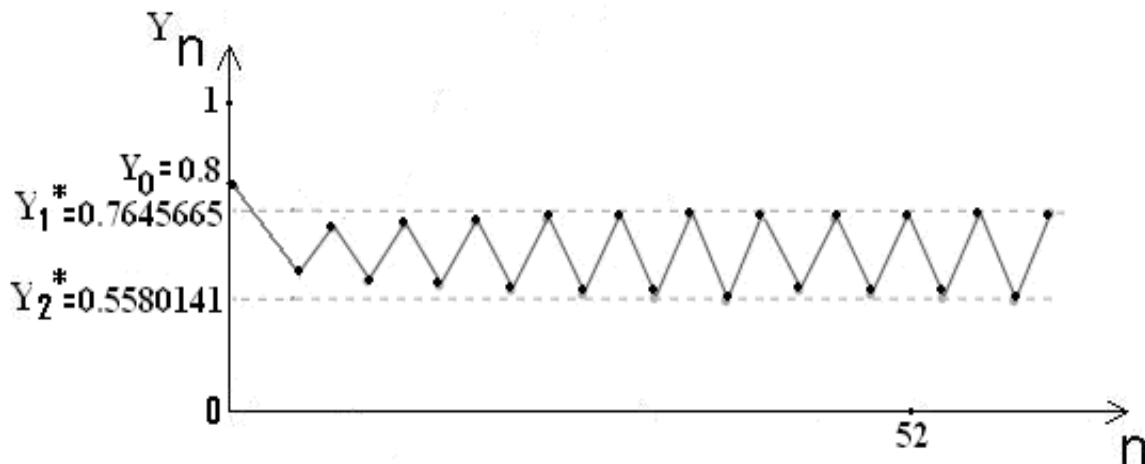


Figure 2.36: Série temporelle pour  $Y_{n+1}=3.1 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$

**Corollaire 2.2**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction de classe  $C^1$ . Nous supposons que les points fixes de  $f$  sont de nombre fini,  $r \in ]3; 3.4496[$  et  $Y_0 \in ]0; 1[$ , est le premier terme de la suite récurrente  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors, les suites  $(Y_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers les points fixes  $f^2$ .

Si nous traçons ce cycle limite en fonction du paramètre réel  $r$ , nous obtenons un phénomène de bifurcation, vers un cycle limite d'ordre deux, comme le montre la figure (2.37), suivante:

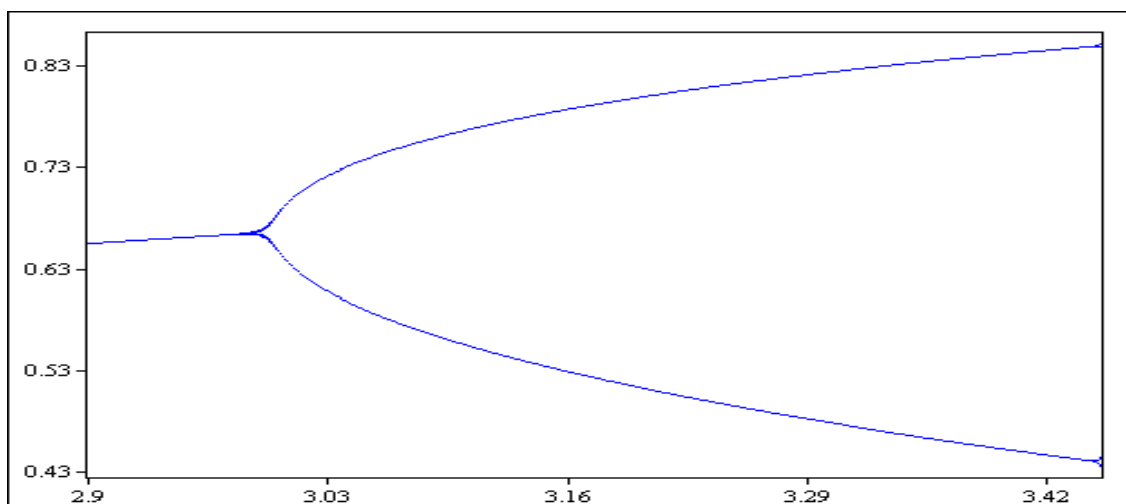


Figure 2.37: Cycle limite d'ordre 2 pour  $Y_{n+1}=3.1 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Dés que le paramètre de contrôle atteint la valeur de  $r = 3.4496$  par valeur supérieure, nous entamons la zone de doublement de période, il se produit une autre bifurcation vers un cycle d'ordre 4 unique et attractive, tant que la valeur de  $r < 3.544090$  et à partir de la valeur de  $r = 3.49856169933$ , le 4-cycle sera super-attractive. Puis, dés que la valeur de  $r > 3.544090$  il se produit une autre bifurcation, vers un cycle d'ordre 8 et ainsi de suite, jusqu'à la valeur de  $r = 3.5699$ . Mais à partir de la valeur de  $3.57 \leq r \leq 4$ , nous pouvons constater que le chaos peut apparaître et disparaître parfois. Par exemple, pour caractériser un cycle d'ordre 4, prenons cette fois  $r = 3.5 \in [3.4496; 3.5699[$  et nous générons sur le tableau (2.5), une suite de nombres, à partir de  $Y_0 = 0.8 \in ]0; 1]$ , pour voir ce qui se donne:

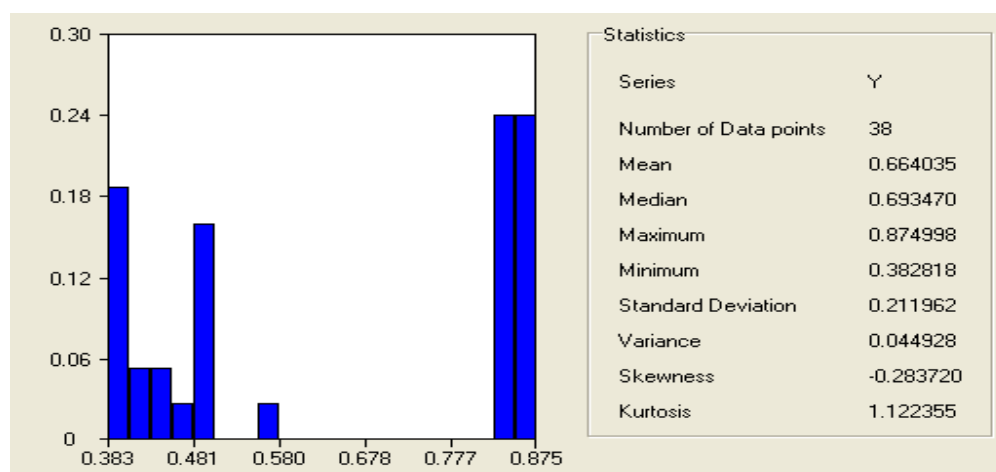
**Tableau 2.5: Génération des valeurs numériques pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.5$**

$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante	$Y_{n+1}$	La valeur numérique correspondante
$Y_1$	5.600000000000000E-0001	$Y_{20}$	8.28424598707370E-0001
$Y_2$	8.624000000000000E-0001	$Y_{21}$	4.97480490373661E-0001
$Y_3$	4.153318400000000E-0001	$Y_{22}$	8.74977782249350E-0001
$Y_4$	8.49909559387750E-0001	$Y_{23}$	3.82870819867757E-0001
$Y_5$	4.46471550871746E-0001	$Y_{24}$	8.26982643065420E-0001
$Y_6$	8.64971467968734E-0001	$Y_{25}$	5.00788228968832E-0001
$Y_7$	4.08785396490616E-0001	$Y_{26}$	8.74997825432824E-0001
$Y_8$	8.45879636373191E-0001	$Y_{27}$	3.82818208222285E-0001
$Y_9$	4.56285469998223E-0001	$Y_{28}$	8.26939496865175E-0001
$Y_{10}$	8.68311639533533E-0001	$Y_{29}$	5.00886978863412E-0001
$Y_{11}$	4.00212876644423E-0001	$Y_{30}$	8.74997246439736E-0001
$Y_{12}$	8.40148855043466E-0001	$Y_{31}$	<b>3.82819728069157E-0001</b>
$Y_{13}$	4.70045647444167E-0001	$Y_{32}$	<b>8.26940743545748E-0001</b>
$Y_{14}$	8.71859578670363E-0001	$Y_{33}$	<b>5.00884125734138E-0001</b>
$Y_{15}$	3.91021588128850E-0001	$Y_{34}$	<b>8.74997264125902E-0001</b>
$Y_{16}$	8.33432970111147E-0001	$Y_{35}$	3.82819681643310E-0001
$Y_{17}$	4.85878590550007E-0001	$Y_{36}$	8.26940705464387E-0001
$Y_{18}$	8.74302050283010E-0001	$Y_{37}$	5.00884212886572E-0001
$Y_{19}$	3.84642913038773E-0001	$Y_{38}$	8.74997263586499E-0001



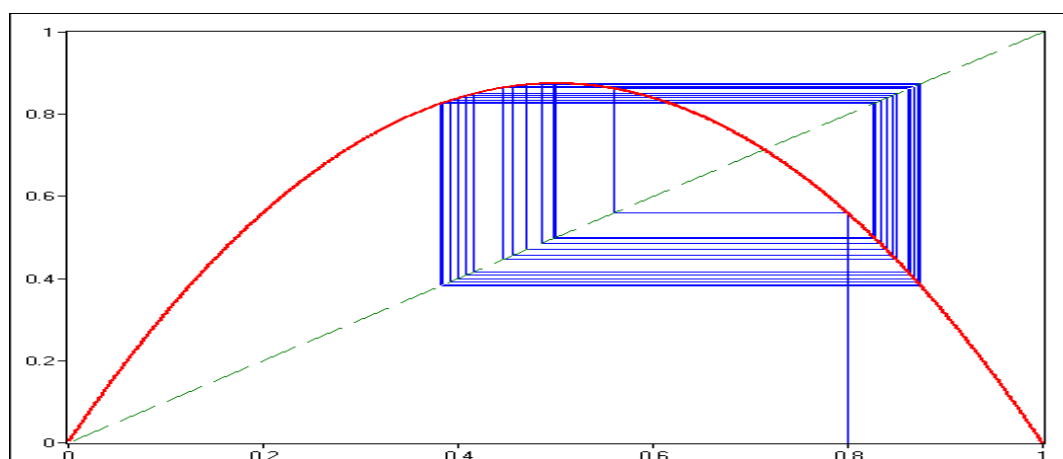
Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

L'examen graphique ainsi que les principales statistiques descriptives pour ces 38 points générés artificiellement, par le processus  $Y_{n+1}=3.5 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0=0.8$ , est illustré à l'aide de la figure (2.38).



**Figure 2.38: Les statistiques descriptives pour les 38 points générés par  $Y_{n+1}= 3.5 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0= 0.8$**

La simple lecture du diagramme de phase donné par la figure (2.39), pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.5$ , nous permettons de constater que la suite de nombres  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 38\}}$ , converge cette fois, vers quatre valeurs limites égales à :  $Y_1^* = 0,382819$ ;  $Y_2^* = 0,826940$ ;  $Y_3^* = 0,500884$  et  $Y_4^* = 0,874997$  à partir de la 31<sup>ème</sup> observation.



**Figure 2.39 : Diagramme de phase pour pour  $Y_{n+1}= 3.5 Y_n (1-Y_n)$  avec  $Y_0= 0.8$**

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Dans ce cas, nous obtenons un cycle d'ordre 4 défini par  $\{c_1; c_2; c_3; c_4\}$ , est caractérisé par le passage, indéfiniment, d'un premier point limite  $Y_1^* = 0,382819$ , à un deuxième point limite  $Y_2^* = 0,826940$ ; puis du  $Y_2^*$  vers un troisième point limite  $Y_3^* = 0,500884$ ; ensuite du  $Y_3^*$  vers un quatrième point limite vers  $Y_4^* = 0,874997$ ; et enfin de  $Y_4^*$  vers  $Y_1^*$ , et ainsi de suite. Si nous traçons ce 4-cycle en fonction du paramètre réel  $r$ , nous obtenons un phénomène de bifurcation, vers un cycle limite d'ordre 4, comme l'illustre la figure (2.40) suivante:

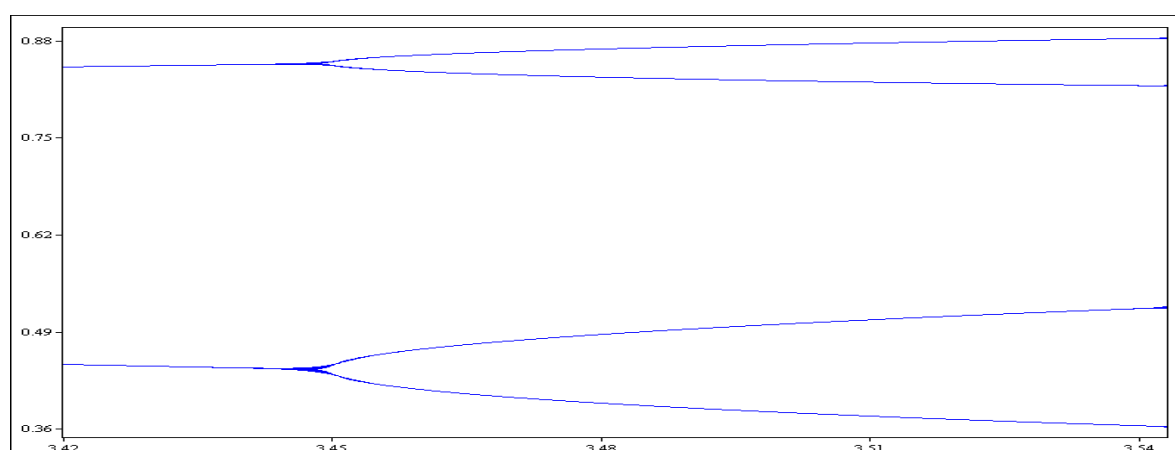


Figure 2.40: Cycle d'ordre 4 pour  $Y_{n+1} = 3.5 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$

Notons que géométriquement, ce processus décrivant la cascade de doublement de périodes par bifurcation, se poursuit, continuellement, pour mettre en présence, un phénomène de ramification de  $2^n$ -cycle. Analytiquement, nous pouvons identifier les points fixes<sup>142</sup> de  $f^2 = f \circ f$  et de même pour  $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$ . Mais, le calcul devient très vite compliqué, au delà de l'ordre quatre. Tous les cycles, dont l'ordre est une puissance de 2 sont obtenus avant la valeur  $r = 3,57$ . Les points de bifurcations deviennent rapidement très proches, les uns des autres et tendent vers une valeur  $r_\infty = 3,569945668\dots$ , nous obtenons, alors, une cascade de  $2^n$  branches, visualisées à l'aide de la figure (2.41). Ce processus de doublement de période, ayant comme source le

<sup>142</sup> Les points  $Y$  tels que  $f^2(Y) = Y$  sont les points fixes d'un 2-cycle de la suite. De même, les points  $Y$  tels que  $f^4(Y) = Y$  sont les points fixes d'un 4-cycle de la suite.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

processus de transition, confirme bien que c'est précisément ces lois de recombinaison des structures cycliques invariantes, autour d'un nouveau centre (équilibre dynamique) qui établissent, qu'il faut que, structurellement et apparemment, rien ne change pour que fonctionnellement et réellement tout change. En d'autres termes, la rupture absolue est impossible, pas de conservation d'états, mais plutôt, il ya un lissage continu entre des états. C'est donc ce processus qui fait que l'adaptation cyclique, devient toujours structurellement et radicalement révolutionnaire.

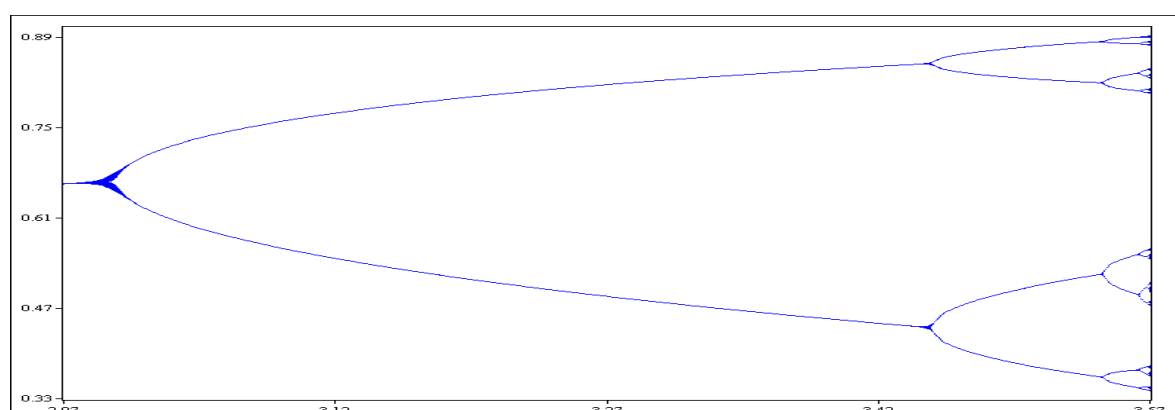


Figure 2.41: Cascade de  $2^n$ -cycle pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $3 \leq r < 3.57$

À titre d'exemple, le tableau (2.6) donne quelques  $2^n$ -cycle pour des encadrements approchés, du paramètre de contrôle  $r$ .

Tableau 2.6: Présence de $2^n$ -cycle par localisation du paramètre de contrôle $r$		
Domaine d'appartenance de $r$	$n$	nombre de branches <sup>*</sup>
$[3; 3,449499...[$	1	2
$[3,449499...; 3,544090...[$	2	4
$[3,44090...; 3,564407...[$	3	8
$[3,564407...; 3,568759...[$	4	16
$[3,568759...; 3,569692...[$	5	32
$[3,569692...; 3,569891...[$	6	64
$[3,569891...; 3,569934...[$	7	128

(\*) Indique un cycle l'ordre  $2^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Feigenbaum (1978), a montré que ce processus de bifurcation, par doublement de périodes se poursuit, continuellement, par superposition de  $2^n$ -cycle. Pour saisir ceci, par exemple, nous allons montrer, graphiquement, le lien entre la superposition de 2-cycle et de 4-cycle obtenus itérativement, à partir du diagramme de phase, avec le diagramme de bifurcation qui leur correspond. Sur le schéma (a) de la figure (2.42), nous avons localisé la distance  $b_1$  du 2-cycle de  $f^2 = f \circ f$  et sur le schéma (b) de la même figure, nous avons localisé les distances  $b_2$  et  $b_3$  associées au 4-cycle de  $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$ .

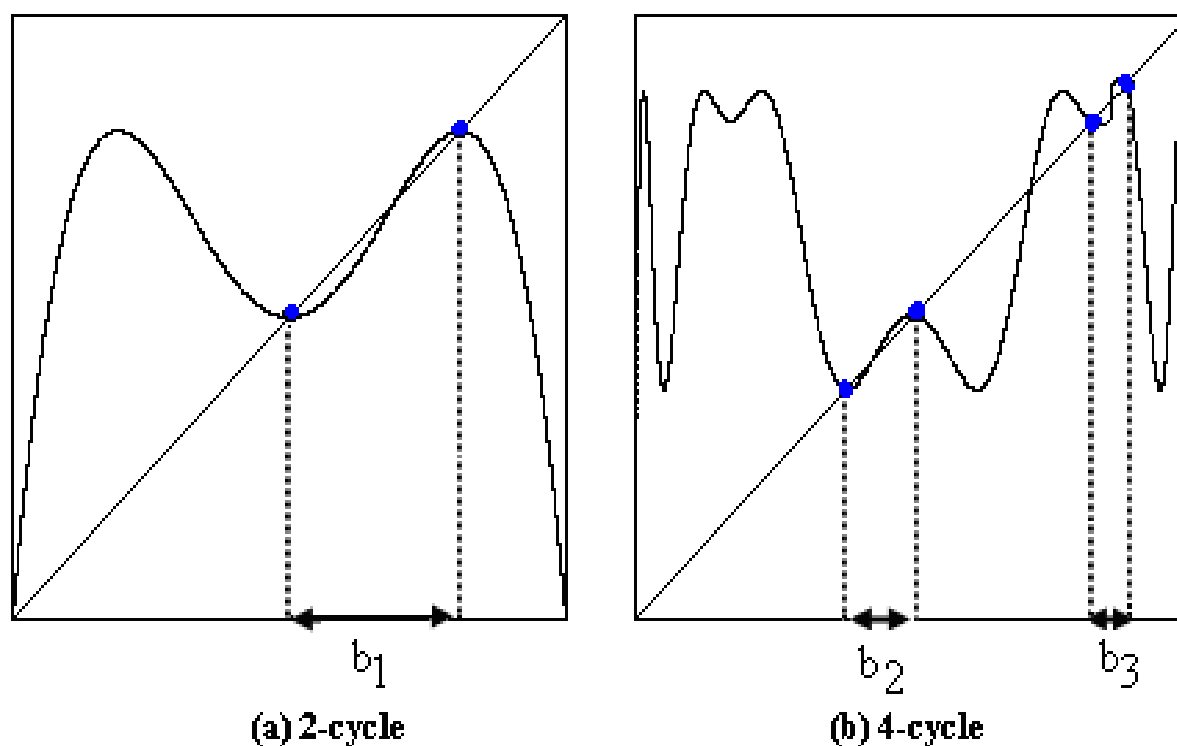


Figure 2.42: Les distances  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  pour 2-cycle et 4-cycle superstables pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $3 \leq r < 3.57$

Le placement relatif de  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  sur le diagramme de bifurcation est donné sur la figure (2.43), où la ligne horizontale est arbitrairement choisie, afin de rendre mieux visible la localisation de ces distances.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

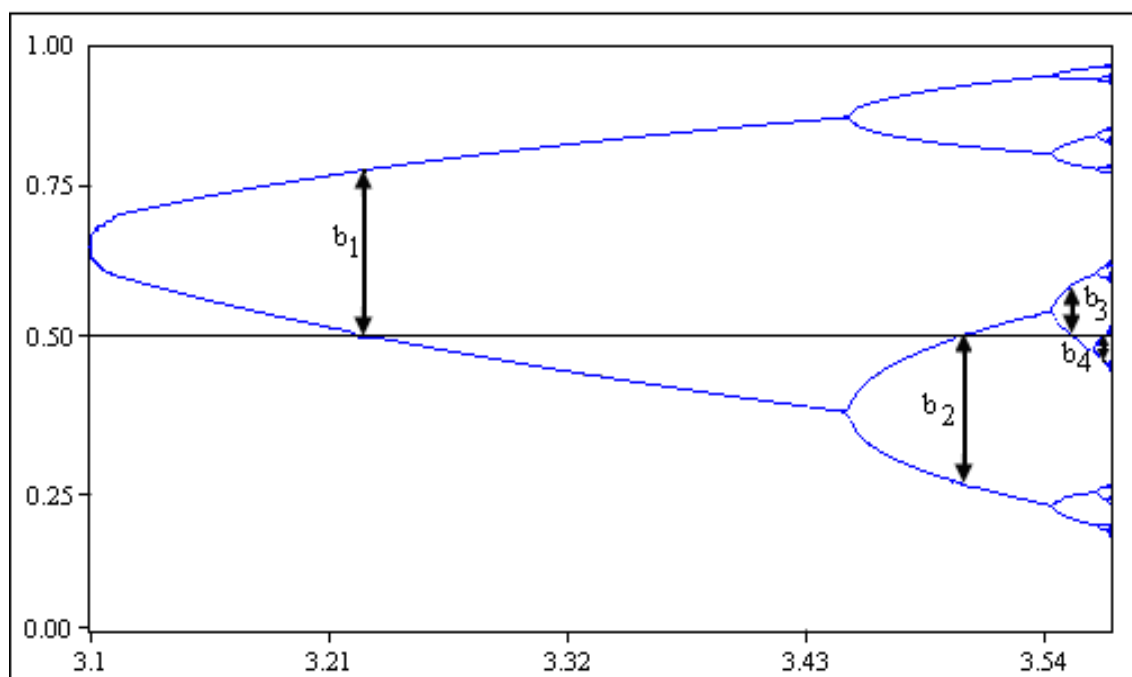


Figure 2.43: Cascade de  $2^n$ -cycle pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $3 \leq r < 3.57$

À l'aide d'un développement numérique, Feigenbaum (1978), a pu déduire que le rapport entre les distances successives  $b_i$  et  $b_{i+1}$  séparant deux points de bifurcations situés sur une même droite verticale est toujours constant et converge vers une valeur limite dite *la constante de Feigenbaum*  $b^* = 2,502907875095892822283902873218...$  Mais il se trouve que les bifurcations des  $2^n$ -cycles sont de plus en plus rapprochées, sur des intervalles de la forme  $[b_i ; b_{i+1}] \subset [3 ; 3,57[$ . Si, nous désignons par  $b_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  bifurcation alors le rapport:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{b_{i+1} - b_i}{b_i - b_{i-1}} \right| \right) = \delta$$

où  $\delta = 4,66920160910299067185320382...$  est la deuxième constante de Feigenbaum<sup>143</sup>.

<sup>143</sup> Cette valeur ne dépend pas de la formule de l'équation logistique. Elle est *universelle*, dans les itérations unidimensionnelles, et elle marque sa validité notamment pour toutes les transformations unimodales, ayant chacune un maximum quadratique.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Selon Feigenbaum (1978), quand  $r$  augmente de 3.5 jusqu'au 4, chaque cycle stable est assuré à travers une infinité de cascades de doublement de périodes. En ce sens, Medio et Gallo (1992), ont signalé qu'un point fixe stable produit un stable 2-cycle juste, lorsqu'il sera instable. Ce stable 2-cycle contribue de sa part à la production d'un 4-cycle stable juste, lorsqu'il sera instable. Ce stable 4-cycle contribue, aussi de sa part, à la production d'un 8-cycle stable, juste lorsqu'il sera instable. Ce processus de génération des  $2^n$ -cycle se continue de la même manière, infiniment selon le schéma général suivant :

$$2 - cycle \rightarrow 4 - cycle \rightarrow 8 - cycle \rightarrow 16 - cycle \rightarrow \dots$$

Dans ce contexte, des attracteurs ne sont plus des résultats de certains points fixes attractifs, mais plutôt, ils résultent des points périodiques attractifs. Nous parlons cette fois des attracteurs périodiques. Le mathématicien Šarkovskiĭ (1964) a introduit une relation d'ordre " $\succ$ " sur les entiers naturels, grâce à laquelle, il a pu démontrer que n'importe quelle application continue de l'intervalle, admettant une orbite de période un entier naturel  $m$ , possède des orbites de toutes les périodes  $n$ , telles que  $m < n$ , où la relation " $\succ$ " définit la règle d'ordonnement comme suit:

**Définition 2.18**

Nous appelons ordre<sup>144</sup> de Šarkovskiĭ sur  $\mathbb{N}^*$  l'ordre  $\succ$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} & 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \\ & \succ 2.3 \succ 2.5 \succ 2.7 \succ 2.9 \succ \dots \\ & \quad 2^2.3 \succ 2^2.5 \succ 2^2.7 \succ 2^2.9 \succ \dots \\ & \quad 2^3.3 \succ 2^3.5 \succ 2^3.7 \succ 2^3.9 \succ \dots \\ & 2^{n+1}.3 \succ 2^{n+1}.5 \succ 2^{n+1}.7 \succ 2^{n+1}.9 \succ \dots \\ & \quad \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1 \end{aligned}$$

Ce processus de doublement de période se poursuit jusqu'à atteindre la valeur du point de Feigenbaum, définie à partir d'un développement illimité du paramètre de contrôle  $r$  par,  $r_\infty = 3,569945668\dots$ , pour  $r \rightarrow r_\infty$ , la période  $2^n$  des orbites tend vers l'infini.

---

<sup>144</sup> Cet ordre est un ordre total.

### Corollaire 2.3

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction de classe  $C^1$ . Si  $f$  admet un 2-cycle, alors elle admet un point fixe. Si elle admet  $2^n$ -cycle avec  $n \geq 1$ , alors elle admet des  $2^k$ -cycles pour tout  $k$  avec  $0 \leq k \leq n-1$ .

Malgré que la technique de bifurcation a permette de visualiser, nettement, la formation endogène de  $2^n$ -cycle pour  $3 \leq r < 3,57$  et pour tout  $0 \leq Y_0 \leq 1$ . Cependant, ce diagramme ne permet pas de mettre en évidence la stabilité d'un cycle. En effet, l'étude de la stabilité d'un cycle endogène est semblable à celle d'un point fixe. Sa mise en évidence analytique s'appuie, généralement, sur l'utilisation de puissants codes (codes Matlab) de simulation. Or, ce genre d'analyse de la stabilité d'un cycle, se complique avec l'augmentation de l'entier naturel  $n$ . De plus, la mise en œuvre de ces programmes de simulations numériques, est une tâche coûteuse et nécessite des temps de calcul prohibitifs. Pour faire face à ce problème, nous allons indiquer, ici, les principaux résultats obtenus sur ce sujet.

#### 2.2.2.3. Stabilité des cycles (super-attractivité)

La notion de stabilité joue un rôle essentiel dans la caractérisation du comportement asymptotique, au voisinage du cycle des trajectoires de système dynamique. Généralement, nous sommes motivés par la recherche des cycles stables, lorsque nous désirons prédire l'état d'un système donné à longs termes.

#### Définition 2.19

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction trois fois continûment différentiable. Pour  $f' \neq 0$ , nous définissons la dérivée Schwarzienne de  $f$ ,  $\Delta f$  par :

$$\Delta f = \left( f^{(3)} / f^{(1)} \right) - 3/2 \left( f^{(2)} / f^{(1)} \right)^2$$

Singer (1978), conditionne la stabilité des cycles par la négativité de la dérivée Schwarzienne, selon le théorème suivant :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

**Théorème 2.12 (Singer, (1978)<sup>145</sup>)**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une application trois fois continûment différentiable, telle que  $\Delta f(Y) < 0$ , pour tout  $Y \in I$ . Alors nous avons :

1- L'application  $f$  admet au plus une orbite périodique faiblement stable, c'est-à-dire, une orbite  $O$  telle que  $|\Delta f(o)| \leq 1$  pour tout  $o \in O$ .

2- Le point critique de  $f$  est attiré vers  $O$ .

D'autres ont pu rendre le problème de la stabilité des cycles à la recherche mathématique des cycles super-attractifs. Leurs idées de base consistent à calculer les itérés du point critique  $1/2$  de  $f$ , pour déterminer des cycles super-attractifs s'ils existent.

**Définition 2.20**

Soient  $I = [0; 1]$  un intervalle compact,  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue et le système dynamique décrit par la suite de récurrence définie par son terme général :

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 3 < r \leq 4 \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases},$$

nous désignons pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , par  $P_k(r) = f^k(1/2, r) - 1/2$  un polynôme de degré  $2^k$  en  $r$ . Si  $r$  est une racine de ce polynôme, alors  $1/2$  fait partie d'un  $k$ -cycle super-attractif pour  $f(1/2, r)$ .

À partir de cette définition, pour déterminer les cycles super-attractifs (stables), il suffit de résoudre l'équation en  $r$  définie par :  $P_k(r) = 0$ . Le calcul fait pour notre exemple est rassemblé sur le tableau (2.7) suivant :

<b>Tableau 2.7 : Recherche analytique des cycles super-attractifs (stables)</b>	
<b>k</b>	<b>valeur de r donnant k-cycle super-attractifs<sup>(*)</sup></b>
2	3,236067978...
3	3,83187405528...
4	{3,49856169933...; 3,960270272187...}
5	{3,73874882305...; 3,90577240955...; 3,99029126214}

<sup>(\*)</sup> Indique que ces valeurs du paramètre de contrôle  $r$  donnant des  $k$ -cycles attractifs ne passent pas exactement par  $1/2$  à cause de la présence des erreurs d'arrondi générées par l'ordinateur en effectuant des calculs en précision finie.

<sup>145</sup> Voir Singer, D., (1978), « Stable orbits and bifurcations of map of the interval », SIAM Journal of applied Mathematics 35, pp. 260-267.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Pour apprécier le comportement asymptotique du cycle évolutionnaire, avons recours aux techniques de simulations numériques, afin de visualiser pour une marge d'erreurs d'ordre de  $\varepsilon = 10^{-3}$ , le bassin du paramètre de contrôle  $r$  pour les cycles périodiques, tout au long de l'intervalle  $[3; 4]$  et pour  $Y_0 = 0.8 \in [0; 1]$ . En particulier, la maîtrise de l'instabilité cyclique présente un cadre général, permettant d'appréhender le phénomène de transition, vers des irrégularités chaotiques dans un système dynamique non-linéaire en temps discret.

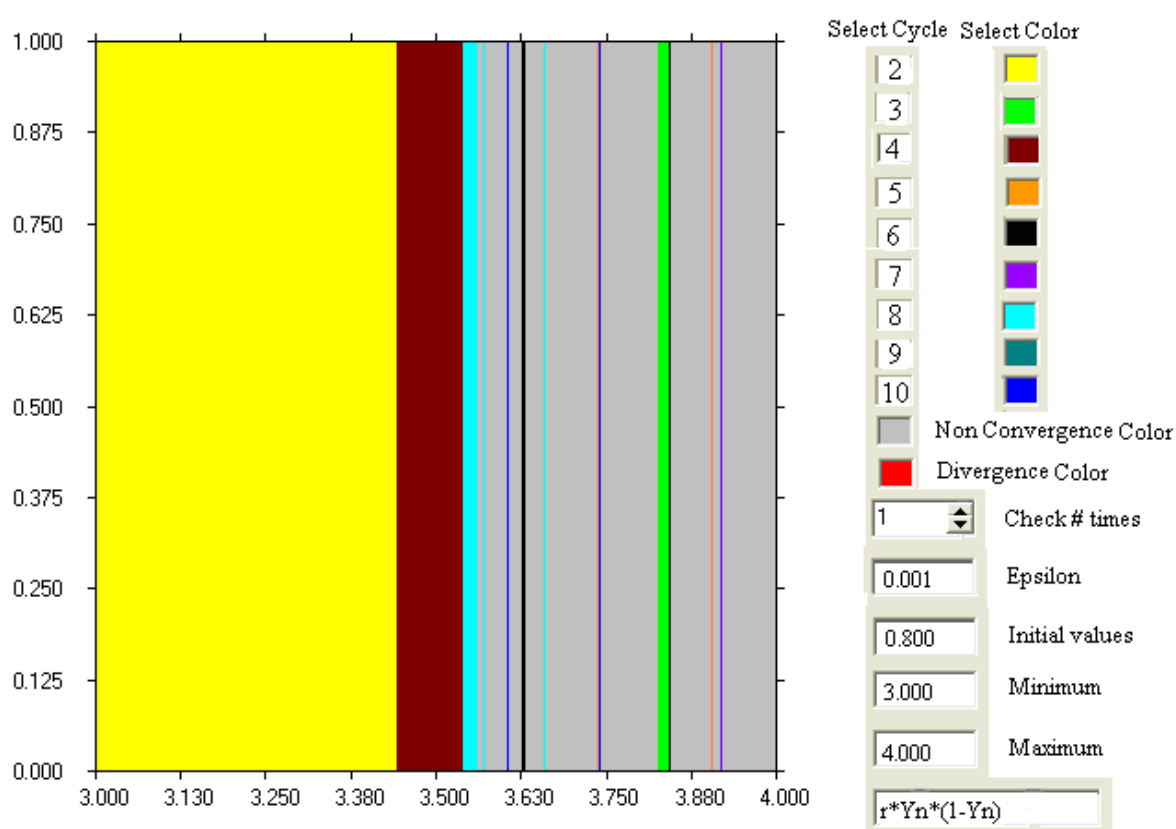


Figure 2.44: Bassin de paramètres pour les cycles périodiques pour  $Y_0 = 0.8$  et  $3 \leq r \leq 4$

La figure (2.44), montre deux constats importants. Tout d'abord, elle visualise, nettement, qu'il existe des régions continues de cyclicités stables, mais de différents ordres, qui n'ont pas les mêmes ampleurs. Ceci est un indicateur précoce de la présence des transformations abstraites d'échanges d'intervalles de stabilité, pendant l'endocyclogenèse par bifurcation, là où l'approche

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

ensembliste sera d'importance non négligeable, puisque la présence de ces régions stables, justifie bien notre recours à la technique d'analyse par intervalles, qui rend possible la construction d'un puissant test d'inclusion, permettant une méthode de partition récursive de l'espace des phases reconstruit, obtenu à l'aide de l'application d'un algorithme récursif de subdivision<sup>146</sup>, là où les seuils de partition sont déterminés, à l'aide d'un critère de maximum d'entropie. Nous allons montrer, ultérieurement, à la suite de l'enrichissement de notre démarche d'analyse, qu'une illustration statistique du comportement de ces seuils critiques, permet de définir un critère simple d'arrêt de la subdivision récursive. D'autre part, l'examen graphique montre, aussi, que les différentes portions des régions de variabilités de la stabilité des cycles, en fonction du paramètre de contrôle. Son intérêt est de localiser la zone de convergence, pour laquelle le chaos est faible (organisé). En plus, la lecture de ce schéma prouve que la formation d'un processus de mutation à l'intérieur du système dynamique. Cette mutation naît avant ou après un seuil critique, caractérisant la transformation d'état du système, d'un état à un autre dit *seuil de percolation*<sup>147</sup>. À partir de chaque seuil, le processus dynamique change d'état, soit de façon brutale, soit en passant par une phase de transition plus ou moins douteux et plus ou moins chaotique ou au contraire peu active, avec progression souvent exponentielle.

Cette remarque importante vient, en fait, renforcer l'importance de constater que le chaos faible est plus ou moins prévisible. En présence du chaos faible, les prévisions, à long terme, des modèles non-linéaires déterministes de fluctuations cycliques endogènes, généralement caractérisées par l'instabilité dynamique des équilibres, peuvent être rendues possibles. Mais, nous allons voir dans ce qui suit, que leurs précisions peuvent être diminuées avec le temps, faute de forte sensibilité aux conditions initiales. De ce fait, notre contribution de base ici, est d'essayer de fournir un élément de réponse à la problématique, selon laquelle nous cherchons à répondre à la question : Dans quelle mesure, faut-il utiliser un modèle non-linéaire déterministe (chaotique) pour prévoir les fluctuations cycliques endogènes?

---

<sup>146</sup> Dans ce cadre, nous allons proposer une technique basée sur un algorithme de partition par intervalle tel que le SIVIA « *Set Inverter Via Interval Analysis* » donné par : Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., et Walter, E., « *Applied interval analysis* », Springer, Paris, 2001.

<sup>147</sup> Dans ce contexte, la percolation permet d'étudier la propagation d'une information prédictive sur une structure instable, dynamique, évolutionnaire, aléatoire et hétérogène du système déterministe à temps discret.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Pour ce faire, il faut se mettre dans la tête que, les points d'équilibre d'un modèle dynamique sont quantifiables puisqu'ils représentent une caractéristique globale du système. Par contre, à cause de l'hypothèse forte d'instabilité des structures dynamiques, le choix d'une nouvelle structure du modèle dynamique va dépendre, énormément, de lois locales organisant les fluctuations internes des états dynamiques, telle que la bifurcation. Ceci explique, sans doute, l'imprévisibilité sous l'hypothèse de la présence des structures dynamiques liées aux changements des états du système, parfaitement, chaotique. Or, comme les lois organisant les transitions des états du système dynamiques, où prennent naissance les erreurs déterministes de mesures et de modélisation, sont généralement complexes et ignorées. Il est nécessaires de penser, à des solutions qui tendent, soit à réduire l'intensité du chaotécité par réduction de sa dimension, soit à contrôler d'une manière rationnelle les modalités de transition des structures du système dynamique, afin de s'assurer que son évolution, d'un état à une autre, lui confère un comportement irrégulier et déterministe, mais faiblement chaotique. Or, la première solution est couteuse et son implémentation nécessite des moyens très perfectionnés. Pour cette raison, nous privilégions, à ce niveau d'analyse, la mise en œuvre de la seconde solution.

**Théorème 2.13 (Jakobson, (1981)<sup>148</sup>)**

Soit  $I = [0; 1]$  un intervalle compact et soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue et le système dynamique décrit par la suite de récurrence définie par son terme général :

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 3 \leq r \leq 4 \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases},$$

L'ensemble  $R$  du paramètre de contrôle  $r$  tels que  $f$  décrit une dynamique chaotique sur l'intervalle minimum  $I^* \subset I$  est chaotique si elle est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément, si nous désignons par  $L$  la mesure de Lebesgue, alors nous aurons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(R \cap [4 - \varepsilon; 4])}{\varepsilon} = 1$$

<sup>148</sup> Jakobson, M.V., (1981), « Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional map », Commun. Math. Phys. 81, pp. 39-88.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

---

De ce fait, l'analyse prévisionnelle dans cette situation, doit tenir compte de l'évolutive de l'erreur de prévision, dans le temps qui dépend globalement, du passé du système et qui va conduire, à la détermination des points critiques du système. Bien sûr, sans oublier que ce mécanisme, peut conduire au chaos, sous l'effet de la perte de la stabilité locale des fluctuations endogènes, lors de la bifurcation, qui accompagne le phénomène de transition de phases, au moment du passage du système dynamique, d'un état à un autre. Pour contourner cette difficulté, nous imposons d'établir un contrôle optimal par le paramètre  $r$ , avant de chercher à élaborer la prévision. Ceci revient à déterminer pour le paramètre de contrôle  $r$ , les zones de super-attractivité des cycles, car sinon, un choix arbitraire du paramètre réel  $r$  est un choix tout-à fait risqué et peut conduire au comportement, parfaitement chaotique, où la prévisibilité du système dynamique, sera une tâche impossible. Donc, avant d'aborder n'importe quelle analyse prévisionnelle, il est primordial de maîtriser, en détail l'effet de la variation du paramètre à contrôler sur le comportement du système, lorsqu'il décrit son domaine de définition. À cet égard, un contrôle rationnel imposé sur la sélection du paramètre réel  $r$  qui commande la transition des états dynamiques du système, va sans doute, assurer le contrôle optimal de la dynamique du système. Il faut, donc, être très prudent, lors de la spécification du domaine de définition du paramètre réel  $r$ . Ceci mène à vérifier, tout d'abord, que le paramètre réel  $r$ , peut décrire un ou plusieurs domaine(s) pour le(s) quel(s) le(s) cycle(s), décrivant la dynamique endogène du système est (sont) super-attractif(s). Ce choix assure la prévisibilité du système, au voisinage d'un comportement de dynamique évolutionnaire mais, faiblement chaotique. Dès lors, nous pouvons sentir l'importance de bien spécifier les zones de super-attractivités des cycles, en fonction de la variation du paramètre de contrôle dans son domaine de définition, en vue de garantir, d'une part la réalisation de la prévision et d'autre part sa fiabilité. Avant d'aborder le problème de l'analyse prévisionnelle, il est nécessaire, donc, de définir la notion de la dynamique chaotique et de caractériser son rapport avec le phénomène de transition de phases. Mais, avant tout, c'est le moment de postuler, comme le notent Hommes et Manzan (2005), que l'une des principales caractéristiques d'un attracteur chaotique déterministe, est sa faible dimension. Contrairement à un processus non-linéaire de type stochastique, qui se caractérise,

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

essentiellement, par une dimension infinie. Ce constat vient renforcer, par la suite dans la troisième partie de ce document, notre désir de discriminer empiriquement entre un phénomène non-linéaire déterministe chaotique et un autre phénomène non-linéaire de nature stochastique.

**Théorème 2.14 (Grackzyk, Swiatek et Lyubich, (1997)<sup>149</sup>).**

Soit  $I = [0; 1]$  un intervalle compact et soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue et le système dynamique décrit par la suite de récurrence définie par son terme général :

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 3 \leq r \leq 4 \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases},$$

L'ensemble  $\tilde{R}$  du paramètre de contrôle  $r$  tels que  $f$  décrit un cycle attractif sur l'intervalle  $\tilde{I} \subset I$  est hyperbolique si elle est un ouvert dense.

**Théorème 2.15 (Lyubich, (2002)<sup>150</sup>).**

Soit  $I = [0; 1]$  un intervalle compact et soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue et le système dynamique décrit par la suite de récurrence définie par son terme général :

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} Y_{n+1} = f(Y_n, r), & 0 \leq r \leq 4 \\ f(Y_n, r) = r Y_n (1 - Y_n) \\ Y_0 \in ]0, 1[ \end{cases},$$

Presque toutes les valeurs du paramètre de contrôle  $r$  correspondent à une dynamique hyperbolique ou chaotique.

**Corollaire 2.4**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction de classe  $C^1$ . Pour tout  $n \geq 2$ , il existe un  $r \in ]3; 4[$  tel que  $f$  admette un  $n$ -cycle super-attractif.

L'étude menée à ce stade a permis de mettre en lumière la formation endogène d'un  $2^n$ -cycle, à partir de l'analyse discrète d'un système dynamique non linéaire déterministe. Il s'agit au départ, pour  $r \geq 3$ , de la mise en présence d'un phénomène de cycle limite stable (attractif), vers lequel converge la suite pour presque toutes les valeurs initiales  $0 \leq Y_0 \leq 1$ . Cependant, dès que

<sup>149</sup> Lyubich, M., (1997), « Dynamics of quadratic polynomials », I, II. Acta. Math. 178, N° 2, pp. 185-297.

<sup>150</sup> Voir Lyubich, M., (2002), « Almost every real quadratic map is either regular or stochastic », Ann. Math. (2) 156, N° 1, pp. 1-78.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

le paramètre de contrôle sera presque égal, par valeur supérieure à la valeur de  $r = 3.57$ , les cycles deviennent instables (répulsifs) et nous pénétrons dans la zone de transition vers le chaos. Afin d'être en mesure de comprendre et puis d'analyser d'une manière plus nette l'apparition d'une dynamique chaotique, nous allons aborder par analyse, cette fois le cas de  $r \in [3.57; 4]$ .

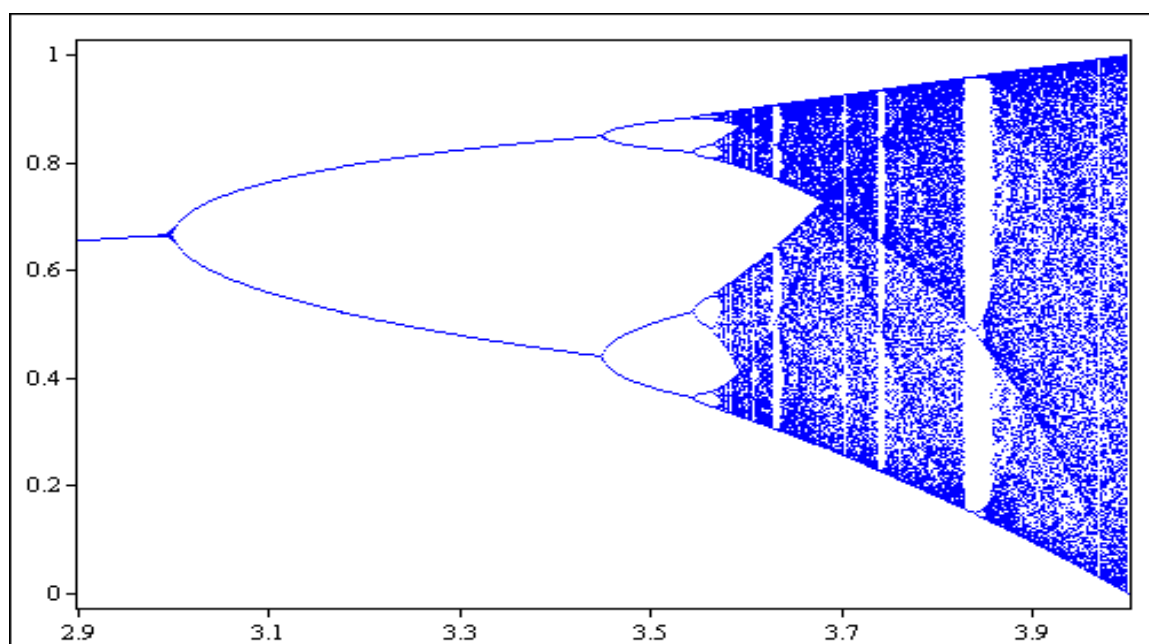


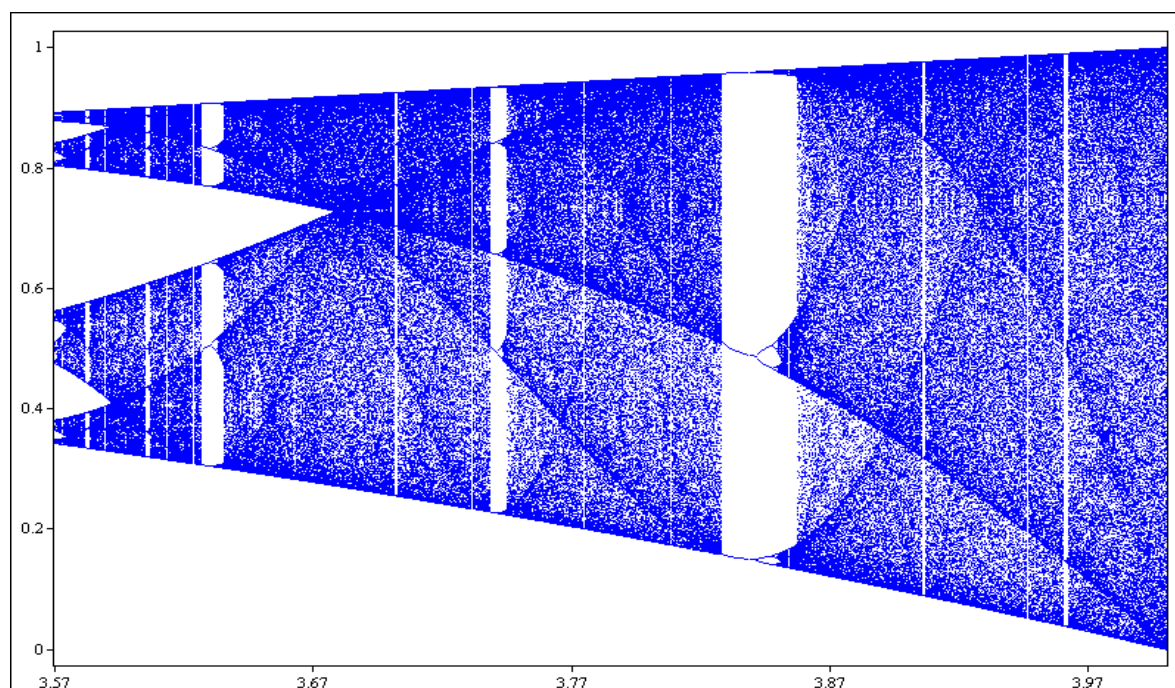
Figure 2.45: Cascade de doublement de périodes pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $2.9 \leq r \leq 4$

Pour notre exemple, nous remarquons, à partir du dessin de la figure (2.45), qu'après la valeur de  $r = 3.57$  les  $2^n$ -cycles stables seront disparus. Cela peut présenter quelques complications, mais ce n'est que le début! Car, avant de penser à une quantification du degré de complexité du processus sous-jacent, il sera indispensable de savoir : Que se passe-t-il après cette valeur  $r = 3.57$ ? Pour répondre à cette question, il faut répondre, tout d'abord, à la question suivante : Que se passe-t-il après le phénomène de doublement de périodes?

C'est la première apparence de la dynamique chaotique. Gardant l'hypothèse, déjà citée, de la sensibilité aux conditions initiales, la dynamique chaotique, illustrée à l'aide de la figure (2.45), est caractérisée par deux autres attributs. En premier lieu, ce caractère chaotique est

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

composé par des cycles, tous instables. En second lieu, ce caractère chaotique peut être mis en évidence lorsque chaque région, visite éventuellement chaque autre région. Nous allons, maintenant, essayer de comprendre ce que représente ce schéma de la figure (2.46). Il est clair qu'après  $r = 3.57$ , les  $2^n$ -cycles stables semblent avoir disparu et deviennent répulsifs. C'est-à-dire, que même si un point est placé, au voisinage le plus proche possible, d'une des valeurs du cycle, ce point diverge du cycle et finira par présenter un comportement chaotique. Notre tâche consiste donc, à essayer de comprendre, pourquoi la convergence, vers un cycle, disparaît? C'est ce que nous allons voir, au fur et à mesure, lorsque nous entamons avec plus de détail la dynamique chaotique.

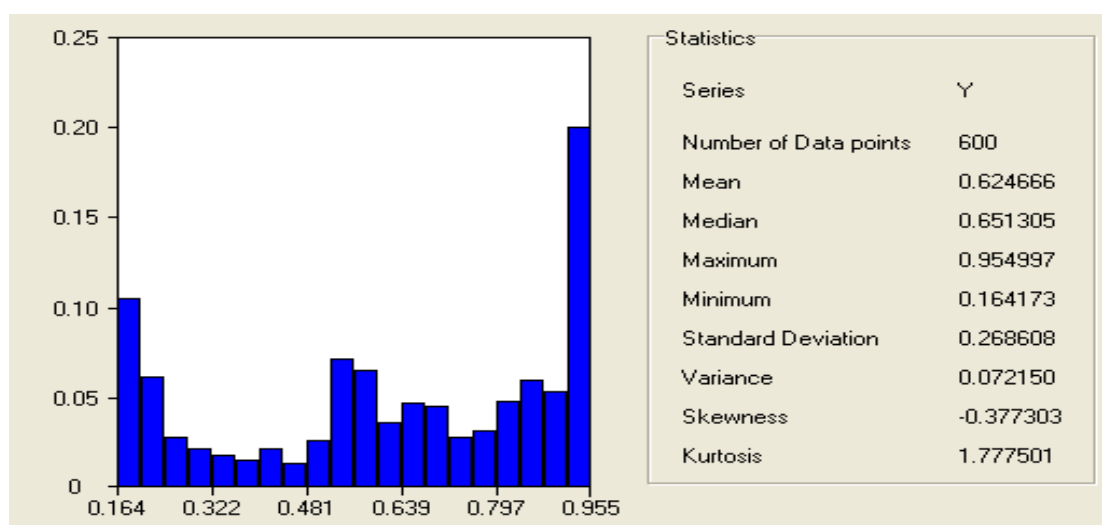


**Figure 2.46: Dynamique chaotique pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $3.57 \leq r \leq 4$**

Les points de l'attracteur tendent à se répartir sur tout l'intervalle  $[0,1]$ . Nous remarquons que pour chaque tranche du diagramme de la figure (2.33), le cycle limite est remplacé par une portion de l'intervalle  $[0,1]$ . Cette portion a une densité variable verticalement, par conséquent, la

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

répartition des points de chaque orbite stable, tend à s'étaler sur tout l'intervalle et commence à ressembler à une répartition au hasard. Le système dynamique devient de moins en moins prévisible. Ainsi, la mise en évidence d'une partie du diagramme précédent, où le fonctionnement du système est régi essentiellement par des règles déterministes, est la raison pour laquelle nous sommes amenés à introduire, ici, la notion du chaos. Néanmoins, l'une de ces principales caractéristiques, réside dans sa forte dépendance des conditions initiales. Cette propriété c'est elle qui caractérise le degré d'instabilité endogène et de complexité des séries temporelles et admet comme principale conséquence, l'imprévisibilité, à long terme, du comportement du système dynamique. Mais, nous constatons qu'au milieu du chaos, il se peut que parfois il y ait présence d'un phénomène cyclique périodique, mais cette fois de période égale à trois. L'examen graphique, ainsi que les principales statistiques descriptives pour ces 600 points générés artificiellement, par le processus  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  est illustré à l'aide de la figure (2.47).

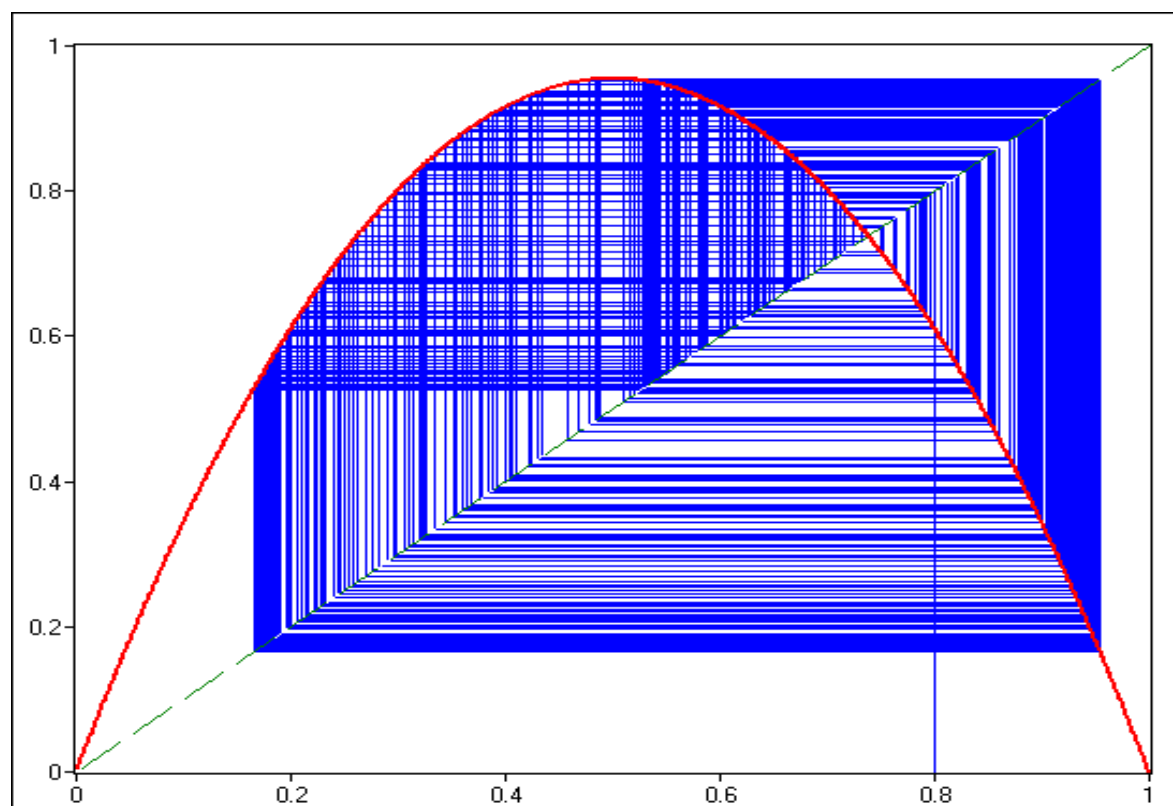


**Figure 2.47:** Les statistiques descriptives pour les 600 points générés par  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$

La simple lecture du diagramme de phase donné par la figure (2.48), pour  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.82$ , nous permet de constater que les itérations de la suite de nombres  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 600\}}$  sont formées de la superposition d'un 3-cycle, mais la suite reste toujours divergente.



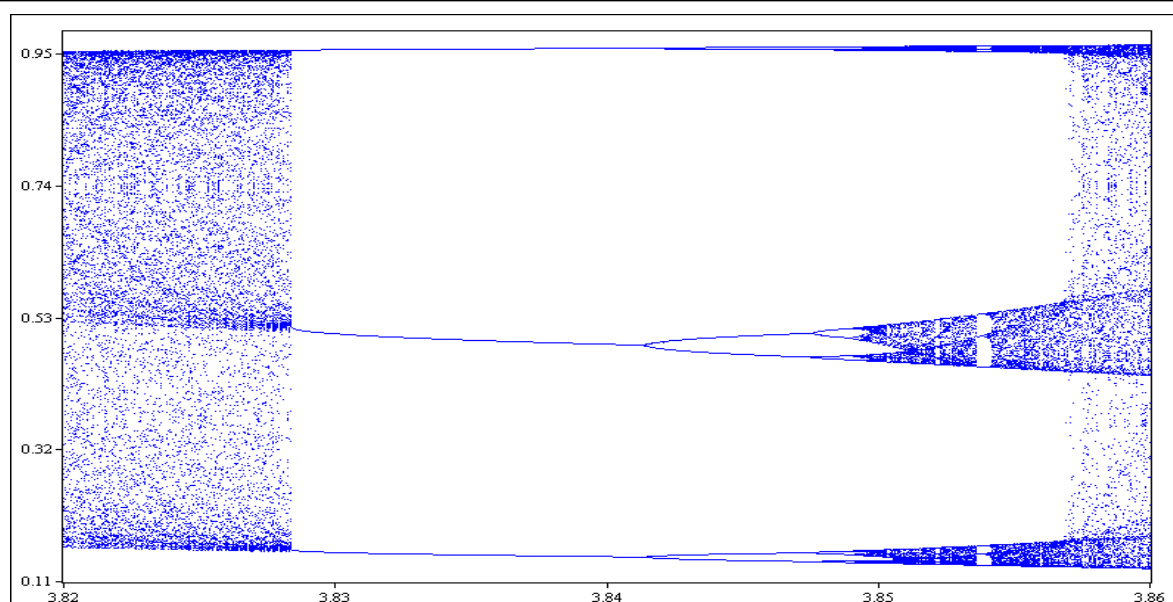
Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires



**Figure 2.48: Diagramme de phase pour  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$**

Dans le cadre de la fonction de transition logistique, pour  $r_\infty < r \leq 4$ , nous pénétrons dans un régime caractérisé par l'apparition des orbites de périodes impaires, à partir de la valeur  $r = 3,6786\dots$ . Ces cycles impairs ont d'abord une période très longue, qui diminue au fur et à mesure que  $r$  augmente. Rappelons que la figure (2.47), permet de généraliser cette situation de chaos. Nous constatons que pour  $3,8284 \leq r$ , nous nous situons sur la région du chaos mais proche d'un cycle d'ordre trois. En réalité, ce cycle n'existe plus, mais il exige une présence virtuelle (imaginaire). Il en résulte, la formation d'une trajectoire pseudopériodique d'ordre trois, rompue par des relents chaotiques, qui se forment de façon imprévisible : c'est le phénomène *d'intermittence*. Cazzavillan et Pintus (2006), explorent la relation entre indétermination et bifurcations locales, donnant naissance, à des cycles endogènes.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires



**Figure 2.49: Chaos et d'intermittence pour  $Y_{n+1} = r Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $3.82 \leq r \leq 3.86$**

À partir de ces deux cas explorés à travers les figures (2.46) et (2.49), il apparaît maintenant très facile de constater que nous pouvons mettre en évidence la présence d'un phénomène chaotique, caractérisant un système dynamique déterministe<sup>151</sup> à temps discret, basé sur l'hypothèse fondamentale d'instabilité endogène des structures dynamiques, par l'une des deux approches. Soit en raisonnant en termes de sensibilité aux conditions initiales. Soit en raisonnant en termes d'apparition virtuelle de cycles d'ordre trois. Le chaos signifie le manque complet de structure et d'organisation, tout en adaptant une propriété additionnelle de récurrence, qui le rend pratiquement, plus ou moins non prédictible à long terme, comme c'est le cas par exemple de la suite logistique étudiée lorsque  $r=4$ .

Avant de passer à l'analyse prévisionnelle, dans la sous-section qui suit, nous allons essayer de comprendre tout d'abord, la notion du chaos, puis de caractériser un phénomène chaotique, afin de pouvoir répondre aux questions posées précédemment.

<sup>151</sup> Le chaos est déterministe et non plus stochastique, car il est toujours possible d'obtenir exactement les mêmes courbes pour les mêmes valeurs de paramètres.

#### 2.2.2.4. *Dynamique chaotique et couplage des périodes*

En particulier la notion du chaos est très liée à la notion de *l'effet de papillon* introduit par Lorenz (1972), et qui résulte de la sensibilité aux conditions initiales. C'est-à-dire que si nous partons, initialement, d'un système homogène en équilibre, alors une modification minime dans ses conditions initiales (locale) peut y rompre l'équilibre et y entraîner des évolutions imprévisibles sur le long terme.

Lorenz (1963a)<sup>152</sup>, a suggéré qu'il s'agit dans ce cas, d'un attracteur étrange. C'est-à-dire, un objet géométrique complexe à caractère chaotique (souvent fractal), qui attire les trajectoires des points. Ainsi, les séquences générées convergent toutes vers cet objet géométrique, qui contrôle le comportement de la dynamique. Cette fois, nous ne parlerons plus de croissance cyclique, mais plutôt nous pourrions parler, en présence du chaos, d'une croissance rapide et même explosive de la divergence des trajectoires initialement très proches. C'est donc, précisément *l'effet de papillon* qui résume ce phénomène très important de sensibilité aux conditions initiales et génère ce caractère chaotique complexe, évoluant dans le temps, qui donne le comportement pratiquement non-linéaire à la dynamique d'un modèle économétrique.

Jusqu'à cette étape, nous avons pu montrer que parfois des changements structurels, importants et rapides peuvent surcharger les mécanismes d'ajustements structurels et quand ils quittent le champ d'attraction, ils n'ont plus de forces de rappels qu'attachent les fluctuations vers les cycles limites (fluctuations périodiques autoentretenuées). Par conséquent, l'adaptation du système d'ajustement se manifeste par des fluctuations aperiodiques, qui caractérisent la présence d'une dynamique chaotique. De ce fait, un choc structurel endogène est une bifurcation critique, mettant en évidence la rupture endogène de la stabilité locale de l'équilibre dynamique. Cette instabilité c'est elle qui aboutit à la modification intrinsèque des structures par *recomposition des invariances* et ayant par conséquent, des effets très prononcés sur la formation des nouvelles

---

<sup>152</sup> À partir de son étude menée dans le champ atmosphérique, Lorenz (1963a), a pu découvrir la présence d'une dynamique chaotique caractérisant un système à faible degré de liberté. Ces études, ont contribué au développement d'un champ très intense de recherche en théorie des systèmes dynamiques, dont les propriétés de base sont développées par Bergé, Pomeau et Vidal (1992).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

structures par déformation structurelle de la dynamique discrète d'un modèle économétrique non-linéaire. Après avoir justifié le fondement endogène aux fluctuations, nous admettons qu'afin de saisir les liens entre instabilité endogène liée aux fluctuations des variables macroéconomiques et prédiction, nous allons commencer par étudier les caractéristiques de cette dynamique chaotique endogène.

Pour ce faire, nous signalons tout d'abord, que la littérature sur l'étude des systèmes dynamiques riches en méthodes d'identification du comportement chaotique des séries. Un premier axe de recherche favorise la technique basée sur le calcul des exposants de Lyapunov. Dans ce cadre, nous pourrions citer les travaux de Packard, Crutchfield, Farmer et Shaw (1980), Wolf, Swift, Swinney et Vastano (1985), Tong (1989), Gyorud et Talay (1990), McCaffrey, Ellner, Gallant et Nychka (1992) et Gençay (1996). Un deuxième axe de recherche défend d'autre technique fondée sur le calcul des dimensions des attracteurs, tels que par exemple la dimension de corrélation introduit par Grassberger et Procaccia (1983b). Plusieurs travaux ont adopté cette technique, par exemple nous pourrions citer Grassberger (1985), Ramsey, Sayers et Rathman (1990), Ruelle (1990), Hsieh (1991), Brock, Hsieh, et LeBaron (1991), Pesaran et Potter (1992), Hiemstra et Jones (1994), Brock, Dechert, Scheinkman et LeBaron (1996), LeBaron (1997), Dechert et Hommes (2000) et Hommes et Manzan (2006). Un troisième axe de recherche accorde une importance à la combinaison entre les deux premières techniques, pour détecter le lien entre les dimensions et les exposants de Lyapunov. Ainsi qu'il autorise une possible comparaison avec d'autres techniques telle que par exemple, la méthode bispectrale de Hinich (1982). Ces travaux se réfèrent, en particulier à Russell, Hanson et Ott (1980), Farmer (1982) et Cecen et Erkal (1996). Un quatrième axe de recherche insiste sur des techniques géométriques, tel que l'espace des phases, les méthodes de bifurcations et les diagrammes de récurrences. Parmi les travaux les plus reconnus dans ce domaine d'application, nous citons Grandmont et Malgrange (1986), Benhabib (1992), Mcguire, Azar et Shelhamer (1997), Zbilut, Giuliani et Webber (2000), Barnett et He (2004) et Barnett et Duzhak (2009). Un cinquième axe de recherche, dont le plus célèbre est LeBaron (1994), s'est intéressé au problème de la prévision, à partir des recherches effectuées sur la dynamique chaotique dans les séries temporelles

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

économiques. Ces recherches ont évidemment une attirance plus spécifiquement, dans l'étude des cycles économiques.

Les résultats observés de l'analyse des séries temporelles par les outils dérivés de la théorie du chaos permettent de mettre en évidence une non-linéarité, provient de la présence d'un comportement irrégulier, à cause de la présence d'un attracteur chaotique qui caractérise la dynamique déterministe de la série. Plusieurs travaux ont essayé de fournir des justifications précisant ce type de non-linéarité dû au chaos. Frank et Stengos (1988), Brockett, Hinich et Patterson (1988), Brock et Sayers (1988), Kelsey (1988), Scheinkman (1990), Gilmore (1993), Granger (1994), Radunskaya (1994), Barnhart et Dwyer (1996), Barnett, Gallant, Hinich, Jensen et Jungeilges (1996), Barnett et He (2001a-b) et Faggini (2009), se sont intéressés au problème du test de structure non-linéaire et chaos dans les séries économiques. D'autres travaux menés essentiellement, par Granger (1989), Mirowski (1990), Liu, Granger et Heller (1992), Chen, (1993) et Cutler (1994), ont essayé de discriminer entre systèmes chaotiques et systèmes stochastiques non-linéaires non-chaotiques, par plusieurs tests tels que le test de la corrélation intégrale.

Cependant, dans le domaine de la prévision, diverses études menées sur des séries temporelles n'ont pas apporté de preuves réellement convaincantes, quant à la suprématie des outils du chaos sur les outils statistiques traditionnels. Afin d'essayer de fournir un élément de réponse concernant notre question de recherche : faut-il utiliser des modèles non-linéaires déterministes ou des modèles non-linéaires stochastiques, en prévision de séries temporelles?

Il est largement partagé que la notion du chaos recouvre les idées d'imprédictibilité et de forte divergence, suite aux présences des erreurs déterministes de la modélisation et de la mesure. Il importe, alors, de commencer, ici, par explorer un formalisme du chaos. Pour ce faire, nous allons commencer par énoncer le chaos au sens de Li et Yorke (1975), ainsi qu'au sens de Devaney (1989).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Historiquement, le terme de chaos a été introduit par Li et Yorke (1975), pour décrire une propriété de dépendance aux conditions initiales, sur l'intervalle pour le comportement de certains systèmes étudiés. Le chaos au sens de Li et Yorke (1975), peut être défini comme suit :

**Définition 2.21**

Soit  $Y_n = f(Y_{n-1}, \psi)$ ,  $\psi \in \mathfrak{R}$  un système dynamique, nous dirons que deux points  $Y_i$  et  $Y_j$  forment un couple de Li-Yorke si  $f^k(Y_i)$  et  $f^k(Y_j)$  sont arbitrairement proches à certains instants et sont espacés d'une distance non nulle (dépendant de  $Y_i$  et  $Y_j$ ) pour d'autres  $k$  tendant vers l'infini ; le système  $Y_n = f(Y_{n-1}, \psi)$  est chaotique au sens de Li-Yorke s'il existe un ensemble  $\Xi$  non dénombrable tel que deux points distincts de  $\Xi$  forment un couple de Li-Yorke.

À l'inverse, Devaney (1989), a suggéré que la définition d'un système dynamique chaotique nécessite la conjonction des trois propriétés : densité des points périodiques ; transitivité et sensibilité aux conditions initiales. Ici, le chaos est vu comme une fusion d'imprévisibilité et de comportements réguliers. Il est défini à partir des définitions suivantes :

**Définition 2.22**

Un point  $Y \in I$  est dit périodique de période  $n > 1$  pour la fonction  $f$  si  $f^n(Y) = Y$  et  $f^i(Y) \neq Y$  pour  $i \leq n-1$ . On dit que  $Y$  est un point fixe si  $f(Y) = Y$ . Soit  $\lambda = (f^n)'(Y)$  appelé la valeur propre du cycle  $\vartheta(Y) = \{f^n(Y), n \in \mathfrak{N}\}$  où  $f^0 = id$  et  $f^n = f^{n-1} \circ f$  est la  $n^{ième}$  itérée de  $f$ . Ce point sera dit répulsif, indifférent, attractif ou superattractif suivant que  $|\lambda| > 1$ ,  $|\lambda| = 1$ ,  $|\lambda| < 1$  ou  $|\lambda| = 0$ .

Selon cette définition des points périodiques, quand un point est périodique, son orbite est finie mais en plus  $f$  agit sur celle-ci bijectivement comme un cycle.

**Définition 2.23**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. S'il existe  $Y_0 \in I$  tel que la suite récurrente  $(Y_n)_{n \in \mathfrak{N}}$  associée à  $f$ , converge vers un point fixe ou vers un cycle, alors l'ensemble des points, dont les itérés convergent vers ce cycle est partout dense dans  $I$ .

En particulier, cette définition de la densité des points périodiques d'une part, elle implique que les  $Y_0 \in I$ , dont l'orbite est dense, sont eux-mêmes denses dans  $I$ . D'autre part, elle

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

garantit le caractère non stochastique du système, en fait la présence des ingrédients de régularité comme éléments périodiques denses partout.

**Définition 2.24**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. Nous disons que  $f$  est topologiquement transitive, si étant donné deux ouverts non vides  $U, V \subset I^2$ , il existe un entier  $p$  et un élément  $Y \in U$  tel que  $f^p(Y) \in V$ .

En particulier, cette définition de la transitivité, implique qu'un système satisfaisant cette propriété est incapable d'obéir à n'importe quelle forme de partition indépendante et stable.

**Définition 2.25**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. Nous disons que  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales ou simplement sensitive, s'il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $Y \in I$  et que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\tilde{Y} \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que si  $|Y - \tilde{Y}| < \varepsilon$ , alors  $|f^n(Y) - f^n(\tilde{Y})| > \eta$ .

En particulier, cette définition fournie par Devaney (1986), de la sensibilité aux conditions initiales, implique que l'imprévisibilité d'un système dynamique chaotique provient de sa sensibilité aux conditions initiales. Ceci est découlé, essentiellement, du fait qu'un système dynamique, obéissant à cette propriété de base sera caractérisé par un comportement chaotique hyperbolique. Donc, même de très petites différences dans les conditions initiales, donneront naissance à des trajectoires, très largement, différentes dans le futur. Car une fluctuation mineure de la série peut être à l'origine d'une bifurcation endogène. D'où, nous pourrions aisément attirer la conclusion, qu'en présence de la dépendance sensible aux conditions initiales, une prédiction des valeurs futures des variables ne serait possible que si les conditions initiales pouvaient être mesurées avec une précision infinie. Mais, en réalité ces calculs réalisés par ordinateur sont attachés par des erreurs de mesure, en troncant les décimales des chiffres. Ceci montre carrément, la majeure difficulté empirique qui menace la prévisibilité des processus chaotiques.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

**Théorème 2.16 (Devaney, (1989)<sup>153</sup>)**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. Nous supposons que la dynamique associée à  $f$  est chaotique. Alors :

- 1- l'ensemble des points périodiques est dense dans  $I$ ;
- 2-  $f$  est topologiquement transitive;
- 3-  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales.

Après avoir défini mathématiquement la notion du chaos. Il est nécessaire, voire important, de répondre à la question suivante : Existe-il de cycle en présence d'un système dynamique chaotique? Pour répondre à cette interrogation, nous allons essayer de prouver la présente proposition.

Li et Yorke (1975), ont montré qu'un point de période trois implique chaos. En fait, leur résultat était un corollaire du théorème général suivant :

**Théorème 2.17 (Šarkovskii, (1964)<sup>154</sup>)**

Si  $f : I \rightarrow I$  est une application continue ayant un cycle de période  $p$ , alors elle a des cycles de toutes périodes  $n$  telles que  $n$  précède  $p$ .

Ce théorème, permet d'affirmer par déduction, l'existence d'un cycle de toutes périodes, à partir de celui d'un cycle d'ordre trois. Cependant, Le théorème Šarkovskii (1964), ne permet, ni de montrer la stabilité de ces cycles, ni de caractériser leurs complexités. Comme complément très puissant de ce théorème, nous pourrions citer la route de Newhouse, Ruelle et Takens (1978), vers le chaos qui repose sur le théorème suivant:

**Théorème 2.18 (Newhouse, Ruelle et Takens, (1978)<sup>155</sup>)**

Soit  $Y = (Y_1, \dots, Y_s)$  est un champ de vecteurs sur le tore  $T^s$ . Si  $s \geq 3$ , il existe un voisinage  $V$  de  $Y$ , à l'intérieur duquel, existe un champ de vecteurs possédant un attracteur étrange.

---

<sup>153</sup> Devaney, R.L., (1989), « *An introduction to chaotic dynamical* », Addison Wesley.

<sup>154</sup> Šarkovskii, A.N., (1964), « *Coexistence of cycles of a continuous mapping of the line into itself* », Ukrain. Math. Ž. 16, pp. 61-71.

<sup>155</sup> Newhouse, S., Ruelle, D. et Takens, F., (1978), « *Occurrence of strange axiom a attractors near quasi periodic flows on  $T^m$   $m > 3$*  », Communications in Mathematecal Physics, 64.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

L'intérêt de ce théorème est d'affirmer la possibilité d'existence d'une dynamique chaotique, au voisinage d'une dynamique de tore, dont l'ordre est supérieur ou égal, à trois sans garantir la nécessité. Selon Lordon (1995), ce théorème de la *route vers le chaos*, dont une lisible version est donnée par Takens (1981), permet de réaliser une considérable économie de moyens car selon ce formalisme, le chaos est susceptible d'apparaître juste après, trois bifurcations de Hopf seulement. Cette remarque importante vient en fait de justifier, qu'il est possible d'espérer, sur le plan pratique, que le chaos peut être généré, à partir de la conjonction de trois oscillations planaires, d'un système dynamique. C'est-à-dire que la formation de la dynamique chaotique, résulte d'un processus de bifurcation de Hopf décrit selon un parcours comme suit : *point fixe*  $\rightarrow$  *cycle limite*  $\rightarrow T^2 \rightarrow T^3$ . De ce point de vue, une condition pour mettre en œuvre la présence de la dynamique chaotique, selon le théorème de la route vers le chaos, il suffit de considérer un modèle dynamique représentatif des fluctuations endogènes d'une économie tri-sectorielle. Li et Yorke (1975), ont signalé l'idée, selon laquelle le chaos apparaît comme conjonction des trois oscillateurs planaires associés. De ces théorèmes de Šarkovskii, (1964) et de Newhouse, Ruelle et Takens (1978), découle un corollaire important, qui implique que la présence de la dynamique chaotique, débute avec un cycle d'ordre trois. C'est-à-dire que, dès que l'ordre d'un cycle est égal ou dépasse trois périodes, il sera induit par un comportement chaotique.

**Corollaire 2.5 (Période 3 implique chaos)**

*Si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une application continue ayant un cycle de période 3, alors elle a des cycles de toutes périodes.*

Sachant que les séries sur lesquelles portent les prévisions sont plus difficiles à prévoir, lorsqu'elles sont fortement cycliques. Par conséquent, ce théorème implique que les prévisions soient d'autant plus mauvaises que les fluctuations endogènes sont plus fortes. De ce fait, nous pourrions constater que dans un système dynamique, quand l'ampleur des fluctuations endogènes croît, les erreurs de prévisions croissent forcément, de façon plus proportionnelle, pour des raisons théoriques. Brock et Hommes (1997), ont souligné que l'application du principe donné par le corollaire (2.4), montre qu'il y a, donc, certainement un mode de génération des erreurs, compliqué, certes, mais déterminé à partir des fluctuations endogènes. Notons que la complexité

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

de la nature irrégulière de la dynamique endogène, d'un système, est généralement indépendante du degré de complexité de l'application utilisée. En ce sens, pour une application logistique simple, au fur et à mesure que la valeur de paramètre de contrôle  $r$  croît, alors, de nouvelles solutions apparaissent, de périodes de plus en plus importantes, dès que, les anciennes solutions deviennent instables. Car à chaque fois, qu'un cycle d'ordre  $n$  devient instable, il est remplacé, simultanément, par un cycle d'ordre  $2^n$ . Ce mécanisme est connu sous le nom de "*Chaîne de doublement de période*". Ce phénomène se répercute même sur les séries, dont les évolutions temporelles sont moins cycliques, les erreurs de prévisions les plus affectées par les fluctuations. De ce fait, si les résultats obtenus jusqu'à ce niveau d'analyse ont permis, essentiellement, la qualification de la complexité dynamique d'une série temporelle. Nous verrons plus tard que, si la dynamique d'un modèle économétrique non-linéaire avec transition lisse, qui a l'avantage de posséder un pouvoir explicatif très important sur la formation de ces cycles de manière endogène, possède ou non d'un important pouvoir prédictif. Car, il arrive que des comportements cycliques irréguliers, se comportant d'une manière qui peut sembler aléatoire, peuvent être générés par des équations en différences non-linéaires complètement déterministes, qui sont extrêmement complexes à cause de leurs fortes dépendances critiques aux conditions initiales, là où une légère perturbation s'amplifie exponentiellement en fonction du temps, pour donner des médiocres prévisions.

La dynamique des points périodiques est bien comprise, grâce au modèle local que donne le théorème de linéarisation de Koenigs.

**Théorème 2.19 (Koenigs, (1884)<sup>156</sup>)**

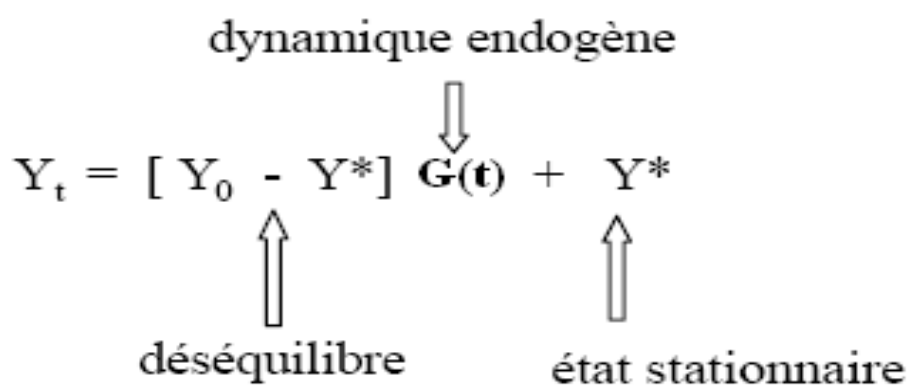
*Si  $x$  est périodique de période  $n$  et  $|\lambda| \neq 0, 1$ , alors il existe un changement de coordonnées locales holomorphes  $\omega = \Phi(z)$  tel que  $\Phi(x) = 0$  et  $\Phi \circ f^n \circ \Phi^{-1}$  est l'application linéaire  $\omega \mapsto \lambda \omega$  pour  $\omega$  dans un voisinage de l'origine.*

---

<sup>156</sup> Voir Koenigs, G., (1884), « *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* », Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 1, pp. 3-41.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

La stabilité de la solution périodique est déterminée, en appliquant la théorie de Floquet<sup>157</sup> des équations différentielles, avec les coefficients périodiques, dans lesquels, deux exposants de Floquet semblent fournir l'information plus non-linéaire, concernant le comportement de stabilité de système. Le premier exposant est toujours nul et le second exposant noté  $\eta$ , détermine la stabilité de l'oscillation périodique. Pour  $\eta < 0$ , la solution périodique est stable (bifurcation supercritique), tandis que si  $\eta > 0$ , la solution périodique est instable (bifurcation sous-critique). Puisque la théorie de Floquet est basée sur l'analyse linéaire, l'information obtenue sur les solutions périodiques est valide, seulement, près de la frontière de stabilité montrée par la figure (2.42). Le problème que pose le traitement linéaire des cycles pour les économistes est évident, car les cycles semblent inévitables. L'idée d'une croissance linéaire stationnaire apparaît comme la chimère face à la réalité qui, de façon récurrente, est scandée par les cycles économiques endogènes générés lors de la transition d'une solution (instable) stable, de point fixe, à un point fixe (stable) instable et d'une solution périodique (instable) stable, de cycle limite. Ce processus est montré schématiquement comme suit:



<sup>157</sup> La théorie de Floquet implique que pour un système réel d'équations différentielles de la forme :  $\dot{Y}_t = A_t Y_t$  avec les coefficients T-périodiques, (c'est-à-dire  $A_{t+T} = A_t, \forall t \in Z$ ), sa résolvante vérifie :

$$\forall t \in Z, y_{t+T} = y_t y_T$$

où  $y_t = \alpha_t e^{tP}$ ,  $\alpha_t$  est un réel fixé arbitrairement, mais 2T-périodiques et P est une matrice réelle. Pour une bonne exposition de cette théorie voir, Nayfeh, A. H. et Balachandran, B., (1995), « *Applied Nonlinear Dynamics* », John Wiley & Sons, Inc., New York.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Le cas supercritique de bifurcation de Hopf, montré sur la figure (2.21 (a)), par l'existence des cycles limites stables dans la région instable, et par conséquent, les petites perturbations se développent et stabilisent le cycle limite, alors que les perturbations avec l'amplitude plus grande que le rayon de cycle limite (amplitude) peuvent être à l'origine de l'instabilité du cycle limite, donc, le bassin d'attraction du cycle limite stable, dépend de la taille de cette perturbation. D'autre part, le cas de la bifurcation sous-critique de Hopf, illustré par la figure (2.21 (b)), donne une solution périodique instable (cycle limite répulsif) pour  $\Psi > \Psi_c$ . Par conséquent, pour  $\Psi > \Psi_c$ , les perturbations d'amplitude sont moins que l'amplitude de la parabole, quand il tend vers zéro (solution stable de point fixe). Nous pouvons, donc, contrôler l'amplitude d'un cycle limite répulsif, en créant des perturbations qui tendent à y modifier l'amplitude. Ceci montre que, plus les amplitudes des perturbations sont grandes, plus les amplitudes des cycles limites seront repulsives et par conséquent, ceci permet de s'éloigner rapidement du point fixe stable, aussi bien que du cycle limite instable. En conclusion, nous pouvons constater que la dynamique endogène dépend de la taille de la perturbation et du bassin de l'attraction du cycle limite stable.

Nous devons souligner que, à cause de la nature abstraite des phénomènes physiques étudiées comme celle de la bifurcation par doublement de période et de la multicyclicité, il s'est avéré plus difficile de dissocier un cycle limite instable que stable. Donc, afin de fournir un nouvel éclairage à cette situation, nous procédons au moyen de la simulation numérique.

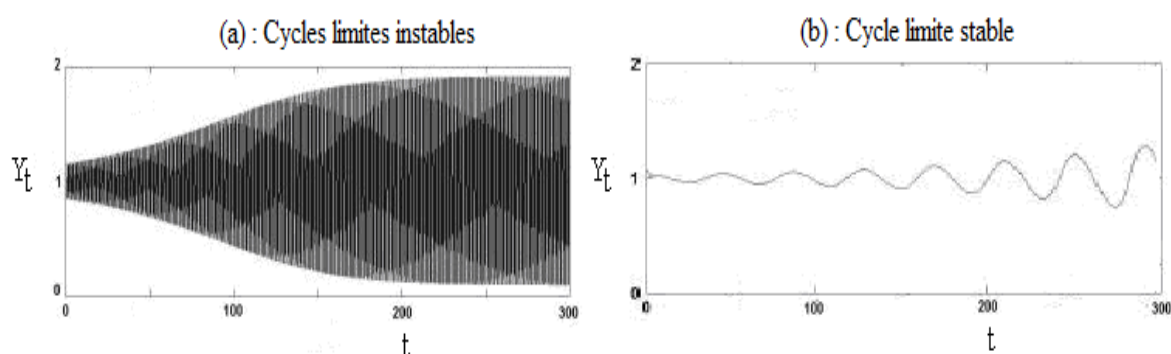


Figure 2.50: Simulation numérique de la bifurcation et d'un cycle limite

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Comme l'illustre la figure (2.50), cette difficulté se voit c'est principalement parce que lors de la bifurcation par doublement de période montrée sur la figure (2.50 (a)), la bande qui comporte les cycles limites instables, est beaucoup plus étroite que celle du cycle limite stable. Mais, aussi le transfert de la multicyclicité provient d'un échange très brève (rapide et invisible) et persistant des intervalles de stabilité décrivant la dynamique dans son espace des phases. Ceci a permis Lordon (1995), de justifier le rôle joué par les forces de rappel interdépendantes dans l'explication de la naissance des fluctuations endogènes suite à l'existence des orbites périodiques en changement continu de leurs domaines de stabilité locale qui se comportent sous la forme robuste en couplage de périodes lors d'une représentation d'espace d'état.

*«...mais il n'est pas douteux qu'existent dans l'économie des forces de rappel à grande distance qui, conjuguées à des instabilités locales, sont au principe des fluctuations endogènes ; quant aux termes de couplage, ils sont l'expression de la réalité économique la plus ordinaire, à savoir l'interdépendance. ».*

(Lordon, F., (1995), p.1428)

À partir de cela, nous sommes capables de constater le rôle primordial joué par le phénomène complexe de bifurcation par doublement de période, dans la formation endogène de nouvelles structures dynamiques non-linéaires. Cependant les structures dynamiques sont observées dans un contexte évolutionnaire en se référant à une représentation spatio-temporelle avec couplage de périodes d'espace d'état, mais logiquement, à cause de ce phénomène bref et persistant de couplage enraciné dans l'évolution dynamique discrete nous ne pouvons plus dissocier la prévision d'une trajectoire de celle de la marche du temps. En d'autres termes, l'émergence des structures dynamiques endogènes qui résulte d'un phénomène de couplage de périodes localement instables, comme le montre la figure (2.50 (a)), fait que le futur n'est pas inclus dans le passé, mais, au contraire, il en dépend, ce qui rend très difficile d'accepter de façon définitive l'hypothèse largement admise par la littérature scientifique qui considère le futur comme l'extension linéaire du passé, c'est comme si la prévision élaborée au présent est un miroir du passé et du présent de ce qui va se passer dans le futur, puisque dans cette condition le futur est conditionné par le passé et il ne peut être jamais considéré comme étant un prolongement linéaire du passé. C'est parce qu'au fur et à mesure qu'un paramètre de contrôle d'un système

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

dynamique non-linéaire varie dans son domaine de définition, il se peut qu'il y ait création d'un phénomène très compliqué d'échange des intervalles de stabilités des solutions singulières lors du changement de leurs propriétés qualitatives, garantissant la transition des structures endogènes de ce système dynamique non-linéaire, sous l'effet de la naissance des bifurcations successives de doublement de période, qui est à l'origine de l'instabilité endogène, source de la dynamique cyclique endogène. C'est-à-dire, quand le  $n^{\text{ième}}$ -cycle devient instable, il y a instantanément naissance de 2-cycle stable, puis, ce 2-cycle stable devient instable, tout en laissant la place à un  $2^2$ -cycle stable et ainsi de suite, ce schéma de bifurcation se poursuit. Or, l'évaluation de ce phénomène non-linéaire est risquée car d'une part, il est fréquemment accompagné d'une propagation évolutive dans le temps, des erreurs de mesure et des incertitudes, mais nous n'avons pas encore tous les moyens scientifiques nécessaires pour qualifier précisément l'erreur de mesure, provenant de la sensibilité aux conditions initiales, au sein du modèle dynamique. D'autre part, c'est vrai que nous sachons maintenant qu'une bifurcation est le changement qualitatif d'un état dynamique, mais nous n'avons pas encore tous les moyens scientifiques nécessaires pour qualifier exactement tous les changements d'état de bifurcation, car en réalité nous ignorons la vraie loi d'évolution de son état dans le temps. Donc, nous pouvons résumer dans le tableau (2.8), les principales possibilités de la classification des différents types de dynamiques non-linéaires selon l'ordre  $n$  d'un système.

**Tableau 2.8 : Classification des différents types de dynamiques non-linéaires selon l'ordre du système**

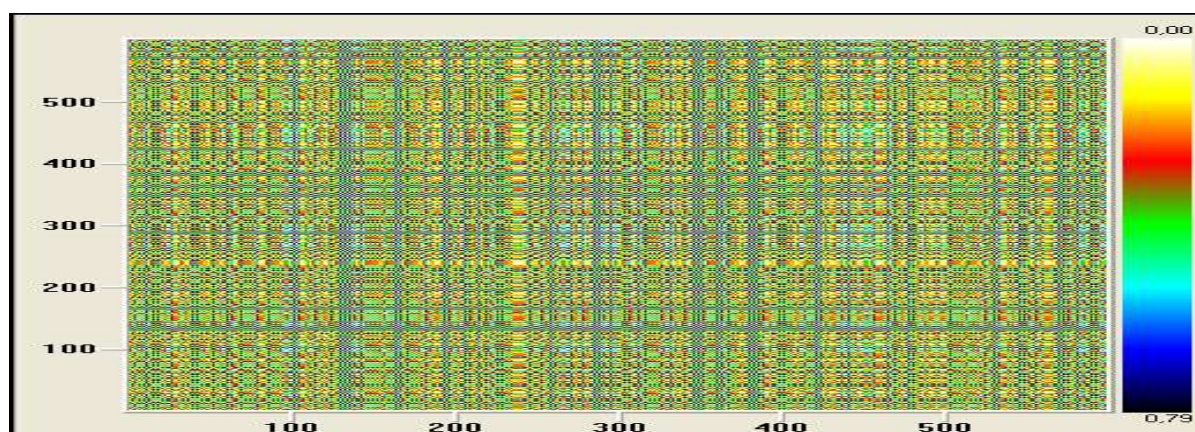
phénomènes non collectifs			phénomènes collectifs
$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n \gg 1$
bifurcation	cycle limite	chaos	oscillateurs non-linéaires couplés <sup>(*)</sup>

<sup>(\*)</sup> Indique présence d'une complexité spatio-temporelle.

En particulier, la complexité spatio-temporelle peut jouer un rôle primordial dans la représentation dynamique des états récurrents. Surtout, lors de la rencontre d'une propriété cruciale qui est au cœur de l'invariance d'échelle spatio-temporelle caractérisant la variabilité autosimilaire des structures endogènes, habituellement illustrées par des formes fractales

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

obtenues à l'aide des transformations récursives et complexes non-représentables en se référant à l'approche classique. Il est donc essentiel à ce niveau de disposer d'une technique quantifiant la dispersion des états récurrents. La simple lecture de l'analyse visuelle du diagramme de récurrence, illustrée par la figure (2.51), pour  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 600\}}$  avec  $Y_0 = 0.8$  et  $r = 3.82$ , nous permet de constater que la structure diagonale représente la dynamique déterministe de la suite de nombres  $(Y_n)_{n \in \{0, \dots, 600\}}$ . À partir de la distance entre la structure diagonale, nous pouvons déduire la cyclicité de la récurrence, caractérisant la complexité spatio-temporelle de la suite étudiée.



**Figure 2.51: Représentation graphique de récurrence (Dimension=1, Délai=1, Threshold=1)  
des N = 600 observations générées par  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$**

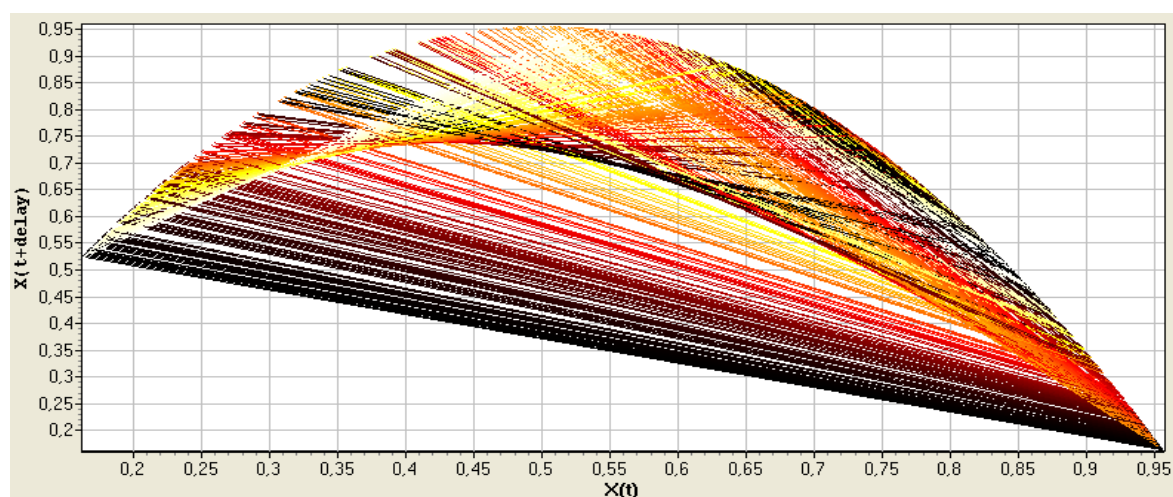
Afin de rendre compréhensive le processus de stabilisation capable d'atténuer la persistance des fluctuations endogènes engendrées par la dynamique discrète de la partie déterministe d'un modèle macroéconométrique, nous tentons tout d'abord de concevoir la notion de la complexité spatio-temporelle induite par l'analyse visuelle de récurrence. Dès lors, nous aurons recours à la méthode d'analyse non-linéaire de RQA (*Recurrence Quantification Analysis*), introduite par Zbilut et Webber (1992). Cette approche ordinaire de séries temporelles a fourni les résultats rassemblés dans le tableau (2.9), sur les principales mesures de quantifications de récurrences capables d'analyser la topologie spatio-temporelle des données ainsi étudiées. Or, l'analyse de ces résultats montre que le processus générateur de ces données, est un processus gaussien avec noise. Donc, ce dernier nécessite une réduction.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

**Tableau 2.9 : Certaines mesures de quantifications de récurrences**

Mesures	1	2	3	4	5
Point de départ	1	101	201	301	401
Moyenne	0.617	0.616	0.627	0.614	0.637
Diviation standard	0.277	0.276	0.262	0.277	0.256
Moyenne	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
Pourcentage de récurrence	0.000	0.000	0.000	0.061	0.000
Pourcentage de déterminisme	-1.000	-1.000	-1.000	0.000	-1.000
Pourcentage de laminarité	-1.000	-1.000	-1.000	0.000	-1.000
Temps de rattrapage	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
Ratio	-1.000	-1.000	-1.000	0.000	-1.000
Entropie	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
Ligne maximale	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
Trend	0.000	0.000	0.000	2.162	0.000

Si nous supposons qu'une structure idéale des données admet une symétrie cyclique, alors, il sera utile d'étudier la dynamique des structures à symétrie cyclique, afin de saisir le fonctionnement du processus générateur des structures et les forces, aux quelles elles se soumettent et qui assurent leurs dynamismes. Mais, n'oublions pas que les changements dynamiques des structures, se fait à la fois dans le temps et dans l'espace. En ce sens, la figure (2.52) illustre la représentation spatio-temporelle des données de l'exemple traité pour confirmer les retours à la périodicité.



**Figure 2.52: Représentation spatio-temporelle (Dimension=1, Délai=1, Threshold=1) des  $N = 600$  observations générées par  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$**



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

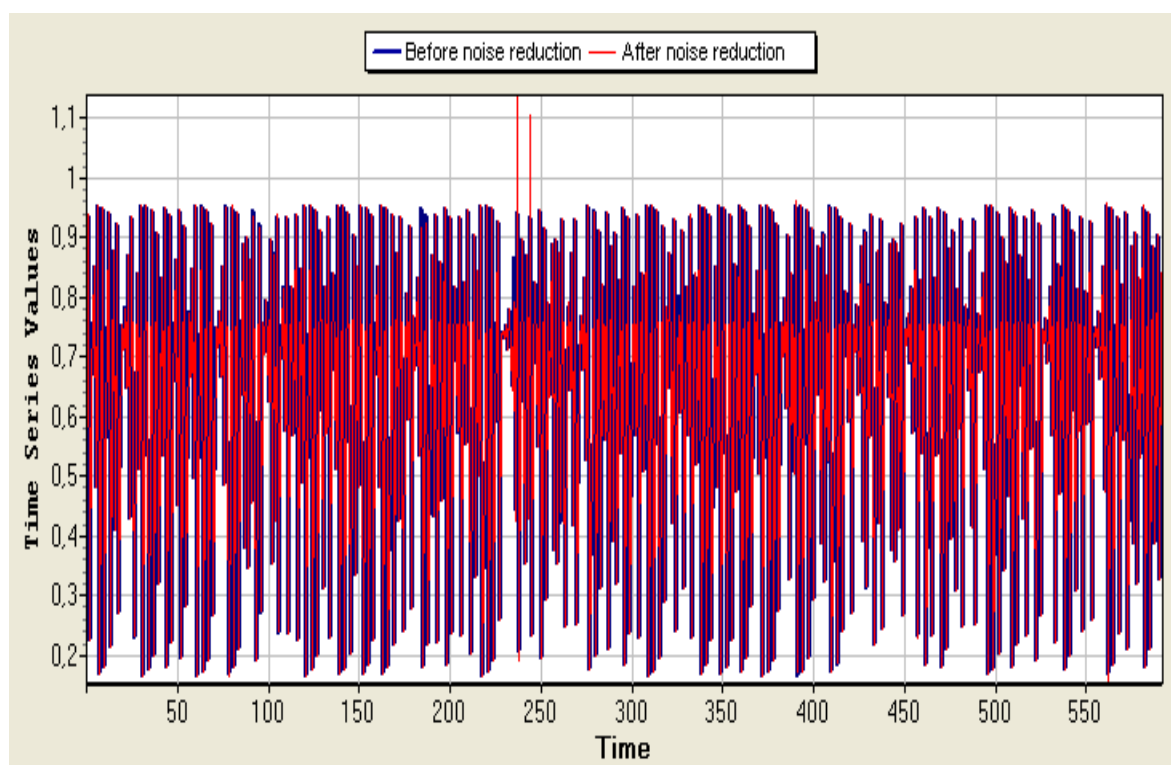
---

À cet égard, la réalité de prévision traitée dans un cadre déterministe, de système dynamique non linéaire discret, faisant appel à l'hypothèse d'instabilité des structures, est plus complexe. Elle se montre au-delà d'une simple réduction d'échelle ou faible dimension. En ce sens, l'alternance des phases dans l'expérience des prévisionnistes du temps, montre que l'erreur de prévision s'accorde souvent avec une erreur sur la position, l'amplitude ou la loi de l'évolution d'une structure dans le temps. C'est-à-dire, une erreur de phase, lors de la propagation des structures cohérentes des modèles. Donc, l'une des limites des modèles de prévision non-linéaire dans le domaine des instabilités des structures dynamiques, réside dans l'hypothèse de la discrétisation spatiale et temporelle. Cette conception induit une propriété d'intermittence qui justifie l'impossibilité de faire visualiser ce phénomène sauf qu'au moyen d'un zoom. Pour faire face à ce problème, la prévision n'est possible que lorsque la dynamique du système sera comprise, comme étant une propriété globale du système. Selon cette nouvelle vision, un système est traité dans son ensemble total, car ses propriétés globales ne peuvent pas se résumer à la somme des ingrédients, qui le forment. Cette remarque importante vient, en fait, renforcer plus tard l'importance empirique d'avoir recours, aux techniques de l'optimisation globale, pour élaborer des prévisions non-linéaires mais déterministes.

En ce sens, certains travaux portent sur la modélisation mathématique des fluctuations endogènes et des bifurcations montrent que de faibles non-linéarités peuvent conduire à des prévisions, totalement différentes, de ceux qu'on obtiendrait avec une approximation linéaire locale, inspirée, généralement, de la méthode géométrique de Woodford (1986). Ainsi, Pintus, Kozlovski, van Strien et de Vilder (2006), mettent l'accent sur les conséquences graves, qui consistent à rendre linéaire les modèles dynamiques. Ils montrent que certains attracteurs, créés, par exemple, lors de bifurcations, peuvent être éliminés, lors de la linéarisation et donnent des conditions suffisantes, qui garantissent l'absence de telles orbites, dans le modèle non linéaire de départ.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

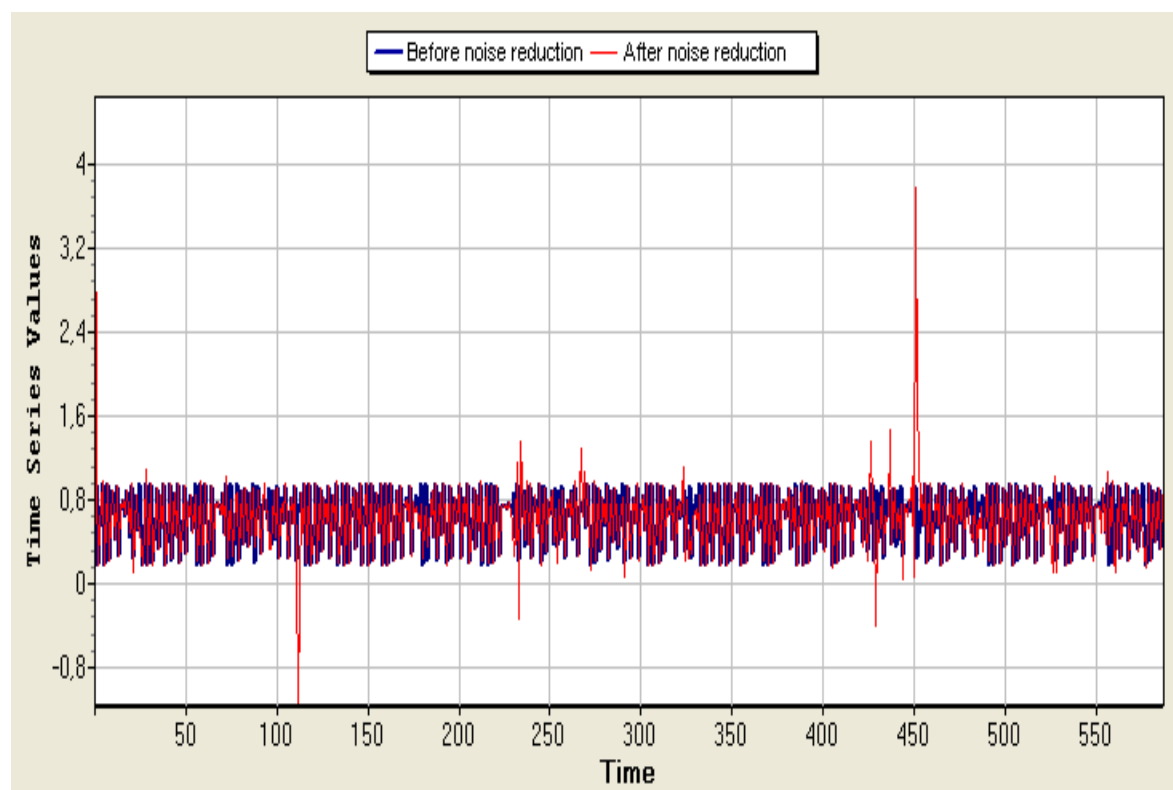
L'intéressant problème, dont souffre ce domaine, est la possibilité de la présence du chaos caractérisant la dynamique déterministe non-linéaire et qui risque de perturber l'objectif du prévisionniste, lorsqu'il cherche à étudier le comportement futur d'un système économique dynamique. Pour faire face à ceci, le prévisionniste doit penser au contrôle de la chaotité de la série de données, on y réduit la noise. La figure (2.53), montre qu'une augmentation de la dimension spatiale jusqu'à l'ordre huit, permet une réduction de la noise de 0.52 %.



**Figure 2.53: Réduction de la noise de 0.52% (Dimension=8, Délai=1, Neighbors=10)  
des N = 600 observations générées par  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$**

Par contre, une augmentation de la dimension spatiale jusqu'à l'ordre treize, permet une réduction de la noise de 33.24 %. Comme le montre la figure (2.54).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires



**Figure 2.54: Réduction de la noise de 33.24 % (Dimension=13, Délai=1, Neighbors=10)  
des  $N = 600$  observations générées par  $Y_{n+1} = 3.82 Y_n (1 - Y_n)$  avec  $Y_0 = 0.8$**

Il reste à souligner que, vue la possibilité d'existence des fluctuations endogènes inobservables de type cycle limite caractérisant la dynamique du système économique et qui sont contestées par les économistes comme Guo et Lansing (1998), Aloï, Lloayd-Braga et Whitta-Jacobsen (2003), Cazzavillan (2001) et Dos Santos Ferreira et Lloyd-Braga (2005). La question capitale qui se pose est de savoir, quel est le rôle de l'Etat pour réduire ses effets? Autrement dit, nous essayons de savoir, si une politique contracyclique, menée par l'Etat et dont le but d'atténuer ou même de faire disparaître ce type de fluctuations économiques, est avantageuse ou non pour le cas du secteur industriel Tunisien, qui sera exposé à une concurrence imparfaite, due aux effets de l'intégration dans le marché européen et mondial.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Contrairement à la pensée des monétaristes, qui critiquent le principe des politiques contracycliques<sup>158</sup>. Guo et Lansing (1998), montrent que la plupart des activités de l'Etat sont contracycliques cherchant à empêcher la surchauffe de l'économie et qualifient cette politique comme étant une politique de *stabilisation automatique*, dont l'action est immédiate. Dans ce cas, Guesnerie et Woodford (1992) et Guo et Lansing (1998), montrent qu'une telle politique cherche à stimuler l'économie, en période de ralentissement ou de récession (par des dépenses publiques supplémentaires, par des allègements d'impôts ou en facilitant la création monétaire) et à la freiner, en période d'accélération ou de *boom*, (par application en sens opposé des mesures semblables aux précédentes) et d'éviter ensuite, de tomber dans une crise profonde du type de celle qui est apparue en 2008 aux Etats-Unis et se propage facilement par effet, de contagion en Europe. Pour Venditti (1996), c'est l'action contracyclique de l'Etat, qui a permis à un certain nombre de pays de connaître la longue période de croissance dite « *Trente Glorieuses* ». En ce sens, nous sommes engagés pour l'étude des cycles limites de la production industrielle en Tunisie, afin de répondre à notre interrogation, concernant la politique de stabilisation et de permanence, dans le temps de la production et de la croissance, qui sont l'apanage du gouvernement. Pour cela, nous procédons à la modélisation des séries temporelles, par les modèles autorégressifs à changement de régime. Ce choix est fondé sur la logique, largement adoptée, par les théoriciens du cycle qui suppose le changement<sup>159</sup>. Ce type de modélisation est adopté par les économètres pour modéliser un cycle limite, à titre d'exemple Guégan (1994, p.45), propose d'utiliser les modèles à seuil : « *Le concept de cycle limite a été introduit par Poincaré et développé par Andronov... La modélisation d'un système par un modèle linéaire par morceaux, où le changement de régime est régi par un seuil permet de reproduire de tels*

---

<sup>158</sup> L'idée critique principale largement défendue par cette école est que les politiques contracycliques risquent d'agir à contre temps, et donc d'accentuer les fluctuations cycliques, au lieu de les affaiblir. Car entre le moment où, par exemple, une récession a été décelée et celui où les mesures destinées à la contrer deviennent effectives, il peut se passer un laps de temps important du à l'évaluation de l'importance de la récession, à la détermination des mesures à prendre, à leur acceptation par diverses instances, gouvernementales ou autres,..., de sorte que l'effet de relance s'exerce alors que l'économie est peut être déjà passée à un état de surchauffe où elle a besoin d'être plutôt ralentie.

<sup>159</sup> Par exemple pour Samuelson ou Marx le changement est le produit du système économique lui-même. Alors que pour les monétaristes ce sont les chocs monétaires qui sont à la base des fluctuations économiques. Par contre, le courant de cycle réel considère que des chocs réels qui provoquent la modification des paramètres de base de l'économie.

*phénomènes* ». Mais, vu que nous sommes engagés dans cette deuxième partie de traiter la problématique de la prévision non-linéaire dans un cadre de modèles dynamiques déterministes. Nous allons considérer, ici, la partie déterministe d'un modèle autorégressif, à changement de régime.

### 2.2.2.5. *Les outils de détection du chaos*

Dans cette sous section, nous avons tenté d'adopter une méthode permettant de détecter la présence du chaos, dans le comportement dynamique d'une série temporelle. Il y a en pratique trois outils, ce sont : les exposants de Lyapunov, les récurrences plots et la dimension de corrélation.

Concernant le premier outil, celui de l'exposant de Lyapunov, Wolff, Yao et Tong (2004), ont déclaré que cet instrument mesure la vitesse moyenne d'écartement exponentiel de deux trajectoires l'une de l'autre sur l'attracteur. C'est un moyen direct, capable de quantifier la sensibilité aux conditions initiales et par conséquent, il permet la détection du chaos. Pour estimer l'exposant de Lyapunov, nous avons recours à une simple simulation numérique, pour laquelle nous étudions l'évolution du système dynamique, à partir de deux conditions initiales différentes, mais très proches l'une de l'autre, dans le même bassin d'attraction. Dans ce cas, l'exposant de Lyapunov est une mesure de l'évolution de la distance euclidienne qui sépare les deux trajectoires, initialement voisines, induites par ces deux conditions initiales différentes. Ainsi, si à l'instant  $t_0$ , nous partons de deux trajectoires  $\tau_1$  et  $\tau_2$  appartenant au même bassin d'attraction, telle que la distance euclidienne  $d(\tau_1^{t_0}, \tau_2^{t_0}) = \varepsilon$ , et que nous projetons, itérativement, la dynamique sur  $T$  pas de temps, alors Kantz (1994), à montré que l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov se fait, selon l'expression suivante :

$$\lambda_{\max} \approx \frac{1}{T} \log \left[ \frac{d(\tau_1^{T+t_0}, \tau_2^{T+t_0})}{\varepsilon} \right]$$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Pour bien caractériser cette situation, nous avons l'impression qu'il est avantageux de choisir de faire appel à une simple analogie, entre le diagramme de bifurcation et le tracé de l'estimation, par simulation numérique de l'exposant de Lyapunov, donnée sur la figure (2.55).

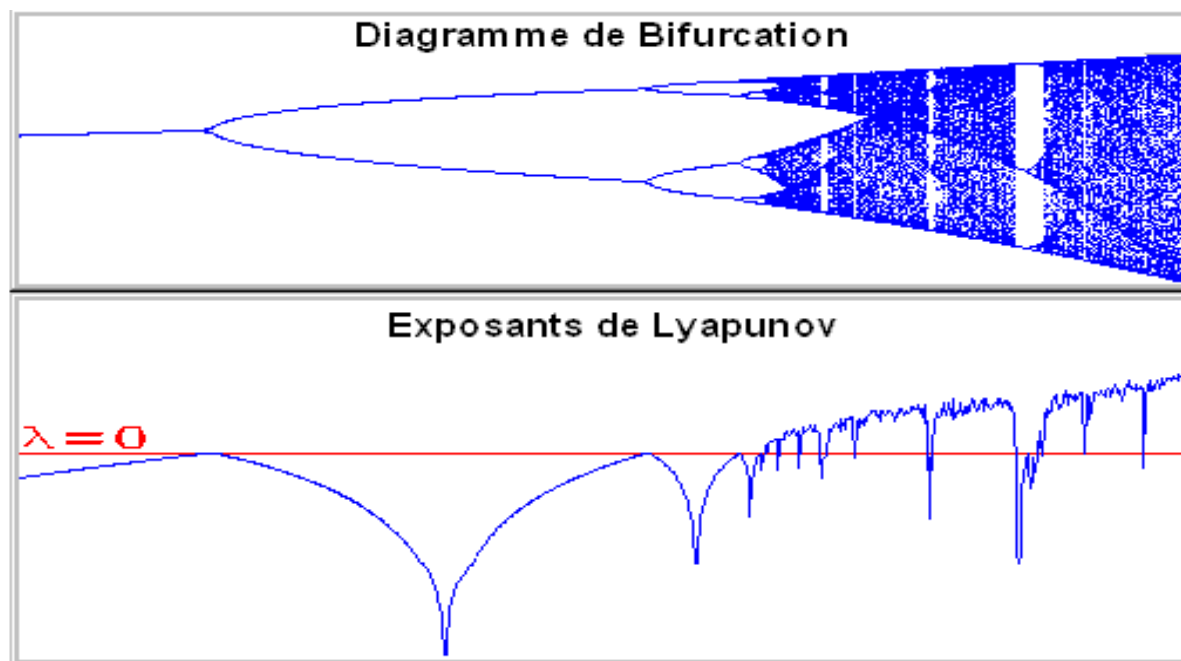


Figure 2.55: Détection du chaos par les exposants de Lyapunov

Notons tout d'abord que les exposants de Lyapunov peuvent prendre plusieurs valeurs numériques de différents signes. D'autre part, l'analogie entre le diagramme de bifurcation, qui est un changement de comportement qualitatif, lié à la perte de stabilité d'un attracteur et les exposants de Lyapunov de la figure (2.55), nous permet de constater que, lorsque l'attracteur est un point fixe stable, les exposants de Lyapunov, lui correspondant, ont tous des signes strictement négatifs, ce qui peut être expliqué par la présence de forces de contraction, entre deux trajectoires, très proches l'une de l'autre, dans le même bassin d'attraction. L'erreur sur les conditions initiales n'aura dans cette situation aucun impact, à long terme, et le système se stabilise avec le temps. Dans ce cas, plus la valeur négative de l'exposant de Lyapunov est grande, plus le système dynamique sera stable. En plus, les cycles limites sont apparus pour une valeur nulle de l'exposant et les autres valeurs sont strictement négatives, alors que les tores

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

d'ordres deux sont apparus pour deux valeurs nulles de l'exposant et les autres valeurs sont strictement négatives. Mais, dans le cas inverse, lorsque l'exposant de Lyapunov prend des valeurs positives, le système dynamique entre dans un régime chaotique, en perdant sa stabilité et par conséquent, il sera très sensible à une légère variation de sa condition initiale. Dans cette situation, la distance entre deux trajectoires, très proches l'une de l'autre, dans le même bassin d'attraction, tend à augmenter avec le temps, à une vitesse exponentielle. Le plus important de cette analogie, est de remarquer que les différentes transitions de la route vers le chaos, font apparaître de petites discontinuités, sur le diagramme de bifurcation, qui synchronisent avec des chutes pour la courbe des valeurs de l'exposant de Lyapunov. Ainsi, comme nous voyons que, par exemple, la transition d'un régime de point fixe, au régime de cycle limite, ou encore d'un régime de cycle limite, au régime de tore d'ordre deux s'accompagne, toujours, d'une petite discontinuité, sur la valeur de l'exposant. En plus, nous constatons que l'accrochage correspond à une petite rupture, et que le passage à la région positive juste après chaque traversée de l'axe nul des abscisses correspond à l'entrée du système dynamique dans un régime chaotique. De ce fait, l'accroissement rapide de la valeur de l'exposant marque une complexification graduelle, de la dynamique en fonction du temps. Donc, la présence d'un ensemble de valeurs positives strictement de l'exposant de Lyapunov est liée à la dynamique chaotique imprévisible sur le long terme à cause de sa grande sensibilité aux conditions initiales, qui se traduit géométriquement par l'hyperbolicité d'une région de l'espace des phases ayant une entropie topologique positive.

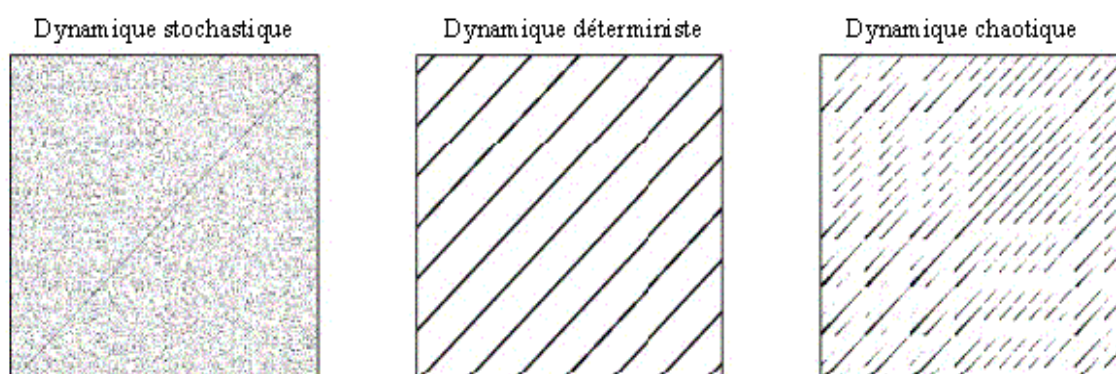


Figure 2.56: Quelques exemples de récurrence plots

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Concernant le second outil, celui des diagrammes de récurrence, qui ont été introduits par Eckmann, Kamphorst et Ruelle (1987), pour quantifier les propriétés de récurrences des processus dynamiques, parce qu'ils permettent de mesurer la similitude, lors du passage du processus, par des états voisins dans l'espace des phases, c'est-à-dire, pour lesquels la distance entre les points  $Y_i$  et  $Y_j$  représentatifs du système dynamique aux instants  $t_i$  et  $t_j$  est inférieure à un seuil  $\varepsilon$  donné. En d'autres termes, si nous supposons que même si une série temporelle montre une certaine régularité, l'étude basée sur le diagramme de récurrence permet, généralement, de détecter une très grande variabilité, observée durant des dynamiques irrégulières, qui peuvent être dues, dans certains cas, à la présence, soit d'un comportement bruité, déterministe, ou parfois chaotique. De ce fait, pour étudier la dynamique des fluctuations cycliques, d'une série temporelle, nous avons cherché à reconstruire l'attracteur par plongement de la série. Or, rappelons que lorsque nous ignorons le processus décrivant la dynamique d'une série temporelle, nous devons définir un ensemble de relations fonctionnelles dites « *m-historiques* » supposées représentatives, de la dynamique du processus générateur de données, grâce à la procédure de reconstruction de l'attracteur, appelée encore le plongement par la méthode des délais, qui consiste à partir d'une série temporelle scalaire initiale  $\{\widehat{Y}_t\}$  dans l'espace de phase naturelle, afin de reconstruire une nouvelle série temporelle vectorielle  $\{\widehat{Y}_t\}$  dans un espace de prolongement de dimension  $m$  avec  $m > 2N+1$ , où  $N$  est la dimension du système d'origine et de telle sorte que  $\widehat{Y}_t = (Y_t, Y_{t+\tau}, \dots, Y_{t+(m-1)\tau})$ , avec  $\tau$  est le délai de plongement. La construction des  $N - (m-1)\tau$  historiques permet alors de calculer la dimension<sup>160</sup> de corrélation, du processus générateur des données observées. Selon Takens (1981), pour des valeurs suffisantes de  $m$ , l'attracteur nouvellement reconstruit  $\{\widehat{Y}_t\}$  dans l'espace de prolongement admet, géométriquement, les mêmes propriétés topologiques, que celui de l'attracteur, initialement construit, dans l'espace des phases. Ce résultat semble important, parce qu'il permet, non seulement de caractériser le type de processus générateur des séries temporelles synthétiques, dont les caractéristiques se

---

<sup>160</sup> La notion de dimension est liée au nombre de coordonnées nécessaires pour représenter un attracteur dans l'espace des phases. Par exemple, pour un processus chaotique, cette dimension est finie mais non entière.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

---

rassemblent et sont à peu près identiques, à celui de processus générateur, mais aussi de révéler la grande complexité du mécanisme générateur de données. Sur la figure (2.56), nous avons présenté quelques exemples de récurrence plots. Il est d'abord nettement visible sur cette figure, que plusieurs types de dynamiques sont identifiables, à l'aide du graphique de la récurrence plot, ce qui signifie que les séries temporelles peuvent avoir des taux de récurrence assez distincts. Par exemple, si le graphe de récurrence ne permet pas de visualiser des lignes diagonales et montre, uniquement, des points isolés, dont la distribution est plus hétérogène, alors, l'irrégularité et la grande variabilité observée, lors de l'évolution de la dynamique des fluctuations cycliques, au cours du temps, ne proviennent pas de la présence de chaos déterministe, mais plutôt la structure associée à ce graphe, est typique, d'une dynamique aléatoire, qui pourrait provenir d'un processus stochastique, ce qui confirme la nature non-linéaire de la série temporelle étudiée. De plus, si un graphe montre la présence de segments obliques, non interrompus de parallèles à la diagonale principale, alors la structure associée à ce graphe est typique d'une dynamique déterministe. En d'autres termes, ceci signifie que si les deux points  $\widehat{Y}_{it}$  et  $\widehat{Y}_{jt}$  sont proches, alors les points  $\widehat{Y}_{it+1}$  et  $\widehat{Y}_{jt+1}$  ne peuvent pas être trop éloignés et par conséquent, l'absence de telle structure implique la prédominance d'un comportement dynamique aléatoire. Par contre, si un graphe montre un grand nombre de diagonales interrompues, ainsi que des points isolés, alors la structure associée à ce graphe est typique d'une dynamique chaotique<sup>161</sup>.

Concernant le dernier outil, celui de la dimension de corrélation (fractale) de l'attracteur a été déterminée, selon la méthode de Grassberg et Procaccia (1983b). La notion de dimension de corrélation s'appuie sur la fonction de corrélation (ou intégrale de corrélation),  $C(N, m, \varepsilon)$ , de dimension  $m$ , capable d'évaluer le nombre de voisins, définie comme la probabilité de trouver

---

<sup>161</sup> Notons bien que si le graphe de récurrence permet de visualiser des points isolés distribués de façon plus homogène et ne montre pas des lignes diagonales sauf au voisinage de la diagonale principale, alors la structure associée à ce graphe est typique d'une dynamique chaotique déterministe de faible dimension.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

une paire de points distants, de moins d'un certain rayon donné à priori  $\varepsilon$  dans un espace d'immersion<sup>162</sup>  $m$ -dimensionnel par :

$$C(N, m, \varepsilon) = \frac{2}{N_m(N_m - 1)} \sum_{t=1}^{N_{m-1}} \sum_{s=t+1}^{N_m} H_\varepsilon(\varepsilon - \|Y_t^m - Y_s^m\|)$$

où  $N_m = N - m + 1$ ,  $\varepsilon$  est un nombre suffisamment faible,  $H_\varepsilon(\cdot)$  est une fonction indicatrice de  $[0, \varepsilon]$ , qui prend la valeur unitaire pour les arguments positifs et zéro pour le reste, et  $\|\cdot\|$  indique la distance introduite par la norme maximum<sup>163</sup>. Dans ce contexte, l'intégrale de corrélation est le nombre des paires  $(t, s)$  pour les quelles, les séries correspondantes  $Y_t$  et  $Y_s$  sont proches entre elles le plus possible. Ce n'est autre que le nombre moyen de vecteurs éloignés les uns des autres, d'une distance inférieure à une certaine valeur  $\varepsilon$ . Intuitivement,  $C(N, m, \varepsilon)$  mesure, donc, la probabilité pour laquelle la distance entre les  $m$ -histoires  $Y_t^m(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+m-1})$  et  $Y_s^m(Y_s, Y_{s+1}, \dots, Y_{s+m-1})$  générées par deux séries dans un espace de phase de dimension  $N$  est inférieure que  $\varepsilon$ . Si  $C(N, m, \varepsilon)$  est large pour une valeur faible de  $\varepsilon$ , alors les données sont suffisamment corrélées entre elles. Quand  $N \rightarrow \infty$ , nous posons, alors,  $C(N, m, \varepsilon) \rightarrow C(m, \varepsilon) = \alpha \varepsilon^{D_C^m}$ . L'exposant  $D_C^m$  ainsi défini sera désigné la dimension de corrélation dans l'immersion  $m$ , dont l'estimateur est basé sur la statistique définie par :

$$\hat{D}_C^m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d \log C(N, m, \varepsilon)}{d \log \varepsilon}$$

La dimension de corrélation à proprement parler est définie comme :

$$D_C = \lim_{m \rightarrow \infty} D_C^m$$

En conclusion, la méthode de Grassberger et Procaccia (1983b), consiste à dessiner le graphe de  $\log C(N, m, \varepsilon)$  en fonction de  $\log(\varepsilon)$  et nous cherchons une partie du graphique, à peu

---

<sup>162</sup> Ruelle et Takens (1971), ont montré qu'à partir de l'évolution d'une des variables dynamiques du système  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ , nous pourrions construire un espace d'immersion ayant les mêmes propriétés topologiques (dimension de plongement, ...) à l'espace de phase original à travers l'introduction d'un délai temporel  $\tau$ .

<sup>163</sup> La norme maximum vérifie :  $\|Y_t^m - Y_s^m\| = \max_{i=0,1,\dots,m-1} |Y_{t+i} - Y_{s+i}| < \varepsilon$ .

près linéaire, pour des valeurs de  $\varepsilon$  aussi faible que possible, la pente de cette droite donne l'estimateur de la dimension. Si le système est chaotique, alors la dimension de corrélation est stabilisée en quelque valeur de  $D_c$ . En plus, du fait que  $D_c^m$  est stabilisé, c'est l'unique condition nécessaire pour détecter la dynamique chaotique du système, alors cette notion ne donne qu'une indication préliminaire, concernant la possibilité d'existence d'un processus chaotique.

Nous achevons, maintenant, la présentation des principaux outils de détection du chaos et nous abordons, tout de suite, l'analyse prévisionnelle des séries temporelles basée sur des techniques locales.

## **2.3. Une approche dynamique en prédiction de séries temporelles non-linéaires**

### **2.3.1. Structures cohérentes et prévisibilité par des techniques non-paramétriques locales**

Ce qui nous prétendons, lorsque nous nous intéressons à l'analyse prévisionnelle par l'approche dynamique non-linéaire, c'est que la prévision, dans le domaine des instabilités des structures, par des modèles non-linéaires stochastiques notamment économétriques, n'est pas tout à fait parfaite. Car, il est amplement reconnu et divulgué par les recherches sur la prévision à l'aide des modèles économétriques non-linéaires, que d'une part elle considère que les fluctuations macroéconomiques sont d'origines purement exogènes (des chocs réels d'offre ou de demande, des chocs monétaires, des chocs technologiques...), d'autre part elle néglige l'hypothèse d'instabilité endogène, liée à la sensibilité aux conditions initiales et/ou présence des structures dynamiques complexes apériodiques. Or, l'étude menée, jusqu'à cette étape, montre que le cycle économique est de nature purement endogène et que l'hypothèse d'instabilité peut, généralement, conduire à la présence d'une dynamique non-linéaire déterministe (sans bruit), qui gouverne les fluctuations cycliques, dont le chaos peut être, parfois, total et dans d'autre cas, est organisé. Mais, ayant des conséquences graves sur la modélisation et par la suite sur la prévision.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

En ce sens, cette limitation de la prévision, par des modèles non-linéaires stochastiques, réside dans la possibilité de la dynamique économique, de retomber dans des situations chaotiques plus ou moins complexes et même fractales. L'irrégularité des fluctuations macroéconomiques est un synonyme de l'instabilité structurelle, caractéristique fondamentale d'un cycle endogène, généralement non périodique. La non-périodicité du cycle, est l'une des principales lacunes, qui empêchent la réalisation des modèles de prévision parfaite. Car, si au contraire, nous supposons d'admettre l'hypothèse de périodicité, nous pourrions faire des prévisions efficaces, puisque la dynamique traitée, dans ce cas, se répète d'une façon périodique. Mais, notre étude montre que le cycle économique est généralement non-linéaire, cette irrégularité intrinsèque laisse tomber l'hypothèse de la périodicité. L'analyse montre que la non périodicité de la dynamique des fluctuations macroéconomiques, décrit une situation chaotique hors équilibre et prend différentes formes. En plus, le degré de cohérence est un facteur déterminant de la complexité structurelle du dynamisme. En ce sens, Brock et Sayers (1988), Abraham-Frois (1998), Puu et Sushko (2004) et Sushko, Wegener, Westerhoff et Zaklan (2009), ont signalé la possibilité d'avoir plusieurs structures caractérisant la dynamique cyclique (chaos, couplage, fractale<sup>164</sup>...) et l'importance des analyses, afin de les discriminer. Mais les plus intéressantes, parmi elles, en prévision sont les phénomènes qui apparaissent aux voisinages les plus proches possible, de l'équilibre dus à la présence des fluctuations autoentretenues quasi-périodiques et plus spécifiquement, les phénomènes amortis (cas de cycle limite). Un cycle limite est doté d'une structure dynamique instable, mais quasi-cohérente, qui peut être prévisible par technique de régression locale<sup>165</sup> développée, récemment, par Fan (1992), Fan (1993), Fan, Gasser, Gijbels, Brockmann et Engel (1993), et Fan, Yao et Tong (1996). Car, plus les fluctuations du cycle limite convergent vers l'équilibre d'une manière amorti, plus leurs amplitudes diminuent et par conséquent le degré de cohérence des fluctuations sera important, ce

---

<sup>164</sup> Le comportement d'un système chaotique sera doté d'une structure fractale, lorsqu'il se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes.

<sup>165</sup> La technique locale de prévision fait appel à une gamme d'algorithmes locaux qui ne donnent pas de modèle de la fonction à prévoir, mais ils assurent seulement une prévision de la fonction en un point donné. Cette gamme d'algorithmes locaux comporte : les algorithmes à plus proches voisins qui retournent pour valeur une moyenne des points voisins les plus proches, les algorithmes à lissage par noyaux qui regagnent une moyenne des voisins compris liés à des voisinages bien choisis et les algorithmes à régression locale qui ajustent une courbe ou une surface sur un ensemble de voisins du point visé.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

qui implique des structures quasi-cohérentes. À cet égard, nous considérons, à la manière de Yao et Tong (1994), le processus  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , généré par le modèle simple décrit par :

$$Y_t = f(Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

où  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \sim iid(0, \sigma^2)$ , et  $\varepsilon_t$  est indépendante de  $\{Y_{t-k}, k \geq 1\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Afin de tenir compte, uniquement, de la dynamique déterministe du modèle, nous supposons  $|\varepsilon_t| \leq \eta_t$  avec  $\eta_t > 0$  est une erreur déterministe infinitésimale. L'amplification de la noise est, nécessairement, déterminée par une décomposition de Taylor<sup>166</sup> à un ordre choisi. Par exemple pour  $h \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} Y_h &= f\{f(Y_{h-2}) + \varepsilon_{h-1}\} + \varepsilon_h \\ &= f^{(2)}(Y_{h-2}) + df\{f(Y_{h-2})\}\varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h \end{aligned}$$

Notons que  $Y_{h-2} = f^{(h-2)}(Y_0) + O(\eta_t)$ , alors

$$Y_h = f^{(2)}(Y_{h-2}) + df\{f^{(h-2)}(Y_0)\}\varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h + O_p(\eta_t^2)$$

et par application itérative de la formule de Taylor, nous obtenons :

$$Y_h = f^{(h)}(Y_0) + \varepsilon_h + df\{f^{(h-1)}(Y_0)\}\varepsilon_{h-1} + \dots + \left\{ \prod_{j=1}^{h-1} df[f^{(j)}(Y_0)] \right\} \varepsilon_1 + O_p(\eta_t^2)$$

où,  $df$  est la dérivée première de  $f$ , et  $f^{(j)}$  est la  $j^{\text{ème}}$  ordre de décomposition locale de  $f$ . Si nous désignons par  $Y$  la première composante de  $Y_h$ , alors nous avons les caractéristiques :

$$\sigma_h^2(Y) = Var\{Y_h \setminus Y_0 = Y\} = \mu_h(Y)\sigma^2 + O(\eta^3)$$

$$\text{avec, } \mu_h(Y) = 1 + \sum_{k=1}^{h-1} \left\{ \prod_{j=1}^{h-1} df[f^{(j)}(Y)] \right\}^2.$$

Si  $df(\cdot)$  est constante, alors  $\sigma_h^2(Y)$  et  $\mu_h(Y)$  sont les deux constants. L'amplification de la noise est déterminée à partir de  $\mu_h(Y)$ . Plusieurs techniques locales qui découlent de la méthode non

<sup>166</sup> La décomposition locale d'une régression polynômiale  $f_k(\cdot)$  de degré  $k$  au voisinage d'un point  $Y$  au sens de Taylor à l'ordre  $T$ , donne :

$$f_k(Y_t) \approx \sum_{i=0}^T \frac{df_k^{(i)}(Y)}{i!} (Y_t - Y)^i$$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

paramétrique sont adoptées, afin de prédire ce modèle, autour d'une condition standard de régularité.

En ce sens, si nous désirons prédire  $Y_{T+h}$  ( $h \geq 1$ ) à partir des  $p$  valeurs observées,

$$Y_T = (Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_{T-p+1})'$$

la somme des carrés des prédicteurs est donnée par :

$$f_{T,h}(Y_T) = \arg \inf_f E\{Y_{T+h} - f(Y_T)\}^2$$

avec,  $f_{T,h}(Y) = E\{Y_{T+h} \mid Y_T = Y\} \equiv f_h(Y)$ .

Dans ce cadre de modélisation non paramétrique, Breidt et Opsomer (2005), ont proposé d'utiliser des P-splines, tandis que Goga (2005), a proposé une approche B-splines. D'autres approches, effectuant un calage non paramétrique, par des polynômes locaux, ont aussi été envisagées, notamment, par Montanari et Ranalli (2005). En plus, l'estimateur non-paramétrique, ainsi obtenu, pourra être linéarisé, en utilisant les fonctions d'influence partielles introduites par Goga, Deville et Ruiz-Gazen (2009). Par contre, Härdle (1989), a proposé une approche basée sur les polynômes locaux. En ce sens, Breidt et Opsomer (2000), ont déclaré que la régression locale, par lissage par noyau, revient à ajuster un polynôme constant, sur le voisinage défini par le noyau. Farmer et Sidorowich (1988), ont proposé d'appliquer une méthode locale de prédiction linéaire, afin d'analyser des séries temporelles non-linéaires. Tschernig et Yang (2000), ont fait l'extension de cette méthode, dans le cadre de sélection de modèles non-paramétrique, en prédiction de séries temporelles non-linéaires. Plusieurs applications de cette méthode sont effectuées par Tschernig (2004). Cette méthode de sélection de modèle non-paramétrique de prévision non-linéaire, est fondée sur les techniques d'estimations non-paramétriques, par des polynômes locaux. En ce sens, Fan, Heckman et Wand (1995), et Hjellvik et Tjøstheim (1996), ont suggéré que ces techniques d'approximations polynomiales, locales se ramènent, en général, à l'estimation d'une régression non-paramétrique, donnée par la fonction  $f_h(\cdot)$ . Si nous posons  $\hat{\alpha} = \hat{f}_h(\cdot)$  et  $\hat{\beta} = d\hat{f}_h(\cdot)$ . Alors nous avons,

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \underset{\alpha, \beta}{\text{Min}} \left[ \sum_{t=p}^{T-h} \{Y_{t+h} - \alpha - \beta(Y_t - Y)\}^2 K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) \right]$$

où,  $K(\cdot)$  est la fonction noyau<sup>167</sup> (*kernel*) sur  $\mathfrak{R}^p$ , et  $b = b(T)$  est le *bandwidth*. Un calcul simple donne l'estimateur de Nadaraya et Watson (1964)<sup>168</sup> suivant :

$$\hat{f}_h(Y) = \frac{L_0(Y) - M_1'(Y)M_2^{-1}(Y)L_1(Y)}{M_0(Y) - M_1'(Y)M_2^{-1}(Y)M_1(Y)}$$

et

$$d\hat{f}_h(Y) = \{M_2(Y) - M_1(Y)M_1'(Y)/M_0(Y)\}^{-1} \{M_1(Y)L_0(Y)/M_0(Y) - L_1(Y)\}$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(Y) = \sum_{t=p}^{T-h} Y_{t+h} K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) \\ L_1(Y) = \sum_{t=p}^{T-h} (Y - Y_t) Y_{t+h} K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) \\ M_0(Y) = \sum_{t=p}^{T-h} K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) \\ M_1(Y) = \sum_{t=p}^{T-h} (Y - Y_t) K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) \\ M_2(Y) = \sum_{t=p}^{T-h} (Y - Y_t) K\left(\frac{Y_t - Y}{b}\right) (Y - Y_t) \end{array} \right.$$

En ce sens, l'estimateur de Nadaraya et Watson de la variance s'écrit :

<sup>167</sup> Une fonction noyau est une fonction symétrique, continue, bornée et ayant une somme égale à l'unité. L'une de ces principales caractéristiques est qu'elle atteint sa valeur maximale en zéro et sa valeur diminue au fur et à mesure que nous nous éloignons de l'origine. L'expression générale de la fonction noyau est :

$$K_b(Y_t - Y) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{b^m} K\left(\frac{Y_{ti} - Y_i}{b}\right)$$

<sup>168</sup> Nadaraya, E., (1964), « *On estimating regression* », *Thory of probability and its applications*, 10, pp. 186-217. Et Watson, G., (1964), « *Applied linear regression.* », *Sankhya, Series A(26)*, pp. 359-372.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

$$\hat{\sigma}^2 (Y, \hat{b}_\sigma, \hat{b}) = \frac{\sum_{t=1}^T K_{\hat{b}_\sigma} (Y_{\sigma,t} - Y_\sigma) \hat{\varepsilon}_t^2 (\hat{b})}{\sum_{t=1}^T K_{\hat{b}} (Y_{\hat{\sigma},t} - Y_\sigma)}$$

Sugihara et May (1990), ont utilisé la méthode déterministe, basée sur l'algorithme du simplexe, pour prévoir des séries non-linéaires de types taches solaires. Ceci a permis de résoudre la limitation de la prévision, par des modèles non-linéaires, stochastiques qui résident dans la possibilité de la dynamique économique de retomber, dans des situations chaotiques imprédictibles. D'un autre côté, afin de résoudre cette limitation de la prévision par des modèles non linéaires stochastiques, lorsqu'il y a possibilité de la dynamique économique de retomber plus dans des situations chaotiques. Hall, Wolff et Yao (1999), ont introduit des méthodes locales paramétriques, basées sur deux techniques. La première fait appel à l'estimation locale d'une distribution logistique, alors que la seconde est une technique ajustée de la méthode d'estimation de Nadaraya et Watson, d'une fonction de densité. Pour Mitchell et Hall (2005), cette dernière technique est basée sur un lissage *weighted*. En ce sens, si nous désirons prédire la distribution de  $Y_{T+h}$  ( $h \geq 1$ ) à partir des  $p$  valeurs observées,

$$Y_T = (Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_{T-p+1})'$$

La distribution conditionnelle de  $Y_{T+h}$  sachant  $Y_T$  est estimée par l'une des deux méthodes étudiées par Hall, Wolff et Yao (1999). Nous considérons un processus stochastique strictement stationnaire  $\{(Y_t, \tilde{Y}_t)\}_{t=0, \dots, T}$  tel que  $Y_t = (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+1})'$  est un vecteur à  $p$  composantes et  $\tilde{Y}_t = Y_{t+h}$ ,  $h \geq 1$  est scalaire. La fonction de distribution conditionnelle des coupes *iid*  $(Y_t, \tilde{Y}_t)$  est donnée par :

$$F(\tilde{Y} \setminus Y) \equiv \Pr o(\tilde{Y}_t \leq \tilde{Y} \setminus Y_t = Y)$$

tel que pour  $\tilde{Y}$  fixé, alors  $p(Y) = F(\tilde{Y} \setminus Y)$  et  $p(\cdot)$  est continue et dérivable à l'ordre de  $q-1$ .

Le modèle local logistique généralisé, associé à  $p(Y)$  admet la forme :

$$p(Y, \Psi) \equiv \frac{Z(Y, \Psi)}{\{1 + Z(Y, \Psi)\}} \equiv \sum_{i=1}^q \psi_i Y^{i-1}$$



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

où,  $Z(\cdot, \Psi)$  est une fonction non négative, qui dépend du vecteur des paramètres  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)$ , associées respectivement au  $(p(Y), p^{(1)}(Y), p^{(2)}(Y), \dots, p^{(q-1)}(Y))$ . En ce sens, la détermination du modèle local consiste à l'estimation de la fonction  $\hat{F}(\tilde{Y} \setminus Y) \equiv p(0, \hat{\Psi})$ , tel que  $\hat{\Psi}$  est l'estimateur de Nadaraya et Watson du programme :

$$Q(\Psi, Y, \tilde{Y}) = \underset{\hat{\Psi}}{\text{Min}} \left[ \sum_{t=1}^T \left\{ I(\tilde{Y}_t \leq \tilde{Y}) - p(Y_t - Y, \Psi) \right\}^2 K_b(Y_t - Y) \right]$$

où,  $K(\cdot)$  est la fonction noyau sur  $\mathfrak{R}^p$ , et  $K_b(\cdot) = b^{-1} K(\cdot/b)$ ,  $b > 0$  est le *bandwidth*. Cette limitation de la prévision, par des modèles non-linéaires, par l'approche d'estimation locale, de la distribution logistique, réside dans sa dépendance du choix du *bandwidth*. La sélection du *bandwidth* est assurée par le recours à la simulation numérique, par la technique de bootstrap et la performance de l'estimateur choisie est évaluée en terme de la déviation de l'erreur moyenne absolue (MADE) donnée par :

$$MADE = \frac{\sum_i \left| \hat{F}(\tilde{Y}_i \setminus Y_i) - F(\tilde{Y}_i \setminus Y_i) \right| I(0.001 \leq F(\tilde{Y}_i \setminus Y_i) \leq 0.999)}{\sum_i I(0.001 \leq F(\tilde{Y}_i \setminus Y_i) \leq 0.999)}$$

où,  $\hat{F}(\tilde{Y}_i \setminus Y_i)$  est l'estimateur de  $F(\tilde{Y}_i \setminus Y_i)$ .

Il convient de noter que Tschernig et Yang (2000), ont souligné que l'utilisation de modèles non paramétriques permet de couvrir une classe, beaucoup plus large, de relations entre information auxiliaire et variable d'intérêt, en imposant, uniquement, des conditions de régularité et plus exactement, de dérivabilité sur la fonction de régression. Il faut toutefois remarquer que, contrairement aux estimateurs classiques de modèles linéaires, les estimateurs fondés sur des modèles non paramétriques nécessitent que l'information auxiliaire soit connue, quelque soit  $t$ . Récemment, Smith (1995) et Tschernig (2004), ont proposé des estimateurs assistés par un modèle non paramétrique, en utilisant une approche par polynômes locaux qui servent à la prédiction non paramétrique des séries temporelles. Parmi ces estimateurs, nous distinguons l'estimateur de la moyenne conditionnelle, qui sert à la prédiction ponctuelle.

### 2.3.1.1. Prédiction ponctuelle

Soient  $Q = (1, 0_{1 \times m})'$ ,  $Z(Y) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ Y_{i_m+1} - Y & \dots & Y_T - Y \end{pmatrix}'$ ,  $H(Y, b) = \text{diag} \{ K_h(Y_t - Y)/T \}_{t=i_m+1, \dots, T}$

et  $\tilde{Y} = (Y_{i_m+1} \dots Y_T)'$  des matrices ainsi définies. Tschernig et Yang (2000), ont proposé l'estimateur non paramétrique linéaire local, susceptible d'améliorer la précision de la prédiction ponctuelle. Cet estimateur n'est autre que de la moyenne conditionnelle, notée  $\mu(\cdot)$  et définie par :

$$\hat{\mu}(Y, \hat{b}) = Q' \{ Z'(Y) H(Y, \hat{b}) Z(Y) \}^{-1} Z'(Y) H(Y, \hat{b}) \tilde{Y}$$

### 2.3.1.2. Prédiction par intervalle de confiance

Notons que Tjøstheim et Auestad (1994), ont défini l'estimateur noyau robuste d'une fonction  $f(\cdot)$  par :

$$\hat{f}(Y, \hat{b}) = (T - i_m + i_1)^{-1} \sum_{t=i_m+1}^{T+i_1} K_{\hat{b}}(Y_t - Y)$$

En ce sens, la prédiction par intervalle de confiance basée sur l'estimateur noyau robuste est définie comme suit :

$$\left[ \hat{\mu}(Y, \hat{b}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(\hat{\sigma}^2(Y, \hat{b}_\sigma, \hat{b}) \| K \|_2^{2m}) / \hat{f}(Y, \hat{b})}{T \hat{b}}} \right]$$

où  $z_\beta$  est le quantile d'ordre  $(1-\beta)$  de la loi normale et  $\hat{\sigma}^2(Y, \hat{b}_\sigma, \hat{b})$  est l'estimateur de la variance conditionnelle défini par :

$$\hat{\sigma}^2(Y, \hat{b}_\sigma, \hat{b}) = Q' \{ Z'(Y_\sigma) H(Y_\sigma, \hat{b}_\sigma) Z(Y_\sigma) \}^{-1} Z'(Y_\sigma) H(Y_\sigma, \hat{b}_\sigma) \hat{\varepsilon}^2(\hat{b})$$

où  $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\mu}(Y_t, \hat{b})$  est l'erreur estimée définie pour  $t = i_m + 1, \dots, T$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

L'analyse des résultats portés sur le tableau (2.10), de prévision par la méthode non paramétriques de type polynômes locaux de Tschernig et Yang (2000), montre que la prédiction par intervalle de confiance, malgré qu'elle reste une tâche possible pour les séries de la production industrielle en Tunisie, en présence des fluctuations endogènes étudiées en détail dans la première partie, toutefois, elle donne des prédictions imprécises et non fiables. Ces prédictions imparfaites peuvent rendre compte de la présence des fluctuations endogènes, qui gouvernent les dynamiques des séries industrielles et par conséquent, stimulent le fonctionnement systématique des secteurs industriels. C'est-à-dire que, ces fluctuations qui causent les périodes de récessions industrielles, montrées sur les figures (1.3) et (1.4) peuvent être de natures complexes et incohérentes. Ainsi sommes-nous conduits, tant pour des raisons objectives de description des sources et finalités des prévisions, que pour des raisons méthodologiques à essayer de répondre à la question : Comment les erreurs (ou les écarts) prennent naissance dans les fluctuations endogènes des cycles de la production industrielle en Tunisie?

**Tableau 2.10 : Resultants of out-of-sample forecast**

Variables	BP	ED	PV	ECEV	EPEV	PE
<b>IPI</b>	12.067828	0.00017424724	178.08401	156.26624	159.99569	[153.29 ; 202.87]
<b>IAA</b>	17.280269	5.6497982e-005	184.63167	301.71206	312.38726	[149.99 ; 219.27]
<b>ICCV</b>	18.846288	0.0001158406	168.04902	294.0282	297.93385	[134.21 ; 201.87]
<b>IME</b>	40.155286	9.2222021e-006	304.70029	912.18561	951.13053	[244.25 ; 365.14]
<b>IC</b>	13.446691	0.00026126402	164.99096	103.47814	104.6175	[144.94 ; 185.03]
<b>IHC</b>	23.953383	6.847797e-005	194.89817	793.87061	805.94808	[139.25 ; 250.54]
<b>IMD</b>	12.702727	0.00010881525	170.70529	48.330024	50.099441	[156.83 ; 184.57]
<b>IM</b>	14.114693	9.9443941e-005	208.38181	242.39239	250.39813	[177.36 ; 239.39]
<b>M</b>	8.7393968	0.0003636513	121.56952	81.573456	83.443836	[103.66 ; 139.47]
<b>E</b>	4.4517413	0.00023079572	131.42825	14.065415	16.125313	[123.55 ; 139.29]

*BP ; ED ; PV ; ECEV ; EPEV et PI iniquity Bandwidth used for Prediction ; Estimated Density ; Estimated Conditional Error Variance ; Estimated Prediction Error Variance et Prediction Interval (respectivement). Level of prediction interval is 0.95. Référence: Tschening & Yang (2000, Journal of Time Series Analysis, 21, 457-487).*

*Source: Tests réalisés sur JMulti 4.*

L'étude menée à ce niveau d'analyse, montre que les fluctuations cycliques endogènes sont une source non négligeable d'instabilité. Plus précisément, l'analyse déterministe au moyen d'un système dynamique indique que ces fluctuations cycliques endogènes sont, généralement, imprévisibles par les techniques standard paramétriques et non paramétriques, à cause de la

présence des comportements dynamiques chaotiques sous-jacents. Ceci, nous conduit à penser à d'autres techniques, qui peuvent être plus favorables, en cas d'explosion d'erreurs et l'émergence des structures dynamiques incohérentes.

### **2.3.2. Structures incohérentes et croissance de l'erreur de prévision**

Si nous admettons, maintenant, qu'une infime modification des conditions initiales, d'un processus non linéaire dynamique et déterministe bouleverse complètement son évolution, alors, nous rappelons le cas d'un phénomène chaotique (caractérisant un système dissipatif entretenu), et nous devons étendre nos travaux, sur de nouvelles bases de réflexion concernant le contrôle du chaos déterministe et la prévisibilité. Dans ce cadre, nous ne pourrions plus parler de cohérence des structures car dans ce cas, comme nous avons, déjà, noté que faute de connaissance avec une exactitude parfaite, des conditions initiales, la prévision à long terme est une tâche très délicate et imprécise, même lorsque les lois statistiques, commandant un processus générateur de données sont déterministes et exactement connues. Ceci découle du fait, que pour tout état initial, la dynamique non linéaire converge rapidement, vers l'attracteur du processus déterministe et poursuit son évolution sur cet attracteur. Ces constatations nous orientent vers la déduction, selon laquelle les caractéristiques déterministes et prévisibles régies par un processus dynamique non linéaire, extrêmement sensible aux conditions initiales, ne sont pas synonymes de cohérence et de stabilité, surtout, lorsqu'en présence d'un comportement chaotique imprévisible, le dynamisme non-linéaire du processus déterministe générateur des données, rend difficiles les prévisions à long terme. Autrement dit, il existe des processus dynamiques très simples, qui obéissent à des lois statistiques, parfaitement déterministes et dont le comportement est, totalement imprévisible, où l'instabilité de l'équilibre par couplage de périodes localement instables, est le mécanisme générateur de fluctuations aperiodiques privilégié, dans la littérature de la théorie de chaos, où il y a un peu de désordre, dans l'ordre et de l'ordre dans le désordre. En ce sens, au lieu de parler du degré de cohérence des structures, en présence du chaos, caractérisé par une large dépendance

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

sensible aux conditions initiales, c'est-à-dire, un déterminisme imprévisible, nous parlons du degré de complexité des structures. La complexité des structures chaotiques dépend de l'intensité de l'attracteur étrange, source de génération de ces structures bizarres. Pour cette raison, nous avons découvert plusieurs formes de complexités structurelles, qui tendent à la limite, à converger vers des formes fractales. Lorenz (1963-1969), a prouvé que la fondamentale caractéristique de ces attracteurs, selon laquelle deux états proches sur un attracteur étrange peuvent engendrer des trajectoires très variées. Ceci prouve que la distance, entre les deux états initiaux, peut subir un processus de croissance exponentielle avec le temps, voire un autre processus plus rapide<sup>169</sup>. En ce sens, la prévisibilité est très difficile (presque impossible dans certains cas) pour le cas des systèmes chaotiques, où la cohérence structurelle est détruite par une complexité variante, selon leurs degrés de sensibilité aux conditions initiales. Cette idée découle d'un constat important introduit par Poincaré (1908), sur l'impossibilité de prédire les valeurs futures des variables, en présence de fluctuations chaotiques, où le chaos est qualifié de total.

*«...Si nous connaissions, exactement, les lois de la nature et la situation de l'univers au moment initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un moment futur. Mais même si les lois de la nature n'avaient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. [...] Il peut arriver que de petites différences, dans les conditions initiales produisent de grandes différences dans les phénomènes finaux, une petite erreur, au niveau des premières conduisant à une énorme erreur aux niveaux des seconds. La prévision devient alors impossible...».*

(Poincaré, H., (1908), p.68)

En postulant sa théorie reconnue sous le nom d'*effet papillon*<sup>170</sup> de la croissance de l'erreur de prévision due aux incertitudes sur l'état initial, Lorenz (1963), a décrit les conséquences de sa découverte dans un article de base : *Deterministic Non-Periodic Flow*, apparu

---

<sup>169</sup> Pour l'intéressé, voir Farrell et Ioannou (1996).

<sup>170</sup> Cette théorie prenant le titre d'une de ses conférences qui était « *Prévisibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il aboutir à une tornade au Texas?* » est expliquée par Lorenz (1993a), dans son livre « *L'essence du chaos* », implique l'un des fondements de la théorie de chaos est la sensibilité critique aux conditions initiales. Lorenz expliquait comment le battement des ailes d'un papillon (au Brésil), après quelques mois, a un tel effet sur l'atmosphère de la terre entière qu'il peut donner lieu à une tempête dévastatrice dans une contrée éloignée (au Texas).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

dans le journal of Atmospheric Sciences. « *Cela implique, dit-il, que deux états qui ne diffèrent que par d'infimes quantités peuvent évoluer vers deux états totalement différents. Partant de là, s'il y a la moindre erreur dans l'observation d'un état au temps présent, et de telles erreurs semblent inévitables dans n'importe quel système réel, il se pourrait bien qu'il soit impossible de faire une prédiction valable de ce que deviendra cet état dans un futur lointain.* ».

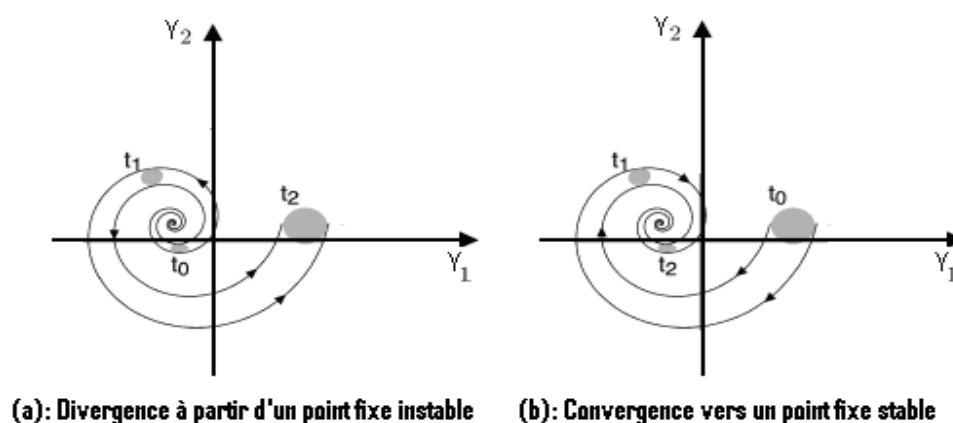


Figure 2.57: Évolution des conditions initiales

Lorenz (1993a), a signalé la présence d'un problème d'imprévisibilité<sup>171</sup> due à la dépendance sensible aux conditions initiales, en constatant que « *si, après quelques itérations, l'erreur est aussi importante que la valeur calculée, le système est non seulement sensible, il est de plus chaotique* ». Dans la même vision, Brock, Hsieh, et LeBaron (1991), ont montré que l'intérêt de l'étude de la croissance des erreurs, c'est qu'elle nous permet d'avoir une meilleure compréhension de la sensibilité aux conditions initiales. En ce sens, la conceptualisation au moyen de la figure (2.57), nous aide à mieux comprendre le fonctionnement du processus de croissance de l'erreur de prévision. Quand les orbites divergent, à partir d'un point fixe instable, la région grisée sur la figure (a) grossit. Mais, la région grisée ne peut pas croître indéfiniment, puisque la taille réelle de l'espace de phase ne peut pas être infinie. Les orbites ne peuvent pas se croiser et finissent, donc, toujours par se rejoindre. Dans ce cas, on dira que l'état futur du système reste relativement bien connu. Si au contraire les orbites convergent vers un point fixe

<sup>171</sup> Le problème d'imprévisibilité implique que même de très petites différences dans les conditions initiales donneront naissance à des trajectoires très largement différentes dans le futur.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

stable, ou vers un cycle limite, la région grisée sur la figure (b) rétrécit et l'état futur est, donc, relativement bien connu.

Quantitativement, en 1892 Lyapounov a montré que les systèmes fortement chaotiques sont caractérisés par la croissance localement *exponentielle* de l'erreur, sur les conditions initiales avec le temps, pour presque toutes les conditions initiales, voisines d'un point donné, selon une loi de type :

$$\exp(t/\zeta)$$

où  $\zeta$  est l'horizon de Lyapounov : un temps caractéristique du système chaotique considéré. Si  $t \ll \zeta$ , alors le caractère prédictible reste valable. Sinon ( $t \gg \zeta$ ), alors le caractère prédictible est invalide.

Après avoir analysé les propriétés des structures instables, nous constatons que même le recours à la modélisation non-linéaire déterministe, peut affecter la prévisibilité<sup>172</sup> du cycle et y engendrer des erreurs de prévision par deux causes :

Premièrement, la sensibilité aux conditions initiales montre que la prévisibilité du cycle dépend de l'état initial, puisque l'erreur sur les conditions initiales n'est pas nulle, mais elle croît dans le temps. La répercussion de la croissance des erreurs a de graves incidences sur la prévision.

Deuxièmement, la modélisation des fluctuations économiques est imparfaite, puisque les discrétisations spatiales et temporelles et l'instabilité des structures du modèle dynamique, engendrent des erreurs, par rapport à l'évolution réelle du cycle. Par la suite, nous pouvons rigoureusement appréhender que les erreurs de prévision puissent être produites par la variabilité des caractéristiques structurelles de la conjoncture.

---

<sup>172</sup> La prévisibilité est la capacité de prévoir le cycle endogène.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Comme nous voyons, les erreurs de prévisions ne proviennent pas seulement de la modélisation stochastique, mais aussi du dynamisme du modèle, c'est-à-dire, à la fois de la sensibilité à l'état initial et du réalisme d'un modèle et de son degré de concordance, avec un véritable modèle opérationnel de prévision. L'erreur de mesure est dite l'erreur de troncature, qui est purement numérique et due à la sensibilité aux conditions initiales. Par contre, l'erreur due à la non-conformité parfaite, à un modèle opérationnel de prévision est l'erreur due à la discrétisation. Ces causes ont pour conséquence, une vitesse exponentielle de décorrélation, ce qui conduit à la croissance de l'erreur initiale de prévision. Ceci peut être appréhendé de la manière suivante : puisque l'état initial choisi ne correspond jamais, exactement, à celui décrit effectivement par les fluctuations cycliques, l'explosion de l'erreur peut être, donc, considérée comme l'accumulation croissante, de l'état du cycle et d'une perturbation<sup>173</sup> instable prenant le nom du *chaos*.

**Théorème 2.20 (Vitesse exponentielle de décorrélation de Young, (1998)<sup>174</sup>)**

Soient deux réels  $\pi_1 \in ]0; 1[$  et  $\pi_2 \in ]0; 1/2[$ . Il existe deux réels  $\alpha_{\pi_1, \pi_2} > 0$  et  $\beta_{\pi_1, \pi_2} \in ]0; 1[$  tels que, pour tout entier naturel  $m$ , toutes fonctions  $\tilde{f}; f : I \rightarrow I$  et tout entier naturel  $n$ , nous avons :

$$\left| \text{Cov}(\tilde{f}, f) \right| \leq \alpha_{\pi_1, \pi_2} \beta_{\pi_1, \pi_2}^{n - \frac{m}{1-2\pi_2}}$$

Nous disons que le système dynamique  $Y_n = f(Y_{n-1}, \psi)$ ,  $\psi \in \mathfrak{R}$  vérifie la propriété de vitesse exponentielle de décorrélation, s'il existe un réel  $\zeta_0 \in ]0; 1[$  tel que, pour tous  $\tilde{f}; f : I \rightarrow I$ , il existe une constante  $\alpha(\tilde{f}, f) > 0$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ , nous avons :

$$\left| \text{Cov}(\tilde{f}, f) \right| \leq \alpha(\tilde{f}, f) \zeta_0^n$$

L'intérêt de cette étude théorique sur la croissance des perturbations instables, ne se limite pas à mieux comprendre la morphogenèse du cycle endogène, car elle vise aussi à l'amélioration

---

<sup>173</sup> Cette perturbation est petite au départ, peut croître si fortement dans le temps qu'elle dépasse même la valeur finale de la prévision, obtenue après quelques itérations.

<sup>174</sup> Young, L.S., (1998), « *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity* », Ann. Of Math., 147, pp. 585-650.



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

directe des techniques de prévision du cycle. Si nous désirons suivre l'évolution des travaux de recherches, destinés à fournir une amélioration au problème de prévisibilité du cycle, par le recours aux techniques de la modélisation non-linéaire déterministe, nous constatons que ces efforts de recherche ont été déclenchés par l'idée de réduction du chaos, après caractérisation linéaire de la croissance d'erreur, dans un modèle chaotiques. En 1965, Lorenz a proposé une technique reconnue sous le nom de *la méthode des vecteurs singuliers*, capable de prévoir un modèle chaotique à faible nombre, de degrés de liberté (28 degrés dans ce cas). L'idée de cette technique consiste à calculer les taux d'amplification linéaire d'erreur, sur un intervalle de temps. Cette technique a l'avantage de mettre en évidence l'importance des valeurs singulières, dans la caractérisation de la dynamique structurelle d'un modèle non-linéaire, déterministe et conditionne les degrés de ses états de stabilités. Ainsi l'explication classique de l'erreur est basée sur l'instabilité endogène des fluctuations cycliques.

Cependant, il découle de cette approche une limite théorique pour la prévision qui réside dans le fait que, dans un domaine des instabilités des structures dynamiques, le système risque d'oublier ses conditions initiales, en passant d'un régime à un autre et par conséquent, son évolution est toujours attirée vers des attracteurs étranges au hasard. Le hasard correspond, ici, à une information incomplète et peut avoir des origines diverses. De ce fait, il est nécessaire de mettre en cause les hypothèses, sur lesquelles se base la technique de prévisibilité et ceci pour deux raisons. La première est due à l'hypothèse de linéarité supposée de la croissance des erreurs, par contre, la réalité montre qu'il y a un mécanisme non-linéaire de production d'erreur, où l'amplitude de l'erreur augmente exponentiellement, d'où l'hypothèse de linéarité demeure invalide, de décrire un processus prévisionnel, dans un domaine des instabilités des structures dynamiques. La seconde raison est due au fait que cette technique de prévision, ne tient pas compte simultanément de la conception conjointe: spatiale, temporelle et d'ordre statistique, du dynamisme qui est une particularité typique inhérente, des modèles dynamiques non-linéaires, où il est reconnu que ce champ d'investigation est caractérisé par un effondrement des échelles. De ce fait, la simulation dans la figure (2.50), montre que l'erreur de prévision s'accorde, souvent, avec une erreur sur la position, l'amplitude ou la vitesse d'émergence d'une structure cohérente.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Pour remédier aux limites de la méthode traditionnelle de prévision exposée par Lorenz (1965), l'effort de la recherche sur la prévision, dans le domaine des instabilités des structures, est devenu très intense, afin de rendre compte de l'évolution dynamique de l'information prédictive et de la transition de phases, lors de l'auto-génération des structures endogènes du modèle de prévision. Pour ces raisons, des études récentes se sont, ainsi, intéressées à la croissance non-linéaire de l'erreur, en présence de structures homogènes d'ordres cohérents. Cette révolution de la pensée en prévision, vers une approche locale de la croissance des perturbations, a permis d'engendrer deux grandes voies de recherche. Le premier axe soigne l'hypothèse, selon laquelle la croissance de l'erreur est due à une perte endogène de stabilité des structures. Alors que le second, défend l'idée, selon laquelle la croissance de l'erreur est due aux interactions croisées, entre les structures cohérentes, qui modifient l'évolution du système. En admettant l'hypothèse de l'existence des structures cohérentes, pour garantir que nous sommes dans le domaine réel de l'étude, à savoir le voisinage de l'équilibre, où apparaît le phénomène de cycle limite, nous espérons réaliser des prévisions d'ensemble, par le recours, à la technique d'analyse par intervalle de l'approche ensembliste. Mais, tout d'abord, comment justifions-nous le recours à la suivie de la répartition des informations prédictives, dans des espaces d'encastrement?

**Définition 2.26**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. S'il existe une partition disjointe  $J_1, J_2, \dots, J_n$  de  $I$  tel que  $J_i \subset f(J_{i-1})$  pour  $1 \leq i \leq n$ , alors la suite récurrente des intervalles  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associée à  $f$  définit une chaîne d'intervalle.

**Définition 2.27**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue ayant un point  $Y$  périodique de période  $n$  vérifiant  $\{Y \in I \mid f^n(Y) = Y\}$ . Supposons qu'il existe dans  $I$  deux intervalles fermés bornés  $J_0$  et  $J_1$  tels que  $f(J_0) \supseteq J_1$ . Alors, il existe un intervalle  $\tilde{J}_0 \subseteq J_0$  tels que  $f(\tilde{J}_0) = J_1$ . Plus généralement, s'il existe une partition disjointe  $J_1, J_2, \dots, J_n$  de  $I$  tel que  $f(j_i) = J_{i+1 \bmod n}$  pour  $1 \leq i \leq n$ , alors la suite récurrente des intervalles  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associée à  $f$  définit un cycle d'intervalle noté :

$$C_J = \bigcup_{i=1}^n J_i$$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

**Théorème 2.21 (Štefan, (1977)<sup>175</sup>).**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction intervalle continue ayant un point  $Y$  périodique de période  $n$ . Si le graphe de l'orbite périodique de  $Y$  contient un cycle primitive

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$$

de longueur  $n$ , alors il existe un point périodique  $\tilde{Y}$  de période  $n$  tels que  $f^k(\tilde{Y}) \in J_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ .

**Corollaire 2.6**

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction intervalle continue. Alors nous avons les résultats suivants :

- 1- Si  $J \subseteq I$  est un sous-intervalle de  $I$  tels que  $J \subseteq f(J)$ . Alors,  $f$  a un point fixe dans  $J$ .
- 2- Si  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite éventuellement finie, de sous-intervalles fermés de  $I$  tels que  $f(I_i) \supseteq I_{i+1}$ . Alors, il existe une suite d'intervalles fermés emboîtés  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $J_n \subseteq I_0$  et  $f^n(J_n) = I_n$ . De plus, il existe  $Y \in I_0$  tel que  $f^n(Y) \in I_n$  pour tout  $n$ .

L'idée qui sous-tend de ce corollaire est capitale dans la prévision des systèmes dynamiques, dans un domaine d'instabilité des structures. Elle stipule la discrétisation de la dynamique, par découpage sur des intervalles formant une partition du domaine, où la dynamique du système est définie. Tout en supposant que l'évolution de l'information prédictive sera décrite, à chaque instant, par sa dispersion sur un intervalle, élément de cette partition. La figure (2.58), permet de visualiser la logique, selon laquelle nous autorisons une discrétisation de la dynamique, en un membre fini de morceaux, afin d'essayer de généraliser approximativement, avec le plus possible de précision, l'évolution de l'information prédictive nécessaire pour optimiser la prévision dynamique.

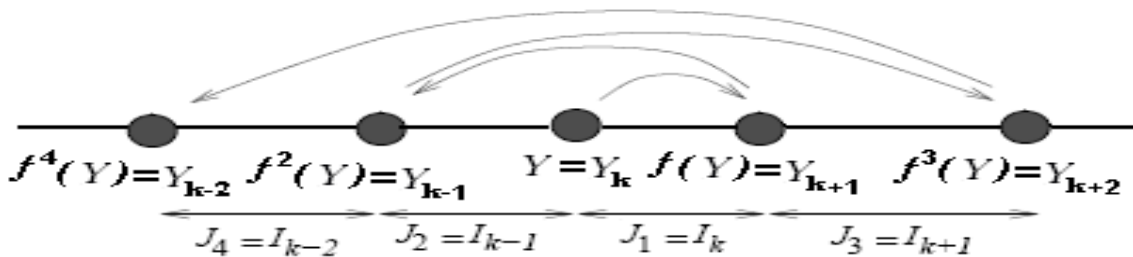


Figure 2.58: Conceptualisation d'évolution de l'information prédictive sur une partition d'intervalle

<sup>175</sup> Štefan, P., (1977), « A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line », Comm. Math. Phys., 54 (3), pp. 237-248.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

L'étude menée jusqu'au bout de cette étape, a permis de raffiner notre effort de recherche, sur la prévision dans le domaine des instabilités des structures dynamiques, d'un modèle déterministe. En effet, nous avons pu constater que généralement la partie déterministe d'un modèle linéaire par morceau dans lequel ses régimes sont reliés par des fonctions de transition continues bornées sur l'intervalle zéro et un (cas des modèles STAR), est affectée par l'instabilité dynamique de sa structure endogène, à la suite de la présence d'une multiplicité de l'équilibre, qui change de propriété de stabilité, quand un paramètre de transition change graduellement de valeur. Ce constat important vient, en fait, consolider notre recherche, autour d'une nouvelle question de base qui s'interroge sur la possibilité de mener un contrôle efficace de la dynamique de la structure perturbatrice, affectant la partie déterministe d'un modèle (STAR), ce qui nous aide, par inférence, à déduire des politiques appropriées au contrôle des fluctuations endogènes, source d'instabilité de l'activité économique notamment industrielle. Car comme nous avons pu le signaler, précédemment, que la dynamique de la partie déterministe d'un modèle (STAR), est d'une part une dynamique complexe et d'autre part, elle est conditionnée par la nature et les caractéristiques du processus d'ajustement structurel, assurant la transition, entre les différents états de régimes. Or, de sa part, ce processus rythmique d'ajustement est contrôlable par le paramètre de transition, dont l'intensité conditionne la nature de transition d'un régime à un autre.

Après avoir réussi à démontrer que le chaos pouvait être maîtrisé, nous poursuivons notre hypothèse, en accordant un rôle considérable aux décisions stratégiques de contrôler les fluctuations endogènes, en vue de stabiliser l'économie, les prévisionnistes peuvent seuls prévoir et tirer parti, de leurs prévisions pour atténuer l'instabilité économique. Or, l'intervention des décideurs n'est optimale que, si elle se base sur des prévisions efficaces. Ainsi, beaucoup de recherches se sont orientées, récemment, vers l'amélioration de l'analyse prévisionnelle, dans le domaine des processus déterministes non-linéaires, en présence des instabilités des structures dynamiques, par l'étude et le contrôle du chaos.

Nous tenons, donc, à voir, dans cette section, le problème de prévision dynamique, qui stipule que les erreurs de troncature, dues à la sensibilité aux conditions initiales et les erreurs de mesures, dues à la divergence des longueurs et temps de corrélation, ne sont plus considérées comme des bruits exogènes mais, plutôt comme des perturbations inhérentes de fonctionnement dynamique, de la partie déterministe du modèle (STAR) instable. Ce nouveau raisonnement ensembliste, basé sur l'approche de calcul par intervalle dite « *approche à erreur bornée* », est développé dans le cadre de ce travail, non plus dans le souci de négliger l'importance de l'approche probabiliste, notamment économétrique, mais plutôt vient dans le sens de complémentarité. Sachons qu'en économétrie, des séries temporelles non-linéaires à temps discret, il n'y a pas encore des tests économétriques, bien sophistiqués, permettant de résoudre le problème de prévision, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques déterministes. L'approche ensembliste à erreur bornée est exposée comme suit :

## **2.4. Prévision dynamique par l'approche à erreur bornée**

### **2.4.1. Les concepts de base**

L'analyse par intervalle repose, essentiellement, sur la contribution introduite par Moore (1979). C'est un outil arithmétique fondé sur un raisonnement de calcul par intervalle, qui substitue le raisonnement classique, basé sur les nombres réels ou entiers lorsque nous voudrions tenir compte de la présence d'une marge d'incertitude, sur les paramètres de modélisation, nécessitant un calcul par valeur approché. Cette logique ensembliste reposant sur le calcul par intervalle, a permis de faire concurrencer les méthodes algébriques formelles. D'une part, elle permet de sophistiquer l'analyse numérique classique, en fournissant des résultats fiables plus garantis et d'autre part, de faire apparaître de nouvelles techniques d'optimisation et de majoration par intervalle, qui s'applique à un champ de problème plus large, que les méthodes d'analyse numérique locale. Ainsi, le recours à cette technique est justifié par la raison, selon laquelle nous traitons le problème de la prévision, dans le domaine d'instabilité des structures du

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

modèle déterministe, où nous essayons de résoudre ce problème, dans son cadre dynamique et non plus statique.

En effet, nous avons pu montrer, précédemment, que lorsqu'il y a une instabilité locale de l'équilibre dynamique, il y a, simultanément, une croissance des erreurs de prévision, soit par l'effet de production de l'énergie cinétique de la quantité (masse) d'information en circulation dynamique dans le temps, soit par destruction de l'énergie cinétique comme le montre Farrell (1989) et Mak et Cai (1989). C'est-à-dire, que par référence à la grandeur abstraite d'entropie, mesurant à l'échelle microscopique la sensibilité de la dynamique et quantifiant le degré de son désordre, fait que les hypothèses habituelles sur les erreurs de prévisions en régression ne sont plus satisfaites, pour toutes les valeurs de mesures. Car, généralement, les prévisions ou plus largement les estimations se sont des mesures approchées sur une quantité d'information et donc sont entachées des erreurs, puisqu'il y a toujours accumulation et diffusion des erreurs d'arrondi, à cause des approximations, lorsqu'un développement décimal parfois illimité ne soit pas pris en considération dans sa totalité, ce qui fait que le problème vient lorsqu'il y a présence des mesures aberrantes engendrées aux cours des calculs numériques avec des valeurs approchées, et surtout sous l'effet de la sensibilité aux conditions initiales, une troncature dans le passé, avant l'instant initial de la prévision, est à l'origine d'un dysfonctionnement dynamique du dispositif de mesure, engendrant la circulation de l'erreur de prévision, induit par une masse d'information ignorée et provoquant, ainsi, une croissance soutenue de l'erreur sans effet transitoire sur la précision : C'est-à-dire, un comportement chaotique imprévisible.

Or, dans le domaine des instabilités des structures et sous l'effet de transition dynamique des structures, l'information se propage d'une façon non uniforme et même les manipulations aux moyens des techniques les plus connues, de l'approche probabiliste, notamment, économétriques, n'a pas pu détecter les lois prédictives, caractérisant les distributions des erreurs de prévisions, dans un domaine dynamique et instable. D'où, notre raisonnement va converger vers la recherche des solutions numériques, permettant de suivre par encadrement, à la fois dynamique et minimale de l'erreur de prévision autorisant d'une part, de tenir compte des erreurs structurelles de

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
 Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
 temporelles non-linéaires

---

mesures, au lieu de les considérer comme bruit de variables aléatoires, où il sera inutile de chercher leurs lois de densités de probabilités<sup>176</sup> et d'autre part, comme le constate Jaulin et Walter (1999), Yuan (2007) et Chabert et Jaulin (2009), l'approche à erreur bornée permet de contrôler la croissance dynamique de l'erreur structurelle, dans les modèles non linéaires par majoration. En ce sens, Rauh et Hofer (2007) et Lagrange, Jaulin, Vigneron et Jutten (2008), ont signalé que l'approche ensembliste d'analyse par intervalle, joue un rôle considérable, dans le contrôle robuste optimal, des variables flottants, caractérisant les modèles incertains. D'où naît notre besoin massif d'avoir recours à l'approche de l'arithmétique par intervalle, afin d'aboutir, à des résultats précis, qui garantissent, au mieux, la fiabilité des prévisions, en bornant les erreurs flottantes de modélisation et d'arrondis.

Dans cette section, face à la capacité limitée de l'approche probabiliste, notamment, économétrique à modéliser l'erreur structurelle, affectant l'information prédictive de la partie déterministe du modèle dynamique (STAR), nous voulons décrire et appliquer des algorithmes ensemblistes pour la manipulation de ce problème. Notre tâche consiste, donc, à l'étude de la croissance dynamique des erreurs de prévisions, par recherche l'ensemble des paramètres, qui sont en mesure de quantifier, par encadrement dynamique, les erreurs structurelles. L'intérêt de la méthode de calcul par intervalle semble, donc, évident. Notre contribution consiste, ici, à appliquer l'analyse par intervalle et plus exactement l'approche à erreur bornée, pour résoudre le problème de prévision, dans le domaine des instabilités des structures. Les résultats empiriques attendus de cette technique, paraissent servir, au contrôle des modèles déterministe non linéaires, non chaotiques, (formant la partie déterministe d'un modèle STAR), en conduisant à l'abandon des modèles non-linéaires chaotiques. Nous commençons par exposer les principaux concepts de la méthode de l'analyse par intervalle.

Afin de pallier le problème des erreurs d'arrondis, sous la nécessité des prévisions fiables et précises, le calcul par intervalles vient substituer la manipulation des nombres réels par les

---

<sup>176</sup> La manipulation d'une variable par l'approche probabiliste stipule la connaissance exacte de la manière selon laquelle cette variable est distribuée : C'est-à-dire sa loi de densité de probabilité. Par contre, le traitement par l'approche ensembliste ne nécessite aucune hypothèse préalable.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

intervalles. Cette technique, dont les bases théoriques sont développées initialement par les travaux de Moore (1966), Moore (1979) et Moore, Kearfott et Cloud (2009), stipule la représentation d'un intervalle par deux nombres réels ordonnés et associés, à ses bornes qui peuvent être fermées, bornées, semi-ouvertes ou ouvertes. Par construction, un intervalle a la possibilité de remplir une double fonction, d'une part nous pourrions le considérer comme étant un nouveau type de nombre de la structure arithmétique, formée par l'ensemble des intervalles, où chaque composante de cette structure, est représentée, tout simplement, par un intervalle. D'autre part, un intervalle peut jouer le rôle d'un sous-ensemble de cette structure, formé par une infinité de nombres réels.

D'un autre côté, Ratschek (1985), et Moore et Ratschek (1988), ont traité le problème de la détermination d'une fonction d'inclusion, dans un cadre d'optimisation globale. Norton (1987), a proposé une méthode d'identification de la bande des paramètres d'un modèle linéaire de série temporelle. Norton (1989), a proposé une méthode d'identification de la bande des paramètres d'un modèle, en utilisant une bande à structure bruitée, par la présence de la noise. Fletcher (1985), a posé le problème d'introduire une fonction de pénalité, dans la forme quadratique à optimiser. Plus récemment, Arroyo et Mate (2006), ont envisagé une analyse de régression des données d'intervalles de série temporelle ITS (*Interval Time Series*) et Arroyo, Espínola et Maté (2008), ont étudié différentes approches de prévision de données d'intervalles de série temporelle. Dans ce cadre, si par exemple nous considérons la relation dynamique défini, à partir de la partie déterministe du modèle STAR, par :

$$Y_t = f(Y_{t-1}), Y_0 \in \mathfrak{R}, \quad t = 1, \dots, T$$

où 
$$f(Y_{t-1}) = \left( \psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} B^{i-1} Y_{t-1} \right) G(Y_{t-1}) + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^q \psi_j^{(2)} B^{j-1} Y_{t-1} \right) (1 - G(Y_{t-1})),$$
 et  $B$  est

l'opérateur retard vérifiant  $B^0 = 1$ , et pour  $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ ,  $B^k Y_t = Y_{t-k}$  et  $G(Y_{t-1})$  est une fonction, jouant simultanément, une double fonction. D'une part, elle est considérée comme une fonction de transition associée au modèle STAR et qui assure le passage d'un état dynamique à un autre



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

(ce point de vue sera largement détaillé au cours de la prochaine partie). D'autre part, elle représente une fonction de pénalité dans un cadre d'optimisation. Or, puisque notre but essentiel est d'essayer de décrire certains concepts de sélection de la structure de modèle non-linéaire, en prévision de séries temporelles, à temps discret, tant dans le cadre dynamique déterministe, sur lequel porte l'objectif de présente partie, que dans un cadre dynamique stochastique, qui sera traité dans la partie suivante. Nous exposons plusieurs types de fonctions de transitions. Le tableau (2.11) donne les principales fonctions étudiées.

**Tableau 2.11: Quelques exemples de fonctions de transition**

Modèle <sup>(*)</sup>	Fonction de transition $G(Y_{t-1})$ et paramètres
<b>LSTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\}]^{-1}$
<b>Q-LSTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}$
<b>D-LSTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\}]^{-1} + [1 + \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}$
<b>A-LSTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, \theta) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)/\theta\}]^{-\theta}$
<b>ESTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 1 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2\}$
<b>Q-ESTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2) = 1 - \exp(-\gamma((Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))^2)$
<b>D-ESTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 2 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2\} - \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)^2\}$
<b>A-ESTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = 1 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2 [1/2 + (1 + \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\})^{-1}]\}$
<b>TV-STAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma, c, \sigma, \theta) = \left[1 + \exp\left(-\frac{\gamma}{\sigma}(Y_{t-1} - c)\right)\right]^{-\theta}$
<b>B-STAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = \frac{\exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}}{1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}}$

<sup>(\*)</sup> Désigne l'une des fonctions de transitions suivantes : LSTAR : Logistic Smooth Transition Autoregressive ; Q-LSTAR : Quadratic Logistic Smooth Transition Autoregressive ; D-LSTAR : Double Logistic Smooth Transition Autoregressive ; A-LSTAR : Asymmetric Logistic Smooth Transition Autoregressive ; ESTAR : Exponential Smooth Transition Autoregressive ; Q-ESTAR : Quadratic Exponential Smooth Transition Autoregressive ; D-ESTAR : Double Exponential Smooth Transition Autoregressive ; A-ESTAR : Asymmetric Exponential Smooth Transition Autoregressive ; TV-STAR : Time-Varying Smooth Transition Autoregressive ; B-STAR : Bi-parameter Smooth Transition Autoregressive.

Par extension, nous obtenons la fonction d'inclusion, dans le cadre des modèles non linéaires déterministes, vérifiant certaines relations dynamiques qui caractérisent la nature du processus de la transition de phases, entre ses régimes. Pour  $[Y_t]_{t=0, \dots, T} \in \mathcal{R}^n$ , la fonction d'inclusion  $[f]$  d'un modèle dynamique  $f$  est définie par l'application:

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

$$[f] : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$$

$$[Y_t] \mapsto f([Y_t]) \subset [f]([Y_t])$$

où  $[Y_t] = f([Y_{t-1}])$ ,  $Y_0 = [\underline{Y}_0, \bar{Y}_0] \in \mathcal{R}^n \quad \forall t = 1, \dots, T$ . Dans ce cas, par vérification de la relation d'inclusion, nous sommes sûrs que pour  $[\tilde{Y}_t] \subset [Y_t]$ , alors  $f[\tilde{Y}_t] \subset f[Y_t]$ . D'où nous aurons toujours une relation de récurrence pour la relation d'inclusion définie par :

$$\forall [Y_t]_{t=0, \dots, T} \in \mathcal{R}^n, \quad [Y_{t+1}] = f([Y_t]) \subset [Y_t]$$

par conséquent,  $[Y_{t+1}] \subset [Y_t]$ . Afin de simplifier notre tâche, dans tout le reste de la présente partie, nous supposons la restriction  $p = q = 1$  et nous adoptons comme fonction de transition, celle qui correspond au modèle STAR (voir tableau (2.12)). D'où,

$$f(Y_{t-1}) = (\psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)} Y_{t-1})G(Y_{t-1}) + (\psi_0^{(2)} + \psi_1^{(2)} Y_{t-1})(1 - G(Y_{t-1})), \quad [Y_{t-1}] = [\underline{Y}_{t-1}, \bar{Y}_{t-1}]$$

Pour les valeurs choisies arbitrairement,

$\underline{Y}_{t-1} = -3$ ,  $\bar{Y}_{t-1} = 3$ ,  $\psi_0^{(1)} = \psi_0^{(2)} = 1$ ,  $\psi_1^{(1)} = 2$ ,  $\psi_1^{(2)} = -3$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $\sigma = 2$ , et  $\theta = 2$ , le modèle devient :

$$f(Y_{t-1}) = (1 + 2Y_{t-1})G(Y_{t-1}) + (1 - 3Y_{t-1})(1 - G(Y_{t-1})), \quad [Y_{t-1}] = [-3, 3]$$

Nous obtenons les résultats concernant les valeurs des fonctions d'inclusion associées aux fonctions de transitions dans le tableau (2.12).

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

<b>Tableau 2.12: Fonctions d'inclusions pour quelques exemples de fonctions de transition</b>	
<b>Modèle (*)</b>	<b>Fonction d'inclusion de fonction de transition <math>G(Y_{t-1})</math> et paramètres</b>
<b>LSTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = [1 + \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)\}]^{-1}$ $= [0,0179862099297412; 0,880797155558238]$
<b>Q-LSTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)([Y_{t-1}] - c_2)\}]^{-1}$ $= [1,12535162055094E - 7; 0,999664749802485]$
<b>D-LSTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)\}]^{-1} + [1 + \exp\{-\gamma_2([Y_{t-1}] - c_2)\}]^{-1}$ $= [0,137189131984209; 1,86281086801579]$
<b>A-LSTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, \theta) = [1 + \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)/\theta\}]^{-\theta}$ $= [0,014209336618611; 0,534446645388523]$
<b>ESTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 1 - \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)^2\}$ $= [-9,99999999473644E - 8; 0,981684461111266]$
<b>Q-ESTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2) = 1 - \exp(-\gamma((Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))^2)$ $= [-6,23514908081162E27; 1,00000009999999]$
<b>D-ESTAR</b>	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 2 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2\} - \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)^2\}$ $= [0; 1,98168424857609]$
<b>A-ESTAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = 1 - \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)^2 [1/2 + (1 + \exp\{-\gamma_2([Y_{t-1}] - c_2)\})^{-1}]\}$ $= [-9,99999999473644E - 8; 0,996007003611852]$
<b>TV-STAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma, c, \sigma, \theta) = \left[1 + \exp\left(-\frac{\gamma}{\sigma}([Y_{t-1}] - c)\right)\right]^{-\theta}$ $= [0,014209336618611; 0,534446645388523]$
<b>B-STAR</b>	$[G](Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = \frac{\exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)\} + \exp\{\gamma_2([Y_{t-1}] - c_2)\}}{1 + \exp\{-\gamma_1([Y_{t-1}] - c_1)\} + \exp\{\gamma_2([Y_{t-1}] - c_2)\}}$ $= [0,00245625820749339; 85,9359640078587]$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

D'après cet exemple illustratif, nous constatons, tout d'abord, que les erreurs de mesure, ici, sont dues aux arrondissements après la virgule, en cas des résultats présentés sous forme des développements périodiquement illimités. Ensuite, une première manière de sélectionner la fonction de transition adéquate, consiste à choisir celle qui donne une valeur numérique d'un encadrement minimal de la fonction d'inclusion correspondante. Or, d'un autre côté, rappelons qu'un système dynamique non-linéaire évolutionnaire, dont l'information future dépend récursivement de celle décrite par son comportement passé, sur une période finie. Dans ce cas, la prévision du comportement futur du système consiste à sélectionner, parmi une gamme d'encadrements possibles, l'approximation qui donne, avec la moindre incertitude, la bonne précision des paramètres, permettant aux variables d'être consistantes le plus possible. La recherche, dans cette vision, sur l'approche qui intègre les erreurs de modélisation et de mesure, dans les variables et la manière de la propagation d'incertitude dans les grandeurs de prévision, nous guide vers l'étude des méthodes de consistances, liées au problème des contracteurs et reconnues par Davis (1987) et Jaulin (2002), sous le nom de la propagation de contraintes combinées, avec l'analyse par intervalles. Dans ce contexte, Jaulin, Kieffer, Braems et Walter (2001), ont proposé une méthode d'estimation des paramètres d'un modèle non linéaire, basée sur la propagation de contraintes combinées, avec l'analyse par intervalles.

Parmi les techniques de résolution adoptées au problème de CSP, nous adoptons la méthode géométrique de génération récursive des *sous-pavages*, basées sur un algorithme récursif de partition et d'inversion ensembliste dit de SIVIA (*Set Inverter Via Interval Analysis*), et qui consiste à éliminer, efficacement et simplement, des pavés non précis, sans jamais perdre de solution, en vue d'avoir des domaines admissibles, caractérisant uniquement des données consistantes. L'intérêt de cette technique basée sur la bisection pour notre cadre d'analyse, c'est que les seuils de subdivision, par *sous-pavage*, sont déterminés à l'aide d'un critère de maximum d'entropie, là où un critère simple d'arrêt de la partition récursive, a l'avantage d'être retenu du point de vue du coût du calcul minimal. Ainsi, la comparaison des temps parcourus, lors de la mise en marche de cet algorithme, nous aide à sélectionner les différentes fonctions de transitions. Cette méthode est initialement définie par Moore et Ratschek (1988) :

---

**Définition 2.28**

Soient  $f$  est une fonction vectorielle continue de  $\mathfrak{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}^m$ ,  $[\tilde{Y}]$  un pavé de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $[Y]$  un pavé de  $\mathfrak{R}^m$  et  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$  un vecteur de taille  $n$ . Un algorithme d'inversion ensembliste est un algorithme permettant d'approximer l'ensemble  $\wp$  décrit par :

$$\wp = \{ \tilde{Y} \in [\tilde{Y}] \mid f(\tilde{Y}) \in [Y] \} = [\tilde{Y}] \cap f^{-1}([Y])$$

Cet algorithme est développé dans les travaux de Jaulin, Kieffer, Didrit et Walter (2001), puis sa version récursive est implémentée par Dao, Di-Loreto, Jaulin, Lafay et Loiseau (2004), comme suit :

---

**Tableau 2.13: Algorithme de SIVIA récursive**

---

1. **Entrées** :  $\{ [\tilde{Y}_j] \in ([\tilde{Y}_1], \dots, [\tilde{Y}_T]), j = 1, \dots, T \}$
2. **If** ( $w([\tilde{Y}_j]) \leq \eta$ ) :  $\mathfrak{S} \leftarrow \mathfrak{S} \cup \{ [\tilde{Y}_j] \}$ , got to T ;
3.  $[\tilde{Y}_j] \leftarrow C_{\wp}([\tilde{Y}_j])$  ;
4. **If** ( $t_{j+1}, [\tilde{Y}_j] = \emptyset$ ), got to T ;
5. **Bisection** :  $[\tilde{Y}_{j+1}] \rightarrow (L[\tilde{Y}_{j+1}], R[\tilde{Y}_{j+1}])$  ;
6. SIVIA(L $[\tilde{Y}_{j+1}]$ ); SIVIA(R $[\tilde{Y}_{j+1}]$ ) ;
7.  $j=j+1$ ;
8. **end**

---

$\mathfrak{S}$  désigne une liste de pavés initialement vide,  $\eta$  est un paramètre de précision qui limite la bisection et  $C_{\wp}$  est un contracteur.

**Définition 2.29**

Soient  $[Y]$  un pavé de  $\mathfrak{R}^n$  et  $S$  un ensemble défini par des inégalités non-linéaires. Une contrainte  $C_s$  de l'ensemble  $S$  est dite consistante, s'il existe une donnée, pour laquelle la contrainte  $C_s$  est satisfaite.

Il est connu maintenant, que les observations ou données expérimentales sont souvent obtenues avec certaines erreurs de mesure bornées, exprimées par des inégalités sur les paramètres ou sur les variables d'état qui déterminent l'état dynamique d'un modèle. Dans ces domaines non nécessairement convexes, l'estimation à l'aide des approches classiques au sens des

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

moindres carrés ne sont plus efficaces. Par contre, la technique la plus appropriée est l'estimation ensembliste à erreur bornée. Le principe de celle-ci consiste à trouver, de manière récursive, le plus petit ellipsoïde contenant l'ensemble des solutions admissibles. Son objectif est donc de caractériser la solution admissible associée à des erreurs inconnues mais appartenant à un ensemble borné. Comme exemple, la détermination des zones de régions admissibles garantissant les prévisions robustes pour quelques modèles dynamiques. Nous allons garder les mêmes données de l'exemple précédent et nous essayons d'appliquer l'algorithme de SIVIA, pour un pavé  $[Y] = [Y_t] \times [Y_{t-1}]$ , une marge de tolérance de rayon unitaire sur l'erreur avec une précision d'ordre de  $\varepsilon = 10^{-2}$ , l'ensemble de contraintes  $S$ , défini par :

$$S = \{ [Y_t] \times [Y_{t-1}] \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid | [Y_t] - f([Y_{t-1}]) | \leq [\eta], \quad |[\eta]| \leq 1 \}$$

sachant que  $[Y_t] = [-3, 3]$ . Ceci revient à considérer le système de contraintes suivant :

$$S_j = \begin{cases} [Y_t] - (1 + 2[Y_{t-1}])G_j([Y_{t-1}]) - (1 - 3[Y_{t-1}]) (1 - G_j([Y_{t-1}])) - 1 \leq 0 \\ -[Y_t] + (1 + 2[Y_{t-1}])G_j([Y_{t-1}]) + (1 - 3[Y_{t-1}]) (1 - G_j([Y_{t-1}])) - 1 \leq 0 \end{cases}$$

où  $j = LSTAR, QLSTAR, ALSTAR, ESTAR, DESTAR, TVSTAR$ . Les résultats ainsi obtenus sont schématisés sur la figure (2.59) comme suit :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

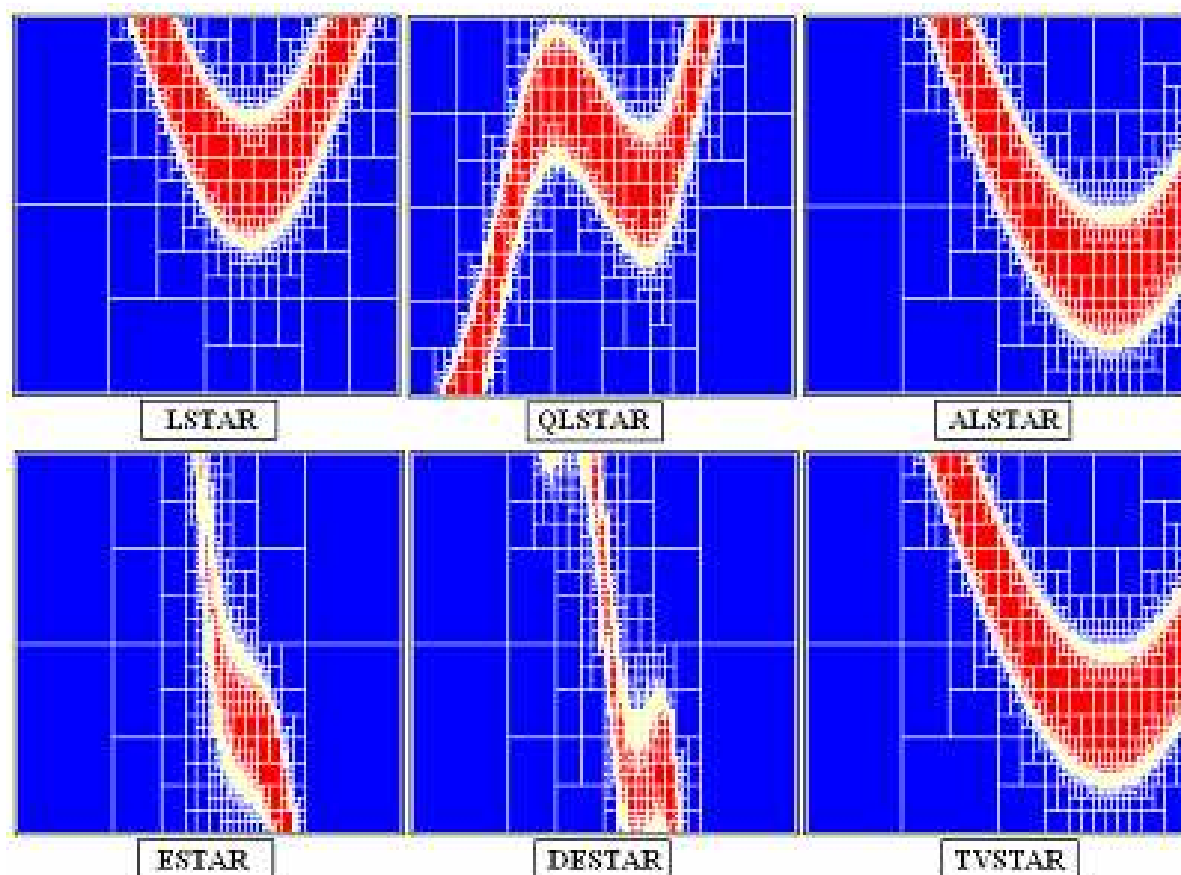


Figure 2.59: Zone de région admissible garantissant la prévision robuste pour quelques modèles dynamiques

La figure (2.59), indique d'une part, que la réduction du pavé  $[Y]$ , sous le système de contraintes  $S$ , pour chaque processus, l'ensemble des solutions admissibles prend la couleur rouge et il est délimité par la zone de tolérance de l'erreur colorée en blanc. D'autre part, il montre clairement qu'il y a échanges d'intervalles, lors du fonctionnement itératif d'un processus de transition. Dès lors, nous pouvons penser à proposer une approche non-linéaire, non paramétrique, qui fait appel à la théorie ensembliste, pour la prédiction avec intervalle à erreur bornée, basée sur une méthode de partition récursive, de l'espace des phases recomposées, par les transitions du processus déterministe. Ainsi, nous pouvons définir un processus de transition, par échanges d'intervalles, selon la vision ensembliste comme suit :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

**Définition 2.30**

Soient  $D$  un pavé de  $\mathfrak{R}^n$  et  $c$  un point critique d'échange d'intervalle. Nous définissons un processus transitoire d'échanges d'intervalles par itérations, dont l'union disjoint  $\{D_n\}_{n \geq 2}$  où  $D_2 = [c_1, c_2]$ , comme suit :

$$[G]: \quad \forall n \geq 2, \quad D_{n+1} = \begin{cases} f(D_n) & \text{si } c \notin D_n \\ [c_{n+1}, c_1] & \text{sin on} \end{cases}$$

Nous pensons que ce processus, ainsi défini, va enrichir le cadre de l'analyse de dynamiques non-linéaires, ainsi qu'il peut jouer un rôle décisif, dans la sélection du point de rupture endogène, si nous supposons que la partition récursive, va s'arrêter, dès qu'il y a un seuil non atténué par lissage.

Or, rappelons que nous avons défini, au niveau de la première partie, la notion de fonction d'inclusion et l'estimation par contraction, nous allons exposer dans le reste de la présente section, la méthode à erreurs bornées qui tient en considération la robustesse de l'erreur mais, en fonction du retard dans une bande donnée, sans recours aux hypothèses statistiques usuelles traditionnellement imposées sur le terme d'erreur, dans un cadre probabiliste. Nous espérons donc, que cette méthodologie nous a fourni des éléments de réponses, concernant les questions fréquemment abordées en prévision déterministe non-linéaire, à savoir l'élaboration de la prévision ponctuelle à erreur bornée, ainsi que la prévision par intervalle à erreur bornée. L'intérêt de cette méthode, c'est qu'elle permet de contourner les insuffisances illustrées, par des méthodes classiques paramétriques et non de prédiction de séries temporelles non-linéaires, surtout, lorsque le processus dynamique générateur de données se comporte de façon irrégulier, très complexe et fonctionne avec un régime chaotique où il génère des structures incohérentes, par échanges d'intervalles de stabilité, lors des itérations, où l'erreur peut dépendre largement des conditions initiales et de plus elle peut être explosive.



## 2.4.2. Méthodologie et applications

Rappelons, par exemple, l'équation de la partie déterministe du modèle (STAR) définie par la relation de récurrence comme suit :

$$Y_t = f(\tilde{Y}_t), \quad t = 1, \dots, T$$

où  $Y_t \in \mathfrak{R}$ , est la valeur de la quantité d'information observée au  $t^{\text{ème}}$  instant, c'est-à-dire mesurée et modélisée au  $t^{\text{ème}}$  instant. Or, puisque nous traitons ce problème dans le cadre d'un domaine instable (la partie déterministe du modèle STAR comporte en principe des ruptures qui sont lissées par plusieurs formes de fonctions de transitions), et  $f(\cdot)$  d'expression,

$$f(\tilde{Y}_t) = (\psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)} Y_{t-1}) G(Y_{t-1}) + (\psi_0^{(2)} + \psi_1^{(2)} Y_{t-1}) (1 - G(Y_{t-1}))$$

où  $G(Y_{t-1})$ , est une fonction de transition, dont l'expression explicite est donnée par le tableau (2.11).

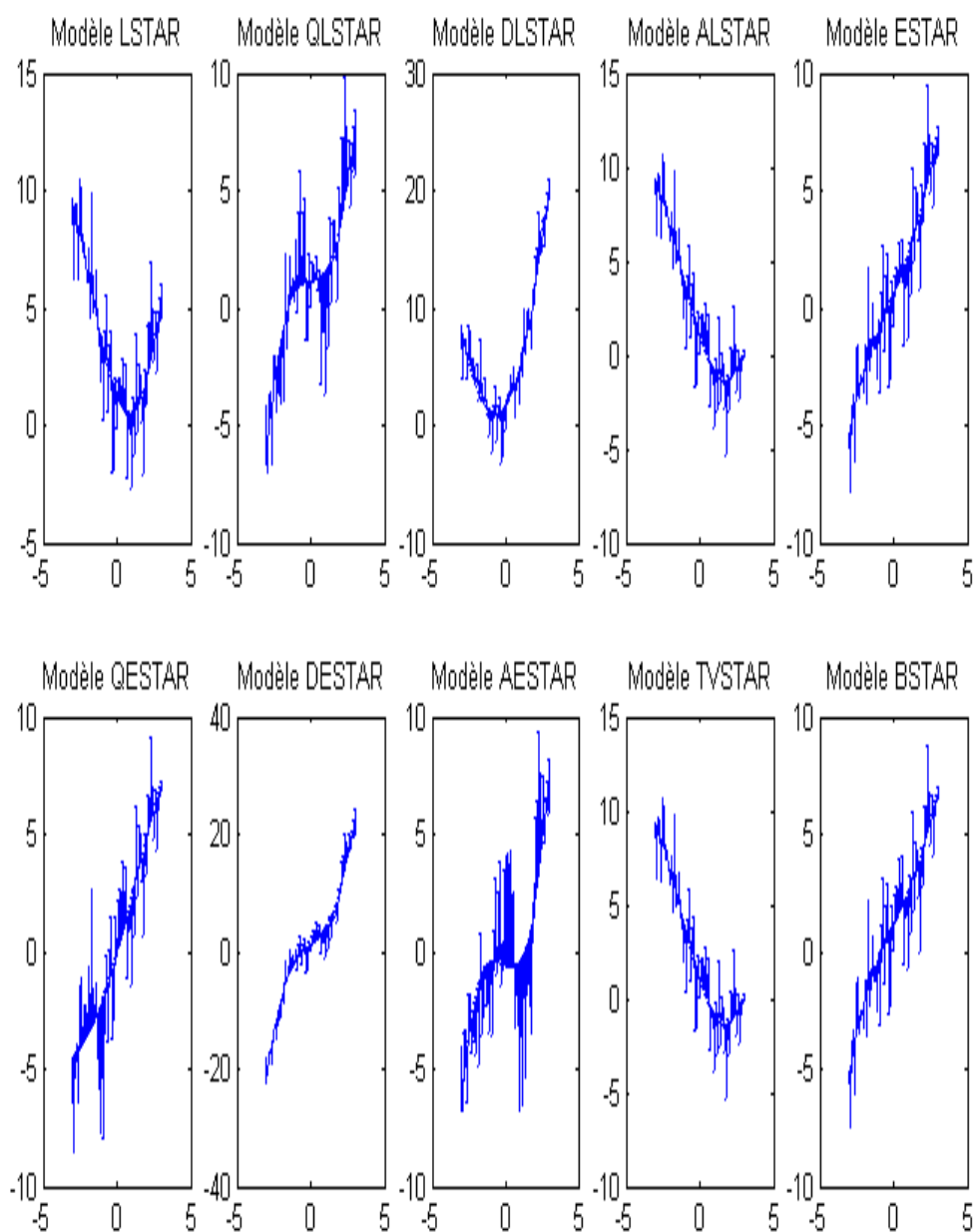
Alors, il est tout à fait logique de supposer que la dynamique déterministe non-linéaire du modèle STAR, est soumise à l'action de deux types d'erreurs. Soit des erreurs dues à la perturbation de la mesure, où la dynamique, dans ce cas, peut être chaotique, sous l'effet d'une croissance infinie de l'erreur de prévision, suite à la sensibilité du système aux conditions initiales. Soit ces erreurs sont liées à la modélisation même du processus étudié. Soit elles sont causées par une combinaison de ces deux sources. Un intervalle est utilisé pour borner une erreur associée à la modélisation et/ou à la mesure des données, dans le cadre du problème d'estimation récursif des paramètres d'un modèle dynamique.

L'identification ensembliste de quelques processus de transitions du modèle STAR, dans le contexte à erreurs bornées est de type prédiction correction et peut être vue comme un

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

problème d'inversion ensembliste. Le principe fondamental de cette approche peut être schématisé à l'aide de la figure (2.60) et (2.61) comme suit :



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Figure 2.60: Principe de la méthode à erreurs bornées

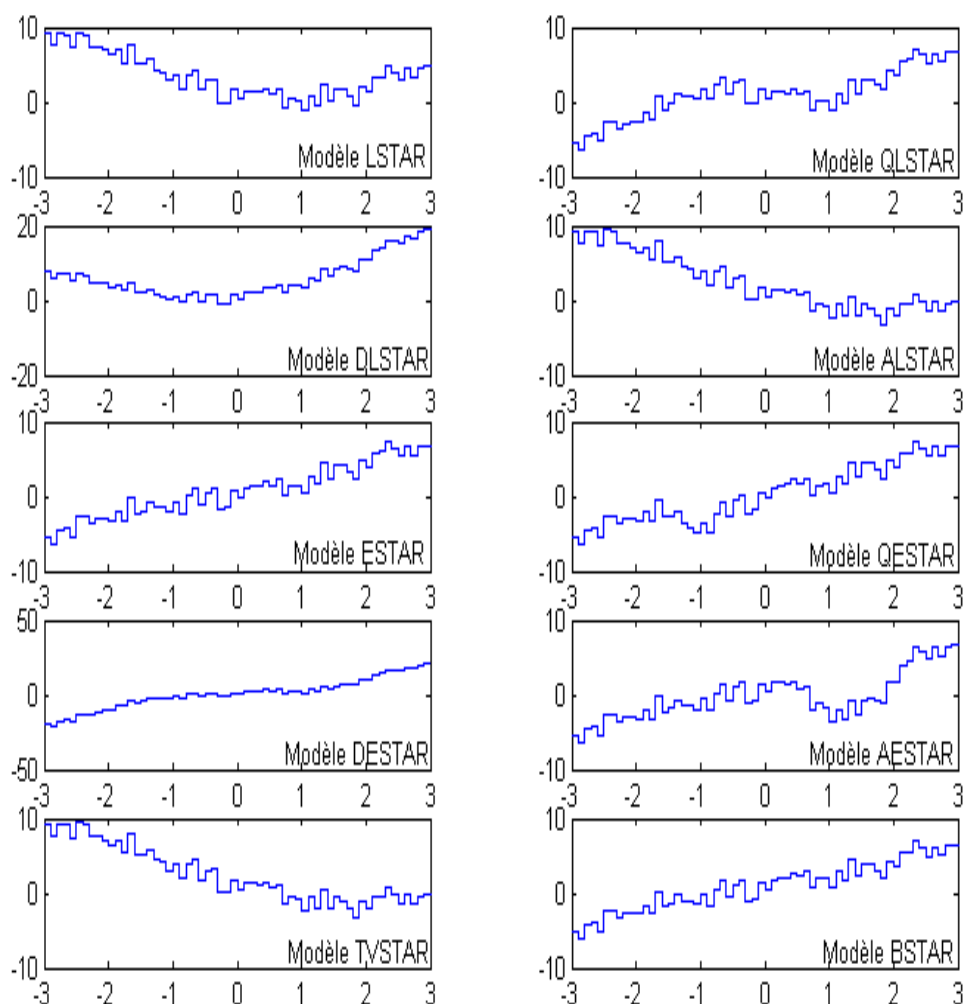


Figure 2.61: Représentation par intervalles des processus de transitions

Dans cette sous-section, nous allons commencer par présenter les principales techniques de l'optimisation globale, qui nous paraissent utiles pour traiter, par la suite, deux méthodes de prévision à erreur bornée, comme solution à notre problématique, dans ce premier cadre, où nous sommes concentrés, ici, sur la dynamique de la partie déterministe, d'un modèle non linéaire, en

prévision de séries temporelles, à temps discret. La première solution sera concernée par la prévision ponctuelle, au moyen des techniques de la programmation mathématique non-linéaire, alors que la seconde portera sur la prévision par intervalle, au moyen de l'approche ensembliste, de l'analyse par intervalle.

### 2.4.2.1. *Technique d'optimisation globale et de contrôle*

Contrairement à l'optimisation locale<sup>177</sup> qui consiste, selon la méthode de relaxation originale de Powell (1987), à déterminer pour une fonction  $f$  définie sur un pavé  $[Y] \subset \mathbb{R}^n$  et à partir d'une condition initiale  $Y_0$ , une solution (minimum local)  $Y \in [Y]$ , la plus proche possible de  $Y_0$  et minimisant  $f$  au voisinage de  $Y_0$ . Dans ce cadre, Hansen et Sengupta (1980), Kolev (1984), Tuy (1985), Rinnooy Kan et Timmer (1986), Horst et Tuy (1987), Van Hentenryck, Michel et Benhamou (1998), se mettent d'accord que l'optimisation globale<sup>178</sup> est la recherche de toutes les solutions (minima globaux)  $Y \in [Y]$ , tel qu'il existe une unique valeur  $\delta \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\delta = f(Y)$ . Papamichail et Adjiman (2002), ont pu étendre les méthodes d'optimisation globale, pour étudier le problème de programmation avec des équations différentielles, par lesquelles nous serons capables de modéliser un système dynamique. L'optimisation globale peut être classifiée, selon deux voies. L'une est probabiliste tandis que l'autre est déterministe. Parmi les méthodes déterministes qui servent à la prévision, nous focalisons, plus spécialement, sur les méthodes d'intervalles d'optimisation globale, avec contraintes, qui aident à gérer et à calculer l'information globale sur les fonctions. Ainsi, Hansen et Sengupta (1981), ont signalé que ces méthodes sont des algorithmes de recherche, qui permettent de chercher toutes les solutions, avec une précision donnée et un temps d'exécution minimal, en partageant le problème initial, en sous problèmes et évaluant celles-ci, jusqu'à une meilleure solution qui soit obtenue. Nous distinguons

---

<sup>177</sup> Mathématiquement, l'optimisation locale consiste à la recherche d'un élément  $\tilde{Y} \in [Y]$  tel que :

$$\exists V = ]Y_0 - \varepsilon, Y_0 + \varepsilon[ \mid \tilde{Y} \in V, f(\tilde{Y}) = \min\{f(Y), Y \in V\}.$$

<sup>178</sup> Mathématiquement, l'optimisation globale consiste à la recherche de l'ensemble  $[\tilde{Y}]$  des  $\tilde{Y} \in [Y]$  tels que :

$$\forall \tilde{Y} \in [\tilde{Y}], f(\tilde{Y}) = \min\{f(Y), Y \in [Y]\}.$$

deux principales techniques : la technique de B&P « *branch and prune* », et la technique de B&B « *branch and bound* ». Nous allons nous intéresser, ici, à la deuxième technique de B&B.

### ➤ **Procédure par évaluation et séparation progressive**

La technique par évaluation et séparation progressive ou de B&B développée par Ratchek et Rokne (1988), est facilement transposable, aux cas de problèmes d'optimisation globale avec contraintes, tel que par exemple l'algorithme SIVIA, qui consiste à la recherche des optima (minima) globaux du problème d'optimisation avec contraintes, par la réalisation de deux étapes. La première étape dite (*branching*) est la réduction de la dimension de l'espace de recherche par subdivision intelligente du domaine initial. La seconde étape, dite (*bounding*) est la majoration à l'aide d'une bande de la solution recherchée. Walter et Kieffer (2006), ont montré que le recours à la technique inefficace de programmation par contraintes, peut admettre des conséquences graves, qui risquent de fausser les résultats attendus de l'optimisation. Dans le but d'améliorer les techniques d'optimisation globale, Milanese, Norton, Piet-Lahanier et Walter (1996), et Walter et Kieffer (2003), ont signalé que l'intelligence en programmation mathématique avec contraintes, en analyse par intervalle, consiste à utiliser un algorithme de filtrage, capable de supprimer toutes les portions de l'espace de recherche, où la solution recherchée n'existe plus. En ce sens, Nataraj et Barve (2003), ont appuyé sur un algorithme de subdivision adaptative de l'espace d'étude, pour insister sur une implémentation rigoureuse et efficace de la réduction de l'espace d'étude basée sur l'optimalité. Par contre, dans le domaine de prédiction non-linéaire, He, Liao et Qian (2006) et Yuan (2007), ont utilisé une technique de programmation discrète, via l'approche de B&B, fondée sur un algorithme de prédiction-correction. Quel est, donc, le principe de cette nouvelle approche, permettant de détecter la meilleure structure prédictive d'un modèle dynamique, par optimisation globale avec contraintes, en analyse discrete par intervalle?

### ➤ **Principe de l'approche prédiction-correction**

Dans le contexte non-linéaire de la prévision robuste par optimisation globale déterministe, la présence d'incertitudes sur les données expérimentales, liées aux erreurs de modélisation et de mesure, est très fréquente. Ces erreurs inconnues appartiennent souvent à une

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

région bornée, mais pas nécessairement convexe, définie par des inégalités sur les paramètres ou les variables d'état du modèle dynamique. La mal caractérisation de ces incertitudes, admet sans doute, des conséquences graves sur la sélection d'un modèle dynamique précis de prévision. Pour remédier aux insuffisances des approches classiques de construction de modèles dynamiques non-linéaires déterministes de prévision, Walker et Mees (1998), ont pu utiliser avec succès une méthode basée sur le filtrage de séries temporelles chaotiques par le filtre EKF « *Extended Kalman Filter* », qui est une version sub-optimale du filtre de Kalman (1960), en faisant appel à un algorithme de prédiction-correction. Cet algorithme de filtrage a l'avantage d'assurer la construction garantie d'un modèle dynamique non-linéaire de prédiction, par réduction de la noise additive due au chaos. Okazaki, Okazaki, Honda et Nakano (2005), ont développé une autre démarche, basée sur les techniques d'analyse par intervalle, capable de vérifier la présence du chaos, caractérisant un système dynamique discret uni-dimensionnel. Récemment, la nouvelle approche de B&B, dite de prédiction-correction, a été développée par Yuan (2007), dans un cadre déterministe ensembliste. Cette technique a pour objectif d'approximer des régions non nécessairement convexes par des ellipsoïdes, puis de chercher le plus petit ellipsoïde qui donne la caractérisation optimale de l'ensemble des solutions admissibles, et elle est fondée sur le principe voyant la réalisation de deux étapes principales. La première étape de prédiction consiste à calculer une valeur approchée extérieure de l'état prévu du modèle dynamique incertain. La seconde étape de correction consiste à réduire cette approximation extérieure aux phases de mesures, en se basant sur l'étude de la consistance entre le domaine admissible obtenu, expérimentalement, par mesure et celui obtenu par simulation. Kieffer et Walter (2006), ont signalé que pratiquement ces deux étapes sont assurées, respectivement, par intégration numérique<sup>179</sup> garantie, selon la méthode de Runge et Kutta<sup>180</sup> et par inversion ensembliste basée sur l'arithmétique d'intervalles. Schématiquement, afin d'étendre la méthode de prédiction des

---

<sup>179</sup> L'intégration numérique avec un pas fini  $\Delta t$  est donné par :

$$Y_{t_0+\Delta t} = Y_{t_0} + \sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} f(Y_t)$$

<sup>180</sup> Voir Parker, T.S. et Chua, L.O., (1989), « *Practical numerical algorithms for chaotic systems* », Springer-Verlag, New York.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

séries temporelles non-linéaires par réduction du chaos<sup>181</sup>, au moyen du filtre EKF, nous postulons la mise en œuvre d'un l'algorithme SIVIA de l'approche prédiction-correction, basée sur EKF, qui peut être résumé à l'aide de la figure (2.62) comme suit :

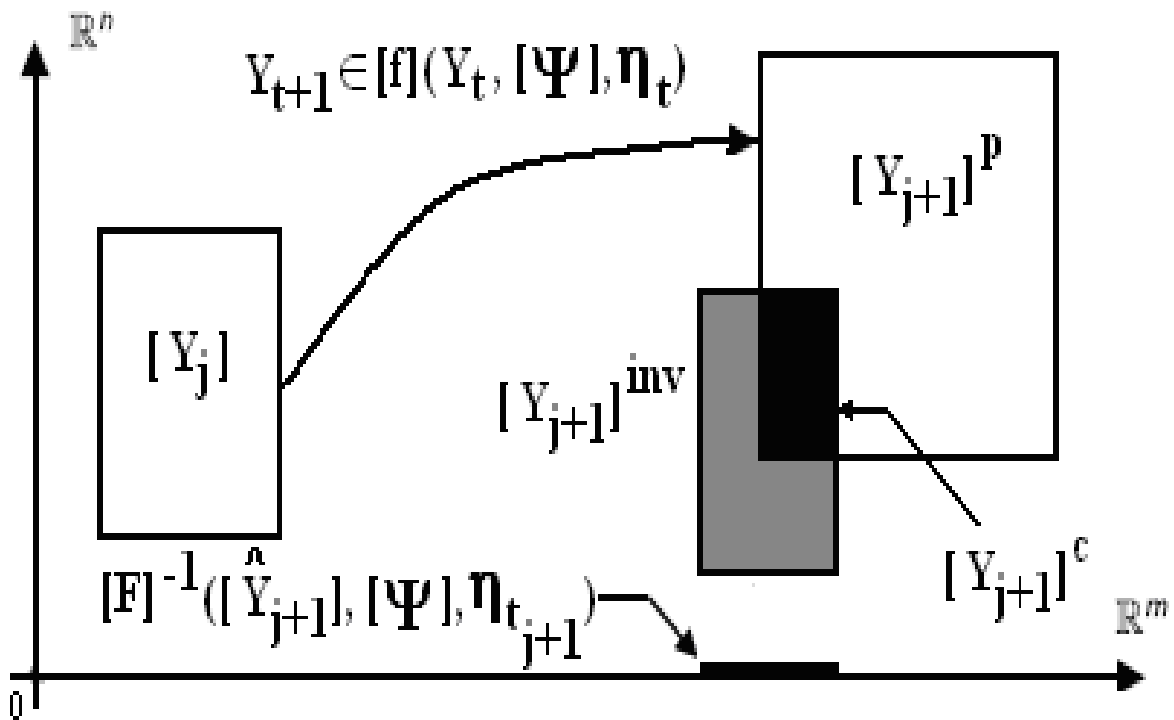


Figure 2.62: Principe de l'approche prédiction-correction par estimation ensembliste

Considérons le système dynamique discret incertain, dont les incertitudes sont représentées, *a priori*, par des intervalles bornés,

<sup>181</sup> Pour d'autres méthodes de prédictions des séries temporelles non-linéaires par réduction du chaos nous conseillons de voir le travail de Schreiber, T., et Kantz, H., (1998), « *Nonlinear projective filtering II: Application to real time séries* », in Proceedings of NOLTA 1998, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1998), chao-dyn/9805025.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

$$\left. \begin{array}{l} Y_{t+1} = f(Y_t, \Psi, \eta_t) \\ \hat{Y}_{t+1} = F(Y_t, \Psi, \eta_m) \\ Y_{t_0} \in [Y_0] \subset ID \\ \Psi \in [\Psi] \\ \eta_t + \eta_m = \eta_{mt} \in [E_t] \subset IU \end{array} \right\}_{t \in [t_0, t_n, T]}$$

où  $Y_t \in \mathfrak{R}^n$  est l'état du système dynamique, dont l'état initial est  $Y_{t_0} \in [Y_0]$ , avec  $[Y_0]$  est un pavé de bornes connues *a priori*,  $\hat{Y}_t \in \mathfrak{R}^m$  sont les observations,  $f \in C^{k-1}(\mathfrak{R}^{n+n_\eta})$  est la fonction non-linéaire définie le système dynamique ;  $F \in C^{k-1}(\mathfrak{R}^{m+n_\eta})$  est la fonction définie observée ;  $n$  et  $n_\eta$  sont respectivement les dimensions du vecteur d'états  $Y_t$  et des erreurs déterministes de modélisation  $\eta_t$  (*dynamic noise*) et de mesure  $\eta_m$  (*observational noise*). Ces erreurs sont supposées additives  $\eta_t + \eta_m = \eta_{mt}$  et sont bornées et de bornes connues  $[E_t]$ .

La figure (2.61), montre nettement le principe de l'approche prédiction-correction, étendue dans un cadre ensembliste de l'estimation de l'état dynamique d'un système, entre deux instants successifs de mesures  $t_j$  et  $t_{j+1}$ . Ce principe admet deux étapes, définies comme suit :

Étape de prédiction :

Cette première étape consiste à calculer à l'instant  $t_{j+1}$ , pour toutes les solutions du système, un encadrement garanti  $[Y_{j+1}]^p$  sachant un encadrement  $[Y_j]$  décrivant l'état du système à l'instant de mesure  $t_j$ . D'où, pendant la phase de prédiction nous avons :

$$([Y_{j+1}] \setminus ([Y_j])) \subseteq [Y_{j+1}]^p$$



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Étape de correction :

Cette deuxième étape fait appel aux algorithmes SIVIA, d'inversion ensembliste et elle se déroule en deux phases. La première, consiste à calculer à l'instant  $t_{j+1}$ , pour toutes les solutions du système, l'ensemble  $[Y_{j+1}]^{inv}$  ayant comme image par la fonction d'observation  $F(\cdot)$ , l'encadrement  $[\hat{Y}_{j+1}]$  qui fait partie du domaine admissible des mesures. D'où, pendant cette première phase de correction nous avons :

$$[Y_{j+1}]^{inv} = [F]^{-1}([\hat{Y}_{j+1}], [\Psi], \eta_{t_{j+1}})$$

Ensuite, par comparaison entre d'état prédit du pavé  $[Y_{j+1}]^p$  avec le pavé  $[Y_{j+1}]^{inv}$ , cette méthode assure la correction du pavé d'état prédit, en éliminant des pavés non consistants. D'où, pendant cette seconde phase de correction nous avons :

$$[Y_{j+1}]^c = [Y_{j+1}]^{inv} \cap [Y_{j+1}]^p$$

Walker et Mees (1998), suggèrent que cette prédiction par réduction de la noise (filtrage), n'est qu'une version d'un programme d'optimisation de  $Y_t$  sachant la dynamique et l'erreur (noise) du modèle. En développant cette idée, nous allons considérer, par la suite, ces programmes d'optimisations non-linéaires, avec contraintes, dans un cadre réel, pour définir la prévision ponctuelle par optimisation et puis, dans un cadre d'analyse par intervalle, pour définir la prévision par intervalle, à erreur bornée.

---

**Tableau 2.14: Algorithme (Estimation-Prédiction-Correction)**

---

1. Entrées : (  $[Y_0]$ ,  $[\Psi]$ ,  $f$ ,  $F$ ,  $[\hat{Y}_1], \dots, [\hat{Y}_T]$  )
  2.  $t_j = t_0$ ;  $[Y_j] = [Y_0]$  ;
  3. **while** ( $t_j < t_T$ )
  4. {  $t_{j+1}$ ,  $[Y_j]^p$  } = **Validated\_Integration** ( $[Y_j]$ ,  $[\Psi]$ ,  $t_j$ ) ;
  5.  $[Y_{j+1}]^{inv} = [F]^{-1}([\hat{Y}_{j+1}], [\Psi])$  ;
  6.  $[Y_{j+1}]^c = [Y_{j+1}]^{inv} \cap [Y_{j+1}]^p$  ;
  7.  $[Y_{j+1}] = [Y_{j+1}]^c$
  8.  $j = j + 1$ ;
  9. **end**
-

### 2.4.2.2. Prédiction par intervalle à erreur bornée

Contrairement aux modèles statiques, qui dépendent, uniquement, des valeurs courantes de la variable, les modèles dynamiques peuvent, en plus, tenir en compte ses valeurs prévisionnelles. Lorsque le modèle dynamique déterministe est non-linéaire, par rapport aux paramètres  $\Psi$ , nous pourrions constater que la connaissance, d'un état futur du système, est conditionné par la connaissance de l'erreur de mesure due à l'imprécision relative au degré de la sensibilité du système, aux conditions initiales, quand il passe d'un état à un autre. Puisque dans un cadre d'instabilité des structures, le système change constamment de condition initiale, au bout de chaque transition. Nous ne pourrions plus, chaque fois, connaître avec exactitude sa valeur initiale flottante. Donc nous écrivons :

$$Y_{mt} = Y_t + \eta_{mt}, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $Y_{mt}$  est la variable à expliquer ;  $Y_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{pt})'$  est le vecteur d'ordre  $p$  des variables observées ;  $p$  est un paramètre inconnu, estimé à partir des  $T$  paires observations  $(Y_{mt}, \tilde{Y}_t)$  et  $\eta_{mt}$  est l'erreur de mesure effectuée, lors de la transition d'un état à un autre. Or, la non connaissance, *a priori*, de la structure exacte du modèle générateur de données, nous pousse à réfléchir à la modélisation paramétrique, à l'aide d'une fonction non linéaire de régression  $\hat{f}$ , dépendante du vecteur de paramètres  $\hat{\Psi} \in \mathfrak{R}^n$  et dont elle nous estime la réponse :

$$\hat{Y}_t = \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi), \quad t = 1, \dots, T$$

Or, la différence entre le modèle inconnu et celui capable d'indiquer l'erreur de modélisation est donné par  $\eta_{ot} = Y_t - \hat{Y}_t$ , et l'erreur entre le modèle est l'observation mesurée, donnée par  $\eta_t = Y_{mt} - \hat{Y}_t$ . Ceci prouve sans difficulté la relation  $\eta_t = \eta_{mt} + \eta_{ot}$ , n'est autre que l'erreur estimée, générée, par une combinaison, entre deux types d'erreurs différentes : celle due à la présence du bruit de mesure et celle due à la modélisation.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

Rappelons que dans le cas traditionnel de la modélisation linéaire, les paramètres d'un modèle sont estimés, à la suite d'un processus d'optimisation linéaire d'une fonction de coût, prévoyant, généralement, les minimisations d'un critère d'évaluation des prévisions ponctuelles, construit d'une séquence d'erreurs de prévision, dont le critère le plus populaire correspond à l'estimation de la variance de l'erreur de prévision, noté MSFE<sup>182</sup> « *Mean Squared Forecast Error* » ou de son écart type, noté RMSFE « *Root Mean Squared Forecast Error* ». En plus, dans le cadre des modèles non-linéaires stochastiques, où l'erreur de prévision est considérée comme étant une variable aléatoire, qui sert à l'estimation non-linéaire des paramètres du modèle avec diverses techniques, dont la plus populaire est celle du Moindre Carré Non-linéaire « *Nonlinear Least Squares* », formulée par :

$$\hat{\Psi}_{NLS} = \min_{\Psi} J = \sum (Y - \hat{f}(\tilde{Y}, \Psi))^2$$

où la fonction non-linéaire  $\hat{f}(\tilde{Y}, \Psi)$  peut être déterminée par une méthode, qui lui assure une linéarisation locale, tel que par exemple, la méthode des Moindres Carrés Récursifs Non-linéaires NRLS « *Nonlinear Recursive Least Squares* ». Le principe de la méthode NRLS, consiste à minimiser un critère quadratique  $J$  correspondant au carré de l'erreur, entre la valeur observée réelle du modèle et la valeur observée, à chaque instant d'échantillonnage du processus, que nous souhaitons modéliser.

Cependant, la détermination des paramètres du modèle non-linéaire de prévision, de façon glissante par NLS, ou de façon récursive par NRLS, ne sont plus possibles, dans le cadre déterministe des modèles non-linéaires de prévision, où l'erreur flottante est, fondamentalement, considérée, mais n'a plus la même structure qu'une variable aléatoire. Alternativement, nous

<sup>182</sup> Les paramètres du modèle de prévision peuvent être estimés en minimisant la variance de l'erreur de prévision MSFE à une date de référence donnée, à partir de d'un nombre fini de prévisions simulées par exemple au moyen de la technique de Bootstrap chevauchée.

$$MSFE_t = (1/N) \sum_{k=1}^N (\hat{Y}_{t+s|t}^{(k)} - Y_{t+s})^2$$

où  $\hat{Y}_{t+s|t}^{(k)}$  est une simulation de prévision par Bootstrap à l'horizon  $s$  sachant l'information disponible à l'instant  $t$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

sommes amenés à appliquer à la manière de He, Liao et Qian (2006), d'autres techniques d'optimisations non-linéaires, sous l'hypothèse de l'erreur bornée des paramètres estimés. L'erreur de mesure et l'erreur de la modélisation sont, alors, bornées, respectivement comme suit :

$$E_{m_t} = \left\{ \eta_{m_t} \in \mathfrak{R} \mid \underline{\eta}_{m_t} \leq \eta_{m_t} \leq \bar{\eta}_{m_t} \right\}_{t=1, \dots, T} \text{ et } E_{o_t} = \left\{ \eta_{o_t} \in \mathfrak{R} \mid \underline{\eta}_{o_t} \leq \eta_{o_t} \leq \bar{\eta}_{o_t} \right\}_{t=1, \dots, T} .$$

D'une façon plus générale, l'erreur entre le modèle et la réponse observée est, ainsi, bornée, de la manière :

$$E_t = \left\{ (Y_{m_t} - \hat{Y}_t) \in \mathfrak{R} \mid \underline{(Y_{m_t} - \hat{Y}_t)} \leq (Y_{m_t} - \hat{Y}_t) \leq \overline{(Y_{m_t} - \hat{Y}_t)} \right\}_{t=1, \dots, T}$$

où  $E_t = E_{o_t} + E_{m_t}$ .

Nous espérons donc, que sous l'hypothèse des erreurs bornées des données, les paramètres estimés obéissent à un niveau de performance garantissant leur consistance. La consistance des paramètres estimés au  $t^{\text{ème}}$  instant, forme l'ensemble suivant :

$$\Psi_t = \left\{ \Psi \in \mathfrak{R}^n \mid \underline{E}_t \leq (Y_{m_t} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi)) \leq \bar{E}_t \right\}_{t=1, \dots, T}$$

Donc, nous désirons connaître la bonde d'erreur (de mesure et de modélisation) minimale incluse dans la marge de tolérance volontaire  $[-1, 1]$ , et garantissant la consistance des paramètres estimés. Rationnellement, ceci nous conduit à la recherche d'un ensemble de solution  $S_T$  de la forme :

$$\{ S_T \} = \left\{ \left\{ \bigcap_{t=1}^T \Psi_t \right\} \mid |E_t|_{t=1, \dots, T} \leq 1 \right\}$$

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

avec,  $\{S_T\}$  est un polyèdre<sup>183</sup> convexe obtenu à partir de la formule récursive, donnée par :

$$\{S_0 = \mathfrak{R}^n, S_t = S_{t-1} \cap \Psi_t\}_{t=1, \dots, T}$$

Mais, dès que  $t$  devient très grand, la structure de  $\{S_T\}$  sera généralement très compliquée. Une description exacte de la forme est une tâche que nous souhaitons établir, afin de garantir la performance de la bonde d'erreur flottante et par la suite, la consistance des paramètres estimés qui déterminent la structure du modèle de prévision, que nous voulons qu'il soit le meilleur, parmi un ensemble de modèles incertains candidats.

Pour résoudre ce problème, nous distinguons deux voies de recherches. L'une défend le traitement analytique, tel que Bertsekas (1982), favorise une méthode de résolution, basée sur l'optimisation sous contrainte et le Multiplicateur de Lagrange ; Dennis et Schnabel (1983) et Evtushenko (1985), ont fourni une description de plusieurs méthodes numériques de résolutions ; Rauh, Kletting, Aschemann et Hofer (2006), ont fondé une méthode de simulation dynamique, basée sur la l'optimisation globale. L'autre axe de recherche, défend une manipulation géométrique, tel que le travail de Ecker (1980), qui présente une large discussion sur les principales techniques graphiques d'optimisation, Rapaport et Gouzé (2002), ont proposé une méthode de réduction de la bande de contraintes, où les hyperplans définissant la bande de contraintes sont des plans tangents au paralléloèdre. Nataraj et Barve (2003), ont préconisé une méthode polynomiale d'extraction de la bande de contraintes, ayant des formes rectangulaires.

Dans le cadre de ce travail, nous choisissons, à la manière de Rao et Huang (1990), une méthode simple voyant la minimisation des tailles géométriques, par exemple de l'ellipsoïde englobant. Suivant une large littérature menée par Chernousko et Rokityanskii (2000), Kurzhanski et Viraiya (2004), Kurzhanski et Viraiya (2005), et Chernousko (2005), ce choix de la structure ellipsoïdale est expliqué par plusieurs raisons. D'une part, l'estimation ellipsoïdale permet d'englober le polyèdre des paramètres admissibles, dans un ellipsoïde, dont l'avantage est

---

<sup>183</sup> Un polyèdre est l'intersection commune d'un nombre fini de sous espaces.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

qu'il décrit, de façon simple, par un vecteur spécifiant, son centre et par une matrice définie positive, qui précise sa taille et son orientation. D'autre part, si nous posons par  $\Psi_{t-1}$  comme le centre de l'ellipsoïde et par  $\Pi_{t-1}$  une matrice définie positive, qui spécifie la forme et l'orientation de l'ellipsoïde, alors à l'instant  $t$ , l'ellipsoïde  $\xi_t(\hat{\Psi}_t, \Pi_t)$  qui englobe l'intersection de la bande de contrainte  $\{S_T\}_{T=1, \dots, T}$  donnée, à la suite de la nouvelle itération de mesure et l'ellipsoïde  $\xi_{t-1}(\hat{\Psi}_{t-1}, \Pi_{t-1})$ , satisfait la relation suivante :

$$\xi_{t-1}(\hat{\Psi}_{t-1}, \Pi_{t-1}) \cap \{S_t\} \subseteq \xi_t(\hat{\Psi}_t, \Pi_t)$$

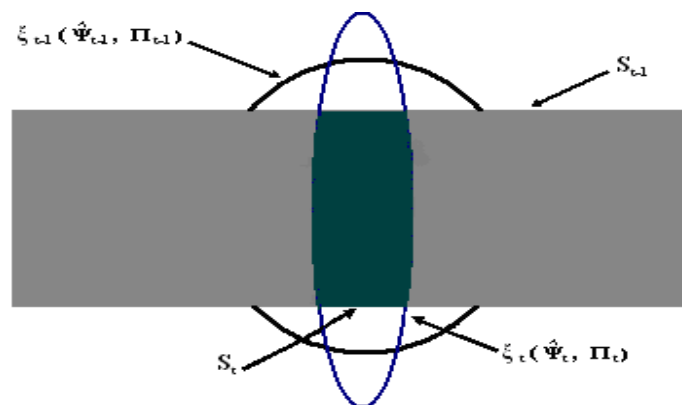


Figure 2.63: Méthode ellipsoïdale récursive

Horst et Tuy (1987) et Rump (2005), ont montré qu'en principe, les méthodes traditionnelles d'optimisations ne sont plus capables à la résolution de ce problème, nécessitant une solution optimale globale, de haut degré de convergence. Dès lors, Nayeri, Liu et Deller (1994), Nataraj et Barve (2003) et Maksarov et Norton (2002), ont constaté que le recours à d'autres types de manipulation, notamment, les algorithmes d'optimisation non-linéaire, telle que la méthode d'estimation ellipsoïdale, trouve son fondement pour des différentes raisons.

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

Premièrement, cette technique se base sur un algorithme d'estimation ensembliste ellipsoïdale OBE (*Outer Bounding Ellipsoid*)<sup>184</sup>, efficient et compatible et de plus, il peut être appliqué dans des situations, faisant intervenir des relations de type récursif.

Deuxièmement, cette technique est simple à mettre en œuvre. Elle ne nécessite aucune condition sur les fonctions de densités et les lois de distributions des erreurs, tant de modélisation que de perturbation de mesure provenant d'une erreur structurelle déterministe non modélisable par variable aléatoire.

Troisièmement, plus la prévision, elle peut inclure une étape de validation du modèle, nécessaire à la sélection d'un modèle optimal, parmi un ensemble de solutions possibles.

En ce sens, Verses et Norton (1991), ont signalé que, lorsque nous sommes retombés dans un piège de discrimination, dans un ensemble de modèles incertains candidats, la sélection de celui, à la fois le plus fiable et précis n'est possible que lorsque nous possédons les moyens d'identification les plus adéquats ; tel que par exemple, les techniques ensemblistes dites à erreur inconnue mais bornée. C'est la raison pour laquelle, nous sommes exclusivement intéressés, ici, à l'approche ensembliste ellipsoïdale. Dans ce contexte précis, nos contributions, dans la suite de cette section, portent sur un développement mathématique basé sur l'analyse, à erreur bornée, permettant une évaluation réaliste des bornes de l'erreur.

En répondant à cet objectif, nous choisissons le modèle, dont l'erreur flottante de prévision (générée par la modélisation et à la mesure), est la plus faible, dans la bande des erreurs garantissant la consistance des résultats. Sinon nous risquons de choisir un modèle non linéaire de prévision non efficace, soit parce qu'il génère des erreurs explosives et non modérées de modélisation, c'est-à-dire que le modèle incertain non-linéaire de prévision ainsi choisi, est un modèle stochastique. Soit, nous choisissons un modèle non-linéaire de prévision non-efficace, car

---

<sup>184</sup> L'algorithme OBE cherche à chaque instant  $t$ , un ellipsoïde  $\xi_t(\hat{\Psi}_t, \Pi_t)$  qui englobe l'ensemble de la bande de contrainte  $\{S_t\}$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

l'erreur de prévision flottante n'est plus bornée, ce qui est à l'origine de la croissance exponentielle de la perturbation de mesure et par conséquent, le modèle de prévision, ainsi choisi, perd sa fiabilité puisqu'il sera très sensible à ses conditions initiales, c'est-à-dire, qu'il sera conditionné par une dynamique chaotique. Soit, nous pourrions retomber dans une situation très grave ou le modèle non-linéaire de prévision sélectionné est inefficace, car il peut intégrer, à la fois, des erreurs flottantes explosives, de prévision imprécises et des erreurs flottantes stochastiques de prévisions inefficaces, qui sont à l'origine de la présence d'un comportement chaotique, caractérisant la dynamique endogène de ce modèle.

$$\hat{\Psi}_j = \lambda \left\{ \begin{array}{l} \min(\max) \Psi_j \\ s/c \\ |Y_{mt} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi)| \leq E_t \\ |E_t| \leq 1 \\ \forall t = 1, \dots, T \end{array} \right.$$

Or, malgré que dans ce cadre déterministe non linéaire de prévision, la technique classique d'optimisation locale sous contrainte soit applicable et très rapide. Néanmoins, cette technique présente certaines limites majeures. D'une part, elle ne garantit pas l'obtention d'un optimum global, à ce problème d'optimisation et d'autre part, elle ne peut plus prouver l'existence et l'unicité des solutions.

Pour faire face à ces inconvénients présentés par la prévision ponctuelle, en appliquant la technique traditionnelle d'optimisation sous contrainte, nous reformulons le même problème, dans un cadre plus général, prévoyant l'analyse par intervalle. Cette nouvelle technique d'optimisation globale, sous contrainte est vue comme algorithmes de recherche qui consiste à associer à chaque intervalle du problème initial, un intervalle, puis subdiviser le domaine de chaque variable en plusieurs parties et ensuite effectuer les calculs, sur ces parties. Cette



Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

technique présente des avantages importants, puisqu'elle assure une majoration aux erreurs et garantit l'obtention des informations globales et précises sur le problème posé.

Dans ce cadre de dynamique non-linéaire déterministe, un modèle est incertain et pouvant changer de structure d'une itération à une autre. Norton (1987), Belforte, Bona et Cerone (1990), et Nataraj et Barve (2005), ont signalé que le problème de sélection de la structure du modèle non linéaire en prévision (de séries temporelles), sera réduit à la spécification de la bande optimale, dite intervalle incertain des paramètres PUI (*Parameter Uncertainly Interval*), noté,

$$\hat{\Psi}_j = [\underline{\hat{\Psi}}_j, \bar{\hat{\Psi}}_j]$$

avec,  $\underline{\hat{\Psi}}_j = \inf_{\Psi_j}(\{S_T\})$  et  $\bar{\hat{\Psi}}_j = \sup_{\Psi_j}(\{S_T\})$  déterminent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la bande de PUI.

$$\inf_{\Psi_j}(S_T) = \left\{ \Psi_j \in \mathfrak{R}^n \left| \left\{ \bigcap_{t=1}^T \Psi_t \right\}, -1 \leq \underline{E}_t, \forall t = 1, \dots, T \right. \right\}$$

et

$$\sup_{\Psi_j}(S_T) = \left\{ \Psi_j \in \mathfrak{R}^n \left| \overline{\left\{ \bigcap_{t=1}^T \Psi_t \right\}}, \bar{E}_t \leq 1, \forall t = 1, \dots, T \right. \right\}$$

d'où,

$$\hat{\Psi}_j = \inf_{\Psi_j}(S_T) \cap \sup_{\Psi_j}(S_T)$$

Or, étant donné la possibilité que les erreurs commises (de la modélisation et de la mesure), augmentent indéfiniment. Donc, une alternative à cette situation consiste à sélectionner des variables, dont les paramètres sont consistants, c'est-à-dire, nous sommes amenés à appliquer des techniques de consistances. Ceci revient à déterminer des projections de contraintes, afin d'établir le PUI garantissant la fiabilité des paramètres du modèle dynamique. Ceci, peut être obtenu par le recours aux techniques de la programmation mathématique non-linéaire. Dans ce contexte, nous sommes amenés à résoudre le programme d'optimisation non-linéaire suivant :

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

$$\hat{\Psi}_j = \left[ \underline{\hat{\Psi}}_j, \overline{\hat{\Psi}}_j \right], \setminus \left\{ \begin{array}{l} \overline{\hat{\Psi}}_j = \left\{ \begin{array}{l} \max \Psi_j \\ s/c \\ Y_{mt} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi) \leq \bar{E}_t \\ Y_{mt} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi) \geq \underline{E}_t \end{array} \right. \\ et \\ \underline{\hat{\Psi}}_j = \left\{ \begin{array}{l} \min \Psi_j \\ s/c \\ Y_{mt} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi) \leq \bar{E}_t \\ Y_{mt} - \hat{f}(\tilde{Y}_t, \Psi) \geq \underline{E}_t \end{array} \right. \end{array} \right. \quad t = 1, \dots, T$$

Ces réflexions vers la modélisation non-linéaire déterministe par des programmes d'optimisation sous contrainte non-linéaire NCOP « *Nonlinear Constrained Optimization Program* », nous guident à la recherche des algorithmes de résolutions adéquates. Notre effort de recherche va converger vers une riche littérature, fournissant différentes méthodes et divers algorithmes de résolutions, dont les plus récents sont élaborés par : Hansen et Sengupta (1983), Hansen (1984), Hansen (1987), Hargreaves (2002), Higham (2002) et Kieffer et Walter (2006). Ces algorithmes montrent que le problème de d'optimisation globale sous contrainte (de minimisation ou de maximisation), consiste en deux étapes :

En premier lieu, nous estimons la valeur approximative de  $f$  pour toutes valeurs de  $\Psi$  où les contraintes sont satisfaites. En second lieu, nous déterminons les valeurs de  $\hat{\Psi}_j = \left[ \underline{\hat{\Psi}}_j, \overline{\hat{\Psi}}_j \right]$ . Ces données obtenues par la nouvelle mesure obéissent à la fonction de la somme des moindres carrés généralisés. Enfin, il faut noter que la puissance de cette analyse fait intervenir la notion de la convergence de ce type de solution. Or, ceci nécessite de développer un

algorithme puissant, permettant de faire un compromis, entre l'algorithme séquentiel, sous optimal et une approche globale, optimale, mais numériquement inaccessible.

## 2.5. Conclusion de la deuxième partie

La prédiction dynamique dans un domaine d'instabilité endogène des structures dynamiques est un processus continu, qui ne peut échapper aux lois qui régissent les modes de transitions des états de phases. La plupart des statisticiens considèrent le problème de sélection d'un modèle de prédiction, comme étant un problème de décision. Le défi majeur demeure dans le manque de données futures pour stabiliser notre industrie. Dans ce contexte, le but poursuivi est la formulation d'un modèle statistique, qui soit une représentation congruente du processus stochastique (inconnu), qui a généré la série observée.

Tout comme en probabilités/statistiques, il faut bien comprendre la différence entre le processus sous-jacent qui génère des données (*data generating process*), sa réalisation, telle qu'on l'observe sur l'échantillon historique à notre disposition, les futures réalisations et le modèle qu'on construit, afin de tâcher de le représenter. Par représentation congruente, on entend un modèle fiable qui soit conforme aux données, sous tous les angles mesurables et testables. Ce problème consiste donc, à la recherche de la densité prédictive pour les données futures des variables économiques des séries temporelles analysées. Car dans cette troisième partie, nous avons essayé de fournir un élément de réponse pour le cadre théorique étudié.

Nos travaux s'inscrivent dans le cadre de la modélisation démo-économique qui s'attache à l'étude de la dynamique macro-économique, grâce à une nouvelle théorie des fluctuations endogènes, qui vise à expliquer les cycles et les fluctuations économiques par d'autres éclaircissements, autres que celles traditionnellement basées sur l'approche linéaire. Mais, lorsque nous avons privilégié dans notre cadre de s'intéresser à l'analyse des cycles et des fluctuations économiques, uniquement, selon l'approche endogène des cycles, qui étudie la dynamique interne

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

d'un modèle macro-économétrique non-linéaire avec changement de régimes par transition lisse, il est évident de ne pas nier, ni les répercussions des chocs exogènes sur l'apparition du cycle exogène, ni le rôle joué par le mécanisme d'impulsion- propagation des chocs exogènes dans la détermination stochastique du cycle. Cependant, ce cadre d'analyse, de la modélisation classique, habituellement fondée sur l'hypothèse de linéarité et basée sur la stabilité de l'équilibre unique (général) et statique, exclu toute possibilité de dynamisme des structures endogènes et en conséquence, devient incapable de rendre compte de la possibilité de naissance des fluctuations endogènes auto-entretenues. Nous visons donc, à montrer que même en l'absence des chocs exogènes, la plupart des variables macroéconomiques peuvent fluctuer, au cours du temps, sans avoir à évoquer le rôle des chocs externes d'environnement. Pour cela, nous allons traiter deux visions symétriques d'analyses. La première englobe le couple « *équilibre-stabilité* », introduit par l'école des « *postkeynésiens* », et la seconde englobe le couple « *déséquilibre-instabilité* », introduit par la « *synthèse classico-keynésienne* ». Ces arguments reposent sur l'idée, selon laquelle les fluctuations macroéconomiques sont liées à des facteurs de changement structurels qui modifient les régimes de croissance des économies, en longue période. Par "*changement structurel*", nous distinguerons, tout ce qui tend à déformer les régularités macroéconomiques caractéristiques d'un régime de croissance, à une date donnée. Dans ce cadre, ces régimes concernent les modes de production de l'industrie face aux défis de la compétitivité et de la créativité du secteur industriel et la cohésion de ses relations d'échanges intra-branches, d'interactions interbranches, l'atteinte de l'organisation socio-économique des entreprises productrices, selon les modes de consommation, la coordination des décisions individuelles. Tous ces facteurs, sous l'effet de leur propre changement structurels, provoquent des ruptures, dans la régulation de l'économie industrielle en longue période et entraînent des fluctuations endogènes significatives, ayant un impact énormément considérable, qui touche profondément la dynamique de l'évolution des variables macroéconomiques et par conséquent, le comportement futur du secteur.

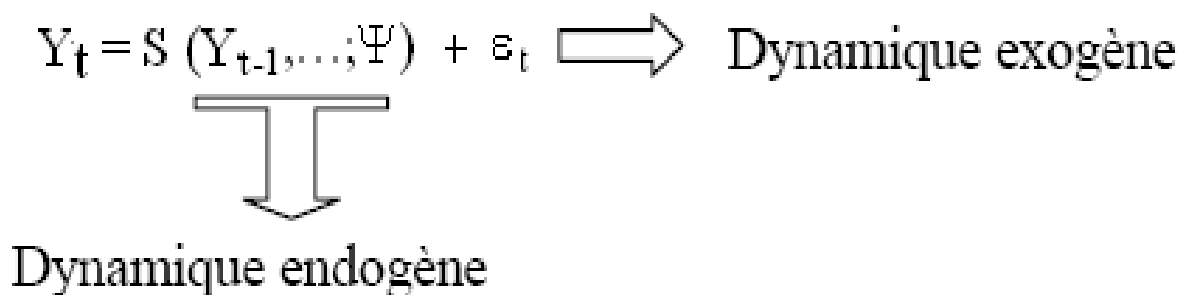
Nos travaux se dirigent dans le cadre de l'analyse contemporaine, de l'instabilité et des fluctuations cycliques endogènes. Pour lequel la non-linéarité provenant de l'instabilité

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

structurelle est la seule manière de faire apparaître des fluctuations auto-entretenues et par la suite de pourvoir une explication endogène de celles-ci. Ces hypothèses d'instabilité endogène et de non-linéarité, s'intéressent à plusieurs aspects de la compréhension de ces phénomènes, qui apparaissent jusqu'à nos jours « *flous* », ceci nous motive afin d'essayer de répondre à notre question capitale, notamment sur le rôle que jouent les dynamiques non-linéaires des fluctuations endogènes, de la production industrielle en Tunisie et ses relations d'interactions interbranches, dans la construction et la sélection d'un modèle de prévision optimal?

Cette recherche vise, donc, à enrichir nos connaissances sur l'explication endogène des fluctuations et les apports récents, en matière de la modélisation macrodynamique. Nous attendons qu'elle participe à l'enrichissement de notre savoir et à être utile pour les intéressés. Afin de construire un modèle de prévision du cycle industriel, il est primordial de comprendre les mécanismes sous-jacents de la prévision. Nous allons essayer donc de saisir : Qu'est ce qu'une dynamique endogène?



Un modèle dynamique de série temporelle est une spécification mathématique, intégrant, simultanément, deux types de dynamiques : une dynamique exogène et une dynamique endogène. Si les prévisionnistes ont l'habitude de lier la prévision d'une série temporelle au dynamique exogène d'un modèle. C'est parce que, tout d'abord, ce type de dynamique, n'est d'autre que celui induit par les chocs exogènes du terme d'erreur. Dans ce cas, sachant que le terme d'erreur est de nature stochastique, ce qui entraîne une dynamique en relation de dépendance de la nature du processus examiné. Ce premier raisonnement découle de l'hypothèse largement acceptée par les économistes précapitalistes, selon laquelle la théorie des cycles économiques, vise à expliquer

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

les fluctuations économiques qu'ont connues, et que connaissent encore, les économies de marché, sont essentiellement provoquées par des phénomènes extérieurs (monétaires ou réels). Mais, malgré l'importance de ce raisonnement il marque son invalidité, car la prévision reste en générale imparfaite, à cause de non prise en compte des incertitudes qui apparaissent lors des perturbations dynamiques des fluctuations économiques. Donc, même si nous retenons cette première hypothèse, il est fondamental de remarquer que le dynamisme d'un modèle non-linéaire de prévision du cycle dépend aussi de la manière, dont ces chocs sont modifiés par les mécanismes d'instabilités des seuils critiques qui déclenchent la dynamique endogène des structures, lorsqu'ils se propagent à travers le temps. La compréhension de la manière, avec laquelle se réalise la diffusion de la réponse d'une série temporelle, suite à une excitation, va nous fournir un élément de réponse, sur l'évolution de son comportement dynamique, qui est un facteur déterminant de sa prévision. De cela, nous sommes obligés de connaître, avec exactitude, le mécanisme réel, fondateur de la dynamique endogène d'une série, afin d'y construire un modèle fiable de prévision, capable de prévoir son comportement optimal. Cette deuxième manière de raisonnement dépasse le premier pour plusieurs éléments. Tout d'abord, elle autorise la modélisation dynamique non-linéaire, comme outil pour suivre l'évolution des comportements des variables macro-économiques et ceci est lié à un cadre d'optimisation rationnelle. Ensuite, le traitement statistique marque une rupture avec les hypothèses habituelles, selon lesquelles le comportement dynamique d'une série est représenté par son évolution, dans le temps, autour d'une droite ou d'un point<sup>185</sup>. Par contre, cette nouvelle approche traite la dynamique endogène, comme étant un facteur explicatif de la diffusion de l'information interne, dans les fluctuations auto-entretenues. Dans ce cadre, un modèle de dynamique, purement endogène, est une relation temporelle déterministe, entre une variable à expliquer et ces valeurs retardées (sans intégrer le terme d'erreur : source de la dynamique exogène). Dans ce paradigme, la théorie endogène du cycle économique peut être considérée comme un cadre privilégié, capable de donner des éléments de réponses à notre problématique. Selon cette théorie, un cycle reflète une évolution du

---

<sup>185</sup> Dans une dynamique purement exogène, l'évaluation dans le temps, d'une variable économique se matérialise soit par sa fluctuation aléatoire autour d'une droite déterministe de la forme  $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ , soit sous forme d'une marche au hasard  $Y_t = \alpha + \varepsilon_t$ .

Partie II : Endocyclogenèse et dynamique des changements des structures endogènes :  
Vers une approche dynamique déterministe en prédiction de séries  
temporelles non-linéaires

---

système en déséquilibre, suite à un choc, auquel il a été soumis: il est donc, le produit de la dynamique endogène du système économique<sup>186</sup>. Cette fois, le système économique va converger vers une dynamique cyclique régulière que nous avons appelé un cycle limite. À partir de cette étude, un traitement adéquat des facteurs dynamiques à l'aide des outils tirés de la théorie des systèmes dynamiques déterministes non-linéaires (portrait de phase, exposant de Lyapunov, dimension de corrélation, chaos, diagramme de bifurcation, entropie de Shannon, diagramme de récurrence), a permis donc la caractérisation qualitative des interactions des structures cycliques endogènes des séries étudiées. En conclusion, d'abord, la prise en compte de la dynamique non-linéaire met en évidence plusieurs aspects instables de différents degrés de complexité : la brisure de l'homogénéité de l'espace des phases, l'existence des équilibres multiples, la présence des fluctuations auto-entretenues (cycles limites) et les changements des propriétés qualitatives par transitions de phase (bifurcations). En plus, lors d'une situation dynamique instable, le chaos issu d'un processus non-linéaire de transition, au début est une sorte de chaos, que nous qualifierons de créatif, basé sur une vision prédictive centrée autour du principe de reconstruction de la destruction et qui peut finalement reproduire un nouveau design dynamique plus stable que celle du départ, en reformulant non seulement la géométrie du système, mais aussi en changeant les caractéristiques dynamiques de ses structures endogènes.

---

<sup>186</sup> Dans ce cadre d'analyse nous insistons que la théorie endogène du cycle économique dépasse la théorie exogène selon laquelle un cycle correspond à une réponse optimale du système aux chocs continuels auxquels il est soumis. C'est donc, le comportement erratique des variables exogènes qui explique le comportement cyclique des variables endogènes. Il répond à la question posée par Plosser (1989, p.53), « *Comment réagissent dans le temps des agents rationnels à des variations dans l'environnement économique et quelles implications ont ces réponses sur les valeurs d'équilibre des variables agrégées* ».

## **Partie III**

# **Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide des modèles STAR**

*Savoir pour prévoir afin de pourvoir*

*(Auguste Comte)*



<b>Sommaire Partie III.....</b>	<b>372</b>
<b>3.0. Introduction de la partie III.....</b>	<b>375</b>
<b>3.1. Présentation des modèles autorégressifs à changement de régime lisses.....</b>	<b>382</b>
3.1.1. Rappels sur les processus autorégressifs avec changement de régimes.....	382
3.1.2. Le modèle autorégressif à transition lisse.....	389
3.1.3. Dynamique des processus de transitions lisses associées à la modélisation STAR....	394
3.1.3.1. <i>Fonction de transition LSTAR</i> .....	399
3.1.3.2. <i>Fonction de transition ESTAR</i> .....	415
3.1.3.3. <i>Fonction de transition ALSTAR</i> .....	427
3.1.3.4. <i>Fonction de transition DLSTAR</i> .....	434
3.1.3.5. <i>Fonction de transition QLSTAR</i> .....	439
3.1.3.6. <i>Fonction de transition QESTAR</i> .....	446
3.1.3.7. <i>Fonction de transition AESTAR</i> .....	452
3.1.3.8. <i>Fonction de transition TVSTAR</i> .....	459
3.1.3.9. <i>Fonction de transition BSTAR</i> .....	462
<b>3.2. Estimation, spécification et validation d'un modèle STAR.....</b>	<b>470</b>
3.2.1. L'estimation du modèle STAR.....	470
3.2.1.1. <i>Estimation du modèle LSTAR/ESTAR</i> .....	470
3.2.1.2. <i>Détermination du nombre de régimes AR</i> .....	473
3.2.2. La spécification du modèle STAR .....	476
3.2.2.1. <i>Test de spécification d'un processus de transition LSTAR</i> .....	478
3.2.2.2. <i>Test de spécification d'un processus de transition ESTAR</i> .....	484
3.2.2.3. <i>La méthodologie de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) du choix entre le modèle LSTAR et le modèle ESTAR</i> .....	486
3.2.3. La validation du modèle STAR.....	489
3.2.3.1. <i>Test de Granger et Teräsvirta (1993)</i> .....	490
3.2.3.2. <i>Tests d'Eitrheim et Teräsvirta (1996)</i> .....	491
3.2.3.2.1 <i>Test de non autocorrélation résiduelle</i> .....	491
3.2.3.2.2 <i>Test de non-linéarité restante</i> .....	491
3.2.3.2.3 <i>Test de constance des paramètres</i> .....	493
<b>3.3. La stationnarité des modèles STAR.....</b>	<b>495</b>
3.3.1. <b>Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles ESTAR selon Kapetanios, Shin et Snell (2003)</b> .....	<b>495</b>
3.3.2. <b>Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles LSTAR selon Leybourne, Newbold et Vougas (1998)</b> .....	<b>498</b>

<b>3.4.</b>	<b>Prévisions à l'aide des modèles STAR univariés.....</b>	<b>502</b>
3.4.1.	Construction d'un modèle à seuil de prévision ponctuelle .....	509
3.4.2.	Construction d'un modèle à seuil de prévision par intervalle de confiance.....	513
3.4.3.	Construction d'un modèle à seuil de prévision par densité .....	514
3.4.4.	L'évaluation des performances prédictives.....	515
<b>3.5.</b>	<b>Tentative empirique de modélisation et de prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie.....</b>	<b>516</b>
3.5.1.	Analyses descriptives de la stationnarité.....	516
3.5.2.	Test de changements structurels : Test de Lin et Teräsvirta (1994).....	526
3.5.3.	Test de linéarité contre le chaos déterministe.....	535
3.5.3.1.	<i>Exposition du problème de non-linéarité dans le cadre de sélection de la structure d'un modèle de prédiction.....</i>	<i>535</i>
3.5.3.2.	<i>Test de BDS.....</i>	<i>542</i>
3.5.3.3.	<i>Tests de l'exposant de Lyapunov.....</i>	<i>547</i>
3.5.3.4.	<i>Tests de Hinich (1996).....</i>	<i>550</i>
3.5.4.	Tests généraux de linéarité contre l'alternative est ou non nécessairement bien spécifiée.....	553
3.5.4.1.	<i>Tests de Ramsey (1969).....</i>	<i>553</i>
3.5.4.2.	<i>Test de Tsay (1989).....</i>	<i>555</i>
3.5.4.3.	<i>Test de Hansen (1996).....</i>	<i>558</i>
3.5.5.	Construction d'un modèle de prévision STAR.....	563
3.5.5.1.	<i>Organigramme de spécification d'un modèle STAR.....</i>	<i>563</i>
3.5.5.2.	<i>Construction d'un modèle STAR.....</i>	<i>564</i>
3.5.6.	Diagnostic de tests et évaluation d'un modèle non-linéaire de prévision.....	592
3.5.6.1.	<i>Évaluation des prévisions ponctuelles.....</i>	<i>592</i>
3.5.6.1.1	<i>Tests de Diebold et Mariano (1995).....</i>	<i>496</i>
3.5.6.1.2	<i>Tests de Harvey, Leybourne et Newbold (1997).....</i>	<i>600</i>
3.5.6.2.	<i>Évaluation des prévisions par Intervalles de Confiance.....</i>	<i>601</i>
3.5.6.2.1	<i>Tests de Christoffersen (1998).....</i>	<i>602</i>
3.5.6.2.2	<i>Tests de Wallis (2002).....</i>	<i>605</i>
3.5.6.3.	<i>Évaluation des Densités de prévisions.....</i>	<i>607</i>
3.5.6.3.1	<i>Tests de Diebold, Gunther et Tay (1998).....</i>	<i>612</i>
3.5.6.3.2	<i>Tests de Bai (2003).....</i>	<i>614</i>
3.5.6.3.3	<i>Tests de Bao, Lee et Saltoglu (2007).....</i>	<i>617</i>
<b>3.6.</b>	<b>Test de causalité non-linéaire.....</b>	<b>623</b>
<b>3.7.</b>	<b>Conclusion de la troisième partie.....</b>	<b>633</b>

## Sommaire Partie III

---

<b>Conclusion Générale</b> .....	636
<b>Bibliographie</b> .....	644
<b>Annexes</b>	

### 3.0. Introduction de la partie III

Comme nous le voyons à partir de la partie précédente, dès que l'on accepte l'idée de non stabilité endogène d'une série temporelle macroéconomique non-linéaire, son évolution<sup>187</sup>, dans le temps discret, fait que le processus générateur de données de celle-ci, change constamment de structure, puisqu'il satisfait le principe de la multiplicité des équilibres mobiles et notamment celui de l'auto-organisation, à la loi de la régularité auto-adaptative non-linéaire. Ces changements des structures dans le temps accompagnés des conditions dynamiques font que la prévision des processus caractérisés par l'instabilité des structures, soit un domaine passionnant de recherche. Puisque, l'étude prévisionnelle des cycles endogènes non-linéaires, par référence à la théorie du chaos est proposée en extension, de la deuxième partie de ce document, comme le cadre théorique nécessaire consacré à l'analyse positive des dynamismes des processus de transitions approximées, par analogie à des systèmes dynamiques non-linéaires, discrets et déterministes, qui favorisent une interprétation évolutionniste du changement des structures économiques et par conséquent, ils décrivent, en particulier de manière significative, les principales caractéristiques propres aux grandeurs socio-économiques et surtout celle de l'évolution de la dynamique industrielle. Ainsi, la prise en compte de la dimension dynamique dans l'explication de la transition vers le chaos, est inspirée d'un célèbre article de Baumol et Benhabib (1989). Ces deux auteurs supposaient que les observations de ces processus sont affectées, dans la plupart des cas, dans le régime multiple non-linéaire dans lequel le système oscille au cycle limite ou parfois, il est dominé par une dynamique chaotique. Or, comme il était démontré dans la deuxième partie précédente, qu'en présence d'un comportement chaotique, très sensible de ses conditions initiales, un processus est censé produire une évolution exponentielle des erreurs de prévision dont les deux sources majeurs sont: une erreur de spécification attribuée à la qualité de la série temporelle et à la dynamique du système lui-même et une erreur

---

<sup>187</sup> La notion d'évolution empruntée à la biologie apparaît aujourd'hui comme un concept de base afin de rendre de manière significative un rapprochement des fondements de la théorie évolutionniste au sein de la science économique.

---

exclusivement imputable aux fluctuations qui se produisent par les incertitudes de mesures de précision non infinie, ce qui impose une limite fondamentale à notre aptitude de prédire son comportement futur. Dans ce contexte, la prévision de ce type de processus constitue un défi. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés dans ce travail, à la comparaison des méthodes de sélections de structures de modèles non-linéaires en prédiction des séries temporelles. Donc, cette troisième partie s'attache à l'économétrie des changements structurels et vise à décrire ce qui fait toute l'originalité de cette imprévisibilité, qui se fonde sur le comportement original d'une récurrence induit, par les itérations des fonctions de transitions. Nous pouvons penser que cette dynamique endogène et non-linéaire est l'objet prioritaire de la difficulté de prédire le comportement futur des modèles économétriques non-linéaires à transitions lisses. Nous personnifions, donc, la nécessité de comprendre la dynamique des fonctions de transitions assurant le lissage. Sur la base d'un jeu de données observées, choisir un modèle de prévision adéquat, parmi une classe de modèles générateurs des prévisions, est un problème important dans plusieurs domaines. C'est aussi une tâche complexe, largement influencée par l'objectif de prévisionniste et la classe de modèles proposée. Si nous cherchons à prévoir la valeur d'une série, à partir d'un modèle non-linéaire, que devient la prévision? Une prévision ponctuelle? Une prévision par intervalle de confiance? Une densité de prévision qui permettrait d'exposer les problématiques d'asymétries et autres aspects multi-modaux de la distribution de prévision?

En économétrie des séries temporelles non-linéaires à temps discret, le but de la prévision est d'estimer, à un moment futur donné, la valeur d'une série, avec les meilleures précisions et les fiabilités possibles. Alors que le but de la modélisation est de produire au présent une approximation raisonnable d'une fonction inconnue. Il existe deux grandes familles de techniques pour produire cette approximation : l'approche paramétrique et l'approche non-paramétrique. Bien qu'il soit difficile de donner une définition définitive des modèles non-linéaires<sup>188</sup> de prévisions, leurs classifications restent une tâche possible.

---

<sup>188</sup> Une définition proposée par Harvey et Jaeger (1993), est la suivante : un modèle non-linéaire est un modèle n'étant pas simultanément linéaire et gaussien.

---

Or, pourtant la richesse de l'économétrie des processus non-linéaires, le but de cette troisième partie est d'exposer une classe paramétrique de modèles non-linéaires et plus exactement les modèles à changements de régimes avec transition lisse. Pratiquement, ces types de modèles sont représentés de façon que la valeur actuelle d'une variable, sera exprimée linéairement, en fonction des observations passées, en assurant une non-linéarité, en moyenne par l'effet de seuil et permettent ainsi, de définir différents états de la nature (par exemple le passage dans un cycle d'une phase d'expansion à une phase de récession). Ainsi, la dynamique de la variable étudiée (moyenne, variance, covariance/corrélation) dépend de l'état de la nature dans laquelle elle se retrouve. Par conséquent, la dynamique non-linéaire, conduisant à ce type de fonctionnement, a été analysée récemment par González et Teräsvirta (2008), en considérant la dynamique non-linéaire en moyenne des processus autorégressifs et pour notre cadre, nous focalisons sur l'étude de la dynamique non-linéaire en économétrie des séries temporelles comme les modèles à seuil, tel que le cas où le cycle de la production industrielle est endogène et non-linéaire. Sa modélisation à l'aide des modèles à seuils justifie leurs capacités de détecter et d'analyser les effets asymétriques, induits par la présence d'une rupture structurelle, dans la partie déterministe du processus et de prévoir la dynamique non-linéaire inhérente de cycle de production industrielle, comme le note Siliverstovs et van Dijk (2003). Ainsi, une innovation de ce travail réside dans l'introduction de ruptures structurelles dans la partie déterministe. Cela implique que la valeur du paramètre de seuil estimée par le modèle se modifie, suite à un changement interne de structure du modèle, caractérisant le tissu du secteur industriel généralement instable. Nous allons effectuer, au début de ce travail, une étude par simulation<sup>189</sup> de l'effet de seuil pour la dynamique du processus avec variable de transition en niveau, pour plusieurs cas possibles de fonctions de transitions. Nous essayons d'explorer, théoriquement, le lien entre la prévision et la propriété de persistance du changement, au niveau de la tendance déterministe d'une série temporelle. Il est intéressant, donc, de proposer une synthèse de l'abondante littérature technique consacrée aux modèles à changement de régimes avec

---

<sup>189</sup> Nous effectuons en premier lieu la simulation des différents processus ainsi étudiés. Nous examinons ensuite le comportement des séries simulées. La prévision sera exposée plus tard.

transitions lisses, qui a pour objectif d'éclairer les différentes dimensions du débat, sur l'apport de ces modèles à seuils à la prévision.

Ce champ d'analyse économique vient, donc, apporter un nouvel éclairage à l'effort de recherche dans le domaine des instabilités des structures dynamiques et trouve son origine dans le diagnostic du comportement asymétrique des fluctuations endogènes, qui peuvent affecter, durablement, les grandes tendances du cycle de production industrielle en Tunisie et causent, ainsi, son dynamisme instable. Or, admettons que la théorie du cycle endogène propose des modèles, qui reflètent l'existence des fluctuations liées à la structure même de l'économie, avec la possibilité des interventions correctrices de politique économique et nous fournit plusieurs causes, qui sont à l'origine de l'asymétrie du cycle industriel en Tunisie, montrée au niveau de la première partie de ce document. Par exemple, selon Simpson, Osborn et Sensier (2001), et Boyer et Saillard (1995), les bouleversements permanents des techniques de production et la mutation des formes d'organisation, peuvent fournir des éléments de réponse à l'instabilité du cycle industriel, notamment lorsqu'il s'agit d'une industrie en permanente restructuration. Selon Boyer (1990), ce sont les chocs endogènes, regroupant les effets de capacité de l'investissement (création des entreprises industrielles ; pôles de compétitivités industrielles locales ; la migration partielle de l'activité industrielle vers l'intérieur du pays), les transformations intrasectorielles, les changements techniques et les mouvements de la population active qui sont à l'origine du comportement dynamique des variables de la production industrielle, en Tunisie, par conséquent, ils provoquent l'émergence de tissus industriels de taille dans des régions intérieures du pays.

*« D'une part, la croissance de la production s'est faite cumulative, grâce aux bouleversements permanents des techniques de production et à la mutation des formes d'organisation. D'autre part, ce mouvement général est interrompu par des périodes de stagnation et/ou d'instabilité économique, alors même que des cycles conjoncturels courts se superposent, au mouvement général de croissance, y compris dans les phases de prospérité... À cet horizon, se trouvent endogénéisés les effets de capacité de l'investissement, les transformations sectorielles, les changements techniques et les mouvements de la population active, c'est ce qui fait le champ de la dynamique économique par opposition à la macroéconomie traditionnelle, principalement statique. ».*

(Robert Boyer, (1990), p. 609)

---

La théorie économique du cycle endogène offre une explication potentielle, pour les processus dynamiques, à non-linéarités en moyennes et surtout de la présence de non-linéarité induite par l'instabilité endogène engendrée par la dynamique des fluctuations industrielles. La nouveauté dans ce travail, c'est que pour expliquer le comportement dynamique discret et continu des variables macroéconomiques de la production industrielle en Tunisie, nous adoptons une vision, tout à fait récente, basée sur la prévision. Notre interrogation de base est d'essayer de savoir, comment les fluctuations cycliques affectent la prévision économique appliquée en industrie et dans quels sens? Dans ce cadre théorique Tong et Lim (1980), Tong (1990), Tong (1995), ont suggéré la possibilité de présence de cycle limite, comme étant un type de dynamique cyclique endogène, caractérisant, uniquement, les fluctuations endogènes autoentretenues, de la dynamique des modèles non-linéaire, en moyennes et qui se modélise par des modèles à seuils, avec transitions lisses comme le montre la démarche de l'analyse adoptée jusqu'à ce niveau. En ce sens, Lundbergh et Teräsvirta (2002) et Teräsvirta (2006), ont affirmé que la modélisation non-linéaire, par des modèles autorégressifs à changements de régimes, est un outil résistant pour tenir compte de l'effet de seuil et en plus de l'émergence de fluctuations autoentretenues du cycle économique, afin d'améliorer la qualité prédictive d'une série. Sur la même voie, Bao, Lee, et Sltoglu (2007), ont insisté sur la performance et la validité prédictive de ce type de modélisation. Au sein de cette modélisation, deux courants se sont distingués dans la littérature, selon que la nature exogène ou endogène dans l'explication du cycle. De la même façon, nous essayons de savoir comment évaluer un modèle non-linéaire, à changement de régime, avec transitions lisses de prévision? Devons-nous nous contenter de valider la prévision ponctuelle et de la comparer par exemple à celles issues des modèles linéaires simples? Devons-nous évaluer la validité des intervalles de confiance? Devons-nous évaluer la validité de la densité de prévision?

Dans le contexte de cette recherche, les modèles autorégressifs, avec changements de régimes, ne sont pas intéressants, uniquement, du point de vue d'une perspective théorique, ils sont en train d'être reconnus comme des outils efficaces pour la prévision et utiles pour l'analyse quantitative, au but d'orientation des politiques en macroéconomie. Sur la base d'une vaste étude comparative de la performance des modèles non-linéaires de prévision, Granger et Pasaran



(2000), Stock et Watson (2002b,c), Patton et Timmermann (2007), se mettent d'accord que l'amélioration des techniques, permettant une bonne adéquation entre les prédictions d'un modèle et les séries macroéconomiques observées, fait que les modèles autorégressifs avec changements de régimes, gagnent en crédibilité dans des institutions qui établissent les politiques, comme par exemple, les études sur l'analyse des fluctuations conjoncturelles menées, chaque année, par la banque centrale, lors de l'élaboration des rapports annuels, reflétant un miroir de l'économie considérée. Toujours, dans le cadre de prouver le recours à la macroéconomie moderne avec modélisation non-linéaire, pour valider la théorie économique. Fouquau, Hurlin et Rabaud (2008), ont démontré la présence des effets de seuil dans la relation d'Okun<sup>190</sup>, en se basant sur un modèle, à seuil non dynamique, avec effets fixes individuels. Cette modélisation a permis de postuler la présence d'une dynamique hétérogène, dans les coefficients du panel étudié (20 pays de l'OCDE), s'étalant sur la période 1970 à 2004. Ce résultat implique la présence d'une croissance qui n'est pas toujours créatrice d'emplois.

Selon une perspective qui consiste à suivre le prolongement des modèles non-linéaires en moyenne, nous développons un ensemble d'outils et de concepts, qui sont utiles pour estimer, prévoir et comparer des modèles autorégressifs avec changements de régimes. Parmi les raisons qui autorisent le recours à cette famille de modèles, nous citons, la recherche d'une représentation de l'émergence de la dynamique des fluctuations cycliques<sup>191</sup>, caractérisant les comportements asymétriques de type cycle limite, ainsi que les phénomènes cycliques avec transitions de phases.

<sup>190</sup> La loi d'Okun est été proposée initialement en 1962 par l'économiste Américain Arthur Okun. Il s'agit d'une relation empirique, qualifiant les pertes en produit intérieur brut provoquées par une hausse à court terme du chômage. Cette loi, met en évidence d'une part les fluctuations du PIB réel autour de son sentier de croissance tendancielle et d'autre part les fluctuations du taux de chômage autour de son taux d'équilibre.

<sup>191</sup> Si nous faisons référence à la théorie économique, nous pouvons distinguer dans la littérature deux courants expliquant la nature exogène ou endogène des cycles économiques : selon la première approche, dans les modèles néoclassiques ou d'équilibre général, les fluctuations proviennent des interférences qui puisent leur source dans les contingences extérieures et imprévisibles qui ne se révèlent pas du fonctionnement des marchés. On les appelle les « *aléas* » ou les « *états* » de la nature. Elles peuvent être dues aussi aux interventions des autorités publiques qui visent à affecter les valeurs des variables fondamentales suivant leurs préférences politiques (voir à ce sujet les travaux en économie publique -l'école des « *choix publics* »-). Selon l'école considérée, ces effets peuvent être temporaires ou inexistantes, affecter à court ou à long terme l'équilibre économique initial. Nous disons donc, que les fluctuations dues aux chocs aléatoires justifient la dynamique de propagation de ces chocs. Par contre, la deuxième approche basée sur les modèles de cycles réels privilégie les chocs technologiques reflètent la dynamique intrinsèque des fondamentaux de l'économie, en l'absence de chocs exogènes.

---

Tant sur le plan théorique qu'empirique, les modèles autorégressifs avec changements de régimes sont imposés ces dernières décennies comme l'outil de référence pour l'étude et l'explication de la nature des cycles (fluctuations) économiques. Ils ne cachent plus leur capacité à prendre en compte les irrégularités et les retournements de phase dans les mouvements cycliques, lors de l'analyse et de la prévision de la conjoncture économique. Soulignons que dans la phase actuelle de nos recherches, nous tendons à calibrer les paramètres des transitions du modèle, à partir de l'étude de la sensibilité des fonctions de transitions aux modifications paramétriques, qui assurent le contrôle des propriétés qualitatives de leurs dynamismes endogènes. Dans cette troisième partie, nous allons, donc, essayer d'examiner à la manière de Hors (1995), l'apport des processus d'ajustement dynamique et de transition de phase à l'analyse des propriétés dynamiques, qui sont nécessaires à l'identification des rapports, entre les variables macroéconomiques industrielles agrégées fluctuant au cours du temps, pour que nous soyons capables : d'expliquer les irrégularités inhérentes de ces fluctuations cycliques endogènes, d'identifier, puis, d'analyser les caractéristiques des cycles endogènes de la productions industrielle en Tunisie et ensuite d'en décrire les principaux faits stylisés.

Cette dernière partie est organisée comme suit : La première section est consacrée à la présentation synthétique qui rappelle, dans un cadre théorique général, les concepts élémentaires de bases pour les modèles autorégressifs, à changement de régime et plus particulièrement, les modèles de changement avec transitions lisses, qui intègrent dans leurs parties déterministes des processus dynamiques, continus, assurant les transitions de phases entre divers régimes, formalisés explicitement par plusieurs formes de fonctions de transitions, décrivant ainsi, les différents modes de dynamismes endogènes. La deuxième section donne un dossier de description pratique des modèles autorégressifs à changement de régime avec transition lisse et ce concentre, en particulier, sur les procédures de leurs estimations, de leurs spécifications et de leurs validations. La troisième section sera consacrée aux tests de stationnarité non-linéaire dans le cadre de la modélisation de type STAR. La quatrième section présente, dans un cadre général, les méthodes de prévisions (ponctuelle, par intervalle de confiance et par densité), qui peuvent enrichir la prévision non-linéaire, à l'aide d'un modèle autorégressif à seuil avec transition lisse.

Dans cette section sera présentée, donc, la procédure empirique que nous allons adopter par la suite, pour spécifier rationnellement la structure optimale d'un modèle non-linéaire en prédictions de séries temporelles. La cinquième section vise à appliquer une tentative empirique de la modélisation et de la prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie, moyennant de la modélisation économétrique non-linéaire, à l'aide des modèles de changements de régimes avec transitions douces. Finalement, une sixième section présente un diagnostic de test de la causalité non-linéaire, au sens de Granger, appliqué aux séries analysées de la production industrielle en Tunisie, afin de concevoir les différents rapports d'interdépendances, entre ces séries et par conséquent, d'en déduire celles entre les branches sectorielles de notre industrie.

Il est très intéressant de justifier que cette démarche d'analyse, désignée dans la présente partie de ce document, explique les propriétés des modèles étudiés au moyen des illustrations, tant par des données simulées, que par des données réelles en temps discret, portant sur les séries temporelles univariées de la production industrielle en Tunisie.

## **3.1. Présentation des modèles autorégressifs à changement de régimes lisses**

### **3.1.1. Rappels sur les processus autorégressifs avec changement de régimes**

Les modèles autorégressifs (c'est à dire expliquant une variable par son passé, et éventuellement par d'autres variables) généraux sont définis par la relation :

$$Y_t = S(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0; \psi_0, \psi_1, \dots) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $S$  est une fonction non-linéaire<sup>192</sup> exprimée par la variable endogène retardée  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$  et des coefficients de régression  $\psi_0, \psi_1, \dots$  et  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc.

Il est important de comprendre que sous cette formalisation, l'ajustement non-linéaire  $Y_t$  dépend de tout son passé :  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0$ , toutefois, cette mémoire qui dérive de l'ensemble du passé de la variable endogène est totalement transmise chaque fois, via l'observation immédiatement précédente  $Y_{t-1}$ . Cette hypothèse se définit analytiquement par la relation de récurrence  $Y_t = f(Y_{t-1})$  qui est à la base du fonctionnement dynamique du processus de transition, montrant comment un modèle se reproduit et change sous l'effet des chocs endogènes qu'il subit et de son propre fonctionnement au principe de transformation adaptative des structures endogènes auto-générées lors du changement par recombinaison des invariances. De ce fait, elle sera fondamentale d'une part, pour comprendre la dynamique discrète d'un modèle économétrique et rendre lisible les mécanismes virtuels, sous-jacents, derrière la propagation de l'information prédictive dans le temps, caractérisant l'endogénéité des fluctuations cycliques et d'autre part, de construire des modèles non-linéaires de prévision. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi comme base de départ de la présente recherche, les modèles autorégressifs non-linéaires, avec changement de régimes.

Ces modèles englobent des modèles autorégressifs combinés avec divers types de non-linéarité en moyenne<sup>193</sup> qui résultent de l'effet de seuil. Dans cette section, nous présentons une classe de modèles autorégressifs à changement de régimes RSAR (*Regime-Switching Autoregressive Models*), comme des modèles non-linéaires qui permettent de définir les différents états de nature ou de régimes comme le montre Franses et Dijk (2000) et le confirme

<sup>192</sup> Nous allons voir dans la présente partie que  $S$  est appelé « *Skeleton* ». C'est l'espérance conditionnelle du processus  $Y_t$ .

<sup>193</sup> Notons que si nous sommes attirés dans cette étude par la prise en compte d'asymétrie des modèles autorégressifs, suite à la présence d'un effet de seuils en tendance. Diverses limitations du modèle initial ont conduit de nombreux auteurs à proposer des généralisations. Une première extension donnée par Zakoïan (1990), a visé d'étudier le problème l'hétéroscédasticité suite à un phénomène de non-constance des variances, au niveau de la diagonale principale de la matrice des variances-covariances du terme d'erreur, en appliquant une modélisation caractérisée par une asymétrie des perturbations de type *TARCH : Threshold Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*.

plus récemment Kuan, Hung et Tsay (2005). Ces modèles sont particulièrement intéressants, en modélisation macroéconométrique, dans la mesure où ils permettent de tenir compte des phénomènes d'asymétrie et des ruptures. L'idée sous-jacente est qu'une relation peut être non-linéaire sur la période globale considérée, mais linéaire par morceaux. Or, à l'instar de Chan et Tong (1989), la dynamique continue de la variable étudiée, peut être résumée par ses caractéristiques statistiques (moyenne, variance, autocorrélation), et donc dépend du régime dans lequel se trouve. De cela, découle l'idée que nous sommes entrain de postuler dans cette section et qui consiste, à dresser un panorama des modèles à changement de régime en moyenne<sup>194</sup>, rendant correctement compte du phénomène endogène de rupture et de l'asymétrie cyclique avec transition de phase. C'est dans cette optique que nous sommes amenés, tout d'abord, à mettre en évidence, par l'étude théorique, l'existence de plusieurs régimes dynamiques, pour une même série chronologique (plusieurs états) et à spécifier, par la suite un mécanisme bien déterminé de transition d'un régime à l'autre. Une telle étape est nécessaire pour faire la prévision, à partir d'un modèle à seuil. De plus, elle est fondamentale pour sélectionner, parmi les modèles ainsi définis, le bon modèle de prédiction.

Les travaux dans ce domaine ont suggéré que la sélection d'un modèle adéquat parmi la famille des modèles non-linéaires à changements de régimes, nécessite essentiellement la distinction entre deux groupes fonctionnelles : les modèles à seuils où le changement d'un régime à un autre est de façon brutale et rapide, déterminé par une variable observée sans aucun mécanisme générateur des changements de régime et les modèles à changements progressifs de régime où le changement nécessite la présence d'un mécanisme qui commande et organise le passage entre régimes par transition doucement de façon lisse ou markovienne, tout est en forte liaison avec la nature de la progressivité dont se caractérisent les changements entre régimes.

<sup>194</sup> Une seconde voie de recherche prometteuse consiste à étudier la non-linéarité en variance. Dans ce cas, Engle (1982), dans son article « *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation* », *Econometrica*, a proposé une représentation autorégressive de la variance conditionnellement à son information passée, permettant de tenir compte des phénomènes de volatilité. Ces modèles ARCH « *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* », sont généralement utilisés dans le domaine de la finance. Engle (1982), a ouvert la voie à la modélisation ARCH et à ses nombreux développements. Mais, concernant cette thèse, c'est précisément sur la non-linéarité en moyenne que notre travail de recherche portera pour l'essentiel. Plus précisément, fondés sur un mécanisme endogène de changement de régime lisse, la modélisation STAR s'est révélée très satisfaisante pour décrire la formation de manière endogène par bifurcation des cycles asymétriques.

Ainsi, selon que les régimes sont indépendants entre eux ou dépendants, le choix de la variable de transition peut être justifié par la théorie économique, mais une solution athéorique est aussi réalisable. Dans tous les cas possibles, lorsque les régimes sont liés entre eux par des fonctions ou par des probabilités de transition, nous défendons, à la manière de Deschamps (2008), l'existence de deux grands types de mécanismes de transition d'un régime à l'autre, définis comme suit :

- Des mécanismes de transition déterministe connus et endogènes, où la fonction de transition est observable et dépend de la variable dépendante et d'un seuil : nous parlons, alors, de modèles autorégressifs à seuils avec transitions lisses ou *Smooth Transition AutoRegressive Models* (STAR) qui se fondent sur le principe d'ajustement progressif et lisse « *smooth* » plutôt que brutal et discret ;

- Des mécanismes de transition probabiliste inconnus et exogènes dominés par des processus stochastiques modélisés indépendamment des variables observées, de type chaîne de Markov cachée : nous parlons, alors, de modèles à changements de régimes markoviens ou *Markov Switching AutoRegressive Models* (MSAR)<sup>195</sup> qui se fondent sur le principe d'ajustement progressif et markovien plutôt que lisse.

L'objet de cette section est de fournir une maquette raisonnable du prolongement des modèles autorégressifs à changement de régimes. Pour plusieurs raisons, déjà énoncées, nous nous limitons la recherche pour la catégorie des modèles avec des mécanismes de transition déterministe et endogènes uniquement. Tout d'abord, sachant toujours que notre but est de chercher à réaliser une meilleure sélection de la structure optimale d'un modèle parmi une famille de modèles non-linéaires dotée d'une certaine forme de flexibilité, en moyenne asymétrique, capable de reproduire les effets leptokurtiques<sup>196</sup> qui caractérisent la forme des distributions

<sup>195</sup> Pour un modèle autorégressif à changement de régime markovien nous supposons que, conditionnellement à une suite de variables cachées, les observations forment un modèle autorégressif non-linéaire. Donc, il s'agit de modéliser des séries temporelles non-stationnaires par morceaux, par exemple des séries ayant un régime pour les périodes de croissance économique et un autre pour les périodes de récession. Pour une revue de littérature sur ce domaine, il est conseillé de voir Hamilton (1990), qui a étudié de tels modèles afin de modéliser des séries temporelles de GNP (*Gross National Product*) aux Etats-Unis, sujettes à des changements discrets de régimes.

<sup>196</sup> L'hypothèse de normalité est rejetée, si les queues d'une distribution empirique sont plus épaisses que celles d'une loi gaussienne. Nous parlons alors de distribution leptokurtique. L'importance des queues étant mesurée par la *Kurtosis*, rapport du moment centré d'ordre quatre par le carré de la variance. Plus la *Kurtosis* est grande, plus les queues sont épaisses, ceci pour des distributions suffisamment régulières.

aigues, des séries de données de la production industrielle en Tunisie (voir partie I). Rappelons aussi, que le simple examen du graphique de la majorité des séries étudiées, en niveau, nous permet de conclure qu'elles sont asymétriques. Or, comme la modélisation de type STAR repose sur le fait que les régimes consécutifs dépendent du passé du processus d'ajustement, ce qui va engendrer une certaine durabilité en forte relation avec les variations cycliques dans l'évolution dynamique de chacune de ces séries, qui participe à son tour à l'apparition des fluctuations endogènes à caractères auto-entretenues. Donc, basés sur un mécanisme endogène de changement de régime, les modèles à seuils à transition lisse offrent un cadre très pratique pour la détection des cycles endogènes. En conséquent, la modélisation STAR se révèle donc très satisfaisante pour la prise en compte de cycles endogènes asymétriques dans les séries macro-économiques analysées. Cette asymétrie peut être modélisée par un modèle non-linéaire en moyenne de type STAR, capable non seulement de faire apparaître des fluctuations auto-entretenues, mais aussi de fournir une convaincante explication endogène de celles-ci. Mais avant tout, nous passons en revue la définition d'un modèle *autorégressif à seuil* avec changement brutal de régime, comme suit :

### Définition 3.1

*Un processus autorégressif à seuil avec changement brutal de régime est un processus de régression non-linéaire, formé par un système d'équations linéaires, par morceaux, avec des variables explicatives retardées quelconques (endogènes et/ou exogènes)  $X_t$ ; une variable économique de transition  $W_t$  quelconque (observable ou non observable) et des seuils d'excitations  $c_j$  quelconques (connues ou inconnues). Ce processus est modélisé comme suit :*

$$Y_t = \psi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_i} \psi_i^{(j)} X_t + \varepsilon_t^{(j)} \quad \text{si } r_{j-1} \leq W_{t-d} \leq r_j, \quad j=1, \dots, s, \quad t=1, 2, \dots, T.$$

avec  $\varepsilon_t^{(j)} \sim iid(0, \sigma_{j\varepsilon}^2)$ .

$s$  : étant le nombre des seuils;

$c_j$  : sont les paramètres de seuil pour lesquels le processus saut d'un régime  $r_{i-1}$  à un autre  $r_i$  ;

$p_i$  : est l'ordre de la partie autorégressive linéaire qui représente chaque équation ;

$T$  : est le nombre d'observations temporelles (à temps discret);

$W_{t-d}$  : est la variable de transition dont le délai (ou retard)  $d$ , avec  $d$  est un entier positif ;

$\varepsilon_t^{(j)}$  : est un bruit blanc non corrélé ;

$\psi^{(j)} = (\psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}, \dots, \psi_k^{(j)})$  : sont les paramètres inconnus du processus;

$X_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}, Z_1, Z_2, \dots, Z_q)'$  : sont les variables explicatives (les endogènes retardées et d'autres variables).

Cette famille de modèles à seuils avec changement brutal de régimes indépendants a été largement analysée dans la littérature économétrique des processus non-linéaires en moyennes. Les travaux empiriques dans ce domaine ont été marqués essentiellement par deux classes très populaires de modèles, ayant comme particularité commune d'avoir des distributions multimodales et elles sont capables de fournir des bons ajustements des données macroéconomiques pour pouvoir analyser l'asymétrie du cycle économique. Le modèle à seuils TAR (*Threshold AutoRegressive*), développé par Tong (1983), afin d'ajuster une structure autorégressive non-linéaire en moyenne à l'aide d'un modèle autorégressif à seuil possédant un nombre limité de régimes et le modèle SETAR (*Self-Exciting Threshold AutoRegressive*), développé par Tong (1990), afin d'augmenter le nombre réduit de régimes dans le cadre des modèles TAR, mais suivant que le changement de régime se fasse selon que la variable endogène retardée d'un délai  $d$  dépasse ou non un seuil  $c$ . Ainsi, en présence seulement de deux régimes de même ordre autorégressif  $p$ , le modèle SETAR (2 ; p ; p) s'écrit :

$$Y_t = \left( \psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i} \right) I_{(Y_{t-d} \leq c)} + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) I_{(Y_{t-d} > c)} + \varepsilon_t, \quad 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $I_{(H)}$  est une fonction indicatrice avec  $I_{(H)} = 1$  si l'évènement H est vérifiée et  $I_{(H)} = 0$ , sinon. Le paramètre  $c$  représente le seuil, pour lequel il y a transition brutale de phase. C'est-à-dire un changement rapide d'état dynamique du système. En particulier, dans le cas des études conjoncturelles, une valeur de seuil nulle définit un passage prompt entre deux régimes : un régime de croissance positive et un régime de croissance négative. De ce fait, les valeurs des seuils offrent une première interprétation économique, des régimes définissant les états dynamiques d'un processus. Il est, donc, important d'appliquer la procédure qui fournit une bonne méthode d'estimation et de détection de ces seuils.

À ce stade, il convient de noter que contrairement aux modèles autorégressifs à seuils avec changement brutal et rapide de régimes de façons indépendantes de types TAR ou SETAR définis précédemment, un modèle autorégressif à seuil avec changement progressif de régimes de type STAR, développé par Luukkonen et Teräsvirta (1991), afin de décrire une progressivité dans le processus de transition lisse des changements de régimes. Cette modélisation STAR est largement



---

utilisée en économétrie des processus non-linéaires en moyennes, en particulier, plusieurs applications empiriques mettent en évidence certains faits stylisés tels que à titre d'exemples l'existence de dynamiques asymétriques au cours du cycle économique et l'endogénéité des fluctuations cycliques. Par exemple, sur le taux de croissance du PIB américain, Potter (1994), montre que le modèle autorégressif linéaire, est rejeté, au profit d'un modèle à seuil avec transition lisse. Il montre, de plus, que ce modèle non-linéaire en moyenne rend correctement compte de l'asymétrie cyclique existante, en analysant des fonctions de réponse impulsionnelles non-linéaires, suite à des chocs de taille et de signe différents. De leurs parts, Teräsvirta et Anderson (1992) et Teräsvirta, Tjostheim et Granger (1994), ont montré l'évidence de plusieurs dynamiques dans les comportements des indices de la production industrielle pour les pays de l'OCDE, lors des phases d'expansions et de récessions et en conséquence, ils ont conseillé de modéliser ces effets par la modélisation STAR.

Après avoir étudié la dynamique d'un modèle économétrique de type STAR et mentionné par déduction, l'intérêt d'accomplir la lisibilité de notre étude, en traitant le modèle économétrique dans sa forme globale y compris sa forme dynamique déterministe (*skeleton*). Or, comme nous avons déclaré, auparavant, que le champ pratique de l'étude dans cette troisième partie, porte, exclusivement, sur les processus non-linéaires, en moyenne, de type STAR, où la non-linéarité est due à l'existence des sauts qualitatifs, tels que le passage entre les deux régimes consécutifs ne se fait pas d'une façon prompte, mais au contraire, se réalise avec un ajustement progressive par transition lisse, au moyen d'une fonction continuellement dérivable entre zéro et un. Il reste à signaler qu'une particularité de cette modélisation, c'est qu'elle repose sur une hypothèse fondamentale pour laquelle les régimes dépendent du passé du processus générateur de données. En vue d'accomplir notre tâche, nous allons, tout d'abord, commencer par définir ce que c'est qu'un modèle autorégressif à changement de régime par transition lisse.

### 3.1.2. Le modèle autorégressif à transition lisse

Une caractéristique fondamentale du modèle décrit précédemment de façon globale nommé SETAR, c'est que le passage entre deux régimes successifs se fait brusquement de manière très rapide, en fonction du signe de la variable endogène  $Y_{t-d}$  retardée d'un délai  $d$ , ce qui pouvant mettre en doute la crédibilité des prévisions, qui en sont issues, parce que la discontinuité, au niveau du seuil, complique l'étape d'estimation. Afin de pallier ces difficultés, Chan et Tong (1986b) et Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), ont suggéré de généraliser le modèle SETAR, par une nouvelle formalisation, celle du modèle STAR<sup>197</sup>, en permettant à la transition entre les régimes d'être lisse ou souple<sup>198</sup>. Nous pourrions, donc, trouver une fonction continuellement dérivable  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$  (source de *Smooth*), qui lisse le passage de 0 à 1 et par conséquent, cette fonction de transition lisse n'est autre qu'un processus dynamique déterministe, (dont le comportement dynamique est étudié au niveau de la deuxième partie) permet au modèle SETAR avec transition douce, un lissage sur le temps, permettant d'atténuer les changements, lors du passage entre les régimes cycliques endogènes, où la transition entre les régimes est gouvernée par la variable endogène, retardée d'ordre  $d$ .

Dés lors, pour répondre aux critiques concernant la brutalité de la transition, entre les régimes dans les modèles SETAR, les modèles STAR<sup>199</sup>, impliquent l'existence, aux moins de deux régimes distincts, dans la dynamique des séries atténuées, grâce à un mécanisme déterministe de transition graduelle mais progressivement, décrit à l'aide d'une fonction de transition lisse. Ce mécanisme de transition reflète la transition lisse d'un état d'équilibre, à un autre, lorsque le fonctionnement de l'activité économique est décrit, à l'aide d'un processus STAR. Ainsi,

<sup>197</sup> Les modèles STAR ont été développées par Teräsvirta et Anderson (1992), pour représenter les non-linéarités existant dans le cycle des affaires de 13 pays de l'OCDE et le cycle européen dans son ensemble. Les propriétés statistiques de ces modèles ont été examinées par la suite par Granger et Teräsvirta (1993) et Teräsvirta (1994a).

<sup>198</sup> Chan et Tong (1986b), montrent que si  $\gamma$  tend vers l'infini, alors le modèle STAR se réduit à un modèle SETAR.

<sup>199</sup> Pour une revue de la littérature sur les modèles STAR, nous pourrions faire référence aux travaux de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), Luukkonen et Teräsvirta (1992), Granger et Teräsvirta (1993), Teräsvirta (1996a), Teräsvirta (1998) et Potter (1999). Pour un panorama des développements récents, nous pourrions faire référence aux travaux de van Dijk, Teräsvirta, et Franses, (2002), Teräsvirta (2004), Teräsvirta (2006) et González et Teräsvirta (2008).

---

Teräsvirta et Anderson (1992), Granger, Teräsvirta et Anderson (1993) et van Dijk, Strikholm et Teräsvirta (2003), ont signalé que cette modélisation admet comme particularité de fournir un cadre privilégié à l'étude de manière endogènes des fluctuations cycliques asymétriques, puisqu'elle permet de distinguer la dynamique des phases d'expansion et de récession d'un cycle à partir de une analyse dynamique non-linéaire du processus générateur de données. Une interprétation importante de la transition souple entre régimes, inspirée des réflexions de Granger et Teräsvirta (1999), implique que les changements, au niveau réuni, sera, plus conformément, illustré par un modèle STAR si l'économie (secteur industriel) est constituée d'un grand nombre d'individus ou de firmes (industrielles), dont chacun(e) change de comportement, de manière rapide, mais de façon non simultanée. Ce comportement hétérogène, de changement dans le temps peut être argumenté par le fait que certains agents économiques peuvent réaliser des gains en prédisant l'action du gouvernement et réagissent, graduellement, en modérant progressivement leur transition, avant le changement de politique économique. Ce type d'ajustement souple, à des degrés divers, induit une force d'inerties comportementales, dues aux coûts de transaction, aux habitudes ou à l'incertitude. Selon cette vision, sous l'effet de l'orientation dynamique de politique économique, le caractère lisse de la transition doit être compris comme résultat d'un processus d'ajustement progressif du comportement des agents, qui converge, graduellement, par apprentissage adaptatif, vers un nouveau régime. En ce sens, Lardic et Mignon (2002), confirment, économiquement, l'importance de ce type de modélisation : « *Les modèles STAR sont principalement utilisés pour caractériser le cycle économique ou l'évolution de certaines variables macroéconomiques et financières* »<sup>200</sup>. Dans le souci de notre travail de recherche, ces modèles offrent par conséquent, un cadre adéquat pour modéliser et prévoir le comportement dynamique et asymétrique des cycles des séries de la production industrielle en Tunisie, afin de résoudre le problème d'instabilité de notre secteur industriel. Une présentation détaillée de ces modèles est donnée par Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) ; Luukkonen et Teräsvirta (1992) et Teräsvirta et Anderson (1992). D'ailleurs, une étude faite par Lardic et Mignon (2002), sur la déviation du taux de change mensuels bilatéraux, par rapport à la parité de pouvoir d'achat (PPA) des six séries relatives aux pays : Etats-Unis, Japon, Allemagne et France,

---

<sup>200</sup> Voir Lardic, S. et Mignon, V., (2002), « *Économétries des séries temporelles macroéconomiques et financières* », *Economica*, p. 268.

sur la période de janvier 1972 à janvier 2001, montre que ces modèles sont efficaces pour représenter l'asymétrie, due à l'hétérogénéité des participants (chartistes et fundamentalistes) sur le marché de changes. Une deuxième étude, réalisée par Teräsvirta (1995), montre sur la base d'une analyse empirique faite sur le taux de croissance américain entre les années 1889 et 1987, que ces modèles peuvent être utilisés, non seulement pour expliquer le changement progressif de régime, mais aussi afin d'atténuer les changements soudains et brusques qui se fassent brutalement.

En effet, cette représentation de littérature nous paraît très intéressante, puisqu'elle fonde une base solide, sur laquelle nous aurons la possibilité de remettre en cause l'explication des fluctuations de la conjoncture, par les réactions du système économique, aux différents chocs exogènes, subis par le système et de valider notre hypothèse, qui repose sur l'idée, qu'un changement structurel endogène touche la structure même de l'économie, et en conséquence, l'économie peut fluctuer spontanément même en l'absence des chocs exogènes et elle peut, donc, se situer dans deux régimes différents, d'expansion, ou de récession, mais de par la nature endogène du mécanisme de transition, le passage d'un régime à l'autre n'est pas brutal, mais se fasse progressivement. Cette transition de transition entre régimes est douce dans les modèles STAR univariés et nous distinguons, parfois, un continuum d'états intermédiaires. C'est la raison pour laquelle, elle est continuellement dérivable et elle exprime le poids accordé à chacun des régimes entre 0 et 1.

L'objet de la suite de la présente sous-section est d'introduire et de discuter les aspects théoriques du modèle STAR univarié.

**Définition 3.2 (Franses et van Dijk (2000)<sup>201</sup>)**

Un processus  $n$ -STAR<sup>202</sup> ( $p$ ) a  $(n+1)$  régimes pour une série univariée  $Y_t$ ; observée à  $t = 1-p; 1-(p-1); \dots; -1; 0; 1; \dots; T-1; T$ ; est un système d'équations linéaires par morceaux avec  $n$  fonctions de lissage  $(G_j(\cdot))_{1 \leq j \leq n}$  et des seuils d'excitation, modélisé comme suit :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i}) [1 - G_{j-1}(s_{(j-1)t}; \gamma_{(j-1)n}, c_{(j-1)n})] \\ + \sum_{j=2}^{n+1} \left[ \left( \psi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(j)} Y_{t-i} \right) G_{j-1}(s_{(j-1)t}; \gamma_{(j-1)n}, c_{(j-1)n}) \right] + \varepsilon_t, \\ n > 0, \gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

avec  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

$s$  : étant la variable de transition qui indique le nombre de régimes;

$c$  : sont les paramètres de seuil, pour lesquels le processus saut d'un régime  $r_{i-1}$  à un autre  $r_i$ ;

$p$  : est l'ordre de la partie autorégressive linéaire, qui représente chaque équation ;

$T$  : est le nombre d'observations temporelles (à temps discret);

$\gamma$  : est le paramètre de lissage (la vitesse de la transition d'un état à un autre : plus  $\gamma$  est grand (faible) plus la transition entre les régimes est brutale (lente)) ;

$G(\cdot)$  : est la fonction de transition continue;

$Y_{t-d}$  : est la variable de transition, dont le délai (ou retard)  $d$ , avec  $d$  est un entier positif ;

$\psi^{(j)} = (\psi_0^{(j)}, \psi_1^{(j)}, \dots, \psi_p^{(j)})$  : sont les paramètres inconnus du processus;

$X_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p})'$  : sont les variables explicatives (seulement les endogènes retardées).

Dans le cas simple, au lieu de considérer un processus  $Y_t \sim n-STAR(p)$ , nous pouvons nous limiter à l'étude d'un processus  $Y_t \sim STAR(p)$ , avec deux régimes uniquement et une seule fonction de lissage, qui vient pondérer les équations  $AR(p)$  afférentes, à deux dynamiques

<sup>201</sup> Voir Franses et van Dijk, (2000), « *Nonlinear time series models in empirical finance* », Cambridge: Cambridge University Press.

<sup>202</sup> Nous supposons que  $\varepsilon_t$  est une différence de martingale homoscédastique, c'est-à-dire que si nous considérons l'ensemble de l'information disponible  $\Omega_{t-1} = \{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0\}$ , alors les deux conditions suivantes sont remplies :

$$E[\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}] = 0, \forall t \text{ et } E[\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}] = \sigma^2, \forall t.$$

Par définition une martingale en différence est un processus pour lequel le passé n'est pas utile pour la prévision des valeurs futures.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

différentes, dans lesquelles nous supposons pour simplifier l'égalité des variances des résidus, qu'on nomme STAR (2 ; p, p)<sup>203</sup>, défini de la manière suivante :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i}) [1 - G(s_t; \gamma, c)] + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) G(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad \gamma > 0,$$

$$1 \leq d \leq p, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

La fonction de transition  $G(\cdot)$  spécifie le degré du *mean reversion*, c'est une fonction continue bornée par 0 et 1, dépend du paramètre  $\gamma$ , qui indique la vitesse du retour à la moyenne ou l'ajustement, et du paramètre de repérage  $c$  « *location parameter* » qui définit le niveau d'équilibre de  $\{Y_t\}$  qui attribue l'aire de concentration de la fonction de transition. La variable de transition stationnaire  $s_t$  « *transition variable* » peut être, soit une variable endogène par exemple pour  $d > 0$ ,  $s_t = Y_{t-d}$ , soit une variable exogène par exemple  $s_t = X_t$ , ou encore une fonction linéaire ou non-linéaire avec la possibilité de combiner des variables endogènes et des variables exogènes par exemple  $s_t = h(Z_t)$ . Il est possible encore de représenter  $s_t$  avec une tendance linéaire du temps par exemple  $s_t = t$ . Vu les vastes extensions possibles que nous pouvons faire lors de la présentation du modèle STAR, nous adopterons l'idée de Lin et Teräsvirta (1994), selon laquelle, la variable de transition contient, uniquement, la variable dépendante retardée  $s_t = Y_{t-1}$ . Selon van Dijk, Teräsvirta et Franses (2002), le modèle STAR, peut recevoir deux interprétations possibles : soit celle d'un *continuum* de régimes, celui en vigueur, étant déterminé par une valeur particulière de la variable de transition. Soit celle d'un modèle de changements de régimes, intègrent deux régimes, qui sont associés aux valeurs extrêmes de la fonction de transition,  $G(Y_{t-1}; \gamma, c) = 0$  et  $G(Y_{t-1}; \gamma, c) = 1$ , pour laquelle la transition d'un régime à l'autre est graduellement continue. Chaque régime peut être spécifié, dans le temps, par la variable observable  $s_t$  et la valeur associée à la fonction de lissage  $G(s_t; \gamma, c)$ . Le paramètre  $c$  est le paramètre de seuil et  $\gamma$  est un paramètre strictement positif qui représente la vitesse de transition entre deux régimes. Plus  $\gamma$  est grande, plus la transition entre les

<sup>203</sup> Lardic et Mignon (2002), ont noté que le modèle STAR (2 ; p, p) peut approximer le modèle SETAR (2 ; p, p).

deux régimes est brutale. Lundbergh et Teräsvirta (2002), ont affirmé que le modèle STAR est localement linéaire, lorsque la variable de transition est constante, puisqu'il peut être vu comme un modèle AR à coefficients variables, défini par :

$$Y_t = \alpha_{0t} + \alpha_{1t} Y_{t-1} + \dots + \alpha_{pt} Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

avec  $\alpha_{it} = \psi_i^{(1)} [1 - G(Y_{t-d}; \gamma, c)] + \psi_i^{(2)} G(Y_{t-d}; \gamma, c)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ .

### **Théorème 3.1 (Chan et Tong, (1986b)<sup>204</sup>)**

*Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

$$(i) \quad p = 1, d = 1, \psi_1^{(1)} < 1, \psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)} < 1, \psi_1^{(1)}(\psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)}) < 1;$$

$$(ii) \quad \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left( \sum_{i=1}^p |\psi_i^{(1)} + \theta \psi_i^{(2)}| \right) < 1.$$

*Alors le processus STAR (2 ; p, p) est un processus ergodique et il possède une solution stationnaire unique.*

Pour permettre une transition douce, Teräsvirta et Anderson (1992) et Teräsvirta (1994a), ont proposé deux fonctions de transition (ou fonctions de lissage), qui sont continues et bornées entre zéro et un : la fonction logistique (modèle LSTAR) et la fonction exponentielle (modèle ESTAR). Selon Chen (2003), ces deux modèles impliquent l'existence de deux régimes extrêmes distincts, dans les dynamiques des séries, correspondant aux valeurs extrêmes de la fonction de transition et une continuité de régimes associés, aux valeurs intermédiaires de la fonction de transition. Ils génèrent, néanmoins, des changements de régimes de nature différente et présentent des propriétés dynamiques différentes, consécutivement à une rupture détectée.

### **3.1.3. Dynamiques des processus de transitions lisses associées à la modélisation STAR**

Du fait que la rupture affecte le niveau, ou la tendance d'une variable et que la dynamique de la variable considérée est fonction de son niveau exprimé en niveau, la fonction de transition graduelle joue un rôle crucial, dans la précision de la nature de la dynamique d'ajustement. Elle

<sup>204</sup> Voir Chan, W.S. et Tong, H., (1986b), « *On estimating Thresholds in autoregressive models* », Journal of Time Series Analysis, Vol.7, pp. 178-190.

assure des niveaux distincts ou lisses, des dynamiques d'ajustement, selon que la variable d'intérêt dépasse ou non un seuil critique estimé. Dans la littérature de modèles de séries temporelles non-linéaires à seuil, avec transitions lisses, des différentes dynamiques du processus de retour à la moyenne sont exposées par plusieurs types de fonctions de transitions. Dans ce travail, afin d'analyser l'effet de seuil pour la dynamique du processus, nous nous limitons à étudier quelques fonctions de transitions, exprimées, tous, en relation de récurrence avec la variable endogène de transition, en niveau (LSTAR : *Logistic Smooth Transition Autoregressive* ; Q-LSTAR : *Quadratic Logistic Smooth Transition Autoregressive*; D-LSTAR : *Double Logistic Smooth Transition Autoregressive* ; A-LSTAR : *Asymmetric Logistic Smooth Transition Autoregressive* ; ESTAR : *Exponential Smooth Transition Autoregressive* ; Q-ESTAR : *Quadratic Exponential Smooth Transition Autoregressive* ; D-ESTAR : *Double Exponential Smooth Transition Autoregressive*; A-ESTAR : *Asymmetric Exponential Smooth Transition Autoregressive*; TV-STAR : *Time-Varying Smooth Transition Autoregressive*) ; B-STAR : *Bi-parameter Smooth Transition Autoregressive*) qui sont formulées dans le tableau (3.1).

**Tableau 3.1: Quelques exemples de fonctions de transition**

Modèle	Fonction de transition et paramètres
LSTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\}]^{-1}$
Q-LSTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}$
D-LSTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\}]^{-1} + [1 + \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}$
A-LSTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1, \theta_1) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1) / \theta_1\}]^{-\theta_1}$
ESTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 1 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2\}$
Q-ESTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2) = [1 - \exp(-\gamma((Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))^2)]$
D-ESTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, c_1) = 2 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2\} - \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)^2\}$
A-ESTAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = 1 - \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)^2 [1/2 + (1 + \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\})^{-1}]\}$
TV-STAR	$G_j(Y_{t-1}; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t}) = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{\gamma_j}{\sigma_{s_t}}(Y_{t-1} - c_j)\right) \right]^{-1}$
B-STAR	$G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = \frac{\exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}}{1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}}$



Dans cette perspective, la contribution scientifique, concernant l'analyse de la dynamique endogène des structures des modèles déterministes non-linéaires, en économétrie des séries temporelles sera originale, puisque la présente nouvelle étude méthodologique utilisera ces processus de transition, dans le contexte où il est nécessaire de mettre l'accent sur l'utilité de la compréhension du mode de fonctionnement de ces fonctions de transitions, ce qui nous permet de bien saisir la nature d'un ajustement et d'identifier la recombinaison structurelle et fonctionnelle qui précisent l'évolution spatio-temporelle de sa structure. Nous attendons que cette nouvelle réflexion basée sur l'idée du structuralisme ne se limite pas à comprendre ce point de vue phénoménologique modélant les comportements dynamiques endogènes des processus d'ajustements et conduise à une remise en cause de la méthode scientifique classique, basée, particulièrement, et jusqu'à il y a peu de temps, sur l'hypothèse de déterminisme des rapports d'interactions, selon laquelle les effets sont toujours proportionnels aux causes, de sorte que la connaissance des causes permet, directement, d'en prévoir les effets. Pour ce faire, nous allons simuler les modèles dynamiques déterministes, portés sur le tableau (3.2).

**Tableau 3.2: Quelques exemples des modèles simulés**

<b>Modèle</b>	<b>Fonction de transition et estimation du modèle simulé</b>
<b>LSTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} -21,368 & 6,417 Y_{t-1} \\ (10,290) & (3,835) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,3) + (1 - G(Y_{t-1};1,3)) \left( \begin{array}{cc} 0,925 & 0,459 Y_{t-1} \\ (0,564) & (0,243) \end{array} \right)$
<b>Q-LSTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} -0,039 & -0,157 Y_{t-1} \\ (0,183) & (0,096) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,-1,1) + (1 - G(Y_{t-1};1,-1,1)) \left( \begin{array}{cc} 0,168 & -0,095 Y_{t-1} \\ (0,175) & (0,271) \end{array} \right)$
<b>D-LSTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} 0,382 & -0,908 Y_{t-1} \\ (0,391) & (1,047) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,1,-1,1) + (1 - G(Y_{t-1};1,1,-1,1)) \left( \begin{array}{cc} -2,362 & -0,593 Y_{t-1} \\ (3,227) & (0,740) \end{array} \right)$
<b>A-LSTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} 0,297 & -0,280 Y_{t-1} \\ (0,192) & (0,166) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,-1,0,5) + (1 - G(Y_{t-1};1,-1,0,5)) \left( \begin{array}{cc} -2,150 & -0,953 Y_{t-1} \\ (1,631) & (0,639) \end{array} \right)$
<b>ESTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} 0,102 & -0,103 Y_{t-1} \\ (0,151) & (0,086) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,0) + (1 - G(Y_{t-1};1,0)) \left( \begin{array}{cc} 0,063 & -0,407 Y_{t-1} \\ (0,142) & (0,304) \end{array} \right)$
<b>Q-ESTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} 0,095 & -0,168 Y_{t-1} \\ (0,149) & (0,086) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,-1,1) + (1 - G(Y_{t-1};1,-1,1)) \left( \begin{array}{cc} 0,035 & -0,074 Y_{t-1} \\ (0,151) & (0,166) \end{array} \right)$
<b>D-ESTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} 0,146 & -0,090 Y_{t-1} \\ (1,103) & (-0,478) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,2, 0,4,10, 0,5) + (1 - G(Y_{t-1};1,2, 0,4,10, 0,5)) \left( \begin{array}{cc} 0,444 & 0,001 Y_{t-1} \\ (1,052) & (0,003) \end{array} \right)$
<b>A-ESTAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} -0,025 & -0,130 Y_{t-1} \\ (0,146) & (0,086) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,0,5, 0,0) + (1 - G(Y_{t-1};1,0,5, 0,0)) \left( \begin{array}{cc} 0,152 & -0,058 Y_{t-1} \\ (0,125) & (0,285) \end{array} \right)$
<b>TV-STAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} -1,266 & -0,564 Y_{t-1} \\ (1,308) & (0,505) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,1,0,10) + (1 - G(Y_{t-1};1,1,0,10)) \left( \begin{array}{cc} 1,477 & -0,749 Y_{t-1} \\ (1,327) & (0,584) \end{array} \right)$
<b>B-STAR</b>	$\hat{Y}_t = \left( \begin{array}{cc} -1,266 & -0,564 Y_{t-1} \\ (1,308) & (0,505) \end{array} \right) G(Y_{t-1};1,1,0,10) + (1 - G(Y_{t-1};1,1,0,10)) \left( \begin{array}{cc} 1,477 & -0,749 Y_{t-1} \\ (1,327) & (0,584) \end{array} \right)$

*Les écarts-type sont entre parenthèses et les valeurs des coefficients estimés sont arrondies au 3<sup>ème</sup> chiffre après la virgule.*

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons étudier, grâce aux analyses temporelles, les profils respectifs de ces fonctions de transition que nous générons par simulation, pour un

---

échantillon de taille  $N = 200$  observations. Or, rappelons l'hypothèse offerte par Pintus, van Sands et de Vilder (2000), selon laquelle, lors des transitions critiques par changements de phase, à l'aide de n'importe quel processus de transition, plusieurs caractéristiques simultanées accompagnent le passage du local au global relativement, notamment, à l'auto-organisation qui domine l'endocyclogénèse et la formation de structures de cohérence, qui domine l'émergence de la stabilité structurelle du dynamisme. Plus précisément, transiter du local au global, requiert le passage par un état critique, ceci doit être compris comme la divergence de la longueur de corrélation, où des fluctuations infinitésimales du paramètre de transition (de contrôle), engendrent des changements finis, dans les états observables. Le rôle des transitions de phase, dans la criticité auto-organisée, est mis en évidence par Bak, Tang et Wiesenfeld (1988), puis par Bak et Chen (1991). Le principal résultat recueilli par ces auteurs prouve que, lors de la transition de phase traduit par la modification du paramètre de contrôle, le passage par un seuil critique, fait changer radicalement les propriétés qualitatives d'une solution sans aucune intervention externe. D'où, la forte dépendance des structures des états critiques internes en interaction dynamique, du paramètre de contrôle de la dynamique. Dans une autre perspective, Kauffman (1995) et Solé et Goodwin (2000), ont abouti au résultat qui permet d'interpréter l'auto-organisation critique "*self-organized criticality*", comme étant, non seulement, le réseau assurant l'émergence des structures de cohérence, au cours des transitions de phases, en tant que transition d'un régime, voire d'un passage d'un processus à un autre. Mais aussi, c'est presque le réseau endogène qui s'organise d'eu-même et qui assure à la limite l'émergence du chaos et, donc, l'imprévisibilité à long terme, à cause de la sensibilité aux conditions initiales.

En particulier, comme nous le voyons, ces auteurs insistent sur l'idée, selon laquelle la dynamique d'un processus non-linéaire avec changement de régime peut changer d'état, c'est parce que la transition de phase modifie la longueur de corrélation, qui, dans certains cas, peut-être expliquée comme la création d'une structure de cohérence. C'est la raison pour laquelle, nous avons choisi, ici, d'étudier quelques fonctions de transition les plus usuelles, dans le but, dans un premier temps, de mettre en lumière les éléments de base du principe de transition de phase, dans la criticité auto-organisée, où il sera nécessaire d'étudier comment la simple interaction

d'éléments, *a priori*, non-organisés, peut être à l'origine de la formation de structures organisées? Puis, d'offrir une évaluation comparative des divers changements des structures économiques attribuées, au sein des littératures associées aux différentes approches, déjà étudiées. Or, puisque ces fonctions de transition sont toutes associées à des processus de récurrences dynamiques, qui peuvent être intégrés dans le changement endogène des régimes de la modélisation STAR, capable de spécifier les cycles limites, alors elles assurent la construction auto-organisée, au voisinage des états critiques de ce type de modélisation. Nous voudrions, en effet, centrer ce travail sur des points précis de la théorie du chaos déterministe, en nous intéressant, tout particulièrement, sur l'étude détaillée de la dynamique non-linéaires de ces processus de transition et la formation du phénomène de cycle limite.

### 3.1.3.1. Fonction de transition LSTAR<sup>205</sup>

Si la fonction de lissage est une fonction logistique<sup>206</sup> d'ordre un:

$$G(Y_{t-1}; \gamma, c) = [1 + \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c))]^{-1}, \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T$$

alors, nous parlons d'un processus LSTAR « *Logistic Smooth Transition AutoRegressive* » défini par l'expression :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i}) [1 - ([1 + \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c))]^{-1})] + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) [1 + \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c))]^{-1} + \varepsilon_t, \\ \gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T.$$

<sup>205</sup> Nous nous attacherons donc dans la suite à la description du modèle LSTAR. Un exemple de modèle de croissance temporelle est le modèle logistique :  $Y = [a + b \exp(kt)]^{-1}$  où  $a$  et  $b$  sont positifs et  $k$  négatif. La grandeur  $Y$  vérifie la condition différentielle :  $Y' = -k(1 - aY)Y$ . La courbe logistique présente la forme symétrique d'un S aplati, traduisant une évolution accélérée, puis ralentie, vers la valeur asymptotique  $1/a$ .

<sup>206</sup> Plus généralement, la fonction de transition logistique dépend de la variable de transition  $s_t$ , du paramètre de lissage  $\gamma$  et des paramètres de seuils  $c_k$ . Elle prend la forme suivante :

$$G(s_t; \gamma, c_k) = \left[ 1 + \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (s_t - c_k) \right\} \right]^{-1}, \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

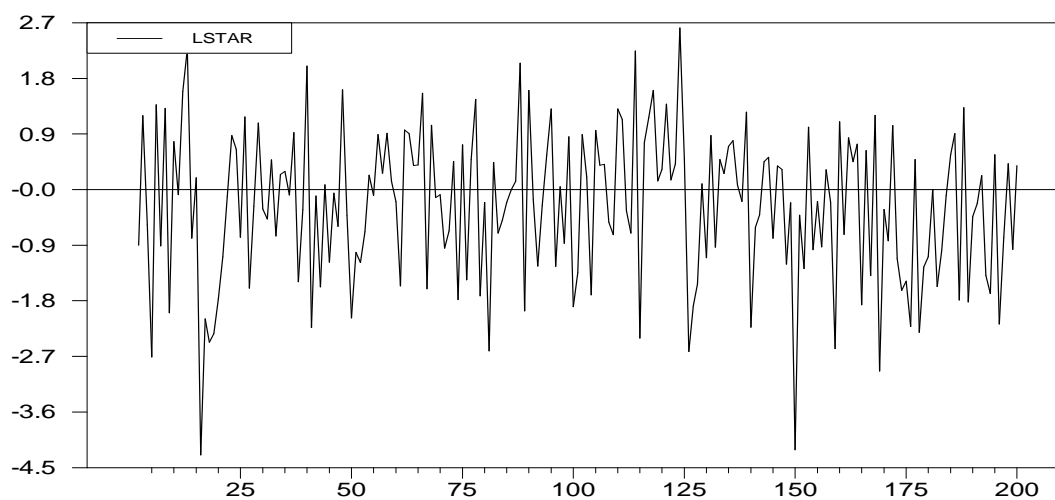
Dans la suite de la présente section, nous allons montrer comment le processus dynamique déterministe associé à la fonction de transition logistique, est capable d'engendrer des réalisations asymétriques? Où il sera capable d'engendrer deux régimes, dont les dynamiques sont différentes, pendant les phases de récession et d'expansion. De plus, nous allons montrer que le rôle de la fonction de transition logistique  $G(\cdot)$  est de rendre le passage entre les régimes extrêmes, ainsi générés, lisse.

Le paramètre  $c$  dans l'expression précédente peut intégrer le passage, entre les deux régimes correspondant respectivement, à la valeur  $G(Y_{t-1}; \gamma, c) = 0$  pour le cas de récession et  $G(Y_{t-1}; \gamma, c) = 1$  pour le cas d'expansion. C'est dans cette logique que la fonction logistique change monotonement de la valeur 0 à la valeur 1. Nous observons que si  $Y_{t-1}$  augmente, alors la fonction  $G(Y_{t-1}; \gamma, c)$  lisse le passage de 0 à 1. Si  $|Y_{t-1} - c|$  est grande et  $Y_{t-1} < c$ , la fonction de transition tend vers zéro et le processus décrit une période de récession.  $Y_t$  est engendré par le modèle linéaire autorégressif AR(p) suivant :

$$Y_t = \psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Tandis que si  $|Y_{t-1} - c|$  est grand mais  $Y_{t-1} > c$ , la fonction de transition tend vers l'unité et le processus décrit une période d'expansion. La série  $Y_t$  est engendrée par le modèle linéaire autorégressif AR(p) suivant :

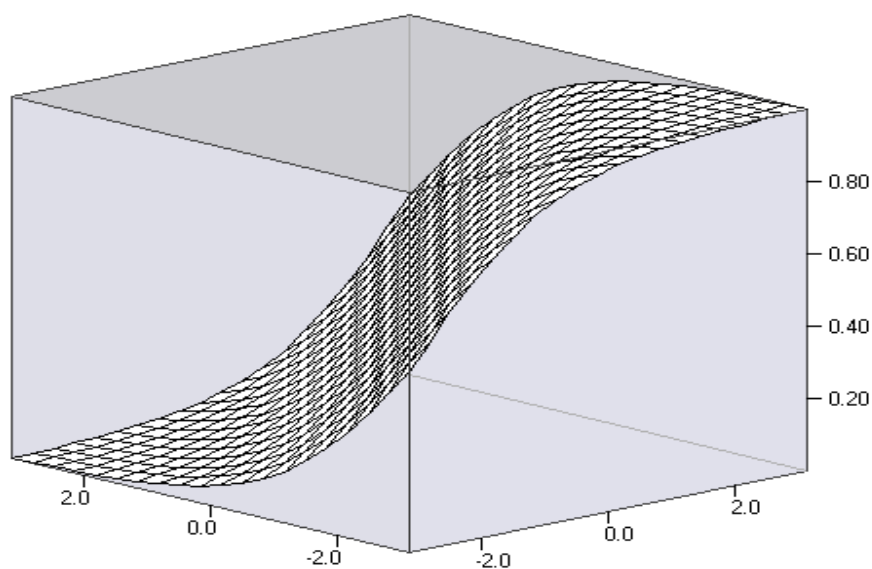
$$Y_t = \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$



**Figure 3.1: Simulation d'un modèle LSTAR :**  

$$Y_t = 0.5Y_{t-1}G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c = 0) + 0.2Y_{t-1}[1 - G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c = 0)]$$

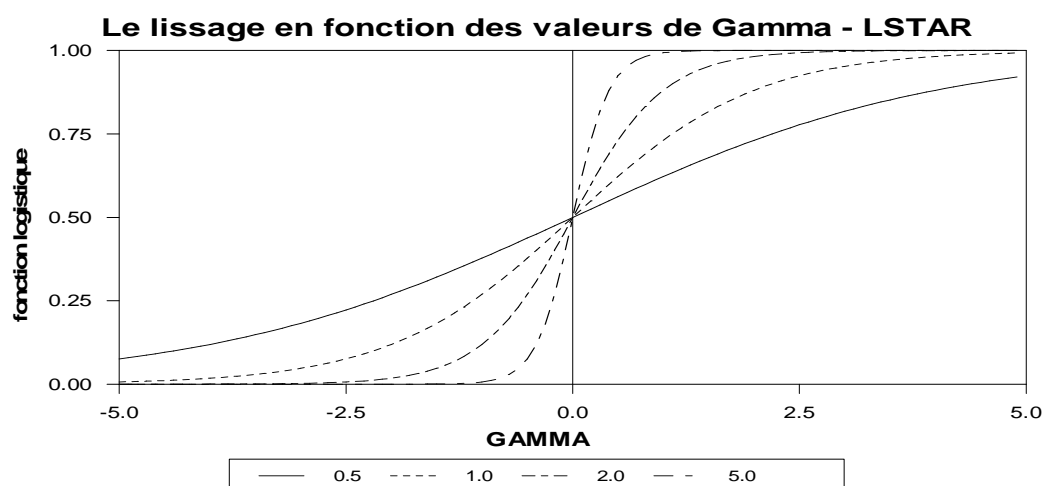
Comme le montre la figure (3.1), dans un modèle LSTAR, la perspective de la fonction de transition logistique est monotone, croissante, en  $Y_{t-1}$  avec  $G(c; \gamma, c) = 0.5$ .



**Figure 3.2: Une vue 3-D de la fonction logistique  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c)$**

La figure (3.2) montre que, dans un modèle LSTAR, le profil de la fonction de transition logistique a la forme d'un S allongé. Elle s'annule, lorsque  $s_t = Y_{t-1}$  s'éloigne du seuil  $c$  par le bas et tend vers un, lorsque la variable de transition est très supérieure à  $c$ . Elle définit, ainsi, deux régimes extrêmes, associés aux valeurs hautes et basses de  $s_t = Y_{t-1}$  relativement au seuil  $c$  : un régime bas  $Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.2Y_{t-1}$  et un régime haut  $Y_t = 0.2Y_{t-1}$ , entre lesquels, on transite graduellement. Cette représentation à changement de régime a, par exemple, été appliquée à la modélisation des fluctuations cycliques du produit, par Teräsvirta et Anderson (1992), Teräsvirta, Tjostheim et Granger (1994). Elle permet de distinguer la dynamique des phases d'expansions et des récessions du cycle.

Le paramètre  $c$  est l'élément qui détermine le changement de régime et  $\gamma$  est la mesure de lissage, qui détermine la qualité de « *smoothness* » du changement, dans la valeur de la fonction logistique, c'est-à-dire le lissage d'un régime à l'autre. La figure (3.3) montre quelques exemples de variations de la fonction logistique, pour diverses valeurs possibles du paramètre de lissage  $\gamma$ . Nous remarquons, en particulier, que plus la valeur de  $\gamma$  est petite, plus le passage d'un régime à un autre est lisse et inversement. De ce fait, la figure (3.3) représente l'effet de la variation de  $\gamma$  sur le lissage.



**Figure 3.3: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage pour la fonction logistique  $G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0)$**

Le paramètre de pente  $\gamma$  détermine le rythme de la transition d'un régime vers l'autre. À partir de la figure (3.4), nous essayons d'analyser graphiquement l'effet combiné de  $\gamma$  et de  $c$ , sur la qualité du lissage pour la fonction logistique d'un processus LSTAR. Lorsque le paramètre de transition  $\gamma$  est grand (tend vers  $+\infty$ ), nous observons que le passage de la fonction  $G(Y_{t-1}; \gamma, c)$  entre 0 et 1 se fait brusquement en  $Y_{t-1} = c$ , alors que la fonction de transition tend vers 1 si  $Y_{t-1} > c$ , et le processus décrit une phase d'expansion et tend vers 0 si  $Y_{t-1} < c$  et le processus décrit une phase de récession. De plus, puisque la fonction  $G(\cdot)$  devient une fonction indicatrice, si le paramètre de lissage devient très grand. Dans ce cas, le modèle LSTAR est un modèle TAR à deux régimes<sup>207</sup>. En d'autres termes, le processus TAR à deux régimes, est un cas particulier du processus LSTAR, obtenu avec des valeurs élevées de la pente de la fonction de transition<sup>208</sup>. Dans la même situation, en analysant la dynamique asymétrique de l'emploi au cours du cycle, Tong et Lim (1980) et Perraudin (1995), montrent que si la fonction de transition est nulle, le processus décrit une période de récession.  $Y_t$  n'est plus engendré par le modèle LSTAR, mais plutôt par un modèle TAR, puisque la fonction de transition devient une fonction indicatrice. Il s'agit donc d'une généralisation du modèle TAR. Le modèle LSTAR décrit des situations, où les phases de récession et d'expansion peuvent avoir des dynamiques différentes, mais la transition entre les deux régimes extrêmes, est lisse.

<sup>207</sup> Pour le même cas discuté, nous pouvons remarquer que si  $s_t = Y_{t-d}$  alors, le modèle LSTAR, sera rapproché par un modèle SETAR. Une discussion sur ce point est faite par Tong (1990).

<sup>208</sup> Nous notons que lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  nous vérifions que  $\alpha_{it} \rightarrow \psi_i^{(2)}$  si  $Y_{t-1} > c$ ; et  $\alpha_{it} \rightarrow \psi_i^{(1)}$  si  $Y_{t-1} < c$ .



## Le lissage logistique en fonction des valeurs de Gamma et de c

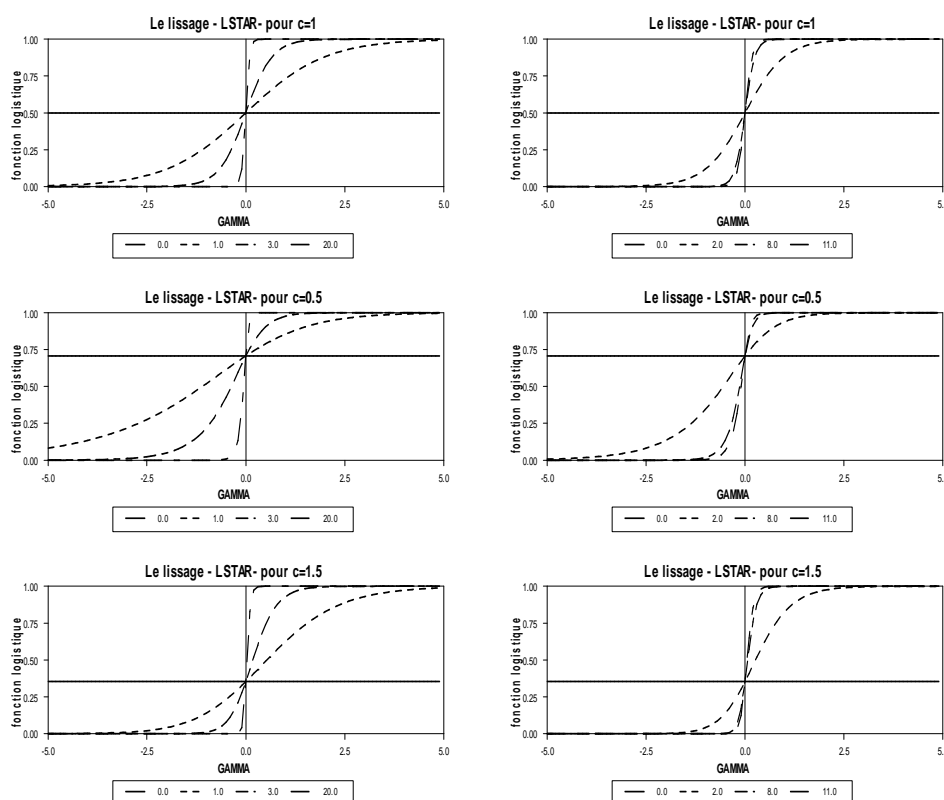


Figure 3.4: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage pour la fonction logistique pour  $c=0.5$  ;  $1$  ;  $1.5$

Ce modèle est, ainsi, capable d'engendrer des réalisations asymétriques. Si  $\gamma$  tend vers zéro, la fonction logistique tend vers une constante égale à 0.5 et si  $\gamma = 0$ , le modèle LSTAR se réduit à un modèle autorégressif linéaire<sup>209</sup>. Dans le modèle LSTAR, les deux régimes sont obtenus, avec petite et grande valeur de variable de transition  $s_t$ , relative au paramètre de seuil  $c$ . Ce type de changement de régime peut être intéressant, pour la modélisation de l'asymétrie du cycle réel, et ceci grâce à sa capacité d'identifier les phases d'expansions et de récessions. Par exemple, si  $Y_t$  représente le taux de croissance de l'output, le modèle LSTAR avec  $s_t = Y_{t-1}$ , peut

<sup>209</sup> Nous notons que, cela se voit aisément à partir de l'écriture du processus LSTAR comme AR à coefficients variables, il vient en effet  $\alpha_{it} \rightarrow \alpha_i = (\psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}) / 2$  lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ .

---

être utilisable pour décrire les différents états dynamiques, durant des phases positives et négatives de la croissance.

Après avoir analysé l'effet des paramètres de la fonction de transition logistique, sur la qualité de la dynamique induite par un processus LSTAR, compte tenu de ces caractéristiques, nous pouvons conclure, dans le cadre de l'objectif de notre étude, que le processus LSTAR, avec une seule transition est intéressant pour traiter des variables, pouvant obéir à deux structures dynamiques différentes, dans des régimes extrêmes, avec un comportement asymétrique, en fonction de l'écart à l'équilibre. D'où, cette fonction de transition logistique admet l'avantage de mettre en évidence l'aspect asymétrique de la dynamique endogène des structures du cycle. L'exemple type est celui de la modélisation des cycles d'activité réelle, avec alternance de phases de récession et d'expansion. Ceci, justifie bien le recours, dans cette étude empirique, à la caractérisation des dynamiques des séries temporelles de la production industrielle, à travers des processus d'ajustements asymétriques, dans un tel cadre, le modèle LSTAR paraît être approprié, pour reproduire deux régimes avec différentes structures dynamiques du cycle industriel, en présence d'asymétrie<sup>210</sup>. Selon cette optique, la présence des effets de seuil, liés à la discontinuité et à l'asymétrie, rend compatible l'accordance, entre l'exposé théorique et les modèles empiriques à changement de régime, dont la transition est lisse, visant à tenir compte de la non-linéarité en moyenne.

Pour faire appréhender l'influence des différents paramètres du modèle sur la dynamique du processus LSTAR, la figure (3.5), donne une illustration graphique de quelques exemples des allures possibles de la simulation du processus LSTAR pour différentes valeurs des paramètres.

---

<sup>210</sup> La présence de l'effet d'asymétrie qui gouverne la dynamique du cycle de production industrielle en Tunisie, rend le recours à la modélisation linéaire à l'aide de processus en temps discret de type ARMA, pour reproduire ces caractéristiques, inefficace et non-approprié.

## Exemple des séries temporelles générées par LSTAR

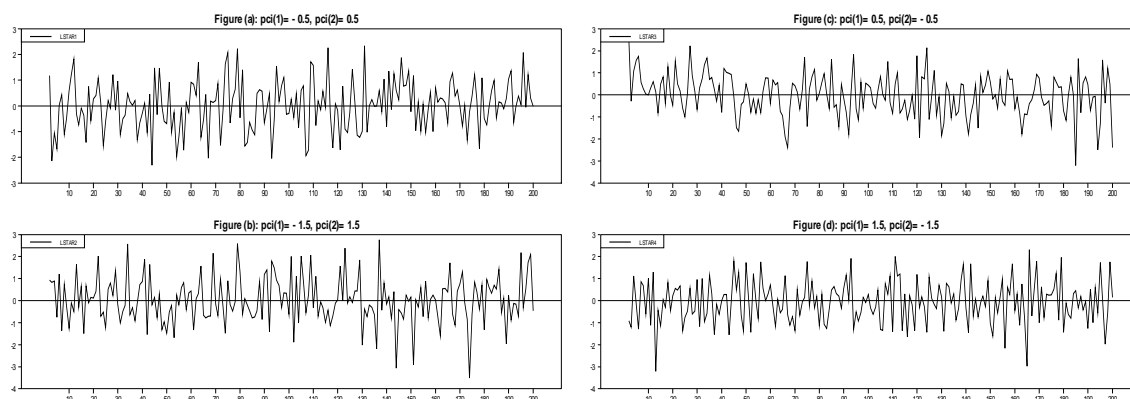
pour  $c=0$  et  $gamma=1$ 

Figure 3.5: Exemple des séries générées par LSTAR

L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires du processus LSTAR, ainsi simulé sur la figure (3.1), est portée sur le tableau (3.3), comme suit :

Tableau 3.3: Estimation du modèle LSTAR par NLS

Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton

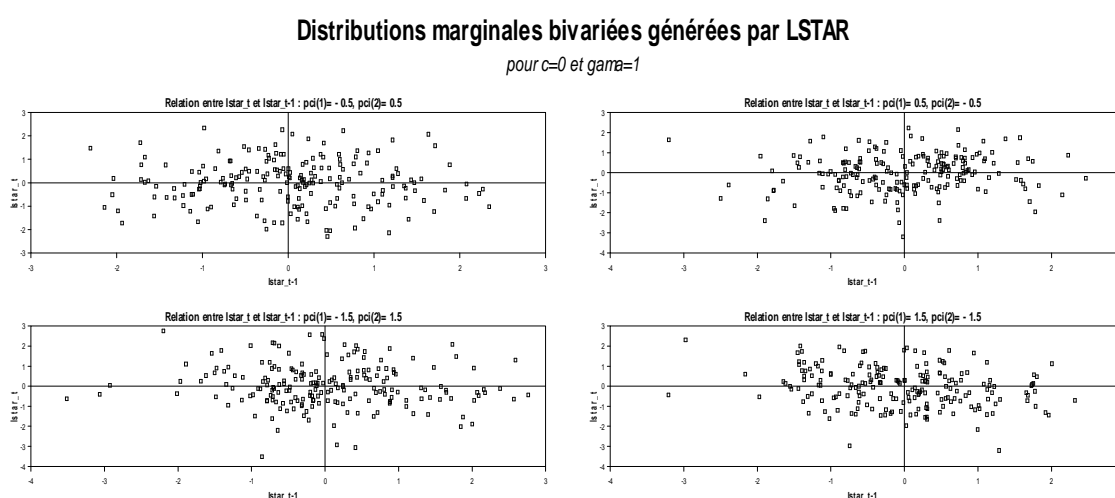
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was  $0.0000000 < 0.0000100$ 

Dependent Variable LSTAR

Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194
Total Observations	200	Skipped/Missing	2
Centered R**2	0.0421180	R Bar **2	0.026353
Uncentered R**2	0.088076	T x R**2	17.439
Mean of Dependent Variable	-0.277186324		
Std Error of Dependent Variable	1.225420135		
Standard Error of Estimate	1.209165488		
Sum of Squared Residuals	283.64374828		
Regression F(3,194)	2.7774		
Significance Level of F	0.04245299		
Log Likelihood	-316.53558		
Durbin-Watson Statistic	2.002960		

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	-1.372821855	1.169182835	-1.17417	0.24176546
2. A1	0.058964246	0.580632274	0.10155	0.91921733
3. B0	1.029497132	1.103075486	0.93330	0.35182672
4. B1	0.525253877	0.386877432	1.35768	0.17614390

La première constatation que l'on peut faire à partir de la figure (3.6), est que la série n'est pas gaussienne. Car ces processus n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier<sup>211</sup>, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type des processus.



**Figure 3.6: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par LSTAR**

Afin de prouver la possibilité d'émergence des fluctuations endogènes déterministes, et/ou stochastiques, induites par la variabilité dans le processus d'ajustement par une fonction de transition logistique. En particulier, nous allons essayer de prouver, analytiquement, la présence du cycle limite, en utilisant la fonction de transition logistique suivante :

$$G(Y_{t-1}) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c))}, \quad \gamma > 0$$

Rappelons bien que pour la figure (3.1), nous avons utilisé une simulation, de taille  $N = 200$ , du processus  $LSTAR(1;1,1)$  avec fonction de transition  $G(\cdot)$  de variable de transition  $s_t = Y_{t-1}$ , de paramètre de transition  $\gamma$  et paramètre de seuil  $c$ . Théoriquement, le modèle s'écrit :

$$Y_t = S(Y_{t-1}; \Psi) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

<sup>211</sup> Nous savons que dans le cas d'un processus gaussien, sa distribution marginale bivariée admet la forme qui rassemble à un ellipsoïde régulier. De ce fait, toute représentation qui n'est pas conforme à celle-ci nous conduit à penser qu'elle est générée par un processus non gaussien.

où  $\Psi = (\psi^{(1)} = (\psi_0^{(1)}, \psi_1^{(1)}), \psi^{(2)} = (\psi_0^{(2)}, \psi_1^{(2)}), \gamma, c)'$ ,  $\gamma > 0$

et  $S(Y_{t-1}; \Psi) = (\psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)} Y_{t-1}) [1 - G(s_t; \gamma, c)] + (\psi_0^{(2)} + \psi_1^{(2)} Y_{t-1}) G(s_t; \gamma, c)$

Nous signalons qu'avec cette spécification, nous avons la possibilité de générer une grande gamme de régimes qui sont caractérisés par différents types de structures dynamiques endogènes justifiant la nature du changement par des invariants dynamiques intrinsèques aux comportements déterministes selon une classification topologique de leurs équilibres, de l'exigence de leurs degrés de stabilité structurelle et de leurs formes de bifurcation. Il suffit, de générer le processus pour différents choix de ces paramètres. Franses et van Dijk (2000), exigent que pour définir différents états de nature ou régime, la dynamique (moyenne, variance, autocorrélation...), de la variable sujet de l'étude, dépend du régime dans lequel elle se trouve. Dans la figure (3.1), nous avons choisi les caractéristiques suivantes :

$$\Psi = (\psi^{(1)} = (\psi_0^{(1)} = 0.0, \psi_1^{(1)} = 0.5), \psi^{(2)} = (\psi_0^{(2)} = 0.0, \psi_1^{(2)} = 0.2), \gamma = 1.0, c = 0.0)'$$

Or, comme nous sommes entrain d'analyser la dynamique endogène du modèle, il est primordial de définir quelques concepts de base, telle que la notion de « *Skeleton* » ; d'équilibre (ou de point fixe) et de stabilité. Le premier concept est défini par Chan et Tong (1985), comme suit :

### Définition 3.3

Soit le processus non-linéaire à seuil suivant :

$$Y_t = S(Y_{t-1}; \Psi) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

nous appelons « *Skeleton* », l'espérance conditionnelle du processus  $Y_t$  que nous notons :

$$S(Y_{t-1}; \Psi) = E[Y_t \mid \Omega_t]$$

où,  $\Omega_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)'$ . Cette notion détermine la partie déterministe et prédictible du modèle :

$$S(Y_{t-1}; \Psi) = (\psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)} Y_{t-1}) [1 - G(s_t; \gamma, c)] + (\psi_0^{(2)} + \psi_1^{(2)} Y_{t-1}) G(s_t; \gamma, c)$$

Mas-Colell (1986), Scheinkman (1990), Teräsvirta et Anderson (1992) et Peel et Speight (1996), l'étude des propriétés dynamiques des séries temporelles non-linéaires, à travers l'analyse des propriétés du *skeleton*, montre que cette équation reflète l'équilibre en  $Y^*$ , si  $Y^*$  est le point

fixe du *skeleton*. Lorsque le *skeleton* dépend uniquement de  $Y_{t-1}$ , comme l'indique le présent exemple, une simple méthode pour montrer l'existence de l'espace d'équilibre consiste à chercher les points d'intersections du *skeleton*, avec la droite d'équation  $Y_t = Y_{t-1}$ . L'équilibre est localement stable, lorsque l'ensemble des points  $Y_0, Y_1, \dots$ , générée par le *skeleton*, converge vers  $Y^*$ , pour des valeurs, ayant comme valeur initiale  $Y_0$ , proche de  $Y^*$ . Cet équilibre est globalement stable, lorsque l'ensemble des points  $Y_0, Y_1, \dots$ , générée par le *skeleton*, converge vers  $Y^*$  quelle que soit, la valeur initiale  $Y_0$ .

**Théorème 3.2 (Guégan (1994)<sup>212</sup>)**

Soit  $Y^*$  un point fixe<sup>213</sup> pour le système dynamique d'ordre 1, alors :

- $Y^*$  est stable si  $|S'(Y^*)| < 1$ ,
- $Y^*$  est instable si  $|S'(Y^*)| > 1$ ,
- si  $S'(Y^*) = 1$ , nous ne pouvons pas conclure directement.

Cependant, il convient de noter que dans un cadre dynamique non-linéaire, d'un point de vue analytique, il est difficile de montrer l'existence d'un équilibre (attracteur) et/ou cycle limite. L'analyse paramétrique des propriétés du *skeleton* est assurée par une « *simulation déterministe* ». Nous avons, alors, les théorèmes suivants :

**Théorème 3.3 (Guégan (1994))**

Soit  $Y^*$  un point fixe pour le système dynamique d'ordre 1, alors :

Si  $S'(Y^*) = 1$  et  $S''(Y^*) \neq 0$ , alors,  $Y^*$  est semi-stable.

- si  $S''(Y^*) < 0$ , alors  $Y^*$  est semi-stable pour valeur supérieure à  $Y^*$ .
- si  $S''(Y^*) > 0$ , alors  $Y^*$  est semi-stable pour valeur inférieure à  $Y^*$ .

**Théorème 3.4 (Guégan (1994))**

Soit  $Y^*$  un point fixe pour le système dynamique d'ordre 1, alors :

Si  $S'(Y^*) = 1$  et  $S''(Y^*) = 0$ , alors,  $Y^*$  est semi-stable.

- si  $S'''(Y^*) < 0$ , alors  $Y^*$  est stable.
- si  $S'''(Y^*) > 0$ , alors  $Y^*$  est instable.

<sup>212</sup> Voir Guégan, D., (1994), « *Séries chronologiques non-linéaires à temps discret* », Paris, Economica.

<sup>213</sup> Notons qu'un nombre  $Y^*$  est un point fixe ou une valeur d'équilibre pour le système dynamique déterministe  $S$ , si  $Y^* = S(Y^*)$ .

Guégan (1994) et Tong (1995), montrent que si  $Y^*$  est un point d'équilibre pour le système dynamique déterministe  $Y_{t+1} = S(Y_t; \Psi)$ , alors  $Y^*$  est aussi une valeur d'équilibre pour le système dynamique  $Y_{t+2} = S(S(Y_t; \Psi))$ . Par conséquent, nous pouvons affirmer que si la solution  $Y^*$  est stable pour  $Y_{t+1} = S(Y_t; \Psi)$ , elle est aussi stable pour  $Y_{t+2} = S(S(Y_t; \Psi))$  et vice versa. Drugeon (2000), affirme, lors de l'étude de la possibilité d'existence et de la stabilité des cycles périodiques, que celles-ci, sont dues à la possibilité de fluctuations endogènes cycliques associées, à une perte de stabilité de l'équilibre stationnaire. Comment justifions-nous ce résultat?

Pour répondre à cette interrogation, nous allons commencer par donner une signification mathématique d'un cycle limite. Guégan (1994), montre que deux nombres  $Y^1$  et  $Y^2$  forment un 2-cycle (cycle d'ordre deux), pour un système dynamique du premier ordre si, quand  $Y_t = Y^1$ , alors  $Y_{t+1} = Y^2$  et  $Y_{t+2} = Y^1$ . Dans ce cas, un 2-cycle est stable, s'il existe des intervalles  $U$  et  $V$ , respectivement autour de  $Y^1$  et  $Y^2$  tel que :

$$\text{- si } Y_0 \in U, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} Y_{2t} = Y^1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} Y_{2t+1} = Y^2$$

$$\text{- si } Y_0 \in V, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} Y_{2t} = Y^2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} Y_{2t+1} = Y^1.$$

Appliquons ce résultat à notre exemple, nous pourrions déduire que  $Y_t = S(Y_{t-1}; \Psi)$  converge vers  $Y_{t+1} = S(Y_t; \Psi)$  si et seulement si,  $S(Y; \Psi)$  est une contraction proche de  $Y = Y^*$ , pour le *skeleton* du processus LSTAR. Or, si nous appliquons la condition d'équilibre, localement stable, pour le processus LSTAR.

Nous obtiendrons<sup>214</sup> :  $\left| \frac{\partial S(Y^*; \Psi)}{\partial Y} \right| < 1$

avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(Y^*; \Psi)}{\partial Y} = & \gamma [(\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)}) (\psi_1^{(2)} - \psi_1^{(1)}) Y^*] G(Y^*; \gamma, c) [1 - G(Y^*; \gamma, c)] \\ & + \psi_1^{(1)} [1 - G(Y^*; \gamma, c)] + \psi_1^{(2)} G(Y^*; \gamma, c) \end{aligned}$$

L'équilibre stable est un attracteur, dont les effets en l'absence du choc aléatoire de la série, est attiré par l'équilibre stable. En plus, dire que le modèle non-linéaire peut avoir une multitude d'équilibre stable, c'est une preuve pour dire qu'il admet aussi plusieurs attracteurs. De ce fait,  $Y^*$  est l'attracteur de  $\bar{Y}$  si  $Y_t = \bar{Y}$  et  $\lim_{F \rightarrow +\infty} Y_{t+F} = Y^*$  si  $\varepsilon_{t+k} = 0$  quelque soit  $k > 0$ . Ceci n'est vrai que lorsque  $\bar{Y}$  appartient au domaine d'attraction de  $Y^*$ . Sinon, l'équilibre stable est non unique.

Rappelons que les itérations étudiées, en deuxième partie, conduisent à des systèmes dynamiques, dans lesquels apparaissent, aussi bien, l'équilibre et les cycles limites que le doublement de période, le chaos, l'intermittence, ou l'auto-organisation. Or, pour confirmer l'idée partagée par Teräsvirta et Lim (1980), Ozaki (1982) et Tong (1995), sur la possibilité de générer des cycles limites qui sont des types de fluctuations cycliques endogènes déterministes, qui sont caractérisés par leur régularité et leur amplitude et associées à une perte de stabilité de l'équilibre stationnaire, générées par le processus de transition LSTAR, représenté sur la figure (3.1), après une simulation numérique. Un traitement par simulation sur des distributions marginales bivariées des processus générés par LSTAR, sur la figure (3.6), montre que la variation des valeurs des paramètres de transition des processus correspondants, conduira à un changement de leurs propriétés dynamiques et une variabilité des dispersions du nuage des points, qui se

<sup>214</sup> La preuve de ce résultat est simple : nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y^* &= S(Y_t; \Psi) - S(Y^*; \Psi) \\ &\cong \frac{\partial S(Y^*; \Psi)}{\partial Y} (Y_t - Y^*) \\ \text{d'où, } |Y_{t+1} - Y^*| &< |Y_t - Y^*| \Leftrightarrow \left| \frac{\partial S(Y^*; \Psi)}{\partial Y} \right| < 1. \end{aligned}$$



---

manifeste, réellement, par la modification des caractéristiques de stabilité structurelle, des processus étudiés. Rappelons que dans la deuxième partie de ce document, l'analyse du changement qualitatif des propriétés de stabilité structurelle, tel que par exemple, le passage de la stabilité à l'instabilité est assuré au moyen de technique de bifurcation, confirme bien ce résultat. Parmi les outils et les concepts pour l'analyse de la dynamique endogène des modèles non-linéaires, nous adoptons, ici, une description approfondie des trajectoires des processus sous l'étude. Ceci est rentable pour notre cas d'analyse prévisionnelle, à partir de l'analyse non-linéaire des courbes associées aux processus générateurs de données, du fait qu'elle nous donne un premier éclairage sur les changements structurels, qui se caractérisent par les récompositions des structures dans le temps et dans l'espace. Nous utilisons des diagrammes de récurrences RP (*Recurrence Plot*) et l'analyse RQA (*Recurrence Quantification Analysis*), qui possèdent une base théorique solide, qui nous permet de mettre en évidence les propriétés de récurrence de la dynamique. C'est-à-dire, de mieux appréhender le taux de la régularité liée à la recomposition d'une structure invariante et les changements d'asynchronisme sur les portraits de phases en présence d'un comportement dynamique ayant des structures complexes. Pour ce faire, nous essayons de répondre à la question : Comment une structure se construit-elle, elle-même, en organisant la dimension spatio-temporelle d'un processus générateur des données? Or, quoique la modélisation STAR, soit fréquemment utilisée de manière efficace, pour spécifier un modèle de cycle limite, la possibilité de différents régimes et d'un comportement chaotique, complique davantage cette étude et rend plus difficile l'élaboration des prévisions fiables et même une sélection rationnelle du vrai modèle opérationnel de prévision.

Dés lors, nous essaierons de développer des concepts de l'analyse non-linéaire, permettant d'affirmer la formation de structures plus ou moins complexes, mais auto-organisées. Nous justifions, ceci, par le fait qu'en prévision non-linéaire, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques où règnent, activement, tant les fluctuations endogènes que les changements structurels, l'étude des erreurs d'un modèle de prévision peut s'aborder, non plus seulement, à travers les aspects stochastiques classiques de spécification mais aussi à travers les

erreurs déterministes de troncature et de mesure, qui sont liées à la sensibilité aux conditions initiales.

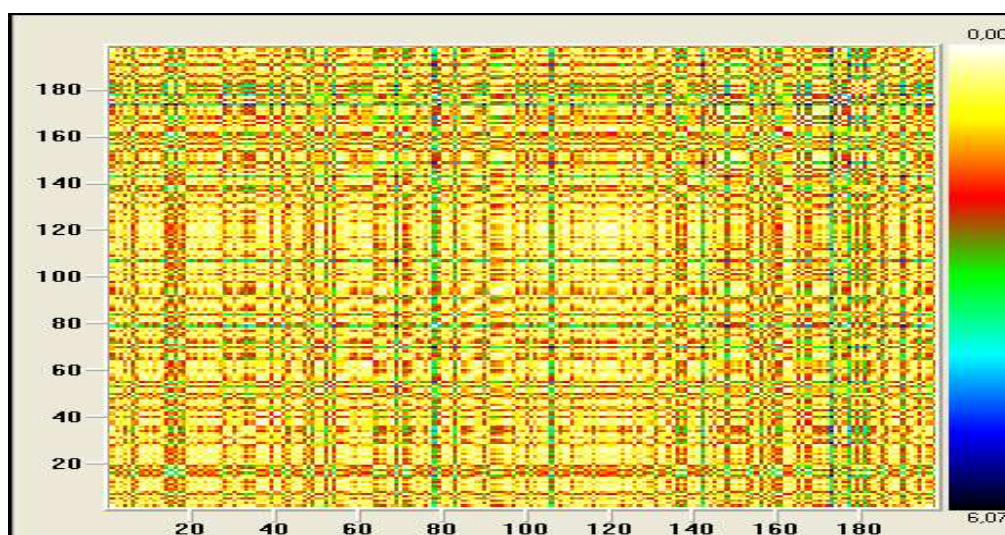
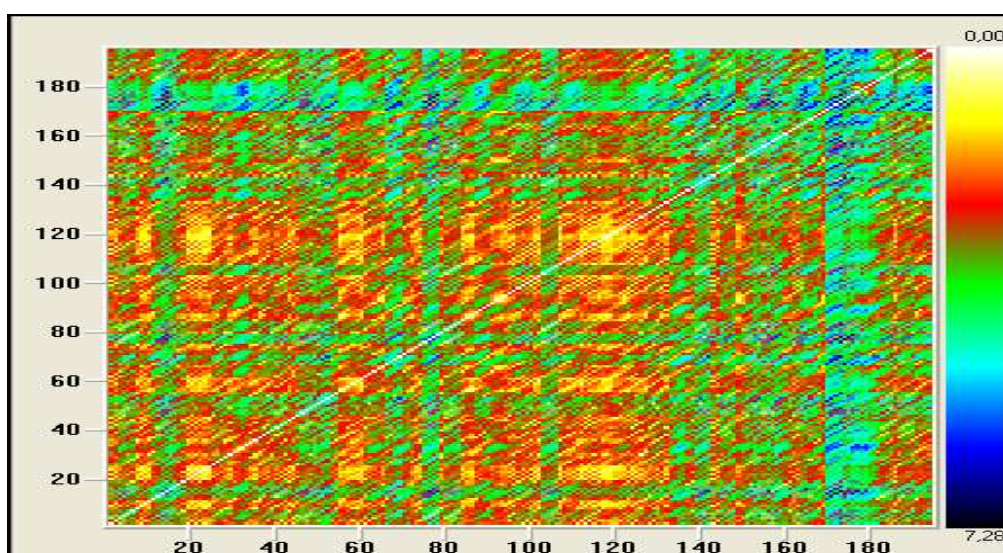


Figure 3.7: Représentation graphique de récurrence (Dimension=1, Delai=1, Threshold=1) des N=200 observations générées par LSTAR

Contrairement aux analyses traditionnelles dans le domaine temporel, l'analyse non-linéaire des séries temporelles NTSA (*Nonlinear Time Series Analysis*), basée sur la dynamique non-linéaire permet d'obtenir plusieurs constatations d'un simple coup d'œil. En particulier, l'examen graphique du diagramme de récurrence, illustré sur la figure (3.7), montre que, d'abord, une ligne blanche subdivise le diagramme de récurrence en deux régions symétriques suivant la diagonale secondaire, puis la matrice de récurrence est homogène, ensuite, les points récurrents sont isolés et dispersés, aléatoirement, un peu partout, sans aucune partie qui se répète dans le temps. Ceci nous laisse penser qu'il s'agit d'un bruit blanc, ou d'un système chaotique déterministe. Or, la modification, à petite échelle, illustrée par la figure (3.8), montre la présence de petits segments diagonaux, dont la distance qui les sépare deux-à-deux est variable, c'est-à-dire qu'il y a présence d'échelles de temps multiples, de plus, ces lignes diagonales sont interrompues, à cause de la divergence exponentielle de trajectoires initialement très voisines. Ces constatations prouvent nettement la sensibilité de la dynamique aux conditions initiales, ce qui confirme bien que nous sommes en présence d'un processus dynamique, chaotique. La figure (3.7), montre, alors, la complexité spatio-temporelle induite par la récurrence du processus de

transition LSTAR. De ce fait, le diagramme de récurrence simulée avec ce processus de transition, sert à calibrer la sensibilité de ses caractéristiques de récurrence, vis-à-vis, des changements des propriétés qualitatives, de son paramètre de transition. En plus, la topologie de la structure spatio-temporelle des données, ainsi obtenue, est très sensible à la fois aux variations temporelles (*Delai*), qu'aux variations d'échelle (*Dimension*). Si, par exemple, nous modifions uniquement la dimension, au lieu de la valeur unitaire, elle prend la valeur 4, nous constatons sur la figure (3.8), qu'en présence d'un comportement chaotique, les récurrences se rassemblent, de manière aléatoire jusqu'à ce que leurs fluctuations atteignent un point critique, à ce moment, elles s'auto-organisent pour former une entité cohérente.



**Figure 3.8: Représentation graphique de récurrence (Dimension=4, Delai=1, Threshold=1) des N=200 observations générées par LSTAR**

Bien entendu, l'étude dynamique de ce processus montre que sa récurrence ré-organise, régulièrement, la dimension spatio-temporelle, en groupant les nuages de points, en d'autres formes de structures ordonnées d'une certaine taille et en changeant constamment et radicalement sa morphologie. Ces structures ne sont jamais, parfaitement identiques, même-si elles conservent la même organisation originale. Compte tenu des fondements théoriques et empiriques exposés précédemment, il sera de notre avis que le processus de transition générateur de ces structures dynamiques, favorisera une information pertinente, en ce qui concerne la caractérisation non-linéaire et endogène des cycles limites, des séries de la production industrielle en Tunisie.

### 3.1.3.2. Fonction de transition ESTAR

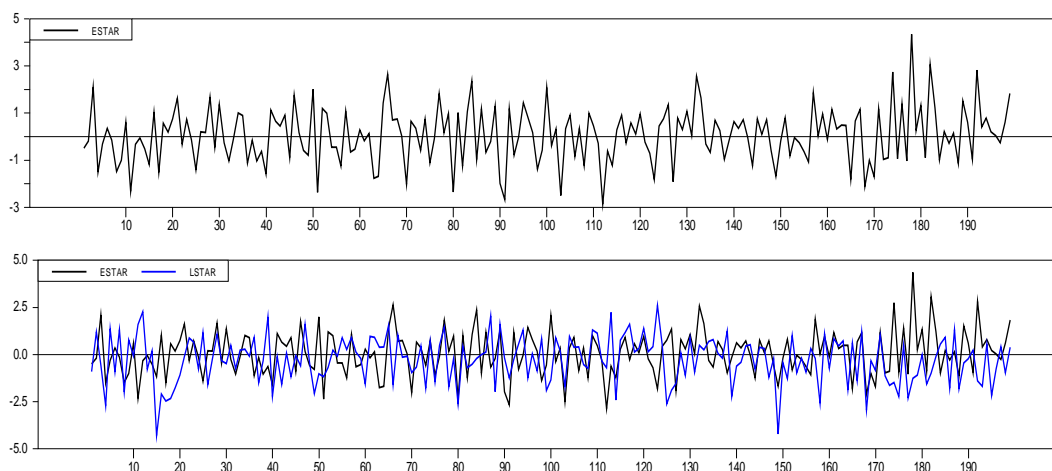
Si la fonction de lissage est une fonction exponentielle<sup>215</sup> d'ordre un:

$$G(Y_{t-1}; \gamma, c) = [1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c)^2)], \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T$$

alors, nous parlons d'un processus ESTAR « Exponential Smooth Transition AutoRegressive », défini par :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i}) (1 - [1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c)^2)]) + \\ \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) [1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c)^2)] + \varepsilon_t, \\ \gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T.$$

Il s'agit d'une généralisation du modèle exponentiel autorégressif EAR, initialement développé par Ozaki (1980), où  $\psi_0^{(1)} = \psi_0^{(2)} = 0$  et  $c = 0$ .



**Figure 3.9: Simulation d'un modèle ESTAR ( $\gamma=1$  ;  $c=0$ ) et comparaison avec le modèle LSTAR**

<sup>215</sup> Plus généralement la fonction de transition exponentielle dépend de la variable de transition  $s_t$ , du paramètre de lissage  $\gamma$  et des paramètres de seuils  $c_k$ . Elle prend la forme suivante :

$$G(s_t; \gamma, c_k) = \left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (s_t - c_k)^2 \right\} \right], \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

Si nous gardons le même cadre simple d'analyse, à deux régimes extrêmes et une seule valeur pour le paramètre de seuil  $c$ , nous remarquons, suite à l'analyse graphique de la perspective donnée par la figure (3.9), que suite à la présence d'une forme quadratique, dans la fonction de transition exponentielle, le comportement de la fonction de transition du processus ESTAR, est sensiblement différent du cas LSTAR. Il va dépendre uniquement de la distance séparant la variable de transition  $Y_{t-1}$ , du paramètre de seuil  $c$  et non plus de leurs positions relatives, puisque :

$$G(c; \gamma, c) = G(Y_{t-1}; 0, c) = 0$$

$$\text{et } \lim_{Y \rightarrow \pm\infty} G(Y; \gamma, c \setminus \gamma \neq 0) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} G(Y_{t-1}; \gamma, c \setminus Y_{t-1} \neq c) = 1$$

Ainsi, comme le montre la figure (3.10), le profil de la fonction de transition exponentielle admet la forme d'un U.

Si  $|Y_{t-d} - c|$  est grand (expansion ou récession), la fonction de transition tend vers l'unité, et le processus décrit par les coefficients  $\psi^{(2)}$ . Alors que, quand la variable de transition est proche du seuil  $c$ , la fonction  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$  tend vers zéro, et le modèle est décrit par les coefficients  $\psi^{(1)}$ . Le modèle ESTAR est introduit par Hangan et Ozaki (1981), puis généralisé par Granger et Teräsvirta (1993). Il décrit des économies, où les récessions et les expansions ont des dynamiques similaires, s'opposant à la dynamique du régime intermédiaire. Un modèle ESTAR peut, alors, représenter une économie dont le passage d'un taux de croissance élevé, à un taux de croissance normal, ou encore le passage d'une faible croissance à une croissance moyenne. Il peut être vu comme une généralisation d'un modèle SETAR à trois régimes, où les deux régimes extrêmes seraient contraints, par la même dynamique<sup>216</sup>.

Un tel modèle permet de générer de façon durable des oscillations auto-entretenues, indépendantes des conditions initiales, qui deviennent asymptotiquement périodiques, appelées

<sup>216</sup> Notons que le processus ESTAR ne dégénère pas en un TAR à trois régimes selon les valeurs de  $\gamma$  puisqu'aux extrémités de son espace de définition le modèle devient linéaire.

cycles limites. Haggan et Ozaki (1981), donnent les conditions nécessaires à l'existence d'un cycle limite, dans un modèle EAR, que nous pouvons étendre dans le cas du modèle ESTAR :

**Proposition 3.1 (Haggan et Ozaki (1981)<sup>217</sup>)**

Un processus ESTAR ( $p$ ) à 2-régimes est un système d'équations linéaires, par morceaux avec une fonction de lissage exponentielle ( $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$ ) et un seuil d'excitation ( $c$ ) modélisé comme suit :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i})(1 - G(Y_{t-d}; \gamma, c)) + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) G(Y_{t-d}; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

$$\gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T.$$

Si certaines racines de  $z^p - \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} z^{p-i} = 0$  sont à l'extérieur du disque unité et si toutes les racines de  $z^p - \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} z^{p-i} = 0$  sont à l'intérieur du disque unité, alors, une condition<sup>218</sup> suffisante à l'existence d'un cycle limite est :

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)}}{\sum_{i=1}^p (\psi_i^{(1)} - \psi_i^{(2)})} \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$$

D'un autre côté, la figure (3.9) montre, clairement, que le profil de la fonction de transition exponentielle est en forme de U, puisque la fonction exponentielle tend à s'annuler pour des valeurs de  $Y_{t-1}$  proches du seuil, alors qu'elle égale à un, lorsque  $Y_{t-1}$  s'éloigne de  $c$  par le bas comme par le haut. Il y aura, donc, deux régimes extérieurs de même dynamique  $a_0 + a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p}$ , associés aux valeurs hautes et basses de  $Y_{t-1}$  et un régime central<sup>219</sup>,

<sup>217</sup> Haggan, V. et Ozaki, T., (1981), « A study of application of modelling nonlinear random vibrations using an amplitude dependent autoregressive time series models », *Biometrika*, 68, pp. 189-196.

<sup>218</sup> Cette dernière condition est requise pour supprimer toute éventualité d'un point singulier stable. Pour une épreuve de ceci, voir Priestley, M.B., (1989).

<sup>219</sup> Dans le domaine de la finance, Taylor, M.P., Peel, D.A. et Sarno, L., (2001), montrent que le modèle ESTAR s'avère plus pertinent pour analyser la dynamique des taux de change réels, puisque les écarts à la parité des pouvoirs d'achat (vers le bas comme vers le haut) semblent corrigés seulement lorsqu'ils excèdent un certain seuil. Ils présentent donc une dynamique différente suivant l'importance de l'écart à la PPA.

pour les valeurs de  $Y_{t-1}$  proches de  $c$ , défini par  $b_0 + b_1 Y_{t-1} + \dots + b_p Y_{t-p}$ . Dans ce cas, les régimes extrêmes sont identiques, s'opposant à la dynamique d'un régime intermédiaire.

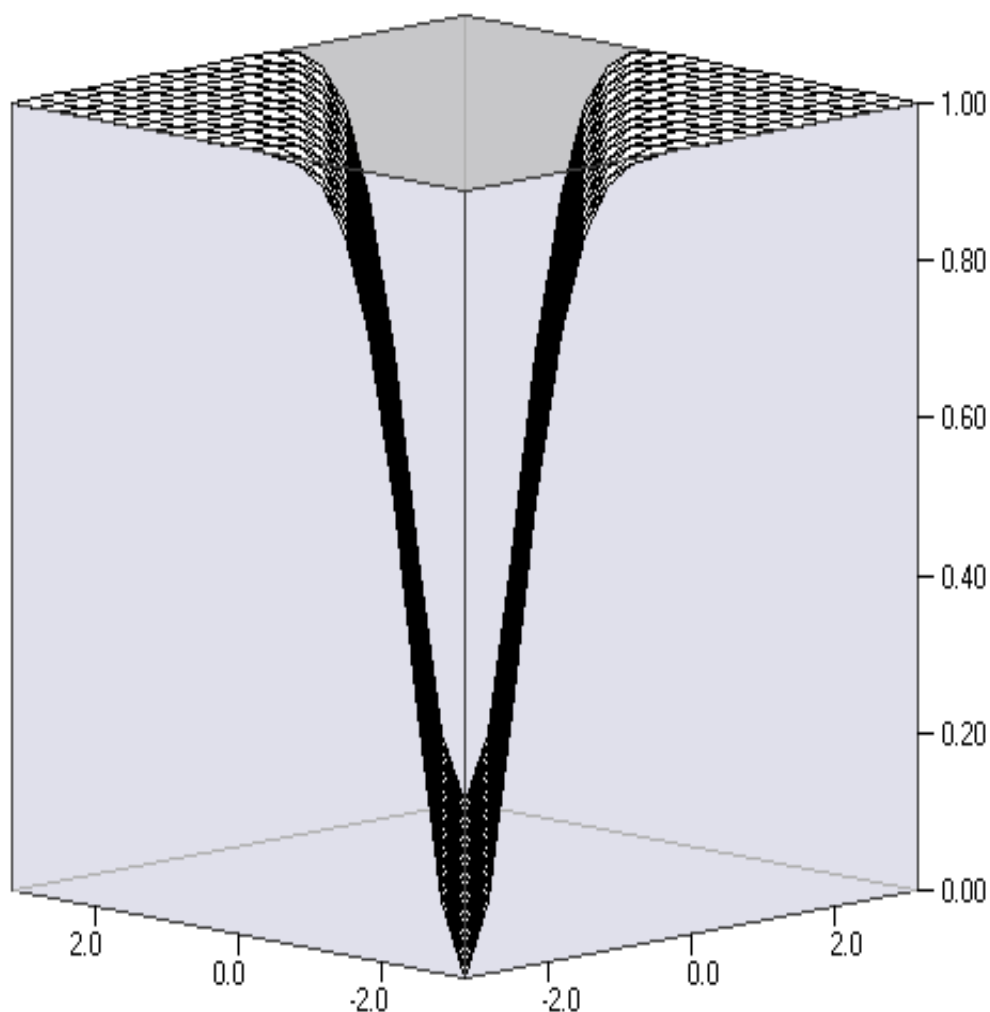
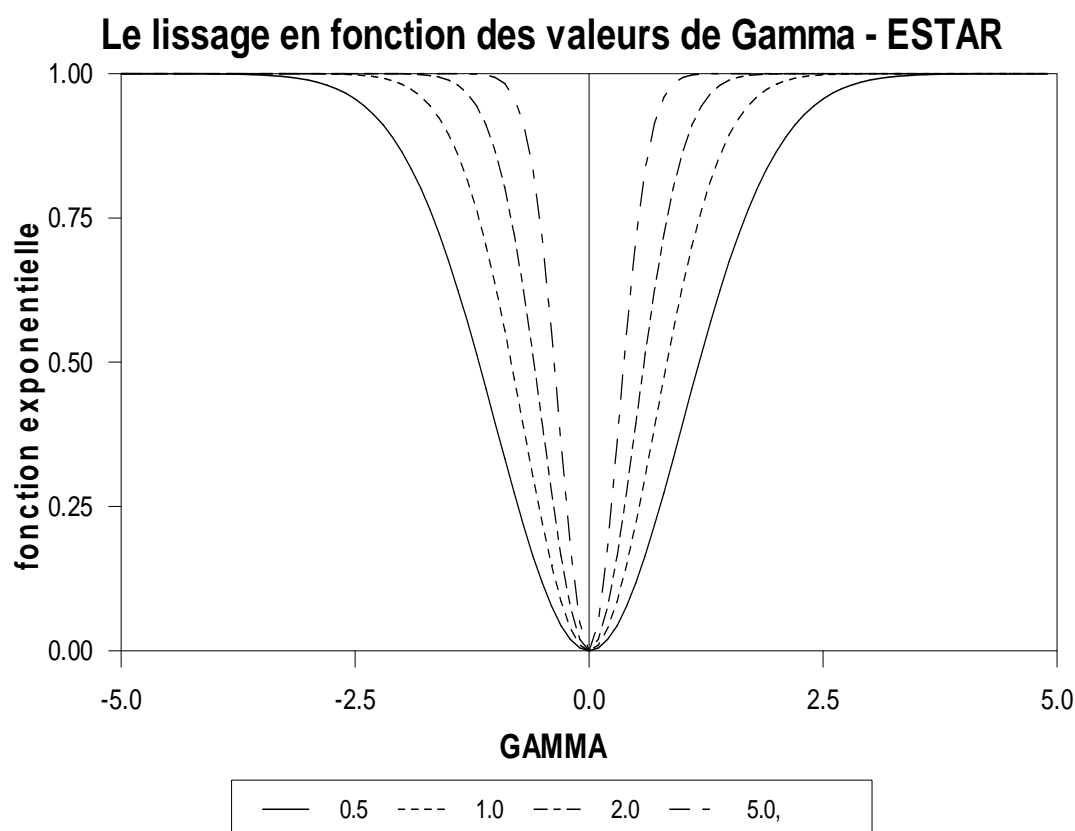


Figure 3.10: Une vue 3-D de la fonction exponentielle  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c = 0)$

La limite d'introduire la fonction exponentielle dans les modèles SETAR, c'est que lorsque  $\gamma$  tend vers zéro ou tend vers l'infini, la fonction chute vers une constante, ce que nous justifions graphiquement grâce à la figure (3.10). En ce sens, le modèle se comporte d'une façon linéaire, dans les deux cas extrêmes et le modèle ESTAR, ne peut pas générer un comportement similaire, à celui du modèle LSTAR.



**Figure 3.11: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage pour la fonction exponentielle  $G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0)$**

La figure (3.11), montre que  $G(Y_{t-1}; \gamma, c) : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  est symétrique, par rapport à l'axe des ordonnés. En plus, elle vérifie les propriétés suivantes : si  $|Y_{t-d} - c|$  tend vers  $(\pm \infty)$ , c'est-à-dire, se manifeste, pratiquement, par la présence d'une expansion ou de récession, la fonction de transition exponentielle, tend vers l'unité et le processus est décrit par les coefficients  $\Psi^{(2)}$ . D'autre part, si  $|Y_{t-d} - c|$  tend vers zéro la fonction de transition est nulle et le processus est décrit par les coefficients  $\Psi^{(1)}$ . En plus, si  $\gamma$  tend vers  $(+\infty)$ , la fonction exponentielle tend vers une constante égale à l'unité et si  $\gamma$  tend vers  $(-\infty)$ , la fonction exponentielle tend vers zéro et par conséquent, le modèle ESTAR se réduit à un modèle TAR (*Threshold AutoRegressive*). L'estimation du modèle, ainsi simulé, est portée sur le tableau (3.4), comme suit :



**Tableau 3.4: Estimation du modèle ESTAR par NLS**

Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable ESTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.025326	R Bar **2	0.010254	
Uncentered R**2	0.028700	T x R**2	5.683	
Mean of Dependent Variable	0.0693489501			
Std Error of Dependent Variable	1.1796633664			
Standard Error of Estimate	1.1735997086			
Sum of Squared Residuals	267.20323756			
Regression F(3,194)	1.6803			
Significance Level of F	0.17257961			
Log Likelihood	-310.62434			
Durbin-Watson Statistic	2.003611			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	0.102416569	0.151439121	0.67629	0.49966282
2. A1	-0.103765425	0.086426780	-1.20062	0.23136389
3. B0	0.063040616	0.142077780	0.44370	0.65775037
4. B1	-0.407130164	0.304067920	-1.33894	0.18215541

D'après les statistiques descriptives fournies sur le tableau (3.5), de deux processus simulés *LSTAR* et *ESTAR*, estimés respectivement sur les tableaux (3.3) et (3.4), l'analyse comparative montre que la moyenne du processus simulé *LSTAR* est très proche de zéro et plus petite, que celle du modèle *ESTAR*, mais sa variance est, au contraire, plus grande que celle du modèle *SETAR*. En plus, les coefficient d'asymétrie (*skewness*) et d'aplatissement nommé parfois épaisseur des queues (*kurtosis*), permettent de rejeter au risque d'erreur  $\alpha = 5\%$  l'hypothèse de normalité pour les deux processus simulés.

Rappelons que nous avons démontré que le processus *LSTAR*, permet de rendre compte des phénomènes d'asymétrie des fluctuations dynamiques endogènes, au sens où les phases de récession et d'expansion du cycle endogène, peuvent avoir des dynamiques totalement différentes et non symétriques. En adoptant la même démarche, nous notons que le paramètre de pente  $\gamma$ , détermine le rythme de la transition exponentielle, d'un régime vers l'autre. À partir de

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

la figure (3.12), nous essayons d'illustrer, schématiquement, l'effet combiné de  $\gamma$  et de  $c$  sur la qualité du lissage, pour la fonction exponentielle d'un processus ESTAR. Lorsque le paramètre de transition  $\gamma$  est grand (tend vers  $+\infty$ ), nous observons que le passage de la fonction  $G(Y_{t-1}; \gamma, c)$  entre 0 et 1 se fait brusquement en  $Y_{t-1} = c$ , alors que la fonction de transition tend vers 1 si  $Y_{t-1} > c$ , et le processus décrit une phase d'expansion et tend vers 1, si  $Y_{t-1} < c$  et le processus décrit une phase de récession. De cela, nous constatons, qu'à l'inverse du processus LSTAR, le processus ESTAR génère des dynamiques endogènes symétriques, tant pour les phases d'expansion que pour la récession. Mais, les dynamiques endogènes ne sont pas similaires pour des états intermédiaires. À l'instar de Priestley (1980), cette remarque est de grande importance pour notre cadre d'analyse, du fait qu'elle permet de distinguer la différence des comportements dynamiques endogènes, générés par un processus ou l'autre. C'est ce qui se manifeste, pratiquement, par le fait que l'industrie tunisienne, peut ainsi passer d'une phase marquée par une croissance à taux robuste, à une autre phase marquée par une croissance à taux normal ou encore d'une condition de récession faible, à une condition de récession forte.

**Tableau 3.5: Analyse descriptive pour les modèles LSTAR et ESTAR**

Statistics on Series LSTAR			
Observations	199		
Sample Mean	<b>-0.280315</b>	Variance	<b>1.496018</b>
Standard Error	1.223118	of Sample Mean	0.086705
t-Statistic	-3.232988	Signif Level	0.001435
Skewness	<b>-0.392121</b>	Signif Level (Sk=0)	0.025012
Kurtosis (Exc)	<b>0.075933</b>	Signif Level (Ku=0)	0.829908
Jarque-Bera	<b>5.147476 *</b>	Signif Level (JB=0)	0.076250
Statistics on Series ESTAR			
Observations	199		
Sample Mean	<b>0.066518</b>	Variance	<b>1.386173</b>
Standard Error	1.177358	of Sample Mean	0.083461
t-Statistic	0.796992	Signif Level	0.426410
Skewness	<b>0.175322</b>	Signif Level (Sk=0)	0.316309
Kurtosis (Exc)	<b>0.453252</b>	Signif Level (Ku=0)	0.199740
Jarque-Bera	<b>2.722888 *</b>	Signif Level (JB=0)	0.256290

(\*) Indique que nous rejetons au risque d'erreur  $\alpha = 5\%$  l'hypothèse nulle de normalité, le seuil critique est  $\chi^2_{0.95}(2) = 5.99$ .

Certes, le comportement dynamique endogène du processus LSTAR dépend des valeurs prises par le paramètre de contrôle  $\gamma$ , comme le montre nettement la figure (3.11). Or, rappelons que nous avons démontré, au niveau de la deuxième partie, de ce document, que le paramètre de contrôle joue un rôle crucial, dans l'identification de la dynamique et la caractérisation qualitative, des états critiques, d'un processus déterministe de transition. Ceci nous pousse à contrôler, au moyen du paramètre de contrôle, la dynamique endogène du processus de transition ESTAR, qui a, sans doute, un effet sur la dynamique globale d'un modèle économétrique ESTAR puisque la dynamique endogène du processus de transition endogène, assurant le passage d'un régime à un autre, par transformation adaptative des structures et changement par recombinaison des invariances. Ce qui permet de rendre compte des phénomènes de bifurcation et de transition critique, où la perte de stabilité de l'équilibre dynamique, lors du passage d'une situation, localement stable, à une autre globalement instable, peut tomber dans des situations d'équilibres complexes, sources de génération de la dynamique chaotique.

### Le lissage exponentiel en fonction des valeurs de Gamma et de c

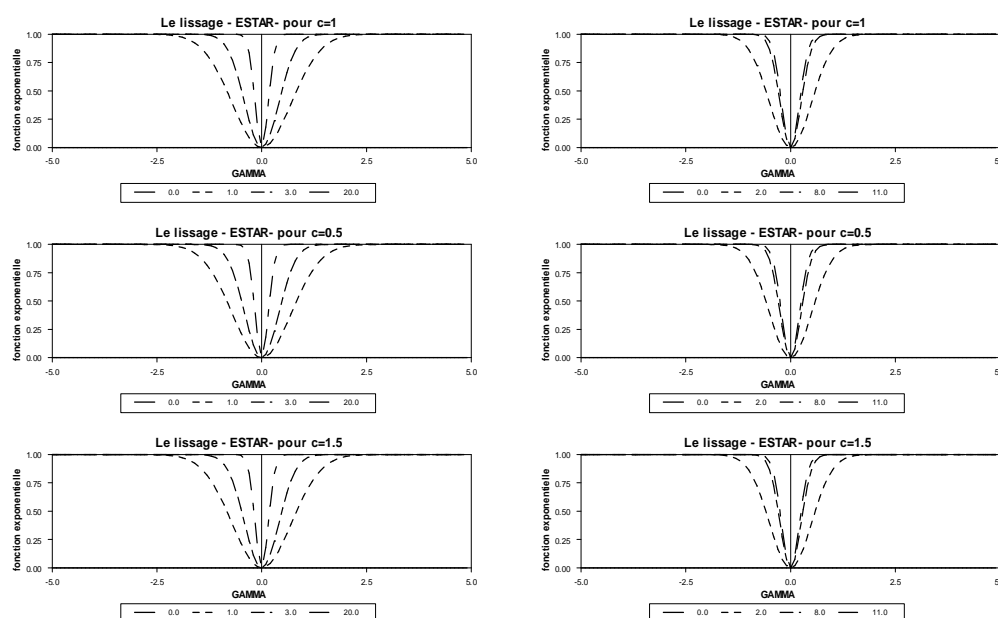


Figure 3.12: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage exponentielle pour  $c=0.5$  ;  $c=1$  ;  $c=1.5$

Sans perdre de temps, il nous faut, tout de suite, penser à élargir le champ de l'investigation. Pour commencer, rappelons que nous avons prouvé, au niveau de la première partie de ce document, que la brisure de symétrie caractérisant l'émergence des fluctuations endogènes, des séries de la production industrielle, en Tunisie, est justifiée par les tests existants de changements de structures endogènes, y compris les tests de racines unitaires avec ruptures, dans la partie déterministe contre stationnarité avec rupture endogène à date de rupture inconnue. Ceci nous a fourni quelques pistes, pour parcourir le monde endogène de dynamique des structures et d'instabilité, qui sont notre fil conducteur, avec lesquelles nous avons pu démontrer, au niveau de la deuxième partie, une preuve à la question fondamentale, qui touche, en profondeur, le noyau dur de la dynamique des modèles économétriques non-linéaires à savoir : D'où dans un processus déterministe provient l'aléatoire?

L'analyse effectuée, au cours de la partie deux, a permis de montrer que les structures temporairement stationnaires au voisinage de l'équilibre dynamique, forment un champ d'attraction constitué à chaque bifurcation, d'un ensemble de forces de rappel, où il peut exister un phénomène de dissipation interne d'inertie<sup>220</sup>, lors de la transformation adaptative des structures, mettant en évidence des superpositions cycliques successives et le changement radical par recombinaison des invariances, créant ainsi, une auto-organisation locale, ayant comme substance la morphogenèse des nouvelles structures topologiques, à différents degrés de périodicités, d'homogénéités et de cohérences et qui ont, en conséquence, le droit de participer avec toute ampleur, au retraçage d'une plate-forme initiale, qui sera respectée, évidemment, par toute morphologie future, des nouvelles générations des structures endogènes lors de l'évolution des fluctuations dynamiques.

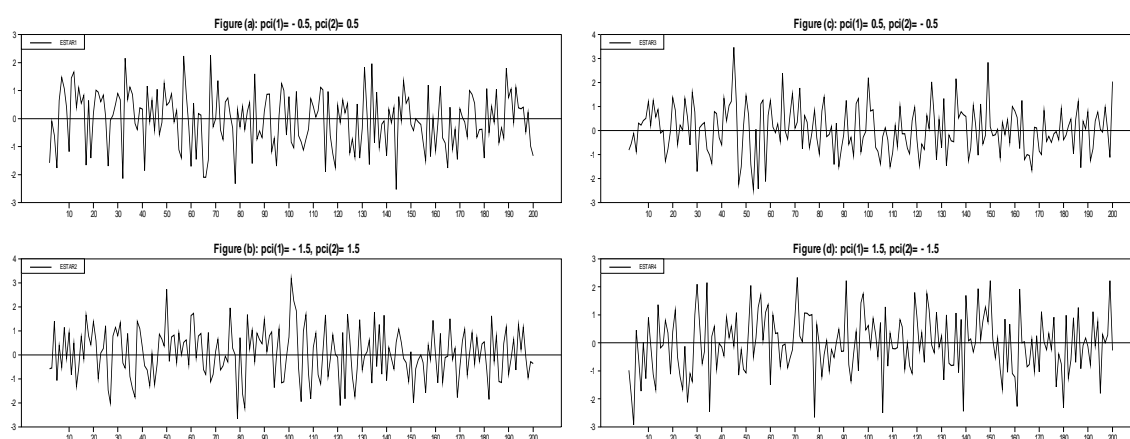
---

<sup>220</sup> Notons que ces forces d'inerties peuvent être considérées comme des ingrédients déterminant la structure d'un modèle non-linéaire et son auto-organisation. Mais, la dissipation interne de ces facteurs d'inerties, engendre des déformations spatio-temporelles à l'aide des transformations continues par recombinaison des invariances des structures topologiques, dont l'analyse dynamique non-linéaire montre qu'un modèle à changement de régimes change continuellement d'organisation structurelle, suite à un scénario de superposition des cycles quasi-périodiques par bifurcations de Hopf successives. Nous venons donc de mettre en évidence que l'hypothèse selon laquelle le changement endogène de la structure d'un modèle dynamique non-linéaire, ne peut pas être rejeté.

Afin d'appréhender l'influence des différents paramètres du modèle sur la dynamique du processus ESTAR, la figure (3.13), montre les allures de quelques exemples de séries temporelles générées par un processus ESTAR. En ce sens, aucun parmi nous ne peut douter que l'approche dynamique des modèles économétriques non-linéaires, apparaît comme l'étude de la genèse, dans le temps des patterns et des structures endogènes y compris, bien sûr, la formation structurelle de l'information prédictive après déformation spatiale par des transformations continues par par recombinaison des invariances. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à incorporer le côté qualitatif de l'analyse par bifurcation, dans le but d'enrichir le cadre de notre étude.

### Exemple des séries temporelles générées par ESTAR

pour  $c=0$  et  $garra=1$



**Figure 3.13: Exemple des séries générées par ESTAR**

Avant tout, la première constatation que nous pourrions tirer, à partir de la figure (3.14), est que le processus générateur de ces données, n'est pas gaussien, car les dispersions des nuages des points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

## Distributions marginales bivariées générées par ESTAR

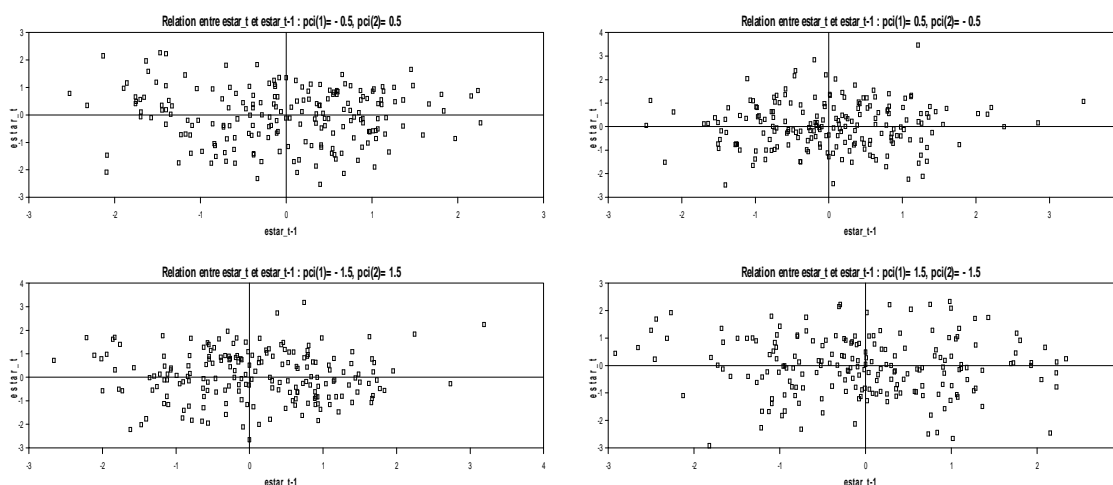
pour  $c=0$  et  $\gamma=1$ 

Figure 3. 14: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par ESTAR

L'étude de la figure (3.15), des propriétés dynamiques du processus de récurrence simulé par l'équation suivante :

$$f_{\gamma,c}(Y_{t-1}) = 1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c)^2)$$

pour un échantillon de taille  $T = 200$ , montre la présence du cycle limite des fluctuations endogènes déterministes, induites par la variabilité spatio-temporelle générée par des oscillations amorties, pour lesquelles la régularité et l'amplitude du processus d'ajustement par une fonction de transition exponentielle, diminue graduellement. Comme elle nous indique bien que nous pouvons mettre en évidence, d'autres types de dynamiques endogènes qui peuvent apparaître.

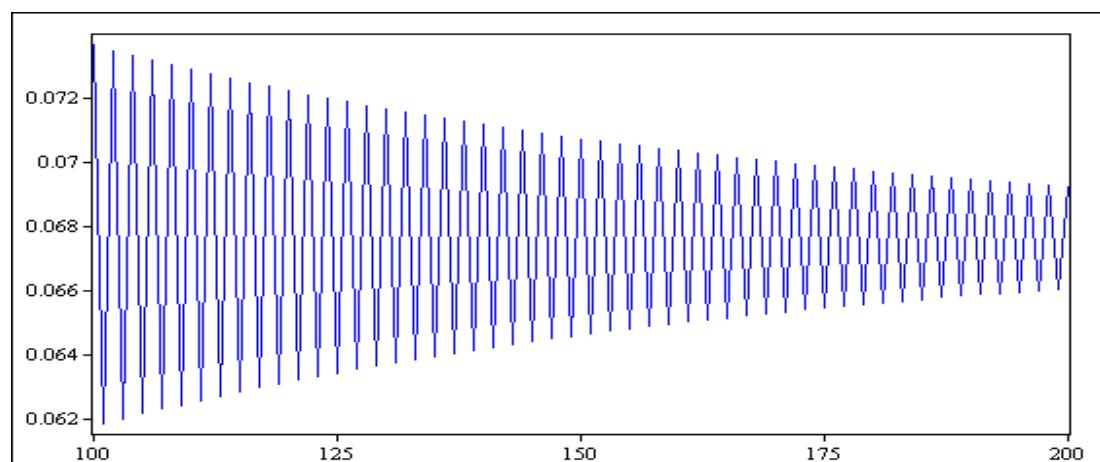


Figure 3.15: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3$ ;  $\gamma = 4$ ;  $c = 0.2$

Après avoir exposé les processus dynamiques déterministes de transition logistique et exponentielle et en plus, analysé les effets des paramètres de contrôle, tant au niveau de la fonction de transition logistique, qu'au niveau de la fonction de transition exponentielle sur la qualité de la dynamique, induit respectivement par un processus LSTAR et ESTAR, compte tenu de ces caractéristiques, nous pouvons conclure, dans le cadre de l'objectif ici de notre étude, qui consiste à identifier et à analyser la dynamique déterministe, du modèle économétrique, généré par son processus de transition, que les processus de transition logistiques et exponentielles ainsi étudiés, peuvent être sources de comportements dynamiques asymétriques après une légère modification dans leurs fonctions explicites. Ceci justifie bien le recours, dans l'étude empirique, à la modélisation du cycle de l'indice de la production industrielle, à travers un processus d'ajustement asymétrique et discontinu, dans un tel cadre, le processus de transition asymétrique LSTAR ou ESTAR, paraît approprié pour reproduire la dynamique du cycle industriel, en présence d'asymétrie<sup>221</sup>, au niveau des fluctuations endogènes, ainsi générées. Selon cette optique, la présence des effets de seuil, liés à la discontinuité et à l'asymétrie rend compatible la concordance entre l'exposé théorique et les modèles empiriques à changement de régimes, dont la transition est lisse, visant à tenir compte de la non-linéarité en moyenne et de l'asymétrie.

<sup>221</sup> La présence de l'effet d'asymétrie qui gouverne la dynamique du cycle de production industrielle en Tunisie, rend le recours à la modélisation linéaire à l'aide des processus continus de type ARMA, pour reproduire ces caractéristiques, inappropriées.

### 3.1.3.3. Fonction de transition ALSTAR

Afin de rendre compte de l'asymétrie dans la dynamique des processus générateurs de fluctuations endogènes des données, nous allons traiter, ici, le processus ALSTAR appelé « *Asymmetric Logistic Smooth Transition AutoRegressive* », introduit par Sollis, Leybourne et Newbold (1999), dans le cadre de l'analyse des tests de racines unitaires non-linéaires, pour les modèles LSTAR. Selon cette extension Sollis, Leybourne et Newbold (1999), utilisent une fonction de transition logistique asymétrique<sup>222</sup>, définie par :

$$G(t; \gamma, \tau, \theta) = [1 + \exp\{-\gamma(t - \tau T)/\theta\}]^{-\theta}, \quad 0 < \theta \leq 1$$

Une simulation simultanée du processus ALSTAR et de sa fonction d'autocorrélation, est présentée sur la figure (3.16).

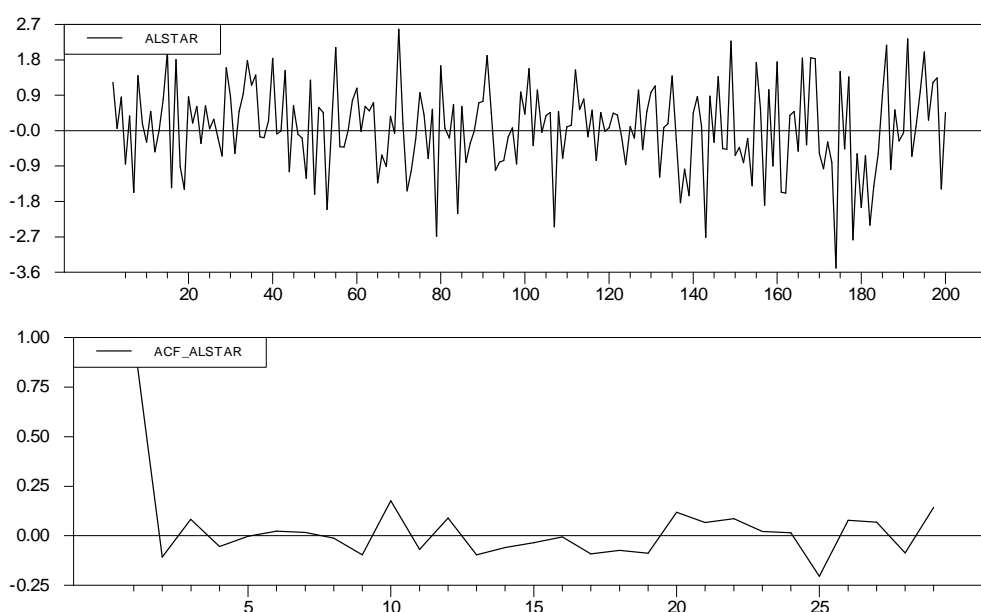
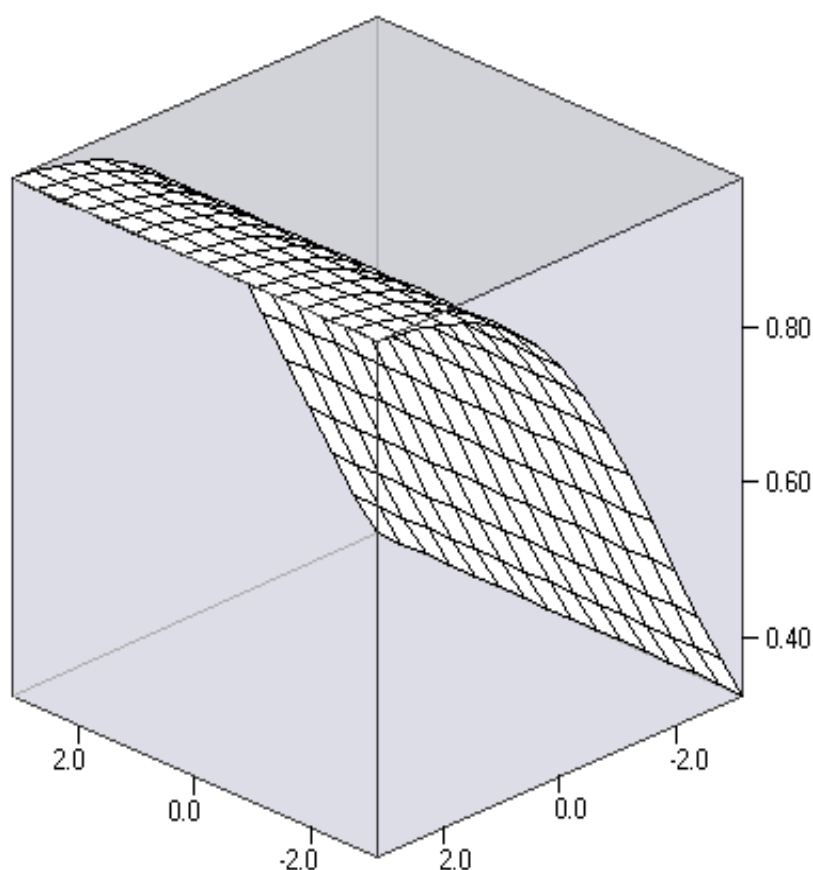


Figure 3.16: Simulation d'un processus ALSTAR ( $\gamma=1$  ;  $c=-1$  ;  $\theta=0.5$ )

<sup>222</sup> La possibilité d'asymétrie introduite dans la fonction de transition logistique est gouvernée par le paramètre  $\theta$ . Dans le cas particulier lorsque  $c = \tau T$  et  $\theta = 1$ , la fonction de transition logistique est symétrique, employée par Leybourne, Newbold et Vougas (1998),  $G(t; \gamma, \tau, 1) = [1 + \exp\{-\gamma(t - \tau T)\}]^{-1}$ ,  $\gamma > 0$ .



La figure (3.17) montre que, le profil de la fonction de transition logistique asymétrique ALSTAR, a la forme d'un S allongé, plus gonflé dans son extrémité supérieure. Elle s'annule, lorsque  $s_t = Y_{t-1}$  s'éloigne du seuil  $c$  par le bas et tend vers un, lorsque la variable de transition est très supérieure à  $c$ . Elle définit, ainsi, deux régimes extrêmes asymétriques, associés aux valeurs hautes et basses de  $s_t = Y_{t-1}$  relativement au seuil  $c$ . Ceci nous laisse penser que cette représentation logistique asymétrique, du processus dynamique, déterministe de transition est utile pour notre cadre d'analyse et elle permet de générer des dynamiques asymétriques, lors de la transition entre les états de régimes et elle admet, par conséquent, des avantages lorsqu'elle sera appliquée, à la modélisation des fluctuations cycliques, endogènes de séries de la production industrielle, en Tunisie.



**Figure 3.17:** Une vue 3-D de la fonction logistique asymétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c = -1, \theta = 0.5)$ .

En plus, la figure (3.18), montre que lorsque  $\theta$  est proche de zéro, le processus ALSTAR génère une asymétrie extrême. La nature de l'asymétrie logistique est déterminée par le signe du paramètre de transition  $\gamma$ . Pour  $\gamma > 0$ , la transition logistique asymétrique, commence plus lente qu'elle finit, et contrairement pour  $\gamma < 0$ .

### Lissage logistique asymétrique en fonction de teta pour c1=1

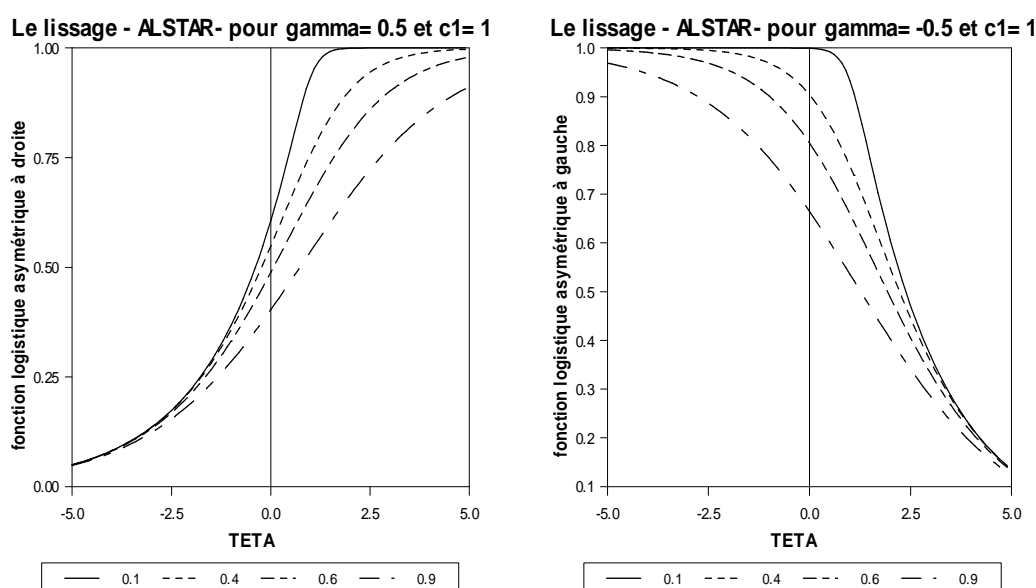


Figure 3.18: L'effet de  $\theta$  sur le lissage pour la fonction logistique asymétrique

Finalement, Sollis, Leybourne et Newbold (1999), montrent que le retournement de la transition s'effectue au niveau des points d'inflexions de  $G(t; \gamma, \tau, \theta)$  à  $t = \tau T + \gamma^{-1} \theta \log(\theta)$ . En ce sens, l'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires, du processus ALSTAR ainsi simulé, est portée sur le tableau (3.6), comme suit :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

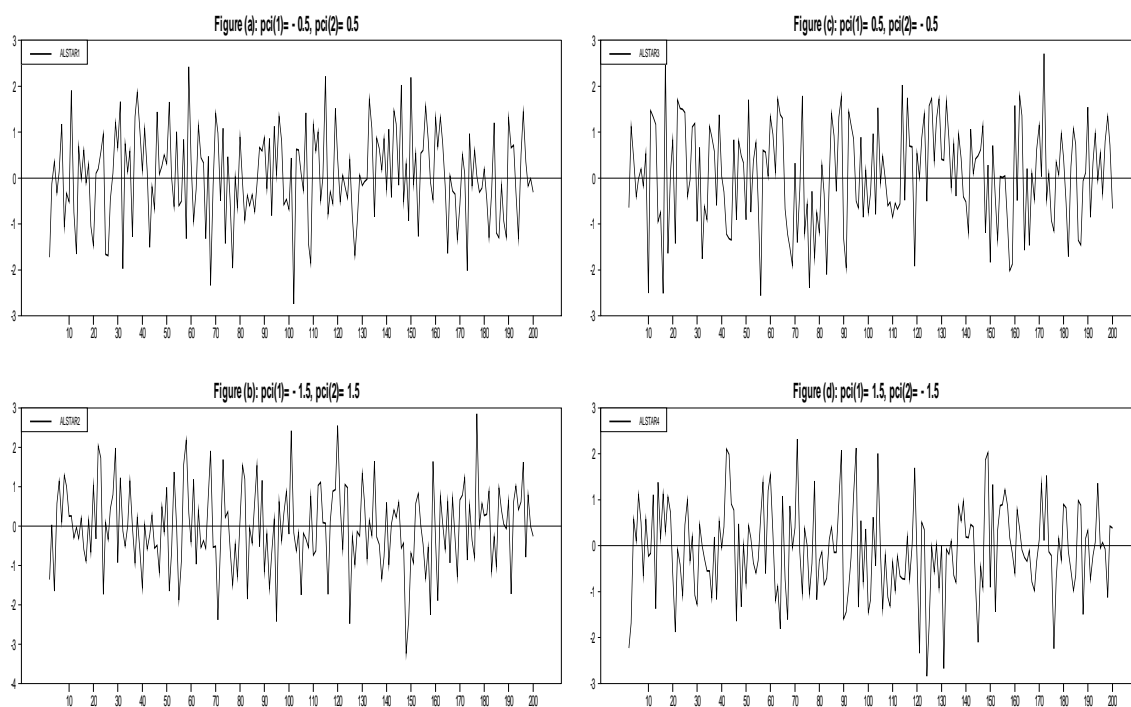
**Tableau 3.6: Estimation du modèle ALSTAR par NLS**

Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable ALSTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.021080	R Bar **2	0.005942	
Uncentered R**2	0.024357	T x R**2	4.823	
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.0973515449			
Sum of Squared Residuals	233.61100012			
Regression F(3,194)	1.3925			
Significance Level of F	0.24634994			
Durbin-Watson Statistic	2.002463			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	0.297396155	0.192590686	1.54419	0.12417253
2. A1	-0.280380345	0.166857587	-1.68036	0.09449729
3. B0	-2.150319585	1.631175677	-1.31826	0.18896973
4. B1	-0.953952871	0.639336312	-1.49210	0.13729764

De même, il est important de noter que nous sommes capables de générer, à partir des processus ALSTAR, des allures dont les comportements asymétriques non-linéaires montrent des différentes dynamiques. En ce sens, la figure (3.19), illustre quelques trajectoires des séries induites par un processus ALSTAR.

### Exemple des séries temporelles générées par ALSTAR

pour  $tetta=0.5$   $c=-1$  et  $gamma=1$



**Figure 3.19: Exemple des séries générées par ALSTAR**

De plus, nous pouvons constater, qu'à partir de la figure (3.20), le processus de transition logistique asymétrique, générateur de ces données n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points, n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

## Distributions marginales bivariées générées par ALSTAR

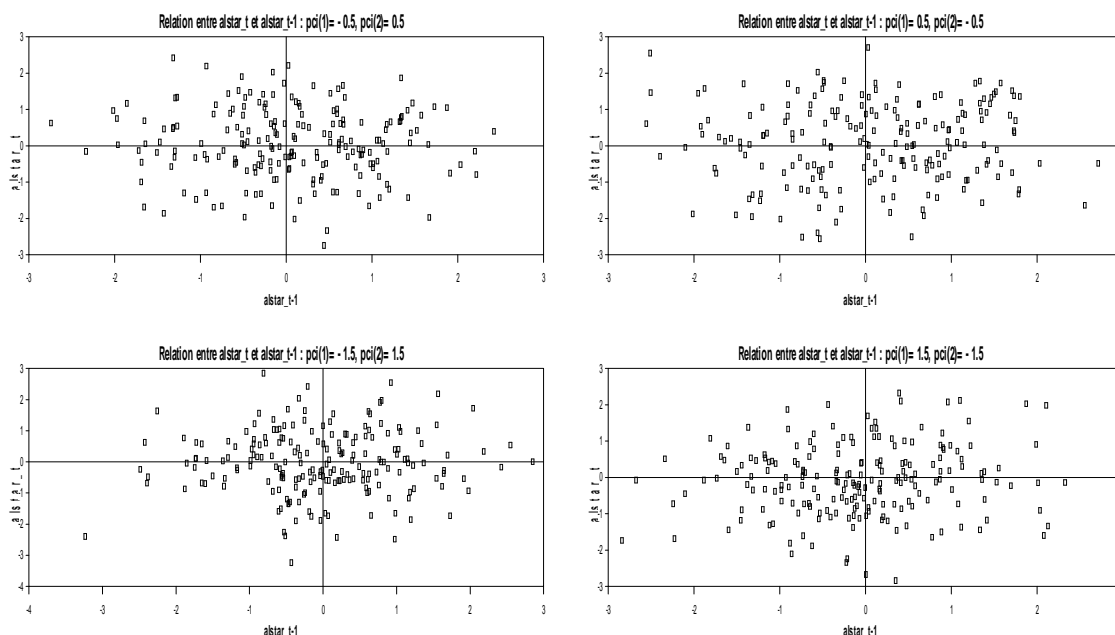
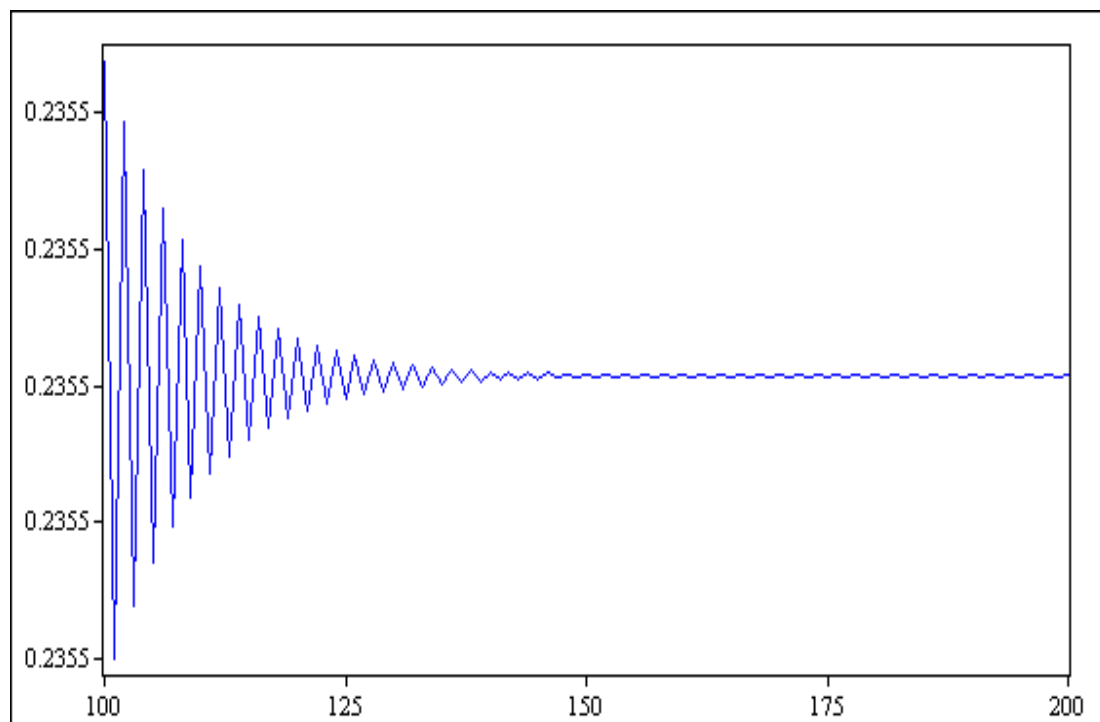
pour  $tetta=0.5$   $c=-1$  et  $gamma=1$ 

Figure 3.20: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par ALSTAR

D'un autre côté, l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes, déterministes et/ou stochastiques induites par la variabilité spatio-temporelle engendrée suite à l'utilisation d'un processus d'ajustement, par une fonction de transition logistique asymétrique, assure l'analyse des propriétés dynamiques du processus simulé pour un échantillon de taille  $T = 200$ , illustré sur la figure (3.16), par l'équation suivante :

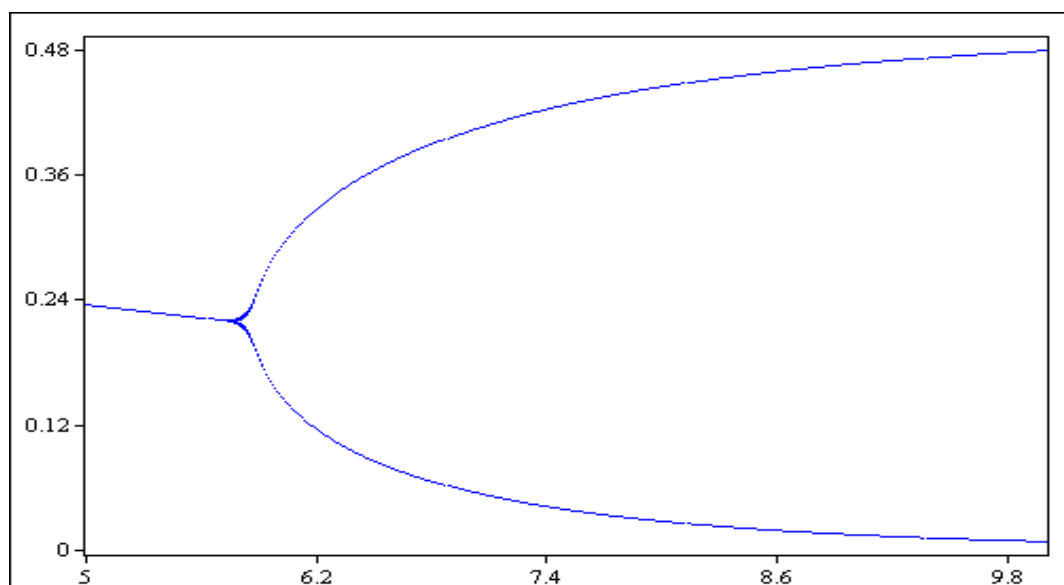
$$f_{\gamma,c,\theta}(Y_{t-1}) = [1 + \exp\{-\gamma(Y_{t-1} - c)/\theta\}]^{-\theta}, \quad \gamma > 0, 0 < \theta \leq 1$$

Ceci prouve que le recours à ce type de processus d'ajustement non-linéaire tient compte de la durabilité des fluctuations endogènes, par la possibilité d'engendrer d'une manière endogène, des cycles limites amortis qui se recomposent par doublement de période avant d'atteindre le chaos, illustrés graphiquement par la figure (3.21) et par le diagramme de bifurcation de la figure (3.22), qui permet de mieux visualiser son évolution spatio-temporelle.



**Figure 3.21: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3$ ;  $\gamma = 5$ ;  $\theta = -1$ ;  $c = 0.2$**

Or, rappelons que nous avons dit, dans la partie précédente, que dans les systèmes dynamiques non-linéaires, la complexité vient du fait que le rôle joué par un paramètre de contrôle, dont l'intensité est mesurable, est d'agir sur les caractéristiques de la fonction de transition afin de déterminer non seulement sa nature, mais aussi de préciser l'ampleur des passages d'un régime à un autre lors de chaque transition. Donc, compte tenu de l'hypothèse, selon laquelle que, si l'un ou plusieurs paramètres de contrôles prennent des valeurs critiques bien précises, alors des évolutions cycliques superposables peuvent apparaître et engendrer la route vers le chaos par quasi-périodicité d'une cascade de doublement de période suite à un scénario de bifurcations de Hopf successives. Ceci prouve que cette technique de bifurcation permet de jouer un rôle important dans le repérage des ruptures structurelles endogènes.



**Figure 3.22: Bifurcation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3; \theta = -1; c = 0.2$**

Sur la figure (3.22), est représenté le diagramme de bifurcation, dans le cas le plus favorable, soit pour  $Y_0 = 0.3; \theta = -1$  et  $c = 0.2$ . Ce scénario de bifurcation, nous permettons de définir seulement deux comportements différents, des évolutions dynamiques. D'abord, la dynamique est stable, celui d'un point fixe, puis nous voyons que pour le point critique d'abscisse  $\gamma = 6$ , apparaît une bifurcation puisque, à partir de cette valeur de  $\gamma$ , la trajectoire d'état donne naissance à un cycle limite stable mono-périodique, subdivisé en deux branches. Il correspond à une orbite fermée sur elle-même dans l'espace des phases.

### 3.1.3.4. Fonction de transition DLSTAR

Au sein des représentations à seuil lisse proposées par la littérature, récemment, van Dijk, Teräsvirta et Franses (2002), et Bec, Ben Salem et Carrasco (2004b), ont concentré leurs intentions sur les modèles DLSTAR « *Double Logistic Smooth Transition Autoregression* », définis par :

$$G(Y_t; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = [1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-1} - c_1)\}]^{-1} + [1 + \exp\{-\gamma_2(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}$$

dont une simulation simultanée du processus DLSTAR et de sa fonction d'autocorrélation est présentée sur la figure (3.23).

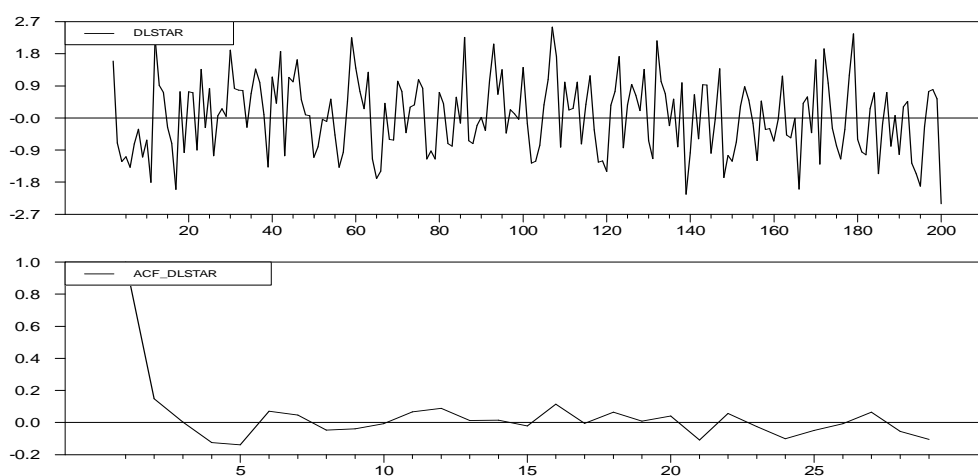


Figure 3.23: Simulation d'un processus DLSTAR ( $\gamma_1 = 2.5$  ;  $\gamma_2 = 2.5$  ;  $c_1 = -1$  ;  $c_2 = 1$ )

Les figures (3.24) et (3.25), montrent que, les profils de la fonction de transition logistique double DLSAR, peuvent prendre différentes formes, mais pas nécessairement toujours la forme d'un S.

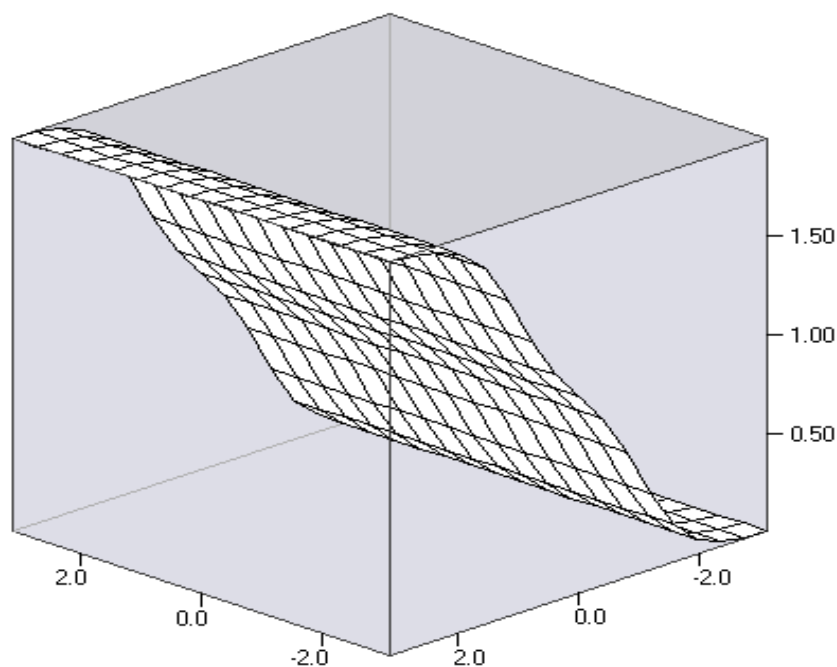


Figure 3.24: Une vue 3-D de la fonction logistique double  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = 2.5, c_1 = -1, c_2 = 1)$



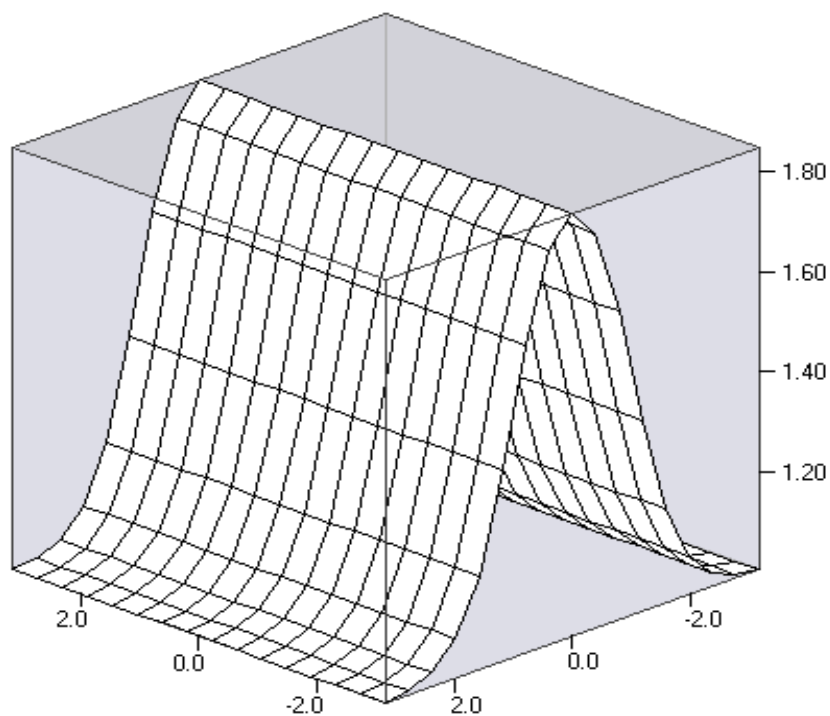


Figure 3.25: Une vue 3-D de la fonction logistique double  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = -2.5, c_1 = -1, c_2 = 1)$

### Lissage logistique double en fonction de gamma pour $c_1=-1$ et $c_2= 1$

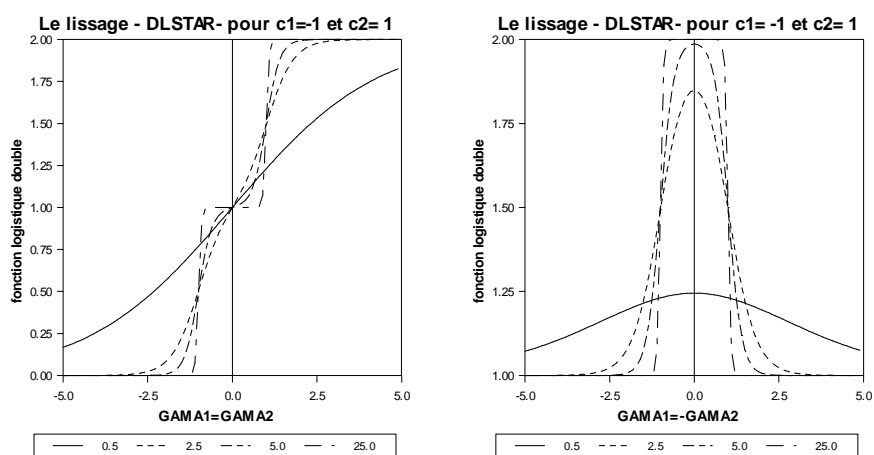


Figure 3.26: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage pour la fonction de transition d'un processus DLSTAR

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

Plus distinctement, la figure (3.26), montre que lorsque  $\gamma_1 = \gamma_2$ , le processus DLSTAR génère une fonction de transition, dont l'allure admet la forme *S*. Par contre, si  $\gamma_1 = -\gamma_2$ , alors le processus DLSTAR, génère une fonction de transition, dont l'allure admet la forme *U*.

**Tableau 3.7: Estimation du modèle DLSTAR par NLS**

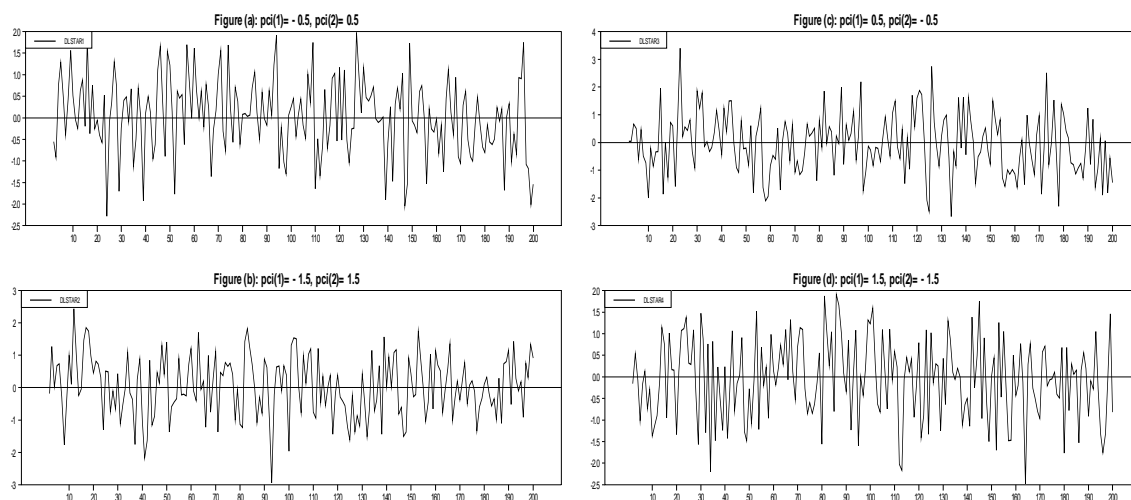
Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable DLSTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.015358	R Bar **2	0.000132	
Uncentered R**2	0.018655	T x R**2	3.694	
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.1005537418			
Sum of Squared Residuals	234.97639647			
Regression F(3,194)	1.0087			
Significance Level of F	0.39003767			
Durbin-Watson Statistic	1.996286			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	0.382118708	0.391644755	0.97568	0.33043968
2. A1	-0.908161265	1.047562911	-0.86693	0.38705263
3. B0	-2.362554715	3.227718532	-0.73196	0.46507745
4. B1	-0.593682475	0.740051730	-0.80222	0.42340874

L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires, du processus DLSTAR ainsi simulé est portée sur le tableau (3.7).

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Exemple des séries temporelles générées par DLSTAR**

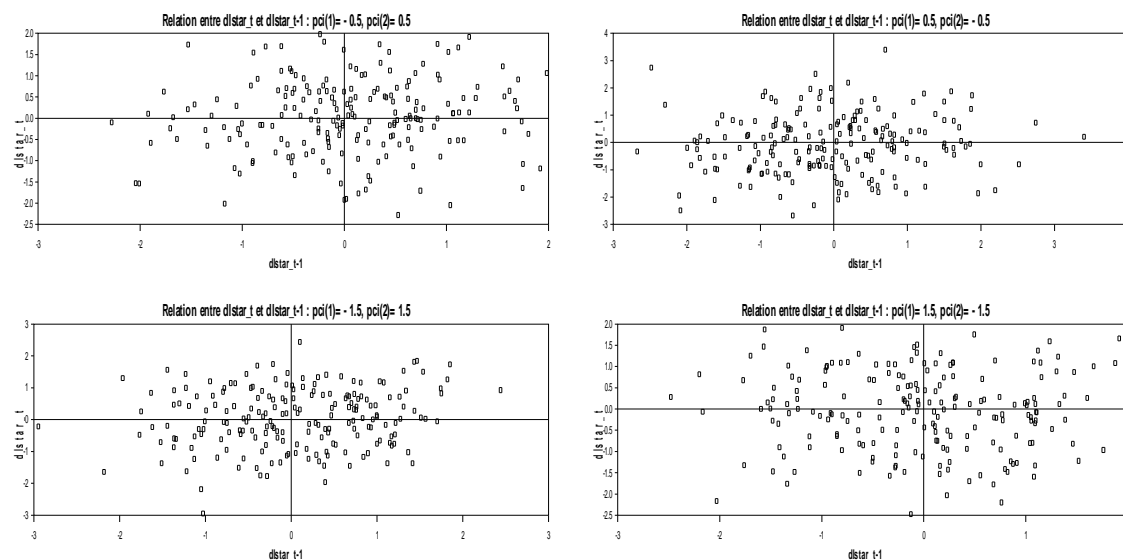
pour  $c_1 = -1$   $c_2 = 1$   $\gamma_1 = 0.5$  et  $\gamma_2 = 1$



**Figure 3.27: Exemple des séries générées par DLSTAR**

**Distributions marginales bivariées générées par DLSTAR**

pour  $c_1 = -1$   $c_2 = 1$   $\gamma_1 = 0.5$  et  $\gamma_2 = 1$



**Figure 3.28: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par DLSTAR**

De ce fait, le comportement d'un processus DLSTAR montre différentes dynamiques possibles, comme l'illustre la figure (3.27). De plus, nous pouvons constater, qu'à partir de la figure (3.28), le processus de transition logistique double générateur de ces données n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

De la même manière que précédemment, notons que l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes, déterministes et/ou stochastiques induites par la variabilité spatio-temporelle, dans le processus d'ajustement, par une fonction de transition logistique double, peut être assurée, par l'étude des propriétés dynamiques du processus DLSTAR, simulé pour un échantillon de taille  $T = 200$  et prouve aussi que la possibilité d'existence d'une manière endogène des cycles limites.

### 3.1.3.5. Fonction de transition QLSTAR

Par contre, une étude menée par Jansen et Teräsvirta (1996), autorise ce rapprochement, à condition que nous utilisions comme fonction de transition, une fonction logistique quadratique<sup>223</sup> (du second ordre), c'est-à-dire un processus QLSTAR « *Quadratic Logistic Smooth Transition AutoRegressive* », avec une fonction de transition définie par deux paramètres de seuil,  $c_1$  et  $c_2$ , dont l'expression est la suivante :

$$G(Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2) = [1 + \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))]^{-1}, \gamma > 0, c_1 \leq c_2, t = 1, 2, \dots, T.$$

Afin d'aboutir à un résultat, extrêmement important de la compréhension du rapprochement qui peut exister, entre les dynamiques internes des processus. Nous allons

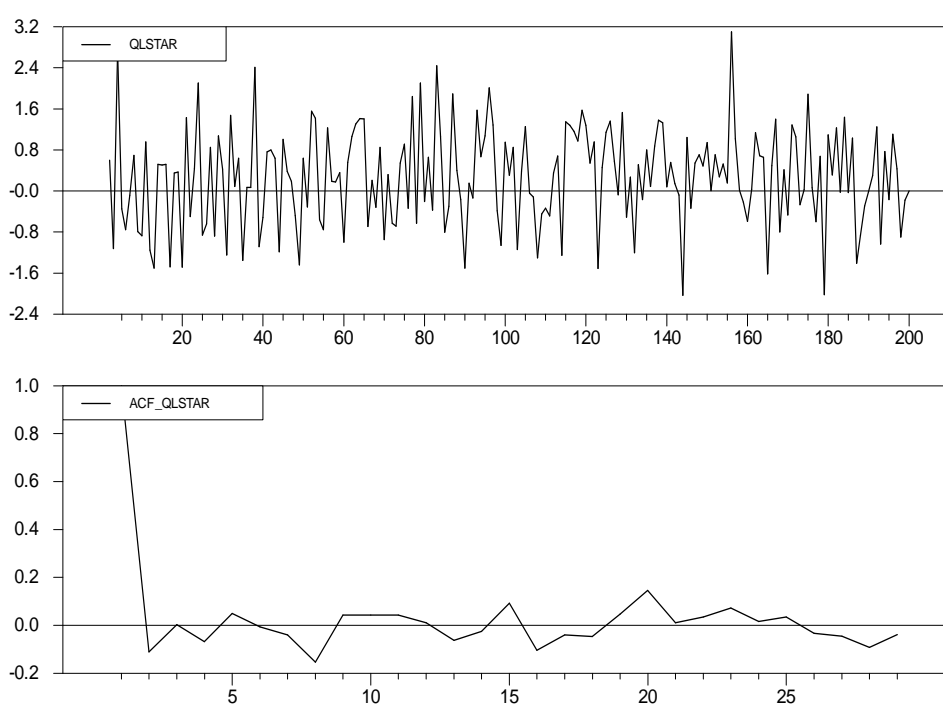
<sup>223</sup> Plus généralement la fonction de transition logistique quadratique dépend de la variable de transition  $s_t$ , du paramètre de lissage  $\gamma$  et des paramètres de seuils  $(c_{ik})_{i=1,2}$ . Elle prend la forme suivante :

$$G(s_t; \gamma, c_{1k}, c_{2k}) = \left[ 1 + \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (s_t - c_{1k})(s_t - c_{2k}) \right\} \right]^{-1}, \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

recourir, de nouveau, à la technique de simulation pour générer, sur la figure (3.29), le processus QLSTAR, dont la fonction logistique quadratique pour  $\gamma = 1$ ,  $c = (-1; 1)$  et  $T = 200$  est donnée par :

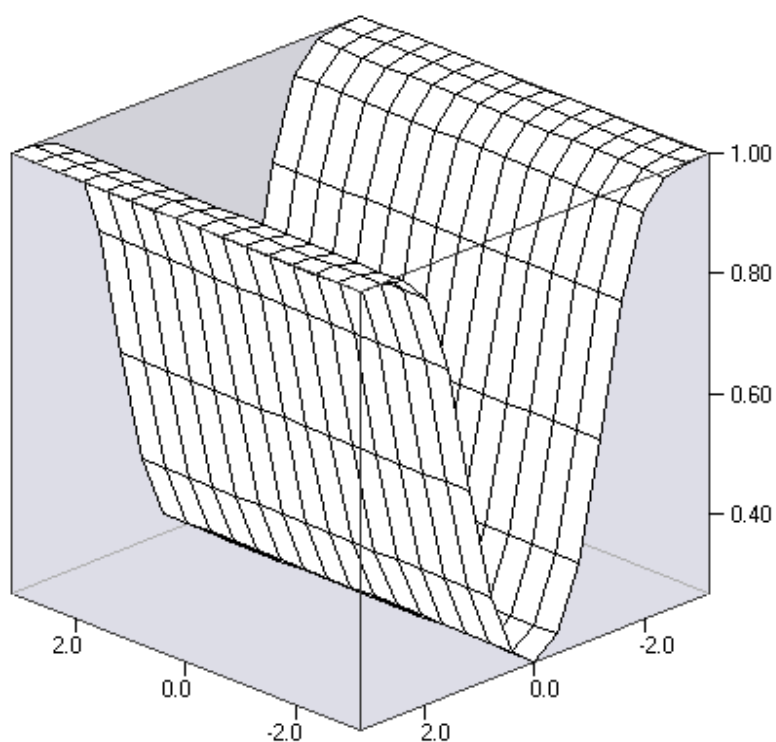
$$G(Y_{t-1}; 1, -1, 1) = [1 + \exp(-(Y_{t-1} + 1)(Y_{t-1} - 1))]^{-1}, \quad t = 1, 2, \dots, 200.$$

Cette simulation portée sur la figure (3.29), illustre simultanément l'allure du processus QLSTAR et sa fonction d'autocorrélation.



**Figure 3.29: Simulation d'un modèle QLSTAR ( $\gamma=1$  ;  $c_1=-1$ ,  $c_2=1$ )**

La figure (3.30), montre que le profil de la fonction de transition logistique quadratique, peut prendre la forme d'un U.



**Figure 3.30:** Une vue 3-D de la fonction logistique quadratique  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c_1 = -1, c_2 = 1)$

Comme le montre la figure (3.31), si  $\gamma$  tend vers zéro, ce modèle se comporte linéairement ( $G(Y_t; 0, c_1, c_2) = 1/2$ ), mais si  $\gamma$  tend vers l'infini, la fonction de transition logistique quadratique, est égale à l'unité pour  $Y_{t-1} < c_1$  et  $Y_t > c_2$  et égale à zéro pour le reste (entre  $c_1$  et  $c_2$ ). En ce sens, le modèle STAR, dont la particularité de générer trois régimes, avec l'utilisation de la fonction logistique quadratique comme fonction de transition, se caractérise comme étant une généralisation d'un modèle SETAR<sup>224</sup> à trois régimes. Comme le montre la figure (3.31), nous notons que la fonction logistique quadratique atteint sa valeur minimale, non nulle, pour  $Y_{t-1} = (c_1 + c_2)/2$ .

<sup>224</sup> Notons que la valeur minimale de  $\gamma$  qui correspond à  $s_t = (c_1 + c_2)/2$ , obtenue à la suite de l'utilisation de la fonction logistique quadratique est non nulle. Une illustration graphique qui résume ce point est détaillée par Jansen et Teräsvirta (1996).

### Lissage QLSTAR en fonction de Gamma

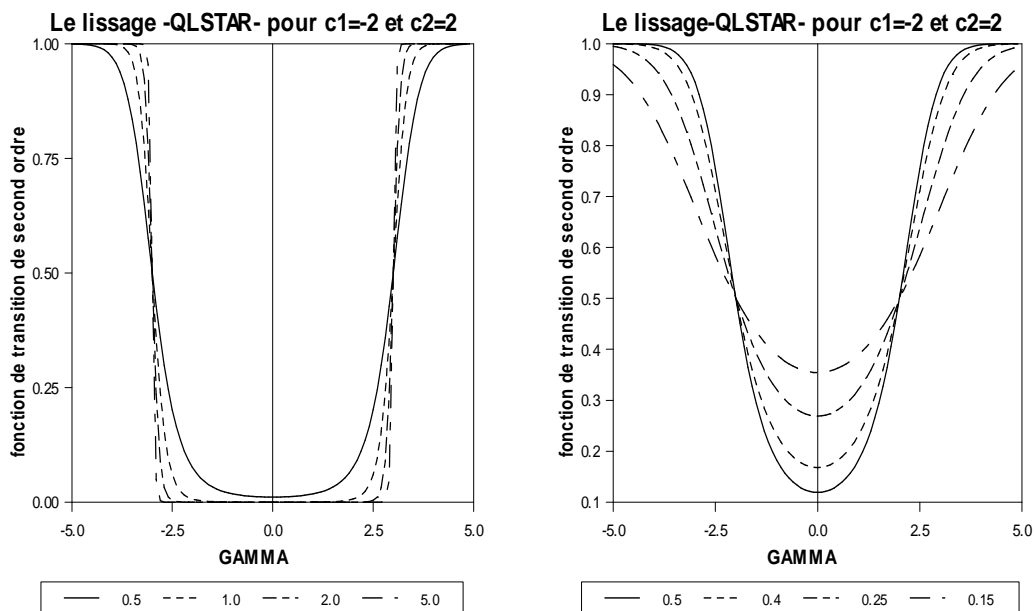


Figure 3.31: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage logistique quadratique pour  $c_1 = -2$  et  $c_2 = 2$

L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires, du processus QLSTAR ainsi simulé est portée sur le tableau (3.8). En plus, le comportement d'un processus QLSTAR montre différentes dynamiques possibles, comme l'illustre la figure (3.32).

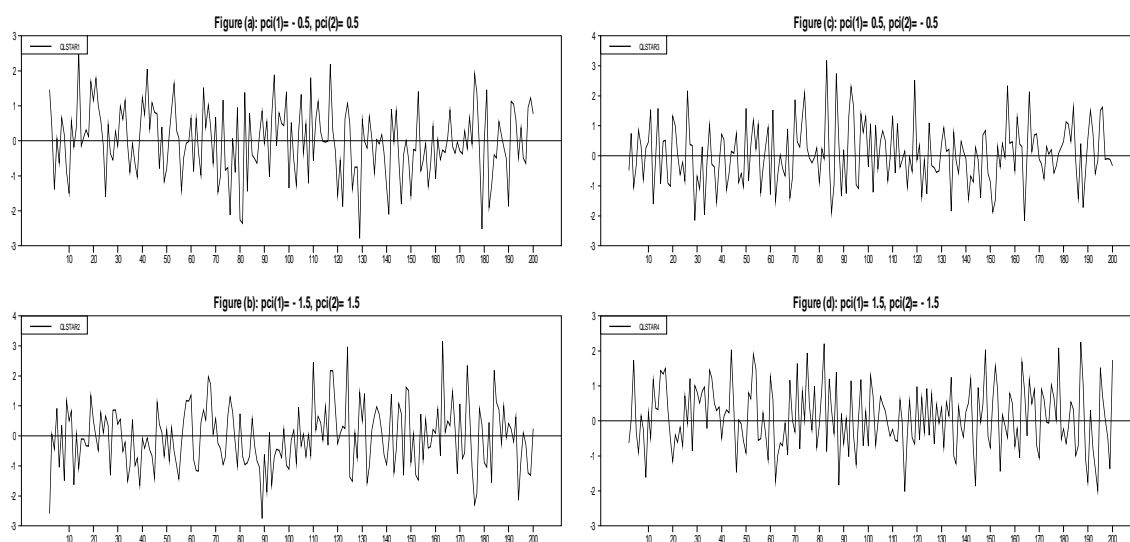
Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.8: Estimation du modèle QLSTAR par NLS**

Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable QLSTAR				
Usable Observations	198		Degrees of Freedom	194
Total Observations	200		Skipped/Missing	2
Centered R**2	0.016766		R Bar **2	0.001561
Uncentered R**2	0.020058		T x R**2	3.971
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.0997666703			
Sum of Squared Residuals	234.64042545			
Regression F(3,194)	1.1027			
Significance Level of F	0.34923145			
Durbin-Watson Statistic	2.002842			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	-0.039448449	0.183114853	-0.21543	0.82965833
2. A1	-0.157363121	0.096433745	-1.63183	0.10433826
3. B0	0.168496782	0.175693571	0.95904	0.33873338
4. B1	0.095876295	0.271106806	0.35365	0.72398695

**Exemple des séries temporelles générées par QLSTAR**

pour  $c1 = -1$   $c2 = 1$  et  $gamma = 1$



**Figure 3.32: Exemple des séries générées par QLSTAR**



Nous constatons, à partir de la figure (3.33), que le processus de transition logistique quadratique, générateur de ces données n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

### Distributions marginales bivariées générées par QLSTAR

pour  $c_1=1$   $c_2=1$  et  $\gamma=1$

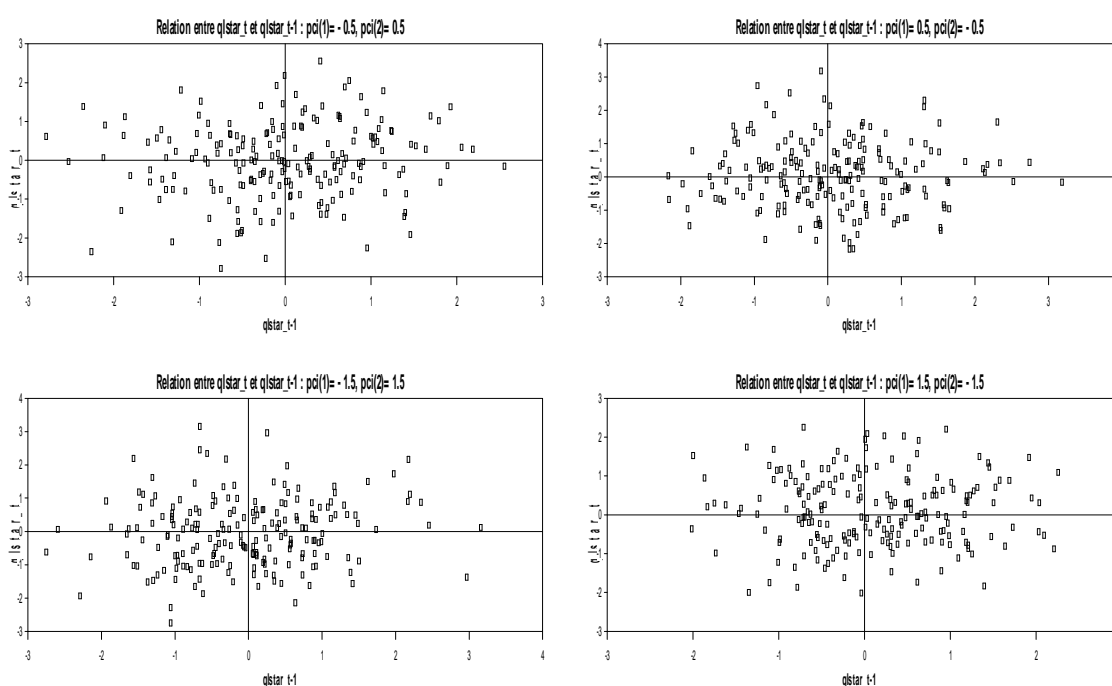


Figure 3.33: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par QLSTAR

Notons que l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes, déterministes et/ou stochastiques, induites par la variabilité spatio-temporelle dans le processus d'ajustement, par une fonction de transition logistique quadratique, est assurée par l'étude des propriétés dynamiques du processus QLSTAR simulé pour un échantillon de taille  $T = 200$ , par l'équation suivante :

$$f_{\gamma, c_1, c_2}(Y_{t-1}) = [1 + \exp\{-\gamma(Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2)\}]^{-1}, \quad \gamma > 0$$

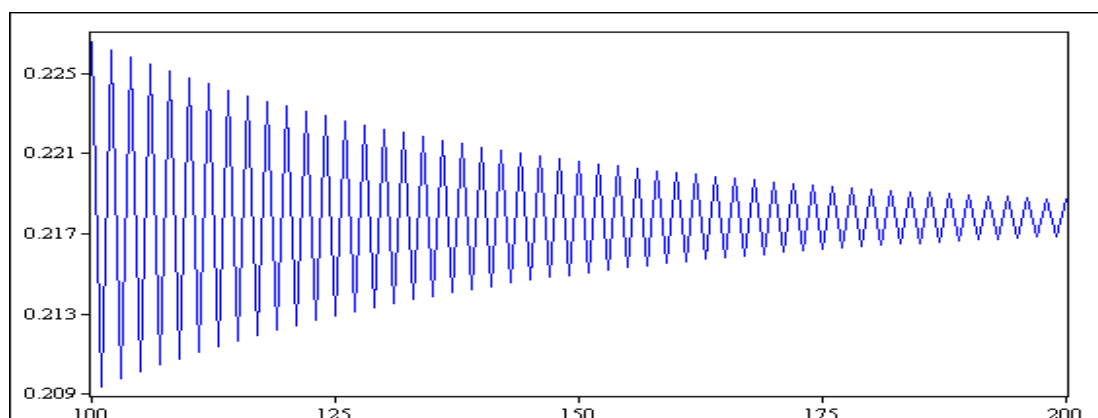


Figure 3.34: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.5$ ;  $\gamma = 0.6$ ;  $c_1 = 0.0$ ,  $c_2 = 10$

La figure (3.34), prouve la possibilité d'existence d'une manière endogène un cycle limite amorti, généré par le processus QLSTAR.

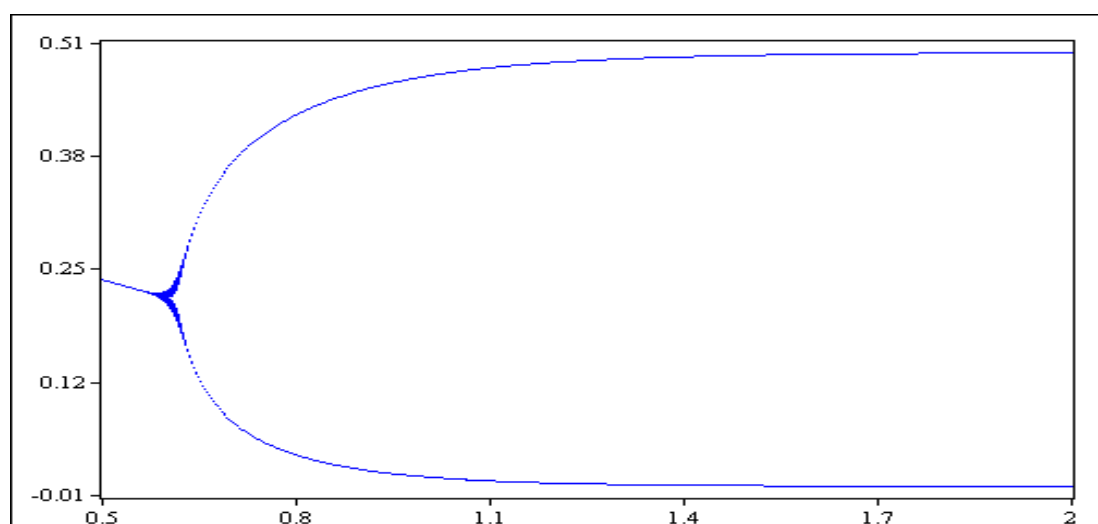


Figure 3.35: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3$ ;  $\theta = -1$ ;  $c = 0.2$

Sur la figure (3.35), est représenté le diagramme de bifurcation dans le cas le plus favorable, soit pour  $Y_0 = 0.3$ ;  $\theta = -1$  et  $c = 0.2$ . Sur ce diagramme de bifurcation, nous pouvons définir, seulement, deux comportements différents des évolutions cycliques. Nous voyons que pour le point critique d'abscisse  $\gamma = 0.6$ , il apparaît une bifurcation, où l'évaluation dynamique du processus passe d'un point fixe à un cycle limite, et à partir de cette valeur critique de  $\gamma$ , la trajectoire d'état définit un cycle limite d'ordre 2 stable, subdivisé en deux branches.

### 3.1.3.6. Fonction de transition QESTAR

Il convient de noter que la dynamique quadratique liée à un processus QESTAR appelé « *Quadratic Exponential Smooth Transition AutoRegressive* », associé à une fonction logistique quadratique, n'est pas générée de la même façon, par celui d'un processus QLSTAR, relative à une fonction logistique quadratique. Dans cette optique, Jansen et Teräsvirta (1996), ont défini une fonction de transition liée à un processus QESTAR donnée par l'expression :

$$G(Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2) = [1 - \exp(-\gamma((Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))^2)], \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

Une simulation simultanée du processus QESTAR et de sa fonction d'autocorrélation est montrée sur la figure (3.36).

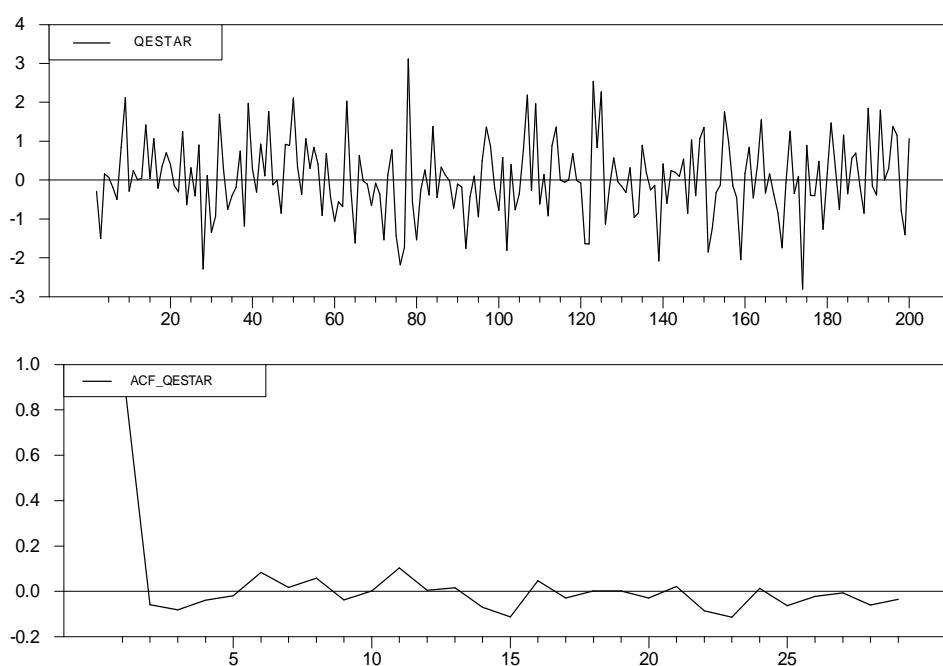


Figure 3.36: Simulation d'un modèle QESTAR ( $\gamma=1$  ;  $c_1=-1$ ,  $c_2=1$ )

La figure (3.37), montre que le profil de la fonction de transition exponentielle quadratique peut prendre la forme d'un W.

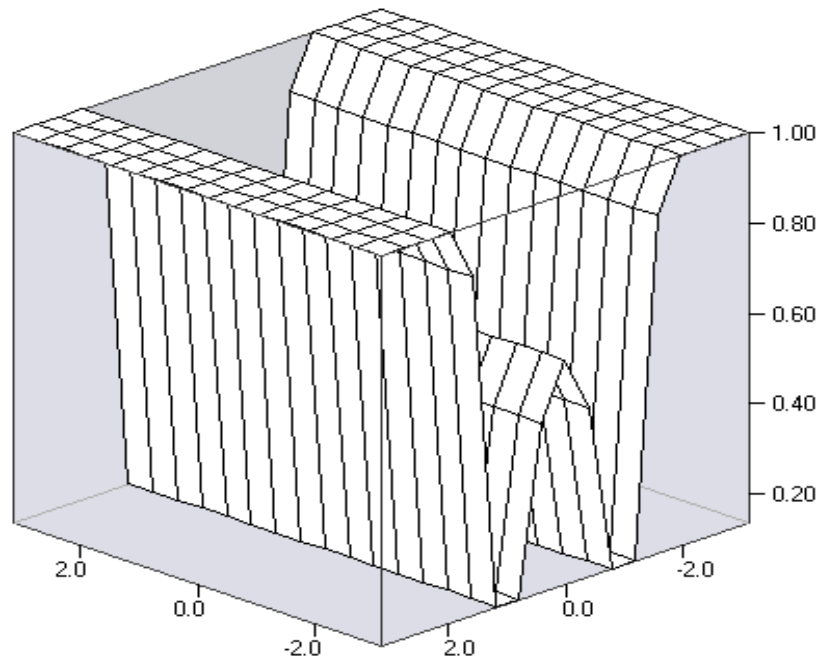


Figure 3.37: Une vue 3-D de la fonction exponentielle quadratique  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, c_1 = -1, c_2 = 1)$

La figure (3.38), donne un lissage exponentiel quadratique en fonction du paramètre de transition pour  $c_1 = -1$  et  $c_2 = 1$ .

#### Lissage exponentiel quadratique en fonction de Gamma pour $c=(-1,1)$

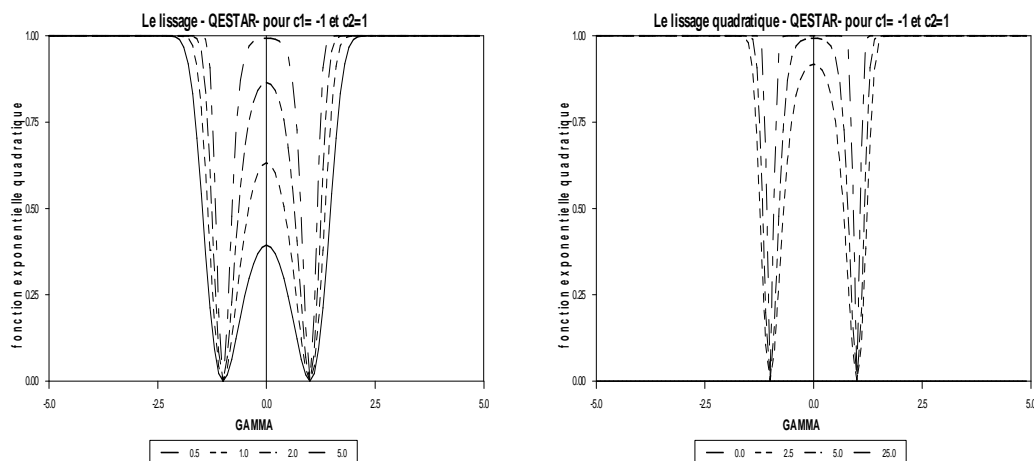


Figure 3.38: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage exponentiel quadratique pour  $c_1 = -1$  et  $c_2 = 1$

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires du processus QESTAR ainsi simulé, est portée sur le tableau (3.9). La figure (3.39), montre quelques exemples de séries temporelles générées par un processus QESTAR.

**Tableau 3.9: Estimation du modèle QESTAR par NLS**

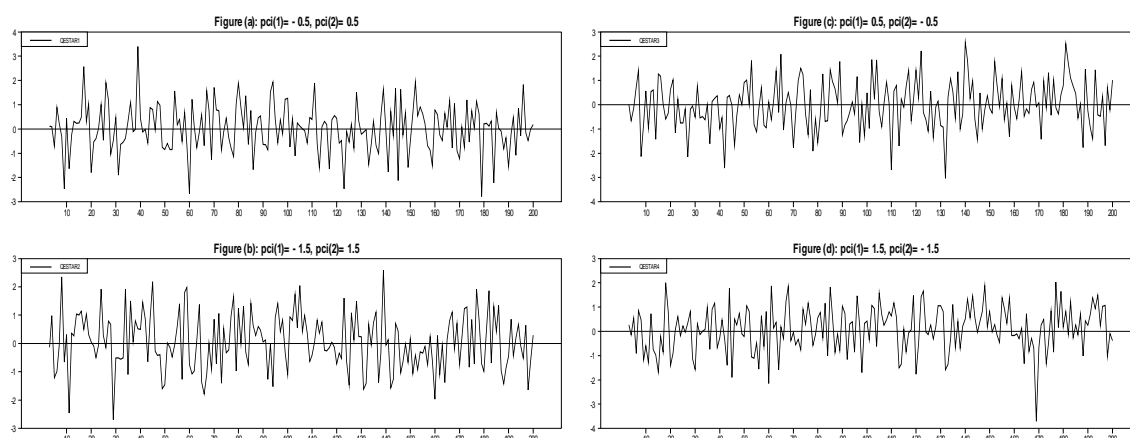
Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable QESTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.019173	R Bar **2	0.004005	
Uncentered R**2	0.022456	T x R**2	4.446	
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.0984198949			
Sum of Squared Residuals	234.06609551			
Regression F(3,194)	1.2641			
Significance Level of F	0.28795260			
Durbin-Watson Statistic	1.990932			

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	0.095979555	0.149355562	0.64262	0.52122647
2. A1	-0.168403260	0.086903130	-1.93783	0.05409597
3. B0	0.035687336	0.151330486	0.23582	0.81381814
4. B1	0.074372261	0.166676090	0.44621	0.65594439

**Exemple des séries temporelles générées par QESTAR**

pour  $c1 = -1$   $c2 = 1$  et  $\gamma = 1$



**Figure 3.39: Exemple des séries générées par QESTAR**

Nous constatons, à partir de la figure (3.40), que le processus de transition exponentiel quadratique, générateur de ces données, n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points, n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

### Distributions marginales bivariées générées par QESTAR

pour  $c1 = -1$   $c2 = 1$  et  $\gamma = 1$

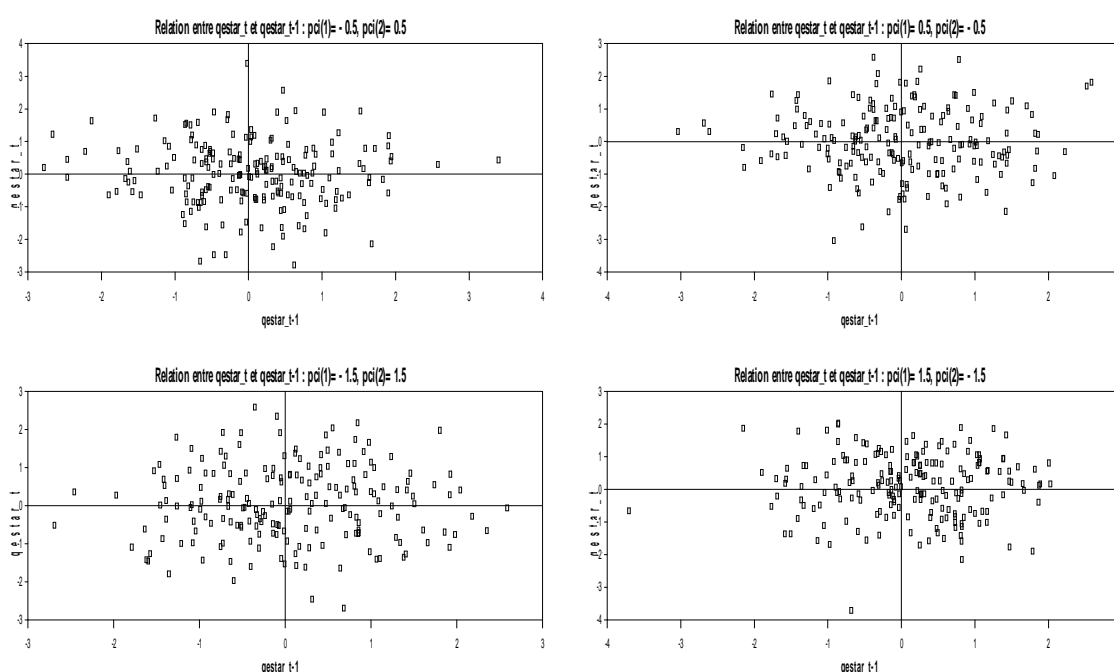


Figure 3.40: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par QESTAR

D'après les estimations données sur le tableau (3.10), de deux processus simulés QLSTAR et QESTAR, l'analyse comparative des principaux statistiques descriptives montre que la moyenne du modèle QESTAR est très proche de zéro et plus petite que celle du modèle QLSTAR et que sa variance est plus petite que celle du modèle QLSTAR. En plus, les coefficients d'asymétrie (*skewness*) et d'aplatissement ou épaisseur des queues (*kurtosis*), permettent de rejeter l'hypothèse de normalité, pour les deux processus simulés.

**Tableau 3.10: Analyse descriptive pour les modèles QLSTAR et QESTAR**

Statistics on Series QLSTAR			
Observations	199		
Sample Mean	<b>0.06947920872</b>	Variance	<b>1.212069</b>
Standard Error	1.10094011994	SE of Sample Mean	0.078044
t-Statistic	0.89026	Signif Level (Mean=0)	0.37440581
Skewness	<b>-0.31556</b>	Signif Level (Sk=0)	0.07129288
Kurtosis(Exc)	<b>0.19341</b>	Signif Level (Ku=0)	0.58425144
Jarque-Bera	<b>3.61280*</b>	Signif Level (JB=0)	0.16424406
Statistics on Series QESTAR			
Observations	199		
Sample Mean	<b>0.03969190097</b>	Variance	<b>0.991367</b>
Standard Error	0.99567436189	SE of Sample Mean	0.070581
t-Statistic	0.56236	Signif Level (Mean=0)	0.57450979
Skewness	<b>0.11340</b>	Signif Level (Sk=0)	0.51688145
Kurtosis(Exc)	<b>0.34319</b>	Signif Level (Ku=0)	0.33159516
Jarque-Bera	<b>1.40309*</b>	Signif Level (JB=0)	0.49581898

(\*)Indique que nous rejetons au risque d'erreur  $\alpha=5\%$  l'hypothèse nulle de normalité, le seuil critique est  $\chi^2_{0.95}(2) = 5.99$ .

Notons que l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes déterministes et/ou stochastiques, induites par la variabilité spatio-temporelle, dans le processus d'ajustement, par une fonction de transition logistique quadratique est assurée par l'étude des propriétés dynamiques du processus QESTAR simulé pour un échantillon de taille  $T = 200$ , par l'équation suivante :

$$f_{\gamma, c_1, c_2}(Y_{t-1}) = \left[ 1 - \exp(-\gamma((Y_{t-1} - c_1)(Y_{t-1} - c_2))^2) \right], \quad \gamma > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

Nous constatons que la figure (3.41), prouve la possibilité d'existence, d'une manière endogène, d'un cycle limite amorti. La figure (3.42), montre le diagramme de bifurcation associé au processus QESTAR simulé, conduisant à des dynamiques spatio-temporelles de plus en plus complexes qui caractérisent le scénario de transition vers le chaos après une cascade de doublement de période mettant en évidence la superposition des cycles endogènes quasi-périodiques.

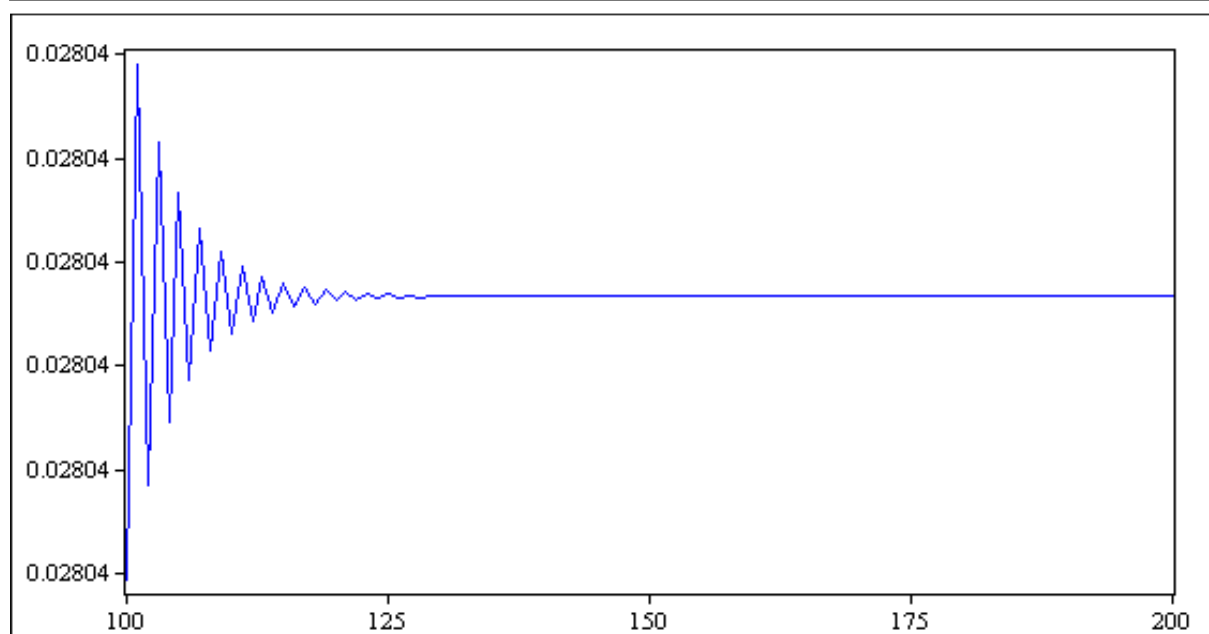


Figure 3.41: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3$ ;  $\gamma = 4$ ;  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 1.2$

Sur ce diagramme de bifurcation porté par la figure (3.42), lié à la variation du paramètre de contrôle  $\gamma$ , nous pouvons définir trois comportements dynamiques différents, des évolutions cycliques, où la trajectoire d'état décrit des points fixes ; des cycles stables mono-périodiques et multi-périodiques ou encore des comportements chaotiques.

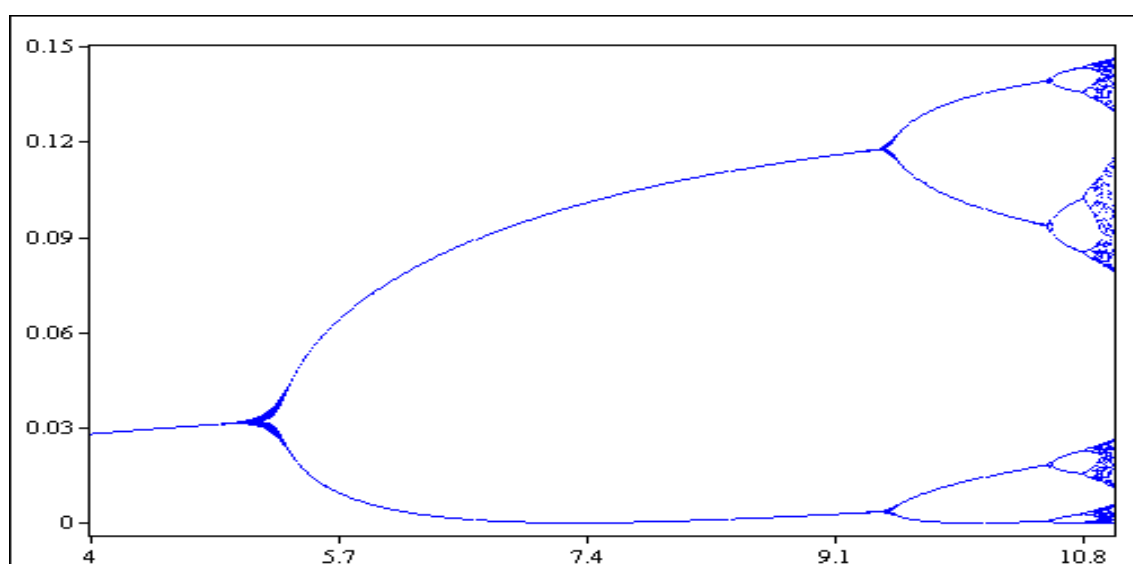


Figure 3.42: Simulation d'un cycle limite :  $Y_0 = 0.3$ ;  $\gamma = 5$ ;  $\theta = -1$ ;  $c = 0.2$



Pour les points critiques dont les valeurs  $\gamma < 5.5$  la trajectoire d'état définit un seul point fixe, stable autour de l'ordonnée 0.03 et pour  $0 < \gamma < 5.5$  le diagramme des bifurcations associe le point de coordonnées (5.5 ; 0.03). Pour  $5.5 < \gamma < 9.3$  un changement dans la nature de l'orbite périodique apparaît. Nous obtenons toujours un cycle limite d'ordre 2 stable, subdivisé en deux branches. Au point critique d'abscisse  $\gamma = 9.3$  apparaît une deuxième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 4 stable. Au point critique d'abscisse  $\gamma = 10.7$  apparaît une troisième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 8 stable. Au point critique d'abscisse  $\gamma = 10.8$  apparaît une quatrième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 16 stable, et ainsi de suite. Puis, des distorsions apparaissent, sur la forme des évolutions cycliques et les propriétés qualitatives de la dynamique endogène des structures portées sur le diagramme de bifurcation passent d'un phénomène de dédoublement de période, à un comportement purement chaotique.

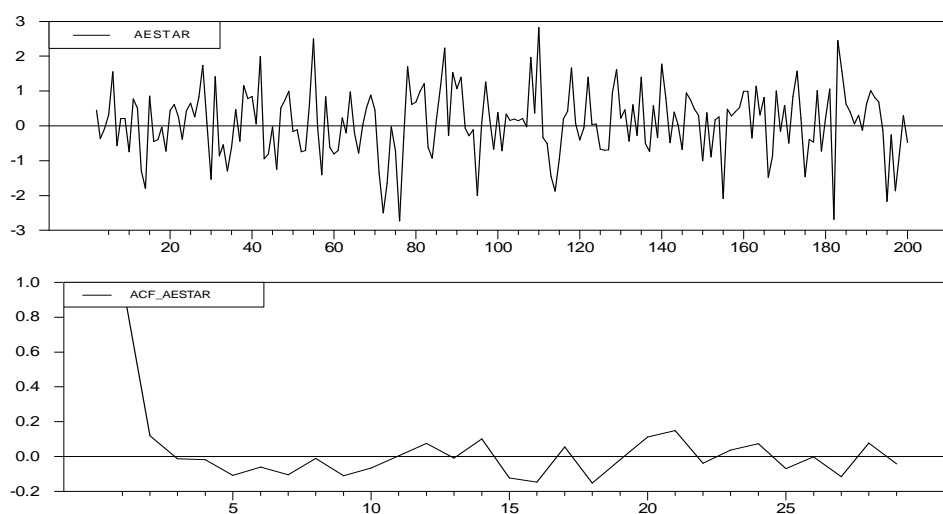
### 3.1.3.7. Fonction de transition AESTAR

Le processus AESTAR nommé « *Asymmetric Exponential Smooth Transition AutoRegressive* » introduit par Anderson (1997), est défini par sa fonction de transition exponentielle asymétrique, donnée par l'expression :

$$G(Y_{t-1}; \gamma, c_1, c_2, \delta) = \left[ 1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c_1)^2 \times \{1/2 + (1 + \exp(-\delta(Y_{t-1} - c_2)))^{-1}\}) \right]$$

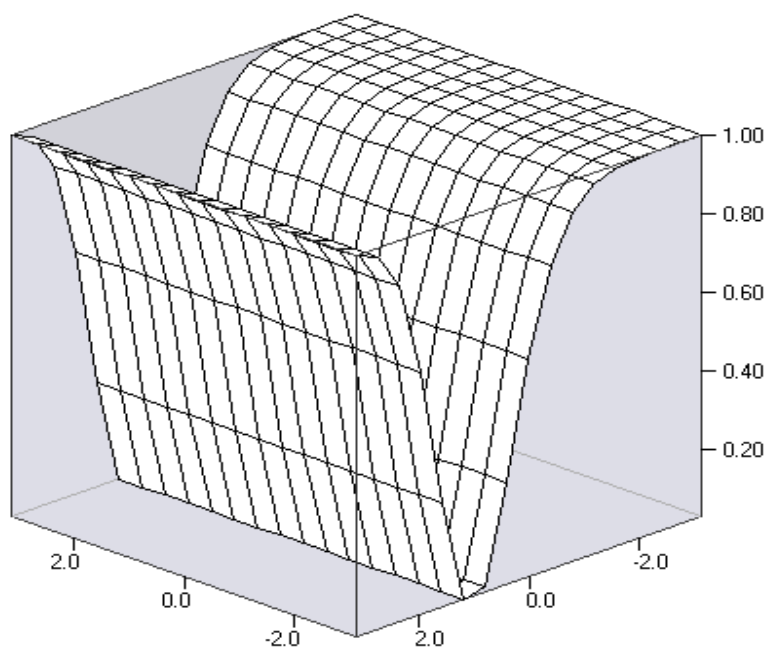
$$\gamma > 0, \delta \neq 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $\gamma$  est le paramètre de transition et  $\delta$  est le paramètre d'asymétrie. L'interaction entre ces deux paramètres localise l'asymétrie longitudinale, de la fonction de transition exponentielle asymétrique.



**Figure 3.43: Simulation d'un modèle AESTAR**

Une simulation simultanée du processus AESTAR et de sa fonction d'autocorrélation est présentée sur la figure (3.43). La figure (3.44) montre que le profil de la fonction de transition exponentielle asymétrique, peut prendre la forme d'un V.



**Figure 3.44: Une vue 3-D de la fonction exponentielle asymétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma = 1, \delta = 0.5, c_1 = 0, c_2 = 0)$**

Comme le montre la figure (3.45), selon le signe (positif ou négatif) de la valeur du paramètre d'asymétrie  $\delta$ , celui-ci induit une asymétrie dans la fonction de transition. De ce fait, le modèle AESTAR, permet de rendre compte du phénomène d'asymétrie, pour les phases d'expansion et de récession du cycle, mais les états intermédiaires peuvent avoir des dynamiques différentes.

### Lissage exponentiel asymétrique en fonction de Gamma

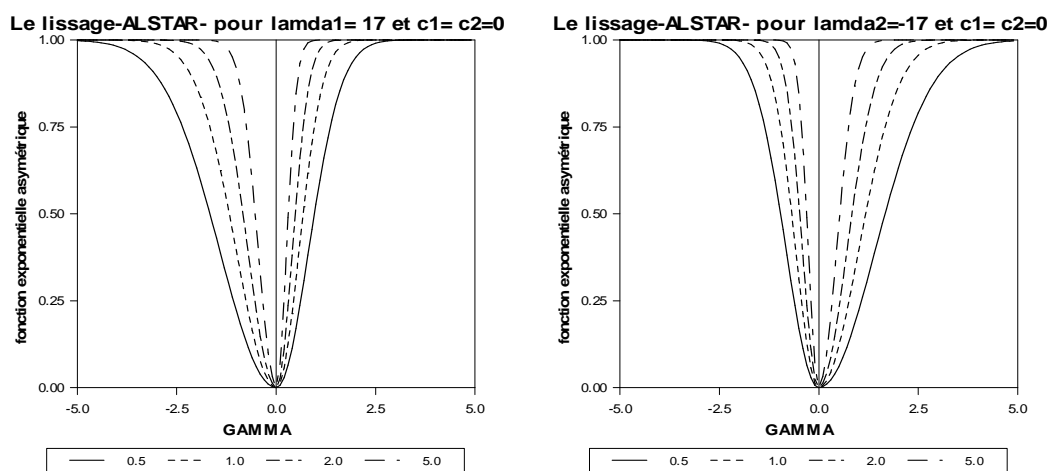


Figure 3.45: L'effet de  $\gamma$  sur le lissage exponentiel asymétrique pour  $\lambda_1= 17$  ;  $\lambda_2= -17$  et  $c_1=c_2=0$

L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires, du processus AESTAR, ainsi simulé, est portée sur le tableau (3.11).

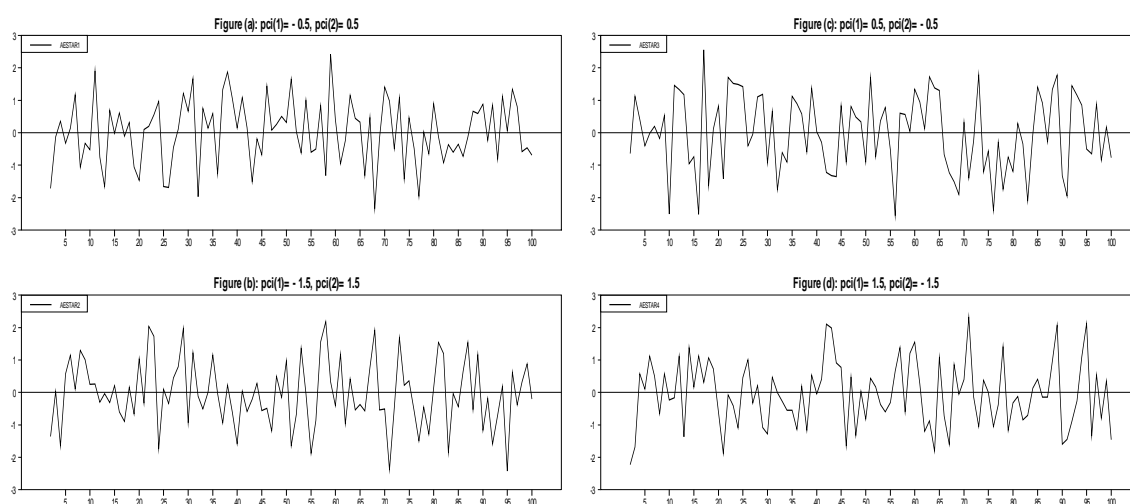
Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.11: Estimation du modèle AESTAR par NLS**

Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable AESTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.016949	R Bar **2	0.001747	
Uncentered R**2	0.020240	T x R**2	4.007	
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.0996645883			
Sum of Squared Residuals	234.59686812			
Regression F(3,194)	1.1149			
Significance Level of F	0.34421742			
Durbin-Watson Statistic	2.009697			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	-0.025919300	0.146369572	-0.17708	0.85962934
2. A1	-0.130571595	0.086893928	-1.50265	0.13455406
3. B0	0.152300795	0.125822949	1.21044	0.22758380
4. B1	0.058028724	0.285688427	0.20312	0.83925497

**Exemple des séries temporelles générées par AESTAR**

*pour  $c_1 = -1$   $c_2 = 1$   $\lambda = 0.5$  et  $\gamma = 1$*



**Figure 3.46: Exemple des séries générées par AESTAR**

La figure (3.46) montre quelques exemples de séries temporelles générées, par un processus AESTAR. Nous constatons, à partir de la figure (3.47), que le processus de transition exponentiel asymétrique, générateur de ces données, n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

### Distributions marginales bivariées générées par AESTAR

pour  $c_1 = -1$   $c_2 = 1$   $\lambda = 0.5$  et  $\gamma = 1$

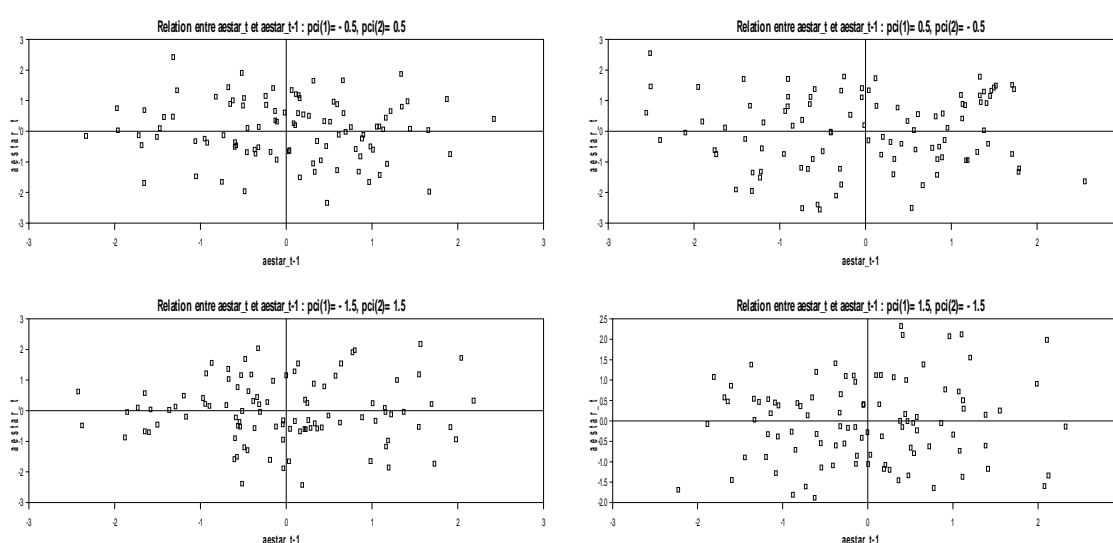


Figure 3.47: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par AESTAR

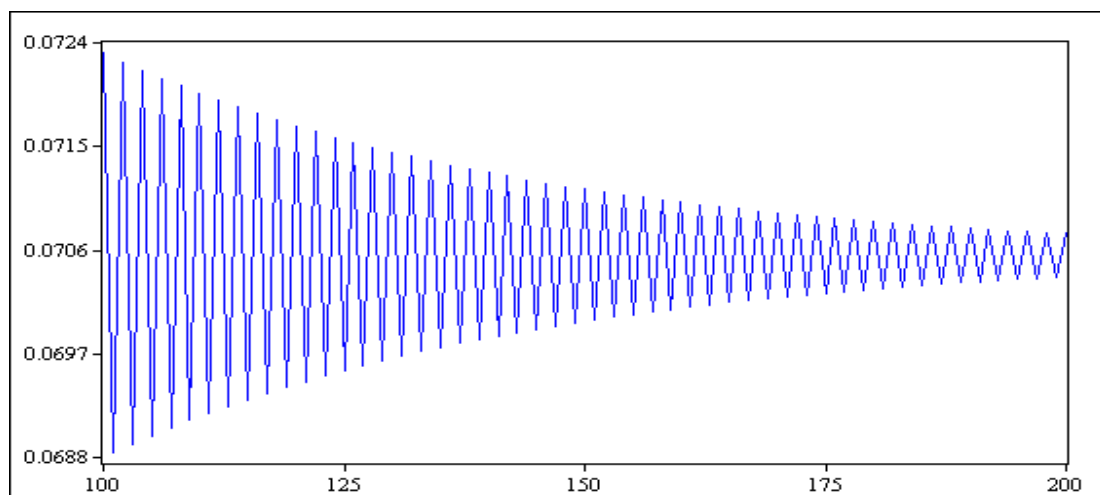
Malgré la prise en compte du phénomène d'asymétrie induite par cette extension du modèle ESTAR, Anderson (1997), a signalé le problème que, lorsque le paramètre de transition tend vers l'infini, il sera difficile de distinguer le comportement dynamique de ce processus non-linéaire AESTAR, ayant comme fonction de transition :

$$f_{\gamma, c_1, c_2, \delta}(Y_{t-1}) = \left[ 1 - \exp(-\gamma(Y_{t-1} - c_1)^2 \times \left\{ \frac{1}{2} + (1 + \exp(-\delta(Y_{t-1} - c_2)))^{-1} \right\}) \right],$$

$$\gamma > 0, \delta \neq 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

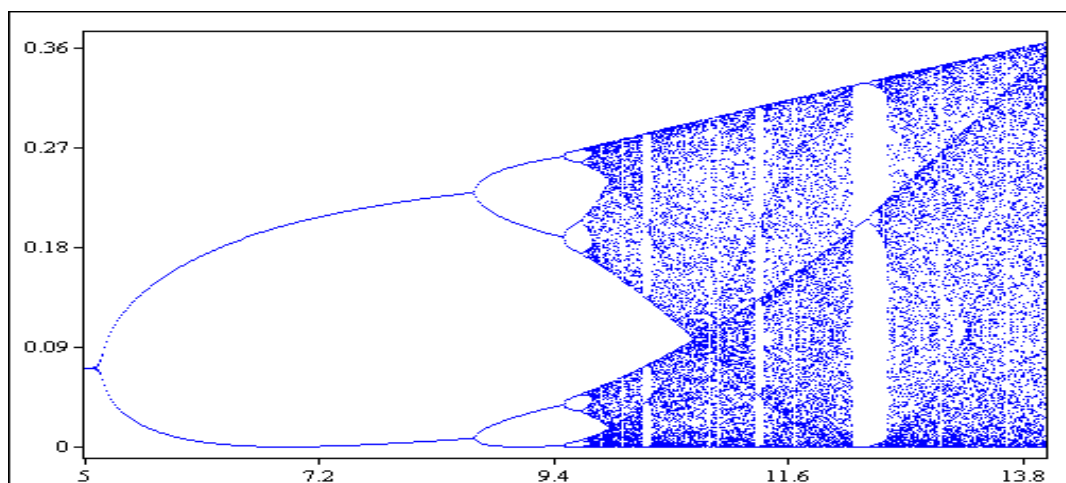
de celui d'un processus linéaire. D'un autre côté, notons que l'étude de l'émergence des fluctuations endogènes, déterministes et/ou stochastiques, induites par la variabilité spatio-

temporelle, dans le processus d'ajustement, à l'aide d'une fonction de transition exponentielle asymétrique est assurée par l'étude des propriétés dynamiques, du processus AESTAR simulé, pour un échantillon de taille  $T = 200$ , illustré sur la figure (3.48). Ceci prouve la possibilité de générer, d'une manière endogène, des cycles limites amortis.



**Figure 3.48: Simulation d'un cycle limite :**  $Y_0 = 0.3; \gamma = 5; c_1 = 0.2, c_2 = 0.2, \delta = 4$

Sur le diagramme de bifurcation portée par la figure (3.49), nous pourrions mieux visualiser l'évolution dynamique du processus AESTAR vers le comportement chaotique par doublement de période, suite à la variation du paramètre de contrôle  $\gamma$ .



**Figure 3.49: Simulation d'un cycle limite :**  $Y_0 = 0.3; \theta = -1; c = 0.2$

---

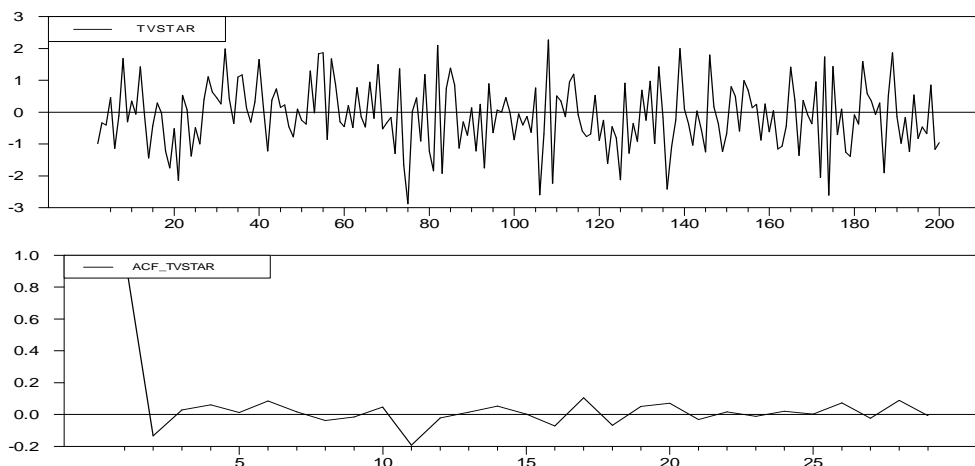
Ce diagramme de bifurcation, permet de définir trois comportements différents, caractérisant les évolutions cycliques, où la trajectoire d'état décrit des points fixes ; des cycles stables mono-périodiques et multi-périodiques ou des comportements chaotiques. Pour  $\gamma < 5.1$  la trajectoire d'état définit un seul point fixe stable 0.08 et pour  $0 < \gamma < 5.1$  le diagramme des bifurcations associe le point de coordonnées (5.1 ; 0.08). Pour  $5.1 < \gamma < 9$  un changement dans la nature de l'orbite périodique apparaît. Nous obtenons toujours un cycle limite d'ordre deux stable, subdivisé en deux branches. Au point d'abscisse  $\gamma = 9$  apparaît une deuxième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 4 stable. Au point d'abscisse  $\gamma = 9.5$  apparaît une troisième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 8 stable. Au point d'abscisse  $\gamma = 9.6$  apparaît une quatrième bifurcation ; chacune des branches du diagramme des bifurcations se subdivisant, à leur tour, en deux branches, pour former un cycle d'ordre 16 stable, et ainsi de suite. Puis, des distorsions apparaissent sur la forme des évolutions cycliques et le diagramme des bifurcations passe d'un phénomène de dédoublement de période, à des zones chaotiques. De toute évidence, nous pourrions constater que le rapport entre ordre et chaos paraît comme une relation très compliquée, puisque des régimes successifs de situations ordonnées induites par des cycles stables, mono-périodiques et multi-périodiques, suivent des régimes de comportement chaotique. Or, le plus intéressant est de remarquer que toutes ces transformations se manifestent à des intervalles réguliers, nous sommes, donc, en présence d'un processus cohérent, ayant une grande capacité d'auto-organisation.

### 3.1.3.8. Fonction de transition TVSTAR

Une étude menée par van Dijk, Strikholm et Teräsvirta (2003), a permis d'introduire le modèle TVSTAR « *Time-Varying Smooth Transition AutoRegressive* », qui accepte comme fonction de transition une fonction logistique asymétrique<sup>225</sup>, définie par :

$$G_j(s_t; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t}) = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{\gamma_j}{\sigma_{s_t}}(s_t - c_j)\right) \right]^{-1}, \quad \gamma_j > 0, t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $s_t = Y_t$  ( $j = 1$ ) ou  $s_t = t/T$  ( $j = 2$ ) est la variable de transition,  $\gamma_j$  est le paramètre de transition et  $\sigma_{s_t} = [\text{Var}(Y_t)]^{1/2}$  est l'écart type du variable de transition. Si  $s_t$  croit, la fonction de transition change, monotonement, de zéro vers un. Le paramètre de transition  $\gamma_j$  détermine le lissage du changement dans la dynamique de la fonction de transition logistique. Une simulation simultanée du processus TVSTAR et de sa fonction d'autocorrélation est présentée sur la figure (3.50).



**Figure 3.50: Simulation d'un modèle TVSTAR**

<sup>225</sup> Plus généralement, la fonction de transition logistique asymétrique dépend de la variable de transition  $s_t$ , du paramètre de lissage  $\gamma_j$ , des paramètres de seuils  $(c_{ij})_{j=1,2}$  et de l'écart type de la variable de transition  $\sigma_{s_t}$ . Elle prend la forme suivante :

$$G(s_t; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t}^k) = \left[ 1 + \exp\left\{-\frac{\gamma_j}{\sigma_{s_t}^k} \prod_{i=1}^k (s_t - c_{ij})\right\} \right]^{-1}, \quad \gamma > 0, \quad c_{j1} < \dots < c_{jk}, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$



Comme le montre le profil illustré par la figure (3.51), si  $\gamma_j \rightarrow \infty$ , la fonction de transition logistique  $G_j(s_t; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t})$  se rapproche d'une fonction indicatrice  $I[s_t > c_j]$  et, par conséquent, le changement de la fonction de transition logistique  $G_j(s_t; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t})$  est instantané entre zéro pour  $s_t = c_j$ . Si  $\gamma_j \rightarrow 0$ , alors la fonction de transition logistique  $G_j(s_t; \gamma_j, c_j, \sigma_{s_t}) \rightarrow 1/2$  pour toute valeur de  $s_t$ .

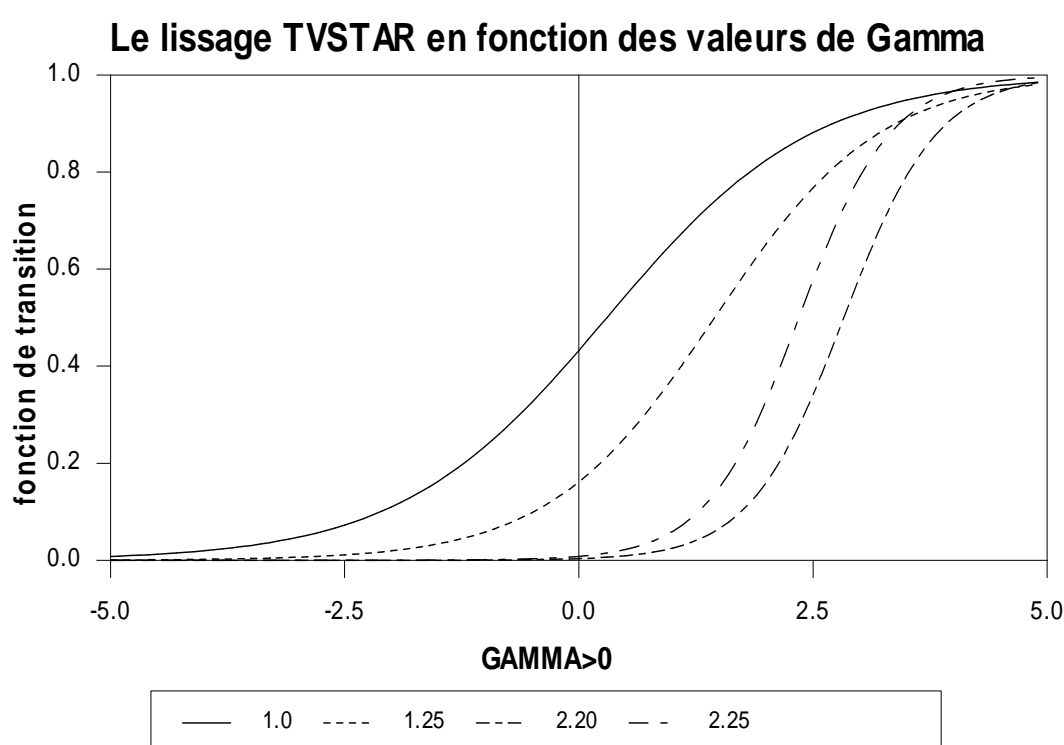


Figure 3.51: La fonction de transition logistique asymétrique  $G(Y_t; \gamma, c = 1.5, \sigma_{Y_t} = 1.10)$

La figure (3.52) montre que le profil de la fonction de transition logistique asymétrique, peut prendre la forme d'un S. La figure (3.53), montre quelques exemples de séries temporelles générées par un processus TVSTAR.

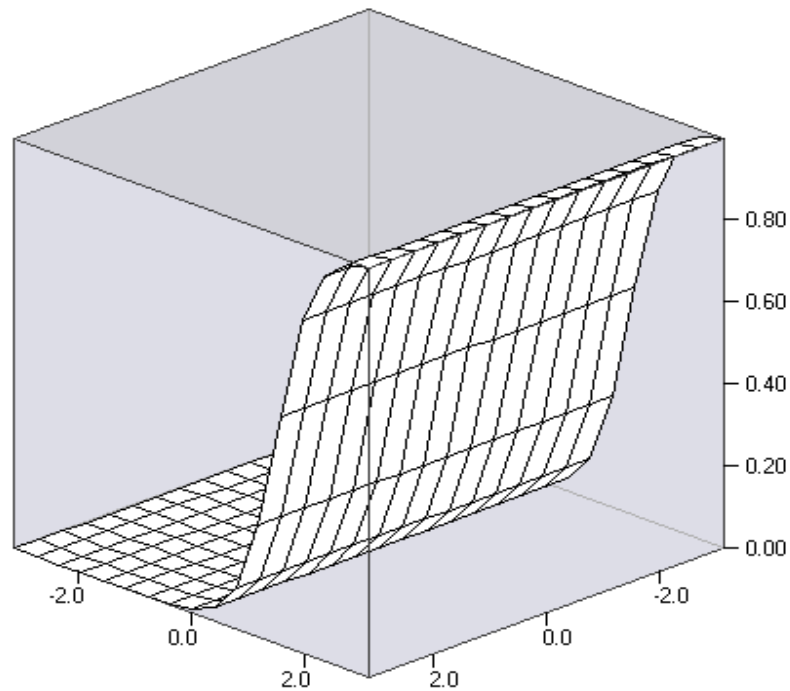


Figure 3.52: Une vue 3-D de la fonction logistique asymétrique  $G(Y_t; \gamma = 3.38, c = 1.5, \sigma_{Y_t} = 1.10)$

### Exemple des séries temporelles générées par TVSTAR

pour  $c = -1.5$ ,  $\gamma = 3.38$  et  $\sigma = 1.10$

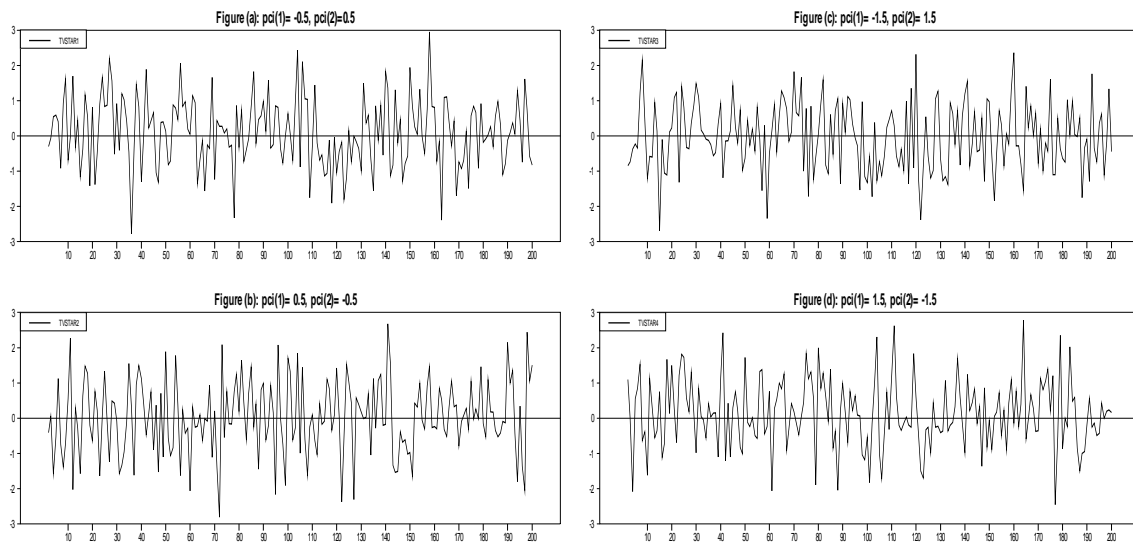


Figure 3.53: Exemple des séries générées par TVSTAR

## Distributions marginales bivariées générées par TVSTAR

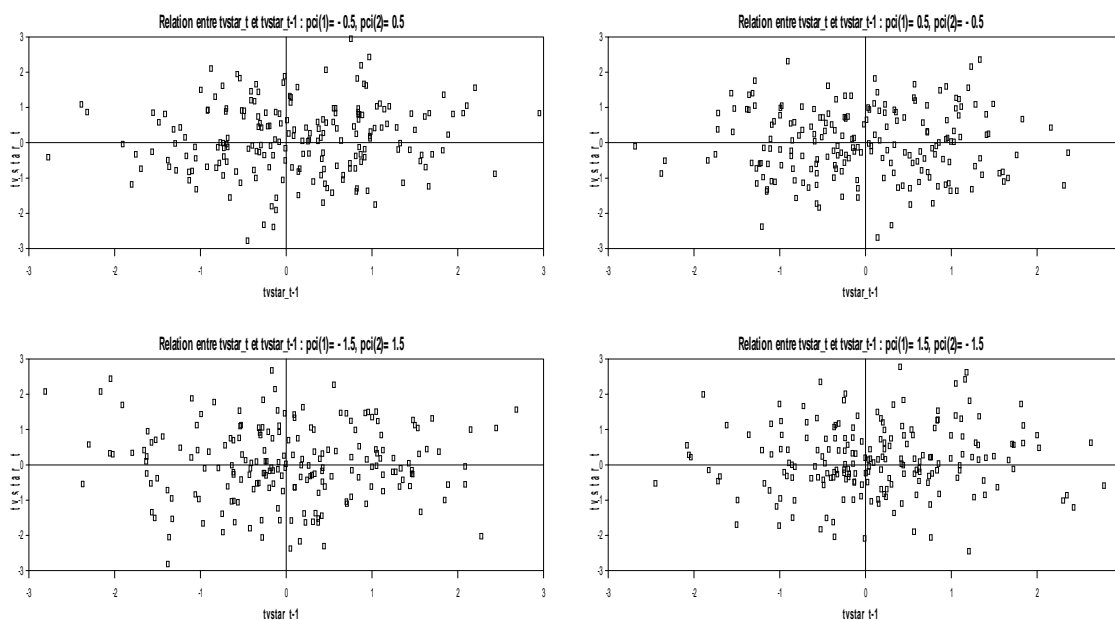
pour  $c = -1.5$ ,  $\gamma = 3.38$  et  $\sigma = 1.10$ 

Figure 3.54: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par TVSTAR

Nous constatons, à partir de la figure (3.54), des distributions marginales bivariées que le processus de transition TVSTAR, générateur de ces données, n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages des points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.

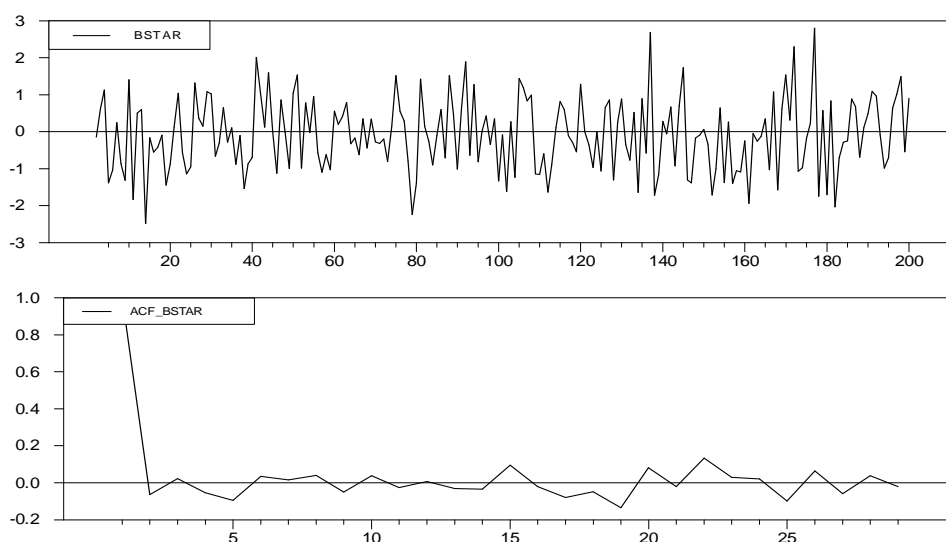
### 3.1.3.9. Fonction de transition BSTAR

Une innovation guidée par Eirtheim et Teräsvirta (1996), autorise l'utilisation du processus BSTAR « *Bi-parameter Smooth Transition AutoRegressive* », donné par sa fonction de transition :

$$G(Y_{t-d}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) = \frac{\exp\{-\gamma_1(Y_{t-d} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-d} - c_2)\}}{1 + \exp\{-\gamma_1(Y_{t-d} - c_1)\} + \exp\{\gamma_2(Y_{t-d} - c_2)\}}$$

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, c_1 < c_2$$

Comme le montre la figure (3.55), celle-ci induit une transition rapide des dynamiques asymétriques du régime le moins élevé, vers le régime intermédiaire et du régime intermédiaire, vers le régime le plus élevé. De ce fait, le modèle BSTAR présente une extension naturelle du processus QLSTAR, qui autorise de sa part, une transition asymétrique, similaire à celle d'un processus AESTAR. Ainsi le processus BSTAR a comme avantage de permettre la résolution du problème d'identification rencontré, lorsque le paramètre de transition, dans un processus ALSTAR est large. Une simulation simultanée du processus BSTAR et de sa fonction d'autocorrélation est présentée sur la figure (3.55).



**Figure 3.55: Simulation d'un modèle BSTAR**

La figure (3.56), montre que si les deux paramètres de transition sont égaux ( $\gamma_1 = \gamma_2$ ), alors la fonction de transition du modèle BSTAR est approximée par une fonction de transition du modèle QLSTAR. La fonction de transition atteint sa valeur minimale dans l'intervalle  $[0, 10]$ .

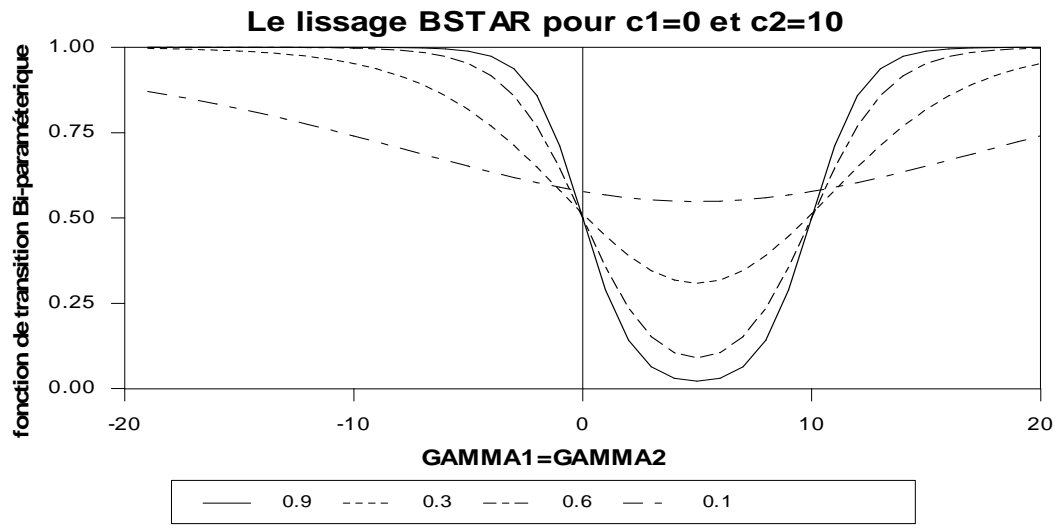


Figure 3.56: La fonction de transition bi-paramétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$

Comme l'illustre la figure (3.57), les deux paramètres de transition  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  localisent l'asymétrie longitudinale de la fonction de transition. Nous constatons que si  $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \pm\infty$ , alors  $G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) \rightarrow 0$ , pour  $Y_{t-1} \in [c_1, c_2]$  et  $G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) \rightarrow 1$ , sinon.

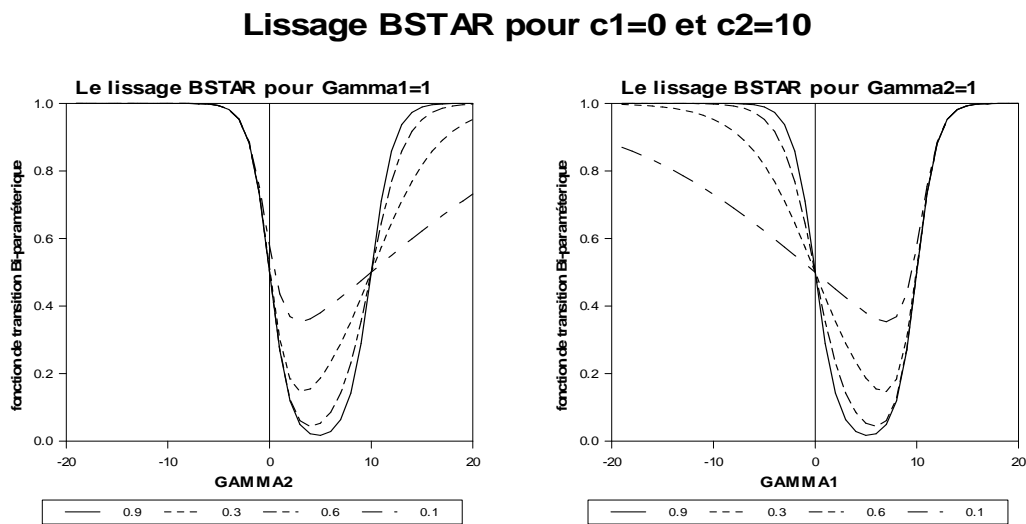


Figure 3.57: La fonction de transition bi-paramétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 \neq \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$

L'examen graphique de la figure (3.58), montre que  $G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2)$  atteint sa haute limite, pour les valeurs de  $c_1 = c_2$  et  $\gamma_1 = \gamma_2$ . En particulier, si  $Y_{t-1} \rightarrow \pm\infty$ , alors  $G(Y_{t-1}; \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2) \rightarrow 1$  et la fonction de transition atteint sa valeur minimale dans l'intervalle  $[0, 2/3]$ .

### Lissage BSTAR pour c1=0 et c2=10

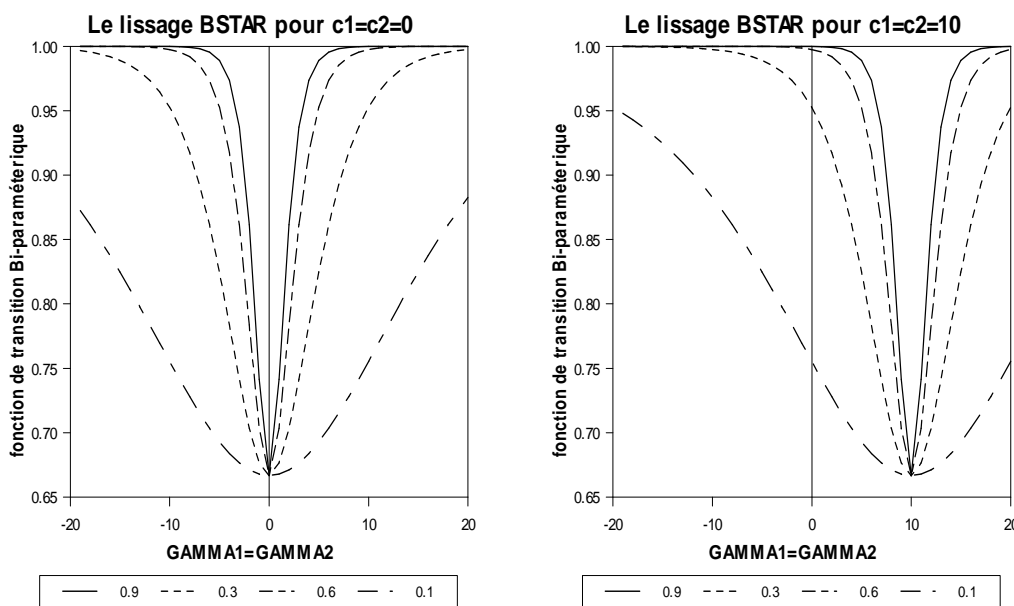


Figure 3.58: La fonction de transition bi-paramétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = \gamma_2, c_1 = 0, c_2 = 10)$

La figure (3.59), montre que le profil de la fonction de transition, fonction bi-paramétrique peut prendre la forme d'un S.

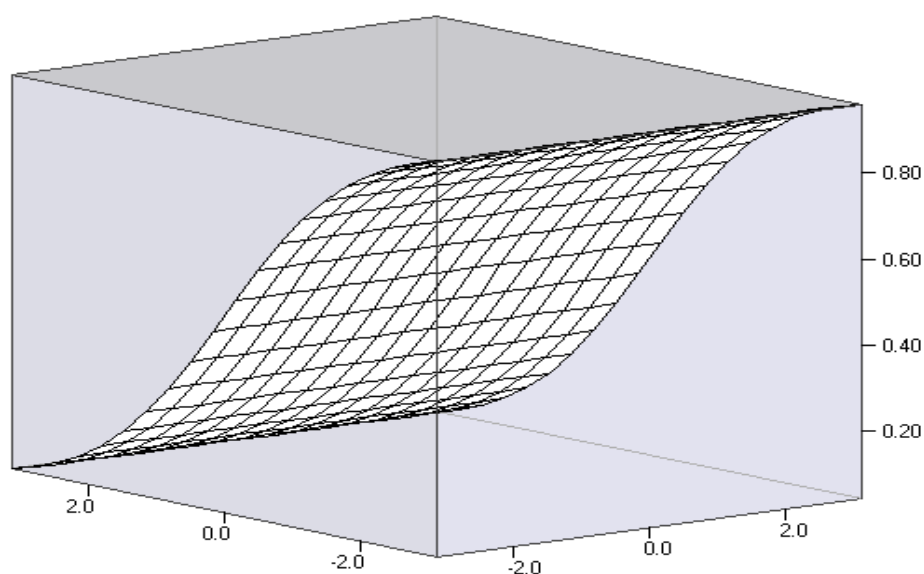


Figure 3.59: Une vue 3-D de la fonction bi-paramétrique  $G(Y_{t-1}; \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 10)$

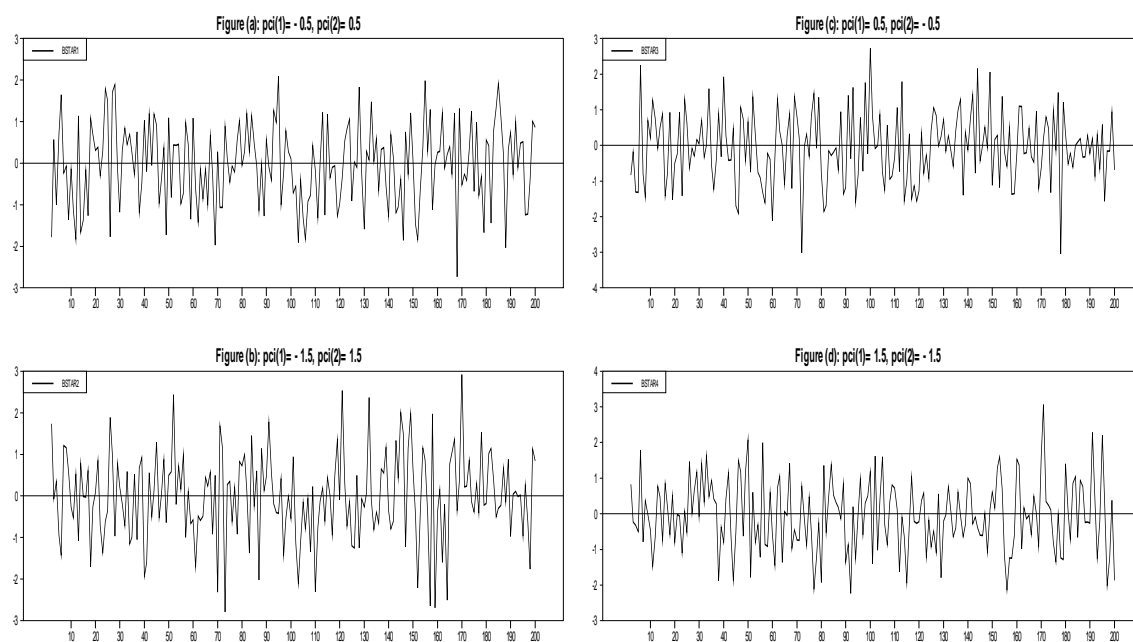
L'estimation par la technique des moindres carrés non-linéaires, du processus BSTAR, ainsi simulé, est portée sur le tableau (3.12).

<b>Tableau 3.12: Estimation du modèle BSTAR par NLS</b>				
Nonlinear Least Squares - Estimation by Gauss-Newton				
Convergence in 2 Iterations. Final criterion was 0.0000000 < 0.0000100				
Dependent Variable BSTAR				
Usable Observations	198	Degrees of Freedom	194	
Total Observations	200	Skipped/Missing	2	
Centered R**2	0.017968	R Bar **2	0.002782	
Uncentered R**2	0.021256	T x R**2	4.209	
Mean of Dependent Variable	0.0636297234			
Std Error of Dependent Variable	1.1006262489			
Standard Error of Estimate	1.0990941841			
Sum of Squared Residuals	234.35355694			
Regression F(3,194)	1.1832			
Significance Level of F	0.31733587			
Durbin-Watson Statistic	2.000366			
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. A0	-1.266022566	1.308410633	-0.96760	0.33444720
2. A1	-0.564643097	0.505557382	-1.11687	0.26543021
3. B0	1.477532219	1.327620056	1.11292	0.26712076
4. B1	-0.749031296	0.584172497	-1.28221	0.20129937

La figure (3.60), montre quelques exemples de courbes de séries temporelles, générées par divers types de ce processus BSTAR.

### Exemple des séries temporelles générées par BSTAR

*pour  $c_1=0$   $c_2=10$   $\gamma_1=1$  et  $\gamma_2=1$*

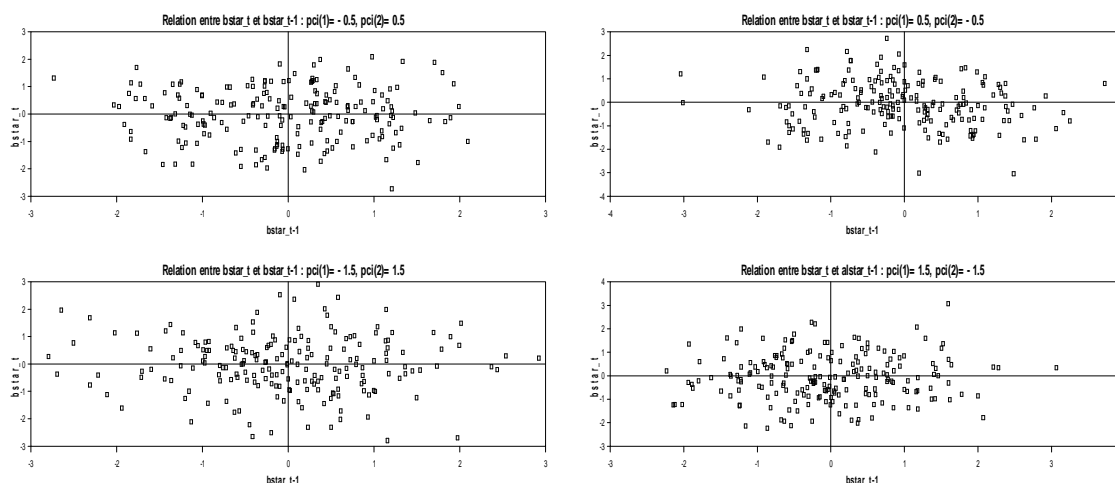


**Figure 3.60: Exemple des séries générées par BSTAR**

Nous constatons, à partir de la figure (3.61), que le processus de transition fonction bi-paramétrique, générateur de ces données, n'est pas gaussien. Du fait que les dispersions des nuages de points n'ont pas la forme d'un ellipsoïde régulier, c'est, donc, une autre preuve qui témoigne de la non-linéarité de ce type de processus.



## Distributions marginales bivariées générées par BSTAR

pour  $c_1=0$   $c_2=10$   $\gamma_1=1$  et  $\gamma_2=1$ 

**Figure 3.61: L'effet de lissage sur des distributions marginales bivariées générées par BSTAR**

En conclusion, l'analyse des propriétés dynamiques de ces processus de transition, semble intéressante dans notre contexte de modélisation STAR dès lors qu'elle permet d'identifier non seulement la dynamique endogène des structures lors d'une transition souple d'un régime à un autre, mais aussi de spécifier la nature d'ajustement symétrique ou asymétrique des fluctuations du cycle endogène par rapport à son niveau d'équilibre dynamique. Ceci, permet de mettre en évidence la présence de deux principaux ingrédients, qui caractérisent ces changements d'état : la transition de phase et la divergence de la longueur d'interaction. Mais, l'élément crucial le plus important qui explique ces transitions critiques, c'est que la structure globale, qui se forme elle-même, par une émergente auto-organisation dans la transition de phase, lors du fonctionnement du processus de transition, est entièrement enracinée dans les dynamismes locaux et vice-versa. En particulier, ceci veut dire que la situation locale du dynamisme dépend du global, par l'émergence d'une structure de cohérence, très sensible aux variations des propriétés qualitatives du paramètre critique. Cette nouvelle approche a, non seulement, montré que le désordre source de complexité d'un processus dynamique non-linéaire, en économétrie de série temporelle, pouvait n'être qu'apparent et qu'un ordre chaotique enracinait dans les comportements des

processus économétriques non-linéaires, que nous croyions jusqu'à présent complètement stochastique, mais aussi que, paradoxalement, des causes déterminées pouvaient engendrer des effets imprévisibles. C'est pourquoi Kauffman (1995) et Solé et Goodwin (2000), ont posé les principales hypothèses suivantes, fondant la théorie de l'émergence de formes auto-organisées relativement stables, en présence de transitions critiques :

- La présence des états ou régimes stables multiples ;
- La transition de l'un à l'autre de ces états est très sensible aux modifications infinitésimales, du paramètre de transition (paramètre de contrôle) ;
- La mise en présence d'une structure spatio-temporelle cohérente dans le dynamisme du processus de transition, à l'aide de l'analyse des récurrences non-linéaires ;
- La présence des cascades de bifurcations, qui ont pour abscisses des valeurs bien déterminées des paramètres de contrôle (valeurs critiques) ; l'apparition de ces structures de cohérence se manifeste avec précision, en parcourant ces valeurs exactes, et seulement dans ces cas là ;
- La moindre perturbation peut engendrer le passage d'un seuil critique à un autre, c'est à cause de la sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire dans des situations proprement chaotiques généralement imprévisibles, où les attracteurs étranges se forment et disparaissent dynamiquement.

Selon ces auteurs, ces hypothèses constituent des soubassements nécessaires à l'émergence de la théorie de cycle endogène, où règne le principe de changement par recompositions des invariances. D'un autre côté, contrairement au modèle à changements de régimes markoviens, où la transition entre les régimes est gouvernée par un mécanisme probabiliste exogène et s'effectue, à partir d'une variable d'état inobservable, la modélisation STAR assure les changements de régimes endogènes, grâce aux mécanismes déterministes de transitions, qui dépendent de la variable de transition observable et retardée pour éviter des problèmes de simultanéité. Mais, la difficulté majeure de cette modélisation porte, donc, tant sur le choix de la fonction de transition la plus appropriée, que sur le choix de la variable de transition et plus précisément sur la caractérisation, tant qualitative que quantitative, du paramètre

de transition qui conditionne l'apparition des cycles endogènes. Ainsi, une mauvaise sélection, de l'une ou de l'autre, va absolument engendrer une erreur de spécification, qui peut avoir en conséquence de fortes implications, surtout en matière de prévision. De même, la mauvaise caractérisation, que ce soit qualitative ou quantitative du paramètre de transition, cause sans doute des erreurs d'arrondi, ce qui va certainement engendrer une erreur de mesure, qui peut, donc, avoir de graves impacts sur la caractérisation des cycles endogènes et surtout sur leurs prévisions. Pour ces raisons, cette étape d'analyse du dynamisme des processus de transitions endogènes fournit une nouvelle piste intéressante pour les analyses de la complexité engendrée, par les spécifications et la prévision non-linéaire, à l'aide des modèles STAR.

Selon Teräsvirta (1994a), la procédure de caractérisation d'un processus générateur de données en modélisation STAR comporte trois étapes principales : la spécification du modèle, son estimation et son évaluation. Mais, il faut noter que l'analyse qui applique cette procédure n'est avantageuse que lorsqu'elle atteint son objectif et sera complétée d'une analyse prévisionnelle. Dans cette section, nous allons commencer par présenter les trois premières étapes d'estimation, de spécification et de validation, puis nous traitons, séparément, le reste des étapes de construction d'un modèle à seuil de prévision ainsi que de l'évaluation de ses performances prédictives, dans d'autres sections qui suivent.

## 3.2. Estimation, spécification et validation d'un modèle STAR

### 3.2.1. L'estimation d'un modèle STAR

#### 3.2.1.1. Estimation du modèle LSTAR/ESTAR

Étant donné une formalisation contenant une fonction de transition  $G(s_t; \gamma, c)$  de type logistique (exponentielle), qui dépend de la variable endogène retardée d'ordre un notée  $s_t = Y_{t-1}$ , le modèle STAR d'ordre  $p$  dévient un modèle d'ajustement non-linéaire de type LSTAR (ESTAR) de même ordre. Ici, nous réécrivons le modèle LSTAR (ESTAR) d'ordre  $p$  :

$$Y_t = (\psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(1)} Y_{t-i}) [1 - G(s_t; \gamma, c)] + \left( \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \psi_i^{(2)} Y_{t-i} \right) G(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t,$$

$$\gamma > 0, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $G(\cdot) \sim LSTAR(ESTAR)$  et  $\Psi = (\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \gamma, c)'$  désigne le vecteur des paramètres à estimer. Pour estimer ces paramètres inconnus, il est possible de procéder par la méthode des moindres carrés non-linéaires NLS (*NonLinear Squares*), ou encore par la méthode de maximum de vraisemblance ML (*Maximum Likelihood*), sous l'hypothèse de la normalité du terme d'erreur. Selon Leon et Najarian (2003b), l'estimation du modèle LSTAR (ESTAR) par NLS, consiste à déterminer le vecteur des paramètres estimés  $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}^{(1)}, \hat{\Psi}^{(2)}, \hat{\gamma}, \hat{c})'$  donné par :

$$\hat{\Psi} = \underset{\Psi}{\operatorname{arg\,min}} Q_T(\Psi)$$

où  $Q_T(\Psi) = \sum_{t=1}^T (Y_t - S(Y_t; \Psi))^2$  et  $S(Y_t; \Psi)$  est le *skeleton* du modèle, définit par :

$$S(Y_t; \Psi) = \Psi^{(1)'} Y_t [1 - G(s_t; \gamma, c)] + \Psi^{(2)'} Y_t G(s_t; \gamma, c)$$

Selon Van Dijk, Teräsvirta et Franses (2002), sous l'hypothèse de normalité des résidus  $\varepsilon_t$  du modèle STAR, la technique d'estimation, NLS est équivalente à la méthode d'estimation ML. Si l'hypothèse de normalité des résidus est rejetée, alors la technique d'estimation NLS est équivalente à la technique d'estimation quasi-maximum de vraisemblance QML et les estimateurs ainsi obtenus sont efficaces et asymptotiquement normaux. En revanche, le respect de certaines conditions de régularité, qui sont largement discutées par White et Domowitz (1984), Gallant (1987) et Pötscher et Prucha (1997), rend les paramètres estimés par NLS consistants, asymptotiquement et normalement distribués. Nous pouvons écrire :

$$\sqrt{T}(\hat{\Psi} - \Psi_0) \sim N(0, \Sigma)$$

où  $\Psi_0$  désigne le vecteur des valeurs réelles des paramètres et  $\Sigma$  est la matrice asymptotique des variances-covariances de  $\hat{\Psi}$ . La matrice  $\Sigma$  est donnée par l'expression suivante :

$$\hat{H}_T^{-1} \hat{R}_T \hat{H}_T^{-1}$$

où  $\hat{H}_T$  est la matrice hessienne évaluée en  $\hat{\Psi}$  par :

$$\hat{H}_T = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \nabla^2 q_t(\hat{\Psi})$$

avec  $q_t(\hat{\Psi}) = (Y_t - S(Y_t; \hat{\Psi}))^2$ , et  $\hat{R}_T$  est la matrice du gradient évaluée en  $\hat{\Psi}$  par :

$$\hat{R}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \nabla q_t(\hat{\Psi}) \nabla q_t(\hat{\Psi})'$$

or  $\nabla S(Y_t; \hat{\Psi}) = \partial S(Y_t; \hat{\Psi}) / \partial \Psi$ , alors, après développement, nous pouvons déduire que :

$$\hat{H}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\nabla S(Y_t; \hat{\Psi}) \nabla S(Y_t; \hat{\Psi})' - \nabla^2 S(Y_t; \hat{\Psi}) \hat{\varepsilon}_t)$$

et

$$\hat{R}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 \nabla S(Y_t; \hat{\Psi}) \nabla S(Y_t; \hat{\Psi})'$$

La performance de l'estimation peut être établie en utilisant des procédures conventionnelles assurées par des techniques d'optimisations non-linéaires, voire par exemple les algorithmes donnés par Quandt (1983), Hamilton (1994) et Hendry (1995).

D'un autre côté, si nous considérons que les estimations des paramètres  $\Psi$  obtenus par OLS (*Ordinary Least Squares*) sont des bonnes valeurs initiales pour les paramètres similaires du modèle LSTAR (ESTAR), alors quelles sont les meilleures valeurs initiales (nécessaires pour estimer toutes les fonctions de maximisation), pour  $\gamma$  et  $c$ ? Une solution possible, acceptée par nombreux chercheurs, est d'estimer le modèle STAR par MCO et de trouver les valeurs de  $\gamma$  et de  $c$ , qui minimisent la variance résiduelle,  $\hat{\sigma}^2(\gamma, c)$ , de ce modèle<sup>226</sup>. Maintenant, les valeurs initiales étant connues, nous pouvons estimer le modèle LSTAR (ESTAR) par NLS ou par ML, en utilisant un algorithme d'optimisation numérique sous Rats.

<sup>226</sup> Leybourne, Newbold et Vougas (1998), ont simplifié le problème d'estimation, en se concentrant sur la réduction de la dimension de l'estimation NLS suite à la simple transformation de la fonction  $Q_T(\Psi)$  qui dépend de  $\Psi^{(1)}$  et  $\Psi^{(2)}$  par l'expression  $Q_T(\gamma, c) = \sum_{t=1}^T (Y_t - \Psi(\gamma, c)' Y_t(\gamma, c))^2$  qui dépend uniquement des paramètres  $\gamma$  et  $c$ .

### 3.2.1.2. Détermination du nombre de régimes

Dans le cadre des modèles à seuils connus, la transition soudaine et rapide d'un état stable à un autre dépendant d'un paramètre de seuil, la caractérisation de deux comportements différents s'appuie en générale sur l'une de deux approches distinctes. Selon Tsay (1989), la détection du seuil se réalise au moyen d'une analyse graphique des résidus récurrents et de leurs statistiques récurrentes en fonction de la variable de transition ordonnée, choisie par référence à la théorie économique. Par contre, la méthodologie de Hansen (1996a), s'appuie sur l'utilisation de la méthode séquentielle des moindres carrés par régime pour estimer le seuil.

Or, dans la littérature de la modélisation STAR, habituellement, connu par son mécanisme endogène de transition d'un régime à l'autre avec une fonction de transition lisse dépendant d'un paramètre qui commande la vitesse de transition entre les régimes ; de la variable expliquée et d'un seuil, le choix d'un paramètre de seuil pour lequel il y a changement de régime et par la suite la détermination du nombre de régimes définissant les divers états de la dynamique du même processus, nécessite d'appliquer une bonne méthode d'estimation. Dans notre cas, ceci revient à appliquer la démarche de Strikholm et Teräsvirta (2005), définie par l'étape qui s'appuie sur la détermination du nombre de régimes optimaux, pour décrire les différents états possibles décrivant la dynamique endogène de nos données. Le diagnostic de cette procédure est similaire à celui qui consiste à étudier le problème du test de linéarité. Plus précisément, pour choisir entre deux et trois régimes, le test approprié est celui de Fisher qui revient à vérifier l'hypothèse :

$$\begin{cases} H_0 : \psi_2 = 0 \\ H_1 : \psi_2 \neq 0 \end{cases}$$

Ce test est basé sur la statistique  $F_2$  donnée par :

$$F_2 = \frac{SCR(H_0)_{\hat{c}_1} - SCR(H_1)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2)}}{\hat{\sigma}_2^2} \text{ où } \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{N(T-1)} SCR(H_2)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2)}$$

avec  $SCR(H_2)$  est la somme des carrés des résidus du modèle à trois régimes, lorsque les deux seuils ont été déterminés. L'hypothèse d'un seul seuil est rejetée en faveur d'au moins deux, si la

valeur de la statistique  $F_2$  dépasse les valeurs critiques simulées par bootsrap. Si l'hypothèse alternative de trois régimes est acceptée, il est nécessaire de tester sous l'hypothèse nulle la présence de deux seuils contre l'hypothèse alternative de la présence d'au moins trois. Ceci revient à appliquer de nouveau, le test de Fisher pour vérifier :

$$\begin{cases} H_0 : \psi_3 = 0 \\ H_1 : \psi_3 \neq 0 \end{cases}$$

La statistique correspondante se base cette fois sur la statistique  $F_3$  donnée par l'expression suivante :

$$F_3 = \frac{SCR(H_2)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2)} - SCR(H_3)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)}}{\hat{\sigma}_3^2}$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{N(T-1)} SCR(H_3)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)}$$

avec  $SCR(H_3)_{(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)}$  est la somme des carrés des résidus du modèle à quatre régimes. Si l'hypothèse alternative est acceptée, la spécification doit contenir, au minimum, quatre régimes. Pour savoir s'il en existe plus, la même méthodologie doit être étendue. Le nombre de régimes est déterminé, quand l'hypothèse nulle n'est pas rejetée.

Récemment, González et Teräsvirta (2008), ont proposé une méthode plus pratique pour déterminer le nombre de fonction de transition, qu'il faut utiliser dans un modèle STAR. Cette nouvelle procédure, nommée *QuickShift*, est analogue à celle proposée par White (2006), dite *QuickNet* et qui se base sur la technique d'estimation artificielle par les réseaux de neurones. González et Teräsvirta (2008), ont défini un modèle non-linéaire SM-AR d'ordre  $p$ , stationnaire en tendance déterministe avec rupture en moyenne SM (*Shift Mean*), comme suit :

$$Y_t = \delta(t) + \sum_{j=1}^p (\theta_j Y_{t-j}) + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\delta(t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i G(t/T; \gamma_i, c_i)$ ,  $(\delta_i)_{i=1, \dots, q}$  se sont les paramètres,  $G(\cdot)$  est une fonction de transition (logistique pour le cas établi par les auteurs),  $\gamma_i$  est un paramètre de transition, tel que pour tout  $i = 1, \dots, q$ , nous avons  $\gamma_i > 0$  et  $c_i$  est le paramètre de seuil compris entre zéro et un et vérifiant  $c_1 < \dots < c_q$ . Selon González et Teräsvirta (2008), la méthodologie *QuickShift* est basée sur les quatre étapes suivantes :

- 1) Estimer le modèle avec  $\delta(t) = \delta_0$  et récupérer les résidus  $\hat{\varepsilon}_{t,0}$  ;
- 2) Après avoir sélectionné  $q-1$  transitions,  $q > 1$ , choisir la fonction de transition, telle que sa taille est corrélée avec  $\hat{\varepsilon}_{t,q-1}$  est déterminée par :

$$(\hat{\gamma}, \hat{c})_q = \arg \max_{(\gamma_s, c_s) \in \Xi_x} \left\{ \left( r \left( G(t/T; \gamma_s, c_s), \hat{\varepsilon}_{q-1,t} \right) \right)^2 \right\}$$

où  $r(\cdot)$  est l'échantillon de corrélation entre  $G(t/T, \gamma_s, c_s)$  et

$$\hat{\varepsilon}_{q-1,t} = Y_t - \hat{\delta}(0) - \sum_{k=1}^{q-1} \hat{\delta}_k G(t/T, \hat{\gamma}_k, \hat{c}_k) - \sum_{k=1}^p \hat{\theta}_k Y_{t-k} ;$$

- 3) Obtenir par les MCO, les estimateurs  $(\hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_q, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q)$  de  $(\hat{\gamma}, \hat{c})_q$  puis récupérer  $\hat{\varepsilon}_{t,q}$  et calculer le BIC (q) ;
- 4) Pour  $q > \bar{q}$  choisir  $\hat{q}$  tel que  $\hat{q} = \arg \max_{q \in (1, \dots, \bar{q}_s)} \{ BIC(q) \}$

À titre indicatif, il convient de noter que Becker, Enders et Hurn (2006), ont proposé, de leur part, une méthode tout à fait similaire, à celle proposée par González et Teräsvirta (2008), mais qui se distingue de celle-ci, par le fait qu'elle est basée sur l'approche fréquentielle et plus exactement sur les transformations de fourier et sera fondée sur la spécification suivante :

$$\delta(t) = \delta_0 + \sum_{j=1}^k \left\{ \delta_{s_j} \cos(2\pi s_j t/T) + \delta_{s_j} \sin(2\pi s_j t/T) \right\}$$

où  $2\pi s_j t/T$  se sont les fréquences de fourier sélectionnées pour tout  $j = 1, \dots, k$  et  $k \leq T/2$ .



---

### 3.2.2. La spécification du modèle STAR

Si la série de données étudiées est stationnaire, alors nous pourrions appliquer la procédure de spécification d'un modèle à seuil avec transition lisse. Cette stratégie nécessite le suivi d'un enchaînement de trois étapes principales, afin d'atteindre l'identification de la structure de modèle le plus approprié, d'être qualifiée comme générateur de données étudiées. Tout d'abord, il s'agit d'estimer les données par MCO, avec un modèle autorégressif linéaire et déterminer les régresseurs significatifs, c'est-à-dire choisir les  $k$  variables explicatives et les  $p$  retards de l'endogène. Notons que la sélection des régresseurs est assurée sur la base du test de significativité du retard le plus élevé, présent dans la régression et/ou de plusieurs critères d'information AIC, BIC et HQ donné par Hannan et Quinn (1979). En plus, l'ordre  $p$  de retard identifié doit tenir compte de la stationnarité des résidus correspondants, du fait qu'ils doivent suivre un processus de bruit blanc. Car les tests de linéarité qui seront utilisés par la suite dans cette procédure empirique sont souvent très sensibles de l'autocorrelation des résidus. Pour cette raison, il est indispensable avant tout de tester l'autocorrelation résiduelle en utilisant la statistique de Ljung-Box. Ensuite, après avoir identifié la structure autorégressive du modèle de référence, nous passons aux tests de linéarité pour les différentes variables de transitions possibles, pour différentes valeurs du paramètre de délai  $d$  et déterminer la valeur de  $d$ , lorsque le test est rejeté. Finalement, il faut passer aux procédures de spécifications d'un processus de transition approprié pour le modèle STAR. Dans le cadre de notre travail de recherche, il s'agit de choisir entre deux types de processus: ESTAR et LSTAR.

Or, en ce qui concerne la deuxième étape dans la procédure de spécification du modèle STAR, les tests généraux de linéarité peuvent être abordés de deux possibilités. La première, fait l'objet d'un exposé bien détaillé, prochainement et qui consiste dans la construction de certains tests de linéarité, contre une alternative non exactement spécifiée. Alors que la seconde classe, fait l'objet d'un développement qui est mené au niveau de la présente section, porte sur les tests de linéarité contre une alternative bien spécifique. Dans cette seconde orientation, l'avantage c'est que nous pourrions connaître le modèle à choisir, même si l'hypothèse de linéarité est

rejetée. Mais, cette classe présente une majeure limite, qui réside dans la présence éventuelle de paramètres de nuisance, non identifiables, sous l'hypothèse nulle de linéarité. Il s'agit notamment du paramètre de délai  $d$  de la variable de transition dont le choix est guidé par la théorie économique, ainsi que le paramètre de seuil  $c$ . Pour faire face à ce problème, Luukkonen et Saikkonen et Teräsvirta (1988), ont suggéré la détermination de ces deux paramètres, au fur et à mesure que nous élaborons le test de linéarité, contre l'alternative donnée par le modèle à seuil. Cette solution consiste à remplacer la méthode classique d'estimation, à l'aide du maximum de vraisemblance, par une nouvelle stratégie, basée sur une approximation du vrai modèle, sous l'hypothèse alternative de non-linéarité, par un développement limité au sens de Taylor d'ordre  $k$  bien déterminé.

### Définition 3.4

Considérons le modèle non-linéaire suivant :

$$Y_t = f(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-d}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

avec  $(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-d})' = (Y_t, \dots, Y_{pt}, Y_{t-d}, \dots, Y_{qt-d})'$  et  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Nous appelons un développement de Taylor à l'ordre  $k$  de  $f$ , la série définie par :

$$\begin{aligned} f(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-d}; \Psi) = & \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i Y_{it} + \sum_{i=1}^q \lambda_i Y_{it-d} + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p \beta_{i_1 i_2} Y_{i_1 t} Y_{i_2 t} + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=i_1}^q \lambda_{i_1 i_2} Y_{i_1 t-d} Y_{i_2 t-d} \\ & + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^q \delta_{i_1 i_2} Y_{i_1 t} Y_{i_2 t-d} + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p \sum_{i_3=i_2}^p \beta_{i_1 i_2 i_3} Y_{i_1 t} Y_{i_2 t} Y_{i_3 t} + \dots + \\ & + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=i_1}^q \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^q \lambda_{i_1 \dots i_k} Y_{i_1 t-d} Y_{i_2 t-d} \dots Y_{i_{k-1} t-d} Y_{i_k t-d} + R_k(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-d}) \end{aligned}$$

Considérons par exemple le modèle STAR suivant :

$$\begin{aligned} Y_t = & \Psi_1' \tilde{Y}_t G(Y_{t-d}; \gamma, c) + \Psi_2' \tilde{Y}_t (1 - G(Y_{t-d}; \gamma, c)) + \varepsilon_t, \\ & \gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

avec  $\tilde{Y}_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$  et  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Le test de linéarité consiste à tester sous l'hypothèse nulle de linéarité, si les paramètres de régressions des deux régimes sont égaux, contre l'hypothèse alternative de non-linéarité, selon

laquelle, il existe au moins deux paramètres de régression, appartenant aux régimes différents et qui ne sont pas égaux. Ce test est, donc, schématisé comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \Psi_1 = \Psi_2 \\ H_1 : \exists \text{ au moins } i \in \{0, \dots, p\} \text{ tel que } \psi_i^{(1)} \neq \psi_i^{(2)} \end{cases}$$

Les résultats empiriques des tests de linéarité, menés par Teräsvirta et Anderson (1992), dans leur étude sur les séries des indices de la production industrielle pour 13 pays, rejettent la linéarité pour la plupart de ces séries et soutiennent l'hypothèse d'un processus de retour à la moyenne non-linéaire. Dans ce cadre, si l'hypothèse de linéarité est rejetée, alors il est nécessaire de suivre une méthodologie bien adéquate, capable d'être qualifiée comme l'élément distinctif de référence, qui permet de confirmer une typologie du processus à changement de régimes. À l'évidence, une telle méthodologie est basée par l'ensemble des hypothèses, faites sur le mécanisme qui gouverne le changement de structure du modèle. Cependant, comme nous avons remarqué que, ni le paramètre de délai du variable de transition, ni le paramètre de seuil, ne sont identifiables sous l'hypothèse nulle et par conséquent, la connaissance exacte de ces paramètres pour le modèle TAR, reste encore une tâche à réaliser, au niveau de cette étape du test de linéarité. Ceci est argumenté par l'idée qui stipule que, plus la linéarité est rejetée, plus le modèle à seuil est convenablement spécifié.

### 3.2.2.1. Test de spécification d'un processus de transition LSTAR

Considérons le modèle LSTAR suivant :

$$Y_t = \Psi_0^{(1)} + \Psi^{(1)'} \tilde{Y}_t + (\Psi_0^{(2)} + \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t) \times [G(Y_{t-d}; \gamma, c) - 1/2] + \varepsilon_t, \\ \gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\Psi_0^{(1)} = \psi_1^{(0)}$ ,  $\Psi^{(1)'} = (\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_p^{(1)})'$ ,  $\tilde{Y}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$ ,  $\Psi_0^{(2)} = (\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)})$ ,  
et  $\Psi^{(2)'} = ((\psi_1^{(2)} - \psi_1^{(1)}), \dots, (\psi_p^{(2)} - \psi_p^{(1)}))'$ .

Dans ce cas, nous supposons que la fonction de transition  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$  est une fonction logistique. Perraudin (2002), stipule que la soustraction de 1/2 de la fonction de transition est

nécessaire pour la construction du test de linéarité, ceci afin que  $G(Y_{t-d}; \gamma = 0, c) = 0$ . Avec cette spécification, nous remarquons que, d'une part, sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \gamma = 0$ , le modèle est linéaire avec les coefficients  $\Psi_0^{(1)}$  et  $\Psi^{(1)}$ , alors que le reste des paramètres du modèle original ne sont pas identifiables et ils peuvent prendre n'importe quelles valeurs, sans modifier celle de la log-vraisemblance. D'autre part, la linéarité est également vérifiée sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \Psi_0^{(2)} = \Psi^{(2)} = 0$ . D'où, l'arbitrage du choix pour la définition de l'hypothèse nulle de linéarité, conduit à une non-identifiabilité des paramètres sous  $H_0$  : c'est le problème connu, en statistique, sous le nom du « *Test en présence de paramètres de nuisance* ». Ce problème a été étudié, uniquement sous l'hypothèse alternative, par Davies (1977) et Davies (1987), mais une solution générale n'est fournie que dans le cadre du test basé sur la statistique du multiplicateur de Lagrange LM par Hansen (1997a-b). Cette solution générale, nécessite la construction de la statistique du test LM, exprimée en fonction des paramètres de nuisance, supposés fixes, et de maximiser, par la suite, la statistique par rapport à ces paramètres. Toutefois, une difficulté qui se pose, est que la distribution d'un test de ce type, n'est plus connue avec exactitude et devra être, donc simulée, par recours à la technique de bootstrap.

En travaillant dans cette optique, Teräsvirta (1994b), a proposé de tester la linéarité, sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \gamma = 0$  contre l'alternative fournie par le modèle LSTAR. Or, comme nous l'avons déjà signalé, les paramètres  $\Psi_0^{(2)}, \Psi^{(2)}, d$  et  $c$  ne sont pas identifiables sous  $H_0$ . Pour faire face à ce problème, Teräsvirta (1994b), a adopté une méthode de résolution très similaire à celle initiée par Davies (1977). Notons  $\pi = (\pi_1', \pi_2')$  où  $\pi_1 = (\Psi_0^{(1)}, \Psi^{(1)})'$  et  $\pi_2 = \gamma; (\hat{\pi}_1', 0)'$ , sont les estimateurs de ce vecteur de paramètres, ainsi obtenu sous l'hypothèse nulle ;  $v_t = v(\pi) = ((\partial \varepsilon_t / \partial \pi_1)', (\partial \varepsilon_t / \partial \pi_2)')$  est le vecteur de dérivées des résidus par rapport

aux paramètres et  $\hat{v}_t = (\hat{v}_{1t}, \hat{v}_{2t})'$ , est ce vecteur sous l'hypothèse nulle, alors la statistique de test LM est donné par<sup>227</sup> :

$$LM = \hat{\sigma}^{-2} \left( \sum \hat{\varepsilon}_t \hat{v}_{2t} \right)^2 \left\{ \sum \hat{v}_{2t}^2 - \sum \hat{v}_{2t} \hat{v}_{1t}' \left( \sum \hat{v}_{1t} \hat{v}_{1t}' \right)^{-1} \sum \hat{v}_{1t}' \hat{v}_{2t} \right\} \sim \chi_{(1)}^2$$

où  $\hat{\sigma}^2 = (1/T) \sum \hat{\varepsilon}_t^2$ ,  $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\Psi}_0^{(1)} - \hat{\Psi}^{(1)'} \tilde{Y}_t$ .

Afin de fournir une procédure de test simple à mettre en application, Saikkonen et Luukkonen (1988), ont proposé une nouvelle formulation de la statistique de test LM est donné par :

$$LM = T R^2$$

où  $R^2$  est le coefficient de corrélation, dans la régression de  $\hat{\varepsilon}_t$  sur  $\hat{v}_{1t}'$  et  $\hat{v}_{2t}$ . Pour calculer la statistique LM du test de l'hypothèse  $\gamma = 0$ , contre le modèle LSTAR, nous calculons  $\hat{v}_{1t}'$  et  $\hat{v}_{2t}$ , les dérivées des résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  par rapport aux paramètres  $\Psi_0^{(1)}$ ,  $\Psi^{(1)'}$  et  $\gamma$ , évaluées sous  $H_0$ , sachant que les paramètres de nuisance étant fixés. Nous obtenons les dérivés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \Psi_0^{(1)}} \Big|_{\gamma=0} &= -1, \\ \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \Psi^{(1)'}} \Big|_{\gamma=0} &= -\tilde{Y}_t, \\ \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} &= -(1/4) \left[ \Psi_0^{(2)} (Y_{t-d} - c) - c \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t + \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t Y_{t-d} \right] \end{aligned}$$

où  $\hat{v}_{1t}' = -(1, \tilde{Y}_t')$  et  $\hat{v}_{2t} = \hat{v}_{2t} \left( \underbrace{\Psi_0^{(2)}, \Psi^{(2)'}}_{\Psi}, d, c \right)$  dépend du vecteur de paramètres de nuisance  $\Psi$  tel

que  $\hat{v}_{2t}(\Psi) = -(1/4) \left[ \Psi_0^{(2)} (Y_{t-d} - c) - c \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t + \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t Y_{t-d} \right]$ .

Pratiquement, pour construire ce test, nous devons suivre ces trois étapes :

<sup>227</sup> Voir Saikkonen et Luukkonen (1988) et Goldfrey (1988), pour une description des tests du multiplicateur de Lagrange.

1<sup>ère</sup> étape :

Nous régressons  $Y_t$  sur  $(1, \tilde{Y}_t)$  et nous calculons les résidus estimés  $\hat{\varepsilon}_t$  et la somme des carrés résiduels  $SCR_0 = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ .

2<sup>ème</sup> étape :

Nous effectuons la régression suivante :

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{v}_{1t}' \tilde{\beta}_1 + \hat{v}_{2t}'(\Psi) \tilde{\beta}_2 + v_t$$

où  $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ , et  $\tilde{\beta}_i = (\tilde{\beta}_{i1}, \dots, \tilde{\beta}_{ip+1})_{i \in \{1,2\}}$ . Puis, nous calculons la somme des carrés des erreurs  $SCR(\Psi)$ .

3<sup>ème</sup> étape :

Nous calculons la statistique LM du test de linéarité définie par :

$$LM(\Psi) = T \times \frac{SCR_0 - SCR(\Psi)}{SCR(\Psi)} \stackrel{\text{asy}(H_0)}{\sim} \chi_{(1)}^2$$

où  $T$  est le nombre total des observations. Sous  $H_0 : \tilde{\beta}_2 = 0 (\gamma = 0)$ , cette statistique est asymptotiquement distribuée, selon la loi de  $\chi^2$  à une degré de liberté et dépend du vecteur de paramètres de nuisance  $\Psi$ . Pour cette raison, nous retenons la statistique conservatrice, donnée par Davies (1977), par l'expression :

$$LM_1 = \sup_{\Psi} LM(\Psi) = T \times \frac{SCR_0 - \inf_{\Psi} SCR(\Psi)}{SCR_0}$$

Or, sous  $H_0$ , la distribution de la statistique  $LM_1$  est inconnue et la valeur de cette statistique est difficile à calculer pour tous les paramètres de nuisance. Ceci rend la décision de retenir cette statistique est erronée. Pour faire face à cette limite, Teräsvirta (1994b), montre qu'en organisant les régresseurs selon un ordre spécifique, l'équation précédente peut être réécrite comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{v}_{1t}' \tilde{\beta}_1 + \beta_2 \tilde{Y}_t Y_{t-d} + v_t$$

$v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ ,  $\tilde{\beta}_1' = (\beta_0^{(1)}, \beta_1^{(1)})'$ ,  $\beta_0^{(1)} = \Psi_0^{(1)} - (c/4)\Psi_0^{(2)}$ ,  $\beta_1^{(1)} = \Psi^{(1)} - (c/4)\Psi^{(2)} + (1/4)\Psi_0^{(2)}\eta_d$ ,  $\beta_2 = (1/4)\Psi^{(2)}$  et  $\eta_d$  est le vecteur, pour lequel la d<sup>ième</sup> composante est un et le reste est constitué de zéro. Selon cette nouvelle spécification, en minimisant la somme des carrés des erreurs de la

régression, par rapport à  $\beta_0^{(1)}, \beta_1$  et  $\beta_2$ , nous calculons  $\inf_{\Psi} SCR$ . En plus, nous obtenons sous l'hypothèse de linéarité  $H_0 : \beta_2 = 0$ :

$$LM_1 = \overset{\text{asy}(H_0)}{\sim} \chi_{(m)}^2$$

où  $\beta_2$  est indépendant des  $\Psi_0^{(2)}$  et  $m$  est le nombre de contraintes sous l'hypothèse nulle. Après avoir précisé la distribution de la statistique du test  $LM_1$ , Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) et Teräsvirta (1996b), ont montré que, si la non-linéarité est essentiellement due à  $\Psi_0^{(2)}$ , alors une substitution de la fonction de transition logistique  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$  par un développement de Taylor au voisinage de  $\theta = \gamma(Y_{t-d} - c) = 0$  à l'ordre trois est nécessaire et donne :

$$DT_3 G(\theta) = g_1 \theta + g_3 \theta^3$$

$$\text{où } g_1 = \left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \text{ et } g_3 = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G(\theta)}{\partial \theta^3} \right|_{\theta=0}$$

Après réarrangement des termes, nous aurons le modèle auxiliaire suivant:

$$Y_t = \beta_{10} + \beta_1' \tilde{Y}_t + \beta_2' \tilde{Y}_t Y_{t-d} + \beta_3' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^2 + \beta_4' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^3 + e_t, \\ 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

avec,

$$e_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\beta_{10} = \Psi_0^{(1)} - \Psi_0^{(2)} g_1 \gamma c - \Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3$$

$$\beta_1 = \Psi^{(1)} - \Psi^{(2)} g_1 \gamma c - \Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3 + \Psi_0^{(2)} g_1 \gamma \eta_d + 3\Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3$$

$$\beta_2 = \Psi^{(2)} g_1 \gamma + 3\Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c^2 - 3\Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c \eta_d$$

$$\beta_3 = -3\Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c + \Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 \eta_d$$

$$\beta_4 = \Psi^{(2)} g_3 \gamma^3$$

Ainsi le test de linéarité ( $\gamma = 0$ ) est formulé comme suit :

$$\begin{cases} H_0' : \beta_{2i} = \beta_{3i} = \beta_{4i} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ H_1' : \exists \text{ au moins } i \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \beta_{2i} \neq \beta_{3i} \neq \beta_{4i} \neq 0 \end{cases}$$

où  $m = (k + p)$  est le nombre de régresseurs,  $k$  est le nombre de variables explicatives et  $p$  est le nombre de retards retenus sur la variable endogène. Pratiquement, la construction de ce test consiste à suivre ces trois étapes :

1<sup>ère</sup> étape :

Nous régressons  $Y_t$  sur  $(1, \tilde{Y}_t)$  et nous calculons les résidus estimés  $\hat{\varepsilon}_t$  et la somme des carrés résiduels  $SCR_0 = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ .

2<sup>ème</sup> étape :

Pour chaque valeur de  $d$ , nous effectuons la régression suivante :

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \beta_{10} + \beta_1' \tilde{Y}_t + \beta_2' \tilde{Y}_t Y_{t-d} + \beta_3' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^2 + \beta_4' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^3 + \mu_t, \\ 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $\mu_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ . Puis, nous calculons la somme des carrés des erreurs  $SCR_2$ .

3<sup>ème</sup> étape :

Nous calculons la statistique LM du test de linéarité définie par :

$$LM_2 = T \times \frac{SCR_0 - SCR_2}{SCR_0} \stackrel{\text{asy}(H_0)}{\sim} \chi_{(3m)}^2$$

où  $T$  est le nombre total des observations. Sous  $H_0 : \gamma = 0$  cette statistique est asymptotiquement distribuée selon la loi de  $\chi^2$ , à  $(3m)$  degrés de liberté. Cette statistique sera calculée pour chaque valeur de  $d$  et si l'hypothèse nulle est rejetée, alors, il faut retenir la valeur de  $d$ , qui maximise la statistique  $LM_2$ . La règle de décision du test est la suivante :

- (i) Si  $LM_2 < \chi_{(3m)}^2$  alors nous acceptons l'hypothèse de linéarité.
- (ii) Si  $LM_2 \geq \chi_{(3m)}^2$  alors nous rejetons l'hypothèse de linéarité.

Malgré que ce test ait été construit afin de détecter la non-linéarité, causée par la présence du paramètre  $\Psi_0^{(2)}$ , ce test marque son inefficacité, puisque ce dernier est inexistant dans l'expression de  $\beta_4$ . Pour cette raison, Teräsvirta (1994b), propose un nouveau test plus



parcimonieux, qui consiste à tester, de la même façon, la linéarité dans la régression précédente augmentée, seulement du régresseur  $Y_{t-d}^3$ .

### 3.2.2.2. Test de spécification d'un processus de transition ESTAR

Considérons le modèle ESTAR suivant :

$$Y_t = \Psi_0^{(1)} + \Psi^{(1)'} \tilde{Y}_t + (\Psi_0^{(2)} + \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t) \times G(Y_{t-d}; \gamma, c) + \varepsilon_t,$$

$$\gamma > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\Psi_0^{(1)} = \psi_1^{(0)}$ ,  $\Psi^{(1)'} = (\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_p^{(1)})'$ ,  $\tilde{Y}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$ ,  $\Psi_0^{(2)} = (\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)})$ , et  $\Psi^{(2)'} = ((\psi_1^{(2)} - \psi_1^{(1)}), \dots, (\psi_p^{(2)} - \psi_p^{(1)}))'$ .

Dans ce cas, nous supposons que la fonction de transition  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$  est une fonction exponentielle. Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), ont proposé un test de linéarité contre le modèle ESTAR, fondé sur la statistique du test LM. De la même manière que dans le cadre des modèles LSTAR, Teräsvirta (1994b), a remarqué que sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \gamma = 0$ , le modèle ESTAR est linéaire avec les coefficients  $\Psi_0^{(1)}$  et  $\Psi^{(1)'}$ , alors que le reste des paramètres du modèle original, ne sont pas identifiables et ils peuvent prendre n'importe quelles valeurs, sans modifier celle de la log-vraisemblance. À cet effet, Teräsvirta (1994b), suggère de construire la statistique de test LM, sous l'hypothèse nulle, à partir du calcul des dérivées premières des résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  par rapport aux paramètres  $\pi = (\pi_1', \pi_2')$  où  $\pi_1 = (\Psi_0^{(1)}, \Psi^{(1)'})'$  et  $\pi_2 = \gamma; (\hat{\pi}_1', 0)$ , toute en supposant que les paramètres de nuisance  $\Psi_0^{(2)}, \Psi^{(2)'}$ ,  $d$  et  $c$  sont fixés sous  $H_0$ . Nous obtenons les dérivés suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \Psi_0^{(1)}} \Big|_{\gamma=0} &= -1, \\ \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \Psi^{(1)}} \Big|_{\gamma=0} &= -\tilde{Y}_t, \\ \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} &= - \left[ \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t Y_{t-d}^2 + \Psi_0^{(2)'} Y_{t-d}^2 - 2c \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t Y_{t-d} + c^2 \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t - 2c \Psi_0^{(2)'} Y_{t-d} + c^2 \Psi_0^{(2)'} \right]\end{aligned}$$

où  $\hat{v}_{1t} = -(1, \tilde{Y}_t')$  et  $\hat{v}_{2t} = \hat{v}_{2t} \left( \underbrace{\Psi_0^{(2)', \Psi^{(2)'}}_{\Psi}, d, c} \right)$  dépend du vecteur de paramètres de nuisance  $\Psi$ . Après une substitution de la fonction de transition exponentielle  $G(Y_{t-d}; \gamma, c)$ , par un développement de Taylor au voisinage de  $\theta = \gamma(Y_{t-d} - c)^2 = 0$  à l'ordre un et réarrangement des termes, nous aurons le modèle auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t &= \beta_{10} + \beta_1' \tilde{Y}_t + \beta_2' \tilde{Y}_t Y_{t-d} + \beta_3' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^2 + e_t, \\ &1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}e_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \beta_{10} &= \Psi_0^{(1)} - c^2 \Psi_0^{(2)} \\ \beta_1 &= \Psi^{(1)} - c^2 \Psi^{(2)} + 2c \Psi_0^{(2)} \eta_d \\ \beta_2 &= 2c \Psi^{(2)'} - \Psi_0^{(2)'} \eta_d \\ \beta_3 &= -\Psi^{(2)}\end{aligned}$$

Ainsi le test de linéarité ( $\gamma = 0$ ) est formulé comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \neq 0 \end{cases}$$

Sous  $H_0 : \gamma = 0$ , la statistique LM du test de linéarité est définie par :

$$LM_3 = T \times \frac{SCR_0 - SCR_3}{SCR_0} \stackrel{\text{asy}(H_0)}{\sim} \chi_{(2m)}^2$$

où  $T$  est le nombre total des observations,  $SCR_3$  est la somme des carrés des résidus. Sous l'hypothèse nulle, cette statistique est asymptotiquement distribuée, selon la loi de  $\chi^2$  à  $(2m)$  degré de liberté. Cette statistique sera calculée pour chaque valeur de  $d$  et si l'hypothèse nulle est

rejetée, alors, il faut retenir la valeur de  $d$  qui maximise la statistique  $LM_3$ . La règle de décision du test est la suivante :

- (i) Si  $LM_3 < \chi_{(2m)}^2$  alors nous acceptons l'hypothèse de linéarité.
- (ii) Si  $LM_3 \geq \chi_{(2m)}^2$  alors nous rejetons l'hypothèse de linéarité.

Notons que ce test est le premier, parmi trois tests contre les modèles STAR décrits par Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), quand le paramètre de délai est inconnu.

### **3.2.2.3. La méthodologie de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) du choix entre le modèle LSTAR et le modèle ESTAR**

Si l'hypothèse de linéarité est rejetée, alors il est nécessaire de suivre une méthodologie bien adéquate, capable de spécifier la fonction de transition (logistique ou exponentielle) appropriée au modèle non-linéaire de type STAR. Comme nous l'avons déjà montré que la fonction de transition joue un rôle important dans les modèles STAR, puisqu'elle assure un passage lisse, continu et plus ou moins accéléré, entre les différents régimes du modèle.

L'avantage de cette propriété est de permettre au modèle STAR d'engendrer des dynamiques non-linéaires moins extrêmes, que dans le cadre des modèles TAR. Teräsvirta (1995), Skalin et Teräsvirta (1999), Öcal et Osborn (2000), ont indiqué que cette caractéristique pertinente est extrêmement favorisée, lors de la modélisation de la dynamique des fluctuations d'un cycle économique. Pour cette raison, afin de bien décrire le mécanisme sous-jacent de la dynamique endogène des structures, à l'aide des méthodes quantitatives avantageuses, à l'analyse empirique de la structure et de la dynamique d'un modèle macroéconométrique non-linéaire avec changements de régime, nous préférons d'appliquer, ici, des processus d'ajustements lisses « *smooth adjustment* », au lieu de ceux d'ajustements discrets « *discrete adjustment* ».

Dans ce contexte, Granger et Terasvirta (1993), ont pu mettre en évidence des dynamiques différentes du processus de retour à la moyenne<sup>228</sup>. En particulier, ils ont suggéré, l'utilisation pour un processus d'ajustement lisse, d'une fonction de transition vérifiant, qu'elle soit de type logistique où l'ajustement est de nature asymétrique, de la variable  $Y_t$ , par rapport à ses valeurs passées, en fonction de la variable de transition,  $Y_{t-d}$ , située au dessus ou au dessous du seuil  $c$ , ou qu'elle soit de type exponentielle où l'ajustement cette fois est de nature symétrique, qui varie dans le même sens que la quantité  $(Y_{t-d}-c)$ .

Ces propriétés cruciales, qui permettent la spécification du type de la fonction de transition (logistique ou exponentielle) à utiliser pour le processus d'ajustement lisse, dans la formalisation du modèle STAR, fournissent des arguments importants dans notre cadre de modélisation, puisqu'elles nous permettent de justifier l'utilisation d'un ajustement dynamique endogène entre régimes avec transition lisse, de nature asymétrique ou symétrique, qui caractérise les phénomènes de bifurcation, lors des fluctuations autoentretenu du cycle endogène, autour de ses niveaux d'équilibres dynamiques.

Dans la présente sous section, nous essayons de développer une méthodologie, par laquelle nous pourrions choisir, en premier lieu, entre un modèle LSTAR et un modèle ESTAR et en second lieu, entre différents types de transitions (logistique ou exponentielle), parmi les modèles LSTAR ou ESTAR, afin de spécifier correctement le modèle générateur de données. Les travaux de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) et Teräsvirta et Anderson (1992), s'articulent dans cette vision.

Teräsvirta (1994b), affirme que la procédure de choix entre un modèle LSTAR et un modèle ESTAR au sens de Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), consiste à comparer les deux régressions auxiliaires, associées respectivement aux tests de linéarité, contre les modèles

<sup>228</sup> Nous admettons que qu'elles que soient les déviations positives ou négatives, dans le cadre d'un processus d'ajustement lisse avec la fonction de transition de type logistique, le retour à la moyenne se fait par des vitesses différentes, alors qu'avec la fonction de transition de type exponentiel le retour à la moyenne se fait par la même vitesse.

LSTAR et ESTAR et en second lieu, entre différents types de transitions, parmi les modèles LSTAR,

$$Y_t = \beta_{10} + \beta_1' \tilde{Y}_t + \beta_2' \tilde{Y}_t Y_{t-d} + \beta_3' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^2 + \beta_4' \tilde{Y}_t Y_{t-d}^3 + e_t, \\ 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

avec,

$$e_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\beta_{10} = \Psi_0^{(1)} - \Psi_0^{(2)} g_1 \gamma c - \Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3$$

$$\beta_1 = \Psi^{(1)} - \Psi^{(2)} g_1 \gamma c - \Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3 + \Psi_0^{(2)} g_1 \gamma \eta_d + 3\Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c^3$$

$$\beta_2 = \Psi^{(2)} g_1 \gamma + 3\Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c^2 - 3\Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 c \eta_d$$

$$\beta_3 = -3\Psi^{(2)} g_3 \gamma^3 c + \Psi_0^{(2)} g_3 \gamma^3 \eta_d$$

$$\beta_4 = \Psi^{(2)} g_3 \gamma^3$$

Teräsvirta et Anderson (1992), ont proposé la procédure de test qui consiste à vérifier les hypothèses suivantes :

$$LM_4 : \begin{cases} H_{01} : \beta_4' = 0 \\ H_{11} : \beta_4' \neq 0 \end{cases}$$

$$LM_3 : \begin{cases} H_{02} : \beta_3' = 0 / \beta_4' = 0 \\ H_{12} : \beta_3' \neq 0 / \beta_4' = 0 \end{cases}$$

$$LM_2 : \begin{cases} H_{03} : \beta_2' = 0 / \beta_3' = \beta_4' = 0 \\ H_{13} : \beta_2' \neq 0 / \beta_3' = \beta_4' = 0 \end{cases}$$

Le rejet de l'hypothèse  $H_{01}$  implique la sélection du modèle LSTAR. Si  $H_{01}$  est acceptée mais  $H_{02}$  est rejetée, alors le modèle approprié est ESTAR. Ainsi, si l'hypothèse  $H_{02}$  est acceptée, nous pourrions espérer que le vrai modèle soit LSTAR. Par contre, si nous acceptons, à la fois, les deux hypothèses  $H_{01}$  et  $H_{02}$  avec rejet de la troisième hypothèse  $H_{03}$ , alors le modèle le plus approprié dans cette condition est LSTAR. D'un autre côté, Teräsvirta (1994b), a suggéré d'établir le test de choix du type adéquat de modèle STAR, sur la base de la valeur de  $P$ -value la plus élevée de la statistique LM. Donc, nous pouvons également choisir le modèle approprié en comparant les niveaux de significativité des trois statistiques de Fisher  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  associées aux hypothèses  $H_{01}$ ,

$H_{02}$  et  $H_{03}$  respectivement, si la  $p$ -value de la statistique  $F_2$  du test  $H_{02}$  est la plus petite parmi les trois, il sera avantageux de choisir le modèle ESTAR ; si ce n'est pas le cas, nous choisissons le modèle LSTAR.

*“It is again better to compare the relative strengths of the rejections. If the model is a LSTAR model, then typically  $H_{01}$  and  $H_{03}$  are rejected more strongly than  $H_{02}$ . For an ESTAR model, the situation may be expected to be the opposite”*

(Teräsvirta (1994b), p. 210)

Après avoir estimé le modèle STAR, et effectué les tests nécessaires de linéarité, la prochaine étape dans la procédure de spécification consiste à évaluer le degré de validité de la formalisation retenue du modèle STAR.

### 3.2.3. La validation du modèle STAR

Théoriquement, la validité du modèle STAR nécessite la satisfaction des deux conditions suivantes :

- L'estimation du paramètre de seuil  $\hat{c}$  doit prendre une valeur réelle de la série  $Y_t$ , comprise entre ses valeurs minimale et maximale ;

$$\hat{c} \in [\min(Y_t), \max(Y_t)]$$

- L'estimation du paramètre de transition  $\hat{\gamma}$  doit prendre une valeur positive et doit être statistiquement significativement non nulle.

D'un autre côté, la littérature empirique sur la formalisation de l'ajustement non-linéaire par les modèles autorégressifs à seuils avec transition lisse est riche en tests de validité du modèle STAR. Dans cette section, nous allons présenter le test de validité du modèle STAR au sens de Granger et Teräsvirta (1993), puis les tests de validité du modèle STAR au sens d'Eitrheim et Teräsvirta (1996).

### 3.2.3.1. Test de Granger et Teräsvirta (1993)

Le test de validité du modèle STAR au sens de Granger et Teräsvirta (1993), consiste à tester les trois hypothèses suivantes :

$$(H_1) : \begin{cases} H_{01} : \psi_0^{(1)} = \psi_0^{(2)} = c \\ H_{11} : \psi_0^{(1)} \neq \psi_0^{(2)} \neq c \end{cases}$$

( $H_1$ ) signifie que pour des fluctuations autoentretenues du cycle endogène d'une série de la production industrielle, le processus d'ajustement dynamique des structures endogènes tend à s'ajuster lentement vers un attracteur de type cycle limite et non pas vers un attracteur l'équilibre fixe c'est la raison pour laquelle il faut valider sous l'hypothèse nulle l'absence de dérive dans les deux régimes extrêmes et la valeur d'équilibre fixe du cycle endogène est nulle.

$$(H_2) : \begin{cases} H_{02} : \psi_i^{(1)} = -\psi_i^{(2)} / H_{01} \\ H_{12} : \psi_i^{(1)} \neq -\psi_i^{(2)} / H_{01} \end{cases}$$

( $H_2$ ) Signifie que pour d'importantes fluctuations du cycle endogène d'une série de la production industrielle, le processus d'ajustement tend à s'ajuster rapidement à travers le processus de retour à la moyenne, c'est la raison pour laquelle il faut valider sous l'hypothèse nulle la stabilité de ce processus.

$$(H_3) : \begin{cases} H_{03} : \gamma = 0 / H_{02} \text{ et } H_{01} \\ H_{13} : \gamma \neq 0 / H_{02} \text{ et } H_{01} \end{cases}$$

( $H_3$ ) Signifie qu'un cycle endogène d'une série de la production industrielle suit un processus non stationnaire, c'est la raison pour laquelle la non validité de l'hypothèse nulle implique que le processus générateur de données est instable ou explosif.

D'après Granger et Teräsvirta (1993), si au moins l'une de ces restrictions n'est pas validée, le modèle STAR ne reflète pas de manière adéquate le processus générateur de données. Afin de s'assurer de la validité du modèle retenu, une autre procédure consiste à établir les tests de mauvaise spécification au sens d'Eitrheim et Teräsvirta (1996).

### 3.2.3.2. *Tests d'Eitrheim et Teräsvirta (1996)*

Pour Eitrheim et Teräsvirta (1996), la validité empirique du modèle STAR exige la satisfaction, après l'estimation du modèle, de l'un des trois tests de mauvaise spécification suivants: test de non autocorrélation résiduelle « *no residual autocorrelation* » ; test de non-linéarité restante « *no remaining nonlinearity* » et test de constance des paramètres « *parameter constancy* ».

#### 3.2.3.2.1. Test de non autocorrélation résiduelle

Si nous considérons un modèle STAR à deux régimes et d'ordre  $p$ ,

$$Y_t = S(\tilde{Y}_t; \Psi; \gamma; c) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $S(\tilde{Y}_t; \Psi; \gamma; c) = \Psi_0^{(1)} + \Psi^{(1)'} \tilde{Y}_t + (\Psi_0^{(2)} + \Psi^{(2)'} \tilde{Y}_t) \times G(Y_{t-d}; \gamma, c)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $1 \leq d \leq p$ ,

avec  $\Psi_0^{(1)} = \psi_0^{(1)}$ ,  $\Psi^{(1)'} = (\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_p^{(1)})'$ ,  $\tilde{Y}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$ ,  $\Psi_0^{(2)} = \psi_0^{(2)}$ , et  $\Psi^{(2)'} = (\psi_1^{(2)}, \dots, \psi_p^{(2)})'$ ,

alors, le test de non autocorrélation résiduelle revient à tester l'hypothèse nulle d'indépendance des résidus contre l'alternative d'autocorrélation des résidus. Sous l'hypothèse de dépendance sérielle résiduelle du modèle STAR d'ordre ( $q$ ), la statistique appropriée à ce test est LM pour le  $q^{\text{ème}}$  ordre de dépendance sérielle dans le série résiduelle  $\hat{\varepsilon}_t$ , donnée par :

$$LM_{SI}(q) = TR^2 \stackrel{asy}{\sim} \chi_{(q)}^2$$

avec  $q$  est l'ordre de retard des résidus estimés ( $\hat{\varepsilon}_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ ) et  $R^2$  désigne le coefficient de détermination provenant de la régression de  $\hat{\varepsilon}_t$  sur  $\partial S(\tilde{Y}_t; \hat{\Psi}; \hat{\gamma}; \hat{c}) / \partial (\Psi; \gamma; c)$ .

#### 3.2.3.2.2. Test de non-linéarité restante

Ce test développé par Eitrheim et Teräsvirta (1996), consiste à tester l'hypothèse nulle d'un modèle STAR en présence de deux régimes adéquats contre l'alternative de la nécessité



d'avoir un troisième régime. L'idée revient à considérer la présence d'une partie additive non-linéaire en moyenne  $G_2(Y_{2t-d}; \gamma_2, c_2)$  du modèle STAR, et ensuite de voir si le modèle retenu est en mesure d'absorber complètement l'effet de la non-linéarité ou non. En ce sens, la spécification appropriée à ce test est donnée par :

$$Y_t = \Psi^{(1)'} \tilde{Y}_t + (\Psi^{(2)} - \Psi^{(1)})' \tilde{Y}_t \times G_1(Y_{1t-d}; \gamma_1, c_1) + (\Psi^{(3)} - \Psi^{(1)})' \tilde{Y}_t \times G_2(Y_{2t-d}; \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\tilde{Y}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})', \Psi^{(1)'} = (\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_p^{(1)}), \Psi^{(2)'} = (\psi_1^{(2)}, \dots, \psi_p^{(2)}) \text{ et } \Psi^{(3)'} = (\psi_1^{(3)}, \dots, \psi_p^{(3)}).$$

Mais, le problème qui se pose lors de l'élaboration de ce test de non-linéarité est que les paramètres du modèle ne sont plus identifiables sous l'hypothèse nulle. Or, comme nous avons vu dans les cas précédents des tests de linéarité présentés, la solution à ce problème de non-identifiabilité consiste à appliquer une approximation à l'aide d'un développement au sens de Taylor. Dès lors, après avoir approximé la fonction de transition du deuxième régime  $G_2(Y_{2t-d}; \gamma_2, c_2)$  par un développement limité au sens de Taylor à l'ordre trois sous l'hypothèse  $H_0' : \gamma_2 = 0$ , nous obtenons le modèle auxiliaire suivant :

$$Y_t = \beta_0' \tilde{Y}_t + (\Psi^{(2)} - \Psi^{(1)})' \tilde{Y}_t \times G_1(Y_{1t-d}; \gamma_1, c_1) + \beta_1' \tilde{Y}_t Y_{2t-d} + \beta_2' \tilde{Y}_t Y_{2t-d}^2 + \beta_3' \tilde{Y}_t Y_{2t-d}^3 + e_t, \quad 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $\beta_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) sont exprimés en fonction des paramètres  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $\gamma_2$  et  $c_2$ .

Ainsi, l'hypothèse nulle  $H_0' : \gamma_2 = 0$ , se transforme dans le cadre du modèle de régression auxiliaire sous forme de l'hypothèse nulle  $H_0'' : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ . La statistique appropriée à ce test prend l'expression suivante :

$$LM_{AMR,3} = TR^2 \stackrel{asy}{\sim} \chi_{(3(p+1))}^2$$

Cette statistique quantifiée à partir de la régression auxiliaire, nous aide à tester le modèle STAR avec deux régimes et d'ordre  $p$ , contre des régimes multiples. Or, il est possible d'utiliser une version Fisher appropriée à ce test au risque d'erreur  $\alpha\%$ , elle sera basée sur la statistique suivante :

$$LM_{F^c} = \frac{(SCR_{H_0} - SCR_{H_1}) / (3(p+1))}{SCR_{H_0} / (T - 4(p+1) - 2)} \sim F_{[(3(p+1)), (T-4(p+1)-2)]}^{\alpha\%}$$

avec  $T$  est le nombre total des observations.

### 3.2.3.2.3. Test de constance des paramètres

Selon Eitrheim et Teräsvirta (1996), le test de constance des paramètres se base sur un modèle *time varying STAR* ou TVSTAR donné par:

$$Y_t = \Psi_t^{(1)} \tilde{Y}_t \times (1 - G_1(Y_{t-d}; \gamma_1, c_1)) + \Psi_t^{(2)} \tilde{Y}_t \times G_1(Y_{t-d}; \gamma_1, c_1) + \varepsilon_t, \\ \gamma_1 > 0, 1 \leq d \leq p, t = 1, 2, \dots, T$$

où  $\Psi_t^{(1)} = \Psi^{(1)}(1 - G_2(t; \gamma_2, c_2)) + \Psi^{(3)}G_2(t; \gamma_2, c_2)$ ,  $\Psi_t^{(2)} = \Psi^{(2)}(1 - G_2(t; \gamma_2, c_2)) + \Psi^{(4)}G_2(t; \gamma_2, c_2)$ ,  $\tilde{Y}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$  et  $G_2(t; \gamma_2, c_2) = 1 / [1 + \exp\{-\gamma_2(t - c_2)\}]$ ,  $\gamma_2 > 0$ .

Ce test consiste à vérifier si les paramètres du modèle STAR d'ordre  $p$  avec deux régimes retenu, changent de valeurs dans le temps. Ceci, revient à tester sous l'hypothèse nulle de constance des paramètres des deux régimes du modèle l'hypothèse  $H_0: \gamma_2 = 0$ , contre l'hypothèse alternative de changement lisse des paramètres. Dès lors, après résolution du problème de non-identifiabilité des paramètres sous l'hypthèse nulle par le recours à une approximation à l'aide d'un développement limité au sens de Taylor. La statistique appropriée à ce test au risque d'erreur  $\alpha\%$  est de type LM, obtenue à partir d'un développement de Taylor d'ordre trois de la fonction  $G_2(t; \gamma_2, c_2)$ . Elle prend sous l'hypothèse nulle l'expression suivante :

$$LM_{c,3} = \frac{(SCR_{H_0} - SCR_{H_1}) / 6p}{SCR_{H_1} / (T - 6p - 2(p+1))} \sim F_{[(6p), (T - 6p - 2(p+1))]}^{\alpha\%}$$

avec  $T$  est le nombre total des observations.

Après l'étape de validation, l'étape qui suit dans la procédure de spécification de la modélisation STAR, consiste à réaliser une analyse prévisionnelle des modèles retenus, dont l'objectif est d'élaborer des prévisions impeccables. Néanmoins, cette tâche souffre encore de

---

certaines difficultés. Malgré que, les économètres et les concepteurs de modèles dans le domaine macroéconométrique consacrent une grande quantité d'efforts en élaborant leurs modèles de prévisions.

En pratique, les majeurs difficultés, dans ce cas, se résument autour de trois principaux problèmes, influençant directement la qualité des prévisions que nous désirons réaliser. Tout d'abord, la connaissance du passé est essentielle, tant pour l'extrapolation de l'information prédictive, que pour la mesure des relations d'interdépendances non-linéaires de la chaîne causale, entre les variables étudiées. En effet, au pire des cas, le passé d'une série existe mais il n'est pas accessible, c'est-à-dire qu'il est indisponible. Dans d'autres cas plus fréquents, il arrive que nous ne disposons pas de toute l'information nécessaire sur le passé de la série, ou encore lorsque le passé doit faire le siège d'un changement structurel quand celle-ci est non stationnaire. Ensuite, si par définition le résidu est l'écart entre la prévision et la réalisation, alors l'aléa est le risque d'écart, entre la prévision et la réalisation ultérieure. Dès lors, les perturbations engendrées par l'aléa peuvent intervenir de façon décisive, tant dans la construction d'un modèle de prévision que dans le diagnostic de sa performance prévisionnelle. À un point tel qu'ils peuvent rendre impossible la réalisation de prévisions parfaites, dont la qualité est suffisante pour quelles soient utiles dans un processus de prise de décision. Enfin, le dernier problème réside dans le défaut de stationnarité, lorsque les caractéristiques dynamiques (moyenne, variance, covariances) d'une série ne sont pas indépendantes dans le temps. Dans cette situation, le défaut de stationnarité engendré par exemple par la sensibilité de la moyenne d'une série du temps, peut s'exprimer suivant diverses modalités : soit par une évolution spatiotemporelle, soit par une mutation structurelle ou encore par l'apparition d'un changement structurel. Selon chacun de ces trois cas envisagés, le mode de réalisation d'une technique de prévision sera différent. Or, rappelons que la stationnarité est une condition nécessaire surtout au niveau de l'estimation d'un modèle STAR. C'est la raison pour laquelle nous sommes amenés à consacrer la section suivante à l'analyse de la stationnarité des modèles STAR, en appliquant deux types de tests de racines unitaires non-linéaires.

### 3.3. La stationnarité des modèles STAR

Dans cette section, nous exposons les principaux tests de racine unitaire non-linéaire capables de tester la stationnarité non-linéaire des séries analysées. Nous procédons en particulier au test de Kapetanios, Shin et Snell (2003), pour le cas d'un ajustement non-linéaire symétrique assuré par un modèle ESTAR, et au test de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), pour le cas d'un ajustement non-linéaire asymétrique assuré par un modèle LSTAR.

#### 3.3.1. Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles ESTAR selon Kapetanios, Shin et Snell (2003)

Considérons le modèle ESTAR (1,1) défini par :

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \beta^* Y_{t-1} G(Y_{t-1}; \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t$  est un processus stationnaire de moyenne nulle,  $\beta$  et  $\beta^*$  sont des paramètres inconnus,  $G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0) = 1 - \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)$  est la fonction de transition exponentielle, et  $Y_t$  est un processus stochastique de moyenne nulle qui s'écrit :

$$Y_t = \{\beta + \beta^* G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0)\} Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Sous  $H_0$  de présence de racine unitaire, si nous considérons les restrictions  $\beta = 1, \gamma = 0$ , alors  $G(\cdot) = 0$  et le processus  $Y_t$  est un processus AR(1) non stationnaire.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Sous l'hypothèse alternative de stationnarité<sup>229</sup>,  $\gamma > 0$ , et  $0 < G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0) < 1$ . D'où, le modèle  $Y_t$  peut s'écrit :

<sup>229</sup> Nous signalons que sous l'hypothèse alternative de stationnarité,  $Y_t$  est un processus stable si pour tout  $Y_{t-1}$ , nous avons  $\beta + \beta^* G(Y_{t-1}; \gamma, c = 0) < 1$ .

$$Y_t = \{\beta + \beta^* [1 - \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)]\} Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

La prise en compte de la restriction  $\beta = 1$  sous les deux hypothèses nulle et alternative est illustrée dans le travail de Kapetanios, Shin et Snell (2003). Explicitement, nous devons réaliser le test des hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \Delta Y_t = \varepsilon_t \\ H_1 : Y_t = \{1 + \beta^* [1 - \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)]\} Y_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \gamma = 0 \\ H_1 : \gamma > 0 \end{cases}$$

Ceci revient à considérer l'hypothèse nulle de non stationnarité sous l'effet de la présence de racine unitaire contre l'hypothèse alternative d'un processus non-linéaire de type ESTAR, mais globalement stationnaire. Cependant, Davies (1987), a signalé que sous hypothèse nulle de la présence de racine unitaire,  $\beta^*$  est non identifiable et par conséquent, le test de racine unitaire, avec la restriction  $\gamma = 0$ , est non faisable directement. Afin de contourner cette difficulté pour pouvoir élaborer le test de racine unitaire contre le modèle ESTAR(1,1) stationnaire, Kapetanios, Shin et Snell (2003), ont transformé le modèle par :

$$\Delta Y_t = \beta^* Y_{t-1} [1 - \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)] + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$  est un processus stationnaire de moyenne nulle et de variance finie. Les auteurs ont signalé que le test de Dickey-Fuller linéaire standard est non significatif, lorsque le vrai processus est stationnaire mais non-linéaire. Ainsi, ils ont préféré le recours à une approximation à l'aide d'un développement limité de premier ordre au sens de Taylor du modèle précédent autour de l'hypothèse nulle, qui donne la régression auxiliaire suivante:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1}^3 + \text{erreur}, \quad t = 1, \dots, T$$

Ceci revient à réaliser le test des hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta < 0 \end{cases}$$

Sous  $H_0$ , le test de Kapetanios, Shin et Snell (2003), basé sur la statistique KSS est un test de Dickey-Fuller non-linéaire fondé sur la t-statistique défini par :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

$$t_{NLADF} = \frac{\hat{\delta}_{MCO}}{s_{MCO}(\hat{\delta})} \Leftrightarrow t_{NLADF} = \frac{\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^3 \Delta Y_t}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\varepsilon_t}^2 \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^6}}$$

où  $\delta_{MCO}$ ,  $s_{MCO}$  et  $\sigma_{\varepsilon_t}^2$  sont respectivement, l'estimateur de MCO, l'estimateur de l'erreur standard et celui de la variance du terme d'erreur, obtenus à partir de la régression auxiliaire. Par conséquent, la t-statistique du test de Dickey-Fuller non-linéaire admet une distribution asymptotiquement non normale :

$$t_{NLADF} \sim \frac{\left[ \frac{1}{4} W(1)^4 - \frac{3}{2} \int_0^1 W(r)^2 dr \right]}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^6 dr}}$$

où  $W(r)$  est le processus standard de mouvement Brownien défini pour  $r \in [0,1]$ .

Ensuite, pour corriger le problème de corrélation sérielle des erreurs, et avoir sous l'hypothèse nulle, la t-statistique du test de Dickey-Fuller non-linéaire asymptotiquement distribué et soit consistant sous l'hypothèse alternative, les auteurs suggèrent qu'il faut calculer la statistique du test de Kapetanios, Shin et Snell (2003), augmenté ou AKSS après avoir estimé par MCO, l'équation de la régression auxiliaire avec  $p$  augmentations suivante :

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1}^3 + \sum_{i=1}^p \rho_i \Delta Y_{t-i} + \text{erreur}, \quad t = 1, \dots, T$$

Le tableau (3.13), montre les valeurs critiques asymptotiques du test de Kapetanios, Shin et Snell (2003), dans le cadre du modèle ESTAR.

<b>Tableau 3.13: Les valeurs critiques du test de Kapetanios, Shin et Snell (2003)</b>			
<b>Fractiles</b>	<b>NLADF</b>	<b>NLADF<sub>m</sub></b>	<b>NLADF<sub>mr</sub></b>
1%	-2.82	-3.48	-3.93
5%	-2.22	-2.93	-3.40
10%	-1.92	-2.66	-3.13

*NLADF, NLADF<sub>m</sub> et NLADF<sub>mr</sub> respectivement indiquent le t-statistique du test de Dickey-Fuller non-linéaire pour des données brutes, sans moyenne et sans tendance. Les valeurs critiques asymptotiques du test de Kapetanios, Shin et Snell sont tabléés dans Kapetanios, Shin et Snell (2003, p. 364), via une simulation stochastique de 50000 réplifications d'un échantillon de taille 1000 observations. NLADF indique un rejet de l'hypothèse de normalité au seuil de 10%.*

### 3.3.2. Test de racine unitaire non-linéaire pour les modèles LSTAR selon Leybourne, Newbold et Vougas (1998)

Dans le cadre du modèle LSTAR, le test de racine unitaire non-linéaire au sens de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), emploie la fonction de transition logistique, afin de tester sous l'hypothèse nulle la présence d'une racine unitaire et sous l'hypothèse alternative la possibilité de la stationnarité, autour d'une tendance linéaire avec la possibilité d'avoir soudainement une rupture, dans la forme graduelle d'ajustement non-linéaire entre deux régimes. Cette procédure consiste à tester la présence d'une racine unitaire non-linéaire, à travers les trois modèles suivants<sup>230</sup> :

$$\text{Modèle A : } Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 G(t; \gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\text{Modèle B : } Y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 G(t; \gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\text{Modèle C : } Y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 G(t; \gamma, \tau) + \beta_2 t G(t; \gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (3)$$

où  $\varepsilon_t$  est un processus stationnaire de moyenne nulle,  $G(t; \gamma, \tau)$  est la fonction logistique de transition lisse, basée sur un échantillon de taille  $T$ , définie par :

$$G(t; \gamma, \tau) = [1 + \exp\{-\gamma(t - \tau T)\}]^{-1}, \quad \gamma > 0$$

Le rôle de cette fonction est de contrôler la transition lisse entre les régimes. Le paramètre  $\tau$  détermine les fractions de l'échantillon, pour lesquelles la transition est réalisée ; alors il convient de noter que pour  $\gamma > 0$ , nous avons  $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t; \gamma, \tau) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t; \gamma, \tau) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \tau T} G(t; \gamma, \tau) = 1/2$ . La rapidité de la transition est déterminée au moyen du paramètre  $\gamma$ . Si  $\gamma$  est faible, alors la transition est lente puisque,  $G(t; \gamma, \tau)$  nécessite une grande période de temps pour traverser l'intervalle  $[0,1]$ . Dans ce cas limite, pour  $\gamma = 0$ ,  $G(t; \gamma, \tau) = 1/2$  quelque soit  $t$ .

<sup>230</sup> Vougas (2004), examine la présence d'un changement structurel autour de l'hypothèse alternative de stationnarité. Il propose une quatrième spécification qui permet un changement au niveau de la tendance uniquement :

$$\text{Modèle D : } Y_t = \alpha_1 + \beta_2 t G(t; \gamma, \tau) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Dans l'autre côté, pour des valeurs larges de  $\gamma$ ,  $G(t; \gamma, \tau)$  traverse l'intervalle  $[0, 1]$  rapidement. Lorsque  $\gamma$  tend vers  $+\infty$ , cette fonction change de valeur instantanément de 0 à 1 pour  $t = \tau T$ .

Si nous sommes sûrs que  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$  est un processus stationnaire de moyenne nulle et de variance finie, alors le modèle A implique que  $Y_t$  est stationnaire, autour d'une moyenne qui change de la valeur  $\alpha_1$  à la valeur  $(\alpha_1 + \alpha_2)$  quelque soit le temps  $\tau T$ . D'une manière équivalente, le modèle B implique que le changement se réalise, au niveau de la moyenne est de la valeur  $\alpha_1$  à la valeur  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ , mais y inclus un terme fixe de pente indiquant la présence d'une tendance linéaire. Le modèle C est le modèle le plus flexible, il indique que le changement dans la moyenne est de la valeur  $\alpha_1$  à la valeur  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ , avec une pente non fixe de la tendance, qui change de valeur, avec les vitesses de transition, de la valeur  $\beta_1$  à la valeur  $(\beta_1 + \beta_2)$ . Si  $\gamma < 0$ , les états du modèle initial et final seront renversés, mais l'interprétation des paramètres reste valable.

Le test de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), est basé sur les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H_0 & : Y_t = \mu_t, \quad \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t, \quad \mu_0 = \varphi, \\ H_1 & : \text{Modèle A, Modèle B ou Modèle C} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_0 & : Y_t = \mu_t, \quad \mu_t = k + \mu_{t-1} + \eta_t, \quad \mu_0 = \varphi, \\ H_1 & : \text{Modèle B ou Modèle C} \end{aligned}$$

où  $\eta_t$  et  $\varepsilon_t$  sont deux processus autorégressifs moyens mobiles stationnaires de moyennes nulles et de variances finies. Les statistiques des tests sont calculées en deux étapes selon la procédure suivante :



Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

1<sup>ère</sup> étape : Utilisation de l'algorithme de moindres carrés non-linéaire (NLS), pour l'estimation de la partie déterministe du modèle préféré et le calcul de la valeur de NLS résiduelle<sup>231</sup>  $\hat{\varepsilon}_t$ , à partir des modèles A, B ou C.

2<sup>ème</sup> étape : Calcul de la statistique d'ADF, où le t-ratio est associé avec  $\hat{\rho}$  dans la régression de moindres carrés ordinaires (OLS), suivante :

$$\Delta \hat{\varepsilon}_t = \hat{\rho} \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^K \hat{\pi}_i \Delta \hat{\varepsilon}_{t-i} + \hat{v}_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Les statistiques d'ADF des modèles A, B ou C sont notées respectivement par  $S_\alpha$ ,  $S_{\alpha(\beta)}$  et  $S_{\alpha\beta}$ . Leybourne, Newbold et Vougas (1998), déterminent les valeurs critiques des statistiques calculées du test par simulation de Monte Carlo. Le tableau (3.14), montre des simulations pour les valeurs critiques des distributions nulles relatives aux statistiques  $S_\alpha$ ,  $S_{\alpha(\beta)}$  et  $S_{\alpha\beta}$  sous l'hypothèse de racine unitaire contre l'hypothèse alternative de stationnarité avec présence d'un processus de transition lisse dans la tendance linéaire du test de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), dans le cadre du modèle LSTAR.

**Tableau 3.14: Les valeurs critiques du test de Leybourne, Newbold et Vougas (1998)**

T	$S_\alpha$			$S_{\alpha(\beta)}$			$S_{\alpha\beta}$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
25	-4.280	-4.750	-5.669	-5.097	-5.583	-6.561	-5.555	-6.054	-7.152
50	-4.009	-4.363	-5.095	-4.636	-5.053	-5.770	-4.990	-5.395	-6.135
100	-3.909	-4.232	-4.882	-4.427	-4.771	-5.479	-4.697	-5.011	-5.650
200	-3.851	-4.161	-4.761	-4.337	-4.629	-5.201	-4.572	-4.867	-5.435
500	-3.797	-4.103	-4.685	-4.277	-4.565	-5.141	-4.552	-4.825	-5.420

$S_\alpha$ ,  $S_{\alpha(\beta)}$  et  $S_{\alpha\beta}$  respectivement représentent les statistiques de Dickey-Fuller non-linéaire pour les modèles A, B et C. Les valeurs critiques asymptotiques du test de Leybourne, Newbold et Vougas sont tabulées dans Leybourne, Newbold et Vougas (1998, p. 88), via une simulation stochastique de 20000 répliques d'un échantillon de taille T observations.

Après avoir étudié le phénomène de la stationnarité non-linéaire, normalement, il est important dans le cadre de notre recherche de procéder par une analyse des chocs par la

<sup>231</sup> Par exemple, nous calculons la valeur de NLS résiduelle des différents modèles comme suit :

$$\text{Modèle A : } \hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 G(t; \hat{\gamma}, \hat{\tau})$$

$$\text{Modèle B : } \hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 G(t; \hat{\gamma}, \hat{\tau})$$

$$\text{Modèle C : } \hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 G(t; \gamma, \tau) - \hat{\beta}_2 t G(t; \hat{\gamma}, \hat{\tau})$$

---

décomposition des innovations à l'aide des techniques de simulations stochastiques et dynamiques, afin de saisir les propriétés caractéristiques des séries temporelles générées de la production industrielle en Tunisie. Pour ce faire, nous devons montrer en particulier, qu'une analyse de la fonction de réponses aux impulsions non-linéaires pour des processus à seuil avec transition lisse univariés permet, non seulement, d'établir un test de diagnostic pour l'orthogonalité forte des innovations, mais aussi, de vérifier dans quelle mesure le modèle LSTAR ou ESTAR choisi est bel et bien le meilleur modèle de prévision. Or, le problème qui se pose à ce niveau d'analyse, consiste à démontrer qu'un processus à seuil avec transition lisse possède une décomposition de Wold<sup>232</sup> avec innovations prévisionnelles fortement orthogonales. La recherche d'une réponse adéquate à ce problème nous incite à passer par la fonction de réponses aux impulsions généralisées GIRF « *Generalized Impulse Response Function* », qui sert selon van Dijk, Teräsvirta et Franses (2002), pour évaluer le degré de la persistance du modèle STAR choisi aux chocs, pour mesurer l'asymétrie d'une réponse aux impulsions, ainsi que pour contrôler son degré d'instabilité. Or, comme la recherche dans ce domaine s'avère jusqu'à aujourd'hui très restreinte et manque d'expertise sur l'emploi des techniques appropriées à la problématique de prévision dans le domaine d'instabilité des structures dynamiques, c'est la raison pour laquelle nous sommes invités dans cette section à analyser la sensibilité du comportement dynamique futur d'une variable aux chocs, afin d'avoir une information supplémentaire sur les propriétés caractéristiques d'un modèle STAR univarié de prévision.

---

<sup>232</sup> Ce type de décomposition à innovations prévisionnelles appliquée à un processus à temps discret, favorise les conditions nécessaires pour lesquelles un processus non-linéaire de type STAR aura une représentation en moyenne mobile fortement orthogonale. Les innovations sont engendrées par une fonction d'impulsion réponse généralisée non-linéaire qui satisfait la propriété d'itérations, utiles pour mesurer, en terme de dépendance, les effets de chocs sur le comportement futur d'une variable.

---

## 3.4. Prévisions à l'aide des modèles STAR univariés

Le but de cette section est de fournir un cadre conceptuel pour le modèle de prévision non-linéaire et plus précisément, pour des raisons techniques, nous nous sommes intéressés uniquement aux modèles autorégressifs à seuils avec transition lisse dans un cadre univarié.

Bien que la théorie économique soit souvent silencieuse au sujet spécifique capable de caractériser le phénomène de non-linéarité d'une variable macroéconomique qu'elle se dirige fréquemment aux modèles avec des changements de régime, pour changer de dynamique à travers le cycle économique. Ce n'est que récemment qu'une vaste littérature théorique de dynamique économique qu'empirique de modélisation macroéconométrique, s'est concentrée sur la recherche de nouvelles techniques adéquates, pour modéliser la prévision des séries temporelles macroéconomiques, dans un cadre d'instabilité des structures dynamiques où apparaît visiblement le phénomène de la non-linéaire, afin d'expliquer le comportement dynamique spécifique au changement de régimes et des types généraux d'asymétries, pour lesquelles les modèles linéaires sont inadéquats, et ceci suite à la contribution de Artus, Avouyi-Dovi et Laffargue (1993), Potter (1994), Filardo (1994), Ramsey et Rothman (1996), Koop et le Potter (1998), Qin et Lu (1998), Hansen (1999), parmi d'autres récentes contributions.

Dans ce contexte, Uctum (2007), notait qu'une famille des modèles qui a attiré récemment l'intention des prévisionnistes est la classe des modèles auto-régressifs à seuil, dont l'origine a été présentée par Tong (1983). De tels modèles visent à spécifier la dynamique endogène des modèles non-linéaires à changement de régimes, par l'intermédiaire de leurs caractéristiques à tenir compte du l'effet du seuil, dans la tendance déterministe, ce qui en résulte des spécifications linéaires par morceaux séparés, selon l'importance d'une variable de seuil. En plus, une propriété fondamentale résulte de leurs capacités à incorporer, dans ces modèles des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$ , très sensibles aux variations de la variable de seuil et

---

des paramètres de transition, capables de lisser la qualité d'ajustement non-linéaire d'un régime à un autre de ces modèles.

Dés lors, nous remarquons que, bien que l'étude des évolutions non-linéaires en économie date de plus d'un demi siècle, Certains modèles essayent de capturer les dispositifs virtuels et non-linéaires non capturés avec les modèles linéaires simples et qui ne peuvent être présents que dans les comportements dynamiques des données. Ces modèles dépassent les formes canoniques traditionnelles de la théorie des cycles réels, selon laquelle l'économie de marché est essentiellement stable dans le sens où, en l'absence de chocs exogènes, elle doit suivre un sentier de croissance régulière et atteint toujours un état d'équilibre unique et général. Dans cette situation Hansen (2002), stipule qu'il est profitable d'avoir recours à l'économétrie des changements structurels, qui s'est développée largement, au cours des dernières années, notamment par les nouveaux apports qui ont enrichi la modélisation macroéconométrique des séries temporelles à temps discret, surtout en matière de la famille de modèles non-linéaires à seuils avec transitions lisses. L'originalité de l'étude de cette famille de modèles non-linéaires en moyenne est d'ajouter la lumière sur la théorie des cycles endogènes développée dans un cadre néo-keynésien, mais qui peut emprunter quelques hypothèses de base de la pensée néo-classique, par exemple, dans le sens où nous nous référons au critère de la rationalité optimisatrice des agents économiques. Dans ce sens, plusieurs modèles sont exposés de divers aspects, mais ils ont comme facteur commun l'existence de fluctuations endogènes, liées à la structure même de l'économie. Donc, Skalin et Teräsvirta (2002), et plus récemment Guidolin et Tmmermann (2006), affirmaient que selon cette nouvelle idée, l'équilibre dynamique multiple est en mouvement asymétrique et n'est plus *parito-optimal* et il y a lieu, donc, pour des interventions correctrices de politique économique. Sur le côté économique, nous pouvons classer ces modèles en deux catégories : en premier groupe les modèles à générations imbriquées, introduits par Benhabib et Day (1982) et Grandmont (1985b), qui postulent la possibilité de réaliser un équilibre instable et qu'un cycle stable de période deux est la trajectoire optimale de

l'économie<sup>233</sup>. Le deuxième groupe se réfère aux modèles d'économie concurrentielle, introduit par Benhabib et Nishimura (1979, 1985), dont l'originalité est d'étudier la dynamique endogène<sup>234</sup> des structures déterministes non-linéaires, source de l'existence, sous certaines conditions (suffisantes), de cycle limite comme solution de modèle de croissance optimale. Ce modèle à croissance optimale admet comme nouveauté, d'évoquer la possibilité des fluctuations endogènes dans des environnements concurrentiels. Mais, il prôt au premier groupe, les conditions de l'apparition de fluctuations cycliques endogènes, reposant sur une prédominance des effets de richesse, dans les arbitrages inter- temporels de l'agent.

Si les modèles de croissance optimale, sous l'hypothèse d'anticipation rationnelle ont l'avantage de conditionner suffisamment la convergence des grandeurs économiques, vers un état stationnaire. L'espoir des prévisionnistes est de sélectionner un modèle optimal de prévision, même si les conditions avancées par les modélisateurs de croissance optimale ne sont plus réalisées.

La présente recherche a comme particularité de partager la même volonté que celle de la théorie moderne de l'équilibre temporaire, en ce qui concerne la sélection d'un modèle optimal de prévision. Afin d'essayer de répondre à notre objectif, nous avons adopté la même démarche, suivie par les analystes de la modélisation macro-dynamique, lors du traitement de la question de l'évolution temporelle, en posant la question de l'existence d'équilibres de régimes réguliers, impliquant que les anticipations sont réalisables. Donc, pour sélectionner la structure optimale d'un modèle non-linéaire de prévision de séries temporelles et compte tenu des résultats élaborés jusqu'à ce niveau, nous admettons comme cadre empirique d'analyse, basé sur les hypothèses :

<sup>233</sup> Selon ce premier groupe de pensée, la condition qui garantit que des cycles d'une période supérieure ou égale à deux apparaissent est l'existence d'une confrontation importante entre l'effet de substitution et l'effet de richesse comme résultat de la variation du taux d'intérêt réel. Selon cette exception, les modèles de Benhabib et Day (1982) et Grandmont (1985b), ont comme spécificité de poser le problème de la stabilité d'un cycle donné suite à la caractéristique de coexistence de cycle avec différentes périodes. Dans la pratique, ceci se manifeste par la prise en considération le fait que les échangistes sont en apprentissage le long des sentiers de transition. Suite à ces fluctuations, l'Etat peut s'intervenir par une politique monétaires contra-cyclique (déterministes) afin de stabiliser l'économie.

<sup>234</sup> Dans ce sens, Boldrin (1988, p.67), confirme que : « *L'idée, au lieu de cela, est de montrer qu'il existe des forces intrinsèques au mécanisme concurrentiel, dépendant de la structure technologique de l'économie, qui peuvent être la source de larges oscillations du produit et des prix* ».

d'un environnement économique parfaitement connu, dont les données fondamentales ne changent pas, et n'est soumis à aucun choc exogène, des fluctuations persistantes<sup>235</sup> endogènes et déterministes de l'activité économique peuvent se produire et essentiellement compatibles, avec les hypothèses du comportement optimisateur des agents<sup>236</sup>. Nous supposons alors, que l'interaction et l'interdépendance entre les décideurs sont une source interne et structurelle d'instabilité, dont-il faut corriger les effets. Mais, la question posée qui reste ouverte jusqu'à nos jours, est de savoir par quelles politiques, les autorités économiques arriveront à empêcher les fluctuations?

Selon Engle et Brown (1986), l'approche du "*modèle de prédiction*" à comme objet de construire des modèles optimaux de prédiction, surtout capables de palier les problèmes pratiques causées, soit par les insuffisances des données, soit par les données indirectes. La première situation rencontrée, lorsque les données ne sont pas disponibles en taille suffisante pour élaborer une étude complète. Ceci à comme conséquence la non application de nombreux tests telque le test de cointégration qui est inadéquat, si la taille de l'échantillon est inférieure à 30 observations. La seconde, résume une situation fréquemment rencontrée, surtout dans le domaine industriel, quand les données d'intérêt sont indirectement observées, par exemple, plusieurs travaux ont traité le problème de la selection de modèle de prévision. Ces travaux ont sollicité le problème, par l'application de différentes techniques et de divers modèles. Farmer (1982), a appliqué les modèles à seuils. Farmer et Sdorovitch (1988) et Castagli (1989), ont appliqué les modèle espace d'état. Nychka, Ellner, McCaffrey et Gallant (1992), ont appliqué les modèles avec fonction splines. Notons que la qualité de prédiction de chaque modèle candidat, défini par la variance de l'erreur de prédiction, est mesurée, comme nous l'exposerons, dans la partie qui suit, à l'aide de l'approche de ré-échantillonnage par technique de bootstrap. Laud et Ibrahim (1995), ont proposé d'autres critères analytiques de mesures.

<sup>235</sup> Nous disons qu'un choc transitoire est persistant si, suite à son observation dans l'économie, le mécanisme de propagation implique un délai avant le retour à l'équilibre initial. Cette hypothèse est en opposition avec celle de l'hystérèse qui implique que suite à un choc transitoire dans l'économie, le mécanisme de propagation ne permet pas à l'équilibre de retrouver, à long terme, son niveau initial.

<sup>236</sup> Les hypothèses les plus intéressantes dans ce cadre d'analyse sont liées à la disponibilité de l'information et à la rationalité.

---

Récemment, la question est abordée en économie sur divers aspects, les analystes de la modélisation macrodynamique ont essayé d'établir l'évaluation suffisamment générale et formelle de ce problème périodiquement, des outils d'inférence ont été proposés et continuent à être développés pour le traitement adéquat de tels modèles. Généralement, une théorie de test pour déterminer la présence des effets de seuil dans les modèles à seuils, a été proposée par Hansen (1999), et plus tard prolongée au cas où la série fondamentale d'intérêt pourrait être caractérisée par une racine unitaire dans son polynôme autorégressif par Caner et Hansen (2001). Les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenues, à partir de tels modèles ont été étudiés par Hansen (2000), ceci comme prolongement des premiers travaux de Chan (1993). Les résultats théoriques qu'empiriques ont justifié la présence des effets de seuil et puis les propriétés limites des estimateurs résultants ont été également présentés en Gonzalo et Pitarakis (2002), pour le cas de régime multiple.

L'objectif de cette section est de proposer une démarche statistique, basée essentiellement sur la technique de bootstrap en blocs chevauchés, proposée par Künsch (1989), permettant d'aider les opérationnels à construire des modèles non linéaires de prévisions. En plus, il tend à résoudre les problèmes de manque d'observation, soit lorsque la série étudiée est de petite taille, où lorsque la base, de données intègre des observations manquantes, alors que le chercheur s'intéresse à dégager les caractéristiques, à long terme de telle série, telle que la prévision et la cointégration comme le prouve van Giersbergen et Kiviet (2002). En particulier, plusieurs chercheurs ont abordé ces sujets sur divers aspects. Dans ce contexte, Teräsvirta (2006), a marqué le rôle de la prévision des variables économiques par les modèles non-linéaires, Corradi et Swanson (2006), ont montré l'importance de la technique de bootstrap pour l'évaluation des modèles non-linéaires de prévision par densité, Guégan (2005), a prouvé le rôle de la prévision dans l'assimilation du phénomène de persistance sur les marchés financiers, Haug et Siklos (2006), ont essayé d'établir des modèles non-linéaires de prévision, capables d'étudier le comportement à court terme du taux de change international. La performance des modèles de prévisions sont largement discutés, dans les travaux de Stock et Watson (1999), Marcellino (2002), et Teräsvirta, van Dijk et Medeiros (2005).

Dans ce paradigme, nous sommes attirés par la problématique de comparaison des méthodes de selections de structures de modèles non-linéaires, en prédiction des séries temporelles. Pour répondre à cet objectif, nous allons tout d'abord essayer de savoir comment construire un modèle non-linéaire pour des données futures?

Considérons un modèle autorégressif non-linéaire, dont l'expression générale est définie par la relation :

$$Y_t = S(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0; \psi_0, \psi_1, \dots) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

La prévision ponctuelle des modèles non linéaires a un horizon  $f$  traduit une notion de point moyen. Soit  $\hat{Y}_{t+f|t}$  le prédicteur optimal de  $Y_{t+f}$  sachant  $\Omega_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$  l'ensemble d'information disponible à la date  $t$ , et soit  $\hat{\varepsilon}_{t+f|t}$  l'erreur de prévision associée à  $\hat{Y}_{t+f|t}$ . Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+f|t} &= E[Y_{t+f} | \Omega_t], \quad f \geq 1 \\ \hat{\varepsilon}_{t+f|t} &= Y_{t+f} - \hat{Y}_{t+f|t} \end{aligned}$$

Supposons que notre modèle non-linéaire est un  $STAR(1;1,1)$  avec fonction de transition  $G(\cdot)$  de variable de transition  $s_t = Y_{t-1}$ , paramètre de transition  $\gamma$  et paramètre de seuil  $c$ , s'écrit sous la forme :

$$Y_t = S(Y_{t-1}; \Psi) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

où  $S(Y_{t-1}; \Psi) = (\psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)} Y_{t-1}) [1 - G(s_t; \gamma, c)] + (\psi_0^{(2)} + \psi_1^{(2)} Y_{t-1}) G(s_t; \gamma, c)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $s_t = Y_{t-1}$

et  $\Psi = (\psi^{(1)} = (\psi_0^{(1)}, \psi_1^{(1)}), \psi^{(2)} = (\psi_0^{(2)}, \psi_1^{(2)}), \gamma, c)$ ,  $\gamma > 0$

Li et Maddala (1996) et Flachaire (2001), ont prouvé l'efficacité de la technique de bootstrap par blocs chevauchés<sup>237</sup> pour la sélection d'un modèle de prévision dans une famille de modèles dynamiques. Cette méthodologie est décrite comme suit :

<sup>237</sup> Selon Flachaire (2001, p. 12), :« *Le bootstrap par blocs est une généralisation de la méthode du bootstrap pour les séries stationnaires, lorsqu'on n'a aucune information sur la forme de la dépendance des données. Le principe consiste à regrouper les résidus centrés dans des blocs de longueurs  $l$  afin de capter du mieux possible la dépendance existante. Le rééchantillonnage se fait en tirant de manière indépendante et avec remise ces blocs.* ».



Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

Considérons une base initiale  $B_0$  de taille  $n$  de variables indépendantes de même loi que le vecteur  $(Y_t, Y_{t-1})$  défini par :

$$B_0 = \{(Y_{t-1}^{(i)}, Y_t^{(i)}); 1 \leq i \leq n\}$$

où  $Y_{t-1}^{(i)} = (Y_{t-1}^{(i_1)}, \dots, Y_{t-1}^{(i_p)})$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice de dimension  $(n \times p)$  notée  $Y = ((Y_{t-1})_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  avec,

$$Y_t = S_\Psi(Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_j^2)$  et le modèle  $S_\Psi$  est un modèle autorégressif non-linéaire.

À partir des données réelles (présentes et passées) de l'échantillon  $B_0$ , nous générons  $B$  échantillons bootstrapés donnés par :

$$B^{*bootstrap} = \{(Y_{t-1}^{(i)*bootstrap}, Y_t^{(i)*bootstrap}); 1 \leq i \leq n\}$$

Pour  $b = 1, \dots, B$ , par la méthode du bootstrap en blocs chevauchés expliquée dans la partie I. Une fois les  $B$  bases bootstrapées obtenues, nous estimons sur chacune d'elles pour estimer le vecteur paramètre  $\Psi$ . Cette estimation se fait par l'intermédiaire de la méthode des moindres carrés non-linéaires. Notons  $\hat{\Psi}^{*bootstrap}$  cet estimateur, nous obtiendrons donc  $B$  réalisations  $\hat{\Psi}^{*bootstrap}$  et  $B$  vecteurs résidus  $\hat{\varepsilon}_t^{*bootstrap} = Y_t^{*bootstrap} - S_{\hat{\Psi}^{*bootstrap}}(Y_{t-1}^{*bootstrap})$ . L'erreur de prévision sur un modèle de prévision pour le jeu de données  $B^{*bootstrap}$ , est l'estimateur  $\hat{\sigma}_t^{2*bootstrap}$  de  $\sigma_t^2$ . Nous aurons donc :

$$\hat{\sigma}_t^{2*bootstrap} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_t^{(i)*bootstrap} - S_{\hat{\Psi}^{*bootstrap}}(Y_{t-1}^{(i)*bootstrap}))^2$$

où  $\hat{\varepsilon}_t^{(i)*bootstrap} = Y_t^{(i)*bootstrap} - S_{\hat{\Psi}^{*bootstrap}}(Y_{t-1}^{(i)*bootstrap})$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\hat{\varepsilon}_t^{*bootstrap}$ .

Finalement, notons  $\Sigma_t = (\hat{\sigma}_t^{2(1)*bootstrap}, \hat{\sigma}_t^{2(2)*bootstrap}, \dots, \hat{\sigma}_t^{2(B)*bootstrap})$  de taille  $B$ , de moyenne

$\hat{\mu}_{bootstrap} = \overline{\hat{\sigma}_t^{2*}}$  et de variance  $\hat{\sigma}_t^{2*}$  :

$$\hat{\mu}_{bootstrap} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\sigma}_t^{2*} \text{ et } \hat{\sigma}_{bootstrap}^2 = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{\sigma}_t^{2*} - \overline{\hat{\sigma}_t^{2*}})^2$$

L'algorithme de ré-échantonnage de type bootstrap en blocs chevauchés, s'applique à nos données brutes sur la période 1996 :04-2006 :12, qui portent sur les dix séries de la production industrielle en Tunisie, définies sur le tableau (1.1).

### 3.4.1. Construction d'un modèle à seuil de prévision ponctuelle

Notons que pour  $f = 1$ , l'erreur de prévision  $\varepsilon_{t+1}$  est définie par l'écart, entre le vrai processus  $Y_{t+1}$  et le skeleton  $S(Y_{t+1}; \Psi)$ . La prévision ponctuelle ne pose pas de problème particulier car

$$E[\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t] = 0$$

et nous aurons,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1|t} &= E[Y_{t+1} \mid \Omega_t] \\ &= S(Y_t; \Psi) \end{aligned}$$

Mais, dès que  $f > 1$ , dans le cas du modèle à seuil, il n'y a pas de formule analytique, permettant de calculer la prévision ponctuelle. Par exemple, pour  $f = 2$ , la prévision ponctuelle optimale correspond à :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+2|t} &= E[Y_{t+2} \mid \Omega_t] \\ &\neq E[S(Y_{t+1}; \Psi) \mid \Omega_t] \end{aligned}$$

Or, en général l'opérateur linéaire « *Espérance mathématique conditionnelle* »  $E[.]$ , n'est pas compatible par interchangeement avec l'opérateur non-linéaire « *Skeleton* »  $S(.)$ . De ce fait, il est admis que :  $E[S(.)] \neq S(E[.])$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} E[S(Y_{t+1}; \Psi) \mid \Omega_t] &\neq S(E[Y_{t+1} \mid \Omega_t]; \Psi) \\ &= S(Y_{t+1|t}; \Psi) \end{aligned}$$

d'où,  $\hat{Y}_{t+2|t} \neq S(\hat{Y}_{t+1|t}; \Psi)$ .

Or, dans ce cas non-linéaire, il n'existe pas de relation récursive simple, entre la prévision à des horizons successifs, qui autoriserait de faire la prévision pour  $f > 1$ . Pour palier ce problème et faire la prévision, nous sommes obligés de faire appel, à d'autres techniques d'approximations ou méthodes d'intégrations numériques. Parmi ces méthodes, nous pourrions mentionner les cinq méthodes suivantes : la méthode de « *Skeleton* » ou naïve utilisée par Brown et Mariano (1984), Tong (1990) et Granger et Teräsvirta (1993) ; la méthode numérique de simulation par Bootstrap ; la méthode numérique de simulation par Monte Carlo ; la méthode « *Normal Forecast Error* » qui, consiste à exprimer la prévision optimale, en fonction de la distribution conditionnelle du « vrai » processus  $Y_{t+1}$ , par rapport à l'ensemble d'information disponible, à la date  $t$  et la méthode d'*Estimation Dynamique*.

En se basant sur le terme de biais de prévision, comme critère de comparaison de ces techniques de prévision ponctuelle, Lin et Granger (1994), ont montré que les méthodes numériques de simulation de type Bootstrap<sup>238</sup>, ou par la technique de Monte Carlo dominant la méthode naïve.

Empiriquement, nous allons utiliser plus spécifiquement, la méthode de simulation par Bootstrap en blocs chevauchés, car c'est la technique la plus adaptée, pour la construction des modèles non-linéaires de prévision, c'est-à-dire des modèles non-linéaires en moyennes pour des données futures.

Ainsi, pour  $f = 2$ , nous avons  $\hat{Y}_{t+2|t} = E[Y_{t+2} \setminus \Omega_t]$

or,  $S(Y_{t+1}; \Psi) = S(S(Y_t + \varepsilon_{t+1}; \Psi))$

d'où,  $\hat{Y}_{t+2|t} = E[S(\hat{Y}_{t+2|t} + \varepsilon_{t+1}; \Psi) \setminus \Omega_t]$

et comme par définition l'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $\varepsilon$  de fonction de densité de probabilité<sup>239</sup>  $\varphi(\cdot)$ , s'écrit :  $E[\varepsilon] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\varepsilon) d\varepsilon$

<sup>238</sup> Efron et Tibshirani (1993), affirment que le mot *bootstrap* provient de l'expression anglaise « *to pull oneself up by one's bootstrap* ».

<sup>239</sup> Dans ce contexte,  $\varphi(\varepsilon)$  désigne la fonction de densité du choc  $\varepsilon_{t+1}$ .

alors, la prévision de la valeur de  $Y_{t+2}$ , sachant l'information à la date  $t$  est donnée par

$$\text{l'expression : } \hat{Y}_{t+2|t} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{Y}_{t+2|t} + \varepsilon_{t+1}; \Psi) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

Brown et Mariano (1989), ont montré que cette approche de prévision est « naïve », car elle nécessite de supposer que  $\varepsilon_{t+1} = 0$  dans  $\hat{Y}_{t+2|t}$ , ce qui rend la prévision biaisée.

$$\text{Dans ce cas, } \hat{Y}_{t+2|t} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{Y}_{t+2|t}; \Psi) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

D'après, l'expression  $\varepsilon_{t+1} = Y_{t+1} - S(Y_t, \Psi)$ , nous supposons que la fonction de densité associée, à l'erreur de prévision  $\varepsilon_{t+1}$ , prend la forme  $\varphi(\varepsilon_{t+1}) = \varphi[Y_{t+1} - S(Y_t, \Psi)]$ . Dans cette expression, conditionnellement à l'ensemble d'information disponible  $\Omega_t$ , le *skeleton*  $F(Y_t; \Psi)$  est connu.

Ainsi, la densité non conditionnelle, des erreurs de prévision  $\varphi(\varepsilon_{t+1})$  correspond à la densité conditionnelle du vrai processus  $Y_{t+1}$ , centré sur  $S(Y_t; \Psi)$ . Étant donné, que le *skeleton*

$F(Y_{t+1}; \Psi)$  correspond à l'espérance conditionnelle de  $Y_{t+2}$  sachant  $Y_{t+1}$ , nous aurons :

$$\phi(Y_{t+1}; \Omega_t) = \varphi(Y_{t+1} - S(Y_t; \Psi)).$$

où  $\phi(Y_{t+1}; \Omega_t)$  désigne la distribution de  $Y_{t+1}$  sachant  $\Omega_t$ .

$$\text{Alors, } \hat{Y}_{t+2|t} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(Y_{t+1}; \Psi) \varphi(Y_{t+1} | \Omega_t) dY_{t+1}.$$

D'où, la prévision optimale, ponctuelle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\hat{Y}_{t+2|t} = \int_{-\infty}^{+\infty} E[(Y_{t+2} | Y_{t+1})] \varphi(Y_{t+1} | \Omega_t) dY_{t+1}$$

où,  $\varphi(Y_{t+1} | \Omega_t)$  désigne la distribution conditionnelle de  $Y_{t+1}$ , par rapport à l'ensemble d'information disponible  $\Omega_t$ . van Dijk, Teräsvirta et Franses (2002), montrent que cette

distribution correspond à la distribution du résidu  $\varepsilon_{t+1}$ , avec une moyenne égale à  $S(Y_t; \Psi)$ .

Cette formule est donnée par la méthode « *Normal Forecast Error* ». Mais, comme il n'est pas possible de dériver une expression analytique de cette intégrale, afin d'évaluer la prévision ponctuelle, Lin et Granger (1994), ont proposé d'avoir recours à la technique numérique, fondée sur la simulation par bootstrap.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

---

L'avantage de cette technique, c'est qu'elle ne nécessite pas la connaissance, *a priori*, des distributions bootstrapées. Le principe de la méthode consiste à ré-échantillonner les résidus historiques  $\varepsilon_t$ , en tirant des séquences  $\{\hat{\varepsilon}_{1, t+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_{i, t+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_{N, t+1}\}$ , dans la séquence des résidus historiques  $\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_t\}$ . De ce fait, la prévision ponctuelle de  $Y_{t+2}$  par la méthode de bootstrap, notée  $\hat{Y}_{t+2 \setminus t}^{bootstrap}$ , est définie comme étant une moyenne empirique :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+2 \setminus t}^{bootstrap} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{Y}_{i, t+2 \setminus t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(\hat{Y}_{i, t+1 \setminus t}; \Psi) + \hat{\varepsilon}_{i, t+1}\end{aligned}$$

Or, la généralisation de ces deux formules pour un horizon  $f > 1$ , fournit des relations de récurrence, qui permettent de simuler par bootstrap la valeur de la prévision ponctuelle quelque soit  $f \geq 2$ . Cette généralisation est exprimée par la relation suivante :

$$\hat{Y}_{i, t+f \setminus t}^{bootstrap} = S(\hat{Y}_{i, t+f-1 \setminus t}; \Psi) + \hat{\varepsilon}_{i, t+f-1}$$

où  $\hat{\varepsilon}_{i, t+f-1}$  désigne un tirage des chocs  $\varepsilon_{i, t+f-1}$  issus, au hasard avec remise, dans la séquence historique des chocs.

L'avantage de la méthode de prévision ponctuelle assurée par la technique de bootstrap en blocs chevauchés réside dans le fait qu'elle se reproduit par simulation (tirage avec remise) de données, à partir d'un nombre fini d'observations, dites échantillon bootstrapé. Cette technique est destinée à faciliter l'inférence statistique dans les situations complexes, où les méthodes analytiques ne suffisent pas. Dans notre cas par exemple, elle autorise l'estimation de la distribution conditionnelle  $\varphi(Y_{t+f} \setminus \Omega_t)$  et/ou la structure d'un intervalle de confiance.

### 3.4.2. Construction d'un modèle à seuil de prévision par intervalle de confiance

À l'inverse de la prévision ponctuelle, la prévision par intervalle de confiance permet de tenir compte de l'incertitude. Techniquement, les modèles non-linéaires rejettent la propriété de symétrie, des intervalles de confiances, pour déterminer la région de confiance, car, ils adoptent l'asymétrie comme caractéristique de base, pour justifier l'hypothèse de non-linéarité<sup>240</sup>. Teräsvirta (2006), montre que l'intervalle de confiance sur la prévision peut être soit symétrique ou non symétrique, soit continu ou non continu, tout dépend de la forme de la densité conditionnelle  $\varphi(Y_{t+1} \setminus \Omega_t)$ . Plusieurs études sont élaborées, afin de construire des modèles de prévision par intervalles de confiances, en utilisant le bootstrap en blocs chevauchés. L'objectif de l'applicabilité de cette technique est de résoudre les problèmes d'inférences statistiques, en relation avec l'insuffisance ou manque de données. Car cette limite biaise les tests usuels : de racine unitaire, d'hétéroscédasticité et de cointégration étudiées par van Giersbergen (1998). Hyndman (1996), a appliqué plusieurs procédures pour déterminer un intervalle de confiance d'une prévision, en utilisant à côté de la technique de bootstrap d'autres techniques graphiques. Ces procédures se basent sur les modèles non-linéaires et elles sont détaillées comme suit :

#### 1<sup>ère</sup> méthode :

Elle consiste à construire un intervalle de confiance symétrique et continu autour de  $\hat{Y}_{t+f \setminus t}$  tel que :

$$P[\hat{Y}_{t+f \setminus t} - \tau \leq Y_{t+f} \leq \hat{Y}_{t+f \setminus t} + \tau \setminus \Omega_t] = 1 - \alpha$$

#### 2<sup>ème</sup> méthode :

Elle consiste à construire un intervalle de confiance non nécessairement symétrique, mais continu entre les quantiles  $\varphi^{-1}(\alpha/2)$  et  $\varphi^{-1}(1-\alpha/2)$  de la distribution conditionnelle  $\varphi(Y_{t+1} \setminus \Omega_t)$  tel que :

$$P[\varphi^{-1}(\alpha/2) \leq Y_{t+f} \leq \varphi^{-1}(1-\alpha/2) \setminus \Omega_t] = 1 - \alpha$$

3<sup>ème</sup> méthode :

Elle consiste à construire un intervalle de confiance, non nécessairement symétrique et nécessairement continu, entre les régions de plus haute probabilité ou HDR (*High Density Region*) tel que :

$$HDR_{\alpha} = \{Y_{t+f} \setminus \varphi(Y_{t+f} \setminus \Omega_t) \geq \pi\}$$

où  $\pi$  est un seuil à déterminer telle que la probabilité  $P[Y_{t+f} \in HDR_{\alpha} \setminus \Omega_t] = 1 - \alpha$ .

Hyndman (1995), montre que d'une part, cette méthode est très facile à mettre en œuvre, à la suite de simulation bootstrap, et d'autre part, la HDR définit la région de confiance  $(1 - \alpha)$  d'une prévision des modèles non linéaires. Donc, elle permet, à la fois de tenir compte de l'asymétrie et de l'aspect multi-modal de la distribution de la prévision. C'est, donc, une des raisons pour lesquelles, cette méthode est bien appropriée dans notre cas.

### 3.4.3. Construction d'un modèle à seuil de prévision par densité

Teräsvirta (2006), montre que la prévision par densité est plus avantageuse que la prévision ponctuelle. Dans le cadre de l'analyse prévisionnelle la dynamique des fluctuations cycliques, cette méthode admet comme avantage, d'une part elle tient compte du phénomène d'asymétrie de la distribution conditionnelle de la prévision  $\varphi(Y_{t+f} \setminus \Omega_t)$ , d'autre part, elle inclut la possibilité des distributions bimodales ou multimodales. Ces caractéristiques sont fondamentales pour notre étude, du fait qu'un modèle non-linéaire peut engendrer une distribution de prévisions asymétriques, et ceci même dans le cas d'une distribution symétrique des résidus, comme le montre Teräsvirta (2006).

Teräsvirta (2006), ajoute que les simulations bootstrap  $\hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(i)}$  peuvent être prises comme des réalisations de la distribution conditionnelle théorique  $\varphi(Y_{t+f} \setminus \Omega_t)$ , dont l'espérance correspond à la prévision optimale ponctuelle  $\hat{Y}_{t+f \setminus t} = E[Y_{t+f} \setminus \Omega_t]$ . Un estimateur à noyau de la

densité conditionnelle  $\varphi(Y_{t+f} \setminus \Omega_t)$ , au point  $\hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(i)}$ , correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  simulation, noté  $\hat{\varphi}(\hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(i)} \setminus \Omega_t)$ , est tel que :

$$\hat{\varphi}(\hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(i)} \setminus \Omega_t) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B K\left(\frac{\hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(i)} - \hat{Y}_{t+f \setminus t}^{(j)}}{\lambda}\right)$$

où  $K(\cdot)$  désigne une fonction kernel et  $\lambda$  est un paramètre de lissage (*band-width parameter*). Yatchew (2003), montre que le choix de la fonction de kernel n'a pas de grande importance, sur le biais d'estimation de la fonction de densité et ajoute que le paramètre  $\lambda$  peut être adopté comme moyen, pour minimiser le critère d'évaluation de la qualité d'ajustement de l'estimateur comme le critère *AMISE* (*Approximate Mean Integrated Squared Error*), ou celui de *GCV* (*General Cross Validation*).

### 3.4.4. L'évaluation des performances prédictives

L'une des méthodes simples de l'évaluation des performances prédictives consiste à comparer la qualité prédictive d'une même série temporelle macroéconomique par deux modèles différents. Cette technique se base sur le calcul de ces trois statistiques : *MSE* (*Mean Squared Error*), *RMSE* (*Root Mean Squared Error*) et *MAE* (*Mean Absolute Error*).

Pour une série  $Y_t$  de taille  $T$  observations, les trois indicateurs statistiques d'évaluation des performances prédictives sur un horizon  $H$  sont définies par:

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{H} \sum_{t=T}^{T+H} (Y_t^p - Y_t^a)^2 \\ RMSE &= \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{t=T}^{T+H} (Y_t^p - Y_t^a)^2} \\ MAE &= \frac{1}{H} \sum_{t=T}^{T+H} |Y_t^p - Y_t^a| \end{aligned}$$

où  $Y_t^p$  et  $Y_t^a$  sont respectivement les valeurs  $Y_t$  prévue et actuelle de la série étudiée.



---

Dans le cadre de la modélisation STAR, Teräsvirta (2006), a indiqué que la comparaison des qualités prédictives pour deux modèles non-linéaires à changement de régimes consiste à choisir comme meilleur modèle de prédiction, celui qui donne des petites valeurs des statistiques d'évaluation des performances prédictives. Mais, nous voyons par la suite, qu'une autre façon d'évaluer les performances prédictives d'un modèle non-linéaire STAR estimé peut être réalisée à l'aide des tests statistiques d'évaluation de la qualité prédictive.

## **3.5. Tentative empirique de modélisation et de prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie**

### **3.5.1. Analyses descriptives de la stationnarité**

Depuis quelques années, Bidarkota (1998), affirmait que la détection d'une possible asymétrie, en la moyenne conditionnelle, d'une série temporelle décrivant le comportement dynamique d'une variable macroéconomique est source évidente de la prise en compte de non-linéarité en moyenne. En plus, s'ajoute la contribution de Chiarella (1990), en la validation théorique en dynamique économique de l'hypothèse de non-linéarité. Toutes ces raisons ont conduit à un profond renouvellement de la manière, dont il convient de concevoir une prévision économique et de tester sa validité. En particulier, la littérature de la modélisation STAR, est riche en essais de prévision des cycles de la production industrielle. Par exemple à titre illustratif, nous pouvons citer les travaux de Teräsvirta et Anderson (1992), Kauppi, Lassila et Teräsvirta (1996), Huh (1998), Bodo, Golinelli et Parigi (2000), Bruno et Lupi (2001), Zizza (2002), Siliverstovs et van Dijk (2003). Toutefois, la plupart de ces études empiriques, portant sur l'identification des sources de fluctuations économiques, qui sont élaborées, en testant l'asymétrie des séries de la production industrielle rejettent la croyance largement répandue, dans les années soixante dix, et jusqu'à une date relativement récente, en la possibilité de modéliser l'activité économique, par des spécifications autorégressives linéaires, où le changement au niveau du comportement asymétrique de la série, résulte d'une dynamique exogène créée

---

artificiellement, par des chocs externes de nature différente (technologique, monétaires ou réels), qui frappent le terme d'innovation, et donc éliminent l'endogénéité des fluctuations économiques. Or, comme le fait remarquer Eitrheim et Teräsvirta (1996), l'importance de la modélisation STAR consiste à justifier, d'une part la dynamique endogène déterministe des fluctuations cycliques et d'autre part, à mettre en évidence le caractère non-linéaire (asymétrique) de leurs comportements dynamiques et prouvent, ainsi, l'efficacité d'utiliser particulièrement les modèles STAR pour détecter cette asymétrie. Mais, la puissance de la dite modélisation à détecter les effets de seuils et de mettre en évidence des comportements, tout à fait, asymétriques dépend, en réalité, de la nature des données ainsi manipulées.

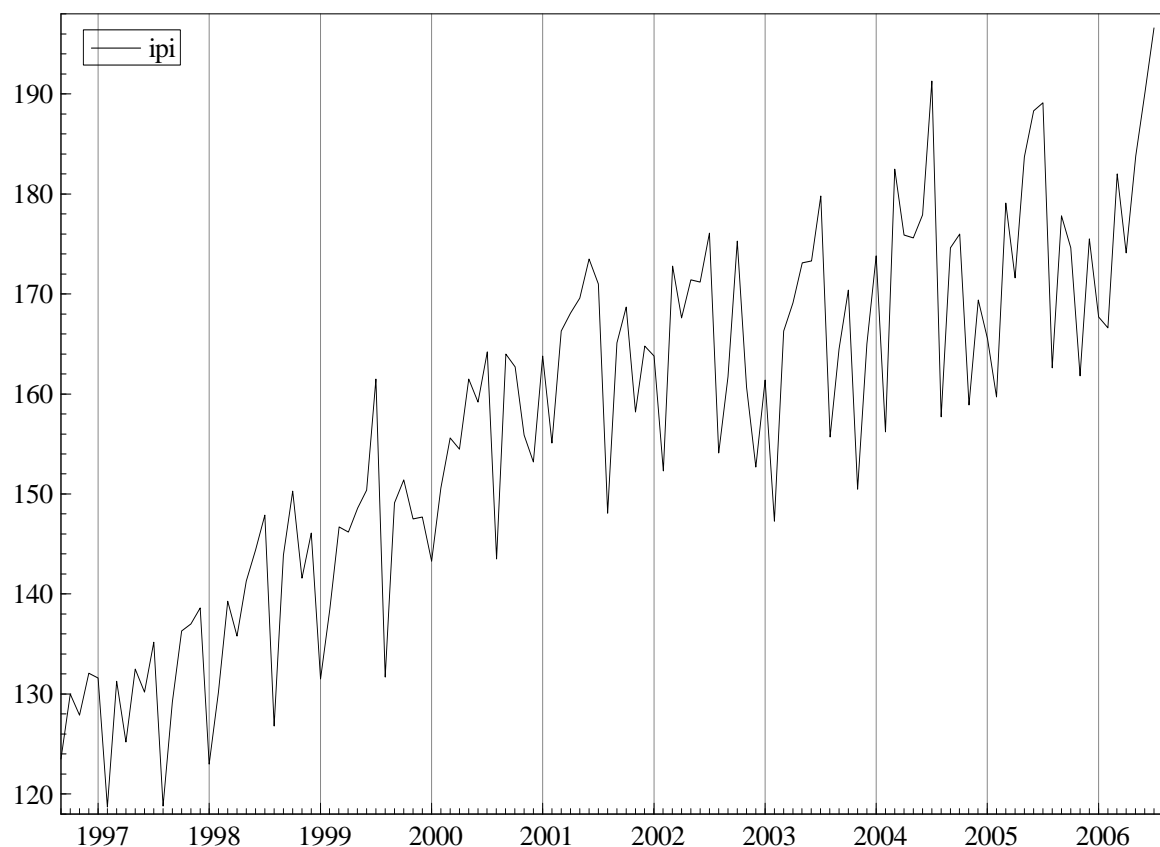
En particulier, Luukkonen et Teräsvirta (1991), ont montré que la non-linéarité est évidente pour les données de production industrielle en USA. Par contre, Mills (1995a), a pu confirmer la présence des fluctuations asymétriques, comme sources de non-linéarité, dans le cycle des séries macroéconomiques britanniques, y compris celle de la production industrielle. En plus, Öcal (1995), dans le même objectif de recherche, en modélisant pour 9 vraies séries macroéconomiques britanniques trimestrielles y incluse celle de la production industrielle (corrigées des variations saisonnières), à l'aide des modèles STAR a pu aboutir à la conclusion que la non linéarité est plus évidente, dans les données de production industrielle. Sur la même voie, Öcal et Osborn (2000), ont contribué à la modélisation STAR du cycle de la consommation et de la production en UK. D'un autre côté, Pötscher et Prucha (1997), ont noté que les caractéristiques d'un cycle se trouvent enracinées sur le comportement dynamique d'une série macroéconomique et en conséquence, ces auteurs ont insisté sur le fait qu'il faut rendre compte de la dynamique non-linéaire, d'un modèle économétrique, au lieu de penser à une source exogène de modélisation d'un cycle. Ce constat a donné la lumière, en particulier, pour Bergström (1995), Kauppi, Lassila et Teräsvirta (1996), afin d'affirmer l'importance de modéliser et notamment de prévoir le cycle de la production industrielle, par des modèles STAR. Sur la même voie, Huh (1998) et Bodo, Golinelli et Parigi (2000), ont déclaré l'utilité des tenir compte de l'asymétrie lors de la prévision du cycle de la production industrielle. D'autre part, Simpson, Osborn et Sensier (2001), ont souligné l'efficacité d'usage du cycle comme moyen de

---

prévision de la production industrielle. Mais, García-Ferrer et Bujosa-Brun (2000) et Bruno et Lupi (2001), ont montré une technique de prévision du cycle inobservable de la production industrielle.

L'objet de cette section est de mettre en oeuvre des tests, permettant de justifier l'intuition, selon laquelle la dynamique non-linéaire du cycle de la production industrielles, en Tunisie, est un cycle endogène dans le contexte, où les récessions conduisent aux expansions et inversement de façon endogène, comme il a été déjà montré, de façon exploratoire au niveau de la première partie, puis justifié qualitativement, au niveau de la deuxième partie, de ce document par le fait que le cycle n'a pas besoin de source d'impulsion exogène; puisque son déclenchement naturel peut correspondre au mode de fonctionnement d'un cycle limite. Dès lors, cette illustration empirique est basée sur une procédure de référence, fournie par Teräsvirta (1994a) et contenant les étapes suivantes: tester la stationnarité; estimer la meilleure structure de la partie linéaire et déterministe du modèle STAR ; utiliser un diagnostic pour tester la linéarité et évaluer par l'estimation de la meilleure structure du modèle STAR et finalement, construire un modèle optimal de prévision.

Voilà, le but de cette application est donc, de modéliser les séries chronologiques de la production industrielle en Tunisie, portées sur le tableau (1.1), à l'aide des modèles de changements de régimes avec transitions lisses. La période d'analyse est de 1996:4 - 2006:12 (base 100 en 1990) et les séries des taux de croissance mensuelle ainsi sont analysées. Pour commencer, la série mensuelle en niveau de l'indice de production industrielle, est présentée sur la figure suivante :



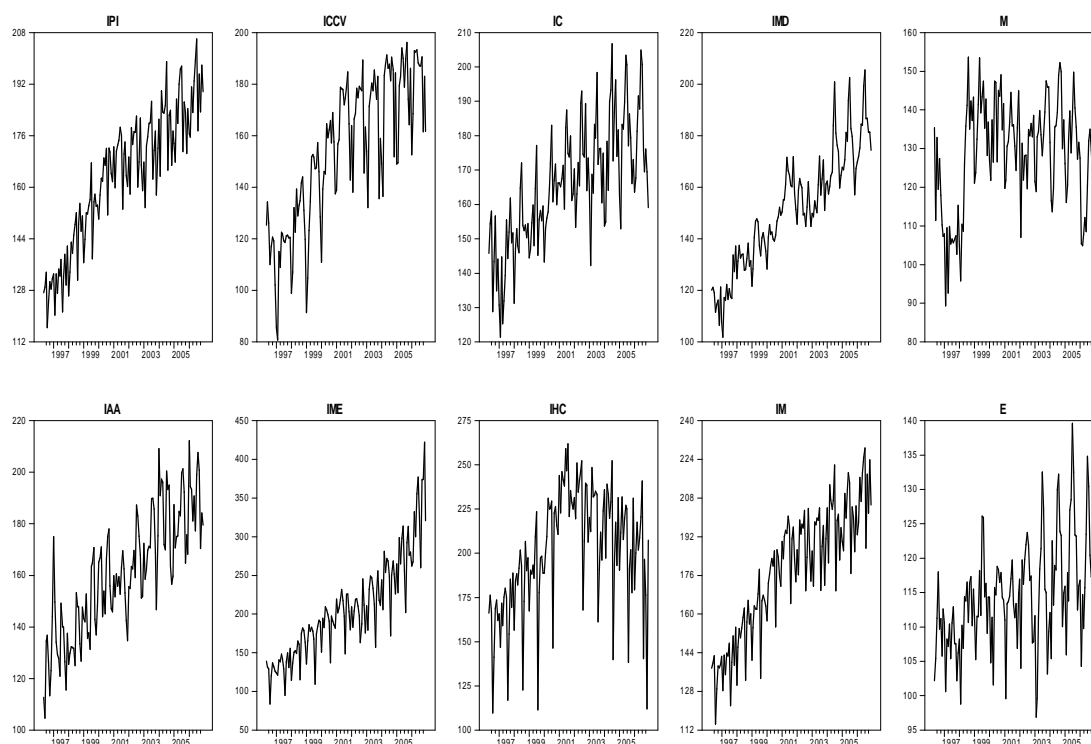
**Figure 3.62 : Série temporelle non stationnaire en niveau de l'indice de production industrielle tunisien**

La figure (3.62), illustre l'allure de la série temporelle mensuelle de l'indice de la production industrielle en Tunisie (IPI). Nous remarquons d'une part, l'existence d'une tendance à la hausse et d'autre part, la présence des phases cycliques, avec de lentes variations, suivies de très fortes variations, laissant à penser que les comportements à la hausse et à la baisse sont sensiblement différents. Ce type de constatation empirique nous pousse à tester un modèle à seuil. De la même manière, l'examen graphique des autres séries en niveaux de la production industrielle en Tunisie, aboutit à des constatations similaires et en conséquence, permet de justifier que l'utilisation de modèles à seuil, sur des données macroéconomiques de l'indice de la production industrielle tunisienne a été confirmée. Mais, d'un autre côté, le simple examen des graphiques des séries mensuelles en niveaux de IPI, E, IM, M, IAA, ICCV, IME, IC, IHC et

IMD, nous permettent de conclure qu'elles sont d'une part, non stationnaires et d'autre part, elles risquent d'être attrapées, par des effets de saisonnalité, comme l'illustre la figure (3.63).

## Pot-pourri de séries non stationnaires en niveau

1996:04 - 2006:12



**Figure 3.63: Série mensuelles de la production industrielle en Tunisie non stationnaires en niveaux**

Puisqu'il ressort de la figure (3.63), que toutes les séries étudiées sont issues des processus non stationnaires. Nous devons avant toutes choses, chercher à les stationnariser, en d'autres termes, trouver une transformation stationnaire de ces processus générateurs des données observées. Or, comme nous l'avons déjà signalé, au niveau de la première partie, la majeure difficulté réside dans le fait qu'il existe différentes origines de non stationnarité et qu'à chaque source de la non-stationnarité, est associée une méthode propre de stationnarisation. Dans notre contexte, comme nous prévoyons la modélisation STAR, présentant une rupture de moyenne,

---

alors dans ce cas, la non-stationnarité peut provenir de la rupture du modèle, ou plus généralement, de la non-linéarité. Or, cette dernière caractéristique signifie que les grandeurs dynamiques reliées entre elles n'évoluent pas de manière proportionnelle. Ceci provient de l'existence d'un effet de seuil ou encore de la présence du chaos, quand il y a une instabilité endogène intensive.

Pour essayer d'atteindre la propriété de stationnarité des séries ainsi étudiées, nous solutionnons à l'instar de Gómez (1999), par une première transformation logarithmique. En pratiquant l'opérateur  $\ln$ , nous libérons des unités de mesure et nous introduisons des unités de pourcentage qui sont relatives, qui est une caractéristique bien désirée, lorsque les données couvrent de longues périodes. Toutefois, l'examen graphique de la figure (3.64), des séries temporelles montre qu'elles sont non stationnaires en logarithme. Ainsi, nous constatons que malgré l'avantage de cette étape préliminaire, elle n'a pas pu nous aider à récupérer la propriété de stationnarité cherchée. D'autre part, comme la présence d'une saisonnalité permet de perturber la pertinence d'une lecture statistique des évolutions des séries analysées, alors l'élimination de celle-ci permet de lisser ces séries et récupérer leurs dynamiques, nécessaires pour fournir de prévisions fiables. Donc, il nous faut d'abord penser à un outil, capable de désaisonnaliser ces séries. Pour ce faire, nous appliquons un filtrage de ces séries, par la méthode de Holt et Winters<sup>241</sup>.

---

<sup>241</sup> Voir Holt, C. C., (1957), « *Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages* », ONR Research Memorandum, Carnegie Institute of Technology 52, et Winters, P.R., (1960), « *Forecasting sales by exponentially weighted moving averages* », *Management Science* 6, pp. 324-342.

### Pot-pourri de séries non stationnaires en logarithme

1996:04 - 2006:12

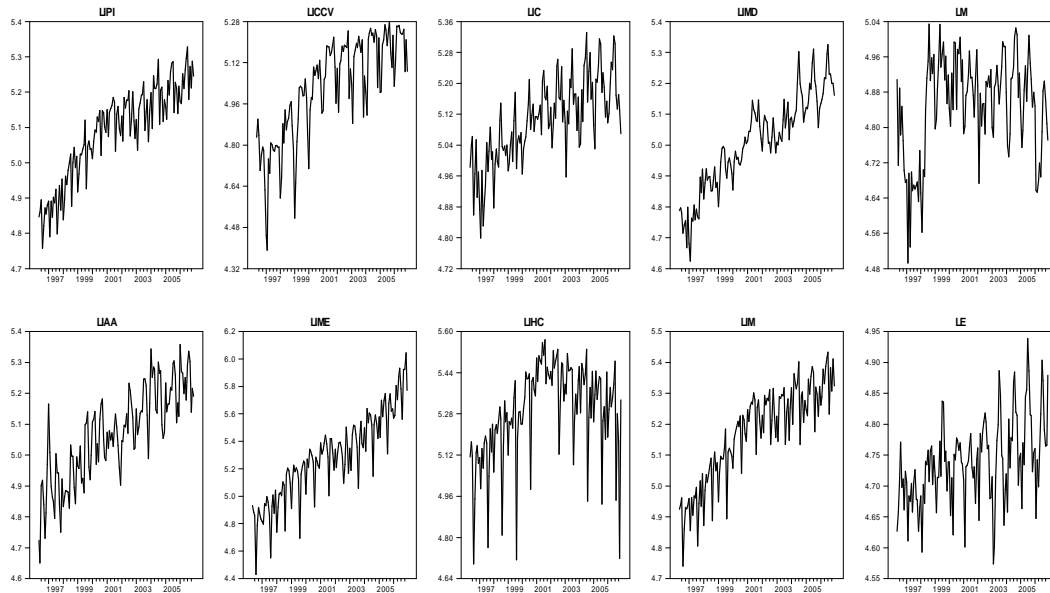


Figure 3.64: Séries temporelles non stationnaires en logarithme

Puisque les séries mensuelles étudiées présentent des saisonnalités de périodes  $s = 12$ , si en plus, nous supposons que l'effet de la saison  $S_t$  est multiplicatif, alors selon la procédure de Holt et Winters, il sera avantageux de l'estimer, à partir de la formule suivante :

$$S_t = \alpha \left( \frac{Y_t}{\bar{Y}_t} \right) + (1 - \alpha) Y_{t-s}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Après le traitement, la série désaisonnalisée (après élimination de l'effet saisonnier) peut être calculée, en appliquant la formule définie comme suit :

$$\bar{Y}_t = \beta \left( \frac{Y_t}{S_{t-s}} \right) + (1 - \beta) (\bar{Y}_{t-1} + D_{t-1}), \quad 0 < \beta < 1$$

où  $D_t$  est la tendance, dont la composante sera identifiée, selon l'expression donnée par :

$$D_t = d (\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-1}) + (1 - d) D_{t-1}, \quad 0 < d < 1$$

### Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

Ainsi, après le traitement, nous obtenons des séries de la production industrielle en Tunisie, corrigées des variations saisonnières (CVS), comme l'illustre la figure (3.65). Après avoir proposé de filtrer les séries, par la méthode de Holt et Winters, de façon à retirer les saisonnalités. Nous appliquons, maintenant, la méthode de Geweke et Porter-Husak, de façon à retirer les tendances colorées en bleu sur la figure (3.65). De ce fait, afin de réduire la saisonnalité due à la corrélation intrabranche du secteur industriel et de créer un lissage des données, nous considérons les taux de croissances annuelles<sup>242</sup> des différentes branches sectorielles de la production industrielle en Tunisie, sur la période (1996:4-2006:12) définies par :

$$kgrowth_t = \log(k_t) - \log(k_{t-12}), \quad k \in \{IPI; IAA; ICCV; IME; IC; IHC; IMD; IM; M; E\}$$

## Désaisonnalisation des séries

1996:04 - 2006:12

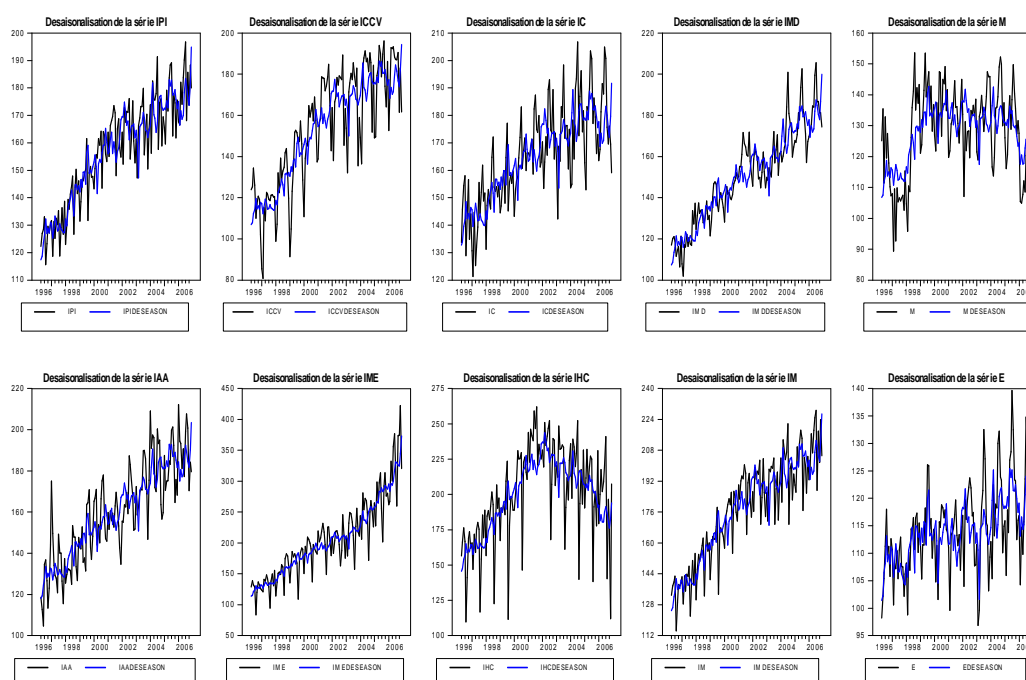


Figure 3.65: Dessaisonnalisation des séries de la production industrielle tunisienne

<sup>242</sup> Ce filtre aide à clarifier les fluctuations cycliques des variables par élimination de la saisonnalité et/ou réduction de la corrélation due à la saisonnalité.



Ensuite, après avoir désaisonnalisé les séries de la production industrielle en Tunisie, une première différenciation de ces séries permet d'annuler la tendance. Nous obtenons, donc, sur la figure (3.66), des séries stationnaires des taux de croissance mensuelles de production industrielle définies par :

$$kmgrowth_t = \log(k_t) - \log(k_{t-1}), \quad k \in \{IPI; IAA; ICCV; IME; IC; IHC; IMD; IM; M; E\}$$

## Pot-pourri de séries stationnaires en première différence logarithme

1996:04 - 2006:12

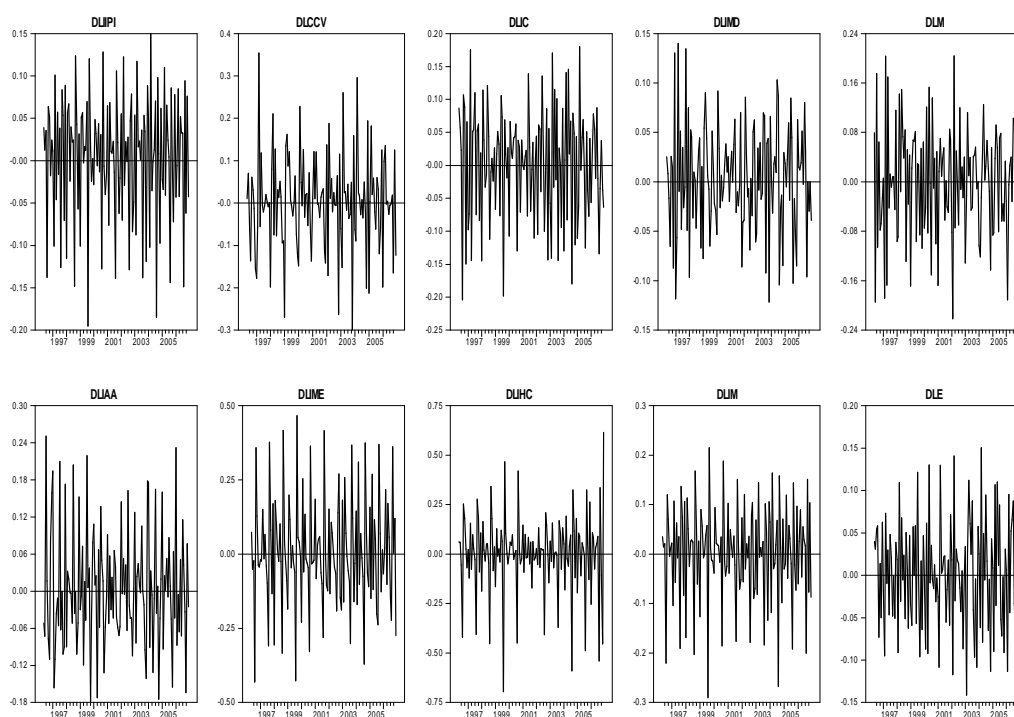


Figure 3.66: Séries temporelles stationnaires en première différence logarithmique

En conclusion, l'examen des graphiques justifie nettement que d'une part, la présence d'une asymétrie en moyenne des séries et d'autre part, la présence des fluctuations endogènes, sous formes des oscillations cycliques auto-entretenues, autour d'une tendance déterministe et qui commande la dynamique cyclique, au niveau des régimes centraux, instables des séries après stationnarisation : les déviations positives et négatives des phases d'expansions et

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

de récessions présentent le même dynamisme, au niveau des régimes intermédiaires provient d'un retour rapide, de différentes tailles, vers les zones centrales de non-convergence et de persistance. Ces régimes centraux des séries stationnaires leur évolution est cyclique et périodique. Dans ce cas, l'ensemble des trajectoires ne déclenche pas leur départ au centre de coordonnées (point fixe), mais elles tendent à converger vers un cycle, et cet attracteur est appelé cycle limite. La zone d'accumulation définit, ainsi, une zone d'attraction ou d'émergence des cycles limites, caractérisant les fluctuations endogènes dynamiques des séries.

Après cet exposé descriptif de la stationnarité, maintenant, afin d'accomplir cette procédure dans un sens plus pratique, nous allons commencer, tout d'abord, par étudier les caractéristiques statistiques des variables :

**Tableau 3.15 : Les caractéristiques statistiques des séries mensuelles (1996:04-2006:12)**

	DLIPI	DLIAA	DLICCV	DLIME	DLIC	DLIHC	DLIMD	DLIM	DLM	DLE
<b>Obs</b>	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128
<b>SM</b>	0.0030	0.0032	0.0020	0.0071	0.0013	0.0022	0.0031	0.0033	-0.0004	0.0022
<b>Max</b>	0.1556	0.2504	0.3538	0.4661	0.1801	0.6156	0.1398	0.2148	0.2037	0.1503
<b>Min</b>	-0.2039	-0.1783	-0.2992	-0.4301	-0.2035	-0.6949	-0.1214	-0.2899	-0.2210	-0.1412
<b>SE</b>	0.0754	0.0936	0.1104	0.1826	0.0837	0.1992	0.0534	0.0965	0.0867	0.0633
<b>t-S</b>	0.4528	0.3916	0.2129	0.4412	0.1836	0.1249	0.6581	0.3969	-0.0586	0.4076
<b>Sk</b>	-0.5838	0.5205	0.0711	0.2191	-0.3080	-0.7511	-0.0262	-0.6289	-0.1607	0.0569
<b>Ku</b>	-0.0732	0.0045	0.9178	0.1727	-0.4182	2.3681	-0.0728	0.5097	-0.1114	0.4669
<b>J-B</b>	7.3010	5.7796	4.6009	1.1839	2.9575	41.9450	0.0429	9.8252	0.6172	1.2318
<b>Var</b>	0.0056	0.0087	0.0122	0.0333	0.0070	0.0396	0.0028	0.0093	0.0075	0.0040
<b>SM</b>	0.0066	0.0082	0.0097	0.0161	0.0073	0.0176	0.0047	0.0085	0.0076	0.0055

*Obs ; SM ; Max ; Min ; SE ; t-S ; Sk ; Ku ; J-B ; Var et SM indiquent respectivement le nombre d'observations ; la moyenne ; le maximum ; le minimum ; l'erreur standard ; la statistique de Student ; Skewness ; Kurtosis ; la statistique de Jarque-Bera ; Variance et moyenne de l'erreur standard.*

*Source : calculs réalisés sur Rats 6.*

Ainsi, le tableau (3.15), montre quelques propriétés statistiques concernant les séries mensuelles de la production industrielle en question. Les statistiques calculées sont : la moyenne et la variance de l'erreur standard, le minimum, le maximum, les coefficients de Skewness et de Kurtosis, la statistique de Jarque-Bera et la statistique de Student. Au regard de ce tableau, nous constatons un rejet de l'hypothèse de normalité pour les cinq séries de la production industrielle en différence première (DLIPI, DLIAA, DLICCV, DLIHC, DLIM), pour lesquelles les valeurs de la statistique de Jarque-Bera (JB), sont supérieures aux valeurs critiques. Mais, pour les cinq

---

autres séries transformées en différence première (DLIME, DLIC, DLIMD, DLIM, DLE), l'hypothèse de normalité ne peut plus être rejetée. D'autre part, au regard du tableau ci-dessus, nous percevons que la statistique de Skewness est non nulle pour toutes les données, ce qui implique, sans doute, que pour l'ensemble des séries de la production industrielle tunisienne, les données ne peuvent pas être générées par des processus dont les distributions sont symétriques. Mais, au contraire, ceci nous conduit à constater que ces données proviennent des réalisations des processus, ayant tous des distributions asymétriques. Cette déduction nous amène à penser que ces séries, ainsi étudiées, sont non-linéaires puisque d'une part, la vérification de la caractéristique d'asymétrie peut être le synonyme de la présence d'un effet de seuil et d'autre part, les processus ayant comme distributions symétriques sont incapables de rendre compte des phénomènes asymétriques.

Toutefois, c'est vrai qu'accepter pour le moment l'hypothèse de non-linéarité, ne veut pas dire que les données étudiées sont non-linéaires en moyenne, puisque la non-linéarité peut provenir de plusieurs origines, telles que par exemple non-linéaires en variances. Or, la présence d'un effet de seuil, marquant le passage d'un régime à un autre, nous pousse à s'intéresser exclusivement à la détection et l'analyse des effets non-linéaires en moyennes qui peuvent être modélisés à l'aide d'un processus de type STAR. À ce niveau il convient de noter que la littérature de la modélisation STAR est riche en tests de stationnarités non linéaires. Dans ce cadre, il convient de noter que He et Sandberg (2006), ont proposé un test de Dickey-Fuller, contre l'alternative fournie par un modèle dynamique non-linéaire. Dans la sous-section qui suit, nous allons nous limiter à l'exposition des tests de stationnarité non-linéaires, pour le cas des processus ESTAR et LSTAR.

### **3.5.2. Tests de changements structurels : Test de Lin et Teräsvirta (1994)**

L'un des avantages du test de changement structurel au sens de Lin et Teräsvirta (1994), sur les performances prévisionnelles des modèles non-linéaires en moyennes, réside dans le fait

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

qu'il prend en compte, simultanément, deux caractéristiques : la non-linéarité et la présence du changement de régime, tout en se basant sur les hypothèses suivantes :

$H_0$  : Pas de threshold break

$H_1$  : Présence de threshold break

Les résultats illustrés sur le tableau (3.16), montrent que la croissance de la production industrielle ne se fait pas de façon continue. Elle passe par des phases de croissance rapide et de croissance plus faible, voire de décroissance momentanée, ou même de crise économique. L'évolution de l'activité industrielle met en présence un changement structurel caractérisant le processus générateur de données. Ceci nous amène à penser réaliser un examen plus détaillé, de la dynamique des fluctuations de ces séries.

**Tableau 3.16: Test de threshold break**

Variables	Series-length	Num-Bootp-repl	Achived	F-test(H0)	Bootp-pvalue
<b>DLIPI</b>	128	1000	139.3000	6.7105 <sup>**</sup>	0.0280
<b>DLIAA</b>	128	1000	143.3000	3.4883 <sup>*</sup>	0.3430
<b>DLICCV</b>	128	1000	132.1000	8.5870 <sup>***</sup>	0.0070
<b>DLIME</b>	128	1000	147.9000	5.0669 <sup>*</sup>	0.1020
<b>DLIC</b>	128	1000	162.7000	2.4241 <sup>*</sup>	0.6280
<b>DLIHC</b>	128	1000	176.3000	8.8351 <sup>***</sup>	0.0050
<b>DLIMD</b>	128	1000	139.9000	3.7633 <sup>*</sup>	0.3000
<b>DLIM</b>	128	1000	163.4000	7.5044 <sup>**</sup>	0.0160
<b>DLM</b>	128	1000	117.9000	7.6057 <sup>**</sup>	0.0170
<b>DLE</b>	128	1000	106.9000	7.3637 <sup>**</sup>	0.0120

<sup>\*</sup>, <sup>\*\*</sup> et <sup>\*\*\*</sup> indiquent un rejet de l'hypothèse nulle avec un seuil de significativité de 10%, 5% et 1% respectivement. Les valeurs critiques sont tabulées dans Lin et Teräsvirta (1994).

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Après avoir établi la stationnarité des séries et identifié l'existence d'un effet de seuil, dans la tendance, justifiant le caractère asymétrique de leurs dynamiques, nous allons passer, maintenant, à identifier la présence des fluctuations endogènes asymétriques dans les comportements dynamiques des séries de la production industrielle en Tunisie. Or, étant donné qu'il n'existe, ni une unique méthode pour définir le cycle endogène caractérisant la dynamique industrielle, ni une unique manière de le mesurer, nous avons procédé à une analyse descriptive du cycle endogène, en utilisant une méthode qui consiste à extraire les fluctuations cycliques endogènes des dynamiques des séries, en utilisant un filtre de Kydland et Prescott (1990). Selon cette technique, nous pourrions imaginer une situation, où la tendance (la pente de la valeur

prédite) change souvent, à la limite continuellement. Ainsi, toute série serait composée de deux éléments :  $\ln(Y_t)$  = composante tendancielle + composante cyclique et formulée comme suit :

$$\ln(Y_t) = \tau_t + (\ln(Y_t) - \tau_t)$$

Au lieu de supposer que la composante tendancielle  $\tau_t$  suit un modèle linéaire en  $t$ , nous supposons que  $\tau_t$  change continuellement à une vitesse donnée, par le coefficient de pondération  $\lambda$ . Conséquemment, nous pourrions «estimer»  $\tau_t$ , en minimisant le critère de lissage suivant :

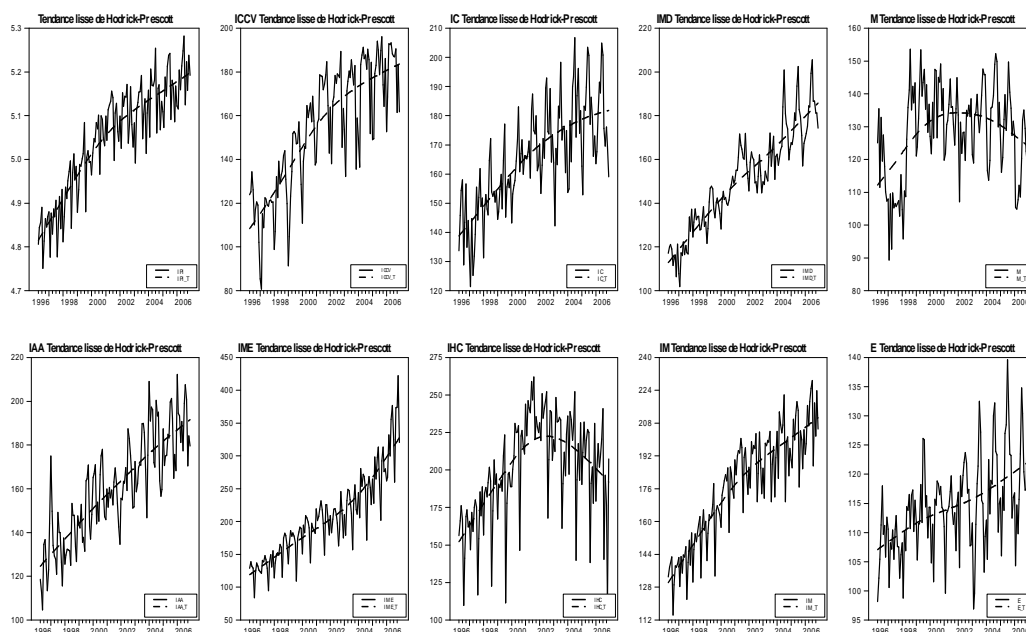
$$\sum_{t=1}^T (\ln y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2$$

La première partie de cette formule représente les déviations de la série, par rapport à la tendance: plus les déviations sont grandes, plus le critère augmente. La deuxième partie correspond au changement des changements, telle que la dérivée seconde. Ainsi, il y a trois possibilités intéressantes : pour  $\lambda$  très grand, nous pénalisons fortement la dérivée seconde. Pour minimiser le critère, nous garderons la dérivée seconde à zéro, donc la pente (dérivée première) sera fixe. Ceci correspond au cas linéaire. Pour  $\lambda = 0$ , aucune pénalité pour la dérivée seconde qui pourra varier de façon importante. La tendance sera égale à la valeur de la série observée, c'est le cas lorsque  $\ln(Y_t) = \tau_t$ . Finalement, si  $\lambda = 129600$ , c'est un cas intermédiaire choisi par Ravn et Uhlig (2002)<sup>243</sup>. Une fois la tendance estimée, nous pourrions trouver la portion de cyclique de façon usuelle, induit par la déviation en pourcentage donnée par  $\ln(Y_t) - \tau_t$ .

<sup>243</sup> Dans ce cadre, Ravn et Uhlig (2002), ont proposé de choisir  $\lambda=2.25$  pour des données de fréquences annuelles ;  $\lambda=1600$  pour des données de fréquences trimestrielles et  $\lambda=129600$  pour des données de fréquences mensuelles.

## Les séries de la production industrielle en Tunisie 1996:04-2006:12

*Tendance lisse de Hodrick et Prescott (1990)  $\lambda=129600$*



**Figure 3.67: Série temporelles stationnaires en première différence logarithmique**

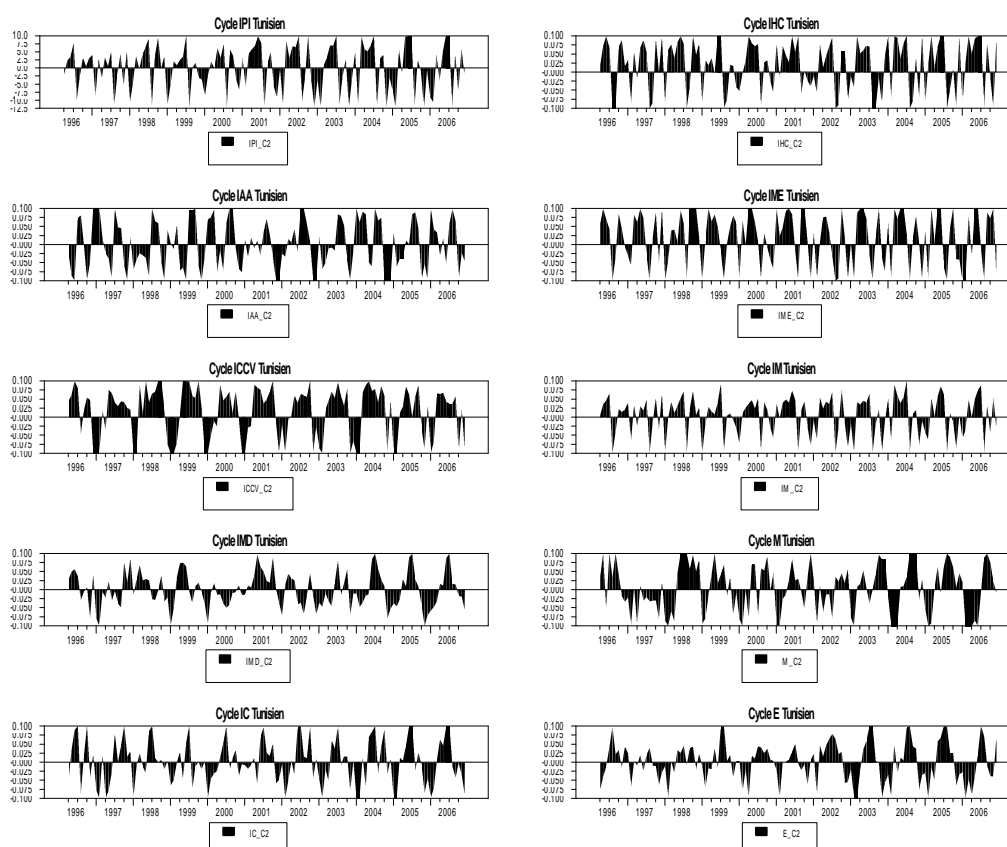
En examinant les séries de la production industrielle en premières différences, illustrées par la figure (3.67), nous observons que ces séries n'ont pas de tendances stables et des points de rupture sont observés. Nous constatons alors, qu'à la suite de la présence des changements de régimes en moyennes, source considérée comme la principale cause de non-linéarité des séries étudiées, chacune de ces dernières ne peuvent pas être générées, par le même processus, pendant toute la période considérée. Dans des cas, nous pourrions imaginer une situation, où la tendance change souvent et qu'un modèle avec changement de régime permet de capter les tendances linéaires avec brisures. Ainsi, l'analyse visuelle de ce graphique confirme ce qu'il a été conclu avant. Car, si nous tenons compte des résultats obtenus, précisément, concernant la présence des ruptures déterministes et d'asymétrie de leurs comportements dynamiques, ceci nous permet, en particulier, de constater que l'émergence des fluctuations endogènes est favorisée par des mécanismes non constants dans le temps. Par conséquent, nous pensons que ces mécanismes

### Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

générateurs de données, ainsi étudiées, sont non linéaires en moyennes car les modèles linéaires sont capables de générer que des réalisations avec des fluctuations cycliques symétriques. Pour confirmer cette déduction, nous allons procéder par une illustration graphique, qui visualise nettement le comportement d'asymétrie, au niveau des fluctuations endogènes<sup>244</sup>, enracinées dans les dynamiques des séries de la production industrielle en Tunisie.

## Fluctuations endogènes

*Les cycles des séries de production industrielle en Tunisie:1996:04 - 2006:12*



**Figure 3.68: Cycles et fluctuations de la production industrielle tunisienne**

<sup>244</sup> Il convient de noter que, techniquement il est possible d'obtenir aisément la série de l'endogène estimée  $Y_{end}$  par application d'un programme Rats composé de l'instruction suivante : Set  $Y_{end} = Y - resY$  où  $resY$  est le résidu de la variable à expliquer  $Y$ .

---

L'analyse de la figure (3.68), nous a permis de tirer plusieurs conclusions préliminaires mais, très intéressantes. Tout d'abord, nous constatons que la dynamique industrielle, en Tunisie, subit en permanence des transformations radicales, qui touchent en profondeur les dynamiques endogènes des structures évolutives internes, du secteur industriel. En effet, la présence des fluctuations endogènes décrites par des déviations, autour de la tendance nulle, montre que pour toutes les séries analysées, il y a d'une part, persistance des chocs structurels endogènes, qui se voient clairement, sur la figure (3.68), où les fluctuations endogènes restent, parfois, au dessus de la tendance et parfois, suivent des déviations importantes, mais dans le sens inverse. Or, rappelons que ces fluctuations endogènes constituent des indicateurs précoces des chocs structurels endogènes, qui ont pour substances les bifurcations des états d'équilibres dynamiques, là où ils contribuent par modification adaptative des structures et changement par recombinaison des invariances, à la reconstruction et à l'endocyclogenèse. Cette déduction est intéressante, puisque l'identification et la caractérisation des chocs structurels endogènes nous renseigne sur les évolutions des états dynamiques endogènes des fluctuations cycliques nécessaires, en matière de prévisions à court terme. D'autre part, comme le montre la figure, ces déviations sont assez instables, ce qui présente pour notre cadre d'analyse, une difficulté pour faire des prévisions à long terme.

Grossomodo, nous pouvons constater que la principale difficulté pour faire des prévisions sur la sévérité et la longueur d'une récession industrielle, provient du fait que les cycles endogènes des différentes branches de la production industrielle en Tunisie sont d'une part, très différents entre eux par leurs amplitudes, leurs durées (fréquences) et leurs formes qui sont tous irréguliers. Ceci malgré, qu'ils se rassemblent par la nature unie d'un seul type de fluctuation endogène cyclique asymétrique, autour d'une tendance déterministe. Cette remarque, nous permet de déduire que ce type de fluctuation cyclique asymétrique est la manifestation de l'interconnexion, entre déséquilibres dynamiques de branches sectorielles industrielles, qui y constitue une source d'instabilité de l'ensemble du secteur industriel et surtout, lorsque ces fluctuations endogènes ne sont plus modérées et contrôlées, où il sera fréquemment probable, de se manifester par l'apparition des fluctuations chaotiques qui mènent aux hystérèses et surtout,



---

aux crises catalographiques, selon l'ancienne remarque de Varian (1979). D'autre part, ces cycles endogènes confirment tous, le type récurrent mais non périodique, qui est un signe de chaotité de leurs dynamiques inhérents. De plus, pour une même activité industrielle le regard de l'évolution du cycle, par rapport au temps, montre qu'il se caractérise par une dynamique variable et non uniforme, que les durées et les amplitudes des cycles successifs. Ces remarques importantes viennent en fait, renforcer l'importance empirique du comportement, à la fois asymétrique et non-linéaire des séries ainsi étudiées.

D'un autre côté, comme le notent Grasman et Jojanda (1994), puisque la dynamique de l'équilibre multiple est introduite comme facteur déterminant du cycle endogène, alors nous pouvons examiner une illustration graphique, afin de concevoir le degré de synchronisation des cycles endogènes et détecter l'intensité de leurs cohérences en co-mouvements cycliques, avec le cycle d'ensemble, c'est-à-dire de l'indice de la production industrielle IPI.

À cet égard, le comouvement illustre comment les variables de la production industrielle jointes à une variable de référence de l'indice de la production industrielle roulent ensemble durant le cycle endogène. Pour examiner le comouvement, la façon simple et lisible, consiste à dessiner deux séries temporelles (dont l'une est toujours celle de la série IPI) dans un graphique. Cette procédure nous permet de concevoir les comouvements sériels et d'en tirer les arguments nécessaires, qui servent à justifier l'analyse soignée, de la conjoncture de la dynamique industrielle en Tunisie, surtout lorsque nous sommes engagés à prévoir le cycle endogène de la production industrielle tunisienne: c'est-à-dire nous nous attendons que la corrélation soit très élevée entre IPI et les autres séries IAA, ICCV, IME, IC, IHC, IMD, IM, M et E mensuelles de la production industrielle tunisienne, illustrée sur la figure (3.69). Toutefois, il se peut que les comouvements entre IPI et les autres variables (IAA, ICCV, IME, IC, IHC, IMD, IM, M, E) puissent être caractérisés, selon la nature de la corrélation jointe de trois manières: procyclique, contracyclique ou acyclique respectivement si la corrélation est strictement positive, strictement négative ou nulle.

## Co-mouvements cycliques des variables par rapport au DLIPI

Cohérences et phases: 1996:04 - 2006:12

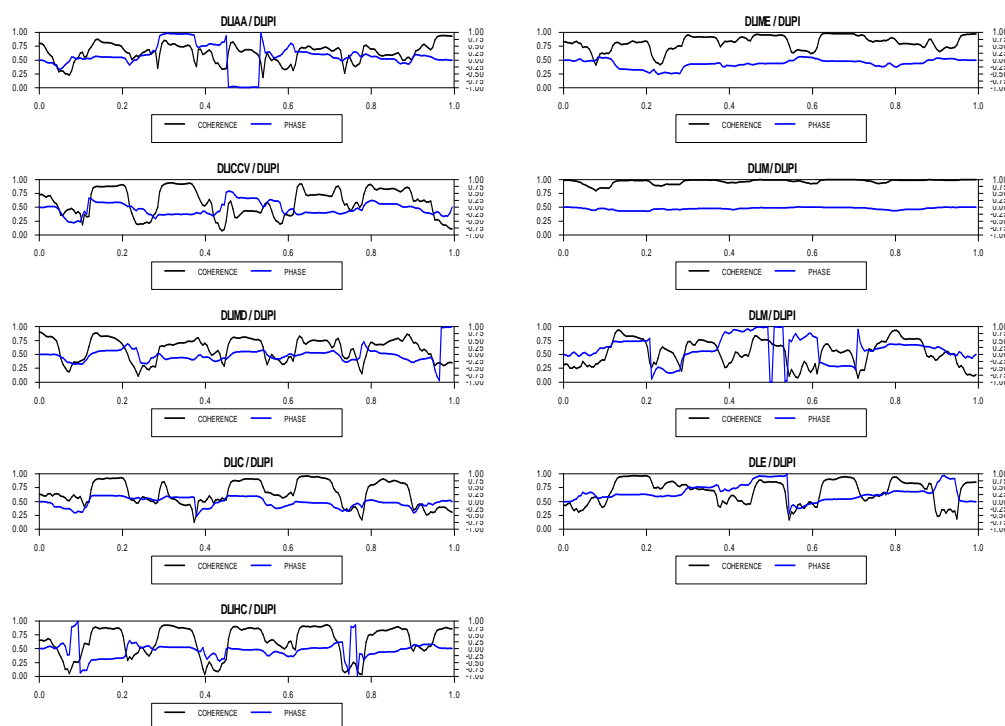


Figure 3.69: Co-mouvement de cycles et fluctuations de la production industrielle tunisienne

De ce fait, une telle relation de corrélation forte est bien demandée, pour bien comprendre la variabilité cocyclique de chacune des variables étudiées, par rapport à celle de la référence (IPI) et de concevoir, à l'aide de leurs déviations jointes, le comportement cyclique des variables industrielles, dominantes dans l'architecture de la dynamique industrielle en Tunisie et pour en retirer l'information pertinente et produire des représentations graphiques utiles, à l'analyse et à la prévision. Ainsi, l'examen graphique de la figure (3.69), visualise clairement que les co-mouvements cycliques de IPI, avec les autres séries de la production industrielle, en Tunisie, sont bien synchronisés. L'évolution dynamique, en cohérence, est donc vérifiée, ce qui justifie que la corrélation, entre IPI et les autres séries est très élevée.

---

Or, n'oublions pas que nous avons déjà abouti, graphiquement, à la déduction très intéressante, selon laquelle il n'y a pas de cycles endogènes réguliers, de la production industrielle en Tunisie. Les fluctuations asymétriques de ces séries s'apparentent, plutôt, à des chocs structurels endogènes, correspondant à la théorie des cycles endogènes, qu'à des chocs aléatoires. Leurs études, à l'aide de techniques d'analyse de séries temporelles à temps discrets, a permis de montrer que les fluctuations endogènes cycliques, générées, selon certains modes dynamiques de transitions, sont une source non négligeable d'instabilités structurelles. Plus précisément, les résultats indiquent que les fluctuations endogènes non contrôlées des branches sectorielles de la production industrielle, en Tunisie, ont toutes des comportements dynamiques qui peuvent s'expliquer par leurs sources de générations, par des processus de transitions dynamiques, fonctionnant tous, à la mode chaotique.

De plus, une autre déduction que nous pouvons tirer, à partir de ce niveau d'analyse, et qui vient renforcer notre cadre général d'étude. Cette importante constatation que nous venons d'examiner, ici, porte sur le lien, entre les variables macroéconomiques industrielles agrégées fluctuant, au cours du temps, où nous avons pu montrer que les cycles conjoncturels de la production industrielle, en Tunisie, sont assez irréguliers, en termes de timing. Tandis que ceci ne cache plus qu'ils soient assez réguliers, en termes de co-mouvements des variables, évoluant de façon jointe, comme le justifie le sommaire de comouvement dressé sur la figure (3.69).

Comme nous avons vu par cette étape préliminaire basée sur l'analyse et l'examen graphique, combien ce traitement est un facteur essentiel et concluant, dans l'étude des irrégularités inhérentes de la dynamique du secteur industriel Tunisien. Ceci est justifié par Mizrach (2008), qui s'intéresse à la modélisation non-linéaire des relations de co-mouvements, entre des séries temporelles et montre que la dite relation est une nécessité pour étudier, puis modéliser les relations de non linéarités, entre ces séries chronologiques. Cependant, dans le cadre de cette recherche, nous exigeons qu'une complémentarité de notre étude soit réalisable, au moyen de la disposition statistique, qui est évidemment nécessaire et même obligatoire du fait qu'elle permet d'enrichir notre étude, sur l'analyse quantitative des propriétés dynamiques et

irrégulières des séries considérées. Or, en admettant que le principal objectif de l'analyse des séries temporelles est la prévision. L'une des majeures difficultés que nous rencontrons, lors de la modélisation en prédiction de séries temporelles non linéaires est le problème de sélection de la structure d'un modèle. Ce problème touche, à la fois, la méthode d'identification et les tests de spécification. À cet effet, le traitement de la linéarité par des tests généraux, est une étape complexe mais primordiale, dans la présente étape de notre cadre d'analyse.

### 3.5.3. Tests de linéarité contre le chaos déterministe

#### 3.5.3.1. Exposition du problème de la non-linéarité dans le cadre de sélection de la structure d'un modèle de prédiction

La littérature<sup>245</sup> sur l'analyse des séries temporelles non-linéaires est riche par les tests de linéarité. De nombreux tests existent selon plusieurs sortes de méthodologies. Mais, ayant en commun l'objectif de résoudre le problème de choix de la structure d'un modèle dans un contexte particulier, qui consiste selon Inoue et Kilian (2003), à appliquer le même principe usuel selon lequel : si nous voulons prédire une série temporelle non-linéaire, nous faisons une coupe transversale dans le temps, par laquelle, nous pourrions faire une lecture présente du comportement passé de la série temporelle et à partir de la connaissance exacte des lois qui commandent son passé, nous pourrions déduire son futur. Selon ce principe habituellement utilisé, la prédiction d'une série temporelle non linéaire est parfaitement déterminée, par déduction à partir de son passé de la manière expliquée par Patton et Timmermann (2002), suivante : ayant observé actuellement, sous des conditions expérimentales bien précises  $\zeta_c$ , un échantillon  $\mathfrak{S}_c$  d'observations  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$ , d'une série temporelle  $Y_t$  quel est le modèle non-linéaire, parmi un ensemble de modèle candidats :

$$\{Y_t(\mathfrak{S}_c \setminus \Psi_1, \zeta_c), Y_t(\mathfrak{S}_c \setminus \Psi_2, \zeta_c), \dots, Y_t(\mathfrak{S}_c \setminus \Psi_{p_{\max}}, \zeta_c)\}$$

qui approxime au mieux le vrai modèle générateur de données?

<sup>245</sup> Y inclus le travail de Brock et Potter (1993), de Gooijer et Kumar (1992), de Granger et Teräsvirta (1993) et Tong (1990). Pour quelques études de comparaisons entre les testes de linéarité, voir Chan et Tong (1986a), Lee, White et Granger (1993), Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988) et Teräsvirta, Lin et Granger (1993).

---

En ce sens, l'examen graphique de la figure (3.70), des spectres des maximums d'entropies pour les séries de la production industrielle, en Tunisie, montre que ces spectres suivent des trajectoires non-linéaires et n'ont pas les mêmes allures, ce qui justifie bien que l'information prédictive ne se répercute pas, selon une dynamique cohérente décrite, par la même trajectoire. Ceci va bien sûr renforcer notre déduction préliminaire, concernant les données manipulées qui sont générées par des processus non identiques et non-linéaires. Cependant, comme le fait remarqué Bao, Lee et Saltoglu (2006), rien ne garantit que la quantité d'information déduite de l'observation du présent et du passé de la série, se répercute, uniformément dans le temps, en conservant ainsi une masse de propagation constante, de telle manière qu'elle puisse assurer des prévisions optimales.

La preuve est simple, car en raisonnant par l'absurde, nous supposons que l'avenir d'une série est déterminé par son passé. Sous cette hypothèse, il faut accepter une projection dans le sens inverse, c'est-à-dire la rétroproduction, selon laquelle une recombinaison inverse des structures, assure que le présent de la série détermine son passé. Or, la démarche adoptée, surtout au niveau de la deuxième partie de ce document, montre que la transformation des structures, tout en respectant le principe de recombinaison des invariances, à travers l'émergence des fluctuations endogènes, n'est pas toujours réversible, puisque d'une part une telle transformation est fonction du degré de la complexité spatio-temporelle et d'autre part, même si nous faisons référence uniquement au facteur temps, dans plusieurs cas, elle aboutit à des transformations irréversibles et génère des comportements dynamiques chaotiques qui se manifestent, pratiquement, par une grande sensibilité du comportement futur aux conditions initiales. Marciel (1994), a noté que cette irréversibilité remarquable, admet comme principale conséquence, qu'il y a toujours un décalage, entre l'état observé et l'état réalisé d'une série. En plus, dans la même optique, même si nous admettons un cadre déterministe pour négliger l'effet de la variable stochastique (terme d'erreur) qui risque de contribuer à ce décalage, par l'effet de corrélation et d'accumulation dans le temps des erreurs de prévision, en étudiant les propriétés cycliques d'une série temporelle, nous avons déjà postulé la présence des fluctuations endogènes, capables

d'engendrer un cycle limite et/ou une dynamique chaotique, source de perturbations dans la série et surtout, ayant de graves implications sur la prédiction, comme le justifie la citation suivante :

*« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. [...] La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. ».*  
Poincaré, *Science et méthode* (1908, pp. 68-69).

Par conséquent, nous devons poser le problème, dans un cadre plus général, que celui précisément énoncé. Ayant observé actuellement, sous des conditions expérimentales bien précises  $\zeta_c$ , un échantillon  $\mathfrak{S}_c$  d'observations  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)_c$ , d'une série temporelle  $Y_t$  quel est, parmi un ensemble de modèle candidats, le modèle non-linéaire de prédiction pour un échantillon  $\mathfrak{S}_f$  de données futures  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)_f$  non encore observées, qui peuvent être obtenues sous d'autres conditions expérimentales  $\zeta_f$  ?

À l'instar de Grassberger et Procaccia (1983a), l'entropie de Shannon d'une variable aléatoire permet de caractériser la quantité d'informations manquantes, concernant cette variable, grâce à la formule:

$$S(Y_t) = -\sum_{t=1}^T P_{Y_t}(Y_t) \log[P_{Y_t}(Y_t)]$$

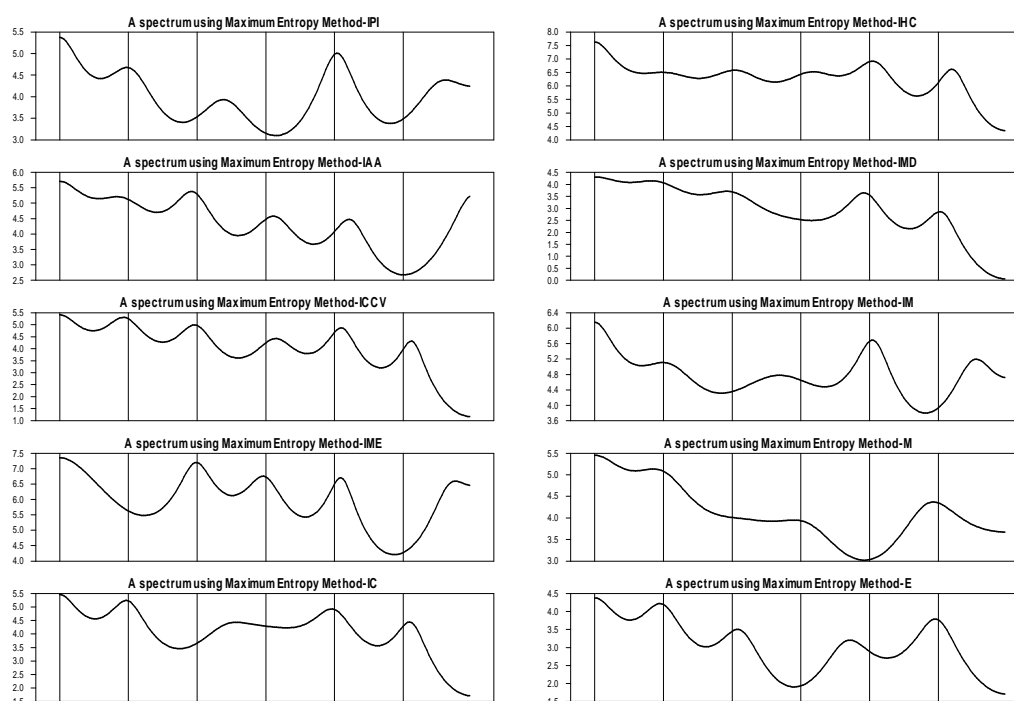
$$0 \leq S(Y_t) \leq \log(T)$$

Cette démarche de détermination des lois de distributions des variables repose sur le principe de maximum de l'entropie, qui permet de choisir la bonne loi de probabilité, parmi une famille, qui vérifie un ensemble bien déterminé de restrictions. À ce stade, il faut donc mentionner qu'à l'inverse de la fonction d'auto-corrélation, la prise en compte de l'information mutuelle lors de l'étude de l'évolution dynamique d'une série temporelle permet d'analyser sa mémoire en tenant compte des corrélations non-linéaires. Ainsi, l'entropie est utilisée, afin de mesurer le degré de complexité d'un processus générateur de données. Si une courbe nécessitant peu de mémoire, alors elle correspond à un processus déterministe. Par contre, si une courbe nécessite plus de mémoire, elle correspond à un processus moins déterministe et donc plus

aléatoire. Dans ce cadre, la figure (3.70), nous donne une analyse spectrale à l'aide de la méthode de maximum d'entropie ou plus simplement la méthode du maximum de l'erreur de prédiction, qui correspond à des signaux là où nous pouvons constater qu'il y a apparition de nouvelles fréquences dans le spectre de chacun, ceci confirme bien notre intuition de la mise en évidence de la non-linéarité.

## A spectrum using Maximum Entropy Method

*Spectral Analysis: 1996:04 - 2006:12*



**Figure 3.70: Les spectres des maximums d'entropies des séries de la production industrielle en Tunisie**

Or, l'examen détaillé de la dynamique des fluctuations, réalisé au niveau de la deuxième partie, aborde le problème des trajectoires non stationnaires, en incluant des moyennes de trajectoires qui sont, soit des cycles limites, soit des attracteurs chaotiques. Le problème pour la sélection de structure de modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles, c'est que nous avons l'habitude de négliger la dynamique chaotique, des fluctuations récurrentes de la partie

---

déterministe d'un processus économétrique et de chercher à établir des prédictions, sous l'hypothèse qu'un processus générateur des données, soit de nature purement stochastique.

Mais, si nous admettons qu'en présence d'un processus chaotique, il y a toujours sensibilité aux conditions initiales, alors l'analyse prévisionnelle sera très délicate, puisqu'une erreur microscopique dans l'estimation des conditions initiales, peut conduire à des erreurs de prédiction macroscopiques, sous l'effet de sa croissance à un rythme exponentiel. Par conséquent, nous pouvons croire que pour appliquer ce principe, et sectionner la structure d'un modèle non linéaire en prédiction de séries temporelles, il nous faut connaître, avec précision, à la fois l'état présent du modèle et la loi, selon laquelle se transforment et se recomposent les structures, lors de la transition, entre les états de phases caractérisant les données ainsi générées, et qui servent par la suite à réaliser des prédictions. Or, l'état initial du modèle est déterminé par un certain nombre d'observations. Mais, la loi assurant la transition exigée, entre les états de régimes d'un modèle STAR, reste un défi à réduire, du fait que la littérature concernant ce sujet, nous renseigne qu'il existe une large gamme de fonctions de transitions. Donc, il nous faut adopter un comportement très prudent, lors de la sélection de la fonction de transition la plus adéquate, pour réduire la marge de tolérance de l'erreur de prédiction et par conséquent, de garantir la précision de l'information prédictive ainsi souhaitée à réaliser. Mais, si nous rappelons les principaux résultats obtenus, au niveau de la deuxième partie, alors n'oublions pas que selon ce raisonnement, même si nous réussissons à choisir d'une manière rationnelle la dite convenable fonction de transition, il se peut que le fonctionnement dynamique d'un tel processus d'ajustement, se réalise pour certains cas, selon un mode chaotique qui conduira directement à l'imprédictibilité. En effet, pour que les fluctuations endogènes visualisées sur la figure (3.63), ne soient pas le facteur limitatif de la prédictibilité des modèles que nous sommes entrain de caractériser et d'identifier les structures, elles doivent être réduites autant que possible. Donc, pour résoudre ce piège, il nous faut, en plus, bien contrôler le fonctionnement dynamique des processus de transitions ainsi choisis, à l'aide de leurs paramètres de transitions.



D'un autre côté, Farmer (1986) et Farmer et Sidorowich (1988), Brock et Sayers (1988), Castagli (1989), Geweke (1989) et Barnett et Serletis (2000), montrent que la présence d'un chaos déterministe dans la dynamique des séries temporelles, fournit un degré de tolérance, pour la possibilité de prédiction de ces séries. Toutefois, Kyrtsou et Serletis (2006), insistent sur l'importance de sélectionner convenablement une structure de modélisation non linéaire bien déterminée, surtout, en présence d'un comportement chaotique.

Après avoir exposé le problème de la non-linéarité, dans le cadre de sélection de la structure d'un modèle non-linéaire de prédiction, dans cette sous-section, nous allons aborder un diagnostic de tests de linéarité, selon deux logiques différentes mais complémentaires, pour résoudre le problème de détection de la non-linéarité, dans un cadre de sélection de structure de modèle non-linéaire, en prédiction de séries temporelles. Selon une première raison, nous allons traiter empiriquement ici, les procédures économétriques usuelles de tests de linéarité, contre celles de chaos déterministe, capables de répondre à cet objectif et en plus, destinées à faire la distinction, entre régime chaotique et comportements aléatoires. Puis, dans une seconde démonstration qui fera l'objet de la prochaine sous-section, nous allons introduire les tests généraux de linéarité, contre l'alternative est ou non bien nécessairement spécifiée.

Notons, tout d'abord, que l'utilisation d'outils empiriques appropriés de détection du chaos est nécessaire, notamment, en économétrie du chaos. Cette nécessité trouve sa justification, surtout, dans l'exigence de fournir un élément de réponse, à la question fondamentale suivante : Comment se reconstruit la dynamique d'un système, dans son espace de phase?

La réponse à cette interrogation est donnée par Taken (1981), grâce à son théorème dit «*Embedding Theorem*», basé sur l'idée qu'il est possible de comprendre la dynamique du processus générateur et de préciser ses propriétés, tout en se limitant à l'étude de la dynamique de ses attracteurs. C'est-à-dire que, sachant une structure d'un attracteur acquis, nous pourrions reproduire spontanément des récents attracteurs de mémoire à partir de la structure précédente.

En ce sens, supposons que nous observons une série temporelle  $(Y_t)_{t=1, \dots, T}$ , générée, à partir d'un processus dynamique non-linéaire inconnu, dont la dimension inconnue est notée  $D$ . Donc, afin de connaître les propriétés dynamiques du processus sous-jacent à cette série, il convient de penser à construire le sous ensemble de points, vers lequel convergent toutes les trajectoires, en d'autres termes, il nous faut chercher son attracteur. Pour cela, soient  $(T - m + 1)$  vecteurs à  $m$  dimensions. L'opération de reconstruction consiste à considérer la série  $(Y_t)_{t=1, \dots, T-m+1}$  des  $m$ -historiques, formée à partir des valeurs consécutives de la série observée, décalées d'un retard  $k$  fixé.

$$Y_t^m = (Y_t, Y_{t+k}, \dots, Y_{t+2k}, \dots, Y_{t+(m-1)k})_{t=1, \dots, T-m+1}$$

avec  $m$  est la dimension de l'espace des phases, dans lequel l'attracteur est reconstruit dit dimension de plongement ou d'encastrement « *embedding dimension* » : c'est, donc, le nombre minimum d'équations de récurrence (ou de variables), donc d'axes nécessaires pour définir l'attracteur. Or, sachons qu'en général, un attracteur chaotique est de dimension non entière, alors ce nombre correspond à l'entier juste supérieur, à la dimension de l'attracteur reconstruit. Ainsi, le théorème d'encastrement de Takens (1981), s'énonce comme suit :

**Théorème 3.5. (Takens (1981)<sup>246</sup>)**

*Considérons un processus dynamique ayant  $D$  degrés de liberté ( $D$  variables indépendantes) et un ensemble de vecteurs  $(Y_t, Y_{t+k}, \dots, Y_{t+2k}, \dots, Y_{t+(m-1)k})$  à partir de la série chronologique  $(Y_t)_{t=1, \dots, T}$ . Pour une dimension d'encastrement  $m$  "assez grande", l'espace d'encastrement « *embedding space* » formé de  $T_v = T - (m - 1)k$  points est équivalent à l'espace de phase de l'attracteur, si celui-ci existe, et que l'évolution de la série  $(Y_t)_{t=1, \dots, T}$  représente alors la dynamique du système sous-jacent.*

Admettons qu'en absence des équations bien définies, l'observation uniquement d'une série temporelle peut servir à l'investigation des propriétés d'un système dynamique non linéaire, qui se reconstruisent au sein de l'espace de phase. Ce théorème veut dire que pour  $m \geq 2D + 1$ , l'attracteur, ainsi reconstruit, sa dynamique possédera les mêmes propriétés topologiques, que celui du processus générateur des observations initiales. Autrement dit, le comportement des  $m$ -

<sup>246</sup> Voir Takens, F., (1981), « *Detecting strange attractors in turbulence* », Dynamical Systems and Turbulence, Eds. D.A. Rand and L.S. Young, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, pp. 366-381.

historiques générées, à partir d'une série temporelle expérimentale, peuvent être utilisées pour décrire celui du processus dynamique, inconnu, original.

Grâce à ce théorème, nous serons capables de vérifier, à partir de l'observation d'une série temporelle générée par un processus dynamique inconnu, si l'attracteur du processus sous-jacent est chaotique. Dans ce contexte qui découle de la première logique, nous allons limiter l'exposé pour ces trois procédures de tests : Test de dimension de corrélation ; Test de l'exposant de Lyapunov et Test de bispectre au sens de Hinich. Notons qu'à la différence des méthodes traditionnelles basées sur le calcul d'autocorrélations, ces trois tests sont les outils empiriques les plus usuels, pour la détection du chaos. D'autre part, compte tenu du théorème précédent, de reconstruction de la dynamique, dans l'espace des phases de Takens (1981), ces tests permettent, donc, d'effectuer la distinction entre un processus déterministe d'un processus purement stochastique en examinant l'effet de la variation de la dimension  $m$ , et du retard  $k$ , sur les propriétés géométriques de la répartition des données, dans l'espace d'encastrement, ainsi que sur certaines grandeurs caractéristiques déterminantes de l'attracteur (dimension de corrélation, exposants de Lyapounov,...). En conséquence, pour élaborer ces tests<sup>247</sup>, il nous faut essayer de vérifier l'existence d'un espace d'encastrement adéquat et en déterminer la dimension.

### 3.5.3.2. *Test de BDS*

#### ➤ **Procédure de test**

Guégan (1994), montre que la notion de dimension généralisée est largement liée à l'existence d'un attracteur pour un système dynamique. En admettant que le principal objectif de l'analyse des séries temporelle est la prévision. L'une des majeures difficultés rencontrées, lors de la modélisation en prédiction de séries temporelles est la caractérisation d'un attracteur.

<sup>247</sup> Notons que le majeur problème se pose à ce niveau d'analyse est que ces méthodes nécessitent des séries chronologiques en longues tailles, qui n'est pas le cas accessible ici. Pour remédier à cette limite, nous faisons appel à la procédure de test « *K2K program* » développée par Kočenda, E., (2001), « *An alternative to the BDS test: Integration across the correlation integral* », *Econometric Reviews*, 20(3), pp. 337-351.

**Définition 3.5 (Balatoni et Renyi (1956)<sup>248</sup>)**

Soit le processus dynamique non linéaire suivant :

$$Y_t = S(Y_{t-1}; \Psi), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Nous appelons « Espace d'état », l'espace associé aux trajectoires du processus, obtenu en construisant le vecteur  $(Y_t, Y_{t-\tau}, \dots, Y_{t-(d-1)\tau})$  de dimension  $d$ , à partir d'une réalisation  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$ . Cet espace est une substitution de l'espace d'origine par un espace de dimension  $d$ , construit à partir du signal lui-même. Nous désignons par  $N(\varepsilon)$  le nombre de cube  $C$  de côté  $\varepsilon$  nécessaire pour recourir l'espace d'état. Pour chaque cube  $C$  et pour chaque condition initiale  $Y_0$  dans les attracteurs de l'espace d'état, nous désignons par  $\mu(C)$  la fraction de temps qu'une trajectoire partant de  $Y_0$  reste dans chaque cube  $C$ . La dimension généralisée<sup>249</sup> est alors définie pour  $q = 0, 1, \dots$ , par :

$$d^{(q)} = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [\mu_i(C_i)]^q}{\log \varepsilon}$$

Grassberger et Procaccia (1983b), ont proposé la notion de dimension de corrélation pour vérifier la présence du phénomène de chaos et en particulier, le chaos déterministe. L'idée de base est la suivante : plus qu'un ensemble est de dimension élevée, plus rapidement le nombre de voisins d'un point donné de cet ensemble augmentera avec la distance à ce point. De ce fait, l'importance de cette notion de dimension, c'est qu'elle joue un rôle crucial dans la caractérisation des systèmes dynamiques non-linéaires et notamment, dans la discrimination, entre processus déterministe et processus stochastique, du fait que la dimension de ce dernier est élevée par contre, celle d'un processus déterministe est faible.

À partir de la notion de dimension de corrélation, nous sommes capables de mettre en place le test BDS de non-linéarité, dont le but est de détecter un bruit blanc indépendant, c'est-à-dire, si les observations sont (ou non) indépendantes. Le test BDS proposé, initialement, dans un cadre univarié, par Brock, Dechert et Scheinkman (1987), consiste à tester l'hypothèse :

<sup>248</sup> Voir Balatoni, J. et Renyi, A., (1956), « *Math. Inst. of the Hungarian* », Acad. of Sci. 1, 9.

<sup>249</sup> Cette notion de dimension généralisée permet de tester l'existence du chaos déterministe, capable d'expliquer les irrégularités du cycle économique. Cette idée est suffisamment détaillée par Brock et Sayers (1988), « *Is the business cycle characterised by deterministic chaos?* », Journal of Monetary Economics, 22, pp. 71-90.

$$\begin{cases} H_0 : Y_t \text{ est iid} \\ H_1 : Y_t \text{ n'est pas iid} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, nous définissons la statistique BDS par :

$$BDS = \sqrt{N} \frac{C(N, m, \varepsilon) - C(N, 1, \varepsilon)^m}{\sigma(m, \varepsilon)} \stackrel{\text{asy}}{\sim} N(0, 1)$$

où,  $\sigma(m, \varepsilon)$  est l'estimateur de l'écart-type de l'expression figurant au numérateur, avec :

$$\sigma(m, \varepsilon) = 2 \sqrt{K^m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} K^{m-k} C^{2k}(N, 1, \varepsilon) + (m-1)^2 C^{2m}(N, 1, \varepsilon) - m^2 K C^{2m-2}(N, 1, \varepsilon)}$$

et

$$K = \frac{1}{N(N-1)(N_m-2)} \sum_{(t,r,s)} H_\varepsilon(\|Y_t^m - Y_s^m\|) H_\varepsilon(\|Y_r^m - Y_s^m\|)$$

Pratiquement, le test BDS est appliqué sur les résidus récupérés, après avoir estimé le modèle linéaire retenu. Nous acceptons l'hypothèse de linéarité, lorsque ce test montre que les résidus sont indépendants et identiquement distribués. Contrairement, la série est soit stochastique non linéaire, soit chaotique déterministe. Or, n'oublions pas qu'un attracteur d'un processus stochastique est de dimension infinie, par contre, le chaos déterministe se caractérise par des attracteurs de faibles dimension. Sur la base de cette idée, nous pouvons constater que dans le cas d'un processus stochastique, la proportion de points de l'espace des phases séparées par une distance inférieure à  $r$ , notée  $C(r, m)$ , est proportionnel à  $r^m$ , de manière que  $D_C^m$  soit égal à la dimension  $m$  de l'espace d'encastrement :  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_C^m = D_c = \infty$ . Nous disons que la saturation est

impossible compte tenu du fait que  $D_C^m$  ne se stabilise pas, lorsque  $m$  augmente. Par contre, le processus est chaotique déterministe, s'il est caractérisé par un exposant de corrélation, qui commence par augmenter avec  $m$ , puis sature et tend vers la dimension de corrélation  $D_C^m$ , quand la dimension d'encastrement est suffisamment grande. En d'autres termes, nous atteindrons une saturation vraisemblable au processus déterministe que lorsque  $D_C^m$  devient indépendante de  $m$  pour  $m \geq 2D + 1$ .

---

➤ **Résultats de test**

Le tableau (3.17), fournit les résultats du test de BDS, en appliquant le programme de « *K2K* » développé, essentiellement, pour des séries de petites tailles, nous avons fixé une valeur du rayon  $\varepsilon/\sigma \in \{0.50, 1.00, 1.50, 2.00\}$  et nous avons calculé pour différentes valeurs de la dimension de plongement  $m \in \{2, 3, 4\}$  la valeur de BDS. Ainsi, les résultats de l'estimation de la dimension de corrélation sont reportés dans le tableau (3.17).

Dans le cadre de l'étude des fluctuations endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie, l'examen détaillé au moyen du tableau (3.17), des comportements dynamiques de ces fluctuations, permet de rejeter l'hypothèse d'indépendance au seuil statistique 5%. Pour savoir si ce rejet est justifié par la mise en évidence de régimes chaotiques inhérents à leurs processus sous-jacents par opposition à des comportements purement aléatoires, il est indispensable d'utiliser d'autres indicateurs répertoriés précédemment, dans la deuxième partie de ce document. Cette constatation a été justifiée, en appliquant la technique de la dimension de corrélation. Puisqu'il apparaît qu'aucune de ces séries ne conduit à des exposants de corrélation, variant selon l'égalité  $D_c^m = m$  qui est la caractéristique déterminante d'un comportement attendu, pour un processus stochastique, ce qui montre, de façon évidente, au contraire une stabilisation de la dimension de corrélation<sup>250</sup>, associée à chacune des séries étudiées, lorsque la dimension de plongement de chacune de ces séries augmente. De plus, dire que les données, ainsi étudiées, proviennent des processus ayant tous des comportements dynamiques chaotiques, revient d'accepter automatiquement l'hypothèse de non-linéarité selon ce test.

---

<sup>250</sup> Nous ne reprenons pas ici les détails relatifs au calcul de la dimension de corrélation. Pour plus d'informations sur ce sujet, voir Silverberg et Lehnert (1993).

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.17 : Les résultats de BDS test**

Variable	m	$\varepsilon/\sigma$				D <sub>C</sub>
		0.50	1.00	1.50	2.00	
IPI	2	6,379	5,027	3,848	3,346	1,376
	3	8,341	4,561	3,078	2,064	1,930
	4	11,554	4,778	2,586	1,074	2,381
IAA	2	1,782	1,537	1,098	0,183	1,521
	3	0,807	1,808	2,198	1,387	2,231
	4	1,961	0,196	0,738	0,067	2,806
ICCV	2	5,620	3,372	1,606	0,213	1,221
	3	8,676	4,951	2,571	0,540	1,614
	4	10,491	4,957	2,499	0,177	2,041
IME	2	8,221	6,306	6,270	5,565	1,297
	3	9,385	5,235	4,664	3,964	1,812
	4	9,429	4,222	3,480	2,626	2,332
IC	2	0,365	0,497	0,717	1,665	1,535
	3	0,762	1,760	1,167	1,755	2,264
	4	1,693	2,839	1,662	1,881	2,885
IHC	2	7,060	5,905	5,231	4,855	0,882
	3	7,011	5,196	4,432	4,244	1,247
	4	7,134	4,444	3,748	3,737	1,631
IMD	2	0,992	1,414	1,490	1,411	1,567
	3	1,580	1,596	1,577	1,651	2,306
	4	2,180	1,428	1,593	1,871	3,119
IM	2	7,990	5,400	4,588	3,798	1,296
	3	9,961	4,901	3,447	2,671	1,776
	4	11,168	4,345	2,265	1,587	2,251
M	2	1,738	2,322	3,381	3,512	1,618
	3	0,516	2,079	3,276	3,708	2,450
	4	0,152	1,776	2,695	3,250	3,265
E	2	2,918	2,176	1,694	1,242	1,607
	3	4,577	3,369	1,213	0,134	2,256
	4	7,671	4,788	1,458	0,490	2,796

*Epsilon range: 0.60 - 1.90. Embedding dimension: m. Number of intervals: 40. Correlation integral constraint: 50.  $\sigma$  étant l'écart type de la série étudiée. Selon ce test, l'hypothèse d'indépendance est testée en comparant la statistique de BDS qui suit une distribution normale centrée réduite à la valeur 1.96 au seuil statistique de 5%.*

*Source : K2K program.*

Or, rappelons qu'une principale propriété, caractérisant intuitivement, un processus dynamique non-linéaire, chaotique et déterministe est sa forte dépendance de ses conditions

initiales<sup>251</sup>. De ce fait un test additionnel permet de détecter la présence du chaos déterministe, dans les séries temporelles de la production industrielle en Tunisie, consiste à procéder par mesurer les degrés de divergence, entre deux situations initiales, sur les trajectoires dynamiques, d'une même variable industrielle. Or, ceci peut être exprimé, au moyen du test de l'exposant de Lyapunov.

### 3.5.3.3. Test de l'exposant de Lyapunov

#### ➤ Procédure de test

Supposons la connaissance du comportement dynamique d'un système décrit pour tout  $Y_t \in \mathfrak{R}$  par l'équation analytique suivante :

$$Y_{t+1} = S(Y_t)$$

Quelque soit le temps  $t \in \mathfrak{N}$ , et pour n'importe quelle condition initiale  $Y_t$ , nous définissons le jacobien de la relation précédente par :

$$\Delta_{ij}(Y) = \frac{\partial S_i(Y)}{\partial Y_j}$$

Désignons par  $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \dots, \Delta_k(t)$  les valeurs propres ordonnées de  $\Delta_t$  selon l'ordre croissant comme suit :

$$\Delta_t(Y) = [\Delta(Y_t), \Delta(Y_{t-1}), \dots, \Delta(Y_1)]$$

Alors, les nombres de Lyapunov sont définis par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} [\Delta_i(t)]_{i=1, \dots, k}^{1/t}$$

où  $\lambda_i$  est appelé exposant de Lyapunov : c'est le taux moyen de divergence par itération. Cet exposant sert à mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle, puisqu'il donne une mesure de la vitesse moyenne avec laquelle deux courbes, initialement proches, divergent exponentiellement, l'une de l'autre sur l'attracteur. Kaplan et Yorke (1978), définissent la notion de dimension de Lyapunov comme suit :

<sup>251</sup> Guégan (1994, p.194), propose la définition suivante : « Un système dynamique chaotique est un système dynamique déterministe, sensible aux conditions initiales, que l'on ne peut pas prédire sur une longue période ».



$$d_L = l + \frac{\log C(\lambda_1, \dots, \lambda_l)}{\log(1/\lambda_{l+1})}$$

où  $l = \max_{\lambda_i \geq 1}(\lambda_i)_{i=1, \dots, l}$ . S'il existe  $i \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $\lambda_i < 1$ , alors  $d_L = 0$ .

Selon cette expression, les auteurs affirmaient d'une part, qu'une plus grande valeur de l'exposant avec signe négatif, implique, l'absence totale d'étirement, suivant aucune direction, lors de la transition, ce qui conduit à confirmer l'absence d'un comportement chaotique, et de sensibilité aux conditions initiales, puisqu'il n'y aucune direction de dynamique possible. D'autre part, une plus grande valeur de l'exposant avec signe positif, cette fois, n'implique pas nécessairement la présence d'un comportement chaotique. Au contraire, si les exposants calculés ont tous des signes positifs, ceci est une caractéristique d'un comportement associé, à un bruit blanc et veut dire qu'il y a étirement possible, suivant n'importe qu'elle direction. Mais, lorsque l'étirement suit des directions de contraction et simultanément d'autres directions de dilatations, il sera dit attracteur chaotique hyperbolique, comme le montre la figure (2.5). Or, rappelons que par définition l'une des principales caractéristiques d'un attracteur chaotique est sa sensibilité aux conditions initiales. Sachant le signe des exposants de Lyapunov, Lardic et Mignon (2002), ont souligné qu'il est possible de classifier les attracteurs et même de préciser sa nature, en fonction du signe des exposants de Lyapunov de la manière suivante:

- Si tous les exposants de Lyapunov sont négatifs caractérisant les contractions entre deux trajectoires proches dans le bassin d'attraction (absence de sensibilité aux conditions initiales), alors l'attracteur est un point fixe.
- Si au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif caractérisant les dilatations entre deux trajectoires proches dans le bassin d'attraction (présence de forte sensibilité aux conditions initiales), alors l'attracteur est chaotique.
- Si le plus grand exposant de Lyapunov est nul, alors l'attracteur est un cycle limite. Dans ce cas, il n'y a ni contraction ni dilatation des trajectoires proches au cours du temps.

Selon cette conception, l'exposant de Lyapunov indique la vitesse de la perte de pouvoir prédictif, au cours du temps, puisqu'il mesure le taux, auquel un processus dynamique génère

(signe positif) ou perd (signe négatif) l'information future. Dans le cadre des séries temporelles, Wolff, Swift, Swinney et Vastano (1985) et de Wolff (1992)<sup>252</sup>, ont proposé un algorithme, basé sur le contrôle de la divergence entre trajectoires voisines, d'estimation du plus grand exposant de Lyapunov et du calcul de la somme de  $n$  plus grand exposant, à partir des observations disponibles. Cette méthode de calcul peut être décrite comme suit :

Soit  $M$  un point initial fixe à  $t_0$  sur une orbite quelconque de l'attracteur. Nous choisissons deux orbites très voisines de ce point initial, et nous désignons par  $L(t_0)$  la distance entre ces deux points. En un temps ultérieur, soit  $t_1$ , cette distance initiale  $L(t_0)$  entre les deux points est devenue  $L'(t_1)$ . Ensuite, nous remplaçons l'orbite précédente par une autre orbite, située à une distance  $L'(t_1)$ . La représentation schématique de cet algorithme est donnée par Wolff, Swift, Swinney et Vastano (1985, p.296), indique que ce remplacement doit obéir à deux conditions : La première stipule que la réduction de la distance  $L(t_1)$  par rapport à la trajectoire originale. La seconde implique la réduction de l'angle  $\theta_1$  entre  $L(t_1)$  et  $L'(t_1)$ . Puis, nous recommençons cette procédure un grand nombre de fois pour les temps  $t_1, \dots, t_H$ , jusqu'à ce que la trajectoire originale ait parcouru l'ensemble des données. Enfin nous calculons l'estimateur du plus grand exposant de Lyapunov, selon l'expression donnée par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{h=1}^H \log \left[ \frac{L'(t_h)}{L(t_{h-1})} \right]$$

où  $H$  est le nombre total de remplacements de trajectoires.

### ➤ Résultats de test

L'estimation du plus grand exposant, en appliquant l'algorithme précédent, nous donne les résultats dressés dans le tableau (3.18), comme suit :

<sup>252</sup> Nous savons maintenant qu'une caractéristique importante des systèmes chaotiques réside dans leur sensibilité aux conditions initiales. Or, cette propriété peut être mesurée par les exposants globaux de Lyapunov, qui sont des mesures du taux de divergence moyen de trajectoires initialement proches. Dans ce cadre, rapelons que Wolff (1992), a introduit les exposants Lyapunov locaux et les a utilisés dans le but d'obtenir deux diagrammes diagnostiques pour faire la distinction entre des séries temporelles stochastiques et déterministes.

**Tableau 3.18 : Résultats du calcul de l'exposant de Lyapunov**

<b>m</b>	<b>t</b>	<b>DLIPI</b>	<b>DLIAA</b>	<b>DLICCV</b>	<b>DLIME</b>	<b>DLIC</b>	<b>DLIHC</b>	<b>DLIMD</b>	<b>DLIM</b>	<b>DLM</b>	<b>DLE</b>
<b>3</b>	10	0.0112	0.0251	0.0182	0.0122	0.0105	0.0311	0.0165	0.1103	0.0310	0.0126
	30	0.0026	0.0040	0.0052	0.0030	0.0012	0.0085	0.0054	0.0021	0.0025	0.0072
<b>4</b>	10	0.0283	0.0460	0.0198	0.0136	0.0112	0.0351	0.0195	0.1230	0.0319	0.0130
	30	0.0046	0.0068	0.0064	0.0034	0.0016	0.0089	0.0056	0.0029	0.0028	0.0082
<b>5</b>	10	0.0289	0.0521	0.0201	0.0155	0.0117	0.0359	0.0196	0.1210	0.0340	0.0133
	30	0.0074	0.0071	0.0069	0.0036	0.0018	0.0091	0.0056	0.0030	0.0029	0.0089

\* Indique un rejet de l'hypothèse de sensibilité aux conditions initiales et en conséquence de chaoticité.

Source : Tests réalisés à l'aide du programme de Wolff, Swift, Swinney et Vastano (1985, p.310) en langage C.

Nous observons que, quelle que soit la valeur de la dimension de l'espace, dans lequel nous étudions le système, le plus grand exposant de Lyapunov est positif. En conséquence, l'hypothèse que nos systèmes sont chaotiques ne peut être rejetée. En plus, la positivité du plus grand exposant de nos séries de la production industrielle, en Tunisie, est une indication préliminaire de leurs faibles prédictibilités.

### 3.5.3.4. Test de Hinich (1996)

#### ➤ Procédure de test

Le bispectre est la transformation double au sens de Fourier de la fonction cumulative d'ordre trois. Selon Brockett, Hinich et Patterson (1988), ce test de bispectre est plus puissant que le précédent, du fait qu'il découle de la décomposition de Wold<sup>253</sup> et permet de vérifier la propriété de gaussiennité et notamment de détecter la présence de structures non-linéaires, dans les séries, à partir de l'étude des moments d'ordre trois. Pour établir ce test, il faut définir, tout d'abord, la notion de la densité spectrale du processus  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  donnée par l'expression suivante :

$$B_{\omega_h} = (2\pi)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j e^{-i\omega_h j}$$

<sup>253</sup> La décomposition de Wold stipule que tout processus  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  linéaire, stochastique et stationnaire à l'ordre deux peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'une séquence de variables aléatoires non corrélées comme suit :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j}, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Après l'application de la décomposition de Wold, nous obtenons :

$$B_{\omega_h} = \sigma_\varepsilon^2 (2\pi)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \beta_j e^{-i\omega_h j}$$

Selon cette expression, la densité spectrale n'est d'autre que la transformée de Fourier d'ordre deux, qui correspond à la fonction d'autocovariance définie par :

$$C_j = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t+j} - E(Y_{t+j}))], \quad t = 1, \dots, T$$

De la même manière, nous pourrions définir la densité bispectrale comme la transformée de Fourier de la fonction cumulative d'ordre trois, qui correspond à la fonction de bicovariance donnée par :

$$C_{j,k} = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t+j} - E(Y_{t+j}))(Y_{t+k} - E(Y_{t+k}))], \quad t = 1, \dots, T$$

La densité bispectrale s'écrira alors :

$$B_{\omega_h, \omega_s} = (2\pi)^{-2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k} e^{-i\omega_h j - i\omega_s k}$$

Nous montrons d'autre part, à la manière de Hinich (1982), que pour les fréquences  $\omega_h$  et  $\omega_s$  dans le domaine principal  $\Omega_{\omega_h, \omega_s} = \{(\omega_h, \omega_s) : 0 < \omega_h < 0.5, \omega_s < \omega_h, 2\omega_h + \omega_s < 1\}$ , la fonction de skewness  $S_{\omega_h, \omega_s}^2$  s'écrira :

$$S_{\omega_h, \omega_s}^2 = \frac{|B_{\omega_h, \omega_s}|^2}{B_{\omega_h} B_{\omega_s} B_{\omega_h + \omega_s}} = \frac{\mu_3^2}{\sigma_\varepsilon^6}$$

où  $\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon_t^2]$  et  $\mu_3 = E[\varepsilon_t^3]$ .

Ashley, Hinich et Patterson (1986), ont prouvé que pour un processus linéaire, le bispectre qui correspond est parfaitement plat. De ce fait, le test bispectral de linéarité est invariant par tout filtrage linéaire. La linéarité et la gaussiennité du processus  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sont alors testées via l'hypothèse nulle, selon laquelle  $S_{\omega_h, \omega_s}$  est constant pour tout couple de fréquences, contre l'alternative de non linéarité du processus que la valeur de  $S_{\omega_h, \omega_s}$  sera plus élevée, pour certains couples de fréquences. Subba Rao et Gabr (1980), ont montré que la statistique de ce test est construite, à partir des coefficients de bicorrélation des séries données par :

$$R_{\omega_h, \omega_s} = 2 \sum_h \sum_s |S_{\omega_h, \omega_s}|^2 \stackrel{H_0}{\sim} F^{\alpha\%}(h, s)$$

Malgré l'importance de ce test, nous notons qu'il marque son impuissance face aux processus à cumulant d'ordre trois nuls. Pour combler cette limite, Brooks et Hinich (1997), ont proposé une autre statistique de test, construite à partir des coefficients de bicorrélation des séries qui s'écrit de la manière suivante :

$$H = \sum_{s=2}^L \sum_{r=1}^{s-1} \left[ \left( \sum_{t=1}^{T-s} (Y_t Y_{t+r} Y_{t+s}) \right)^2 / (T-s) \right] \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(L(L-1)/2)$$

où les observations  $\{Y_t\}_{t=1, \dots, T}$  sont centrées et réduites et  $L$  est le retard optimal retenu.

### ➤ Résultats de test

Les résultats de ce test sont rapportés sur le tableau (3.19).

	<b>IPI</b>	<b>IAA</b>	<b>ICCV</b>	<b>IME</b>	<b>IC</b>	<b>IHC</b>	<b>IMD</b>	<b>IM</b>	<b>M</b>	<b>E</b>
<b>H-Statistic</b>	210.93*	3.30	222.07*	185.37*	96.66*	7.80	30.41	200.30*	384.19*	30.62*
	[0.000]	[0.999]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.931]	[0.010]	[0.000]	[0.000]	[0.009]
<b>C-Statistic</b>	431.27*	327.39*	358.72*	410.81*	215.43*	140.37*	511.12*	435.89*	166.34*	75.55*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]

(\*) Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 1%. Toutes les statistiques de gaussiennité sont significatives au seuil de 5%. Les chiffres entre crochets sont les P-values. H-Statistique suit un  $\chi^2(15)$  et C-Statistique suit un  $\chi^2(6)$ .  
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

La principale remarque que nous pouvons attirer, au regard des ces résultats, est que les séries étudiées sont non linéaires. En effet, les probabilités associées à ces tests sont presque nulles. Compte tenu des résultats obtenus, ceci nous mène à penser que cette non linéarité peut être provoquée par des fluctuations endogènes asymétriques. Nous présentons dans ce qui suit, d'autres tests capables de préciser l'origine de cette non-linéarité, afin de spécifier les processus dont elle est générée. Or, rappelons que jusqu'à présent, nous ne nous sommes en fait intéressés, qu'aux tests de linéarité contre une alternative non spécifiée. Il existe cependant des tests de linéarité contre une alternative spécifique.

Après avoir traité quelques procédures les plus usuelles des tests généraux de linéarité contre le chaos déterministe. Or, il été précisé qu'une deuxième manière est de tester la linéarité dans un cadre général, où l'alternative est ou non nécessairement bien spécifiée. Donc, nous allons commencer par tester la linéarité, contre l'alternative, non nécessairement, prédéfinie, tels que le test de Ramsey (1969) et le test de Granger et Teräsvirta (1993). Après, nous allons établir des tests de linéarité, contre l'alternative fournie par le modèle à seuil, tels que le test de Tsay (1989) et le test de Hansen (1996a).

À cet égard, dans cette sous-section, nous allons exposer empiriquement ces principaux tests de linéarité.

### 3.5.4. Tests généraux de linéarité contre l'alternative est ou non nécessairement bien spécifiée

#### 3.5.4.1. Tests de Ramsey (1969)

##### ➤ Procédure de test

Ramsey (1969), a proposé de tester la présence d'une négligence non-linéarité, dans la moyenne conditionnelle d'une spécification linéaire, au moyen du test RESET (*Regression Error Specification Test*). Son intuition derrière ce test stipule que, si la non combinaison linéaire des variables exogènes a tout pouvoir pour expliquer l'endogène, le modèle sera considéré comme mal spécifié. Il considère, donc, une première spécification linéaire de la forme :

$$\tilde{Y}_t = \alpha_{00} + \sum_{i=1}^p \alpha_{i0} Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_{j0} X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Et une seconde spécification de la forme :

$$\hat{\varepsilon}_t = \alpha_{01} + \sum_{i=1}^p \alpha_{i1} Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_{j1} X_{t-j} + \sum_{k=2}^s \delta_j \hat{Y}_t^k + \varepsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, T$$

Ce test consiste à tester la nullité de termes élevés, à une puissance supérieure à deux, selon l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \delta_j = 0, \quad \forall j \in \{2, \dots, s\} \\ H_1 : \exists j \in \{2, \dots, s\} \text{ tels que } \delta_j \neq 0 \end{cases}$$

En pratique, nous estimons par les MCO le modèle linéaire est bien spécifiée sous l'hypothèse nulle, nous calculons les résidus  $\hat{\varepsilon}_t$ , les valeurs ajustées  $\hat{Y}_t = \tilde{Y}_t - \hat{\varepsilon}_t$  et la somme des carrés des résidus  $SCR_{H_0} = \sum \hat{\varepsilon}_t^2$ .

Ensuite, nous estimons par les MCO le modèle sous l'hypothèse alternative, nous calculons les résidus  $\hat{\varepsilon}_t^*$ , les valeurs ajustées  $\hat{\hat{\varepsilon}}_t = \hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_t^*$  et la somme des carrés des résidus  $SCR_{H_1} = \sum \hat{\hat{\varepsilon}}_t^2$ . La statistique du test RESET est le F-test de l'hypothèse nulle donné par:

$$F^{RESET} = \frac{[SCR_{H_0} - SCR_{H_1}]/(s-1)}{SCR_{H_1}/(T-p-q-s)} \sim F(s-1, T-p-q-s)$$

La règle de décision consiste à accepter l'hypothèse nulle de linéarité, si la probabilité (*p-value*) associée à F-statistique et Log likelihood ratios dépasse le niveau de risque. Sinon, nous rejetons l'hypothèse nulle, le modèle linéaire est mal spécifié.

### ➤ Résultats du test

Les résultats d'application du test de RESET, sont donnés dans le tableau (3.20), suivant :

<b>Tableau 3.20: Résultats du test de RESET</b>				
<b>Variabes</b>	<b>Ramsey (1969)</b>		<b>Granger et Teräsvirta (1993)</b>	
	<b>F-tests</b>	<b>P-value</b>	<b>LMtests</b>	<b>P-value</b>
<b>DLIPI</b>	2.823*	0.04162	8.245*	0.04121
<b>DLIAA</b>	0.853	0.46756	4.619	0.20194
<b>DLICCV</b>	2.256*	0.08527	6.675*	0.08301
<b>DLIME</b>	2.574*	0.05703	7.562*	0.05597
<b>DLIC</b>	0.534	0.66003	1.645	0.64929
<b>DLIHC</b>	2.949*	0.03545	8.590*	0.03527
<b>DLIMD</b>	2.557*	0.05826	7.516*	0.05716
<b>DLIM</b>	2.781*	0.04390	8.130*	0.04339
<b>DLM</b>	3.181*	0.02642	9.215*	0.02657
<b>DLE</b>	2.676*	0.05213	7.771*	0.05098

\* indique un rejet de l'hypothèse nulle avec un seuil de significativité de 10%.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

D'après le tableau ci-dessus, nous constatons que les probabilités associées à ces tests sont relativement faibles. Ceci implique que l'hypothèse de linéarité, contre l'alternative d'une négligence de celle-ci (de non-linéarité) est rejetée au seuil de significativité de 10%. D'où, la dynamique de la croissance de la production industrielle en Tunisie ne se fait pas de façon continue. En conséquence, un processus de spécification linéaire ne définit pas son mécanisme de génération. En effet, il se peut qu'elle soutienne l'effet de seuil, où il y a présence des régimes dynamiques distincts, selon les phases du cycle endogène : les uns avec évolution lente et les autres avec un rythme de croissance plus élevé. Dans ce cas, le comportement dynamique des séries de la production industrielle passe par des phases de croissance rapide et de croissance plus faible, voire de décroissance momentanée ou même de crise économique. Or, de nombreuses études récentes s'intéressent à l'étude de non-linéarité et de mettent en évidence l'effet de seuil. Les procédures de tests les plus usuels, permettant de vérifier cette hypothèse, se basent particulièrement, sur les deux méthodologies distinctes de Tsay (1989) et de Hansen (1996a)<sup>254</sup>.

### 3.5.4.2. Test de Tsay (1989)

#### ➤ Procédure de test

Tsay (1989), a proposé une méthodologie capable, en premier lieu, de tester l'hypothèse de linéarité contre l'alternative fournie par le modèle à seuil, et en second lieu, elle permet de détecter graphiquement le seuil. Ce qui caractérise cette méthodologie, c'est que le paramètre de seuil n'est plus déterminé de la même façon que le paramètre définissant la variable de transition. Il découle de cette spécification, que l'originalité de la méthode de Tsay (1989), réside dans le fait qu'elle se débarrasse du paramètre de nuisance (le seuil).

1<sup>ère</sup> étape :

Choix des régresseurs  $Y_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, X_{t-1}, \dots, X_{t-q})$  dans le cadre de la partie linéaire du modèle :

<sup>254</sup> Pour une analyse comparée des méthodes de Tsay et de Hansen, nous conseillons l'intéressé de voir l'article de Ben Salem et Perraudin (1998).



$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

2<sup>ème</sup> étape :

Pour chaque variable de transition possible, soit  $Y_{t-d} = Y_{t-i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $m = p + q$  :

- Ordonner de manière récursive les observations, selon les valeurs croissantes de la variable de seuil.

- Estimation par les moindres carrés récursifs<sup>255</sup> du modèle obtenu, avec un seuil entre la  $r^{ième}$  et la  $(r+1)^{ième}$  observation ordonnée :

$$\begin{cases} \psi_0^{(1)} + \sum_c \psi_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_{(c)}^{(1)} & \text{pour les } r \text{ premières observations de } Y_{t-d} \\ \psi_0^{(2)} + \sum_c \psi_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_{(c)}^{(2)} & \text{pour les observations suivantes} \end{cases}$$

où  $c$  est l'ordre correspondant au classement des observations de la variable de transition dans le sens croissant tel que  $Y_{(c)} \leq Y_{(c)+1}$ .

Le test de linéarité au sens de Tsay (1989), consiste à tester, pour  $0 \leq i \leq p$ , l'hypothèse suivante :

<sup>255</sup> Selon Ertel et Fowlkes (1976), la méthode des moindres carrés récursifs consiste à appliquer, pour une série quelconque  $Y_t$ , l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{m+1} &= \hat{\psi}_m + K_{m+1} \hat{a}_{m+1}, \\ \hat{a}_{m+1} &= Y_{m+1} - Y_{m+1}' \hat{\psi}_m \\ P_m &= (Y_m' Y_m)^{-1} \\ D_{m+1} &= 1 + Y_{m+1}' P_m Y_{m+1}, \\ K_{m+1} &= P_m Y_{m+1} D_{m+1}^{-1}, \\ P_{m+1} &= (I - P_m Y_{m+1} Y_{m+1}' D_{m+1}^{-1}) P_m \\ \hat{e}_{m+1} &= \hat{a}_{m+1} D_{m+1}^{-1/2} \end{aligned}$$

avec  $\hat{\psi}_m$ , sont les estimateurs par les moindres carrés ordinaires pour les  $m$  premières données,  $Y_{m+1}$  est le vecteur des régresseurs de la prochaine observation.  $\hat{e}_{m+1}$  : est le résidu  $\varepsilon_{m+1}$  normé selon les observations ordonnées.

$$\begin{cases} H_0 : \psi_i^{(1)} = \psi_i^{(2)} \\ H_1 : \psi_i^{(1)} \neq \psi_i^{(2)} \end{cases}$$

Une manière de tester la non-linéarité en seuil est de régresser les  $\hat{e}_{m+1}$  sur les régresseurs  $Y_m$ , selon la spécification suivante :

$$\hat{e}_{m+1} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i Y_{t-k} + \varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

La statistique de test de linéarité  $Q(p)$  est définie par :

$$Q(p) = \frac{(\sum \hat{e}_t^2 - \sum \hat{\varepsilon}_t^2) / (p+1)}{\sum \hat{\varepsilon}_t^2 / (T-b-2p-1)} \sim F^{\alpha\%}((p+1), (T-b-2p-1))$$

où  $T$  est le nombre total des observations,  $b$ <sup>256</sup> est le nombre d'observations utilisées pour initialiser les estimateurs récursifs. Les  $\hat{e}_t^2$  sont les résidus  $\varepsilon_t$  standardisés, et  $\hat{\varepsilon}_t$  sont les résidus de la régression de  $\hat{e}_{(c)}$  sur  $(1, Y_{(c)})$ .

3<sup>ème</sup> étape :

Choix de la variable de transition : celle qui maximise la statistique  $Q(p)$  sachant que la linéarité est rejetée.

4<sup>ème</sup> étape :

Détection du seuil par analyse graphique des coefficients estimés (de manière récursive) et de leur Student en fonction de la variable de transition ordonnée (retenue dans l'étape précédente).

5<sup>ème</sup> étape :

Estimation du modèle à seuil, sachant  $p$ , la variable de transition et le seuil.

### ➤ Résultats du test

Les résultats d'application du test de Tsay, sont donnés dans le tableau (3.21), suivant :

<sup>256</sup> Dans le cas d'un modèle autorégressif de type TAR, Tsay (1989), conseil de prendre  $b = T/10 + p$ .

**Tableau 3.21: Résultats du test de Tsay (1989)**

<b>Variabes</b>	<b>F(p,d)</b>	<b>F-tests</b>	<b>P-value</b>
<b>DLIPI</b>	(7 , 108)	1.49107*	0.17802
<b>DLIAA</b>	(7 , 108)	0.56453	0.78321
<b>DLICCV</b>	(7 , 108)	1.52477*	0.16648
<b>DLIME</b>	(7 , 108)	1.98549*	0.06355
<b>DLIC</b>	(7 , 108)	0.63024	0.72996
<b>DLIHC</b>	(7 , 108)	1.97302*	0.06529
<b>DLIMD</b>	(7 , 108)	0.52609	0.81314
<b>DLIM</b>	(7 , 108)	1.27743	0.26829
<b>DLM</b>	(7 , 108)	1.21257	0.30212
<b>DLE</b>	(7 , 108)	1.56095*	0.16105

(\*) Indique un rejet de l'hypothèse de linéarité au seuil de 10%.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Les résultats, ainsi obtenus, permettent de rejeter l'hypothèse de linéarité, contre une alternative d'un modèle à seuil, avec transition brutale, entre les régimes caractérisant l'asymétrie cyclique, dans la dynamique des séries IPI, ICCV, IME, IHC et E où le changement de dynamique de ces variables s'opère, selon le signe de l'écart, entre la variable de transition et la valeur du seuil. Cependant, malgré l'importance de cette modélisation linéaire par morceau, qui permet de mettre en évidence la caractérisation des fluctuations cycliques asymétriques, la prise en compte de ce type de transition brutale, limite l'étude des processus de changement, dans le comportement dynamique de ces fluctuations. Or, rappelons que l'existence de la dynamique asymétrique, au cours du cycle endogène, nécessite la vérification du principe de changement, par recombinaison des invariances et de transformation adaptative de structures dynamiques, ce qui exige l'emploi des processus de lissages de transitions continues.

### 3.5.4.3. Test de Hansen (1996)<sup>257</sup>

#### ➤ Procédure de test

Nous proposons un test statistique pour tester l'hypothèse de linéarité, contre celle de présence de seuils, afin de justifier l'estimation à l'aide de modèle de changement de régimes.

<sup>257</sup> Notons que l'inférence des modèles à seuils (inconnus) est composée d'une partie identification des valeurs de seuils et d'une partie estimation. Le problème de détection de seuils a attiré l'attention de nombreux auteurs dans la littérature. Plusieurs tests sont élaborés par Tsay (1986, 1989, 1998), Tong (1990) et Hansen (1996a) pour justifier la présence de plusieurs régimes.

Nous proposons d'adopter le test de Hansen (1996a), sur la moyenne, qui a pour objectif de tester, si l'effet de seuil est statistiquement significatif. Ceci revient à admettre sous l'hypothèse nulle de linéarité, le modèle autorégressif sans changement de régime, contre l'hypothèse alternative de non linéarité, le modèle de transition brutal à seuil unique. Ce test a pour expression :

$$\begin{cases} H_0 : \psi_0 = \psi_1 \\ H_1 : \psi_0 \neq \psi_1 \end{cases}$$

Sous  $H_0$ , nous représentons que l'absence d'effet de seuil par l'égalité des coefficients des différents régimes. Mais, comme le seuil n'est pas identifié, nous sommes donc, confrontés à une majeure difficulté, dite «*le problème de Davies*<sup>258</sup>». Pour faire face à ce problème, nous supposons le paramètre de seuil, comme étant fixé à sa valeur estimée. La statistique appropriée à ce test est celui de ratio de vraisemblance LR défini par :

$$\hat{F}_1 = \frac{SCR(H_0) - SCR(H_1)_\hat{\epsilon}}{\hat{\sigma}_1^2}$$

où  $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{N(T-1)} SCR(H_1)_\hat{\epsilon}$ ,  $SCR(H_0)$  est la somme des carrés des résidus du modèle linéaire

et  $SCR(H_1)_\hat{\epsilon}$  la somme des carrés des résidus du modèle à un seuil.

Après avoir exposé ce test, il nous reste de simuler par bootstrap la distribution asymptotique du test de ratio de vraisemblance et de suivre la méthodologie de Hansen (1996a). La mise en œuvre des simulations est la suivante :

1<sup>ère</sup> étape : Traiter les régresseurs  $Y_{it}$  et la variable de saut  $q_{it}$  comme données, et tenir leur valeur fixe, lors des simulations répétées de bootstrap.

2<sup>ème</sup> étape : Reprendre les résidus  $\hat{\epsilon}_{it}^*$ , les regrouper par individus  $\hat{\epsilon}_i^* = (\hat{\epsilon}_{i1}^*, \hat{\epsilon}_{i2}^*, \dots, \hat{\epsilon}_{iT}^*)$  et traiter l'échantillon  $\hat{\epsilon}_1^*, \hat{\epsilon}_2^*, \dots, \hat{\epsilon}_N^*$  comme la distribution empirique à utiliser pour le bootstrap.

<sup>258</sup> Pour plus de détails sur cette exposition de ce problème, voir Davies, R.B., (1977), «*Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative*», *Biometrika*, 64, pp. 247-254. Ou encore, son article sous le même nom publié en (1987), *Biometrika*, 74, pp. 33-43.

Puis, calculer les statistiques<sup>259</sup>  $SupLM$ ,  $ExpLM$  et  $AveLM$  et probabilité du test associée (par bootstrap).

3<sup>ème</sup> étape : Tirer avec remplacement, un échantillon de taille (N) de la distribution empirique et utiliser ces erreurs pour créer un échantillon de bootstrap sous  $H_0$ .

4<sup>ème</sup> étape : Avec l'échantillon de bootstrap, estimer le modèle sous l'hypothèse nulle et l'alternative, puis calculer la valeur du ratio de vraisemblance.

5<sup>ème</sup> étape : Répéter cette procédure un grand nombre fois et calculer le pourcentage de tirages, pour lesquels la statistique simulée dépasse la statistique estimée de  $F_1$ . Ce calcul asymptotique donne la  $p$ -value de  $F_1$  sous  $H_0$ . La règle de décision est la suivante:

-si  $\hat{F}_1 > F_{1-\alpha}$ , alors  $H_0$  est rejetée au niveau de risque  $\alpha$ .

-si  $\hat{F}_1 \leq F_{1-\alpha}$ , alors  $H_1$  est rejetée au niveau de risque  $\alpha$ .

Notons que cette méthode de Hansen (1996a), nécessite d'estimer le modèle à seul (avec plusieurs régimes inconnus), et donc de connaître les seuils. Tsay (1998), a proposé une autre méthode pour tester la linéarité sur la moyenne des modèles autorégressifs. Elle se fonde sur l'orthogonalité des résidus prédictifs, par rapport aux variables passées, lorsque le modèle linéaire est convenablement spécifié. La variable de transition retenue est celle qui maximise les statistiques  $SupLM$ ,  $ExpLM$  et  $AveLM$ .

### ➤ Résultats de test

Les résultats d'application du test de Hansen, sont donnés dans le tableau (3.22) suivant :

<sup>259</sup> Notons que le test de linéarité selon la méthodologie de Hansen peut être réalisé en utilisant trois versions de la statistique de  $ML$  (*Lagrange Multiplier*) : la statistique  $SupLM$ ,  $AveLM$  qui est la moyenne de la séquence de statistique  $LM$  après intégration et  $ExpLM$  qui est le logarithme de la moyenne de la séquence des statistiques  $LM$  modifiées comme suit :

$$ExpLM \approx \exp\left(\frac{1}{2} LM\right)$$

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.22: Résultats du test de Hansen (1996)**

<b>Variabes</b>	<b>Threshold</b>	<b>Sup-LM</b>	<b>Exp-LM</b>	<b>AveLM</b>
<b>DL IPI</b>	22.754950	29.453494*	10.250259*	14.061457*
		[0.001]	[0.002]	[0.000]
<b>DLIAA</b>	16.722376	12.496459	2.817678	4.115758
		[0.363]	[0.480]	[0.412]
<b>DLICCV</b>	-1.566436	17.874950*	6.211898*	8.980942*
		[0.061]	[0.029]	[0.008]
<b>DLIME</b>	-18.063613	43.242488*	18.257347*	22.651877*
		[0.000]	[0.000]	[0.000]
<b>DLIC</b>	-15.874159	24.259199*	8.283496*	9.515637*
		[0.000]	[0.000]	[0.000]
<b>DLIHC</b>	21.808336	19.266441*	6.872107*	9.697128*
		[0.020]	[0.009]	[0.003]
<b>DLIMD</b>	-19.850095	13.086296	2.364900	3.168328
		[0.272]	[0.599]	[0.675]
<b>DLIM</b>	-4.557770	25.398334*	9.435005*	13.010336*
		[0.002]	[0.001]	[0.000]
<b>DLM</b>	22.072536	13.355012	4.090771*	6.070536*
		[0.274]	[0.172]	[0.080]
<b>DLE</b>	9.379501	19.554788*	7.202843*	8.330416*
		[0.027]	[0.006]	[0.007]

(\*) Indique un rejet de l'hypothèse de linéarité au seuil de 10%. Les probabilités du test de linéarité sont calculées à partir de J=1000 simulations. Les valeurs entre crochets indiquent les P-values du test.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Nous constatons, tout d'abord, au vu du tableau (3.21), que la linéarité ne peut être rejetée au seuil de 10% pour les séries IAA et IMD. Selon cette méthodologie, il apparaît donc que la plupart des séries de la production industrielle en Tunisie, présentent des effets de seuil. Cependant, les résultats, ainsi obtenus, diffèrent selon les deux méthodologies de Tsay et de Hansen pour les séries IC, IM et M. Mais, quand l'hypothèse de la linéarité peut être rejetée, même si les résultats obtenus, par les deux procédures sont en désaccord, nous pouvons toujours penser que le processus générateur de données est malgré tout non-linéaire. Toutefois, partons de notre cadre théorique, la non-linéarité d'un processus générateur des données provient du fait que les dates de seuil sont supposées inconnues et estimées techniquement, de façon endogène, en minimisant la variance résiduelle.

D'autre part, les conclusions issues des tests de linéarité confirment bien que pour mieux saisir les implications décisionnelles de la non-linéarité, nous allons chercher, à travers une interprétation politique, de cette méthodologie menée par l'émergence de deux axes de recherche : la théorie des modèles dynamiques non-linéaires, déterministes et la théorie des modèles économétriques stochastiques de séries temporelles non linéaires. En ce sens, pour le premier axe de recherche, Brock et Malliaris (1989), confirment l'évidence des implications politiques, des modèles déterministes avec fluctuations endogènes<sup>260</sup>. Il ressort de leur analyse théorique, en terme d'efficacité de gouvernance, des politiques de stabilisations de type contra-cyclique, que les principaux indices de conjonctures économiques changent de dynamique, suite à un changement léger de conditions de stabilité, entre les états (changement au niveau des valeurs des paramètres du modèle), ce qui engendre une corrélation forte et une volatilité intensive. Par contraste, d'après Bullard et Butler (1993), les théories économétriques, où les fluctuations résultant des chocs purement exogènes, montrent qu'une politique de stabilisation des variables économiques est un objectif futile. Pour cette raison nous avons suggéré que, pour expliquer les cycles endogènes des séries étudiées, de la production industrielle en Tunisie, il faut rapporter leurs comportements à des processus dynamiques non-linéaires, un peu comme un cycle limite. Or, nous avons montré, au cours de la deuxième partie que dans certains cas, en particulier là où il y a sensibilité extrême à des conditions initiales, les effets non-linéaires rendent la prévision extrêmement aléatoire, voire impossible, surtout les prédictions des modèles de dynamiques, où les erreurs de mesure partant de zéro, incitent à un accroissement exponentiel des erreurs de prévision. En plus, en respectant le principe de changement par recomposition des invariances et de transformation endogène des structures dynamiques, nous avons admis qu'il existe souvent des « effets de transition lisse », qui peuvent aussi être le phénomène que nous souhaitons prédire. La prédiction de ces phénomènes rend la modélisation dans le domaine des instabilités des structures, d'autant plus difficile, qu'il y a dilatation et contraction des structures dynamiques, à différentes échelles spatiales ou temporelles et des niveaux d'organisation

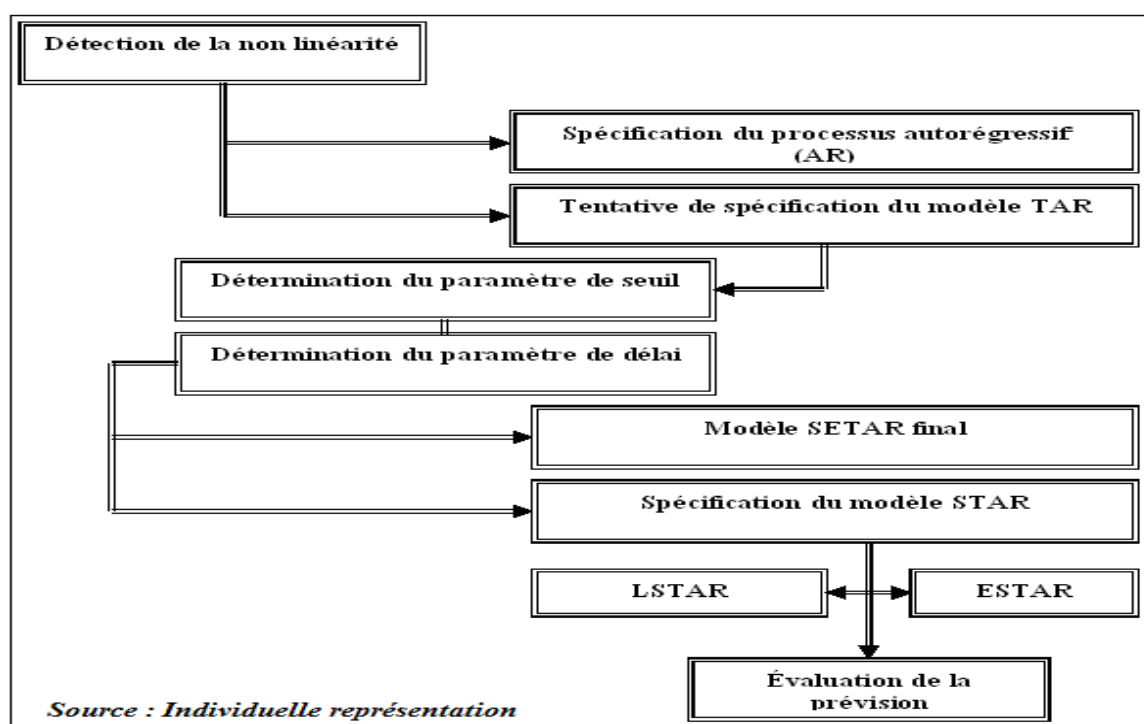
<sup>260</sup> Une justification théorique admise par Bullard et Butler (1993, p. 852), stipule que: « *The main benefit of nonlinear dynamic modelling is that possible to consider reasonable and simple economic models that never converge to a steady state ; even deterministic versions can display endogenous fluctuations.* ».

différents. D'où le recours à la modélisation économétrique, à l'aide des modèles de changement de régimes avec transitions lisses, nécessaire pour construire un modèle non-linéaire de prévision de séries temporelles.

### 3.5.5. Construction d'un modèle de prévision STAR

#### 3.5.5.1. Organigramme de spécification d'un modèle STAR

Après avoir justifié la présence des fluctuations cycliques asymétriques des séries, établir la stationnarité et justifier leur non-linéarité en moyennes, nous allons dans la présente application, suivre la même démarche de la stratégie de tests adoptée par Granger (1993) et Teräsvirta (1994a), pour la modélisation univariée des séries de la production industrielle en Tunisie, à l'aide des modèles non-linéaires avec changement de régimes par transition lisse. Par la suite, nous allons suivre la procédure de Teräsvirta (2006), pour la sélection d'un modèle non-linéaire de prévision pour chaque série analysée. La procédure de modélisation STAR, fondée sur un mécanisme endogène de changement de régime, est constituée par plusieurs étapes et peut être schématisée, selon l'organigramme décrit comme suit:





Méthodologiquement, nous procédons à une démarche constituée de neuf étapes. Dans la première étape, nous détectons la présence d'au moins un attracteur non-linéaire capable d'identifier le nombre des régimes qui caractérisent la dynamique du cycle endogène pour chacune des séries étudiées. Car les cycles endogènes analysés sont des cycles par bifurcation, c'est-à-dire, qui naissent suite à la modification continue des propriétés qualitatives de l'équilibre dynamique. Dans la deuxième étape, en se basant sur le test de linéarité au sens de Lukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), nous retenons l'identification de deux types de spécifications des processus de transitions de type ESTAR et LSTAR. Dans ce cadre, nous commençons l'identification des processus SETAR par préciser l'ordre de la partie autoregressive le plus approprié. Dans la troisième étape, nous estimons les processus autoregressifs pour les ordres de retard  $p^*$  retenus. Dans la quatrième étape, nous estimons les processus SETAR. Dans la cinquième étape, nous identifions le paramètre de seuil et le paramètre de délai  $d$  qui maximise la statistique  $LM(d)$ , afin de procéder à la spécification du modèle ESTAR/LSTAR le plus approprié. Dans la septième étape, avant de passer par les tests de validation au sens de Granger et Teräsvirta (1993) et les tests de mauvaises spécifications au sens de Eitrheim et Teräsvirta (1996), nous passons par la validation du modèle SETAR le plus approprié avec un paramètre de seuil  $c$  inconnu. Dans la huitième étape, en nous basant sur le test de linéarité au sens de Lukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), nous choisissons entre le modèle ESTAR et LSTAR et finalement nous estimons le modèle STAR le plus approprié avec des paramètres de transition et de seuil inconnus, avant de passer à la construction des modèles de prévisions et à l'analyse comparative des performances prédictives des modèles retenus pour arriver à sélectionner la « meilleure » structure, d'un modèle STAR en prédiction des séries temporelles analysées.

### 3.5.5.2. Construction d'un modèle STAR

Rappelons que notre but est d'arriver à sélectionner la « meilleure » structure, d'un modèle en prédiction des cycles endogènes des branches sectorielles de la production industrielle en Tunisie. Or, jusqu'à ce niveau, nous avons pu prouver juste la présence des fluctuations cycliques endogènes et asymétriques, par recours à la technique de la décomposition trend-cycle, suite à l'application du filtre Hodrick et Prescott (1980, 1997). Toutefois, cet outil est

---

généralement contesté, puisque le mérite essentiel de ce filtre, est d'avoir permis une grille de lecture commune, en normalisant la procédure de stationnarisation. En ce sens, le filtre de Hodrick-Prescott permet d'éliminer des séries les mouvements dynamiques de basses fréquences (y compris ceux inclus dans la composante stationnaire). Mais, n'oublions pas que les fluctuations endogènes, qui font l'objet de notre étude, sont générées, simultanément, lors du fonctionnement des processus dynamiques générateurs des données, à la suite de la perte de stabilité structurelle de l'équilibre dynamique. Donc, l'équilibre dynamique est une notion qui fait partie de nos préoccupations ici, mais n'oublions pas que la dynamique industrielle, en Tunisie, reflète l'instabilité qui touche le dynamisme de presque toutes les branches sectorielles et qui exprime bien la dynamique du fragile équilibre du secteur industriel. Or, la dynamique du fragile équilibre du secteur industriel, en Tunisie, est à l'origine de l'instabilité structurelle du secteur, en présence de ruptures endogènes caractérise naturellement le comportement dynamique d'un cycle endogène, de type cycle limite. Ce phénomène est d'origine cyclique endogène, résultent des fluctuations auto-entretenues des différents constituants, induites par le dynamisme.

Cette étude concentrée sur les fluctuations auto-entretenues s'attache, donc, au domaine de l'instabilité de l'équilibre dynamique, en traitant la caractérisation de ses évolutions transitoires, tout en mettant en évidence des comportements dynamiques asymétriques, fortement non linéaires. D'un point de vue modélisation, ces constatations nous orientent vers une famille de modèle de changements structurels avec transitions lisses. Mais, dans certains cas, il risque de lui tendre vers une dynamique chaotique. Toutefois, nous avons pu montrer, en deuxième partie de ce document, que selon l'un des aspects de la théorie du chaos, il est logiquement raisonnable d'accepter qu'il y ait un peu de désordre dans l'ordre et de l'ordre dans le désordre. De ce fait, notre exercice consiste à sélectionner une meilleure structure d'organisation d'équilibre dynamique, entre l'ordre et le désordre, parmi une chasse possible, dans un sens comme dans l'autre.

Jusqu'à ce niveau d'analyse, l'étude de l'instabilité de l'équilibre dynamique par couplage de périodes de structures cohérentes, qui est le mécanisme générateur de fluctuations endogènes

auto-entretenues privilégié dans la littérature du cycle limite, nous a conduits, dans un premier temps, à observer puis identifier le comportement du mécanisme réel, grâce à des outils d'analyse qualitative, notamment la technique de bifurcation. L'identification et la compréhension de ce mécanisme physique sont un fil conducteur robuste, dans la recherche de la sélection d'une meilleure structure de modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles, dans un domaine d'instabilité des structures dynamiques. Dans un deuxième temps, elle nous a conduits à proposer une étude spatiale et temporelle, faite au moyen des techniques ordinales de la récurrence, au niveau d'un processus dynamique générateur des données. Elle a aussi permis de préciser le mécanisme physique de couplage aperiodique des structures incohérentes, qui est le mécanisme générateur de fluctuations chaotiques, ainsi que sa sensibilité, vis-à-vis, des conditions initiales qui est une caractéristique de la croissance explosive de l'erreur et en conséquence d'imprédictibilité. La connaissance de ce mécanisme physique est un fil conducteur robuste dans la recherche de prédiction, par réduction de la noise.

Ainsi, toujours dans le but d'élargir et d'enrichir notre cadre d'analyse, la contribution fondamentale de notre travail, ici, sur le côté empirique, est de proposer une méthodologie de modélisation économétrique, permettant d'ancrer l'analyse des fluctuations endogènes, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques. C'est-à-dire dans le cadre induit par des modèles d'équilibre multiple et dynamique<sup>261</sup>. Donc, face aux problèmes de perte de la stabilité locale de l'équilibre dynamique, qui tendent à compliquer le comportement dynamique global, notre apport, ici, consiste à proposer une manière de modélisation raisonnable, basée sur l'idée de l'équilibre rationnellement adaptative (*adaptively rational equilibrium*). Notre méthode originale consiste, donc, à étudier la transition, entre l'évolution des chocs structurels endogènes aux voisinages de l'équilibre et l'évolution transitoire, grâce à l'étude des projections, sur les modes des stabilités de la dynamique d'un modèle économétrique. Voilà, notre procédure méthodologique autorise le suivi de l'enchaînement des étapes suivantes :

<sup>261</sup> Cette idée est tout à fait opposée à celle du courant des cycles réels où l'analyse des fluctuations économiques exogènes est fréquemment traitée dans le cadre de modèles d'équilibre général intertemporels.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**1<sup>ère</sup> étape :** En premier lieu, nous essayons de détecter la présence d'au moins un attracteur<sup>262</sup>, pour chacune des séries étudiées. En second lieu, nous identifions pour chaque cas, la série endogène<sup>263</sup>.

**Tableau 3.23 : Recherche des attracteurs et du nombre de régimes**

	DLPI	DLIAA	DLICCV	DLIME	DLIC	DLIHC	DLIMD	DLIM	DLM	DLE
Thr	-0.0278	-0.0577	-0.0687	0.0271	0.0483	-0.0505	-0.0142	-0.0356	0.0028	-0.0221
<b>Nombre des régimes</b>										
k	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Thr, k : indiquent (respectivement) la présence d'un attracteur « the attractor Threshold » et le nombre des régimes. Le nombre des régimes est égal au nombre des attracteurs augmenté de un.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Notons que la détection des attracteurs est une étape très intéressante, dans le cadre de notre démarche méthodologique. Car, ils permettent, d'une part de s'assurer de la validité de l'hypothèse de non-linéarité et d'autre part, de confirmer la présence de changements de régimes, qui est une condition nécessaire pour réaffirmer la multiplicité de l'équilibre dynamique. Les résultats obtenus sur le tableau (3.23), confirment bien la présence des attracteurs pour les séries de la production industrielle en Tunisie.

**2<sup>ème</sup> étape :** Nous identifions l'ordre  $p$  pour chacun des modèles autorégressifs  $AR(p)$  le plus approprié. Une telle démarche consistant, soit à représenter pour chaque processus la suite des autocorrélations partielles estimées  $\hat{\tau}(h)$  et regarder à partir de quelle valeur elle reste dans la bande  $[\pm 1.96 (T)^{-1/2}]$ , soit à tester au moyen du test de Student, la significativité du coefficient  $\psi_i$ . Etant donné  $\hat{\psi}_p$  l'estimateur de  $\psi_p$  dans la formulation  $AR(p)$  et  $\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_p}^2$  sa variance estimée ; nous accepterons avec un risque de 5% l'hypothèse, selon laquelle le modèle adéquat est  $AR(p)$  si  $T^c = |\hat{\psi}_p| (\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_p})^{-1} \geq 1.96$ . Ou encore, à utiliser d'autres critères de sélection, tel que le critère d'information d'Akaike (1969a-b), le critère d'information de Schwarz (SIC), ainsi que le critère d'information de Hannan et Quinn (1979). Sachant le nombre d'observations  $T$ , alors, il sera possible

<sup>262</sup> Pour la recherche d'un attracteur, nous conseillons l'intéressé de consulter l'exemple N°4 de Teräsvirta, T., (1994a), « *Specification, estimation and evaluation of smooth transition autoregressive models* », J.A.S.A., vol 89(425), pp. 208-218.

<sup>263</sup> Il est possible d'obtenir aisément à l'aide du programme Rats la série endogène en appliquant l'instruction : *Set EY = Y - ResY* où *ResY* est la série des résidus.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

de retenir le modèle autorégressif, dont l'ordre autorégressif  $p$  conduisant à la plus petite valeur des estimateurs de la quantité d'information, proposés comme suit :

$$\begin{aligned} AIC(p) &= \log(\hat{\sigma}^2) + 2(p/T) \\ SIC(p) &= \log(\hat{\sigma}^2) + p(\log(T)/T) \\ HQ(p) &= \log(\hat{\sigma}^2) + 2p((\log(\log(T)))/T) \end{aligned}$$

Les résultats de l'étape de sélection l'ordre autorégressif  $p^*$ , sont donnés par le tableau (3.24), suivant :

**Tableau 3.24: Choix du nombre de retards p**

Variable	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
$P^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2

(\*) Indique le nombre de retards appropriés selon la majorité des quatre critères retenus (le test de Student ; le critère d'information d'Akaike (AIC) ; le critère d'information de Schwarz (SIC) et le critère d'information de Hannan-Quinn (HQ)). Le quantile de la loi de Student au seuil  $\alpha=5\%$  est  $t_{(129)}^{0.05} \approx 1.96$

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Nous observons que pour chaque série,  $p^*$  est le nombre de retards appropriés et par conséquent, nous devons choisir un  $AR(p^*)$  comme modèle retenu sous  $H_0$ .

**3<sup>ème</sup> étape :** Après avoir sélectionné l'ordre autorégressif  $p^*$ , cette étape consiste à estimer le modèle linéaire  $AR(p^*)$ , corrigé des effets des variances volatiles (d'hétéroscédasticité)<sup>264</sup> pour chaque série, selon la spécification suivante :

$$\Delta Y_t = \psi_0 + \sum_{i=1}^{p^*} \psi_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Les résultats de l'estimation figurent dans le tableau (3.25), indiquent que les coefficients  $\psi_i$  sont significativement différents de zéro au seuil  $\alpha \in \{5\%, 10\%\}$ . Nous constatons que le passé de chaque série lui apporte de l'information et permet, donc, d'améliorer sa qualité prévisionnelle.

<sup>264</sup> Techniquement l'utilisation de l'instruction *LINREG* en programme Rats avec l'option (*Robusterrors*) permet de corriger le problème d'hétéroscédasticité.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.25: Résultats de l'estimation des données pour un modèle AR(p\*)**

$\Psi_i$	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0$	0.005* (2.975)	0.007* (5.811)	0.005** (1.754)	0.013* (3.468)	0.003 (0.625)	0.004 (0.523)	0.004* (1.061)	0.007* (3.409)	-0.00009 (-0.056)	0.001 (1.145)
$\psi_1$	-0.487* (-4.429)	-0.187* (-2.472)	-0.402* (-3.414)	-0.279* (-2.697)	-0.436* (-4.823)	-0.321* (-4.897)	0.026 (0.265)	-0.495* (-4.619)	-0.416* (-3.508)	0.170* (2.174)
$\psi_2$	-0.212* (-2.597)	-0.203* (-2.343)	-0.041 (-0.319)	-0.220* (-3.064)	-0.152** (-1.738)	-0.258* (-3.646)	-0.019 (-0.201)	-0.251* (-2.933)	-0.070 (-0.744)	-0.313* (-3.113)
$\psi_3$		-0.158* (-2.135)	0.008 (0.091)		-0.127 (-1.431)					
$\psi_4$		-0.219* (-3.999)			-0.267* (-2.687)					
$R^2$	0.199	0.230	0.164	0.141	0.226	0.132	0.229	0.237	0.155	0.120
$JB$	10.229	9.528	3.466	95.117	0.656	3511.100	24.354	5.382	0.020	19.249
$DW$	1.916	2.012	2.035	1.988	1.945	2.076	1.905	2.028	2.029	2.006
$ARCH$	5.594	0.004	6.638	0.055	0.384	0.052	0.094	3.353	13.505	0.580
$\sigma_{AR_p}^2$	0.003	0.001	0.009	0.001	0.005	0.002	0.0005	0.005	0.003	0.001

\*(resp. \*\*) Indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 5% où la valeur critique est 1.95996 (resp. au seuil de 10% où la valeur critique est 1.64485). (.) Indique les t de Student des coefficients estimés.  $R^2$  est le coefficient de détermination, DW est la statistique de Durbin-Watson et

$\sigma_{AR_p}^2$  est la variance du processus AR(p\*).

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Notons que les processus estimés ne sont de bonne qualité que lorsque les chroniques théoriques (calculées) suivent les évolutions des chroniques empiriques. Cette condition n'est valide que si les résidus (ou erreurs de prévisions), entre les états observés et les états réalisés par chaque processus, suivent un bruit blanc normal. Notons que si le test de stationnarité sur les résidus indiquera que les résidus ne sont pas stationnaires, alors ce résultat peut provenir de différentes sources, notamment des problèmes de spécifications, liés au mauvais choix des formes fonctionnelles des processus générateurs de données, ou encore des erreurs de mesure sur les variables étudiées. Or, les critères d'informations sélectionnent, selon le principe de parcimonie, des retards faibles mais qui peuvent aboutir à des résidus, qui ne suivent pas des bruits blancs et en conséquence, ils risquent souvent de fausser les tests standards de l'inférence statistique non-linéaire. Pour cela, il est commode d'établir des tests sur les résidus de bruit blanc

normal. Nous allons essayer tout d'abord, de réaliser un test de portemanteau ou d'adéquation globale du modèle pour la recherche d'autocorrélation<sup>265</sup>, au moyen du test statistique de Ljung et Box (1979), capable de détecter une éventuelle autocorrélation. Le test de LB consiste à vérifier l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \\ H_1 : \text{il existe au moins un } \rho_j \text{ significativement non nul} \end{cases}$$

La statistique de LB est donnée par :

$$Q' = T(T+2) \sum_{i=1}^p \frac{r_i^2}{T-i} \sim \chi^2_{(v=s-(P+Q))}$$

où  $r_i$  est le coefficient d'autocorrélation empirique d'ordre  $i$  ;  $P$  est l'ordre de la partie AR (saisonnier ou non),  $Q$  est l'ordre de la partie MA (saisonnier ou non) et  $s$  est le nombre de retards choisis, pour calculer les autocorrélations. La règle de décision indique que si  $Q' \geq \chi^2_{(1-\alpha)}(v)$ , alors nous rejetons au seuil  $\alpha$  l'hypothèse nulle de bruit blanc. Autrement, ceci correspond au fait que la  $p$ -value est suffisamment négligeable ( $< 0.05$ ). Les résultats du test LB sont donnés par le tableau (3.26) :

<sup>265</sup> Pour détecter une éventuelle autocorrélation, nous pourrions pratiquer le test de Box et Pierce (1970).

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.26 : Ljung-Box Q-Statistics du modèle AR(p\*)**

Variables	s	P	v	Q(6-0)	Q(12-0)	Q(18-0)	Q(24-0)	$\chi^2_{0.95}(v)$
<b>EIPI</b>	24	14	10	4.709 [0.581]	18.723 [0.095]	34.080* [0.012]	62.114* [0.000]	18.31
<b>EIAA</b>	24	16	08	6.5184 [0.367]	10.8465 [0.542]	24.6111* [0.136]	48.0425* [0.002]	15.51
<b>EICCV</b>	24	15	09	9.854 [0.130]	25.846* [0.011]	49.043* [0.0001]	68.933* [0.000]	16.92
<b>EIME</b>	24	14	10	2.638 [0.852]	18.116 [0.112]	23.134 [0.185]	33.933 [0.085]	
<b>EIC</b>	24	16	08	3.290 [0.771]	8.307 [0.760]	14.305 [0.708]	32.438 [0.116]	
<b>EIHC</b>	24	16	08	4.589 [0.597]	17.980 [0.116]	21.990 [0.232]	28.344 [0.245]	
<b>EIMD</b>	24	14	10	4.232 [0.645]	13.296 [0.347]	20.054 [0.329]	37.348* [0.040]	
<b>EIM</b>	24	14	10	2.754 [0.839]	11.486 [0.487]	27.181 [0.075]	55.916* [0.0002]	
<b>EM</b>	24	14	10	5.375 [0.496]	22.098 [0.036]	25.279 [0.117]	45.776* [0.004]	
<b>EE</b>	24	14	10	12.005 [0.061]	33.934* [0.0006]	40.394* [0.001]	44.448* [0.006]	

\* ) Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 5%. Le quantile de la loi de Student au seuil  $\alpha=5\%$  est  $\chi^2_{0.95}(v)$ .

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Or, pour  $p^*$  sélectionné à l'aide des différents critères, le test LB sur les résidus indique que  $H_0 : \rho_{p^*} = 0$  n'est pas rejetée et donc le modèle  $AR(p^*)$  est acceptable, au seuil de 5% (les résidus sont bruit blanc). Or, par définition, un processus bruit blanc ne peut contenir des racines unitaires, qui sont signes de la présence de tendances aléatoires. Ceci nous laisse penser que les résidus sont stationnaires, en tendances aléatoires, sur la totalité de la période d'estimation. Pour vérifier cette hypothèse, nous passons par les tests d'existence d'une tendance stochastique des résidus. Pour ce faire, nous appliquons la stratégie de test de racine unitaire de type Goerlich. Les résultats de ce test pour les résidus des séries de la production industrielle tunisienne sont portés sur le tableau (3.27) suivant :



**Tableau 3.27: Résultats des tests d'existence des tendances stochastiques sur les résidus**

Résidus	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
$t_{(\rho-1)/\rho}$	-10.693*	-10.55*	-11.128*	-10.521*	-11.273*	-11.192	-10.411*	-10.814*	-11.032*	-10.66*

(\*, \*\*) Indiquent le rejet de l'hypothèse de racine unitaire avec constante et trend pour la série des résidus au seuil  $\alpha=5\%$  (respectivement au seuil  $\alpha=10\%$ ). Les valeurs critiques du test de Goerlich à 5% et 1% sont -3.77 et -4.31 (respectivement).

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Ces résultats montrent que les séries des résidus sont stationnaires au seuil  $\alpha \in \{5\%, 10\%\}$  et en conséquence, ils justifient que les résidus des séries étudiées n'admettent pas des tendances stochastiques. C'est-à-dire qu'ils ne peuvent englober des mouvements à long terme de type aléatoire. Or, n'oublions pas que nous avons détecté, dès le départ de notre démarche méthodologique, la présence d'attracteurs. Ce constat est très important, dans la spécification du modèle non-linéaire, puisque la présence de ruptures, nous guide vers les spécifications des types changements structurels. Dans la littérature des séries temporelles non-linéaires, de nombreuses statistiques de tests sont élaborés, afin de détecter la présence de changements structurels, telles les statistiques basées sur la moyenne. Parmi les méthodes les plus appropriées, celles de segmentation binaire de Vostrikova (1981), qui permet d'identifier tous les points possibles de changements structurels.

**4<sup>ème</sup> étape :** Afin de spécifier l'ajustement non-linéaire des séries sous l'étude, nous allons commencer cette étape par estimer, à l'aide de la technique de NLS (*Nonlinear Least Squares*) avec la méthode de Gauss-Newton, un modèle *SETAR*, avec  $p^*$  retards dans chaque régime pour chaque série, en supposant que le nombre de régime  $(k) = 2$ , la variable de seuil  $s_t = Y_{t-1}$  et le paramètre de seuil nul ( $c=0$ ). Pour ce faire, nous allons estimer le modèle SETAR avec  $p^*$  retards dans chaque régime suivant :

$$\Delta Y_t = \begin{cases} \psi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1^*} \psi_i^{(1)} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } \Delta Y_{t-1} < c \\ \psi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2^*} \psi_i^{(2)} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } \Delta Y_{t-1} \geq c \end{cases} \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\varepsilon_t^{(j)} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon^{(j)}}^2)$  pour  $j=1,2$ .

Les résultats obtenus sont reportés sur le tableau (3.28) suivant :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

<b>Tableau 3.28 : Estimation des données par NLS pour un modèle SETAR</b>										
$\Psi_i$	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
<i>Régime (1)</i>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0^{(1)}$	0.010*	0.010*	0.005	0.005	0.003	0.004	0.004*	0.014*	-0.001	-0.001
	(2.731)	(3.036)	(0.744)	(0.740)	(0.570)	(0.543)	(2.278)	(3.207)	(-0.394)	(-0.551)
$\psi_1^{(1)}$	-0.310	-0.091	-0.371	-0.437*	-0.349	-0.357*	0.214	-0.366**	-0.324	-0.156
	(-1.461)	(-0.502)	(-1.518)	(-2.382)	(-1.476)	(-2.848)	(0.745)	(-1.883)	(-1.582)	(-0.650)
$\psi_2^{(1)}$	-0.257**	-0.042	-0.017	-0.387*	-0.063	-0.351**	0.148	-0.364*	-0.059	-0.047
	(-1.973)	(-0.287)	(-0.116)	(-2.419)	(-1.473)	(-1.703)	(0.958)	(-3.007)	(-0.438)	(-0.314)
$\psi_3^{(1)}$		-0.307**	0.013		0.026					
		(-1.833)	(0.085)		(0.172)					
$\psi_4^{(1)}$		-0.365			-0.114					
		(-1.560)			(-0.823)					
<i>Régime (2)</i>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0^{(2)}$	-0.003	0.007*	0.005	0.022*	0.003	0.0009	0.008*	-0.004	-0.011*	0.0008
	(-0.856)	(3.089)	(0.955)	(2.965)	(0.656)	(0.102)	(3.024)	(-0.869)	(3.120)	(0.404)
$\psi_1^{(2)}$	-0.125	-0.200	-0.416*	-0.495*	-0.440*	-0.176	0.006	-0.089	-1.016*	0.265**
	(-0.625)	(-1.302)	(-2.587)	(-2.477)	(-2.329)	(0.735)	(0.040)	(-0.491)	(-5.308)	(1.601)
$\psi_2^{(2)}$	-0.144	-0.288*	-0.058	-0.170	-0.289**	-0.210**	-0.109	-0.096	-0.167	-0.457*
	(-1.027)	(-2.920)	(-0.412)	(-1.509)	(-1.790)	(-1.936)	(-0.882)	(-0.703)	(-1.267)	(-4.149)
$\psi_3^{(2)}$		-0.122	0.004		-0.267**					
		(-1.283)	(0.034)		(-1.890)					
$\psi_4^{(2)}$		-0.209*			-0.402*					
		(-2.381)			(-3.019)					
$R^2$	0.241	0.259	0.164	0.177	0.251	0.138	0.242	0.294	0.245	0.172
$JB$	14.472	9.121	3.937	70.350	0.739	3538.18	28.625	1.944	2.738	20.511
$DW$	1.923	1.984	2.036	1.995	1.945	2.072	1.937	2.065	1.925	1.998
$ARCH$	4.51	0.267	0.407	2.657	0.015	0.040	0.003	0.662	17.489	0.424
<i>Itérations</i>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\sigma_{SETAR_p}^2$	0.003	0.001	0.001	0.001	0.006	0.002	0.0005	0.004	0.003	0.001

\*(resp. \*\*) Indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 5% (resp. au seuil de 10%). (.) Indique les t de Student des coefficients estimés.

$R^2$  est le coefficient d'ajustement linéaire,  $DW$  est la statistique de Durbin-Watson et  $\sigma_{AR_p}^2$  est la variance du processus  $AR(p^*)$ .

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

Après avoir estimé le modèle SETAR avec  $p^*$  retards, dans chaque régime par NLS (en supposant  $c = 0$ ). Nous procédons, maintenant, au test de la validité du modèle SETAR. Les résultats du test de Ljung-Box sur le modèle SETAR avec  $c$  connu, sont transcrits sur le tableau (3.29), suivant :

<b>Tableau 3.29 : Ljung-Box Q-Statistics du modèle SETAR avec c connu</b>				
<b>Variables</b>	<b>Q(6-0)</b>	<b>Q(12-0)</b>	<b>Q(18-0)</b>	<b>Q(24-0)</b>
<b>EIPI</b>	4.941 [0.551]	18.890 [0.091]	31.242* [0.026]	53.667* [0.0004]
<b>EIAA</b>	7.635 [0.266]	12.990 [0.369]	26.000* [0.099]	48.657* [0.002]
<b>EICCV</b>	9.745 [0.135]	25.589* [0.012]	48.873* [0.0001]	68.566* [0.0000]
<b>EIME</b>	3.442 [0.751]	16.761 [0.158]	22.951 [0.192]	33.308 [0.097]
<b>EIC</b>	4.692 [0.583]	10.090 [0.608]	16.010 [0.591]	33.002* [0.104]
<b>EIHC</b>	3.722 [0.714]	16.332 [0.176]	20.610 [0.299]	27.082 [0.300]
<b>EIMD</b>	3.788 [0.705]	13.781 [0.314]	20.557 [0.302]	40.935* [0.016]
<b>EIM</b>	2.671 [0.848]	11.198 [0.512]	22.938 [0.192]	45.116* [0.005]
<b>EM</b>	6.041 [0.418]	29.914* [0.002]	32.730* [0.017]	59.777* [0.00006]
<b>EE</b>	10.741 [0.096]	28.085* [0.005]	33.742* [0.013]	37.198* [0.041]

\* Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 5%.  
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Nous constatons que le test sur les résidus obtenus par NLS sur le modèle SETAR avec  $c$  connu indique que, pour chaque série étudiée, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée au seuil de 5% et donc, dans chaque cas, nous avons un modèle bien adéquat.

Par la suite, nous testons, au moyen d'un test de Fisher, si les coefficients de deux régimes sont égaux et donc, l'hypothèse nulle devient  $H_0$  : la linéarité des coefficients de deux régimes contre l'alternative de non-linéarité avec changement de régime.

**5<sup>ème</sup> étape :** Nous testons l'hypothèse sous  $H_0$  : les coefficients des régressions de deux régimes sont égaux, donc le modèle approprié est un AR( $p^*$ ) contre l'alternative donnée par un modèle SETAR( $k ; p^*$ ). Ce test est formulé par les hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \psi_1^{(1)} = \psi_1^{(2)}, \dots, \psi_{p^*}^{(1)} = \psi_{p^*}^{(2)} \\ H_1 : \psi_1^{(1)} \neq \psi_1^{(2)}, \dots, \psi_{p^*}^{(1)} \neq \psi_{p^*}^{(2)} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test est un Fisher standard à  $n_1$  et  $n_2$  degrés de liberté, définie par :

$$F^c = \frac{(Scr_{H_0} - Scr_{H_1}) / (n_1)}{(Scr_{H_1}) / (n_2)} \sim F^{\alpha\%} (n_1 ; n_2)$$

où  $n_1$  est le degré de liberté sous  $H_0$  - le degré de liberté sous  $H_0$  et  $n_2$  est le degré de liberté sous  $H_1$ . La règle de décision implique que nous devons rejeter l'hypothèse nulle de AR(2) avec un risque de  $\alpha\%$ , si la valeur de la statistique calculée  $F^c$ , est supérieure ou égale à sa valeur tablée. Dans ce cas, le modèle est non-linéaire avec changement des régimes et plus exactement c'est un SETAR( $k ; p^*$ ). Sinon, nous devons accepter l'hypothèse nulle, selon laquelle le modèle est linéaire et plus précisément c'est un AR( $p^*$ ). Les résultats des tests d'égalités des coefficients des régressions dans les deux régimes, sont présentés dans le tableau (3.30), comme suit :

<b>Tableau 3.30 : Résultats du test d'égalité entre les coefficients de deux régimes</b>										
	<b>EIPI</b>	<b>EIAA</b>	<b>EICCV</b>	<b>EIME</b>	<b>EIC</b>	<b>EIHC</b>	<b>EIMD</b>	<b>EIM</b>	<b>EM</b>	<b>EE</b>
<b>F<sup>c</sup></b>	2.078*	-2.529*	-8.830*	2.373*	-14.035*	-4.11623*	-4.346*	5.475*	7.266*	4.076*
<b>n1</b>	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
<b>n2</b>	118	103	106	109	103	112	109	109	109	109
<b>F<sup>α</sup>(n1,n2)</b>	0.311	0.950	0.016	0.722	0.847	0.34467	0.93661	1.347	3.24727	3.43049
<b>P-value</b>	0.732	0.438	0.997	0.487	0.498	0.709	0.395	0.264	0.042	0.035

\* Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de  $\alpha=5\%$ .

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Les valeurs du test de Fisher calculées indiquent que  $H_0$  est rejetée avec  $\alpha=5\%$ , pour toutes les séries étudiées, et donc le rejet de l'hypothèse de linéarité, contre une alternative d'asymétrie cyclique induite par l'effet de seuil, nous conduit à constater qu'un modèle avec changement de régime, plus précisément de type SETAR( $k ; p^*$ ), est approprié pour modéliser les cycles endogènes des séries de la production industrielle tunisienne. Mais, il faut noter, qu'en

général, le rejet de la linéarité, contre l'alternative d'un modèle de changement de régime, ne permet pas, certainement, d'admettre l'hypothèse de l'asymétrie cyclique, puisque dans plusieurs d'autres cas, la non-linéarité ne concerne pas la moyenne et intéresse plutôt la variance, dans ces cas, il y a absolument d'autres structures de non-linéarité.

**6<sup>ème</sup> étape :** Maintenant nous allons supposer que le paramètre  $c$  est inconnu. Nous essayons, donc, dans un premier pas, de trouver la valeur optimale de  $c$  pour le modèle SETAR( $k ; p^*$ ) puis, nous estimons, dans un second pas, le nouveau modèle SETAR ( $k ; p^*$ ) avec le  $c$  déjà trouvé. Le paramètre  $c$  peut être déterminé selon la méthode de Chan (1993), comme suit:

- Nous excluons 15% des observations de chaque extrémité de la base de données. Nous conservons donc que 70% des observations, soit toutes les observations comprises entre la 20<sup>ème</sup> observation et la 109<sup>ème</sup> observation.
- Ces observations sont faites pour des  $c$  potentiels et donc nous estimons le modèle SETAR( $k ; p^*$ ) pour chacun des  $c \in \{y_1, y_2, \dots, y_{70\%}\}$  et nous récupérons la somme des carrés des résidus  $SCR$  pour chaque estimation.
- Le modèle avec la plus petite valeur de  $SCR$  donne le  $c$  optimal. La somme des résidus au carré  $SCR$  est minimale pour la Taux<sup>ème</sup> observation. Nous considérons que le nouveau  $c$  est celui ayant la  $SCR$  reliée à cette observation, soit  $c_{opt}$ .

Les résultats obtenus, lorsque nous cherchons la valeur optimale de  $c$  sont affichés sur le tableau (3.31) :

<b>Tableau 3.31 : Résultats de la recherche de la valeur optimale de <math>c</math></b>										
	<b>EIPI</b>	<b>EIAA</b>	<b>EICCV</b>	<b>EIME</b>	<b>EIC</b>	<b>EIHC</b>	<b>EIMD</b>	<b>EIM</b>	<b>EM</b>	<b>EE</b>
<b>Taux</b>	23	24	36	27	21	43	20	23	25	21
<b>Scr</b>	0.04447	0.01836	0.09504	0.14951	0.06438	0.260	0.00613	0.05715	0.03995	0.01249
<b>C<sub>opt</sub></b>	0.03285	0.00195	0.00624	0.04287	0.01589	-0.005	-0.02714	0.05335	0.00392	0.0046

*Taux, Scr et C<sub>opt</sub> indiquent respectivement l'ordre d'observation pour laquelle la somme des résidus au carré est minimale, la somme des résidus au carré et la valeur optimale de « c » qui minimise Scr.*

*Source : Tests réalisés sur Rats 6.*

Selon Hansen (2000), l'estimation du seuil optimal se fait à l'aide de la méthode de moindres carrés séquentiels. Il s'agit de quantifier la variance résiduelle du modèle à seuil conditionnellement, puis de choisir comme seuil la valeur qui minimise cette variance résiduelle. Il existe également une autre méthode basée sur la détermination d'un intervalle de confiance

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

pour le seuil, en utilisant une distribution asymptotique de la statistique du rapport de vraisemblance LR. La figure (3.71), représente la somme des résidus au carré (SRC) stationnaire pour 70% des observations utilisées, parmi tout l'échantillon.

## Recherche de (c) optimal

1996:04 - 2006:12

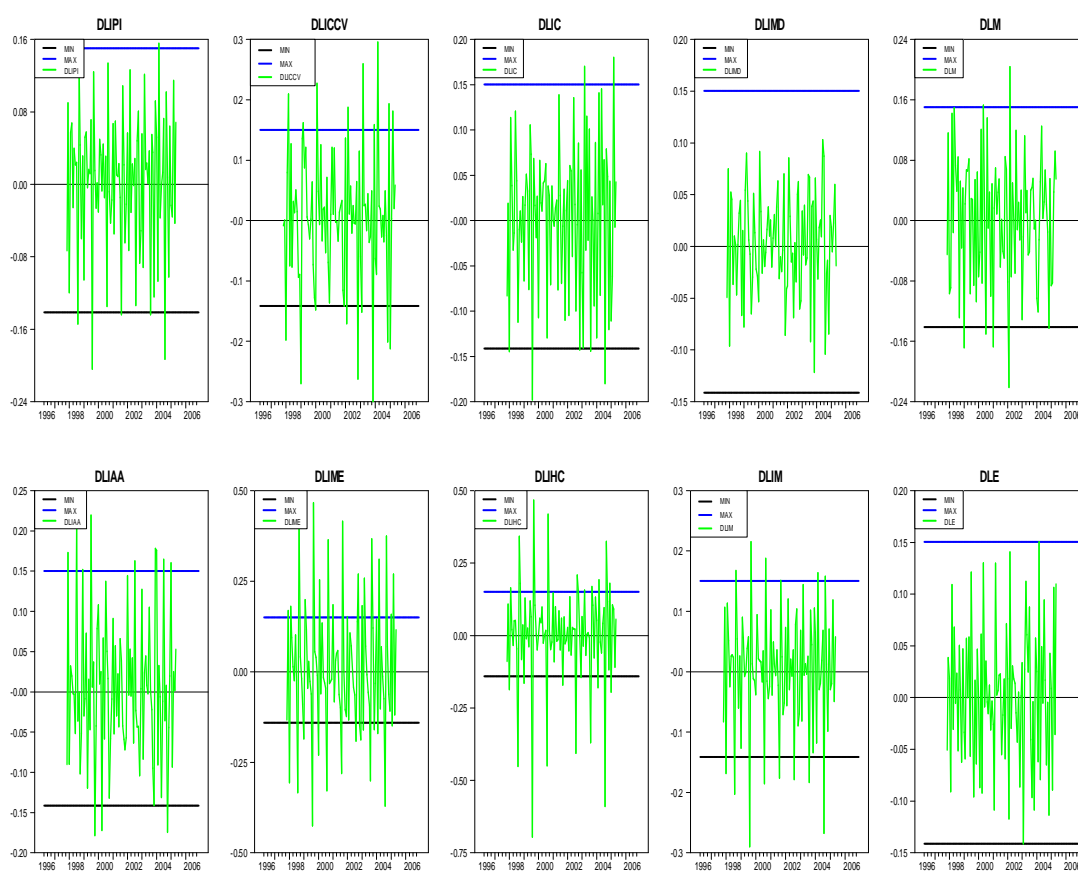


Figure 3.71: La SRC stationnaire pour 70% des observations utilisées parmi tout l'échantillon

La figure (3.72), montre que la SCR stationnaire est minimale pour le taux d'observation, pour laquelle la valeur de  $c$  est optimale notée  $C_{opt}$ .

## La somme des résidus au carré

La SCR pour 70% des observations utilisées parmi : 1996:04 - 2006:12

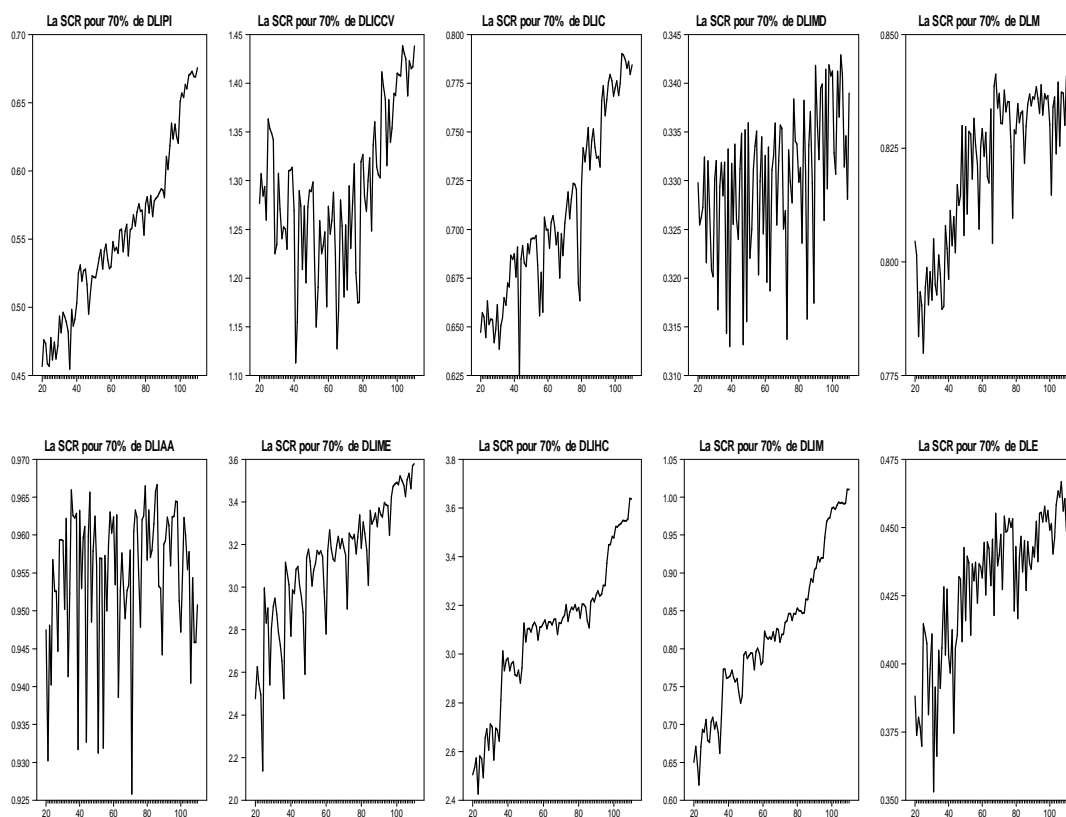


Figure 3.72: La somme des résidus au carré

Après avoir déterminé la valeur optimale de  $c$ , nous passons à estimer le modèle SETAR( $k$ ;  $p^*$ ) avec  $k$  régimes,  $p^*$  retards dans chaque régime et un seuil  $c$  déjà trouvé. Les résultats obtenus sont indiqués sur le tableau (3.32) :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.32 : Estimation du modèle SETAR avec le c déjà trouvé**

$\Psi_i$	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
<b>Régime (1)</b>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2		2	2	2
$\psi_0^{(1)}$	0.004*	0.007*	0.005	0.015*	0.003	0.007		0.007*	-0.008	-0.001
	(2.549)	(2.902)	(1.157)	(3.827)	(1.082)	(0.723)		(3.309)	(-1.283)	(-1.185)
$\psi_1^{(1)}$	-0.596*	-0.124	-0.377**	-0.192**	-0.364*	-0.350*		-0.544*	-0.514**	-2.207
	(-5.762)	(-0.746)	(-1.887)	(-1.634)	(-2.329)	(-2.709)		(-5.713)	(-1.896)	(-1.119)
$\psi_2^{(1)}$	-0.198*	0.013	-0.032	-0.297*	-0.014	-0.449**		-0.241*	-0.036	-0.180
	(-2.077)	(0.105)	(-0.244)	(-2.890)	(-0.116)	(-1.662)		(-2.644)	(-0.218)	(-1.532)
$\psi_3^{(1)}$		-0.159	-0.041		-0.117					
		(-1.107)	(-0.320)		(-0.980)					
$\psi_4^{(1)}$		-0.225			-0.240*					
		(-1.151)			(-2.257)					
<b>Régime (2)</b>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0^{(2)}$	0.0004	0.008*	0.006	0.047	-0.0009	0.0005	0.004*	-0.026	0.004**	0.005**
	(0.015)	(3.005)	(0.687)	(1.428)	(-0.066)	(0.075)	(4.445)	(-0.376)	(1.799)	(1.817)
$\psi_1^{(2)}$	0.130	-0.235	-0.439*	-0.889**	-0.396	-0.170	0.0262	1.291	-0.678*	0.023
	(0.175)	(-1.415)	(-2.054)	(-1.628)	(-1.161)	(-0.764)	(0.277)	(0.956)	(-4.870)	(0.115)
$\psi_2^{(2)}$	0.245	-0.350*	-0.062	0.008	-0.472*	-0.210*	-0.019	1.337	-0.098	-0.509*
	(0.444)	(-3.344)	(-0.380)	(0.037)	(-2.351)	(-2.053)	(-0.201)	(1.395)	(-0.862)	(-3.848)
$\psi_3^{(2)}$		-0.168	0.073		-0.153					
		(-1.680)	(0.500)		(-0.787)					
$\psi_4^{(2)}$		-0.223*			-0.359**					
		(-2.478)			(-1.690)					
$R^2$	0.237	0.267	0.167	0.176	0.261	0.141	0.229	0.269	0.214	0.193
$JB$	9.037	10.070	3.889	111.271	1.743	3566.79	24.354	7.440	1.337	11.722
$DW$	1.985	1.935	2.046	1.980	1.968	2.071	1.905	2.104	2.008	2.098
$ARCH$	1.791	0.355	0.372	2.959	0.088	0.046	0.003	0.372	16.386	0.054
<i>Itérations</i>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\sigma_{SETAR, p}^2$	0.003	0.001	0.001	0.001	0.006	0.002	0.0005	0.005	0.003	0.001

\*(resp. \*\*) Indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 5% (resp. au seuil de 10%). (.) Indique les t de Student des coefficients estimés.

$R^2$  est le coefficient d'ajustement linéaire,  $DW$  est la statistique de Durbin-Watson et  $\sigma_{AR, p}^2$  est la variance du processus  $AR(p^*)$ .

Source : Tests réalisés sur Rats 6.



Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**7<sup>ème</sup> étape :** Nous utilisons la méthode décrite, dans l'étape précédente, pour choisir entre le modèle linéaire et le modèle avec changement de régime, dans un premier point, et entre le modèle *LSTAR* et *ESTAR* dans un second point.

<b>Variabes</b>	<b>Q(6-0)</b>	<b>Q(12-0)</b>	<b>Q(18-0)</b>	<b>Q(24-0)</b>
<b>EIPI</b>	4.709 [0.581]	10.634 [0.560]	22.118* [0.226]	44.006* [0.007]
<b>EIAA</b>	4.709 [0.581]	10.634 [0.560]	22.118 [0.226]	44.006* [0.007]
<b>EICCV</b>	9.547 [0.145]	25.143* [0.014]	47.298* [0.0001]	67.083* [0.0000]
<b>EIME</b>	3.525 [0.740]	17.964 [0.116]	23.366 [0.176]	34.022 [0.084]
<b>EIC</b>	3.826 [0.700]	10.944 [0.533]	17.199 [0.509]	37.467* [0.039]
<b>EIHC</b>	4.132 [0.658]	15.984 [0.191]	19.834 [0.342]	25.222 [0.393]
<b>EIMD</b>	4.232 [0.645]	13.296 [0.347]	20.054 [0.329]	37.348* [0.040]
<b>EIM</b>	3.224 [0.780]	11.670 [0.472]	29.082* [0.047]	56.815* [0.0001]
<b>EM</b>	3.807 [0.702]	20.480 [0.058]	24.729 [0.132]	43.650* [0.008]
<b>EE</b>	7.729 [0.258]	23.390* [0.025]	27.389 [0.071]	30.779 [0.160]

\* Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 5%.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Le test de LB sur les résidus, indiqué sur le tableau (3.33), montre que l'hypothèse nulle ne peut pas être rejetée et donc, les résidus sont bruit blanc, même si les deux derniers coefficients du modèle ne sont pas significatifs.

Après avoir identifié le modèle SETAR(k ; p\*) le plus approprié, il est maintenant profitable de passer au test de choix de la fonction de transition la plus adéquate.

**8<sup>ème</sup> étape :** Nous testons l'hypothèse  $H_0$  : *ESTAR* contre  $H_1$  : *LSTAR*;

Après avoir rejeté l'hypothèse de linéarité, il est nécessaire de procéder aux tests, permettant d'identifier la structure du modèle STAR le plus approprié. Pour ce faire, nous procédons, tout

d'abord, par l'application du test de linéarité, selon les procédures de Granger et Teräsvirta (1993), et Teräsvirta (1994b), basées sur la statistique LM, du test développé par Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), de la régression auxiliaire défini par :

$$\hat{\varepsilon}_t = \beta_1' X_t + \beta_2' X_t Z_t + \beta_3' X_t Z_t^2 + \beta_4' X_t Z_t^3 + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\hat{\varepsilon}_t$  est le résidu de la régression  $Y_t = \beta' X_t + \varepsilon_t$  estimée par MCO.

$$Z_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}; X_{1t}, \dots, X_{kt}) \text{ et } X_t = (1; Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}; X_{1t}, \dots, X_{kt}).$$

Ce test est capable, donc, de faire la distinction entre les spécifications LSTAR et ESTAR. La procédure de test consiste à vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_{01} : \beta_4' = 0, \\ H_{02} : \beta_3' = 0 / \beta_4' = 0, \\ H_{03} : \beta_2' = 0 / \beta_3' = \beta_4' = 0 \end{cases}$$

Luukkonen, Saikkonen et Träsvirta (1988) et plus récemment Hill (2004), ont noté que le test de linéarité contre l'alternative d'un modèle STAR, est basé sur la statistique  $LM_i$  de Multiplicateur de Lagrange, définie par :

$$LM_i = T \frac{(Scr_{H_0} - Scr_{H_i})}{(Scr_{H_0})}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sous l'hypothèse nulle de linéarité, la statistique  $LM_i$  suit une loi de  $\chi^2$  comme suit :

$$LM_1 \sim \chi_{1-\alpha}^2 (p(p+1)/2); LM_2 \sim \chi_{1-\alpha}^2 (2p^2 + p(p+1)/2) \text{ et } LM_3 \sim \chi_{1-\alpha}^2 (p + p(p+1)/2)$$

Par contre, Träsvirta (1994), a montré que le test de linéarité contre l'alternative donné par un modèle STAR est basé sur la statistique  $LM_i$ , définie par :

$$LM_i = \frac{(Scr_{H_0} - Scr_{\pi_i})}{\hat{\sigma}^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sous l'hypothèse nulle de linéarité, la statistique  $LM_i$  suit une loi de  $\chi^2$  comme suit :

$$\begin{aligned} (LM_1)_{H_{01}} &\sim \chi_{1-\alpha}^2 (p); \\ (LM_2)_{H_{02}: \beta_{2j} = \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0} &\sim \chi_{1-\alpha}^2 (3p); \\ (LM_3)_{H_{03}: \beta_2 = \beta_3 = 0} &\sim \chi_{1-\alpha}^2 (2p) \end{aligned}$$

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

La règle de décision indique que nous refusons l'hypothèse nulle (ESTAR), pour un risque de  $\alpha\%$ , quand la valeur calculée de la statistique du test est un Fisher, dépasse sa valeur tablée et inversement. En effet, si  $H_{02}$  est rejetée c'est-à-dire, elle admet la plus réduite valeur de  $p$ -value, nous devons choisir la fonction ESTAR, comme processus de transition le plus adéquat. Par contre, si  $H_{01}$  et/ou  $H_{03}$  sont les hypothèses les plus rejetées par comparaison avec l'hypothèse  $H_{02}$ , alors dans cette situation, nous devons choisir la fonction LSTAR, comme processus de transition le plus approprié. Les résultats ainsi obtenus sont portés sur le tableau (3.34) et montrent que les valeurs calculées de la statistique LM (d) indiquent que l'hypothèse nulle de linéarité est toujours rejetée. Ceci prouve que les fluctuations cycliques des séries étudiées semblent être bien gouvernées par des processus dynamiques non-linéaires de types ESTAR ou LSTAR.

**Tableau 3.34 : Test de choix entre le modèle LSTAR et le modèle ESTAR**

Variables	Délai	p*	Linéarité	H <sub>01</sub>	H <sub>02</sub>	H <sub>03</sub>	Transition retenue
EIPI	1	2	2.1378774 [0.0542]	4.8653584* <sup>*</sup> [0.0094]	0.5299849 [0.5900]	0.9296717 [0.3975]	LSTAR
EIAA	1	4	2.0617619 [0.0540]	2.8849982* <sup>*</sup> [0.0193]	1.6355551 [0.1712]	0.1949957 [0.9405]	LSTAR
EICCV	1	3	2.6466828 [0.0546]	0.4766415 [0.6992]	2.2630443* <sup>*</sup> [0.0910]	0.2211628 [0.8815]	ESTAR
EIME	1	2	2.6302571 [0.0204]	1.9752031 [0.1438]	4.9374453* <sup>*</sup> [0.0089]	0.8148516 [0.4454]	ESTAR
EIC	1	4	0.5687958 [0.8621]	0.4026669 [0.8063]	0.2874019 [0.8855]	1.0777704* <sup>*</sup> [0.3714]	LSTAR
EIHC	1	2	0.6089921 [0.7226]	0.9373742* <sup>*</sup> [0.3949]	0.8165338 [0.4447]	0.0743493 [0.9284]	LSTAR
EIMD	1	2	0.5087182 [0.8006]	0.2856034 [0.7521]	0.2471514 [0.7815]	1.0240493* <sup>*</sup> [0.3625]	LSTAR
EIM	1	2	1.4598259 [0.1991]	0.5074817 [0.6035]	2.3153753* <sup>*</sup> [0.1036]	1.5550701 [0.2158]	ESTAR
EM	1	2	3.3069846 [0.0050]	0.2426802 [0.7850]	6.8428371* <sup>*</sup> [0.0016]	2.6875878 [0.0725]	ESTAR
EE	1	2	1.4628788 [0.1980]	2.0888225* <sup>*</sup> [0.1289]	1.1314351 [0.3264]	1.1202463 [0.3299]	LSTAR

\*\* Indique un rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 5% (p-value correspondante la plus faible). Le paramètre de délai (d) choisi est celui qui maximise la statistique LM(d). Le paramètre (p\*) c'est l'ordre de retard retenu.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

Or, le rejet de l'hypothèse de la linéarité n'est pas étonnant et vient pour confirmer les résultats issus de l'analyse graphique précédente, qui prouve bien la présence des ajustements non-linéaires qui gouvernent la dynamique des structures endogènes des cycles des séries de la production industrielle en Tunisie.

Afin de tester la stationnarité non-linéaire dans les modèles ESTAR et LSTAR ainsi retenus nous procédons aux tests usuels de racine unitaire et aux tests de racine unitaire non-linéaire au sens de Kapetanios, Shin et Snell (2003), pour les modèles ESTAR et au sens de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), pour les modèles LSTAR. Les résultats des tests de stationnarité linéaire et non-linéaire appliqués sur les séries de la production industrielle sont reportés dans le tableau (3.35), suivant :

<b>Tableau 3.35 : Test de stationnarité non-linéaire</b>					
<b>Au niveau du modèle ESTAR</b>					
<b>Variables</b>	<b>Transition retenue</b>	<b>ADF</b>	<b>PP</b>	<b>KSS</b>	<b>AKSS</b>
<b>EICCV</b>	ESTAR	-2.0411372	-2.0335510	-7.5383101*	-6.9933829*
<b>EIME</b>	ESTAR	-1.2242360	-1.1990336	-9.1412673*	-5.8353415*
<b>EIM</b>	ESTAR	-1.9522904	-1.6248015	-8.0533266*	-6.2706439*
<b>EM</b>	ESTAR	-2.3033861	-1.9935269	-7.9355195*	-6.0933926*
<b>Au niveau du modèle LSTAR</b>					
<b>Variables</b>	<b>Transition retenue</b>	<b>k</b>	<b><math>g_{\alpha\beta}</math></b>	<b>AIC</b>	<b>SC</b>
<b>EIPI</b>	LSTAR	1	-5.1623418**	-6.6734103	-6.3900827
<b>EIAA</b>	LSTAR	1	-4.9310384***	-6.9862101	-5.9998260
<b>EIC</b>	LSTAR	2	-4.8965207***	-6.5072653	-6.3620566
<b>EIHC</b>	LSTAR	1	-5.7730549*	-7.8625542	-6.9884100
<b>EIMD</b>	LSTAR	1	-6.0380644*	-6.4601662	-5.7044601
<b>EE</b>	LSTAR	2	-6.1035390*	-5.5772012	-5.3976642

\*, \*\* et \*\*\* (resp.) indiquent que le rejet de l'hypothèse de racine unitaire au seuil de 1%, au seuil de 5% et au seuil de 10%. Les valeurs critiques de KSS et AKSS sont -3.48 à 1%, -2.93 à 5% et -2.66 à 10%. Les valeurs critiques de  $g_{\alpha\beta}$  sont -5.65 à 1%, -5.01 à 5% et -4.69 à 10%. AIC et SC sont (resp.) les critères de sélection d'information d'Akaike et de Schwarz.

Source : Tests réalisés sur Rats 6 et Gauss 6.

Les résultats ainsi fournis par les tests de racine unitaire usuels (ADF et PP) donnent des résultats proches vis-à-vis de la stationnarité des séries de la production industrielle en Tunisie. Cependant, nous constatons que l'hypothèse de stationnarité linéaire est rejetée au niveau de 1%, 5% et 10%. De ce fait, nous passons par les tests de stationnarité non linéaire (KSS et AKSS) au sens de Kapetanios, Shin et Snell (2003), qui permettent de tester l'hypothèse de non stationnarité

---

contre un processus ESTAR non-linéaire mais globalement stationnaire. Puis, nous appliquons dans le cadre des modèles LSTAR retenus, le test de non stationnarité au sens de Leybourne, Newbold et Vougas (1998), contre un processus LSTAR non-linéaire mais globalement stationnaire. Les résultats indiqués dans le tableau (3.35) de ces tests sur les séries étudiées prouvent qu'elles vérifient toutes la stationnarité non-linéaire.

Après avoir réussi à choisir, avec succès, le mécanisme endogène de changement de régime selon le type de la fonction de transition lisse appropriée, pour qualifier le processus déterministe et dynamique de transition, qui joue un rôle crucial d'une part, dans la génération de données des séries de la production industrielle en Tunisie et d'autre part, dans la caractérisation dynamique des modèles économétriques, dans leurs structures globales, selon lesquels les séries temporelles des branches industrielles étudiées peuvent être modélisées. Il est intéressant de penser, maintenant, à une méthode adéquate d'estimation des modèles ainsi choisis.

Or, si nous gardons à l'esprit qu'une propriété fondamentale découle de l'analyse dynamique d'un modèle économétrique montre que, généralement, l'économétrie des processus non-linéaires, traite les séries temporelles dans un cadre purement discret, pourtant, nous avons pu montré que, la plupart des processus de changement de structures endogènes, sont non-linéaires, ou la non-linéarité touche la moyenne du processus et se manifeste dans sa partie déterministe, sous forme d'un saut en niveau. Mais, le plus important c'est que la mutation structurelle peut se produire, non plus graduellement, mais aussi brusquement, sous forme de fluctuations chaotiques et de crise d'hystérèse, puisque maintenant il est évidemment connu que l'évolution dynamique d'un processus économétrique, avec changement de structure, est à la fois de façon discrète et continue. Selon cette hypothèse, nous avons pu montrer qu'un choc structurel endogène a des effets locaux très prononcés, surtout, sur la détermination de l'état de stabilité temporaire et de la manifestation dynamique de l'équilibre évolutif multiple, qui sont, en général, les indicateurs précoces de l'endocyclogenèse par l'auto-organisation et la transformation adaptative des structures endogènes, tout en respectant le principe de changement par « *recomposition des invariances* ».

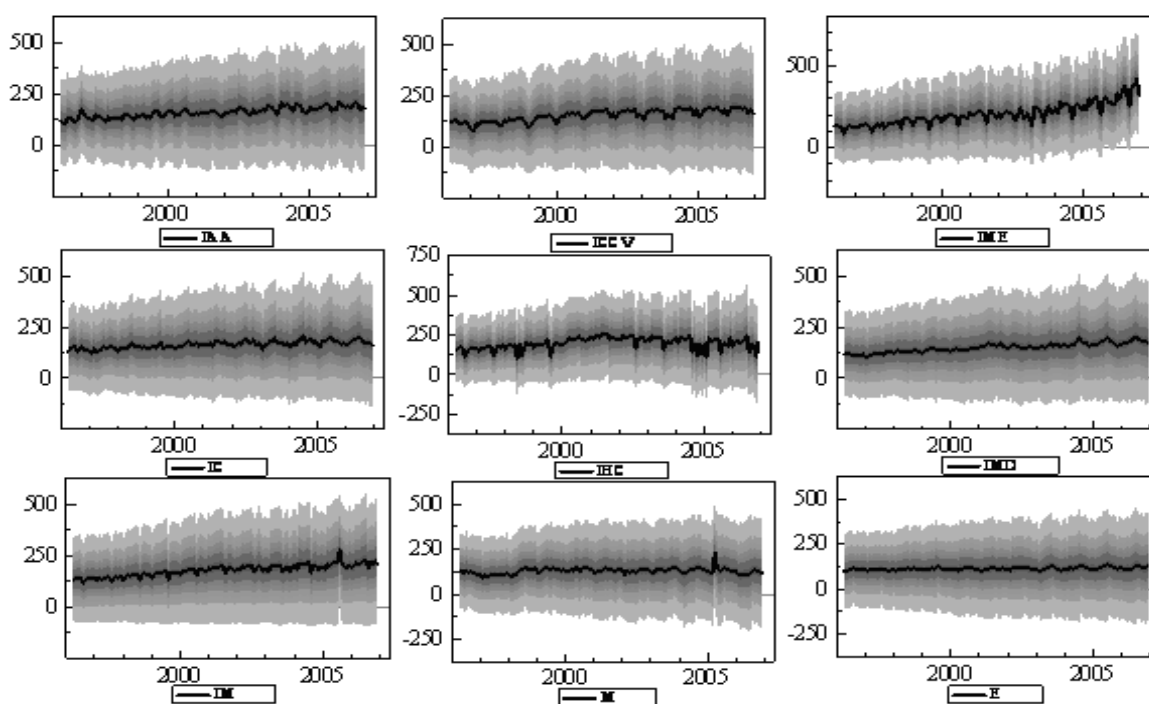


Figure 3.73 : L'émergence des fluctuations endogènes des séries

Or, comme l'illustre la figure (3.73), l'émergence des fluctuations endogènes des séries analysées, ainsi que le traitement temporel de ce type de processus, dans un domaine des instabilités des structures dynamiques, fournit des solutions généralement discrètes, toutefois, comme nous l'avons montré, en deuxième partie de ce document et l'illustré graphiquement à l'aide de la figure (2.44), qui présente des transformations continues d'échanges d'intervalles, là où règnent des régions continues de stabilité temporaire qui indiquent le passage du cycle limite par transition, au chaos, à travers une succession de doublement de périodes. Dés lors, une caractérisation garantie pour estimer ces modèles, nous mène à chercher une procédure d'estimation permettant d'estimer, simultanément, tous les paramètres inconnus d'un modèle y inclus le paramètre de seuil «  $c$  » et le paramètre de transition «  $\gamma$  ». Nous avons sur le tableau (3.34), les résultats de l'estimation du modèle STAR (LSTAR ou ESTAR) avec  $\gamma$  et  $c$  inconnus par un algorithme, qui découle de la technique d'optimisation non-linéaire (*Non-Linear Optimization*).

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**9<sup>ème</sup> étape :** Nous estimons le modèle *STAR* avec  $\gamma$  et  $c$  inconnus.

<b>Tableau 3.36 : Estimation du modèle STAR avec <math>\gamma</math> et <math>c</math> inconnus</b>										
$\psi_i$	EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
<i>Fonction de transition</i>										
	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>
$\gamma$	7.272 (0.678)	0.033 (0.005)	112.035 (0.241)	5.589 (0.282)	87.100 (0.025)	0.047 (0.009)	11.546 (0.335)	20.057 (1.198)	33.761 (0.320)	163.105 (0.000)
$c$	0.020* (3.639)	-1.125 (-0.005)	0.010 (0.348)	0.107 (0.656)	-0.002 (-0.119)	-3.247 (-0.009)	0.0009 (0.393)	-0.0127 (-1.207)	0.011 (0.354)	-0.063 (0.000)
<i>Régime (1)</i>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0^{(1)}$	-0.506* (-5.475)	-0.072 (-0.655)	-0.471* (-5.238)	-0.102 (-0.880)	-0.371* (-3.464)	-0.332* (-3.054)	0.356 (3.690)	-0.325* (-3.584)	-0.278* (-2.996)	0.177** (1.719)
$\psi_1^{(1)}$	0.084 (0.954)	-0.025 (-0.248)	0.098 (1.130)	0.030 (0.315)	0.018 (0.184)	-0.042 (-0.307)	-0.024 (-0.265)	0.142** (1.664)	-0.101 (-1.157)	-0.100 (-0.994)
$\psi_2^{(1)}$	-0.034 (-0.380)	-0.020 (-0.201)	-0.092 (-1.102)	0.017 (0.176)	0.113 (1.198)	0.048 (0.509)	0.170** (1.857)	0.099 (1.127)	0.019 (0.221)	-0.122 (-1.229)
$\psi_3^{(1)}$		0.020 (0.226)	0.108 (1.249)		0.080 (0.827)					
$\psi_4^{(1)}$		0.152** (1.655)			0.089 (0.992)					
<i>Régime (2)</i>										
$p^*$	2	4	3	2	4	2	2	2	2	2
$\psi_0^{(2)}$	23.700* (2.763)	-0.384 (-0.029)	9.645** (1.787)	-11.560* (-2.692)	12.686** (1.667)	-2.995* (-2.806)	71.921 (1.448)	6.165* (2.683)	1.971 (0.304)	51.792* (3.154)
$\psi_1^{(2)}$	-45.871* (-2.855)	-1.709 (-0.152)	-21.030* (-2.661)	0.448 (0.091)	-16.264* (-2.066)	-3.303 (-0.080)	27.791 (0.697)	-6.215** (-1.817)	-16.500** (-1.642)	29.969 (1.051)
$\psi_2^{(2)}$	-1.391 (-0.091)	34.328* (2.727)	17.898* (2.209)	5.839 (1.034)	5.799 (0.844)	-0.965 (-0.199)	30.678	-2.790	5.303	18.250
$\psi_3^{(2)}$		11.599 (0.949)	-16.426** (-1.820)		2.696 (0.432)					
$\psi_4^{(2)}$		-2.752 (-0.267)			-6.787* (-9.925)					
$R^2$	0.242	0.119	0.308	0.120	0.188	0.129	0.203	0.199	0.163	0.140

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

<i>JB</i>	7.071	15.661	0.023	98.071	0.310	2.074	30.995	0.658	2.181	28.678
<i>DW</i>	2.028	2.010	1.984	2.008	2.046	3054.15	2.093	2.149	1.991	1.922
<i>Itérations</i>	15	40	28	40	40	40	40	15	39	6

\*(resp. \*\*) Indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 5% (resp. au seuil de 10%). (.) Indique les *t* de Student des coefficients estimés.  $R^2$  est le coefficient d'ajustement linéaire et *DW* est la statistique de Durbin-Watson.

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Conformément à la théorie des cycles endogènes, la lecture du tableau (3.36), montre l'existence des cycles limites, caractérisant les cycles endogènes, dans les comportements dynamiques des séries de la production industrielle en Tunisie. Ceci nous permet d'apprécier la grande capacité de la modélisation non-linéaire en moyenne de type STAR, de rendre mieux compte de la possibilité de changements de régimes endogènes et surtout des mécanismes internes, endogènes qui vont entraîner, au bout d'un certain temps, une reprise de l'activité industrielle. D'où, le modèle LSTAR retenu pour modéliser le processus générateur de données de la série, dont la dynamique change lentement, cas du cycle endogène de la série IPI modélisé de la façon suivante :

$$edlip_i = (-0.506 + 0.084 edlip_{i-1} - 0.034 edlip_{i-2}) \times [1 + \exp(-7.272 (edlip_{i-1} - 0.020))]^{-1} \\ [-5.475] \quad [0.954] \quad [-0.380] \quad [0.678] \quad [0.380] \\ + (23.700 - 45.871 edlip_{i-1} - 1.391 edlip_{i-2}) \times [1 - ([1 + \exp(-7.272(edlip_{i-1} - 0.020))]^{-1})] \\ [2.763] \quad [-2.855] \quad [-0.091], \\ t = 1996 : 4, \dots, 2006 : 12.$$

$$\hat{\sigma}_{edlip_i}^2 = 0.000345, SK = -0.37250 (0.09995919), EK = 0.92700 (0.04413627), \\ JB = 7.07186 (0.02913169), \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.01857433877, SESM = 0.001696.$$

Ainsi, le choix de la modélisation LSTAR permet de mettre en évidence le comportement asymétrique du cycle endogène de la série IPI. Même chose pour les cycles endogènes, engendrés par les processus générateurs des séries endogènes de IAA, IC, IHC, IMD et E, les phases d'expansions et de récessions des cycles admettent des dynamiques différentes. Par contre, les cycles endogènes associés aux processus générateurs des données des autres séries de notre échantillon (ICCV, IME, IM et M), sont modélisés, selon des spécifications de types ESTAR, dont la structure endogène change, brutalement, selon des comportements dynamiques



symétriques, pour les phases d'expansion et de récession, mais l'intermédiaire de la dynamique du cycle est tout à fait différent. À titre d'exemple, le cycle endogène de la série ICCV est modélisé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 edliccv_t = & (-0.471 + 0.098 edliccv_{t-1} - 0.092 edliccv_{t-2} + 0.108 edliccv_{t-3}) \times \\
 & [-5.238] \quad [1.130] \quad [-1.102] \quad [1.249] \\
 & [1 - \exp(-112.035 (edliccv_{t-1} - 0.010)^2)] + [\exp(-112.035 (edliccv_{t-1} - 0.010)^2)] \times \\
 & [0.241] \quad [0.348] \\
 & (9.645 - 21.030 edliccv_{t-1} + 17.898 edlipi_{t-2} - 16.426 edlipi_{t-3}) \\
 & [1.787] \quad [-2.661] \quad [2.209] \quad [-1.820] \\
 & t = 1996 : 4, \dots, 2006 : 12.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{dli_{pi}}^2 = & 0.000732, SK = -0.03597 (0.87981586), EK = -0.00977 (0.98391288), \\
 JB = & 0.02394 (0.98810185), \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.02705180428, SESM = 0.002591.
 \end{aligned}$$

Mais, le plus important est de constater qu'à partir de l'analyse des résultats d'estimation, les estimations des paramètres  $\gamma$  et  $c$  ne sont pas statistiquement très précises. Ceci peut être justifié par le caractère instable de ces paramètres. Car conformément aux résultats précédents, les estimations des paramètres d'un processus de transition, associé à une modélisation non-linéaire de type STAR, sont souvent très sensibles aux conditions initiales. De ce fait, les écarts entre les prévisions et les réalisations de la modélisation STAR peuvent s'expliquer en une grande partie, par le fait que ces premières ont été réalisées, en considérant que l'industrie tunisienne devrait évoluer sur un sentier de croissance stable. Or, il est maintenant connu, que la modélisation traditionnelle de type ARMA est peu satisfaisante. Puisque les modèles linéaires sont, en général, incapables de prévoir correctement les points de retournement de la conjoncture.

Comme nous l'avons remarqué, au cours des deux parties précédentes de ce document, l'apparition de doutes, quant au manque de fondements théorique en prévision de la théorie de cycle exogène, par rapport à la théorie de cycle endogène, qui peut être mise en évidence par recours à l'économétrie de chaos, lors de l'analyse de la dynamique d'un modèle économétrique,

---

vient du fait que malgré la simplicité de la mise en œuvre et les facilités d'interprétation, les modèles traditionnels à cause de leur structure linéaire sont insuffisants, pour analyser des effets de seuil, dans les tendances déterministes, surtout engendrés par les changements structurels endogènes, que des fluctuations des séries instables et fortement perturbées. Lucas (1976), a remis en cause la stabilité des paramètres des modèles non "structurels" linéaires. Pour lui, il fallait rechercher, parmi les paramètres fondamentaux du comportement dynamique des séries macro-économiques, ceux qui se révèlent stables. Cette approche tend à privilégier l'élaboration de modèles de faible taille, plus robustes aux chocs et changements de politique économique. Néanmoins, cette solution ne permet, ni de modéliser les dynamiques non linéaires rencontrées, lors de l'analyse de la dynamique des séries industrielles en Tunisie, ni de présenter, avec exactitude, leurs performances prévisionnelles. En conséquence, les apports de cette solution restent marginaux à l'identification délicate de la structure, à l'estimation complexe des paramètres et surtout, en matière de prévisions non-linéaires de séries temporelles, lorsque nous serons en mesure de fournir un élément de réponse à la question la plus délicate, à laquelle doivent répondre les prévisionnistes est celle-ci : Quel est le modèle de prévision le plus approprié, pour générer nos données futures?

Maintenant, nous estimons que les modèles non-linéaires de type STAR, offrent effectivement des performances prévisionnelles, supérieures à celles déduites de la représentation traditionnelle, basée sur la modélisation ARMA. Mais, ils posent également des problèmes complexes, telles que par exemples, les difficultés d'élaboration des modèles STAR fiables de prévision. Ces difficultés viennent de ce que le véritable problème est celui de la dichotomie, entre partie déterministe et partie résiduelle. Le problème cité s'intensifie spécialement, lors de l'élaboration d'un modèle STAR de prévision, car un modèle STAR n'est prévisible que si, jusqu'à un horizon suffisamment éloigné, la connaissance de l'état initial du modèle et les relations fonctionnelles, commandant son processus de génération de données et celui de son processus de transition de phase, ainsi que l'invariance temporelle des règles de transformation des structures et de changement par recombinaison des invariances, permettent une estimation de son état final, dont la qualité est le plus possible fiable que l'on désire. Dès lors, deux principaux

---

facteurs peuvent intervenir, lors de l'identification d'un modèle STAR de prévision et stimulent sa qualité de prévisibilité, ce sont : le degré de stationnarité et le niveau d'aléa. Or, il découle de ceci que jusqu'à ce niveau d'analyse, deux obstacles primordiaux qui doivent être spécifiés et simultanément résolus. Le premier, vient de ce que la modélisation STAR, autorise un changement endogène de structure, par rapport au temps, ceci ne peut pas être, bien sûr, sans impact sur la dynamique de ces types de modèles économétriques, puisque leurs passés sont changeants et très sensibles des minimales modifications des propriétés qualitatives de leurs paramètres de transition. Lorsque l'analyse prévisionnelle d'un modèle STAR conduit à des coûts d'erreurs trop élevés, il est préférable avant d'y remédier, de passer par une analyse dynamique, de sa partie déterministe, afin de déterminer la cause dominante de la croissance de ces erreurs. Or, comme nous l'avons signalé, un remède à cette première difficulté sur le passé non stationnaire, consiste à choisir avec trop de précision, le processus de transition le plus approprié, qui sera capable d'engendrer au modèle de prévision, un mécanisme d'auto-organisation auto-adaptatif, qui sert à modifier, fréquemment, le modèle de prévision, en fonction des erreurs commises, sans modifier les coefficients du modèle initial. Puisque nous nous mettons d'accord qu'il existe des mécanismes internes, endogènes au système dynamique formé par la partie déterministe du modèle STAR qui vont entraîner, au bout d'un certain temps, une reprise de l'activité industrielle. Mais, la validité de cette solution de régulation reste valable, à condition que le choix du paramètre de transition, soit conditionné par le contrôle de son diagramme de bifurcation et évite toute dépendance de l'erreur constatée de ces conditions initiales.

Le second obstacle, vient de ce que la modélisation STAR autorise, dans sa partie aléatoire, un niveau d'aléa généré, à cause de la dépendance du processus aux conditions initiales et qui sert comme un perturbateur des états imprévisibles. De ce fait, même si la prise en compte du résidu qui représente l'écart entre la prévision et la réalisation est une étape importante, dès que nous souhaitons réaliser de bonnes prévisions, l'aléa qui est le risque de résidu peut intervenir de façon décisive, dans l'élaboration d'un modèle STAR de prévision. Car, comme la prévision est toujours incertaine, l'identification de la manière, selon laquelle le niveau d'aléa peut intervenir dans un modèle de prévision permet, non seulement d'indiquer quel type de

---

perturbation, il est capable d'introduire, mais aussi, il est capable d'indiquer quels sont les moyens capables d'y remédier. De façon générale, les perturbations dues à des événements inexplicables, engendrées, par l'aléa sont extrêmement liées, à son amplitude relative, ou de la récurrence des données disponibles, quand cette amplitude est stationnaire. Selon leurs poids, ces perturbations pourront être sans effets ou, au pire des cas, elles masquent certaines relations causales et empêchent la réalisation des prévisions fiables. Ainsi, dans le cadre de l'élaboration d'un modèle STAR de prévision, le traitement des incertitudes dues à une mauvaise spécification des relations fonctionnelles et/ou aux mesures est très important. Ces incertitudes peuvent être dues aux phénomènes de bifurcation, qui ont été ignorées, aux bruits de mesures ou encore au fait, qu'en présence d'un domaine d'instabilité des structures dynamiques, certains paramètres varient naturellement dans le temps en fonction de l'espace. Ceci se manifeste techniquement, qu'en pratique, la présence des minima locaux pour la fonction à optimiser, empêche la possibilité de réaliser des prévisions d'une qualité suffisante. En conséquence, la sélection de structure de modèle STAR en prédiction, est alors une tâche très difficile.

Pour jeter de la lumière sur ce sujet, nous allons passer à l'analyse de la performance prévisionnelle des processus STAR, générateurs des séries endogènes de la production industrielle tunisienne. De manière générale, la qualité d'une prévision est définie par des critères d'évaluations appropriées. L'idée de la sélection de modèle de prévision, à partir de la comparaison des critères d'évaluation de sa performance prévisionnelle, est un sujet classique en économétrie. Cependant, l'expérience montre leurs limites répétées, dans différents contextes, surtout lorsqu'ils sont sensés répondre, à un problème d'évaluation des performances prévisionnelles des modèles non-linéaires, qui contiennent dans leurs structures fonctionnelles des processus dynamiques non-linéaires, qui y intègrent des mécanismes de changements de structures par lissage et transition (logistique ou exponentielle) capables d'induire des fluctuations économiques, plus ou moins compliquées, de manière endogène (cycle limite, chaos), cas d'un modèle non-linéaire de type STAR. Afin de résoudre ce problème, il aurait été préférable, ici, de centrer notre but, sur l'apport des tests statistiques, en la problématique d'évaluation des performances prévisionnelles, d'un modèle STAR. Nous justifions notre recours

---

à cette démarche par le fait qu'en inférence statistique, la pénalité d'un critère d'évaluation dépend, non seulement, du nombre de paramètres définissant des modèles comme dans les critères classiques, mais aussi de la complexité de la modélisation STAR.

### **3.5.6. Diagnostic de tests et évaluation d'un modèle non-linéaire de prévision**

Les modèles estimés dans la section précédente permettent une analyse approfondie de la performance prévisionnelle, des cycles endogènes, des séries de la production industrielle tunisienne. Au cours de la présente section, nous allons essayer de savoir comment évaluer une prévision, dans un modèle non-linéaire de changement de régime avec transition lisse de type LSTAR ou ESTAR? À cet égard, nous étendons le champ d'analyse contemporaine, sur l'apport des modèles non linéaires, en matière de prévision, dans trois principales directions. Un premier axe de recherche, extrêmement active, a tenté d'évaluer les prévisions ponctuelles. Un second axe de recherche, également riche, a tenté d'évaluer les prévisions par intervalles de confiance. Finalement, le dernier axe de recherche a tenté d'évaluer les prévisions par densité. Nous pourrions nous attendre à ce que cette démarche permette de répondre, convenablement, à l'objectif visé par notre étude.

#### ***3.5.6.1. Évaluation des prévisions ponctuelles***

Maintenant, nous allons essayer de savoir comment évaluer une prévision ponctuelle à court terme, dans un modèle non-linéaire? Dans ce cadre, Engelberg, Manski et Williams (2008), ont déclaré que les tests de validité sont généralement basés, sur des fonctions de pertes, associées aux erreurs de prévisions. Une première démarche essaie d'expliquer les raisons et les modalités de développement des fonctions de pertes, capables d'expliquer les dynamiques non-linéaires des mouvements et de prévoir les séries stationnaires de la production industrielle tunisienne, sur la période 2006 :12-2007 :04. Afin de visualiser les prévisions ponctuelles à court terme, nous proposons d'examiner la figure (3.73). Dans ce cas, pour évaluer la qualité de la

---

prévision ponctuelle, nous procédons, souvent, par une prévision hors échantillon (*out-of-sample forecast*). À titre d'exemple, si chaque série temporelle étudiée contient 133 observations, nous pouvons y modéliser, selon son processus générateur de données, soit par un processus LSTAR, ou soit par un processus ESTAR, les 129 premières observations (la subdivision de l'échantillon se fait en 2006 :12 de façon arbitraire), allant de 1996 :04 jusqu'à 2006 :12. Par la suite, nous établissons une prévision en employant ce même modèle LSTAR ou ESTAR, pour un horizon de quatre périodes (pour les 04 observations restantes) et nous comparons les prévisions ponctuelles aux réalisations. Pour analyser les erreurs de prévisions, plusieurs critères sont utilisés. Dans tous les cas, l'horizon de prévision est le même et vaut 4-Pas.

À partir de l'analyse graphique de la figure (3.74), nous pourrions, tout d'abord, constater que les prévisions de chacun des modèles étudiés, tendent vers la moyenne et la variance des erreurs de prévisions augmente, pour se stabiliser à la variance non conditionnelle de la série associée. Ce constat implique que l'erreur moyenne peut être très négligeable et bien sûr peut même avoir une valeur égale à zéro, puisque d'après le principe de récompensations des erreurs nous avons toujours une erreur positive qui peut être annulée par une erreur négative. Ceci nous mène à penser à d'autres critères d'évaluation des erreurs de prévisions analysées.

Dans notre cas, afin d'étudier la pertinence économétrique, en matière de prévision ponctuelle à court terme des modèles STAR déjà choisis, nous avons présenté sur le tableau (3.37), les différents résultats, concernant les valeurs de l'erreur absolue moyenne (EAM), de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (EQM) et du coefficient U de Theil, qui sont trois critères puissants de sélection des modèles en prévision ponctuelle. Nous pouvons nous attendre à ce que l'utilisation de ces critères semble pertinente, en matière d'évaluation de la performance prévisionnelle des modèles étudiés. L'analyse des résultats d'évaluation de la performance prévisionnelle, de chacun des modèles de prévision de type STAR ainsi sélectionnés, portée sur le tableau (3.35), montre que l'erreur absolue moyenne corrige le problème de la mauvaise évaluation de la qualité prédictive de ces modèles, mais elle ne donne pas une pénalité plus importante, aux grandes erreurs. Au contraire, l'erreur quadratique moyenne pénalise, de façon

### Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

croissante, les erreurs mais l'unité de mesure dépend de la variable étudiée (les prévisions de variables différentes ne sont pas comparables à moins qu'elles ne soient en pourcentage). Finalement, la comparaison de chaque valeur du coefficient U de Theil avec la valeur de zéro, nous permet de constater que les prévisions, ainsi réalisées, sont imparfaites.

#### Prévisions ponctuelles des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie

1996:04 - 2006:12

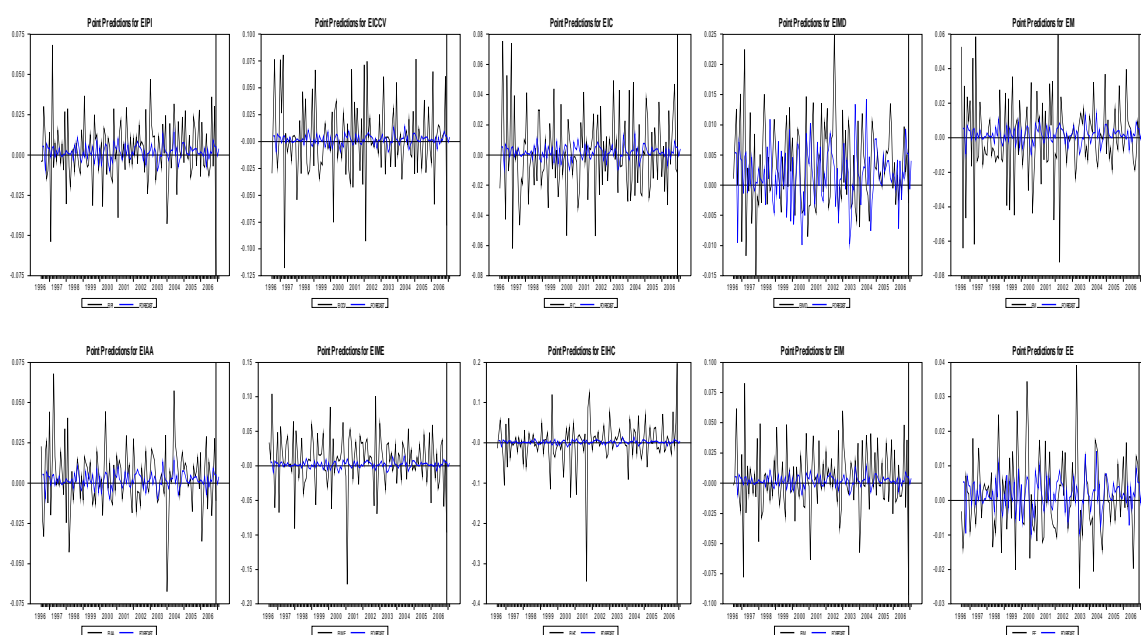


Figure 3.74: La prévision ponctuelle des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie sur la période 2006:12-2007:04

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.37: Résultats de comparaison d'out-of-sample prévision**

<b>Erreur absolue moyenne (EAM)</b>					
<b>Séries</b>	<b>Modèles sélectionnés</b>	<b>1-Pas</b>	<b>2-Pas</b>	<b>3-Pas</b>	<b>4-Pas</b>
EIPI	LSTAR	0.0129136	0.0151459	0.0151482	0.0154555
EIAA	LSTAR	0.0127223	0.0125085	0.0126779	0.0123158
EICCV	ESTAR	0.0225839	0.0246301	0.0249949	0.0250538
EIME	ESTAR	0.0265183	0.0266809	0.0272437	0.0267877
EIC	LSTAR	0.0177592	0.0194039	0.0192189	0.0192196
EIHC	LSTAR	0.0314243	0.0327755	0.0335028	0.0333876
EIMD	LSTAR	0.0055008	0.0054690	0.0054790	0.0054965
EIM	ESTAR	0.0175987	0.0196219	0.0196586	0.0196924
EM	ESTAR	0.0156251	0.0164484	0.0157004	0.0157783
EE	LSTAR	0.0074885	0.0078510	0.0081363	0.0081687
<b>Erreur quadratique moyenne (EQM)</b>					
<b>Séries</b>	<b>Modèles sélectionnés</b>	<b>1-Pas</b>	<b>2-Pas</b>	<b>3-Pas</b>	<b>4-Pas</b>
EIPI	LSTAR	0.0172722	0.0202326	0.0204449	0.0209005
EIAA	LSTAR	0.0173755	0.0171084	0.0174119	0.0170198
EICCV	ESTAR	0.0299192	0.0332705	0.0342933	0.0343212
EIME	ESTAR	0.0367718	0.0379168	0.0381144	0.0375864
EIC	LSTAR	0.0228695	0.0242031	0.0238599	0.0238235
EIHC	LSTAR	0.0521275	0.0538501	0.0550623	0.0550562
EIMD	LSTAR	0.0067510	0.0067289	0.0067560	0.0067206
EIM	ESTAR	0.0234005	0.0263138	0.0265521	0.0265407
EM	ESTAR	0.0190049	0.0221027	0.0216788	0.0214271
EE	LSTAR	0.0095655	0.0103998	0.0107590	0.0107984
<b>Le coefficient U de Theil</b>					
<b>Séries</b>	<b>Modèles sélectionnés</b>	<b>1-Pas</b>	<b>2-Pas</b>	<b>3-Pas</b>	<b>4-Pas</b>
EIPI	LSTAR	0.5569	0.7626	0.7658	0.7829
EIAA	LSTAR	0.6619	0.6612	0.7014	0.6154
EICCV	ESTAR	0.5287	0.7472	0.6934	0.6935
EIME	ESTAR	0.6138	0.6718	0.7111	0.7174
EIC	LSTAR	0.5698	0.6973	0.7032	0.6274
EIHC	LSTAR	0.6433	0.6507	0.7291	0.7598
EIMD	LSTAR	0.7084	0.6770	0.6872	0.6604
EIM	ESTAR	0.5431	0.7340	0.7103	0.7524
EM	ESTAR	0.5146	0.7591	0.6641	0.7188
EE	LSTAR	0.6863	0.6136	0.6586	0.6450

Source : Tests réalisés sur Rats 6.



Donc, la qualité d'une prévision ponctuelle est définie par des critères d'évaluations appropriées. De manière générale, trois caractéristiques sont recherchées : l'exactitude, la précision et la certitude, et nous privilégierons l'une ou l'autre selon les cas. Pour mesurer et hiérarchiser l'exactitude, les prévisionnistes utilisent des critères, qui combinent l'écart à la réalisation (la moyenne d'erreur de prévision) et l'incertitude, entourant le scénario central (la variance de l'erreur). Néanmoins, nous pouvons observer, ces dernières années, un intérêt grandissant, prévoyant l'étude des qualités prédictives des modèles STAR, en se basant, surtout, sur des tests puissants en inférences statistiques. Dans le cadre de notre exposition en l'évaluation des prévisions ponctuelles, nous allons focaliser notre intention, plus précisément, sur deux types de tests : les tests aux sens de Diebold et Mariano (1995), et les tests aux sens de Harvey, Leybourne et Newbold (1997).

### **3.5.6.1.1. Tests de Diebold et Mariano (1995)**

La contribution introduite par Diebold et Mariano (1995), permet de comparer, sous l'hypothèse nulle, les prévisions ponctuelles, à partir de deux modèles concurrents, ayant les qualités prédictives similaires, au moyen de trois statistiques. Étant donné deux modèles  $M_1$  et  $M_2$  produisant  $n$  prévisions successives à l'horizon  $h$  notées respectivement  $f(\hat{\epsilon}_{t+h|t, M_1})_{t=1, \dots, n}$  et  $f(\hat{\epsilon}_{t+h|t, M_2})_{t=1, \dots, n}$  où  $f(\hat{\epsilon}_{t+h})_{t=1, \dots, n}$  désigne une fonction de perte<sup>266</sup> associée à l'erreur de

<sup>266</sup> Diebold et Mariano (1995), ont signalé que cette fonction de perte admet la possibilité d'avoir d'autres formes différentes aux critères d'évaluations de la qualité des prévisions ponctuelles usuelles qui sont basées soit sur l'estimation de la variance de l'erreur de prévision tel que MSFE (*Mean Squared Forecast Error*) définie par:

$$MSFE = (n)^{-1} \sum_{i=1}^m \left( \hat{Y}_{T+h+i|T+i} - Y_{T+h+i} \right)^2$$

où  $\hat{Y}_{T+h+i|T+i}$  est la prévision à l'horizon  $h$  réalisée conditionnellement à l'information disponible en  $T+i$ .

Soit sur l'estimation de la moyenne des erreurs absolues de prévision tel que MAFE (*Mean Absolute Forecast Error*) définie par:

$$MAFE = (n)^{-1} \sum_{i=1}^m \left| \hat{Y}_{T+h+i|T+i} - Y_{T+h+i} \right|$$

Notons que la règle de décision de choix de la meilleure propriété prédictive d'un modèle de prévisions ponctuelles consiste à minimiser les critères d'évaluations de la qualité de prévision MSFE et/ou MAFE.

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

prévision  $(\hat{\epsilon}_{t+h} = \hat{Y}_{t+h|t} - Y_{t+h})_{t=1,\dots,n}$ . Soit  $d_t$  est le différentiel de perte<sup>267</sup>, c'est-à-dire l'écart des valeurs de la fonction de perte associées aux prévisions des modèles  $M_1$  et  $M_2$  défini par :

$$d_t = f(\hat{\epsilon}_{t+h|t, M_1})_{t=1,\dots,n} - f(\hat{\epsilon}_{t+h|t, M_2})_{t=1,\dots,n}$$

Quelle que soit la forme considéré de la fonction de perte ou le critère utilisé, le test de Diebold et Mariano (1995)<sup>268</sup>, consiste à comparer les propriétés prédictives de  $M_1$  et  $M_2$  en vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : E[d_t] = 0 \\ H_1 : E[d_t] \neq 0 \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, une première statistique du test DM1 s'écrit :  $DM_1 = \frac{\bar{d}}{\sigma_{\bar{d},0} / \sqrt{n}} \stackrel{\text{asy}}{\sim} N(0,1)$

où  $\bar{d} = (n)^{-1} \sum_{i=1}^m d_i$  et  $\sigma_{\bar{d},0}^2$  désignent respectivement la moyenne empirique des différentiels de perte  $d_t$  et sa variance de long terme. La règle de décision consiste à rejeter l'hypothèse nulle d'égalité de l'adéquation prédictive, au seuil de confiance de 5%, si  $|DM_1| > 1.96$ .

<sup>267</sup> La moyenne empirique des différentiels de perte admet comme distribution asymptotique donnée par :

$$\sqrt{n} (\bar{d} - \mu) \stackrel{\text{asy}}{\sim} N(0, \hat{\sigma}_{\bar{d},0}^2)$$

<sup>268</sup> Diebold et Mariano (1995), ont signalé que l'estimation standard de la variance à long terme  $\sigma_{\bar{d},0}^2$  des différentiels de perte  $d_t$  peut être réalisé à l'aide d'un estimateur à noyau c'est-à-dire à un coefficient multiplicatif près à une somme pondérée des auto-covariances avancées et retardées du processus  $d_t$ . Notons que Diebold et Mariano ont utilisé comme fonction de kernel une fonction uniforme et par conséquent l'estimation standard de la variance à long terme des différentiels de perte s'écrit :

$$\hat{\sigma}_{\bar{d},0}^2 = \sum_{i=-(h-1)}^{h-1} \hat{\gamma}_d(i) = \hat{\gamma}_d(0) + 2 \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\gamma}_d(i)$$

où  $\hat{\gamma}_d(i) = (m)^{-1} \sum_{j=i+1}^m (d_j - \bar{d})(d_{j-i} - \bar{d}) = \text{cov}(d_j, d_{j-i})$  désigne l'auto-covariance empirique d'ordre  $i$  du processus  $d_t$ .

Dans de nombreux cas, lorsque nous disposons d'un échantillon de petite taille, le nombre de prévisions ponctuelles  $m$  disponibles est relativement faible. Pour faire face à ce problème, Diebold et Mariano (1995), ont proposé un second test de signe, dont l'hypothèse nulle implique que la médiane des différentiels de pertes est nulle. Ce test consiste à comparer les propriétés prédictives de  $M_1$  et  $M_2$ , en vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : med[d_t] = 0 \\ H_1 : med[d_t] \neq 0 \end{cases}$$

Maintenant, sous l'hypothèse nulle, la statistique du test DM2 s'écrit :

$$DM_2 = \sum_{t=1}^m I_{(d_t > 0)} \stackrel{H_0}{\sim} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

où  $I_{(d_t > 0)}$  désigne la fonction indicatrice, prenant la valeur un  $d_t > 0$  et la valeur nulle sinon. Notons que, lorsque les distributions des différentiels de perte sont asymétriques, alors l'espérance mathématique et la médiane ne se confondent plus et par conséquent, les deux tests gardent la même relation d'équivalence des propriétés prédictives des modèles  $M_1$  et  $M_2$ . Dans le cas, où les distributions des différentiels de perte sont symétriques, centrée et *i.i.d.* Diebold et Mariano (1995), ont proposé une troisième statistique de test de Wilcoxon, basé sur les rangs et les signes des différentiels de perte, ayant une distribution exacte et invariante à la distribution des différentiels de pertes et défini par :

$$DM_3 = \sum_{t=1}^m I_{(d_t > 0)} \text{rang}(|d_t|)$$

Les résultats obtenus, en appliquant le test de Diebold et Mariano (1995), sont indiqués sur le tableau (3.38) :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.38 : Résultats du test de Diebold et Mariano (1995)<sup>269</sup>**

EIPI	EIAA	EICCV	EIME	EIC	EIHC	EIMD	EIM	EM	EE
<i>MSE</i>									
<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>
25129.2**	24761.9**	24762.0**	25147.0**	25149.0**	26492.1**	23440.7**	24761.7**	16753.2**	13158.9**
<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>
26538.8	26492.0	25148.4	45065.6	27911.1	43017.5	24761.9	32493.8	26493.1	24762.8
<i>MAE</i>									
<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>
157.4**	154.8**	154.8**	157.5**	157.6**	161.2**	151.6**	154.8**	128.6**	114.4**
<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>ESTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>LSTAR</b>	<b>ESTAR</b>
161.3	161.2	157.6	204.8	166.1	205.0	154.8	178.6	161.2	154.9

\*(resp. \*\*) Indiquent le vrai modèle qui spécifie correctement le processus générateur de données (resp. les qualités prédictives sont plus performantes).

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Au vu des résultats figurant dans le tableau ci-dessus, qualifiant les performances prédictives des modèles ainsi spécifiés, au moyen des critères *MSE* et *MAE*. Nous constatons que les modèles correctement spécifiés des processus générateurs de données, ont des qualités prédictives plus meilleures que les modèles spécifiés au hasard. Bien sûr, ce résultat n'est pas surprenant et va dans le sens de confirmer nos hypothèses, puisque la juste spécification de la structure d'un modèle améliore, énormément, sa capacité de prédiction.

En revanche, malgré l'importance des trois versions de statistiques *DM* et leurs facilitations d'être appliquées avec succès, dans de nombreuses applications empiriques, pourtant, elles présentent quelques limites, surtout lorsqu'elles sont appliquées pour des échantillons de petites tailles. Dans la plupart de ces cas, l'utilisation de la variance asymptotique de la moyenne empirique des différentiels de perte définie par :

$$\hat{\sigma}_{d,0}^2 = \hat{\gamma}_d(0) + 2 \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\gamma}_d(i)$$

<sup>269</sup> Les valeurs numériques des prévisions calculées en appliquant le test de Diebold et Mariano (1995) sont présentées en Annexe 16.

entraîne des conséquences graves sur la prévision ponctuelle, quand l'horizon  $h$  de la prévision dépasse un pas. Dans ce sens, plusieurs travaux de recherche se sont intéressés à l'atténuation de ces problèmes.

### 3.5.6.1.2. Tests de Harvey, Leybourne et Newbold (1997)

Harvey, Leybourne et Newbold (1997), ont proposé une modification, au niveau de la statistique  $DM$ , afin de dépasser les lacunes présentées, par l'application pour des échantillons de faible taille de la version standard du test de Diebold et Mariano (1995). Leur contribution consiste, tout d'abord, à modifier la variance du test  $DM$ , par la vraie expression de la variance à long terme de la moyenne empirique des différentiels de perte. Ensuite, à imposer une correction sur les échantillons de tailles réduites et calculer la vraie valeur de la variance à long terme, en employant les autocovariances estimées. Ces variances sont estimées comme suit :

$$\hat{\sigma}_{d,0}^{2*} = n^{-1} \left[ \hat{\gamma}^*(0) + 2n^{-1} \sum_{i=1}^{h-1} (n-i) \hat{\gamma}^*(i) \right]$$

avec  $\hat{\gamma}^*(i) = (n-k)^{-1} n \hat{\gamma}_d(i)$ . Sous ces conditions, cet estimateur est biaisé pour la variance standard, et tel que :

$$E \left[ \hat{\sigma}_{d,0}^{2*} \right] \cong n^{-1} \left[ \frac{n+1-2h+n^{-1}h(h-1)}{n} \right] \times \sigma_{d,0}^2$$

Les auteurs ont montré que l'intégration de cet estimateur asymptotiquement, non biaisé, de la variance, dans le calcul de la statistique standard  $DM$ , permet de fonder sa version modifiée  $DM^*$ , au sens de Harvey, Leybourne et Newbold (1997), et sans doute, d'améliorer ces performances prévisionnelles, en matière de la prévision ponctuelle. Ainsi, la statistique  $DM^*$  s'écrit :

$$DM^* = \frac{\bar{d}}{\sigma_{\bar{d},0}^*/\sqrt{n}} \cong \left[ \sqrt{\frac{n+1-2h+n^{-1}h(h-1)}{n}} \right] \times DM$$

---

### 3.5.6.2. *Évaluation des prévisions par Intervalles de Confiance*

Avant de présenter les principaux tests d'évaluations des prévisions par intervalles de confiances, il sera très utile de connaître les prédictions par intervalles des séries étudiées, pour un horizon possible. De ce fait, nous allons essayer d'évaluer nos prédictions<sup>270</sup>, sur la période allant de 2006:12 jusqu'à 2019:12. À cette étape d'analyse, la question qui se pose consiste à savoir à quel résultat devons nous nous attendre?

D'abord, l'une des importantes remarques qui peut être constatée, à partir de l'examen visuel de la figure (3.75), montre que les aléas augmentent d'autant plus, avec les prévisions, quand celles-ci intéressent des événements, dont les horizons sont plus étendus, dans l'avenir lointain. Ceci peut être justifié par le fait que la croissance de l'incertitude et non du risque est expliquée par l'imperfection de l'arbitrage, dans le passé récent, entre ce qui est défaut de stationnarité de la partie déterministe, de chacun des modèles STAR étudié et ce qui est apparu comme aléas. Dès lors, nous pourrions croire qu'une erreur infinitésimale commise dans l'estimation des conditions initiales, peut écartier, totalement, nos prédictions à un taux exponentiel de la vraie voie. Cette constatation n'a de signification que de permettre de confirmer le résultat recueilli, de la deuxième partie de ce document, selon lequel à cause de la sensibilité des conditions initiales, les phénomènes de cycles limites qui peuvent être engendrés par les dynamiques des modèles STAR, ne sont prévisibles avec fiabilité qu'à court terme.

---

<sup>270</sup> Les valeurs numériques des bornes des intervalles de prévisions calculées sont présentées en Annexe 17.

## Evaluation des intervalles de prévisions des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie

2007:01 - 2019:12

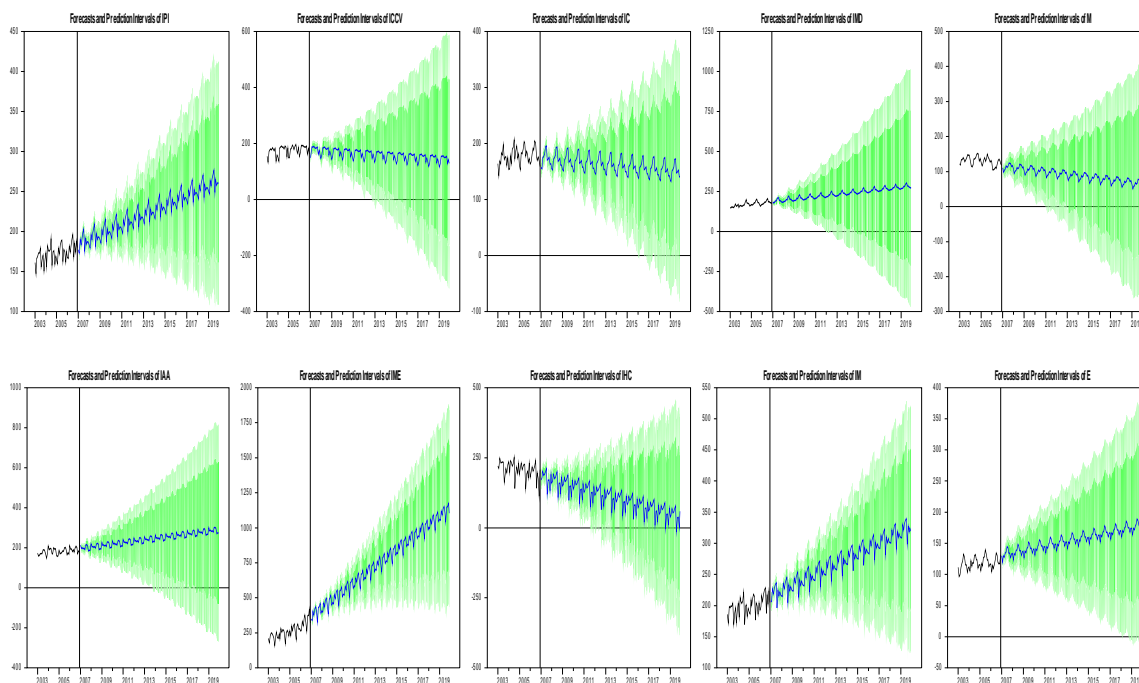


Figure 3.75: Évaluations des intervalles de prévisions

Dans la suite de cette sous-section, nous allons présenter les principaux tests d'évaluations des prévisions par intervalles. Nous limitons notre exposition aux tests d'évaluations au sens de Christoffersen (1998), et au sens de Wallis (2002).

### 3.5.6.2.1. Tests de Christoffersen (1998)

Christoffersen (1998), a proposé de tester, sous l'hypothèse nulle, la validité d'un intervalle de confiance de prévision, à partir d'un ensemble de trois tests de ratios de vraisemblances : test de couverture non conditionnelle ; test d'indépendance des violations et test de couverture conditionnelle. L'auteur a commencé son article par définir la notion de la

couverture conditionnelle, sachant l'ensemble d'information  $\Omega_{t-1}$  et associé à la séquence d'observation  $\{Y_t\}_{t=1,\dots,T}$  qui peut satisfaire une séquence des intervalles de confiance pour un niveau de risque  $\alpha\%$  notée  $\{[L_{t\setminus t-1}^\alpha; U_{t\setminus t-1}^\alpha]\}_{t=1,\dots,T}$  si et seulement si :

$$E[I_t \mid \Omega_{t-1}] = \alpha, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

avec  $I_t$  est une variable binaire, dite violation, prenant un si la réalisation de la variable  $Y_t$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance et zéro sinon :

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_t \in [L_{t\setminus t-1}^\alpha; U_{t\setminus t-1}^\alpha] \\ 0 & \text{si } Y_t \notin [L_{t\setminus t-1}^\alpha; U_{t\setminus t-1}^\alpha] \end{cases}$$

où  $L_{t\setminus t-1}^\alpha$  et  $U_{t\setminus t-1}^\alpha$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la séquence des intervalles de confiance pour  $t = 1, \dots, T$ . Concernant le premier test de couverture non conditionnelle, Christoffersen (1998), a proposé de vérifier les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : E[I_t] = \alpha \\ H_1 : E[I_t] = \pi \neq \alpha \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle, la statistique de test appropriée est basée sur le ratio de la vraisemblance définie par :

$$LR_{UC} = -2 \log \left\{ L^\alpha(I_t) / L^{\hat{\pi}}(I_t) \right\}^{\text{asy}} \sim \chi^2(1)$$

où  $L^\alpha(I_t)$  et  $L^{\hat{\pi}}(I_t)$  sont respectivement la vraisemblance du processus de violation  $\{I_t\}_{t=1,\dots,T}$  (*iid* suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $\alpha$ ), sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative, telle que :

$$L^\alpha(I_t) = (1 - \alpha)^{n_0} \alpha^{n_1} \text{ et } L^{\hat{\pi}}(I_t) = (1 - \hat{\pi})^{n_0} \hat{\pi}^{n_1}$$

avec  $\hat{\pi} = n_1 / (n_0 + n_1)$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\pi$ ,  $n_0 = T - n_1$

et  $n_1 = \sum_{t=1}^T I_t$ .



Le second test, élaboré par Christoffersen (1998), est le test d'indépendance des violations de l'intervalle de confiance sous l'hypothèse nulle contre l'hypothèse alternative explicite de chaîne de Markov de premier ordre. Ce test suppose, donc, que les violations admettent une représentation de la forme d'une chaîne de Markov binaire et de premier ordre, ayant comme matrice de transition définie par :

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

où  $\pi_{ij} = pr(I_t = j \mid I_{t-1} = i)$ . Sous l'hypothèse de dépendance des violations, ce processus est approximé, à l'aide d'une fonction de vraisemblance comme suit :

$$\log[L(\hat{\Pi}_1, I_t)] = (1 - \hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}$$

où  $n_{ij}$  est le nombre des observations du couple  $I_t = j$  et  $I_{t-1} = i$ , et la matrice de transition est estimée par :

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1 - \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse nulle, les violations sont *iid* et en conséquence, la matrice de transition aura comme expression :

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

où  $\pi_2$  est la probabilité d'appartenir à l'intervalle de confiance à la période  $t$ . Sous l'hypothèse nulle d'indépendance des violations la fonction de vraisemblance devient :

$$\log[L(\hat{\Pi}_2, I_t)] = (1 - \hat{\pi}_2)^{n_{00} + n_{10}} \hat{\pi}_2^{n_{01} + n_{11}}$$

où  $\hat{\pi}_2 = (n_{01} + n_{11}) / (n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11})$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\pi_2$ . Ainsi, la statistique de ratio de vraisemblance est donnée par :

$$LR_{IND} = -2 \log \left\{ L^{\hat{\Pi}_2}(I_t) / L^{\hat{\Pi}_0}(I_t) \right\}^{\text{asy}} \sim \chi^2(1)$$

Finalement, le troisième test dans la procédure de Christoffersen (1998), consiste à réaliser un test de couverture conditionnelle, sous l'hypothèse nulle. Ce test permet, alors, de lier les deux tests définis, précédemment, dans une seule forme jointe. La statistique lui est associée s'écrit :

$$LR_{CC} = -2 \log \left\{ L^\alpha (I_t) / L^{\hat{\Pi}_1} (I_t) \right\}^{\text{asy}} \sim \chi^2(2)$$

avec  $LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND}$ .

### 3.5.6.2.2. Tests de Wallis (2002)

À l'inverse Christoffersen (1998), qui a utilisé sous l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle, une statistique basée, sur le ratio de la vraisemblance, Wallis a proposé une nouvelle statistique basée sur le coefficient de  $\chi^2$  de Pearson. L'avantage de ce coefficient, c'est qu'il permet le calcul des p-valeurs exactes, quand le nombre de prévisions est limité. Soient  $L_{t|t-1}^\alpha$  et  $U_{t|t-1}^\alpha$  (respectivement) les bornes inférieures et supérieures de la séquence des intervalles de confiance pour  $\{Y_t\}_{t=1, \dots, T}$ , pour une valeur nominale de probabilité de couverture  $q$  tel que :

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_t \in [L_{t|t-1}^p; U_{t|t-1}^p] \\ 0 & \text{si } Y_t \notin [L_{t|t-1}^p; U_{t|t-1}^p] \end{cases}$$

Wallis a proposé sa procédure qui se compose de trois essais : un test de couverture correcte inconditionnelle, un test de l'indépendance, et un test de couverture correcte conditionnelle. Ces trois tests ont, en commun, de se baser sur la formule donnée par :

$$X^2 = \sum (O - E)^2 / E \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2$$

qui mesure, sous l'hypothèse nulle, l'anomalie entre les résultats observés  $O$  et les résultats prévus  $E$ .

Le test de couverture correcte inconditionnelle, compare la proportion d'échantillon de périodes que la prévision d'intervalle inclut la réalisation notée  $\hat{\pi}$ , avec une valeur nominale de probabilité de couverture  $q$ , où  $\hat{\pi}$  est calculée selon l'expression :

$$\hat{\pi} = n_1 / (n_0 + n_1)$$

avec  $n_1 = \sum_{t=1}^T I_t$  et  $n_0 = T - n_1$ .

Sous l'hypothèse nulle de couverture correcte inconditionnelle, les processus de violations  $\{Y_t\}_{t=1, \dots, T}$  sont distribués comme suit :

$$\{I_t\}_{t=1, \dots, T} \stackrel{H_0}{\sim} iid \text{ Bernoulli}(p)$$

La statistique de  $\chi^2$  lui est associée s'écrit :

$$X^2 = n(p - \pi)^2 / \pi(1 - \pi) \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(1)$$

Concernant le deuxième test, sous l'hypothèse nulle d'indépendance, Wallis a proposé une statistique, dont l'expression se déduit, à partir d'une matrice de contingence. Par exemple pour la matrice de carrée  $\Sigma$  donnée par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La statistique de  $\chi^2$  lui est associée s'écrit :

$$X^2 = n(ad - bc)^2 / (a + b)(c + d)(a + c)(b + d)$$

En général, cette statistique est distribuée, selon une loi binomiale. Pour qu'il suive une loi de  $\chi^2$  l'auteur a proposé une autre expression de la statistique de  $\chi^2$  ajustée, donnée par :

$$X_c^2 = n(|ad - bc| - n/2)^2 / (a + b)(c + d)(a + c)(b + d)$$

Pour le dernier test, Wallis a proposé un test de  $\chi^2$  asymptotiquement, équivalent au dernier test, dans la procédure de Christoffersen (1998). Ce test compare la table de contingence observée aux fréquences prévues, sous l'hypothèse commune de l'indépendance de rangée et de la probabilité de la couverture correcte.

### 3.5.6.3. Évaluation des Densités de Prévisions

Le problème de sélection de structure de modèle non-linéaire par reconnaissance et évaluation des densités prédictives est d'un grand intérêt, dans beaucoup de domaines, surtout, en économétrie des processus non-linéaires. Dans ce cadre, plusieurs procédures sont abordées et servent divers instruments qui sont inventés. Cependant, l'outil le plus largement utilisé pour résoudre ce problème, passionnant de recherche, c'est le test d'adéquation des lois de distributions, basé sur la statistique de *Kolmogorov-Smirnov*. Il consiste en une estimation de la fonction de répartition empirique de la loi prédictive inconnue. Le tableau (3.39), présente les différents résultats, concernant les tests, aux sens de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation des lois de distributions prédictives, inconnues des variables étudiées, à la loi Normale, à la loi de Khi-deux et à la loi de Student.

**Tableau 3.39: Tests de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation des lois prédictives inconnues**

Hypothèses :			Loi Normale		Loi Khi-deux		Loi Student	
Variables	Mean	Std dev	K-S	VCr	K-S	VCr	K-S	VCr
EDLIPI	0.003	0.019	0.054	0.078	0.465*	0.120	0.999*	0.120
EDLIAA	0.004	0.018	0.078*	0.078	0.496*	0.120	0.999*	0.120
EDLICCV	0.002	0.034	0.109*	0.078	0.442*	0.120	0.977*	0.120
EDLIME	0.008	0.039	0.084*	0.078	0.512*	0.120	0.987*	0.120
EDLIC	0.001	0.025	0.093*	0.078	0.481*	0.120	0.996*	0.120
EDLIHC	0.001	0.055	0.127*	0.078	0.512*	0.120	1.000*	0.120
EDLIMD	0.003	0.007	0.087*	0.078	0.450*	0.120	0.998*	0.120
EDLIM	0.003	0.026	0.071	0.078	0.426*	0.120	0.997*	0.120
EDLM	0.000	0.023	0.079*	0.078	0.488*	0.120	0.990*	0.120
EDLE	0.002	0.011	0.062	0.078	0.450*	0.120	0.999*	0.120

(\*) Indique que le coefficient est significatif au seuil de 5%. K-S indique la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov, VCr indique la valeur critique tablée du test en question.

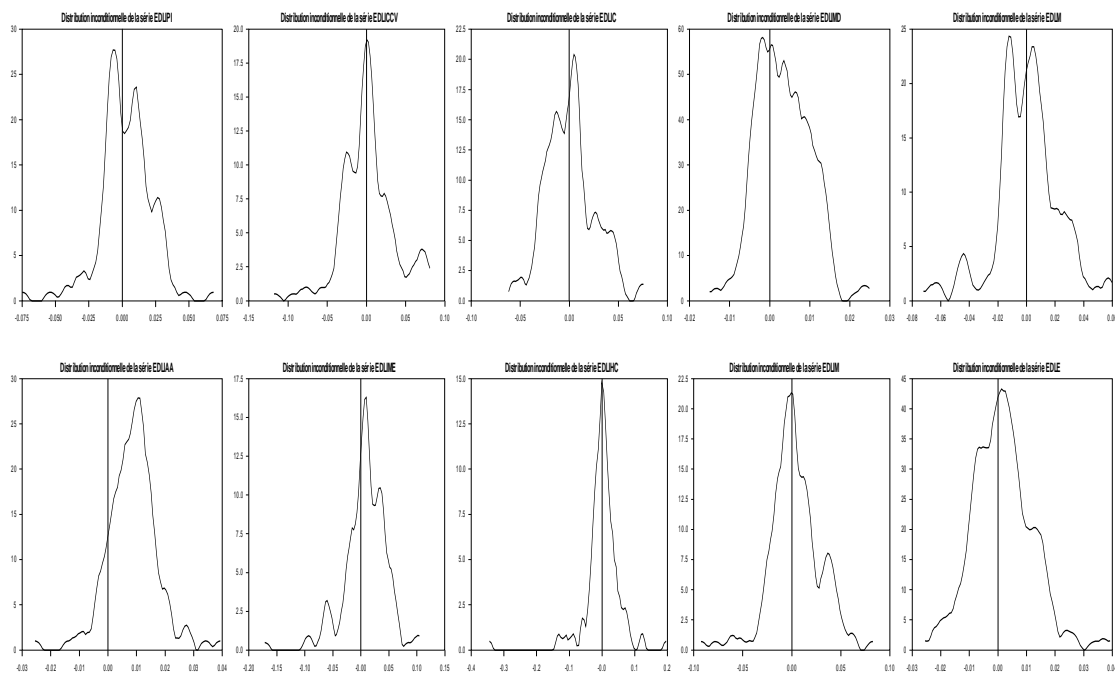
Source : Tests réalisés sur Rats 6.

Car dans la plupart des cas, lorsque les lois de distributions prédictives ont des formes multimodales inconnues, une première solution pour résoudre ce problème, largement adoptée, par les statisticiens consiste à employer leurs lois asymptotiques, comme des approximations des vraies lois. Mais, au regard du tableau (3.39), nous pouvons constater qu'au seuil de risque 5%, les tests aux sens de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation des lois de distributions prédictives inconnues des variables étudiées, sont incompatibles avec les distributions des lois usuelles

### Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

identifiées, respectivement, par les hypothèses posées. Ce constat nous permet de nous attendre à ce que les séries endogènes de la production industrielle, en Tunisie, obéissent toutes à des lois de distributions prédictives quelconques, qui échappent d'être correctement approximées, à l'aide des lois asymptotiques, définies grâce aux distributions des lois usuelles Normale, Khi-deux et Student. Dans un but d'approfondir d'avantage notre étude de la performance prévisionnelle des modèles STAR, en matière d'évaluation des densités prédictives, ayant des formes inconnues, nous envisageons de représenter sur la figure (3.76), les distributions inconditionnelles des séries endogènes analysées.

#### Distributions inconditionnelles des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie



**Figure 3.76: Évaluations des distributions inconditionnelles des séries endogènes de la production industrielles en Tunisie**

L'analyse graphique issue de la figure (3.76), montre que toutes les distributions inconditionnelles des séries endogènes de la production industrielle, en Tunisie, sont asymétriques. Cette caractéristique peut être interprétée par le fait que les distributions

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

inconditionnelles des séries étudiées changent dans le temps. L'intérêt de ce constat réside dans le fait que la dynamique des fluctuations endogènes de l'activité industrielle, en Tunisie, se caractérise par des points de retournements, qui délimitent les périodes, à partir desquelles la dynamique de l'industrie, change lentement ou brutalement. Ce résultat est intéressant dans la mesure où, les erreurs de prévisions apparaissent le plus fréquemment, lorsque les changements de régimes endogènes, dans les dynamiques des séries endogènes de la production industrielle, en Tunisie, reproduites par des modèles STAR, dont la fonction de transition est de type logistique ou exponentiel. De ce fait, le prévisionniste doit tenir compte de la possibilité de changements de régimes endogènes, afin de minimiser ses erreurs de prévisions. Le tableau (3.40), regroupe les différents résultats concernant les statistiques descriptives, de l'évaluation des distributions inconditionnelles des séries étudiées.

**Tableau 3.40: Évaluations des distributions inconditionnelles<sup>271</sup>**

<b>Variables</b>	<b>Mean</b>	<b>Median</b>	<b>Std deviation</b>	<b>Skewness</b>	<b>Kurtosis</b>
<b>EDLIPI</b>	0.002791	0.001952	0.019276	-0.393377 (0.074879)	2.540193 (0.000000)
<b>EDLIAA</b>	0.003866	0.004456	0.018475	-0.024842 (0.910438)	2.450000 (0.000000)
<b>EDLICCV</b>	0.002078	0.001197	0.034109	-0.081622 (0.711694)	1.283448 (0.004242)
<b>EDLIME</b>	0.007849	0.009499	0.038521	-0.989674 (0.000007)	3.546227 (0.000000)
<b>EDLIC</b>	0.000803	0.000742	0.025477	0.363475 (0.099803)	0.290963 (0.516804)
<b>EDLIHC</b>	0.001041	0.002552	0.054553	-1.818595 (0.000000)	13.476620 (0.000000)
<b>EDLIMD</b>	0.003369	0.002690	0.006757	0.276091 (0.211251)	0.270992 (0.545986)
<b>EDLIM</b>	0.003247	0.000610	0.026380	-0.273327 (0.000071)	1.783700 (0.000108)
<b>EDLM</b>	0.000326	0.000770	0.022655	-0.295759 (0.180508)	1.308779 (0.003545)
<b>EDLE</b>	0.001643	0.001104	0.010671	0.464587 (0.035410)	1.099320 (0.014312)

Source : Tests réalisés sur Rats 6.

<sup>271</sup> Les valeurs numériques des estimations des densités inconditionnelles de prévisions sont présentées en Annexe 18.

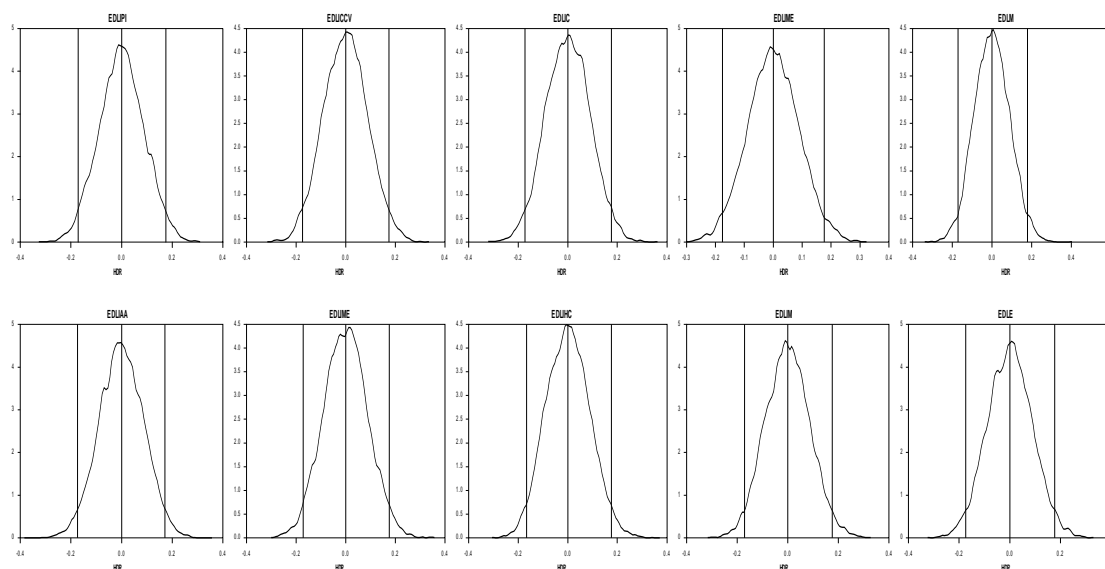
---

Or, rappelons que dans notre cas de la modélisation STAR, où l'asymétrie des modèles de prévision, ainsi sélectionnés, des séries endogènes de la production industrielle, en Tunisie, représente l'une des principales causes justifiant la non-linéarité. Distinctement de la modélisation linéaire, dans ce cas, pour chaque modèle STAR sélectionné, la région de confiance d'une prévision, n'est plus construite à l'aide d'un intervalle symétrique, autour des prévisions mais au contraire, puisque les modèles STAR choisis, peuvent admettre des distributions inconditionnelles, ayant chacune, plusieurs mouvements asymétriques et diverses multimodalités, alors la méthode HDR permet de construire, de manière condensée, les densités de prévisions simultanées, sur plusieurs périodes où chaque point de prévision appartenant à la région HDR, admet effectivement une densité, au moins supérieure à celle d'un point de prévision, n'appartenant pas, à la dite région et pour un niveau de risque donné  $\alpha$ ,  $HDR_\alpha$  donne la plus réduite et admissible des régions de prévisions possibles  $100(1-\alpha)\%$ . Comme les approximations des lois de distributions prédictives, ayant des formes inconnues peuvent être de mauvaise qualité, alors, afin d'obtenir une bonne approximation de la distribution des erreurs de prédiction plus précise que la loi asymptotique, ainsi que des régions de confiance HDR (*Highest-Density Region*), pour chacune des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie, nous appliquons la méthode de bootstrap. Généralement, nous nous servons de cette méthodologie, chaque fois, lorsque la forme inconnue de la loi de distribution prédictive ne peut pas être identifiée avec exactitude analytiquement. Nous pouvons nous attendre à ce que cette procédure permette de résoudre, définitivement, le problème ainsi rencontré.

Dans notre cas, nous allons appliquer la technique de bootstrap pour 10000 répliques, afin de déterminer les points de prévision. Sur la figure (3.77), sont indiquées les meilleures approximations des densités de prévisions, des séries endogènes étudiées, ainsi que leurs régions de confiance HDR, pour un niveau de risque de 95%. Pratiquement, ces régions de confiances  $HDR_\alpha$  sont données par les fractiles  $Q_{0.025}$  et  $Q_{0.975}$ . Comme nous voyons la technique de bootstrap a permis, non seulement d'identifier les formes inconnues des lois de distributions prédictives des séries étudiées, mais aussi d'améliorer, considérablement, la qualité de cette approximation.

### Evaluation des densités de prévisions des séries endogènes de la production industrielle en Tunisie

les régions de confiance HDR pour un niveau de risque de 95% sont donnés par les fractiles 0.025 et 0.975



**Figure 3.77: Évaluations des densités inconditionnelles et des régions de confiances des prévisions par la méthode de HDR pour un seuil de risque  $\alpha = 5\%$  en utilisant la technique de bootstrap**

Le tableau (3.41), rassemble les différents résultats concernant les statistiques descriptives de l'estimation des distributions inconditionnelles des séries étudiées et des régions HDR pour un seuil de risque  $\alpha = 5\%$ , en utilisant la technique de bootstrap.

**Tableau 3.41: Estimation des distributions inconditionnelles et des régions HDR pour un seuil de risque  $\alpha = 5\%$  en utilisant la technique de bootstrap**

Variabes	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera	Khi-deux
EDLIPI	-1.33418e-05	4.15756e-04	-0.29237	-0.09443	1.8127	0.40400
EDLIAA	6.64794e-04	3.13500e-04	0.24867	-0.17223	1.4428	0.48608
EDLICCV	2.17247e-04	8.61732e-04	0.31949	-0.14824	2.3126	0.31464
EDLIME	0.00766	0.00131	0.03247	0.03943	0.0305	0.98485
EDLIC	-0.00151	7.24612e-04	0.13890	-0.28837	0.8484	0.65428
EDLIHC	-9.44174e-04	0.00277	0.34361	0.36947	3.1454	0.20748
EDLIMD	0.00348	3.26194e-05	0.13445	-0.06784	0.3974	0.81980
EDLIM	0.00506	7.37392e-04	0.21324	-7.79044e-04	0.9625	0.61801
EDLM	-0.00310	3.76368e-04	-0.12870	-0.44313	1.3897	0.49915
EDLE	0.00163	1.04570e-04	-0.37929	0.25961	3.3482	0.18748

Source : Tests réalisés sur Rats 6.



Récemment, d'autres procédures sont développées de différentes manières. Dans la suite de cette sous-section, en nous basant sur la riche littérature en ce domaine, nous essayons de présenter un panorama, non exhaustif, des tests d'évaluation des densités de prévisions, afin de pointer leurs importances, ainsi que leurs marques de convergences et de divergences. En ce sens, Diebold, Gunther et Tay (1998), Clements et Smith (2000), Berkowitz (2001), Bai (2003), Bao, Lee et Saltoglu (2004), Sarno et Valente (2004), Corradi et Swanson (2004b-2006), Amisano et Giacomini (2005), Wallis (2005), Bao, Lee et Saltoglu (2007) et Hall et Mitchell (2007), ont essayé d'appliquer diverses techniques, pour évaluer des densités de prévisions. Ces tests peuvent être regroupés en deux classes : la première synthétise les tests de spécification correcte, qui consiste à vérifier sous l'hypothèse nulle, la concordance parfaite entre la distribution conditionnelle des densités de prévisions réalisées, avec celle de la vraie densité du processus générateur de données. Par contre, la seconde rassemble les tests de comparaison de densités conditionnelles mal spécifiées. Il s'agit, donc, de chercher, parmi une famille de modèles possibles, le plus adéquat qui sert à rapprocher le plus possible la densité du modèle de prévision, à la vraie densité de prévision, en comparant les qualités prédictives des modèles concurrents, dont les densités conditionnelles sont toutes mal spécifiées. À la différence de la première classe, ces derniers tests ne nécessitent pas de supposer sous l'hypothèse nulle, qu'il y a parmi les modèles testés, un modèle idéal de prévision, correctement spécifié.

### **3.5.6.3.1. Tests de Diebold, Gunther et Tay (1998)**

Cette technique se base sur le principe de la probabilité de transformation intégrale (*probability integral transform*), qui consiste à supposer une variable  $Y_t$  et de déterminer pour le modèle de référence ainsi choisi LSTAR ou ESTAR, sa densité conditionnelle des prévisions à l'horizon  $h = 1$ , notée par :

$$D_t(Y_t | \Omega_{t-1}, \psi_0)$$

où  $\Omega_{t-1}$  est la quantité d'information disponible à la date  $t-1$  et  $\psi_0$  désigne l'ensemble de paramètres connus. Cette procédure de test consiste à vérifier l'hypothèse selon laquelle quelque

soit  $t$ , il y a une conformité parfaite, entre les distributions conditionnelles des prévisions du modèle LSTAR ou ESTAR, sélectionné avec celui du vrai processus générateur de données. En d'autres termes, la suite des variables transformées, suivent la loi uniforme  $\{y_t\}_{t=1,\dots,T} \sim U_{[0,1]}$  ou  $y_t = \int_{-\infty}^{y_t} D_t(u \mid \Omega_{t-1}, \psi_0) du$  est la variable transformée.

Techniquement, cette procédure consiste à comparer graphiquement la fonction de répartition empirique de la variable transformée  $y_t$  à celle théorique de la loi uniforme. Le problème qui se pose est d'évaluer le degré d'adéquation, entre la fonction de répartition  $F_t(y \mid \Omega_{t-1}, \psi_0)$  de la variable  $y_t$  par rapport à la fonction de répartition  $U_{[0,1]}$  pour ceci, il faudrait savoir comment tester le degré de validité de la densité de prévision? Pour répondre à cette interrogation, Clements et Smith (2001), ont signalé qu'il faut borner la fonction de répartition théorique de la loi uniforme, à l'aide d'un intervalle de confiance à  $1-\alpha\%$  et pour cela les auteurs fournissent deux solutions. La première consiste à valider ceci, par un test de Kolmogorov, pour des échantillons de tailles réduites. Par contre, la seconde nécessite l'application directe d'un test paramétrique d'adéquation de loi, tel que, par exemple, le test de *Kolmogorov-Smirnov*. Or, comme nous l'avons noté, dans la première partie, la méthode de *Kolmogorov-Smirnov* (*KS*) consiste à comparer la distance de *Kolmogorov-Smirnov*, entre deux fonctions de répartition  $F$  et  $G$  est définie par :

$$KS(F_t, G_t) = \sup_{t \in \{1, \dots, T\}} |F_t(y \mid \Omega_{t-1}, \psi_0) - G_t(U_{[0,1]})|$$

où  $F_t(y \mid \Omega_{t-1}, \psi_0)$  est la fonction de répartition de la variable transformée  $y_t$  et  $G_t(U_{[0,1]})$  est la fonction de répartition de la loi uniforme dans  $[0, 1]$ . La règle de décision consiste à minimiser la statistique *KS*, entre les fonctions de répartition des lois en compétition. Cependant, en pratique l'élaboration du test d'évaluation des densités de prévisions, en utilisant la procédure, faisant intervenir la statistique *KS*, souffre en général de quelques lacunes, dont la plus importante est la dépendance de la distribution asymptotique de la loi de la statistique *KS* des paramètres de nuisances, puisque dans la plupart des cas, les paramètres du modèle employé en prévision, sont

inconnus et estimés avec une erreur d'estimation, qui risque sans aucun doute d'influencer, négativement, l'identification correcte de la spécification de la distribution conditionnelle des prévisions.

Pour faire face au problème de présence des paramètres de nuisances, Bai (2003), a proposé une procédure de test de l'exactitude de la détermination d'une distribution conditionnelle des prévisions. Cette procédure est détaillée de la façon suivante :

### 3.5.6.3.2. Tests de Bai (2003)

Malgré que ce test conserve le cadre général du test de spécification correcte (basé sur la statistique de *KS*), qui consiste à vérifier le degré d'adéquation de la fonction de répartition  $F_t(y \setminus \Omega_{t-1}, \psi_0)$  de la variable transformée et la fonction de répartition  $G_t(U[0, 1])$  de la loi uniforme dans  $[0, 1]$ , pourtant, il a ces propres spécificités, par rapport au test de *Kolmogorov*. La première c'est que les paramètres du modèle  $\psi_0$  sont inconnus et nécessitent d'être estimés par  $\hat{\psi}$ . La seconde c'est que l'information observée, n'est disponible que partiellement sur  $\check{\Omega}_{t-1} = \{Y_{t-1}, \dots, Y_1, y_{t-1}, \dots, y_1\} \subset \Omega_{t-1}$ . Sous l'hypothèse nulle, Bai (2003), a supposé de vérifier l'appartenance de la distribution cumulative conditionnelle de  $Y_t$  à la famille paramétrique  $F_t(y \setminus \Omega_{t-1}, \psi_0)$ . En conséquence, sachant les deux conditions nécessaires déjà énoncées, Bai (2003), a montré que la variable transformée est estimée en fonction de  $\hat{\psi}_0$  par la relation  $F_t(y \setminus \check{\Omega}_{t-1}, \hat{\psi})$ . Or, en présence des erreurs d'estimation sur la séquence de la variable transformée, estimée  $\hat{y}_t$ , le problème de présence des paramètres de nuisances, risque de fausser la performance du test d'adéquation à la loi  $U_{[0,1]}$ . Pour corriger la dépendance de la distribution asymptotique des statistiques de tests d'adéquation, aux paramètres de nuisance, Bai (1993), a proposé une modification du test standard de *Kolmogorov* où la statistique du test, sera affectée

d'une transformation marginale<sup>272</sup>. Ainsi, sous l'hypothèse nulle, la valeur est correcte du paramètre  $\psi_0$ , d'où en utilisant une transformation intégrale, nous pouvons transformer les données dépendantes en une séquence *iid* de variables aléatoires, uniformément distribuées sur  $[0, 1]$ .

Soient  $\hat{V}_T(r)$  un processus empirique défini à partir de la séquence des variables transformées  $\{\hat{y}_t\}_{t=1, \dots, T}$  par :

$$\hat{V}_T(r) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T [I(\hat{y}_t \leq r) - r]$$

et  $V_T(r)$  le processus qui lui est équivalent défini par les valeurs correctes des transformées probabilistes de  $y_t$  générées à partir de leur distribution conditionnelle correcte  $y_t = F_t(y_t \setminus \Omega_{t-1}, \psi_0)$  comme suit :

$$V_T(r) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T [I(y_t \leq r) - r]$$

Sous quelques conditions présumées de régularité, Bai (2003), a noté que le processus  $\hat{V}_T(r)$  est distribué asymptotiquement tel que :

$$\hat{V}_T(r) = V_T(r) - \bar{g}(r) \sqrt{T} (\hat{\psi} - \psi_0) + o_p(1)$$

avec  $\bar{g}(r) = p \lim \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial F_t}{\partial \psi}(x \setminus \Omega_{t-1}, \psi_0) \Big|_{x=F_t^{-1}(r \setminus \Omega_{t-1}, \psi_0)}$ .

Or, comme l'indiquent ces relations le processus  $\hat{V}_T(r)$ , dépend asymptotiquement des valeurs correctes des paramètres inconnus  $\psi_0$ , qui sont estimés et utilisés pour réaliser la prévision, et puisque l'erreur commise, lors de l'étape d'estimation de ces paramètres intervient en provoquant, en quelque sorte, un problème de paramètres de nuisance qui tend à affecter la

<sup>272</sup> Pour savoir plus concernant ce type de transformation marginale, nous conseillons l'intéressé de voir Khmaladze, E.V., (1981), « *Martingale approach in the theory of goodness-of-tests* », Theory of probability and its applications, XXVI, pp. 240-257.

puissance du test d'adéquation à la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et dont souffre la réalisation des prévisions précisées. Pour faire face à ce problème de présence de paramètres de nuisance, Bai (2003), a proposé une solution qui consiste à appliquer une transformation, permettant, à la fois, de récupérer le terme  $g(r)' \sqrt{T} (\hat{\psi} - \psi_0)$  et un processus, dont la distribution asymptotique est équivalente à celle d'un mouvement Brownien. Cette transformation est donnée par :

$$\hat{V}_T(r) = \hat{V}_T(r) - \int_0^1 \left[ \dot{g}(s)' C^{-1}(s) \int_s^1 \dot{g}(s)' d\hat{V}_T(\tau) \right] ds$$

où  $g(r) = (r, \bar{g}(r))'$  et  $\dot{g}(r) = (1, \dot{\bar{g}}(r))'$ .

Cette statistique permet de contourner le problème de présence de paramètres de nuisances et admet comme distribution limite, celle d'un mouvement Brownien standard, en d'autres termes, il converge vers une distribution qui n'est pas en relation de dépendance, ni avec le modèle choisi, ni avec les valeurs correctes des paramètres de ce modèle. Bai (2003), a proposé donc la statistique suivante :

$$T_T = \sup_{r \in [0, 1]} |\hat{W}_T(r)| \stackrel{d}{\sim} \max_{r \in [0, 1]} |W(r)|$$

où  $W(\cdot)$  est un mouvement Brownien standard.

Sur le tableau (3.42), sont indiquées les valeurs critiques du test de Bai (2003), comme suit:

<b>Tableau 3.42: Les valeurs critiques du test de Bai (2003)</b>		
<b>Modèle</b>		
<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>10%</b>
2.80	2.22	1.94

Toutes ces valeurs critiques données par Bai (2003, p. 6) sont issues par simulation d'un échantillon constitué de  $T=100000$  répétitions.

Après avoir présenté quelques tests de spécification correcte, nous gardons le même cadre général de test d'évaluation des densités de prévisions, mais en abordant, maintenant, dans ce qui suit de cette sous-section, les tests de comparaison de densités conditionnelles mal spécifiées.

### 3.5.6.3.3. Tests de Bao, Lee et Saltoglu (2007)

Bao, Lee et Saltoglu (2007), ont élaboré un test de comparaison des densités de prévision mal spécifiées, où l'adéquation du modèle de densité prédictive est mesurée au moyen du critère d'information, celui de Kullback et Leibler (1951), conditionnel via la divergence entre deux densités conditionnelles, l'une est propre au modèle générateur de données et l'autre est relatif au modèle candidat ajusté.

Soit  $Y_t$  une variable modélisée, selon d'un des deux modèles de référence, ainsi choisis, LSTAR ou ESTAR, sa densité conditionnelle des prévisions à l'horizon  $h=1$ , conditionnellement à l'ensemble d'information  $\Omega_{t-1}$  disponible à la date  $t-1$  et à l'ensemble de paramètres  $\Psi$  du modèle sélectionné, notée par :

$$D_t(Y_t, \Psi) = D_t(Y \setminus \Omega_{t-1}, \Psi)$$

Soit  $\{Y_t\}_{t=1, \dots, T}$  la suite des observations de la variable  $Y$ , décrivant le domaine d'évaluation des prévisions du modèle. Si nous admettons que les données observées sont des réalisations d'un processus générateur, dont la densité conditionnelle notée  $\tilde{D}_t(Y_t) = \tilde{D}_t(Y \setminus \Omega_{t-1})$  est inconnue, alors la divergence de Kullback-Leibler entre le modèle générateur de données de vraie distribution  $\tilde{D}_t(Y_t)$  et le modèle de prévision, dont la densité conditionnelle de prévision  $D_t(Y_t, \Psi)$  est donnée par :

$$H_t(\tilde{D} : D, \Psi) = IE_{\tilde{D}_t} [\log\{\tilde{D}_t(Y_t)\} - \log\{D_t(Y_t, \Psi)\}]$$

où l'espérance mathématique dépend de la vraie densité conditionnelle  $\tilde{D}_t(Y_t)$  de  $Y_t$  et doit vérifier les deux conditions suivantes :

$$IE_{\tilde{D}_t} [\log\{\tilde{D}_t(Y_t \setminus \Omega_{t-1})\}] \leq \infty \text{ et } IE_{\tilde{D}_t} [\log\{D_t(Y_t \setminus \Omega_{t-1}, \Psi)\}] \leq \infty$$

Dés lors, en se référant à White (1994), nous pouvons définir la distance entre la densité d'un modèle et la vraie densité comme la solution optimale d'un programme d'optimisation de l'entropie relative du critère d'information de Kullback-Leibler, par rapport à  $\Psi$ , comme suit :

$$II_t(\tilde{D}: D, \Psi_{t-1}^*) = IE_{\tilde{D}_t} [\log\{\tilde{D}_t(Y_t)\} - \log\{D_t(Y_t, \Psi_{t-1}^*)\}] \leq II_t(\tilde{D}: D, \Psi), \quad \forall \Psi$$

où  $\Psi_{t-1}^* = \arg \min_{\Psi} II_t(\tilde{D}: D, \Psi)$  est le pseudo-vraie valeur de  $\Psi$ .

Cependant,  $II_t(\tilde{D}: D, \Psi_{t-1}^*)$  est inconnu du fait que  $\Psi_{t-1}^*$  est inobservé et par conséquent, nous devons, tout d'abord, estimer les valeurs de  $\Psi_{t-1}^*$ . Pour ceci, afin de pouvoir estimer le vecteur de paramètres inconnus  $\Psi_{t-1}^*$ , Bao, Lee et Saltoglu (2007), ont proposé d'utiliser la technique de prévision, par régression récursive (*previous rolling regression*) des  $R$  observations  $\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-R}\}_{t=R+1, \dots, T}$  capable de prévoir  $\Psi_{t-1}^*$  par  $\hat{\Psi}_{R, t-1}$ , à l'aide d'une maximisation du  $R^{-1} \sum_{s=t-R+1}^t \log\{D_s(Y_s, \Psi)\}$  en utilisant l'expression suivante :

$$II_{R,n}(\tilde{D}: D, \hat{\Psi}_{R, t-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T [\log(\{\tilde{D}_t(Y_t)\} / \{D(Y_t, \hat{\Psi}_{R, t-1})\})]$$

avec  $n = T - R$  est la taille de la période de prévision hors échantillon (*out-of-sample*). Notons que :

$$II_{R,n}(\tilde{D}: D, \Psi_{t-1}^*) = \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T [\log(\{\tilde{D}_t(Y_t)\} / \{D(Y_t, \Psi_{t-1}^*)\})] + \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T [\log(\{D_t(Y_t, \Psi_{t-1}^*)\} / \{D(Y_t, \hat{\Psi}_{R, t-1})\})]$$

où  $II_{R,n}(D: D, \Psi_{t-1}^*)$  mesure la distance entre la densité optimale  $\tilde{D}_t(Y_t)$  et le modèle  $D_t(Y_t, \Psi_{t-1}^*)$ , et le second membre de cette expression, mesure l'estimation des paramètres incertains, à cause de la présence d'une distance séparant  $\Psi_{t-1}^*$  et  $\hat{\Psi}_{R, t-1}$ . Or, généralement  $\tilde{D}_t(\cdot)$  est inconnue, pour cela les auteurs ont insisté qu'il faut avoir recours à l'inverse de la transformation probabiliste *PIT* (*Probability Integral Transform*). La *PIT* d'une réalisation d'un processus sachant que sa densité de prévision est définie par :

$$u_t = \int_{-\infty}^{Y_t} D_t(Y \setminus \Omega_{t-1}, \Psi_{t-1}^*) dY$$

qui soit connue à condition que  $D_t(Y \setminus \Omega_{t-1}, \Psi_{t-1}^*)$  coïncide avec la vraie densité  $\tilde{D}_t(Y_t)$ . Dans ce cas, la séquence  $\{u_t\}_{t=1, \dots, T}$  des variables est *iid* suivant une loi  $U_{[0,1]}$ . D'où, le fractile normale  $x_t$  correspond à  $u_t$  est tel que :

$$x_t = \Phi^{-1} [u_t]$$

où  $\Phi(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normal. Par la suite, si le modèle est exactement spécifié, alors les variables de la séquence  $\{x_t\}_{t=1, \dots, T}$  sont distribuées, suivant la loi *iidN*(0, 1). Le problème c'est que la densité  $\tilde{D}_t(Y_t)$  est inconnue. Pour contourner cette difficulté, Bao, Lee et Saltoglu (2004), ont proposé à la lumière de la méthode de Berkowitz (2001, p. 467), de remplacer la mesure de la distance entre  $\tilde{D}_t(Y_t)$  et  $D_t(Y \setminus \Omega_{t-1}, \Psi_{t-1}^*)$ , par la mesure de la distance entre la densité  $p_t(\cdot)$  des variables  $x_t$  et la loi normale standard, tel que :

$$\log \left\{ \tilde{D}_t(Y_t) / D_t(Y_t, \Psi_{t-1}^*) \right\} = \log \left\{ p_t(x_t) / \Phi(x_t) \right\}$$

Ainsi, plus la densité conditionnelle de prévision est exactement spécifiée, plus la distribution conditionnelle  $p_t(\cdot)$  des variables  $x_t$  converge vers la loi normale standard. D'où, pour considérer l'effet de l'estimation incertaine des paramètres, les auteurs ont défini l'estimateur des variables  $x_t$  par :

$$\hat{x}_t = \Phi^{-1} \left( \int_{-\infty}^{Y_t} D_t(Y_t \setminus \Omega_{t-1}, \hat{\Psi}_{R,t-1}) dY \right)_{t=R+1, \dots, T}$$

et ils ont proposé un nouveau critère de divergence défini par :

$$H_{R,n}(\tilde{D} : D, \hat{\Psi}_{R,t-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T [\log(\{p_t(x_t)\} / \{\Phi(x_t)\})]$$

Mais, le problème qui se pose, à ce niveau d'analyse, est comment identifier les variables  $x_t$  à l'aide d'une forme assez générale de sa distribution conditionnelle  $p_t(\cdot)$ . Une réponse à cette question a été fournie, par Berkowitz (2001), et consiste à considérer un processus  $AR(L)$ , donné par :

$$x_t = \pi \tilde{x}_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$$



Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

où  $\tilde{x}_{t-1} = (1, x_{t-1}, \dots, x_{t-L})'$ ,  $\pi$  est un vecteur de paramètres, dont la dimension  $((L+1) \times 1)$  et  $\varepsilon_t \sim \text{iid}$ . Or, les résidus sont normalement distribués, alors il va de même pour les variables  $x_t$ . En conséquence, un test de normalité des variables  $x_t$  sera plus avantageux qu'un test de spécification ainsi désiré. C'est la raison pour laquelle les auteurs ont proposé de chercher une forme plus flexible de loi, par référence à la méthode semi-non-paramétrique de Gallant et Nychka (1987), noté par :

$$p(\varepsilon_t, \xi) = \frac{\left( \sum_{k=0}^K r_k \varepsilon_t^k \right) \Phi(\varepsilon_t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^K r_k u^k \right)^2 \Phi(u) du}$$

où  $r_0 = 1$ ,  $\xi = (r_1, \dots, r_K)'$ . Si pour tout  $k$  positif,  $r_k$  est nulle, alors  $p(\varepsilon_t) = \Phi(\varepsilon_t)$ . D'où, les variables  $\hat{x}_t$  prennent comme densité conditionnelle,

$$p(\hat{x}_t, \xi) = \frac{p\left(\frac{\hat{x}_t - \pi' \tilde{x}_{t-1}}{\sigma}, \xi\right)}{\sigma}$$

Ainsi, pour  $\pi = 0$ ,  $\sigma = 1$  et  $\xi = 0_K$ , cette densité se ramène à une loi normale centrée réduite. En conséquence, le critère de divergence s'écrit :

$$\tilde{I}_{R,n}(p : \Phi, \hat{\Psi}_{R,t-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T [\log(\{p_t(\hat{x}_t, \xi)\} / \{\Phi(\hat{x}_t)\})]$$

Après estimation des paramètres inconnus  $\xi$ ,  $\pi$  et  $\sigma$  par maximisation de la vraisemblance  $n^{-1} \sum_{t=R+1}^T \log\{p_t(\hat{x}_t, \xi)\}$ . Le critère d'information s'écrit :

$$\tilde{I}_{R,n}(p : \Phi, \hat{\Psi}_{R,t-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=R+1}^T \left\{ \log \left[ \frac{\left( \frac{\hat{x}_t - \pi' \tilde{x}_{t-1}}{\hat{\sigma}}, \hat{\xi} \right)}{\hat{\sigma}} \right] - \log[\Phi(x_t)] \right\}$$

Après avoir spécifié les structures exactes des modèles associés au processus générateurs de données, puis vérifié tant théoriquement qu'empiriquement les performances prévisionnelles

---

des modèles STAR, ainsi identifiés. Nous allons consacrer la prochaine section pour étudier les interactions d'interdépendances irrégulières, entre les séries ainsi étudiées et présenter les canaux de transmissions de leurs chaînes causales non linéaires. Il est, donc, plus commode de considérer qu'une telle analyse, nous semble pertinente et ceci pour plusieurs raisons. D'une part, la connaissance parfaite de ces relations de causalité, ainsi que l'identification exacte de leurs sens et de leurs directions, sont nécessaires à l'élaboration des modèles fiables de prévision ; car elles nous informent sur les conséquences probables des décisions envisageables, qui peuvent par la suite, participer efficacement, à la décision de la sélection de modèle de prévision le plus favorable, à chaque série temporelle analysée. D'autre part, nous sommes, maintenant d'accord, qu'en présence d'un domaine d'instabilité des structures dynamiques, l'élaboration d'un modèle de prévision d'une qualité désirable fait intervenir l'interaction de plusieurs facteurs intéressants. D'abord, ce domaine qualifié d'instable et de dynamique fait intervenir la connexion entre deux dimensions inséparables : celle du temps et celle de l'espace qui font, tous les deux ensembles, qu'en réalité le passé d'un modèle de prévision est, généralement, mal connu avec exactitude, puisque sa structure et son évolution non anticipée sont toujours en changements continuels. Ainsi, le découpage entre ces deux dimensions va entraîner la perte de certaines relations importantes du canal des relations causales et en conséquence, la construction d'un modèle acceptable de prévision cesse d'être possible. Ensuite, l'aléa ainsi que le défaut de stationnarité de la partie déterministe du modèle, peuvent simultanément intervenir de façon décisive, dans la fabrication d'un modèle de prévision, à un tel point qu'il peut être indispensable de décomposer ce modèle en deux parties, l'une déterministe, l'autre stochastique. Premièrement, un niveau donné d'aléa peut agir sur la qualité des prévisions, en y engendrant des divers coûts d'erreur, dont les impacts peuvent se diffuser progressivement dans le long terme. Deuxièmement, le défaut de stationnarité signifie que la stationnarité détectée, à partir du passé le plus récent du modèle, n'implique pas nécessairement que l'avenir sera déterminé comme continuation parfaite du passé. Ce déphasage entre le passé et le futur d'un modèle de prévision provient, donc, du fait que la dynamique de ce dernier, qui ne possède pas une même constance dans le temps, n'admette pas une même évolution spatiotemporelle identique, ou n'autorise pas les mêmes relations causales, ce qui influence, sans doute, la performance de l'évolution temporelle des

---

variables, ainsi que les relations causales induites. En conséquence, l'ignorance de la prise en compte de la relation d'interaction, entre ces facteurs, peuvent provoquer des perturbations graves, liées surtout, à la sensibilité aux conditions initiales, qui masquent une part importante des relations causales, trompent toute indication sur la dynamique de l'évolution des variables et y faussent les prévisions. Ainsi, la sensibilité des conditions initiales sera considérée comme la principale source d'imprévisibilité. Dès lors, selon l'influence du poids des conséquences des erreurs, il sera utile d'adopter les moyens nécessaires pour lutter, simultanément, contre l'aléa, contre le défaut de stationnarité ou contre ses effets survenus.

Une manière de se défendre contre des effets d'aléa futurs ou contre des effets du défaut de stationnarité de la partie déterministe du modèle de prévision, consiste à couvrir le risque, de manière à pouvoir lutter, sinon contre tous les risques, mais au moins, contre une importante partie parmi eux. De ce fait, ceci nous laisse penser que la connaissance, de plus en plus, précise des lois fondamentales des mécanismes de formation et d'évolution des cycles endogènes, influençant la dynamique non-linéaire, dans les processus générateurs de données, semble enfin pouvoir donner aux prévisionnistes, non seulement, la possibilité d'en inférer le comportement dans les situations non encore observées, mais aussi de lui fournir les moyens nécessaires pour mieux comprendre son mode de fonctionnement, afin de le modéliser et prévoir son futur. Dès lors, une analyse de causalité non-linéaire semble intéressante, dans la mesure où, elle favorise, non seulement, la prise en considération de l'instabilité endogène et des effets de seuils liés aux imperfections sources de auto-génération des frictions qui empêchent l'industrie Tunisienne d'avoir un fonctionnement optimal et entraînent, donc, des déviations, par rapport au sentier de croissance potentielle, mais aussi tient compte des effets de l'imperfection de l'arbitrage, entre ce qui est défaut de stationnarité de la partie déterministe du modèle de prévision et de ce qui est apparu comme aléas. Nous pourrions nous attendre à ce que l'analyse de la causalité non-linéaire au sens de Granger, concoure à l'amélioration de notre connaissance du phénomène réel de diffusion irrégulier des informations prédictives, au sien des modèles de prévisions choisis. Dès lors, le but de la prochaine section est d'essayer de décortiquer les effets de la causalité non-linéaire sur les séries étudiées.

### 3.6. Test de causalité non-linéaire

Depuis les contributions de bases de Granger (1969), Pierce et Haugh (1977)<sup>273</sup>, Sims (1972)<sup>274</sup>, Granger (1980), Engle et White (1999)<sup>275</sup>, le concept de causalité a été inventé en économétrie, dans un but explicatif, pour examiner les interactions dynamiques, entre les séries temporelles. De ce fait, les modèles économétriques sont fondés sur des intuitions de type causal. Les séries de production industrielle sont mises en relation deux par deux, à l'aide des tests de causalité linéaire, au sens de Granger. Nous devons rejeter l'hypothèse nulle, selon laquelle une série  $Y_{2t}$  ne cause pas  $Y_{1t}$ , si la mesure de causalité est supérieure, à la valeur limite de la statistique du test de un à  $p$  degré de liberté, au seuil de significativité  $\alpha\%$  choisie. Mais, les tests de causalité, conventionnellement linéaires, s'avèrent incapables de détecter des relations de causalités non-linéaires plus générales. Pour pallier l'inconvénient de ces tests, Baek et Brock (1992) et Bell, Kay et Malley (1996), ont proposé une méthodologie non paramétrique, alternative fondée sur le concept de l'intégrale de corrélation et la reformulation de la condition de non-causalité de Granger (1969). Ce test est modifié par la suite, par Hiemstra et Jones (1994).

#### ➤ Énoncé du test de Hiemstra-Jones (1994)

À la suite de l'extension du premier test de Baek et Brock (1992), Hiemstra et Jones (1994), ont proposé une autre version modifiée du test qui n'est qu'une méthode statistique, non paramétrique, capable de détecter les relations de causalité non-linéaire au sens de Granger. Ce test est basé sur l'application des intégrales de corrélations<sup>276</sup>. Leur idée c'est que l'estimation des dépendances spatiales, à travers le temps permet de découvrir les relations causales, entre les séries étudiées. À cet égard, considérant deux séries temporelles stationnaires  $Y_{1t}$  et  $Y_{2t}$  et

<sup>273</sup> Le test de la causalité entre deux séries temporelles permet de fournir une information supplémentaire sur la fonction d'intercorrélation entre leurs processus d'innovations, selon Pierce et Haugh (1977).

<sup>274</sup> Le test de la causalité entre deux séries temporelles permet d'enrichir l'analyse impulsionnelle, selon Sims (1972).

<sup>275</sup> Selon Engle et White (1999), le test de la causalité entre deux séries temporelles basé sur le modèle vectoriel à correction d'erreur, présente l'avantage de fournir une relation causale même si aucun coefficient estimé des variables d'intérêt décalées n'est significatif ce qui permet d'améliorer la prévision à long terme.

<sup>276</sup> Le concept d'intégrale de corrélation et transformation est introduit par Brock, Dechert et Scheinkman (1987).

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

désignant par  $F(Y_{1t} \setminus I_{1t-1})$  et  $F(Y_{2t} \setminus I_{2t-1})$  respectivement les probabilités conditionnelles des distributions de  $Y_{1t}$  et  $Y_{2t}$  fournies respectivement par les quantités d'informations  $I_{1t-1}$  et  $I_{2t-1}$  qui sont respectivement constituées par des vecteurs de  $Y_{1t}$ , dont la taille  $L_{Y_1}$ , tel que le vecteur des

valeurs retardées, défini par  $Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} \equiv (Y_{1t-L_{Y_1}}, Y_{1t-L_{Y_1}+1}, \dots, Y_{1t-1})$  et par des vecteurs de  $Y_{2t}$ ,

dont la taille  $L_{Y_2}$ , tel que le vecteur des valeurs retardées défini par  $Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}} \equiv (Y_{2t-L_{Y_2}}, Y_{2t-L_{Y_2}+1}, \dots, Y_{2t-1})$  et désignant par  $Y_{1t}^m$  et  $Y_{2t}^m$  respectivement deux vecteurs

des valeurs avancées, de même longueur  $m$  des séries  $Y_{1t}$  et  $Y_{2t}$  définies comme suit :

$$Y_{1t}^m = (Y_{1t}, Y_{1t+1}, \dots, Y_{1t+m-1})_{\substack{m=1,2,\dots \\ t=1,2,\dots}} \quad \text{et} \quad Y_{2t}^m = (Y_{2t}, Y_{2t+1}, \dots, Y_{2t+m-1})_{\substack{m=1,2,\dots \\ t=1,2,\dots}}$$

Pour des valeurs données de  $m$ ,  $L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2} \geq 1$  et pour  $\varepsilon > 0$ , nous dirons que  $Y_{1t}$  ne cause pas « *does not strictly Granger cause* »  $Y_{2t}$ , au sens de Granger si :

$$\begin{aligned} pr \left( \left\| Y_{1t}^m - Y_{1s}^m \right\| < \varepsilon \mid \left\| Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} \right\| < \varepsilon, \left\| Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}} - Y_{2s-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}} \right\| < \varepsilon \right) \\ = pr \left( \left\| Y_{1t}^m - Y_{1s}^m \right\| < \varepsilon \mid \left\| Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} \right\| < \varepsilon \right) \end{aligned}$$

où  $pr(\cdot)$  et  $\|\cdot\|$  désigne la probabilité et la norme maximale<sup>277</sup>, respectivement. La partie droite de l'expression indique la probabilité conditionnelle, pour laquelle la différence entre deux vecteurs arbitraires de valeurs avancées en nombre  $m$  de  $Y_{1t}$ , soit inférieure à une distance  $\varepsilon$ , sachant que

<sup>277</sup> C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} d \left( Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}, Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} \right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots} &= \left\| Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} - Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} \right\|_{L_{Y_1}=1,2,\dots} \\ &= \max_{k=1,\dots,L_{Y_1}} (Y_{1t+k} - Y_{1s+k}) \end{aligned}$$

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

---

l'écart entre les vecteurs correspondant des valeurs retardées des vecteurs  $Y_{t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}$  de taille  $L_{Y_1}$  de la série  $Y_{1t}$  et  $Y_{t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}$  de taille  $L_{Y_2}$  de la série  $Y_{2t}$  sont inférieures à la même distance  $\varepsilon$ . Le choix de la longueur du vecteur  $m$  se fait de façon arbitraire, mais en sachant que plus  $m$  est élevé, moins le risque de rejet de la non causalité est faible. La partie gauche de l'expression indique, dans quelques équations, la probabilité conditionnelle, pour laquelle, la différence entre deux vecteurs arbitraires de valeurs avancées en nombre  $m$  de la série  $Y_{1t}$ , soit inférieure à une distance  $\varepsilon$ , sachant que les écarts entre les vecteurs correspondant des valeurs retardées de  $Y_{1t}$  en nombre  $L_{Y_1}$  et de  $Y_{2t}$  en nombre  $L_{Y_2}$  sont chacun inférieur à  $\varepsilon$ .

Le test de Hiemstra et Jones (1994), consiste à tester pour une paire donnée de tailles  $L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2}$  l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} H_0 & : F(Y_{1t} \setminus I_{1t-1}) = F(Y_{1t} \setminus I_{1t-1} - Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}) \\ H_1 & : F(Y_{1t} \setminus I_{1t-1}) \neq F(Y_{1t} \setminus I_{1t-1} - Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle, le vecteur des valeurs passées de  $Y_{2t}$  sont exclues de l'information et par la suite, il n'affecte plus la distribution courante de  $Y_{1t}$ . Ce test peut être, alors, mis en œuvre en faisant intervenir les ratios correspondants des probabilités jointes dans l'équation précédente.

$$\begin{aligned} pr_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon) &= pr_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon) \\ &= pr_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon) \\ &= pr_4(L_{Y_1}, \varepsilon) \end{aligned}$$

Ces ratios sont définis comme suit :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

$$\begin{aligned}
 pr_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon) &= pr\left(\left\|Y_{1t-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}} - Y_{1s-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}\right\| < \varepsilon, \left\|Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}} - Y_{2s-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}\right\| < \varepsilon\right) \\
 &\quad \substack{L_{Y_1}=1,2,\dots \\ L_{Y_2}=1,2,\dots} \quad \substack{L_{Y_1}=1,2,\dots \\ L_{Y_2}=1,2,\dots} \\
 pr_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon) &= pr\left(\left\|Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} - Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}\right\| < \varepsilon, \left\|Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}} - Y_{2s-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}\right\| < \varepsilon\right) \\
 &\quad \substack{L_{Y_1}=1,2,\dots \\ L_{Y_2}=1,2,\dots} \quad \substack{L_{Y_1}=1,2,\dots \\ L_{Y_2}=1,2,\dots} \\
 pr_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon) &= pr\left(\left\|Y_{1t-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}} - Y_{1s-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}\right\| < \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots} \\
 pr_4(L_{Y_1}, \varepsilon) &= pr\left(\left\|Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}} - Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}\right\| < \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots}
 \end{aligned}$$

La condition de non causalité au sens de Granger peut maintenant être testée, en utilisant les estimateurs  $C_i(\cdot)_{i=1,2,3,4}$  basés sur l'intégrale de corrélation des  $pr_i(\cdot)_{i=1,2,3,4}$

$$\frac{C_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)}{C_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)} = \frac{C_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon)}{C_4(L_{Y_1}, \varepsilon)}$$

où  $C_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)/C_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)$  et  $C_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon)/C_4(L_{Y_1}, \varepsilon)$  désignent les ratios des probabilités jointes correspondantes au *LHS* et *RHS*. Les estimateurs des intégrales de corrélations des probabilités jointes sont définies par :

$$\begin{aligned}
 C_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n) &\equiv \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I\left(Y_{1t-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}, Y_{1s-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots} \times I\left(Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}, Y_{2s-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_2}=1,2,\dots} \\
 C_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n) &\equiv \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I\left(Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}, Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots} \times I\left(Y_{2t-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}, Y_{2s-L_{Y_2}}^{L_{Y_2}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_2}=1,2,\dots} \\
 C_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon, n) &\equiv \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I\left(Y_{1t-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}, Y_{1s-L_{Y_1}}^{m+L_{Y_1}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots} \\
 C_4(L_{Y_1}, \varepsilon, n) &\equiv \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I\left(Y_{1t-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}, Y_{1s-L_{Y_1}}^{L_{Y_1}}, \varepsilon\right)_{L_{Y_1}=1,2,\dots}
 \end{aligned}$$

où  $t, s = \max(L_{Y_1}, L_{Y_2}) + 1, \dots, T - m + 1$ ,  $t_0 = \max(L_{Y_1}, L_{Y_2}) + 1$ ,  $n = T + 1 - m - \max(L_{Y_1}, L_{Y_2})$ , et  $I(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)$  est une indicatrice égale à l'unité, quand la distance entre les deux vecteurs  $L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2}$  est inférieure à la distance  $\varepsilon$ , et zéro sinon. Hiemstra et Jones (1994), montrent que, pour des

valeurs données de  $m, L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2} \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ , et sous les hypothèses de Denker et Keller (1983)<sup>278</sup>, si  $Y_{2t}$  ne cause pas  $Y_{1t}$  au sens de Granger, alors :

$$\sqrt{n} \left( \frac{C_1(m + L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n)}{C_2(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n)} - \frac{C_3(m + L_{Y_1}, \varepsilon, n)}{C_4(L_{Y_1}, \varepsilon, n)} \right) \stackrel{a}{\sim} N(0, \sigma^2(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon))$$

où  $\sigma^2(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)$  est calculé, en utilisant l'estimateur tiré de Hiemstra et Jones (1994), qui permet aux erreurs d'être faiblement dépendantes.

La statistique ci-dessus est appelée  $CS(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n)$ , distribuée selon la loi de Student comme suit :

$$CS(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n) = \sigma^2(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon) \sim t_{(T-L_{Y_1}-L_{Y_2})}^{\alpha\%}$$

Sous l'hypothèse nulle d'absence de causalité de  $Y_{2t}$  vers  $Y_{1t}$ , la statistique du test est distribuée selon la loi de normale centrée réduite comme suit :

$$TVAL = \frac{CS(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon, n)}{\hat{\sigma}(m, L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)} \sim N(0, 1)$$

L'analyse de ce test montre que nous devons rejeter l'hypothèse que  $Y_{2t}$ , ne cause pas  $Y_{1t}$ , si la mesure de causalité  $TVAL(L_{Y_1}, L_{Y_2}, \varepsilon)$  dépasse la valeur limite  $St$  de la statistique de Student, associée au seuil de significativité choisie. Ce dernier test est déterminé, à chaque fois, pour un triple de valeurs  $L_{Y_1}, L_{Y_2}$  et  $\varepsilon$  indiqué par l'observateur. Asimakopoulos, Ayling et Mahmood (2000), notent que le test de causalité non-linéaire est utilisé sur les résidus obtenus, afin d'ignorer tout pouvoir prévisionnel linéaire, éventuel, entre les variables étudiées. Ainsi l'application du test de Baek et Brock (1992), requiert l'absence de dépendance linéaire, entre les séries elles-mêmes. En ce sens, les probabilistes ont pu développer un important cas, plus général, où l'horizon de la prévision aurait pu dépasser une période  $m > 1$  et où les périodes d'observation de  $Y_{1t}$  et de  $Y_{2t}$  auraient été différentes. Les statisticiens et les économètres quant à eux, ont proposé diverses approches de simulation, afin de rendre le test robuste à la présence de

<sup>278</sup> Denker et Keller (1983, pp.505-507), fournissent les conditions sous les quelles les estimateurs des intégrales de corrélations sont consistants.



changement de structure des séries et à une corrélation, à la date problèmes d'estimation, de test, de prévision pour les processus stochastiques. Sur le tableau (3.43), sont montrées les valeurs critiques du test de causalité non-linéaire au sens de Granger présentées par Hiemstra-Jones (1994).

**Tableau 3.43: Les valeurs critiques du test de Hiemstra-Jones (1994)**

Modèle		
1%	5%	10%
2.33	1.64	1.28

Toutes ces valeurs critiques données par Baek et Brock (1992, p. 32) sont issues par simulation d'un échantillon de taille  $T=320$ .

Sur le plan pratique, le problème qui se pose, à ce stade montre que d'un côté, il n'existe, en général, aucune indication dans la littérature actuelle, quant-au choix des valeurs optimales des vecteurs des variables et des paramètres inconnus. D'un autre côté, ce test nécessite la détermination précise de valeur pour la longueur du vecteur avancé  $m$ , des longueurs des vecteurs retards  $L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2}$ , et de la valeur du paramètre  $\varepsilon$ . La solution adoptée pour résoudre ce problème consiste à appliquer la démarche de simulation de Monte Carlo de Hiemstra et Jones (1993) et de Chauveau (1997). Remarquons ensuite, que du fait de la nature du test, on ne peut calculer de kernel ( $I(Z_1, Z_2, \varepsilon)$ ), sur une seule et même date, ce qui ne nous permet pas de tester la causalité non-linéaire instantanée. Dans tous les cas, sur la base de ces simulations, nous allons appliquer le test de Hiemstra et Jones (1994), pour la longueur du vecteur avancé  $m$  fixée à 1, des longueurs des vecteurs retards  $L_{Y_1}$  et  $L_{Y_2}$  allant de 1 à 3 et de la valeur du paramètre  $\varepsilon = 1.5\sigma$ , avec  $\sigma = 1$  est l'écart-type des séries standardisées.

### ➤ Résultats du test

Les résultats obtenus, en appliquant le test de Hiemstra et Jones (1994), sont indiqués sur le tableau (3.44) :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

**Tableau 3.44: Résultats du Test de Hiemstra-Jones (1994)**

$H_0$	EDLIPI ne cause pas EDLIAA			EDLIPI ne cause pas EDLICCV			EDLIPI ne cause pas EDLIME		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1} = L_{Y2}$									
1	0.866	1.296*	0.097	2.383	2.644***	0.007	2.633	2.091**	0.029
2	1.103	1.710**	0.051	2.866	3.006***	0.004	2.045	1.996**	0.034
3	1.158	2.013**	0.029	1.938	1.885**	0.059	1.767	1.648**	0.049
$H_0$	EDLIPI ne cause pas EDLIC			EDLIPI ne cause pas EDLIHC			EDLIPI ne cause pas EDLIMD		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1} = L_{Y2}$									
1	0.693	1.287*	0.098	2.438	2.340***	0.002	1.042	1.301*	0.096
2	0.940	1.393*	0.096	2.131	2.031**	0.025	1.536	1.330*	0.094
3	1.046	1.416*	0.095	1.902	1.651**	0.047	2.003	1.641**	0.058
$H_0$	EDLIPI ne cause pas EDLIM			EDLIPI ne cause pas EDLM			EDLIPI ne cause pas EDLE		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1} = L_{Y2}$									
1	2.603	1.702**	0.043	2.910	1.660**	0.045	2.301	1.286*	0.097
2	2.949	2.352***	0.009	2.083	1.644**	0.051	2.794	1.680**	0.059
3	3.063	2.391***	0.006	2.083	2.340***	0.008	2.923	1.701**	0.052

\*, \*\* et \*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 10%, 5% et 1% respectivement. Le test de causalité modifié de Baek et Brock est basé sur le résidu d'un modèle bivarié.  $L_{Y1}$  et  $L_{Y2}$  sont le nombre de retards des résidus utilisés pour les séries, et estimés à partir du critère AIC. Dans tous les cas, la longueur du vecteur avancé est fixée à l'unité. CS et TVAL sont la distance entre les deux probabilités conditionnelles et la statistique du test de Student. L'hypothèse nulle est rejetée si la statistique observée est supérieure à la valeur limite théorique (la p-value doit être inférieure au seuil de confiance considéré). Les résultats sont donnés pour la longueur du vecteur  $m$  fixé à 1,  $L_{Y1}$  et  $L_{Y2}$  sont égaux pour des retards de 1 à 3 et  $\varepsilon = 1.5\sigma$ , avec  $\sigma = 1$  est l'écart type des séries standardisées.

Source : Tests réalisés en C++ par M. Dolores Robles, Luisa Nieto et M. Angeles Fernandez

Les résultats obtenus, en appliquant le test réciproque de Hiemstra et Jones (1994), sont indiqués sur le tableau (3.45) :

Partie III : Technique de modélisation de la prévision du cycle endogène de la production industrielle en Tunisie à l'aide de modèle STAR

<b>Tableau 3.45: Résultats du Test Réciproque de Hiemstra-Jones (1994)</b>									
$H_0$	EDLIAA ne cause pas EDLIPI			EDLICCV ne cause pas EDLIPI			EDLIME ne cause pas EDLIPI		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1}=L_{Y2}$									
<b>1</b>	2.031	1.716**	0.041	1.841	1.824**	0.044	1.955	2.339***	0.006
<b>2</b>	2.792	2.261**	0.010	2.099	2.141**	0.039	2.103	2.485***	0.008
<b>3</b>	0.871	1.289*	0.099	2.303	2.334***	0.001	0.997	2.103**	0.035
$H_0$	EDLIC ne cause pas EDLIPI			EDLIHC ne cause pas EDLIPI			EDLIMD ne cause pas EDLIPI		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1}=L_{Y2}$									
<b>1</b>	1.933	1.288*	0.098	2.091	1.306*	0.096	3.439	2.147**	0.022
<b>2</b>	2.329	1.355*	0.096	2.792	2.350***	0.007	2.605	2.097**	0.031
<b>3</b>	2.427	1.424*	0.094	3.216	2.658***	0.002	3.033	2.368***	0.006
$H_0$	EDLIM ne cause pas EDLIPI			EDLM ne cause pas EDLIPI			EDLE ne cause pas EDLIPI		
	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value	CS	TVAL	P-value
$L_{Y1}=L_{Y2}$									
<b>1</b>	1.728	1.270*	0.096	2.853	2.388***	0.006	2.700	1.910**	0.038
<b>2</b>	2.033	1.302*	0.094	2.477	2.349***	0.007	2.361	1.492*	0.089
<b>3</b>	2.210	2.410**	0.047	1.984	2.217**	0.022	2.043	1.301*	0.092

\*, \*\* et \*\*\* indiquent que le coefficient est significatif au seuil de 10%, 5% et 1% respectivement. Le test de causalité modifié de Baek et Brock est basé sur le résidu d'un modèle bivarié.  $LY_1$  et  $LY_2$  sont le nombre de retards des résidus utilisés pour les séries, et estimés à partir du critère AIC. Dans tous les cas, la longueur du vecteur avancé est fixée à l'unité. CS et TVAL sont la distance entre les deux probabilités conditionnelles et la statistique du test de Student. L'hypothèse nulle est rejetée si la statistique observée est supérieure à la valeur limite théorique (la p-value doit être inférieure au seuil de confiance considéré). Les résultats sont donnés pour la longueur du vecteur  $m$  fixé à 1,  $LY_1$  et  $LY_2$  sont égaux pour des retards de 1 à 3 et  $\varepsilon = 1.5\sigma$ , avec  $\sigma = 1$  est l'écart type des séries standardisées.

Source : Tests réalisés en C++ par M. Dolores Robles, Luisa Nieto et M. Angeles Fernandez.

L'analyse simultanée des deux tableaux précédents, nous permet de détecter des relations bidirectionnelles, significatives de causalité non-linéaire directe, entre la série endogène de l'indice de production industrielle et chacune des autres séries endogènes de la production industrielle, en Tunisie. Ce qui signifie que, normalement, les tests de causalité linéaire au sens de Granger, et plus spécifiquement la modélisation de type ARMA des relations entre les ces séries, reste insuffisante, pour capter une grande partie importante des dynamiques de ces séries.

---

Par conséquent, le test modifié de Baek et Brock, au sens de Hiemstra et Jones (1994), montre qu'il existe des relations plus complexes, entre ces variables que les relations linéaires sont incapables de les mettre en avant. À la suite de cette interprétation, l'étape suivante consiste à bien connaître les liaisons causales qui peuvent exister entre erreurs de prévisions et les variables étudiées. Nous essayons de voir si les erreurs peuvent avoir une influence sur les fluctuations industrielles, qui sont expliquées principalement par des causes endogènes d'instabilité, tant structurelle que dynamique.

Après avoir dépourvu nos séries endogènes de tous les liens linéaires, en matière de prévision, en testant la causalité non-linéaire, entre la série endogène de l'indice de production industrielle et chacune des autres séries endogènes de la production industrielle en Tunisie, nous avons remarqué que les coefficients du retard 1 au 3 sont fortement significatifs. Ceci nous laisse constater que l'existence d'une relation bi-directionnelle significative, entre les variables considérées, est un symptôme de leurs pouvoirs prédictifs. Or, sachant l'hypothèse selon laquelle l'apparition des prévisions fondées sur des informations du passé le plus récent, est un effet engendré par la transmission du flux d'informations, qui circule à travers les fluctuations endogènes de l'industrie, alors les erreurs de prévisions qui sont des écarts, entre prévision et réalisation dont nous avons voulu étudier les causes et les conséquences sont associées au phénomène de diffusion irrégulier des informations, dont l'effet prédictif diminue de façon exponentielle, au fur et à mesure, que l'horizon de la prévision augmente dans le temps. Ceci explique le fait que les prévisions soient d'autant plus mauvaises que les fluctuations associées sont plus fortes. Le problème, qui est crucial au moment de la prévision, c'est l'accroissement exponentiel de l'erreur de prévision dans le temps, qui vient du fait que selon leurs modes de générations, à partir des fluctuations endogènes, les écarts entre prévisions et réalisations réintroduites de manière implicite, par la partie dynamique d'un modèle de prévision, se caractérisent par leurs fortes corrélations avec les mouvements cycliques des variables, Mais ils ne sont ni négligeables, ni parfaitement aléatoires ; puisque le hasard ne reflète pas complètement leurs structures causales. Ils obéissent, au contraire, à des processus non-linéaires, dont les lois de distributions sont anormales et en conséquence, ces erreurs de prévisions ne se compensent

---

jamais par le simple respect du principe de la loi des grands nombres. De ce fait, ce qui rend un peu simpliste l'appréhension des interactions conjoncturelles, c'est la vision dynamique dans le fonctionnement d'un modèle de prévision, qui est l'introduction toute récente et elle n'a qu'à fonder une explication originale, des modèles de prévision de l'économie dynamique qui analyse finement les fonctionnements des processus cycliques, grâce à l'imperfection des prévisions non linéaires des cycles endogènes. Un autre point important à noter concernant la mise en évidence d'une relation de causalité non-linéaire réciproque, entre la série endogène de l'indice de production industrielle et chacune des autres séries endogènes de la production industrielle en Tunisie, est qu'une certaine symétrie est respectée. Ceci est probablement du, à la présence d'un certain degré de synchronisation, entre les dynamiques non linéaires couplées qui signifient que chaque série endogène de la production industrielle, évolue en suivant le comportement de la série endogène de l'indice de la production industrielle et vice versa.

En conclusion, si nous nous intéressons aux problèmes de la causalité et de l'incidence des erreurs de prévisions, dans les fluctuations industrielles à court et à moyen terme, nous pouvons constater que l'évolution temporelle d'un modèle dynamique considéré, en économétrie de séries temporelles non-linéaires avec changements de régimes, autrement son mouvement, satisfait à des équations déterministes. Si nous le voulons, nous pourrions dire que les conditions initiales d'un modèle dynamique, en économétrie des processus non-linéaires stochastiques de séries temporelles avec changements de régimes, sont la cause dominante de son évolution ultérieure et la déterminent complètement. De ce fait, puisqu'un phénomène dynamique est un processus, dans lequel se produit une évolution déterministe, alors le concept de déterminisme qui découle de l'évolution déterministe est largement lié aux notions de processus dynamiques non-linéaires et de rétroaction ou feedback. Dès lors, cette conception déterministe caractérisant la dynamique d'un processus stochastique, en économétrie de séries temporelles non-linéaires avec changements de régimes, implique que son futur est continu, déterminé par son présent, et que, connaissant les lois induites par le vrai processus de transitions d'un régime à un autre et les conditions initiales, nous pouvons prédire avec certitude son comportement futur. Cependant, une conception de chaos peut se manifester dans un processus dynamique déterministe provient de sa

sensibilité aux conditions initiales, cause son imprédictibilité et en conséquence, elle rend impossible une caractérisation future du comportement des variables étudiées. Or, comme l'objet de cette étude était de suivre un prolongement méthodologique des modèles autorégressifs de changements de régimes avec transitions lisses, alors un comportement provient de l'instabilité, tant dynamique que structurelle de la non-linéarité des parties dynamiques, déterministes non-intégrables de ces processus économétriques stochastiques non-linéaires, fait que le rapport entre l'instabilité et la chaotité rend les comportements des processus dans cette modélisation STAR, se caractérisent par une dépendance critique très sensitive aux changements de conditions initiales. Voilà, cette nouvelle conception a permis un profond renouvellement, surtout en matière de prévision et de causalité non-linéaire, après une remise en cause de la méthode scientifique classique, basée essentiellement et jusqu'à il y a peu de temps, sur la causalité linéaire et le déterminisme, selon lesquels les effets sont toujours proportionnels aux causes, de sorte que la connaissance des causes permet d'en prévoir les effets.

### **3.7. Conclusion de la troisième partie**

L'objet de cette partie était de suivre un prolongement des modèles autorégressifs de changements de régimes avec transitions lisses STAR, capables d'étudier la dynamique endogènes des fluctuations industrielles, induit par la présence d'un cycle limite et de prévoir son comportement futur. Nous examinons, donc, l'existence des cycles limites, dans les comportements dynamiques des variables macro-économiques de la production industrielle en Tunisie, en employant la famille de modèle STAR. Après avoir mis en évidence les caractéristiques dynamiques continues de chaque modèle, nous avons cherché les causes possibles pour qu'un modèle représente mieux le processus générateur de données étudiées. Nous nous sommes, en particulier, attachés à discriminer en dynamiques d'ajustement non-linéaires à mémoire courte entre les processus LSTAR et ESTAR, afin de mieux comprendre les mécanismes endogènes de fonctionnement de notre secteur industrie.

Ces processus sont capables de capturer la présence de non-linéarités en moyennes dues à la présence des irrégularités cycliques, dans la dynamique endogène, dans la mesure où la vitesse de convergence vers l'équilibre, dépend de l'importance de l'écart, par rapport à ce même équilibre. Les résultats obtenus sur les modèles simulés montrent que la dynamique endogène du cycle, nécessite un ajustement qui tient compte d'une phase intermédiaire, lors de la transition d'un régime à un autre, mettant ainsi en évidence la persistance des fluctuations. Le modèle LSTAR permet de rendre compte de phénomène d'asymétrie au sens où les phases d'expansion et de récession du cycle, peuvent être caractérisées par des dynamiques différentes. À l'inverse le modèle ESTAR génère des dynamiques symétriques à l'extrémité pour les phases d'expansion et de récession du cycle, mais les états intermédiaires peuvent avoir des dynamiques différentes. Cette étape d'analyse est nécessaire pour la comparaison des performances prédictives de ces processus. Ce dernier point illustre bien la difficulté à distinguer un processus de transition, parmi la famille des processus STAR. Enfin, l'analyse montre que la performance prévisionnelle des séries étudiées peut être effectuée suivant un processus LSTAR ou ESTAR.

Ces modèles non-linéaires intègrent des mécanismes pour induire des fluctuations économiques compliquées de manière endogène et permettent, surtout, d'avoir des propriétés que n'avaient pas les modèles linéaires ARMA. Donc, ils permettent d'étudier l'existence éventuelle d'effets asymétriques et ainsi de modéliser, de façon plus réaliste, un grand nombre de données, en particulier les données autorisant une rupture structurelle endogène, dans la partie déterministe du processus. Or, l'ampleur des cycles endogènes, la possibilité d'avoir plusieurs dynamiques possibles qui se distinguent, selon différents régimes et même comprenant un comportement chaotique rendent plus complexe l'exercice de prévision non-linéaire.

Malgré le rôle prédominant joué par les approches économétriques dans la modélisation des erreurs de prévision, ces méthodes probabilistes ont pour majeur inconvénient de ne pas prendre en considération qu'un seul type d'erreur tout en ignorant l'erreur de troncature des décimales des chiffres et l'erreur de mesure, générées par l'ordinateur lorsque nous effectuons des calculs en précision finie d'estimation et de prévision de l'évolution temporelle des variables

macroéconomiques, grâce aux modèles non-linéaires et en plus l'omission de l'incertitude associée au risque systémique et de l'instabilité endogène dérivant de la sensibilité aux conditions initiales en présence d'un comportement chaotique. Ceci peut entraîner la déformation du problème traité, il est bien sûr très restrictif et peut conduire aux résultats fallacieux, dans la mesure où l'information nécessaire à la construction d'un modèle de prévision est rare et imparfaite. Ainsi, nous pouvons tirer la conclusion qu'au lieu d'expliquer les fluctuations et les mouvements de l'activité industrielle, en Tunisie, par la sensibilité du secteur industrie aux chocs exogènes nécessitant une manipulation adéquat, à l'aide des méthodes stochastiques de modélisation, l'analyse contemporaine des fluctuations tente de se développer dans une nouvelle direction, qui essaie d'expliquer l'irrégularité de la dynamique industrielle, par la présence des fluctuations endogènes requérant un traitement complet et approprié, à l'aide d'une complémentarité, entre les méthodes déterministes basées sur une analyse des propriétés dynamiques discrètes et les méthodes stochastiques basées sur une analyse des principales caractéristiques statistiques de la dynamique continue, surtout lorsque nous sommes en mesure d'effectuer une analyse prévisionnelle de la production industrielle.



## Conclusion générale

Les démarches et les réflexions présentées dans ce travail de recherche sont liées à la problématique cruciale qui consiste à aborder tant la construction que la sélection de la structure optimale d'un modèle non-linéaire de prévision et ensuite son évaluation, dans un cadre d'instabilité des structures dynamiques dominées par de profondes mutations économiques et des transformations radicales, sociales et culturelles, mettant l'industrie tunisienne au cœur de la reprise économique, nécessitant un regain d'intérêt pour les menaces internes qui bouleversent les dynamiques sectorielles et notamment, la reprise industrielle et causant ainsi l'irrégularité cyclique et surtout l'instabilité structurelle endogène de l'ensemble du secteur industrie qui est, sans examens rationnels, sera considérée comme un signe d'un blocage territorial attendu. L'une des caractéristiques récentes de la Tunisie est la manifestation d'une large intégration territoriale, parallèlement à la volonté d'une ouverture économique qui se déclenche pratiquement, en janvier 2008, par l'entrée en vigueur de l'accord de libre-échange avec l'Union Européenne. Or, cette intégration, paraît être difficile, voire impossible sans la valorisation précisée des conditions internes, à travers une politique de mise en niveau et de restructuration, donnant lieu à une redéfinition privilégiée des facteurs interplanétaires internes, ayant comme substances l'examen successif et continu de structures fondamentales statuts et positions de restructurations de l'industrie.

Or, les difficultés rencontrées proviennent de ce que la dynamique industrielle évolue de façon très irrégulière. Une interprétation possible repose sur une analyse dynamique discrète est que ce phénomène est probablement lié à des changements structurels endogènes. Néanmoins, le véritable problème évoqué, dans ce travail de recherche, est celui de la dichotomie entre partie déterministe et partie résiduelle et les possibilités d'y remédier. Ces dernières années les économistes ont commencé à employer les techniques de la dynamique non-linéaire et surtout de l'économétrie du chaos, pour répondre à la question : Comment les méthodes empiriques

## Conclusion générale

---

peuvent-elles être employées pour détecter des non-linéarités en moyennes et des structures endogènes cycliques et chaotiques dans le cadre des modèles économétriques? La complexité des structures et les changements de régimes endogènes, c'est la thèse que défend ce document. En nous intéressant au rôle de l'endocyclogenèse de structures cycliques, dans la dynamique endogène des séries de la production industrielle en Tunisie, nous sommes, naturellement, conduits à poser notre problématique de sélection de structure de modèle non-linéaire en prédiction de séries temporelles, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques traitées dans le contexte de la non-linéarité en moyenne, liée à la présence des phénomènes d'asymétries, à des ruptures qualitatives endogènes en tendances déterministes de fortes amplitudes et à l'effet du seuil fixé par le fonctionnement dynamique du processus de transition et d'ajustement, par lissage entre les états de régimes, aux comportements dynamiques des séries de la conjoncture économique étudiées et des instabilités structurelles dues au fait que chaque équilibre donné détermine un nouveau sentier pour les périodes futures.

Nos travaux dans ce document de recherche font que l'impératif méthodologique favorise, par référence à la théorie évolutionniste du changement des structures économiques, la conception fondamentale selon laquelle : « *la dynamique avant tout !* », afin de décrire l'évolution du processus générateur de données, soit par la caractérisation formelle d'un système dynamique, soit par l'utilisation d'une reconstruction historique et qualitative de ce dernier. Par la suite, nous avons voulu montrer qu'il pouvait être intéressant de donner lieu à de nouveaux rapprochements, venant de la logique économique abstraite, qui cherche à expliquer la régulation retardée de l'économie dynamique, à l'aide des oscillations entretenues à cycle limite, dont l'existence de celui-ci est liée à la structure même de ses relations d'interactions internes. Ainsi, nos contributions s'inscrivent donc dans le cadre de la thématique, de la sélection de structures de modèle non-linéaires en prédiction de séries temporelles, qui visent à identifier, modéliser et prévoir les cycles endogènes des branches sectorielles de la production industrielle en Tunisie, par des nouvelles références, autres que celles traditionnellement adoptées, lors de l'explication du cycle économique, reconnues par le ressemblance de leur mode de fonctionnement à celui d'un système dynamique linéaire avec les chocs exogènes consécutifs, qui est modelé par un modèle autorégressif. Par contre, à l'aide d'une nouvelle démarche, nous avons pu montrer que

## Conclusion générale

---

même lorsque le secteur industriel fonctionne sur le mode de concurrence pure et parfaite, la majorité de ses branches sectorielles peuvent avoir comme caractéristique commune, celle de l'irrégularité cyclique induite par la présence de dynamiques endogènes tout-à-fait fluctuantes, indépendamment, de l'influence des chocs exogènes. Cette nouvelle vision repose sur l'idée fondatrice du noyau dur de la théorie de cycle endogène, qui tente d'analyser des mécanismes de dynamiques non-linéaires, capables d'induire des fluctuations industrielles compliquées de manière endogène, selon laquelle les fluctuations endogènes macrodynamiques sont liées à la structure même de l'industrie, c'est-à-dire à l'existence des cycles limites dans la dynamique déterministe et asymétrique des variables macro-économiques industrielles, en employant la modélisation autorégressive à seuil avec transition lisse (STAR). En fait, appuyés sur l'idée cruciale de la recomposition des cycles par bifurcation, un mécanisme endogène de changement de régime lisse justifie bien que la modélisation de type STAR est révélée très utile pour la prise en compte de façon endogène de la dynamique des cycles asymétriques dans les séries étudiées. Si, réellement, notre désir est d'avoir une analyse précise, alors il serait très intéressant que notre réflexion nous conduise à étudier, avec plus de précision, les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un cycle limite. Mais, ceci n'est possible que si nous pourrions établir une analyse conjointe quantitative-qualitative, du phénomène de l'endocyclogenèse à travers la théorie du chaos créatif. Sachons que le chaos qui s'est produit lors du fonctionnement du processus d'ajustement à la transition lisse est créatif qui peut conduire en fin de compte à reproduire, par recomposition des invariances, des fluctuations autoentretenu de type cycle endogène. Dans ce cadre, nous sommes intéressés, plus particulièrement, à l'étude des effets dynamiques des non-linéarités, pour essayer de répondre à la question : Comment résoudre le problème de prise de décision de l'agent économique, confronté à des problèmes de prévision, dans le domaine des instabilités des structures dynamiques?

Parmi les enjeux de la recherche sur cette question fondamentale, qui touche en profondeur le noyau dur de la dynamique industrielle, nous pouvons noter d'abord que l'analyse et l'identification des fluctuations cycliques endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie, constituent des ingrédients fondamentaux qui nous conduisent vers une profonde concentration sur l'appréhension des modes de fonctionnements, des mécanismes d'ajustements

## Conclusion générale

---

structurels et surtout de transitions qui obéissent au principe de transformations adaptatives des structures dynamiques et de changements, par recompositions des invariances. Toutefois, ces fluctuations endogènes virtuelles (invisibles à l'œil nu) caractérisant de manière discrète la dynamique industrielle, peuvent avoir des structures dynamiques incohérentes. Quand des rapports de ces genres ne se produisent pas nécessairement sous formes de fluctuations autoentretenu, mais plutôt dans certains cas peuvent avoir des mouvements, dont les caractéristiques exactes sont fortement conditionnées par leurs situations initiales. Pourtant, ces comportements dynamiques plus ou moins compliqués, permettent de transmettre plusieurs faits stylisés, généralement enracinés, dans la théorie de fluctuations économiques. Ainsi, l'asymétrie inhérente des phases cycliques suggère que le dynamisme généré par les séries industrielles est constitué de la succession récurrente des périodes d'expansions et de récessions. Donc, à partir de ceci, naît l'idée centrale pour laquelle nous sommes engagés de comprendre, en tout détail, les récurrences des fluctuations cycliques endogènes et leur propriété de brisure de symétrie, par référence aux fonctionnements des processus générateurs de ces formes et de leurs particularités. Ceci prouve, l'existence des cycles limites, dans les dynamiques des séries de la production industrielle tunisienne. Ces fils conducteurs nous dirigent vers l'approche de chaos-déterministe sur laquelle reposent les modèles dynamiques déterministes non-linéaires, ayant une forte sensibilité aux conditions initiales, qui sont capables d'envisager à la fois plusieurs structures qui existent dans les modèles de changements de régime endogènes et le caractère chaotique des séries étudiées. Ceci nous ouvre quelques pistes pour parcourir le monde camouflé de l'endocyclogenèse et plus précisément de la morphologie des cycles endogènes non réalisables, que sur la base de l'identification de leurs mécanismes d'apparitions. De cela, deux idées centrales sont alors dominantes :

Premièrement, comme il est raisonnable de supposer, dans un premier lieu, qu'une série temporelle étudiée est produite par un système dynamique déterministe, plutôt, qu'à l'aide d'un processus stochastique, alors la variabilité des données réelles observées est exprimée par la variabilité des paramètres du système dynamique considéré. Ainsi, l'émergence des fluctuations cycliques endogènes, ayant des structures dynamiques asymétriques implique le plus souvent l'importance de prendre un comportement décisif vis-à-vis, d'une sélection rationnelle de la

## Conclusion générale

---

structure dynamique d'un processus le plus proche possible d'être qualifié comme le vrai mécanisme générateur des données.

Deuxièmement, étant donné que l'information nécessaire à la prédiction des séries temporelles non linéaires dans ce domaine d'instabilité des structures dynamiques, où certains paramètres, varient naturellement dans le temps en fonction de l'espace, se trouve réellement enracinée dans le dynamisme de ce processus largement influencé par les structures ainsi générées. Dès lors, l'intérêt qu'il y a pour la prédiction à identifier et à caractériser des cycles industriels endogènes est tellement évident, que nous nous sommes engagés, dès le départ à mentionner franchement que la contribution originale de cette thèse, consiste en la sélection de structures de modèles non-linéaires, en prédiction de séries temporelles.

Or, la démarche ainsi adoptée a montré que la réponse à l'objectif visé s'est réalisée par la confrontation de deux approches qui se trouvent normalement emboîtées. Tout d'abord, l'approche dynamique d'un modèle économétrique (*skeleton*), nous enseigne que d'une part, la génération des structures dynamiques cohérentes peut nous conduire à proposer dans un premier cas une nouvelle classe de prédicteurs, par intervalles de confiance de paramètres dynamiques non-linéaires, tout en prenant en compte l'information auxiliaire, à l'aide d'un modèle non-paramétrique, réalisé par recours aux approches de régression non-paramétriques de type polynômes locaux. Ensuite, la génération des structures dynamiques incohérentes montre que l'information prédictive peut émerger à travers ces structures dynamiques fortement instables, mais de façon explosivement exponentielle, peut nous conduire à proposer une prédiction par intervalle à erreurs bornées, réalisé au profit d'une deuxième approche ensembliste, qui se révèle à la théorie de l'arithmétique par intervalles. Dans cette démarche, nous avons constaté que l'utilisation d'une technique ensembliste de type CSP (*problème de satisfaction de contraintes*), parfaitement adaptée au contexte de la modélisation non-linéaire de type STAR, semble une voie prometteuse qui nous permet de proposer un modèle, associant la prévision déterministe et l'estimation d'une marge de risque d'erreur, ayant une probabilité donnée de n'être pas dépassée, afin de prendre en compte les incertitudes du modèle STAR de prévision, qui peuvent être dues aux phénomènes de bifurcations qui ont été ignorés, aux bruits de mesures provenant d'une

## Conclusion générale

---

erreur structurelle déterministe non modélisable, par variable aléatoire, ou encore au fait qu'en présence d'un domaine d'instabilité des structures dynamiques, certains paramètres de la modélisation STAR, varient naturellement dans le temps, en fonction de l'espace. Notre méthodologie, ici, consiste à associer à un modèle de prévision restreint à la composante déterministe, une marge de risque d'erreur avec une probabilité fixée de n'être pas dépassée. Donc, dans cette situation l'intérêt de l'étude de la croissance de l'erreur déterministe, nous a guidé vers une meilleure compréhension de la sensibilité aux conditions initiales qui représente la majeure lacune de l'imprédictibilité dans le domaine des instabilités des structures dynamiques, accompagnant des processus de générations de structures incohérentes.

Si dans une première démarche nécessitant l'abandon de l'hypothèse de stochasticité des processus, au profit de l'hypothèse de déterminisme quand ces nouvelles méthodes, ainsi mentionnées, ont permis d'analyser la dynamique d'un modèle économétrique de changements de régimes avec transitions lisses et plus précisément de quantifier les erreurs déterministes, qui peuvent être générées, par le fonctionnement structurel des processus de transitions avec différents degrés de cohérences et ancrées simultanément, dans le comportement dynamique des *skeleton* peuvent, conduire à une croissance de l'erreur prédictive initiale. Alors, la recherche sur ce domaine peut être enrichie par une autre vision stochastique, plus large, qui y intègre le modèle économétrique dans sa totalité. Cette fois, nous sommes, donc, concernés par l'analyse économétrique des modèles de types STAR. Dans ce contexte, un traitement adéquat à l'aide d'un test de causalité non-linéaire a permis d'apprécier calmement la qualité des interactions complexes.

Dans le cadre de ce travail, l'esprit d'analyse et de synthèse sur l'emploi des outils d'inférences statistiques de mesures les plus sophistiquées, des techniques économétriques récentes de l'analyse et de la prévision de la conjoncture font que l'analyse contemporaine des fluctuations et des modes de circulations des flux de l'information prédictive, au sein d'un modèle de prévision par référence à la théorie de cycle endogène et l'utilisation de modèles non-linéaires en moyenne de type STAR conduit à un profond renouvellement de la problématique de la prévision, et en particulier, sur deux points : Comment les erreurs de prévisions prennent

---

naissance dans les fluctuations économiques? Comment les erreurs de prévisions entretiennent les fluctuations économiques?

Enfin, après avoir présenté l'état actuel des connaissances concernant les modèles STAR et leur applicabilité en prévision non-linéaire, d'un point de vue de maintenir la continuité de ce travail, il est important de signaler les principales limites et les extensions nécessaires, pour orienter les axes de recherches futures sur ce sujet. Tout d'abord, nous avons tenté de pointer, à travers notre réflexion un certain nombre de problématiques et de questionnements, mais plusieurs points d'interrogations restent encore sans réponses définitives. Car les réponses apportées à ces interrogations sont, encore aujourd'hui, insatisfaisantes. En premier lieu, il convient de préciser qu'au niveau de la première partie, nous n'avons pas pu construire un test de détection d'un changement structurel, qu'avec une ou deux ruptures endogènes seulement. En deuxième lieu, en ce qui concerne la deuxième partie, nous n'avons pas pu construire un modèle STAR de prévision, à partir de l'approche non-paramétrique. En troisième lieu, au niveau de la dernière partie, nous avons utilisé, uniquement, les tests d'identification d'un modèle LSTAR contre l'alternatif ESTAR, par contre, d'autres tests utiles de spécification pour d'autres processus de transition sont ignorés. Il serait également important de préciser que nous avons réussi à établir un certain nombre de tests de validité de modèle STAR de prévision, néanmoins nous n'avons pas pu étudier leurs performances de manière achevée, pour les différents modèles choisis. Les prolongements de ce travail sont nombreux. L'étude du véritable problème évoqué dans cette réflexion de recherche qui est de la dichotomie entre partie déterministe et partie aléatoire d'un modèle STAR et son apport à l'élaboration, puis la sélection d'un meilleur modèle de prévision, n'est pas terminée et reste encore un sujet passionnant de recherche. Plusieurs extensions sont, alors possibles, mais un certain nombre de problèmes ne sont pas encore résolus. D'une part, en ce qui concerne le problème économétrique de non-linéarité, de chaos et de bifurcation il y a quelques points qui ne sont pas résolus. D'autre part, l'identification d'un modèle STAR, à partir d'une approche non-paramétrique est un problème difficile et reste à faire. En plus, étant donné qu'il y a plusieurs types de processus de transition, la construction de tests nous permet de tester le choix d'un processus contre un autre, s'avère difficile à faire. D'un autre côté, l'utilisation de l'approche ensembliste de prédiction par intervalle à erreur bornée, est

## Conclusion générale

---

sensée donner un éclairage intéressant quant à l'utilisation des modèles STAR de prévision déterministe, mais son application numérique n'a pas été établie, elle nécessite un développement, empirique et surtout un logiciel bien approprié. À côté du manque d'un véritable développement permettant une meilleure représentation et compréhension des dynamiques non-linéaires de la modélisation STAR, l'étude probabiliste des modèles STAR de prévision, n'est pas encore très développée, elle manque, particulièrement, un développement empirique adéquat, permettant de résoudre certains problèmes de prévision, pour lesquels nous n'avons pas de solution garantie. Par exemple, il sera utile en calcul des prédictions envisagé à l'aide de la technique de bootstrap en blocs chevauchés, de prédire le prochain pic, dès que nous détectons un et en conséquence, la prévision des points de retournements de la conjoncture restent aussi délicate.

En conclusion, il serait intéressant de souligner que l'importance de notre modeste contribution, dans le cadre d'analyse de cette thèse, provient exactement du fait que ces directives ont mis l'accent sur d'autres pistes de recherches prometteuses, permettant de combler les limites des déficiences des méthodes de modélisations macroéconométriques, actuellement, diffusées et utilisées pour la caractérisation du cycle, à caractère endogène et non-linéaire. En effet, la prise en compte de la dimension dynamique largement ignorée par la théorie économique statique, permettent non plus d'identifier correctement le processus générateur de données modélisant les fluctuations autoentretenues, à l'aide d'un cycle limite, mais aussi d'étudier les facteurs complexes de changements structurels de régime endogènes et même de fournir une analyse prévisionnelle dans le domaine des instabilités structurelles. L'étude de la dynamique d'un modèle économétrique non-linéaire par la combinaison de la modélisation déterministe de chaos et celle stochastique de changements de régimes avec transitions lisses conduit à des résultats intéressants en termes de prévisions. Nous souhaitons, simplement, que les quelques clefs présentées dans cette contribution permettront aux intéressés de mieux saisir le mode d'approche et de résolution de la problématique de construction et de sélection du modèle de prévision, dans le domaine d'instabilité endogène des structures dynamiques.



## Bibliographie

**Abraham-Frois, G. (1995a)**, “Dynamique économique”, *8<sup>o</sup> édition, Dalloz, Paris.*

**Abraham-Frois, G. (1995b)**, “Les fluctuations économiques : Analyses contemporaines”, *Analyses contemporaines, Economica Poche.*

**Abraham-Frois, G., (1998)**, “Nonlinear dynamics and endogenous cycles”, *Springer Verlag.*

**Abraham-Frois, G., et Berrebi, E., (1995)**, “Instabilité, cycles, chaos”, *Economica, Paris.*

**Acemoglu, D., et Scott, A., (1997)**, “Asymmetric business cycles: theory and time series evidence”, *Journal of Monetary Economics 40 (December), pp. 501-522.*

**Aftalion, A., (1909)**, “La réalité des surproductions générales. Essai d'une théorie des crises générales et périodiques”, *Revue d'économie politique, 22, pp. 81-117.*

**Aftalion, A., (1913)**, “Les crises périodiques de surproduction”, *Paris: Marcel Rivière.*

**Akaike, H., (1969a)**, “Fitting autoregressive models for predictions”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 21, pp. 243-247.*

**Akaike, H., (1969b)**, “Statistical predictor identification”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 21, pp. 203-217.*

**Akaike, H., (1973)**, “Information theory and an extension of the maximum likelihood principle”, In: B. N. Petrov and F. Csaki, eds. *Second International Symposium on Information Theory. Budapest: Akademiai Kiado, pp. 267-281.*

**Albin, P.S. et Foley, D.K., (1998)**, “Barriers and bounds to rationality: Essays on economic complexity and dynamics in interactive systems”, *Princeton: Princeton University Press.*

**Allen, P.M. et Sanglier, M., (1981)**, “Urban evolution, self-organization, and decision making”, *Environment and Planning A, 13, pp. 167-183.*

**Aloi, M., Dixon, H.D. et Lloyd-Braga, T., (2000)**, “Endogenous fluctuations in an open economy with increasing returns to scale-imperfect markets and policy effectiveness”, *Journal of Economic Dynamics and Control, 24(1), pp. 97-125.*

- Aloi, M., Lloyd-Braga, T. et Whitta-Jacobsen, H.J., (2003)**, “Endogenous business cycle and systematic stabilization policy”, *International Economic Review*, 44(3), pp. 895-915.
- Amisano, G. et Giacomini, R., (2005)**, “Comparing density forecasts via weighted likelihood ratio tests”, *Working Papers, University of California, Los Angeles*.
- Amsler, C. et Lee, J., (1995)**, “An LM test for a unit root in the presence of a structural change”, *Econometric Theory*, 11:2, pp. 359-368.
- Anas, J. et Ferrara, L., (2007)**, “ Positionnement cyclique des économies”, *Diagnostics, No. 2(Janvier)*, pp. 9-23.
- Anderson, H.M., (1997)**, “Transaction costs and nonlinear adjustment towards equilibrium in US treasury bill market”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59(4), pp. 465-484.
- Anderson, P., Arrow, K.J. et Dines, P., (1988)**, “The economy as an evolving complex system”, Edited by Addison-Wesley, Redwood City C.A.
- Andrews, D.W.K., (1993)**, “Tests for parameter instability and structural change with unknown change point”, *Econometrica*, 61(4), pp. 821-856.
- Andrews, D.W.K. et Ploberger, W., (1994)**, “Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative”, *Econometrica*, Vol.62, n°6, pp.1383-1414.
- Andronov, A.A., (1929)**, “Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues”, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 189, pp. 559-561.
- Andronov, A.A. et Pontrjagin, L., (1937)**, “Systèmes grossiers”, *Daklady Akademi Nauk SSSR*, Vol.14, pp. 247-250.
- Arthur, W.B., (1990)**, “Positive feedbacks in the economy”, *Scientific American*, pp. 92-99.
- Arthur, W.B., Durlauf, S.N. et Lane, D.A., (1997)**, “The economy as an evolving complex system II”, *Redwood City: Addison-Wesley*.
- Artus, P., Avouyi-Dovi, S. et Laffargue, J.P., (1993)**, “A disequilibrium econometric model of french economy with tow sectors and endogenous prices and investment”, *Economic Modelling*, 10(1), janvier.
- Arroyo, J., Espínola, R. et Maté, C. (2008)**, “Different approaches to forecast interval time series: A comparison in finance”, *Working paper*.
- Arroyo, J. et Mate, C., (2006)**, “Introducing interval time series: accuracy measures”, *In COMPSTAT 2006, Proceeding in Computational Statistics, Heidelberg*, pp. 1139-1146.

- 
- Ashley, R., Hinich, M.J. et Patterson, D., (1986)**, “A diagnostic test for nonlinear serial dependence in time series fitting errors”, *Journal of Time Series Analysis*, 7, pp. 165-178.
- Asimakopoulos, I., Ayling, D. et Mahmood, W.M., (2000)**, “Non-linear Granger causality in the currency futures returns”, *Economics Letters* 68, pp. 25-30.
- Baek, E. et Brock, W., (1992)**, “A general test for nonlinear Granger causality: Bivariate model”, *Working Paper, Iowa State University and University of Wisconsin, Madison, WI*.
- Bai, J., (1993)**, “On the partial sum processes of residuals in autoregressive and moving average models”, *Journal of Time Series Analysis*, 14, pp. 247-260.
- Bai, J., (1999)**, “Likelihood ratio tests for multiple structural changes”, *Journal of Econometrics*, 91, pp. 299-323.
- Bai, J., (2003)**, “Testing parametric conditional distributions of dynamic models”, *Review of Economics and Statistics*, 85, pp. 531-549.
- Bai, J. et Perron, P., (1998)**, “Estimating and testing linear models with multiple structural changes”, *Econometrica*, 66, pp. 47-78.
- Bai, J. et Perron, P., (2003a)**, “Computation and analysis of multiple structural change models”, *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), pp. 1-22.
- Bai, J. et Perron, P., (2003b)**, “Critical values for multiple structural change tests,” *Econometrics Journal*, 6, pp. 72-78.
- Bak, P. et Chen, K., (1991)**, “Self-organized criticality”, *Scientific American*, pp. 46-53.
- Bak, P., Tang, C. et Wiesenfeld, K., (1988)**, “Self-organized criticality”, *Physical Review, A*, 38, pp. 364-374.
- Bala, V. et Majumdar, M., (1992)**, “Chaotic tatonnement”, *Journal of Economic Theory*, 2, pp. 437-445.
- Balaton, J. et Renyi, A., (1956)**, “Math. Inst. of the Hungarian”, Acad. of Sci. 1, 9.
- Banerjee, A., Lumsdaine, R. et Stock, J., (1992)**, “Recursive and sequential tests of the unit root and trend break hypotheses: theory and international evidence”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 271-287.
- Bao, Y., Lee, T.H. et Saltoglu, B., (2004)**, “A test for density forecast comparison with applications to risk management”, *Working paper, University of California, Riverside*.

---

**Bao, Y., Lee, T.H. et Saltoglu, B., (2006)**, “Evaluating predictive performance of value-at risk models in emerging markets: A Reality Check”, *Journal of Forecasting* 25(2), pp. 101-128.

**Bao, Y., Lee, T.H. et Saltoglu, B., (2007)**, “Comparing density forecast models”, *Journal of Forecasting*, 26(3), pp. 203-225.

**Barnett, W.A., Barry, J., Milka, K., Travis, N. et Meenkashi, P., (2005)**, “The nonlinear skeletons in the closet”, in: Michael Belongia and Jane Binner (eds.), *Money, Measurement, and Computation*, Palgrave.

**Barnett, W.A. et Duzhak, E.A., (2009)**, “Empirical assessment of bifurcation regions within new Keynesian models”, *Economic Theory* 2009, forthcoming.

**Barnhart, C. et Dwyer, J.Jr., (1996)**, “Nonlinearities in business fluctuations”, *Manuscript, Federal Reserve Bank of Atlanta*.

**Barnett, W.A., Gallant, A.R., Hinich, M.J, Jensen, M.J. et Jungeilges, J., (1996)**, “Comparisons of the available tests for nonlinearity and chaos”, in: William A. Barnett, Giancarlo Gandolfo, and Claude Hillinger, eds., *Dynamic disequilibrium modeling: theory and applications* (Cambridge University Press, Cambridge), pp. 313-346.

**Barnett, W.A. et He, Y., (2001a)**, “Unsolved econometric problems in nonlinearity, chaos, and bifurcation”, *Central European Journal of Operation Research*, Vol. 9, July, pp. 147-182.

**Barnett, W.A. He, Y., (2001b)**, “Nonlinearity, chaos, and bifurcation: A competition and an experiment”, in Negishi T, Ramachandran R, Mino K (Eds.), *Economic theory, dynamics and markets: essays in honor of Ryuzo Sato*. Kluwer Academic Publishers: Amsterdam, pp. 167-187.

**Barnett, W.A. et He, Y., (2002)**, “Stabilization policy as bifurcation selection: Would stabilization policy work if the economy really were unstable?”, *Macroeconomic Dynamics* ; 6, pp. 713-747.

**Barnett, W.A. et He, Y., (2004)**, “Bifurcations in macroeconomic model”, In: Dowrick S, Rohan P, Turnovsky S (Eds), *Economic growth and macroeconomic dynamics: recent developments in economic theory*. Cambridge University Press: Cambridge, UK, pp. 95-112.

**Barnett, W.A. et Serletis, A., (2000)**, “Martingales, nonlinearity and chaos”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, pp. 703-724.

- 
- Barucci, E., Bischi, G.I. et Gardini, L., (1999)**, “Endogenous fluctuations in a bounded rationality economy: Learning non-perfect foresight equilibria”, *Journal of Economic Theory* 87, pp. 243-253.
- Basawa, I.V., Mallik, A.K., McCormick, W.P., Reeves, J.H. et Taylor, R.L., (1991)**, “Bootstrapping unstable first-order autoregressive processes”, *The Annals of Statistics*, 19, pp. 1096-1101.
- Baumol, W.J. et Benhabib, J., (1989)**, “Chaos: significance, mechanism and economic applications”, *Journal of Economic Perspectives*, n°1, pp. 77-105.
- Bec, F., Ben Salem, M. et Carrasco, M., (2004b)**, “Detecting mean reversion in real exchange rates from multiple regimes STAR model”, *mimeo, CREST-ENSAE*.
- Becker, R., Enders, G. et Hurn, S., (2006)**, “Modeling inflation and money demand using a fourier series approximation”, in C. Milas, P. Rithman, and D. van Dijk, eds., Nonlinear Time Series Analysis of Business Cycles, Amsterdam; Elsevier, pp. 221-246.
- Belforte, G., Bona, B. et Cerone, V., (1990)**, “Parameter estimation algorithms for set membership description of uncertainty”, *Automatica*, 26, pp. 887-898.
- Bell, D.J., Kay, J. et Malley, J., (1996)**, “A nonparametric approach to nonlinear causality testing”, *Econometrics Letters*, 51, pp. 7-18.
- Beltram, E., (1987)**, “Mathematics of dynamic modeling”, *Academic Press, New-York*.
- Benassy, J.P., (1984)**, “A non-Walrasian model of the business” *Journal of Economic Behavior and organization*, 5, pp.77-89.
- Benhabib, J., (1992)**, “Cycles and chaos in economic equilibrium”, *Princeton, Princeton University Press*.
- Benhabib, J. et Day, R.H., (1982)**, “A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations models”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 4, pp. 37-55.
- Benhabib, J. et Nishimura, K., (1979)**, “The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisectors models of optimal economic growth”, *Journal of Economic Theory*, 21, pp. 421-444.
- Benhabib, J. et Nishimura, K., (1985)**, “Competitive equilibrium cycle”, *Journal of Economic Theory*, 35, pp. 284-306.

## Bibliographie

- 
- Ben Salem, M. et Perraudin, C., (1998)**, “Tests de linéarité, spécification et estimation des modèles à seuil à transition brutale : une analyse comparée des méthodes de Tsay et de Hansen”, *Cahiers Eco & Maths*, 98-36, *Université de Paris I*.
- Bergé, P., Pomeau, Y. et Vidal, C., (1992)**, “L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence ”, *Hermann*.
- Bergström, R., (1995)**, “The relationship between manufacturing production and different business survey series in Sweden 1968-1992”, *International Journal of Forecasting*, 11, pp. 379-393.
- Berkowitz, J., (2001)**, “Testing density forecasts with application to risk management”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, pp. 465-474.
- Bertsekas, D.P., (1982)**, “Constrained optimization and lagrange multiplier methods”, *Academic Press, New York*.
- Bidrkota, P.V., (1998)**, “Asymmetries in the conditional mean dynamics of real GNP: robust evidence”, *Working paper, La Trobe University, Australia*.
- Birkhoff, G.D., (1932)**, “Sur quelques courbes fermées remarquables”, *Bull. Soc. Math. de France*, 60, pp. 1-26.
- Bischi, G.I., Mammana, C. et Gardini, L., (2000)**, “Multistability and cyclic attractors in duopoly games”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 11, pp. 543-564.
- Bliek, J.G., (2002)**, “Hayek et Aftalion : de la perturbation endogène à l'équilibre impossible”, dans Albert Aftalion : Redécouverte d'un économiste français du XXe siècle, Cahiers Lillois d'Économie et de Sociologie, N° 39.
- Blume, L.E. et Durlauf, S.N., (1993)**, “The economy as an evolving complex system III”, *New York: Oxford University Press*.
- Bodo, G., Golinelli, R. et Parigi, G., (2000)**, “Forecasting industrial production in the Euro area”, *Empirical Economics*, 25, pp. 541-561.
- Boldrin, M., (1988)**, “Persistent oscillation and chaos in economic models : Notes for a survey”, in Anderson, A., Arrow, K. et Pines, D., (eds) 1988, *The Economy as an Evolving Complex System, Redwood City (Cal.), Addison-Wesley*.
- Boldrin, M. et Montrucchio, L., (1986)**, “On the indeterminacy of capital accumulation paths”, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, pp. 26-39.

## Bibliographie

- 
- Boldrin, M. et Woodford, M., (1991)**, “Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos”, *Journal of Monetary Economics*, 25, pp. 189-222.
- Bose, A. (1988)**, “Edgeworth correction by bootstrap in autoregressions”, *The Annals of Statistics*, 16, pp. 1709-1722.
- Box, G.E. et Jenkins, G.M., (1976)**, “Time series analysis: forecasting and control”, *Holden-Day*.
- Box, G.E. et Pierce, D., (1970)**, “Distribution of residual autocorrelation in autoregressive integrate moving average time series models”, *J. Am. Stat. Ass.*, 65, pp. 1509-1529.
- Boyer, R., (1990)**, “Fluctuations et croissance”, *ch. 17, pp. 609-650, in Xavier Greffe, Jacques Mairesse, Jean-Louis Reiffers, "Encyclopédie économique", Economica, Paris, 1990, Tome 1, 1229 p.*
- Boyer, R. et Saillard, Y., (1995)**, “Théorie de la régulation: L'état des savoirs”, *La Découverte, Paris*.
- Brouwer, F.F., (1959)**, “On a generalization of the schauder fixed point theorem”, *Duke Math. J., t. 26, pp. 291-303*.
- Breidt, F.J. et Opsomer, J., (2000)**, “Local polynomial regression estimators in survey sampling”, *The Annals of Statistics*, 28, pp. 1026-1053.
- Breidt, F.J. et Opsomer, J., (2005)**, “Model-assisted estimation for complex surveys using penalised splines”, *Biometrika*, 92, pp. 831-846.
- Breiman, L., (1996)**, “Bagging predictors”, *Machine Learning*, 24, pp. 123-140.
- Breusch, T.S., (1980)**, “Useful invariance results from generalized regression models”, *Journal of Econometrics*, 13, pp. 327-340.
- Brock, W.A., (1986)**, “Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version”, *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 168-195.
- Brock, W.A. et Dechert, W.D., (1991)**, “Nonlinear dynamical systems, instability and chaos in economics”, in W. Hildenbrand et H. Sonnenschein (eds), *Handbook of mathematical economics, vol. IV, Elsevier Publishers, Amsterdam*.
- Brock, W.A., Dechert, W.D. et Scheinkman, J.A., (1987)**, “A test for independence based on the correlation dimension”, *mimeo, University of Wisconsin*.

## Bibliographie

- Brock, W.A., Dechert, W.D., Scheinkman, J.A. et LeBaron, B., (1996)**, “A test for independence based on the correlation dimension”, *Econometric Reviews*, 15, pp. 197-235.
- Brock, W.A. et Hommes, C.H., (1997)**, “A rational route to randomness”, *Econometrica*, 65, pp. 1059-1095.
- Brock, W.A. et Hommes, C.H., (1998)**, “Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, pp. 1235-1274.
- Brock, W.A., Hsieh, D.A. et LeBaron, B., (1991)**, “Nonlinear dynamics, chaos, and instability: Statistical theory and economic evidence”, *Cambridge, MA and London: The MIT Press*.
- Brock, W.A. et Malliaris, A.G., (1989)**, “Differential equations, stability and chaos in dynamic economics”, *Amsterdam, North-Holland*.
- Brock, W.A. et Potter, S.M., (1993)**, “Nonlinear time series and macroeconomics”, in *G.S. Maddala and C.R. Rao, eds. Handbook of Statistics, Vol. 11*, pp. 195-230.
- Brock, W.A. et Sayers, C.L., (1988)**, “Is the business cycle characterized by deterministic chaos?”, *Journal of Monetary Economics*, 22(1), pp. 71-90.
- Brockett, R., (1983)**, “Asymptotic stability and feedback stabilization”, *In R.M.R.W.*
- Brockett, P.L., Hinich, M.J. et Patterson, D.M., (1988)**, “Bispectral based tests for the detection of gaussianity and linearity in time series”, *Journal of the American Statistical Association*, v83, n°403 (September), pp. 657-664.
- Brooks, C. et Hinich, M., (1997)**, “Cross-correlations and cross-bicorrelations in sterling exchange rates”, *Working Paper, University of Reading, England*.
- Brown, B.W. et Mariano, R.S., (1984)**, “Residual based procedures for prediction and estimation in a nonlinear simultaneous system”, *Econometrica*, 52, pp. 321-343.
- Bruno, G. et Lupi, C., (2001)**, “Forecasting industrial production and the early detection of turning points”, ISAE Documenti di Lavoro n. 20/01: improved and updated version presented at the 22nd International Symposium on Forecasting (ISF), Dublin, June 2002.
- Bühlmann, P., (1997)**, “Sieve bootstrap for time series”, *Bernoulli*, 3(2), pp. 123-148.
- Bühlmann, P., (1998)**, “Sieve bootstrap for smoothing in nonstationary time series”, *The Annals of Statistics*, 26(1), pp. 48-83.
- Bullard, J. et Butler, A., (1993)**, “Nonlinearity and chaos in economic models : implications for policy decisions”, *Economic Journal, Royal Economic Society*, 103(419), pp. 849-867.



- Burnham, K.P. et Anderson, R., (2002)**, “Model selection and multimodel inference: A practical information theoretic approach”, Second ed. *New York: Springer-Verlag.*
- Burns, A.F. et Mitchell, W.C., (1946)**, “Measuring business cycles”, *New York: National Bureau of Economic Research.*
- Burnside, C., (1998)**, “Detrending and business cycle facts : A comment”, *Journal of Monetary Economics*, 41, pp. 513-532.
- Caner, M. et Hansen, B.E., (2001)**, “Threshold autoregression with unit root”, *Econometrica, Econometric Society*, 69(6), pp. 1555-1596.
- Canova, F., (1998)**, “Detrending and business cycles facts”, *Journal of Monetary Economics*, 41, pp. 475-512.
- Canova, F., (1999)**, “Does detrending matter for the determination of the reference cycle and the selection of turning points?”, *Economic Journal*, 109(452), pp. 126-150.
- Carlstein, E., (1986)**, “The use of subseries values for estimating the variance of a general statistic from a stationary time series”, *The Annals of Statistics*, 14, pp. 1171-1179.
- Carlstein, E., Do, K.A., Hall, P., Hesterberg, T. et Künsch, H.R., (1995)**, “Matched block bootstrap for dependent data”, *Bernoulli*, 4, pp. 305-328.
- Castagli, M., (1989)**, “Nonlinear prediction of chaotic time series”, *Physica, D*. 35, pp. 335-356.
- Cazzavillan, G., (2001)**, “Indeterminacy of endogenous fluctuations with arbitrarily small externalities”, *Journal of Economic Theory*, 101(1), pp. 133-157.
- Cazzavillan, G., et Pintus, P.A., (2006)**, “Endogenous business cycles and dynamic inefficiency”, *International Journal of Economic Theory*, 2(3-4), pp. 279-294.
- Cecen, A.A. et Erkal, C., (1996)**, “Distinguishing between stochastic and deterministic behavior in high frequency foreign rate returns: Can non-linear dynamics help forecasting”, *International Journal of Forecasting*, 12, pp. 465-473.
- Chabert, G. et Jaulin, L., (2009)**, “A language for quick interval modelling and programming in a bounded error context”, *Artificial Intelligence*, 173, pp., 1079-1100.
- Chalkley, M., et Lee, I.H., (1998)**, “Learning and asymmetric business cycles”, *Review of Economic Dynamics* 1, pp., 623-45.
- Chan, K.S., (1993)**, “Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a thresholds in autoregressive model”, *Annals of Statistics*, 21, pp.520-533.

## Bibliographie

- 
- Chan, K.S. et Tong, H., (1985)**, “On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations”, *Adv. Appl. Prob.* 17, pp. 666-675.
- Chan, W.S. et Tong, H., (1986a)**, “On tests for nonlinearity in time series analysis”, *Journal of Forecasting*, Vol.5, pp. 217-228.
- Chan, K.S. et Tong, H., (1986b)**, “On estimating Thresholds in autoregressive models”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol.7, pp.178-190.
- Chan, K.S. et Tong, H., (1989)**, “A survey on statistical analysis of univariate threshold autoregressive model”, *Adv. In Stat. Anal. Stat. Comp.* 2, pp. 1-42.
- Charfi, F. et Ghorbel, A., (1997)**, “Zone de libre échange, Tunisie-Union Européenne : Les défis d'un partenariat”, in *L'Europe et la Méditerranée : Intégration économique et libre échange, sous la direction de Benhayoun, G., Catin, M. et Regnault, H., L'Harmattan*, pp. 127-145.
- Chauveau, Th., (1997)**, “Peut-on exploiter le lien statistique entre cours et volume ; le cas de quatre bourses de valeurs”, *Document de Travail CDC 1997-04/FI*.
- Chen, P., (1993)**, “Searching for Economic Chaos: A Challenge to Econometric Practice and Nonlinear Tests”, In R. H. Day and Chen P., (eds). *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*, pp. 217-253, Oxford University Press.
- Chen, P., (1995)**, “Deterministic cycles in evolving economy : Time-frequency analysis of business cycle”, International Symposium on Dynamical Systems and Chaos, Tokyo, May 23-27, 1994, in Aoki, N., Shiraiwa, K., Takahashi, Y., eds, *Dynamical Systems and Chaos, vol. 1*, pp. 363-372, *World Scientific, Singapore*.
- Chen, Y.T., (2003)**, “Discriminating between competing STAR models”, *Economics Letters*, Vol. 79, pp. 161-167.
- Chernousko, F.L., (2005)**, “Ellipsoidal state for dynamical systems”, *Nonlinear Analysis*.
- Chernousko, F.L. et Rokityanskii, D.Ya., (2000)**, “Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104, pp. 1-19.
- Chiarella, C., (1990)**, “The elements of a nonlinear theory of economic dynamics”, *Springer, New York*.

## Bibliographie

- 
- Chiarella, C., Flaschel, P. et Franke, R., (2005)**, “Foundations for a disequilibrium theory of business cycles: Qualitative analysis and quantitative assessment”, *Cambridge, UK: Cambridge University Press*
- Christoffersen, P.F., (1998)**, “Evaluating interval forecasts”, *International Economic Review*, 39, pp. 841-862.
- Clements, M.P. et Hendry, D.F., (1999)**, “Forecasting non-stationary economic time series”, *Cambridge, MA: The MIT Press*.
- Clements, M.P. et Krolzig, H.M., (1998)**, “A comparison of the forecast performance of Markov-switching and threshold autoregressive models of US GNP”, *Econometrics Journal*, 1, C47-C75.
- Clements, M.P., et Krolzig, H.M., (2003)**, “Business cycle asymmetries: Characterizing and testing based on markov switching autoregression”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 21(1), pp. 196-211.
- Clements, M.P. et Smith, J., (2000)**, “Evaluating the forecast densities of linear and nonlinear models: Application to output growth and unemployment”, *Journal of Forecasting*, 19, pp. 255-276.
- Clements, M.P. et Smith, J., (2001)**, “Evaluating the forecast densities of linear and nonlinear models: applications to output growth and unemployment”, *Journal of Forecasting* 19, pp. 255-276.
- Cloete, J., (1990)**, “The business cycle and the long wave”, Cape Town: Galvin and Sales.
- Coppel, W.A., (1955)**, “Solutions of equations by iteration”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51, pp. 41-43.
- Corradi, V. et Swanson, N.R., (2004b)**, “Predictive density accuracy tests”, *Working Paper, Rutgers University and Queen Mary, University of London*.
- Corradi V. et Swansson, N.R., (2006)**, “Predictive density evaluation”, *Handbook of Economic Forecasting*.
- Cutler, C.D., (1994)**, “A theory of correlation for stationary time series”, *Philosophical Transaction*, 348(1688), pp. 343-355.

## Bibliographie

- 
- Dao, M., Di-Loreto, M., Jaulin, L., Lafay, J.F. et Loiseau, J.J., (2004)**, “Application des méthodes intervalles aux systèmes à retards”, *Présentation à la Conférence Internationale Francophone d'automatique, Douz (Tunisie), CD-Rom.*
- Davidson, R. et MacKinnon, J.G., (1999)**, “Bootstrap testing in nonlinear models”, *International Economic Review* 40, pp. 487-508.
- Davidson, R. et MacKinnon, J.G., (2003)**, “Econometric theory and methods”, *New York: Oxford University Press.*
- Davidson, R. et MacKinnon, J.G., (2004)**, “Bootstrap Methods in Econometrics”, *Palgrave Handbook of Econometrics, vol.1, ch.25.*
- Davies, R.B., (1977)**, “Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative”, *Biometrika, Vol.64, pp. 247-254.*
- Davies, R.B., (1987)**, “Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative”, *Biometrika, Vol.74, pp. 33-43.*
- Davis, E., (1987)**, “Constraint propagation with interval labels”, *Artificial Intelligence, 32, pp. 281-331.*
- Day, R.H., (1982)**, “Irregular growth cycles”, *American Economic Review vol. 72, pp. 406-414.*
- Day, R., (1992)**, “Chaos and evolution in economic processes”, in K., Velupillai., (ed.), *Nonlinearities, Disequilibria and Simulation: Essays in Honour of Björn Thalberg, London: Macmillan Press Ltd.*
- Day, R.H., (1994)**, “Complex economic dynamics, volume 1: An introduction to dynamical systems and market mechanisms”, *Cambridge, MA: MIT Press.*
- Day, R.H. et Chen, P., (1993)**, “Nonlinear dynamics and evolutionary economics”, *Oxford University Press.*
- Dechert, W.D. et Hommes, C.H., (2000)**, “Editorial introduction to special issue complex nonlinear dynamics and computational methods”, *Journal of Economic Dynamics and Control, 24, pp. 651-662.*
- Denker, M. et Keller, G., (1983)**, “On U-statistics and von mises's statistics for weakly dependent processes”, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 64, pp. 505-522.*

- 
- Dennis, J.E. et Schnabel, R.B., (1983)**, “Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations”, *Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, NJ.*
- Deschamps, P.J., (2008)**, “Comparing smooth transition and markov switching autoregressive models of US unemployment”, *Journal of Applied Econometrics, Vol. 23, No. 4, pp. 435-462.*
- Devaney, R.L., (1986)**, “An introduction to chaotic dynamics”, *Menlo Park, CA: Benjamin Cummings.*
- Devaney, R.L., (1989)**, “An introduction to chaotic dynamical system”, *Addison Wesley Publ. Comp.*
- Diebold, F.X., Gunther, T. et Tay, A.S., (1998)**, “Evaluating density forecasts, with applications to financial risk management”, *International Economic Review, 39, pp. 863-883.*
- Diebold, F.X. et Mariano, R.S., (1995)**, “Comparing predictive accuracy”, *Journal of Business and Economic Statistics, 13, pp. 253-263.*
- Diebold, F.X. et Rudebusch, G.D., (1999)**, “Business cycles durations, dynamics and forecasting”, *Princeton University Press, Princeton, NJ.*
- van Dijk, D., Strikholm, B. et Teräsvirta, T., (2003)**, “The effects of institutional and technological change and business cycle fluctuations on seasonal patterns in quarterly industrial production series”, *Econometrics Journal, 6, pp. 79-98.*
- van Dijk, D., Teräsvirta, T. et Franses, P.H., (2002)**, “Smooth transition autoregressive models : A survey of recent developments”, *Econometric Reviews, 21, pp. 1-47.*
- Diks, C. et Manzan, S., (2002)**, “Tests for serial independence and linearity based on correlation integrals”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 6 (2), art. no. 2, pp. 1-22.*
- Dockner, E.J. et Feichtinger, G., (1991)**, “On the optimality of limit cycles in dynamic economic systems”, *Zeitschrift für Nationlökonomie, 53, pp. 31-50.*
- Dore, M.J., (1993)**, “The macrodynamics of Business Cycles”, *Basil Blackwell.*
- Dore, M.H.I., (1998)**, “Walrasian general equilibrium and nonlinear dynamics”, *Nonlinear Dynamics Psychology, and Life Sciences, 2, pp. 59-72.*
- Dormard, S., (2002)**, “Albert Aftalion: redécouverte d'un économiste français du XX<sup>ème</sup> siècle”, *Cahiers lillois d'économie et de sociologie, n° 39, 1<sup>er</sup> semestre.*

## Bibliographie

- 
- Dos Santos Ferreira, R. et Lloyd-Braga, T., (2005)**, “Nonlinear endogenous fluctuations with free entry and variable markups”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(5), pp. 847-871.
- Druegon, J.P., (2000)**, “Non linéarité, indéterminations et endogénéité des fluctuations”, dans Analyse Macroéconomique (éd), *La Découverte*.
- Dubois, M., Atten, P. et Bergé, P., (1987)**, “L'ordre chaotique”, dans *La Recherche*, 18(185), pp. 191-201.
- Dufrenot, G. et Mathieu, L., (1998)**, “Utility functions and nonlinear dynamics in overlapping generations models”, in Abraham-Frois, G., (ed.), *Nonlinear Dynamics and Endogenous Cycles*, Springer Verlag.
- Ecker, J.G., (1980)**, “Geometric programming: Methods, computations and applications”, *SIAM Review*, 22(3), pp. 338-362.
- Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O. et Ruelle, D., (1987)**, “Recurrence plots of dynamical systems”, *Europhysics Letters*, 4(9), pp. 973-977.
- Efron, B., (1979)**, “Bootstrap methods: another look at the jackknife”, *The Annals of Statistics*, 7, pp. 1-26.
- Efron, B., (1987)**, “Better bootstrap confidence intervals”, *Journal of the American Statistical Association*, 82, pp. 171-200.
- Efron, B. et Tibshirani, R., (1993)**, “An introduction to the bootstrap”, *New York: Chapman & Hall*.
- Eitrheim, Ø., et Teräsvirta T., (1996)**, “Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models”, *Journal of Econometrics*, 74(1), pp. 59-75.
- Ekeland, I., (1984)**, “Le calcul, l'imprévu”, *Edition du Seuil, Paris*.
- Engelberg, J., Manski, C.F. et Williams, J., (2008)**, “Comparing the point predictions and subjective probability distributions of professional forecasters”, *Journal of Business and Economic Statistics*, forthcoming.
- Engle, R.F., (1982)**, “ARCH with estimates of the variance of the UK”, *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.

## Bibliographie

- Engle, R.F., (2002)**, “Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, pp. 339-350.
- Engle, R.F. et Brown, S.J., (1986)**, “Model Selection for Forecasting”, *Applied Mathematics and Computation*, 20.
- Engle, R.F. et Granger, C.W.J., (1987)**, “Cointegration and error correction: representation, estimation and testing”, *Econometrica*, 55, pp. 251-276.
- Engle, R.F. et White, H., (1999)**, “Cointegration, causality, and forecasting: A festschrift in honor Clive W.J. Granger”, *Oxford, University Press*.
- Ertel, J.E. et Fowlkes, E.B., (1976)**, “Some algorithms for linear spline and piecewise multiple linear regression”, *Journal of American Statistical Association*, 71(355), pp. 640-648.
- Evtushenko, Y., (1985)**, “Numerical optimization techniques”, *Optimization Software Inc., New York*.
- Faggini, M., (2009)**, “Chaos and chaotic dynamics in economics”, *Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences*, vol. 13, pp. 327-340.
- Falk, B., (1986)**, “Further evidence on the asymmetric behavior of economic time series over the business cycle”, *Journal of Political Economy*, 94(5), pp. 1096-1109.
- Fan, J., (1992)**, “Design-adaptive nonparametric regression”, *Journal of the American Statistical Association*, 87, pp. 998-1004.
- Fan, J., (1993)**, “Local linear regression smoothers and their minimax efficiencies”, *Ann. Statist.*, 21, pp. 196-216.
- Fan, J., Gasser, T., Gijbels, I., Brockmann, M. et Engel, L., (1993)**, “Local polynomial fitting: a standard for nonparametric regression”, *Inst. Statist. Mimeo Series # 2302*.
- Fan, J., Heckman, N.E. et Wand, M.P., (1995)**, “Local polynomial kernel regression for generalized linear models and quasi-likelihood function”, *Journal of the American Statistical Association*, 90, pp. 141-150.
- Fan, J., Yao, Q. et Tong, H., (1996)**, “Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems”, *Biomtrika*, 83(1), pp. 189-206.
- Farmer, J.D., (1982)**, “Chaotic attractors of an infinite dimensional dynamical system”, *Physica, D.4*, pp. 366-393.

## Bibliographie

- Farmer, R., (1986)**, “Deficits and cycles”, *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 77-88.
- Farmer, J.D. et Sidornovich, V., (1988)**, “Exploiting chaos to predict the future and reduce noise”, In *Evolution, learning and cognition*, eds .Lee, World Scientific Press.
- Farrell, B.F., (1989)**, “Optimal excitation of baroclinic waves”, *J. Atmos. Sci.*, 46, pp. 1193-1206.
- Farrell, B.F. et Ioannou, P.J., (1996)**, “Turbulence suppression by active control”, *Phys. Fluids*, 8, pp. 1257-1268.
- Feigenbaum, M. J., (1978)**, “Quantitative universality for a class of non-linear transformations”, *J. Stat. Phys.* 19, pp. 25-52.
- Filardo, A.J., (1994)**, “Business cycle phases and their transitional dynamics”, *Journal of Business an Economic Statistics*, 12(3), juillet, pp. 299-308.
- Flachaire, E., (2001)**, “Les méthodes du bootstrap dans les modèles de régression ”, *Économie et Prévision*, 142, pp. 183-194.
- Flachaire, E., (2003)**, “Méthodes de simulations”, *Working Paper, Université de Paris , Panthion-Sorbonne*, pp. 69-80.
- Flachaire, E. et Hollard, G., (2007)**, “Model selection in iterative valuation questions”, *Revue d' Économie Politique*, 117(5), pp. 853-865.
- Fletcher, R., (1985)**, “An l1 penalty method for nonlinear constraints”, *Numerical Optimization*, pp. 26-40.
- Fornari, F. et Mele, A., (1997)**, “Asymmetries and non-linearities in economic activity”, *Applied Financial Economics*, 7, pp. 203-206.
- Fouquau, J., Hurlin, C. et Rabaud, I., (2008)**, “The feldstein-horioka puzzle : a panel smooth transition regression approach”, *Economic Modelling* 20, pp. 284-299.
- Frank M.Z. et Stengos, T., (1988)**, “Some evidence concerning macroeconomic chaos”, *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 423-438.
- Frank M.Z. et Stengos, T., (1989)**, “Measuring the strangeness of gold and silver rates of returns”, *Review of Economic Studies*, 56, pp. 553-568.
- Franses, P.H. et van Dijk, D., (2000)**, “Non-linear time series models in empirical finance”, Cambridge: *Cambridge University Press*.



- Freedman, D.A., (1984)**, “On bootstrapping two-stage least-squares estimates in stationary linear models”, *The Annals of Statistics*, *12*, pp.827-842.
- Frisch, R., (1933)**, “Propagation problems and impulse problems in dynamic economics”, in *Economic essays in honor of Gustav Cassel*, London: George Allen and Unwin, pp.171-205.
- Gallant, A.R., (1987)**, “Nonlinear statistical models”, *New York: John Wiley*.
- Gallant, A.R. et Nychka, D.W., (1987)**, “Semi-non-parametric maximum likelihood estimation”, *Econometrica*, *55*, pp. 363-390.
- Galvão, A.B.C., (2002)**, “Can non-linear time series models generate US business cycle asymmetric shape?”, *Economics Letters* *77*, pp. 187-194.
- Gandolfo, G., (1996)**, “Economics dynamics”, *Berlin-New York: Springer-Verlag*.
- García-Ferrer, A. et Bujosa-Brun, M., (2000)**, “Forecasting OECD industrial turning points using unobserved components models with business survey data”, *International Journal of Forecasting*, *16*, pp. 207-227.
- Gençay, R., (1996)**, “A statistical framework for testing chaotic dynamic via Lyapunov exponents”, *Physica D* *89*, pp. 261-266.
- Geweke, J., (1989)**, “Inference and forecasting for chaotic nonlinear time series”, *Techn. Report, Durham*.
- Gilmore, C.G., (1993)**, “A new test for chaos”, *Journal of Economic Behaviour Organisations*, *22*, pp. 209-237.
- van Giersbergen, N.P.A., (1998)**, “Bootstrapping dynamic econometric models”, Ph.D. thesis, University of Amsterdam, Book n° 184 of the Tinbergen Institute Research Series.
- van Giersbergen, N.P.A. et Kiviet, J.F., (2002)**, “How to implement the bootstrap in static or stable dynamic regression”, *Journal of Econometrics*, *108*, pp. 133-156.
- Glendinning, P., (1994)**, “Stability, Instability and chaos: An introduction to the theory of nonlinear differential equations”, *Cambridge Texts in applied mathematics*, *12/Paper*.
- Goga, C., (2005)**, “Réduction de la variance dans les sondages en présence d’information auxiliaire : une approche non paramétrique par splines de régression”, *The Canadian Journal of Statistics*, *33(2)*, pp. 1-18.
- Goga, C., Deville, J.C. et Ruiz-Gazen, A. (2009)**, “Use of functionals in linearization and composite estimation with application to two-sample survey data”, *Biometrika*, *96*, pp. 691-709.

- Goldstein, J.P., (1997)**, “Is the endogenous business cycle dead?”, *Southern Economic Journal*, 63(4), pp. 962-977.
- Gómez, V., (1999)**, “Three equivalent methods for filtering nonstationary time series”, *Journal of Business and Economics Statistics*, 17, pp. 109-116.
- González, A. et Teräsvirta, T., (2008)**, “Modelling autoregressive processes with a shifting mean”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 12, Issue 1, Article 1.
- Gonzalo, J. et Pitarakis, J.Y., (2002)**, “Estimation and model selection based inference in single and multiple threshold models”, *Journal of Econometrics*, pp. 319-352.
- Goodwin, R.M., (1951)**, “The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles”, *Econometrica*, 19, pp. 1-17.
- Goodwin, R.M., (1967)**, “A growth cycle”, In C.H. Feinstein (Ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth: Essays presented to Maurice Dobb*, pp. 54-58, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Goodwin, R.M., (1992)**, “Chaotic economic dynamics”, Oxford, Clarendon Press.
- Goodwin, B.C., Kauffman, S.A. et Murray J.D. (1993)**, “Is morphogenesis inherently robust?”, *J. Theoret. Bio.*
- de Gooijer, J.G. et Kumar, K., (1992)**, “Some recent developments in nonlinear time series modelling, testing and forecasting”, *International Journal of Forecasting*, 8, pp. 135-156.
- Grandmont, J.M., (1985a)**, “On endogenous competitive business cycles”, *Econometrica* 53, pp. 995-1045.
- Grandmont, J.M., (1985b)**, “Cycles concurrentiels endogènes”, *Cahiers du séminaire d'économetrie*, 34, pp. 49-79.
- Grandmont, J.M., (1994)**, “Anticipations et fluctuations endogènes non linéaires”, *Revue d'économie politique*, n° 2/3.
- Grandmont, J.M., (1998)**, “Expectations formation and stability of large socioeconomic systems”, *Econometrica*, 66, pp. 7541-82.
- Grandmont, J.M. et Malgrange, P., (1986)**, “Nonlinear economic dynamics : Introduction on endogenous competitive business cycles”, *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 3-12.
- Grandmont, J.M., Pintus, P. et de Vilder, R., (1998)**, “Capital labor substitution and competitive nonlinear endogenous business cycles”, *Journal of Economic Theory*, 80, pp. 14-59.

- Granger, C.W.J., (1969)**, “Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods”, *Econometrica*, 37, pp. 428-438.
- Granger, C.W.J., (1980)**, “Testing for causality”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2, pp. 329-352.
- Granger, C.W.J., (1989)**, “Stochastic or deterministic nonlinear models? A discussion of the recent literature”, in *Economics, Comm. in N.S.B., Workshop in Edinburg, July*.
- Granger, C.W.J., (1993)**, “Strategies for modelling nonlinear time series relationships”, *Economic Record*, 69, pp. 233-238.
- Granger, C.W.J., (1994)**, “Is chaotic economic theory relevant for economics?”, *Journal of International and Comparative Economics*, 3, pp. 139-145.
- Granger, C.W.J., (2001)**, “Overview of nonlinear macroeconomic models”, *Macroeconomic Dynamics*, 5, pp. 466-481.
- Granger, C.W.J. et Lin, J., (1994)**, “Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models”, *J. Time Ser. Anal.*, 15, pp. 371-384.
- Granger, C.W.J. et Pesaran, M.H., (2000)**, “Economic and statistical measures of forecast accuracy”, *Journal of Forecasting*, 19, pp. 537-560.
- Granger, C.W.J. et Teräsvirta, T., (1993)**, “Modelling nonlinear economic relationships”, *Oxford University Press, New York*.
- Granger, C.W.J., et Teräsvirta, T., (1999)**, “A simple nonlinear time series model with misleading linear properties”, *Economics Letters*, 62, pp. 161-165.
- Granger, C.W.J., Teräsvirta, T. et Anderson, H., (1993)**, “Modelling non-linearity over the business cycle”, in J.H. Stock and M.W. Watson (editors), *New research on business cycle, indicators and forecasting*, Chicago: *Chicago University Press*, pp. 311-325.
- Grasman, J. et Jojanda, J.W., (1994)**, “Co-existence of a limit cycle and an equilibrium in Kaldor’s business cycle model and its consequences”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 24, pp. 369-377.
- Grassberger, P., (1985)**, “Generalisation of the hausdorff dimension of fractal measures”, *Physic Letters*, 107, pp. 101-105.
- Grassberger, P. et Procaccia, I., (1983a)**, “Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signal”, *Physica D*, 28(4), pp. 2591-2593.

- 
- Grassberger, P. et Procaccia, I., (1983b)**, “Measuring the strangeness of strange attractors”, *Physica D*, 9, pp. 189-208.
- Grorud, A. et Talay, D., (1990)**, “Approximation of Lyapunov exponents of nonlinear stochastic differential system”, *Rapport I.N.R.I.A. 1341, Paris*.
- Gray, S.F., (1996)**, “Modelling the conditional distribution of interest rates as a regime switching process”, *Journal of Financial Economics*, 42, pp. 27-62.
- Guay, A. et St-amant, P., (1996)**, “Do mechanical filters provide a good approximation of business cycle”, *Technical Report No.78, Bank of Canada*.
- Guckenheimer, J. et Holmes, P., (1983)**, “Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields”, *Springer-Verlag, New York*.
- Guckenheimer, J., Myers, M. et Sturmfels, B., (1997)**, “Computing Hopf bifurcations”, *S.I.A.M.J.*, 34, pp. 1-21.
- Guégan, D., (1994)**, “Séries chronologiques non linéaires à temps discret ”, *Paris: Economica*.
- Guégan, D., (2005)**, “La persistance dans les marchés financiers ”, *Note de recherche IDHE-MORA, n° 02-2005*.
- Guesnerie, R. et Woodford, M., (1992)**, “Endogenous fluctuations”, in J.J. Laffont, ed. *Advances in Economic Theory, Sixth World Congress, vol. II, Cambridge: Cambridge University Press*.
- Guesnerie, R. et Woodford, M., (1993)**, “Endogenous fluctuations, in advances in economic theory”, (J. Laffont, Ed.), pp. 288-412, *Cambridge University Press, Cambridge, UK*.
- Guidolin, M. et Timmermann, A., (2006)**, “An econometric model of nonlinear dynamics in the joint distribution of stock and bond returns”, *Journal of Applied Econometrics*, 21, pp. 1-22.
- Guo, J.T. et Lansing, K.J., (1998)**, “Indeterminacy and stabilization policy”, *Journal of Economic Theory*, 82(2), pp.481-490.
- Haggan, V. Heravi, S.M. et Priestley, M.B., (1984)**, “A study of application of state dependent models in nonlinear time series analysis”, *Journal of Time Series Analysis*, 5, pp. 69-102.
- Haggan, V. et Ozaki, T. (1981)**, “A study of application of modelling non linear random vibrations using an amplitude dependent autoregressive time series models”, *Biometrika*, 68, pp. 189-196.

- 
- Haken, H., (1983)**, “Synergetics: Non-equilibrium phase transitions and social measurement”, 3rd edition. Berlin: *Springer-Verlag*.
- Hall, P., (1994)**, “Methodology and theory for the bootstrap”, *In Handbook of Econometrics, vol. 4, pp. 2341-2379. Engle, R.F. et McFadden, D.L., (eds), Amsterdam: Elsevier.*
- Hall, R.E. (2005)**, “Separating the business cycle from other economic fluctuations”, *Proceedings, Federal Reserve Bank of Kansas City, issue Aug, pp. 133-179.*
- Hall, S.G. et Mitchell, J., (2007)**, “Combining density forecasts”, *International Journal of Forecasting, 23, pp. 1-13.*
- Hall, P., Wolff, R.C.L. et Yao, Q., (1999)** “Methods for estimating a conditional distribution function”, *Journal of American Statistic Association, 94, pp. 154-163.*
- Hallegatte S., et Ghil, M., (2007)**, “Endogenous business cycles and the economic response to exogenous shocks”, *Fondazine Eni Enrico Mattei, Working Paper N° 20.*
- Hallegatte S., Ghil, M., Dumas, P. et Hourcade, J.C., (2006)**, “Business cycles, bifurcations and chaos in a neoclassical model with investment dynamics”, *Journal of Economic Behavior and Organization, 67(1), pp. 57-77.*
- Hallegatte S., Hourcade, J.C. et Dumas, P., (2006)**, “Why economic dynamics matter in assessing climate change damages: illustration on extreme events”, *Ecological Economics, 62(2), pp. 330-340.*
- Hamilton, J.D., (1989)**, “A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle”, *Econometrica, 57(2), pp. 357-384.*
- Hamilton, J.D., (1990)**, “Analysis of time series subject to changes in regime”, *Journal of Econometrics, vol.45, pp. 39-70.*
- Hamilton, J.D., (1994)**, “Time series analysis”, *Princeton University Press, New Jersey.*
- Hannan, E.J. et Quinn, B.G., (1979)**, “The determination of the order of an autoregression”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 41, pp. 190-195.*
- Hansen, E.R., (1984)**, “Global optimization with data perturbations”, *Computers and Oper. Res., 11, pp. 97-104.*
- Hansen, G., (1985)**, “Indivisible labour and the business cycle”, *Journal of Monetary Economics, 16, pp. 309-325.*

## Bibliographie

- Hansen, E.R., (1987)**, “A globally convergent interval analytic method for computing and bounding real root”, *BIT*, 18, pp. 415-424.
- Hansen, B.E., (1992)**, “Efficient estimation and testing of cointegrating vectors in the presence of deterministic trends”, *Journal of Econometrics*, 53, pp. 87-121.
- Hansen, B.E., (1996a)**, “Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis”, *Econometrica*, 64(2), pp. 413-430.
- Hansen, B.E., (1997a)**, “Inference in TAR models”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2, pp. 1-14.
- Hansen, B.E., (1997b)**, “Approximate asymptotic p-values for structural change tests”, *Journal of Business and Economic Statistics*, pp 60-67.
- Hansen, B.E., (1999)**, “Testing for linearity”, *Journal of Economic Surveys* 13, pp. 551-576.
- Hansen, B.E., (2000)**, “Sample splitting and threshold estimation”, *Econometrica*, 68, pp. 575-603.
- Hansen, B.E., (2002)**, “The new econometrics of structural change: Dating changes in US labor productivity”, *Journal of Economic Perspectives*, 15, pp. 117-128.
- Hansen, P.R., (2005)**, “A test for superior predictive ability”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 23, pp. 365-380.
- Hansen, E.R. et Sengupta, S., (1980)**, “Global constrained optimization using interval analysis”, in *Nickel (ed.)*, pp. 25-47.
- Hansen, E.R. et Sengupta, S., (1981)**, “Bounding solutions of systems of equations using interval analysis”, *BIT*, 21, pp. 203-211.
- Hansen, E.R. et Sengupta, S., (1983)**, “Summary and steps of a global nonlinear constrained optimization algorithm”, *LMSC-D889778, Lockheed Missiles and Space Co., Sunnyvale, California*.
- Härdle, W., (1989)**, “Applied nonparametric regression”, *Cambridge University Press*.
- Hargreaves, G.I., (2002)**, “Interval analysis in MATLAB”, *Numerical analysis report n°. 416, Manchester Centre for Computational Mathematics*.
- Harvey, A.C., (1989)**, “Forecasting, structural time series models and the Kalman filter”, *Cambridge University Press*.

- 
- Harvey, A.C. et Jaeger, A., (1993)**, “Detrending, stylised facts and the business cycle”, *Journal of Applied Econometrics*, vol. 8.
- Harvey, D., Leybourne, S. et Newbold, P., (1997)**, “Testing the equality of prediction mean squared errors”, *International Journal of Forecasting*, 13, pp. 281-291.
- Harvey, A.C., et Streibel, M., (1998)**, “Testing for deterministic versus indeterministic cycles”, *Journal of Time Series Analysis*, 19, pp. 505-529.
- Hassard, B. D., (1986)**, “Numerical evaluation of Hopf bifurcation formulas”, *Chapter 9 in Dynamics of Nonlinear Systems*, V. Hlavacek, Editor, Gordon and Breach.
- Hassard, B.D., (1987)**, “A Code for Hopf bifurcation analysis of autonomous delay differential equations”, Proc. Oscillations, Bifurcation and Chaos, *Canadian Mathematical Society*, pp. 447-463.
- Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D. et Wan, Y.H., (1981)**, “Theory and application of Hopf bifurcation”, *Cambridge University Press, New York*.
- Hasselblatt, B. et Katok, A., (2003)**, “Dynamics : A first course”, *Cambridge University Press, New York*.
- Haug, A.A. et Siklos, P.L., (2006)**, “The behavior of short term interest rates : International evidence of nonlinear adjustment”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 10(4), pp. 1-32.
- He, B.S., Liao, L.Z. et Qian, M.J., (2006)**, “Alternating projection based prediction-correction methods for structured variational inequalities”, *J. Comput. Math*, 24 (6), pp. 693-710.
- He, C. et Sandberg, R., (2006)**, “Dickey-Fuller type of tests against nonlinear dynamic models”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 68, pp. 835-861.
- Hendry, D.F., (1995)**, “Dynamic econometrics (Appendix A5: Numerical optimization methods)”, *Oxford: Oxford University Press*.
- Hicks, J.R., (1950)**, “A contribution to the theory of the trade cycle”, *Oxford: Clarendon Press*.
- Hiemstra, C. et Jones, J.D., (1993)**, “Monte Carlo results for modified version of the Baek and Brock non linear Granger causality test”, *Working Paper, University of Strathclyde and Securities and Exchange Commission*.
- Hiemstra, C. et Jones, J.D., (1994)**, “Testing for linear and non-linear Granger causality in the stock price volume relation”, *Journal of Finance* 49, pp. 1639-1664.

- 
- Higham, N.J., (2002)**, “Accuracy and stability of numerical algorithms”, *SIAM Publication, Philadelphia, 2<sup>nd</sup> edition.*
- Hill, J.B., (2004)**, “LM-Tests for linearity against smooth transition alternatives : A bootstrap simulation”, *Working Papers, 0412, Florida International University.*
- Hinich, M.J., (1982)**, “Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series”, *Journal of Time Series Analysis, 3, pp. 169-176.*
- Hinich, M.J., (1996)**, “Testing for dependence in the input to a linear time series model”, *Journal of Nonparametric Statistics, 6, pp. 205-221.*
- Hjellvik, V. et Tjøstheim, D., (1996)**, “Nonparametric Statistics for testing linearity and serial independence”, *Journal of Nonparametric Statistics, 6, pp. 223-251.*
- Hodrick, R. et Prescott, E., (1980)**, “Post-war us business-cycles: an empirical investigation”, Mimeo, *Carnegie-Mellon University, no.205, U.S.A.*
- Hodrick, R. et Prescott, E., (1997)**, “Post-war us business-cycles: an empirical investigation”, *Journal of Money, Credit and Banking, vol. 29, 1, pp. 1-16.*
- Holt, C. C., (1957)**, “Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages”, *ONR Research Memorandum, Carnegie Institute of Technology 52.*
- Hommes, C.H. et Manzan, S., (2005)**, “Testing for nonlinear structure and chaos in economic time : A comment”, CeNDEF Working Papers pp. 05-14, Universiteit van Amsterdam, Center for Nonlinear Dynamics in Economics and Finance.
- Hommes, C.H. et Manzan, S., (2006)**, “Comments on testing for nonlinear structure and chaos in economic time series”, *Journal of Macroeconomics, 28, pp. 169-174.*
- Hopf. E., (1942)**, “Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differential Systems”, *Berichte Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl., 94, pp. 1-22, et Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl., 95 (1), pp. 3-22.* La traduction en Anglais par Howard., L., et Koeppel., N., (1976), apparu à « The hopf bifurcation and it's applications », Eds. Marsden., J. E., et McCracken., M., Springer-Verlag, Berlin.
- Hors, I., (1995)**, “Des modèles de transition de phase en économie?”, *Revue économique, Vol. 46, No. 3, Les défis économiques actuels: Les éclairages de la recherche: XLIIIe Congrès Annuel de l'Association Française de Science Économique. May, pp. 817-826.*



- 
- Horst, R. et Tuy, H., (1987)**, “On the convergence of global methods in multi-external optimization”, *Journal of Optimization Theory and Appl.*, 54, pp. 253-271.
- Hsieh, D.A., (1991)**, “Chaos and nonlinear dynamics: Applications to financial markets”, *Journal of Finance*, 46, pp. 1839-1877.
- Huh, C., (1998)**, “Forecasting industrial production using models with business cycle asymmetry”, *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, n. 1, pp. 29-41.
- Hülsmann, J.G., (1998)**, “Une théorie générale des cycles d’erreur”, *The Quarterly of Austrian Economics*, Vol.1, N° 4, pp. 1-23.
- Hurvich, C.M. et Tsai, C.L., (1990)**, “Regression and time series model selection in small samples”, *Biometrika*, 76(2), pp. 297-307.
- Hyndman, R.J., (1995)**, “Highest density forecast regions for non normal time series models”, *Journal of Forecasting*, 14, pp. 431-441.
- Hyndman, R.J., (1996)**, “Computing and graphing highest density regions”, *The American Statistician*, 50, pp. 120-126.
- Inoue, A. et Kilian L., (2003)**, “In-sample or out-of-sample tests of predictability? Which one should we use? ”, *Working Paper No. 195, European Central Bank*.
- INS (Plusieurs années)**. Bulletins mensuels de statistique (Indices de production des principaux secteurs industriels base 100 en 1990). Institut National de la Statistique, Ministère du Développement Économique, Tunisie.
- Jakobson, M.V., (1981)**, “Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional map”, *Commun. Math. Phys.* 81, pp. 39-88.
- Jacobsen, H.J., (2000)**, “Endogenous, imperfectly competitive business cycles”, *European Economic Review*, 44(2), pp. 305-336.
- Jansen, E.S. et Teräsvirta, T., (1996)**, “Testing parameter constancy and super exogeneity in econometric equations”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, pp. 735-763.
- Jaulin, L., (2000)**, “Interval constraint propagation with application to bounded error estimation”, *Automatica*, 36, pp. 1547-1552.
- Jaulin, L., (2002)**, “Propagation de contraintes sur les intervalles pour l'estimation ensembliste”, *Numéro spécial de JESA : Identification des systèmes*, 36(3), pp. 383-395.

- 
- Jaulin, L., Kieffer, M., Braems, I. et Walter, E., (2001)**, “Guaranteed nonlinear estimation using constraint propagation on sets”, *International Journal of Control*, 74(18), pp. 1772-1782.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. et Walter, E., (2001)**, “Applied interval analysis with examples in parameter and state estimation”, Robust Control and Robotics, Springer-Verlag, London.
- Jaulin, L. et Walter, E., (1999)**, “Guaranteed bounded error parameter estimation for nonlinear models with uncertain experimental factors”, *Automatica*, 35(5), pp. 849-856.
- Jaulin, L. et Walter, E., (1993a)**, “Guaranteed nonlinear parameter estimation from bounded error data via interval analysis”, *Math. and Comput. in Simulation*, 35, pp. 1923-1937.
- Jaulin, L. et Walter, E., (1993b)**, “Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded error estimation”, *Automatica*, 29(4), pp. 1053-1064.
- Joe, H.E., (1989)**, “Relative entropy measures of multivariate dependence”, *J. Am. Statist. Assoc.*, 84, pp. 157-164.
- Johnsen, R.A., (1991)**, “Loss of stability and emergence of chaos in dynamical systems”, *Journal of Economic Behavior and Organisation*, vol. 16, N° 1 et 2, juillet, pp. 93-113.
- Jovanovic, B., (2006)**, “Asymmetric cycles”, *Review of Economic Studies*, Blackwell Publishing, vol. 73(1), pp. 145-162.
- Juraczko, K., (1999)**, “Testing for asymmetry in economic time series of Czech Republic”, *Hungary and Poland. Department of Economics: University of Victoria*.
- Kahn, J.F., (2008)**, “Où va-t-on? Comment on y va... : Théorie du changement par recombinaison des invariances”, Fayard, Broché: 369 pages.
- Kaldor, N., (1940)**, “A model of the trade cycle”, *Economic Journal*, 50, pp. 78-92.
- Kalecki, M., (1935)**, “A macrodynamic theory of business cycles”, *Econometrica*, 3, pp. 327-344.
- Kalman, R.E., (1960)**, “On a new approach to filtering and prediction problems”, *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, No. 82 (Series D), pp. 35-45.
- Kaneko, K. et Tsuda, I., (2000)**, “Complex Systems: Chaos and Beyond”, *Springer*.
- Kantz, P., (1994)**, “A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of time series”, *Physics Letter A*, 185, pp. 177-187.

---

**Kapetanios, G., Shin, Y. et Snell, A., (2003)**, “Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework”, *Journal of Econometrics*, vol. 112, pp. 79-359.

**Kaplan, N. et Yorke, J., (1978)**, “Chaotic behaviour of multidimensional difference equation”, in *Peitgen and Walther (eds.) Functionnal differential equation and approximation of fixe points*, Springer Verlag.

**Kaufmann, S.A., (1993)**, “The origins of order : Self-organization and selection in evolution”, *New York: Oxford University Press*.

**Kaufmann, S.A., (1995)**, “At home in the universe”, *New York: Oxford University Press*.

**Kauppi, E., Lassila, J. et Teräsvirta, T., (1996)**, “Short-term forecasting of industrial production with business survey data: experience from Finland's great depression 1990-1993”, *International Journal of Forecasting*, 12, pp. 373-381.

**Kearfott, R.B., (1990)**, “Interval arithmetic techniques in the computational solution of nonlinear system of equations: Introduction, examples and comparisons”, in *Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations*, Allgower, E.L., et Georg, K., (eds), vol. 26 of *Lectures in Applied Mathematics*, pp. 183-205. American Mathematical Society, Providence, R.I.

**Kelsey, D., (1988)**, “The economics of chaos or the chaos of economics”, *Oxford Economic Papers*, 40(1), pp. 1-31.

**Keynes, J.M., (1936)**, “The general theory of employment, interest and money”, *London: Macmillan*.

**Khmaladze, E.V., (1981)**, “Martingale approach in the theory of goodness-of-tests”, *Theory of Probability and its Applications*, XXVI, pp. 240-257.

**Kiani, K.M. et Bidarkota, P.V., (2004)**, “On business cycle asymmetries in G7 countries”, *Oxford Bulletin of Economics and Department of Economics, University of Oxford*, vol. 66(3), pp. 333-351.

**Kieffer, M. et Walter, E., (2006)**, “Interval analysis for guaranteed non linear parameter and state estimation”, *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, 11(2), pp. 171-181.

**Kim, M.J. et Yoo J.S., (1995)**, “New index of coincident indicators: A multivariate Markov switching factor model approach”, *Journal of Monetary Economics*, 36, pp. 607-630.

**Kim, M.J. et Yoo, J.S., (1997)**, “Detecting the number of structural breaks”, *Journal of Economics Letters* 57, pp. 145-148.

**Kim, C.J. et Nelson, C.R., (1999b)**, “Friedman’s plucking model of business fluctuations: tests and estimates of permanent and transitory components”, *Journal of Money, Credit and Banking*, *31*, pp. 317-34.

**King, R.G., Plosser, C. I., Stock, J. H. et Watson, M.W., (1991)**, “Stochastic trends and economic fluctuations”, *American Economic Review*, Vol. 81, pp. 819-840.

**Klepper, S. et Graddy, E., (1990)**, “The evolution of new Industries and the determinants of market structure”, The RAND *Journal of Economics*, *21(1)*, pp. 27-44.

**Kočenda, E., (2001)**, “An alternative to the BDS test: Integration across the correlation integral”, *Econometric Reviews*, *20(3)*, pp. 337-351.

**Koenigs, G., (1884)**, “Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles”, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 1*, pp. 3-41.

**Kolev, L.V., (1984)**, “Global constrained optimization via interval analysis technique”, *Proceedings of the International AMSC Conf. Modelling and Simulation, Athens, Vol.1.2*, pp. 175-188.

**Koop G., et le Potter S., (1998)**, “Nonlinearity, structural breaks or outliers in economic time series?”, in W.A Barnett, D.F. Hendry, S. Hylleberg, T. Teräsvirta, D. Tjøstheim and A.H. Würtz (editors), *Nonlinear dynamics*, Cambridge : *Cambridge University Press, to appear.*

**Kuan, C.M., Huang, Y.L. et Tsay, R.S., (2005)**, “An unobserved component model with switching permanent and transitory innovations”, *Journal of Business and Economic Statistics*, *23*, pp. 443-454.

**Kuhn, T.S., (1970)**, “The structure of scientific revolutions”, *Chicago: University of Chicago Press. 2e éd.*

**Kullback, L. et Leibler, R.A., (1951)**, “On information and sufficiency”, *Annals of Mathematical Statistics*, *22*, pp. 79-86.

**Künsch, H.R., (1989)**, “The jackknife and the bootstrap for general stationary observations”, *Annals of Statistics*, *17(3)*, pp. 1217-1241.

**Kurzhanski, A.B. et Varaiya, P., (2004)**, “Ellipsoidal techniques for reachability analysis”, *Springer*, pp. 202-214.

**Kurzhanski, A.B. et Varaiya, P., (2005)**, “Ellipsoidal techniques for hybrid dynamics : The reachability problem”, in *Dayawansa, W., Lindquist, A., Zhou, Y., (eds.), New Directions and*

## Bibliographie

---

*Applications in Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 65, pp. 1150-1167.*

**Kydland, F.E. et Prescott, E.C., (1982),** “Time to build and aggregate fluctuations”, *Econometrica*, 50(6), pp. 1345-1370.

**Kydland, F.E. et Prescott, E.C., (1990),** “Business cycles: Real facts and a monetary myth”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Spring, pp. 3-18.

**Kyrtsov, C. et Serletis, A., (2006),** “Univariate testes for nonlinear structure”, *Journal of Macroeconomics*, 28(1), pp. 154-168.

**Kyrtsov, C. et Vorlow, C., (2009),** “Modelling nonlinear comovements between time series”, *Journal of Macroeconomics*, 31(1), pp. 200-211.

**Lahiri, S.N., (1999),** “Theoretical comparisons of block bootstrap methods”, *Annals of Statistics*, 27, pp. 386-404.

**Lagrange, S., Jaulin, L., Vigneron, V. et Jutten, C., (2008),** “Nonlinear blind parameter estimation”, *IEEE TAC*, 53(4), pp. 834-838.

**Lardic, S. et Mignon, V., (2002),** “Économétrie des séries temporelles macroéconomiques et financières”, *Economica*.

**Laud, P.W. et Ibrahim, J.G., (1995),** “Predictive model selection”, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 57, No. 1, pp. 247-262.

**LeBaron, B., (1994),** “Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A348*, pp. 379-404.

**LeBaron, B., (1997),** “A fast algorithm for the BDS statistic”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2, pp. 53-59.

**Lee, J., (1996),** “On the power of stationary test using optimal bandwidth estimates”, *Economics Letters*, 51(2), pp. 131-137.

**Lee, J. et Strazicich, M.C., (1999a),** “Break point estimation with minimum unit root and spurious rejection of the null”, *Working Paper, University of Central Florida*.

**Lee, J. et Strazicich, M.C., (1999b),** “Minimum LM unit root test”, *University of Central Florida, Faculty Research Paper n° 9932*.

**Lee, J. et Strazicich, M.C., (1999c),** “Minimum unit root test with structural breaks”, *Working Paper, University of Central Florida*.

## Bibliographie

- Lee, J. et Strazicich, M.C., (2001)**, “Break point estimation and spurious rejections with endogenous unit root tests”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 63, pp. 535-558.
- Lee, J. et Strazicich, M.C., (2003)**, “Minimum LM unit root test with two structural breaks”, *Review of Economics and Statistics* 85(4), pp. 1082-1089.
- Lee, J. et Strazicich, M.C., (2004)**, “Minimum LM unit root test with one structural break”, *Working Paper, Department of Economics, Appalachian State University*.
- Lee, T.H., White, H. et Granger, C.W.J., (1993)**, “Testing for neglected nonlinearity in time Series models: a comparison of neural network methods and alternative tests”, *Journal of Econometrics* 56, pp. 269-290.
- Lee, T.H. et Yang, Y., (2006)**, “Bagging binary and quantile predictors for time series”, *Journal of Econometrics*, 135, pp. 465-497.
- Leon, H.L. et Najarian, S., (2003b)**, “Asymmetric Adjustment and Nonlinear Dynamics in Real Exchange Rates ”, *International Monetary Fund, Working Paper, WP/03/159*.
- Leybourne, S., Newbold, P. et Vougas, D., (1998)**, “Unit root and smooth transitions”, *Journal of Time Series*, 19, 1, pp. 83-97.
- Leydesdorff, L. et Van den Besselaar, P., (1994)**, “Evolutionary economics and chaos theory : New directions in technology studies”, London and New York : Pinter.
- Lhomme, O., (1993)**, “Consistency techniques for numeric CSPs”, in *Proc. Int. Conf. Artificial Intelligence, Chambéry, France*, pp. 232-238.
- Li, H. et Maddala, G.S., (1996)**, “Bootstrapping time series models”, *Econometric Reviews*, 15, pp. 115-158.
- Li, T.Y. et Yorke, J.A., (1975)**, “Period three implies chaos”, *The American Mathematical Monthly*, Vol.82, No. 10, pp. 985-992.
- Lin, J.L. et Granger, C.W.J., (1994)**, “Forecasting from nonlinear models in practice”, *Journal of Forecasting*, 13, pp. 1-9.
- Lin, C.F.J. et Teräsvirta, T., (1994)**, “Testing the constancy of regression parameters against continuous structural change”, *Journal of Econometrics*, 62, pp. 211-228.
- Liu, T., Granger, C.W.J. et Heller, W., (1992)**, “Using the Correlation exponent to decide if economic series is chaotic”, *Journal of Applied Econometrics*, 7, pp. 25-29.

## Bibliographie

- Ljung, G. et Box, G., (1979)**, “On a measure of lack of fit in time series models”, *Biometrika*, 66, pp. 265-270.
- Lordon, F., (1991)**, “ Théorie de la croissance : quelques développements récents”, *Revue de l'OFCE*, n°36, pp. 157-211.
- Lordon, F., (1994)**, “Modéliser les fluctuations, le changement structurel et les crises”, *Revue d'économie politique*, vol.104, n°2/3,( mars-juin) , pp. 219-257.
- Lordon, F., (1995)**, “Cycles et chaos dans un modèle hétérodoxe de croissance endogène”, *Revue Economique*, vol.46, n°6, (novembre), pp. 1405-1431.
- Lorenz, E.N., (1963)**, “Deterministic non periodic flow”, *Journal of Atmospheric Science*, 20, pp. 130-141.
- Lorenz, E.N., (1965)**, “A study of the predictability of a 28 variable atmospheric model”, *Tellus*, vol. 17, pp. 321-333.
- Lorenz, E.N., (1969)**, “Three approaches to atmospheric predictability”, *Bulletin of American Methodological Society*, vol. 50, pp. 345-351.
- Lorenz, E.N., (1972)**, “Predictability: Does flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas?”, *Talk Presented at the 1972 Meeting of the American Association of the Advancement of Science*.
- Lorenz, E.N., (1993a)**, “The essence of chaos”, *Seattle: University of Washington Press*.
- Lorenz, H.W., (1993b)**, “Nonlinear dynamical economics and chaotic motion”, *Second revised and enlarged edition, Springer Verlag, Berlin*.
- Lux, T., (1992)**, “A note on the stability of endogenous cycles in Diamond’s model of search and barter ”, *Journal of Economics*, vol. 56(2), pp. 185-196.
- Lucas, R.E., (1976)**, “Econometric policy evaluation: A critique”, *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy*, n°1, pp. 19-46.
- Lucas, R.E., (1977)**, “Understanding business cycles”, *stabilization of the domestic and international economy, Carnegie- Rochester conference series on public policy*, vol.5, pp 7-29, and in: *Brunner and Meltzer (ed)*, pp. 1-24.
- Lumsdaine, R. et Papell, D., (1997)**, “Multiple trend breaks and the unit root hypothesis”, *Review of Economics and Statistics*, 79(2), pp. 212-218.

## Bibliographie

- Luukkonen, R., Saikkonen, P. et Teräsvirta, T., (1988)**, “Testing linearity against smooth transition autoregressive models”, *Biometrika*, 75(3), pp. 491-499.
- Luukkonen, R. et Teräsvirta, T., (1991)**, “Introduction to multiple time series analysis”, *Berlin: Springer Verlag*.
- Luukkonen, R. et Teräsvirta, T., (1992)**, “Testing Linearity of economic time series against cyclical asymmetry”, *Annales d’Economie et de Statistiques*, n°20/21, pp. 125-142.
- Lundbergh, S. et Teräsvirta, T., (2002)**, “Forecasting with smooth transition autoregressive models”, A Companion to Economic Forecasting, edited by M.P. Clements and D.F. Hendry, Chapter 21, Blackwell.
- Lundbergh, S., Teräsvirta, T. et van Dijk, D., (2003)**, “Time-varying smooth transition autoregressive models”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 21, pp. 104-121.
- Lux, T. et Gemany, B., (1992)**, “A note on the stability of endogenous cycle in Diamond's model of search and barter”, *Journal of Economics*, 56(2), pp. 185-196.
- Lyubich, M., (1997)**, “Dynamics of quadratic polynomials”, *I, II. Acta. Math.* 178, N° 2, pp. 185-297.
- Lyubich, M., (2002)**, “Almost every real quadratic map is either regular or stochastic”, *Ann. Math. (2)* 156, N° 1, pp. 1-78.
- Mak, M. et Cai, M., (1989)**, “Local barotropic instability”, *J. Atmos. Sci.*, 46, pp. 3289-3311.
- Maksarov, D.G., Norton, J.P., (2002)**, “Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximation”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 16, pp. 411-434.
- Mandelbrot, B., (1963)**, “The variation of certain speculative prices”, *Journal of Business* Vol. 36, No. 4, pp. 394-419.
- Marcellino, M., (2002)**, “Instability and non-linearity in the EMU”, *Discussion Paper No. 3312, Centre for Economic Policy Research*.
- Marcil, I., (1994)**, “Transformations économiques et irréversibilités : Le chaos questionne l'économie”, Montréal: Université de Montréal, Université du Québec à Montréal, Groupe de recherche et d'étude sur les transformations sociales et économiques, *Cahiers du GRÉTSÉ*, n° 16.



**Marwan, N. et Kurths, J., (1987)**, “Nonlinear analysis of bivariate data with cross recurrence plots”, *Physics Letters A*, 302(5-6), pp. 299-307.

**Marwan, N., Wessel, N., Meyerfeldt, U., Schirdewan, A. et Kurths, J., (2002)**, “Recurrence plot based measures of complexity and its application to heart rate variability data”, *Physical Review E*, 66(2), 026702.

**Marx, K., (1967b)**, “Capital: A Critique of Political Economy”, *Vol.3, The Process of Capitalists Production as a Whole New York: International Publishers.*

**Mas-Colell, A., (1986)**, “Notes on price and quantity tâtonnement dynamics”, in Hugo F. Sonnenschein (ed): models of *Economic Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, pp. 49-68.*

**McCaffrey, D., Ellner, S., Gallant, A.R. et Nychka, D., (1992)**, “Estimating the Lyapunov exponents of a chaotic system with nonparametric”, *Journal of the American Statistical Association*, 87, pp. 682-695.

**McCallum, B.T., (1986)**, “On 'real' and 'sticky price' theories of the business cycle”, *Journal of Money, Credit, and Banking* 18(3), (November), pp. 397-414.

**Mcguire, G., Azar, N.B. et Shelhamer, M., (1997)**, “Recurrence matrices and the preservation of dynamical properties”, *Physics Letters A*, pp. 237, 43-47.

**McQueen, G. et Thorley, S., (1993)**, “Asymmetric business cycle turning points”, *Journal of Monetary Economics*, 31(3), pp. 341-362.

**McSharry, P.E. et Smith, L.A., (1999)**, “Better nonlinear models from noisy data : Attractors with Maximum Likelihood”, *Physica Review Lettres*, 83(21), pp. 4285-4288.

**Medhioub, I., (2007)**, “Asymétrie des cycles économiques et changement de régimes : Cas de la Tunisie”, *L'Actualité économique, Volume 83, numéro 4, pp. 529-553.*

**Medio, A. et Gallo, G., (1992)**, “Chaotic dynamics : Theory and applications to economics”, *Cambridge University Press.*

**Milanese, M., Norton, J.P., Piet-Lahanier, H. et Walter, E., (1996)**, “Bounding approaches to system identification”, *New York, Plenum Press Edition.*

**Mills, C.T., (1995a)**, “Business cycle asymmetries and nonlinearities in U.K. macroeconomic time series”, *Ricerche Economiche*, 49, pp. 97-124.

**Mills, J.A. et Prasad, K., (1992)**, “A comparison of model selection criteria”, *Econometric Reviews*, 11, pp. 201-233.

## Bibliographie

- Mirowski, P., (1990)**, “From Mandelbrot to chaos in economic theory”, *Southern Economic Journal*, 57, pp. 289-307.
- Mitchell, W.C., (1927)**, “Business cycles: The problem and its setting”, *New York: National Bureau of Economic Research*.
- Mitchell, J. et Hall, S.G., (2005)**, “Evaluating, comparing and combining density forecasts using the KLIC with an application to the Bank of England and NIESR fan charts of inflation”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67, pp. 995-1033.
- Mittnik, S. et Niu, Z., (1994)**, “Asymmetries in business cycles: econometric techniques and empirical evidence”, in *Business cycles: Theory and empirical methods*, ed. Willi Semmler, Boston: Kluwer, pp. 331-350.
- Mizrach, B., (2008)**, “Modelling nonlinear co-movements between time series: A comment”, *Journal of Macroeconomics* 31, pp. 212-215.
- Monique, F., (1981)**, “L'équilibre économique général transitif et intransitif : Problèmes d'existence”, *Editions du CNRS, Paris*.
- Montanari, G.E. et Ranalli, M.G., (2005)**, “Nonparametric model calibration estimation in survey sampling”, *Journal of the American Statistical Association*, vol 100, pp. 1429-1442.
- Moore, R.E., (1966)**, “Interval analysis”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Moore, R.E., (1979)**, “Methods and applications of Interval Analysis”, *SIAM, Philadelphia, PA*.
- Moore, R.E., Kearfott, R.B. et Cloud, M.J., (2009)**, “Introduction to interval analysis”, *Philadelphia, PA: SIAM Press*.
- Moore, R.E. et Ratschek, H., (1988)**, “Inclusion function and global optimization II”, *Mathematical Programming*, vol. 41, n°3, pp. 341-356.
- Morgan M.S. et Morrison M., (1999)**, “Learning from models”, in *Morgan et Morrison*, pp. 347-388.
- Muñoz-Cobo, J.L. et Verdú, G., (1991)**, “Application of Hopf bifurcation theory and variational methods to the study of limit cycles in boiling water reactors”, *Ann. Nucl. Energy*, 18, 5, pp. 269-302.
- Nadaraya, E., (1964)**, “On estimating regression”, *Theory of probability and its applications*, 10, pp. 186-217.

- Nataraj, P.S.V. et Barve, J.J., (2003)**, “Reliable and accurate algorithm to compute the limit cycle locus for uncertain nonlinear system”, *IEEE Proceeding Control Theory and Applications*, 150(5), pp. 457-466.
- Nataraj, P.S.V. et Barve, J.J., (2005)**, “Limit cycle computation for describing function approximable nonlinear systems with box-constrained parametric uncertainties”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(10), pp. 437-457.
- Nayeri M., Liu M.S., Deller J.R., (1994)**, “Do interpretable optimal bounding ellipsoid algorithms converge? Part I- The long awaited set-convergence proof”, *SYSID'94, Copenhagen, Denmark*, pp. 389-394.
- Neftçi, S.N., (1984)**, “Are economic time-series asymmetric over the business-cycle?”, *Journal of Political Economy*, 92(2), pp. 307-328.
- Nelson, R.R. et Winter, S.G., (1982)**, “An evolutionary theory of economic change”, Cambridge, MA: *Harvard University Press*.
- Neumaier, A., (2004)**, “Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction”, *Acta Numerica*.
- Newhouse, S., Ruelle, D. et Takens, F., (1978)**, “Occurrence of strange axiom a attractors near quasi periodic flows on  $tm\ m > 3$ ”, *Communications in Mathematical Physics*, 64.
- Ng, S. et Perron, P., (1995)**, “Unit root tests in ARMA models with data dependent methods for selection of the truncation lag ”, *Journal of the American Statistical Association*, 90(429), pp. 268-281.
- Nicolis, G. et Prigogine I., (1977)**, “Self-organization in non-equilibrium systems”, *Wiley, New York*.
- Nishimura, K., Takahashi, L., (1992)**, “Factor intensity and Hopf bifurcation”, *in Feichtinger, G. (eds), Dynamic Economic Models and Optimal Control*, pp. 135-149.
- Norton, J.P., (1987)**, “Identification and application of bounded parameter models”, *Automatica*, 23(4), pp. 497-507.
- Norton, J.P., (1989)**, “Structure identification of parameter bounding models by use of noise structure bounds”, *International Journal of control*, 50(2), pp. 839-649.
- Nunes, L.C., (2004)**, “LM-type tests for a unit root allowing for a break in trend”, *Australasian Meeting of the Econometric Society, ESAM 2004, Melbourne, Australia*.

## Bibliographie

- 
- Nunes, L.C, Newbold, P. et Kuan, C., (1997)**, “Testing for Unit Roots with Breaks: Evidence on the Great Crash and the Unit Root Hypothesis Reconsidered”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59, pp. 435-448.
- Nychka, D., Ellner, S., McCaffrey, D. et Gallant, A.R., (1992)**, “Finding chaos in noisy systems”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 54, pp. 399-426.
- Öcal, N., (1995)**, “Nonlinear models for UK macroeconomic time series.” *Discussion paper series no. 9526, School of Economic Studies, University of Manchester*.
- Öcal, N. et Osborn, D.N., (2000)**, “Business cycle nonlinearities in UK consumption and production”, *Journal of Applied Econometrics*, vol. 15, pp. 27-43.
- Oseledec, V., (1968)**, “A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems”, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 19, pp. 197-231.
- Ott, E., Sauer, T. et Yorke, J.A., (1994)**, “Coping with chaos”, *Wiley, New York*.
- Ozaki, T., (1980)**, “Nonlinear time series models of nonlinear random vibrations”, *J. Appl. Prob.* 17, pp. 84-93.
- Ozaki, T., (1982)**, “The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using nonlinear time series models”, *J.T.S.A.* 3, pp. 29-41.
- Okazaki, H., Okazaki, C., Honda, H. et Nakano, H., (2005)**, “Rigorous verification of formal chaos produced by one dimensional discrete dynamical system with use interval arithmetic”, *J.C.S.* 2, pp. 1597-1600.
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. et Shaw, R.S., (1980)**, “Geometry from time series”, *Physica Review Letters*, 45, pp. 712-716.
- Papamichail, I. et Adjiman, C.S., (2002)**, “A rigorous global optimization algorithm for problems with ordinary differential equations”, *Journal of Global Optimization*, 24(1), pp.1-33.
- Park, J.Y. et Phillips, P.C.B., (1988)**, “Statistical inference in regressions with integrated processes: Part I”, *Econometric Theory*, 4, pp. 486-498.
- Patton, A.J. et Timmermann, A., (2002)**, “Properties of optimal forecasts”, *Manuscript, University of California, San Diego*.
- Patton, A.J. et Timmermann, A., (2007)**, “Testing Forecast Optimality Under Unknown Loss”, *Journal of the American Statistical Association*, Volume 102, Number 480, pp. 1172- 1184.

## Bibliographie

- Pedersen, T.M., (2001)**, “The Hodrick–Prescott filter, the slutzky effect, and the distortionary effect of filters”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, pp. 1081-1101.
- Peel, D.A., et Speight, A.E.H., (1996)**, “Is the US business cycle asymmetric? Some further evidence”, *Applied Economics*, 28, pp. 405-415.
- Peixoto, M., (1962)**, “Structural stability on tow-dimensionaml anifolds”, *Topolog, Vol. 1, pp. 101-120.*
- Perraudin, C., (1995)**, “La dynamique asymétrique de l’emploi au cours du cycle”, *Économie et Prévision*, 4.
- Perraudin, C., (2002)**, “La prise en compte de rupture dans l'évolution des variables économiques : Les modèles à changement de régimes”, Document de travail, S.A.M.O.S.-M.A.T.I.S.S.E. et E.U.R.E.Qua, Université de Paris I.
- Perron, P., (1989)**, “The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis,” *Econometrica*, 57(6), pp. 1361-1401.
- Perron, P., (1997)**, “Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic\_variables,” *Journal of Econometrics* 80(2), pp. 355-385.
- Perron, P. et Vogelsang, T.J. (1992)**, “Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity”, *Journal of Business and Economic Statistics* 10, pp. 301-320.
- Pesaran, M.H. et Potter, S.M., (1992)**, “Nonlinear dynamics and econometrics : An introduction”, *Journal of Applied Econometrics*, 7, S1-S7.
- Pierce, D.A. et Haugh, L.D., (1977)**, “Causality in temporal system: Characterizations and survey”, *Journal of Econometrics*, 5, pp. 265-293.
- Pintus, P. et Cazzavillan, G., (2006)**, “Endogenous business cycles and dynamic inefficiency”, *International Journal of Economic Theory*, volume 2, issue 3-4, september-december , pp. 279-294.
- Pintus, P., Kozlovski, O.S., van Strien, S. et de Vilder, R., (2006)**, “Business cycle models and the dangers of linearizing ”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, volume 128, number 2, february , pp. 333-53.
- Pintus, P., van Sands, A.D. et de Vilder, R., (2000)**, “On the transition from local regular to global irregular fluctuations”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, volume 24, number 2, february, pp. 247-272.

## Bibliographie

- 
- Plosser, C.I., (1989)**, “Understanding real business cycle”, *American Economic Association*, 3(3), pp. 51-77.
- Pohjola, M.T., (1981)**, “Stable, cyclic, and chaotic growth: The dynamics of a discrete time version of Goodwin’s growth cycle”, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 41, pp. 27-38.
- Poincaré, H., (1886)**, “Sur les courbes définies par une équation différentielle”, *J. Math. Pures et Appl., Série IV, 2, pp. 151-217.*
- Poincaré, H., (1890)**, “Sur les équations de la dynamique et le problème de trois corps”, *Acta Mathematica*, 13, pp. 1-270.
- Poincaré, H., (1908)**, “Sciences et méthode”, *Paris, Ernest Flammarion.*
- Pötscher, B.M. et Prucha, I.V., (1997)**, “Dynamic nonlinear econometric models”, *Asyptotic Theory, Berlin: Springer-Verlag.*
- Potter, S.M., (1994)**, “Asymmetric economic propagation mechanisms”, in W. Smmler (editor), *Business Cycles: Theory and Empirical Methods, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 313-330.*
- Potter, S.M., (1999)**, “Nonlinear time series modelling : An introduction”, *Journal of Economics Survey*, 13(5), pp. 505-528.
- Powell, M.J.D., (1987)**, “Methods for nonlinear constraints in optimization”, *in Iserles- Powell, 38, pp. 325-358.*
- Priestley, M.B., (1980)**, “State dependent models : A general approach to nonlinear time series analysis”, *J.T.S.A. 1, pp. 47-61.*
- Priestley, M.B., (1989)**, “Non-linear and non-stationary time series analysis”, *London: Academic Press.*
- Prigogine, I., (1986)**, “Nouvelles perspectives de la complexité, sciences et pratiques de la complexité”, *dans Actes du colloque de Montpellier, La Documentation française, pp. 129-141.*
- Proietti, T., (1998)**, “Characterizing asymmetries in business cycles using smooth transition structural time series models”, *Journal of Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 3(3), pp. 141-156.
- Puu, T., (2003)**, “Attractors, bifurcations and chaos: Nonlinear phenomena in economics”, 2nd edition. Heidelberg: Springer-Verlag.

## Bibliographie

- Puu, T. et Sushko, I., (2004)**, “A business cycle model with cubic nonlinearity”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, pp. 597-612.
- Qin, D. et Lu, M., (1998)**, “Dynamic structure of disequilibrium models”, *Economics of Planning*, 31(1), pp. 15-27.
- Quandt, R., (1983)**, “Computational problems and methods”, in Z. Giliches and M.D. Intriligator (editors), *Handbook of Econometrics I*, Amsterdam: Elsevier Science, pp. 699-746.
- Radunskaya, A.E., (1994)**, “Comparing random and deterministic time series”, *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 765-774.
- Ramey, J.B., (1969)**, “Tests for specification errors in classical linear least squares regression analysis”, *J. Roy. Stat. Soc. B*, 31(2), pp. 350-371.
- Ramsey, J.B. et Rothman, P., (1996)**, “Time irreversibility and business cycle asymmetry”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28(1), (février), pp. 1-21.
- Ramsey, J.B., Sayers, C. et Rathman, P., (1990)**, “Bais in dimension”, *International Economic Review*, 31, pp. 991-1020.
- Rao, A.K. et Huang, Y.F., (1990)**, “Recent developments in optimal bounding ellipsoidal parameter estimation”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 32(5-6), pp.515-526.
- Rappoport, A. et Gouzé, J.L., (2002)**, “Parallelotopic and practical observers for nonlinear uncertain systems”, *International Journal of Control*, 76(3), pp. 237-251.
- Rappoport, P. et Richelin, L., (1989)**, “Segmented trends and non-stationary time series”, *Economic Journal*, 99, pp. 168-177.
- Ratschek, H., (1985)**, “Inclusion function and global optimization”, *Mathematical Programming*, vol. 33, pp. 300-317.
- Ratschek, H. et Rokne, J., (1988)**, “New computer methods for global optimization”, *John Wiley, New York*.
- Rauh, A. et Hofer, E.P., (2007)**, “Interval methods for optimal control”, In G. Buttazzo and A. Frediani, editors, *Proc. of the 47th Workshop on Variational Analysis and Aerospace Engineering, Erice, Italy, 2007. Springer-Verlag, 2007*.
- Rauh, A., Kletting, M., Aschemann, H. et Hofer, E.P., (2006)**, “Interval methods for simulation of dynamical systems with state dependent switching characteristics”, in *Proceeding of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 355-360.

## Bibliographie

- 
- Ravn, M.O. et Uhlig, H., (2002)**, “On adjusting the HP-Filter for the frequency of observations”, *The Review of Economics and Statistics*, 85(2), pp. 235-243.
- Raybaut, A., (2002)**, “La théorie des cycles endogènes d'Albert Aftalion”, Paris : L'Harmattan.
- Rinnooy Kan, A.H.G. et Timmer, G.T., (1986)**, “Global optimization”, *Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam*.
- Rissanen, J., (1978)**, “Modeling by shortest data description”, *Automatica*, 14(5), pp. 465-471.
- Rizwan-uddin, (2006)**, “Sub- and supercritical bifurcation and turning points in a simple BWR model”, *Nuclear Engineering and Design*, 236, pp. 267-283.
- Ronchetti, (1985)**, “Robust model selection in regression”, *Statistical Probabilities Lettres*, 3, pp. 21-23.
- Rotemberg, J.J. et Woodford, M., (1996)**, “Real business cycle models and the forecastable movements in output, hours and consumption”, *American Economic Review*, 86(1), pp. 71-89.
- Rothman, P., (1991)**, “Further evidence on the asymmetric behavior of unemployment rates over the business cycle”, *Journal of Macroeconomics*, 13(2), pp. 291-298.
- Rosen, R., (1991)**, “Life itself! A comprehensive enquire into the nature, origin and fabrication of life”, *New York, Columbia University Press*.
- Ruelle, D., (1990)**, “Deterministic chaos: The science and the fiction”, *Proc. R. Soc. London*, A.427(1873), pp. 241-248.
- Ruelle, D. et Takens, F., (1971)**, “On the nature of turbulence”, *Communications of Mathematical Physics*, 20, pp. 167-192.
- Rump, S.M., (2005)**, “High precision evaluation of nonlinear functions”, *in Proceedings of 2005 International Symposium on Nonlinear Theory and its Application, Bruge, Belgium, October 18-21*, pp. 733-736.
- Russell, D., Hanson, J. et Ott, E., (1980)**, “Dimensionality and Luapunov Numbers of strange attractors”, *Physical Review Letters*, 45, pp. 1175-1178.
- Saari, D.G., (1991)**, “Erratic behaviour in economic models”, *Journal of Economic Behavior and Organisation*, 16(1 et 2), juillet, pp. 3-35.
- Sachs, J., Zinnes, C. et Eilat, Y., (2001)**, “Patterns and determinants of economic reform in transition economies : 1900-1998”, CAER II *Discussion paper*, 61, *Harvard Institute for International Development. Cambridge, MA*.



- Saikkonen, P. et Luukkonen, R., (1988)**, “Lagrange multiplier tests for testing non linearities in time series models”, *Scandinavian Journal of Statistics*, 15, pp. 55-68.
- Samuelson, P., (1939a)**, “Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration”, *Review of Economic Statistics*, 21, pp. 75-78.
- Samuelson, P., (1939b)**, “A synthesis of the principle of acceleration and the multiplier”, *Journal of Political Economy*, 47, pp. 786-797.
- San Martini, A. et Spezzaferrri, F., (1984)**, “A predictive model selection criterion”, *Journal of the Royal Society, Ser. B*, 46, pp. 296-303.
- Sargent, T.J., (1993)**, “Bounded rationality in macroeconomics”, *Oxford: Clarendon Press*.
- Šarkovskii, A.N., (1964)**, “Coexistence of cycle of a continuous map of a line into itself”, *Ukrain; Math. Zh.*, 16, pp. 61-71.
- Sarno, L. et Valente, G., (2004)**, “Comparing the accuracy of density forecasts from competing models”, *Journal of Forecasting*, 23, pp. 541-557.
- Sasakura, K., (1995)**, “A new perspective on the generation mechanism of the business cycle”, presented in the 1995 annual meeting of the Japan association of Economics and Econometrics.
- Scheinkman, J.A., (1990)**, “Nonlinearities in economic dynamics”, *Economic Journal*, Vol. 100, No. 400, pp. 33-48.
- Schmidt, P. et Phillips, P.C.B., (1992)**, “LM tests for a unit root in the presence of deterministic trends”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), pp. 257-287.
- Schmitt-Grohé, S., (2000)**, “Endogenous business cycles and the dynamics of output, hours, and consumption”, *American Economic Review* vol. 90, pp. 1136-1159.
- Schumpeter, J.A. (1939)**, “Business cycles: A theoretical, historical, and statistical analysis of the capitalist process”, *New York and London: McGraw-Hill*.
- Schumpeter, J.A., (1954)**, “Histoire de l'analyse économique”, *Gallimard*.
- Schwarz, G., (1978)**, “Estimating the dimension of a model”, *The Annals of Statistics*, 6(2), pp. 461-464.
- Sedaghat, H., (1997)**, “A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics”, *Nonlinear Analysis, Theory, Models & Applications*, Vol. 29, No.5, pp. 593-603.

## Bibliographie

- Seegmuller, T., (2003)**, “Concurrence imparfaite, variabilité du taux de marge et fluctuations endogènes”, *Recherche Economique de Louvain*, 69, pp. 371-386.
- Sen, A., (2003)**, “On unit-root tests when the alternative is a trend-break stationary process”, *Journal of Business and Economic Statistics* 21, pp. 174-184.
- Sensier, M., (1996)**, “Inventories and asymmetric business cycle fluctuations in the UK”, *Unpublished Manuscript, University of Oxford*.
- Shi, P. et Tsai, C.L., (1998)**, “A note on the unification of the akaike information criterion”, *J.R. Statist Soc.B.* 60, pp. 551-558.
- Sichel, D.E., (1989)**, “Are business cycle asymmetry? A correction”, *Journal of Political Economy*, 97(5), pp. 1255-1260.
- Sichel, D.E., (1993)**, “Business cycle asymmetry: A deeper look”, *Economic Inquiry*, 31(2), pp. 224-236.
- Silverberg, G. et Lehnert, D., (1993)**, “Long waves and evolutionary chaos in a simple Schumpeterian model of embodied technical change”, *Structural change and Economic Dynamics*, 4, pp. 9-37.
- Silverstovs, B., (2000)**, “The bi-parameter smooth transition autoregressive model”, Working Paper n°16, *University of Aarhus-Denmark*.
- Silverstovs, B. et van Dijk, D., (2003)**, “Forecasting industrial production with linear, nonlinear, and structural change models”, *Econometric Institute Report EI 2003-16, Erasmus University Rotterdam*.
- Silvennoinen, A. et Terasvirta, T., (2005)**, “Multivariate autoregressive conditional heteroskedasticity with smooth transitions in conditional correlation”, *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 577*.
- Simon, H.A., (1982)**, “Models of bounded rationality and other topics in economics”, *Collected Papers, volume 2. The MIT press*.
- Simpson, P.W., Osborn, D.R. et Sensier, M., (2001)**, “Forecasting UK industrial production over the business cycle”, *Journal of Forecasting*, 20, pp. 405-424.
- Sims, C.A., (1972)**, “Money, income and causality”, *American Economic Review*, 62, pp. 540-552.
- Sims, C.A., (1994)**, “Review: [untitled]”, *Journal of Economic Literature*, Vol.32, No.4, pp.

---

1885-1888.

**Singer, D., (1978)**, “Stable orbits and bifurcation of maps of the interval”, *SIAM journal of Applied Mathematics* 35, 260-267.

**Skalin, J., (1998)**, “Testing linearity against smooth transition autoregression using a parametric bootstrap”, *Stockholm School of Economics, Working Paper Series in Economics and Finance, No. 276.*

**Skalin, J. et Teräsvirta, T., (1998)**, “Moving equilibria and asymmetries in unemployment rates”, *Working Paper Series in Economics and Finance, n°. 262, Stockholm School of Economics.*

**Skalin, J. et Teräsvirta, T., (1999)**, “Another look at Swedish business cycles”, *Journal of Applied Econometrics*, 14, 359-378.

**Skalin, J. et Teräsvirta, T., (2002)**, “Modelling asymmetries and moving equilibria in unemployment rates”, *Macroeconomic Dynamics*, 6(2), pp. 202-241.

**Slutsky, E., (1929)**, “The summation of random causes as the source of cyclic process”, *Econometrica*, 5, 105-146.

**Smale, S., (1980)**, “The mathematics of time : Essays on dynamical systems”, *Economic Processes and Related Topics, Springer Verlag.*

**Smith, L.A., (1995)**, “Locally optimized prediction of nonlinear system : Stochastic and deterministic”, in *Tong, H., editor, chaos and forecasting, vol. 2, of Nonlinear time series and chaos, London, World Scientific, pp. 87-108.*

**Solé, R. et Goodwin, B., (2000)**, “Signs of life”, *Basic Books.*

**Sollis, R., Leybourne, S. et Newbold, P., (1999)**, “Unit root and asymmetric smooth transitions”, *Journal of Time Series*, 20, 6, pp. 671-677.

**Sordi, S., (1996)**, “Dynamical systems in macroeconomics : Alternative approaches to the analysis of macroeconomic fluctuation”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 10(1-2), pp. 261-267.

**Speight, A.E.H. et McMillan, D.G., (1998)**, “Testing for asymmetries in UK macroeconomic time series”, *Scottish Journal of Political Economy*, 45, pp. 158-170.

**Stewart, I. (1997)**, “Does god play dice? The new mathematics of chaos”, Second Edition. London: Penguin Books.

## Bibliographie

**Štefan, P., (1977)**, “A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line”, *Comm. Math. Phys.*, 54 (3), pp. 237-248.

**Stock, J.H. et Watson, M.W., (1996)**, “Evidence on structural instability in macro-economic time series relations”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, pp. 11-30.

**Stock, J.H. et Watson, M.W., (1998)**, “Business cycle fluctuations in U.S. macroeconomic time series”, *NBER, Working Paper 6528, April*.

**Stock, J.H. et Watson, M.W., (1999)**, “A comparison of linear and nonlinear univariate models for forecasting macroeconomic time series”, ch. 1 in cointegration, causality, and forecasting, a festschrift in honor of C.W.J. Granger edited by R.F. Engle and H. White, *Oxford University Press: London*, pp. 1-44.

**Stock, J.H. et Watson, M.W., (2002a)**, “Has the business cycle changed and why?”, *NBER Macroeconomics Annual*, pp.159-218.

**Stock, J.H. et Watson, M.W., (2002b)**, “Forecasting using principal components from a large number of predictors”, *Journal of the American Statistical Association* 97, pp. 1167-1179.

**Stock, J.H. et Watson M.W., (2002c)**, “Forecasting using many predictors”, *Handbook of Economic Forecasting Volume 1*, edited by G. Elliott, C.W.J. Granger, and A. Timmermann, *Amsterdam: Elsevier*.

**Strikholm, B. et Teräsvirta, T., (2005)**, “Determining the number of regimes in a threshold autoregressive model using smooth transition autoregressions”, *Working Paper, 578, Stockholm School of Economics*.

**Subba Rao, T. et Gabr, M., (1980)**, “A test for linearity of stationary time series”, *Dynamical Systems and Turbulence*, eds., D.A. Rand and L.S. Young, *Journal of Time Series Analysis*, 1, pp. 145-158.

**Sugihara, G. et May, R.M., (1990)**, “Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series”, *Nature*, 344, pp. 734-741.

**Sushko, I., Wegener, M., Westerhoff, F. et Zaklan, G., (2009)**, “Endogenous business cycle dynamics within the inventory model of Metzler : Adding an inventory floor”, *Nonlinear Dynamics in Psychology and Life Sciences*, 13(2), pp. 225-235.

- 
- Takana, G., Sanjuan, M.A.F., Aihara, K., (2005)**, “Crisis-induced intermittency in two coupled chaotic maps: Towards understanding chaotic itinerancy”, *Physical Review E*, vol. 71, 016219, N. 192, pp. 1-11.
- Takens, F., (1981)**, “Detecting strange attractors in turbulence”, Dynamical Systems and Turbulence, eds., D.A. Rand and L.S. Young, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 898, pp. 366-381.
- Taylor, M.P., Peel, D.A. et Sarno, L., (2001)**, “Nonlinear mean reversion in real exchange rates : Toward a solution to the purchasing power parity puzzles”, *International Economic Review*, 42(4), pp. 1015-1042.
- Teräsvirta, T., (1994a)**, “Specification, estimation and evaluation of smooth transition autoregressive models”, *Journal of the American Statistical Association*, 89(425), pp. 208-218.
- Teräsvirta, T., (1994b)**, “Testing linearity and modelling nonlinear time series”, *Kybernetika*, 30, pp. 319-330.
- Teräsvirta, T., (1995)**, “Modelling nonlinearity in US gross national product 1889-1987”, *Empirical Economics*, 20, pp. 577-598.
- Teräsvirta, T., (1996a)**, “Power properties of linearity tests for time series”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 1, pp. 3-10.
- Teräsvirta, T., (1996b)**, “Linearity testing and nonlinear modelling of economic time series”, in: W.A. Barnett, A.P. Kirman and M. Salmon, eds. Nonlinear dynamics in economics, pp. 281-293. Cambridge: Cambridge University Press.
- Teräsvirta, T., (1998)**, “Modelling economic relationships with smooth transition regressions, in A. Ullah and D.E.A. Giles”, eds. *Handbook of Applied Economic Statistics. New York: Dekker*, pp. 507-552.
- Teräsvirta, T., (2004)**, “Nonlinear smooth transition modeling”, in H. Lütkepohl and M. Kräzig, eds. Applied Time Series Econometrics. Cambridge: *Cambridge University Press*, pp. 222-242.
- Teräsvirta, T., (2006)**, “Forecasting economic variables with nonlinear models”, in G. Elliott, C.W.J. Granger and A. Timmermann, eds. Handbook of Economic Forecasting, *Amsterdam: Elsevier.*, Vol. 1, pp. 413-455.

**Teräsvirta, T. et Anderson, H.M., (1992)**, “Characterising nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models”, *Journal of Applied Econometrics*, 7, pp. 208-218.

**Teräsvirta, T., van Dijk, D. et Médeiros, M.C., (2005)**, “Linear models, smooth transition autoregressions, and neural networks for forecasting macroeconomic time series: A re-examination”, *International Journal of Forecasting, Elsevier*, vol.21(4), pp. 755-774.

**Teräsvirta, T. et Granger C.W.J., (1996)**, “Modelling nonlinear economic relationships”, *Oxford University press: New York*.

**Teräsvirta, T. et Lim, K.S., (1980)**, “Threshold autoregression, limit cycles and data”, *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, 42, pp.245-292.

**Teräsvirta, T., Lin, C.F. et Granger, C.W.J., (1993)**, “Power of the neural network linearity test”, *Journal of Time Series Analysis*, 14, pp. 209-220.

**Teräsvirta, T., Tjøstheim, D. et Granger, C.W.J., (1994)**, “Aspects of modelling nonlinear time series”, in R.F. Engle and D.L. McFadden (editors), *Handbook of econometrics, Vol. 4*, pp. 2919-2957, *Amsterdam: Elsevier Science*.

**Teräsvirta, T., Tjøstheim, T. et Granger, C.W.J., (2009)**, “Nonlinear econometric modeling”, Oxford University Press, forthcoming.

**Thom, R., (1972)**, “Stabilité structurelle et morphogénèse : Essai d’une théorie générale des modèles”, Paris: Éditions de la Recherche Scientifique [2nd ed., Éditions de la Recherche Scientifique, 1977]. *Structural Stability and Morphogenesis: Outline of a general theory of models*, D.H. Fowler, Trans. Reading: Benjamin, 1975.

**Thom, R., (1974)**, “Modèles mathématiques de la morphogénèse. Recueil de textes sur la théorie des catastrophes et ses applications”, Paris : U.G.E. 10/18 [2nd ed. Paris: Christian Bourgeois, 1980]. *Mathematical Models of Morphogenesis*, W.M., Brookes & D., Rand, Trans. Chichester : Ellis Horwood, 1983.

**Thom, R., (1991)**, “Prédire n’est pas expliquer”, interview by E. Noel. Paris: Eshel.

**Tjøstheim, D. et Auestad, B., (1994)**, “Nonparametric identification of nonlinear time series: projections”, *J. Amer. Statis. Assoc.* 89, pp. 1398-1409.

**Tong, H., (1983)**, “Threshold models in nonlinear time series analysis”, *Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New York*.

**Tong, H., (1989)**, “On the effect of noise on Lyapunov exponents”, *Techn. Report, Kent*.

## Bibliographie

- Tong, H., (1990)**, “Nonlinear time series: a dynamic systems approach”, *Oxford University Press, Oxford*.
- Tong, H., (1995)**, “A personal overview of non-linear time series analysis from a chaos perspective”, *Scandinavian Journal of Statistics* 22, pp. 399-445.
- Tong, H. et Lim, K.S., (1980)**, “Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 42, pp. 245-292.
- Torre, V., (1977)**, “Existence of limit cycles and control in complete Keynesian system by theory of bifurcation”, *Econometrica*, 45, pp. 1457-1466.
- Trulla, L.L., Giuliani, A., Zbilut, J.P., et Webber, C.L.Jr., (1996)**, “Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients”, *Physics Letters A*, 223(4), pp. 255-260.
- Tsay, R.S., (1986)**, “Nonlinearity test for time series”, *Biometrika*, vol. 73(2), pp. 461-466.
- Tsay, R.S., (1989)**, “Testing and modelling threshold autoregressive processes”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84, pp. 231-240.
- Tsay, R.S., (1998)**, “Testing and modelling multivariate threshold models”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 93, pp. 1188-1202.
- Tschernig, R., (2004)**, “Nonparametric time series modelling”, in H. Lütkepohl and M. Krätzig (eds), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Tschernig, R. et Yang, L., (2000)**, “Nonparametric lag selection for time series”, *Journal of Time Series Analysis* 21(4), pp. 457-487.
- Tse, Y.K. et Tsui, A.K., (2002)**, “A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations”, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, pp. 351-362.
- Tuy, H.A., (1985)**, “A general deterministic approach to global optimization via d.c. programming”, *Mathematics for Optimization, Elsevier Sci. Publishers*, pp. 273-303.
- Uctum, R., (2007)**, “Économétrie des modèles à changements de régimes: un essai de synthèse”, *L'Actualité Économique-Revue d'Analyse Économique*, 83, n° 4, décembre, pp. 447-614.
- Van Hentenryck, P., Michel, L. et Benhamou, F., (1998)**, “Newton : Constraint programming over nonlinear constraints”, *Special Issue on Concurrent Constraint Programming*, 30(1-2), pp. 83-118.

## Bibliographie

**Van Nieuwerburgh, S. et Veldkamp, L., (2006)**, “Learning asymmetries in real business cycles”, *Elsevier*, vol. 53(4), pp. 753-772.

**Varian, H.R., (1979)**, “Catastrophe theory and the business cycle”, *Economic Inquiry*, 17, pp. 14-28.

**Velupillai, K.V., (2005)**, “Computability, complexity and constructively in economic analysis”, *Victoria: Blackwell*.

**Venditi, A., (1996)**, “Croissance optimale et fluctuations endogènes”, *Revue d'économie Politique*, 106, pp.791-842.

**Venditti A., Cartigny P., (1994)**, “Turnpike theory: Some new results on the saddle point property of equilibria and on the existence of endogenous cycles”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, n° 18, pp. 957-974.

**Venditti A., P. Michel, (1996)**, “Croissance optimale et cycles dans le modèle à générations imbriquées : un exemple”, *Revue Economique*, Vol. 47, n° 3, pp. 487-497.

**Venditti A., Nishimura, K. et Yano, M., (2006)**, “Endogenous fluctuations in two-country models”, *Japanese Economic Review*, Vol. 57, n° 4, pp. 516-532.

**Verbrugge, R., (1997)**, “Investigating cyclical asymmetries”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 2(1), pp. 15-22.

**Verses S.M., Norton J.P., (1991)**, “Structure selection for bounded-parameter models : consistency conditions and selection criterion”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36(4), pp. 474-481.

**de Vilder, R.G., (1996)**, “Complicated endogenous business cycles under gross substitutability”, *Journal of Economic Theory*, 71, pp. 416-442.

**de Vilder, R.G., (1997)**, “Endogenous business cycles”, Tinbergen Institution Research Series 96, University of Amsterdam.

**Vogelsang, T. et Perron, P., (1998)**, “Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at an unknown time”, *International Economic Review*, 39(4), pp. 1073-1100.

**Vostrikova, L.L., (1981)**, “Detection of disorder in multidimensional random processes”, *Soviet Mathematics Doklady*, 24, pp. 55-59.

**Vougas, D., (2004)**, “Unit roots and (deterministic) smooth transitions II”. *Mimeo, University of Wales Swansea*.



## Bibliographie

- 
- de Vroey, M. et Malgrange, P., (2006)** “La théorie et la modélisation macroéconomiques, d’hier à aujourd’hui”. *P.S.E., Working Paper, N°2006-33.*
- Wallis, K.F., (2002),** “Chi-squared tests of interval and density forecasts, and the Bank of England’s fan charts”, *International Journal of Forecasting*, 19, pp. 165-175.
- Wallis, K.F., (2005),** “Combining density and interval forecasts : A modest proposal”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 67(supplement), pp. 983-994.
- Walker, D.M. et Mees, A.I., (1998),** “Reconstructing nonlinear dynamics by extended Kalman filtering”, *int. Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(3), pp. 557-570.
- Walter, E. et Kieffer, M., (2003),** “Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation”, *in Proceeding 13<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification*, pp. 259-270.
- Walter, E. et Kieffer, M., (2006),** “Sur quelques idées fausses ayant des conséquences en identifications”, *in JIME'2006, Poitiers.*
- Walster, G.W., (1988),** “Philosophy and practicalities of interval arithmetic”, *in Reliability in Computing*, Morre, R.E., (eds), pp. 309-323. *Academic Press, Inc. San Diego, C.A.*
- Watson, G., (1964),** “Applied linear regression”, *Sankhya, Series A(26)*, pp. 359-372.
- Westerhoff, F., (2006a),** “Samuelson’s multiplier-accelerator model revisited”, *Applied Economics Letters* 13, pp. 89-92.
- Westerhoff, F., (2006b),** “Nonlinear expectation formation, endogenous business cycles and Stylized facts”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 10, Issue 4, Article 4, pp. 1-15.
- Westlund, A. et Öhlén, S., (1991),** “On testing for symmetry in business cycles”, *Empirical Economics*, 16, pp. 479-502.
- White, H., (1994),** “Estimation, inference, and specification analysis”, *Cambridge, Cambridge University Press.*
- White, H., (2006),** “Approximate nonlinear forecasting methods”, in Elliott G., Granger, C.W.J. and Timmermann, A., eds., *Handbook of Economic Forecasting*, Amsterdam: Elsevier, vol. 1, pp. 459-512.
- White, H. et Domowitz, I., (1984),** “Nonlinear regression with dependent observations”, *Econometrica Theory* 52, pp. 143-161.

- Winters, P.R., (1960)**, “Forecasting sales by exponentially weighted moving averages”, *Management Science* 6, pp. 324-342.
- Witt, U., (2004)**, “On the proper interpretation of ‘evolution’ in economics and its implications for production theory”, *Journal of Economic Methodology* 11, pp. 125-146.
- Wold, H., (1954)**, “A study in the analysis of stationary time series”, *Uppsala. Almqvist and Wicksell*.
- Wolff, R.L., (1992)**, “Local Lyapunov exponents : Looking closely at chaos”, *J. Roy. Statist. Soc. Ser., B. 54*, pp. 353-371.
- Wolff, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. et Vastano, J.A., (1985)**, “Determining Lyapunov exponents from a time series”, *Physica D. 16*, pp. 285-317.
- Wolff, R.C., Yao, Q. et Tong, H., (2004)**, “Statistical tests for Local Lyapunov of deterministic system”, *Studies in nonlinear dynamics and Econometrics*, 8(2), pp. 174-193.
- Woodford, M., (1986)**, “Stationary Sunspot Equilibria : The case of small fluctuations around a deterministic steady state”, *document de travail, University de Columbia, New York*.
- Yao, Q. et Tong, H., (1994)**, “Quantifying the influence of initial values on nonlinear prediction”, *J. Roy. Statist. Soc., B, 56*, pp. 701-725.
- Yatchew, A., (2003)**, “Semi-parametric regression for the applied econometrician”, *Cambridge*.
- Young, L.S., (1998)**, “Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity”, *Ann. Of Math., 147*, pp. 585-650.
- Yuan, X.M., (2007)**, “The prediction-correction approach to nonlinear complementarily problems”, *European Journal of Operational Research*, 176(3), pp. 1357-1370.
- Yule, G.U., (1927)**, “On the method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer’s sunspot numbers”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, vol. 226*, pp. 267-298.
- Zakoïan, J.M., (1990)**, “Threshold heteroskedastic model”, *Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.18*, pp.931-955.
- Zarnowitz, V., (1985)**, “Recent Work on business cycle in historical perspective : A review of theories and evidence”, *The Journal of Economic Literature* 23, pp. 523-580.
- Zarnowitz, V., et Ozyildirim, A., (2006)**, “Time series decomposition and measurement of business cycles, trends and growth cycles”, *Journal of Monetary Elsevier*, 53(7), pp. 1717-1739.

---

**Zbilut, J.P. et Webber, C.L., (1992),** “Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots”, *Physics Letters A* 171, pp. 199-203.

**Zbilut, J.P., Giuliani, A. et Webber, C.L. Jr., (2000),** “Recurrence quantification analysis as an empirical test to distinguish relatively short deterministic versus random number series”, *Physics Letters A*, 267, pp. 174-178

**Zivot, E. et Andrews, D.W.K., (1992),** “Further evidence on the great crash, the oil-price shock and the unit root hypothesis,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 10(3), pp. 251-270.

**Zizza, R., (2002),** “Forecasting the industrial production index for the Euro area through forecasts for the main countries”, *Bank of Italy Temi di Discussione*, No. 411.